

**Feixes de luz não-paraxiais
com momento angular orbital
e aplicações às pinças ópticas**

Paula Borges Monteiro

ORIENTADOR: *Paulo Américo Maia Neto*

CO-ORIENTADOR: *Nathan Bessa Viana*

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Feixes de luz não-paraxiais com momento angular orbital e aplicações às pinças ópticas

Paula Borges Monteiro

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Física.

ORIENTADOR: *Paulo Américo Maia Neto*

CO-ORIENTADOR: *Nathan Bessa Viana*

RIO DE JANEIRO
MARÇO DE 2009

Monteiro, Paula Borges.

M775f Feixes de luz não-paraxiais com momento angular orbital e aplicações às pinças ópticas/ Paula Borges Monteiro - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2009.

xv, 88f.: il. ; 29,7cm.

Orientador: Paulo Américo Maia Neto

Co-orientador: Nathan Bessa Viana

Tese (doutorado) - UFRJ/ Instituto de Física/ Programa de pós-graduação em Física, 2009.

Referências Bibliográficas: f. 89-93.

1. Introdução. 2. Momento angular óptico e feixes laguerre-gaussianos. 3. Feixes focalizados com momento angular. 4. Pinças ópticas e momento angular. 5. Resultados Experimentais. 6. Conclusão. I. Maia Neto, Paulo Américo. II. Viana, Nathan Bessa. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de pós-graduação em Física. IV. Título.

Agradecimentos

Os mais sinceros agradecimentos ao meu orientador, professor Paulo Américo Maia Neto, pela atenção, disponibilidade, orientação e motivação. Muito obrigada!

Ao professor Nathan Bessa Viana pela paciência e orientação durante os meus primeiros passos na área experimental.

A todos os professores e alunos do grupo de pinças ópticas, em especial ao professor Moysés Nussenzveig pela disponibilidade e pelas valiosas discussões. Agradeço também ao colega Rafael pelas conversas e troca de conhecimento.

Ao Carlos Eduardo (UFF) e ao Luiz Fernando (Unicamp - Laboratório de Óptica Difrativa coordenado pela professora Lucila Cescato) que me ajudaram na confecção da placa holográfica utilizada na etapa experimental desta tese.

Aos professores da pós-graduação, em especial ao professor Carlos Farina pela atenção e pela maneira motivadora de ensinar Física.

Aos professores do grupo de Óptica Quântica: Ruynet, Luiz, Paulão, Steve, Fabrício e em especial, ao professor Nicim Zagury com quem mantive o primeiro contato. A todos os colegas que fazem ou fizeram parte do grupo durante estes quatro anos: Malena, Diney, Alexandre, Fernando, Marcelo, Leandro, Miguel, Daniel, Alejo, César, Gabriela, Bruno E., Bruno T., Rafael S., Rafael C., Osvaldo, Gabriel e Diego. Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação e para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço à Adriana, pelo carinho e companheirismo.

Aos colegas de outros grupos, Émille, Beatriz, Érica, Miguel, André e Aline, pela amizade. À professora Dora com quem dividi um agradável ambiente de trabalho.

Aos funcionários do Instituto de Física, Casé, Cristina, Curt e Cesár pelo apoio e atenção.

À minha mãe e ao meu irmão Lucas que entenderam a minha ausência e que sempre estão dispostos a me ajudar no que for necessário. A toda minha família sempre presente em qualquer etapa da minha vida, em especial à minha tia Nívea pelo apoio, carinho e encontros que ajudaram a diminuir a saudade de todos. À família do Adriano, em especial ao André pelas visitas e pelos bons momentos que passamos juntos.

Aos amigos que estão longe, mas que se fazem presentes nos mais inesperados momentos. Ao Thiago e sua prima Karla pela ajuda no período em que estive no Rio para o exame de seleção da pós-graduação. À Lucy e seu marido pela estadia em sua casa no período em que cheguei ao Rio.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Ao meu melhor amigo, companheiro de trabalho, noivo, Adriano Henrique, por tudo que passamos juntos, por todos os momentos difíceis e por todos os momentos de alegria. Sou uma pessoa sortuda por dividir minha vida com você.

A toda minha família

Lista de Figuras

2.1	<i>Densidade de energia total \mathcal{U} para um feixe: (a) LG_{01}, (b) LG_{02} e (c) LG_{03}.</i>	9
2.2	<i>Frentes de onda: (a) planas e (b) helicoidais.</i>	11
2.3	<i>Densidade de momento angular em função de $\rho/w(0)$. No quadro à direita o detalhe da região negativa para $\ell = 2$ e $\sigma = -1$.</i>	14
3.1	<i>Ação da objetiva sobre uma onda plana incidente.</i>	20
3.2	<i>Desenho para o cálculo do efeito da objetiva sobre a intensidade incidente.</i>	20
3.3	<i>Feixe incidente e um dos raios do cone de luz produzido pela passagem do feixe através da objetiva.</i>	21
3.4	<i>Orientações do campo elétrico para um feixe paraxial LG_{02} (antes da objetiva), com polarização circular (a) à esquerda ($\sigma = 1$) e (b) à direita ($\sigma = -1$), em tempos $t = 0$, $t = \pi/(2\omega)$ e $t = \pi/\omega$. Os padrões espaciais resultantes giram em sentido contrário ao sentido da polarização circular do feixe incidente.</i>	25
3.5	<i>Polarização sobre o plano focal xy para $\ell = 2$ e $\sigma = -1$. Ao longo do círculo $\rho = \rho_p$, a elipse de polarização é perpendicular ao plano focal (como ilustrado no ponto P). Dentro do círculo, $\rho < \rho_p$, a projeção do campo elétrico sobre o plano xy gira no sentido anti-horário, tal que a rotação é reversa em relação à polarização do feixe paraxial incidente. No ponto focal F, a polarização é circular.</i>	27
3.6	<i>Variação das amplitudes do campo elétrico (divididas pela amplitude máxima do feixe incidente) em função de ρ/λ sobre o plano focal, com $\ell = 2$, $\sigma = -1$, $NA = 1,25$, $n = 1,5$, $\gamma = 1,4$, $T_{obj} = 0,7$, $w_0 = 3\text{ mm}$ e $\lambda = 0,5\ \mu\text{m}$. A linha vertical pontilhada indica o círculo $\rho = \rho_p$.</i>	28

3.7	<i>Orientações do campo elétrico sobre o plano focal nos tempos (a) $t = \pi/(3\omega)$, (b) $t = 7\pi/(12\omega)$, (c) $t = 5\pi/(6\omega)$ e (d) $t = 13\pi/(12\omega)$. Nós consideramos $\ell = 2$, $\sigma = -1$. A linha vermelha indica o círculo $\rho = \rho_P$. O campo elétrico em posições fora deste círculo gira no sentido horário como o feixe incidente. Dentro do círculo a rotação é no sentido anti-horário, como ilustrado pelo vetor no ponto focal.</i>	29
3.8	<i>Razão de densidade de energia $\mathcal{U}(\rho, 0)/\mathcal{U}_{inc}^{max}$ em função de ρ/λ no plano focal (mesmos parâmetros da Figura 3.6).</i>	31
3.9	<i>Razão entre a densidade de energia $\mathcal{U}(0, 0)/\mathcal{U}_{inc}^{max}$ no ponto focal em função de NA. Mesmos parâmetros da Figura 3.6.</i>	32
3.10	<i>Raio de densidade de energia máxima (dividido pelo comprimento de onda) em função de ℓ para $\sigma = 1$. O resultado de um ajuste linear para $\ell > 20$ é também mostrado ($\rho_{max}/\lambda = 0,202\ell + 0,758$).</i>	33
3.11	<i>As setas representam a projeção do vetor de Poynting sobre o plano focal para $\ell = 2$ e (a) $\sigma = -1$, (b) $\sigma = 1$ (mesmos parâmetros da Figura 3.6). Os valores de S_z/S_{incz}^{max} são representados por um falso mapa de cores ($S_{incz}^{max} \equiv$ vetor de Poynting máximo do feixe incidente). Note que no caso (a), S_z é negativo dentro do menor círculo com raio $\rho = \rho_P$.</i>	35
3.12	<i>Densidade de momento angular \tilde{j}_z em função de ρ/λ sobre o plano focal (mesmos parâmetros da Figura 3.7).</i>	37
4.1	<i>Representação esquemática das forças que atuam sobre uma partícula devido a um feixe focalizado em uma pinça óptica.</i>	41
4.2	<i>Representação esquemática da focalização de um feixe por uma objetiva de grande abertura numérica.</i>	42
4.3	<i>Limite Rayleigh: a microesfera é considerada um dipolo elétrico.</i>	43
4.4	<i>Limite da óptica geométrica: refração dos raios de luz.</i>	43
4.5	<i>Feixe focalizado por uma objetiva de imersão em óleo.</i>	55
4.6	<i>Q_z em função de z/a para $\rho = 0$ e para $\ell = 0$ e $\ell = 1$. Consideramos $w_0 = 3,7\text{ mm}$, $f = 5,4\text{ mm}$ e $\sigma = 1$.</i>	59
4.7	<i>Q_z em função de z/a para $\rho = 0$, $\ell = 0, 1, 2, 3$ e $\sigma = 1$ com ρ_{max} fixo.</i>	60
4.8	<i>Q_ρ em função de ρ/a para $z = 0$ e $\ell = 0, 1, 2, 3$ e polarização $\sigma = 1$.</i>	62
4.9	<i>Q_ρ em função de ρ/a para $z = 0$, $\ell = 1$, polarização $\sigma = 1$ e diferentes valores do raio da esfera.</i>	63
4.10	<i>Q_ρ em função de ρ/a para $\rho = 0$ e $\ell = 1$ com $\sigma = \pm 1$.</i>	64
4.11	<i>Q_ϕ em função de ρ/a para $z = 0$ e $\ell = 0, 1, 3$ e polarização $\sigma = 1$.</i>	66

4.12	\tilde{Q} em função de ρ/a para $\ell = -1, \sigma = -1$ e $\ell = 3, \sigma = -1$	66
5.1	Esquema da montagem experimental da pinça óptica.	69
5.2	Detalhe do feixe difratado.	70
5.3	Padrão gravado para produzir em primeira ordem de difração feixes laguerre-gaussianos com (a) $\ell = \pm 1$, (b) $\ell = \pm 2$ e (c) $\ell = \pm 3$	71
5.4	Detalhe do relevo da placa holográfica para $\ell = \pm 1$	72
5.5	Potência na entrada da objetiva P em função do raio do diafragma R para $\ell = 2$	74
5.6	Potência na entrada da objetiva P em função do raio do diafragma R para $\ell = 0$	75
5.7	Montagem experimental para a medida da transmitância da objetiva. . .	76
5.8	Potência transmitida P_t em função de R quando utilizamos duas objetivas de aumento $100x$	78
5.9	Posição de equilíbrio da esfera para diferentes velocidades do estágio. .	80
5.10	Tratamento de dados.	81
5.11	Constante elástica na direção x dividida pela potência local em função do deslocamento do carrossel (lamínula). Comparação entre medidas experimentais para um feixe gaussiano e um feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$	82
5.12	Constante elástica na direção y dividida pela potência local em função do deslocamento do carrossel (lamínula). Comparação entre medidas experimentais para um feixe gaussiano e um feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$	83
5.13	Constante elástica calculada para o feixe gaussiano e o feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$	84

Lista de Tabelas

3.1	<i>Valores de ρ_{max} em μm.</i>	33
3.2	<i>Mudança relativa do fluxo de spin r para diferentes valores de ℓ. Mesmos parâmetros da Figura 3.6.</i>	40
4.1	<i>Valores de $Q_{z,max}$.</i>	59
5.1	<i>Comparação entre os valores medidos e calculados para a constante elástica da pinça óptica dividida pela potência em função da altura do foco.</i>	83

Sumário

Resumo	xiv
Resumo	xv
1 Introdução	1
2 Momento angular óptico e feixes laguerre-gaussianos	3
2.1 Aproximação paraxial	4
2.2 Modos laguerre-gaussianos	5
2.3 Densidade de energia	8
2.4 O vetor de Poynting e a densidade de momento linear	11
2.5 Densidade de momento angular	14
3 Feixes focalizados com momento angular	18
3.1 Campos Elétrico e Magnético	19
3.2 Densidade de energia	30
3.3 Fluxo de energia	34
3.4 Momento angular	37
4 Pinças ópticas e momento angular	41
4.1 Força óptica	45
4.1.1 Potenciais de Debye	45
4.1.2 Efeito do perfil laguerre-gaussiano	47
4.2 Fator Q	54
4.3 Aberração esférica	55
4.4 Eficiência axial	58
4.5 Eficiência radial	61
4.6 Eficiência azimutal	65

5	Resultados Experimentais	68
5.1	Montagem experimental	69
5.2	Geração de modos laguerre-gaussianos	71
5.3	Caracterização do feixe	73
5.4	Caracterização da transmitância da objetiva	76
5.5	Constante elástica da pinça óptica	79
5.6	Resultados qualitativos para a transferência de momento angular	85
6	Conclusão	87

Resumo

Neste trabalho, estudamos detalhadamente a focalização de um feixe laguerre-gaussiano $LG_{0\ell}$ circularmente polarizado, aplicando o modelo desenvolvido por Richards e Wolf para incluir efeitos de difração na entrada da objetiva, além de efeitos não-paraxiais. Analisamos em detalhe a variação espacial da polarização do campo, da densidade de energia e do vetor de Poynting. Em especial, nós encontramos alguns resultados inesperados quando o momento angular de spin e orbital do feixe incidente são antiparalelos.

Nós estendemos a teoria MDSA (Mie-Debye com aberração esférica) de forças aprisionadoras em pinças ópticas de micro-partículas, previamente desenvolvida para feixes Gaussianos, a feixes Laguerre-Gaussianos. Considerando a representação integral do tipo Debye para o feixe focalizado, derivamos uma representação explícita em ondas parciais para a força óptica exercida sobre uma esfera dielétrica de raio, posição e índice de refração arbitrários, levando em conta o efeito da aberração esférica produzida pela interface entre o vidro e o meio que hospeda as microesferas. Por ter intensidade nula sobre o eixo (na maioria dos casos), feixes $LG_{0\ell}$ produzem forças de gradiente reforçadas e forças de pressão de radiação reduzidas, gerando armadilhas mais eficientes. Determinamos a constante elástica da armadilha experimentalmente para confrontar com os valores obtidos para um feixe gaussiano.

Abstract

We study in detail the focusing of a circularly-polarized Laguerre-Gaussian beam $LG_{0\ell}$, by applying the non-paraxial theoretical model developed by Richards and Wolf, taking into account the diffraction effects at the objective entrance port. We analyze the spatial variation of the field polarization, the energy density and Poynting vector. In particular, we find some unexpected results when the spin and orbital angular momentum components of the incident beam are anti-parallel.

We extend the MDSA theory (Mie-Debye with spherical aberration) for the trapping forces in optical tweezers of micro-particles, previously developed for incident Gaussian beams, to the case of incident Laguerre-Gaussian beams. Taking the Debye-type integral representation for the focused beam, we derive an explicit representation (as a partial-wave series) for the optical force exerted on a dielectric sphere with arbitrary values for the sphere radius, position and refractive index. We take the spherical aberration introduced by the glass-sample plane interface into account. Since it has a zero intensity on the axis (in most cases), $LG_{0\ell}$ beams produce stronger gradient forces and reduced radiation pressure forces, leading to more efficient traps. We measure the trap stiffness to compare with the results found in the case of a Gaussian beam.

Capítulo 1

Introdução

Durante as quatro últimas décadas, forças ópticas têm sido utilizadas para aprisionar partículas [1, 2]. Algumas técnicas associam a essas forças ópticas efeitos gravitacionais ou magnéticos para obter a estabilidade no aprisionamento. Em 1986, Arthur Ashkin e colaboradores [3] demonstraram a primeira armadilha óptica utilizando um único feixe de laser focalizado por uma objetiva com grande abertura numérica, que recebeu o nome de pinça óptica. Essa importante técnica tem aplicação em diferentes áreas de pesquisa [4], variando de Biologia Celular [5, 6], com a manipulação de bactérias, macromoléculas etc, a processamento de Informação Quântica [7], manipulando átomos cujos níveis internos fazem o papel de q-bits.

Na montagem típica de uma pinça óptica, a porta de entrada da objetiva é usualmente iluminada por um feixe linearmente polarizado com perfil gaussiano de intensidade, cuja focalização permite tanto o aprisionamento de partículas quanto o seu deslocamento. Em adição à translação de objetos aprisionados, pinças ópticas também podem ser utilizadas para induzir rotação [8, 9] através da transferência de momento angular do feixe para uma partícula absorvedora [10]. Em 1992, Les Allen e colaboradores [11] mostraram que qualquer feixe com distribuição de amplitude na forma $u(\rho, \phi, z) = u(\rho, z)e^{i\ell\phi}$ transporta momento angular em relação ao eixo do feixe. A contribuição orbital é determinada pela dependência na fase azimutal e é proporcional a ℓ . O spin do fóton, que é associado com a polarização circular do feixe, pode ser empregado para somar ou subtrair o efeito do momento angular orbital [12].

Exemplos de feixe com a distribuição acima são os modos laguerre-gaussianos [13]. Estes feixes têm frentes de onda helicoidais, uma singularidade de fase ao longo do eixo (vórtice óptico) [14] e transportam momento angular orbital [15]. Seu perfil de intensidade tem a forma anelar, o que reduz os efeitos da pressão de radiação, produzindo

armadilhas mais eficientes [16]. Nesta tese, nós consideramos o modelo de um modo laguerre-gaussiano circularmente polarizado para o feixe incidente sobre a objetiva. No capítulo 2, apresentamos estes modos de propagação do laser e descrevemos os aspectos mais importantes da sua estrutura espacial.

Uma descrição apropriada da focalização de um feixe laguerre-gaussiano deve incluir efeitos de difração nas bordas da abertura da objetiva e também efeitos não-paraxiais pois as objetivas utilizadas possuem grande abertura numérica. A representação integral vetorial do tipo Debye para campos eletromagnéticos focalizados desenvolvida por Richards e Wolf [17, 18] considera ambos os efeitos citados. Este modelo é verificado indiretamente através da comparação dos resultados previstos pela teoria Mie-Debye para forças aprisionadoras em pinças ópticas, derivada do modelo de Richards e Wolf [19, 20, 21], com aqueles obtidos experimentalmente [22, 23]. Por outro lado, o modelo de Richards e Wolf é verificado diretamente pela medida da distribuição da densidade de energia elétrica na região focal [24]. No capítulo 3, consideramos o feixe com momento angular [25] propagando-se ao longo do eixo z no sentido positivo, antes da objetiva, e então aplicamos o modelo de Richards e Wolf para determinar a forma do feixe altamente focalizado resultante após a objetiva. Através de uma análise teórica detalhada do feixe focalizado, encontramos alguns resultados inesperados quando o momento angular de spin e orbital do feixe incidente são antiparalelos [26].

No capítulo 4, nós investigamos a influência do momento angular orbital do feixe incidente sobre a eficiência de aprisionamento de uma pinça óptica. Nós estendemos a teoria Mie-Debye com aberração esférica de forças aprisionadoras em pinças ópticas, previamente desenvolvida para feixes gaussianos [21, 23], para o caso de feixes com momento angular orbital. Para confrontar os dados obtidos em nossa análise numérica das expressões para a força óptica, realizamos a medida da constante elástica da pinça, utilizando um modo laguerre-gaussiano com $\ell = 2$ na entrada da objetiva. Esses resultados e os detalhes da geração do feixe com momento angular são apresentados no capítulo 5. Por fim, no capítulo 6, apresentamos as conclusões deste trabalho.

Capítulo 2

Momento angular óptico e feixes laguerre-gaussianos

É conhecido que a luz transporta energia, momento linear e momento angular. O momento angular pode ser separado em uma parte associada à polarização (momento angular de spin) [27] e uma parte associada à variação espacial da fase (momento angular orbital) [28].

A contribuição do momento angular de spin assume o valor médio $\sigma\hbar$ por fóton, sendo $-1 \leq \sigma \leq 1$, com os extremos correspondendo à polarização circular e $\sigma = 0$ à polarização linear (\hbar : constante de Planck dividida por 2π). Feixes linearmente polarizados não possuem momento angular de spin.

A componente orbital é equivalente a $\ell\hbar$ por fóton (ℓ é um número inteiro). Qualquer feixe com a distribuição de amplitude $u(\rho, \phi, z) = \tilde{u}(\rho, z)e^{i\ell\phi}$ transporta momento angular orbital. Um exemplo de feixe fisicamente realizável com esta distribuição de fase é o feixe com perfil laguerre-gaussiano, solução de ordem superior da equação de onda na aproximação paraxial, em coordenadas cilíndricas. Os feixes gaussianos, obtidos dos feixes laguerre-gaussianos fazendo $\ell = 0$, não transportam momento angular orbital.

Neste capítulo apresentamos a derivação matemática dos modos laguerre-gaussianos e definimos os parâmetros que caracterizam a sua distribuição de amplitude. Em seguida, consideramos um feixe com esse perfil transversal, polarização circular e calculamos a densidade de energia, o fluxo de energia dado pelo vetor de Poynting e a densidade de momento linear. Por fim, calculamos a densidade de momento angular e a densidade de fluxo de momento angular, definindo as contribuições spin e orbital.

2.1 Aproximação paraxial

No espaço livre, ou em meios uniformes e isotrópicos, campos eletromagnéticos são governados pela equação de onda escalar (equação de Helmholtz),

$$(\nabla^2 + k^2)u = 0, \quad (2.1)$$

com $u(x, y, z)$ sendo a amplitude complexa da onda que possui dependência temporal expressa por $e^{-i\omega t}$, $\omega = kc$ a frequência angular, k o número de onda e c a velocidade da luz no vácuo. Ondas planas e ondas esféricas são as soluções mais simples da equação de Helmholtz.

Vamos considerar um feixe propagando-se ao longo da direção z . Podemos escrever,

$$u(\rho, \phi, z) = \tilde{u}(\rho, \phi, z)e^{ikz}, \quad (2.2)$$

com $\tilde{u}(\rho, \phi, z)$ representando a variação transversal do feixe, que especifica o seu perfil, em coordenadas cilíndricas. Para um feixe bem colimado, a variação de \tilde{u} ao longo da direção z é muito lenta quando comparada à variação do fator e^{ikz} . Isso significa que ao longo de uma distância $\Delta z = \lambda$, a variação $\Delta\tilde{u}$ é muito menor que \tilde{u} . Como $\Delta\tilde{u} \ll \tilde{u}$ e

$$\Delta\tilde{u} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\Delta z = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\lambda = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\frac{2\pi}{k}, \quad (2.3)$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} &\ll k\tilde{u}, \\ \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2} &\ll k^2\tilde{u}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

As expressões matemáticas em (2.4) representam a *aproximação paraxial*.

Substituindo (2.2) em (2.1), em coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Podemos então desprezar o termo $\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2}$ em 2.5 que é muito pequeno em comparação aos outros. Assim, obtemos a equação de Helmholtz paraxial,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\phi^2} + 2ik\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

que também é escrita na forma

$$\nabla_t^2\tilde{u} + 2ik\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

com ∇_t^2 sendo o operador Laplaciano transversal. A solução \tilde{u} em (2.7) é o envelope complexo da onda paraxial.

2.2 Modos laguerre-gaussianos

Um conjunto completo de soluções da equação de Helmholtz paraxial é formado pelos feixes conhecidos como laguerre-gaussianos. Eles podem ser obtidos da resolução de (2.7) usando a técnica de separação de variáveis em ρ e ϕ . Se escrevemos (2.7) em coordenadas cartesianas e usamos a técnica de separação de variáveis em x e y no lugar de ρ e ϕ , obtemos os feixes hermite-gaussianos.

Inicialmente vamos considerar um feixe gaussiano [29], uma das soluções da equação de onda paraxial. Seu envelope complexo é dado por

$$u = \frac{u_0}{q(z)} e^{-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}}, \quad (2.8)$$

com $q(z) = z + iz_0$, chamado parâmetro q do feixe e z_0 conhecido como comprimento Rayleigh. Para separar a amplitude e a fase em (2.8), escrevemos a função

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}, \quad (2.9)$$

onde $R(z)$ é o raio de curvatura da frente de onda e $w(z)$ o raio da largura do feixe, dados por

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{z_0^2 + z^2}{z}, \\ w^2(z) &= \frac{\lambda z_0}{\pi} \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

O parâmetro w_0 é chamado cintura do feixe e corresponde ao menor valor de $w(z)$ durante sua propagação. Consideramos que w possui esse valor mínimo em $z = 0$. Substituindo (2.9) em (2.8), obtemos

$$u = \frac{u_0}{iz_0} \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{ik\rho^2}{2R(z)}} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{i\zeta(z)}, \quad (2.11)$$

com $\zeta(z) = \arctan z/z_0$. Dado o comprimento de onda λ do feixe, conhecendo sua amplitude u_0 , sua direção, a posição de w_0 e o comprimento Rayleigh z_0 (ou a própria cintura do feixe w_0), temos todos os parâmetros que caracterizam o feixe gaussiano.

Para derivar soluções de ordem mais alta para a equação de onda paraxial, vamos escrever em coordenadas cartesianas a solução \tilde{u} como um produto de soluções em x e y com a mesma forma matemática

$$\tilde{u}(x, y, z) = \tilde{u}_m(x, z) \tilde{u}_n(y, z), \quad (2.12)$$

Tanto \tilde{u}_m quanto \tilde{u}_n são soluções de (2.7). Assumimos então uma função tentativa dada por

$$\tilde{u}_m(x, z) = A[q(z)] h_m \left(\frac{x}{\tilde{q}(z)} \right) e^{-\frac{ikx^2}{2q(z)}}, \quad (2.13)$$

onde não conhecemos $h_m(v)$ ($v = x/\tilde{q}(z)$) e $\tilde{q}(z)$. Substituindo (2.13) em (2.7), transformamos a equação de onda paraxial em uma relação diferencial para a função h_m na forma

$$\frac{\partial^2 h_m}{\partial v^2} - 2ik \left(\frac{\tilde{q}}{q} - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial z} \right) x \frac{\partial h_m}{\partial v} - \frac{ik\tilde{q}^2}{q} \left(1 + \frac{2q}{A} x \frac{\partial A}{\partial q} \right) h_m = 0, \quad (2.14)$$

que podemos comparar com a equação diferencial para os polinômios de Hermite $H_m(v)$

$$\frac{\partial^2 H_m}{\partial v^2} - 2 \frac{x}{\tilde{q}} \frac{\partial H_m}{\partial v} + 2mH_m = 0, \quad (2.15)$$

de maneira que

$$\begin{aligned} ik \left(\frac{\tilde{q}}{q} - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\tilde{q}}, \\ -\frac{ik\tilde{q}^2}{q} \left(1 + \frac{2q}{A} x \frac{\partial A}{\partial q} \right) &= 2m. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para resolver as equações (2.16), tomamos $\tilde{q}(z) = \sqrt{2}/w(z)$, com $w(z)$ dado pela equação (2.10). Dessa forma, obtemos a função $A[q(z)]$ de (2.16) e podemos escrever

$$u_m(x, z) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{2^m m! w_0} \right)^{1/2} \left(\frac{q(z_0)}{q(z)} \right)^{1/2} \left(\frac{q(z_0) q(z)}{q^*(z_0) q^*(z)} \right)^{m/2} e^{-\frac{ikx^2}{2q(z)}} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right), \quad (2.17)$$

que corresponde à função de um modo hermite-gaussiano em uma dimensão. Substituindo (2.17) em (2.12), obtemos a amplitude para modos hermite-gaussianos que se propagam ao longo do eixo z .

$$\tilde{u}_{m,n}(x, y, z) = \frac{C_{m,n}^{HG}}{w(z)} e^{-i(n+m+1)\zeta(z)} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w^2(z)}} e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)}} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right), \quad (2.18)$$

com $w(z)$, $\zeta(z)$ e $R(z)$ definidos da mesma maneira que para feixes gaussianos, $w(z)$ e $R(z)$ dados pela equação (2.10) e $\zeta(z) = \arctan z/z_0$. A constante de normalização $C_{m,n}^{HG}$ pode ser determinada através da integral $\int \int dx dy |\tilde{u}_{m,n}|^2 = 1$.

