

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Conjuntos g -fechados em espaços L -topológicos
e
conjuntos g^* -fechados em espaços L -Alexandroff**

Rodrigo de Lima

Curitiba - PR
2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Conjuntos g -fechados em espaços L -topológicos
e
conjuntos g^* -fechados em espaços L -Alexandroff**

Rodrigo de Lima

Orientação:

Prof^a. Dr^a. Soraya Rosana Torres Kudri

e

co-orientação:

Prof^o. Tomas Keller Breuckmann

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau em Mestre em Matemática Aplicada. Curso de Pós-graduação em Matemática Aplicada. Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Curitiba - PR
2006

Dedicatória

Dedico este trabalho à todos os que buscam contemplar a verdade.

Agradecimentos

Agradeço :

- antes de tudo, à Deus, pois reconheço que sem Ele, eu nada poderia;
- aos sacerdotes Pe. Otavio C. Bortoluzzi; Pe. Ozenildo Staviski; Pe. Bernardo Willian Echeverry Cañas e Pe. Gilson Camargo;
- á todos os meus professores do curso de Mestrado, em especial a Soraya Rosana Torres Kudri, Tomas Keller Breuckmann e Marcelo Muniz Silva Alves;
- aos professores da Udesc - Joinville: Enori Carelli, Dario Noli, Rogério de Aguiar e de modo especial a Lauri Fernandes da Silva;
- aos meus professores do curso de graduação : Venâncio Ferreira e Maria Magdalena de Castro;
- aos meus pais Gabriel e Judith;
- á todos os que me ajudaram durante os momentos mais ”nebulosos” dos últimos três anos.

Lista de símbolos

\emptyset	conjunto vazio
\subseteq	relação de inclusão entre conjuntos
$\leq, \not\leq$	relação de ordem parcial e sua negação
χ_A	função característica do conjunto A
\cap, \cup	operações de intersecção e de união entre conjuntos respectivamente
\wedge, \vee	operações de infimo e supremo respectivamente
A^c	complementar de um conjunto A
$f : A \longrightarrow B$	função de A em B
L	Reticulado
L^X	conjunto de todos os conjuntos L -fuzzy de X
\prime	involução com reverção de ordem
$Pr(L)$	conjunto dos elementos primos de L
$Cp(L)$	conjunto dos elemntos coprimos de L
(X, τ)	espaço topológico
(X, \mathfrak{S})	espaço L -topológico
(X, α)	espaço de Alexandroff
(X, β)	espaço L -Alexandroff

x_p	ponto L -fuzzy
$0, 1$	infimo e supremo de um reticulado respectivamente
$supp(f)$	suporte de um conjunto L -fuzzy
$\bigwedge_{i \in J} f_i$	infimo das funções $f_i, i \in J$
$\bigvee_{i \in J} f_i$	supremo das funções $f_i, i \in J$
A°	interior do conjunto A
\bar{A}	fecho do conjunto A
f°	interior do L -conjunto f
\bar{f}	fecho do L -conjunto f
Φ	família de todos os conjuntos fechados de um espaço topológico
$\bigcap_{i \in J} A_i$	intersecção de todos os conjuntos $A_i, i \in J$
$\bigcup_{i \in J} A_i$	união de todos os conjuntos $A_i, i \in J$
\in, \notin	relação de pertinência de elemento para conjunto e sua negação
$A - B$	diferença do conjunto A ao conjunto B
\forall	quantificador ‘‘para todo’’
\implies	relação de implicação
\iff	relação de equivalência
$ker(A)$	intersecção de todos os conjuntos abertos contendo A
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
$\wp(X)$	coleção de todos os subconjuntos do conjunto X

Sumário

1	Introdução	1
2	<i>L</i>-topologias	8
2.1	Reticulados	8
2.2	<i>L</i> -conjuntos e <i>L</i> -pontos	11
2.3	<i>L</i> -topologias	13
3	Conjuntos <i>g</i>-fechados	20
3.1	Conjuntos <i>g</i> -fechados	20
3.2	Conjuntos <i>g</i> -abertos	26
3.3	Espaços $T_{1/2}$	30
4	Conjuntos <i>g</i>-fechados em <i>L</i>-topologias	33
4.1	Conjuntos <i>g</i> -fechados	33
4.2	Conjuntos <i>g</i> -abertos	48
5	Espaços de Alexandroff e conjuntos <i>g</i>*-fechados	56
5.1	Algumas definições e resultados	56
5.2	Conjuntos <i>g</i> *-fechados	62
5.3	Conjuntos <i>g</i> *-abertos	74
5.4	Espaços T_w	75
6	Espaços <i>L</i>-Alexandroff e conjuntos <i>g</i>*-fechados	80
6.1	Espaços <i>L</i> -Alexandroff	80
6.2	Conjuntos <i>g</i> *-fechados em espaços <i>L</i> -Alexandroff	85
6.3	Conjuntos <i>g</i> *-abertos em espaços <i>L</i> -Alexandroff	90
7	Considerações finais	94
	Bibliografia	96

Resumo

Um dos objetivos deste foi sugerir uma definição de conjunto g -fechado para espaços L -topológicos e estudar algumas propriedades. Com a nossa definição, em L -topologias, encontramos vários resultados análogos aos encontrados na topologia geral. Nós também propomos uma versão L -fuzzy para espaços de Alexandroff que batizamos de L -Alexandroff. Para estes espaços, definimos conjuntos g^* -fechados e encontramos vários resultados análogos aos obtidos em espaços de Alexandroff.

Palavras-chave: conjuntos g -fechados, conjuntos g^* -fechados, espaços L -topológicos, espaços de Alexandroff.

Abstract

One of the goals of this work is to suggest a definition for g -closed sets in L -topological spaces and study some of its properties. We could obtain in L -topology similar results to those obtained in topological spaces. We also propose an L -fuzzy version for Alexandroff spaces which we call here L -Alexandroff spaces. On these spaces we define g^* -closed sets and obtain similar results to those obtained in Alexandroff spaces.

Keywords: g -closed sets, g^* -closed sets, L -topological spaces, L -Alexandroff spaces.

Capítulo 1

Introdução

Em 1965, um trabalho de Zadeh [30] causou grande interesse no mundo científico. Em [30], Zadeh definiu os primeiros conceitos do que, futuramente, seria chamada de matemática fuzzy.

Dado um conjunto universo qualquer X , sabemos que um subconjunto A de X pode ser representado por sua função característica $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ definida como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Sejam $A, B \subseteq X$. Observe que:

- i. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$
- ii. $\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$
- iii. $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$
- iv. Se $A \subseteq B$, então $\chi_A \leq \chi_B$
- v. $\chi_\emptyset = 0$
- vi. $\chi_X = 1$

onde:

$$(\chi_A \wedge \chi_B)(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$

$$(\chi_A \vee \chi_B)(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$

$$0(x) = 0 \text{ e } 1(x) = 1, \text{ para todo } x \in X.$$

Assim as operações \cap, \cup entre conjuntos podem ser representadas, nas funções características como \wedge, \vee respectivamente, assim como a relação \subseteq pode ser repre-

sentada por \leq nas funções características.

O que Zadeh fez foi criar uma função $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$, baseada em χ_A . Observe que o contra domínio de μ_A é o intervalo $[0, 1]$. A função μ_A é chamada de conjunto fuzzy.

Sejam $A, B \subseteq X$ e $\mu_A, \mu_B : X \rightarrow [0, 1]$ conjuntos fuzzy. Com base nas operações de união, intersecção, complementar e inclusão dos conjuntos clássicos, temos que:

- i. a operação \wedge é chamada de intersecção fuzzy;
- ii. a operação \vee é chamada de união fuzzy;
- iii. a operação c é a operação que associa cada conjunto fuzzy μ_A a função $\mu_A^c = 1 - \mu_A$;
- iv. a relação \leq é chamada de inclusão fuzzy. Se $\mu_A \leq \mu_B$, diremos que μ_A está contido em μ_B ;
- v. o conjunto vazio fuzzy é dado pela função $0 : X \rightarrow [0, 1]$ onde $x \mapsto 0$;
- vi. o conjunto universo fuzzy é dado pela função $1 : X \rightarrow [0, 1]$ onde $x \mapsto 1$.

Podemos observar que, ao contrário dos conjuntos clássicos, nem sempre teremos que:

$$\mu_A \wedge \mu_A^c = 0$$

Para verificarmos isto, basta tomarmos $\mu_A(x) = 0,5$.

Um pouco mais tarde, em 1967, Goguen [14], generalizou os conjuntos fuzzy.

Para Goguen, dado um conjunto X , os conjuntos fuzzy poderiam assumir qualquer valor num reticulado completo L .

Os elementos 0 e 1 serão, respectivamente, os elementos máximo e mínimo de L .

As funções $f : X \rightarrow L$ são chamadas de "conjuntos L -fuzzy" ou L -conjuntos. A família de todos os conjuntos L -fuzzy de X será representada por L^X .

As operações de intersecção e união em L^X nada mais são do que as operações \wedge, \vee (le-se supremo e infimo respectivamente). Assim, a união dos L conjuntos f e g é o L -conjunto $f \vee g$ onde $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ e a intersecção f e g é o L -conjunto $(f \wedge g)$ onde $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$. A relação de inclusão é dada por \leq . Diremos que $f \leq g$ se e somente se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. A operação de complementar pode ser definida pela involução de ordem reversa $'$.

Seja $L = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ um reticulado completo. Dados $a, b \in L$, chamaremos de involução de ordem reversa a operação $' : L \rightarrow L$ no qual os elementos a' e b' satisfazem:

- $a \leq b$ se e somente se $b' \leq a'$
- $(a')' = a$

Sejam 0 e 1 os elementos mínimo e máximo de L respectivamente. Podemos observar que a involução de ordem reversa satisfaz, de maneira analoga, algumas propriedades do complementar de um conjunto clássico:

- i. Se $f \leq g$, então $g' \leq f'$;
- ii. $1' = 0$ e $0' = 1$;
- iii. $(f \wedge g)' = f' \vee g'$
- iv. $(f \vee g)' = f' \wedge g'$
- v. $(f')' = f$

Onde os conjuntos L -fuzzy $0 : X \rightarrow L$ e $1 : X \rightarrow L$ são definidos como $0(x) = 0$ e $1(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Porém uma das mais importantes propriedades, que seria: $f \wedge f' = 0$, nem sempre é válida. Para verificarmos isto, basta sabermos que $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ com a relação de ordem usual é um reticulado completo e definirmos $f' = 1 - f$ e $f(x) = 0,5$, para todo $x \in X$.

Convém observar que um conjunto fuzzy é uma generalização da função característica e um L -conjunto é uma generalização de um conjunto fuzzy.

Falta ainda um conceito importante: temos noção de que um conjunto clássico poderia se comparar a uma reunião de objetos bem definidos. Assim, se os " L -conjuntos" são funções, o que poderia ser seus "elementos"?

Uma definição foi dada por Warner [25] e a usaremos em todo trabalho.

Dado um reticulado L , diremos que $p \in L$ é um elemento primo se e somente se $p \neq 1$ e ainda $a \wedge b \leq p$ implicar em $a \leq p$ ou $b \leq p$. O conjunto de todos os elementos primos de um reticulado completo L será denotado por $Pr(L)$.

Pela definição dada por Warner, dados $x \in X$ e $p \in Pr(L)$, um L -ponto é uma função $x_p : X \rightarrow L$, definida como:

$$x_p(y) = \begin{cases} p & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Note que x_p é também um L -conjunto.

Diremos que um L -ponto x_p pertence ao L -conjunto f , e escrevemos $x_p \in f$ se e somente se $f(x) \not\leq p$. Observe que se $f, g \in L^X$ são tais que $x_p \in f$ e $f \leq g$, então $x_p \in g$, pois, caso $x_p \notin g$, teríamos que $g(x) \leq p$ e assim, $f(x) \leq g(x) \leq p$, i. e., $x_p \notin f$, o que negaria a hipótese.

Se $x \in f$, $p \in Pr(L)$ e $f \in L^X$ são tais que $f(x) > p$, então $x_p \in f$, porém, como L nem sempre é um conjunto totalmente ordenado, a recíproca da afirmação acima pode ser falsa. Mas, caso L seja um conjunto totalmente ordenado a recíproca acima será verdadeira.

Outro detalhe importante a ser notado é que, ao contrário dos conjuntos clássicos, $x_p \in f$ não é condição necessária nem suficiente para afirmar que $x_p \notin f'$, uma vez que $f(x) \not\leq p$ pode não ser equivalente a $f'(x) \leq p$.

A primeira definição de espaço topológico fuzzy foi dada por Chang [7]. Chang definiu um espaço topológico fuzzy como sendo um conjunto clássico \mathfrak{S} de conjuntos fuzzy, cujo reticulado é o intervalo real $[0, 1]$, em que:

- i. $0, 1 \in \mathfrak{S}$;
- ii. Se $f_i \in \mathfrak{S}, i \in J$ então $\bigvee_{i \in J} f_i \in \mathfrak{S}$;
- iii. Se $f_i \in \mathfrak{S}, i = 1, \dots, n$ então $\bigwedge_{i=1}^n f_i \in \mathfrak{S}$.

O espaços que chamaremos de Goguem tem uma definição análoga à de Chang, entretanto, ao invés de conjuntos fuzzy sobre o reticulado $[0, 1]$, os elementos de \mathfrak{S} são conjuntos L -fuzzy, i. e., definidos sobre um reticulado L .

Atualmente, porém, chama-se de espaço topológico fuzzy o espaço proposto por Sostak cuja definição, dada abaixo, encontramos em [10]:

Dados um conjunto X e um reticulado L , chamaremos de topologia L -fuzzy uma função $\mathfrak{S} : L^X \rightarrow L$ onde:

- i. $\mathfrak{S}(1) = \mathfrak{S}(0) = 1$;
- ii. $\mathfrak{S}(u \wedge v) \geq \mathfrak{S}(u) \wedge \mathfrak{S}(v), \forall u, v \in L^X$;
- iii. $\mathfrak{S}\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right) \geq \bigwedge_{j \in J} \mathfrak{S}(f_j), \forall i \in J, f_i \in L^X$.

O espaços de Goguem são conhecidos hoje como espaços L -topológicos.

Os conjuntos g -fechados foram introduzidos na topologia clássica por Levine em [17]. O objetivo de Levine foi generalizar os conjuntos fechados, para isso, definiu os conjuntos g -fechados como segue:

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço topológico, diremos que $A \subseteq X$ é um conjunto g -fechado se e somente se para todo $U \in \mathfrak{S}$ onde $A \subseteq U$ temos que $\overline{A} \subseteq U$.

Com a definição acima, é evidente que todo conjunto fechado é g -fechado (uma vez que todo conjunto fechado é igual ao seu fecho), porém, nem todo g -fechado é fechado.

Levine [17] mostrou que muitos resultados clássicos para conjuntos fechados tem um resultado análogo para conjuntos g -fechados. Por exemplo, na topologia clássica temos que “Todo conjunto fechado em um espaço compacto é compacto”. Levine prova que “Todo conjunto g -fechado em um espaço compacto é compacto”. Ou seja, muitas propriedades dos conjuntos fechados são válidos para conjuntos g -fechados.

Em [6], B. Balasubramanian e P. Sundaram deram uma definição de conjuntos g -fechados fuzzy como segue: “um conjunto L -fuzzy μ é g -fechado no espaço L -topológico (X, \mathfrak{S}) se e somente se para todo $a \in \mathfrak{S}$ temos que $\mu \leq a$ implica em $\overline{\mu} \leq a$ ”, porém, com essa definição, não garantimos o resultado que nos diz que todo conjunto g -fechado em um L -espaço compacto é compacto, utilizando a definição de compacidade dada por Kudri [19].

Neste trabalho, provamos também, com a nossa definição, que alguns resultados para conjuntos L -fechados possuem um resultado análogo para conjuntos g -fechados em um L -espaço. Convém observar que alguns teoremas foram demonstrados com

uma restrição, na maioria dos casos, essa restrição refere-se ao reticulado L .

Ainda em [17], Levine define conjuntos g -abertos: Um determinado conjunto é g -aberto se e somente se seu complementar é g -fechado. Com uma definição análoga em L -espaços, provamos vários teoremas equivalentes de [17] para L -espaços utilizando a nossa definição.

Em 1940, A. D. Alexandroff em [1] ao estudar funções e medidas em espaços variados, definiu um espaço como sendo um par ordenado (X, δ) onde δ é uma coleção de subconjuntos de X onde $X, \emptyset \in \delta$ e a união finita e a interseção enumerável de elementos de δ pertencem a δ . O par ordenado (X, δ) assim definido é chamado de espaço de Alexandroff e os elementos de δ são chamados de conjuntos fechados de (X, δ) . Podemos observar que todo espaço topológico é de Alexandroff.

Em [9], P. Das e M. A. Rashid definiram em um espaço de Alexandroff os conjuntos g^* -fechados. O objetivo de Das e Rashid foi fornecer uma versão dos conjuntos g -fechados para espaços de Alexandroff.

Neste trabalho, mostramos no capítulo 4 que as definições de conjuntos g -fechados e g^* -fechados em um espaço topológico são equivalentes. Além disso, sugerimos a definição de um espaço de Alexandroff como base nos conjuntos L -fuzzy e também uma definição para conjuntos g^* -fechados.

O primeiro capítulo é dedicado a apresentação dos conceitos básicos de reticulados, L -conjuntos, L -pontos e L -espaços.

No segundo capítulo, apresentaremos um estudo dos conjuntos g -fechados.

Já no capítulo terceiro, sugerimos uma definição de conjuntos g -fechados para espaços L -topológicos.

No quarto capítulo apresentamos a definição de espaços de Alexandroff e de conjuntos g^* -fechados.

Por fim, no quinto capítulo sugerimos uma definição de espaços de Alexandroff para L -conjuntos (que chamaremos de espaços de L -Alexandroff) e conjuntos g^* -

fechados para esses espaços.

Demonstramos de maneira própria alguns resultados de [17] e [9].

Em todo o trabalho, todos os resultados e definições sem atribuição de autoria são nossa contribuição.

Capítulo 2

L -topologias

O presente capítulo contém algumas definições e resultados básicos que serão utilizados em todo trabalho.

Ele está dividido em três seções: a primeira apenas com algumas definições e observações sobre reticulados, já a segunda seção contém as definições sobre L -conjuntos e L -pontos e na terceira seção resultados e definições importantes em espaços L -topológicos, entre estes a definição de compacidade dada por Kudri [19]

2.1 Reticulados

Definição 2.1.1 (*Birkhoff, [3]*)

Um reticulado $L = (L, \leq, \wedge, \vee)$ é um conjunto L munido de uma ordem parcial \leq , no qual todo subconjunto finito tem um ínfimo e um supremo, onde ínfimo e supremo são denotados respectivamente por \wedge e \vee .

Observação 2.1.2

Se L é um conjunto totalmente ordenado, então L é um reticulado.

Definição 2.1.3 (*Birkhoff, [3]*)

Um reticulado completo é um reticulado no qual todo subconjunto tem ínfimo e supremo. Vamos denotar o supremo de L por 1 e o ínfimo de L por 0 .

Observamos que $0 = \vee \emptyset$ e $1 = \wedge \emptyset$

Definição 2.1.4 (Gierz et al. [13])

Um reticulado L é chamado de completamente distributivo se e somente se é completo e atende a seguinte condição: $\bigwedge_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in J_i} e_{i,j} \right) = \bigvee_{f \in K} \left(\bigwedge_{i \in I} e_{i,f(i)} \right)$, onde para cada $i \in I$ e para cada $j \in J_i$, $e_{i,j} \in L$ e K é o conjunto de todas as funções $f : I \rightarrow \cup J_i$ tal que para todo $i \in I$, $f(i) \in J_i$.

Definição 2.1.5 (Birkhoff, [3])

Uma involução com reversão de ordem em um reticulado L é uma função, $e \rightarrow e'$, tal que:

- $e \leq b \implies b' \leq e'$
- $(e')' = e$

Definição 2.1.6 (Hutton, [15])

Um reticulado fuzzy é um reticulado completamente distributivo com uma involução com reversão de ordem.

Nota 2.1.7

Breuckmann em [5], mostra que a involução com reversão de ordem $' : L \rightarrow L$ é uma bijeção e $0' = 1$ e $1' = 0$.

A menos que se diga o contrário, a partir de agora L será um reticulado fuzzy.

Definição 2.1.8 (Gierz et al., [13])

Seja L um reticulado. Diremos que um elemento $p \in L$ é primo se e somente se:

1. $p \neq 1$;
2. Se $e, b \in L$ são tais que $e \wedge b \leq p$, então $e \leq p$ ou $b \leq p$.

