

UFMT

Instituto de Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



Luís Fernando dos Santos

— Março 2009 —

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Condições de contorno constantes e os sólitons ‘bright’
e ‘dark’ do modelo NLS no contexto das transfor-
mações dressing e funções τ

Dissertação apresentada ao Curso de
Pós-graduação em Física da Universi-
dade Federal de Mato Grosso como re-
quisitos necessários à obtenção do tí-
tulo de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Harold Sócrates Blas Achic*

— Março 2009 —

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao professor Harold por sua enorme paciência e competência durante todo o trabalho; pela comissão de professores do instituto que sempre lutam sem tréguas e nenhum trabalho seria feito sem tal luta; pela família com o amor dado, apoios e incentivos; aos colegas do mestrado que nunca deixaram qualquer um desanimar e sempre incentivavam a estudar, onde o ex-aluno Max José Botelho Ferreira da Silva foi de grande importância em suas contribuições ao trabalho, enquanto que Eduardo Delmondes foi fundamental na diagramação da dissertação; e à iniciativa do Governo Federal com o programa CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por suporte financeiro aos estudos durante dois anos.

Índice

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Uma visão geral de sistemas integráveis	5
2.1 Obtenção da equação de <i>sine-Gordon</i> de um modelo da mecânica clássica	5
2.2 Sistemas hamiltonianos	10
2.3 A formulação de Lax	14
2.3.1 O oscilador harmônico simples	16
2.3.2 A corrente de Toda	17
2.3.3 Involução das quantidades conservadas no formalismo de Lax	23
2.4 Formulação de Zakharov-Shabat	28
2.5 Formulação de curvatura nula	32
2.6 Formulação de curvatura nula para o modelo <i>NLS</i> em termos da álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$	32
2.7 Formulação de curvatura nula para o modelo de <i>sine-Gordon</i> em $\widehat{sl}(2)$	33
3 Sistemas integráveis e soluções sóliton	35
3.1 <i>Transformações dressing</i>	35
3.2 <i>Transformações dressing</i> e soluções de vácuo	36
3.3 As funções τ	38
4 Soluções ‘bright’ sóliton do modelo <i>NLS</i>	41
4.1 As funções τ	44
4.2 Primeiras soluções não triviais	45
4.3 Solução 1-sóliton	47
4.4 Solução 2-sólitons	49
5 Soluções ‘dark’ sóliton do modelo <i>NLS</i>	52
5.1 <i>Transformações dressing</i> para o modelo <i>NLS</i> com condições de contorno constantes	56
5.2 Soluções 1-sóliton	58
5.3 Solução 2-sóliton	62

6	Conclusões	65
A	As álgebras de Lie $su(N)$	67
B	Álgebras de Kac-Moody e algumas de suas estruturas de graduação	73
B.1	1º Exemplo: graduação homogênea para $\widehat{sl}(2)$	75
B.2	2º Exemplo: $s = (1, 1)$ para $\widehat{sl}(2)$	76
C	Cálculo de elementos de matriz usando a representação de peso máximo	78
D	Operadores de vértice homogêneos de $\widehat{sl}(2)$	81
	Referências	84

Resumo

Neste trabalho é feito um estudo de aspectos algébricos de sistemas integráveis no sentido da integrabilidade de Liouville. Em seguida, se aborda a formulação de Lax, a qual trata de sistemas que são integráveis e que evoluem não linearmente, mas que podem ser colocados em termos de um problema linear. Como exemplo, discute-se a integrabilidade da rede de Toda, um sistema (discreto) com N partículas em uma linha onde as partículas interagem exponencialmente entre suas primeiras vizinhas, com a abordagem feita por Flaschka [1], onde se escreve o sistema na formulação de Lax, cujos potenciais são dados em termos de geradores da álgebra $su(N)$.

A formulação de Lax pode ainda ser generalizada para descrever sistemas integráveis de origem discreta e contínua, o que foi o resultado de um estudo feito por Zakharov e Shabat e depois generalizado por Ablowitz, Kaup, Newell e Segur (AKNS) para descrever vários outros sistemas integráveis; esta abordagem usa um operador de Lax que é linear em ∂_x . Esta última formulação é colocada posteriormente em forma simples em termos da condição de curvatura nula. Posteriormente, mostra-se a formulação de curvatura nula para o modelo NLS.

A busca por soluções se dá por meio das transformações dressing que, por sua vez, atuam sobre os campos do modelo descritos em termos de geradores das álgebras de Kac-Moody com graduação homogênea; as transformações agem sobre os potenciais que aparecem na condição de curvatura nula preservando suas estruturas de graduação. Por fim, as soluções são obtidas com auxílio das funções τ . Calcula-se os elementos de matriz que aparecem nas expressões das funções τ por dois métodos: método das representações integráveis de peso mais alto e a representação em termos de operadores de vértice de nível um, ambas representações para as álgebras de Kac-Moody de graduação homogênea.

Especial atenção merecem as condições de contorno para os campos do modelo; assim, é descrita a solução do tipo ‘dark’ sóliton do sistema *NLS* que aparece para uma condição de contorno constante (diferente de zero) no infinito. Para tal fim, é introduzido um parâmetro afim relacionado ao parâmetro espectral do problema linear; isto é necessário para evitar a construção de folhas de Riemann, visto que aparecem funções plurívocas. Assim, o elemento de grupo ψ_{nbc}^0 associado à solução de vácuo torna-se unívoco em termos do novo parâmetro espectral afim. Isto é em contraposição à solução de tipo ‘bright’ sóliton que aparece para uma condição de contorno nula no infinito. Por sua vez, para obter esta solução não é necessário introduzir nenhum parâmetro afim, ou seja, a solução de vácuo para o elemento de grupo ψ^0 é construído no parâmetro espectral que define o sistema NLS usual. Na literatura científica recente, encontra-se que as soluções ‘bright’ e ‘dark’ sóliton aparecem nas descrições de fenômenos físicos interessantes em diversas áreas, assim como em teoria de cordas, óptica física e condensação de Bose-Einstein em matéria condensada.

Abstract

In this dissertation, we study some algebraic aspects of certain integrable systems, such that integrability is understood in the sense of Liouville. Many integrable system can be written in terms of the so-called Lax formulation. This formulation is suitable to deal with some systems which evolves nonlinearly but, in spite of this, can be associated to a linear problem. As an example, it is discussed the Toda lattice integrability, a (discrete) system with N particles on a line where the particles interact exponentially with their nearest neighborhoods. It is followed the Flaschka's approach [1], such that the Lax pair is written in terms of $su(N)$ Lie algebra valued matrices and the equation of motion is obtained from the so called Lax equation.

The Lax formulation can be generalized to describe integrable systems of discrete and continuous type, which was the result of a study done by Zakharov and Shabbat, and then generalized by Ablowitz, Kaup, Newel and Segur (AKNS) to describe many other integrable systems; this approach is made with a Lax operator which is linear in ∂_x . This last formulation is then written in a simple form in terms of a zero curvature condition. Subsequently, it is made the formulation of the zero curvature equation of the *NLS* model. In this formulation the potentials entering the zero curvature equation lie in the directions of certain generators of the affine Kac-Moody algebra.

The search of solutions is done through the dressing transformations method. These gauge transformations act on the potentials of the model such that their form and graduation structure are maintained. Each of these gauge transformations is made with the help of two different group elements. Finally, the solutions are written with the aid of the τ -functions. The matrix elements that define the τ -functions can be computed by two methods: highest weight and vertex operators representations of the Kac-Moody algebras of homegeneous graduation.

Special care deserves the non vanishing boundary conditions (NVBC) on the fields of the model; in particular the constant boundary conditions in the NLS model is associated to a 'dark'-soliton type solutions. For this, it is constructed the dressing transformation and analyzed the vacuum solution in connection to NVBC and identify an affine parameter in wich one rewrites the zero curvature equation in order to avoid the construction of the relevant Riemann sheets for a double valued function appearing in the process. Thus, the group element ψ_{nvbc}^0 associated to the vacuum solution becomes single-valued in terms of the new affine spectral parameter. This is in contra-position to 'bright' soliton solution type for a vanishing condition at infinity. In order to get this solution, it is not necessary to introduce any affine parameter, i.e., the vacuum solution to group element ψ^0 is constructed in the spectral parameter that defines the usual *NLS* model. In the recent scientific literature, the 'bright' and 'dark' soliton solutions appeared as describing interesting physical phenomena in diverse areas such as string theory, optical physics and Bose-Einstein condensation in condensed matter.

1

Introdução

A teoria dos sólitons teve início no século XIX, quando tais ondas foram observadas propagando-se na superfície da água [2]; atualmente, envolve uma grande variedade de modelos matemáticos que permitem o estudo de uma ampla quantidade de problemas que aparecem na física, tecnologia, biologia e na matemática, pura e aplicada. Observa-se na literatura científica e tópicos de conferências mais recentes a relevância crescente dos sólitons e de outros fenômenos não lineares em sistemas ópticos não lineares, dinâmica molecular, mecânica de fluidos, ondas de plasma, hidrodinâmica, eletrônica quântica, física da matéria condensada, teoria de cordas, QCD e gravitação. Estes tratamentos envolvem formulações matemáticas no contínuo e sistemas não lineares discretos, clássicos e quânticos.

Os fenômenos ondulatórios aparecem em todas as áreas da física. Uma onda pode ser entendida como a propagação de energia que pode ser no vácuo, onde se tem como exemplo ondas eletromagnéticas, e em algum meio material, onde pode-se tomar como exemplos as ondas na água, ondas em uma corda e vários outros. O modelo mais comum de propagação de uma amplitude $u(x, t)$, em uma dimensão espacial x e outra temporal t [2] e em forma ondulatória, é dado pela equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1.0.1)$$

onde c é uma constante positiva. A solução geral para esta equação diferencial é conhecida como solução de D'Alambert e é expressa em termos das variáveis $(x \pm ct)$ por

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (1.0.2)$$

onde f e g são soluções distintas. A solução (1.0.2) é de uma onda viajando para a direita e outra em sentido oposto, ambas com velocidade de propagação c ; elas podem ser determinadas para dados de fronteira, como por exemplo $u(x, 0)$ e $(\partial u / \partial t)(x, 0)$. Essas ondas não interagem entre si, o que é uma consequência de (1.0.1) ser uma equação diferencial linear; por ser uma equação diferencial linear, essas soluções podem ser superpostas, logo a combinação linear de todas as possíveis ondas também é solução. Tais ondas também não alteram sua amplitude quando se propagam; para ver isso, toma-se uma das componentes da onda, denotada por f , e faz-se uma mudança de

coordenadas $\vartheta = x - ct$, então $f(x - ct) = f(\vartheta)$ não se altera com a evolução de x e t para um valor fixo ϑ ; ou seja, $f(x)$ (em $t = 0$) tem o mesmo valor para outros valores de t , mas apenas transladado para a direita por um valor ct .

Seja agora a equação diferencial

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.0.3)$$

onde se toma de uso a notação em que, por exemplo, u_t significa $\partial u / \partial t$, u_{xxx} significa $\partial^3 u / \partial x^3$ e também será usado $\partial_x \equiv \partial / \partial x$; tomando para (1.0.3) uma solução do tipo harmônica

$$u(x, t) = e^{i(kx - wt)}, \quad (1.0.4)$$

por substituição direta em (1.0.3), a equação (1.0.4) será sua solução se a frequência w for dada por

$$w = k - k^3, \quad (1.0.5)$$

onde k é o número de onda; o argumento da exponencial de (1.0.4), com a frequência w dada em (1.0.5), será

$$kx - wt = k(x - (1 - k^2)t);$$

logo, a solução em (1.0.4) com a frequência (1.0.5) descreve uma onda que se propaga com velocidade

$$c = \frac{w}{k} = 1 - k^2, \quad (1.0.6)$$

o que significa que a velocidade de cada onda será função de k ; isso ainda implica que ondas com números de onda k diferentes têm velocidades diferentes: isso caracteriza o que se chama de uma *onda dispersiva*. Para aumentar a generalidade, pode-se integrar as soluções de onda $u(x, t)$ sobre todos os valores de k , ou seja

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - w(k)t)} dk, \quad (1.0.7)$$

onde $A(k)$ é obtido por uma transformada de Fourier [3] de $u(x, 0)$. O resultado disso é de um perfil de onda que muda seu tamanho em seu movimento, pois suas componentes viajam a velocidades diferentes, indicando um perfil de onda dispersiva. A velocidade de cada onda é dada por (1.0.6) e é chamada de velocidade de fase. A onda em (1.0.7) tem velocidade v_g , denominada *velocidade de grupo* e que determina a velocidade do pacote de ondas, definida por

$$v_g = \frac{dw}{dk}, \quad (1.0.8)$$

mas com (1.0.5), tem-se

$$\frac{dw}{dk} = 1 - 3k^2. \quad (1.0.9)$$

Um outro fator envolvido no aspecto do perfil das ondas é conhecido como *não linearidade*; a não linearidade está na maioria dos casos reais, por exemplo, em uma corda (ver tratamento em [3]), a equação da onda tem a forma de (1.0.1), mas para isso foi feita uma aproximação ao restringir que as amplitudes de oscilação fossem pequenas. Um caso relativamente simples de não linearidade [4] é da equação diferencial parcial não linear

$$u_t + (1 + u)u_x = 0. \quad (1.0.10)$$

Equações não lineares (como exemplo (1.0.10)) são de solução bem mais complicadas, pois apresentam ambiguidades (dados possíveis valores para $x = x_0$ e $t = t_0$ pode haver não unicidade no valor de $u(x_0, t_0)$, descaracterizando u como função), descontinuidades e ainda possuem soluções que não podem ser superpostas. Para ver que em (1.0.10) as soluções não podem ser superpostas, basta tomar duas possíveis soluções, u_1 e u_2 , então

$$\begin{aligned} \partial_t(u_1 + u_2) + (1 + u_1 + u_2)\partial_x(u_1 + u_2) &= \partial_t u_1 + (1 + u_1)\partial_x u_1 + \partial_t u_2 + (1 + u_2)\partial_x u_2 \\ &\quad + u_2 \partial_x u_1 + u_1 \partial_x u_2. \end{aligned}$$

Além destes, ainda existem casos físicos em que se obtêm uma equação diferencial que é tanto dispersiva quanto não linear, como exemplo, a equação

$$u_t + (1 + u)u_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.0.11)$$

Esta é a conhecida equação de *KdV*, desenvolvida por *Korteweg* e *de Vries* [2] para descrever ondas solitárias observadas pelo engenheiro naval *Scott Russel* no canal de Edimburgo¹.

Outra equação não linear e dispersiva é a conhecida *Equação de Schrödinger não linear*, chamada de NLS, que é

$$\psi_t = -2ik|\psi|^2\psi + i\psi_{xx}, \quad (1.0.12)$$

onde o conjugado complexo desta equação também tem a mesma forma. A equação NLS tem várias aplicações em física, como por exemplo em [5] óptica e propagação do campo elétrico em fibras ópticas de auto-focalização (“self-focusing”).

Outra equação não linear é a equação de *sine-Gordon*, dada em coordenadas do cone de luz $x_{\pm} = x \pm t$, por

$$\partial_{x_+x_-}\phi \equiv \partial_{+-}\phi = \text{sen } \phi. \quad (1.0.13)$$

Esta equação aparece, entre vários exemplos, em fenômenos de teoria quântica de campos não perturbativa [6] e em um modelo mecânico de pêndulos em um tubo de borracha [7]; este último modelo é obtido na seguinte seção.

¹Os índios deveriam ter conhecimento de ondas assim muito antes, como por exemplo a pororoca no Rio Amazonas, sem contar de civilizações ainda mais antigas em outras partes do mundo.

A dissertação está organizada como se segue: no capítulo 2, serão discutidos os conceitos de integrabilidade na abordagem de Liouville e será apresentado o método de Lax. Estes dois temas são usados para discutir a integrabilidade da rede de Toda; em seguida se mostra a formulação de primeira ordem, que é uma generalização do método de Lax e posteriormente a formulação de curvatura nula. No capítulo 3, se aborda as soluções de sistemas integráveis com o método das *transformações dressing*; tais transformações ligam soluções de vácuo a soluções que não são as triviais; e define-se as funções τ , que auxiliam a obter as soluções sóliton. No capítulo 4 são obtidas soluções ‘bright’ sóliton do modelo NLS. No capítulo 5 é discutido uma variação do modelo NLS adequada para estudar condições de contorno constantes, permitindo que se obtenha soluções conhecidas como *dark* soliton. No apêndice A, define-se as álgebras de Lie $su(N)$ e como exemplo especial, que será usado no capítulo 2 para a rede de Toda, o caso $su(3)$. No apêndice B, são discutidas as estruturas de graduação para as álgebras de Kac-Moody, dando como exemplo as graduações homogênea e principal; a estrutura de graduação de uma álgebra de Kac-Moody é de importância fundamental na definição da *representação integrável de peso mais alto*. No apêndice C, são calculados alguns elementos de matriz usando a representação de peso mais alto. No apêndice D, define-se a representação das álgebras de Kac-Moody em termos dos operadores de vértice de nível um.

2

Uma visão geral de sistemas integráveis

Como motivação do aparecimento de um sistema integrável associado a um problema físico é apresentada a derivação do modelo de *sine-Gordon* num sistema mecânico clássico que consta de pêndulos com hastes de massa desprezível acoplados em um tubo de borracha e que começa a oscilar em grandes amplitudes; e, em seguida, é dado um ansatz para obtenção de algumas soluções particulares do sistema. Neste capítulo se mostra também o critério de integrabilidade sob o ponto de vista de Liouville, onde um sistema é integrável se suas equações de movimento puderem ser resolvidas por meio de *quadraturas*. Para isso, o número de quantidades conservadas do sistema deve ser igual ao número de seus graus de liberdade; mais ainda: essas quantidades conservadas devem estar em involução e ser linearmente independentes. O formalismo de Lax, também trabalhado neste capítulo, mostra-se de grande valor ao facilitar a forma em que se obtém as quantidades conservadas de algum sistema que pode ser escrito sob este formalismo. O objetivo apresentado neste capítulo é, além de mostrar que a rede de Toda é um sistema integrável, mostrar também o formalismo generalizado de Zakharov-Shabat, que permite uma descrição unificada de sistemas integráveis de naturezas distintas; este último formalismo pode ser descrito em termos da *condição de curvatura nula*.

2.1 Obtenção da equação de *sine-Gordon* de um modelo da mecânica clássica

Um dos casos clássicos em que se obtém a equação de *sine-Gordon* se dá em um sistema físico relativamente simples [7]: consta de um tubo cilíndrico de borracha com constante de rigidez G onde há uma distribuição de pêndulos com massa m ligados por hastes de massa desprezível; aplica-se então um torque \vec{M}_1 em uma direção e depois disso o sistema começa a oscilar com grandes amplitudes.

Pela lei de Hooke, tem-se

$$T = G\alpha, \tag{2.1.1}$$

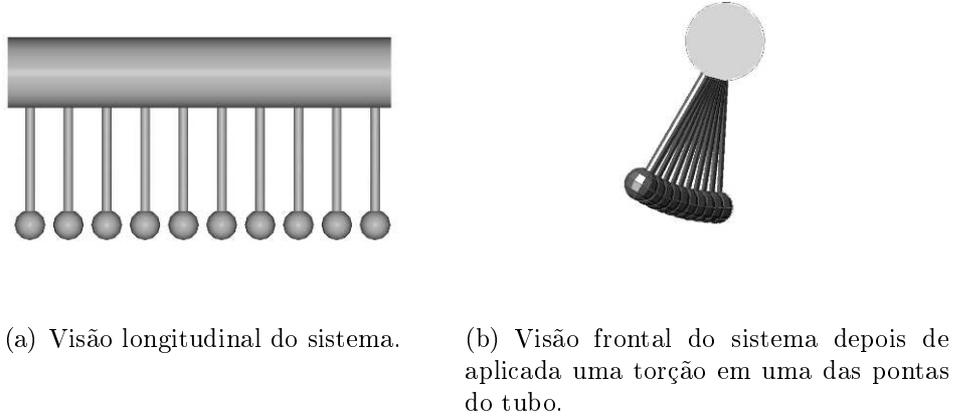


Figura 2.1: O sistema descrito pela equação de *sine-Gordon*.

onde T é o módulo da tensão¹ na secção transversal, α é o ângulo de torção transversal e G é a constante de rigidez do tubo (conferir Figura (2.2(a))).

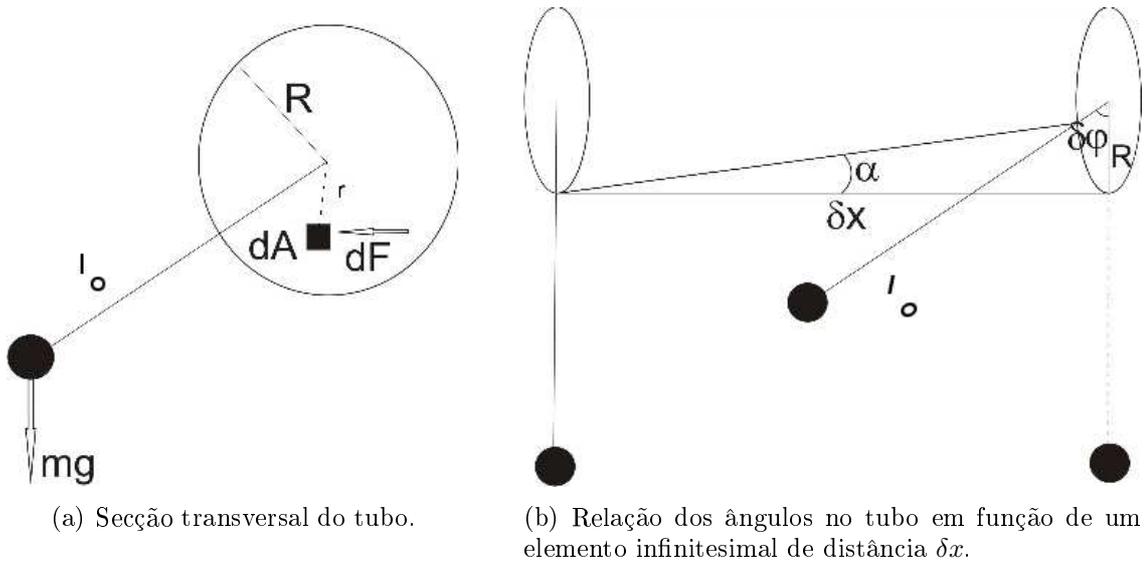


Figura 2.2: A relação entre os ângulos e forças no tubo.

A relação entre os ângulos da secção transversal (conferir figura 2.2(b)) do cilindro e de torção do mesmo é dada por

$$\alpha \delta x' = r \delta \phi, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (2.1.2)$$

De (2.1.1) e (2.1.2), tem-se a equação

$$T = Gr \frac{\delta \phi}{\delta x'}. \quad (2.1.3)$$

¹Tensão pode ser entendida como a taxa de variação da força sobre um elemento de área, ou seja, $T = dF/dA$.

Como

$$T = \frac{dF}{dA},$$

onde dA é o elemento da área da secção transversal do cilindro; tem-se para (2.1.3) que

$$\frac{dF}{dA} = Gr \frac{\delta\phi}{\delta x'}. \quad (2.1.4)$$

Multiplicando (2.1.4) por r e passando o elemento de área dA para o outro lado da igualdade, vem que

$$rdF = Gr^2 dA \frac{\delta\phi}{\delta x'}. \quad (2.1.5)$$

Nota-se que a quantia $\delta\phi/\delta x'$ é independente da área da secção transversal do tubo; por isso, integrando (2.1.5) em toda a área da secção transversal, tem-se

$$rF = GJ \frac{\delta\phi}{\delta x'}, \quad J = \int_A r^2 dA. \quad (2.1.6)$$

A quantia rF é nada mais que o módulo do torque \vec{M}_1 , pois o ângulo envolvido é $\pi/2$; isso ocorre pelo motivo da força \vec{F} aplicada para torcer o cilindro ser perpendicular a \vec{r} ; assim, pode-se escrever

$$M_1 = GJ \frac{\delta\phi}{\delta x'}, \quad (2.1.7)$$

de modo que

$$\delta M_1 = GJ \delta \left(\frac{\delta\phi}{\delta x'} \right). \quad (2.1.8)$$

Por outro lado, o torque \vec{M}_2 de ação de cada pêndulo tem como módulo

$$|\vec{M}_2| = F_2 r_2 = mg(R + l_0) \text{sen}\phi, \quad (2.1.9)$$

tal que, assumindo que os pêndulos se distribuem de forma contínua, pode-se fazer $\delta m = \mu \delta x'$, onde μ é a densidade de massa dos pêndulos em função do comprimento do cilindro; desta forma, pode-se fazer

$$\delta M_2 = \mu \delta x' g (R + l_0) \text{sen}\phi. \quad (2.1.10)$$

Como os módulos de vetores podem ser somados linearmente, vem que o módulo do torque total δM é dado por

$$\delta M = \delta M_1 - \delta M_2,$$

e então

$$\delta M = GJ\delta \left(\frac{\delta\phi}{\delta x'} \right) - \mu\delta x'g(R + l_0)\text{sen}\phi. \quad (2.1.11)$$

Da mecânica clássica, vem que

$$\delta I\theta = \delta M \quad (2.1.12)$$

onde I é o momento de inércia do sistema e $\theta = \partial^2\phi/\partial(t')^2$, ou simplesmente $\partial_{t't'}\phi$, é a aceleração angular; logo, (2.1.11) resulta em

$$\delta I\partial_{t't'}\phi = GJ\delta \left(\frac{\delta\phi}{\delta x'} \right) - \mu\delta x'g(R + l_0)\text{sen}\phi. \quad (2.1.13)$$

Notando que o momento de inércia é uma função de x' , ou seja, o momento de inércia para cada pêndulo varia em função do comprimento do cilindro, pode-se escrever que $\delta I = K\delta x'$, o que resulta, em (2.1.13),

$$K\delta x'\partial_{t't'}\phi = GJ\delta \left(\frac{\delta\phi}{\delta x'} \right) - \mu\delta x'g(R + l_0)\text{sen}\phi. \quad (2.1.14)$$

Dividindo tudo por $\delta x'$ e levando a relação ao limite quando $\delta x' \rightarrow 0$, tem-se a relação

$$\partial_{t't'}\phi = \frac{GJ}{K}\partial_{x'x'}\phi - \frac{\mu}{K}g(R + l_0)\text{sen}\phi. \quad (2.1.15)$$

Usando uma mudança de coordenadas tal que o sistema permaneça invariante, que é

$$x' = \sqrt{\frac{GJ}{\mu(R + l_0)}}x \quad \text{e} \quad t' = \sqrt{\frac{K}{\mu(R + l_0)}}t \quad (2.1.16)$$

vem que

$$\partial_{tt}\phi - \partial_{xx}\phi = \text{sen}\phi. \quad (2.1.17)$$

Esta é a equação de *sine-Gordon*, que aqui foi obtida para um modelo da mecânica clássica.