Uma vez obtidos os modos hermite-gaussianos, usando relações entre polinômios de Hermite e Laguerre, obtemos os modos laguerre-gaussianos. O produto de polinômios de Hermite, que aparece na equação (2.18), pode ser escrito como uma soma de produtos de polinômios de Hermite na forma [35],

$$2^{\frac{N}{2}} H_n \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) H_m \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) = \sum_{k=0}^N (-2)^k P_k^{n-k, m-k}(0) H_{N-k}(x) H_k(y), \quad (2.19)$$

com

$$\begin{aligned} N &= n + m, \\ P_k^{n-k, m-k}(0) &= \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^n (1+t)^m] \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

O índice N representa a ordem do modo. Por sua vez, a soma de produtos de polinômios de Hermite em (2.19), exceto por um fator $(-i)^k$, pode ser escrita em termos do polinômio de Laguerre generalizado $\mathcal{L}_p^{|\ell|}$ [35],

$$\sum_{k=0}^N (2i)^k P_k^{n-k, m-k}(0) H_{N-k}(x) H_k(y) = 2^N \times \begin{cases} (-1)^p p! (x + iy)^{|\ell|} \mathcal{L}_p^{|\ell|}(\rho^2), & n \geq m \\ (-1)^p p! (x - iy)^{|\ell|} \mathcal{L}_p^{|\ell|}(\rho^2), & m > n, \end{cases} \quad (2.21)$$

com

$$\begin{aligned} p &= \min(n, m), \\ \ell &= n - m, \\ \rho^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Assim, usando (2.21) e (2.19), podemos escrever a amplitude complexa dos modos laguerre-gaussianos a partir de (2.18), que em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\tilde{u}_{p,\ell}^{LG}(\rho, \phi, z) = \frac{C_{p\ell}^{LG}}{w(z)} e^{-i(2p+\ell+1)\zeta(z)} e^{i\ell\phi} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{-\frac{ik\rho^2}{2R(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|\ell|} \mathcal{L}_p^{|\ell|} \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right), \quad (2.23)$$

com

$$C_{p\ell}^{LG} = \sqrt{\frac{2p!}{(1 + \delta_{0\ell})\pi(p + \ell)!}}. \quad (2.24)$$

onde $\delta_{0\ell}$ é a delta de Kronecker e $\mathcal{L}_p^{|\ell|}$ é o polinômio de Laguerre generalizado. O índice ℓ indica o número de ciclos de fase 2π na direção azimutal ao redor da circunferência do modo e está relacionado à quantidade de momento angular do feixe, enquanto o índice p indica o número de nodos radiais.

Consideramos a família de feixes laguerre-gaussianos com índice radial nulo, $p = 0$, para a qual $\mathcal{L}_0^{|\ell|}(x) = 1$, independente do valor de x . De (2.23)

$$\tilde{u}_{0,\ell}^{LG}(\rho, \phi, z) = \frac{C_{0\ell}^{LG}}{w(z)} e^{-i(\ell+1)\zeta(z)} e^{i\ell\phi} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{-\frac{ik\rho^2}{2R(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|\ell|}. \quad (2.25)$$

Além disso consideraremos uma região onde $z \ll z_R$ de modo que $R \rightarrow \infty$ (o motivo será entendido no capítulo 4). Nossa expressão final para a amplitude é então

$$u(\rho, \phi, z) = u_0 e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|\ell|} e^{i\ell\phi} e^{ikz}. \quad (2.26)$$

2.3 Densidade de energia

Consideramos um feixe com amplitude dada por $u(\rho, \phi, z) = \tilde{u}(\rho, z)e^{i\ell\phi}$, agora sem especificar $\tilde{u}(\rho, z)$, circularmente polarizado e propagando-se ao longo do eixo z em um meio não magnético ($\mu = \mu_0$) e com permissividade elétrica ϵ . O potencial vetor é dado por

$$\mathbf{A}(\rho, \phi, z) = \tilde{u}(\rho, z)e^{i\ell\phi}e^{i(kz-\omega t)}(\hat{x} + i\sigma\hat{y}), \quad (2.27)$$

com $\sigma = 1$ e $\sigma = -1$ correspondendo à polarização circular à esquerda e à direita, respectivamente. O campo magnético obtido de (2.27) é

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[\left(k\sigma u - i\sigma \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(iku + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(i\sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{z} \right] e^{i(kz-\omega t)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

enquanto o campo elétrico obtido de (2.28) é

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{ic}{n_1\omega} \nabla \times \mathbf{H} \\ &= \frac{c}{n_1} \left[\left(iku + 2\frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{x} + \sigma \left(2i\frac{\partial u}{\partial z} - ku \right) \hat{y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{z} \right] e^{i(kz-\omega t)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde desprezamos as derivadas segundas de u de acordo com a equação (2.4). Ainda de acordo com a aproximação paraxial podemos desprezar as derivadas primeiras de u em comparação a u e assim obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{ck}{n_1} u e^{i(kz-\omega t)} (i\hat{x} - \sigma\hat{y}), \\ \mathbf{H} &= \frac{k}{\mu_0} u e^{i(kz-\omega t)} (\sigma\hat{x} + i\hat{y}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo (2.26) em (2.30), obtemos os campos elétrico e magnético com perfil de intensidade laguerre-gaussiano circularmente polarizados propagando-se ao longo do eixo \hat{z} que possuem a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|\ell|} e^{i\ell\phi} e^{i(kz-\omega t)} (\hat{x} + i\sigma\hat{y}), \\ \mathbf{H} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0 e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|\ell|} e^{i\ell\phi} e^{i(kz-\omega t)} (\hat{y} - i\sigma\hat{x}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

com $E_0 = icku_0$. Estes campos possuem momento angular orbital dado por $\ell\hbar$ por fóton e momento angular de spin dado por $\sigma\hbar$ por fóton, conforme mostraremos mais adiante.

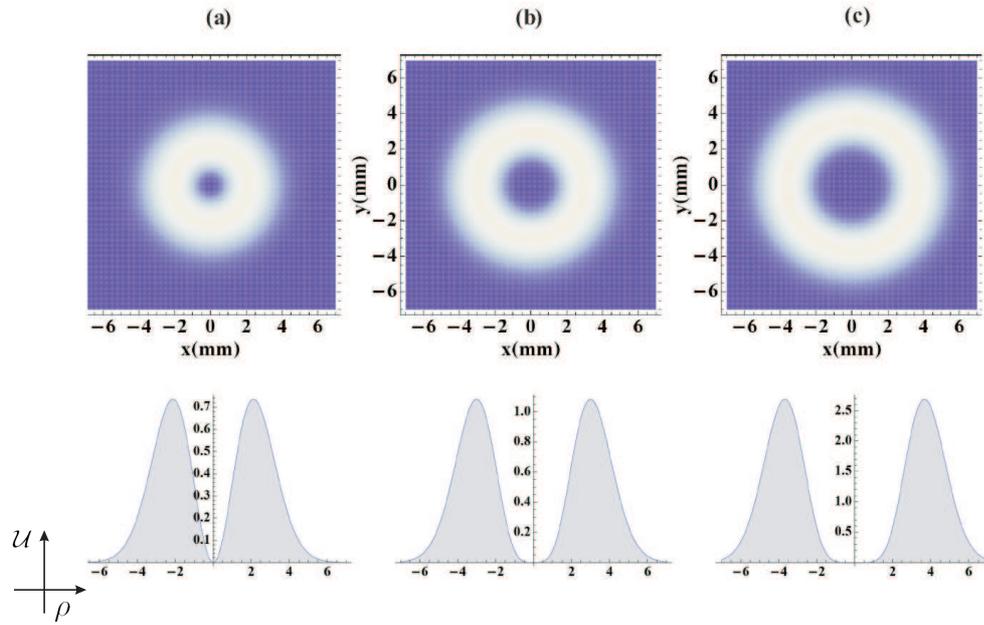


Figura 2.1: *Densidade de energia total \mathcal{U} para um feixe: (a) LG_{01} , (b) LG_{02} e (c) LG_{03} .*

Para campos com a dependência temporal especificada em (2.31), as densidades de energia elétrica e magnética (média temporal) são dadas por [28]

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_E &= \frac{\epsilon}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*, \\ \mathcal{U}_M &= \frac{\mu_0}{4} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Substituindo (2.31) em (2.32), obtemos,

$$\mathcal{U}_E = \mathcal{U}_M = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{2|\ell|}, \quad (2.33)$$

a densidade de energia elétrica e a densidade de energia magnética têm o mesmo valor. A densidade de energia total $\mathcal{U} = \mathcal{U}_E + \mathcal{U}_M$ é dada por

$$\mathcal{U} = \epsilon E_0^2 e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{2|\ell|}. \quad (2.34)$$

Podemos notar que $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho, z)$, ou seja, a densidade de energia é independente de ϕ . Além disso, $\mathcal{U}(\rho, z)$ é invariante sob mudanças no sinal de ℓ e independente da polarização. Na Figura 2.1, nós representamos a quantidade adimensional $\mathcal{U}/(\epsilon E_0^2)$ em função de ρ no plano $z = 0$, para $w(0) = 3 \text{ mm}$ e $\ell = 1, 2, 3$. Nas três situações, vemos que a densidade é nula sobre o eixo. Na verdade, para qualquer valor de $\ell \neq 0$, o feixe laguerre-gaussiano possui o perfil espacial com a forma de um anel luminoso

que aumenta e diminui de tamanho à medida que se propaga ao longo do eixo que determina o seu centro.

O valor de ρ para o qual a intensidade do feixe é máxima é obtido da derivada de (2.34) em relação a ρ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho} &= -\frac{2\rho}{w^2(z)} + |\ell| \left(\frac{1}{\rho}\right) = 0, \\ \rho_{max} &= w(z) \sqrt{\frac{|\ell|}{2}}.\end{aligned}\tag{2.35}$$

O valor máximo de \mathcal{U} é obtido substituindo (2.35) em (2.34),

$$\mathcal{U}(\rho_{max}) = \epsilon E_0^2 e^{-|\ell|} |\ell|^{|\ell|},\tag{2.36}$$

Para um dado valor de z , como ρ_{max} aumenta com $\sqrt{|\ell|}$, vemos na Figura 2.1 que o anel é maior conforme cresce o valor de ℓ .

2.4 O vetor de Poynting e a densidade de momento linear

Para um feixe com frente de ondas planas, o vetor de onda e o momento linear são direcionados ao longo da direção de propagação. Feixes laguerre-gaussianos possuem frentes de onda helicoidais (ver Figura 2.2). Neste caso, o vetor de onda e o vetor de Poynting possuem uma componente azimutal.

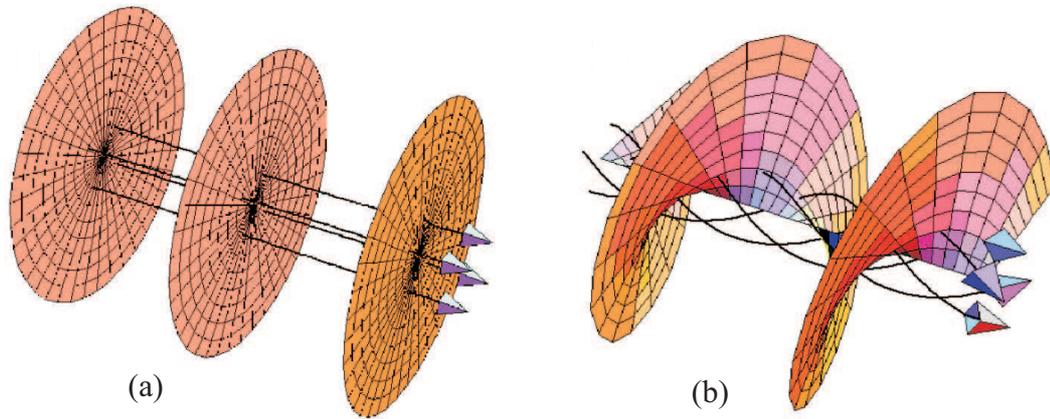


Figura 2.2: Frentes de onda: (a) planas e (b) helicoidais.

O vetor de Poynting \mathbf{S} , que representa o fluxo de energia é dado por [28]

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \}, \quad (2.37)$$

e tem dimensão de energia/(área x tempo). Substituindo as equações (2.28) e (2.29) em (2.37), obtemos

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{\omega}{\mu_0} \left[\frac{i}{2} (u \nabla_t u^* - u^* \nabla_t u) + \sigma \Re \left(u \frac{\partial u^*}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial u^*}{\partial x} \hat{y} \right) \right], \\ S_z &= \frac{c}{n_1 \mu_0} \left[k^2 |u|^2 + \frac{3}{2} i k \left(u \frac{\partial u^*}{\partial z} - u^* \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

com $\nabla_t = (\partial/\partial x)\hat{x} + (\partial/\partial y)\hat{y}$, em coordenadas cartesianas. Desprezando o segundo termo entre colchetes da componente S_z e reescrevendo as duas componentes em coordenadas cilíndricas lembrando que $u(\rho, \phi, z) = u(\rho, z)e^{i\ell\phi}$, obtemos

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{\omega}{\mu_0} \Im \left(u^* \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ S_\phi &= \frac{\omega}{\mu_0} \left(\frac{\ell}{r} |u|^2 - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \right), \\ S_z &= \frac{\omega}{\mu_0} k |u|^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Substituindo $u(\rho, \phi, z)$ dado pela equação (2.26) na expressão para S_z em (2.39), encontramos

$$S_z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{2|\ell|}, \quad (2.40)$$

que corresponde ao fluxo de energia ao longo do eixo z . O fluxo de densidade de energia é a taxa na qual a densidade de energia \mathcal{U} atravessa uma superfície. Se consideramos uma superfície de área transversal A e espessura $(c/n_1)\Delta t$, o fluxo de densidade de energia é dado por

$$S_z = \frac{c}{n_1} \mathcal{U}. \quad (2.41)$$

Substituindo (2.34) em (2.41) obtemos (2.40), como esperado.

A potência óptica é calculada através da integral do produto escalar $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ sobre um plano perpendicular ao eixo z . Usando (2.40) temos que

$$\begin{aligned} P_\ell &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho d\rho e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{2|\ell|} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 \left(\frac{2}{w^2(z)} \right)^{|\ell|} \int_0^\infty d\rho e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \rho^{2|\ell|+1}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Por exemplo, para $\ell = 1$ e $\ell = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{4\pi}{w^2(z)} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 \int_0^\infty d\rho e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \rho^3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 \pi w^2(z), \\ P_2 &= \frac{8\pi}{w^4(z)} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 \int_0^\infty d\rho e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \rho^5 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 \pi w^2(z). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para uma dada amplitude E_0 , a potência do feixe para $\ell = 2$ é o dobro da potência para um feixe com $\ell = 1$, que por sua vez é o dobro da potência para um feixe gaussiano ($\ell = 0$). Como a potência é diretamente proporcional à área, a potência cresce com ℓ porque a área do feixe cresce com ℓ , como mostra a equação (2.35).

A densidade de momento linear (Minkowsky) [28] pode ser obtida através do vetor de Poynting,

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (2.44)$$

De acordo com (2.39), suas componentes em coordenadas cilíndricas são

$$\begin{aligned}
 g_\rho &= \epsilon\omega\mathfrak{S}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial\rho}\right), \\
 g_\phi &= \epsilon\omega\left(\frac{\ell}{\rho}|u|^2 - \frac{\sigma}{2}\frac{\partial|u|^2}{\partial\rho}\right), \\
 g_z &= \epsilon\omega k|u|^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

As componentes g_r e g_z não dependem de ℓ ou σ . A componente azimutal dependente destes dois parâmetros está relacionada ao momento angular óptico. O primeiro termo da componente g_ϕ é relacionada ao momento angular orbital do feixe (dependência em ℓ), enquanto seu segundo termo é relacionado ao momento angular de spin (dependência em σ).

2.5 Densidade de momento angular

A densidade de momento angular é dada pelo produto vetorial entre o vetor posição e a densidade de momento linear [28],

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}. \quad (2.46)$$

A densidade de momento angular na direção de propagação z , relacionada à compo-

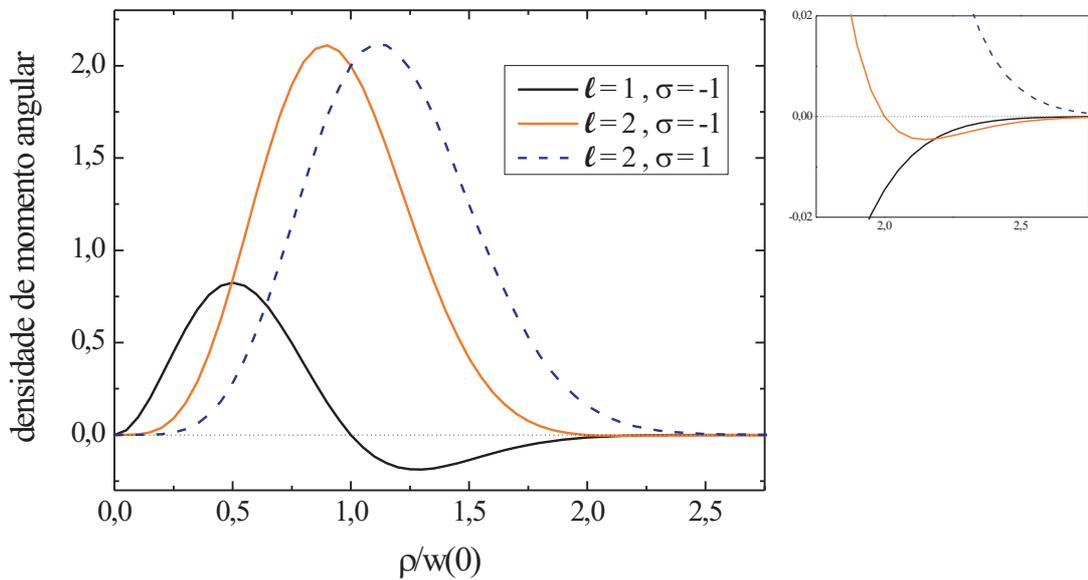


Figura 2.3: Densidade de momento angular em função de $\rho/w(0)$. No quadro à direita o detalhe da região negativa para $\ell = 2$ e $\sigma = -1$.

nente g_ϕ da densidade de momento linear expressa em (2.45) é dada por

$$j_z = \rho g_\phi = \epsilon\omega \left(\ell |u|^2 - \frac{\sigma\rho}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \right), \quad (2.47)$$

que é composta de uma contribuição proporcional a ℓ e outra proporcional a σ . Para ilustrar o comportamento de j_z para nosso feixe paraxial, plotamos $\omega j_z / \mathcal{U}_{max}$ em função de $\rho/w(z)$ em $z = 0$, para diferentes valores de ℓ e σ (\mathcal{U}_{max} é dada pela equação (2.36)). A Figura 2.3 mostra que a densidade de momento angular na região próxima ao eixo do feixe ($\rho = 0$) é positiva para $\ell > 0$. A densidade é negativa após o anel de intensidade máxima ($\rho_{max} = 0.707 w(0)$ para $\ell = 1$ e $\rho_{max} = w(0)$ para $\ell = 2$) quando $\sigma = -1$.

Este comportamento pode ser entendido a partir da equação (2.47). A contribuição relacionada a ℓ é proporcional à intensidade do campo, ou seja, é positiva sempre que

$\ell > 0$. Já a contribuição relacionada a σ é proporcional à derivada radial da intensidade do campo, que é positiva na região interna ao círculo de raio ρ_{max} e negativa, na região externa a ele. Assim, quando $\sigma = -1$, há uma contribuição negativa do segundo termo em (2.47) para a densidade de momento angular próxima à borda exterior do anel de intensidade máxima, enquanto para $\sigma = 1$, essa contribuição é positiva.

O fluxo de densidade de momento angular [30] corresponde à taxa média na qual o momento angular do campo luminoso atravessa uma superfície. Para determinar seu valor devemos calcular $\mathcal{M} = \mathcal{T} \times \mathbf{r}$, com \mathcal{T} sendo o tensor das tensões de Maxwell dado por [28]

$$\mathcal{T} = \mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{1}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.48)$$

com $\mathbf{1}$ sendo o tensor identidade. Com $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, obtemos

$$\mathcal{T} = \varepsilon\mathbf{E}\mathbf{E} + \mu\mathbf{H}\mathbf{H} - \frac{1}{2}\mathbf{1}(\varepsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}). \quad (2.49)$$

A densidade de fluxo do momento angular é

$$\mathcal{M} = \varepsilon\mathbf{E}\mathbf{E} \times \mathbf{r} + \mu\mathbf{H}\mathbf{H} \times \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{1}(\varepsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{r} + \mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{r}). \quad (2.50)$$

A densidade de fluxo da componente do momento angular axial ao longo da direção z , representada pelo tensor de segunda ordem M_{zz} , é obtida de (2.50), e em coordenadas cartesianas é dada por

$$\mathcal{M}_{zz} = y(\varepsilon E_z E_x + \mu_0 H_z H_x) - x(\varepsilon E_z E_y + \mu_0 H_z H_y). \quad (2.51)$$

Podemos escrever o conjunto de equações em (2.31) na forma

$$\begin{aligned} E_i &= E_0 \Re(\mathcal{E}_i e^{-i\omega t}), \\ H_i &= E_0 \Re(\mathcal{H}_i e^{-i\omega t}), \end{aligned} \quad (2.52)$$

com $i = x, y$, de modo que as componentes do campo elétrico por exemplo são determinadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|\ell|} e^{i\ell\phi} e^{ikz}, \\ \mathcal{E}_y &= i\sigma e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|\ell|} e^{i\ell\phi} e^{ikz}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituindo (2.52) em (2.51),

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{zz} &= E_0^2 \left\{ y \left[\varepsilon \Re(\mathcal{E}_z e^{-i\omega t}) \Re(\mathcal{E}_x e^{-i\omega t}) + \mu \Re(\mathcal{H}_z e^{-i\omega t}) \Re(\mathcal{H}_x e^{-i\omega t}) \right] \right. \\ &\quad \left. - x \left[\varepsilon \Re(\mathcal{E}_z e^{-i\omega t}) \Re(\mathcal{E}_y e^{-i\omega t}) + \mu \Re(\mathcal{H}_z e^{-i\omega t}) \Re(\mathcal{H}_y e^{-i\omega t}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Usando que

$$\begin{aligned} \Re(\mathcal{E}_i e^{-i\omega t}) \Re(\mathcal{E}_i e^{-i\omega t}) &= \frac{1}{2} [\Re(\mathcal{E}_i \mathcal{E}_i e^{-2i\omega t}) + \Re(\mathcal{E}_i \mathcal{E}_i^*)], \\ \mathcal{M}_{zz} &= E_0^2 \left\{ y \left[\frac{\epsilon}{2} [\Re(\mathcal{E}_z \mathcal{E}_x e^{-2i\omega t}) + \Re(\mathcal{E}_z \mathcal{E}_x^*)] + \mu \frac{1}{2} [\Re(\mathcal{H}_z \mathcal{H}_x e^{-2i\omega t}) + \Re(\mathcal{H}_z \mathcal{H}_x^*)] \right] \right. \\ &\quad \left. - x \left[\frac{\epsilon}{2} [\Re(\mathcal{E}_z \mathcal{E}_y e^{-2i\omega t}) + \Re(\mathcal{E}_z \mathcal{E}_y^*)] + \mu \frac{1}{2} [\Re(\mathcal{H}_z \mathcal{H}_y e^{-2i\omega t}) + \Re(\mathcal{H}_z \mathcal{H}_y^*)] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

A média durante um ciclo será dada por

$$\langle \mathcal{M}_{zz} \rangle = \frac{E_0^2}{2} \Re \left\{ y [\epsilon \mathcal{E}_z^* \mathcal{E}_x + \mu \mathcal{H}_z \mathcal{H}_x^*] - x [\epsilon \mathcal{E}_z^* \mathcal{E}_y + \mu \mathcal{H}_z \mathcal{H}_y^*] \right\}, \quad (2.56)$$

onde usamos que $\langle e^{-2i\omega t} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-2i\omega t} dt = 0$.

É útil escrever \mathcal{E}_z e \mathcal{H}_z em 2.56 em termos do rotacional de \mathbf{H} e \mathbf{E} usando as equações de Maxwell,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z^* &= \frac{1}{i\omega\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_y^* - \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_x^* \right), \\ \mathcal{H}_z &= \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{E}_y - \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{E}_x \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

O fator ϵ que aparece em 2.56 é cancelado e a expressão resultante é

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_{zz} \rangle &= \frac{E_0^2}{2\omega} \Re \left\{ -i \left[-x \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{E}_y \mathcal{H}_y^*) - y \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{H}_x^* \mathcal{E}_x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y \mathcal{E}_x \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_y^* + y \mathcal{H}_x^* \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{E}_y + x \mathcal{E}_y \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_x^* + x \mathcal{H}_y^* \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{E}_x \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

O fluxo de momento angular através de um plano paralelo ao plano xy é dado por

$$M = \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \langle \mathcal{M}_{zz} \rangle. \quad (2.59)$$

Após substituir (2.58) em (2.59) e realizar uma integração por partes encontramos,

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sigma}{2\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi (|\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2) \\ &\quad + \frac{\sigma}{2\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \Re(\mathcal{E}_y \partial_\phi \mathcal{E}_x^* - \mathcal{E}_x \partial_\phi \mathcal{E}_y^*). \end{aligned} \quad (2.60)$$

A equação (2.60) pode ser separada em duas contribuições, uma delas associada à polarização (M^{spin}) que corresponde à primeira parcela em (2.60) e a outra à estrutura espacial do campo (M^{orb}) que corresponde à segunda parcela em (2.60). Essa separação pode ser justificada considerando tanto os efeitos de um elemento óptico birrefringente sobre o feixe como os efeitos de um elemento óptico que transmite uma dependência

na fase azimutal para o feixe. Um elemento birrefringente introduz um deslocamento na fase de forma que a parte do fluxo de momento angular total associada ao fluxo de momento angular de spin é modificada, enquanto a parte associada ao fluxo de momento angular orbital não sofre alteração. Por sua vez, o elemento óptico que transmite um deslocamento de fase azimutal modifica apenas a parte associada ao fluxo de momento angular orbital [30].

De acordo com (2.53), para um feixe laguerre-gaussiano, nós encontramos

$$\begin{aligned} M^{spin} &= \frac{2\pi\sigma}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0 \int_0^\infty d\rho \rho e^{-2\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{2|\ell|}, \\ M^{orb} &= \frac{2\pi\ell}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0 \int_0^\infty d\rho \rho e^{-2\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{2|\ell|}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por sua vez, o fluxo de energia é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty d\rho \rho S_z \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0 \int_0^\infty d\rho \rho e^{-2\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{2|\ell|}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dividindo M^{spin} e M^{orb} por \mathcal{F} obtemos

$$\begin{aligned} M^{orb} &= \frac{\ell}{\omega} \mathcal{F}, \\ M^{spin} &= \frac{\sigma}{\omega} \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Se consideramos um feixe com N fótons, seu momento angular é dado por $N(\ell + \sigma)\hbar$, enquanto sua energia é $N\hbar\omega$. É esperado então que a razão entre o momento angular e a energia do feixe, ou mesmo entre o fluxo de momento angular e o fluxo de energia, seja dada por $(\ell + \sigma)/\omega$. A equação (2.63) está de acordo com este fato. Como veremos no próximo capítulo, para feixes não-paraxiais, o fluxo de densidade de momento angular total por energia é conservado, o que não acontece com as contribuições M^{spin} e M^{orb} separadamente, como no caso paraxial.

Capítulo 3

Feixes focalizados com momento angular

Neste capítulo, nós consideramos o modelo de um modo laguerre-gaussiano $LG_{0\ell}$ (índice radial $p = 0$) circularmente polarizado para o feixe incidente sobre a objetiva, e então aplicamos o formalismo desenvolvido por Richards e Wolf [17, 18] para calcular o feixe altamente focalizado resultante após sua passagem pela objetiva. No modelo de Richards e Wolf os campos são escritos como uma superposição de ondas planas, com vetores de ondas \mathbf{k} varrendo um cone de abertura angular θ_0 . Além de ser válido para valores arbitrários da abertura da objetiva, esse modelo também considera os efeitos de difração na abertura de entrada da objetiva.

Apresentamos a análise teórica do feixe focalizado [26], investigando as variações espaciais da polarização do campo sobre o plano focal, discutimos a densidade de fluxo de energia e o vetor de Poynting. Nós calculamos o fluxo de momento angular para o feixe não paraxial e comparamos as contribuições separadas, spin e orbital, com os valores correspondentes para o feixe paraxial antes da objetiva.

3.1 Campos Elétrico e Magnético

O campo elétrico de um feixe com perfil laguerre-gaussiano $LG_{0\ell}$, circularmente polarizado e propagando-se no espaço livre ao longo do eixo z , em coordenadas cilíndricas, é dado pela equação (2.31)

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = E_0 e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|\ell|} e^{i\ell\phi} e^{i(k_0 z - \omega t)} (\hat{x} + i\sigma\hat{y}), \quad (3.1)$$

com E_0 sendo a amplitude do modo, $w(z)$ o raio da cintura do feixe, k_0 o número de onda no vácuo e $\sigma = \pm 1$. Para escrever a equação (3.1), desprezamos a divergência do feixe na região que compreende a objetiva, supondo que a dimensão longitudinal da objetiva é muito menor que o comprimento Rayleigh z_R . Além disso, supomos $z \ll z_R$ de modo que podemos considerar que o feixe tem aproximadamente forma cilíndrica com cintura constante e frentes de onda planas nessa região.