O conjunto dos elementos primos de L será denotado por $Pr(L)$.

Definição 2.1.9 (Gierz et al, [13])

Seja L um reticulado. Diremos que um elemento $\alpha \in L$ é coprimo se e somente se quando:

1. $\alpha \neq 0$;
2. Se $e, b \in L$ são tais que $\alpha \leq e \vee b$, então $\alpha \leq e$ ou $\alpha \leq b$.

O conjunto dos elementos coprimos de L será denotado por $Cp(L)$.

Proposição 2.1.10 (Blyth e Janowitz, [4])

Seja $(L, ')$ um reticulado completo com uma involução com reversão de ordem. Então para toda família $\{e_i\}_{i \in J}$ de membros de L temos:

1. $\left(\bigvee_{i \in J} e_i\right)' = \bigwedge_{i \in J} e_i'$
2. $\left(\bigwedge_{i \in J} e_i\right)' = \bigvee_{i \in J} e_i'$

Seja $Pr(L)' = \{p' | p \in Pr(L)\}$. Temos que $Pr(L)' = Cp(L)$. De fato, seja $q \in Pr(L)'$ e $e, b \in L$ onde $q \leq e \vee b$. Assim deve existir $p \in Pr(L)$ onde $q = p'$. Com isso $p' \leq e \vee b$, logo $(e \vee b)' \leq p$, ou seja, $e' \wedge b' \leq p$. Como p é primo temos que $e' \leq p$ ou $b' \leq p$ e com isso: $p' \leq e$ ou $p' \leq b$, ou seja, $p' = q$ é primo. Seja agora $\alpha \in Cp(L)$, vamos mostrar que existe $p \in Pr(L)$ onde $\alpha = p'$. Sejam $e, b \in L$ de forma que $e \wedge b \leq \alpha'$, assim, $\alpha \leq (e \wedge b)'$, ou seja, $\alpha \leq e' \vee b'$. Como α é coprimo, por definição, temos que $\alpha \leq e'$ ou $\alpha \leq b'$, logo, $e \leq \alpha'$ ou $b \leq \alpha'$, ou seja, α' é primo, assim, deve existir $p \in Pr(L)$ onde $\alpha' = p$, i. e., $\alpha = p'$. Além disso $0 \notin Pr(L)'$, pois como para todo $p \in Pr(L)$, $p \neq 1$, temos que, para todo $p \in Pr(L)$, $p' \neq 0$.

2.2 L -conjuntos e L -pontos

Definição 2.2.1 (Goguen,[14])

Chamaremos de um L -conjunto sobre X uma função da forma $f : X \rightarrow L$, onde X é um conjunto qualquer. O conjunto de todos os L -conjuntos sobre X será denotado por L^X .

Observação 2.2.2

Convém notar que para um dado subconjunto $A \subseteq X$, a função característica $\chi_A : X \rightarrow L$ definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

é um L -conjunto de L^X .

Observação 2.2.3

Em L^X podemos definir quaisquer operações que L possua e essas operações em L^X obedecerão todas as leis válidas em L . Assim, se L é um reticulado fuzzy então L^X também será.

Observação 2.2.4

Em L^X , vamos definir uma ordem parcial \leq , operações de supremo (\vee) e infimo (\wedge) e uma involução de ordem ($'$) como seguem:

1. Sejam $f, g \in L^X$. Denotamos $f \leq g$ se, e somente se, para todo $x \in X$ temos que $f(x) \leq g(x)$. Diremos assim que f está contido em g .
2. Seja $\{f_i\}_{i \in J}$ em L^X . Definimos $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)$ e $\left(\bigwedge_{i \in J} f_i\right)$ como sendo elementos de L^X onde

$$\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) = \bigvee_{i \in J} f_i(x) = \bigvee \{f_i(x) \mid i \in J\}$$

$$\left(\bigwedge_{i \in J} f_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in J} f_i(x) = \bigwedge \{f_i(x) \mid i \in J\}$$

para todo $x \in X$.

As operações \bigvee e \bigwedge em L^X são chamadas respectivamente de união e intersecção.

3. Dado $f \in L^X$, definimos f' ao elemento de L^X onde para todo $x \in X$: $f'(x) = (f(x))'$.

Teorema 2.2.5

Seja $\{f_i\}_{i \in J}$ uma família de L^X . Então:

$$1. \left(\bigvee_{i \in J} f\right)' = \bigwedge_{i \in J} f'$$

$$2. \left(\bigwedge_{i \in J} f\right)' = \bigvee_{i \in J} f'$$

Prova

Seja $\{f_i\}_{i \in J}$ uma família de L^X e $x \in X$. Temos, pela proposição 2.1.10, que:

$$\left(\bigvee_{i \in J} f\right)'(x) = \left(\bigvee_{i \in J} f(x)\right)' = \bigwedge_{i \in J} (f(x))' = \bigwedge_{i \in J} f'(x)$$

Como $x \in X$ é qualquer, temos que $\left(\bigvee_{i \in J} f\right)' = \bigwedge_{i \in J} f'$.

De maneira analoga prova-se que $\left(\bigwedge_{i \in J} f\right)' = \bigvee_{i \in J} f'$

c.q.p.

Definição 2.2.6 (Warner, [24])

Seja $p \in Pr(L)$. Chamaremos de L -ponto ao elemento $x_p \in L^X$ definido como

$$x_p(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq x \\ p & \text{se } y = x \end{cases}$$

Dado $f \in L^X$, diremos que x_p é um membro de f , e denotaremos por $x_p \in f$, se $f(x) \not\leq p$.

Observação 2.2.7

Os L -pontos são os elementos primos de L^X . Por isso, denotamos o conjunto dos L -pontos de L^X por $Pr(L^X)$.

Definição 2.2.8 (Weiss, [28])

Seja $f \in L^X$. Chamaremos de suporte de f ao conjunto $\text{supp}(f)$ definido como:

$$\text{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$$

2.3 L -topologias

Definição 2.3.1 (Chang, [7])

Chamaremos de uma L -topologia em X a uma coleção $\mathfrak{S} \subseteq L^X$ que satisfaz as seguintes condições:

1. Os L -conjuntos \emptyset e X definidos como $\emptyset(x) = 0$ e $X(x) = 1$ pertencem a \mathfrak{S} ;
2. Dada uma família $\{f_i\}_{i \in J}$ em \mathfrak{S} , temos que $\bigvee_{i \in J} f_i$ está em \mathfrak{S} ;
3. Dados f e $g \in \mathfrak{S}$, temos que $f \wedge g \in \mathfrak{S}$.

O par (X, \mathfrak{S}) é chamado de espaço L -topológico.

Os elementos de \mathfrak{S} são chamados de L -abertos de L^X . Diremos que um L -conjunto f é L -fechado se f' é L -aberto.

Definição 2.3.2 (Pu e Liu, [21])

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -topológico e seja $f \in L^X$. O interior de f , f° , e o fecho de f , \bar{f} , são definidos como:

$$f^\circ = \bigvee \{g \in \mathfrak{S}; g \leq f\}$$

$$\bar{f} = \bigwedge \{g \in L^X; g \geq f \text{ e } g' \in \mathfrak{S}\}$$

Observação 2.3.3

Observamos que:

1. f° é o maior L -aberto contido em f e \bar{f} é o menor fechado contendo f ;

2. $(\bar{f})' = (f')^\circ$ e $(f^\circ)' = \overline{(f)'}$;

3. (Azad, [2]) Para uma família $\{f_i\}_{i \in J}$ de L -conjuntos temos que:

i. $\left(\bigvee_{i \in J} \bar{f}_i\right) \leq \overline{\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)}$;

ii. $\left(\bigvee_{i \in J} f_i^\circ\right) \leq \left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)^\circ$;

iii. Se J é finito, então $\left(\bigvee_{i \in J} \bar{f}_i\right) = \overline{\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)}$

Definição 2.3.4 (Warner e McLean, [26])

Um espaço L -topológico (X, \mathfrak{S}) é chamado de compacto se para todo $p \in \text{Pr}(L)$ e para toda família $\{f_i\}_{i \in J}$ em \mathfrak{S} onde $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \not\leq p$ (ou seja: $x_p \in \bigvee_{i \in J} f_i$) para todo $x \in X$, existe $F \subseteq J$, F finito, onde $\left(\bigvee_{i \in F} f_i\right)(x) \not\leq p$ ($x_p \in \bigvee_{i \in F} f_i$). para todo $x \in X$.

Definição 2.3.5 (Kudri, [18])

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -topológico. Diremos que o L -conjunto $g \in L^X$ é compacto se para todo $p \in \text{Pr}(L)$ e para toda família $\{f_i\}_{i \in J}$ de conjuntos L -abertos onde $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \not\leq p$ ($x_p \in \bigvee_{i \in J} f_i$) para todo $x \in X$ com $g(x) \geq p'$ ($x_p \notin g'$) existe $F \subseteq J$, F finito, onde $\left(\bigvee_{i \in F} f_i\right)(x) \not\leq p$ ($x_p \in \bigvee_{i \in F} f_i$), para todo $x \in X$ onde $g(x) \geq p'$.

Em simbolos, a definição acima fica:

Para todo $p \in Pr(L)$ e para toda família $\{f_i\}_{i \in J}$ em \mathfrak{S} onde:

$$(\forall x \in X)(g(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in J} f_i \right) (x) \not\leq p)$$

implica que existe $F \subseteq J$, F finito, onde:

$$(\forall x \in X)(g(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in F} f_i \right) (x) \not\leq p)$$

Ou ainda, podemos reescrever como:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin g' \implies x_p \in \left(\bigvee_{i \in J} f_i \right))$$

implica que existe $F \subseteq J$, F finito, onde:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin g' \implies x_p \in \left(\bigvee_{i \in F} f_i \right))$$

Proposição 2.3.6 (Kudri, [19])

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -topológico. Se g é um L -conjunto compacto, então para cada conjunto L -fechado h , $g \wedge h$ é compacto.

Prova

Seja g um L -conjunto compacto e seja h um L -fechado.

Seja $p \in Pr(L)$ e $\{f_i\}_{i \in J}$ uma família de L^X onde:

$$(\forall x \in X)(x_p \in (g \wedge h)' \implies x_p \in \left(\bigvee_{i \in J} f_i \right))$$

i. e., seja $p \in Pr(L)$ onde

$$(\forall x \in X)((g \wedge h)(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in J} f_i \right) (x) \not\leq p)$$

Seja $\mathcal{B} = \{f_i\}_{i \in J} \cup \{h'\}$. Assim temos que:

$$(\forall x \in X)(g(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{k \in \mathcal{B}} k \right) (x) \not\leq p)$$

De fato, seja $x \in X$ tal que $g(x) \geq p'$ ($x_p \notin g'$). Se $h(x) \geq p'$ ($x_p \notin h'$), então $(g \wedge h)(x) \geq p'$ ($x_p \notin (g \wedge h)$) e assim $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \not\leq p$ ($x_p \in \left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)$), logo, $\left(\bigvee_{k \in \mathcal{B}} k\right)(x) \not\leq p$ ($x_p \in \left(\bigvee_{k \in \mathcal{B}} k\right)$). Caso $h(x) \not\geq p'$, temos que $h'(x) \not\leq p$, i. e.: $x_p \in h'$ e assim $\left(\bigvee_{k \in \mathcal{B}} k\right)(x) \not\leq p$ ($x_p \in \left(\bigvee_{k \in \mathcal{B}} k\right)$). Como g é, por hipótese, compacto, temos que existe um $F \in K$, onde $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, h'\}$ e :

$$(\forall x \in X)(g(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{k \in F} k\right)(x) \not\leq p)$$

ou

$$(\forall x \in X)(x_p \notin g' \implies x_p \in \left(\bigvee_{k \in F} k\right))$$

Com isso, temos que:

$$(\forall x \in X)((g \wedge h)(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in \{1, \dots, m\}} f_i\right)(x) \not\leq p)$$

i. e.:

$$(\forall x \in X)(x_p \notin (g \wedge h)' \implies x_p \in \left(\bigvee_{i \in \{1, \dots, m\}} f_i\right))$$

De fato, pois, dado $x \in X$, de forma que $(g \wedge h)(x) \geq p'$, temos que $g(x) \geq p'$. Logo, como vimos acima, $\left(\bigvee_{k \in F} k\right)(x) \not\leq p$. Com isso, deve existir $k \in F$ onde $k(x) \not\leq p$, pois, se para todo $k \in F$ tivéssemos que $k(x) \leq p$, o elemento primo p seria uma cota superior do conjunto $F(x) = \{f_1(x); f_2(x); \dots; f_n(x), h'(x)\}$ e dessa forma $\left(\bigvee_{k \in F} k\right)(x) \leq p$. Por $(g \wedge h)(x) \geq p'$, temos ainda que $h(x) \geq p'$, ou seja, $h'(x) \geq p$, logo, $k \neq h'$, então $\left(\bigvee_{i \in \{1, \dots, m\}} f_i\right)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ onde $(h \wedge g)(x) \geq p'$. Como a família inicial $\{f_i\}_{i \in J}$ em \mathfrak{S} e $p \in Pr(L)$ são quaisquer, temos que $h \wedge g$ é compacto.

c.q.p.

Corolário 2.3.7 (Kudri, [19])

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -topológico. Se g é um L -conjunto compacto, então cada L -fechado contido em g é compacto também.

Proposição 2.3.8

Se (X, \mathfrak{S}) é um espaço L -topológico compacto, então o L -conjunto X , definido como $X(x) = 1$ para todo $x \in X$, é compacto.

Prova

Seja $p \in Pr(L)$ e $\{f_i\}_{i \in J}$ em \mathfrak{S} de forma que:

$$(\forall x \in X)(X(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in J} f_i \right)(x) \not\leq p)$$

Como para todo $x \in X$, $X(x) = 1 \geq p'$, temos que a afirmação acima resume-se em:

$$(\forall x \in X)\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \not\leq p$$

Por (X, \mathfrak{S}) ser compacto, temos que existe $F \subseteq J$, F finito, onde:

$$(\forall x \in X)\left(\bigvee_{i \in F} f_i\right)(x) \not\leq p$$

Que pode ser reescrito como:

$$(\forall x \in X)(X(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in F} f_i \right)(x) \not\leq p)$$

ou seja, $X \in L^X$ é compacto.

c.q.p.

Corolário 2.3.9 (Kudri [19])

Todo L -conjunto L -fechado em um espaço L -topológico compacto é compacto.

É fácil verificar isso, uma vez que, pela proposição anterior, o L -conjunto X é compacto se o espaço for compacto. E assim, pelo corolário 2.3.7, se $f = f \wedge X$ é L -fechado, então é compacto.

Definição 2.3.10 (Warner e McLean, [26])

Um espaço L -topológico (X, \mathfrak{S}) é chamado de Hausdorff se e somente se para todo $p, q \in Pr(L)$ e para todo par $x, y \in X$ sendo $x \neq y$, existem $f, g \in \mathfrak{S}$ onde $f(x) \not\leq p$ ($x_p \in f$), $g(y) \not\leq q$ ($y_q \in g$) e $(\forall z \in X)(f(z) = 0$ ou $g(z) = 0)$.

Definição 2.3.11 (Kudri, [19])

Um espaço L -topológico é regular se e somente se para todo $p \in Pr(L)$, para cada $x \in X$ e cada L -fechado f tal que existe $y \in Y$ com $y_p \notin f'$ (ou seja, $f(y) \geq p'$) e $f(x) = 0$, existem $u, v \in \mathfrak{S}$ com $x_p \in u$ (ou seja, $u(x) \not\leq p$), $y_p \in v$ para todo $y_p \notin f'$ e $(\forall z \in X)(u(z) = 0$ ou $v(z) = 0)$.

Definição 2.3.12 (Kudri, [19])

Um espaço L -topológico (X, \mathfrak{S}) é normal se e somente se para todo $p \in Pr(L)$ a para todo par f, g de L -fechados tais que existem $x, y \in X$ com $x_p \notin f'$ ($f(x) \geq p'$) e $y_p \notin g'$ ($g(y) \geq p'$) e $(\forall z \in X)(f(z) = 0$ ou $g(z) = 0)$, existem $u, v \in \mathfrak{S}$ no qual para todo $z_p \notin f'$, $z_p \in v$ ($v(z) \not\leq p$); para todo $z_p \notin g'$, $z_p \in u$ e $(\forall z \in X)(u(z) = 0$ ou $v(z) = 0)$.

Observação 2.3.13

A definição acima pode ser reescrita como segue:

Um espaço L -topológico (X, \mathfrak{S}) é normal se e somente se para todo $p \in Pr(L)$ a para todo par f, g de L -fechados tais que existem $x, y \in X$ com $x_p \notin f'$ ($f(x) \geq p'$) e $y_p \notin g'$ ($g(y) \geq p'$) e $(\forall z \in X)(f(z) = 0$ ou $g(z) = 0)$, existem $u, v \in \mathfrak{S}$ no qual:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p); (\forall x \in X)(g(x) \geq p' \implies v(x) \not\leq p)$$

e ainda

$$(\forall z \in X)(u(z) = 0 \text{ ou } v(z) = 0)$$

ou

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in u); (\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in g' \implies x_p \in v)$$

e ainda

$$(\forall z \in X)(u(z) = 0 \text{ ou } v(z) = 0)$$

Capítulo 3

Conjuntos g-fechados

Neste capítulo apresentamos a definição de conjuntos g-fechados que motivou parte desta dissertação.

O capítulo está dividido em três seções. A primeira seção é dedicada aos conjuntos g-fechados onde Levine mostra que esses conjuntos possuem propriedades semelhantes ao dos conjuntos fechados e que todo conjunto fechado é g-fechado, ou seja, os conjuntos g-fechados são uma generalização dos conjuntos fechados. Na segunda seção temos a definição de conjunto g-aberto e algumas propriedades. Por fim, na terceira seção um dos pontos principais do artigo [17]: a definição de um novo axioma de separação denominado de $T_{1/2}$.

3.1 Conjuntos g-fechados

Definição 3.1.1 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Um subconjunto A de X é g-fechado se e somente se $\bar{A} \subseteq U$ quando $A \subseteq U$ e U é aberto.

Ou seja, um conjunto A é g-fechado se e somente se para todo $U \in \tau$, se $A \subseteq U$, então $\bar{A} \subseteq U$.

Teorema 3.1.2 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Um subconjunto A de X é g -fechado se e somente se $\bar{A} - A$ não contém nenhum conjunto fechado diferente do conjunto vazio.

Prova

Necessidade: Seja F um conjunto fechado do espaço (X, τ) de forma que $F \subseteq \bar{A} - A$. Assim, $F \subseteq A^c$, com isso $A \subseteq F^c$. Como A é g -fechado, temos que $\bar{A} \subseteq F^c$, ou seja, $F \subseteq (\bar{A})^c$. Desta forma, $F \subseteq \bar{A} \cap (\bar{A})^c = \emptyset$ e assim F é vazio.

Suficiência: Digamos que o único conjunto fechado contido em $\bar{A} - A$ é o conjunto vazio. Seja $U \in \tau$ de forma que $A \subseteq U$, logo, $U^c \subseteq A^c$. Com isso, $\bar{A} \cap U^c \subseteq \bar{A} - A$. Como, por hipótese, o único fechado contido em $\bar{A} - A$ é o conjunto vazio, temos que $\bar{A} \cap U^c = \emptyset$, então $\bar{A} \subseteq U^c$.

c.q.p.

Corolário 3.1.3 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto g -fechado A de (X, τ) é fechado se e somente se $\bar{A} - A$ é fechado.

Prova

Necessidade: Se A é fechado, então $\bar{A} = A$, e assim $\bar{A} - A = \emptyset$. *Suficiência:* Digamos que $\bar{A} - A$ seja fechado. Como A é g -fechado e $\bar{A} - A$ é um subconjunto de si mesmo, temos, pelo teorema anterior, que $\bar{A} - A = \emptyset$, e assim $\bar{A} = A$, i. e., A é fechado.

c.q.p.

Teorema 3.1.4 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se A e B são conjuntos g -fechados, então $A \cup B$ também é g -fechado.

Prova

Seja $U \in \tau$ de forma que $A \cup B \subseteq U$. Assim, $A \subseteq U$ e $B \subseteq U$, logo, $\overline{A} \subseteq U$ e $\overline{B} \subseteq U$, com isso $\overline{A \cup B} \subseteq U$, i. e. $\overline{\overline{A \cup B}} \subseteq U$.

c.q.p.

Exemplo 3.1.5

A intersecção de dois conjuntos g -fechados nem sempre é um g -fechado. De fato, seja, por exemplo, $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, c\}$. Assim, tanto A como B são g -fechados, mas, $A \cap B = \{a\}$ não.