Pode-se dar um “ansatz” para a equação de *sine-Gordon*; usando o ansatz em que se sugere uma solução de variáveis separáveis

$$\phi(x, t) = 4 \tan^{-1} \left(\frac{\varepsilon(x)}{\psi(t)} \right), \quad (2.1.18)$$

sabendo da identidade

$$\tan^{-1} \theta = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\theta} \right) & \theta < 0 \\ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\theta} \right) & \theta > 0 \end{cases}, \quad (2.1.19)$$

e substituindo na equação diferencial (2.1.17), tem-se que

$$\frac{\psi^2}{\varepsilon}\varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon^2}{\psi}\psi_{tt} = (\psi^2 + 2\psi_t^2 - \psi\psi_{tt}) + (-\varepsilon^2 + 2\varepsilon_x^2 - \varepsilon\varepsilon_{xx}). \quad (2.1.20)$$

Pode-se separar as equações derivando ambos os lados por x e t , onde facilmente se chega em

$$\frac{\varepsilon_{xxx}}{\varepsilon^2\varepsilon_x} - \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon^3} = -\frac{\psi_{ttt}}{\psi^2\psi_t} + \frac{\psi_{tt}}{\psi^3}. \quad (2.1.21)$$

Como foi admitido no ansatz, as variáveis são separáveis, e por isso pode-se fazer

$$\frac{(\varepsilon_{xx}/\varepsilon)_x}{\varepsilon\varepsilon_x} = -\frac{(\psi_{tt}/\psi)_t}{\psi\psi_t} = -6k^2, \quad (2.1.22)$$

ou ainda

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon} \right) = -6k^2\varepsilon_x\varepsilon, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi_{tt}}{\psi} \right) = 6k^2\psi\psi_t \quad (2.1.23)$$

o que dá, integrando diretamente, as relações

$$\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon} = -3k^2\varepsilon^2 + m \quad \text{e} \quad \frac{\psi_{tt}}{\psi} = 3k^2\psi^2 + \sqrt{m^2 - 1}, \quad (2.1.24)$$

onde m e $\sqrt{m^2 - 1}$ são constantes de integração. Depois disso, ainda se pode fazer

$$\varepsilon_{xx} = -3k^2\varepsilon^3 + m\varepsilon \quad \psi_{tt} = k^2\psi^3 + \sqrt{m^2 - 1}\psi \quad (2.1.25)$$

que, integrando mais uma vez [8], dá as relações

$$\varepsilon_x = k^2\varepsilon^3 + m\varepsilon + n^2 \quad (2.1.26)$$

$$\psi_x = k^2\psi^3 + \sqrt{m^2 - 1}\psi \quad (2.1.27)$$

As relações (2.1.26) e (??) estão ligadas a funções elípticas incompletas de primeira ordem, entretanto, fazendo para os casos mais simples, onde $k = n = 0$, tem-se as soluções

$$\varepsilon(x) = e^{mx} \quad \text{e} \quad \psi(t) = e^{t\sqrt{m^2 - 1}}, \quad (2.1.28)$$

o que faz resultar em (2.1.18) que

$$\phi(x, t) = 4 \tan^{-1} \left(e^{m \left(x - \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m} t \right)} \right), \quad (2.1.29)$$

ou, se $\beta = \sqrt{m^2 - 1}/m$, tem-se

$$\phi(x, t) = 4 \tan^{-1} \left(\exp \left(\frac{x - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right). \quad (2.1.30)$$

Outras soluções são

$$\phi(x, t) = 4 \tan^{-1} \left(\frac{\beta \sinh(\beta m x)}{\cosh(\beta m x)} \right) \quad \text{se } k = 0 \text{ e } m^2 < 1;$$

e

$$\phi(x, t) = 4 \tan^{-1} \left(\frac{1 \operatorname{sen}(m\beta^2 t)}{\beta \cosh(mx)} \right) \quad \text{se } m \neq 0, \quad n = 0 \text{ e } m^2 < 1.$$

Será de uso mais adiante o tratamento do modelo de *sine-Gordon* nas coordenadas de cone de luz: fazendo uma transformação de coordenadas $x_- = 1/2(x - t)$ e $x_+ = 1/2(x + t)$ e pela regra da cadeia, deve-se ter agora

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial x_-}{\partial x} \partial_{x_-} + \frac{\partial x_+}{\partial x} \partial_{x_+} = \frac{1}{2} (\partial_{x_-} + \partial_{x_+}) \quad \text{e} \\ \partial_t &= \frac{\partial x_-}{\partial t} \partial_{x_-} + \frac{\partial x_+}{\partial t} \partial_{x_+} = \frac{1}{2} (\partial_{x_-} - \partial_{x_+}), \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \partial_{xx} &= \frac{1}{4} (\partial_{++} + 2\partial_{+-} + \partial_{--}) \\ \partial_{tt} &= \frac{1}{4} (\partial_{++} - 2\partial_{+-} + \partial_{--}). \end{aligned}$$

Com essa mudança de coordenadas, se tem agora para (2.1.17) a relação

$$\partial_{+-} u = \operatorname{senu}. \quad (2.1.31)$$

2.2 Sistemas hamiltonianos

Os passos que seguem são na direção de definir o critério de integrabilidade de Liouville; muitos destes sistemas são estudados mediante a formulação hamiltoniana, portanto apresenta-se alguns conceitos dessa formulação. Seja um sistema descrito por uma lagrangeana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T - V$, onde T é a energia cinética do sistema, enquanto que V é a energia potencial; assim, tal sistema tem equações de movimento dadas pelas equações de Euler-Lagrange [9]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad (2.2.1)$$

gerando n equações diferenciais de segunda ordem e onde define-se o momento canônico conjugado por

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.2)$$

Pode-se fazer uma *transformada de Legendre* nas coordenadas canônicas conjugadas (q, p) , dada por

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (2.2.3)$$

tal que, da equivalência entre as derivadas totais dos dois lados de (2.2.3) e com o auxílio de (2.2.2), encontra-se:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \partial_t \mathcal{H} = -\partial_t \mathcal{L}. \quad (2.2.4)$$

As chamadas *equações canônicas de Hamilton*, são dadas pelas duas primeiras dessas equações em (2.2.4). Seja $F(q, p, t)$ um variável dinâmica qualquer, então

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \partial_t F; \quad (2.2.5)$$

definindo o colchete de Poisson

$$\{F, \mathcal{H}\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right), \quad (2.2.6)$$

tem-se então que uma variável dinâmica $F(q, p, t)$ qualquer pode ser escrita como

$$\dot{F} = \{F, \mathcal{H}\} + \partial_t F. \quad (2.2.7)$$

No caso de variáveis dinâmicas que não dependem explicitamente do tempo, como por exemplo q_i e p_i , tem-se

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, \mathcal{H}\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, \mathcal{H}\}. \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Diz-se que uma quantidade E está em involução quando $\{E, \mathcal{H}\} = 0$.

Sejam F e G duas variáveis dinâmicas quaisquer, então

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q}, \quad (2.2.9)$$

onde, para F , G , e J variáveis dinâmicas quaisquer, verifica-se as propriedades de anti-comutatividade e bilinearidade, além das propriedades de Leibiniz: $\{F, GJ\} = \{F, G\}J + G\{F, J\}$; e a de Jacobi: $\{F\{G, J\}\} = \{\{F, G\}J\} + \{G\{F, J\}\}$. Os colchetes de Poisson para as variáveis canônicas q_i e p_i são

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0; \quad \{q_i, p_j\} = -\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}. \quad (2.2.10)$$

Pode-se escrever, com $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ e com a ajuda de (2.2.4), que

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \partial\mathcal{H}/\partial q \\ \partial\mathcal{H}/\partial p \end{pmatrix}, \quad (2.2.11)$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.2.12)$$

e $\mathbf{0}$ é a matriz $n \times n$ cujos elementos são todos nulos além de que \mathbb{I} é a matriz identidade, também $n \times n$; a matriz quadrada J ($2n \times 2n$) pode ser escrita em termos dos colchetes em (2.2.10) por

$$J = \begin{pmatrix} \{q_1, q_1\} & \dots & \{q_1, q_n\} & \{q_1, p_1\} & \dots & \{q_1, p_n\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{q_n, q_1\} & \dots & \{q_n, q_n\} & \{q_n, p_1\} & \dots & \{q_n, p_n\} \\ \{p_1, q_1\} & \dots & \{p_1, q_n\} & \{p_1, p_1\} & \dots & \{p_1, p_n\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{p_n, q_1\} & \dots & \{p_n, q_n\} & \{p_n, p_1\} & \dots & \{p_n, p_n\} \end{pmatrix}. \quad (2.2.13)$$

Com (2.2.13) e tomando $\zeta = (q, p) = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$, se escreve (2.2.11) em termos de componentes como sendo

$$\dot{\zeta}^i = J^{ik} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\zeta^k}, \quad (2.2.14)$$

onde J^{ik} são as componentes da matriz J . O colchete de Poisson para duas variáveis dinâmicas S_{ij} e S_{kl} pode ser escrito, nesta notação, por

$$\{S_{ij}, S_{kl}\} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial\zeta^p} \frac{\partial S_{kl}}{\partial\zeta^q} \{\zeta^p, \zeta^q\}. \quad (2.2.15)$$

O espaço onde um sistema hamiltoniano é descrito é chamado de *espaço de fase*, que é $2n$ -dimensional; o estado de um sistema em um tempo t_0 é representado por um ponto no espaço de fase.

Seja R uma região no espaço de fase (q, p) que é mapeada para uma região R' do espaço de fase (Q, P) por uma transformação canônica [9]; seja também Ω o volume da região R , de modo que

$$\Omega = \int_R dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 dp_2 \dots dp_n \equiv \int_R d^{2n}z$$

e da mesma forma, seja Ω' o volume da região R' , onde

$$\Omega' = \int_{R'} dQ'_1 dQ'_2 \dots dQ'_n dP'_1 dP'_2 \dots dP'_n \equiv \int_{R'} d^{2n}\zeta,$$

então $\Omega = \Omega'$. De fato, pois do teorema de mudança de variáveis aplicado a transformações canônicas

$$\Omega' = \int_{R'} d^{2n}\zeta = \int_R |\mathbb{M}| d^{2n}z$$

onde \mathbb{M} é a matriz jacobiana da transformação de coordenadas $\zeta_i \rightarrow z_i$ e é definida por

$$\mathbb{M} = \frac{\partial(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\zeta_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial\zeta_1}{\partial z_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\zeta_{2n}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial\zeta_{2n}}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix},$$

tem-se para o “volume” no espaço de fase que

$$\Omega = \int_R dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 dp_2 \dots dp_n,$$

mas como o determinante da matriz jacobiana \mathbb{M} de uma transformação canônica (ver teoremas (8.3.1) e (8.3.2) de [9]) é ± 1 , tem-se

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_{R'} |\mathbb{M}| dQ'_1 dQ'_2 \dots dQ'_n dP'_1 dP'_2 \dots dP'_n, \\ &= \Omega'. \end{aligned}$$

A noção de integrabilidade de um sistema está ligada com a possibilidade de solução explícita de suas equações de movimento. Como exemplo, considera-se um sistema mecânico unidimensional qualquer, onde a energia total E do sistema é uma quantidade conservada, assumida como $E = T + V$ onde T é energia cinética e $V = V(x)$ é a energia potencial, logo

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E,$$

de modo que a equação de movimento é dada por

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

e a solução $x(t)$ vai depender da forma de $V(x)$.

Definição 2.2.1. *Um sistema Hamiltoniano conservativo com n graus de liberdade é dito integrável se existem n constantes de movimento independentes e em involução, ou seja*

1. $\{F_i, \mathcal{H}\} = 0$,
2. $\{F_i, F_j\} = 0$,

3. ∇F_i são linearmente independentes em cada ponto do espaço de fase (p, q) , $\forall i, j = 1, \dots, n$.

Teorema 2.2.1. (*Teorema de Liouville-Arnold*) *Seja um sistema hamiltoniano integrável com n graus de liberdade, então*

1. *Existem variáveis canônicas $(\phi_1, \dots, \phi_n, J_1, \dots, J_n)$ tais que $\mathcal{H} = \mathcal{H}(J_1, \dots, J_n)$, de modo que a solução das equações de movimento nas variáveis é*

$$J_k = cte; \quad \phi_k = \phi_k(0) + \omega_k t, \quad 1 \leq k \leq n,$$

onde $\omega_k = \partial\mathcal{H}/\partial J_k$ é constante;

2. *As equações de Hamilton nas variáveis originais (q, p) podem ser resolvidas por quadraturas;*
3. *Se o conjunto das hipersuperfícies de nível das constantes de movimento em evolução F_k , definido por*

$$M_c = \{(q, p) | F_k(q, p) = c_k, 1 \leq k \leq n\},$$

é compacto e conexo, as variáveis canônicas (J, ϕ) podem ser escolhidas como variáveis de ação-ângulo e o movimento é multiperiódico com frequência $\omega_k = \partial\mathcal{H}/\partial J_k$.

A demonstração deste teorema é vista em [9] e mais explicitamente em [10].

2.3 A formulação de Lax

A formulação de Lax tem a idéia de descrever equações que evoluem não linearmente em termos de um **operador linear** que seja iso-espectral, ou seja, um operador cujos autovalores sejam constantes durante a evolução não linear. O tratamento a seguir é apresentado na referência [12]. Como exemplo, seja uma equação de evolução linear descrito por um operador hamiltoniano \mathcal{H} (que é hermiteano) independente do tempo t ; um operador linear $A(t)$ cujos autovalores sejam independentes do tempo deve ser, na abordagem de Heisenberg, unitariamente equivalente a $A(0)$, ou seja:

$$U^\dagger(t)A(t)U(t) = A(0), \tag{2.3.1}$$

$$U(t) = e^{-i\mathcal{H}t}, \tag{2.3.2}$$

diferenciando (2.3.1) com respeito a t , encontra-se

$$\partial_t A = i[A(t), \mathcal{H}], \tag{2.3.3}$$

onde

$$\partial_t U(t) = -i\mathcal{H}U(t) \equiv B(t)U(t) \tag{2.3.4}$$

e $B \equiv -i\mathcal{H}$ é um operador anti-hermiteano. Para o caso não linear, seja

$$L(u(x, t')) = L(t') \quad (2.3.5)$$

o operador linear em $u(x, t)$ que se procura; assume-se que este seja hermiteano e que seus autovalores sejam independentes de t' (t' não é necessariamente o tempo). Para que isso seja verdade, deve existir um operador unitário $U(t')$ tal que

$$U^\dagger(t')L(t')U(t') = L(0). \quad (2.3.6)$$

Diferenciando (2.3.6) com respeito a t' , encontra-se

$$\frac{\partial U^\dagger(t')}{\partial t'}L(t)U(t') + U^\dagger(t')\frac{\partial L(t')}{\partial t'}U(t') + U^\dagger(t')L(t)\frac{\partial U(t')}{\partial t'} = 0. \quad (2.3.7)$$

A diferença desse caso para o linear é que $U(t')$, mesmo sendo unitário, ainda tem forma indeterminada; se $U(t')$ é unitário, então $U^\dagger(t')U(t') = \mathbb{I}$, logo $\partial_{t'}U^\dagger(t')U(t') + U^\dagger(t')\partial_{t'}U(t') = 0$; pode-se escrever, como em (2.3.4), que

$$\frac{\partial U(t')}{\partial t'} = B(t')U(t'), \quad (2.3.8)$$

onde $B(t)$ é um operador que precisa ser anti-hermiteano. Substituindo (2.3.8) em (2.3.7), encontra-se

$$\partial_{t'}L(t') = [B(t'), L(t')]. \quad (2.3.9)$$

Assim, se $L(t)$ for um operador iso-espectral, ele deve satisfazer a uma relação semelhante à do caso linear, mas com a diferença de que não se sabe a forma de $B(t)$. Se $L(t)$ é um operador linear em $u(x, t)$, vem que $\partial_t L(t)$ também deve ser linear em $u(x, t)$ com a proporcionalidade de uma constante multiplicativa; com isso, de (2.3.9), se observa que $[B(t'), L(t')]$ é um operador multiplicativo que é proporcional à evolução (espectral) de $u(x, t)$. Além do mais, se é possível encontrar um operador linear $L(t)$ e outro operador $B(t)$, que por sua vez não seja necessariamente linear em $u(x, t)$, e tal que $[B(t'), L(t')]$ é um operador multiplicativo e proporcional à evolução de $u(x, t)$ por uma equação não linear, então os autovalores de $L(t)$ serão independentes do parâmetro t ; isto é, no caso em que

$$L(t)\psi(t) = -\lambda\psi(t), \quad (2.3.10)$$

com $\psi(t) = U(t)\psi(0)$, a evolução em t teria, de (2.3.8), a forma

$$\partial_t\psi(t) = \partial_t U(t)\psi(0) = B(t)\psi(t). \quad (2.3.11)$$

Quando os operadores L e B existem para um sistema, são conhecidos como o par de Lax para o sistema com uma evolução não linear e eles têm uma importância fundamental no estudo da integrabilidade de um sistema.

Definindo as quantidades

$$K_n = \frac{1}{n} \text{tr}(L^n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.3.12)$$

e

$$K_0 = \log|\det L| \quad (2.3.13)$$

tem-se, como $\dot{L} = [L, U]$ e com a ciclicidade do traço, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K_n &= \frac{1}{n} \text{tr}(nL^{n-1} \dot{L}), \\ &= \text{tr}(L^{n-1} [L, U]), \\ &= \text{tr}([L^{n-1}, L] U), \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

o que diz que K_n é conservado mediante a evolução (que pode ser não linear) do sistema integrável. Para demonstrar a conservação de K_0 , usa-se o fato que se L é um operador iso-espectral, então, seus autovalores são constantes com respeito ao parâmetro t ; por outro lado, supondo que o determinante de L seja diferente de zero e que existe uma transformação unitária (2.3.6) tal que diagonalize L , então

$$\begin{aligned} \det(L(0)) &= \det(U(t)L(t)U^\dagger(t)) = \det(L) \\ \det(L(0)) &= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

logo:

$$K_0 = \ln(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) \quad (2.3.16)$$

e por isso, usando o fato de que L seja iso-espectral, tem-se:

$$\frac{d}{dt} K_0 = \frac{d}{dt} \ln(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) = \frac{\frac{d}{dt} |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}, \quad (2.3.17)$$

$$= 0. \quad (2.3.18)$$

2.3.1 O oscilador harmônico simples

Sejam os operadores [11]

$$L = \begin{pmatrix} p & wq \\ wq & -p \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -w/2 \\ w/2 & 0 \end{pmatrix};$$

então

$$\dot{L} = \begin{pmatrix} \dot{p} & w\dot{q} \\ w\dot{q} & -\dot{p} \end{pmatrix}, \quad \text{enquanto que} \quad [L, B] = \begin{pmatrix} w^2q & -wq \\ -wp & -w^2q \end{pmatrix},$$

de forma que a equação de Lax $\dot{L} = [L, B]$ resulta nas equações de movimento do oscilador harmônico simples de massa unitária:

$$\begin{cases} \dot{p} = w^2q \\ \dot{q} = p \end{cases}.$$

Uma relação para esse caso entre o operador L e o hamiltoniano \mathcal{H}_{OHS} do oscilador harmônico é quando se observa que

$$L^2 = \begin{pmatrix} p^2 + w^2q^2 & 0 \\ 0 & p^2 + w^2q^2 \end{pmatrix},$$

de modo que $\frac{1}{4}\text{tr}(L^2) = \mathcal{H}_{OHS}$.

2.3.2 A corrente de Toda

A corrente de Toda [12] é um sistema de dimensão finita que descreve o movimento de N partículas de massa $m = 1$, pontuais em uma linha e que interagem apenas entre seus primeiros vizinhos de forma exponencial; neste sistema, a primeira e a última dessas partículas estão fixas. A hamiltoniana total \mathcal{H}_T do sistema é dada por

$$\mathcal{H}_T = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2}P_i^2 + e^{-(Q_i - Q_{i-1})} \right), \quad (2.3.19)$$

onde

$$\{Q_a, Q_b\} = \{P_a, P_b\} = 0 \quad (2.3.20)$$

e

$$\{Q_a, P_b\} = -\{P_b, Q_a\} = \delta_{ab}. \quad (2.3.21)$$

As equações de Hamilton para o mesmo são

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial P_k} = P_i \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial Q_k} = e^{-(Q_j - Q_{j-1})} - e^{-(Q_{j+1} - Q_j)}, \quad 1 \leq j \leq N, \end{cases} \quad (2.3.22)$$

onde encontra-se para as partículas extremas,

$$\dot{P}_1 = -e^{-(Q_2 - Q_1)} \quad \text{e} \quad \dot{P}_N = e^{-(Q_N - Q_{N-1})}. \quad (2.3.23)$$

Pode-se fazer

$$\ddot{Q}_j = \dot{P}_j = e^{-(Q_j - Q_{j-1})} - e^{-(Q_{j+1} - Q_j)}, \quad 2 \leq j \leq N-1, \quad (2.3.24)$$

de onde se conclui que

$$\sum_{i=1}^N \ddot{Q}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \dot{P}_i = 0, \quad (2.3.25)$$

ou seja, o momento total é uma constante de movimento do sistema nessas coordenadas. Com isso, pode-se escrever o mesmo sistema com $N-1$ coordenadas [1] de posição e momento, basta usar:

$$q_a = Q_{a+1} - Q_a, \quad a = 1, \dots, N-1 \quad (2.3.26)$$

e as equações de movimento são

$$\ddot{q}_1 = 2e^{-q_1} - e^{-q_2}, \quad \ddot{q}_{N-1} = -e^{-q_{N-2}} + 2e^{-q_{N-1}} \quad (2.3.27)$$

para as partículas extremas e

$$\ddot{q}_b = -e^{-q_{b-1}} + 2e^{-q_b} - e^{-q_{b+1}} \quad (2.3.28)$$

para todas as outras, ou seja, $b = 2, \dots, N-2$.

Observa-se que tal sistema pode ser escrito em termos da matriz de Cartan para $su(N)$ (A.0.7) na forma [1]

$$\ddot{q}_a = \sum_{b=1}^{N-1} K_{ab} e^{-q_b}. \quad (2.3.29)$$

de modo que tal relação ainda pode ser escrita em termos da inversa da matriz de Cartan (A.0.9) por

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{N-1} \ddot{q}_a K_{ba}^{-1} &= e^{-q_b}, \\ \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^{N-1} \dot{q}_a K_{ba}^{-1} &= e^{-q_b}. \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Desta relação, fica fácil perceber que a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{N-1} \dot{q}_a K_{ba}^{-1} \dot{q}_b - \sum_{b=1}^{N-1} e^{-q_b} \quad (2.3.31)$$

descreve o sistema e as equações de Euler-Lagrange (2.2.1) fornecem as equações de movimento em (2.3.29). A coordenada do momento (2.2.2) conjugada a q_a é dada por

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \sum_{b=1}^{N-1} \dot{q}_b K_{ab}^{-1}. \quad (2.3.32)$$

Demonstra-se, usando as equações em (2.3.22), (2.3.20) e (2.3.21), os fatos

$$\{q_a, q_b\} = \{p_a, p_b\} = 0 \quad (2.3.33)$$

e que

$$\begin{aligned} \{q_a, p_b\} &= \sum_{c=1}^{N-1} K_{bc}^{-1} \{q_a, \dot{q}_c\} = \sum_{c=1}^{N-1} K_{bc}^{-1} \{Q_{a+1} - Q_a, P_{c+1} - P_c\}, \\ &= \sum_{c=1}^{N-1} K_{bc}^{-1} (-\delta_{a,c+1} + 2\delta_{a,c} - \delta_{a+1,c}) = \delta_{a,b}, \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

o que mostra que o sistema é hamiltoniano nessas coordenadas.

A formulação de Lax para o sistema é escrita definindo-se primeiramente os operadores de Lax:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N-1} (p_a H_a + e^{-q_a/2} (E_a + E_{-a})) \quad (2.3.35)$$

e

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N-1} e^{-q_a/2} (E_a - E_{-a}); \quad (2.3.36)$$

é obtido, a partir desses operadores, os fatos

$$\partial_t S = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N-1} \left(\dot{p}_a H_a - \frac{1}{2} \dot{q}_a e^{-q_a/2} (E_a + E_{-a}) \right) \quad (2.3.37)$$

e

$$[S, U] = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N-1} e^{-q_a} H_a - \frac{1}{4} \sum_{a,b=1}^{N-1} p_a e^{-q_a/2} (E_b + E_{-b}) K_{ba}, \quad (2.3.38)$$

onde, com (2.3.37) e (2.3.38) na equação de Lax (2.3.9)

$$\partial_t S = [S, U],$$

tem-se as equações de movimento

$$p_a = \sum_{b=1}^{N-1} K_{ab}^{-1} \dot{q}_b, \quad (2.3.39)$$

que são as mesmas equações de movimento para o modelo da rede de Toda, mostrando assim a validade da formulação de Lax para este sistema, onde existe as matrizes S e U nas coordenadas dadas por (2.3.26).

As quantidades conservadas podem ser extraídas de (2.3.12) e de (2.3.13) [12]; uma vez que o operador S é uma combinação linear de geradores de $su(N)$, geradores que têm traço nulo, o número de quantidades independentes é $N - 1$ que é a dimensão da subálgebra de Cartan da álgebra $su(N)$ e igual ao número de graus de liberdade nas coordenadas (2.3.26); por outro lado, o momento total do sistema é outra quantidade conservada, logo o sistema de Toda tem o número necessário de quantidades conservadas para que seja integrável sob o critério de Liouville. Da equação (2.3.12), tem-se para $n = 1$ que K_1 é satisfeita trivialmente, pois $K_1 = \text{tr}(S)$ e S só tem geradores das álgebras $su(N)$, que são, por construção, de traço nulo. Para $n = 2$, o caso é $K_2 = \text{tr}(S^2)$ donde extrai-se que

$$K_2 = \text{tr} \left[\left(\sum_{a=1}^{N-1} p_a H_a + e^{-qa/2} (E_a + E_{-a}) \right) \left(\sum_{b=1}^{N-1} p_b H_b + e^{-qb/2} (E_b + E_{-b}) \right) \right], \quad (2.3.40)$$

onde, usando as relações do traço de geradores de $su(N)$ dadas em (A.0.21), encontra-se

$$K_2 = \sum_{a,b=1}^{N-1} \frac{1}{(\alpha^a, \alpha^a)} (p_a p_b \eta_{ab} + 2e^{-qa}). \quad (2.3.41)$$

Para ver as quantidades conservadas nesse formalismo, toma-se como exemplo um sistema com 3 partículas; neste caso será necessário a aplicação da álgebra de Lie $su(3)$ na base de Chevalley: as matrizes de Gell'mann fornecem para os da subálgebra de Cartan, na base de Weyll-Cartan, que

$$H_1 = \frac{\lambda_3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H_2 = \frac{\lambda_8}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix},$$

mas na base de Chevalley se tem [13]

$$\mathbb{H}_\alpha = 2 \frac{\alpha_i \cdot H_i}{(\alpha, \alpha)}$$

e

$$E_\alpha = \sqrt{\frac{1}{(\alpha, \alpha)}} e_\alpha.$$

As raízes simples de $su(3)$ são $\alpha^1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $\alpha^2 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, então

$$\mathbb{H}_{\alpha^1} = \frac{1}{2} H_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} H_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbb{H}_{\alpha^2} = \frac{1}{2} H_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} H_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

além de que

$$e^{-q_1/2}(E_{\alpha^1} + E_{-\alpha^1}) = e^{-q_1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$e^{-q_2/2}(E_{\alpha^2} + E_{-\alpha^2}) = e^{-q_2/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

por isso

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1 & 0 & e^{-q_1/2} \\ 0 & -p_2 & e^{-q_2/2} \\ \sqrt{2}e^{-q_1/2} & e^{-q_2/2} & (-p_1 + p_2) \end{pmatrix};$$

assim, calcula-se S^2

$$S^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} p_1^2 + e^{-q_1} & e^{-q_1/2}e^{-q_2/2} & e^{-q_1/2}p_2 \\ e^{-q_1/2}e^{-q_2/2} & p_2^2 + e^{-q_2} & -e^{-q_2/2}p_1 \\ e^{-q_1/2}p_2 & -e^{-q_2/2}p_1 & e^{-q_1} + e^{-q_2} + (-p_1 + p_2)^2 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\text{tr} S^2 = \frac{1}{2} (e^{-q_1} + e^{-q_2} + p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2). \quad (2.3.42)$$

O resultado em (2.3.42) é uma quantidade conservada; para ver isso, usa-se as equações de movimento da rede de Toda em (2.3.29),

$$p_1 = \frac{2}{3}\dot{q}_1 + \frac{1}{3}\dot{q}_2, \quad (2.3.43)$$

$$p_2 = \frac{1}{3}\dot{q}_1 + \frac{2}{3}\dot{q}_2, \quad (2.3.44)$$

então

$$p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 = \frac{1}{3} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2)$$

e

$$\frac{d}{dt} (p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2) = \frac{1}{3} (2\dot{q}_1 \ddot{q}_1 + 2\dot{q}_2 \ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \ddot{q}_2); \quad (2.3.45)$$

por outro lado, de (2.3.32) para a álgebra de Lie $su(3)$, tem-se

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= K_{11}e^{-q_1} + K_{12}e^{-q_2} = 2e^{-q_1} - e^{-q_2}, \\ \ddot{q}_2 &= K_{21}e^{-q_1} + K_{22}e^{-q_2} = -e^{-q_1} + 2e^{-q_2}, \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

o que leva a

$$\begin{aligned} 3e^{-q_1} &= 2\dot{q}_1 + \ddot{q}_2, \\ 3e^{-q_2} &= \dot{q}_1 + 2\ddot{q}_2, \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

e então, de (2.3.42) especificado para a álgebra de Lie $su(3)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{tr}S^2) &= -\frac{1}{6}(2\ddot{q}_1\dot{q}_1 + 2\ddot{q}_2\dot{q}_2 + \dot{q}_2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\dot{q}_1) + \frac{1}{6}(2\dot{q}_1\ddot{q}_1 + 2\dot{q}_2\ddot{q}_2 + \dot{q}_2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\dot{q}_1) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

Tomando o agora o traço de S^3 , tem-se que

$$\text{tr}S^3 = 3(p_1^2 p_2 - p_1 p_2^2 + p_2 e^{-q_1} - p_1 e^{-q_2}), \quad (2.3.49)$$

que também se conserva, bastando usar as mesmas relações para verificar que o traço de S^2 se conserva. Assim, o sistema de Toda descrito na formulação de Lax para $N = 3$ partículas e com as coordenadas q_a , que reduzem os graus de liberdade para o sistema em $N - 1 = 2$, tem as quantidades conservadas dadas por $\text{tr}S^2$ (2.3.42) e $\text{tr}S^3$ (2.3.49); contudo, da equação em (2.3.13), tem-se que

$$0 = \det(S - \lambda \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p_1 - \lambda & 0 & \frac{1}{2}e^{-q_1/2} \\ 0 & -\frac{1}{2}p_2 - \lambda & \frac{1}{2}e^{-q_2/2} \\ \frac{1}{2}e^{-q_1/2} & \frac{1}{2}e^{-q_2/2} & \frac{1}{2}(-p_1 + p_2) - \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.3.50)$$

de modo que o polinômio característico de (2.3.50) resulta em

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}p_1 - \lambda\right) \left(-\frac{1}{2}p_2 - \lambda\right) \left(\frac{1}{2}(-p_1 + p_2) - \lambda\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}p_2 + \lambda\right) e^{-q_1} \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}p_1 - \lambda\right) e^{-q_2} = 0 \end{aligned}$$

que, simplificando, fornece

$$-\lambda^3 + \frac{1}{8}(p_1^2 p_2 - p_1 p_2^2 + p_2 e^{-q_1} - p_1 e^{-q_2}) + \frac{\lambda}{4}(e^{-q_1} + e^{-q_2} + p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2) \quad (2.3.51)$$

mas, de (2.3.42) e de (2.3.49), se reconhece que (2.3.51) pode ser escrita por

$$-\lambda^3 + \lambda \frac{1}{2} \text{tr}(S^2) + \frac{1}{24} \text{tr}(S^3) = 0, \quad (2.3.52)$$

o que mostra que a quantidade em (2.3.13) também se conserva, mas é uma combinação das quantidades conservadas dadas por (2.3.42) e (2.3.49).