Nós consideramos que a cintura mínima do feixe (raio= w_0) está precisamente na posição da porta de entrada da objetiva. O campo elétrico incidente na objetiva é então dado por (omitindo o fator $e^{-i\omega t}$)

$$\mathbf{E}_{inc}(\rho, \phi, z) = E_{inc} e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_0} \right)^{|\ell|} e^{i(\ell\phi + k_0 z)} (\hat{x} + i\sigma\hat{y}). \quad (3.2)$$

Uma objetiva é formada por um conjunto de lentes convergentes e é fabricada de maneira a corrigir certas aberrações, impedindo a formação de uma imagem nítida de um ponto objeto genérico. Podemos supor que algumas condições são obedecidas pelo feixe durante a propagação pela objetiva e uma delas é conhecida como *condição seno de Abbe* [31], que fornece uma relação entre a posição ρ em que o feixe atinge a objetiva, a distância focal f do sistema óptico e o ângulo θ_k que o raio emergente da objetiva faz com o eixo óptico:

$$\rho = f \sin \theta. \quad (3.3)$$

A Figura 3.1 representa a conexão entre o espaço real e os vetores de onda no espaço recíproco. Outra condição é que após a objetiva a nova coordenada azimutal φ seja igual a $\phi + \pi$.

Utilizando a expressão (3.3), podemos determinar a redução na amplitude do feixe focalizado provocada pela passagem através da objetiva. A intensidade do feixe de luz é definida como o fluxo de energia por unidade de área por unidade de tempo. A energia $\delta\mathcal{E}_{inc}$ contida em uma casca cilíndrica de raio h que atinge a objetiva é dada por

$$\delta\mathcal{E}_{inc} = I_{inc} 2\pi h \delta h t, \quad (3.4)$$

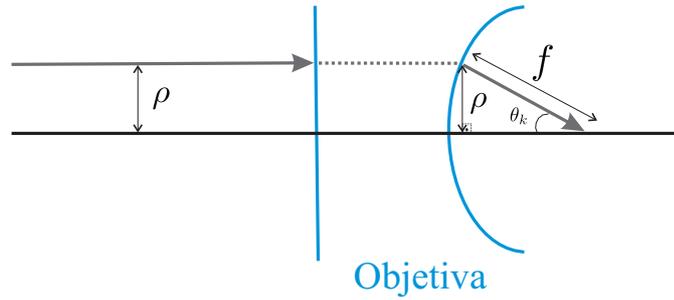


Figura 3.1: Ação da objetiva sobre uma onda plana incidente.

com I_{inc} sendo a intensidade do feixe antes da objetiva. De acordo com a Figura 3.2, a energia $\delta\mathcal{E}_{out}$ contida na casca cônica que emerge da objetiva é dada por

$$\delta\mathcal{E}_{out} = I_{out} 2\pi h f \delta\theta t, \quad (3.5)$$

com I_{out} sendo a intensidade do feixe após a objetiva. Por conservação de energia, $\delta\mathcal{E}_{inc} = \delta\mathcal{E}_{out}$, de forma que podemos escrever

$$I_{inc} \delta h = I_{out} f \delta\theta. \quad (3.6)$$

Mas de acordo com (3.3),

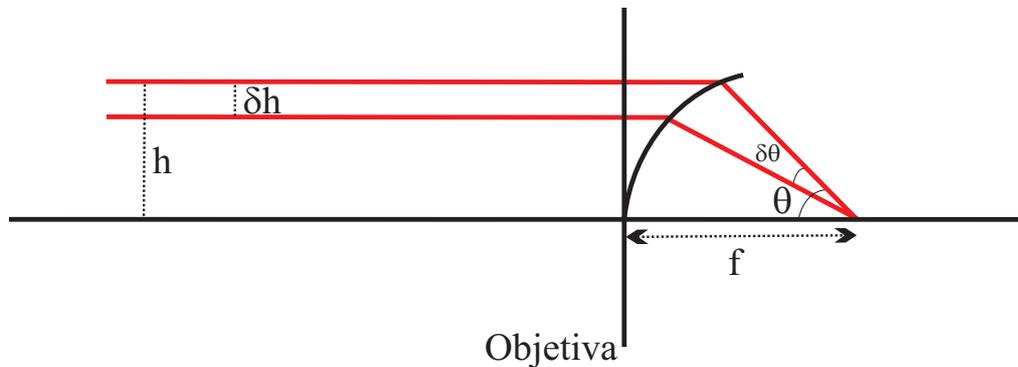


Figura 3.2: Desenho para o cálculo do efeito da objetiva sobre a intensidade incidente.

$$\delta h = f \cos \theta \delta\theta, \quad (3.7)$$

e, substituindo (3.7) em (3.6), obtemos

$$I_{out} = I_{inc} \cos \theta, \quad (3.8)$$

mostrando que a intensidade de saída é reduzida por um fator $\cos \theta$. Como a intensidade é o quadrado da amplitude, a objetiva provoca uma redução de $\sqrt{\cos \theta}$ na amplitude do feixe incidente. Além da correção $\sqrt{\cos \theta}$, devemos multiplicar a amplitude inicial por

um fator $-if/\lambda$ (associado a efeitos de difração na abertura circular da objetiva) e por T_{obj} , a amplitude de transmissão da objetiva¹. De acordo com essas modificações na amplitude e a condição seno podemos escrever o campo após a passagem pela objetiva na forma:

$$\mathbf{E}(\theta, \varphi, z) = (-1)^{\ell+1} \frac{if}{\lambda} T_{obj} E_{inc} e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta}{w_0^2}} \sqrt{\cos \theta} \left(\frac{\sqrt{2} f \sin \theta}{w_0} \right)^{|\ell|} e^{i(\ell\varphi + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \hat{\varepsilon}', \quad (3.9)$$

sendo $\hat{\varepsilon}' = \hat{x}' + i\sigma\hat{y}'$ a sua nova polarização.

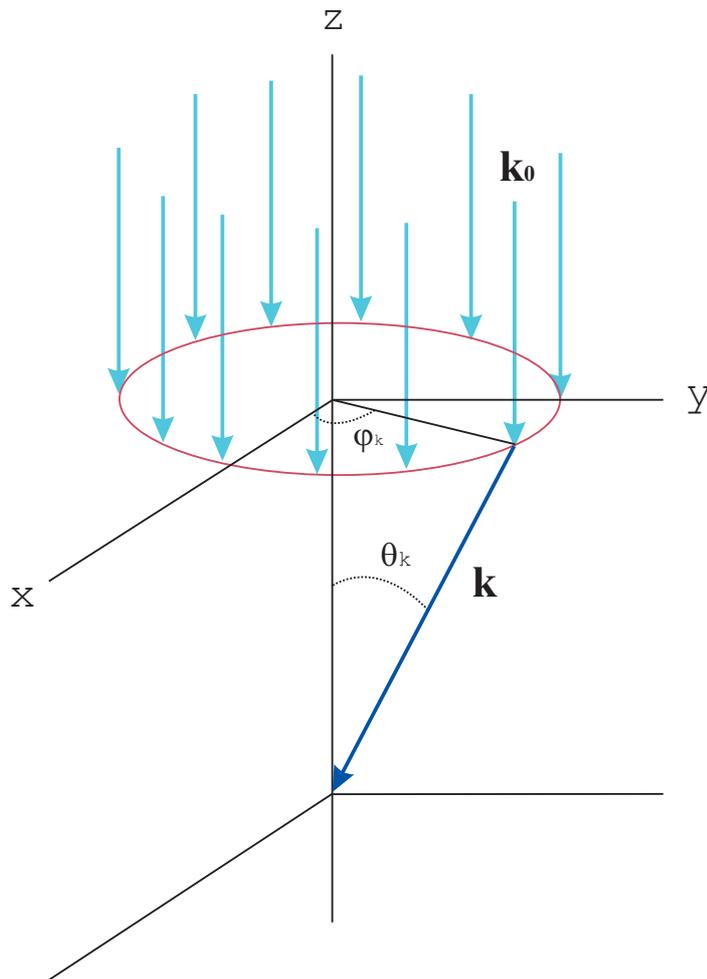


Figura 3.3: *Feixe incidente e um dos raios do cone de luz produzido pela passagem do feixe através da objetiva.*

Contudo, o feixe focalizado não é uma onda plana mas um feixe cônico formado pela superposição de ondas planas, conforme representado na Figura 3.3. O campo após a objetiva é dado pela soma das componentes de onda plana $\mathbf{k}(\theta_k, \varphi_k)$ ($|\mathbf{k}| = k = nk_0 \equiv$

¹A dependência radial da transmitância da objetiva será considerada uniforme, mas pode ser levada em conta pela introdução de uma cintura do feixe efetiva a ser introduzida no capítulo 5.

número de onda em um meio isotrópico de índice de refração n , meio após a objetiva) dentro do cone de convergência do feixe focalizado distribuídas em um ângulo sólido $d\Omega_k = \sin \theta_k d\theta_k d\varphi_k$, com θ_k variando de 0 a θ_0 (θ_0 é o ângulo correspondente à abertura numérica da objetiva) e φ variando de 0 a 2π . De (3.9),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (-1)^{\ell+1} \frac{iE_t}{\pi} \int d\Omega_k e^{-\gamma^2 \sin \theta_k} \sqrt{\cos \theta_k} \left(\sqrt{2}\gamma \sin \theta_k \right)^{|\ell|} e^{i\ell\varphi_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}', \quad (3.10)$$

com $E_t = (\pi f/\lambda) T_{obj} E_{inc}$ e $\gamma = f/w_0$. A origem do sistema de coordenadas que determina o vetor posição \mathbf{r} está posicionada no foco do cone de luz.

Para calcular o campo em 3.10, nós devemos determinar o vetor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'$. Os vetores unitários \hat{x}' e \hat{y}' , definidos no plano perpendicular a \mathbf{k} são dados por

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= -\sin \varphi_k \hat{\varphi}_k + \cos \varphi_k \hat{\theta}_k, \\ \hat{y}' &= \cos \varphi_k \hat{\varphi}_k + \sin \varphi_k \hat{\theta}_k. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Os vetores \hat{x}' e \hat{y}' são assim definidos respeitando a condição de que o ângulo entre o campo elétrico e o plano que contém os vetores \mathbf{k}_0 e \mathbf{k} seja conservado [32]. Em coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'(\theta_k, \varphi_k) &= [\sin^2 \varphi_k (1 - \cos \theta_k) + \cos \theta_k - i\sigma (\sin \varphi_k \cos \varphi_k (1 - \cos \theta_k))] \hat{x} \\ &- [\sin \varphi_k \cos \varphi_k (1 - \cos \theta_k) - i\sigma (1 - \sin^2 \varphi_k (1 - \cos \theta_k))] \hat{y} \\ &- (\cos \varphi_k \sin \theta_k + i\sigma \sin \varphi_k \sin \theta_k) \hat{z}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vamos agora calcular

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (-1)^{\ell+1} E_t \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k e^{-\gamma^2 \sin \theta_k} \sqrt{\cos \theta_k} \left(\sqrt{2}\gamma \sin \theta_k \right)^{|\ell|} e^{i\ell\varphi_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}', \quad (3.13)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= k(\sin \theta_k \cos \varphi_k \hat{x} + \sin \theta_k \sin \varphi_k \hat{y} + \cos \theta_k \hat{z}), \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \phi, z) &= \rho \cos \phi \hat{x} + \rho \sin \phi \hat{y} + z \hat{z}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A integral em φ_k é

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{i\ell\varphi_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' = e^{ikz \cos \theta_k} \int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{i\ell\varphi_k} e^{ik\rho \sin \theta_k \cos(\varphi_k - \phi)} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'. \quad (3.15)$$

Para resolver a integral em (3.15), reescrevemos (3.12),

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'(\theta_k, \varphi_k) &= \frac{1}{2} [\sin^2(\theta_k/2)(\sigma + 1)(e^{-2i\varphi_k} - e^{2i\varphi_k}) + 2 \cos^2(\theta_k/2)] \hat{x} \\ &+ \frac{i}{2} [\sin^2(\theta_k/2)[e^{-2i\varphi_k}(\sigma - 1) + e^{2i\varphi_k}(\sigma - 1)] + 2\sigma \cos^2(\theta_k/2)] \hat{y} \\ &+ \frac{1}{2} \sin \theta_k [e^{-i\varphi_k}(\sigma - 1) - e^{i\varphi_k}(\sigma + 1)] \hat{z}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A integral a ser resolvida tem a forma

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{iX\varphi_k} e^{iY \cos(\varphi_k - \phi)}, \quad (3.17)$$

com $X = \ell, \ell \pm 1, \ell \pm 2$ e $Y = k\rho \sin \theta_k$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{iX\varphi_k} e^{iY \cos(\varphi_k - \phi)} &= e^{iX\phi} \int_{-\phi}^{2\pi - \phi} d(\varphi_k - \phi) e^{iX(\varphi_k - \phi)} e^{iY \cos(\varphi_k - \phi)} \\ &= e^{iX\phi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\zeta e^{iY \cos \zeta - i(-X)\zeta}}_{2\pi i^{-X} J_{-\ell}(Y)} = 2\pi i^X J_X(Y) e^{iX\phi}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

com $J_X(Y)$ sendo a função de Bessel cilíndrica [33]. Assim, voltando a (3.15)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{i\ell\varphi_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' &= 2\pi i^\ell e^{ikz \cos \theta_k} \left\{ -i\sigma \sin \theta_k e^{i(\ell+\sigma)\phi} J_{\ell+\sigma}(Y) \hat{z} \right. \\ &\quad + i\sigma \left[\cos^2(\theta_k/2) e^{i\ell\phi} J_\ell(Y) - \sin^2(\theta_k/2) e^{i(\ell+2\sigma)\phi} J_{\ell+2\sigma}(Y) \right] \hat{y} \\ &\quad \left. + \cos^2(\theta_k/2) e^{i\ell\phi} J_\ell(Y) + \sin^2(\theta_k/2) e^{i(\ell+2\sigma)\phi} J_{\ell+2\sigma}(Y) \hat{x} \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.13), obtemos as amplitudes do campo elétrico em coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} E_x(\rho, \phi, z) &= (-i)^{\ell+1} E_t \left[e^{i\ell\phi} I_0^{(\ell)} + e^{i(\ell+2\sigma)\phi} I_{2\sigma}^{(\ell)} \right], \\ E_y(\rho, \phi, z) &= \sigma (-i)^\ell E_t \left[e^{i\ell\phi} I_0^{(\ell)} - e^{i(\ell+2\sigma)\phi} I_{2\sigma}^{(\ell)} \right], \\ E_z(\rho, \phi, z) &= -2\sigma (-i)^\ell E_t e^{i(\ell+\sigma)\phi} I_\sigma^{(\ell)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

com

$$I_m^{(\ell)} = (\sqrt{2}\gamma)^{|\ell|} \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k^{|\ell|+1} \sqrt{\cos \theta_k} e^{-\gamma^2 \sin^2 \theta_k} f_{|m|}(\theta_k) J_{\ell+m}(k\rho \sin \theta_k) e^{ikz \cos \theta_k}, \quad (3.21)$$

e $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Os coeficientes $I_m^{(\ell)}$ contêm a dependência em ρ e z . As funções $f_m(\theta_k)$ são dadas por

$$\begin{aligned} f_0(\theta_k) &= 2 \cos^2(\theta_k/2), \\ f_1(\theta_k) &= \sin \theta_k, \\ f_2(\theta_k) &= 2 \sin^2(\theta_k/2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

O campo magnético é dado por

$$\mathbf{H} = -i\sigma \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \mathbf{E}. \quad (3.23)$$

sendo μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo e ϵ a permissividade elétrica do meio dielétrico. Obtemos as componentes do campo magnético de (3.20) e (3.23),

$$\begin{aligned} H_x(\rho, \phi, z) &= -(-i)^\ell \sigma \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_t \left[e^{i\ell\phi} I_0^{(\ell)} + e^{i(\ell+2\sigma)\phi} I_{2\sigma}^{(\ell)} \right], \\ H_y(\rho, \phi, z) &= (-i)^{\ell+1} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_t \left[e^{i\ell\phi} I_0^{(\ell)} - e^{i(\ell+2\sigma)\phi} I_{2\sigma}^{(\ell)} \right], \\ H_z(\rho, \phi, z) &= -2(-i)^{\ell+1} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_t e^{i(\ell+\sigma)\phi} I_\sigma^{(\ell)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

As expressões para \mathbf{E} e \mathbf{H} são soluções exatas das equações de Maxwell e soluções aproximadas das condições de contorno correspondentes à passagem pela objetiva (teoria clássica de difração de Kirchhoff) [17] em contraste com os modelos paraxiais usuais, onde o tamanho da cintura do feixe é suposto ser muito menor que os tamanhos transversos dos elementos ópticos. Nestes modelos são empregadas soluções aproximadas das equações de Maxwell e a difração não é levada em conta.

Quando fazemos $\ell = 0$ nas equações para \mathbf{E} e \mathbf{H} , obtemos os campos para um feixe gaussiano focalizado. Quando um feixe com perfil gaussiano incide na porta de entrada da objetiva, todas as componentes de onda plana, após sua passagem, têm a mesma fase na posição focal $\mathbf{r} = 0$ e por isso interferem construtivamente produzindo um máximo de intensidade neste ponto. Por outro lado, para um feixe laguerre-gaussiano, cada componente contém um fator de fase adicional $e^{i\ell\phi_k}$, equação (3.13), e então a intensidade no foco desaparece, exceto em alguns casos especiais [34, 36, 37]. O valor nulo da intensidade sobre o eixo pode ser verificado substituindo o resultado $J_n(0) = \delta_{n,0}$ em (3.21). Por outro lado, quando $\ell + m = 0$, as funções $I_m^{(\ell)}$ apresentam valor diferente de zero sobre o eixo.

Para $\ell = \pm 1$ e $\sigma = -\ell$, as componentes do campo elétrico e magnético E_z e H_z não têm singularidade de fase. Nesta situação, os vetores \mathbf{E} e \mathbf{H} oscilam ao longo do eixo do feixe em quadratura de fase. Como ℓ representa o momento angular do feixe e σ define a polarização, dizemos nessa situação que o momento angular orbital e o de spin do feixe incidente são anti-paralelos.

Há uma segunda situação com intensidade axial não nula, quando $\ell = \pm 2$ e $\sigma = \mp 1$. Neste caso, as componentes do campo elétrico e magnético E_z e H_z são nulas mas $E_y = -i\sigma E_x$, assim como $H_y = -i\sigma H_x$. O campo sobre o eixo é circularmente polarizado como na porta de entrada da objetiva, contudo, o sentido de rotação é oposto àquele do feixe incidente.

Para obter uma explicação qualitativa deste efeito, ilustramos na Figura 3.4 os vetores campo elétrico do feixe paraxial incidente LG₀₂ projetados sobre um plano

paralelo ao plano xy antes da objetiva. Podemos analisar o efeito da focalização através da interferência vetorial no ponto focal. A objetiva realiza um transporte tridimensional de cada um destes vetores ao ponto focal, respeitando a condição de que seu ângulo com relação ao plano de incidência (o plano que contém \mathbf{k} e o eixo óptico) seja conservado. Em $t = 0$, os vetores 3 e 7 na Figura 1 contribuem $2E_0$ ao longo da direção negativa de x , enquanto 1 e 5 contribuem $2E_0 \cos \theta \ll 2E_0$ ao longo da direção positiva de x . As contribuições para a componente z dos pontos 1 e 5 são canceladas. A diferença entre $\sigma = 1$ e $\sigma = -1$, correspondentes às Figuras 3.4(a) e 3.4(b), encontra-se nas contribuições dos vetores 2, 4, 6 e 8. Quando adicionamos suas componentes azimutais no caso (a), nós encontramos um vetor apontando ao longo da direção positiva de x que interfere destrutivamente com o campo resultante de 3 e 7. Enquanto isso, no caso (b), as contribuições dos vetores 2, 4, 6 e 8 somam-se às contribuições de 3 e 7 e o campo elétrico resultante, aponta ao longo da direção negativa de x em $t = 0$. Podemos notar também que enquanto o campo elétrico do feixe incidente em cada posição espacial gira em sentido horário na Figura 3.4(b), o padrão geral gira no sentido anti-horário, com a mesma frequência angular. Assim, o vetor soma resultante no ponto focal gira no sentido anti-horário.

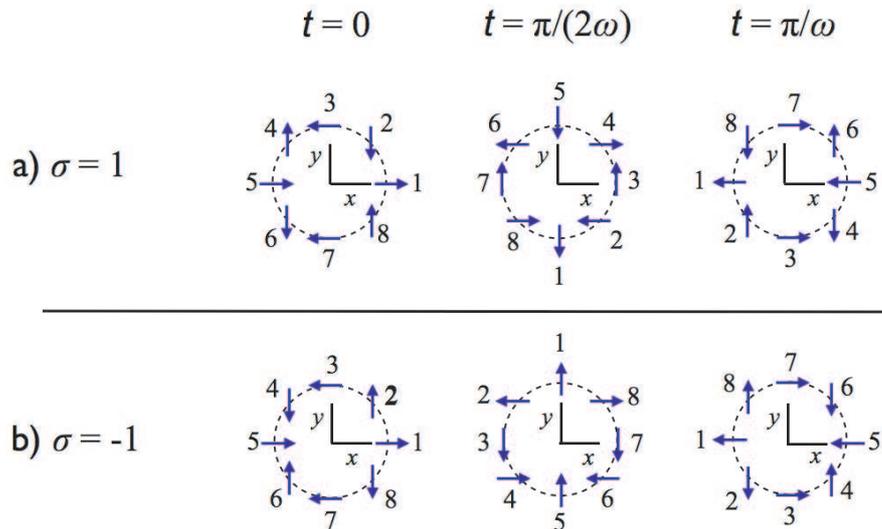


Figura 3.4: Orientações do campo elétrico para um feixe paraxial LG_{02} (antes da objetiva), com polarização circular (a) à esquerda ($\sigma = 1$) e (b) à direita ($\sigma = -1$), em tempos $t = 0$, $t = \pi/(2\omega)$ e $t = \pi/\omega$. Os padrões espaciais resultantes giram em sentido contrário ao sentido da polarização circular do feixe incidente.

Estes efeitos desaparecem no limite paraxial, que pode ser obtido de nossos resultados mais gerais assumindo que $\theta_0 \ll 1$. Neste limite, as funções angulares dadas por (3.22) satisfazem $f_2(\theta) \approx \theta^2/2 \ll f_1(\theta) \approx \theta \ll f_0(\theta) \approx 2$. Então, os coeficientes $I_{2\sigma}^{(\ell)}$ e $I_{\sigma}^{(\ell)}$ resultam bem menores em relação ao coeficiente $I_0^{(\ell)}$ nas equações em (3.20), o que leva a $E_z \ll E_y \approx i\sigma E_x$, ou seja, a polarização do feixe incidente é preservada no ponto focal.

Para descrever completamente a polarização do feixe focalizado, é conveniente escrever as componentes cilíndricas do campo [38]. Temos que

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \cos\phi \hat{\rho} - \sin\phi \hat{\phi} = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \hat{\rho} - \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \hat{\phi}, \\ \hat{y} &= \sin\phi \hat{\rho} + \cos\phi \hat{\phi} = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \hat{\rho} + \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \hat{\phi}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

De (3.20) e (3.25), obtemos

$$\begin{aligned}E_{\rho}(\rho, \phi, z) &= (-i)^{\ell+1} E_t e^{i(\ell+\sigma)\phi} \left(I_0^{(\ell)} + I_{2\sigma}^{(\ell)} \right), \\ E_{\phi}(\rho, \phi, z) &= \sigma (-i)^{\ell} E_t e^{i(\ell+\sigma)\phi} \left(I_0^{(\ell)} - I_{2\sigma}^{(\ell)} \right), \\ E_z(\rho, \phi, z) &= -2\sigma (-i)^{\ell} E_t e^{i(\ell+\sigma)\phi} I_{\sigma}^{(\ell)}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Todas as componentes cilíndricas têm a mesma dependência em ϕ , determinada pelo momento angular total $\ell + \sigma$ do feixe incidente.

Sobre o plano focal, $z = 0$, todas as funções $I_m^{(\ell)}$ são reais. Das equações em (3.26) nós concluímos que E_{ϕ} e E_z estão em fase ou em oposição de fase dependendo do sinal de $(I_0^{\ell} - I_{2\sigma}^{\ell})/I_{\sigma}^{\ell}$, enquanto E_{ρ} está em quadratura de fase. Assim, a elipse de polarização está em um ângulo $\alpha = \arctan [I_{\sigma}^{\ell}/(I_0^{\ell} - I_{2\sigma}^{\ell})]$ em relação ao plano focal, com seu eixo principal ao longo da direção $\hat{\rho}$. Isto é ilustrado no ponto Q na Figura 3.5, para $\ell = 2, \sigma = -1$.

Para uma descrição detalhada da polarização neste caso, nós apresentamos os resultados do cálculo numérico para as componentes cilíndricas das amplitudes do campo elétrico em função de ρ/λ na Figura 3.6. As amplitudes são divididas pela amplitude máxima do campo elétrico incidente na porta de entrada, obtida da equação (3.2), tomando $\rho = w_0$ de acordo com a equação (2.35) para $\ell = 2$ (amplitude sobre o círculo de intensidade máxima)

$$E_{inc}^{max} = 2\sqrt{2}E_{inc}e^{-1}.\quad (3.27)$$

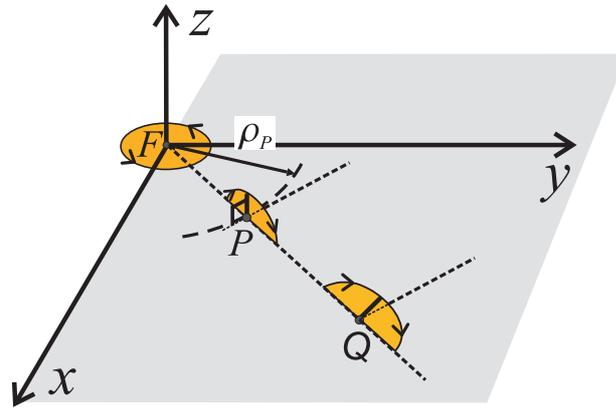


Figura 3.5: Polarização sobre o plano focal xy para $\ell = 2$ e $\sigma = -1$. Ao longo do círculo $\rho = \rho_p$, a elipse de polarização é perpendicular ao plano focal (como ilustrado no ponto P). Dentro do círculo, $\rho < \rho_p$, a projeção do campo elétrico sobre o plano xy gira no sentido anti-horário, tal que a rotação é reversa em relação à polarização do feixe paraxial incidente. No ponto focal F , a polarização é circular.

As amplitudes adimensionais são dadas por

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_\rho &= \frac{\pi f}{2\sqrt{2}\lambda} eT_{obj} \left(I_0^{(2)} + I_{-2}^{(2)} \right), \\
 \tilde{E}_\phi &= \frac{\pi f}{2\sqrt{2}\lambda} eT_{obj} \left(I_0^{(2)} - I_{-2}^{(2)} \right), \\
 \tilde{E}_z &= -\frac{\pi f}{\sqrt{2}\lambda} eT_{obj} I_{-1}^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

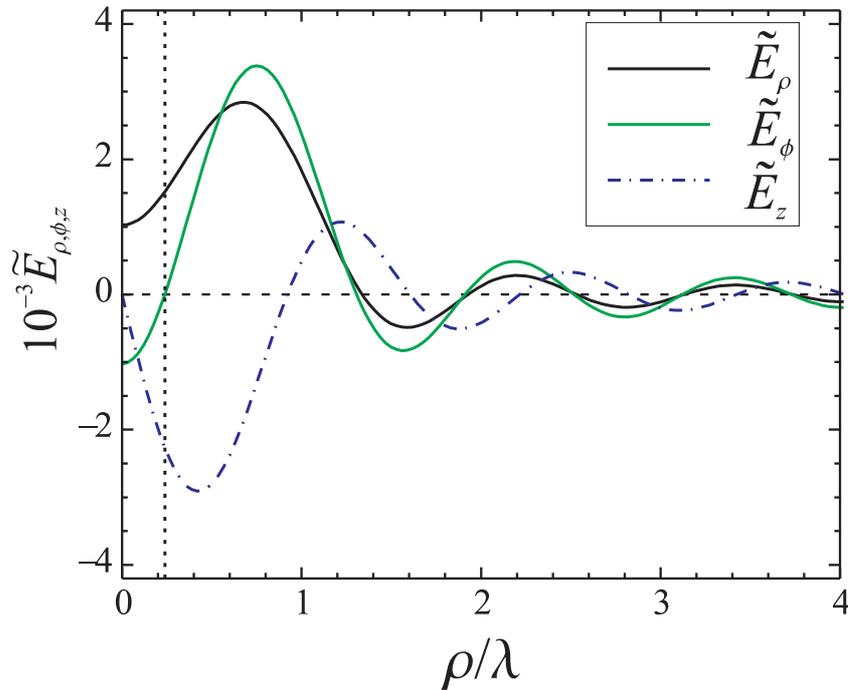


Figura 3.6: Variação das amplitudes do campo elétrico (divididas pela amplitude máxima do feixe incidente) em função de ρ/λ sobre o plano focal, com $\ell = 2$, $\sigma = -1$, $NA = 1,25$, $n = 1,5$, $\gamma = 1,4$, $T_{obj} = 0,7$, $w_0 = 3\text{ mm}$ e $\lambda = 0,5\ \mu\text{m}$. A linha vertical pontilhada indica o círculo $\rho = \rho_P$.