Teorema 3.1.6 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se A, B são tais que $B \subseteq A \subseteq X$, de forma que B é g -fechado relativo ao subespaço A e A é g -fechado relativo X , então B é g -fechado relativo a X .

Prova

Seja U um aberto de X , de forma que $B \subseteq U$. Assim $B \cap A \subseteq U \cap A$, ou seja, $B \subseteq U \cap A$. Logo, por hipótese, $\overline{B}_A \subseteq U \cap A$, onde \overline{B}_A é o fecho de B em relação à A . Com isso, $A \cap \overline{B} \subseteq A \cap U$, de onde concluímos que $A \subseteq U \cup (\overline{B})^c$. Sendo que A é g -fechado em X , temos que $\overline{A} \subseteq U \cup (\overline{B})^c$. Logo, $\overline{B} \subseteq \overline{A} \subseteq U \cup (\overline{B})^c$, com isso, $\overline{B} \subseteq U$.

c.q.p.

Corolário 3.1.7 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja A um conjunto g -fechado e suponha que F é um conjunto fechado. Então $A \cap F$ é um conjunto g -fechado.

Prova

Basta verificarmos que $A \cap F$ é fechado no subespaço A e assim g -fechado nesse. Aplicando agora o teorema anterior, temos que, $A \cap F$ é g -fechado.

c.q.p.

Teorema 3.1.8 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se $A \subseteq X$ é g -fechado e $B \subseteq X$ é tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é g -fechado.

Prova

Seja $B \subseteq U$, onde $U \in \tau$. Assim, $A \subseteq U$, logo, $\overline{A} \subseteq U$. Como \overline{A} é fechado e $B \subseteq \overline{A}$, temos que $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, e assim, $\overline{B} \subseteq U$.

c.q.p.

Teorema 3.1.9 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $A \subseteq Y \subseteq X$ e suponha que A é g -fechado em X . Então A é g -fechado relativo a Y .

Prova

Seja $U \in \tau$ de forma que $A \subseteq Y \cap U$. Assim, $A \subseteq U$. Como A é g -fechado, temos que, $\overline{A} \subseteq U$. Logo $Y \cap \overline{A} \subseteq Y \cap U$, i. e. $\overline{B}_Y \subseteq Y \cap U$ onde \overline{B}_Y é o fecho de B relativo a Y .

c.q.p.

Teorema 3.1.10 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico e Φ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, τ) . Dessa maneira $\tau = \Phi$ se, e somente se todo subconjunto de X é g -fechado.

Prova

Necessidade: Digamos que $\tau = \Phi$. Assim, todo conjunto aberto é fechado e vice-versa. Seja A um conjunto de X e $U \in \tau$ de forma que $A \subseteq U$. Assim $\bar{A} \subseteq \bar{U} = U$.

Suficiência: Vamos verificar que se $\tau \subseteq \Phi$, então $\tau = \Phi$. De fato, digamos que todo conjunto aberto é também fechado. Seja $F \in \Phi$, então, F^c é aberto, logo, fechado. Assim, $(F^c)^c = F$ é aberto e com isso mostramos que $\tau = \Phi$.

Seja $U \in \tau$. Queremos mostrar que $U \in \Phi$. Como $U \subseteq U$ e esse, por hipótese, é g -fechado, temos que $\bar{U} \subseteq U$. Logo $U = \bar{U}$, ou seja, U é fechado.

c.q.p.

Teorema 3.1.11 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico compacto e $A \subseteq X$ um conjunto g -fechado. Então A é compacto em (X, τ) .

Prova

Seja $\{U_i\}_{i \in J}$ uma cobertura aberta de A em (X, τ) . Logo, como $A \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$, temos que $\bar{A} \subseteq \bigcup_{i \in J} \bar{U}_i$. Como \bar{A} é compacto, temos que existe $F \subseteq A$, F finito, onde $A \subseteq \bar{A} \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$, ou seja, A é compacto.

c.q.p.

Teorema 3.1.12 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço de Lindelof (ou paracompacto ou enumeravelmente compacto) e suponha que A é um subconjunto g -fechado de X . Então A é Lindelof (ou paracompacto ou enumeravelmente compacto).

A prova desse teorema é análoga a prova do teorema anterior.

Teorema 3.1.13 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço normal e suponha que Y é um subconjunto g -fechado em X . Então o subespaço (Y, τ_Y) é normal.

Prova

Sejam E e F conjunto fechados de X de forma que $(E \cap Y) \cap (F \cap Y) = \emptyset$. Assim $Y \cap (E \cap F) = \emptyset$, e com isso, $Y \subseteq (E \cap F)^c$. Como $(E \cap F)^c$ é aberto, temos que $\bar{Y} \subseteq (E \cap F)$. Com isso, $(E \cap \bar{Y}) \cap (F \cap \bar{Y}) = \emptyset$. Como (X, τ) é normal, existem $U, V \in \tau$, U e V disjuntos, onde $(E \cap \bar{Y}) \subseteq U$ e $(F \cap \bar{Y}) \subseteq V$. Sabendo-se que $Y \subseteq \bar{Y}$, obtemos $(E \cap Y) \subseteq (U \cap Y)$ e $(F \cap Y) \subseteq (V \cap Y)$.

c.q.p.

Teorema 3.1.14 (Levine, [17])

Se (X, τ) é um espaço topológico regular e se A é compacto em (X, τ) , então A é g-fechado.

Prova

Digamos que $A \subseteq X$ é compacto e $U \in \tau$ é tal que $A \subseteq U$. Assim, temos que existe $V \in \tau$ onde $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Logo, $\bar{A} \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

c.q.p.

Teorema 3.1.15 (Levine, [17])

Se (X, τ) é um espaço topológico regular e localmente compacto e se A é um g-fechado, então A é localmente compacto na topologia relativa. (o subespaço (A, τ_A) é localmente compacto).

Prova

Seja $x \in A$, logo, existe $x \in N \subseteq X$, onde N é uma vizinhança compacta de x . Como (X, τ) é regular, existe $U \in \tau$ onde $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq N$. Assim, $A \cap \bar{U}$ é uma vizinhança de A e, pelo corolário 3.1.7, é g-fechado em X . Pelo teorema 3.1.9, é g-fechado em N e assim, compacto, pelo teorema 3.1.11.

c.q.p.

Teorema 3.1.16 (Levine, [17])

Se (X, τ) é um espaço topológico normal e $F \cap A = \emptyset$ onde F é fechado e A é g-fechado em X , então existem $U, V \in \tau$, U e V disjuntos onde $F \subseteq U$ e $A \subseteq V$.

Prova

Dados F e A como acima, temos que, $A \subseteq F^c$. Sendo F fechado temos que F^c é aberto, assim, como A é g-fechado temos $\overline{A} \subseteq F^c$. Então $\overline{A} \cap F = \emptyset$. Logo, existem $U, V \in \tau$ disjuntos onde $A \subseteq \overline{A} \subseteq U$ e $F \subseteq V$.

c.q.p.

Exemplo 3.1.17

De maneira geral, conjuntos g-fechados disjuntos em um espaço normal, não podem ser separados por conjuntos abertos disjuntos. Seja, por exemplo, $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Dessa maneira, $\{b\}$ e $\{c\}$ são g-fechados disjuntos, mas não podem ser separados por abertos disjuntos de (X, τ) .

3.2 Conjuntos g-abertos

Definição 3.2.1 (Levine, [17])

Diremos que um subconjunto A do espaço topológico (X, τ) é g-aberto se e somente se A^c é g-fechado.

Teorema 3.2.2 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico e Φ a coleção de todos os fechados de (X, τ) . Um conjunto A é g-aberto se e somente se $F \subseteq A^\circ$ quando $F \in \Phi$ e $F \subseteq A$.

Prova

Necessidade: Seja A é g-aberto e $F \in \Phi$ de forma que $F \subseteq A$. Dessa maneira, $A^c \subseteq F^c$. Como, por definição, A^c é g-fechado, temos que $\overline{(A^c)} \subseteq F^c$. Com isso, $F \subseteq \left(\overline{(A^c)}\right)^c$, ou seja, $F \subseteq A^\circ$.

Suficiência: Digamos que $A \subseteq X$ é tal que se $F \in \Phi$ e $F \subseteq A$ então $F \subseteq A^\circ$. Seja $U \in \tau$ de forma que $A^c \subseteq U$. Assim, temos que $U^c \subseteq A$, e por hipótese, $U^c \subseteq A^\circ$, com isso $(A^\circ)^c \subseteq U$, ou seja, $\overline{A} \subseteq U$.

c.q.p.

Definição 3.2.3 (Gaal, [11])

Diremos que $A, B \subseteq X$ são separados no espaço topológico (X, τ) se $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

Observação 3.2.4

Pela definição acima, dois conjuntos $A, B \subseteq X$ são separados se e somente se $\overline{A} \subseteq B^c$ e $\overline{B} \subseteq A^c$, ou seja, para todo $x \in \overline{A}$ implica que $x \notin B$ e para todo $y \notin \overline{B}$ implica que $y \notin A$.

Teorema 3.2.5 (Levine, [17])

Se A e B são conjuntos g -abertos separados num espaço topológico (X, τ) , então $A \cup B$ é g -aberto.

Prova

Seja $F \subseteq X$ um conjunto fechado em (X, τ) de forma que $F \subseteq A \cup B$. Assim $F \cap \overline{A} \subseteq B$. Com isso, $F \cap \overline{A} \subseteq B^\circ$. De maneira analoga podemos concluir que $F \cap \overline{B} \subseteq A^\circ$. Assim:

$$F = F \cap (A \cup B) = F \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (F \cap \overline{A}) \cup (F \cap \overline{B}) \subseteq A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ.$$

Logo, pelo teorema 3.2.2, $A \cup B$ é g -aberto.

c.q.p.

Pelo exemplo 3.1.5, vemos que nem sempre a união de dois g -abertos é g -aberto.

Corolário 3.2.6 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico e A e B dois conjuntos g -fechados em (X, τ) de forma que A^c e B^c são separados. Então $A \cap B$ é g -fechado.

A prova segue imediatamente do teorema anterior, observando que $(A \cap B)^c$ é g -aberto.

Teorema 3.2.7 (Levine, [17])

Um conjunto A é g -aberto no espaço topológico (X, τ) se e somente se o único conjunto aberto que contém $A^\circ \cup A^c$ é X , ou seja, se $U \in \tau$ é tal que $A^\circ \cup A^c \subseteq U$, então $U = X$.

Prova

Necessidade: Seja A um g -fechado de X e seja $U \in \tau$ de forma que $A^\circ \cup A^c \subseteq U$. Dessa forma, $A^c \subseteq U$, ou seja, $U^c \subseteq A$, logo, como U^c é fechado, $U^c \subseteq A^\circ$ e assim $(A^\circ)^c \subseteq U$. Dessa maneira, $X = A^\circ \cup (A^\circ)^c \subseteq U$, i. e., $U = X$.

Suficiência: Digamos que $A \subseteq X$ é tal que o único aberto que contém $A^\circ \cup A^c$ é X . Seja $F \in \Phi$ de maneira que $F \subseteq A$, então $A^c \subseteq F^c$, e com isso, $A^\circ \cup A^c \subseteq A^\circ \cup F^c$. Assim, por hipótese, $A^\circ \cup F^c = X$, logo, $F \subseteq A^\circ$.

c.q.p.

Teorema 3.2.8 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se $A \subseteq B \subseteq X$, onde A é g -aberto relativo a B e B é g -aberto relativo a X , então A é g -aberto relativo a X .

Prova

Seja $F \subseteq X$ um conjunto fechado em (X, τ) de forma que $F \subseteq A$. Logo, $F \subseteq A_B^\circ$, onde A_B° é o interior de A no subespaço B ou seja, existe um aberto $U \subseteq X$, onde $F \subseteq U \cap B \subseteq A$.

Temos ainda que $F \subseteq B$. Como B é g -aberto em X , temos que $F \subseteq B^\circ$ e então $F \subseteq U \cap B^\circ \subseteq U \cap B \subseteq A$, i. e., $F \subseteq A^\circ$.

c.q.p.

O análogo do teorema 3.1.9 para conjuntos g -abertos é falso como será mostrado no exemplo seguinte:

Exemplo 3.2.9

Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Vamos considerar os conjuntos $A = \{b\}$ e $Y = \{a, b\}$ no espaço (X, τ) . Temos que A é g -aberto, pois o único fechado que está contido em A é \emptyset , assim, $\emptyset \subseteq A^\circ$. Porém, temos que A não é g -aberto no subespaço Y , uma vez que em Y , o conjunto A é fechado e assim $A \subseteq A$, mas $A^\circ = \emptyset$.

Temos agora o análogo do teorema 3.1.8:

Teorema 3.2.10 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se $A \subseteq X$ é g -aberto e $B \subseteq X$ é tal que $A^\circ \subseteq B \subseteq A$, então B é g -aberto.

Prova

Digamos que $A^\circ \subseteq B \subseteq A$ onde A é g -aberto. Temos, assim, que $A^c \subseteq B^c \subseteq (A^\circ)^c = \overline{A^c}$. Como, por definição, A^c é g -fechado, temos, pelo teorema 3.1.8 que B^c é g -fechado, assim, B é g -aberto.

c.q.p.

Teorema 3.2.11 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $A \subseteq X$ é g -fechado se e somente se $\overline{A} - A$ é g -aberto.

Prova

Necessidade: Digamos que A seja g-fechado e Φ a coleção dos conjuntos fechados de (X, τ) . Seja $F \in \Phi$ de forma que $F \subseteq \overline{A} - A$. Pelo teorema 3.1.2, temos que $F = \emptyset$, assim, $F \subseteq (\overline{A} - A)^\circ$. Logo, $\overline{A} - A$ é g-aberto.

Suficiência: Suponhamos agora que $\overline{A} - A$ é g-aberto. Seja $F \in \Phi$ de maneira que $F \subseteq \overline{A} - A$. Por hipótese, temos que $F \subseteq (\overline{A} \cap A^c)^\circ$, i. e., $F \subseteq (\overline{A})^\circ \cap (A^c)^\circ$, sabendo-se que $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$, obtemos, $F \subseteq (\overline{A})^\circ \cap (\overline{A})^c$. Como $(\overline{A})^\circ \subseteq \overline{A}$, temos que $F \subseteq \emptyset$, i. e., $F = \emptyset$. Assim, pelo teorema 3.1.2, A é g-fechado.

c.q.p.

3.3 Espaços $T_{1/2}$

Definição 3.3.1 (Gaal, [11])

Diremos que um espaço topológico (X, τ) é T_0 se e somente se para todo par de elementos distintos $x, y \in X$, existe um aberto U onde $x \in U$ e $y \notin U$ ou $x \notin U$ e $y \in U$.

Teorema 3.3.2 (Gaal, [11])

Se (X, τ) é um espaço topológico T_0 então para todo par de elementos distintos $x, y \in X$ temos que $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$.

Prova

Sejam $x, y \in X$ onde $x \neq y$. Por hipótese, existe um conjunto aberto U onde $x \in U$ e $y \notin U$ ou $x \notin U$ e $y \in U$. Sem perda de generalidade, digamos que $x \in U$ e $y \notin U$. Assim, $y \in U^c$ e $x \notin U^c$. Logo, como $\{y\} \subseteq U^c$ e U^c é fechado temos que $\overline{\{y\}} \subseteq U^c$. Como $x \notin U^c$, então $x \notin \overline{\{y\}}$.

c.q.p.

Definição 3.3.3 (Gaal, [11])

Diremos que um espaço topológico (X, τ) é T_1 se e somente se para todo par de elementos distintos $x, y \in X$, existem abertos U, V onde:

i. $x \in U$ e $y \notin U$;

ii. $y \in V$ e $x \notin V$.

Teorema 3.3.4 Gaal, [11]

Se (X, τ) é um espaço topológico T_1 então todo subconjunto unitário é fechado, ou seja, dado $x \in X$, temos que $\{x\}$ é fechado.

A demonstração desse resultado pode ser conferida em [11].

Definição 3.3.5 (Levine, [17])

Diremos que um espaço topológico (X, τ) é $T_{1/2}$ se e somente se todo conjunto g -fechado é fechado.

Teorema 3.3.6 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se (X, τ) é $T_{1/2}$, então (X, τ) é T_0 .

Prova

Digamos que (X, τ) seja um espaço $T_{1/2}$. Sejam $x, y \in X$ distintos. Se $\{x\}$ é fechado, então $\{x\} = \overline{\{x\}}$ e $y \notin \overline{\{x\}}$. Caso $\{x\}$ não seja fechado, então $\{x\}^c$ é g -fechado, pois $\{x\}^c$ não é aberto e o único aberto que contém $\{x\}^c$ é X , assim, como $\overline{\{x\}^c} \subseteq X$, temos que $\{x\}^c$ é g -fechado. Por hipótese temos que (X, τ) é $T_{1/2}$ e como $\{x\}^c$ é g -fechado temos que $\{x\}^c$ é fechado e assim $\{x\}$ é aberto. Sendo $\{x\} = U \in \tau$, temos que $x \in U$ mas $y \notin U$.

c.q.p.

Teorema 3.3.7 (Levine, [17])

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se (X, τ) é T_1 , então (X, τ) é $T_{1/2}$.

Prova

Seja $A \subseteq X$ um conjunto g -fechado no espaço topológico (X, τ) . Vamos mostrar que A é fechado, ou seja, $A = \bar{A}$. Para isso, mostraremos que $\bar{A} - A = \emptyset$.

Digamos, por absurdo, que existe $x \in X$ onde $x \in \bar{A} - A$. Assim, temos que $\{x\} \subseteq \bar{A} - A$. Pelo teorema 3.3.4, $\{x\}$ é fechado, porém, pelo teorema 3.1.2, o único conjunto fechado que está contido em $\bar{A} - A$ é o conjunto vazio. Absurdo!!!

Logo $\bar{A} - A = \emptyset$, i. e., $\bar{A} = A$.

c.q.p.

Exemplo 3.3.8

Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Então o espaço (X, τ) é $T_{1/2}$, pois o único conjunto g -fechado (no caso $\{b\}$) é fechado. Porém (X, τ) não é T_1 , pois o único aberto que contém b é X , que contém também a .

Exemplo 3.3.9

Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. O espaço (X, τ) é T_0 , porém não é $T_{1/2}$, pois o conjunto $\{a, c\}$ é g -fechado porém não é fechado.

Corolário 3.3.10 (Levine, [17])

A propriedade de $T_{1/2}$ é estrita entre T_0 e T_1

Capítulo 4

Conjuntos g-fechados em L -topologias

Nesse capítulo sugerimos a definição de um conjunto g-fechado em um espaço L -topológico, como resultado obtemos muitos teoremas semelhantes de Levine, entre eles, a de todo conjunto g-fechado em um L -espaço compacto é compacto.

O capítulo está dividido em duas seções.

Na primeira seção trabalhamos com os conjuntos g-fechados em um espaço L -topológico. Na segunda seção sugerimos a nossa definição de conjunto g-aberto em um espaço L -topológico. Um L -conjunto f será g-aberto em um espaço L -topológico se e somente se f' for g-fechado.

4.1 Conjuntos g-fechados

Definição 4.1.1

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -topológico. Diremos que um L -conjunto “ a ” é g-fechado se, e somente se:

$$\forall f \in \mathfrak{S}, \forall p \in \text{Pr}(L)$$

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p) \implies (\forall x \in X)(\bar{a}(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p)$$

que poderá ser escrito como:

$\forall f \in \mathfrak{S}$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \implies x_p \in f) \implies (\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (\bar{a})' \implies x_p \in f).$$

Definimos também o “*g-fecho*” de $a \in L^X$ ao L -conjunto

$$\bar{a}_g = \bigwedge \{f \in L^X \mid f \text{ é } g\text{-fechado e } a \leq f\}$$

Teorema 4.1.2

Todo subconjunto fechado é g-fechado.

Prova

Seja a um L -conjunto fechado de (X, \mathfrak{S}) , logo $a = \bar{a}$. Com isso, seja $f \in \mathfrak{S}$, de forma que, para todo $p \in Pr(L)$

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \implies x_p \in f)$$

Ou seja:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p)$$

então, temos que:

$$(\forall x \in X)(\bar{a}(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p)$$

i. e.:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (\bar{a})' \implies x_p \in f)$$

c.q.p.

O exemplo a seguir mostra que nem todo L -conjunto g -fechado é L -fechado:

Exemplo 4.1.3

Seja $L = X = [0; 1]$. Vamos considerar o reticulado $L = (L, \leq, 0, 1, ')$ onde \leq é definido da maneira usual e $x' = 1 - x$.