2.3.3 Involução das quantidades conservadas no formalismo de Lax

Neste estágio, deve-se mostrar que as quantidades conservadas estão em involução; para tal, define-se a notação tensorial $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, onde $(A \otimes B)_{ik;jl} = A_{ij}B_{kl}$, também entendido como produto direto de representações, de modo que

$$\{S \underset{,}{\otimes} S\} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_a} \otimes \frac{\partial S}{\partial p_a} - \frac{\partial S}{\partial p_a} \otimes \frac{\partial S}{\partial q_a} \right), \quad (2.3.53)$$

e onde assume-se que os índices repetidos estão sendo somados; seja agora S dada em (2.3.35), então²

$$\begin{aligned} \{S \underset{,}{\otimes} S\} &= \frac{1}{4} \left\{ p_a H_a + e^{-q_a/2}(E_a + E_{-a}) \underset{,}{\otimes} p_b H_b + e^{-q_b/2}(E_b + E_{-b}) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\{ p_a H_a \underset{,}{\otimes} p_b H_b \right\} + \left\{ p_a H_a \underset{,}{\otimes} e^{-q_b/2}(E_b + E_{-b}) \right\} \right. \\ &\quad + \left\{ e^{-q_a/2}(E_a + E_{-a}) \underset{,}{\otimes} p_b H_b \right\} \\ &\quad \left. + \left\{ e^{-q_a/2}(E_a + E_{-a}) \underset{,}{\otimes} e^{-q_b/2}(E_b + E_{-b}) \right\} \right) \\ &= \frac{1}{4} (H_a \otimes H_b \{p_a, p_b\} + H_a \otimes (E_b + E_{-b}) \{p_a, e^{-q_b/2}\} \\ &\quad + (E_a + E_{-a}) \otimes H_b \{e^{-q_a/2}, p_b\} \\ &\quad + (E_a + E_{-a}) \otimes (E_b + E_{-b}) \{e^{-q_a/2}, e^{-q_b/2}\}). \end{aligned} \quad (2.3.54)$$

Da fórmula dos colchetes canônicos de Poisson, encontra-se

$$\begin{aligned} \{p_b, e^{-q_c/2}\} &= \sum_a \left(\frac{\partial p_c}{\partial q_a} \frac{\partial e^{-q_c/2}}{\partial p_a} - \frac{\partial p_b}{\partial p_a} \frac{\partial e^{-q_c/2}}{\partial q_a} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-q_b/2}, \end{aligned}$$

enquanto que $\{q_a, q_b\} = \{p_a, p_b\} = 0$, por isso

$$\{S \underset{,}{\otimes} S\} = \frac{1}{8} e^{-q_a/2} (H_a \otimes (E_a + E_{-a}) - (E_a + E_{-a}) \otimes H_a). \quad (2.3.55)$$

²Nesta parte do texto será constantemente usada a notação T_a para elementos da álgebra $su(N)$ relacionados à raiz α^a , de modo que $T_a \equiv T_{\alpha^a}$, mas em alguns casos poderá ser usada ou a primeira ou a segunda notação sem que seja mencionado.

Por outro lado, define-se os operadores na base de Chevalley

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) (E_\alpha \otimes E_{-\alpha}), \\ C_- &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) (E_{-\alpha} \otimes E_\alpha). \end{aligned}$$

Então, pode-se calcular

$$\begin{aligned} [C_+, E_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_a] &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) [E_\alpha \otimes E_{-\alpha}, E_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_a] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) ([E_\alpha, E_a] \otimes E_{-\alpha} + E_\alpha \otimes [E_{-\alpha}, E_a]) \\ &= -\frac{1}{2} (\alpha^a, \alpha^a) E_{\alpha^a} \otimes H_{\alpha^a} \tag{2.3.56} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) \left(\sqrt{\frac{2(\alpha + \alpha^a, \alpha + \alpha^a)}{(\alpha, \alpha)(\alpha^a, \alpha^a)}} N(\alpha, \alpha^a) E_{\alpha + \alpha^a} \otimes E_{-\alpha} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) \left(\sqrt{\frac{2(-\alpha + \alpha^a, -\alpha + \alpha^a)}{(\alpha, \alpha)(\alpha^a, \alpha^a)}} N(-\alpha, \alpha^a) E_\alpha \otimes E_{-\alpha + \alpha^a} \right); \end{aligned}$$

mas fazendo, no último somatório, uma mudança de índices: $\alpha \rightarrow \alpha + \alpha^a$, encontra-se que

$$\begin{aligned} [C_+, E_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_a] &= -\frac{1}{2} (\alpha^a, \alpha^a) E_{\alpha^a} \otimes H_{\alpha^a} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \left(\sqrt{\frac{2(\alpha + \alpha^a, \alpha + \alpha^a)(\alpha, \alpha)}{(\alpha^a, \alpha^a)}} N(\alpha, \alpha^a) E_{\alpha + \alpha^a} \otimes E_{-\alpha} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \left(\sqrt{\frac{2(\alpha + \alpha^a, \alpha + \alpha^a)(\alpha, \alpha)}{(\alpha^a, \alpha^a)}} N(-\alpha - \alpha^a, \alpha^a) E_{\alpha + \alpha^a} \otimes E_{-\alpha} \right) \end{aligned}$$

onde, pela identidade de Jacobi, $N(-\alpha - \alpha^a, \alpha) = -N(\alpha, \alpha^a)$ (ver (A.0.6), no apêndice A), de modo que

$$\begin{aligned} [C_+, E_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_a] &= -\frac{1}{2} (\alpha^a, \alpha^a) E_{\alpha^a} \otimes H_{\alpha^a} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} N(\alpha, \alpha^a) \left(\sqrt{\frac{2(\alpha + \alpha^a, \alpha + \alpha^a)(\alpha, \alpha)}{(\alpha^a, \alpha^a)}} E_{\alpha + \alpha^a} \otimes E_{-\alpha} \right) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} N(\alpha, \alpha^a) \left(\sqrt{\frac{2(\alpha + \alpha^a, \alpha + \alpha^a)(\alpha, \alpha)}{(\alpha^a, \alpha^a)}} E_{\alpha + \alpha^a} \otimes E_{-\alpha} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\alpha^a, \alpha^a) E_{\alpha^a} \otimes H_{\alpha^a}. \tag{2.3.57} \end{aligned}$$

Com os mesmos procedimentos se mostra que

$$[C_-, E_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_a] = -\frac{1}{2}(\alpha^a, \alpha^a) H_{\alpha^a} \otimes E_{\alpha^a}. \quad (2.3.58)$$

Definindo agora um operador tensorial na forma $r \equiv W \otimes Z$, dado por

$$r = \frac{1}{2}(C_+ - C_-), \quad (2.3.59)$$

e tomando a forma normalizada do produto interno das raízes α^a , ou seja, $(\alpha^a, \alpha^a) = 1$, então

$$\begin{aligned} [r, E_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_a] &= \frac{1}{2}([C_+, E_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_a] - [C_-, E_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_a]) \\ &= \frac{1}{4}(H_a \otimes E_a - E_a \otimes H_a). \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

Deste mesmo resultado, tomando $E_a \rightarrow E_{-a}$, tem-se

$$[r, E_{-a} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_{-a}] = \frac{1}{4}(H_a \otimes E_{-a} - E_{-a} \otimes H_a). \quad (2.3.61)$$

Outra coisa de importância para se calcular é o valor de $[r, H_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_a]$: tomando primeiramente

$$\begin{aligned} [C_+, H_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_a] &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) [E_\alpha \otimes E_{-\alpha}, H_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_a] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) ([E_\alpha, H_a] \otimes E_{-\alpha} + E_\alpha \otimes [E_{-\alpha}, H_a]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) (-E_\alpha \otimes E_{-\alpha} K_{\alpha\alpha} - E_\alpha \otimes E_{-\alpha} K_{-\alpha\alpha}), \end{aligned} \quad (2.3.62)$$

mas como $K_{-\alpha\alpha} = -K_{\alpha\alpha}$ (ver (A.0.7) no apêndice A), tem-se

$$[C_+, H_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_a] = 0. \quad (2.3.63)$$

Da mesma maneira

$$\begin{aligned} [C_-, H_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_a] &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) [E_{-\alpha} \otimes E_\alpha, H_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_a] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) ([E_{-\alpha}, H_a] \otimes E_\alpha + E_{-\alpha} \otimes [E_\alpha, H_a]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} (\alpha, \alpha) (-E_{-\alpha} \otimes E_\alpha K_{-\alpha\alpha} - E_{-\alpha} \otimes E_\alpha K_{\alpha\alpha}), \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

de modo que (2.3.64) e de (2.3.63) juntamente com a definição em (2.3.59), tem-se

$$[r, H_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_a] = 0. \quad (2.3.65)$$

Agora, seja a matriz S definida em (2.3.35), então

$$\begin{aligned} [r, S \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes S] &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N-1} \{p_a [r, H_a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_a] \\ &\quad + e^{-q_a/2} [r, \mathbb{I} \otimes E_a + E_a \otimes \mathbb{I} + E_{-a} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes E_{-a}]\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N-1} \{e^{-q_a/2} [r, \mathbb{I} \otimes E_a + E_a \otimes \mathbb{I}] + [r, \mathbb{I} \otimes E_{-a} + E_{-a} \otimes \mathbb{I}]\} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{a=1}^{N-1} e^{-q_a/2} (H_a \otimes (E_a + E_{-a}) - (E_a + E_{-a}) \otimes H_a). \end{aligned} \quad (2.3.66)$$

Mostra-se com isso que (veja (2.3.55))

$$[r, S \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes S] = \{S \underset{I}{\otimes} S\}. \quad (2.3.67)$$

Se as quantidades conservadas dadas na conservação do traço estão em involução, então o colchete de Poisson dessas quantidades devem se anular. Para ver isso no modelo de Toda, primeiro toma-se

$$\begin{aligned} \{\text{tr} S^n, S\} &= \sum_{a=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \text{tr} S^n}{\partial q_a} \frac{\partial S}{\partial p_a} - \frac{\partial \text{tr} S^n}{\partial p_a} \frac{\partial S}{\partial q_a} \right) \\ &= n \sum_{a=1}^{N-1} \left(\text{tr} \left(S^{n-1} \frac{\partial S}{\partial q_a} \right) \frac{\partial S}{\partial p_a} - \text{tr} \left(S^{n-1} \frac{\partial S}{\partial p_a} \right) \frac{\partial S}{\partial q_a} \right), \end{aligned} \quad (2.3.68)$$

ou, em termos de componentes, onde os índices repetidos por convenção estão sendo somados, tem-se

$$\{\text{tr} S^n, S\}_{ij} = n \sum_{a=1}^{N-1} \left(S_{lm}^{n-1} \left(\frac{\partial S}{\partial q_a} \right)_{ml} \left(\frac{\partial S}{\partial p_a} \right)_{ij} - S_{lm}^{n-1} \left(\frac{\partial S}{\partial p_a} \right)_{ml} \left(\frac{\partial S}{\partial q_a} \right)_{ij} \right), \quad (2.3.69)$$

onde, fatorando à esquerda o elemento S_{lm}^{n-1} , se reconhece que

$$\{\text{tr} S^n, S\}_{ij} = n S_{lm}^{n-1} \{S \underset{I}{\otimes} S\}_{mi,lj}$$

e introduzindo a notação tr_E , que significa tomar o traço do lado esquerdo do produto tensorial $A \otimes B$, isso dá

$$\{\text{tr} S^n, S\} = n \text{tr}_E S^{n-1} \{S \underset{I}{\otimes} S\}, \quad (2.3.70)$$

mas de (2.3.67), tem-se

$$\{\mathrm{tr}S^n, S\} = n \mathrm{tr}_E(S^{n-1} \otimes \mathbb{I})[r, S \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes S]. \quad (2.3.71)$$

Com isso, como é assumido que r tem a forma de produto tensorial, $W \otimes Z$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \{\mathrm{tr}S^n, S\} &= n \mathrm{tr}_E((S^{N-1} \otimes \mathbb{I}) ([W \otimes Z, S \otimes \mathbb{I}] + [W \otimes Z, \mathbb{I} \otimes S])) \\ &= n \mathrm{tr}_E((S^{N-1} \otimes \mathbb{I}) ([W, S] \otimes Z + W \otimes [Z, S])) \\ &= n (\mathrm{tr}(S^{N-1}[W, S]) \otimes Z + \mathrm{tr}(S^{N-1}W) \otimes [Z, S]), \end{aligned}$$

mas o primeiro termo se anula pela ciclicidade do traço; com isso tem-se apenas

$$\{\mathrm{tr}S^n, S\} = n (\mathrm{tr}(S^{N-1}W) \otimes [Z, S]), \quad (2.3.72)$$

ou, voltando a r e na forma de produto tensorial:

$$\{\mathrm{tr}S^n, S\} = n ([\mathrm{tr}_E(S^{N-1} \otimes \mathbb{I})r, \mathbb{I} \otimes S]), \quad (2.3.73)$$

que, no formalismo de índices e reassumindo que $r = W \otimes Z$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \{\mathrm{tr}S^n, S\}_{ij} &= (S_{ml}^{n-1} W_{lm} [Z, S]_{ij}) \\ &= [(S_{ml}^{n-1} W_{lm} Z), S]_{ij} \\ &= [\mathrm{tr}_E(S^{n-1}r), S]_{ij}. \end{aligned} \quad (2.3.74)$$

A partir desse resultado, se uma quantidade conservada é dada por $\mathrm{tr}S^n$ e outra é dada por $\mathrm{tr}S^m$, então a relação entre as duas pelo colchete de Poisson é dada por

$$\begin{aligned} \{\mathrm{tr}S^m, \mathrm{tr}S^n\} &= \{S_{ii}^m, S_{jj}^n\} \\ &= \frac{\partial S_{ii}^m}{\partial \zeta^p} \frac{\partial S_{jj}^n}{\partial \zeta^q} \{\zeta^p, \zeta^q\} \\ &= n S_{ik}^{n-1} \frac{\partial S_{ki}}{\partial \zeta^p} \frac{\partial S_{jj}^m}{\partial \zeta^q} \{\zeta^p, \zeta^q\}, \end{aligned} \quad (2.3.75)$$

onde, notando que as componentes em (2.3.75) podem comutar e voltando à notação do traço, tem-se

$$\begin{aligned} \{\mathrm{tr}S^m, \mathrm{tr}S^n\} &= n \mathrm{tr}(\{\mathrm{tr}S^m, S\} S^{n-1}) \\ &= mn \mathrm{tr}([\mathrm{tr}_E(S^{n-1}r), S] S^{m-1}), \end{aligned} \quad (2.3.76)$$

que, pela ciclicidade do traço, resulta em

$$\{\mathrm{tr}S^m, \mathrm{tr}S^n\} = mn \mathrm{tr}(\mathrm{tr}_E(S^{n-1}r)[S, S^{m-1}]) = 0, \quad (2.3.77)$$

mostrando que, na rede de Toda, as quantidades conservadas estão em involução; isso foi feito de forma explícita graças ao tratamento provido pelo formalismo de Lax ao sistema. Completando o exemplo para a rede de Toda em $su(3)$, das quantidades conservadas em $\text{tr}S^2$ e $\text{tr}S^3$ em (2.3.42) e (2.3.49) respectivamente,

$$\begin{aligned}
\{\text{tr}S^2, \text{tr}S^3\} &= \frac{3}{2}\{e^{-q_1} + e^{-q_2} + p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2, p_1^2p_2 - p_1p_2^2 + p_2e^{-q_1} - p_1e^{-q_2}\} \\
&= \frac{3}{2}\{e^{-q_1} + e^{-q_2}, p_1^2p_2 - p_1p_2^2 + p_2e^{-q_1} - p_1e^{-q_2}\} \\
&\quad + \{p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2, p_1^2p_2 - p_1p_2^2 + p_2e^{-q_1} - p_1e^{-q_2}\}, \\
&= \frac{3}{2}\sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial q_i} (e^{-q_1} + e^{-q_2}) \frac{\partial}{\partial p_i} (p_1^2p_2 - p_1p_2^2 + p_2e^{-q_1} - p_1e^{-q_2}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial p_i} (e^{-q_1} + e^{-q_2}) \frac{\partial}{\partial q_i} (p_1^2p_2 - p_1p_2^2 + p_2e^{-q_1} - p_1e^{-q_2}) \right] \\
&\quad + \frac{3}{2}\sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial q_i} (p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2) \frac{\partial}{\partial p_i} (p_1^2p_2 - p_1p_2^2 + p_2e^{-q_1} - p_1e^{-q_2}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial p_i} (p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2) \frac{\partial}{\partial q_i} (p_1^2p_2 - p_1p_2^2 + p_2e^{-q_1} - p_1e^{-q_2}) \right], \\
&= \frac{3}{2} [(-e^{-q_1})(2p_1p_2 - p_2^2 - e^{-q_2}) + (-e^{-q_2})(p_1^2 - 2p_1p_2 + e^{-q_1}) \\
&\quad - (2p_1 - p_2)(-p_2e^{-q_1}) - (2p_2 - p_1)(p_1e^{-q_2})], \\
&= 0, \tag{2.3.78}
\end{aligned}$$

logo, as quantidades conservadas dadas em (2.3.42) e em (2.3.49) estão em involução.

2.4 Formulação de Zakharov-Shabat

Em geral os modelos integráveis têm várias naturezas. O exemplo da corrente de Toda é de um sistema finito e discreto; outros exemplos de modelos integráveis, como *NLS* e de *sine-Gordon*, são de sistemas contínuos. O que é um dos fatos surpreendentes em sistemas integráveis é que existe uma descrição unificada destes sistemas; isso foi primeiramente visto em uma abordagem usada por Zakharov e Shabat para entender o modelo NLS^3 que depois foi generalizado por Ablowitz, Kaup, Newell e Segur (AKNS) para descrever vários outros sistemas integráveis; esta abordagem usa um operador de Lax que é de primeira ordem em ∂_x e por isso é às vezes chamada de *formulação de primeira ordem*. Na formulação de primeira ordem, a equação de evolução não linear é obtida pela compatibilidade de um par de equações envolvendo os operadores de Lax para o sistema.

³NLS se refere à equação de Schrödinger não linear, mas que não tem fundamentação alguma no modelo da mecânica quântica.

De (2.3.10), (2.3.9) e com (2.3.11), encontra-se que $\partial_t \lambda = 0$. De fato: derivando (2.3.10) parcialmente em t , encontra-se

$$\partial_t L(t)\psi_t + L(t)\partial_t \psi(t) = -(\partial_t \lambda)\psi(t) - \lambda \partial_t \psi(t),$$

onde, usando o resultado de (2.3.11) e (2.3.9), encontra-se que

$$\partial_t \lambda = 0. \quad (2.4.1)$$

A formulação de primeira ordem se dá em procurar o par de Lax primeiro assumindo que

$$\begin{cases} L(t) &= -\lambda \psi(t), \\ \partial_t \psi(t) &= B(t)\psi(t), \quad \text{com} \quad \partial_t \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Se a condição de compatibilidade $\partial_x \partial_t \psi(x, t) = \partial_t \partial_x \psi(x, t)$ em (2.4.2) dá a evolução não linear do sistema em questão, isto implica que $L(t)$ e $B(t)$ são o par de Lax do sistema; de fato, pois com (2.4.1), a condição de compatibilidade em (2.4.2) é equivalente à equação de Lax (2.3.9). Esta alternativa em escrever a equação de Lax como condição de compatibilidade é o ponto central da formulação de primeira ordem [12].

Nos exemplos que seguem para a formulação de primeira ordem, ao se requerer que o operador $L(t)$ seja linear em ∂_x , pode-se escrever (2.4.2) em equações matriciais. O caso mais simples é tratado com matrizes 2×2 : sejam as matrizes de Pauli

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.4.3)$$

que obedecem à lei de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor de Levi-Civita (ver[3]). Escolhe-se a base em que $\sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm i\sigma_2$, onde se tem

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que as matrizes σ_{\pm} são nilpotentes: $\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0\mathbb{I}$ e $\sigma_3^2 = \mathbb{I}$, onde \mathbb{I} é a matriz identidade 2×2 ; tem-se também que $\sigma_3\sigma_{\pm} = \pm\sigma_{\pm}$ e $\sigma_{\pm}\sigma_{\mp} = 1/2(\mathbb{I} \pm \sigma_3)$. Seja o vetor coluna de duas componentes

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix};$$

generaliza-se as equações de (2.4.2) para equações matriciais de primeira ordem a partir de combinações de funções com as matrizes de Pauli (2.4.3):

$$(\sigma_3 \partial_x - q\sigma_+ + r\sigma_-)\phi = -i\zeta\phi, \quad (2.4.4)$$

ou ainda, multiplicando (2.4.4) por σ_3 à esquerda, encontra-se

$$(\mathbb{I}\partial_x - q\sigma_+ - r\sigma_- + i\zeta\sigma_3)\phi = 0,$$

de modo que isolando $\partial_x\phi$ se tem

$$\partial_x\phi = (-i\zeta\sigma_3 + q\sigma_+ + r\sigma_-)\phi, \quad (2.4.5)$$

e a equação de primeira ordem em t é

$$\partial_t\phi = (R\sigma_3 + P\sigma_+ + Q\sigma_-)\phi. \quad (2.4.6)$$

Assume-se que $r(x, t)$ e $q(x, t)$ não dependam do parâmetro espectral ζ que, por sua vez, é assumido ser independente dos parâmetros x e t ; as funções P , Q e R já são assumidas dependentes de ζ e são funcionais de $q(x, t)$ e $r(x, t)$. Assumindo que $\partial_{xt}\phi = \partial_{tx}\phi$, encontra-se que as condições de compatibilidade são dadas por

$$\begin{cases} q_t = 2qR + 2i\zeta P + P_x, \\ Q_x = 2iQ\zeta + 2rR + r_t, \\ R_x = -Pr + Qq. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Assim, para alguma escolha de variáveis, as equações (2.4.7) descrevem a equação de evolução não linear, de forma que as equações (2.4.5) e (2.4.6) definiriam um par de Lax apropriado para o sistema; isso é visto escrevendo

$$L = \partial_x - A(x, t) = \partial_x - q\sigma_+ - r\sigma_- + i\zeta\sigma_3 \quad (2.4.8)$$

$$B = P\sigma_+ + Q\sigma_- + R\sigma_3,$$

de modo que é simples de obter a equação de Lax:

$$\partial_t L = [B, L].$$

Os próximos exemplos são aplicações simples das condições de compatibilidade (2.4.7).

Exemplo 2.4.1. *O caso NLS:* neste caso, toma-se $q(x, t) = \sqrt{k}\psi^*$ e $r(x, t) = \sqrt{k}\psi$, onde $*$ significa conjugação complexa, o que dá

$$\begin{cases} r_t(x, t) = \sqrt{k}\psi_t^* \\ q_t(x, t) = \sqrt{k}\psi_t, \end{cases}$$

onde k é uma constante arbitrária; tem-se disso, nas duas primeiras equações de (2.4.7), que

$$\begin{cases} \sqrt{k}\psi_t^* = 2R\sqrt{k}\psi^* + 2i\zeta P + P_x \\ \sqrt{k}\psi_t = 2R\sqrt{k}\psi - 2i\zeta Q + Q_x, \end{cases}$$

onde usando que $r(x, t) = q^*(x, t)$, vem que $(2R\sqrt{k}\psi - 2i\zeta Q + Q_x)^* = 2R\sqrt{k}\psi^* + 2i\zeta P + P_x$, sugerindo que $Q^* = P$. Se for escolhido para R que

$$R = 2i\zeta^2 + ik\psi^*\psi,$$

então

$$R_x = ik(\psi_x^*\psi + \psi^*\psi_x). \quad (2.4.9)$$

Usando (2.4.9) na terceira das condições em (2.4.7) tem-se

$$\sqrt{k}\psi^*Q - \sqrt{k}\psi P = i\sqrt{k}(\psi_x^*\psi + \psi^*\psi_x), \quad (2.4.10)$$

de modo que as possibilidades

$$\begin{cases} Q = i\sqrt{k}\psi_x - 2\zeta\psi\sqrt{k} \\ P = -i\sqrt{k}\psi_x^* - 2\zeta\psi^*\sqrt{k} \end{cases}$$

satisfazem (2.4.10), gerando que

$$\begin{cases} \psi_t^* = 2ik|\psi|^2\psi^* - i\psi_{xx} \\ \psi_t = -2ik|\psi|^2\psi + i\psi_{xx}, \end{cases} \quad (2.4.11)$$

que são as equações não lineares do modelo NLS.

Exemplo 2.4.2. *O modelo de sine-Gordon:* este modelo [29] obtém-se considerando

$$\begin{cases} r(x_+, x_-) = -q(x_+, x_-) = \frac{1}{2}w_+(x_+, x_-) \\ P = Q = \frac{i}{4\zeta}\text{sen } w(x_+, x_-); \end{cases}$$

usando a notação $\partial x_{\pm} \equiv \partial_{\pm}$, obtém-se na terceira das equações em (2.4.7) que

$$R_+ = -w_+(x_+, x_-)\frac{i}{4\zeta}\text{sen } w(x_+, x_-)$$

de modo que

$$R = \frac{i}{4\zeta}\cos w(x_+, x_-);$$

com as outras equações de (2.4.7), obtém-se, tanto em $r_-(x_+, x_-)$ quanto em $q_-(x_+, x_-)$, que

$$\frac{\partial}{\partial_+\partial_-}w(x_+, x_-) \equiv \partial_{+-}w(x_+, x_-) = \text{sen } w(x_+, x_-), \quad (2.4.12)$$

que, fazendo $w(x_+, x_-) \equiv \phi$, é a equação de *sine-Gordon* (2.1.31), nas coordenadas do cone de luz.

2.5 Formulação de curvatura nula

A equação de Lax (2.3.9) pode ser escrita como

$$[\partial_t - B, L] = 0, \quad (2.5.1)$$

de modo que tendo $L = \partial_x - A(x, \zeta)$, encontra-se

$$[\partial_t - B, \partial_x - A] = 0, \quad (2.5.2)$$

que resulta em

$$\partial_x B - \partial_t A + [A, B] = 0. \quad (2.5.3)$$

A equação (2.5.3) é chamada de *condição de curvatura nula*; os funcionais A e B dos campos do modelo são, para os casos aqui trabalhados, potenciais de gauge que moram na álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{g}}$.

2.6 Formulação de curvatura nula para o modelo NLS em termos da álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$

Usa-se para esta formulação a álgebra de Kac-Moody [14] $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ dada no Apêndice B, com as relações de comutação:

$$\left\{ \begin{array}{l} [H^m, H^n] = n \frac{1}{2} C \delta_{m+n,0}, \\ [H^m, E_{\pm}^n] = \pm E_{\pm}^{m+n}, \\ [E_+^m, E_-^n] = 2H^{m+n} + nC \delta_{m+n,0}, \\ [D, T^m] = mT^m; \end{array} \right. \quad (2.6.1)$$

com vetor de graduação homogênea $s = (1, 0)$. Sejam os campos

$$B_1 = H^1 + \psi^+ E_+^0 + \psi^- E_-^0 + \nu_1 C$$

e

$$B_2 = H^2 + \psi^+ E_+^1 + \psi^- E_-^1 - 2\psi^+ \psi^- H^0 + \psi_x^+ E_+^0 - \psi_x^- E_-^0 + \nu_2 C, \quad (2.6.2)$$

onde ψ^{\pm} , ν_1 e ν_2 são campos do sistema e $|\psi|^2 = \psi^+ \psi^- = \psi^- \psi^+$; a condição de curvatura nula (2.5.3) requer, para $B_1 = A$ e $B_2 = B$, que

$$\begin{aligned} \partial_x B_2 = & \psi_x^+ E_+^1 + \psi_x^- E_-^1 - 2\partial_x (\psi^+ \psi^-) H^0 \\ & + \psi_{xx}^+ E_+^0 - \psi_{xx}^- E_-^0 + \partial_x \nu_2 C, \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

$$\partial_t B_1 = \psi_t^+ E_+^0 + \psi_t^- E_-^0 + \partial_t \nu_1 C$$

e

$$[B_1, B_2] = E_+^1 \psi_x^+ + \psi_- E_-^1 + 2\psi^+ |\psi|^2 E_+^0 - 2|\psi|^2 \psi^- E_-^0, \quad (2.6.4)$$

de modo que, novamente em (2.5.3), encontra-se as equações de compatibilidade na direção dos geradores E_+^0 , E_-^0 e C respectivamente:

$$\begin{cases} \psi_t^+ &= -\psi_{xx}^+ + 2|\psi|^2 \psi^+; \\ \psi_t^- &= \psi_{xx}^- - 2|\psi|^2 \psi^+; \\ \partial_t \nu_1 &= -\partial_x \nu_2. \end{cases} \quad (2.6.5)$$

2.7 Formulação de curvatura nula para o modelo de *sine-Gordon* em $\widehat{sl}(2)$

Seguindo as idéias anteriores, pode-se escrever um outro sistema integrável, chamado de modelo de *sine-Gordon*, em termos da equação de curvatura nula. Para tal, faz-se escolha da base para $\widehat{sl}(2)$ tal que as relações de comutação sejam

$$\begin{cases} [T_3^m, T_3^n] &= m \frac{1}{2} C \delta_{m+n,0}, \\ [T_3^m, T_\pm^n] &= \pm T_\pm^{m+n}, \\ [T_+^m, T_-^n] &= 2T_3^{m+n} + mC \delta_{m+n,0}, \quad e \\ [d, T_i^m] &= mT_i^m; \quad i = 3, + \text{ ou } -. \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Sejam os campos do modelo [27] dados por

$$\begin{cases} A_+ &= \frac{1}{2} (e^{i\phi} T_+^0 + e^{-i\phi} T_-^1) \\ A_- &= \frac{1}{2} (T_+^{-1} + T_-^0) - i\partial_- \phi T_3^0 + \frac{1}{4} \partial_- (i\phi - \rho - \gamma) C. \end{cases} \quad (2.7.2)$$

Assim, tomando $A = A_-$ e $B = A_+$ em (2.5.3), tem-se

$$\partial_- A_+ = \frac{1}{2} \partial_- \phi (e^{i\phi} T_+^0 - e^{-i\phi} T_-^1), \quad (2.7.3)$$

$$\partial_+ A_- = -i\partial_+ \partial_- \phi T_3^0 + \frac{1}{4} \partial_+ \partial_- (i\phi - \rho - \gamma) C \quad e \quad (2.7.4)$$

$$\begin{aligned} [A_+, A_-] &= \frac{1}{2} e^{i\phi} (T_3^0 + i\partial_- \phi T_+^0) + \\ &\quad \frac{1}{2} e^{-i\phi} \left(T_3^0 - \frac{1}{2} C - i\partial_- \phi T_-^1 \right), \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

e as condições de compatibilidade oferecem, na direção de T_3^0 e de C respectivamente, as equações:

$$\partial_+ \partial_- \phi = \text{sen } \phi \quad \text{e} \quad (2.7.6)$$

$$\cos \phi = 1 - \partial_+ \partial_- \rho. \quad (2.7.7)$$

A primeira dessas é a equação de *sine-Gordon*, já obtida anteriormente de um modelo clássico em (2.1.31).