No exemplo numérico mostrado na Figura 3.6, nós consideramos $NA = 1,25$, $n = 1,5$, $T_{obj} = 0,7$, $\gamma = 1,4$, $w_0 = 3\text{ mm}$ e $\lambda = 0,5\ \mu\text{m}$. Como esperado, o campo está localizado na região próxima ao foco, com dimensões da ordem do comprimento de onda λ . Quando as amplitudes \tilde{E}_ρ e \tilde{E}_ϕ têm o mesmo sinal, a projeção do campo elétrico sobre o plano xy gira no sentido horário, como o feixe incidente. Isto acontece na maior parte das regiões, em particular em torno da região de intensidade máxima. Sobre o círculo $\rho = \rho_P = 0,24\lambda$ (para os valores numéricos anteriores), nós temos $E_\phi = 0$, e logo a elipse de polarização é perpendicular ao plano xy ($\alpha = \pi/2$). Isto é representado pelo ponto P na Figura 3.5. Dentro do disco ($\rho < \rho_P$), \tilde{E}_ρ e \tilde{E}_ϕ têm sinais opostos de modo que a projeção de \mathbf{E} sobre o plano xy agora gira no sentido anti-horário. No ponto focal ($\rho = 0$), a polarização é circular com rotação reversa como já citado anteriormente. Estas propriedades são ilustradas pela Figura 3.7, mostrando a projeção dos vetores campo elétrico sobre o plano focal em diferentes tempos.

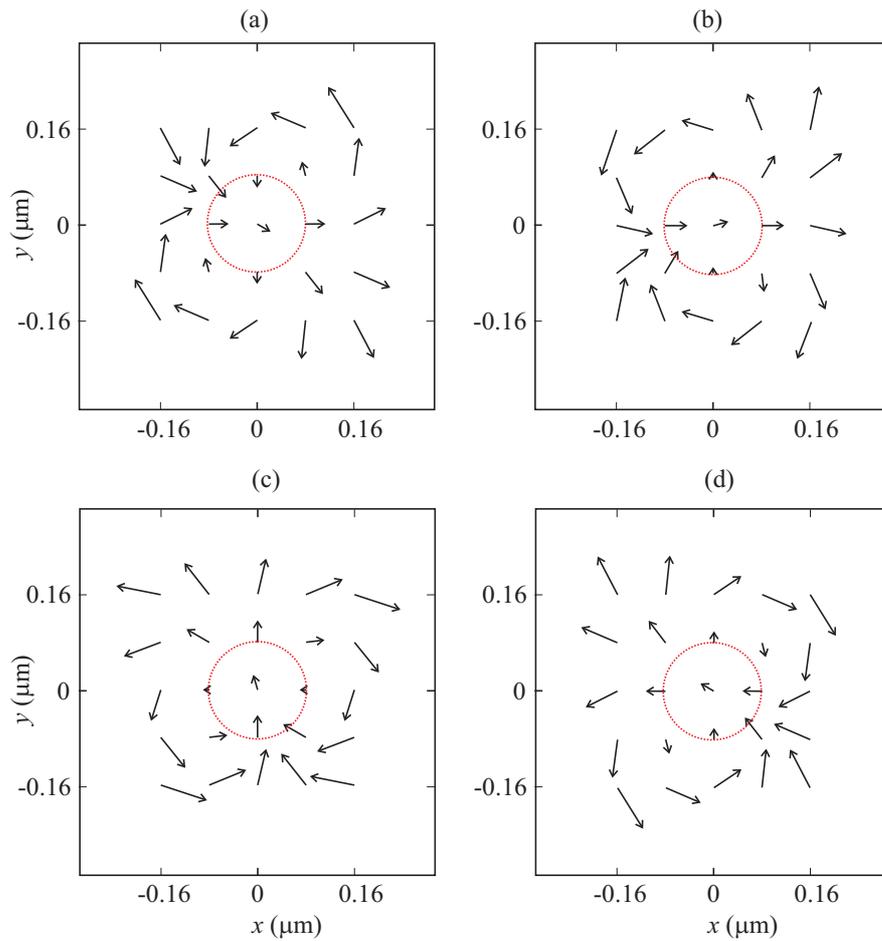


Figura 3.7: Orientações do campo elétrico sobre o plano focal nos tempos (a) $t = \pi/(3\omega)$, (b) $t = 7\pi/(12\omega)$, (c) $t = 5\pi/(6\omega)$ e (d) $t = 13\pi/(12\omega)$. Nós consideramos $\ell = 2$, $\sigma = -1$. A linha vermelha indica o círculo $\rho = \rho_P$. O campo elétrico em posições fora deste círculo gira no sentido horário como o feixe incidente. Dentro do círculo a rotação é no sentido anti-horário, como ilustrado pelo vetor no ponto focal.

A mesma reversão ocorre para $\ell > 2$ sendo que o raio ρ_P aumenta linearmente com ℓ . Para esses casos há uma singularidade de fase sobre o eixo do feixe e portanto o campo se anula para $\rho = 0$. Quando ℓ e σ têm o mesmo sinal ou quando $\ell = \pm 1$ nenhuma reversão é observada. Assim, nós podemos interpretar a reversão como um intercâmbio não trivial entre polarização e estrutura espacial. Perto do eixo do feixe ($\rho < \rho_P$), para $|\ell| \geq 2$, a dependência angular espacial domina sobre a polarização herdada do feixe incidente, levando à rotação reversa quando ℓ e σ têm sinais opostos.

3.2 Densidade de energia

Como vimos no capítulo anterior, as densidades de energia elétrica e magnética são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_E &= \frac{\epsilon}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*, \\ \mathcal{U}_M &= \frac{\mu_0}{4} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*.\end{aligned}\quad (3.29)$$

De (3.20) e (3.24), obtemos as densidades de energia para o feixe $\text{LG}_{0\ell}$ focalizado,

$$\mathcal{U}_E = \mathcal{U}_M = \frac{\epsilon}{2} E_t^2 (|I_0^{(\ell)}|^2 + 2|I_\sigma^{(\ell)}|^2 + |I_{2\sigma}^{(\ell)}|^2). \quad (3.30)$$

A densidade de energia elétrica é idêntica à densidade de energia magnética em cada ponto, $\mathcal{U}_E = \mathcal{U}_M$. Além disso, são simétricas em relação ao plano focal $z = 0$: $\mathcal{U}_{E,M}(\rho, -z) = \mathcal{U}_{E,M}(\rho, z)$, assim como são independentes de ϕ , isto é, possuem simetria de rotação em torno do eixo z . A densidade de energia total $\mathcal{U} = \mathcal{U}_E + \mathcal{U}_M$ é dada por

$$\mathcal{U}(\rho, z) = \epsilon E_t^2 (|I_0^{(\ell)}|^2 + 2|I_\sigma^{(\ell)}|^2 + |I_{2\sigma}^{(\ell)}|^2), \quad (3.31)$$

As funções $I_m^{(\ell)}$ obedecem à seguinte relação de simetria

$$I_{-m}^{(-\ell)} = (-1)^{\ell+m} I_m^{(\ell)}(\rho, z). \quad (3.32)$$

Segue que, quando nós invertemos ambos os índices orbital e spin incidentes ($\ell \rightarrow -\ell, \sigma \rightarrow -\sigma$) o campo elétrico muda como

$$\begin{aligned}E_\rho(\rho, \phi, z) &\longrightarrow E_\rho(\rho, -\phi, z), \\ E_\phi(\rho, \phi, z) &\longrightarrow -E_\phi(\rho, -\phi, z), \\ E_z(\rho, \phi, z) &\longrightarrow E_z(\rho, -\phi, z).\end{aligned}\quad (3.33)$$

De (3.32) e (3.33), concluímos que a densidade de energia é invariante sobre mudanças de ambos sinais de ℓ e σ . Assim, resultados para valores negativos de ℓ são obtidos daqueles para $\ell > 0$ simplesmente mudando o valor de σ .

Na Figura 3.8, nós representamos a razão $\mathcal{U}(\rho, 0)/\mathcal{U}_{inc}^{max}$ em função de ρ/λ , para os mesmos parâmetros da Figura 3.6 ($\ell = 2$ e $\sigma = -1$). A quantidade \mathcal{U}_{inc}^{max} representa a densidade de energia máxima do feixe paraxial incidente, dada por

$$\mathcal{U}_{inc}^{max} = \epsilon E_{inc}^2 e^{-2\frac{\rho_{max}^2}{w_0^2}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho_{max}}{w_0} \right)^{2|\ell|}, \quad (3.34)$$

com $\rho_{max} = w_0 \sqrt{|\ell|/2}$ sendo o raio de intensidade máxima do feixe. Assim, para $\ell = 2$, temos

$$\mathcal{U}_{inc}^{max} = \epsilon \frac{E_{inc}^2}{e^{|\ell|}} |\ell|^{|\ell|} = 4\epsilon \frac{E_{inc}^2}{e^2}. \quad (3.35)$$

Também mostramos na Figura 3.8 resultados correspondentes quando $\ell = 2$ e $\sigma = 1$. Neste caso, vemos que a densidade é nula sobre o eixo. Apesar dos feixes terem o mesmo perfil espacial na porta de entrada da objetiva, a diferença na polarização dá origem a diferentes distribuições de energia sobre o plano focal. Podemos notar nos quadros da Figura 3.8 que para $\ell = 2$ e $\sigma = 1$, o anel brilhante é mais fino e ligeiramente deslocado para fora.

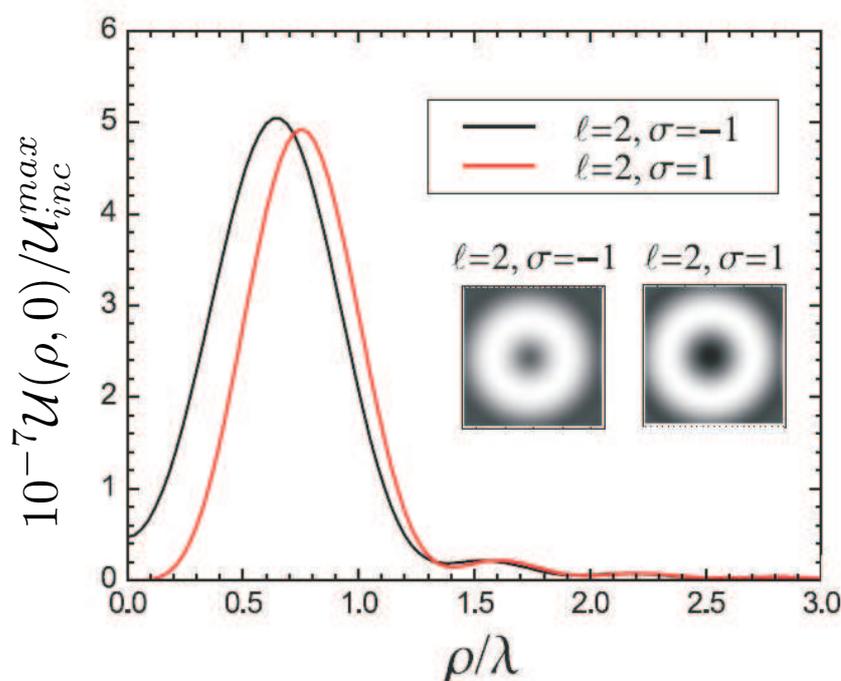


Figura 3.8: Razão de densidade de energia $\mathcal{U}(\rho, 0)/\mathcal{U}_{inc}^{max}$ em função de ρ/λ no plano focal (mesmos parâmetros da Figura 3.6).

O valor da densidade no foco para $\sigma = -1$ corresponde a 9% de seu valor máximo, sobre o círculo $\rho \approx 0,65\lambda$.

Aumentar o valor da abertura numérica tem um efeito mais forte sobre a densidade de energia focal para o feixe com perfil laguerre-gaussiano em comparação com um feixe sem momento angular orbital. Isto é mostrado na Figura 3.9, onde nós representamos a razão $\mathcal{U}(0, 0)/\mathcal{U}_{inc}^{max}$ em função de NA quando $\ell + 2\sigma = 0$. Nós também mostramos os resultados para $\ell = 0$, onde o efeito de aumentar o valor de NA é menos dramático devido à densidade axial não se anular no limite paraxial.

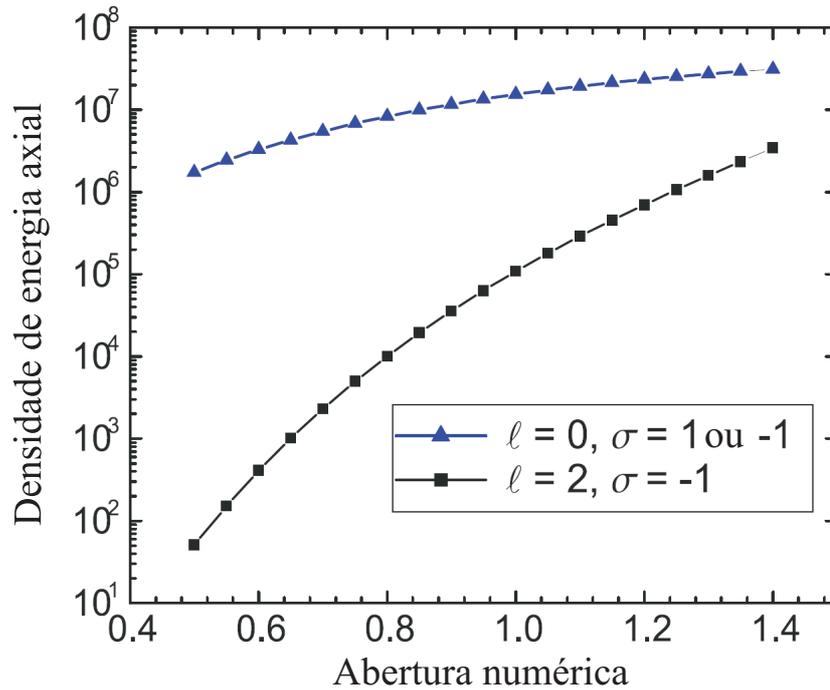


Figura 3.9: Razão entre a densidade de energia $\mathcal{U}(0,0)/\mathcal{U}_{inc}^{max}$ no ponto focal em função de NA . Mesmos parâmetros da Figura 3.6.

Para todo $\ell \neq 0$, o valor máximo da densidade de energia no plano focal é localizado sobre um anel cujo raio aumenta com ℓ . Para um feixe laguerre-gaussiano paraxial, este raio cresce com $\sqrt{\ell}$, para dados valores de w_0 e λ . Após a passagem pela objetiva, este raio não pode mais ser calculado analiticamente de forma que não obtemos uma relação simples entre ρ_{max} e ℓ . A Figura 3.10 mostra o resultado numérico para o raio de densidade máxima de energia em função de ℓ para um feixe focalizado tomando polarização $\sigma = 1$. Podemos notar que ρ_{max} cresce linearmente com ℓ para valores grandes de ℓ . Este comportamento já foi observado experimentalmente no estudo da dinâmica rotacional de partículas aprisionadas opticamente [39]. Na Figura 3.10, o raio de densidade máxima de energia do feixe é bem ajustado por uma função linear para $\ell > 20$.

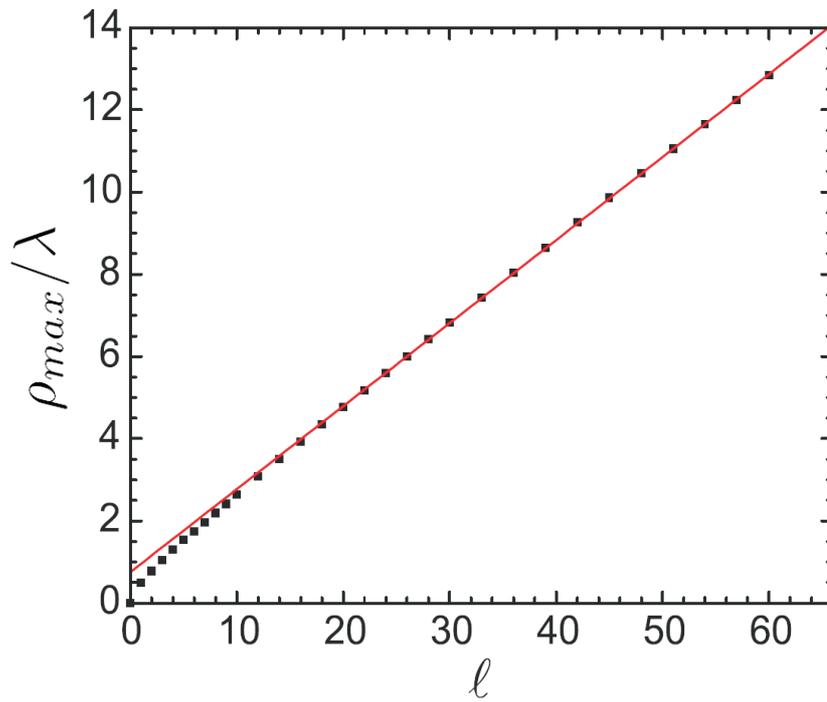


Figura 3.10: Raio de densidade de energia máxima (dividido pelo comprimento de onda) em função de ℓ para $\sigma = 1$. O resultado de um ajuste linear para $\ell > 20$ é também mostrado ($\rho_{max}/\lambda = 0,202\ell + 0,758$).

ℓ	$\sigma = 1$	$\sigma = -1$
1	0,35	0,20
2	0,54	0,42
3	0,70	0,59
4	0,86	0,74
5	1,01	0,90

Tabela 3.1: Valores de ρ_{max} em μm .

Note que o valor de ρ_{max} também depende da polarização. Na Tabela 3.1, apresentamos os valores de ρ_{max} para $\lambda = 1,064 \mu m$, $w_0 = 3,5 mm$, $NA = 1,25$ e $f = 4,9 mm$.

3.3 Fluxo de energia

O vetor de Poynting, calculado no capítulo anterior para um feixe paraxial, é dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (3.36)$$

Substituindo (3.23) em (3.35), obtemos,

$$\mathbf{S} = -\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \Im(\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*). \quad (3.37)$$

De (3.37) e usando as equações em (3.28), encontramos as componentes cilíndricas do fluxo de energia na posição $\mathbf{r}(\rho, \phi, z)$,

$$\begin{aligned} S_\rho &= 2\sigma \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_t^2 \Im[(I_0^{(\ell)} - I_{2\sigma}^{(\ell)}) I_\sigma^{(\ell)*}], \\ S_\phi &= 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_t^2 \Re[(I_0^{(\ell)} + I_{2\sigma}^{(\ell)}) I_\sigma^{(\ell)*}], \\ S_z &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_t^2 (|I_0^{(\ell)}|^2 - |I_{2\sigma}^{(\ell)}|^2). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Como esperado por simetria, as componentes cilíndricas não dependem de ϕ . No plano focal $z = 0$, as funções $I_{2\sigma}^{(\ell)}$ são reais e assim nós obtemos $S_\rho = 0$ sobre este plano. Isto é esperado pois S_ρ muda de sinal quando o feixe converge e em seguida diverge. Em cada ponto, o vetor \mathbf{S} é perpendicular à elipse de polarização correspondente, representadas na Figura 3.5. As elipses fornecem assim as direções do campo vetorial de Poynting no plano focal.

As componentes S_ρ e S_z são invariantes sob a inversão de sinal de ambos os índices ℓ e σ . A componente S_ϕ é transformada, $S_\phi \rightarrow -S_\phi$, quando $\ell \rightarrow -\ell$ e $\sigma \rightarrow -\sigma$, o que é esperado já que essa componente está relacionada com o momento angular óptico.

Quando ℓ e σ têm sinais opostos e $|\ell| \geq 2$, a última equação em (3.38) fornece $S_z = 0$ em $\rho = \rho_P$ (veja Figura 3.5), logo o vetor de Poynting é paralelo a $\hat{\phi}$ sobre este círculo (ou anti-paralelo se $\ell + \sigma < 0$). Além disso, S_z é negativo dentro do disco $\rho < \rho_P$, logo o fluxo de energia local próximo ao eixo é anti-paralelo à direção do fluxo de energia do feixe incidente. O sentido da rotação do campo elétrico em relação à direção do fluxo de energia é idêntico ao do feixe incidente, pois dentro do disco $\rho < \rho_P$ ambos são invertidos.

O fluxo de energia do feixe é ilustrado pela Figura 3.11. A projeção do vetor de Poynting sobre o plano focal é representada por setas, enquanto sua componente axial é representada em magnitude e sinal pelo mapa de cor falsa. Em 3.11(a) representamos o caso onde $\ell = 2$ e $\sigma = -1$ e em 3.11(b) o caso onde $\ell = 2$ e $\sigma = 1$. Podemos notar

que dentro do círculo branco pontilhado que indica o anel de raio $\rho = \rho_P$, o vetor de Poynting assume valores negativos.

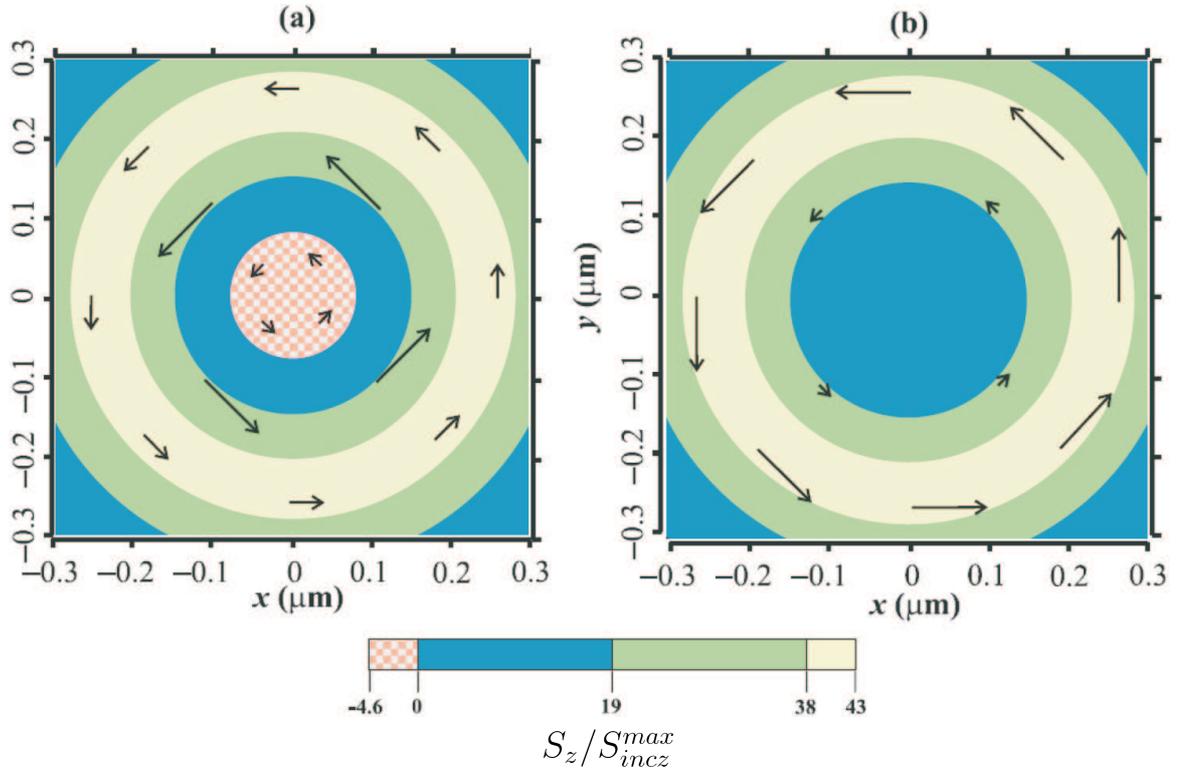


Figura 3.11: As setas representam a projeção do vetor de Poynting sobre o plano focal para $\ell = 2$ e (a) $\sigma = -1$, (b) $\sigma = 1$ (mesmos parâmetros da Figura 3.6). Os valores de S_z/S_{incz}^{max} são representados por um falso mapa de cores ($S_{incz}^{max} \equiv$ vetor de Poynting máximo do feixe incidente). Note que no caso (a), S_z é negativo dentro do menor círculo com raio $\rho = \rho_P$.

O fluxo de energia global através de um plano perpendicular ao eixo z é dado por

$$\mathcal{F} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho d\rho S_z, \quad (3.39)$$

que é direcionado ao longo do eixo z no sentido positivo. Usando a última equação em (3.38) e o resultado (uma das relações de ortogonalidade para as funções de Bessel)

$$\int_0^\infty \rho d\rho J_n(k\rho \sin \theta) J_n(k\rho \sin \theta') = \frac{1}{k^2 \sin \theta} \delta(\sin \theta - \sin \theta'), \quad (3.40)$$

obtemos

$$\mathcal{F} = 8\pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \frac{E_t^2}{k^2} (\sqrt{2}\gamma)^{2|\ell|} \int_0^{\theta_0} d\theta \cos \theta (\sin \theta)^{2|\ell|+1} e^{-2\gamma^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.41)$$

O fluxo de energia global é independente de z como esperado pela conservação de energia. Para o feixe antes de atravessar a objetiva, o fluxo de energia global é dado por

$$\mathcal{F} = 4\pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_{inc}^2 \int_0^{r_{obj}} \rho d\rho e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{2|\ell|}. \quad (3.42)$$

Lembrando que $r_{obj} = f \sin \theta_0$, encontramos que $\mathcal{F} = nT_{obj}^2 \mathcal{F}_{inc}$, como esperado.

3.4 Momento angular

De acordo com as equações (2.44) e (2.47) podemos escrever a componente z da densidade de momento angular, em coordenadas cilíndricas, na forma

$$j_z = \rho g_\phi = \rho \frac{n^2}{c^2} S_\phi, \quad (3.43)$$

que pode ser numericamente calculada de 3.38. Na Figura 3.12, nós representamos a densidade adimensional dada pela densidade de momento angular na direção de propagação do feixe multiplicada pela frequência angular e dividida por \mathcal{U}_{max} , a densidade de energia no foco para $\ell = 0$,

$$\tilde{j}_z = \frac{\omega j_z}{\mathcal{U}_{max}}, \quad (3.44)$$

como função de ρ/λ para diferentes valores de ℓ e σ .

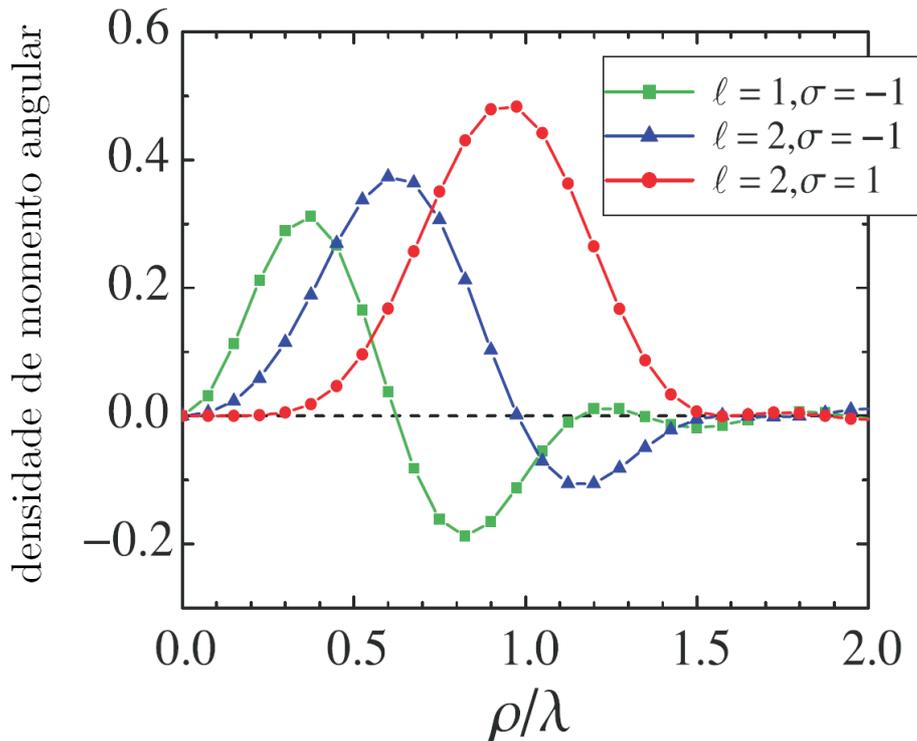


Figura 3.12: Densidade de momento angular \tilde{j}_z em função de ρ/λ sobre o plano focal (mesmos parâmetros da Figura 3.7).