Para não haver perigo de confusão, definimos 0_x e $1_x \in L^X$ como:

- $0_x(x) = 0$;
- $1_x(x) = 1$.

Para todo $x \in X$.

Podemos verificar que a coleção $\mathfrak{S} \subseteq L^X$ definida como:

$$\mathfrak{S} = \{a \in L^X \mid a(x) = x^k, k \in [1; \infty[\} \cup \{0_x; 1_x\}$$

é uma L -topologia em L^X .

Seja $u(x) = \sqrt{x} \in L^X$. Como $u' = 1 - u(x)$ não é L -aberto, temos que u não é L -fechado em (X, \mathfrak{S}) , porém, é g -fechado.

Para mostrar que u é g -fechado em (X, \mathfrak{S}) , seja $a \in \mathfrak{S}$ onde, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(u(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p) \quad (1)$$

Mostraremos, nestas condições, que $a = 1_x$.

Como $x \geq x^k$ para todo $k \geq 1 \in \mathbb{R}$, basta mostrarmos que a afirmação (1) não é verdadeira para $a(x) = x$.

Seja então $a(x) = x$. Sabemos que $Pr([0; 1]) = [0; 1[$. A afirmação (1) será falsa se existem $p \in Pr([0; 1])$ e $x_0 \in [0; 1]$ onde:

$$f(x_0) \geq p' \text{ e } a(x_0) \leq p$$

Sejam $p = 0,5$ e $x_0 = 0,25$, então $p' = 1 - 0,5 = 0,5$, logo:

$$f(0,25) \geq 0,5 \text{ e } a(0,25) = 0,25 \leq 0,5$$

Logo, o único L -conjunto aberto que satisfaz a condição (1) é 1_x .

Como o único L -fechado que contém u é 1_x , temos que $\bar{u} = 1_x$, assim, é fácil verificar que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(1_x(x) \geq p' \implies 1_x(x) \not\leq p)$$

ou seja,

$$(\forall x \in X)(\bar{u}(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

i. e.:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (\bar{u})' \implies x_p \in a)$$

Assim, concluímos que u é g -fechado.

Teorema 4.1.4

A união “fuzzy” de dois L -conjuntos g -fechados é um g -fechado.

Prova

Sejam $a, b \in L^X$ conjuntos g -fechados. Seja $f \in \mathfrak{S}$ de modo que:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (a \vee b)' \implies x_p \in f)$$

Ou seja, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)((a \vee b)(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p)$$

queremos mostrar que a afirmação acima implica em:

$$(\forall x \in X)((\overline{a \vee b})(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p)$$

Seja $p \in Pr(L)$. Vamos observar que:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies (a \vee b)(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \implies (a \vee b)(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p)$$

Como a, b são g -fechados, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} (\forall x \in X)(\bar{a}(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p) \\ \qquad \qquad \qquad e \\ (\forall x \in X)(\bar{b}(x) \geq p' \implies f(x) \not\leq p) \end{array} \right\} (1)$$

Seja $x \in X$ onde $x_p \notin (\overline{a \vee b})'$, i. e., $(\overline{a \vee b})(x) \geq p$. Como p' é coprimo, temos que $\bar{a}(x) \geq p'$ ou $\bar{b}(x) \geq p'$. Sendo $x \in X$ qualquer e por (1) obtermos:

$$(\forall x \in X)((\overline{a \vee b})(x) \geq p' \implies \bar{a}(x) \geq p' \text{ ou } \bar{b}(x) \geq p' \implies f \not\leq p')$$

Como $f \in \mathfrak{S}$ e $p \in Pr(L)$ são quaisquer, a afirmação acima é válida para todo $f \in \mathfrak{S}$ e para todo $p \in Pr(L)$ e assim podemos escrever:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (\overline{a \vee b})' \implies x_p \in f)$$

i. e., $a \vee b$ é g -fechado.

c.q.p.

Convém observar que nem sempre a interseção fuzzy de dois L-conjuntos g-fechados é g-fechado.

Exemplo 4.1.5

Seja $L = 0; 1$, $X = \{a; b; c\}$ e $\{0_x; \chi_{\{a\}}; 1_x\}$.

Temos $\text{Pr}(L) = \{1\}$ e $\text{Cp}(L) = \{0\}$.

O L-conjunto $\chi_{\{a;b\}}$ é g-fechado no espaço (X, \mathfrak{S}) , pois, o único aberto f que satisfaz a condição:

$$(\forall x \in X)(\chi_{\{a;b\}}(x) \geq 1 \implies f(x) \not\leq 0)$$

é o L-conjunto 1_x . Logo, sabendo-se que $\overline{\chi_{\{a;b\}}} = 1_x$, a afirmação acima implica em:

$$(\forall x \in X)(\overline{\chi_{\{a;b\}}}(x) \geq 1 \implies f(x) \not\leq 0)$$

Para todo $f \in \mathfrak{S}$.

De maneira analoga podemos mostrar que $\chi_{\{a;c\}}$ é também um conjunto g-fechado no espaço (X, \mathfrak{S}) .

Porém, $\chi_{\{a;b\}} \wedge \chi_{\{a;c\}} = \chi_{\{a\}}$ não é um L-conjunto g-fechado.

Para verificarmos a afirmação acima, basta observarmos que

$$(\forall x \in X)(\chi_{\{a\}}(x) \geq 1 \implies \chi_{\{a\}}(x) \not\leq 0)$$

e que $\overline{\chi_{\{a\}}} = 1_x$

Lema 4.1.6

Sejam $a, b, c \in L^X$ onde $a \leq b$. Se $x_p \notin a'$ então $x_p \notin b'$. E ainda, se para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \implies c(x) \not\leq p)$$

então

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies c(x) \not\leq p)$$

Prova

Se $x_p \notin a'$ então $a'(x) \leq p$, ou seja $a(x) \geq p'$. Como $a \leq b$ temos que $b(x) \geq a(x) \geq p'$, i. e., $x_p \notin b'$.

Seja $p \in \text{Pr}(L)$ e $x \in X$ onde $a(x) \geq p'$. Como $a \leq b$ obtemos $b(x) \geq p'$. Como x é qualquer, temos que

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies b(x) \geq p')$$

Sendo ainda que $p \in \text{Pr}(L)$ é arbitrário, temos que o resultado acima vale para todo $p \in \text{Pr}(L)$. Assim, por hipótese, para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies b(x) \geq p' \implies c(x) \not\leq p)$$

c.q.p.

Teorema 4.1.7

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -topológico e $a, b \in L^X$ onde a é g -fechado. Se b é tal que $a \leq b \leq \bar{a}$, então b é g -fechado.

Prova

Suponhamos que $a \leq b \leq \bar{a}$. Seja $c \in \mathfrak{S}$ de forma que

$$(\forall x_p \in \text{Pr}(L^X))(x_p \in b' \implies c(x) \not\leq p)$$

ou seja, para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \implies c(x) \not\leq p)$$

Queremos mostrar que a afirmação acima implica em:

$$(\forall x_p \in \text{Pr}(L^X))(x_p \in (\bar{b})' \implies c(x) \not\leq p)$$

Seja $p \in \text{Pr}(L)$. Como, por hipótese, $a \leq b$, pelo lema 4.1.6, temos que

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies c(x) \not\leq p)$$

Sendo a g -fechado, obtemos:

$$(\forall x \in X)(\bar{a}(x) \geq p' \implies c(x) \not\leq p)$$

Sabemos que $\bar{b} = \bigwedge \{g \in L^X; g \geq b \text{ e } g' \in \mathfrak{S}\}$, com isso, como \bar{a} é fechado, temos que $\bar{b} \leq \bar{a}$. E assim, pelo lema 4.1.6 e pelo resultado acima, obtemos:

$$(\forall x \in X)(\bar{b}(x) \geq p \implies c(x) \not\leq p)$$

Como $p \in \text{Pr}(L)$ é qualquer, a afirmação acima é válida para todo $p \in \text{Pr}(L)$.

Assim, podemos afirmar que:

$$(\forall x_p \in \text{Pr}(L^X))(x_p \in (\bar{b})' \implies c(x) \not\leq p)$$

c.q.p.

Teorema 4.1.8

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -compacto. Se $a \in L^X$ é g -fechado em (X, \mathfrak{S}) então a é L -compacto.

Prova

Seja $a \in L^X$ um L -conjunto g -fechado em (X, \mathfrak{S}) e $\{f_i\}_{i \in J}$ uma família de L -conjuntos abertos tais que, para dado $p \in \text{Pr}(L)$ temos:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in J} f_i \right)(x) \not\leq p)$$

Desejamos encontrar um conjunto $K \subseteq J$, K finito, onde:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in K} f_i \right)(x) \not\leq p)$$

Por a ser g -fechado e $\left(\bigvee_{i \in J} f_i \right)$ ser aberto, temos que:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in J} f_i \right)(x) \not\leq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(\bar{a}(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in J} f_i \right)(x) \not\leq p)$$

Como \bar{a} é fechado e (X, \mathfrak{S}) é compacto, temos que existe $K \subseteq J$, K finito, onde:

$$(\forall x \in X)(\bar{a}(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in K} f_i \right)(x) \not\leq p)$$

Por $a \leq \bar{a}$ e pelo lema 4.1.6 temos que

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies \left(\bigvee_{i \in K} f_i \right)(x) \not\leq p)$$

Ou seja, a é L -compacto.

c.q.p.

Observação 4.1.9

Observe que se $Y \subseteq X$ onde X é um conjunto parcialmente ordenado então, para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$Y = \{x \in X \mid \chi_Y(x) \geq p'\}$$

Corolário 4.1.10

Seja $a \in L^X$. Assim temos que para todo $p \in \text{Pr}(L)$

$$(\forall x \in X)(\chi_Y(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

se, e somente se,

$$(\forall y \in Y)(a(y) \not\leq p)$$

Teorema 4.1.11

Seja $f, g \in L^X$. Se $Y \subseteq X$ é tal que

$$(\forall x \in X)[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0 \text{ ou } (g \wedge \chi_Y)(x) = 0]$$

então, temos que:

$$(\forall y \in Y)[(f \wedge g)'(y) = 1]$$

Prova

Seja $p \in \text{Pr}(L)$.

Dado $y \in Y$, temos que $\chi_Y(y) = 1$, e assim:

$$(f \wedge \chi_Y)(y) = 0 \text{ ou } (g \wedge \chi_Y)(y) = 0$$

se, e somente se

$$f(y) = 0 \text{ ou } g(y) = 0$$

Com isso $(f \wedge g)(y) = 0$ i. e. $(f \wedge g)'(y) = 1$. Como $y \in Y$ é qualquer, temos que:

$$(\forall y \in Y)[(f \wedge g)'(x) = 1]$$

c.q.p.

Corolário 4.1.12

Seja $f, g \in L^X$. Se $Y \subseteq X$ é tal que

$$(\forall x \in X)[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0 \text{ ou } (g \wedge \chi_Y)(x) = 0]$$

então, para todo $p \in \text{Pr}(L)$, temos que

$$(\forall y \in Y)[(f \wedge g)'(x) \not\leq p]$$

Para verificar o corolário acima, basta observamos que se $p \in \text{Pr}(L)$, então $p \neq 1$.

Corolário 4.1.13

Seja $f, g \in L^X$. Se $Y \subseteq X$ é tal que

$$(\forall x \in X)[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0 \text{ ou } (g \wedge \chi_Y)(x) = 0]$$

então, para todo $p \in \text{Pr}(L)$, temos que:

$$(\forall x \in X)(\chi_Y(x) \geq p' \implies (f \wedge g)'(x) \not\leq p)$$

Observação 4.1.14

Dados $a, b, c \in L$, temos que $(a \wedge b)' \not\leq c$ se, e somente se, $a' \not\leq c$ ou $b' \not\leq c$.

Lema 4.1.15

Seja $L = (L, \leq, 0, 1)$ um conjunto totalmente ordenado. Então $Cp(L) = (0, 1]$.

Prova

É fácil verificar que $Cp(L) \subseteq (0, 1]$. Assim, vamos mostrar que $(0, 1] \subseteq Cp(L)$. Seja $a \in (0, 1]$ e $b, c \in L$ de forma que $a \leq b \vee c$. Sem perda de generalidade, digamos que $b \leq c$, assim, $b \vee c = c$. Logo, se $a \leq b \vee c$ então $a \leq c$, que implica em, $a \leq c$ ou $a \leq b$. Com isso $a \in Cp(L)$. Como a é qualquer, temos que $(0, 1] \subseteq Cp(L)$. Então $(0, 1] = Cp(L)$.

c.q.p.

Lema 4.1.16

Seja $L = (L, \leq, 0, 1)$ um conjunto totalmente ordenado. Sejam $f, g : X \rightarrow L$. Se para todo $p \in \text{Pr}(L)$ temos que

$$(\forall x \in X)(f(x) \not\geq p' \text{ ou } g(x) \not\geq p')$$

então

$$(\forall x \in X)(f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0).$$

Prova

Digamos, por absurdo, que exista x_0 onde $f(x_0) \neq 0$ e $g(x_0) \neq 0$. Seja $\alpha = f(x_0) \wedge g(x_0)$. Como L é totalmente ordenado, temos que $\alpha \neq 0$. Logo, pelo lema anterior, $\alpha \in (0, 1] = Cp(L) = \text{Pr}(L)'$, e assim, deve existir $p \in \text{Pr}(L)$ tal que $p' = \alpha$. Com isso $f(x_0) \geq p'$ e $g(x_0) \geq p'$. Absurdo!!! Logo,

$$(\forall x \in X)(f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0).$$

c.q.p.

Teorema 4.1.17

Sejam $h, f, g \in L^X$, onde L é totalmente ordenado. Se

$$(\forall x_p \in \text{Pr}(L^X))(x_p \notin h' \implies x_p \in (g \wedge f)'),$$

então

$$(\forall x \in X)[(f \wedge h)(x) = 0 \text{ ou } (g \wedge h)(x) = 0].$$

Prova

Sejam f, g e $h \in L^X$ onde:

$$(\forall x_p \in \text{Pr}(L^X))(x_p \notin h' \implies x_p \in (g \wedge f)'),$$

Ou seja, para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(h(x) \geq p' \implies (g \wedge f)'(x) \not\geq p)$$

Dado $p \in \text{Pr}(L)$, temos que:

$$\begin{aligned}
& (\forall x \in X)(h(x) \geq p' \implies (g \wedge f)'(x) \not\leq p) \\
& \iff (\forall x \in X)(h(x) \not\leq p' \text{ ou } (g \wedge f)'(x) \not\leq p) \\
& \iff (\forall x \in X)(h(x) \not\leq p' \text{ ou } g'(x) \not\leq p \text{ ou } f'(x) \not\leq p) \\
& \iff (\forall x \in X)(h(x) \not\leq p' \text{ ou } g(x) \not\leq p' \text{ ou } f(x) \not\leq p') \\
& \iff (\forall x \in X)(h(x) \not\leq p' \text{ ou } g(x) \not\leq p' \text{ ou } h(x) \not\leq p' \text{ ou } f(x) \not\leq p') \\
& \iff (\forall x \in X)[(h \wedge g)(x) \not\leq p' \text{ ou } (h \wedge f)(x) \not\leq p']
\end{aligned}$$

Como $p \in \text{Pr}(L)$ é arbitrário, temos que a afirmação acima é válida para todo $p \in \text{Pr}(L)$. Assim, pelo lema 4.1.16 temos que:

$$(\forall x \in X)[(h \wedge g)(x) = 0 \text{ ou } (h \wedge f)(x) = 0]$$

c.q.p.

Teorema 4.1.18

Sejam $f, g, h \in L^X$ e $Y \subseteq X$ de forma que para todo $p \in \text{Pr}(L)$, temos que

$$(\forall x \in X)[(f \wedge g)(x) \geq p' \implies h(x) \not\leq p]$$

e ainda $\chi_Y \leq g$, então

$$(\forall x \in Y)[f(x) \geq p' \implies h(x) \not\leq p].$$

Prova

Digamos, por absurdo, que existe $y_0 \in Y$ onde $f(y_0) \geq p'$ mas $h(y_0) \leq p$.

Por $y_0 \in Y$, temos que $\chi_Y(y_0) = 1 \leq g(y_0)$, logo, $g(y_0) = 1$. Logo $(f \wedge g)(y_0) = f(y_0) \wedge g(y_0) = f(y_0) \wedge 1 = f(y_0) \geq p'$ e $h(y_0) \leq p$ i. e. $(f \wedge g)(y_0) \geq p' \not\Rightarrow h(y_0) \leq p$.

Absurdo!!! Logo

$$(\forall x \in Y)[f(x) \geq p' \implies h(x) \not\leq p].$$

c.q.p.

Lema 4.1.19

Sejam $f, g \in L^X$ e $Y \subseteq X$. Logo

$$(\forall x \in Y)[f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0],$$

se e somente se,

$$(\forall x \in X)[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0 \text{ ou } (g \wedge \chi_Y)(x) = 0].$$

Prova

Necessidade: Se $x \in Y$, então

$$(f \wedge \chi_Y)(x) = f(x) \wedge \chi_Y(x) = f(x) \wedge 1 = f(x)$$

e

$$(g \wedge \chi_Y)(x) = g(x) \wedge \chi_Y(x) = g(x) \wedge 1 = g(x),$$

assim, por hipotese $(f \wedge \chi_Y)(x) = f(x) = 0$ ou $(g \wedge \chi_Y)(x) = g(x) = 0$.

Caso $x \in X - Y$, temos que

$$(f \wedge \chi_Y)(x) = f(x) \wedge \chi_Y(x) = f(x) \wedge 0 = 0$$

e

$$(g \wedge \chi_Y)(x) = g(x) \wedge \chi_Y(x) = g(x) \wedge 0 = 0.$$

Suficiencia: Temos, por hipotese, que $[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0 \text{ ou } (g \wedge \chi_Y)(x) = 0]$, que equivale a $[f(x) \wedge \chi_Y(x) = 0 \text{ ou } g(x) \wedge \chi_Y(x) = 0]$. Se $x \in Y$, obtemos $[f(x) \wedge 1 = 0 \text{ ou } g(x) \wedge 1 = 0]$, ou seja, $[f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0]$. Como $x \in Y$ é qualquer, temos que

$$(\forall x \in Y)[f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0].$$

c.q.p.

Teorema 4.1.20

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -normal onde $L = (L, \leq, 0, 1)$ é totalmente ordenado.

Se $Y \subseteq X$ é tal que χ_Y é g -fechado, então (Y, \mathfrak{S}_Y) é L -normal.

Prova

Seja F a coleção de todos os L -conjuntos fechados de (X, \mathfrak{S}) e $f, g \in F$ onde

$$(\forall y \in Y)(f(y) = 0 \text{ ou } g(y) = 0)$$

e para todo $p \in \text{Pr}(L)$ existem $r, s \in X$ onde $f(r) \geq p'$ e $g(s) \geq p'$.

Assim, pelo lema 4.1.19 temos que

$$(\forall x \in X)[f(x) \wedge \chi_Y(x) = 0 \text{ ou } g(x) \wedge \chi_Y(x) = 0]$$

Pelo corolário 4.1.13, obtemos que, para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(\chi_Y(x) \geq p' \implies (f \wedge g)'(x) \not\leq p)$$

Como χ_Y é g -fechado e $(g \wedge f)'$ é aberto, temos que:

$$(\forall x \in X)(\overline{\chi_Y}(x) \geq p' \implies (f \wedge g)'(x) \not\leq p)$$

Sendo L totalmente ordenado, pelo teorema 4.1.17, obtemos:

$$(\forall x \in X)[f(x) \wedge \overline{\chi_Y}(x) = 0 \text{ ou } g(x) \wedge \overline{\chi_Y}(x) = 0]$$

Vamos observar que $f \wedge \overline{\chi_Y}$ e $g \wedge \overline{\chi_Y}$ são fechados.

Por hipótese, para todo $p \in \text{Pr}(L)$, existem $r, s \in Y$ onde $f(r) \geq p'$ e $g(s) \geq p'$.

Como $\chi_Y \leq \overline{\chi_Y}$, se $z \in Y$, então $1 = \chi_Y(z) \leq \overline{\chi_Y}$, i. e., $\chi_Y(z) = \overline{\chi_Y}$. Assim, dado $p \in \text{Pr}(L)$, existem $r, s \in Y \subseteq X$ de forma que $(f \wedge \overline{\chi_Y})(r) = f(r) \wedge \overline{\chi_Y}(r) = f(r) \wedge 1 = f(r) \geq p'$ e $(g \wedge \overline{\chi_Y})(s) = g(s) \wedge \overline{\chi_Y}(s) = g(s) \wedge 1 = g(s) \geq p'$.