3

Sistemas integráveis e soluções sóliton

Neste capítulo, mostra-se como obter soluções sóliton de sistemas integráveis por meio das conhecidas como *transformações dressing*; tais transformações fazem a conexão entre as soluções de vácuo para um dado sistema e as soluções das equações diferenciais em si. A obtenção das soluções se dá com o auxílio das funções τ ; essas últimas são definidas com o uso das propriedades das representações integráveis de peso mais alto das álgebras de Kac-Moody e de operadores de vértice, representações ambas definidas nos apêndices C e D, respectivamente. É seguida a abordagem de [15] sobre *transformações dressing* e funções τ .

3.1 *Transformações dressing*

Considera-se um sistema genérico não linear tal que admite uma formulação em termos da condição de curvatura nula (2.5.3) na forma

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] = 0, \quad \mu, \nu = x, t,$$

cujos potenciais de calibre A_μ encontram-se sobre uma álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{g}}$. As *transformações dressing* são transformações de calibre não locais [16, 17, 18], que agem sobre os campos A_μ dos modelos integráveis, preservando suas formas e estruturas de graduação; cada transformação é realizada de dois modos diferentes, em termos de dois elementos de grupo Θ_+ e Θ_- , de modo que

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^g \equiv \Theta_\pm A_\mu \Theta_\pm^{-1} - \partial_\mu \Theta_\pm \Theta_\pm^{-1}, \quad (3.1.1)$$

onde Θ_+ e Θ_- pertencem a \widehat{G} , onde \widehat{G} é o grupo gerado pela exponenciação dos elementos da álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{g}}$. Uma vez que A_μ satisfaz (3.1.1), vem que uma solução possível para A_μ é da forma de calibre puro para alguma solução conhecida Ψ , dada por

$$A_\mu = -\partial_\mu \Psi \Psi^{-1}, \quad (3.1.2)$$

o que leva a

$$A_\mu^g \equiv -\partial_\mu (\Theta_\pm \Psi) (\Theta_\pm \Psi)^{-1}. \quad (3.1.3)$$

Assim, existe um elemento de grupo constante h tal que

$$\Theta_+ \Psi = \Theta_- \Psi h, \quad (3.1.4)$$

que equivale a

$$\Theta_-^{-1} \Theta_+ = \Psi h \Psi^{-1}. \quad (3.1.5)$$

O requisito de que as *transformações dressing* preservem a forma do potencial A_μ implica que Θ_\pm devem pertencer a dois subgrupos distintos de \widehat{G} , que são determinados pela forma particular de A_μ em $\widehat{\mathfrak{g}}$; nesse sentido, a equação (3.1.5) diz que $\Psi h \Psi^{-1}$ é fatorizado dentro dos subgrupos Θ_- e Θ_+ . Então, dada uma solução do modelo definida por um elemento de grupo Ψ e um elemento de grupo constante h , as *transformações dressing* podem ser usadas para construir uma nova solução definida por

$$\Psi^h = \Theta_+ \Psi. \quad (3.1.6)$$

3.2 *Transformações dressing* e soluções de vácuo

As hierarquias integráveis [17] que podem ser escritas em termos da condição de curvatura nula podem geralmente ser dadas como combinação de elementos da álgebra de Kac-Moody com graduação especificada. Considera-se uma álgebra de Kac-Moody *untwisted* afim $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}} \oplus CD$ e uma graduação inteira [16] de sua álgebra derivada $\widehat{\mathfrak{g}}$ especificada pelo vetor $s = (s_0, s_1, \dots, s_r)$ de $r + 1$ inteiros primos relativos e não negativos; nesta, r é a dimensão da subálgebra de Cartan da álgebra de Lie \mathfrak{g} que, afim a ela, é descrita a álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{g}}$ dada em termos de uma decomposição

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_n(s) \quad \text{onde} \quad [\widehat{\mathfrak{g}}_i(s), \widehat{\mathfrak{g}}_j(s)] \subset \widehat{\mathfrak{g}}_{i+j}(s); \quad (3.2.1)$$

e se escolhe a base graduada $\{e_k\}$ para $\widehat{\mathfrak{g}}$, onde $e_k \in \widehat{\mathfrak{g}}_k(s)$. Os fluxos entre as hierarquias serão definidas em termos dos operadores de Lax da forma

$$L_{\pm i} = \frac{\partial}{\partial t_i^\pm} - A_\pm(i), \quad i \in E \subset \mathbb{Z} \geq 0, \quad (3.2.2)$$

onde E é um conjunto de inteiros e

$$A_\pm(i) = \sum_{k=0}^i A_\pm^k(i) e_{\pm k}, \quad (3.2.3)$$

onde os $A_+(i)$ e $A_-(i)$ são funções dos parâmetros t_j^\pm , assumindo valores sobre os subespaços

$$Q_+(i) = \widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0}(s) \cap \widehat{\mathfrak{g}}_{\leq i}(s) \quad Q_-(i) = \widehat{\mathfrak{g}}_{\leq 0}(s) \cap \widehat{\mathfrak{g}}_{\geq -i}(s) \quad (3.2.4)$$

respectivamente. Logo, as hierarquias das equações são definidas pelas condições de curvatura nula

$$[L_i, L_j] = 0, \quad i, j, \in E \subset \mathbb{Z} \geq 0. \quad (3.2.5)$$

Seja U uma função no grupo \widehat{G}_0 formado pela exponenciação de elementos da subálgebra $\widehat{g}_0(s)$ de grau zero e de dimensão finita, então os sistemas acima definidos obedecem uma *invariância de calibre* da forma

$$L_i \rightarrow UL_iU^{-1}, \quad (3.2.6)$$

preservando $A_{\pm}(i) \in Q_{\pm}(i)$. As equações das hierarquias expressas em termos da condição de curvatura nula são assumidas como equações sobre as classes de equivalência de $Q_{\pm}(i)$ sob as transformações de calibre.

Juntamente com as hierarquias integráveis, há um problema linear associado:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_i^{\pm}} - A_{\pm}(i) \right) \Psi = 0, \quad i \in E \subset \mathbb{Z} \geq 0, \quad (3.2.7)$$

onde Ψ é uma função dos t_i^{\pm} , assumindo valores no grupo de Kac-Moody $\widehat{G}(s)$ formado pela exponenciação dos elementos da álgebra \widehat{g} . As equações de curvatura nula (3.2.5) são as condições de integrabilidade para o problema linear associado (3.2.7), que, por sua vez, também podem ser escritas por

$$A_{\pm}(i) = \frac{\partial \Psi}{\partial t_i^{\pm}} \Psi^{-1}. \quad (3.2.8)$$

Em termos do problema linear associado se define um importante conjunto de transformações chamado de *transformações dressing*, que levam soluções conhecidas das hierarquias para novas soluções. Usa-se a partir de agora a notação

$$\widehat{g}_{<k}(s) = \bigoplus_{i<k} \widehat{g}_i(s) \quad \widehat{g}_{>k}(s) = \bigoplus_{i>k} \widehat{g}_i(s), \quad (3.2.9)$$

e também será denotado que os subgrupos $\widehat{G}_-(s)$, $\widehat{G}_+(s)$ e $\widehat{G}_0(s)$, de \widehat{G} formados pela exponenciação das subálgebras $\widehat{g}_{<0}(s)$, $\widehat{g}_{>0}(s)$ e $\widehat{g}_0(s)$, de \widehat{g} , respectivamente.

As *transformações dressing* podem ser descritas como se segue: dada uma solução Ψ do problema linear (3.2.7) e um elemento constante $h \in \widehat{G}$, constante em relação a t^{\pm} ; quanto a $\Psi h \Psi^{-1}$, toma-se a decomposição generalizada de Gauss com relação à gradação s , dada para este caso por

$$\Psi h \Psi^{-1} = (\Psi h \Psi^{-1})_- (\Psi h \Psi^{-1})_0 (\Psi h \Psi^{-1})_+; \quad (3.2.10)$$

desta forma, define-se o resultado das *transformações dressing* Ψ^h por

$$\Psi^h = \begin{cases} [(\Psi h \Psi^{-1})_-]^{-1} \Psi \\ (\Psi h \Psi^{-1})_0 (\Psi h \Psi^{-1})_+ \Psi h^{-1} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

são também soluções do problema linear. Isto pode ser visto mostrando que

$$A_{\pm}^h(i) = \frac{\partial \Psi^h}{\partial t_i^{\pm}} (\Psi^h)^{-1} \in Q_{\pm}(i), \quad (3.2.12)$$

uma vez que Ψ é uma solução de (3.2.7). A transformação

$$\Psi \rightarrow \Psi^h, \quad A_{\pm}(i) \rightarrow A_{\pm}^h(i), \quad (3.2.13)$$

é chamada de *transformação dressing*. Diz-se por isso que as *transformações dressing* precisam de uma *solução de partida*, de modo que todas as outras sejam obtidas através desta por meio de escolhas do elemento de grupo constante h ; com isso, toma-se as soluções de vácuo como sendo as soluções de partida para o sistema em questão, as quais serão apresentadas mais adiante.

A classe das *transformações dressing* é muito geral; é feita a escolha das hierarquias integráveis que estão nas órbitas de algumas soluções triviais sob o grupo das *transformações dressing*; tais soluções triviais são chamadas de *soluções de vácuo*. A órbita das soluções de vácuo sob o grupo das *transformações dressing* é construída usando (3.2.11) e (3.2.12). Definindo

$$\begin{cases} (\Psi h \Psi^{-1})_- = \Theta^{-1}, \\ (\Psi h \Psi^{-1})_0 = B^{-1}, \\ (\Psi h \Psi^{-1})_+ = N, \end{cases} \quad (3.2.14)$$

onde se encontra que $B^{-1}N = \Omega$, podendo agora escrever (3.2.11) com as definições em (3.2.14) na forma

$$\Psi \rightarrow \Psi^h = \Theta \Psi = \Omega \Psi h^{-1}; \quad (3.2.15)$$

equivalentemente, os potenciais de calibre na órbita do vácuo A_{\pm}^V tornam-se

$$A_+^h(i) = \begin{cases} \Theta A_+^V(i) \Theta^{-1} + \partial_i^+ \Theta \Theta^{-1} \in \{A_{\pm}^V(i)\} \cup \widehat{g}_{<i}(s), \\ \Omega A_+^V(i) \Omega^{-1} + \partial_i^+ \Omega \Omega^{-1} \in \widehat{g}_{\geq 0}(s), \end{cases} \quad (3.2.16)$$

e

$$A_-^h(i) = \begin{cases} \Theta A_-^V(i) \Theta^{-1} + \partial_i^+ \Theta \Theta^{-1} \in \widehat{g}_{<0}(s), \\ \Omega A_-^V(i) \Omega^{-1} + \partial_i^- \Omega \Omega^{-1} \in \widehat{g}_{\geq -i}(s). \end{cases} \quad (3.2.17)$$

3.3 As funções τ

Seja uma álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{g}}$ de graduação especificada pelo vetor $s = (s_0, s_1, \dots, s_r)$; considerando uma solução de vácuo e um elemento particular $h \in \widehat{G}$ que gera uma

transformação dressing. Então haverá uma função τ para cada $s_j \neq 0$; considera-se o estado de peso máximo $|\lambda_j\rangle$ da representação fundamental de $\widehat{\mathfrak{g}}$, então define-se o vetor função- τ por

$$\vec{\tau}_j(t^\pm) = \Psi h \Psi^{-1} |\lambda_j\rangle; \quad j = 0, 1, \dots, r; \quad (3.3.1)$$

mas, de (3.2.10), tem-se

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_j(t^\pm) &= (\Psi h \Psi^{-1})_- (\Psi h \Psi^{-1})_0 (\Psi h \Psi^{-1})_+ |\lambda_j\rangle, \\ &= \Theta^{-1} B^{-1} N |\lambda_j\rangle. \end{aligned}$$

Sabendo que N é formado por exponenciação de geradores de graus positivos que aniquilam o estado $|\lambda_j\rangle$, de modo $N|\lambda_j\rangle = |\lambda_j\rangle$, encontra-se que a definição para as funções τ equivalente a (3.3.1) é

$$\vec{\tau}_j(t^\pm) = \Theta^{-1} B^{-1} |\lambda_j\rangle. \quad (3.3.2)$$

Dado que a derivação d_s pode ser diagonalizada agindo sobre as representações de peso máximo, as funções τ podem ser decompostas como

$$\tau_j(t^\pm) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tau_j^{-l}(t^\pm) \quad d_j \tau_j^{-l}(t^\pm) = -l \tau_j^{-l}(t^\pm). \quad (3.3.3)$$

Como foi dito no apêndice B [16], os autovetores $|\lambda_j\rangle$ são autoestados da subálgebra $\widehat{\mathfrak{g}}_0$; logo

$$\begin{aligned} \Theta^{-1} B^{-1} |\lambda_j\rangle &= \Theta^{-1} (\Psi h \Psi^{-1})_0 |\lambda_j\rangle \\ &= \Theta^{-1} |\lambda_j\rangle \hat{\tau}_j^0(t^\pm), \quad j = 0, 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

onde define-se que

$$\langle \lambda_j | (\Psi h \Psi^{-1})_0 |\lambda_j\rangle = \hat{\tau}_j^0(t^\pm); \quad (3.3.5)$$

com isso:

$$\begin{aligned} \Theta^{-1} |\lambda_j\rangle &= \frac{\Psi h \Psi^{-1}}{\hat{\tau}_j^0(t^\pm)} |\lambda_j\rangle \\ &= \frac{\tau_j(t^\pm)}{\hat{\tau}_j^0(t^\pm)} |\lambda_j\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Dado $\tau_j(t^\pm)$ para todo $j = 0, 1, \dots, r$, com $s_j \neq 0$, a equação (3.3.6) determina univocamente $\Theta \in \widehat{G}_{\leq 0}$. Logo, de (3.2.16)-(3.2.17), (3.3.6) e (3.2.5), os $\tau_i(t^\pm)$ determinam uma solução de uma das hierarquias integráveis.

A principal propriedade das funções τ a esse estágio é a construção de soluções sólitons e multisólitons. Isso se dá tomando as *transformações dressing* na órbita da

solução de vácuo para um tal sistema e considerando um vetor \hat{s} um subconjunto graduado da álgebra de Kac-Moody definido por

$$\hat{s} = \{b_i \in \hat{\mathfrak{g}}_i(s), i \in E \subset \mathbb{Z}; [b_i, b_j] = iC\delta_{i+j,0}\},$$

onde C é o termo central de $\hat{\mathfrak{g}}$. Os potencias de vácuo A_{\pm}^V para o sistema integrável associada a \hat{s} serão

$$A_+^V(j) = b_j \qquad A_-^V(j) = b_{-j} + jCt_j^+ \qquad (3.3.7)$$

ou, equivalentemente para as soluções de vácuo Ψ_V , tem-se

$$\Psi_V = \exp\left(\sum_{j \in E \geq 0} b_j t_j^{\pm}\right) \exp\left(\sum_{-l \in E \geq 0} b_{-l} t_l^{-}\right). \qquad (3.3.8)$$

Seja agora F um operador tal que, sob a ação adjunta com os elementos de \hat{s} , se tenha

$$[b_{\pm j}, F] = w_j^{\pm} F, \qquad \pm j \in E \subset \mathbb{Z},$$

e então

$$\begin{aligned} \tau_j(t^{\pm}) &= (\Psi_V e^F \Psi_V^{-1}) |\lambda_j\rangle, \\ &= \exp\left[\exp\left(\sum_{l \in E \geq 0} w_l^+ t_l^{\pm} + \sum_{-l \in E < 0} w_l^- t_l^{-}\right) F\right] |\lambda_j\rangle. \end{aligned} \qquad (3.3.9)$$

Se ainda F for nilpotente sobre o vetor $|\lambda_j\rangle$, então

$$\tau_j(t^{\pm}) = \left(1 + \sum_{l=1}^N f_l(t^{\pm}) F^l\right) |\lambda_j\rangle, \qquad (3.3.10)$$

onde os $F_l(t^{\pm})$ são funções dos parâmetros t_k^{\pm} .

4

Soluções ‘bright’ sóliton do modelo *NLS*

Seja o operador de Lax

$$L = \partial_x - H^1 - \psi^+ E_+^0 - \psi_- E_-^0 - \nu_1 C, \quad (4.0.1)$$

onde os ψ^\pm e ν_1 são os campos do modelo. O modelo NLS é descrito em termos da álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$ [17, 18] com vetor de graduação homogênea $s = (0, 1)$, que define uma graduação homogênea e que o vetor de peso mais alto $|\lambda_i\rangle$ seja dado por $|\lambda_0\rangle$. A álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$ é dada, na base de Weyl-Cartan, por

$$\left\{ \begin{array}{l} [H^m, H^n] = n \frac{1}{2} C \delta_{m+n,0}, \\ [H^m, E_\pm^n] = \pm E_\pm^{m+n}, \\ [E_+^m, E_-^n] = 2H^{m+n} + nC \delta_{m+n,0}, \\ [D, T^m] = mT^m. \end{array} \right. \quad (4.0.2)$$

As equações da hierarquia são obtidas com [17, 18]

$$\frac{\partial L}{\partial t_{N'}} = [B_{N'}, L], \quad N' > 0, \quad (4.0.3)$$

onde

$$B_{N'} = \left(U H^{N'} U^{-1} \right)_{\geq 0} \in C^\infty(\mathbb{R}, \widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0}(s)), \quad (4.0.4)$$

onde o potencial $B_{N'}$ pertence ao subespaço

$$B_{N'} \in \bigoplus_{i=0}^{N'} \widehat{\mathfrak{g}}_i, \quad (4.0.5)$$

e onde U é um elemento de grupo de \widehat{G}_- , ou seja, da forma

$$U = \exp \left(\sum_{n>1} T^{-n} \right), \quad [D, T^n] = nT^n. \quad (4.0.6)$$

Os primeiros $B_{N'}$ obtidos são [17]

$$B_1 = H^1 + \psi^+ E_+^0 + \psi^- E_-^0 + \nu_1 C, \quad (4.0.7)$$

$$B_2 = H^2 + \psi^+ E_+^1 + \psi^- E_-^1 - 2\psi^+ \psi^- H^0 + \partial_x \psi^+ E_+^0 - \partial_x \psi^- E_-^0 + \nu_2 C; \quad (4.0.8)$$

as primeiras equações da hierarquia são

$$\begin{cases} \partial_{t_1} L = [B_1, L], \\ \partial_{t_1} \psi^\pm = \partial_x \psi^\pm, \\ \partial_{t_1} \nu_1 = \partial_x \nu_1; \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_{t_2} L = [B_2, L], \\ \partial_{t_2} \psi^\pm = \pm \partial_{xx} \psi^\pm \mp 2\psi^+ \psi^- \psi^\pm, \\ \partial_{t_2} \nu_1 = \partial_x \nu_2. \end{cases} \quad (4.0.9)$$

Pode-se escrever a equação de curvatura nula para os potenciais B_1 e $B_{N'}$,

$$[\partial_{t_{N'}} - B_{N'}, \partial_x - B_1] = 0, \quad N' = 1, 2, \dots, \quad (4.0.10)$$

onde $B_{N'}$ tem a forma geral

$$B_{N'} = H^{N'} + \sum_{n=0}^{N'-1} B_{N'}^n, \quad B_{N'}^n \in C^\infty(\mathbb{R}, \widehat{\mathfrak{g}}_n(s_{hom})). \quad (4.0.11)$$

Os potenciais de vácuo B_1^V e $B_{N'}^V$ são obtidos quando se faz $\psi^\pm = \nu_{N'} = 0$, logo

$$B_1^V = H^1, \quad B_{N'}^V = H^{N'}; \quad (4.0.12)$$

como $B_{N'} = \partial_{t_{N'}} \psi \psi^{-1}$, encontra-se

$$\psi_V = \exp \left(xH^1 + t_{N'} H^{N'} + \sum_{n=1,2,\dots \neq N'} t_n H^n \right) = \exp \left(\sum_{n=1,2,\dots} t_n H^n \right) \quad (4.0.13)$$

As conexões na órbita do vácuo são dadas por

$$B_1 = \Theta H^1 \Theta^{-1} + \partial_x \Theta \Theta^{-1} \quad (4.0.14)$$

$$= M^{-1} (NH^1 N^{-1} - \partial_x M M^{-1} + \partial_x N N^{-1}) M \quad (4.0.15)$$

$$B_{N'} = \Theta H^{N'} \Theta^{-1} + \partial_x \Theta \Theta^{-1} \quad (4.0.16)$$

$$= M^{-1} (NH^{N'} N^{-1} - \partial_x M M^{-1} + \partial_x N N^{-1}) M \quad (4.0.17)$$

Denotando

$$\Theta = \exp \left(\sum_{n>0} \sigma_{-n} \right), \quad M = \exp(\sigma_0), \quad N = \exp \left(\sum_{n>0} \sigma_n \right) \quad (4.0.18)$$

onde

$$[D, \sigma_n] = n\sigma_n, \quad (4.0.19)$$

então pode-se relacionar os campos ψ^\pm a algumas das σ_n s; como exemplo, para $N' = 2$ e denotando $t_2 = t$, se encontra

$$B_1 = H^1 + [\sigma_{-1}, H^1] + \widehat{g}_{<0}, \quad (4.0.20)$$

$$= M^{-1} (H^1 - \partial_x M M^{-1} + \partial_x \sigma_1) M + \widehat{g}_{>1}, \quad (4.0.21)$$

$$B_2 = H^2 + [\sigma_{-1}, H^2] + [\sigma_{-2}, H^2] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-1}, H^2]] + \widehat{g}_{<0}, \quad (4.0.22)$$

$$= M^{-1} (H^2 - \partial_t M M^{-1} + \partial_t \sigma_1 + \partial_t \sigma_2 + [\sigma_1, \partial_t \sigma_1]) M + \widehat{g}_{>2}. \quad (4.0.23)$$

como o termo de grau -1 em (4.0.14) é nulo e usando que

$$\partial e^\sigma e^{-\sigma} = \partial \sigma + \frac{1}{2} [\sigma, \partial \sigma] + \frac{1}{3!} [\sigma, \partial \sigma], \quad (4.0.24)$$

tem-se a relação entre os campos σ_{-1} e σ_{-2}

$$\partial_x \sigma_{-1} + [\sigma_{-2}, H^1] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-1}, H^1]] = 0. \quad (4.0.25)$$

Denotando σ_{-1} e σ_{-2} respectivamente por

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} &= -\psi^+ E_+^{-1} + \psi^- E_-^{-1} + \sigma_{-1}^0 H^{-1}, \\ \sigma_{-2} &= -\sigma_{-2}^+ E_+^{-2} + \sigma_{-2}^- E_-^{-2} + \sigma_{-2}^0 H^{-2}, \end{aligned}$$

então, de (4.0.25) se encontra que

$$\begin{cases} \partial_x \sigma_{-1}^0 = 2\psi^+ \psi^-, \\ \sigma_{-2}^+ = -\partial_x \psi^+ + \frac{1}{2} \sigma_{-1}^0 \psi^+, \\ \sigma_{-2}^- = -\partial_x \psi^- + \frac{1}{2} \sigma_{-1}^0 \psi^-. \end{cases} \quad (4.0.26)$$

Substituindo (4.0.26) em (4.0.20) e (4.0.22), encontra-se (4.0.9) onde

$$\nu_1 = -\frac{\sigma_{-1}^0}{2}, \quad \nu_2 = -\sigma_{-2}^0. \quad (4.0.27)$$

As σ_{-n} s são usadas para cancelar as ‘componentes não desejadas’. Os elementos de grau -2 em (4.0.20), que também são nulos, dão a relação

$$\partial_x \sigma_{-2}^0 + [\sigma_{-3}, h^1] + \frac{1}{2} [\sigma_{-2}, [\sigma_{-1}, H^1]] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-2}, H^1]] = 0, \quad (4.0.28)$$

onde é suposto que

$$\sigma_{-3} = \sigma_{-3}^+ E_+^{-3} + \sigma_{-3}^- E_-^{-3} + \sigma_{-3}^0 H^{-3}; \quad (4.0.29)$$

então, de (4.0.28), se encontra as relações

$$\partial_t \sigma_{-1}^0 = 2(\psi^- \partial_x \psi^+ - \psi^+ \partial_x \psi^-), \quad (4.0.30)$$

$$\partial_t \sigma_{-2}^0 = \frac{2}{3} \psi^+ \psi^- (\sigma_{-1}^0)^2 - 2 \partial_x \psi^+ \partial_x \psi^- - \frac{2}{3} (\psi^+ \psi^-)^2 + \psi^- \partial_x \psi^+ - \psi^+ \partial_x \psi^-. \quad (4.0.31)$$

4.1 As funções τ

O vetor função $\vec{\tau}$ definido em (3.3.1) é

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \Psi_V h \Psi_V^{-1} |\lambda_0\rangle, \\ &= \Theta^{-1} M^{-1} |\lambda_0\rangle,\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

onde h é um elemento constante do grupo $\widehat{SL}(2)$ e que gera as transformações dressing. Desta forma, em (4.1.1), pode-se escrever

$$\Psi_V h \Psi_V^{-1} |\lambda_0\rangle = \exp\left(-\sum_{n>0} \sigma_{-n}\right) \exp(-\sigma_0) |\lambda_0\rangle\tag{4.1.2}$$

Os elementos da subálgebra de grau zero σ_0 de $\widehat{sl}(2)$ são dados na combinação linear

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \sigma_0^0 H + \sigma_0^+ E_+^0 + \sigma_0^- E_-^0 + \varsigma C \\ &= \sigma_0^0 h_1 + \sigma_0^+ e_1 + \sigma_0^- f_1 + \varsigma C\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

onde, das representações integráveis de peso mais alto para as álgebras de Kac-Moody definidas no apêndice B, se tem que $h_1 |\lambda_0\rangle = f_1 |\lambda_0\rangle = e_1 |\lambda_0\rangle = 0$ e que $C |\lambda_0\rangle = |\lambda_0\rangle$; assim, a expressão de grau zero em (4.1.2) é dado por

$$\begin{aligned}e^{-\sigma_0} |\lambda_0\rangle &= (\Psi_V h \Psi_V^{-1})_0 |\lambda_0\rangle, \\ &= |\lambda_0\rangle \tau^0(x, t_n),\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

onde $\tau^0(x, t_n)$, $n = 1, 2, \dots$ é uma função de x e dos tempos t_n s e expressa pelos elementos de matriz

$$\tau^0(x, t_n) \equiv \tau^0 = \langle \lambda_0 | (\Psi_V h \Psi_V^{-1})_0 | \lambda_0 \rangle.\tag{4.1.5}$$

Usando (3.3.5) e (3.3.6), encontra-se que o elemento de grau -1 de Θ^{-1} é

$$-\sigma_{-1} |\lambda_0\rangle = \frac{(\Psi h \Psi^{-1})_{-1}}{\tau^0} |\lambda_0\rangle,\tag{4.1.6}$$

mas, em termos dos elementos de grau -1 de $\widehat{sl}(2)$, tem-se

$$(-\Psi^+ E_+^{-1} + \Psi^- E_-^{-1} + \sigma_{-1}^0 H^{-1}) |\lambda_0\rangle = -\frac{(\Psi h \Psi^{-1})_{-1}}{\tau^0} |\lambda_0\rangle.\tag{4.1.7}$$