Os resultados apresentados na Figura 3.12 são qualitativamente similares àqueles para um feixe paraxial Figura 2.3, com λ desempenhando o papel da cintura w_0 do feixe paraxial como escala de comprimento transverso. A Figura 3.12 mostra que, para $\sigma = -1$ a densidade de momento angular é negativa próxima à borda exterior do anel de intensidade máxima como no caso paraxial (veja Figura 2.3). Próximo ao eixo do

feixe, a densidade é sempre positiva para $\ell > 0$, mais uma indicação que a contribuição orbital domina perto do eixo do feixe.

A identificação das contribuições orbital e de spin não é simples, particularmente no regime não-paraxial [40, 41, 42]. No meio dielétrico, não há uma relação simples entre o momento angular e a energia por unidade de comprimento. Uma descrição mais conveniente do fluxo de momento angular óptico é fornecida pelo fluxo de densidade de momento angular, representado pelo tensor de segunda ordem \mathcal{M}_{ij} introduzido no capítulo anterior.

No capítulo 2, nós encontramos que o fluxo de momento angular através de um plano paralelo ao plano xy é dado por,

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sigma}{2\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi (|\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2) \\ &+ \frac{\sigma}{2\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \Re(\mathcal{E}_y \partial_\phi \mathcal{E}_x^* - \mathcal{E}_x \partial_\phi \mathcal{E}_y^*). \end{aligned} \quad (3.45)$$

De acordo com (2.52) e (3.20), para um feixe não-paraxial focalizado, escrevendo as componentes do campo elétrico em termos de $I_m^{(\ell)}(\rho)$, nós encontramos

$$\begin{aligned} M^{spin} &= \frac{2\pi\sigma}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0 \int_0^\infty d\rho \rho (|I_0^{(\ell)}|^2 + |I_{2\sigma}^{(\ell)}|^2), \\ M^{orb} &= \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0 \int_0^\infty d\rho \rho [\ell (|I_0^{(\ell)}|^2 - |I_{2\sigma}^{(\ell)}|^2) - 2\sigma |I_{2\sigma}^{(\ell)}|^2]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Aqui definimos M^{spin} e M^{orb} conforme discutido no capítulo 2. Note que M^{spin} e M^{orb} são independentes de z , portanto os fluxos orbital e de spin são independentemente conservados quando o feixe focalizado propaga-se na região além da objetiva. Contudo, seus valores não coincidem separadamente com os fluxos orbital e de spin por unidade de potência para o feixe paraxial incidente antes da objetiva. Devido à dependência angular $e^{i(\ell+2\sigma)\phi}$ de ambos E_x e E_y , a derivada angular contida no fluxo orbital em (3.45) leva ao termo proporcional a 2σ em (3.46).

Apenas o fluxo momento angular total por unidade de potência é conservado pela focalização, como esperado dada a simetria cilíndrica da objetiva. De fato, quando adicionamos os fluxos orbital e spin dados por (3.46), nós encontramos, por comparação com a (3.42)

$$M^{orb} + M^{spin} = \frac{(\ell + \sigma)}{\omega} \mathcal{F}. \quad (3.47)$$

Para um feixe LG paraxial encontramos $M^{orb} = \frac{\ell}{\omega} \mathcal{F}$ e $M^{spin} = \frac{\sigma}{\omega} \mathcal{F}$. A mudança relativa do fluxo de spin por unidade de potência com respeito ao feixe incidente é

$$r = \frac{\mathcal{M}^{spin}/\mathcal{F} - \mathcal{M}_{inc}^{spin}/\mathcal{F}_{inc}}{\mathcal{M}_{inc}^{spin}/\mathcal{F}_{inc}}, \quad (3.48)$$

enquanto a mudança relativa do fluxo orbital por unidade de potência é simplesmente $-(\sigma/\ell)r$. De 3.41 e 3.46, nós encontramos

$$r = \frac{2 \int_0^{\theta_0} d\theta_k g_{|\ell|}(\theta_k) \sin^4(\theta_k/2)}{\int_0^{\theta_0} d\theta_k g_{|\ell|}(\theta_k) \cos \theta_k}, \quad (3.49)$$

com

$$g_n \equiv e^{-2\gamma^2 \sin^2 \theta_k} (\sin \theta)^{2n+1}. \quad (3.50)$$

Por inspeção de (3.49) e (3.50), nós concluímos que r é positivo e não depende do sinal de ℓ ou do valor de σ . Portanto, a variação de M^{spin}/\mathcal{F} tem o sinal de σ e seu valor absoluto sempre aumenta. A princípio, valores para M^{spin}/\mathcal{F} fora do intervalo $[-1/\omega, 1/\omega]$ parecem em contradição com o fato de que o fóton tem spin 1. Note, contudo, que as quantidades M_{spin} e \mathcal{F} representam o saldo líquido total do fluxo do momento angular de spin e de energia através de um plano $z = \text{constante}$, uma situação onde a polarização e o vetor de Poyting variam fortemente de ponto a ponto. Como ilustração, consideramos o caso para $\ell = 2$ e $\sigma = -1$. Como mostrado pela Figura 3.4, o campo elétrico gira no sentido anti-horário perto do eixo, e a energia localmente flui ao longo da direção negativa de z . Uma descrição em termos de contribuições de raios seria a seguinte: o fluxo de raios R_{longe} atravessando o plano longe do eixo contribui $R_{longe}\hbar\omega$ para \mathcal{F} e $-R_{longe}\hbar$ para M_{spin} . Por outro lado, raios atravessando a objetiva próximos ao eixo (fluxo $R_{perto} < R_{longe}$) fornece uma contribuição negativa $-R_{perto}\hbar\omega$ a \mathcal{F} e $-R_{perto}\hbar$ a M_{spin} pois se propagam ao longo da direção negativa de z com uma componente z positiva de momento angular de spin (o ponto crucial aqui é que o momento angular é uma quantidade vetorial enquanto a energia é um escalar). A razão líquida total é então

$$\frac{M^{spin}}{\mathcal{F}} = -\frac{R_{longe} + R_{perto}}{R_{longe} - R_{perto}} \frac{1}{\omega} < -\frac{1}{\omega}. \quad (3.51)$$

O intercâmbio entre fluxos orbital e spin é claramente um efeito não paraxial que torna-se reforçado quando $|\ell|$ aumenta, pois neste caso a contribuição de ângulos paraxiais $\theta \ll 1$ em (3.49) é reduzida. Os integrandos em (3.49) são iguais em $\theta_m \approx 74.5^\circ$, que corresponde a uma abertura numérica $NA = 1,44$ para $n = 1,5$. Valores típicos de NA altos 1,25 e 1,4 levam a valores pequenos para a mudança relativa r pois o integrando no numerador em (3.49) é consideravelmente menor que aquele no denominador. Na tabela 3.2, nós mostramos os valores de r para $NA = 1,25$ e $1,4$ com valores diferentes de ℓ . O fluxo orbital por unidade de potência,

$$\frac{M^{orb}}{\mathcal{F}} = -\frac{\sigma}{\omega}r + \frac{\ell}{\omega}, \quad (3.52)$$

ℓ	$NA = 1,25$	$NA = 1,4$
0	0,0165	0,026
1	0,0382	0,070
2	0,0579	0,118
3	0,0742	0,162

Tabela 3.2: *Mudança relativa do fluxo de spin r para diferentes valores de ℓ . Mesmos parâmetros da Figura 3.6.*

aumenta quando $\sigma = -1$ e diminui quando $\sigma = 1$. A equação (3.52) parece estar em contradição com o conceito de conversão entre momento angular de spin e orbital [43]. Contudo, note que a conexão entre o fluxo global de momento angular calculada aqui e os efeitos mecânicos locais sobre uma dada partícula não é simples, particularmente quando quantidades locais variam muito. Não conhecemos uma identificação consistente entre as contribuições de momento angular de spin e orbital ou densidades de fluxo de feixes não-paraxiais [30, 42].

No próximo capítulo, estudamos a utilização de feixes laguerre-gaussianos focalizados em pinças ópticas.

Capítulo 4

Pinças ópticas e momento angular

No início da década de 70, Ashkin demonstrou que micropartículas poderiam ser manipuladas através da força exercida pela radiação eletromagnética, força conhecida como pressão de radiação [1]. Nos anos seguintes, várias formas de armadilhas ópticas foram estudadas e entre elas, o aprisionamento de partículas dielétricas através da força de gradiente exercida por um único feixe luminoso. Este tipo de armadilha óptica foi demonstrado por Ashkin e colaboradores em 1986 e ficou conhecido por *pinça óptica* [3].

Pinças ópticas empregam a força luminosa para aprisionar e manipular micropartículas neutras. Em uma montagem típica, um feixe cilíndrico de laser, colimado, incide sobre um conjunto de lentes convergentes (objetiva), gerando um feixe cônico de grande abertura angular (o vértice desse cone é o foco da objetiva), conforme representado na Figura 4.1. A incidência deste feixe cônico emergente sobre um pequeno

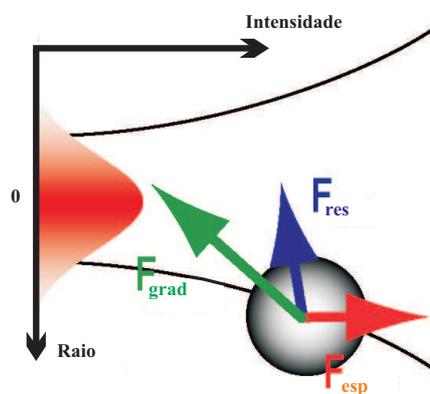


Figura 4.1: Representação esquemática das forças que atuam sobre uma partícula devido a um feixe focalizado em uma pinça óptica.

objeto (como uma microesfera dielétrica) dá origem a dois tipos de forças exercidas pela luz: pressão de radiação (F_{esp}) e força de gradiente (F_{grad}) (Figura 4.2). A pressão de radiação é consequência do redirecionamento do momento linear do feixe devido à reflexão da luz pelo objeto. Ela tende a empurrar a partícula no sentido de incidência. A força de gradiente surge da não-homogeneidade do feixe tendendo a puxar as partículas para regiões de maior intensidade (tende a deslocar o centro do objeto para o foco). A armadilha óptica depende do balanço entre essas duas forças ($F_{res} \equiv$ força resultante). Fazemos uma análise qualitativa do efeito da incidência de um feixe de luz focalizado sobre um microesfera dielétrica considerando dois limites distintos: o limite Rayleigh e o limite da óptica geométrica.

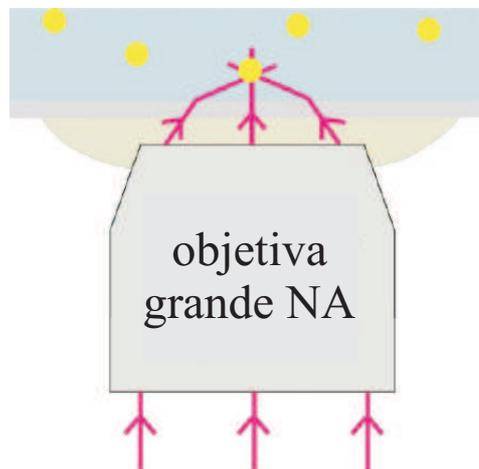


Figura 4.2: *Representação esquemática da focalização de um feixe por uma objetiva de grande abertura numérica.*

No limite Rayleigh, quando as dimensões da microesfera são pequenas comparadas ao comprimento de onda do feixe, podemos substituir a partícula por um dipolo induzido, como representado na Figura 4.3. Como a carga negativa está mais próxima da região de maior intensidade do campo, ela é atraída mais fortemente do que a carga positiva é repelida, dando origem a uma força resultante que aponta para a região onde o campo é mais intenso. A teoria eletromagnética nos fornece a seguinte expressão para a força sobre um dipolo induzido [28],

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha}{2} \nabla \mathbf{E}^2. \quad (4.1)$$

O valor de α , que é a polarizabilidade da microesfera, depende do seu raio a e das constantes dielétricas da microesfera e do meio. A força em (4.1) é proporcional ao gradiente de intensidade do campo e corresponde à força F_{grad} na Figura 4.1. A força

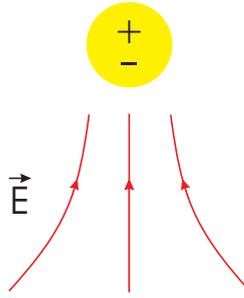


Figura 4.3: *Limite Rayleigh: a microesfera é considerada um dipolo elétrico.*

de pressão de radiação é muito pequena comparada à força de gradiente no limite Rayleigh.

No limite da óptica geométrica, quando as dimensões da microesfera são grandes comparadas ao comprimento de onda do feixe, podemos entender a interação do feixe com a microesfera em termos de trajetórias de raios luminosos, que sofrem reflexão e refração. A Figura 4.4 mostra dois raios incidentes na microesfera depois do foco. Seguindo os raios transmitidos correspondentes e determinando a força resultante sobre a esfera, notamos que esta aponta em direção ao foco. De maneira geral, a força

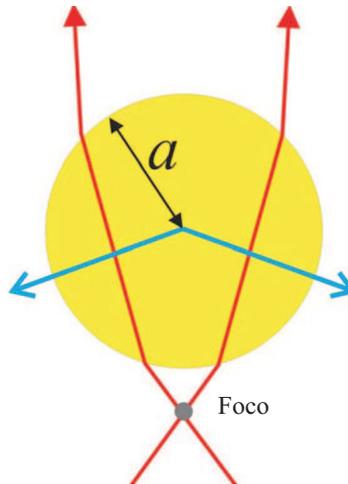


Figura 4.4: *Limite da óptica geométrica: refração dos raios de luz.*

associada à refração é uma força restauradora que tende a manter a esfera na posição do foco, corresponde a F_{grad} na Figura 4.1. A força associada à reflexão tende a empurrar a esfera no sentido de propagação e corresponde a F_{esp} na Figura 4.1 (para verificar isto podemos imaginar a reflexão sofrida pelos dois raios na Figura 4.4).

O objetivo de pinças ópticas bem projetadas é obter um gradiente de força suficientemente grande pra sobrepôr a força de pressão de radiação (regime em que a força

de gradiente é o efeito predominante) e permitir a formação de uma armadilha em três dimensões. Embora a teoria sobre pinças ópticas esteja ainda sendo desenvolvida, os princípios básicos são conhecidos. Forças adicionais à pressão de radiação e à força de gradiente surgem da absorção da luz, que resulta em transferência de momento linear e momento angular da luz do feixe para a partícula. Todas essas forças têm sido observadas em pinças ópticas [10, 44].

Na montagem de pinças ópticas é necessário que o feixe de laser seja estável e tenha um perfil de intensidade bem definido [45]. Geralmente são utilizados modos com perfil gaussiano de intensidade. Contudo, um laser pode operar em modos transversos de ordem superior e há diferentes técnicas que transformam um perfil gaussiano em outras estruturas [46, 47]. Um exemplo de feixe que tem sido utilizado nos últimos anos é o feixe com perfil laguerre-gaussiano [14]. Sua focalização, estudada no capítulo anterior, produz um anel luminoso no plano focal e não um ponto luminoso sobre o foco. Isso acontece pois sua estrutura provoca uma interferência destrutiva sobre o eixo óptico. Há então uma diminuição do efeito da pressão de radiação, sugerindo uma pinça mais eficiente [16].

Neste capítulo, nós calculamos a força óptica produzida por um feixe laguerre-gaussiano circularmente polarizado sobre uma microesfera aprisionada pela pinça óptica (uma extensão do modelo Mie-Debye com aberração esférica - MDSA [21, 23]). Investigamos o efeito do feixe com momento angular na eficiência de aprisionamento axial e estudamos os efeitos da polarização. Em seguida estudamos o comportamento de micropartículas de diferentes tamanhos na presença deste feixe.

4.1 Força óptica

A força que age sobre uma partícula devido a um campo eletromagnético é calculada através da expressão [28]

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathcal{T} \cdot d\mathbf{A}, \quad (4.2)$$

onde S é uma superfície que engloba a partícula e \mathcal{T} é o tensor das tensões de Maxwell dado por [28]

$$\mathcal{T} = \epsilon \mathbf{E}\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} - \frac{1}{2} \mathbf{1} (\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}). \quad (4.3)$$

com $\mathbf{1}$ sendo o tensor identidade. Os campos elétrico e magnético em (4.3) correspondem à soma dos respectivos campos incidente e espalhado pela partícula, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{esp}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{esp}$. Vamos então analisar o problema do espalhamento de um feixe focalizado por um centro espalhador esférico homogêneo (espalhamento Mie). O procedimento escolhido para a determinação de \mathbf{E}_{inc} , \mathbf{E}_{esp} , \mathbf{H}_{inc} e \mathbf{H}_{esp} é o mesmo utilizado no cálculo da força óptica para feixes com perfil gaussiano e por isso vamos omitir alguns detalhes que podem ser encontrados em [32].

4.1.1 Potenciais de Debye

Consideramos inicialmente uma onda plana circularmente polarizada que se propaga em um meio com índice de refração n_1 ao longo do eixo \hat{z} (o caso com polarização linear foi investigado em [21]). Essa onda incide sobre uma esfera homogênea com índice de refração n_2 e raio a , cujo centro é a origem do nosso sistema de coordenadas. Os campos incidentes são dados por ($\sigma = \pm 1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 e^{i(kz - \omega t)} (\hat{x} + i\sigma \hat{y}), \\ \mathbf{H} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0 e^{i(kz - \omega t)} (\hat{y} - i\sigma \hat{x}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

De posse dos campos incidentes podemos obter os campos espalhados através do cálculo dos potenciais de Debye [48].

Os potenciais de Debye, ψ e χ , são soluções escalares da equação de onda, através das quais podemos obter soluções vetoriais, \mathbf{U} , aplicando o operador momento angular adimensional $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ e $\nabla \times \mathbf{L}$, ou seja,

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}(\psi) + \nabla \times \mathbf{L}(\chi). \quad (4.5)$$

O exemplo mais simples de um campo vetorial do tipo $\mathbf{L}(\psi)$ é o campo elétrico de um dipolo elétrico e o exemplo mais simples de um campo vetorial do tipo $\nabla \times \mathbf{L}(\chi)$ é o campo magnético de um dipolo elétrico [50].

Dada a solução vetorial da equação de Helmholtz \mathbf{U} (\mathbf{E} ou \mathbf{H}), podemos determinar a solução escalar (potencial de Debye) realizando o produto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{U}$. Calculamos então os potenciais de Debye $\psi = \Pi_E$ e $\chi = \Pi_M$ correspondentes às equações (4.4). A partir de Π_E e Π_M obtemos os potenciais de Debye para o campo espalhado e finalmente de posse destes, encontramos os campos espalhados.

Os campos incidentes (feixes focalizados) foram determinados no capítulo anterior através de uma expansão em ondas planas. Porém para o cálculo da força óptica é conveniente escrever os campos usando uma expansão em multipolos devido à simetria esférica do centro espalhador. O campo é expandido em ondas parciais parametrizadas pelo momento angular total J , de forma que cada uma dessas ondas está associada a um potencial de Debye específico para o respectivo valor de J . Temos que [49, 50]

$$\begin{aligned}\Pi^E &= \sum_J \Pi_J^E = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_J}{J(J+1)}, \\ \Pi^M &= \sum_J \Pi_J^M = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})_J}{J(J+1)}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Substituindo (4.4) em (4.6), escrevendo o resultado em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) e expandindo $e^{ikr \cos \theta}$ em ondas parciais [28],

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta)$$

obtemos

$$\begin{aligned}\Pi^E &= E_0 e^{i\sigma\phi} e^{-i\omega t} \frac{i}{k} \sum_{J=1}^{\infty} i^J \frac{(2J+1)}{J(J+1)} j_J(kr) \frac{\partial}{\partial \theta} [P_J(\cos \theta)], \\ \Pi^M &= -i\sigma \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \Pi_E,\end{aligned}\quad (4.7)$$

onde $j_J(kr)$ é a função de Bessel esférica de ordem J e $P_J(\cos \theta)$ é o polinômio de Legendre de grau J . Usando as propriedades das equações geradoras das funções de Legendre [33] e escrevendo-as em termos dos harmônicos esféricos $Y_{JM}(\theta, \phi)$ [28], obtemos,

$$\Pi^E = \sigma E_0 \frac{1}{k} e^{-i\omega t} \sum_{J=1}^{\infty} i^{J+1} \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} j_J(kr) Y_J^\sigma(\theta, \phi), \quad (4.8)$$

com Π^M dado por (4.7).

Até aqui, escrevemos os potenciais de Debye para uma onda plana incidente em uma esfera ao longo do eixo z . Como vimos no capítulo anterior, cada componente de Fourier do feixe focalizado pela objetiva incide ao longo de uma direção genérica $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\theta_k, \phi_k)$. Para obter os potenciais de Debye neste caso efetuamos uma rotação de Euler dos eixos coordenados. Essa rotação produz a seguinte modificação em (4.8),

$$Y_J^\sigma(\theta, \phi) \rightarrow \sum_{M'=-J}^J e^{-i(M'-\sigma)\phi_k} d_{M',\sigma}^J(\theta_k) Y_{J,M'}(\theta, \phi), \quad (4.9)$$

com $d_{M',\sigma}^J(\theta_k)$ sendo a matriz que efetua a rotação de θ_k em torno do eixo y , $d_{M',\sigma}^J(\theta_k) \equiv \langle JM'|e^{-i\theta_k J_y}|JM\rangle$ [51]. O passo seguinte é obter os potenciais de Debye para um cone de ondas com abertura θ_k e para isso devemos integrar (4.8), após ser modificada por (4.9), de 0 a 2π em ϕ_k e de 0 a θ_0 em θ_k . Devemos lembrar também que após a focalização o campo é reduzido por um fator $\sqrt{\cos\theta_k}$, resultando

$$\begin{aligned} \Pi^E(\rho, \theta, \phi) &= \sigma E_0 \frac{1}{k} e^{-i\omega t} \sum_{J=0}^{\infty} i^{J+1} \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} j_J(kr) \\ &\times \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin\theta_k \sqrt{\cos\theta_k} \sum_{M'=J}^J d_{M',\sigma}^J(\theta_k) Y_{J,M'}(\theta, \phi) \int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} e^{-i(M'-\sigma)\phi_k}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Aqui \mathbf{q} representa a posição do foco. Até então consideramos que a posição do foco era a mesma do centro da esfera, $\mathbf{q} = 0$. O fator $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}$ adiciona o fato de que a posição da esfera não coincide necessariamente com a posição do foco.

4.1.2 Efeito do perfil laguerre-gaussiano

Antes de realizar a integração em (4.10), devemos considerar o efeito do perfil laguerre-gaussiano do feixe. Uma onda plana circularmente polarizada propagando-se ao longo do eixo z é descrita por (4.4), enquanto uma onda com perfil laguerre-gaussiano circularmente polarizada propagando ao longo do eixo z é dada pelas equações (2.31) e (3.1)

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = E_0 \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_0} \right)^{|\ell|} e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2}} e^{i\ell\phi} e^{i(kz-\omega t)} (\hat{x} + i\sigma\hat{y}). \quad (4.11)$$

Comparando as equações (4.4) e (4.11) e usando (3.3), vemos então que o efeito de termos um feixe laguerre-gaussiano incidente no lugar de uma onda plana na entrada da objetiva é a introdução de

$$e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{w_0^2}} e^{i\ell\phi_k} \left(\frac{\sqrt{2}f \sin \theta_k}{w_0} \right)^{|\ell|}$$

na expressão para o campo incidente e conseqüentemente na expressão para o potencial de Debye correspondente. Além do efeito de mudança de perfil, devemos ainda introduzir um fator multiplicativo $-i\frac{f}{\lambda}$ associado a efeitos de difração na abertura circular da objetiva [17, 18], como fizemos no capítulo anterior. Incluindo estes novos termos em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} \Pi^E &= -i\sigma \frac{f}{\lambda k} \left(\sqrt{2}\gamma\right)^{|\ell|} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{JM'} i^{J+1} \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} j_J(kr) \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sqrt{\cos\theta_k} \\ &\times (\sin\theta_k)^{|\ell|+1} e^{-\gamma^2 \sin^2\theta_k} d_{M',\sigma}^J(\theta_k) Y_{J,M'}(\theta, \phi) \int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} e^{-i(M'-\sigma-\ell)\phi_k}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

com $\gamma = f/w_0$. Note que no fator de fase $e^{-i(M'-\sigma-\ell)\phi_k}$ em (4.12) aparece $M' - \sigma - \ell$, onde M' é o autovalor de componente z do operador momento angular e $\ell + \sigma$ a quantidade relacionada ao momento angular total do feixe.

Vamos calcular a integral sobre o ângulo ϕ_k

$$\int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} e^{-i(M'-\sigma-\ell)\phi_k}. \quad (4.13)$$

Para isso, escrevemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= q_x \hat{x} + q_y \hat{y} + q_z \hat{z}, \\ \mathbf{k} &= k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} = k \sin\theta_k \cos\phi_k \hat{x} + k \sin\theta_k \sin\phi_k \hat{y} + k \cos\theta_k \hat{z}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

logo,

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} = k(q_x \sin\theta_k \cos\phi_k + q_y \sin\theta_k \sin\phi_k + q_z \cos\theta_k). \quad (4.15)$$

Substituindo (4.15) em (4.13),

$$\int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} e^{-i(M'-\sigma-\ell)\phi_k} = e^{-iq_z \cos\theta_k} \int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i[k \sin\theta_k (q_x \cos\phi_k + q_y \sin\phi_k)]} e^{-i\mathcal{N}\phi_k}, \quad (4.16)$$

com $\mathcal{N} = M' - \sigma - \ell$. Escrevendo $q_x = q \cos\phi$ e $q_y = q \sin\phi$, encontramos

$$\int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} e^{-i\mathcal{N}\phi_k} = e^{-iq_z \cos\theta_k} \int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-ikq \sin\theta_k \cos(\phi-\phi_k)} e^{-i\mathcal{N}\phi_k}, \quad (4.17)$$

integral que foi resolvida no capítulo 3, equação (3.18). Assim podemos escrever

$$e^{-iq_z \cos\theta_k} \int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-ikq \sin\theta_k \cos(\phi-\phi_k)} e^{-i\mathcal{N}\phi_k} = 2\pi(-i)^{\mathcal{N}} e^{-i\mathcal{N}\phi} e^{-iq_z \cos\theta_k} J_{\mathcal{N}}(kq \sin\theta_k). \quad (4.18)$$

Substituindo o resultado de (4.18) em (4.12) e usando a segunda equação em (4.7), obtemos

$$\begin{aligned}\Pi_{inc}^E &= \sigma \frac{f}{\lambda k} \left(\sqrt{2}\gamma\right)^{|\ell|} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{JM} \Gamma_{JM} \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} j_J(kr) Y_{J,M}(\theta, \phi), \\ \Pi_{inc}^M &= -i \frac{f}{\lambda k} \left(\sqrt{2}\gamma\right)^{|\ell|} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{JM} \Gamma_{JM} \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} j_J(kr) Y_{J,M}(\theta, \phi),\end{aligned}\tag{4.19}$$

com

$$\begin{aligned}\Gamma_{JM} &= \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} i^J 2\pi (-i)^{M-\sigma-\ell} e^{-i(M-\sigma-\ell)\phi} \\ &\times \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sqrt{\cos \theta_k} (\sin \theta_k)^{|\ell|+1} e^{-\gamma^2 \sin^2 \theta_k} d_{M,\sigma}^J(\theta_k) J_{M-\sigma-\ell}(kq \sin \theta_k) e^{-iq_z \cos \theta_k}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

As expressões (4.19) fornecem os potenciais de Debye correspondentes aos campos elétrico e magnético incidentes.