Por (X, \mathfrak{S}) ser L -normal, existem $u, v \in \mathfrak{S}$ onde:

$$(\forall x \in X)(u(x) = 0 \text{ ou } v(x) = 0)$$

e ainda, para todo $p \in \text{Pr}(L)$,

$$(\forall x \in X)[f(x) \wedge \overline{\chi_Y}(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p]$$

e

$$(\forall x \in X)[g(x) \wedge \overline{\chi_Y}(x) \geq p' \implies v(x) \not\leq p]$$

Assim

$$(\forall y \in Y)(u(y) = 0 \text{ ou } v(y) = 0),$$

e como $\chi_Y \leq \overline{\chi_Y}$, pelo Teorema 4.1.18, temos:

$$(\forall y \in Y)[f(y) \geq p' \implies u(y) \not\leq p]$$

e

$$(\forall y \in Y)[g(y) \geq p' \implies v(y) \not\leq p]$$

ou seja:

$$(\forall y_p \in Pr(L^Y))[y_p \notin f' \implies y_p \in u]$$

e

$$(\forall y_p \in Pr(L^Y))[y_p \notin g' \implies y_p \in v].$$

c.q.p.

Teorema 4.1.21

Se $f, a \in L^X$ são tais que para todo $x \in X$, $f(x) = 0$ ou $a(x) = 0$, então:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \implies x_p \in f')$$

Prova

Seja $p \in Pr(L)$. Como $p \neq 1$, temos que $p' \neq 0$. Seja agora $x \in X$ onde $a(x) \geq p'$. Com isso, $a(x) \neq 0$ e por hipótese $f(x) = 0$. Dessa forma, $f'(x) = 1 \not\leq p$. Como $p \in Pr(L)$ é arbitrário, temos que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies f'(x) \not\leq p)$$

Ou seja:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \implies x_p \in f')$$

c.q.p.

Teorema 4.1.22

Seja $L = (L, \leq, 0, 1)$ um conjunto totalmente ordenado e $a, f \in L^X$ de forma que:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \implies x_p \in f')$$

então

$$(\forall x \in X)(a(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 0)$$

Prova

Sejam $a, f \in L^X$ onde:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in a' \implies x_p \in f')$$

Dado $p \in Pr(L)$, temos que:

$$(\forall x \in X)(x_p \in a' \implies x_p \in f')$$

$$\iff (\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies f'(x) \not\leq p)$$

$$\iff (\forall x \in X)(\implies f'(x) \not\leq p)$$

$$\iff (\forall x \in X)(a'(x) \leq p \text{ ou } f'(x) \not\leq p)$$

$$\iff (\forall x \in X)(a(x) \not\leq p' \text{ ou } f(x) \not\leq p')$$

Como p é qualquer, pelo lema 4.1.16, temos que:

$$(\forall x \in X)(a(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 0)$$

c.q.p.

Teorema 4.1.23

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -normal onde L é um conjunto totalmente ordenado.

Se $f, a \in L^X$ são tais que f é fechado, a é g -fechado, para todo $p \in Pr(L)$ existem $y, z \in X$ onde $f(y) \geq p'$ e $a(z) \geq p'$ e ainda,

$$(\forall x \in X)(f(x) = 0 \text{ ou } a(x) = 0)$$

então existem abertos u_1 e u_2 tais que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in u_1);$$

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \implies x_p \in u_2)$$

e

$$(\forall x \in X)(u_1(x) = 0 \text{ ou } u_2(x) = 0)$$

Prova

Como para todo $f(x) = 0$ ou $a(x) = 0$, pelo teorema 4.1.21, obtemos,

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \implies x_p \in f')$$

Ou seja, para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies f'(x) \not\leq p)$$

Como f' é aberto e a é g-fechado, temos que para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(\bar{a}(x) \geq p' \implies f'(x) \not\leq p)$$

Sendo L totalmente ordenado, obtemos, pelo teorema 4.1.22:

$$(\forall x \in X)(f(x) = 0 \text{ ou } \bar{a}(x) = 0)$$

E mais, como existe $z \in X$ onde $a(z) \geq p'$ e $\bar{a} \geq a$, pelo lema 4.1.6, $\bar{a}(z) \geq p'$.

Assim, como (X, \mathfrak{S}) é L -normal e \bar{a} e f são fechados, existem $u_1, u_2 \in \mathfrak{S}$ onde $(\forall x \in X)(u_1(x) = 0 \text{ ou } u_2(x) = 0)$ e para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(\bar{a}(x) \geq p' \implies u_2(x) \not\leq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies u_1(x) \not\leq p)$$

Ainda pelo lema 4.1.6, temos que, para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies \bar{a}(x) \geq p' \implies u_2(x) \not\leq p)$$

Ou seja:

$$(\forall x_p \in \text{Pr}(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in u_1);$$

$$(\forall x_p \in \text{Pr}(L^X))(x_p \notin a' \implies x_p \in u_2)$$

e

$$(\forall x \in X)(u_1(x) = 0 \text{ ou } u_2(x) = 0)$$

c.q.p.

4.2 Conjuntos g-abertos

Definição 4.2.1

Um L -conjunto $a \in L^X$ é chamado de g -aberto se a' é g -fechado.

Teorema 4.2.2

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -topológico e F a coleção de todos os L -conjuntos fechados de (X, \mathfrak{S}, \cdot) . O L -conjunto $a \in L^X$ é g -aberto se, e somente se, para todo $f \in F$ onde para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

temos que

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a^\circ(x) \not\leq p)$$

Que pode ser reescrito como:

$$(\forall x_p \in \text{Pr}(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in a)$$

temos que

$$(\forall x_p \in \text{Pr}(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in a^\circ)$$

Prova

Necessidade: Digamos que $f \in F$ é tal que para todo $p \in \text{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

Seja, então $p \in \text{Pr}(L)$. Assim

$$(\forall x \in X)(a(x) \leq p \implies f(x) \not\geq p')$$

logo

$$(\forall x \in X)(a'(x) \geq p' \implies f'(x) \not\leq p)$$

Como a' é g -fechado, temos que

$$(\forall x \in X)(\overline{a'}(x) \geq p' \implies f'(x) \not\leq p)$$

e assim

$$(\forall x \in X)(f'(x) \leq p \implies \overline{a'}(x) \not\geq p')$$

ou seja

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies \overline{a'}'(x) \not\leq p)$$

Como $\overline{a'} = (a^\circ)'$, i. e., $(\overline{a'})' = a^\circ$, temos que:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a^\circ(x) \not\leq p)$$

Como $p \in Pr(L)$ é qualquer, temos que a afirmação acima é verdadeira para todo $p \in Pr(L)$.

Suficiência: Seja $b \in \mathfrak{S}$ onde, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(a'(x) \geq p' \implies b(x) \not\leq p)$$

Seja $p \in Pr(L)$. Assim:

$$(\forall x \in X)(b(x) \leq p \implies a'(x) \not\geq p')$$

ou seja

$$(\forall x \in X)(b'(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

Como b' é fechado temos, por hipótese:

$$(\forall x \in X)(b'(x) \geq p' \implies a^\circ(x) \not\leq p)$$

Com isso

$$(\forall x \in X)(a^\circ(x) \leq p \implies b'(x) \not\geq p')$$

i. e.

$$(\forall x \in X)((a^\circ)')(x) \geq p' \implies b(x) \not\leq p)$$

Como $(a^\circ)' = \overline{a'}$, temos:

$$(\forall x \in X)(\overline{a'}(x) \geq p' \implies b(x) \not\leq p)$$

Como $p \in Pr(L)$ é qualquer, temos que a afirmação acima é verdadeira para todo $p \in Pr(L)$, ou seja, a' é g-fechado.

c.q.p.

Definição 4.2.3

Diremos que os conjuntos $a, b \in L^X$ são separados no espaço L -topológico (X, \mathfrak{S}) se e somente se, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \implies b(x) \leq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(\overline{b}(x) \geq p' \implies a(x) \leq p)$$

ou seja, $a, b \in L^X$ são separados se e somente se:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (\bar{a})' \implies x_p \notin b)$$

e

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (\bar{b})' \implies x_p \notin a)$$

Lema 4.2.4

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -topológico, $a, b, c \in L^X$ onde a, b são separados e para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin c' \implies x_p \in (a \vee b))$$

Então, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (c \wedge \bar{a})' \implies x_p \in a)$$

e

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (c \wedge \bar{b})' \implies x_p \in b)$$

Prova

Seja $x_p \in Pr(L^X)$ onde $x_p \in c \wedge \bar{a}$, ou seja, $(c \wedge \bar{a})(x) \geq p'$, então:

$$(c \wedge \bar{a})(x) \geq p' \implies c(x) \geq p' \text{ e } \bar{a}(x) \geq p'$$

temos assim, por hipótese, que

$$c(x) \geq p' \implies (a \vee b)(x) \not\leq p \implies a(x) \not\leq p \text{ ou } b(x) \not\leq p$$

Como a, b são separados, $\bar{a}(x) \geq p'$ implica que $b(x) \leq p$, assim, podemos afirmar que:

$$c(x) \wedge \bar{a}(x) \geq p' \implies a(x)$$

Como x é qualquer, a afirmação acima é válida para qualquer $x \in X$. E como $p \in Pr(L)$ também é qualquer, temos, em resumo que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)((c \wedge \bar{a})(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

ou seja:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (c \wedge \bar{a})' \implies x_p \in a)$$

Por um raciocínio análogo, podemos mostrar que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (c \wedge \bar{b})' \implies x_p \in b)$$

c.q.p.

Teorema 4.2.5

Se $a, b \in L^X$ são g -abertos separados, então $a \vee b$ é g -aberto.

Prova

Seja F a coleção de todos os L -conjuntos fechados de (X, \mathfrak{S}) e $f \in F$ onde

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (a \vee b)' \implies x_p \in f)$$

i. e., para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies (a \vee b)(x) \not\leq p)$$

assim, pelo lema anterior, temos que:

$$(\forall x \in X)((f \wedge \bar{a})(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

logo, como $\bar{a} \wedge f \in F$ e a é g -aberto, pelo teorema 4.2.2. temos que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)((f \wedge \bar{a})(x) \geq p' \implies a^\circ \not\leq p)$$

De maneira analoga, mostramos que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)((\bar{b} \wedge f)(x) \geq p' \implies b^\circ \not\leq p)$$

logo, dado $p \in Pr(L)$ e $x_0 \in X$ onde $f(x_0) \geq p'$ temos que:

$$\begin{aligned} f(x_0) \geq p' &\implies f(x_0) \wedge (a \vee b)(x_0) \geq p' \\ &\implies (f(x_0) \wedge a(x_0)) \vee (f(x_0) \wedge b(x_0)) \geq p' \\ &\implies (f(x_0) \wedge \bar{a}(x_0)) \vee (f(x_0) \wedge \bar{b}(x_0)) \geq p' \\ &\implies (f(x_0) \wedge \bar{a}(x_0)) \geq p' \text{ ou } (f(x_0) \wedge \bar{b}(x_0)) \geq p' \\ &\implies a^\circ(x_0) \not\leq p \text{ ou } b^\circ(x_0) \not\leq p \\ &\implies (a^\circ(x_0) \vee b^\circ(x_0)) \not\leq p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies (a^\circ \vee b^\circ)(x_0) \not\leq p \\ &\implies (a \vee b)^\circ(x_0) \not\leq p \end{aligned}$$

Como $p \in Pr(L)$ e $x_0 \in X$ são quaisquer, temos que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies (a \vee b)^\circ(x) \not\leq p)$$

ou seja:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in f' \implies x_p \in (a \vee b)^\circ)$$

c.q.p.

Lema 4.2.6

Sejam X um conjunto qualquer, L um reticulado, $a \in L^X$ e $B \subseteq X$ de forma que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies \chi_B(x) \not\leq p)$$

então para todo $p \in Pr(L)$ e para todo $x \in B^c$ temos que $a(x) \not\leq p'$.

Prova

Sejam $a \in L^X$ e $B \subseteq X$ como acima. Digamos, por absurdo, que existem $x_0 \in B^c$, $p \in Pr(L)$ onde $a(x_0) \geq p'$. Assim, $\chi_B(x_0) \not\leq p$. Como $x_0 \in B^c$, temos que $0 = \chi_B(x_0) \not\leq p$. Absurdo!!! Logo, para todo $p \in Pr(L)$ e $x \in B^c$, obtemos $a(x) \not\leq p'$.

c.q.p.

Teorema 4.2.7

Seja (X, \mathfrak{S}_X) um espaço L -topológico. Se $a \leq \chi_B$ onde $B \subseteq X$, a é g -aberto em relação ao subespaço (B, \mathfrak{S}_B) e χ_B é g -aberto em relação ao espaço (X, \mathfrak{S}_X) , então a é g -aberto em relação à (X, \mathfrak{S}_X) .

Prova

Seja f um L -conjunto fechado em relação ao espaço (X, \mathfrak{S}_X) onde

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in a)$$

Ou seja, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

Então, pelo lema 4.1.6, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies \chi_B \not\leq p)$$

Como a é g -aberto no espaço (B, \mathfrak{S}_B) , temos que existe $u \in \mathfrak{S}_X$ onde:

$$(\forall x \in B)(f(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

e $u(x) \leq a(x)$, para todo $x \in B$.

Como, para todo $p \in Pr(L)$

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies \chi_B(x) \not\leq p)$$

temos, pelo lema 4.2.6, que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(x \in B^c)(f(x) \not\geq p')$$

Isso nos garante que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

Como χ_B é g -aberto em (X, \mathfrak{S}_X) :

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies \chi_B^\circ(x) \not\leq p)$$

Pelos resultados acima:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies (u(x) \not\leq p \text{ e } \chi_B^\circ(x) \not\leq p))$$

Sabendo-se que $p \in Pr(L)$, temos que:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies (u \wedge \chi_B^\circ)(x) \not\leq p)$$

Como $u \leq a \leq \chi_B$, $u \in \mathfrak{S}$:

$$u \wedge \chi_B^\circ \leq u \leq a$$

logo,

$$u \wedge \chi_B^\circ \leq a^\circ$$

e com isso, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a^\circ(x) \not\leq p)$$

i. e.:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in a^\circ)$$

c.q.p.

Teorema 4.2.8

Seja (X, \mathfrak{S}) um espaço L -topológico e $a, b \in L^X$ onde a é g -aberto. Se b é tal que $a^\circ \leq b \leq a$, então b é g -aberto.

Prova

Digamos que $b \in L^X$ é tal que $a^\circ \leq b \leq a$, onde a é g -aberto. Assim, por definição a' é g -fechado e $a' \leq b \leq \overline{a^\circ}$. Logo, pelo teorema 4.1.7, temos que b' é g -fechado, i. e., b é g -aberto.

c.q.p.

Capítulo 5

Espaços de Alexandroff e conjuntos g^* -fechados

Neste capítulo apresentamos os espaços de Alexandroff e os conjuntos g^* -fechados, o análogo aos conjuntos g -fechados para espaços de Alexandroff.

O capítulo está dividido em três seções: A primeira é dedicada a algumas definições e resultados básicos em espaços de Alexandroff; na segunda seção temos a definição de conjuntos g^* -fechados onde podemos observar que estes possuem alguns resultados semelhantes aos conjuntos g -fechados em espaços topológicos. Já na terceira seção tratamos de conjuntos g^* -abertos e alguns resultados. Na quarta seção é apresentado um axioma de separação em um espaço de Alexandroff.

5.1 Algumas definições e resultados

Definição 5.1.1 (Alexandroff, [1])

Seja X um conjunto qualquer e δ uma coleção de subconjuntos de X . Diremos que o par (X, δ) é um espaço de Alexandroff se:

- i. $\emptyset, X \in \delta$;
- ii. Se $F_i \in \delta$, $i = 1, \dots, n$, então $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \delta$, i. e., a união finita de elementos de δ pertence a δ ;

iii. Se $F_i \in \delta$, onde $i \in J$, sendo J enumeravel, então $\bigcap_{i \in J} F_i \in \delta$, i. e., a interseção enumeravel de elementos de δ pertence a δ .

Os elementos de δ são chamados de fechados e seus complementares chamaremos de abertos. A família dos conjuntos abertos de (X, δ) será representado por α de onde temos os seguintes resultados:

- i. $\emptyset, X \in \alpha$;
- ii. Se $A_i \in \alpha$, $i = 1, \dots, n$, então $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \alpha$, i. e., a interseção finita de elementos de α pertence a α ;
- iii. Se $A_i \in \alpha$, onde $i \in J$, sendo J enumeravel, então $\bigcup_{i \in J} A_i \in \alpha$, i. e., a união enumeravel de elementos de α pertence a α .

O espaço de Alexandroff (X, δ) pode ser definido apartir dos seus conjuntos abertos. Este espaço designaremos por (X, α) . Assim, não faremos distinção entre os espaços (X, δ) e (X, α) .

Podemos verificar que todo espaço topológico é de Alexandroff, mas a reciproca não é verdadeira como verifica-se no exemplo seguinte:

Exemplo 5.1.2

Seja X um conjunto não-enumeravel e seja δ a coleção de todos os conjuntos cujo complementar é enumerável mais o conjunto vazio e seja α a família do complementar de todos os elementos de δ , i. e., α é o conjunto de todos os conjuntos finitos ou enumeráveis mais o conjunto X . Assim (X, α) é um espaço de Alexandroff, pois:

- i. $X, \emptyset \in \alpha$ uma vez que \emptyset é, por definição, finito;
- ii. Se $A_i \in \alpha$, $i = 1, \dots, n$, então, cada conjunto A_i é enumerável ou finito, e com isso, $\bigcap_{i=1}^n A_i$ é também enumerável ou finito, ou seja, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \alpha$;
- iii. Se $A_i \in \alpha$, $i \in J$ onde J é enumerável, então $\bigcup_{i \in J} A_i \in \alpha$, pois a união enumerável de conjuntos enumeráveis ou finitos é um conjunto enumerável.

Porém, (X, α) não é um espaço topológico, uma vez que a união não-enumerável de conjuntos enumeráveis ou finitos pode ser um conjunto não-enumerável. Para verificar isso, basta tomarmos a coleção de todos os conjuntos unitários de X . Cada elemento desta coleção é finito, porém a união de todos os seus elementos é o conjunto X que por hipótese é não-enumerável.

Definição 5.1.3 (Alexandroff, [1])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e $A \subseteq X$. Chamaremos de fecho de A em (X, α) a intersecção de todos os conjuntos fechados que contém A . Indicaremos o fecho de A por \bar{A} .

Observe que nem sempre o fecho de um conjunto em um espaço de Alexandroff é fechado, uma vez que podem existir não-enumeráveis conjuntos fechados que contém A . Convém notar ainda que $A \subseteq \bar{A}$ para todo $A \subseteq X$.

Teorema 5.1.4

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff, Se A, B são subconjuntos de X de forma que $A \subseteq \bar{B}$, então $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Prova

Vamos denotar δ_A e δ_B as coleções de todos os fechados de (X, α) que contém A e que contém B respectivamente. Assim:

$$A \subseteq \bar{B} = \bigcap_{F \in \delta_B} F$$

ou seja, dado $F \in \delta_B$, temos que $A \subseteq F$. Como, por definição, F é fechado, temos que $F \in \delta_A$, de onde concluímos que:

$$\delta_B \subseteq \delta_A$$

Logo:

$$\overline{A} = \bigcap_{G \in \delta_A} G \subseteq \bigcap_{F \in \delta_B} F = \overline{B}$$

c.q.p.

Corolário 5.1.5

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Se A, B são subconjuntos de X de forma que $A \subseteq B$, então $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Prova

Sabemos que $B \subseteq \overline{B}$, assim, $A \subseteq \overline{B}$ e pelo teorema anterior $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

c.q.p.

Definição 5.1.6 (Alexandroff, [1])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que um conjunto A é bicompato se e somente se toda cobertura aberta de A possui uma subcobertura finita.

Definição 5.1.7 (Lahiri e Das, [16])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que dois conjuntos A, B em X são fracamente separados se existem dois abertos U, V tais que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ e $A \cap V = B \cap U = \emptyset$.

Definição 5.1.8 (Alexandroff, [1])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que (X, α) é T_0 se para todo $x, y \in X$, onde $x \neq y$, existe um aberto U onde $x \notin U$ e $y \in U$ ou $x \in U$ e $y \notin U$.

Definição 5.1.9 (Alexandroff, [1])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que (X, α) é T_1 se para todo $x, y \in X$, onde $x \neq y$, existem abertos U e V onde $x \in U$ e $y \in V$.