Multiplicando E_-^1 pela esquerda de (4.1.7), sabendo que $E_-^1 E_+^{-1} = [E_-^1, E_+^{-1}] + E_+^{-1} E_-^1$ e lembrando que qualquer gerador de grau positivo aniquila o estado de peso máximo $|\lambda_0\rangle$, encontra-se

$$\Psi^+ = \frac{\tau^+}{\tau^0},\tag{4.1.8}$$

onde

$$\tau^+ = \langle \lambda_0 | E_-^1 (\Psi h \Psi^{-1})_{-1} | \lambda_0 \rangle. \quad (4.1.9)$$

Da mesma maneira, multiplicando em (4.1.7) por E_+^1 pela esquerda e sabendo que $E_+^1 E_-^{-1} = [E_+^1, E_-^{-1}] + E_-^{-1} E_+^1$, encontra-se

$$\Psi^- = -\frac{\tau^-}{\tau^0}, \quad (4.1.10)$$

onde

$$\tau^- = \langle \lambda_0 | E_+^1 (\Psi h \Psi^{-1})_{-1} | \lambda_0 \rangle. \quad (4.1.11)$$

4.2 Primeiras soluções não triviais

Escolhe-se para o elemento constante de grupo h a forma

$$h = e^F \quad (4.2.1)$$

para

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_1^n E_-^{-n}, \quad (4.2.2)$$

sendo que ν_1 é um parâmetro real; será de uso as propriedades (4.2.4) e (4.2.7), que se seguem: tomando

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^n, F \right] = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu_1^m [H^n, E_n^{-m}] = - \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu_1^m E_n^{n-m}, \quad (4.2.3)$$

mas fazendo $n - m = m'$ encontra-se que

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^n, F \right] = - \sum_{n=1}^{\infty} t_n \nu_1^n F \equiv - \phi_1 F; \quad (4.2.4)$$

seja a solução de vácuo para *NLS* dada por

$$\Psi_V = e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^n} \quad (4.2.5)$$

então

$$\begin{aligned} \Psi_V h \Psi_V^{-1} &= \Psi_V e^F \Psi_V^{-1} \\ &= \Psi_V (1 + F + F^2/2 + \dots) \Psi_V^{-1}, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

e supondo que $F^n = 0$ para todo $n \geq 2$ se fica agora com

$$\Psi_V h \Psi_V^{-1} = \Psi_V \Psi_V^{-1} + \Psi_V F \Psi_V^{-1},$$

e usando a fórmula de Campbell-Hausdorff e a forma da solução de vácuo dada em (4.2.5), tem-se

$$\begin{aligned}\Psi_V h \Psi_V^{-1} &= 1 + F - \left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^n, F \right] + \frac{1}{2!} \left[\sum_{m=1}^{\infty} t_m H^m, \left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^n, F \right] \right] + \dots \\ &= 1 + e^{-\phi_1} F\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

Agora pode-se mostrar a primeira solução não trivial: seja $\hat{\tau}^0$ definida em (3.3.5), então

$$\begin{aligned}\hat{\tau}^0 &= \langle \lambda_0 | 1 + e^{-\phi_1} E_-^0 | \lambda_0 \rangle \\ &= 1 + e^{-\phi_1} \langle \lambda_0 | E_-^0 | \lambda_0 \rangle \\ &= 1;\end{aligned}\quad (4.2.8)$$

do mesmo modo, sejam τ^+ e τ^- definidas em (4.1.9) e (4.1.11), então

$$\begin{aligned}\tau^+ &= \langle \lambda_0 | E_-^1 (1 + e^{-\phi_1} \nu_1 E_-^{-1}) | \lambda_0 \rangle \\ &= \langle \lambda_0 | E_-^1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi_1} \nu_1 \langle \lambda_0 | E_-^1 E_-^{-1} | \lambda_0 \rangle \\ &= 0,\end{aligned}\quad (4.2.9)$$

e

$$\begin{aligned}\tau^- &= \langle \lambda_0 | E_+^1 (1 + e^{-\phi_1} \nu_1 E_-^{-1}) | \lambda_0 \rangle \\ &= \langle \lambda_0 | E_+^1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi_1} \nu_1 \langle \lambda_0 | E_+^1 E_-^{-1} | \lambda_0 \rangle \\ &= e^{-\phi_1} \nu_1 \langle \lambda_0 | E_-^1 E_+^{-1} + 2H^0 + C | \lambda_0 \rangle \\ &= e^{-\phi_1} \nu_1,\end{aligned}\quad (4.2.10)$$

de modo que em (4.1.8) e em (4.1.10) encontra-se

$$\begin{cases} \Psi^+ = 0, \\ \Psi^- = -e^{-\phi_1} \nu_1. \end{cases}\quad (4.2.11)$$

A outra solução não trivial vem ao se assumir que $h = e^G$, com $G = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n E_+^{-n}$, de modo que

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^n, G \right] = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \rho_1^n G \equiv \eta_1 G;\quad (4.2.12)$$

e

$$\Psi_V h \Psi_V^{-1} = 1 + e^{\eta_1} G;\quad (4.2.13)$$

então,

$$\hat{\tau}^0 = \langle \lambda_0 | 1 + e^{-\phi_1} E_+^0 | \lambda_0 \rangle = 1,\quad (4.2.14)$$

além de que

$$\begin{aligned}
\tau^+ &= \langle \lambda_0 | E_-^1 (1 + e^{-\eta_1} \rho_1 E_+^{-1}) | \lambda_0 \rangle, \\
&= \langle \lambda_0 | E_-^1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\eta_1} \rho_1 \langle \lambda_0 | E_-^1 E_+^{-1} | \lambda_0 \rangle, \\
&= e^{-\eta_1} \rho_1 \langle \lambda_0 | E_+^1 E_-^{-1} - 2H^0 - C | \lambda_0 \rangle, \\
&= -e^{-\eta_1} \rho_1
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

e

$$\begin{aligned}
\tau^- &= \langle \lambda_0 | E_+^1 (1 + e^{-\eta_1} \rho_1 E_+^{-1}) | \lambda_0 \rangle, \\
&= \langle \lambda_0 | E_+^1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\eta_1} \rho_1 \langle \lambda_0 | E_+^1 E_+^{-1} | \lambda_0 \rangle, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Com isso, se tem as soluções

$$\begin{cases} \Psi^+ &= -e^{-\eta_1} \rho_1, \\ \Psi^- &= 0. \end{cases} \tag{4.2.17}$$

4.3 Solução 1-sóliton

Para obter essa solução, faz-se a escolha do elemento de grupo constante por ser

$$h = e^{aF} e^{bG}, \tag{4.3.1}$$

com

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_1^n E_-^{-n}, \quad e \quad G = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n E_+^{-n}, \tag{4.3.2}$$

e lembrando que a solução de vácuo é dada em (4.2.5) por $\Psi_V = e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^n}$, então

$$\begin{aligned}
\Psi_V h \Psi_V^{-1} &= (1 + e^{-\phi} aF)(1 + e^{-\eta} bG), \\
&= 1 + e^{-\phi} aF + e^{\eta} bG + e^{-\phi+\eta} abFG
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

onde $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \nu^n$ e $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \nu^n$. A função $\hat{\tau}^0$ fica

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}^0 &= \langle \lambda_0 | (1 + e^{-\phi} aF + e^{\eta} bG + e^{-\phi+\eta} abFG)_0 | \lambda_0 \rangle \\
&= 1 + e^{-\phi} a \langle \lambda_0 | \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_1^n E_-^{-n} \right)_0 | \lambda_0 \rangle + e^{\eta} b \langle \lambda_0 | \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n E_+^{-n} \right)_0 | \lambda_0 \rangle \\
&\quad + e^{-\phi+\eta} ab \langle \lambda_0 | \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \nu_1^m E_-^{-m} \rho_1^n E_+^{-n} \right)_0 | \lambda_0 \rangle,
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

mas, sabendo que $\langle \lambda_0 | E_-^{-n} | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_0 | E_+^{-n} | \lambda_0 \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e que $\langle \lambda_0 | \sum_{n \geq 0} E_-^{-n} = \sum_{m \leq 0} E_+^{-m} | \lambda_0 \rangle = 0$, tem-se que

$$\hat{\tau}^0 = 1 + e^{-\phi+\eta} ab \langle \lambda_0 | \left(\sum_{m,n>0}^{\infty} \nu_1^{-m} E_-^m \rho_1^n E_+^{-n} \right)_0 | \lambda_0 \rangle, \quad (4.3.5)$$

onde, usando as regras de comutação (B.1.1) para $\widehat{sl}(2)$ de graduação homogênea, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^0 &= 1 + e^{-\phi+\eta} ab \langle \lambda_0 | \left(\sum_{m,n>0}^{\infty} (-2H^0 - (-m)\delta_{-m+n,0} C) \nu_1^{-m} \rho_1^n \right)_0 | \lambda_0 \rangle \\ &= 1 + e^{-\phi+\eta} ab \sum_{m,n>0}^{\infty} m \nu_1^{-m} \rho_1^n \delta_{-m+n,0} \\ &= 1 + e^{-\phi+\eta} ab \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\rho_1}{\nu_1} \right)^n \\ &= 1 + e^{-\phi+\eta} ab \frac{\nu_1 \rho_1}{(\rho_1 - \nu_1)^2}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Da definição de τ^+ em (4.1.9), da forma de Ψ_V para a solução 1-sóliton e das formas de F e G em (C.0.6), encontra-se

$$\begin{aligned} \tau^+ &= \langle \lambda_0 | E_-^1 (\Psi h \Psi^{-1})_{-1} | \lambda_0 \rangle \\ &= \langle \lambda_0 | E_-^1 (1 + e^{-\phi} a F + e^{\eta} b G + e^{-\phi+\eta} ab FG)_{-1} | \lambda_0 \rangle \\ &= \langle \lambda_0 | E_-^1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi} a \langle \lambda_0 | E_-^1 \left(\sum_{n>0} \nu_1^n E_-^{-n} \right)_{-1} | \lambda_0 \rangle + e^{\eta} b \langle \lambda_0 | E_-^1 \left(\sum_{n>0} \rho_1^n E_+^{-n} \right)_{-1} | \lambda_0 \rangle \\ &\quad + e^{-\phi+\eta} ab \langle \lambda_0 | E_-^1 \left(\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \nu_1^n \rho_1^m E_-^{-n} E_+^{-m} \right)_{-1} | \lambda_0 \rangle \\ &= e^{\eta} b \rho_1 \langle \lambda_0 | E_-^1 E_+^{-1} | \lambda_0 \rangle \\ &\quad + e^{-\phi+\eta} ab \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \nu_1^n \rho_1^m \langle \lambda_0 | E_-^1 (-2H^{-m+1} - (-m)\delta_{-m+1,0} C + E_-^{-n} E_+^{-m})_{-1} | \lambda_0 \rangle \\ &= e^{\eta} b \rho_1 \langle \lambda_0 | -2H^0 + C | \lambda_0 \rangle \\ &= e^{\eta} b \rho_1. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned}
\tau^- &= \langle \lambda_0 | E_+^1 (\Psi h \Psi^{-1})_{-1} | \lambda_0 \rangle \\
&= \langle \lambda_0 | E_+^1 (1 + e^{-\phi} a F + e^\eta b G + e^{-\phi+\eta} ab FG)_{-1} | \lambda_0 \rangle \\
&= \langle \lambda_0 | E_+^1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi} a \nu_1 \langle \lambda_0 | E_+^1 E_-^{-1} | \lambda_0 \rangle + e^\eta b \rho_1 \langle \lambda_0 | E_+^1 E_+^{-1} | \lambda_0 \rangle \\
&\quad + e^{-\phi+\eta} ab \langle \lambda_0 | E_+^1 \left(\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \nu_1^n \rho_1^m E_-^{-n} E_+^{-m} \right)_{-1} | \lambda_0 \rangle \\
&= e^{-\phi} a \nu_1 + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \nu_1^n \rho_1^m \langle \lambda_0 | E_+^1 (-2H^{-n-m} + n\delta_{-n-m,0} C + E_+^{-m} E_-^{-n})_{-1} | \lambda_0 \rangle \\
&= e^{-\phi} a \nu_1.
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Assim, chega-se às soluções conhecidas como 1-sóliton, dadas por

$$\begin{cases} \Psi^+ = \frac{e^\eta b \rho_1}{1 + e^{-\phi+\eta} ab \frac{\nu_1 \rho_1}{(\rho_1 - \nu_1)^2}}, \\ \Psi^- = \frac{e^{-\phi} a \nu_1}{1 + e^{-\phi+\eta} ab \frac{\nu_1 \rho_1}{(\rho_1 - \nu_1)^2}}, \end{cases} \tag{4.3.9}$$

que, com $\rho_1 = -\nu_1$ e $b = -a = -2$, se encontra as soluções

$$\Psi^+ = \nu_1 e^{\nu_1^2 t} \operatorname{sech}(\nu_1 x), \tag{4.3.10}$$

$$\Psi^- = -\nu_1 e^{-\nu_1^2 t} \operatorname{sech}(\nu_1 x). \tag{4.3.11}$$

4.4 Solução 2-sólitons

Para este caso, é escolhido para o elemento de grupo h que

$$h = e^{a_1 F_1} e^{b_1 G_1} e^{a_2 F_2} e^{b_2 G_2}, \tag{4.4.1}$$

onde

$$F_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_i^n E_-^{-n} \quad \text{e} \quad G_i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_i^m E_+^{-m}, \quad \text{com} \quad i = 1, 2. \tag{4.4.2}$$

encontra-se para este caso que

$$\Psi_V h \Psi_V^{-1} = (1 + e^{-\phi_1} a_1 F_1)(1 + e^{-\eta_1} b_1 G_1)(1 + e^{-\phi_2} a_2 F_2)(1 + e^{-\eta_2} b_2 G_2),$$

onde

$$\phi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_i t_n \quad \text{e} \quad \eta_i = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_i t_n, \quad \text{com} \quad i = 1, 2. \tag{4.4.3}$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
\Psi_V h \Psi_V^{-1} &= 1 + e^{-\phi_1} a_1 F_1 + e^{-\phi_2} a_2 F_2 + e^{\eta_1} b_1 G_1 + e^{-\eta_2} b_2 G_2 + e^{\eta_1 + \eta_2} b_1 b_2 G_1 G_2 \\
&+ e^{-\phi_1 - \phi_2} a_1 a_2 F_1 F_2 + e^{-\phi_1 + \eta_1} a_1 b_1 F_1 G_1 + e^{-\phi_2 + \eta_2} a_2 b_2 F_2 G_2 \\
&+ e^{-\phi_1 + \eta_2} a_1 b_2 F_1 G_2 + e^{\eta_1 - \phi_2} a_2 b_1 G_1 F_2 + e^{\eta_1 - \phi_2 + \eta_2} a_1 b_1 a_2 G_1 F_2 G_2 \\
&+ e^{-\phi_1 - \phi_2 + \eta_2} a_1 a_2 b_2 F_1 F_2 G_2 + e^{-\phi_1 + \eta_1 + \eta_2} a_1 b_1 a_2 F_1 G_1 G_2 + \\
&+ e^{-\phi_1 + \eta_1 - \phi_2} a_1 b_1 a_2 F_1 G_1 F_2 + e^{-\phi_1 + \eta_1 - \phi_2 + \eta_2} a_1 b_1 a_2 b_2 F_1 G_1 F_2 G_2. \quad (4.4.4)
\end{aligned}$$

Desta, vem que se pode escrever as funções τ , onde os termos que não se anulam são

$$\begin{aligned}
\tau^0 &= 1 + e^{-\phi_1 + \eta_1} a_1 b_1 \langle \lambda_0 | F_1 G_1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi_1 + \eta_2} a_1 b_2 \langle \lambda_0 | F_1 G_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi_2 + \eta_2} a_2 b_2 \langle \lambda_0 | F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle \\
&+ e^{\eta_1 - \phi_2} b_1 a_2 \langle \lambda_0 | G_1 F_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi_1 + \eta_1 - \phi_2 + \eta_2} a_1 b_1 a_2 b_2 \langle \lambda_0 | F_1 G_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle, \quad (4.4.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau^+ &= e^{\eta_1} b_1 \langle \lambda_0 | E_-^1 G_1 | \lambda_0 \rangle + e^{\eta_2} b_2 \langle \lambda_0 | E_-^1 G_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi_1 - \phi_2 + \eta_2} a_1 a_2 b_2 \langle \lambda_0 | E_-^1 F_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle \\
&+ e^{\eta_1 - \phi_2 + \eta_2} a_1 a_2 b_2 \langle \lambda_0 | E_-^1 G_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle, \quad (4.4.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau^- &= e^{-\phi_1} a_1 \langle \lambda_0 | E_+^1 F_1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi_2} a_2 \langle \lambda_0 | E_+^1 F_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\phi_1 - \phi_2 + \eta_2} a_1 a_2 b_2 \langle \lambda_0 | E_+^1 F_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle \\
&+ e^{-\phi_1 + \eta_1 - \phi_2} a_1 b_1 a_2 \langle \lambda_0 | E_+^1 F_1 G_1 F_2 | \lambda_0 \rangle. \quad (4.4.7)
\end{aligned}$$

O restante dos elementos de matriz se anula e isso é demonstrado no apêndice C com o uso das representações integráveis de peso máximo. Desta forma, tem-se para τ^0 , τ^+ e τ^- , que

$$\begin{aligned}
\tau^0 &= 1 + e^{-\phi_1 + \eta_1} a_1 b_1 \frac{\nu_1 \rho_1}{(\nu_1 - \rho_1)^2} + e^{-\phi_1 + \eta_2} a_1 b_2 \frac{\nu_1 \rho_2}{(\nu_1 - \rho_2)^2} \\
&+ e^{-\phi_2 + \eta_1} a_2 b_1 \frac{\nu_2 \rho_1}{(\nu_2 - \rho_1)^2} + e^{-\phi_2 + \eta_2} a_2 b_2 \frac{\nu_2 \rho_2}{(\nu_2 - \rho_2)^2} \\
&+ e^{-\phi_1 + \eta_1 - \phi_2 + \eta_2} a_1 b_1 a_2 b_2 \frac{\nu_1 \rho_1 \nu_2 \rho_2 (\nu_1 - \nu_2)^2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{(\nu_1 - \rho_1)^2 (\nu_1 - \rho_2)^2 (\nu_2 - \rho_1)^2 (\nu_2 - \rho_2)^2}, \\
\tau^+ &= e^{\eta_1} b_1 \rho_1 + e^{\eta_2} b_2 \rho_2 + e^{-\phi_1 + \eta_1 + \eta_2} a_1 b_1 b_2 \frac{\nu_1 \rho_1 \rho_2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{(\nu_1 - \rho_1)^2 (\nu_1 - \rho_2)^2} \\
&+ e^{\eta_1 - \phi_2 + \eta_2} b_1 a_2 b_2 \frac{\rho_1 \nu_2 \rho_2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{(\rho_1 - \nu_2)^2 (\rho_2 - \nu_2)^2}, \quad (4.4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau^- &= e^{-\phi_1} a_1 \nu_1 + e^{-\phi_2} a_2 \nu_2 + e^{-\phi_1 - \phi_2 + \eta_2} a_1 a_2 b_2 \frac{\nu_1 \nu_2 \rho_2 (\nu_1 - \nu_2)^2}{(\nu_1 - \rho_2)^2 (\nu_2 - \rho_2)^2} \\ &+ e^{-\phi_1 - \phi_2 + \eta_1} a_1 b_1 a_2 \frac{\nu_1 \nu_2 \rho_1 (\nu_1 - \nu_2)^2}{(\nu_1 - \rho_1)^2 (\nu_2 - \rho_1)^2}.\end{aligned}\quad (4.4.9)$$

Fazendo nas funções τ que $\rho_i = -\nu_i$, e $b_i = -a_i$, $i = 1, 2$ e usando $\phi_i = \nu_i x + \nu_i^2 t$, $\eta_i = -\nu_i x + \nu_i^2 t$, encontra-se que

$$\begin{aligned}\tau^0 &= 1 + e^{-2\nu_1 x} \frac{a_1^2}{4} + e^{-2\nu_2 x} \frac{a_2^2}{4} + e^{-(\nu_1 + \nu_2)x} e^{-(\nu_1^2 - \nu_2^2)t} a_1 a_2 \frac{\nu_1 \nu_2}{(\nu_1 + \nu_2)^2} \\ &+ e^{-(\nu_1 + \nu_2)x} e^{(\nu_1^2 - \nu_2^2)t} a_1 a_2 \frac{\nu_1 \nu_2}{(\nu_1 + \nu_2)^2} + \frac{1}{4} a_1^2 a_2^2 e^{-2(\nu_1 + \nu_2)x} \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right)^4,\end{aligned}\quad (4.4.10)$$

$$\begin{aligned}\tau^+ &= a_1 \nu_1 e^{\eta_1} + a_2 \nu_2 e^{\eta_2} \\ &+ a_1^2 a_2 e^{-\phi_1} e^{\eta_1} e^{\eta_2} \nu_2 \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right)^2 + a_1 a_2^2 e^{\eta_1} e^{-\phi_2} e^{\eta_2} \nu_1 \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right)^2,\end{aligned}\quad (4.4.11)$$

$$\begin{aligned}\tau^- &= a_1 \nu_1 e^{-\phi_1} + a_2 \nu_2 e^{-\phi_2} \\ &+ e^{-\phi_1} e^{-\phi_2} e^{\eta_2} a_1 a_2^2 \nu_1 \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right)^2 + e^{-\phi_1} e^{-\phi_2} e^{\eta_1} a_1^2 a_2 \nu_2 \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right)^2.\end{aligned}\quad (4.4.12)$$

Tomando agora para $a_i = 2 \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2}$, se encontra que

$$\begin{aligned}\tau^0 &= e^{-(\nu_1 + \nu_2)x} \left\{ 2 \cosh (\nu_1 + \nu_2)x + 2 \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \right)^2 \cosh (\nu_1 - \nu_2)x \right. \\ &\quad \left. + 8 \frac{\nu_1 \nu_2}{(\nu_1 - \nu_2)^2} \cosh (\nu_1^2 - \nu_2^2)t \right\},\end{aligned}\quad (4.4.13)$$

$$\tau^\pm = 4 \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \right)^2 e^{-(\nu_1 + \nu_2)x} \left\{ \nu_1 e^{\pm \nu_1^2 t} \cosh \nu_2 x + \nu_2 e^{\pm \nu_2^2 t} \cosh \nu_1 x \right\}, \quad (4.4.14)$$

o que dá a relação para as soluções ψ^\pm

$$\begin{aligned}\psi^\pm &= \pm \frac{\tau^\pm}{\tau^0} \\ &= a^2 \frac{\pm \nu_1 e^{\pm \nu_1^2 t} \cosh \nu_2 x + \nu_2 e^{\pm \nu_2^2 t} \cosh \nu_1 x}{2 \cosh (\nu_1 + \nu_2)x + \frac{a^2}{2} \cosh (\nu_1 - \nu_2)x + 8 \frac{\nu_1 \nu_2}{(\nu_1 - \nu_2)^2} \cosh (\nu_1^2 - \nu_2^2)t},\end{aligned}\quad (4.4.15)$$

onde $a^2 \equiv 4 \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \right)^2$.

5

Soluções ‘dark’ s3lton do modelo NLS

A forma das equa33es do modelo *NLS* convenientes para o tratamento de condi33es de contorno constantes e que suportam solu33es do tipo dark-s3lton [19] para as fun33es $\psi = \psi(x, t)$ est3 dada na forma

$$\partial_t \psi + \partial_{xx} \psi - 2(|\psi|^2 - \rho^2) = 0. \quad (5.0.1)$$

Este modelo diferencia-se do modelo *NLS* com condi33es de contorno nula, pois agora pode-se tratar o sistema com condi33es de contorno n3o nulas, dadas por [20, 21, 22]

$$\psi = \begin{cases} \rho, & x \rightarrow -\infty, \\ \rho\epsilon^2, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \epsilon = e^{i\theta}, \quad (5.0.2)$$

que s3o condi33es de contorno compat3veis com (5.0.1). O par de Lax A e B proposto 3

$$\begin{aligned} A &= H^1 + \Psi^+ E_+^0 + \Psi^- E_-^0 + \Phi_1 C, \\ B &= H^2 + \Psi^+ E_+^1 + \Psi^- E_-^1 + \partial_x \Psi^+ E_+^0 - \partial_x \Psi^- E_-^0 - 2(\Psi^+ \Psi^- - \rho^2) H^0 + \phi_2 C, \end{aligned} \quad (5.0.3)$$

onde Ψ^\pm , ϕ_1 e ϕ_2 s3o os campos do modelo. O par de Lax em (5.0.3) e a respectiva condi33o de curvatura nula (2.5.3) descrevem o modelo (5.0.1). De fato, tomando o comutador de A com B dados em (5.0.3) e as derivadas parciais $\partial_x B$ e $\partial_t A$, tem-se

$$\begin{aligned} [A, B] &= \partial_x \Psi^+ E_+^1 + \partial_x \Psi^- E_-^1 - 2\partial_x (\Psi^+ \Psi^-) H^0 \\ &\quad + 2\Psi^+ (\Psi^+ \Psi^- - \rho^2) E_+^0 + 2\Psi^- (\Psi^+ \Psi^- - \rho^2) E_-^0, \end{aligned} \quad (5.0.4)$$

$$\begin{aligned} \partial_x B &= \partial_x \Psi^+ E_+^1 + \partial_x \Psi^- E_-^1 + \partial_{xx} \Psi^+ E_+^0 \\ &\quad - \partial_{xx} \Psi^- E_-^0 - 2\partial_x (\Psi^+ \Psi^-) H^0 + \partial_x \phi_2 C, \end{aligned} \quad (5.0.5)$$

$$\partial_t A = \partial_t \Psi^+ E_+^0 + \partial_t \Psi^- E_-^0 + \partial_t \phi_1 C; \quad (5.0.6)$$

assim, na condi33o de curvatura nula (2.5.3)

$$\partial_x B - \partial_t A - [A, B] = 0, \quad (5.0.7)$$

se tem, na direção dos geradores E_+^0 e E_-^0 , as equações de movimento

$$\partial_t \Psi^\pm = \pm \partial_{xx} \Psi^\pm \mp 2(\Psi^+ \Psi^- - \Psi_0^+ \Psi_0^-) \Psi^\pm, \quad (5.0.8)$$

e na direção do termo central C se tem $\partial_t \phi_1 = \partial_x \phi_2$, enquanto que nas direções dos outros geradores, as equações são triviais; seja agora a transformação

$$t \rightarrow it, x \rightarrow ix, \Psi^\pm \rightarrow \Psi^\pm \epsilon^{\mp 2}, \quad (5.0.9)$$

onde o fator $\epsilon^{\mp 2}$ é introduzido para conveniência posterior; finalmente, a identificação

$$\psi \equiv \Psi^+ = (\Psi^-)^*, \quad (5.0.10)$$

tal que permite $\Psi_0^+ \Psi_0^- = -\rho^2$, reproduz o modelo (5.0.1), onde $*$ significa conjugação complexa.