Para obter o campo espalhado pela microesfera é necessário avaliar as condições de contorno na superfície da esfera e no infinito [32]. O resultado para os potenciais de Debye para o campo espalhado é da forma

$$\begin{aligned}\Pi_{esp}^E &= \sigma \frac{f}{\lambda k} \left(\sqrt{2}\gamma\right)^{|\ell|} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{JM} \Gamma_{JM} \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} (-a_J) h_J^{(1)}(kr) Y_{J,M}(\theta, \phi), \\ \Pi_{esp}^M &= -i \frac{f}{\lambda k} \left(\sqrt{2}\gamma\right)^{|\ell|} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{JM} \Gamma_{JM} \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} (-b_J) h_J^{(1)}(kr) Y_{J,M}(\theta, \phi),\end{aligned}\tag{4.21}$$

onde a_J e b_J são conhecidos como coeficientes de Mie [52]. Estes coeficientes representam amplitudes de espalhamento para as ondas de multipolo e são dados por

$$\begin{aligned}a_J &= \frac{\psi_J(\beta)\psi_J'(\alpha) - N\psi_J'(\beta)\psi_J(\alpha)}{\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi_J'(\alpha) - N\zeta_J^{(1)'}(\beta)\psi_J(\alpha)}, \\ b_J &= \frac{\psi_J'(\beta)\psi_J(\alpha) - N\psi_J(\beta)\psi_J'(\alpha)}{\zeta_J^{(1)'}(\beta)\psi_J(\alpha) - N\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi_J'(\alpha)},\end{aligned}\tag{4.22}$$

com $N = n_2/n_1$, $\alpha = Nka$ e $\beta = ka$. As funções $\psi_J(x) = xj_J(x)$ e $\zeta_J^{(1)}(x) = xh_J^{(1)}(x)$ são chamadas funções de Riccati-Bessel. A função $h_J^{(1)}(x)$ que também aparece em (4.21) é a função de Hankel esférica, cujo comportamento assintótico ($kr \gg J$) está em acordo com as características de uma onda esférica emergente,

$$h_J^{(1)}(x) \rightarrow (-i)^{J+1} \frac{e^{ix}}{x}.\tag{4.23}$$

Para obtermos os campos totais \mathbf{E} e \mathbf{H} , devemos somar os respectivos termos incidente e espalhado, obtidos através da aplicação dos operadores vetoriais \mathbf{L} e $\nabla \times \mathbf{L}$ nos potenciais de Debye [49, 50]:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{in} &= -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{inc}^E) + \omega\mu_0\mathbf{L}(\Pi_{inc}^M), \\ \mathbf{H}_{in} &= -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{inc}^M) - \omega\varepsilon\mathbf{L}(\Pi_{inc}^E), \\ \mathbf{E}_s &= -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{esp}^E) + \omega\mu_0\mathbf{L}(\Pi_{esp}^M), \\ \mathbf{H}_s &= -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{esp}^M) - \omega\varepsilon\mathbf{L}(\Pi_{esp}^E).\end{aligned}\tag{4.24}$$

Agora voltamos à equação (4.2) para o cálculo da força óptica. Substituindo (4.3) em (4.2), obtemos

$$\mathbf{F} = \oint_S [\epsilon\mathbf{E}\mathbf{E} + \mu_0\mathbf{H}\mathbf{H} - \frac{1}{2}\mathbf{1}(\epsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mu_0\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})] \cdot d\mathbf{A}.\tag{4.25}$$

A integração deve ocorrer sobre toda a superfície da esfera e assim,

$$d\mathbf{A} = \hat{n}dA = \hat{r}r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \hat{r}r^2 d\Omega.\tag{4.26}$$

Substituindo (4.26) em (4.25),

$$\mathbf{F} = \oint_S [\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{E} \cdot \hat{r}) + \mu_0\mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot \hat{r}) - \frac{1}{2}\hat{r}(\epsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mu_0\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})]r^2 d\Omega.\tag{4.27}$$

Podemos analisar o fluxo de momento através de qualquer superfície fechada que envolva o centro espalhador e por facilidade, vamos considerar uma esfera com raio tendendo a infinito.

De acordo com (4.23), podemos notar que as expressões para os potenciais de Debye caem com r^{-1} . Quando aplicamos $i\nabla \times \mathbf{L}$ nos potenciais de Debye, as componentes radiais são multiplicadas por r^{-1} . Assim enquanto as componentes tangenciais caem com r^{-1} , as componentes radiais caem com r^{-2} , de modo que $\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{E} \cdot \hat{r})$ e $\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot \hat{r})$ possuem termos que caem com r^{-3} e r^{-4} , diferentemente dos termos $\epsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ e $\mu_0\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$ que caem com r^{-2} e r^{-4} . Se $r \rightarrow \infty$, e como a área cresce com r^2 , podemos concluir que a expressão para a força pode ser reduzida a

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2}r^2 \oint_S (\epsilon E_{tan}^2 + \mu_0 H_{tan}^2) \hat{r} d\Omega,\tag{4.28}$$

onde E_{tan} e H_{tan} são as componentes tangenciais dos campos.

Para facilitar os cálculos, introduzimos os vetores

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_X^{E,M} &= i\mathbf{L}(\Pi^{E,M}), \\ \mathbf{I}_Z^{E,M} &= -\frac{1}{k}\nabla \times \mathbf{L}(\Pi^{E,M}),\end{aligned}\quad (4.29)$$

de forma que podemos escrever os campos totais como

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= ik \left[\mathbf{I}_Z^E - \frac{c\mu_0}{n_1} \mathbf{I}_X^M \right], \\ \mathbf{H} &= ik \left[\mathbf{I}_Z^M - \frac{c\epsilon}{n_1} \mathbf{I}_X^E \right].\end{aligned}\quad (4.30)$$

De (4.30), escrevemos as componentes tangenciais dos campos para o cálculo da força,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{tan} &= ik \left[\mathbf{I}_{Zt}^E - \frac{c\mu_0}{n_1} \mathbf{I}_X^M \right], \\ \mathbf{H}_{tan} &= ik \left[\mathbf{I}_{Zt}^M - \frac{c\epsilon}{n_1} \mathbf{I}_X^E \right],\end{aligned}\quad (4.31)$$

com

$$\mathbf{I}_{Zt}^{E,M} = -\frac{i}{kr} \left[\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi^{E,M}}{\partial \theta} \right) + \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Pi^{E,M}}{\partial \phi} \right) \right]. \quad (4.32)$$

O vetor $\mathbf{I}_X^{E,M}$ não possui componente radial e por isso $\mathbf{I}_X^{E,M} = \mathbf{I}_{Xt}^{E,M}$. Substituindo (4.31) em (4.28),

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\frac{1}{2}\epsilon k^2 r^2 \oint_S \left[\mathbf{I}_{Zt}^E \cdot \mathbf{I}_{Zt}^{E*} - \frac{c\mu_0}{n_1} (\mathbf{I}_X^{M*} \cdot \mathbf{I}_{Zt}^E + \mathbf{I}_{Zt}^{E*} \cdot \mathbf{I}_X^M) + \frac{c^2 \mu_0^2}{n_1^2} \mathbf{I}_X^M \cdot \mathbf{I}_X^{M*} \right] \hat{r} d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu_0 k^2 r^2 \oint_S \left[\mathbf{I}_{Zt}^M \cdot \mathbf{I}_{Zt}^{M*} - \frac{c\epsilon}{n_1} (\mathbf{I}_X^{E*} \cdot \mathbf{I}_{Zt}^M + \mathbf{I}_{Zt}^{M*} \cdot \mathbf{I}_X^E) + \frac{c^2 \epsilon^2}{n_1^2} \mathbf{I}_X^E \cdot \mathbf{I}_X^{E*} \right] \hat{r} d\Omega.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Para obtermos a expressão para a força, devemos escrever explicitamente as expressões para os campos vetoriais $\mathbf{I}_{Zt}^{E,M}$ e $\mathbf{I}_X^{E,M}$ e calcular as integrais em (4.33). Na verdade os primeiros termos nas duas integrais em (4.33) não contribuem para a força, eles representam apenas a densidade de energia da onda incidente. Os detalhes do cálculo dos últimos termos em cada integral em (4.33) podem ser encontrados em [32] e dá origem à contribuição $\mathbf{F}_{esp,esp}$ para a força devido ao momento do campo espalhado. Os detalhes do cálculo dos outros dois termos em cada integral em (4.33) também podem ser encontrados em [32] e corresponde à contribuição $\mathbf{F}_{inc,esp}$, associada à extinção do momento do feixe incidente.

Antes da análise numérica de nosso problema, redefinimos a origem do sistema de coordenadas como sendo o foco do feixe. Deduzimos nossas expressões considerando a

origem como o centro da esfera para aproveitar a simetria esférica do problema. Porém, nos experimentos é a esfera que se desloca no campo de forças produzido pelo feixe focalizado. Essa mudança provoca as seguintes transformações nos vetores unitários

$$\begin{aligned}\hat{\rho}' &= -\hat{\rho}, \\ \hat{\phi}' &= -\hat{\phi}, \\ \hat{z}' &= \hat{z},\end{aligned}\tag{4.34}$$

enquanto o vetor posição da esfera, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \phi, z)$, em relação à posição do foco, $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$, se relacionam conforme

$$\begin{aligned}z &= -q_z, \\ \rho &= \sqrt{q_x^2 + q_y^2}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Assim, obtemos a expressão para a força sobre uma microesfera de raio a na posição (ρ, ϕ, z) exercida por um feixe com perfil laguerre-gaussiano focalizado com polarização circular, que em coordenadas cilíndricas é dada pela soma de

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{inc,esp} &= -\pi\epsilon f^2 E_0^2 (2\gamma^2)^{|\ell|} \sum_{JM} (2J+1) \left\{ \Im [(a_J^* + b_J^*) (\mathcal{G}_{J,M+1}^- \mathcal{G}_{JM}^* - \mathcal{G}_{J,M-1}^+ \mathcal{G}_{JM}^*)] \hat{\rho} \right. \\ &\quad - \Re [(a_J^* + b_J^*) (\mathcal{G}_{J,M+1}^- \mathcal{G}_{JM}^* + \mathcal{G}_{J,M-1}^+ \mathcal{G}_{JM}^*)] \hat{\phi} \\ &\quad \left. + 2\Re [(a_J^* + b_J^*) (\mathcal{G}_{JM}^C \mathcal{G}_{JM}^*)] \right\} \hat{z}\end{aligned}\tag{4.36}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{esp,esp} &= +2\pi\epsilon f^2 E_0^2 (2\gamma^2)^{|\ell|} \sum_{JM} \left\{ \sigma \frac{(2J+1)}{J(J+1)} [-2g_{JM} \Re(a_J b_J^*) \Im(\mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J,M+1}^*) \hat{\rho} \right. \\ &\quad - 2g_{JM} \Re(a_J b_J^*) \Im(\mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J,M+1}^*) \hat{\phi} \\ &\quad + 2M \Re(a_J b_J^*) \mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{JM}^* \hat{z}] \\ &\quad - \frac{J(J+2)}{(J+1)} [f_{JM} \Im[(a_J a_{J+1}^* + b_J b_{J+1}^*) (\mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J+1,M+1}^* + \mathcal{G}_{J,-M} \mathcal{G}_{J+1,-(M+1)}^*)] \hat{\rho} \\ &\quad + f_{JM} \Re[(a_J a_{J+1}^* + b_J b_{J+1}^*) (\mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J+1,M+1}^* - \mathcal{G}_{J,-M} \mathcal{G}_{J+1,-(M+1)}^*)] \hat{\phi} \\ &\quad \left. + 2h_{JM} \Re[(a_J a_{J+1}^* + b_J b_{J+1}^*) \mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J+1,M}^*] \right\} \hat{z},\end{aligned}\tag{4.37}$$

com

$$\begin{aligned}
 g_{JM} &= \sqrt{(J-M)(J+M+1)}, \\
 f_{JM} &= \sqrt{\frac{(J+M+1)(J+M+2)}{J(J+2)}}, \\
 h_{JM} &= \sqrt{\frac{(J-M+1)(J+M+1)}{J(J+2)}}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{JM} &= \int_0^{\theta_0} d\theta_k (\sin \theta_k)^{\ell+1} \sqrt{\cos \theta_k} e^{ikz \cos \theta_k} e^{-\gamma^2 \sin^2 \theta_k} d_{M,\sigma}^J(\theta_k) J_{M-\sigma-\ell}(k\rho \sin \theta_k), \\
 \mathcal{G}_{JM}^C &= \int_0^{\theta_0} d\theta_k (\sin \theta_k)^{\ell+1} (\cos \theta_k)^{\frac{3}{2}} e^{ikz \cos \theta_k} e^{-\gamma^2 \sin^2 \theta_k} d_{M,\sigma}^J(\theta_k) J_{M-\sigma-\ell}(k\rho \sin \theta_k), \\
 \mathcal{G}_{JM}^{\pm} &= \int_0^{\theta_0} d\theta_k (\sin \theta_k)^{\ell+2} \sqrt{\cos \theta_k} e^{ikz \cos \theta_k} e^{-\gamma^2 \sin^2 \theta_k} d_{M\pm 1,\sigma}^J(\theta_k) J_{M-\sigma-\ell}(k\rho \sin \theta_k).
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

4.2 Fator Q

É conveniente definir uma força adimensional através de um fator de eficiência vetorial [53]

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{n_1}{c}P}, \quad (4.40)$$

com P sendo a potência do laser na amostra após a passagem pela objetiva que, como vimos no capítulo 2 é dependente do valor de ℓ . O fator Q quantifica a eficiência do processo de transferência de momento da onda para a esfera.

Substituindo os resultados para \mathbf{F} e P em (4.40), obtemos as forças adimensionais

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ext} &= (2\gamma^2)^{|\ell|+1} \frac{1}{\mathcal{A}_{|\ell|}} \sum_{JM} (2J+1) \left\{ \Im [(a_J^* + b_J^*) (\mathcal{G}_{J,M+1}^- \mathcal{G}_{JM}^* - \mathcal{G}_{J,M-1}^+ \mathcal{G}_{JM}^*)] \hat{\rho} \right. \\ &\quad - \Re [(a_J^* + b_J^*) (\mathcal{G}_{J,M+1}^- \mathcal{G}_{JM}^* + \mathcal{G}_{J,M-1}^+ \mathcal{G}_{JM}^*)] \hat{\phi} \\ &\quad \left. + 2\Re [(a_J^* + b_J^*) (\mathcal{G}_{JM}^C \mathcal{G}_{JM}^*)] \right\} \hat{z}, \\ \mathbf{Q}_{esp} &= - (2\gamma^2)^{|\ell|+1} \frac{2}{\mathcal{A}_{|\ell|}} \sum_{JM} \left\{ \sigma \frac{(2J+1)}{J(J+1)} [-2g_{JM} \Re (a_J b_J^*) \Im (\mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J,M+1}^*)] \hat{\rho} \right. \\ &\quad - 2g_{JM} \Re (a_J b_J^*) \Im (\mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J,M+1}^*) \hat{\phi} \\ &\quad + 2M \Re (a_J b_J^*) \mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{JM}^* \hat{z} \\ &\quad - \frac{J(J+2)}{(J+1)} [f_{JM} \Im [(a_J a_{J+1}^* + b_J b_{J+1}^*) (\mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J+1,M+1}^* + \mathcal{G}_{J,-M} \mathcal{G}_{J+1,-(M+1)}^*)]] \hat{\rho} \\ &\quad + f_{JM} \Re [(a_J a_{J+1}^* + b_J b_{J+1}^*) (\mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J+1,M+1}^* - \mathcal{G}_{J,-M} \mathcal{G}_{J+1,-(M+1)}^*)] \hat{\phi} \\ &\quad \left. + 2h_{JM} \Re [(a_J a_{J+1}^* + b_J b_{J+1}^*) \mathcal{G}_{JM} \mathcal{G}_{J+1,M}^*] \right\} \hat{z}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

com

$$\mathcal{A}_{|\ell|} = \int_0^{\frac{2r_{obj}^2}{w_0^2}} dy e^{-y} y^{|\ell|}, \quad (4.42)$$

para $y = \frac{2r^2}{w_0^2}$ e r_{obj} representando o raio da abertura de entrada da objetiva. O fator de eficiência \mathbf{Q}_{ext} está relacionado ao efeito de extinção do momento linear do feixe incidente resultante da interferência destrutiva entre os campos incidente e espalhado. Ele representa a taxa na qual o momento é removido do feixe. Por outro lado, $-\mathbf{Q}_{esp}$ representa a taxa com que o momento é transferido para o campo espalhado. Assim, a taxa de transferência de momento para a partícula é $\mathbf{Q}_{ext} - (-\mathbf{Q}_{esp})$.

4.3 Aberração esférica

Aqui desejamos incorporar o efeito da aberração esférica ao tratamento feito até agora para a determinação da força exercida por uma pinça óptica sobre uma esfera dielétrica [54]. Este efeito é produzido pela refração na interface entre a lamínula no microscópio e o meio onde as esferas se encontram (interface vidro-água). Em geral, a objetiva utilizada em montagens experimentais é uma objetiva de imersão em óleo. Na Figura 4.5 representamos raios ópticos focalizados na região da amostra, localizada sobre uma lamínula de vidro.

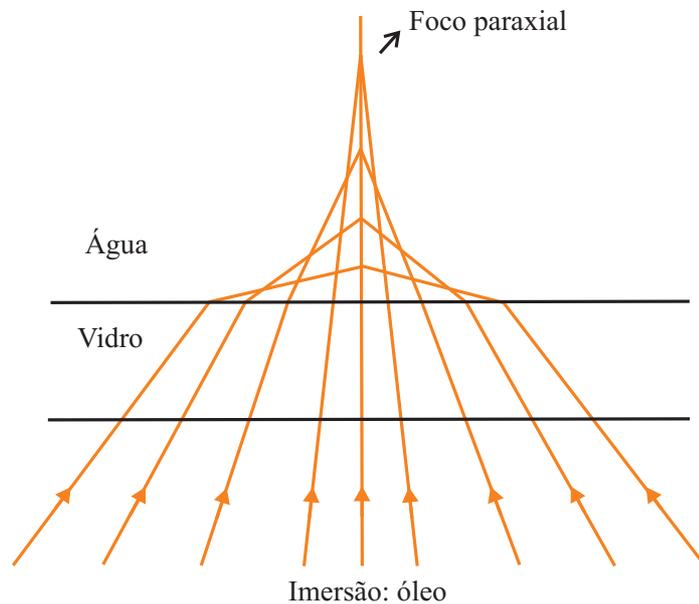


Figura 4.5: *Feixe focalizado por uma objetiva de imersão em óleo.*

O índice de refração do vidro e do óleo podem ser considerados iguais mas são diferentes do índice de refração da água. Aplicando então a lei de Snell, podemos notar que o feixe é focalizado em diferentes pontos ao longo do eixo óptico, efeito denominado aberração esférica.

A presença da interface vidro-água introduz uma diferença de caminho óptico na trajetória dos raios refratados, produzindo uma modificação na fase das ondas planas que formam o feixe cônico de luz. A fase das ondas incidentes serão modificadas pelo fator $e^{i\psi(q'_z)}$ [22] com

$$\psi(q'_z) = k \left[-\frac{L}{N'} \cos \theta_k + N'(L - q'_z) \cos \theta_k^1 \right], \quad (4.43)$$

sendo L a distância entre a interface e o plano focal, $N' = n_1/n$ (n_1 é o índice de refração da água e n o índice de refração do vidro), $q'_z = L(1 - 1/N') + z$ e θ_k^1 correspondendo ao

ângulo de refração [54]. A equação (4.43) é conhecida como função de aberração. Para obtermos a expressão para a força óptica, multiplicamos os integrandos em (4.39) pelo fator $e^{i\psi(q'_z)}$, realizamos a integração na variável θ_k no vidro e a rotação dos vetores de onda de um ângulo θ_k^1 , ou seja, $d_{M\pm 1, \sigma}^J(\theta_k) \rightarrow d_{M\pm 1, \sigma}^J(\theta_k^1)$. Se θ_0 , o limite superior da integral na variável θ_k , é maior que o ângulo de incidência limite θ_0^{max} na interface vidro-água, substituímos θ_0 por $\theta_0^{max} = \arcsin N'$, pois desconsideraremos o efeito de possíveis ondas evanescentes.

A interface vidro-água modifica não apenas a fase mas também a amplitude de cada uma das ondas que a atravessa e uma consequência disso é a diminuição da potência total disponível. Para calcular a potência total disponível que atravessa a interface vidro-água, usamos a potência infinitesimal total dP que a atravessa. A razão entre as potências infinitesimais totais disponíveis depois e antes de atravessar a interface (transmissividade) é [55]

$$\frac{dP^1}{dP} = \frac{n_1 \cos \theta_k^1}{n \cos \theta_k} T^2(\theta_k), \quad (4.44)$$

com $T^2(\theta_k) = 2 \sin \theta_k^1 \cos \theta_k / \sin(\theta_k + \theta_k^1)$ [56] e dP representando a potência infinitesimal no vidro, dada por

$$dP = \frac{2\pi n}{\mu c} E_0^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^{2|\ell|} e^{-\frac{2\rho^2}{w_0^2}} \rho^{2|\ell|+1} d\rho. \quad (4.45)$$

Substituindo (4.45) em (4.44) obtemos a potência infinitesimal disponível na água

$$dP^1 = \frac{2\pi n}{\mu c} E_0^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^{2|\ell|} \frac{n_1 \cos \theta_k^1}{n \cos \theta_k} T^2(\theta_k) e^{-\frac{2\rho^2}{w_0^2}} \rho^{2|\ell|+1} d\rho. \quad (4.46)$$

Sabendo que a condição seno de Abbe nos permite escrever $\rho = f \sin \theta_k$, temos integrando ao longo do cone de ondas no vidro:

$$P^1 = \frac{2\pi n_1 f^2}{\mu c} E_0^2 \left(\sqrt{2}\gamma \right)^{2|\ell|} \int_0^{\theta_0^{max}} d\theta_k (\sin \theta_k)^{2|\ell|+1} \cos \theta_k^1 T^2(\theta_k) e^{-2\gamma^2 \sin^2 \theta_k}, \quad (4.47)$$

com o limite superior da integral acima sendo uma indicação de que todas as ondas componentes com ângulos de incidência menor ou igual ao ângulo limite contribuirão para o cálculo da potência transmitida. Assim, o resultado encontrado para o fator de eficiência em (4.41) deve ser dividido por N' e $\mathcal{A}'_{|\ell|}$ deve ser redefinido como

$$\mathcal{A}'_{|\ell|} = \int_0^{\theta_0^{max}} d\theta_k \left[(\sin \theta_k)^{2|\ell|+1} \cos \theta_k^1 e^{-2\gamma^2 (\sin \theta_k)^2} \left(\frac{2n \cos \theta_k}{n \cos \theta_k + n_1 \cos \theta_k^1} \right)^2 \right] \quad (4.48)$$

Por fim, multiplicando os integrandos em (4.39) pela transmissividade $T(\theta_k)$, obtemos as expressões finais para a eficiência de aprisionamento da pinça óptica levando em conta os efeitos da aberração esférica.

4.4 Eficiência axial

Nós investigamos a eficiência de aprisionamento axial Q_z quando usamos um feixe com perfil laguerre-gaussiano, sendo Q_z a soma das componentes na direção \hat{z} de Q_{ext} e Q_{esp} dados por (4.41). Usamos os seguintes parâmetros experimentais: $n_1 = 1,33$, $n_2 = 1,58$, $N' = 0,88$, $NA = 1,4$, $\lambda = 1,064 \mu m$, $a = 1 \mu m$, $P = 60 mW$ e $r_{obj} = 5 mm$.

Representamos na Figura 4.6, os valores de Q_z em função de z/a (a distância axial em relação ao foco dividida pelo raio) no caso típico de uma pinça que trabalha com um feixe gaussiano e no caso em que usamos um feixe com momento angular orbital. O comportamento qualitativo das duas curvas é explicado em termos da competição entre a força de gradiente e a pressão de radiação. Na região negativa de z/a (na região anterior ao foco considerando o sentido de propagação do feixe), as duas contribuições são somadas enquanto na região positiva de z/a as duas contribuições são subtraídas. Podemos observar que $|Q_{z,max}|$ na região positiva de z/a para $\ell = 0$ é menor do que para $\ell = 1$, indicando que um feixe com momento angular orbital produz uma armadilha mais eficiente. A explicação para esse fato é que devido à intensidade nula sobre o eixo (ou intensidade pequena em alguns casos especiais), a contribuição da pressão de radiação que tende a empurrar a esfera no sentido de propagação do feixe é reduzida. Uma vantagem no uso de feixes com momento angular orbital é a possibilidade de reduzir a potência utilizada e obter a mesma eficiência de aprisionamento. Esse fato é extremamente importante pois a potência pode causar danos às amostras, especialmente quando estas são microorganismos biológicos.

Quando a objetiva é iluminada por um feixe gaussiano, este feixe deve exceder a entrada da objetiva de forma que a abertura numérica seja totalmente aproveitada. Por outro lado, quando um feixe laguerre-gaussiano ilumina a objetiva, devido ao seu perfil de intensidade anelar, devemos controlar o raio de intensidade máxima ρ_{max} do feixe para que este aproveite a abertura numérica da objetiva, sem que a potência do feixe seja quase inteiramente perdida logo na entrada da objetiva. Quando fixamos um valor para ρ_{max} e aumentamos ℓ , de acordo com a equação (2.35), o valor de w_0 diminui e cada vez mais nos aproximamos do limite paraxial. Dessa forma não é suficiente que o valor de ℓ aumente para que tenhamos maiores valores de $|Q_{z,max}|$ pois a cintura do feixe deve ter um valor mínimo para que o aprisionamento seja mais eficiente. Na Figura 4.7 apresentamos Q_z em função de z/a (apenas na região positiva de z), quando $\rho_{max} = 2,6 mm$ é fixo. Para $\ell = 0, 1, 2$ e 3 , temos a cintura do feixe igual a $w_0 = 3,7 mm$, $w_0 = 2,6 mm$ e $w_0 = 2,2 mm$, respectivamente. Neste caso, notamos que o aumento de ℓ não implica necessariamente em uma pinça óptica mais eficiente,

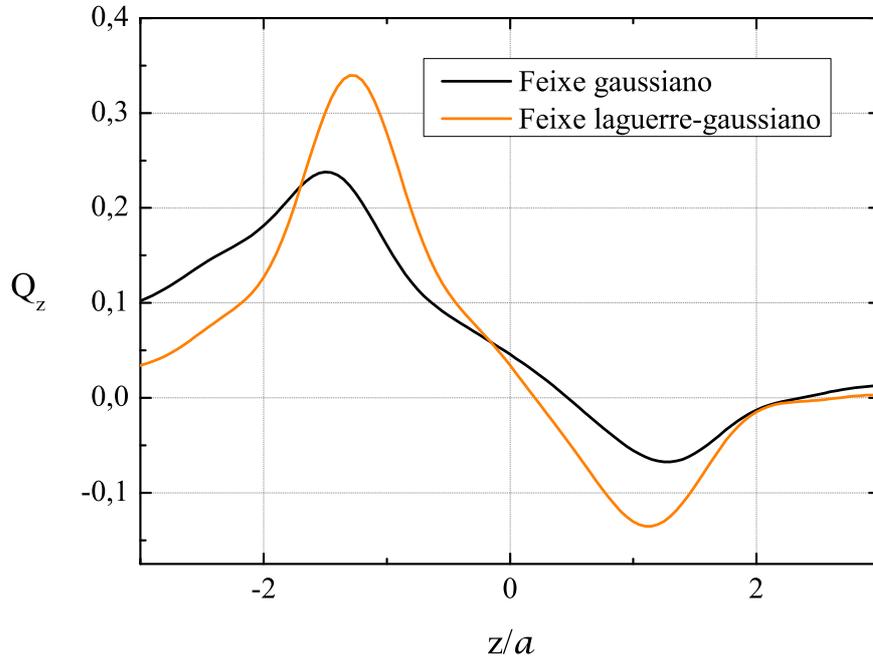


Figura 4.6: Q_z em função de z/a para $\rho = 0$ e para $\ell = 0$ e $\ell = 1$. Consideramos $w_0 = 3,7 \text{ mm}$, $f = 5,4 \text{ mm}$ e $\sigma = 1$.

para $\ell = 3$ o valor de $|Q_{z,max}|$ já é menor do que o valor para $\ell = 0$.

Calculamos o valor de $|Q_{z,max}|$ considerando w_0 fixo para diferentes valores de ℓ e apresentamos os resultados na Tabela 4.1. Aqui, quanto maior o valor de ℓ maior o valor de ρ_{max} e, enquanto este valor for menor que o raio da objetiva r_{obj} , maior será $|Q_{z,max}|$ considerando w_0 fixo.

ℓ	$w_0 = 2.4 \text{ mm}$	$w_0 = 2.9 \text{ mm}$
0	0.011	0.028
1	0.037	0.068
2	0.064	0.105
3	0.083	0.120

Tabela 4.1: Valores de $|Q_{z,max}|$.

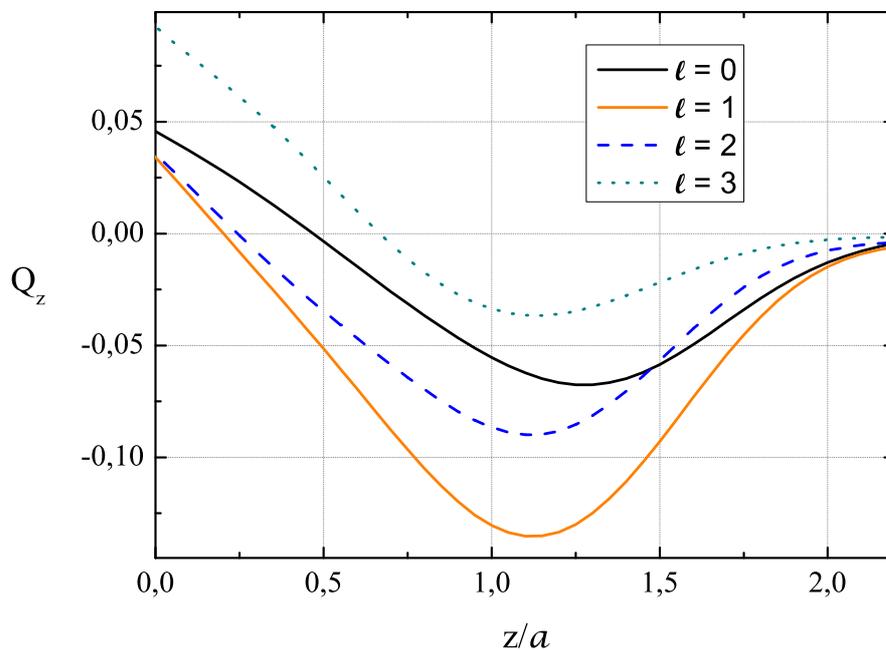


Figura 4.7: Q_z em função de z/a para $\rho = 0$, $l = 0, 1, 2, 3$ e $\sigma = 1$ com ρ_{max} fixo.