Definição 5.1.10 (Das e Rashid, [8])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção dos conjuntos fechados de (X, α) . Diremos que (X, α) é regular se e somente se para todo $x \in X$ e $F \in \delta$ onde $x \notin F$, existem abertos disjuntos V e U , i. e., $V \cap U = \emptyset$ onde $x \in V$ e $F \subseteq U$.

Teorema 5.1.11 (Das e Rashid, [8])

Um espaço de Alexandroff (X, α) é regular se e somente se para todo $x \in X$ e para todo aberto U contendo x , existe um aberto V e um fechado F tais que $x \in V \subseteq F \subseteq U$.

Prova

Necessidade: Seja (X, α) um espaço de Alexandroff regular. Sejam $x \in X$ e $U \in \alpha$ de modo que $x \in U$. Assim U^c é um fechado que não contém x . Com isso, por (X, α) ser um espaço regular, temos que existem abertos $V, W \in \alpha$ onde $x \in W$, $U^c \subseteq W$ e $V \cap W = \emptyset$. Seja $F = W^c$, assim definido, o conjunto F é fechado. Como $V \cap W = \emptyset$, temos que $V \subseteq W^c = F$. e ainda, sendo que $U^c \subseteq W$, obtemos $W^c \subseteq U$, i. e., $F \subseteq U$, logo:

$$x \in V \subseteq F \subseteq U$$

Suficiência: Digamos que no espaço de Alexandroff (X, α) , para todo $x \in X$ e $U \in \alpha$ onde $x \in U$ existem V aberto e F fechado onde:

$$x \in V \subseteq F \subseteq U$$

Vamos mostrar que (X, α) é regular. Seja δ a coleção dos conjuntos fechados de (X, α) , $x \in X$ e $G \in \delta$ onde $x \notin G$. Assim, $x \in G^c$, onde G^c é aberto. Por hipótese, existe $F \in \delta$ onde $x \in F \subseteq G^c$. Com isso, temos que $G \subseteq F^c$. Seja $W = F^c$. Observe que assim, W é um aberto que contém G mas não contém x . Ainda por

hipotese, temos que existe V aberto onde $x \in V \subseteq F = W^c \subseteq G^c$. Assim, $V \subseteq W^c$ de onde temos que $V \cap W = \emptyset$. Logo $x \in U, G \subseteq W$ e $V \cap W = \emptyset$.

c.q.p.

Teorema 5.1.12 (Das e Rashid, [9])

Um espaço de Alexandroff (X, α) é T_0 se e somente se para todo $x, y \in X$ onde $x \neq y$ implica em $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Prova

Necessidade: Seja (X, α) um espaço de Alexandroff T_0 . Sejam $x, y \in X$ de forma que $x \neq y$. Digamos, sem perda de generalidade, que existe $U \in \alpha$ onde $x \in U$ e $y \notin U$. Assim, $y \in U^c$ e $x \notin U^c$, onde U^c é fechado. Dessa maneira, $\{y\} \subseteq U^c$, i. e., U^c é um fechado que contém $\{y\}$ e com isso $\overline{\{y\}} \subseteq U^c$. Dessa maneira, como $x \notin U^c$, temos que $x \notin \overline{\{y\}}$. E assim, sendo que $x \in \{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$, obtemos:

$$\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$$

Suficiência: Digamos que (X, α) é um espaço de Alexandroff onde para todo $x, y \in X$, $x \neq y$ temos que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Dessa maneira, temos que $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$. De fato, digamos, por absurdo, que $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$. Assim, temos que $\{x\} \subseteq \overline{\{y\}}$. Com isso, pelo teorema 5.1.4, obtemos $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ e de maneira analoga, podemos mostrar que $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$, logo $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, o que é um absurdo, uma vez que $x \neq y$. Digamos agora, sem perda de generalidade, que $x \notin \overline{\{y\}}$. Assim, $x \in (\overline{\{y\}})^c$. O conjunto $\overline{\{y\}}$ não é, necessariamente, fechado, assim, não podemos afirmar que $x \in (\overline{\{y\}})^c$ é aberto. Por $x \in (\overline{\{y\}})^c$ temos que:

$$x \in \left(\bigcap_{F \in \delta_B} F \right)^c = \bigcup_{F \in \delta_B} F^c$$

onde δ_y é o conjunto de todos os fechados que contém y . É fácil ver que:

$$\{F^c | y \in F \text{ e } F \in \delta\} = \{A | y \notin A \text{ e } A \in \alpha\} = \alpha_{y^-}$$

logo:

$$x \in \left(\bigcap_{F \in \delta_B} F \right)^c = \bigcup_{F \in \delta_B} F^c = \bigcup_{A \in \alpha_{y^-}} A$$

Assim, deve existir um conjunto $A \in \alpha_{y^-}$ onde $x \in A$, ou seja, um conjunto aberto A onde $x \in A$ e $y \notin A$.

c.q.p.

5.2 Conjuntos g^* -fechados

Definição 5.2.1 (Das e Rashid, [8])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que o conjunto $A \subseteq X$ é g^* -fechado se e somente se existe um fechado F que contém A onde para todo aberto U temos que $A \subseteq U$ implica em $F \subseteq U$.

É fácil ver que todo conjunto fechado é g^* -fechado, porém, a recíproca nem sempre é verdadeira conforme podemos verificar no exemplo a seguir:

Exemplo 5.2.2

Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais e C a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de \mathbb{R} . Assim, definindo $\alpha = C \cup \{\mathbb{R}\}$, temos que (\mathbb{R}, α) é um espaço de Alexandroff. O subconjunto $(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ não é fechado, pois $(0, \infty)^c = (-\infty, 0]$ não é enumerável, porém, $(0, \infty)$ é g^* -fechado, uma vez que o único aberto que o contém é \mathbb{R} que também é fechado. Assim, como \mathbb{R} é também fechado, temos que $(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, i. e., $(0, \infty)$ é g^* -fechado.

Teorema 5.2.3 (Das e Rashid, [8])

Um conjunto A no espaço de Alexandroff (X, α) é g^* -fechado se e somente se existe um conjunto fechado F contendo A tal que o único fechado contido em $F - A$ é o conjunto vazio, i. e., se H é fechado e $H \subseteq F - A$, então $H = \emptyset$.

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, α) .

Necessidade: Digamos que A é g^* -fechado no espaço de Alexandroff (X, α) . Então, por definição, existe um conjunto fechado F que contém A e que está contido em todo aberto que contém A , i. e.,

$$\text{se } U \in \alpha, A \subseteq U, \text{ então } F \subseteq U$$

Assim, vamos mostrar que o único fechado contido em $F - A$ é o conjunto vazio. Seja H um conjunto fechado do espaço (X, α) onde $H \subseteq F - A = F \cap A^c$, então:

$$H \subseteq F, \text{ e } H \subseteq A^c$$

Logo, $A \subseteq H^c$. Como H^c é aberto, temos que $F \subseteq H^c$, logo $H \subseteq F^c$. Com isso, $H \subseteq F \cap F^c = \emptyset$.

Suficiência: Digamos agora que existe $F \in \delta$, com $A \subseteq F$ onde o único fechado contido em $F - A$ é o conjunto vazio, i. e.,

$$\text{se } H \in \delta, H \subseteq F - A, \text{ então } H = \emptyset.$$

Vamos mostrar que A é g^* -fechado. Seja $U \in \alpha$ onde $A \subseteq U$, provaremos que $F \subseteq U$.

Por $A \subseteq U$, temos que $U^c \subseteq A^c$, e assim $F \cap U^c \subseteq F \cap A^c = F - A$, ou seja, $F - U \subseteq F - A$. Como $F, U^c \in \delta$, temos que $F - U = F \cap U^c \in \delta$, logo, por hipótese, $F \cap U^c = \emptyset$, o que implica em $F \subseteq U$. Como U é um aberto qualquer de (X, α) contendo A , temos que a afirmação acima é válida para todo $U \in \alpha$ onde $A \subseteq U$.

c.q.p.

Corolário 5.2.4 (Das e Rashid, [8])

Um conjunto g^* -fechado A é fechado se e somente se tanto \overline{A} como $\overline{A} - A$ são fechados.

Prova

Seja A um conjunto g^* -fechado no espaço de Alexandroff (X, α) .

Necessidade: Digamos que A seja fechado, então é imediato que $A = \overline{A}$, i. e., \overline{A} é fechado e assim $\overline{A} - A = \emptyset$ é fechado.

Suficiência: Digamos agora que \overline{A} e $\overline{A} - A$ são fechados, então, pelo teorema acima, existe F fechado com $A \subseteq F$ onde o único fechado contido em $F - A$ é o conjunto vazio. Como, por definição, $\overline{A} \subseteq F$, temos que:

$$\overline{A} - A \subseteq F - A$$

Por hipótese, temos que $\overline{A} - A$ é fechado e pelo teorema acima, por A ser g^* -fechado, temos que:

$$\overline{A} \cap A^c = \overline{A} - A = \emptyset$$

ou seja:

$$\overline{A} \subseteq A$$

e como $A \subseteq \overline{A}$, temos que

$$A = \overline{A}$$

sendo \overline{A} fechado, temos que A é fechado.

c.q.p.

Teorema 5.2.5 (Das e Rashid, [8])

Um conjunto A no espaço de Alexandroff (X, α) é g^* -fechado se e somente se existe um conjunto fechado F contendo A tal que $F \subseteq \ker(A) = \bigcap \{U \subseteq X \mid U \in \alpha \text{ e } A \subseteq U\}$.

Prova

Necessidade: Seja A g^* -fechado e δ a coleção de todos os fechados de (X, α) . Assim, existe $F \in \delta$ com $A \subseteq F$ onde para todo U aberto onde $A \subseteq U$ temos que $F \subseteq U$. Seja α^A a coleção de todos os abertos que contém A . Assim, dado $U \in \alpha^A$, temos que $F \subseteq U$, logo:

$$F \subseteq \bigcap_{U \in \alpha^A} U$$

Suficiência: Digamos que $F \in \delta$ onde $A \subseteq F$ e $F \subseteq \bigcap_{U \in \alpha^A} U$, assim, temos que, dado $V \in \alpha^A$:

$$F \subseteq \bigcap_{U \in \alpha^A} U \subseteq V$$

ou seja,

$$F \subseteq V$$

c.q.p.

Teorema 5.2.6 (Das e Rashid, [8])

A união de dois conjuntos g^ -fechados é g^* -fechado.*

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e sejam $A, B \subseteq X$ conjuntos g^* -fechados em (X, α) . Assim, existem $F_A, F_B \in \delta$, $A \subseteq F_A$, $B \subseteq F_B$, onde, para todo $U_A, U_B \in \alpha$ onde $A \subseteq U_A$ e $B \subseteq U_B$, temos que:

$$F_A \subseteq U_A \text{ e } F_B \subseteq U_B$$

Vamos mostrar que $F_A \cup F_B$ está contido em todo U aberto onde $A \cup B \subseteq U$. Seja $F = F_A \cup F_B \in \delta$, assim, seja $U \in \alpha$ onde $A \cup B \subseteq U$. Logo, $A \subseteq F_A \subseteq U$ e $B \subseteq F_B \subseteq U$, com isso:

$$A \cup B \subseteq F_A \cup F_B = F \subseteq U$$

logo, como U é qualquer, temos que $A \cup B$ é g^* -fechado.

c.q.p.

Como podemos verificar em [17], a intersecção de dois conjuntos g^* -fechados nem sempre é um conjunto g^* -fechado.

Teorema 5.2.7 (*Das e Rashid, [8]*)

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e $A \subseteq X$ um conjunto g^ -fechado em (X, α) . Se $B \subseteq X$ é tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é g^* -fechado.*

Prova

Seja $U \in \alpha$ onde $B \subseteq U$, assim, $A \subseteq U$ e por A ser g^* -fechado, existe $F \in \delta$ com $A \subseteq F$, onde $F \subseteq U$ e ainda, como, $A \subseteq F$, temos que $\overline{A} \subseteq F$, logo:

$$B \subseteq \overline{A} \subseteq F \subseteq U$$

Como $U \in \alpha$ é qualquer, temos que a afirmação acima é válida para todo $U \in \alpha$ onde $B \subseteq U$, i. e., B é g^* -fechado.

c.q.p.

Definição 5.2.8

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e $A \subseteq X$. Chamaremos de subespaço de (X, α) relativo ao conjunto A ao espaço (A, α_A) onde:

$$\alpha_A = \{U \cap A \mid U \in \alpha\}$$

É fácil ver que (A, α_A) satisfaz as propriedades de um espaço de Alexandroff.

Diremos que um conjunto $B \subseteq A$ é fechado no subespaço (A, α_A) se e somente se $A - B$ é aberto em (A, α_A) .

Teorema 5.2.9

Seja (A, α_A) um subespaço do espaço de Alexandroff (X, α) . O conjunto $B \subseteq A$ é fechado no subespaço (A, α_A) se e somente se existe um fechado $F \subseteq X$ onde $B = F \cap A$, i. e., a coleção δ_A dos conjuntos fechados de (A, α_A) é dado por:

$$\delta_A = \{F \cap A | F \in \delta\}$$

onde δ é a coleção dos conjuntos fechados do espaço (X, α) .

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção dos fechados em (X, α) .

Necessidade: Seja B um conjunto fechado no subespaço (A, α_A) de (X, α) . Assim, por definição, $A - B$ é aberto. Logo, existe $U \in \alpha$ onde:

$$A - B = A \cap U$$

Assim:

$$\begin{aligned} B &= A - (A - B) = A - (A \cap U) = A \cap (A \cap U)^c = A \cap (A^c \cup U^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap U^c) \\ &= \emptyset \cup (A \cap U^c) = A \cap U^c \end{aligned}$$

como U é aberto, temos que U^c é fechado.

Suficiência: Digamos, agora, que $F \in \delta$. Vamos mostrar que $A \cap F$ é um fechado no subespaço (A, α_A) . Para isso, mostraremos que $A - (A \cap F)$ é aberto.

Temos que:

$$A - (A \cap F) = A \cap (A \cap F)^c = A \cap (A^c \cup F^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap F^c) = \emptyset \cup (A \cap F^c) = A \cap F^c$$

Como F^c é aberto em (X, α) , temos, por definição, que $A - (A \cap F) \in \alpha_A$, logo $A \cap F$ é fechado em (A, α_A) .

c.q.p.

Lema 5.2.10

Se um conjunto $A \subseteq X$ é aberto e g^* -fechado no espaço de Alexandroff (X, α) , então A é também fechado.

Prova

Como A é g^* -fechado, existe um conjunto fechado F em (X, α) onde para todo aberto U contendo A temos que $A \subseteq F \subseteq U$. Sendo A aberto e sabendo-se que $A \subseteq A$, obtemos:

$$A \subseteq F \subseteq A$$

ou seja $A = F$, assim, A é fechado.

c.q.p.

Teorema 5.2.11 (Das e Rashid, [8])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e A um conjunto aberto e g^* -fechado em (X, α) . O conjunto $B \subseteq A$ é g^* -fechado no subespaço (A, α_A) se e somente se B é g^* -fechado em (X, α) .

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff, (A, α_A) um subespaço de (X, α) e δ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, α) .

Necessidade: Digamos que $B \subseteq A$ é g^* -fechado em (A, α_A) . Então, existe F_A fechado em (A, α_A) contendo B onde, para todo $U_A \in \alpha_A$ temos que $B \subseteq U_A$ implica em $B \subseteq F_A$.

Vamos mostrar que existe $F \in \delta$ onde para todo $U \in \alpha$, sendo $B \subseteq U$, temos que $B \subseteq F \subseteq U$.

Seja $U \in \alpha$ onde $B \subseteq U$. Como $B \subseteq A$, temos que $B = B \cap A$, assim:

$$B = B \cap A \subseteq B \cap U$$

como $B \cap U$ é aberto em (A, α_A) , temos:

$$B \subseteq F_A \subseteq B \cap U \subseteq U$$

por F_A ser fechado em (A, α_A) , pelo teorema 5.2.9, existe $F \in \delta$ onde $F_A = F \cap A$. E ainda, pelo lema 5.2.11, A é fechado, logo, F_A , logo, $F_A = F \cap A$ é fechado em (X, α) . Como isso, sendo $F = F_A$, temos que,

$$B \subseteq F \subseteq U$$

Como U é um aberto qualquer que contém A , temos que a afirmação acima é válida para todo $U \in \alpha$ onde $A \subseteq U$.

Suficiência: Seja agora $B \subseteq A$ um conjunto g^* -fechado no espaço (X, α) . Vamos mostrar que B é g^* -fechado em (A, α_A) .

Antes porém, mostraremos que $\alpha_A \subseteq \alpha$. Seja $U_A \in \alpha_A$. Assim, por definição, existe $U \in \alpha$ onde $U_A = A \cap U$. Como $A \in \alpha$ temos que $U_A = A \cap U$ é aberto em (X, α) . Ou seja, todo aberto de (A, α_A) é também um aberto em (X, α) .

Logo, por hipótese, existe $F \in \delta$ onde para todo $U_A \in \alpha_A$, $B \subseteq U_A$, temos que

$$B \subseteq F \subseteq U_A$$

E ainda, pelo teorema 5.2.9, o conjunto F é também fechado no subespaço (A, α_A) pois, dado $U \cap A = U_A \in \alpha_A$, temos $F \subseteq U_A = U \cap A$, o que implica em $F \subseteq A$ e com isso $F = F \cap A$. Logo, B é g^* -fechado em (A, α_A) .

c.q.p.

Lema 5.2.12

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff onde α é a coleção dos conjuntos abertos e δ a coleção dos conjuntos fechados de (X, α) . Se $\alpha \subseteq \delta$ ou $\delta \subseteq \alpha$, então $\alpha = \delta$.

Prova

Digamos que $\alpha \subseteq \delta$ onde δ é a coleção dos conjuntos fechados do espaço de Alexandroff (X, α) . Assim, para verificarmos que $\alpha = \delta$, basta mostrarmos que $\delta \subseteq \alpha$. Seja $F \in \delta$, então $F^c \in \alpha$. Por hipótese temos que $F^c \in \delta$. Logo, $(F^c)^c \in \alpha$, i. e., $F \in \alpha$. A demonstração para $\delta \subseteq \alpha$ implica em $\alpha = \delta$ é analoga.

c.q.p.

Teorema 5.2.13 (Das e Rashid, [8])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, α) . Se todo subconjunto de X é g^* -fechado em (X, α) , então $\alpha = \delta$.

Prova

Digamos que todo subconjunto de X no espaço (X, α) é g^* -fechado. Seja δ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, α) . Dado $A \in \alpha$, temos, por hipótese, que A é g^* -fechado. Pelo lema 5.2.10, A é fechado, i. e., $A \in \delta$, ou seja, $\alpha \subseteq \delta$. Com isso e pelo lema 5.2.12, temos que $\alpha = \delta$.

c.q.p.

A recíproca do teorema anterior nem sempre é verdadeira, como podemos verificar no seguinte exemplo:

Exemplo 5.2.14

Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais, G a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de \mathbb{R} e H a coleção do complementar dos elementos de G , i. e., H é a coleção de todos os subconjuntos de X cujo complementar é enumerável. Seja $\alpha = \{X, \emptyset\} \cup G \cup H$. Temos então que (\mathbb{R}, α) é um espaço de Alexandroff, porém, não é um espaço topológico. Seja δ a coleção de todos os conjuntos fechados de (\mathbb{R}, α) , então $\alpha = \delta$. Porém, o conjunto $(0, 1)$ não é fechado e ainda, sabendo-se

que $\ker[(0, 1)] = (0, 1)$ temos que não existe um conjunto fechado F onde $(0, 1) \subseteq F$ e $F \subseteq \text{Ker}[(0, 1)]$. Assim, pelo teorema 5.2.5, $(0, 1)$ não é g^* -fechado.

Teorema 5.2.15 (Das e Rashid, [8])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os fechados de (X, α) . Assim, se $\delta = \alpha$, então todo subconjunto de (X, α) é g^* -fechado se e somente se (X, α) é um espaço topológico

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff onde $\alpha = \delta$, sendo δ a coleção de todos os fechados de (X, α) .

Necessidade: Digamos que todo subconjunto de X é g^* -fechado em (X, α) . Como (X, α) é de Alexandroff, temos que $\emptyset, X \in \alpha$ e a interseção finita de elementos de α pertence a α . Seja $A_i \in \alpha, i \in I$ onde I é não enumerável. Vamos mostrar que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \alpha$. Seja $F_i = A_i^c$, assim, por hipótese, $\bigcap_{i \in I} F_i$ é g^* -fechado, logo, existe $F \in \delta$ onde, para todo aberto U contendo $\bigcap_{i \in I} F_i$ temos que:

$$\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F \subseteq U$$

De modo particular, como para todo $i \in I, \bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F_i$, e $F_i \in \delta = \alpha$, temos que:

$$F \subseteq F_i$$

para todo $i \in I$, logo:

$$F \subseteq \bigcap_{i \in I} F_i$$

dessa maneira, temos que

$$\bigcap_{i \in I} F_i = F$$

ou seja, $\bigcap_{i \in I} F_i$ é fechado. Assim, temos que $\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c = \bigcup_{i \in I} A_i$ é aberto.