Os campos de vácuo A^V e B^V de (5.0.3) são

$$\begin{aligned} A^V &= H^1 + \rho \epsilon^{-2} E_+^0 + \rho \epsilon^2 E_-^0, \\ B^V &= H^2 + \epsilon^{-2} \rho E_+^1 + \epsilon^2 \rho E_-^1. \end{aligned} \quad (5.0.11)$$

As soluções de vácuo que serão consideradas são as de configuração constante

$$\Psi_0^\pm = \rho \epsilon^{\mp 2}, \quad \phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (5.0.12)$$

Seja Ψ dada por

$$\Psi = (\mathbb{I} + k^+ E_+ - k^- E_-) e^{x\zeta\sigma_3} e^{t\kappa\sigma_3}, \quad (5.0.13)$$

onde k^\pm são constantes, \mathbb{I} é a matriz identidade e E_\pm e σ_3 são as matrizes de Pauli [13]; considera-se uma representação para (5.0.13) em termos de matrizes 2×2 , de onde encontra-se que

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & k^+ \\ -k^- & 1 \end{pmatrix} e^{x\zeta\sigma_3} e^{t\kappa\sigma_3}. \quad (5.0.14)$$

Pode-se determinar as constantes k^+ e k^- em função do parâmetro de graduação λ e das constantes ρ, ζ e κ : do tratamento para as *transformações dressing*, foi dado que [ver (3.1.2)]

$$A_\mu = -\partial_\mu \Psi \Psi^{-1}$$

é solução da condição de curvatura nula (2.5.3), o que resulta, para o modelo dado em (5.0.3), $A^V = \partial_x \Psi \Psi^{-1}$ e $B^V = \partial_t \Psi \Psi^{-1}$; isso com (5.0.14), fornece

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi \Psi^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & k^+ \\ -k^- & 1 \end{pmatrix} \xi \sigma_3 e^{x\zeta\sigma_3} e^{t\kappa\sigma_3} \right) e^{-t\kappa\sigma_3} e^{-x\zeta\sigma_3} \frac{1}{1 + k^+ k^-} \begin{pmatrix} 1 & -k^+ \\ k^- & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\zeta}{1 + k^+ k^-} \begin{pmatrix} 1 - k^+ k^- & -2k^+ \\ -2k^- & -(1 - k^+ k^-) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e, da mesma forma

$$\partial_t \psi \psi^{-1} = \frac{\kappa}{1 + k^+ k^-} \begin{pmatrix} 1 - k^+ k^- & -2k^+ \\ -2k^- & k^+ k^- - 1 \end{pmatrix}; \quad (5.0.15)$$

a representação 2×2 para A^V e B^V é dada por

$$A^V = \begin{pmatrix} \lambda/2 & \rho \epsilon^{-2} \\ \rho \epsilon^2 & -\lambda/2 \end{pmatrix}, \quad B^V = \begin{pmatrix} \lambda^2/2 & \rho \epsilon^{-2} \lambda \\ \rho \epsilon^2 \lambda & -\lambda^2/2 \end{pmatrix} \quad (5.0.16)$$

onde λ é o parâmetro da álgebra que define o grau dos geradores da álgebra de Kac-Moody; colocando (5.0.16) em (3.1.2), encontra-se para A^V e B^V respectivamente

$$\begin{pmatrix} \lambda/2 & \rho \epsilon^{-2} \\ \rho \epsilon^2 & -\lambda/2 \end{pmatrix} = \frac{\zeta}{1 + k^+ k^-} \begin{pmatrix} 1 - k^+ k^- & -2k^+ \\ -2k^- & -(1 - k^+ k^-) \end{pmatrix} \quad (5.0.17)$$

e

$$\begin{pmatrix} \lambda^2/2 & \rho \epsilon^{-2} \lambda \\ \rho \epsilon^2 \lambda & -\lambda^2/2 \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{1 + k^+ k^-} \begin{pmatrix} 1 - k^+ k^- & -2k^+ \\ -2k^- & k^+ k^- - 1 \end{pmatrix}; \quad (5.0.18)$$

com as igualdades em (5.0.17) e (5.0.18) se encontra um sistema de equações em termos de λ , ρ , ζ , κ , k^+ e k^- , e a solução deste dá que

$$\kappa = \lambda \zeta, \quad \rho^2 = \zeta^2 - \lambda^2/4, \quad k^\pm = -\frac{\rho \epsilon^\mp}{\zeta + \lambda/2}, \quad 4\zeta^2 = 4\rho^2 + \lambda^2. \quad (5.0.19)$$

A última destas equações mostra que ζ e κ assumem dois possíveis valores em termos de λ , o que exigiria a construção de folhas de Riemann. Apresenta-se uma proposta [19] para um parâmetro afim ξ tal que as funções¹

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{\rho^2}{\xi} \right), \quad \lambda = \xi - \frac{\rho^2}{\xi}, \quad (5.0.20)$$

se tornam unívocas em ξ , resultando em

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\xi^2 - \frac{\rho^4}{\xi^2} \right), \quad k^\pm = -\frac{\rho}{\xi} \epsilon^{\mp 2}. \quad (5.0.21)$$

O surgimento do parâmetro afim ξ serve de motivação para a introdução de um novo parâmetro espectral associado aos novos potenciais \hat{A} e \hat{B}

$$\hat{A} = H^1 - \rho^2 H^{-1} + \Psi^+ E_+^0 + \Psi^- E_-^0 + \phi_1 C \quad (5.0.22)$$

$$\begin{aligned} \hat{B} = & H^2 + \rho^4 H^{-2} + \Psi^+ (E_+^1 - \rho^2 E_+^{-1}) + \Psi^- (E_-^1 - \rho^2 E_-^{-1}) \\ & + \partial_x \Psi^+ E_+^0 - \partial_x \Psi^- E_-^0 - 2\Psi^+ \Psi^- H^0 + \phi_2 C. \end{aligned} \quad (5.0.23)$$

¹Existe outra parametrização para este sistema, e é quando (onde z é um parâmetro afim)

$$\lambda = z - \frac{\rho^2}{z}, \quad \zeta = -\frac{1}{2} \left(z - \frac{\rho^2}{z} \right), \quad \kappa = -\frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{\rho^4}{z^2} \right), \quad \xi = \frac{z}{\rho}$$

Os potenciais (5.0.22) e (5.0.23) são escritos no novo parâmetro espectral ξ e são capazes de descrever o sistema NLS (5.0.8) quando são substituídos na equação de curvatura nula, o que pode ser verificado ao se usar $\Psi_0^+ \Psi_0^- = \rho^2$. As conexões de vácuo correspondentes a (5.0.22) e (5.0.23) são dadas por

$$\hat{A}_V = H^1 - \rho^2 E^{-1} + \rho \epsilon^{-2} E_+^0 + \rho \epsilon^2 E_-^0 \quad (5.0.24)$$

$$\hat{B}_V = H^2 + \rho^4 H^{-2} + \rho \epsilon^{-2} (E_+^1 - \rho^2 E_-^{-1}) + \rho \epsilon^2 (E_-^1 - \rho^2 E_+^{-1}) - 2\rho^2 H^0. \quad (5.0.25)$$

O ponto mais importante nessas relações é que esses potenciais de vácuo são deformações dos potenciais (5.0.11).

Em termos do parâmetro de graduação ξ , a forma de (5.0.14) fica agora

$$\Psi = P e^{x(\xi \frac{\sigma_3}{2} + \rho^2 \frac{\sigma_3}{2\xi})} e^{t(\xi^2 \frac{\sigma_3}{2} - \rho^4 \frac{\sigma_3}{2\xi^2})}, \quad (5.0.26)$$

mas, na nova graduação ξ ,

$$\Psi = P e^{x(H^1 + \rho^2 H^{-1})} e^{t(H^2 - \rho^4 H^{-2})}. \quad (5.0.27)$$

Deve-se notar que $\lambda \rightarrow \xi$ quando $\rho \rightarrow 0$. Nestas contas, a matriz P , dada por

$$P = \mathbb{I} - E_+ \otimes \frac{\rho \epsilon^{-2}}{\xi} + E_- \otimes \frac{\rho \epsilon^2}{\xi} = \mathbb{I} - \rho \epsilon^{-2} E_+^{-1} + \rho \epsilon^2 E_-^1 \quad (5.0.28)$$

é, na representação 2×2 , dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho}{\xi} \epsilon^{-2} \\ -\frac{\rho}{\xi} \epsilon^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.0.29)$$

implicando que

$$P^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\rho^2}{\xi^2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho}{\xi} \epsilon^{-2} \\ -\frac{\rho}{\xi} \epsilon^2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (5.0.30)$$

sabendo que a soma infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\rho}{\xi} \right)^{2n}$$

converge para

$$\frac{1}{1 + \frac{\rho^2}{\xi^2}} \quad (5.0.31)$$

quando assume-se que² $\frac{\rho^2}{\xi^2} < 1$, pode-se fazer em P^{-1} que

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \sum_{m=0}^{\infty} (i\rho)^{2m} (\mathbb{I} \otimes \xi^{-2m} + \rho \epsilon^{-2} E_+^{-1} \otimes \xi^{-2m} - \rho \epsilon^2 E_-^{-1} \otimes \xi^{-2m}), \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (i\rho)^{2m} (\mathbb{I} \otimes \xi^{-2m} + \epsilon^{-2} \rho E_+^{-1-2m} - \epsilon^2 \rho E_-^{-1-2m}). \end{aligned} \quad (5.0.32)$$

5.1 *Transformações dressing* para o modelo NLS com condições de contorno constantes

As *transformações dressing* no caso de condições de contorno não triviais seguem os mesmos passos relacionados nos capítulos 3 e 4. Em tal discussão, tem-se que as *transformações dressing* são feitas com o auxílio de dois elementos de grupo, Θ_+ e Θ_- , tais que

$$\hat{A}_i \rightarrow \hat{A}_i^h \equiv \Theta_{\pm} \hat{A}_i \Theta_{\pm}^{-1} + \partial_i \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1}. \quad (5.1.1)$$

Assume-se a decomposição generalizada de Gauss

$$\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1} = (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_- (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_0 (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_+; \quad (5.1.2)$$

define-se também

$$\Theta_-^{-1} \equiv (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_-, \quad \hat{M}^{-1} \equiv (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_0, \quad \hat{N} \equiv (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_+. \quad (5.1.3)$$

Logo, pode-se escrever as funções τ : o vetor $\vec{\tau}^{nbc}(x, t)$ fica³

$$\begin{aligned} \vec{\tau}^{nbc}(x, t) &= (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1}) |\hat{\lambda}_0\rangle \\ &= \Theta_-^{-1} \hat{M}^{-1} |\hat{\lambda}_0\rangle, \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

onde foram usados os fatos que a graduação da álgebra de Kac-Moody é a homogênea e que $N|\hat{\lambda}_0\rangle = |\hat{\lambda}_0\rangle$, onde $|\hat{\lambda}_0\rangle$ é o vetor de peso máximo na representação. Uma vez que $|\hat{\lambda}_0\rangle$ é um auto-estado da subálgebra $\hat{\mathfrak{g}}_0$ de grau zero, pode-se definir o vetor função

$$\vec{\tau}_0^{nbc}(x, t) = \hat{M}^{-1} |\hat{\lambda}_0\rangle = |\hat{\lambda}_0\rangle \hat{\tau}_0(x, t), \quad (5.1.5)$$

onde $\hat{\tau}_0(x, t)$ é uma função escrita por

$$\hat{\tau}_0(x, t) = \langle \hat{\lambda}_0 | (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_0 | \hat{\lambda}_0 \rangle. \quad (5.1.6)$$

²Essa afirmação implica que ξ complexo define uma superfície de Riemann $\mathbb{C} - D$, ou seja, um plano complexo com um furo na forma de disco de raio ρ . Por outro lado, ao assumir que $\frac{\xi^2}{\rho^2} < 1$, no caso da segunda escolha do parâmetro espectral dada na nota de rodapé $n^{\circ}1$, se tem uma superfície de Riemann na forma de um disco D de raio ρ .

³No que segue, é assumido que $\hat{\lambda}_0$ é o peso mais alto da representação correspondente à álgebra de Kac-Moody numa superfície $\mathbb{C} - D$.

Usando (5.1.4) e (5.1.6), encontra-se

$$\Theta_-^{-1}|\hat{\lambda}_0\rangle = \frac{\vec{\tau}^{nbc}(x,t)}{\hat{\tau}_0(x,t)}. \quad (5.1.7)$$

As soluções de vácuo (5.0.12) são soluções triviais de (5.0.8); então as conexões relevantes a serem consideradas são as dadas em (5.0.24) e (5.0.25); tais conexões podem ser escritas na forma

$$\hat{A}_V(\xi) = \partial_x \Psi_{nbc}^0 \Psi_{nbc}^{0-1}, \quad \hat{B}_V(\xi) = \partial_t \Psi_{nbc}^0 \Psi_{nbc}^{0-1} \quad (5.1.8)$$

Das equações (5.0.11) para os campos de vácuo A^V e B^V , pode-se encontrar as *transformações dressing* aplicadas em analogia a aquelas em (3.2.16) e (3.2.17), fornecendo

$$\begin{aligned} A^h &= \Theta_- A^V \Theta_-^{-1} + \partial_x \Theta_- \Theta_-^{-1}, \\ &= \Theta_- (H^1 - \rho^2 E^{-1} + \rho \epsilon^{-2} E_+^0 + \rho \epsilon^2 E_-^0) \Theta_-^{-1} + \partial_x \Theta_- \Theta_-^{-1} \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

$$\begin{aligned} B^h &= \Theta_- B^V \Theta_-^{-1} + \partial_t \Theta_- \Theta_-^{-1}, \\ &= \Theta_- (H^2 + \rho^4 H^{-2} + \rho \epsilon^{-2} (E_+^1 - \rho^2 E_-^1) \\ &\quad + \rho \epsilon^2 (E_-^1 - \rho^2 E_-^1) - 2\rho^2 H^0) \Theta_- + \partial_t \Theta_- \Theta_-^{-1} \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

onde

$$\Theta_- = \exp \left(\sum_{n>0} \hat{\sigma}_{-n} \right), \quad \hat{M} = \exp(\hat{\sigma}_0), \quad \hat{N} = \exp \left(\sum_{n>0} \hat{\sigma}_n \right). \quad (5.1.11)$$

Pode-se encontrar algumas das componentes $\hat{\sigma}_{-1}$, $\hat{\sigma}_{-2}$ por exemplo, em função dos campos Ψ^\pm , ϕ_1 e ϕ_2 : usando o fato de que

$$\hat{\sigma}_{-1} = -(\Psi^+ - \rho \epsilon^{-2}) E_+^{-1} + (\Psi^- - \rho \epsilon^2) E_-^{-1} + \hat{\sigma}_{-1}^0 H^{-1}, \quad (5.1.12)$$

$$\hat{\sigma}_{-2} = -\sigma_{-2}^+ E_+^{-1} + (\Psi^- - \rho \epsilon^2) E_-^{-1} + \hat{\sigma}_{-1}^0 H^{-1}, \quad (5.1.13)$$

se encontra que $\partial_x \sigma_{-1}^0 = 2(\Psi^+ \Psi^- - \rho^2)$, $\sigma_{-2}^\pm = -\partial_x \Psi^\pm + \frac{1}{2} \sigma_{-1}^0 \Psi^\pm$, $\phi_1 = -\frac{1}{2} \sigma_{-1}^0$ e $\phi_2 = -\sigma_{-2}^0$.

Procura-se agora escrever as funções τ convenientemente a fim de se encontrar as soluções para os campos Ψ^\pm . De modo análogo a (4.1.6), se tem que o elemento de grau -1 de Θ_- pode ser escrito em termos da função τ^0 e dos campos Ψ^\pm por

$$-\hat{\sigma}_{-1}|\hat{\lambda}_0\rangle = \frac{(\Psi_{nbc}^0 \Psi_{nbc}^{0-1})_{-1}}{\hat{\tau}^0} |\hat{\lambda}_0\rangle \quad (5.1.14)$$

ou, em analogia a (4.1.6), pode-se escrever

$$(-(\Psi^+ - \rho \epsilon^{-2}) E_+^{-1} + (\Psi^- - \rho \epsilon^2) E_-^{-1} + \hat{\sigma}_{-1}^0 H^{-1}) |\hat{\lambda}_0\rangle = \frac{(\Psi_{nbc}^0 \Psi_{nbc}^{0-1})_{-1}}{\hat{\tau}^0} |\hat{\lambda}_0\rangle, \quad (5.1.15)$$

de onde se encontra que

$$\Psi^+ = \rho\epsilon^{-2} + \frac{\hat{\tau}^+}{\hat{\tau}^0}, \quad \Psi^- = \rho\epsilon^2 - \frac{\hat{\tau}^-}{\hat{\tau}^0}. \quad (5.1.16)$$

Nestas, as funções τ são dadas por

$$\hat{\tau}^+ \equiv \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle, \quad (5.1.17)$$

$$\hat{\tau}^- \equiv \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle, \quad (5.1.18)$$

$$\hat{\tau}^0 \equiv \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (\Psi_{nbc}^0 h \Psi_{nbc}^{0-1})_0 | \hat{\lambda}_0 \rangle. \quad (5.1.19)$$

As soluções obtidas para tais condições de contorno exigem que as representações da álgebra $\widehat{sl}(2)$ sejam feitas em uma superfície de Riemann $(\mathbb{C} - D)$, onde D é um disco de raio ρ (outra possibilidade seria uma superfície de Riemann na forma de um disco D de raio ρ). Em outras palavras, é necessário um conhecimento mais aprofundado das representações das álgebras de Kac-Moody numa superfície de Riemann, como exemplo, no disco D de raio ρ , tratamento que é conhecido na literatura e estudado, por exemplo, em [24]. Abaixo, são mostradas as primeiras soluções não triviais, onde na primeira delas se faz uso do programa MAPLE em vez de calcular os elementos de matriz na devida representação algébrica discutida logo acima.

5.2 Soluções 1-sóliton

Escolhe-se para o elemento de grupo constante h que

$$h = e^F, \quad F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^n E_-^{-n}, \quad (5.2.1)$$

onde todos os geradores de F estão na parametrização ξ . Assim, do resultado da *transformação dressing*, tem-se

$$\Psi_V h \Psi_V^{-1} = P e^{x(H^1 + \rho^2 H^{-1})} e^{t(H^2 - \rho^4 H^{-2})} e^F e^{-t(H^2 - \rho^4 H^{-2})} e^{-x(H^1 + \rho^2 H^{-1})} P^{-1},$$

onde, com o auxílio da fórmula de Campbell-Hausdorff, tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_V h \Psi_V^{-1} = 1 + P \left([x(H^1 + \rho^2 H^{-1}) + t(H^2 - \rho^4 H^{-2})] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^n E_-^{-n} + \frac{1}{2!} [x(H^1 + \rho^2 H^{-1}) \right. \\ \left. + t(H^2 - \rho^4 H^{-2})][x(H^1 + \rho^2 H^{-1}) + t(H^2 - \rho^4 H^{-2})] + \dots \right) P^{-1}, \end{aligned}$$

mas, usando o resultado

$$\begin{aligned} [x(H^1 + \rho^2 H^{-1}) + t(H^2 - \rho^4 H^{-2})] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^n E_-^{-n} &= - \left(x(\nu + \frac{\rho}{\nu}) + t(\nu^2 - \frac{\rho^4}{\nu^2}) \right) F, \\ &\equiv -\phi_1 F, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

encontra-se que

$$\Psi_V h \Psi_V^{-1} = 1 + P e^{-\phi_1} F P^{-1}. \quad (5.2.3)$$

Então, da definição de τ^0 , tem-se

$$\begin{aligned} \tau^0 &= \langle \hat{\lambda}_0 | \Psi_V h \Psi_V^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle, \\ &= 1 + e^{-\phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | P F P^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle; \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

nestas, P e P^{-1} estão definidas em (5.0.28) e (5.0.32). Da definição para τ^+ em (5.1.17), tem-se

$$\begin{aligned} \tau^+ &= \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 \Psi_V h \Psi_V^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle, \\ &= e^{-\phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (P F P^{-1}) | \hat{\lambda}_0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Da definição de τ^- , encontra-se

$$\begin{aligned} \tau^- &= \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 \Psi_V h \Psi_V^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle, \\ &= e^{-\phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 (P F P^{-1}) | \hat{\lambda}_0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

As soluções devem ser dadas, com os valores das funções τ , em (5.1.16).

As funções τ tornam-se

$$\tau^+ \equiv b e^{-\phi}, \quad b \equiv \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (P F P^{-1}) | \hat{\lambda}_0 \rangle; \quad (5.2.7)$$

$$\tau^- \equiv a e^{-\phi}, \quad a \equiv \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 (P F P^{-1}) | \hat{\lambda}_0 \rangle; \quad (5.2.8)$$

$$\tau^0 \equiv 1 + c_1 e^{-\phi}, \quad c_1 \equiv \langle \hat{\lambda}_0 | P F P^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle. \quad (5.2.9)$$

Com a ajuda do programa MAPLE, pode-se verificar que os campos do modelo dados em (5.1.16) escritas em termos das funções τ dadas acima são soluções das equações do modelo NLS (5.0.8) para o seguinte conjunto de relações entre os parâmetros

$$b_1 = -a_1 \frac{\nu^2}{r_1^2}, \quad (5.2.10)$$

$$c_1 = -a_1 \frac{\nu_1^2}{r_1(\nu^2 + \rho^2)}, \quad (5.2.11)$$

onde $r_1 = \rho \epsilon^{-2}$, $r_2 = \rho \epsilon^2$ e a_1 é um parâmetro livre. Então, em termos desses parâme-

tros, os campos em (5.1.16) ficam [23]⁴

$$\Psi^+ = r_1 + \frac{a_1 \exp \left[-x \left(\nu_1 + \frac{r_1 r_2}{\nu_1} \right) - t \left(\nu_1^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{\nu_1^2} \right) \right]}{1 - a_1 \nu_1^2 \frac{\exp \left[-x \left(\nu_1 + \frac{r_1 r_2}{\nu_1} \right) - \left(\nu_1^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{\nu_1^2} \right) t \right]}{(r_1(\nu_1^2 + r_1 r_2))}}, \quad (5.2.12)$$

$$\Psi^- = r_2 + \frac{a_1 \nu_1^2 \exp \left[-x \left(\nu_1 + \frac{r_1 r_2}{\nu_1} \right) - t \left(\nu_1^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{\nu_1^2} \right) \right]}{r_1^2 \left(1 - a_1 \nu_1^2 \frac{\exp \left[-x \left(\nu_1 + \frac{r_1 r_2}{\nu_1} \right) - \left(\nu_1^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{\nu_1^2} \right) t \right]}{(r_1(\nu_1^2 + r_1 r_2))} \right)}. \quad (5.2.13)$$

Assim, com os valores numéricos:

$$a_1 = -2; \quad \nu = 1.9, \quad \epsilon = 1, \rho = 1, \quad b_1 = -1.805, \quad c_1 = 0.4743758213, \quad (5.2.14)$$

o que dá para ϕ_1 (5.2.2) que

$$\phi_1 = 4.005263158 x - 0.822132964 t, \quad (5.2.15)$$

então

$$\tau^+ = -2 \exp(-4.005263158 x + 0.822132964 t), \quad (5.2.16)$$

$$\tau^- = -1.805000000 \exp(-4.005263158 x + 0.822132964 t), \quad (5.2.17)$$

$$\tau^0 = 1 + 0.4743758213 \exp(-4.005263158 x + 0.822132964 t), \quad (5.2.18)$$

e, finalmente, as soluções são dadas por.

$$\Psi^+ = 2 - \frac{2 \exp(-4.005263158 x + 0.822132964 t)}{(1 + 0.4743758213 \exp(-4.005263158 x + 0.822132964 t))}, \quad (5.2.19)$$

$$\Psi^- = 2 - \frac{1.805 \exp(-4.005263158 x + 0.822132964 t)}{(1 + 0.4743758213 \exp(-4.005263158 x + 0.822132964 t))}. \quad (5.2.20)$$

As soluções podem ser visualizadas graficamente nas figuras (5.1(a)) e (5.1(b)) abaixo.

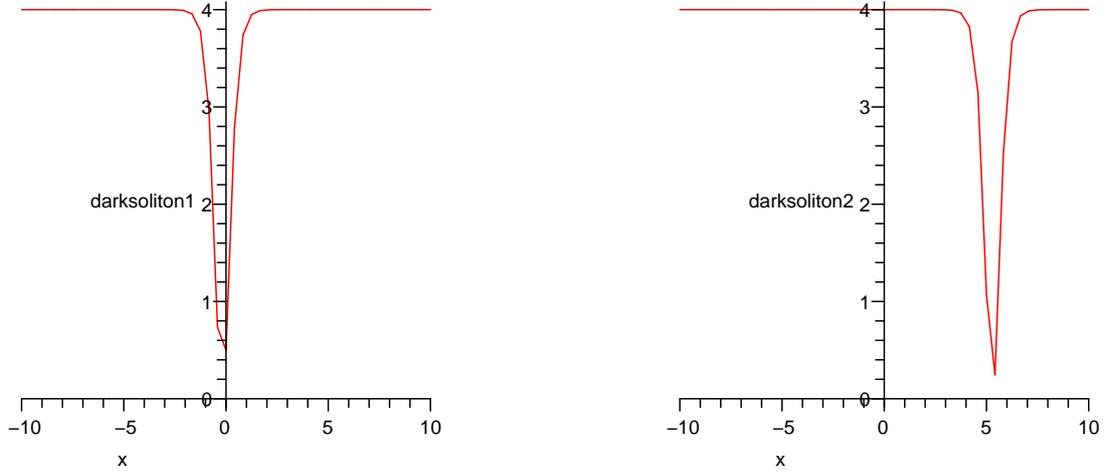
Outra solução pode ser encontrada quando se escolhe para o elemento de grupo constante h , o qual gera as *transformações dressing*, que

$$h = e^G \quad G = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho^n E_+^{-n}, \quad (5.2.21)$$

então

$$\Psi_V h \Psi_V^{-1} = P e^{x(H^1 + \rho^2 H^{-1})} e^{t(H^2 - \rho^4 H^{-2})} e^G e^{-t(H^2 - \rho^4 H^{-2})} e^{x(H^1 + \rho^2 H^{-1})} P^{-1}$$

⁴Nota-se que esta forma da solução também foi obtida pelo método de Hirota (veja por exemplo, [23]). No entanto, a forma usual do método de Hirota fornece $\Psi^\pm = g_\pm/f$, o que corresponderia no nosso formalismo à seguinte relação $f \rightarrow \tau_0, g_\pm \rightarrow (\Psi_0^\pm \tau_0 \pm \tau^\pm)$.

(a) Pulso 'dark'-sóliton em $t = t_1$.(b) Pulso 'dark'-sóliton em $t = t_2 > t_1$.Figura 5.1: Evolução do pulso 'dark'-sóliton ($\Psi^+\Psi^-$) da primeira solução não trivial.

que, com o auxílio da fórmula de Campbell-Hausdorff, tem-se

$$\Psi_V h \Psi_V^{-1} = 1 + P \left([x(H^1 + \rho^2 H^{-1}) + t(H^2 - \rho^4 H^{-2}), G] + \frac{1}{2!} [x(H^1 + \rho^2 H^{-1}) + t(H^2 - \rho^4 H^{-2}), [x(H^1 + \rho^2 H^{-1}) + t(H^2 - \rho^4 H^{-2}), G]] + \dots \right) P^{-1},$$

onde, usando o resultado de

$$\begin{aligned} [x(H^1 + \rho^2 H^{-1}) + t(H^2 - \rho^4 H^{-2}), G] &= \left(x(\varrho + \frac{\rho}{\varrho}) + t(\varrho^2 - \frac{\rho^4}{\varrho^2})\right)G \\ &\equiv \eta G \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

encontra-se para $\Psi_V h \Psi_V^{-1}$

$$\Psi_V h \Psi_V^{-1} = 1 + P e^{\eta} G P^{-1}. \quad (5.2.23)$$

Então, da definição de τ^0 , tem-se

$$\begin{aligned} \tau^0 &= \langle \hat{\lambda}_0 | \psi_V h \psi_V^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle \\ &= 1 + e^{\eta} \langle \hat{\lambda}_0 | P G P^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

Da definição para τ^+ em (5.1.17), tem-se

$$\begin{aligned} \tau^+ &= \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 \Psi_V h \Psi_V^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle \\ &= e^{\eta} \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (P G P^{-1}) | \hat{\lambda}_0 \rangle, \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Finalmente, da definição de τ^- , encontra-se

$$\begin{aligned}\tau^- &= \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 \Psi_V h \Psi_V^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle \\ &= \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 (PGP^{-1}) | \hat{\lambda}_0 \rangle.\end{aligned}\quad (5.2.26)$$

De modo equivalente, para a escolha do elemento de grupo constante h

$$h = e^{aF} e^{bG}, \quad (5.2.27)$$

onde F e G são definidos em (5.2.1) e (5.2.21) respectivamente e a e b são constantes arbitrárias, se encontra que as funções τ em termos dos elementos de matriz (a serem calculados), são

$$\tau^0 = 1 + ae^{-\phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | PFP^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle + be^\eta \langle \hat{\lambda}_0 | PGP^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle + abe^{-\phi_1} e^\eta \langle \hat{\lambda}_0 | PFGP^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle \quad (5.2.28)$$

$$\begin{aligned}\tau^+ &= ae^{-\phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (PFP^{-1}) | \hat{\lambda}_0 \rangle + be^\eta \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (PGP^{-1}) | \hat{\lambda}_0 \rangle \\ &\quad + abe^{-\phi_1} e^\eta \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (PFGP^{-1}) | \hat{\lambda}_0 \rangle,\end{aligned}\quad (5.2.29)$$

$$\begin{aligned}\tau^- &= e^{-\phi_1} a \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 PFP^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle + be^\eta \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 PGP^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle \\ &\quad + abe^{-\phi_1} e^\eta \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 PFGP^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle.\end{aligned}\quad (5.2.30)$$