Para esferas maiores ou de tamanho comparável ao comprimento de onda, o efeito da polarização pode ser desprezado. Ele torna-se importante quando as esferas são menores, o que discutiremos na próxima seção. Quando invertemos os sinais de l e σ obtemos os mesmos resultados, $Q_z(l, \sigma = 1) = Q_z(-l, \sigma = -1)$.

4.5 Eficiência radial

A componente Q_ρ (a soma das componentes de Q_{ext} e Q_{esp} na direção $\hat{\rho}$) representa a eficiência de aprisionamento transversal da pinça óptica. Nós calculamos Q_ρ em função de ρ/a para feixes gaussianos e feixes laguerre-gaussianos com diferentes valores de ℓ . O comportamento de Q_ρ em função do deslocamento da esfera no plano perpendicular ao eixo óptico não sofre grande variação quando usamos feixes com $\ell \geq 0$ para esferas cujo tamanho é maior ou da ordem do comprimento de onda do feixe. Na medida em que tomamos valores menores para o raio da esfera a , observamos que a partir de um certo valor o comportamento de Q_ρ é diferente para os diferentes perfis transversais do feixe.

Usando os mesmos parâmetros experimentais para o cálculo de Q_z ($n_1 = 1,33$, $n_2 = 1,58$, $N' = 0,88$, $NA = 1,4$, $\lambda = 1,064 \mu m$, $P = 60 mW$ e $r_{obj} = 5 mm$) e para uma esfera de raio $a = 0,27 \mu m$, calculamos Q_ρ em função de ρ/a quando $\ell = 0, 1, 2, 3$ e os resultados são representados na Figura 4.8. Podemos notar que quando temos um feixe gaussiano na entrada da objetiva, Q_ρ possui apenas valores negativos e seu módulo cresce a partir da origem até um valor máximo na posição próxima a $\rho = a$. Este é o comportamento geral para esferas de tamanhos maiores, independente do perfil do feixe. Estes valores negativos indicam uma força que aponta em direção ao eixo óptico, isto é, uma força transversa restauradora.

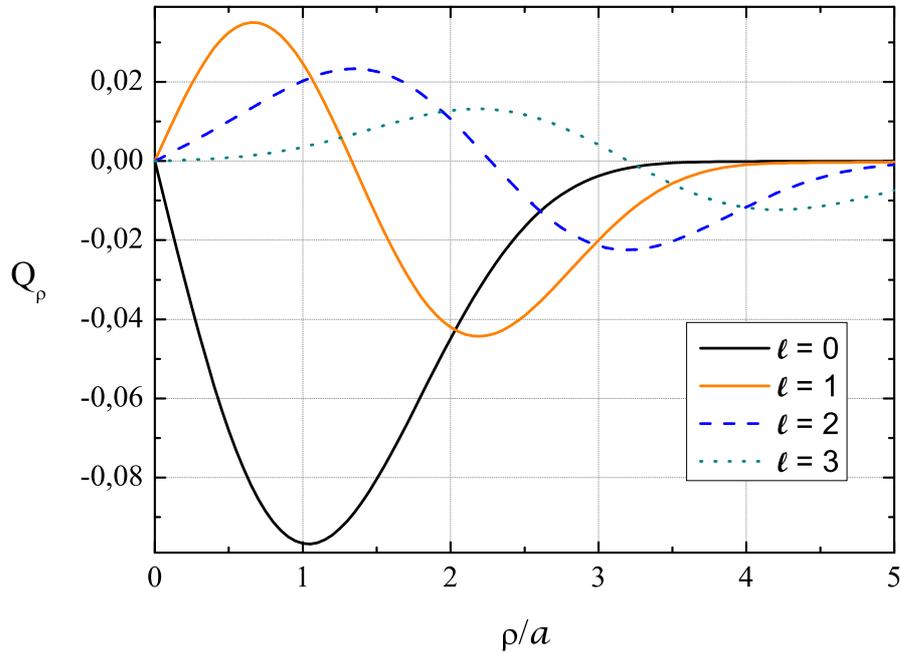


Figura 4.8: Q_ρ em função de ρ/a para $z = 0$ e $\ell = 0, 1, 2, 3$ e polarização $\sigma = 1$.

Por outro lado, podemos observar na Figura 4.8 que quando $\ell > 0$, há uma região próxima ao eixo ($\rho = 0$) em que Q_ρ apresenta valores positivos, indicando uma força que tende a afastar a esfera do eixo óptico. Como essa região é seguida de outra que apresenta valores negativos de Q_ρ podemos supor que há um ponto de equilíbrio no plano transversal fora do eixo quando o feixe possui momento angular orbital. É importante ressaltar que esse ponto de equilíbrio transversal não implica no aprisionamento da esfera pois este ponto pode não corresponder a um ponto de equilíbrio axial.

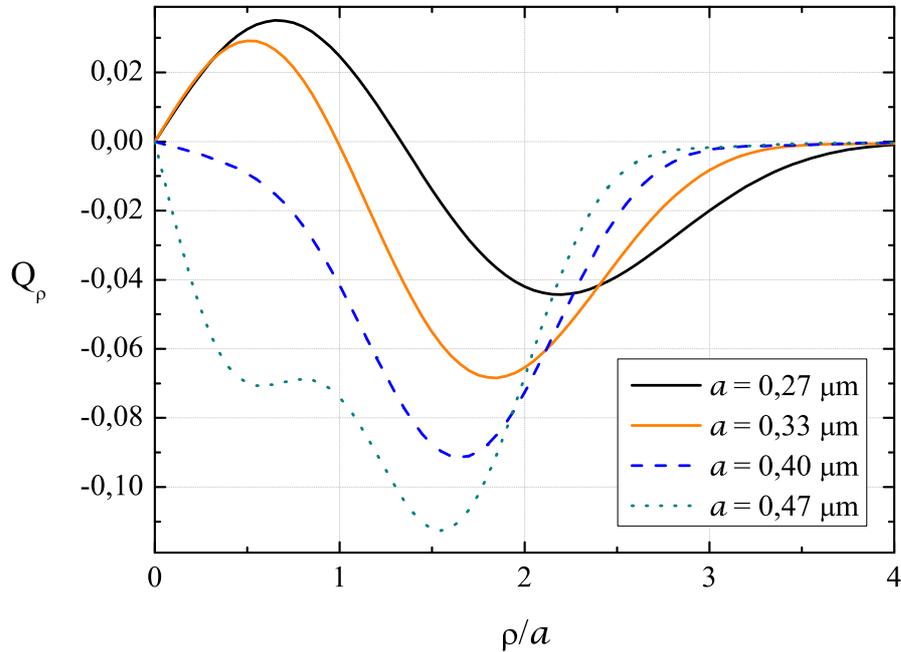


Figura 4.9: Q_ρ em função de ρ/a para $z = 0$, $\ell = 1$, polarização $\sigma = 1$ e diferentes valores do raio da esfera.

Conforme ℓ aumenta, o ponto em que Q_ρ muda de sinal é deslocado para um valor $\rho \neq 0$ cada vez maior. O raio de intensidade máxima do feixe ρ_{max} também aumenta com ℓ e é razoável que uma esfera pequena em comparação com ρ_{max} seja atraída para essa região anelar, afastando-se do eixo óptico. Na Figura 4.9 apresentamos Q_ρ em função de ρ/a para $\ell = 1$ e esferas com raios de tamanhos diferentes, mostrando que esferas podem ter sua posição de equilíbrio transversal sobre o eixo (curvas tracejada e pontilhada) ou fora dele (curvas cheias). Mais uma vez, esta situação não indica aprisionamento e na verdade, para que uma esfera com raio pequeno seja aprisionada por um pinça óptica é necessário um feixe laguerre-gaussiano com ℓ grande, como mostrado experimentalmente em [57], onde microesferas de $a = 0.4 \mu\text{m}$ são aprisionadas na região de intensidade máxima por um feixe com $\ell = 15$.

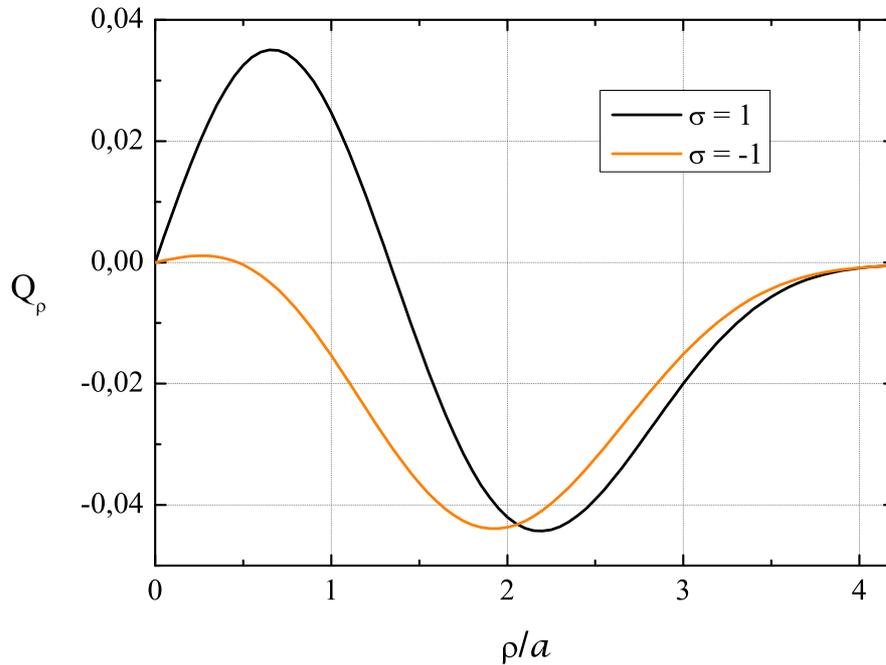


Figura 4.10: Q_ρ em função de ρ/a para $\rho = 0$ e $\ell = 1$ com $\sigma = \pm 1$.

Analisamos o efeito da polarização na componente Q_ρ do fator de eficiência. Sabemos que para $|\ell| = 1, 2$ e polarização $\sigma = -1$, a intensidade sobre o eixo não é nula e isso influencia o comportamento de Q_ρ para esferas pequenas. Na Figura 4.10, apresentamos Q_ρ em função de ρ/a para $\ell = 1$ e polarização $\sigma = \pm 1$ quando $a = 0,27 \mu\text{m}$. Podemos observar que quando há intensidade sobre o eixo (curva laranja), o comportamento de Q_ρ para um feixe laguerre-gaussiano aproxima-se do comportamento de Q_ρ para um feixe gaussiano, em contraste com o caso onde o feixe possui momentos angular orbital e de spin paralelos (curva preta). Assim como acontece com a componente Q_z , quando invertemos ambos os sinais de ℓ e σ , obtemos os mesmos resultados, $Q_\rho(\ell, \sigma = -1) = Q_\rho(-\ell, \sigma = 1)$.

4.6 Eficiência azimutal

Por fim, apresentamos a componente Q_ϕ do fator de eficiência \mathbf{Q} , que está relacionada à transferência de momento angular da onda para a partícula durante a reflexão do feixe incidente (Q_ϕ corresponde à soma das componentes na direção $\hat{\phi}$ de Q_{ext} e Q_{esp}). O momento angular da esfera pode ser decomposto em duas componentes: o momento angular do centro de massa, associado ao seu movimento de revolução em relação ao eixo óptico, e o momento angular em relação ao centro de massa, associado à rotação em torno do seu próprio centro.

Podemos obter a taxa de transferência para o momento angular do centro de massa por meio de

$$\tau = \rho \frac{n_1 P}{c} Q_\phi. \quad (4.49)$$

Por outro lado, o estudo da transferência de momento angular em relação ao centro de massa, que é mais relevante no caso de partículas absorvedoras, exige um cálculo independente do torque óptico [58].

Na Figura 4.11, representamos Q_ϕ em função de ρ/a para feixes gaussianos e feixes laguerre-gaussianos com diferentes valores de ℓ . Em todos os casos, consideramos $\sigma = 1$, $n_1 = 1,32$, $n_2 = 1,57$, $N' = 0,87$, $NA = 1,25$, $\lambda = 1,064 \mu m$, $a = 0,266 \mu m$, $P = 60 mW$, $w_0 = 3,5 mm$ e $r_{obj} = 5 mm$. Quando invertemos ambos os sinais de ℓ e σ , obtemos $Q_\phi(\ell, \sigma = 1) = -Q_\phi(-\ell, \sigma = -1)$, conforme poderíamos esperar. Para $\ell = 0$, o valor de $Q_\phi > 0$ é consequência da polarização circular do feixe σ . Para $\ell = 1$ e $\ell = 3$, o valor de Q_ϕ corresponde às contribuições de momento angular de spin e orbital. Quanto maior o valor de ℓ , maior o valor de Q_ϕ que ocorre em uma posição cada vez mais afastada do eixo (mais próxima de ρ_{max}).

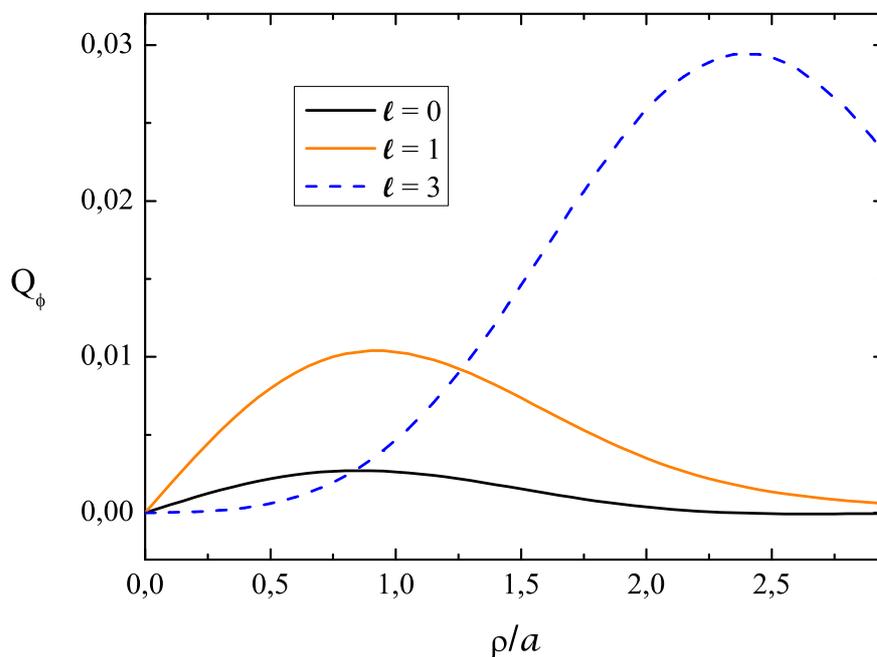


Figura 4.11: Q_ϕ em função de ρ/a para $z = 0$ e $l = 0, 1, 3$ e polarização $\sigma = 1$.

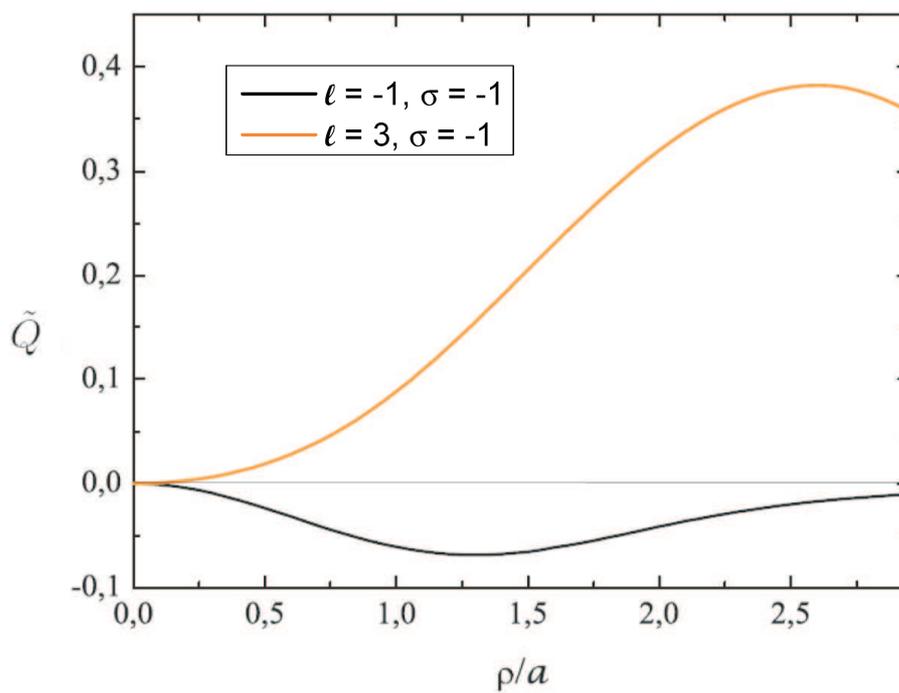


Figura 4.12: \tilde{Q} em função de ρ/a para $l = -1, \sigma = -1$ e $l = 3, \sigma = -1$.

Propomos uma nova definição para a eficiência de transferência de momento angular em analogia com o argumento devido a Ashkin usado para a definição de \mathbf{Q} [53] (que representa a eficiência de transferência de momento linear). Para um feixe de luz gaussiano (paraxial) com potência P , circularmente polarizado com $\sigma = 1$, o torque exercido sobre um plano absorvedor perpendicular à direção de propagação vale

$$\tau_{max} = \frac{P}{\omega}. \quad (4.50)$$

Assim, definimos o fator de eficiência como

$$\tilde{Q} = \frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\omega\tau}{P}. \quad (4.51)$$

Combinando as equações (4.49) e (4.51), obtemos

$$\tilde{Q} = \frac{2\pi\rho}{\lambda} Q_\phi. \quad (4.52)$$

Na Figura 4.12, mostramos \tilde{Q} em função de ρ/a em dois casos onde o valor do módulo do momento angular total por fóton é o mesmo: para $\ell = -1$, $\sigma = -1$ e $\ell = 3$, $\sigma = -1$. Podemos notar que para feixes focalizados, o momento angular orbital desempenha um papel mais importante na transferência de momento angular do centro de massa da partícula. Para $\ell = -1$, obtemos valores negativos de \tilde{Q} devido ao sinal negativo de $\ell + \sigma$.

No próximo capítulo, apresentamos resultados experimentais qualitativos da transferência de momento angular orbital a partículas aprisionadas.

Capítulo 5

Resultados Experimentais

Na etapa experimental deste trabalho, utilizamos o método holográfico [47] para gerar modos laguerre-gaussianos e assim estudar o efeito da utilização de um feixe com momento angular na pinça óptica. Neste capítulo, apresentamos o aparato experimental básico utilizado na realização das medidas, descrevemos o processo de produção da placa holográfica e de caracterização de parâmetros importantes para o cálculo teórico como a cintura do feixe, a potência na região da amostra e a transmitância da objetiva [59]. Em seguida, apresentamos o processo de medida da constante elástica transversa de uma pinça óptica e comparamos os resultados obtidos com a previsão da teoria. Por fim, nós descrevemos o comportamento de esferas aprisionadas devido à transferência de momento angular do feixe.

5.1 Montagem experimental

A Figura 5.1 mostra um esquema da montagem experimental utilizada no Laboratório de Pinças Ópticas. O feixe de laser Nd:YAG, de comprimento de onda $\lambda = 1,064 \mu\text{m}$ (infravermelho) operando no modo TEM_{00} , linearmente polarizado, passa por um par de lentes L_1 e L_2 usadas para colimar e expandir o modo. Logo a seguir, ele atravessa o diafragma D , que controla o diâmetro do feixe incidente sobre a placa holográfica P (uma rede de difração). A função de P é converter um feixe com perfil gaussiano em um feixe com perfil laguerre-gaussiano. Com efeito, após a placa obtemos por difração um feixe gaussiano em ordem zero e feixes laguerre-gaussianos em maiores ordens de difração (a eficiência na produção dos modos de ordem 1 é de aproximadamente 27%). O feixe com esse novo perfil é direcionado através dos espelhos M_1 e M_2 para a entrada do microscópio representado pela região entre as linhas pontilhadas (ver Figura 5.1).

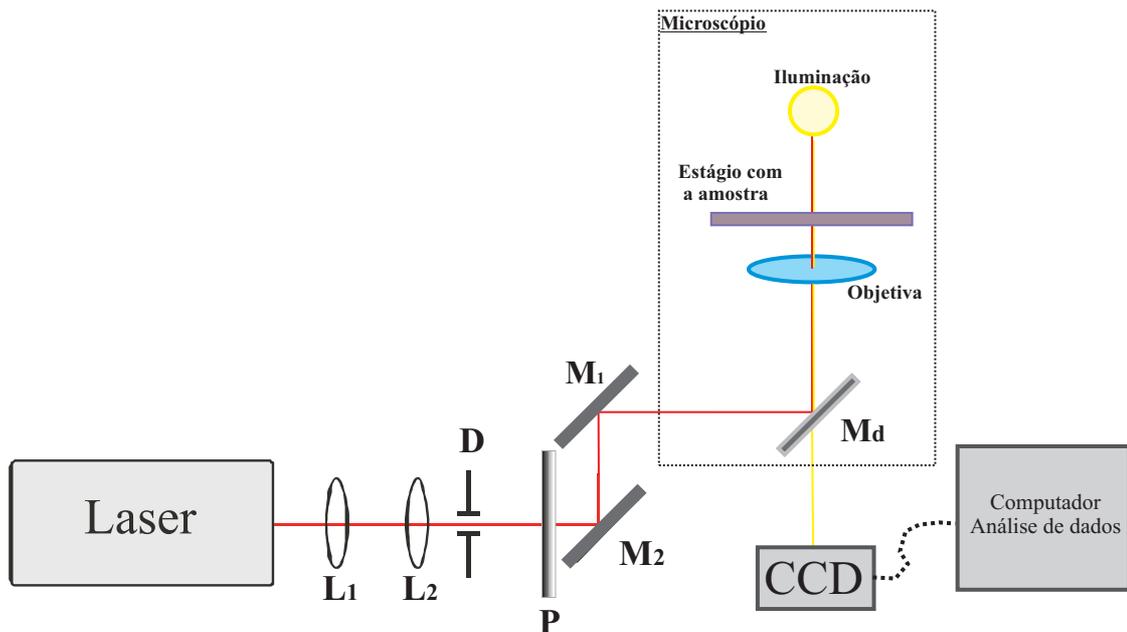


Figura 5.1: Esquema da montagem experimental da pinça óptica.

Utilizamos um microscópio invertido Nikon Elipse TE 300 com objetiva óptica de imersão em óleo (Plan Apo), de ampliação 100X e grande abertura numérica, $NA = 1,4$. Essa objetiva é usada para produzir a pinça óptica e observar as microesferas se deslocando no seu campo de forças. O estágio do microscópio pode ser movido por motores de passo nas direções \hat{x} , perpendicular, e \hat{y} , paralela à direção da polarização linear do feixe incidente. M_d é um espelho dicróico, cuja reflectividade depende do comprimento de onda. Ele reflete a luz do laser infravermelho e é transparente para luz visível que chega até a câmera CCD (charge coupled device) posicionada em uma

das saídas do microscópio. A luz visível provém de uma fonte que se encontra na parte superior do microscópio, permitindo-nos obter a imagem da partícula. A velocidade do deslocamento é medida usando a CCD e um gravador de vídeo acoplados ao sistema. Para digitalizar as imagens dos filmes obtidos, utilizamos uma placa de captura SCION LG7 e para analisar as imagens, o programa *ImageJ* que pode ser obtido gratuitamente na rede.

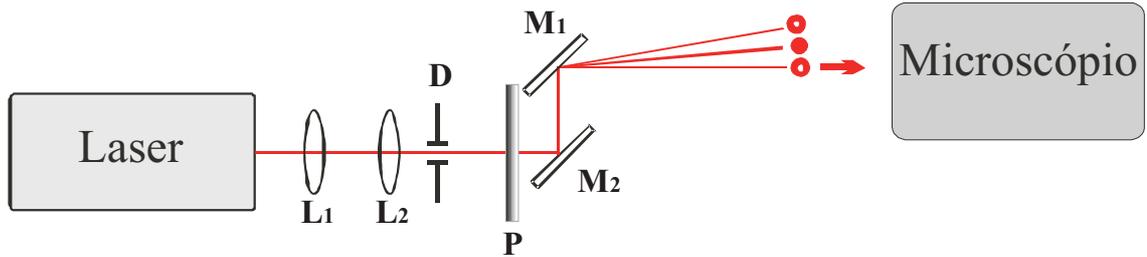


Figura 5.2: *Detalhe do feixe difratado.*

Durante o procedimento de medida da constante elástica da pinça, utilizamos amostras constituídas de microesferas de poliestireno de $3,0 \mu m$ de diâmetro em solução de água deionizada.

5.2 Geração de modos laguerre-gaussianos

A maioria dos lasers comerciais produzem feixes com frentes de ondas aproximadamente planas e perfil de intensidade gaussiano. Contudo, feixes com uma distribuição transversa de intensidade diferente podem ser obtidos através de técnicas que transformam esse perfil gaussiano para gerar, por exemplo, os modos laguerre-gaussianos [46, 47]. Em nossos experimentos, usamos o método holográfico para obter o feixe com o perfil desejado.

Aqui vamos descrever a forma como foi produzida nossa placa holográfica, representada por P na Figura 5.2. Primeiramente, através do programa comercial *Mathematica* produzimos a figura de interferência entre um feixe gaussiano e um feixe laguerre-gaussiano com determinado valor do índice ℓ . O padrão resultante é apresentado na Figura 5.3, onde podemos observar franjas de interferência com ℓ bifurcações em seu centro. Estes padrões são impressos com uma impressora de alta resolução, fotografados e então revelados (esta etapa foi realizada na Universidade Federal Fluminense). Os negativos, chamados máscaras de amplitude, são utilizados como referência para gravar a informação do padrão de interferência (franjas claras e franjas escuras) sobre um filme (fotoresina) depositada em um substrato (lâmina de vidro).

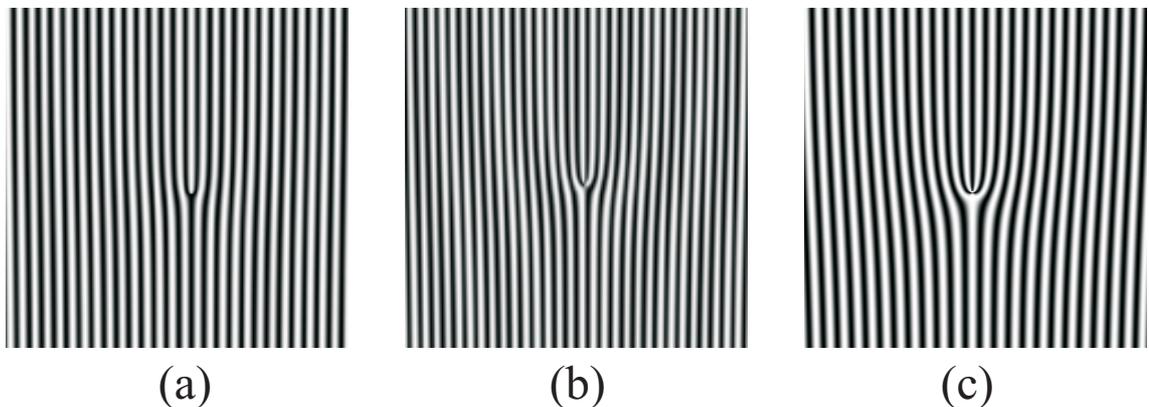


Figura 5.3: Padrão gravado para produzir em primeira ordem de difração feixes laguerre-gaussianos com (a) $\ell = \pm 1$, (b) $\ell = \pm 2$ e (c) $\ell = \pm 3$.

As fotoresinas [60] são compostas por uma resina base, um composto fotossensível e um solvente (geralmente são comercializadas na forma líquida). A propriedade fundamental destes materiais é a alteração de sua solubilidade quando expostos à luz de determinado comprimento de onda. As regiões expostas à luz se tornam solúveis enquanto outras regiões não expostas ficam insolúveis. Desta forma, após a revelação em um solvente apropriado um padrão luminoso é convertido em um padrão de relevo

(veja Figura 5.4).