Como a família $\{A_i\}_{i \in I}$ é qualquer, temos que a união não enumerável de abertos é aberta, logo, (X, α) é um espaço topológico.

Suficiência: Digamos que (X, α) é um espaço topológico. Seja $A \subseteq X$. Mostraremos que A é g^* -fechado. Seja $\beta = \{U \in \alpha | A \subseteq U\}$, então :

$$A \subseteq \ker(A) = \bigcap_{U \in \beta} U$$

porém, como $U \in \alpha = \delta$, temos que:

$$\ker(A) = \bigcap \{U \in \alpha | A \subseteq U\} = \bigcap \{U \in \delta | A \subseteq U\} = \bar{A}$$

como (X, α) é um espaço topológico, temos que \bar{A} é fechado, assim, tomando $F = \bar{A}$, temos que:

$$A \subseteq F \subseteq \ker(A)$$

Pelo teorema 5.2.5, temos que A é g^* -fechado.

c.q.p.

Definição 5.2.16

Diremos que um conjunto $A \subseteq X$ é compacto no espaço de Alexandroff (X, α) se e somente se toda cobertura aberta de A possui uma subcobertura finita.

Ao contrário dos conjuntos g -fechados em um espaço topológico compacto, num espaço de Alexandroff compacto, conjuntos g^* -fechados nem sempre são compactos, como podemos verifica no exemplo a seguir:

Exemplo 5.2.17

Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais e $\alpha = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup G$, onde G é a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de $\mathbb{R} - \{0\}$. O espaço (\mathbb{R}, α) é um espaço de Alexandroff, porém, não é topológico. Assim, (\mathbb{R}, α) é compacto, pois, toda cobertura aberta de (\mathbb{R}, α) deve conter \mathbb{R} . O intervalo $(1, 2)$ é g^ -fechado, uma vez que o único aberto que o contém é \mathbb{R} , porém, não é compacto.*

E ainda, pelo teorema 3.1.14, se (X, τ) é um espaço topológico regular, conjuntos compactos são g -fechados, porém, o análogo desse resultado para espaços de Alexandroff regulares e conjuntos g^* -fechados não é válido como mostraremos no exemplo a seguir:

Exemplo 5.2.18

Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais e $\alpha = \{\emptyset, X\} \cup G \cup H$, onde G é a coleção dos subconjuntos enumeráveis de $\mathbb{R} - \{0\}$ e H é a coleção dos subconjuntos de \mathbb{R} que contém 0 e cujo complementar é finito. Assim (\mathbb{R}, α) é um espaço de Alexandroff porém, não topológico.

Vamos mostrar que (\mathbb{R}, α) é regular. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $F \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto fechado em (\mathbb{R}, α) onde $a \notin F$. Se $a \neq 0$, basta tomarmos $\{a\} \in \alpha$ e $\{a\}^c \in \alpha$, assim, $a \in \{a\}$, $F \subseteq \{a\}^c$ e $\{a\} \cap \{a\}^c = \emptyset$. Caso $a = 0$, temos que F^c é um aberto que contém 0, logo, $F = (F^c)^c = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, onde $a_i \neq 0, i = 1, \dots, n$. Assim, F é também aberto, logo, $0 = a \in F^c, F \subseteq F$ e $F^c \cap F = \emptyset$.

Mostraremos agora que existe um conjunto bcompacto em (\mathbb{R}, α) que não é g^* -fechado. O intervalo $(-1, 1)$ é bcompacto em (\mathbb{R}, α) . De fato, seja $L \subseteq \alpha$ uma cobertura de $(-1, 1)$. Como $0 \in (-1, 1)$, deve existir ao menos um elemento $A \in L$ que contém 0. Assim, A^c é finito, pois, $A \in H$. Se $(-1, 1) - A = \emptyset$, basta tomarmos $\{A\} \subseteq L$ como uma subcobertura finita de L . Caso contrário, sabemos que $(-1, 1) - A = (-1, 1) \cap A^c$ é ainda finito. Assim, para cada $x \in (-1, 1) - A$, deve existir $U_x \in L$ onde $x \in U_x$. Tomamos, dessa maneira, a subcobertura finita $S = \{A\} \cup \{U_x \in L | x \in (-1, 1) - A\} \subseteq L$.

O conjunto $(-1, 1)$ não é fechado e também não é g^* -fechado, pois $Ker[(-1, 1)] \subseteq \bigcap \{\mathbb{R} - \{x\} | x \notin (-1, 1)\} = (-1, 1)$, vemos que não existe um conjunto fechado F onde $(-1, 1) \subseteq F \subseteq Ker[(-1, 1)]$. Pelo teorema 5.2.5, $(-1, 1)$ não é g^* -fechado.

Teorema 5.2.19 (Das e Rashid, [8])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Então, dado $x \in X$, temos que o conjunto $\{x\}$ é fechado ou $\{x\}^c$ é g^* -fechado.

Prova

Seja $x \in X$. Digamos que $\{x\}$ não é fechado, então, $\{x\}^c$ não é aberto. Logo, o único conjunto aberto que contém $\{x\}^c$ é X . Assim, como X é fechado e $\{x\} \subseteq X$, temos que x^c é g^* -fechado.

c.q.p.

5.3 Conjuntos g^* -abertos

Definição 5.3.1 (Das e Rashid, [8])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que o conjunto $A \subseteq X$ é g^* -aberto se e somente se A^c é g^* -fechado.

Observação 5.3.2

Observe que se (X, α) um espaço de Alexandroff e $A \subseteq X$ e $\delta^A = \{F \subseteq X | F \text{ é fechado e } F \subseteq A\}$ então $\delta^A = \{V^c \subseteq X | V \in \alpha \text{ e } A^c \subseteq V\}$

Teorema 5.3.3 (Das e Rashid, [8])

Um conjunto A é g^* -aberto em um espaço de Alexandroff (X, α) se e somente se existe um conjunto aberto U contido em A tal que para todo F fechado em (X, α) , $F \subseteq A$ implica em $F \subseteq U$.

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os fechados em (X, α) .

Necessidade: Digamos que A é g^* -aberto em (X, α) . Logo, por definição, A^c é g^* -fechado.

Assim, existe $G \in \delta$, $A^c \subseteq G$, onde, para todo $V \in \alpha$, $A^c \subseteq V$ implica em $G \subseteq V$, ou seja, para todo $V \in \alpha$, $V^c \subseteq A$ implica em $V^c \subseteq G^c$.

Seja $G^c = U \in \alpha$.

Pela observação 5.3.2, a afirmação acima equivale a dizer que existe $U \in \alpha$, $U \subseteq A$ onde, para todo $F \in \delta$, $F \subseteq A$ implica em $F \subseteq U$.

Suficiência: Digamos que $A \subseteq X$ é tal que existe $U \in \alpha$, $U \subseteq A$, onde, para todo $F \in \delta$, $F \subseteq A$ implica em $F \subseteq U$.

De maneira analoga à demonstração da necessidade e tomando $U^c = G \in \delta$, teremos que A^c é g^* -fechado, ou seja, A é g^* -aberto.

c.q.p.

5.4 Espaços T_w

Definição 5.4.1 (Das e Rashid, [8])

Um espaço de Alexandroff (X, α) é chamado de T_w se e somente se todo conjunto g^* -fechado é fechado.

Podemos notar que essa definição é parecida com a dada por Levine em [17] para espaços topológicos $T_{1/2}$. Porém, para espaços topológicos, temos que:

$$T_1 \implies T_{1/2} \implies T_0$$

o que não irá ocorrer para espaços T_w .

Teorema 5.4.2 (Das e Rashid, [8])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Se (X, α) é T_w , então (X, α) é também T_0 .

Prova

Sejam $x, y \in X$ onde $x \neq y$.

Se $\{x\}$ é fechado, temos que $\{x\}^c$ é um aberto que contém y mas não contém x . Caso $\{x\}$ não seja fechado, temos, pelo teorema 5.2.19 que $\{x\}^c$ é g^* -fechado. Assim, como (X, α) é T_w , $\{x\}^c$ é fechado, o que implica que $\{x\} = (\{x\}^c)^c$ é aberto. Logo, sendo que $x \in \{x\}$ e $y \notin \{x\}$, temos que (X, α) é T_0 .

c.q.p.

Porém, em espaços de Alexandroff, ser T_1 não implica que o espaço é T_w . Para isso, podemos observar o espaço (X, α) , onde $\alpha = \{\emptyset, X\} \cup C$, onde C é a coleção de todos os subconjuntos finitos ou enumeráveis de X . Assim, (X, α) é T_1 , logo, também é T_0 , porém, como observamos no exemplo 5.2.2, (X, α) não é T_w .

Teorema 5.4.3

Se (X, τ) é um espaço topológico, então um conjunto $A \subseteq X$ é g^ -fechado se e somente se A é g -fechado, ou seja, num espaço topológico, as definições de conjuntos g^* -fechados e de conjuntos g -fechados coincidem.*

Prova

Seja (X, τ) um espaço topológico.

Necessidade: Digamos que $A \subseteq X$ é um conjunto g^* -fechado em (X, τ) , então, existe um fechado F com $A \subseteq F$ onde, para todo $U \in \tau$ temos que $A \subseteq U$ implica em $F \subseteq U$.

Como $A \subseteq F$ e F é fechado, temos que $A \subseteq \bar{A} \subseteq F$, assim, para todo $U \in \tau$ onde $A \subseteq U$, temos que $\bar{A} \subseteq F \subseteq U$. Logo, A é g -fechado.

Suficiência: Seja A um conjunto g -fechado em (X, τ) , então, para todo $U \in \tau$, temos que $A \subseteq U$ implica em $\bar{A} \subseteq U$.

Como (X, τ) é topológico, temos que \bar{A} é fechado. Assim, A é g^* -fechado.

c.q.p.

Definição 5.4.4 (Das e Rashid, [8])

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e $A \subseteq X$. Chamaremos de g^* -fecho de A ao conjunto $\overline{A}^* = \bigcap \{F \subseteq X \mid A \subseteq F \text{ e } F \text{ é } g^* \text{-fechado}\}$.

Teorema 5.4.5 (Das e Rashid, [8])

O espaço de Alexandroff (X, α) é T_w se e somente se:

- i. Para cada $x \in X$, $\{x\}$ é aberto ou fechado;
- ii. $C = C^*$, onde $C = \{A \subseteq X \mid \overline{A^c} \text{ é fechado}\}$
e $C^* = \{A \subseteq X \mid (\overline{A^c})^* \text{ é } g^* \text{-fechado}\}$

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff.

Necessidade: Digamos que (X, α) é T_w . Seja $x \in X$, assim, pelo teorema 5.2.19, $\{x\}$ é fechado ou $\{x\}^c$ é g^* -fechado.

Se $\{x\}$ não é fechado, temos então que $\{x\}^c$ é g^* -fechado, logo, por hipótese, $\{x\}^c$ é fechado, ou seja, $\{x\}$ é aberto.

E ainda, seja $A \in C$, onde C é como descrito acima. Temos então que $\overline{A^c}$ é fechado, logo, g^* -fechado. Com isso, $\overline{A^c} = (\overline{A^c})^*$ e assim, $C \subseteq C^*$. De maneira analoga, podemos mostrar que $C^* \subseteq C$. Logo $C = C^*$

Suficiência: Digamos que (X, α) é tal que para todo $x \in X$, $\{x\}$ é aberto ou fechado e além disso $C = C^*$. Seja A um conjunto g^* -fechado em (X, α) . Dessa maneira, temos que $A = \overline{A}^*$, logo, $A^c \in C^*$. Por hipótese, temos que $A^c \in C$, assim, \overline{A} é fechado.

Vamos mostrar que $\overline{A} = A$.

Digamos, por absurdo, que $\overline{A} \neq A$. Como $A \subseteq \overline{A}$, existe $x \in \overline{A} - A$, logo, $\{x\} \subseteq \overline{A} - A$. Pelo corolário 5.2.4, $\{x\}$ não pode ser fechado. Assim, por hipótese, $\{x\}$ é aberto. Com isso, como $x \notin A$, temos que $\{x\} \subseteq A^c$, logo $A \subseteq \{x\}^c$. Sendo $\{x\}^c$ fechado, temos que $\overline{A} \subseteq \{x\}^c$ de onde temos que $\{x\} \subseteq (\overline{A})^c$, i. e., $x \notin \overline{A}$.

Absurdo!!!, logo, $\overline{A} = A$.

c.q.p.

Teorema 5.4.6

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os fechados de (X, α) . Então, dado $x \in X$, temos que $\{x\}$ será aberto ou fechado se e somente se para todo subconjunto $A \subseteq X$, temos que $A = \bigcap \{W_A \subseteq X \mid A \subseteq W_A \text{ e } W_A \in \alpha \cup \delta\}$.

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os fechados de (X, α) .

Necessidade: Digamos que, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é aberto ou fechado. Vamos definir $\rho^A = \{W_A \subseteq X \mid A \subseteq W_A \text{ e } W_A \in \alpha \cup \delta\}$. Seja $x \in X$ onde $x \notin A$, logo $A \subseteq \{x\}^c$. Por hipótese temos que $\{x\}^c$ é aberto ou fechado. E temos ainda que:

$$A = \bigcap \{\{x\}^c \subseteq X \mid x \notin A\}$$

Assim:

$$A \subseteq \rho^A \subseteq \bigcap \{\{x\}^c \subseteq X \mid x \notin A\} = A$$

Suficiência: Digamos agora que para todo $A \subseteq X$, temos que:

$$A = \{W_A \subseteq X \mid A \subseteq W_A \text{ e } W_A \in \alpha \cup \delta\}$$

Digamos, por absurdo, que $\{x\}$ não é aberto nem fechado, assim, $\{x\}^c$ também não será. Logo, o único elemento de $\alpha \cup \delta$ que contém $\{x\}^c$ é X . Por hipótese, temos que $\{x\}^c = X$. Absurdo!!! Logo, $\{x\}$ é aberto ou fechado.

c.q.p.

Dos teoremas 5.4.5 e 5.4.6, temos que:

Teorema 5.4.7 (Das e Rashid, [8])

O espaço de Alexandroff (X, α) é T_w se e somente se:

i. todo subconjunto de X é a interseção de todos os abertos e fechados que o contém;

ii. $C = C^*$, onde $C = \{A \subseteq X \mid \overline{A^c} \text{ é fechado}\}$

e $C^* = \{A \subseteq X \mid (\overline{A^c})^* \text{ é } g^* \text{-fechado}\}$

Definição 5.4.8 (Das e Rashid, [8])

Diremos que o espaço de Alexandroff (X, α) é um espaço porta se e somente se todo subconjunto de X é ou aberto ou fechado.

Teorema 5.4.9 (Das e Rashid, [8])

Se (X, α) é um espaço porta, então (X, α) é T_w .

Prova

Seja (X, α) um espaço porta. Digamos, por absurdo, que existe $A \subseteq X$ que é g^* -fechado porém não é fechado. Assim, por hipótese, temos que A é aberto.

Como A é g^* -fechado, temos que existe F fechado em (X, α) com $A \subseteq F$, onde, para todo aberto U contendo A , temos que $F \subseteq U$.

Sabendo-se que $A \subseteq A$, temos que $A \subseteq F \subseteq A$ de onde temos que $A = F$, ou seja, A é fechado. Absurdo!!!

Logo (X, α) é T_w

c.q.p.

Capítulo 6

Espaços L -Alexandroff e conjuntos g^* -fechados

Neste último capítulo apresentamos a definição de espaços de Alexandroff para matemática fuzzy, que denominaremos de espaços L -Alexandroff e além disso, sugerimos uma definição para conjuntos g^* -fechados.

O capítulo divide-se em três seções.

A primeira seção contém algumas definições (entre elas a de espaço de L -Alexandroff) e teoremas. Na segunda seção a definição de conjuntos g^* -fechados em um espaço de L -Alexandroff e alguns resultados. Por fim, na última seção a nossa definição de conjuntos g^* -abertos em um espaço de L -Alexandroff.

6.1 Espaços L -Alexandroff

Definição 6.1.1

Dados um conjunto X e um reticulado L , chamaremos de espaço de Alexandroff

L -fuzzy ao par (X, Γ) , onde Γ uma função $\Gamma : L^X \rightarrow L$ onde:

- i. $\Gamma(1) = \Gamma(0) = 1$;*
- ii. $\Gamma(u \wedge v) \geq \Gamma(u) \wedge \Gamma(v), \forall u, v \in L^X$;*
- iii. Se J é um conjunto enumerável então: $\Gamma\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right) \geq \bigwedge_{j \in J} \Gamma(f_j), \forall i \in J, f_i \in L^X$.*

Definição 6.1.2

Seja X um conjunto qualquer, L um reticulado fuzzy e β um subconjunto de L^X .

Diremos que o para (X, β) é um espaço de L -Alexandroff se e somente se:

- i. $0, 1 \in \beta$;
- ii. Dados f e $g \in \beta$, temos que $f \wedge g \in \beta$.
- iii. Dada uma família $\{f_i\}_{i \in J}$ de elementos de β , onde J é enumerável, temos que $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right) \in \beta$;

Os elementos f de β serão chamados de abertos e f' de fechados.

É fácil ver que todo espaço L -topológico é um espaço L -Alexandroff, porém, a recíproca nem sempre é verdadeira.

Exemplo 6.1.3

Vamos considerar o reticulado $(L, \leq, ', \vee, \wedge)$ onde

- $L = \{\chi_A \mid A \subseteq [0; 1]\}$;
- $\chi_A \leq \chi_B \iff A \subseteq B$;
- $\chi'_A = \chi_{A^c}$.

Para não haver perigo de confusão, vamos definir $0_L = \chi_\emptyset$ e $1_L = \chi_{[0; 1]}$

Seja $X = \wp([0; 1])$ onde $\wp([0; 1])$ é a coleção das partes de $[0; 1]$.

Definimos ainda:

- $0_\chi(A) = 0_L$
- $1_\chi(A) = 1_L$

Para todo $A \in X$

Vamos considerar $F = \{f_A \mid A \subseteq [0; 1] \text{ é enumerável}\}$ onde cada $f_A : \wp([0; 1]) \rightarrow L$ é definida como $f_A(B) = \chi_{B \cup A}$. Sendo $\beta = \{0_\chi, 1_\chi\} \cup F$ temos que (X, β) é um espaço L -Alexandroff porém não é L -topológico. De fato:

i. 0_χ e $1_\chi \in \beta$;

ii. Dados g e $h \in \beta$, temos que $g \wedge h \in \beta$.

Digamos que g e h são elementos de F , assim, existem A_1 e $A_2 \in \wp(X)$ onde $g = f_{A_1}$ e $h = f_{A_2}$. Sabendo-se que $\bigwedge_{i \in J} \chi_{A_i} = \chi_{\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right)}$ e $\bigcap_{i \in J} A_i$ é enumerável, temos:

$$(g \wedge h)(B) = g(B) \wedge h(B) = f_{A_1}(B) \wedge f_{A_2}(B) = \chi_{B \cup A_1} \wedge \chi_{B \cup A_2} = \chi_{(B \cup A_1) \cap (B \cup A_2)} = \chi_{B \cup (A_1 \cap A_2)} = f_{A_1 \cap A_2}(B)$$

É fácil verificar que $g \wedge h \in \beta$ se $g, h = 0_\chi$ e / ou $g, h = 1_\chi$.

iii. Se $\{f_i\}_{i \in J}$ são elementos de β , onde J é enumerável, então $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right) \in \beta$. Pois dado $B \in X$, digamos que $\{f_i\}_{i \in J}$ são elementos de F , assim, existem $\{A_i\}_{i \in J}$ onde $f_i = f_{A_i}$. Sabendo-se que $\bigvee_{i \in J} \chi_{A_i} = \chi_{\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)}$ e $\bigcup_{i \in J} A_i$ é enumerável, temos:

$$\left(\bigvee_{i \in J} f_{A_i}\right)(B) = \left(\bigvee_{i \in J} f_{A_i}(B)\right) = \left(\bigvee_{i \in J} \chi_{B \cup A_i}\right) = \chi_{B \cup \left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)} = f_{\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)}(B)$$

É fácil verificar que $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right) \in \beta$ se há elementos $f_k = 0_\chi$ ou $f_k = 1_\chi$.