5.3 Solução 2-sóliton

Para obter a solução 2-sóliton, é escolhido $h = e^F e^G$. As funções τ relevantes são dadas por

$$\begin{aligned}\tau^0 &= 1 + \alpha_1 e^{-\phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | PFP^{-1} | \lambda_0 \rangle + \alpha_2 e^\eta \langle \hat{\lambda}_0 | PGP^{-1} | \lambda_0 \rangle + \\ &\quad \alpha_3 e^{\eta_1 - \phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | PFGP^{-1} | \lambda_0 \rangle,\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

$$\begin{aligned}\tau^+ &= \beta_1 e^{-\phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (PFP^{-1}) | \lambda_0 \rangle + \beta_2 e^\eta \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (PGP^{-1}) | \lambda_0 \rangle + \\ &\quad \beta_3 e^{\eta_1 - \phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 (PFGP^{-1}) | \lambda_0 \rangle,\end{aligned}\quad (5.3.2)$$

$$\begin{aligned}\tau^- &= \gamma_1 e^{-\phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 (PFP^{-1}) | \lambda_0 \rangle + \gamma_2 e^\eta \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 (PGP^{-1}) | \lambda_0 \rangle + \\ &\quad \gamma_3 e^{\eta_1 - \phi_1} \langle \hat{\lambda}_0 | E_+^1 (PFGP^{-1}) | \lambda_0 \rangle,\end{aligned}\quad (5.3.3)$$

onde os α_i s, β_i s e γ_i s, com $i = 1, 2$ ou 3 , são constantes arbitrárias. Da mesma forma que na solução obtida para 1-sóliton, toma-se

$$\begin{cases} \tau^+ = a_1 e^{-\phi_1} + a_2 e^{\eta_1} + a_3 e^{-\phi_1} e^{\eta_1}, \\ \tau^- = b_1 e^{-\phi_1} + b_2 e^{\eta_1} + b_3 e^{-\phi_1} e^{\eta_1}, \\ \tau_0 = 1 + c_1 e^{-\phi_1} + c_2 e^{\eta_1} + c_3 e^{-\phi_1} e^{\eta_1}; \end{cases}\quad (5.3.4)$$

nesta, os a_i s, b_i s e c_i s se identificam com os elementos de matriz em (5.3.2) multiplicados com suas respectivas constantes e esses são obtidos por substituição direta de (5.3.4) nas soluções (5.1.16) e depois na equação diferencial (5.0.1); isto pode ser feito com

auxílio do programa MAPLE. Usa-se os fatos que $\left(x(\nu + \frac{\rho}{\nu}) + t(\nu^2 - \frac{\rho^4}{\nu^2})\right) F \equiv -\phi_1 F$ e $\left(x(\varrho + \frac{\rho}{\varrho}) + t(\varrho^2 - \frac{\rho^4}{\varrho^2})\right) G \equiv \eta G$. Tomando que $r_1 = \rho\epsilon^{-2}$ e $r_2 = \rho\epsilon^2$, juntamente com as relações entre os parâmetros $b_1 = a_1\nu_1^2/r_1^2$, $b_2 = a_2r_2^2/\rho_1^2$, $c_2 = -a_2r_2/(r_1r_2 + \rho_1^2)$, $c_1 = -\nu_1^2a_1/(r_1(\nu_1^2 + r_1r_2))$,

$$b_3 = \frac{a_2a_1\nu_1^2r_2}{\rho_1^2r_1^2} \times \frac{r_1^2r_2^2\rho_1 + 2r_1r_2\nu_1^2\rho_1 + r_1^2r_2^2\nu_1 + 2r_1r_2\rho_1^2\nu_1 + \nu_1^2\rho_1^3 + \nu_1^3\rho_1^2}{r_1^2r_2^2\rho_1 - r_1^2r_2^2\nu_1 - r_1r_2\nu_1^3 + r_1r_2\nu_1^2\rho_1 - r_1r_2\rho_1^2\nu_1 + r_1\rho_1^3r_2 + \nu_1^2\rho_1^3 - \nu_1^3\rho_1^2},$$

$$a_3 = \frac{a_2a_1}{r_1} \times \frac{(r_1^2r_2^2\rho_1 + 2r_1r_2\nu_1^2\rho_1 + r_1^2r_2^2\nu_1 + 2r_1r_2\rho_1^2\nu_1 + \nu_1^2\rho_1^3 + \nu_1^3\rho_1^2)}{-r_1^2r_2^2\rho_1 + r_1^2r_2^2\nu_1 + r_1r_2\nu_1^3 - r_1r_2\nu_1^2\rho_1 + r_1r_2\rho_1^2\nu_1 - r_1\rho_1^3r_2 - \nu_1^2\rho_1^3 + \nu_1^3\rho_1^2},$$

e

$$c_3 = -\frac{(r_1^2r_2^2 + 2r_1r_2\nu_1\rho_1 + \nu_1^2\rho_1^2)\nu_1^2a_2a_1}{r_1^2} / (r_1^2r_2^2\nu_1^2 - 2r_1^2r_2^2\nu_1\rho_1 + r_1^2r_2^2\rho_1^2 + 2r_1r_2\nu_1^2\rho_1^2 - 2r_1r_2\nu_1\rho_1^3 + r_1r_2\nu_1^4 + r_1r_2\rho_1^4 - 2r_1r_2\nu_1^3\rho_1 - 2\nu_1^3\rho_1^3 + \rho_1^2\nu_1^4 + \nu_1^2\rho_1^4),$$

se encontra que as soluções ψ^+ e ψ^- são dadas por

$$\psi^+ = \rho\epsilon^{-2} + \frac{a_1e^{-\phi_1} + a_2e^{\eta_1} + a_2a_1 \frac{(m_1+\nu_1)(\rho^2+m_1\nu_1)^2}{\rho\epsilon^{-2}(\nu_1-m_1)(\rho^4+\nu_1^2m_1^2+\rho^2(\nu_1^2+m_1^2))} e^{-\phi_1} e^{\eta_1}}{1 - \frac{\nu_1^2a_1e^{-\phi_1}}{\rho\epsilon^{-2}(\nu_1^2+\rho^2)} - \frac{a_2r_2e^{\eta_1}}{\rho^2+m_1^2} - \frac{(\rho^2+\nu_1m_1)^2a_1a_2\nu_1^2e^{-\phi_1}e^{\eta_1}}{(\rho^4(\nu_1^2-m_1^2)^2-2\rho^2\nu_1m_1(m_1^2+\nu_1^2)+\nu_1^2m_1^2(m_1+\nu_1^2)+\rho^2(\nu_1^2-m_1^2)^2)\rho^2\epsilon^{-4}}}$$

e

$$\psi^- = \rho\epsilon^2 + \frac{\frac{a_1\nu_1^2}{\rho^2\epsilon^{-4}}e^{-\phi_1} + \frac{a_2\rho^2\epsilon^4}{m_1^2}e^{\eta_1} + a_1a_2\nu_1^2\rho\epsilon^2 \frac{(m_1+\nu_1)(\rho^2+m_1\nu_1)^2}{m_1^2\rho^2\epsilon^{-4}(m_1-\nu_1)(\rho^4+\nu_1^2m_1^2+\rho^2(m_1^2+\nu_1^2))} e^{-\phi_1} e^{\eta_1}}{1 - \frac{\nu_1^2a_1e^{-\phi_1}}{\rho\epsilon^{-2}(\nu_1^2+\rho^2)} - \frac{a_2r_2e^{\eta_1}}{\rho^2+m_1^2} - \frac{(\rho^2+\nu_1m_1)^2a_1a_2\nu_1^2e^{-\phi_1}e^{\eta_1}}{(\rho^4(\nu_1^2-m_1^2)^2-2\rho^2\nu_1m_1(m_1^2+\nu_1^2)+\nu_1^2m_1^2(m_1+\nu_1^2)+\rho^2(\nu_1^2-m_1^2)^2)\rho^2\epsilon^{-4}}},$$

onde $\phi_1 = x(\nu_1 + \frac{\rho^2}{\nu_1}) + (\nu_1^2 - \frac{\rho^4}{\nu_1^2})t$, e $\eta_1 = x(m_1 + \frac{\rho^2}{m_1}) + (m_1^2 - \rho^4/m_1^2)t$.

Tomando para os parâmetros livres os valores numéricos $r_1 = -1$, $r_2 = 0.5$, $a_1 = 1.71$, $\nu_1 = -1.115$, $a_2 = -1.69$ e $\rho_1 = -1.112$, se encontra que $b_1 = 2.12591475$, $b_2 = -0.3416780964$, $c_2 = 1.147249859$, $c_1 = 2.860391873$, $b_3 = 1078.438651$, $a_3 = 2145.286400$, e $c_3 := 3.991834828 \times 10^5$, pode-se visualizar o gráfico de $\psi^+\psi^-$ na Figura 5.2, que representa dois pulsos evoluindo no mesmo sentido.

Uma outra possibilidade interessante é a desses dois sólitons se colidindo; para tal, a escolha dos parâmetros se diferencia apenas no sinal de ρ_1 e, obtendo assim, da mesma forma que anteriormente, outra solução 2 sólitons, graficada na Figura 5.3. Nota-se que as soluções se interagem e depois disso continuam seu curso como se não tivesse havido interação.

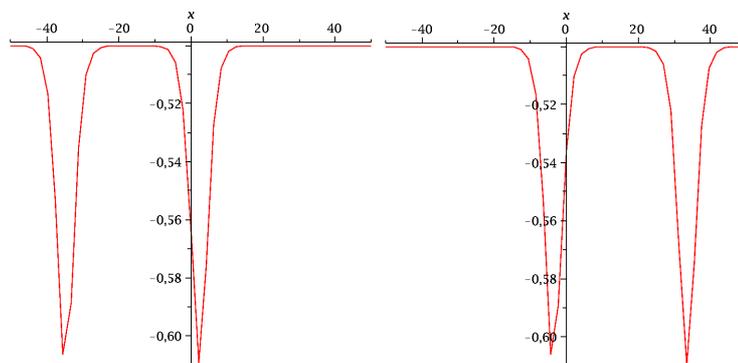


Figura 5.2: Evolução do produto $\psi^+\psi^-$ das soluções 2sóliton sem colisão. Note que o valor assintótico da funções é $-0,5$.

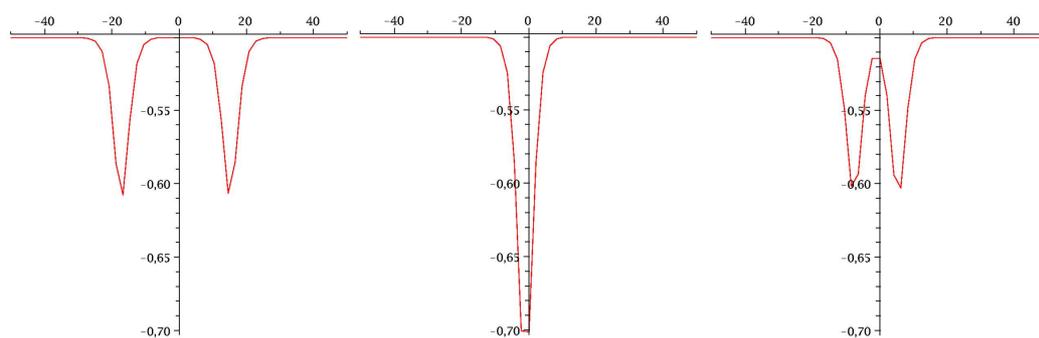


Figura 5.3: Evolução do pulso dark-sóliton para 3 tempos sucessivos; note a interação das soluções e também suas condições de contorno não nulas.

6

Conclusões

Na primeira parte deste trabalho foi estudado um exemplo de sistema integrável discreto. Foi considerado o sistema de Toda como um sistema integrável no sentido de Liouville. Para tal fim, foi usado o formalismo de Lax e os métodos algébricos para construir grandezas conservadas e verificar sua involução. Algumas contas explícitas foram feitas para um número pequeno de partículas. Em seguida, se estudou a extensão do conceito do par de Lax, de acordo com os estudos feitos na formulação de Zakharov e Shabat, de modo a possibilitar a descrição unificada de sistemas integráveis de naturezas distintas; tal formulação é escrita de forma simples em termos da condição de curvatura nula.

Foi estudado também o método das *transformações dressing* para obter soluções de sistemas integráveis que podem ser escritos em termos da condição de curvatura nula; nesta, se mostrou as soluções 1 e 2 ‘bright’-sólitons para o modelo NLS. Estas soluções se anulam no infinito, portanto, elas satisfazem condições de contorno nulas. Estas soluções já foram obtidas na literatura, como por exemplo, em [17] e [18] pelo mesmo método; nestas, é encontrada também a generalização para soluções N -sóliton.

O modelo NLS foi escrito de forma conveniente para o tratamento com condições de contorno não nulas sem que fosse necessário a construção de folhas de Riemann. Esta forma permite que se tenha uma correspondência com o modelo NLS usual quando se toma $\rho \rightarrow 0$. As transformações dressing foram obtidas nas órbitas das soluções de vácuo e as soluções Ψ^\pm são obtidas em termos das funções τ que, por sua vez, são resultados de cálculos de elementos de matriz de elementos de grupo de $\widehat{sl}(2)$; a representação de $\widehat{sl}(2)$, relevante ao cálculo destas funções τ , deve ser feita em uma superfície complexa com um furo de raio ρ na forma de um disco, o que, no devido estágio do trabalho aqui apresentado, ainda não foi possível. Uma outra possibilidade seria a representação da mesma álgebra em uma superfície complexa em forma de um disco de raio ρ . Entretanto, com a forma dos campos Ψ^\pm em termos das funções τ , foi possível escrever a primeira solução não trivial com o auxílio do programa Maple: a solução representa o que, na literatura, se chama de um pulso ‘dark’-sóliton. Assim, fica a motivação para futuros trabalhos a representação dos operadores de vértice nas superfícies acima citadas de modo que as funções τ tenham seus elementos de matriz calculados de forma apropriada, tal que assim se possa obter soluções multissóliton do modelo NLS com condições de contorno não nulas, ou seja, soluções ‘N-dark’-sóliton, pelo método das transformações dressing. As representações dos operadores de vértice

nestes espaços já são conhecidas na literatura, como por exemplo, em [24].

A

As álgebras de Lie $su(N)$

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial [25] \mathfrak{g} munido de um produto colchete

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

com as propriedades de ser bilinear, ou seja, linear nas suas duas entradas; antissimétrico, o que significa que

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad \forall X \text{ e } Y \in \mathfrak{g};$$

e que satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \quad \forall X, Y \text{ e } Z \in \mathfrak{g}.$$

A álgebra de Lie $su(N)$ é formada por geradores (matrizes) $N \times N$ anti-hermitianas, de traço nulo e sobre o corpo dos reais \mathbb{R} . Associado à álgebra $su(N)$, existe o grupo de Lie $SU(N)$, formado pela exponenciação dos geradores de sua respectiva álgebra. Escolhe-se na representação matricial da álgebra $su(N)$ a base ortonormal em que

$$\text{tr}(T_i T_j) = \delta_{ij}, \quad \forall T_i \text{ e } T_j \in su(N). \quad (\text{A.0.1})$$

Uma álgebra de Lie $su(N)$ [13] em tal base tem seus operadores tais que podem ser divididos em dois tipos: *os geradores de Cartan* H_i , que são os geradores simultaneamente diagonalizáveis e que por isso comutam entre si, ou seja $[H_i, H_j] = 0$, e formam uma subálgebra de Lie abeliana em $su(N)$, chamada de subálgebra de Cartan; sua dimensão é chamada de posto de $su(N)$; os estados de uma representação arbitrária [13] de \mathfrak{g} podem ser escritos como $|\mu, x, D\rangle$ onde

$$H_i |\mu, x, D\rangle = \mu_i |\mu, x, D\rangle,$$

onde x é uma estrutura a se especificar; os autovalores μ_i são chamados *pesos*, que são reais; o vetor de m componentes μ_i é chamado de *vetor peso*. O outro tipo de geradores são os denotados por e_α , as vezes chamados de operadores de step, que são construídos por combinações complexas do restante dos elementos da álgebra \mathfrak{g} , obedecendo a

$$[H_i, e_\alpha] = \alpha_i e_\alpha, \quad \text{ou} \quad [H_i, e_\alpha^\dagger] = -\alpha_i e_\alpha^\dagger, \quad (\text{A.0.2})$$

de onde conclui-se que $e_{\alpha}^{\dagger} = e_{-\alpha}$, onde os $\{\alpha_i\}$ são as constantes de estrutura na base de Cartan-Weyl e são componentes de um espaço vetorial euclidiano de dimensão igual ao posto de $su(N)$. Os vetores do espaço vetorial de dimensão $N - 1$ são denominados *vetores raízes* e constróem os geradores que não são da subálgebra de Cartan; isso é suficiente para se deduzir que o número de raízes é igual a diferença entre as dimensões de $su(N)$ e da subálgebra de Cartan, ou seja,

$$(N^2 - 1) - (N - 1) = N(N - 1).$$

Pela identidade de Jacobi pode-se encontrar a relação de comutação entre operadores de step associados a raízes diferentes, resultando que

$$[e_{\alpha}, e_{\beta}] = \begin{cases} \alpha_i H_i & \text{se } \alpha + \beta = 0, \\ N(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta} & \text{se } \alpha + \beta \in \{\alpha_i\}, \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (\text{A.0.3})$$

Verifica-se também que

$$N(\alpha, \beta) = -N(\beta, \alpha) = -N(-\alpha, -\beta), \quad (\text{A.0.4})$$

$$N(\alpha, \beta) = N(-\alpha, \alpha + \beta) = -N(-\beta, \alpha + \beta), \quad (\text{A.0.5})$$

$$N(\alpha, \beta) = -N(-\alpha - \beta, \beta) \quad . \quad (\text{A.0.6})$$

Será visto tanto no apêndice quanto no corpo da dissertação que em muitos casos T_{α^a} é um gerador associado à raiz α^a , mas que também pode ser escrito por T^a , ou seja $T_{\alpha^a} \equiv T^a$.

A informação da estrutura de uma álgebra de Lie está contida em suas constantes de estrutura, que são especificadas pelos vetores raízes da álgebra. As denominadas *raízes simples* são tais que não podem ser escritas como soma de outras raízes positivas; uma vez que os negativos de raízes simples são também raízes e que qualquer raiz pode ser escrita como combinação de raízes simples, pode-se dizer que toda a estrutura da álgebra está contida no conjunto de raízes simples. A *matriz de Cartan* K_{ab} é formada em termos de raízes simples e é definida por

$$K_{ab} = 2 \frac{(\alpha^a, \alpha^b)}{(\alpha^a, \alpha^a)}, \quad (\text{A.0.7})$$

onde $(,)$ denota o produto interno euclidiano; a matriz de Cartan possui todas as informações sobre a álgebra. Para a álgebra de Lie $su(N)$, ela tem a forma:

$$K_{ab} = -\delta_{a,c+1} + 2\delta_{a,c} - \delta_{a+1,c}. \quad (\text{A.0.8})$$

Esta possui inversa, onde se encontra que [12]

$$\sum_c K_{ac} K_{cb}^{-1} = \delta_{ab},$$

o que dá a relação

$$\delta_{ab} = -K_{a\ b-1}^{-1} + 2K_{ab}^{-1} - K_{a\ b+1}^{-1}. \quad (\text{A.0.9})$$

Seja um caso geral para qualquer peso μ de uma representação D , então

$$E_3|\mu, x, D\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2}|\mu, x, D\rangle,$$

como os autovalores de E_3 precisam ser inteiros ou semi-inteiros, tem-se que $2\alpha \cdot \mu / \alpha^2 \in \mathbb{Z}$; seja agora p um inteiro tal que atuando E^+ p vezes no estado $|\mu, x, D\rangle$ se tenha

$$(E_+)^p|\mu, x, D\rangle \neq 0 \quad \text{e} \quad (E_+)^{p+1}|\mu, x, D\rangle = 0,$$

onde o primeiro estado destas tem peso $\mu + p\alpha$, que é o peso mais alto nessa representação; o autovalor de E_3 é

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p \equiv j. \quad (\text{A.0.10})$$

De modo análogo, seja q tal que

$$(E_-)^q|\mu, x, D\rangle \neq 0$$

seja o estado de peso mais baixo, então o auto valor de E_3 neste estado é

$$\frac{\alpha \cdot (\mu - q\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q \equiv -j. \quad (\text{A.0.11})$$

Dessa forma, somando (A.0.10) com (A.0.11), encontra-se a chamada *fórmula mestra*:

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q). \quad (\text{A.0.12})$$

A condição $2\alpha \cdot \mu / \alpha^2 \in \mathbb{Z}$ para todas as raízes α define uma *rede de pesos* de \mathfrak{g} que contém a *rede de raízes*, que por sua vez é gerada tomando-se combinações inteiras de raízes; pode-se tomar uma base nessa rede de pesos consistindo de *pesos fundamentais* $\lambda_{(i)}$, definida por

$$2\frac{\lambda_{(i)} \cdot \alpha_{(j)}}{\alpha_{(j)}^2} = \delta_{ij}, \quad (\text{A.0.13})$$

logo, todo peso λ pertencente à rede de pesos é escrito na forma

$$\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_{(i)} \quad \forall n_i \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.0.14})$$

Outras bases para $su(N)$ podem ser estudadas, e uma das mais importantes é a base de Chevalley, onde se define

$$\mathbb{H}_\alpha = 2\frac{\alpha_i H_i}{(\alpha, \alpha)} \quad \text{e} \quad E^\alpha = \sqrt{\frac{2}{(\alpha, \alpha)}} e_\alpha, \quad (\text{A.0.15})$$

onde, de (A.0.2) e (A.0.3), encontra-se que

$$[\mathbb{H}^\alpha, \mathbb{H}^\beta] = 0 \quad (\text{A.0.16})$$

$$[\mathbb{H}^\alpha, E^\beta] = E^\beta 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad (\text{A.0.17})$$

$$[E^\alpha, E^\beta] = \sqrt{\frac{(\alpha + \beta, \alpha + \beta)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}} N(\alpha, \beta) E^{\alpha + \beta} \quad \text{se } \alpha + \beta \in \{\alpha_i\} \quad (\text{A.0.18})$$

$$= \mathbb{H}^\alpha \quad \text{se } \alpha + \beta = 0, \quad (\text{A.0.19})$$

$$= 0 \quad \text{outro caso.} \quad (\text{A.0.20})$$

Uma relação importante a se notar nessa base é o produto interno em (A.0.1), que fica

$$\text{tr}(\mathbb{H}^a \mathbb{H}^b) = \frac{(\alpha^a, \alpha^b)}{(\alpha^a, \alpha^a)(\alpha^b, \alpha^b)} \eta_{ab},$$

$$\text{tr}(E^a E^b) = \frac{2}{\sqrt{(\alpha^a, \alpha^a)(\alpha^b, \alpha^b)}} \delta_{a+b, 0}, \quad (\text{A.0.21})$$

$$\text{tr}(\mathbb{H}^a E^b) = 0,$$

onde $\eta_{ab} = 2K_{ab}/\alpha^2 = \eta_{ba}$.

Como exemplo, [28] toma-se a álgebra de Lie $su(3)$, onde os geradores são conhecidos como *matrizes de Gell-Mann* [13] e são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.22})$$

Os geradores dessa álgebra são convencionalmente definidos por $T_i = \lambda_i/2$ com $i = 1, \dots, 8$; definindo os geradores de Cartan por $H_1 \equiv T_3 = \lambda_3/2$ e $N_2 \equiv T_8 = \lambda_8/2$, tem-se que os pesos dessa subálgebra são resolvidos de forma simples, pois essas matrizes já são diagonais, de modo que os vetores peso, descritos no espaço vetorial euclidiano

(H_1, H_2) associados aos autovetores normalizados, são

$$\begin{aligned}\mu_1 &\equiv (1/2, 1/2\sqrt{3}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_2 &\equiv (-1/2, 1/2\sqrt{3}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_3 &\equiv (0, -1/\sqrt{3}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.0.23}$$

As raízes simples de $su(3)$ são normalizadas, ou seja, verifica-se que $(\pm\alpha_i)^2 = 1$; suas raízes simples são $\alpha_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e $\alpha_2 = (1/2, -\sqrt{3}/2)$, de modo que a matriz de Cartan é dada por

$$K_{ab} = 2 \frac{(\alpha_a, \alpha_a)}{(\alpha_b, \alpha_b)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\tag{A.0.24}$$

e a matriz de Cartan inversa K_{ab}^{-1} é dada por

$$K_{ab}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.\tag{A.0.25}$$

As subálgebras $su(2)$ encontradas especificando as raízes, que serão as diferenças entre os pesos e que por sua vez são dadas $\pm\alpha^1 = (\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$, $\pm\alpha^2 = (\pm 1/2, \mp\sqrt{3}/2)$ e $\pm\alpha^3 = (\pm 1, 0)$, por isso

$$\begin{aligned}\{E_{+\alpha^1}, E_{-\alpha^1}, -\frac{1}{4}(-\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8)\}; \\ \{E_{+\alpha^2}, E_{-\alpha^2}, -\frac{1}{4}(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8)\}; \\ \{E_{+\alpha^3}, E_{-\alpha^3}, \frac{1}{2}\lambda_3\}.\end{aligned}\tag{A.0.26}$$

Essas matrizes, na base de Chevalley (A.0.15), são dadas por

$$\mathbb{H}_{\alpha^1} = \frac{1}{2}H_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}H_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbb{H}_{\alpha^2} = \frac{1}{2}H_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}H_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

também tem-se

$$\begin{aligned} E_{\alpha^1} &= \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha^1} &= \frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{\alpha^2} &= \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha^2} &= \frac{1}{2}(\lambda_6 - i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{\alpha^3} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha^3} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

As relações do produto interno (A.0.21) de $su(3)$ na base de Chevalley são dadas por

$$\mathrm{tr}(\mathbb{H}_{\alpha^1} \mathbb{H}_{\alpha^2}) \equiv \mathrm{tr}(\mathbb{H}_1 \mathbb{H}_2) = -1; \quad (\text{A.0.27})$$

$$\mathrm{tr}(\mathbb{H}_i \mathbb{H}_i) = 2, \quad i = 1, 2; \quad (\text{A.0.28})$$

$$\mathrm{tr}(E_{\alpha^a} E_{\alpha^b}) \equiv \mathrm{tr}(E_a E_b) = \delta_{a+b,0}, \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (\text{A.0.29})$$

B

Álgebras de Kac-Moody e algumas de suas estruturas de graduação

Antes de definir uma álgebra de Kac-Moody, começa-se com uma álgebra de Lie finita \mathfrak{g} e constrói-se a álgebra de Loop [11] a qual consiste de polinômios formais de Laurent $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ com o colchete de Lie

$$[X \otimes \lambda^n, Y \otimes \lambda^m] = [X, Y] \otimes \lambda^{m+n}. \quad (\text{B.0.1})$$

Uma álgebra de Kac-Moody afim $\hat{\mathfrak{g}}$ é a extensão central da álgebra de Loop $\tilde{\mathfrak{g}}$ por um elemento central \mathbf{K} que comuta com todos os outros elementos da álgebra.

Seja uma álgebra de Kac-Moody [14, 26] $\hat{\mathfrak{g}}$, afim à álgebra de Lie \mathfrak{g} , dada pelas relações de comutação

$$[H_a^m, H_b^n] = m C \eta_{ab} \delta_{m+n,0}, \quad (\text{B.0.2})$$

$$[H_a^m, E_\alpha^n] = \sum_{b=1}^r m_b^\alpha K_{ba} E_\alpha^{m+n}, \quad (\text{B.0.3})$$

$$[E_\alpha^m, E_{-\alpha}^n] = \sum_{a=1}^r l_a^\alpha H_a^{m+n} + \frac{2}{\alpha^2} m C \delta_{m+n,0}, \quad (\text{B.0.4})$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = (q+1)\epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}^{m+n} \quad \text{se } \alpha + \beta \text{ for raiz}, \quad (\text{B.0.5})$$

$$[D, E_\alpha^m] = m E_\alpha^m, \quad (\text{B.0.6})$$

$$[D, H_\alpha^m] = m H_\alpha^m; \quad (\text{B.0.7})$$

nestas K_{ab} , é a matriz de Cartan definida em (A.0.7) da álgebra de Lie simples \mathfrak{g} , associada à álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathfrak{g}}$ e que é gerada por $\{H_a^0, E_a^0\}$; $\eta_{ab} = (2/\alpha^2)K_{ab} = \eta_{ba}$; q é o maior número positivo tal que $\beta - q\alpha$ ainda seja uma raiz; $\epsilon(\alpha, \beta)$ são sinais determinados pela identidade de Jacobi, l_a^α são inteiros dados na expansão $\alpha/\alpha^2 = \sum_{a=1}^r l_a^\alpha \alpha_a / \alpha_a^2$ enquanto que os inteiros m_a^α são dados pela expansão $\alpha = \sum_{a=1}^r m_a^\alpha \alpha_a$ onde os $\{\alpha_i\}$, $i = 1 \dots r$, são as raízes simples de \mathfrak{g} ; para todos os casos, r é o posto da álgebra de Lie simples \mathfrak{g} .