Não podemos, entretanto, afirmar que $\left(\bigvee_{i \in J} f_{A_i}\right)$ pertence a β quando J é um conjunto arbitrário, pois, se J é não-enumerável, é possível que $\bigcup_{i \in J} A_i$ seja também não-enumerável e assim:

$$\left(\bigvee_{i \in J} f_{A_i}\right)(B) = \chi_{B \cup \left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)}$$

Se $\bigcup_{i \in J} A_i$ é um conjunto não-enumerável, não podemos dizer que:

$$\chi_{B \cup \left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)} = f_{\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)}(B)$$

Definição 6.1.4

Seja (X, β) um espaço de L -Alexandroff e $b \in L^X$. Chamaremos de fecho de b ao L -conjunto \bar{b} definido como:

$$\bar{b} = \bigwedge \{f \in L^X \mid f \in \gamma \text{ e } b \leq f\}$$

onde γ é a coleção dos conjuntos fechados do espaço (X, β) .

Convém observar que nem sempre, em um espaço L -Alexandroff, o fecho de um L -conjunto é fechado, uma vez que a interseção arbitrária de fechados pode não ser fechado, porém:

Teorema 6.1.5

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff e $a \in L^X$. Então $a \leq \bar{a}$.

Prova

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff, γ a coleção de todos os fechados de (X, β) , $a \in L^X$ e $A_a = \{b \in L^X | a \leq b\}$. É fácil ver que $\{f \in L^X | f \in \gamma \text{ e } a \leq f\} \subseteq A_a$. Assim, para todo $x \in A_a$, temos que $a \leq x$, i. e., a é uma cota inferior de A_a . Com isso:

$$a \leq \bigwedge A_a \leq \bigwedge \{f \in L^X | f \in \gamma \text{ e } a \leq f\} = \bar{a}$$

c.q.p.

Teorema 6.1.6

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff. Se f é fechado em (X, β) então $f = \bar{f}$.

Prova

De fato, seja (X, β) um espaço L -Alexandroff e f um fechado de (X, β) . Sabemos, pelo teorema anterior, que $f \leq \bar{f}$. Como f é um fechado onde $f \leq f$, temos que $\bar{f} = \bigwedge \{f \in L^X | f \in \gamma \text{ e } f \leq f\} \leq f$, assim, $f = \bar{f}$.

c.q.p.

Definição 6.1.7

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff e $a \in L^X$. Chamaremos de interior de a ao L -conjunto a° definido como:

$$a^\circ = \bigvee \{u \in L^X \mid u \in \beta \text{ e } u \leq a\}$$

Como no fecho, observamos que nem sempre o interior de um L -conjunto é aberto em espaços L -Alexandroff.

Observação 6.1.8

Num espaço L -Alexandroff (X, β) , seja γ a coleção dos conjuntos fechados de (X, β) e $a \in L^X$, temos então que:

$$\{f' \in L^X \mid f \in \gamma \text{ e } a \leq f\} = \{b \in L^X \mid b \in \beta \text{ e } b \leq a'\}$$

e

$$\{b' \in L^X \mid b \in \beta \text{ e } b \leq a\} = \{f \in L^X \mid f \in \gamma \text{ e } a' \leq f\}$$

Teorema 6.1.9

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff e $a \in L^X$. Assim:

$$(\bar{a})' = (a')^\circ \text{ e } (a^\circ)' = \overline{(a')}$$

Prova

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff, γ a coleção dos L -conjuntos fechados de (X, β) e $a \in L^X$. Então, pelo teorema 2.2.5 e pela observação 6.1.8:

$$\begin{aligned} (\bar{a})' &= (\bigwedge \{f \in L^X \mid f \in \gamma \text{ e } a \leq f\})' \\ &= \bigvee \{f' \in L^X \mid f \in \gamma \text{ e } a \leq f\} \\ &= \bigvee \{b \in L^X \mid b \in \beta \text{ e } b \leq a'\} = (a')^\circ \end{aligned}$$

De maneira analoga podemos provar também que $(a^\circ)' = \overline{(a')}$

c.q.p.

6.2 Conjuntos g^* -fechados em espaços L -Alexandroff

Definição 6.2.1

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff. Diremos que o L -conjunto $b \in L^X$ é g^* -fechado se e somente se existe $f \in L^X$ fechado com $b \leq f$, onde, para todo $a \in \beta$ e para todo $p \in Pr(L)$ onde:

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

temos que

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

Ou seja, existe f fechado com $b \leq f$ onde para todo $a \in \beta$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin b' \implies x_p \in a)$$

implica em

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in a)$$

Teorema 6.2.2

Todo L -conjunto fechado num espaço L -Alexandroff (X, β) é g^* -fechado.

Prova

De fato, seja (X, β) um espaço L -Alexandroff, $f \in L^X$ um fechado em (X, β) e $a \in \beta$ de forma que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

Sabendo-se que $f \leq f$ e que a afirmação acima implica em:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

Para todo $p \in Pr(L)$, concluimos que f é g^* -fechado.

c.q.p.

Nem todo conjunto g^* -fechado num espaço L -Alexandroff é fechado.

Exemplo 6.2.3

Seja $L = \{\chi_A \mid A \subseteq [0; 1]\}$; $X = \wp([0; 1])$.

Dados $A, B \subseteq [0; 1]$, definimos:

- $\chi_A \leq \chi_B \iff A \subseteq B$;
- $\chi'_A = \chi_{A^c}$.

Vamos considerar o espaço L -Alexandroff (X, β) onde $\beta = \{0_\chi; 1_\chi\} \cup F$ sendo $F = \{f_A \mid A \subseteq [0; 1] \text{ é enumerável}\}$

onde $f_A(B) = \chi_{A \cup B}$

O L -conjunto $h \in L^X$ definido para todo $B \in X$ como:

$$h(B) = \chi_{\{0,5\}^c}$$

Não é fechado em (X, β) , porém, é g^* -fechado.

De fato, sejam $p \in Pr(L)$ e $a \in \beta$ onde:

$$(\forall B \in X)(h(B) \geq p' \implies a(B) \not\leq p) \quad (1)$$

Vamos mostrar que o único L -aberto que satisfaz a condição acima é $a = 1_\chi$.

Obviamente, $a \neq 0_\chi$. Assim, digamos, por absurdo, que existe $f_A \in F$ onde, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall B \in X)(h(B) \geq p' \implies f_A(B) \not\leq p)$$

A hipótese $h(B) \geq p'$ é verdadeira para todo $p = \chi_{\{k\}^c}$, onde $k \neq 0, 5$ e para todo $B \in X$, de modo particular, temos que $h(\emptyset) \geq p'$. Com isso, conclui-se, por (1), que:

$$\chi_{A \cup \emptyset} = f_A(\emptyset) \not\leq p = \chi_{\{k\}^c}$$

ou seja

$$A \cup \emptyset = A \not\subseteq \{k\}^c$$

Para todo $k \in [0; 1]$.

Os únicos elementos que atendem as condições acima para A são $[0; 1] - \{0, 5\}$ ou $[0; 1]$, ambos não-enumeráveis. Absurdo!!! Logo, o único elemento L -aberto que satisfaz (1) é $a = 1_X$.

Além disso, o único L -conjunto fechado que contém h é 1_X .

Sabendo-se que:

$$(\forall B \in X)(1_X(B) \geq p' \implies 1_X(B) \not\leq p)$$

Temos, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall B \in X)(\bar{a}(B) \geq p' \implies a(B) \not\leq p)$$

Logo, h é um L -conjunto g^* -fechado, porém, não é fechado.

Definição 6.2.4

Seja $a \in L^X$ e $p \in Pr(L)$ no espaço L -Alexandroff (X, β) . Definimos:

$$G_{a,p} = \{u \in \beta | (\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)\}$$

e

$$G_a = \bigcap_{p \in Pr(L)} G_{a,p}$$

Teorema 6.2.5

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff, $a \in L^X$ e $h = \bigwedge_{u \in G_a} u$. Se existe f fechado em (X, β) onde para todo $p \in Pr(L)$ temos que:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in f' \implies x_p \in h)$$

então $a \in L^X$ é g^* -fechado em (X, β) .

Prova

Seja $u \in \beta$ onde,

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in f' \implies x_p \in h)$$

i. e., para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

logo $u \in G_a$. Assim, $h \leq u$, com isso:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies h(x) \not\leq p \implies u(x) \leq p)$$

Como $u \in G_a$ é qualquer, temos que para todo $u \in \beta$ e $p \in Pr(L)$ onde:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

implica em:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

ou seja, $a \in L^X$ é g^* -fechado.

c.q.p.

Teorema 6.2.6

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff. Se $a, b \in X$ são g^ -fechados em (X, β) então $a \vee b$ é também g^* -fechado.*

Prova

Seja $a, b \in L^X$ conjuntos g^* -fechados em (X, β) . Seja $u \in \beta$ e $p \in Pr(L)$ onde:

$$(\forall x \in X)((a \vee b)(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

Mostraremos que existe f fechado, com $a \vee b \leq f$ e

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

Como $a, b \in L^X$ são g^* -fechados, temos que existe $f_a, f_b \in L^X$ fechados com $a \leq f_a$ e $b \leq f_b$ onde, para todo $v \in \beta$ e $p \in Pr(L)$, temos que:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies v(x) \not\leq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f_a(x) \geq p' \implies v(x) \not\leq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \implies v(x) \not\leq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f_b(x) \geq p' \implies v(x) \not\leq p)$$

Como $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$, temos que:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies (a \vee b)(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \implies (a \vee b)(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

Assim, temos que

$$(\forall x \in X)(f_a(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(f_b(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

logo:

$$(\forall x \in X)(f_a(x) \geq p' \text{ ou } f_b(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

Por p' ser coprimo, a afirmação acima equivale a:

$$(\forall x \in X)((f_a \vee f_b)(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

Tomando $f = f_a \vee f_b$ temos que f atende a propriedade que queremos ($f \leq a \vee b$).

Como $p \in Pr(L)$ é qualquer, a afirmação acima vale para todo $p \in Pr(L)$.

c.q.p.

Teorema 6.2.7

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff e $a, b \in L^X$ onde a é g^ -fechado. Se b é tal que $a \leq b \leq \bar{a}$, então b é g^* -fechado.*

Prova

Seja (X, β) um espaço de L -Alexandroff e $a, b \in L^X$ onde a é g^* -fechado com $a \leq b \leq \bar{a}$.

Como a é g^* -fechado, existe f fechado com $a \leq f$ para todo $p \in Pr(L)$ e $u \in \beta$ temos que:

$$\left. \begin{array}{l} (\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p) \\ \text{implica em} \\ (\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p) \end{array} \right\} (1)$$

Seja $p \in Pr(L)$ e $u \in \beta$ de forma que:

$$(x \in X)(b(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

Assim, como $a \leq b$, temos que a afirmação acima implica em:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

Logo, por (1), temos que:

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

e como f é fechado em (X, β) e $a \leq f$ temos que $a \leq b \leq \bar{a} \leq f$, i. e., $b \leq f$.

Como $u \in \beta$ e $p \in Pr(L)$ são quaisquer, temos que b é g^* -fechado.

c.q.p.

6.3 Conjuntos g^* -abertos em espaços L -Alexandroff

Definição 6.3.1

Seja (X, β) um espaço de L -Alexandroff. Diremos que o L -conjunto $a \in L$ é g^* -aberto se e somente se a' é g^* -fechado.

Teorema 6.3.2

Seja (X, β) um espaço de L -Alexandroff. O L -conjunto $a \in L^X$ é g^* -aberto se e somente se existe $u \in \beta$ com $u \leq a$ onde para todo L -fechado f e $p \in Pr(L)$, temos que:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

Que pode ser reescrito como:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in a)$$

implica em

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \implies x_p \in u)$$

Prova

Seja (X, β) um espaço de L -Alexandroff.

Necessidade: Seja $a \in L^X$ um conjunto g^* -aberto em (X, β) . Assim, existe h fechado, com $a' \leq h$, onde para todo $u \in \beta$ e $p \in Pr(L)$:

$$\left. \begin{array}{l} (\forall x \in X)(a'(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p) \\ \text{implica em} \\ (\forall x \in X)(h(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p) \end{array} \right\} (1)$$

Assim, temos que:

$$(\forall x \in X)(a'(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

$$\iff$$

$$(\forall x \in X)(u(x) \leq p \implies a'(x) \not\leq p')$$

$$\iff$$

$$(\forall x \in X)(u'(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(h(x) \geq p' \implies u(x) \not\leq p)$$

$$\iff$$

$$(\forall x \in X)(u(x) \leq p \implies h(x) \not\leq p')$$

$$\iff$$

$$(\forall x \in X)(u'(x) \geq p' \implies h'(x) \not\leq p)$$

logo, a afirmação (1) equivale a

$$(\forall x \in X)(u'(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(u'(x) \geq p' \implies h'(x) \not\leq p)$$

Afirmar que existe um fechado h onde $a' \leq h$, equivale a afirmar que existe v aberto onde $v \leq a$, para isso, basta tomarmos $v = h'$. E ainda, como $\{f \in L^X | f \text{ é fechado}\} = \{c' \in L^X | c \text{ é aberto}\}$ temos que, para todo f fechado e para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies a(x) \not\leq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \implies v(x) \not\leq p)$$

Suficiência: A demonstração é de maneira analoga à suficiência, uma vez que a maior parte dos resultados na demonstração da necessidade são equivalencias. Para encontrarmos um fechado h com as características de g^* -fechado, basta tomarmos $h = u'$.

c.q.p.

Teorema 6.3.3

Seja (X, β) um espaço L -Alexandroff e $a, b \in L^X$. Se a é g^ -aberto e $a^\circ \leq b \leq a$, então b é g^* -aberto.*

Prova

Por definição, se a é g^* -aberto, então a' é g^* -fechado e ainda, $a^\circ \leq b \leq a$ equivale

a:

$$a' \leq b' \leq (a^\circ)'$$

ou seja, pelo teorema 6.1.9:

$$a' \leq b' \leq \overline{a'}$$

Assim, pelo teorema 6.2.7, temos que b' é g^* -fechado, logo, $(b')' = b$ é g^* -aberto.

c.q.p.

Capítulo 7

Considerações finais

Com a definição dada neste trabalho para L -conjuntos g -fechados em espaços L -topológicos, conseguimos um dos nossos objetivos principais: encontrar uma coleção de L -conjuntos que generaliza-se os L -conjuntos fechados em um espaço L -topológico. Porém, alguns resultados envolvendo L -conjuntos g -fechados e axiomas de separação não foram confirmados. Por exemplo, em [17], Levine mostra que "Se (X, τ) é um espaço topológico regular e se A é compacto em (X, τ) , então A é g -fechado", entretanto, não conseguimos mostrar que:

"Se (X, \mathfrak{S}) é um espaço L -topológico regular e se a é compacto em (X, \mathfrak{S}) , então a é g -fechado."

Como não encontramos um contra-exemplo, não podemos afirmar se o resultado acima é verdadeiro ou falso.

O teorema 4.1.20 é demonstrado com a hipótese de L ser um conjunto totalmente ordenado, porém, nada sabemos se esse resultado pode ser verificado quando L for um reticulado fuzzy qualquer.

Um problema em aberto no nosso trabalho é verificar o que ocorrerá em espaços L -topológicos onde os conjuntos g -fechados são fechados. Em [17], para topologia clássica, Levine verifica que espaços dessa maneira tem a característica de serem mais fracos que espaços T_1 e mais fortes que espaços T_0 .

Para espaços de Alexandroff, Das e Rashid em [8], tentaram encontrar uma versão de conjuntos g -fechados para esses, definido assim os conjuntos g^* -fechados. Na nossa versão L -fuzzy de espaços de Alexandroff, que denominamos "espaços L -Alexandroff", a definição de L -conjuntos g^* -fechados para este comportou-se de maneira razoável. Apesar de generalizar os L -conjuntos fechados, na nossa definição de L -conjuntos g^* -fechados não obtivemos alguns resultados significativamente importantes.

Como foi dito anteriormente, Levine em [17], com a ajuda dos conjuntos g -fechados, encontrou um axioma de separação que está entre T_1 e T_0 em espaços topológicos, o que não foi possível com a definição de g^* -fechado em espaços de Alexandroff. Sugerimos, como continuação deste trabalho, tentar encontrar um axioma de separação entre T_1 e T_0 em um espaço de Alexandroff que não depende da definição de conjunto g^* -fechado, e com isso, encontrar uma versão desse para espaços L -Alexandroff.

Referências Bibliográficas

- [1] A. D. Alexandroff, "Additive set functions in abstrat spaces", Mat. Sb. (N.S.) 8(50) (1940), 307-348 (English, Russian summary).
- [2] K. K. Azad, "On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity", J. Math. Anal and Appl 82 (1981) 14-32.
- [3] G. Birkhoff, "Lattice theory", Amer. Mat. Soc. Colloq. Publ., vol. 25, Providence, R.I., (1984).
- [4] T. S. Blyth e M. F. Janowitz, "Residuation Theory", Pegamon Press, Oxford, 1972.
- [5] T. K. Breuckmann "Alguns tópicos em L espaços topológicos: compacidade local, espaços de Hurewicz e propriedade ω^* ", Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, (2004).
- [6] B. Balasubramanian e P. Sundaram "On some generalizations of fuzzy continuous functions", Fuzzy Sets and Systems 86, (1997) 93-100.
- [7] C. L. Chang, "Fuzzy topological spaces", J. Math. Anal. Appl. 24, (1968) 182-190.
- [8] P. Das e M. A. Rashid, "Certain separation axioms in a space", Korean J. Math. Sciences, 7(2000), 81-93.
- [9] P. Das e M. A. Rashid, " g^* -closed sets and a new separation axiom in Alexandroff spaces", Archivum Mathematicum (BRNO). T. 39, (2003), 299-307.
- [10] J. Fang "Sums of L -fuzzy topological spaces", Fuzzy sets and systems 157, (2005) 739-754.
- [11] S. A. Gaal, "Point set topology", Academic Press New York and London (1964).
- [12] T.E. Gantner, R.C. Steinlage and R.H. Warren, "Compactness in fuzzy topological spaces", J. Math. Anal. Appl. 62, (1978) 547-562.
- [13] G. Gierz at al., "A compendium of continuous lattices", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, (1986).
- [14] J. A. Goguen, " L -fuzzy sets", J. Math. Anal. Appl. 18, (1973) 145-174.
- [15] B. Hutton "Products of fuzzy topological spaces", Topology and it's Applications 11, (1980) 59-67.
- [16] B. K. Lahiri and P. Das, "Semi open sets in a space", Sains Malaysiana, 24(4) (1995), 1-11.

- [17] N. Levine, “*Generalized closed sets in topology*”, Rend. Circ. Mat. Palermo 19(2) (1970), 89-96.
- [18] S.R.T. Kudri. “*Compactness in L-fuzzy topological spaces*”, Fuzzy sets and systems 67, (1994) 329-446.
- [19] S.R.T. Kudri, “*L- fuzzy compactness and related concepts*”, Ph.D. Thesis, City University, London, (1995)
- [20] J. Munkres, “*Topology: A First Course*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1999)
- [21] P.M. Piu, Y.M. Liu, “*Fuzzy topology I, neighbourhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence*”, J.Math.Anal.Appl. 76, (1980) 571-599.
- [22] P.M. Piu, Y.M. Liu, “*Fuzzy topology II, product and quotient spaces*”, J.Math.Anal.Appl. 77, (1980) 20-37.
- [23] A. Sostak. *On a fuzzy topological structures* Supp. Rend. Circ. Mat. Palermo (Ser. II) 11 (1985) 89-103
- [24] M. W. Warner, “*Fuzzy topology with respect to continuous lattice*”, Fuzzy Sets and Systems 35, (1990) 85-91.
- [25] M. W. Warner, “*Frame-fuzzy points and membership*”, Fuzzy Sets and Systems 42, (1991) 335-344.
- [26] M. W. Warner and R. G. McLean, “*On compact hausdorff L-fuzzy spaces*”, Fuzzy Sets and Systems 56, (1993) 103-110.
- [27] M. W. Warner and R. G. McLean, “*Locale theory and fuzzy topology*”, Fuzzy Sets and Systems 54, (1993) 91-97.
- [28] M. D. Weiss, “*Fixed points, separation and induced topologies for fuzzy sets*”, J. math. Anal. Appl. 50, (1975) 142-150.
- [29] C. K. Wong, “*Fuzzy points and local properties of fuzzy topology*”, J. Math. Anal. Appl. 46, (1974) 316-328.
- [30] L.A. Zadeh, “*Fuzzy sets*” Inform. Contr. 8 (1965) 338-353

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)