Escolhe-se uma graduação inteira de $\hat{\mathfrak{g}}$ dada por

$$\hat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\mathfrak{g}}_n \quad (\text{B.0.8})$$

tal que se possa definir um operador de graduação

$$Q_s = H_s + N_s D + \sigma C, \quad H_s = \sum_{a=1}^r s_a \lambda_a^v \cdot H^0, \quad (\text{B.0.9})$$

onde (s_0, s_1, \dots, s_r) é um vetor de inteiros não negativos; $\lambda_a^v \equiv 2\lambda_a/\alpha^2$ onde os λ_a s são os pesos fundamentais da álgebra de Lie simples \mathfrak{g} e os α_a s são as raízes simples de \mathfrak{g} ; tem-se também que

$$N_s = \sum_{i=0}^r s_i m_i^\psi, \quad \psi = \sum_{a=1}^r m_a^\psi \alpha_a \quad \text{e} \quad m_0^\psi = 1, \quad (\text{B.0.10})$$

onde ψ é a raiz mais alta de \mathfrak{g} . Com isso, o operador de graduação Q_s satisfaz

$$[Q_s, \widehat{\mathfrak{g}}_n] = n \widehat{\mathfrak{g}}_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.0.11})$$

Com as regras de comutação (B.0.2)-(B.0.7) se encontra que

$$[Q_s, H_a^m] = m N_s H_a^m, \quad (\text{B.0.12})$$

$$[Q_s, E_a^m] = \left(\sum_{a=1}^r m_a^\alpha s_a + n N_s \right) E_a^m; \quad (\text{B.0.13})$$

os operadores de step [16] associados às raízes simples de $\widehat{\mathfrak{g}}$ são $e_a \equiv E_{\alpha_a}^0$, $e_0 \equiv E_{-\psi}^1$ e $f_a \equiv E_{-\alpha_a}^0$, $f_0 \equiv E_{\psi}^{-1}$; o operador D ; e os geradores de sua subálgebra de Cartan, que são $h_a \equiv H_a^0$, $h_0 \equiv \sum_{a=1}^r l_a^\psi H_a^0 + 2/\psi^2$ onde nesta subálgebra l_a^ψ é dado por

$$\frac{\psi}{\psi^2} = \sum_{a=1}^r l_a^\psi \frac{\alpha_a}{\alpha_a^2}, \quad l_0^\psi = 1; \quad (\text{B.0.14})$$

então

$$[Q_s, h_i] = [Q_s, D] = 0 \quad (\text{B.0.15})$$

$$[Q_s, e_i] = s_i e_i \quad (\text{B.0.16})$$

$$[Q_s, f_i] = -s_i f_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (\text{B.0.17})$$

Tais informações já são suficientes para definir uma representação das álgebras de Kac-Moody conhecida como a *representação de peso mais alto* [26]; ela é definida em termos de um vetor de peso mais alto $|\lambda_s\rangle$ que é construído por uma graduação \mathbf{s} de $\widehat{\mathfrak{g}}$ definida em (B.0.9); tais estados são aniquilados por geradores de $\widehat{\mathfrak{g}}$ que têm graus positivos: $\widehat{\mathfrak{g}}_+ |\lambda_s\rangle = 0$; são autoestados da subálgebra $\widehat{\mathfrak{g}}_0$:

$$h_i |\lambda_s\rangle = s_i |\lambda_s\rangle, \quad (\text{B.0.18})$$

$$f_i |\lambda_s\rangle = 0 \quad (\text{B.0.19})$$

$$Q_s |\lambda_s\rangle = \eta_s |\lambda_s\rangle, \quad (\text{B.0.20})$$

$$C |\lambda_s\rangle = \frac{\psi^2}{2} \left(\sum_{a=1}^r l_a^\psi \frac{\alpha_a}{\alpha_a^2} \right) |\lambda_s\rangle. \quad (\text{B.0.21})$$

É sempre possível [16] modificar a definição do operador de graduação Q_s adicionando uma componente em C tal que o autovalor η_s se anule.

O estado de peso mais alto $|\lambda_s\rangle$ pode ser construído como

$$|\lambda_s\rangle = \bigotimes_{i=0}^r |\hat{\lambda}_i\rangle^{\otimes s_i} \quad (\text{B.0.22})$$

onde os $|\hat{\lambda}_i\rangle$ são os estados de peso mais alto da representação fundamental e os λ_i s são os pesos fundamentais correspondentes $\hat{\mathfrak{g}}$ dados por [16]

$$\hat{\lambda}_0 = (0, \psi^2/2, 0) \quad \text{e} \quad (\text{B.0.23})$$

$$\hat{\lambda}_a = (\lambda_a, l_a^\psi \psi^2/2, 0), \quad (\text{B.0.24})$$

onde os λ_a s, com $a = 1, \dots, r$, são os pesos fundamentais da álgebra de Lie finita \mathfrak{g} associada a $\hat{\mathfrak{g}}$; l_a^ψ é definido em (B.0.14) e os autovalores de H_a^0 , C e D são

$$H_a^0 |\hat{\lambda}_0\rangle = 0, \quad (\text{B.0.25})$$

$$H_b^0 |\hat{\lambda}_a\rangle = \delta_{ab} |\hat{\lambda}_a\rangle, \quad (\text{B.0.26})$$

$$C |\hat{\lambda}_0\rangle = \frac{\psi^2}{2} |\hat{\lambda}_0\rangle, \quad (\text{B.0.27})$$

$$C |\hat{\lambda}_a\rangle = \frac{\psi^2}{2} l_a^\psi |\hat{\lambda}_0\rangle \quad \text{e} \quad (\text{B.0.28})$$

$$D |\hat{\lambda}_i\rangle = 0. \quad (\text{B.0.29})$$

Para cada representação fundamental, os estados de peso mais alto satisfazem

$$h_j |\hat{\lambda}_i\rangle = \delta_{ij} |\hat{\lambda}_i\rangle, \quad (\text{B.0.30})$$

$$e_j |\hat{\lambda}_i\rangle = 0, \quad (\text{B.0.31})$$

$$f_j |\hat{\lambda}_i\rangle = 0, \quad (\text{B.0.32})$$

$$f_j^2 |\hat{\lambda}_i\rangle = 0. \quad (\text{B.0.33})$$

B.1 1º Exemplo: graduação homogênea para $\hat{sl}(2)$

A graduação homogênea para $\hat{sl}(2)$ é definida com um vetor de graduação $s = (1, 0)$, de modo que $|\lambda_s\rangle = |\lambda_0\rangle$ e que na base de Weil-Cartan tenha-se as relações de comutação:

$$\left\{ \begin{array}{l} [H^m, H^n] = n \frac{1}{2} C \delta_{m+n,0}, \\ [H^m, E_\pm^n] = \pm E_\pm^{m+n}, \\ [E_+^m, E_-^n] = 2H^{m+n} + nC \delta_{m+n,0}, \\ [D, T^m] = mT^m; \end{array} \right. \quad (\text{B.1.1})$$

Nestas, C é o termo central. De (B.0.15)-(B.0.17) tem-se, para tal caso, que $h_0 = C$, $h_1 = H^0$, $f_1 = E_-^0$, $e_1 = E_+^0$, tal que se obtém de (B.0.30)-(B.0.33) as relações

$$h_1|\lambda_0\rangle = 0, \quad (\text{B.1.2})$$

$$f_1|\lambda_0\rangle = 0, \quad (\text{B.1.3})$$

$$e_1|\lambda_0\rangle = 0, \quad \text{e} \quad (\text{B.1.4})$$

$$h_0|\lambda_0\rangle = C|\lambda_0\rangle = |\lambda_0\rangle. \quad (\text{B.1.5})$$

Nestas, fica claro que o vetor de peso mais alto $|\lambda_0\rangle$ desta álgebra é um autoestado de sua subálgebra de grau zero.

B.2 2º Exemplo: $s = (1, 1)$ para $\widehat{sl}(2)$

Neste caso [27], as relações de comutação preservam a forma do exemplo anterior:

$$\left\{ \begin{array}{l} [T_3^m, T_3^n] = m \frac{1}{2} C \delta_{m+n,0}, \\ [T_3^m, T_\pm^n] = \pm T_\pm^{m+n}, \\ [T_+^m, T_-^n] = 2T_3^{m+n} + mC \delta_{m+n,0}, \quad \text{e} \\ [d, T_i^m] = mT_i^m, \quad i = 3, + \text{ ou } - . \end{array} \right. \quad (\text{B.2.1})$$

Entretanto, para o caso de sine-Gordon é feita uma escolha de base dada por

$$b_{2m+1} = T_+^m + T_-^{m+1}, \quad F_{2m+1} = T_+^m - T_-^{m+1}, \quad \text{e} \quad F_m = 2T_3^m - \frac{1}{2} \delta_{m,0} C;$$

esta base satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} [b_{2m+1}, b_{2n+1}] = (2m+1) \delta_{m+n+1,0} C, \\ [b_{2m+1}, F_n] = -2F_{n+2m+1}, \\ [F_{2m+1}, F_{2n}] = -2b_{2(n+m)+1}, \\ [F_{2m+1}, F_{2n+1}] = -(2m+1) \delta_{m+n+1,0} C, \quad \text{e} \\ [F_{2m}, F_{2n}] = 2m \delta_{m+n,0} C. \end{array} \right. \quad (\text{B.2.2})$$

O operador de graduação (B.0.9) fica $Q = T_3^0 + 2d$ de modo que

$$[Q, b_{2m+1}] = (2m+1) b_{2m+1} \quad [Q, F_n] = nF_n. \quad (\text{B.2.3})$$

Assim, de (B.0.30)-(B.0.33), encontra-se as duas representações fundamentais. Os vetores de peso mais alto nessa representação, onde os vetores de peso mais alto são

$|\lambda_0\rangle$ e $|\lambda_1\rangle$, logo

$$\begin{aligned}
 T_3^0|\lambda_0\rangle &= 0, \\
 C|\lambda_0\rangle &= |\lambda_0\rangle, \\
 T_3^n = T_+^0|\lambda_0\rangle = T_\pm^n|\lambda_0\rangle &= 0, \\
 T_3^0|\lambda_1\rangle &= \frac{1}{2}|\lambda_1\rangle, \\
 C|\lambda_1\rangle &= |\lambda_1\rangle \quad \text{e} \\
 T_3^n|\lambda_1\rangle = T_+^0|\lambda_1\rangle = T_\pm^n|\lambda_1\rangle &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{B.2.4}$$

C

Cálculo de elementos de matriz usando a representação de peso máximo

Nesta parte, será explicitado o cálculo de alguns elementos de matriz de geradores da álgebra $\widehat{sl}(2)$ usando suas regras de comutação (ver (B.1.1)). Nestes cálculos serão usados os fatos explicitados em (B.1.5) e que o estado (vetor) de peso máximo $|\lambda_0\rangle$ é aniquilado por qualquer gerador de grau positivo; é consequência disso que $\langle\lambda_0|$ é aniquilado por qualquer gerador de grau negativo. Assim, os elementos de matriz $\langle\lambda_0|M|\lambda_0\rangle$, com $M \in \widehat{\mathfrak{g}}$, só é diferente de zero quando M é o gerador central C (ver (B.1.5)). É definido que $F_i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu_i^m E_-^{-m}$ e $G_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_j^n E_+^{-n}$.

Alguns resultados que serão usados comumente são dados por (C.0.1), (C.0.2), (C.0.3): Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|E_-^m E_+^{-n}|\lambda_0\rangle &= \sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|E_+^{-n} E_-^m - 2H^{m-n} + n\delta_{m-n,0}C|\lambda_0\rangle \\ &= \sum_{m,n>0} (\langle\lambda_0|E_-^m E_+^{-n}|\lambda_0\rangle - 2\langle\lambda_0|H^{m-n}|\lambda_0\rangle + n\delta_{m-n,0}\langle\lambda_0|C|\lambda_0\rangle) \\ &= \sum_{m,n>0} n\delta_{m-n,0}. \end{aligned} \quad (\text{C.0.1})$$

Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, então

$$\sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|E_{\pm}^m H^{-n}|\lambda_0\rangle = \sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|H^n E_{\pm}^{-m}|\lambda_0\rangle = 0; \quad (\text{C.0.2})$$

de fato, pois tomando as regras de comutação em (B.1.1),

$$\begin{aligned} \sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|E_{\pm}^m H^{-n}|\lambda_0\rangle &= \sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|\mp E_{\pm}^{m-n}|\lambda_0\rangle + \sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|H^{-n} E_{\pm}^m|\lambda_0\rangle = 0; \\ \sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|H^n E_{\pm}^{-m}|\lambda_0\rangle &= \sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|\pm E_{\pm}^{n-m}|\lambda_0\rangle + \sum_{m,n>0} \langle\lambda_0|E_{\pm}^{-m} H^n|\lambda_0\rangle = 0; \end{aligned}$$

o outro fato é

$$\sum_{n,p>0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle \lambda_0 | E_+^n E_-^m E_{\pm}^{-p} | \lambda_0 \rangle = 0, \quad (\text{C.0.3})$$

que é facilmente visto quando se faz

$$\begin{aligned} \sum_{n,p>0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle \lambda_0 | E_+^n E_-^m E_{\pm}^{-p} | \lambda_0 \rangle &= \sum_{n,p>0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle \lambda_0 | (2H^{n-m} + \delta_{n-m,0}C) E_{\pm}^{-p} | \lambda_0 \rangle, \\ &= \sum_{n,p>0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\langle \lambda_0 | (2H^{n-m} E_{\pm}^{-p} | \lambda_0 \rangle + \delta_{n-m,0} \langle \lambda_0 | E_{\pm}^{-p} | \lambda_0 \rangle) \end{aligned} \quad (\text{C.0.4})$$

onde, usando o resultado de (C.0.2), tem-se

$$\sum_{n,p>0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle \lambda_0 | E_+^n E_-^m E_{\pm}^{-p} | \lambda_0 \rangle = 0. \quad (\text{C.0.5})$$

- Cálculo de $\langle \lambda_0 | F_i G_j | \lambda_0 \rangle$.

Este elemento de matriz é da forma

$$\langle \lambda_0 | F_i G_j | \lambda_0 \rangle = \sum_{m,n>0} \nu_i^{-m} \rho_j^n \langle \lambda_0 | E_-^m E_+^n | \lambda_0 \rangle,$$

que tem um elemento de matriz do tipo (C.0.1), então

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0 | F_i G_j | \lambda_0 \rangle &= \sum_{m,n>0} \nu_i^{-m} \rho_j^n n \delta_{m-n,0} \\ &= \sum_{n>0} n \left(\frac{\rho_j}{\nu_i} \right)^n \end{aligned}$$

que é uma série que converge para

$$\langle \lambda_0 | F_i G_j | \lambda_0 \rangle = \frac{\rho_j \nu_i}{(\rho_j - \nu_i)^2}. \quad (\text{C.0.6})$$

- Cálculo de $\langle \lambda_0 | G_i F_j G_k | \lambda_0 \rangle$

Aqui se tem

$$\langle \lambda_0 | G_i F_j G_k | \lambda_0 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m,p>0} \rho_i^{-m} \nu_j^n \rho_k^p \langle \lambda_0 | E_+^m E_-^n E_+^{-p} | \lambda_0 \rangle,$$

onde o elemento de matriz é da forma de (C.0.3), logo

$$\langle \lambda_0 | G_i F_j G_k | \lambda_0 \rangle = 0. \quad (\text{C.0.7})$$

- Cálculo de $\langle \lambda_0 | F_i G_j G_k | \lambda_0 \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_0 | F_i G_j G_k | \lambda_0 \rangle &= \sum_{m,n,p>0} \nu_i^{-m} \rho_j^n \rho_k^p \langle \lambda_0 | E_-^m E_+^{-n} E_+^{-p} | \lambda_0 \rangle \\
&= \sum_{m,n,p>0} \nu_i^{-m} \rho_j^n \rho_k^p (\langle \lambda_0 | E_+^{-n} E_-^m E_+^{-p} | \lambda_0 \rangle \\
&\quad + \langle \lambda_0 | (-2H^{m-n} + n\delta_{m-n,0}C) E_+^{-p} | \lambda_0 \rangle) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.0.8}$$

- Cálculo de $\langle \lambda_0 | F_i F_j G_k | \lambda_0 \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_0 | F_i F_j G_k | \lambda_0 \rangle &= \sum_{m,n,p>0} \nu_i^{-m} \nu_j^{-n} \rho_k^p \langle \lambda_0 | E_-^m E_-^n E_+^{-p} | \lambda_0 \rangle \\
&= \sum_{m,n,p>0} \nu_i^{-m} \nu_j^{-n} \rho_k^p (\langle \lambda_0 | E_-^m E_+^{-p} E_-^n | \lambda_0 \rangle \\
&\quad + \langle \lambda_0 | E_-^m (-2H^{-p+n} + p\delta_{-p+n,0}C) | \lambda_0 \rangle) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.0.9}$$

- Cálculo de $\langle \lambda_0 | F_i G_j F_k | \lambda_0 \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_0 | F_i G_j F_k | \lambda_0 \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m,p>0} \nu_i^{-m} \rho_j^n \nu_k^p \langle \lambda_0 | E_-^m E_+^{-n} E_-^p | \lambda_0 \rangle \\
&= \sum_{m,n,p>0} \nu_i^{-m} \rho_j^n \nu_k^p \langle \lambda_0 | E_-^m E_-^p E_+^{-n} | \lambda_0 \rangle \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m,p>0} \nu_i^{-m} \rho_j^n \nu_k^p \langle \lambda_0 | E_-^m (-2H^{-p-n} + n\delta_{-p-n,0}C) | \lambda_0 \rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.0.10}$$

O cálculo de elementos com um número maior de geradores, como por exemplo $\langle \lambda_0 | G_i F_j G_k G_l | \lambda_0 \rangle$ e $\langle \lambda_0 | F_i G_j F_k G_l | \lambda_0 \rangle$, se torna, em alguns casos, impraticavelmente complicado; para tal, usa-se os operadores de vértice, apresentados no próximo apêndice.

D

Operadores de vértice homogêneos de $\widehat{sl}(2)$

Sejam: os operadores da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = sl(2)$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\text{D.0.1})$$

a base dual de $\widehat{sl}(2)$

$$\{t^n h, t^n f, t^n e, f, C, D\}, \quad \left\{ \frac{1}{2} t^{-n} h, t^{-n} f, t^{-n} e, C, D \right\}; \quad (\text{D.0.2})$$

$Q = \mathbb{Z}\alpha$, a rede de raízes; $(\cdot | \cdot)$ é a forma simplética invariante de $sl(2)$ onde $(\alpha | \alpha) = 2$ e α são as raízes de $sl(2)$; $C[Q]$ a álgebra de grupo da rede formada pelas raízes $Q \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ onde o produto de elementos e^α da álgebra de grupo é dado por $e^\alpha e^\beta = \epsilon(\alpha, \beta) e^{\alpha+\beta}$ e onde $\epsilon(\alpha, \alpha) = \epsilon(-\alpha, -\alpha) = -\epsilon(-\alpha, \alpha) = -\epsilon(\alpha, -\alpha) = -1$. Seja $q = e^\alpha$, então identifica-se que $C[Q] = C[q, q^{-1}]$. A construção dos operadores de vértice homogêneos pode ser escrita com

$$L(\lambda_0) = C[x_1, x_2, \dots; q, q^{-1}];$$

$$\alpha^n \mapsto 2 \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \alpha^{-n} \mapsto n x_n, \quad \forall n > 0 \in \mathbb{Z}; \quad \alpha^0 \mapsto 2d \frac{\partial}{\partial q};$$

$$C \mapsto 1, \quad D \mapsto - \left(q \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 - \sum_{n \geq 1} n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad E(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_\pm^n z^{-n-1} \mapsto \Gamma_\pm(z),$$

onde

$$\Gamma_\pm = \exp \left(\pm \sum_{j \geq 1} z^j x_j \right) \exp \left(\mp 2 \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) q^{\pm 1} z^{\pm 2q \frac{\partial}{\partial q}} c_{\pm \alpha}. \quad (\text{D.0.3})$$

Ao definir

$$G_i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu_i^m j E_+^{-m}, \quad F_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_i^n j E_-^{-n}, \quad (\text{D.0.4})$$

se pode fazer a correspondência

$$G_i \rightarrow \rho_i \Gamma_+(\rho_i), \quad F_i \rightarrow \nu_i \Gamma_-(\nu_i). \quad (\text{D.0.5})$$

Os elementos de matriz podem agora ser calculados pela relação

$$\langle \lambda_0 | \Gamma_{\alpha_N}(z_N) \Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \cdots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) | \lambda_0 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_{-i} \neq 0, \\ \prod_{1 \leq i < j \leq N} \epsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i | \alpha_j)} & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_{-i} = 0. \end{cases} \quad (\text{D.0.6})$$

Com isso, os operadores de vértice para este caso são dois, $\Gamma_+(z)$ e $\Gamma_-(z)$, associados às raízes α e $-\alpha$, respectivamente. De (D.0.6) se observa que os elementos de matriz não nulos devem ter um número par de operadores de vértice e de modo que, supondo haver N operadores de vértice nos elementos de matriz do tipo $\langle \lambda_0 | \Gamma_{\alpha_N}(z_N) \Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \cdots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) | \lambda_0 \rangle$, então, os elementos de matriz não nulos devem ter $N/2$ operadores associados às raízes α e outros $N/2$ associados à raiz $-\alpha$. Pode-se agora mostrar, com esse formalismo, a realização de elementos de matriz; por exemplo, usando (D.0.6), calcula-se

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0 | F_i(\nu_i) G_j(\varrho_j) | \lambda_0 \rangle &= \nu_i \varrho_j \langle \lambda_0 | \Gamma_-(\nu_i) \Gamma_+(\varrho_j) | \lambda_0 \rangle \\ &= \nu_i \varrho_j \epsilon(+, -) (\nu_i - \varrho_j)^{(-\alpha | \alpha)} \\ &= \nu_i \varrho_j \frac{1}{(\nu_i - \varrho_j)^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.0.7})$$

Outro tipo de elemento de matriz é o da forma $\langle \lambda_0 | E_-^1 G_j(\varrho_j) | \lambda_0 \rangle$, que é calculado em seguida

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0 | E_-^1 G_j(\rho_i) | \lambda_0 \rangle &= \frac{1}{2i\pi} \oint dz z \rho_i \langle \lambda_0 | \Gamma_-(z) \Gamma_+(\rho_i) | \lambda_0 \rangle, \\ &= \frac{\rho_i}{2i\pi} \oint dz z \frac{z}{(z - \rho_i)^2}, \\ &= \rho_i; \end{aligned} \quad (\text{D.0.8})$$

nesta, a integral é feita num no contorno de um círculo com centro na origem.

Um outro exemplo importante de cálculos de elementos de matriz usando operadores de vértice é

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0 | E_-^1 G_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle &= \frac{\rho_i}{2i\pi} \oint dz z \rho_1 \nu_2 \rho_2 \langle \lambda_0 | \Gamma_-(z) \Gamma_+(\rho_1) \Gamma_-(\nu_2) | \lambda_0 \rangle \\ &= \frac{\rho_i}{2i\pi} \oint dz z \rho_1 \nu_2 \rho_2 \frac{\epsilon(+ -)}{(\nu_2 - \rho_2)^2} \epsilon(++)(\nu_2 - z)^2 \frac{\epsilon(+ -)}{(\nu_2 - \rho_1)^2} \\ &\quad \times \frac{\epsilon(- +)}{(\rho_2 - z)^2} \epsilon(--)(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\epsilon(+ -)}{(\rho_1 - z)^2} \\ &= \frac{\rho_i}{2i\pi} \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{(\nu_2 - \rho_2)^2 (\nu_2 - \rho_1)^2} \oint dz z \rho_1 \nu_2 \rho_2 \frac{(\nu_2 - z)^2}{(\rho_1 - z)^2 (\rho_2 - z)^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.0.9})$$

As integrais do tipo que aparecem em (D.0.9) são iguais a $2i\pi$. De fato: sejam as integrais do tipo

$$\oint z dz \frac{(z - \nu)^2}{(z - \varrho)^2(z + x)^2} = -\partial_\varrho \partial_x \oint z dz \frac{(z - \nu)^2}{(z - \varrho)(z + x)},$$

onde denominador pode ser decomposto em frações parciais, de modo que

$$\frac{1}{(z - \varrho)(z + x)} = \frac{1}{x + \varrho} \left(\frac{1}{z - \varrho} - \frac{1}{z + x} \right); \quad (\text{D.0.10})$$

então

$$\begin{aligned} \oint z dz \frac{(z - \nu)^2}{(z - \varrho)^2(z + x)^2} &= -\partial_\varrho \partial_x \oint z dz \frac{(z - \nu)^2}{x + \varrho} \left(\frac{1}{z - \varrho} - \frac{1}{z + x} \right), \\ &= -\partial_\varrho \partial_x \left\{ \frac{1}{x + \varrho} \left(\oint z dz \frac{(z - \nu)^2}{z - \varrho} - \oint z dz \frac{(z - \nu)^2}{z + x} \right) \right\}, \end{aligned}$$

onde, usando o resultado do teorema dos resíduos [3], encontra-se

$$\begin{aligned} \oint z dz \frac{(z - \nu)^2}{(z - \varrho)^2(z + x)^2} &= -\partial_\varrho \partial_x \left\{ \frac{2i\pi}{x + \varrho} (\varrho(\varrho - \nu)^2 + x(x - \nu)^2) \right\}, \\ &= -\partial_\varrho \partial_x \left\{ \frac{2i\pi}{x + \varrho} (\varrho^3 + x^3 + 2\nu(x^2 - \varrho^2) + \nu^2(\varrho + x)) \right\}, \\ &= -2i\pi \partial_\varrho \partial_x (x^2 - \varrho x + \varrho^2 + 2\nu(x - \varrho) + \nu^2), \\ &= 2i\pi. \end{aligned} \quad (\text{D.0.11})$$

Assim

$$\langle \lambda_0 | E_-^1 G_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle = \rho_1 \nu_2 \rho_2 \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{(\nu_2 - \rho_2)^2 (\nu_2 - \rho_1)^2} \quad (\text{D.0.12})$$

Da mesma forma, se obtém para elementos de matriz em termos de operadores de vértice homogêneos que

$$\langle \lambda_0 | F_i G_i F_j G_j | \lambda_0 \rangle = \frac{\rho_i \nu_i \rho_j \nu_j (\rho_j - \rho_i)^2 (\nu_j - \nu_i)^2}{(\rho_i - \nu_j)^2 (\rho_j - \nu_i)^2 (\rho_i - \nu_j)^2 (\rho_j - \nu_i)^2}. \quad (\text{D.0.13})$$

Estes operadores de vértice foram obtidos supondo que as representações da álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$ no plano complexo \mathbb{C} ; entretanto, no caso relevante ao do modelo NLS com condições de contorno constantes, é necessário que se represente os operadores de vértice em uma superfície de Riemann $\mathbb{C} - D$, onde D é um disco de raio ρ ; ou em uma superfície de Riemann na forma de um disco D de raio ρ . Estas representações são conhecidas na literatura e são estudadas, por exemplo, em [24].

Referências

- [1] H. Flaschka; The Toda lattice: I. Existence of integrals. Phys. Rev. B9, 1424 (1974).
- [2] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov, Theory of solitons: the inverse scattering method, Moscow, URSS; printed on United States of America, N. Y. (1984).
- [3] E. Butkov; Física-Matemática. Editora Guanabara, St. John's University, New York (1988).
- [4] P. G. Drazin, R. S. Jonhson; Solitons, an introduction; Cambridge Texts in Applied Mathematics, (1992).
- [5] M. J. Ablowitz, B. Prinari and A. D. Trubatch; Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, ix+257 pp., ISBN 0-521-53437-2, (2004).
- [6] H. Blas and H. L. Carrion; Solitons, kinks and extended hadron model based on the generalized sine-Gordon theory, JHEP01(2007)027, (2007).
- [7] H. S. B. Achic; Fenômenos não-lineares, a transformação de Bäcklund e as integrais de Henon de la rede de Toda; Tesis para optar el título de: licenciado en física. Lima-Peru, (1994).
- [8] <http://mathworld.wolfram.com/Sine-GordonEquation.html>
- [9] N. A. Lemos; Mecânica analítica; Ed. Livraria da Física; 1ª edição. São Paulo, (2004).
- [10] A. V. de Oliveira; "Uma introdução aos sistemas integráveis". Dissertação apresentada no departamento de matemática da Universidade Federal de Pernambuco, (2003).
- [11] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon. "Introduction to classical integrable systems". Cambridge monographs on Mathematical physics (2003).
- [12] A. Das; Integrable Models, 1st ed. World Scientific, Singapore, (1989).

-
- [13] Giorgi, H.; Lie Algebras in particle physics, from isospin to unified theories; Frontier in Physics; second edition, (1999).
- [14] V. G. Kac; Infinite dimensional Lie algebras, Third Ed., Cambridge University Press, Cambridge, (1990).
- [15] L. A. Ferreira, J. L. Miramontes and J. S. Guillen; Tau functions and dressing transformations for zero curvature affine integrable equations. *J. Math. Phys.* **38**, 882 (1997).
- [16] L. A. Ferreira; L. Miramontes, J. S. Guillén; Solitons, τ -functions and hamiltonian reduction for non-Abelian conformal affine Toda Theories; *Nuclear Physics B* 449, 631-679, (1995).
- [17] H. S. B. Achic; “Alguns Aspectos Algébricos de Sistemas Generalizados da Equação de Schrödinger Não Linear (2 dimensões)”. Dissertação apresentada no Departamento de Física do IFT, (2000).
- [18] M. J. B. F. da Silva; Hierarquia NLS: “Aspectos Algébricos, funções-Tau e Soluções Sólitos”. Dissertação apresentada no Departamento de Física da UFMT, (2007).
- [19] H. Blas, M. J. B. F. da Silva and L. F. dos Santos, Generalized NLS bright and Dark solitons in the hybrid dressing and tau function approach (in progress).
- [20] E. V. Doktorov, *J. Math Phys.* 38. 4138, (1997).
- [21] V. S. Gerdjikov, selected Aspects of Soliton Theory Constant Boundary Conditions, [arXiv: nlin. SI/0604005].
- [22] L. D Faddeev and L.A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer-Verlag, London, (1987).
- [23] R Radhakrishnan and M Lakshmanan, Bright and dark soliton solutions to coupled nonlinear Schrödinger equations. *J. Phys. A: Math. Gen.* 28, 2683-2692, (1995).
- [24] J. Polchinski, *An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (2004).
- [25] L. A. B. San Martin; *Álgebras de Lie*; editora da UNICAMP, 1ª edição, (1999).
- [26] P. Goddard and D. I. Olive, Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics; *International Journal of Modern Physics A*, Vol. 1, $n^{\circ}2$, 303-414, (1986).
- [27] L. A. Ferreira and W. J. Kacrzewski, A simple formula for the conserved charges of soliton theories, *JHEP09*, 015, (2007).

-
- [28] R. Gilmore; Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications, Dover publications , inc. Mineola, New York; 2005. Republication of the work published by Jonhson Wiley & Sons, Inc, New York, (1974).
- [29] M. J. Ablowitz, D. J. Klaup A. C. Newell and H. Segur, Methods to solve sine-Gordon equation. Physical Review Letters, Volume 30, number 25, 07 of march of (1973).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)