Utilizamos a resina AZ 1518 que foi depositada em gotas sobre lâminas de microscópio de vidro transparente divididas em três partes. Em seguida, cada placa é submetida ao processo de centrifugação: o substrato é fixado por vácuo a um suporte que gira com velocidade ajustável. Essa velocidade e o tempo de rotação são alguns dos parâmetros que determinam a espessura final do filme. Após esse processo, o filme é aquecido a aproximadamente $70^{\circ}C$ para secar o resto de solvente ainda presente. O resultado são filmes homogêneos formados sobre as lâminas de vidro (esta etapa foi realizada na Universidade Estadual de Campinas).

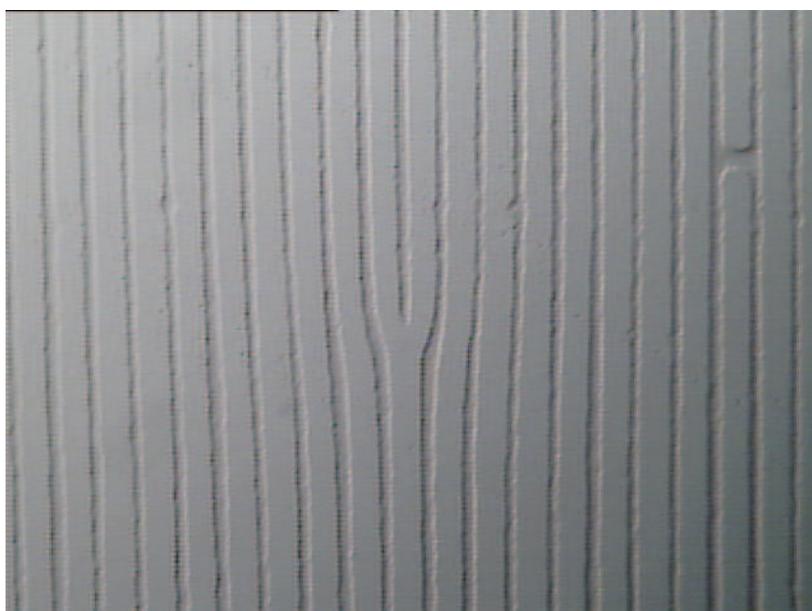


Figura 5.4: *Detalhe do relevo da placa holográfica para $\ell = \pm 1$.*

É importante ressaltar que antes da deposição do filme, o substrato é limpo em diversas etapas: sabão, acetona (sem contato manual) e ultra-som. Todo o processo de preparação da placa holográfica é realizado em uma “sala limpa” com controle do nível de partículas e umidade pois a aderência do filme de resina ao substrato é crítica em relação a sua limpeza.

O último passo é colocar a máscara de amplitude em contato com a placa (vidro+filme) e expor o conjunto à luz ultravioleta. Após alguns segundos, mergulhamos a placa em uma solução formada de água deionizada e um revelador de forma que as regiões que se tornaram solúveis sejam removidas. O resultado é uma diferença de espessura no filme associada às franjas de interferência como pode ser visto na Figura 5.4.

5.3 Caracterização do feixe

A potência e a cintura do feixe na abertura de entrada da objetiva são parâmetros importantes em nosso modelo teórico. Ambos foram determinados experimentalmente e descrevemos a seguir o procedimento utilizado [23].

Determinamos a cintura do feixe e sua potência tanto para o modo laguerre-gaussiano com $\ell = 2$, quanto para o modo gaussiano, retirando a placa holográfica na montagem representada pela Figura 5.1. Para isso usamos o *método do diafragma*, onde medimos a potência do feixe P na entrada da objetiva, variando a abertura R do diafragma, representado por D na Figura 5.1.

No capítulo 2, calculamos a potência P_ℓ para um feixe laguerre-gaussiano que é dada por

$$P_\ell = 2\pi\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}E_0^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^{2|\ell|}\int_0^\infty e^{-2\rho^2/w_0^2}\rho^{2|\ell|+1}d\rho. \quad (5.1)$$

Como o feixe laser atravessa o diafragma, seu perfil é limitado pela abertura de D , cujo raio é R . Assim, a potência medida na entrada da objetiva pode ser calculada através de (5.1) substituindo o limite superior da integral por R . Para $\ell = 2$, obtemos

$$P_2(R) = \pi w_0^2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}E_0^2\left[1 - e^{-2R^2/w_0^2}\left(1 + \frac{2R^2}{w_0^2} + \frac{2R^4}{w_0^4}\right)\right]. \quad (5.2)$$

Se $R \rightarrow \infty$,

$$P_2(\infty) = \pi w_0^2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}E_0^2 = P_2^{tot}, \quad (5.3)$$

de forma que podemos escrever

$$P_2(R) = P_2^{tot}\left[1 - e^{-2R^2/w_0^2}\left(1 + \frac{2R^2}{w_0^2} + \frac{2R^4}{w_0^4}\right)\right], \quad (5.4)$$

sendo P_2^{tot} a potência total do feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$ incidente sobre o diafragma.

Fazendo $\ell = 0$ em (5.1) e integrando em ρ de 0 a R , obtemos a equação para a potência do feixe gaussiano,

$$\begin{aligned} P(R) &= 2\pi\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}E_0^2 \int_0^R e^{-\rho^2/2\sigma_0^2} \rho d\rho \\ &= P^{tot} \left(1 - e^{-R^2/2\sigma_0^2}\right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

com $P^{tot} = 2\pi\sigma_0^2\sqrt{\epsilon/\mu_0}E_0^2$ correspondente à potência total do feixe gaussiano que incide sobre o diafragma. Note que escrevemos $w_0 = 2\sigma_0$ no caso gaussiano para não haver confusões pois em cada caso, $\ell = 0$ e $\ell = 2$, w_0 possui valores diferentes.

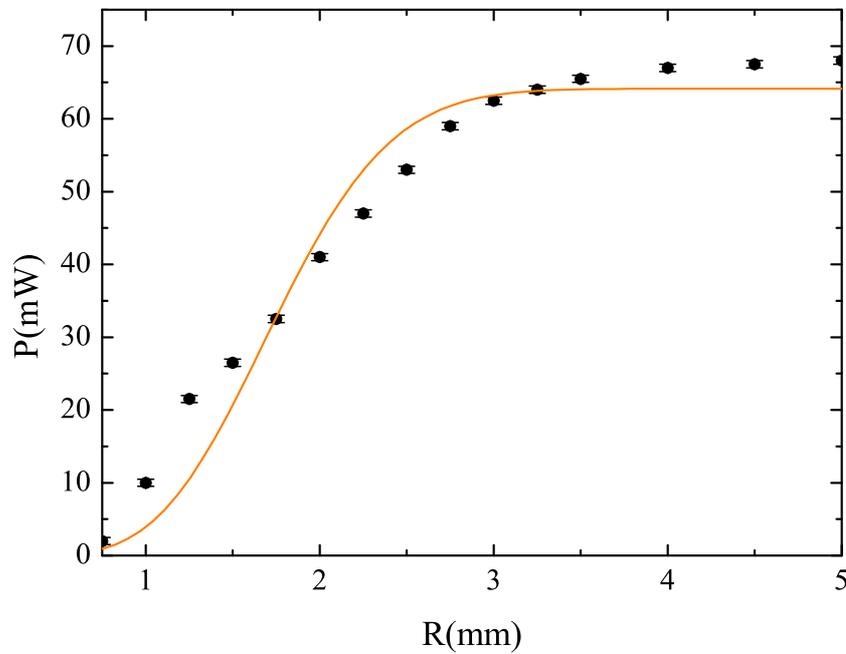


Figura 5.5: Potência na entrada da objetiva P em função do raio do diafragma R para $\ell = 2$.

As Figuras 5.5 e 5.6 mostram a variação da potência medida na entrada da objetiva $P(R)$ em função do raio do diafragma R , para $\ell = 2$ e $\ell = 0$, respectivamente. Ajustamos os dados obtidos à equação (5.4) para o feixe com perfil laguerre-gaussiano (Figura 5.5) e à equação (5.5) para o feixe com perfil gaussiano (Figura 5.6). Através do ajuste

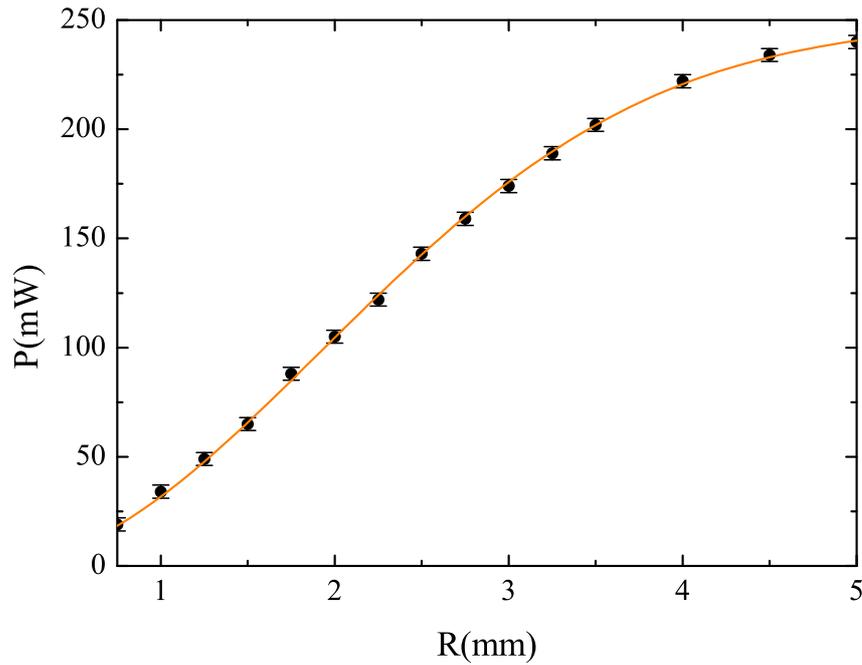


Figura 5.6: Potência na entrada da objetiva P em função do raio do diafragma R para $\ell = 0$.

realizado pelo programa *ORIGIN*, nós obtemos os valores $\sigma_0 = (1,92 \pm 0,01) \text{ mm}$ e $P_{tot} = (249 \pm 1) \text{ mW}$ para o feixe com $\ell = 0$ e $w_0 = (1,50 \pm 0,05) \text{ mm}$ e $P_{tot} = (64 \pm 2) \text{ mW}$ para o feixe com $\ell = 2$. Podemos observar que o ajuste no caso do feixe com perfil laguerre gaussiano não é tão bom quanto o ajuste no caso do feixe com perfil gaussiano. Contudo, os resultados obtidos com a utilização dos dados fornecidos por essa caracterização são razoáveis, conforme será mostrado em seção posterior.

5.4 Caracterização da transmitância da objetiva

Outro parâmetro importante é a potência local na amostra e para conhecer seu valor devemos determinar a transmitância da objetiva T_{obj} . Para obter o valor de T_{obj} , usamos o *método das duas objetivas* [61]. A Figura 5.7 mostra um esquema da montagem experimental. Sobre o estágio do microscópio, com a objetiva invertida abaixo, montamos uma segunda objetiva na posição vertical idêntica à do microscópio. Para determinar a transmitância da objetiva utilizamos o feixe com perfil gaussiano ($\ell = 0$).

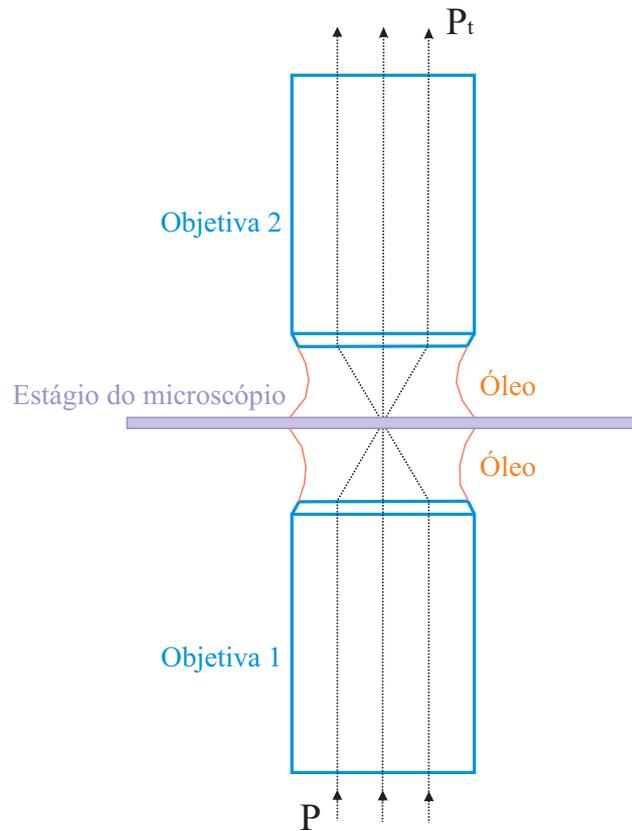


Figura 5.7: *Montagem experimental para a medida da transmitância da objetiva.*

Consideramos que a transmitância é a mesma para ambas as objetivas, que são posicionadas de modo a obter um feixe colimado emergente da segunda objetiva, coaxial ao feixe de entrada na primeira objetiva. A transmitância da objetiva no infravermelho normalmente não é uniforme: ela é menor para raios a grandes distâncias do eixo (correspondentes aos maiores ângulos na região da amostra). O modelo de amplitude de transmissão gaussiana fornece a função para a transmitância (com $\rho = f \sin \theta$)

$$T_{obj}(\rho) = T_a e^{-\rho^2/2\xi^2}, \quad (5.6)$$

sendo T_a a transmitância axial [59] e ξ a escala de comprimento associada à variação radial de T_{obj} . Para caracterizar a transmitância da objetiva usamos o feixe com perfil gaussiano. A potência transmitida pelo sistema composto das duas objetivas P_t é calculada pela primeira equação em (5.5) onde o integrando deve ser multiplicado por T_{obj}^2 , correspondente ao efeito das duas objetivas. Temos então que:

$$\begin{aligned} P_t(R) &= 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 \int_0^R e^{-\rho^2/2\sigma_0^2} T_a^2 e^{-\rho^2/\xi^2} \rho d\rho \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 T_a^2 \int_0^R e^{-\rho^2/\zeta^2} \rho d\rho, \end{aligned} \quad (5.7)$$

com $1/\zeta^2 = 1/2\sigma_0^2 + 1/\xi^2$. Resolvendo a integral,

$$\begin{aligned} P_t(R) &= \pi \zeta^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 T_a^2 \left(1 - e^{-R^2/\zeta^2}\right) \\ &= \frac{P^{tot}}{2\sigma_0^2} \zeta^2 T_a^2 \left(1 - e^{-R^2/\zeta^2}\right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Medimos a potência transmitida $P_t(R)$ para diferentes valores de R , o raio do diafragma, e usando os valores da potência P^{tot} e da meia cintura do feixe σ_0 na porta de entrada da objetiva obtidos na seção anterior, nós calculamos a transmitância média T_a da objetiva. Para isso utilizamos o programa *ORIGIN* ajustando os dados obtidos experimentalmente à equação (5.8). O raio de abertura de entrada das objetivas possui $3,5\text{ mm}$ e para os dados apresentados na Figura 5.8, encontramos $T_a = 0,32 \pm 0,03$, a transmitância axial e $\zeta = (2,9 \pm 0,3)\text{ mm}$, a escala de comprimento transversa associada à variação radial da transmitância. Os erros foram avaliados comparando-se os experimentos realizados neste trabalho com outros experimentos realizados no laboratório, há cerca de dois anos, sob as mesmas condições.

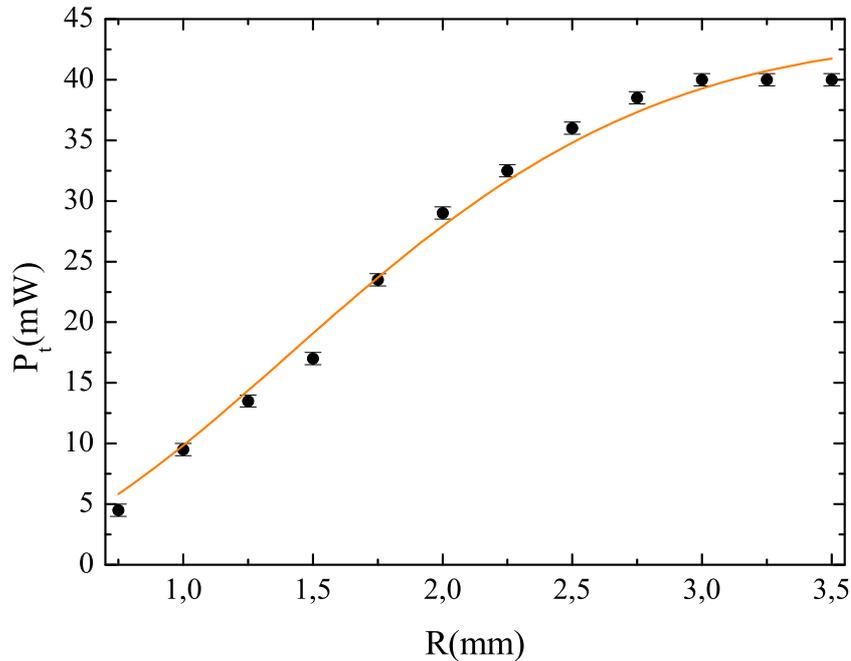


Figura 5.8: Potência transmitida P_t em função de R quando utilizamos duas objetivas de aumento $100\times$.

5.5 Constante elástica da pinça óptica

A força exercida por uma pinça óptica sobre uma microesfera pode ser associada a uma força elástica que tenta restaurar a sua posição de equilíbrio. Sendo assim, podemos determinar uma constante elástica para a pinça. Ela é obtida através do fator de eficiência \mathbf{Q} definido no capítulo 4. A constante elástica transversa κ_ρ é dada por

$$\kappa_\rho = -\frac{n_1 P}{c} \left(\frac{\partial Q_\rho}{\partial \rho} \right)_{\rho=0, z=z_{eq}}, \quad (5.9)$$

com z_{eq} sendo a posição de equilíbrio no eixo óptico.

Nós realizamos a medida da constante elástica da pinça nas direções \hat{x} e \hat{y} para os feixes gaussianos e laguerre-gaussianos com o objetivo de verificar a melhoria do aprisionamento quando feixes com momento angular são utilizados em pinças ópticas. Além disso, comparamos os resultados obtidos com os nossos cálculos numéricos.

Para medir a constante elástica nós utilizamos a lei de Faxen [62] que relaciona o coeficiente de fricção de Stokes β do meio em que as microesferas estão imersas com a viscosidade η do meio, a distância h do centro das microesferas à lamínula e o raio a . Essa relação é dada por

$$\beta(a, h) = 6\pi\eta a \left[1 - \frac{9}{16} \left(\frac{a}{h} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{h} \right)^3 - \frac{45}{256} \left(\frac{a}{h} \right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{a}{h} \right)^5 \right]^{-1}, \quad (5.10)$$

com $\eta = 1\text{mN}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ (água). A lei de Faxen é uma generalização da lei de Stokes para a situação em que o fluido viscoso é limitado por uma fronteira como a lamínula do microscópio e β é o coeficiente de proporcionalidade entre a força de arrasto e a velocidade da partícula. Após aprisionar uma microesfera a uma determinada altura h , movemos o estágio do microscópio com velocidade v constante de modo que o fluido começa a deslocar-se enquanto a microesfera permanece praticamente parada. A microesfera então move-se em relação ao fluido até que a força óptica na direção da velocidade contrabalanceie a força de arrasto viscoso em uma nova posição de equilíbrio para a microesfera. Esta posição é muito próxima do eixo óptico e portanto, a força óptica tem um comportamento linear tipo lei de Hooke. Neste ponto podemos escrever

$$F_{optica} = F_{arrasto} \Rightarrow \kappa \Delta\rho_{x,y} = \beta v_{x,y}. \quad (5.11)$$

Para determinarmos a constante elástica da pinça movemos o estágio do microscópio com diferentes velocidades para um lado e para outro e medimos o deslocamento correspondente da microesfera. A microesfera permanece um determinado tempo parada em equilíbrio e um determinado tempo em movimento. Todo o processo é gravado e

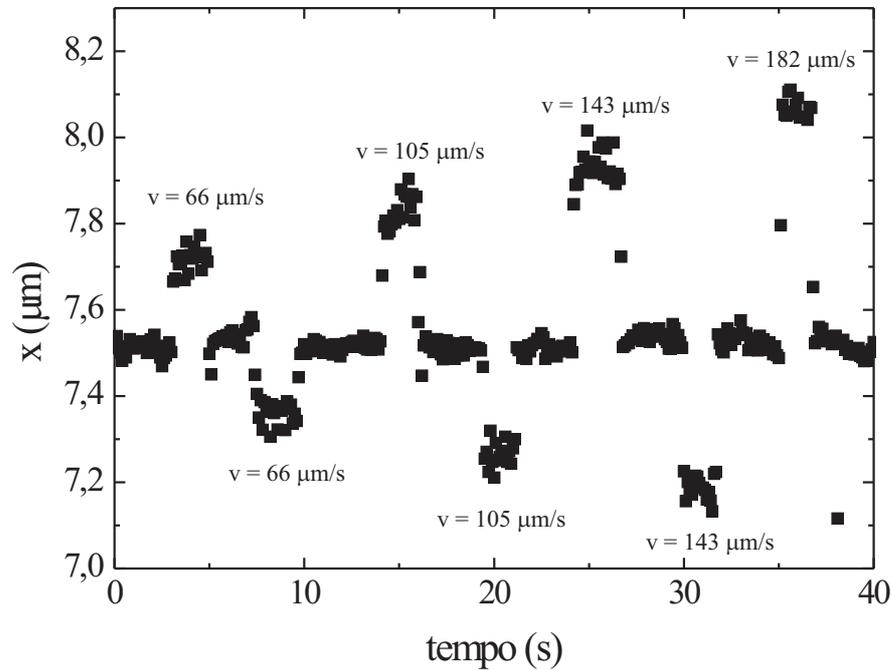


Figura 5.9: Posição de equilíbrio da esfera para diferentes velocidades do estágio.

digitalizado. Analisamos as imagens tomando a posição do centro de massa em relação ao foco, nos instantes em que a microesfera permanece em equilíbrio, em função da velocidade do estágio.

Na Figura 5.9 ilustramos os resultados obtidos para a medida da posição do centro de massa da microesfera nos instantes em que ela permanece em equilíbrio quando usamos um feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$. Para a realização das medidas apresentadas na Figura 5.9, utilizamos microesferas de poliestireno com diâmetro ($d = 3,0 \pm 0,1$) μm e deslocamos o carrossel do microscópio a uma altura $h = 4 \mu m$ (altura do foco em relação á lamínula). Escolhemos cinco valores diferentes para a velocidade do estágio, com velocidades inicial $v = 66 \mu m/s$ e final $v = 182 \mu m/s$. O eixo vertical representa as posições de equilíbrio na direção x quando a microesfera é deslocada e o eixo horizontal representa o tempo de captura da imagem.

A Figura 5.10 apresenta os valores da velocidade em função da variação média da posição de equilíbrio da microesfera. Ele foi obtido através do tratamento dos dados da Figura 5.9. A Figura 5.10 indica que a força óptica para estes deslocamentos tem um comportamento linear. Para determinarmos o valor de $\Delta\rho$ para cada velocidade de deslocamento da platina do microscópio, fizemos a média entre os deslocamentos para

velocidades positivas e negativas. Através de um ajuste linear dos dados apresentados na Figura 5.10, podemos determinar o coeficiente angular da reta α , que de acordo com (5.11), é dado por

$$\alpha_{x,y} = \frac{\beta}{\kappa_{x,y}}. \quad (5.12)$$

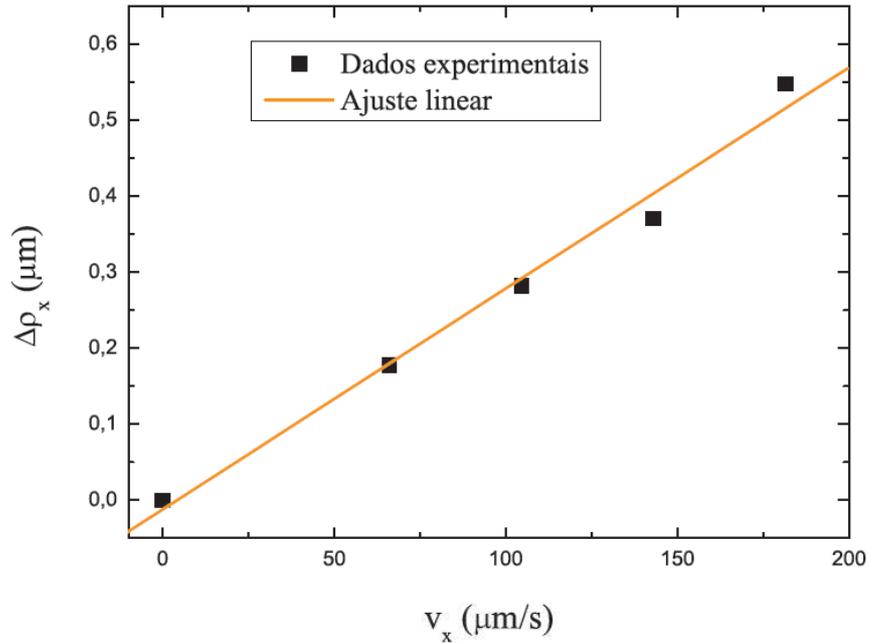


Figura 5.10: *Tratamento de dados.*

Realizamos a medida descrita anteriormente para vários valores de h , a altura do foco em relação ao carrossel do microscópio ($h = a$ é a situação em que a microesfera está encostada na lamínula). Na Figura 5.11, apresentamos os valores para a constante elástica obtidos experimentalmente deslocando a microesfera na direção x , quando usamos na pinça um feixe gaussiano e quando usamos um feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$. Utilizamos apenas uma microesfera para a realização das medidas com o mesmo feixe (a microesfera pode, por exemplo, escapar da armadilha devido à colisão com outras microesferas durante o seu arrasto). A barra de erro foi determinada a partir da medida da constante elástica para 10 microesferas diferentes a uma dada altura, de forma que uma possível variação no raio da microesfera é levada em conta. Subtraímos do maior valor, o menor valor encontrado para a constante elástica e dividimos o resultado por 2. Encontramos um erro correspondente a 4%, que foi utilizado na apresentação de todos os dados experimentais. A realização de várias medidas com a mesma microesfera em cada altura nos indicaria uma barra de erro menor que a utilizada.

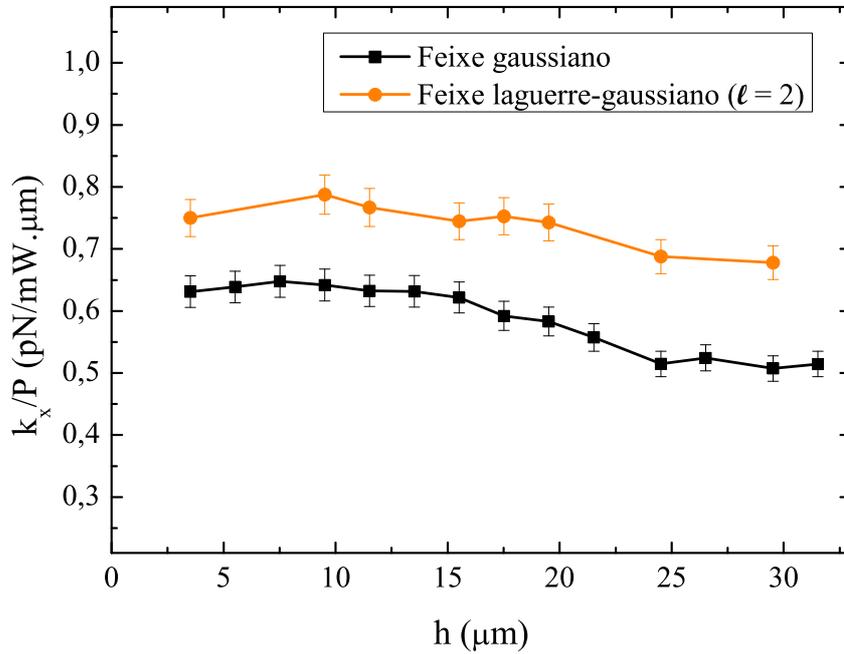


Figura 5.11: Constante elástica na direção x dividida pela potência local em função do deslocamento do carrossel (laminula). Comparação entre medidas experimentais para um feixe gaussiano e um feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$.

Conforme o esperado, o feixe com momento angular orbital dá origem a uma constante elástica por potência maior do que a obtida com um feixe gaussiano. A potência envolvida na Figura 5.11 é a potência local na região da amostra, P_L . Ela é obtida através das equações (5.1), para $\ell = 2$ e (5.5), para $\ell = 0$, multiplicando-se o integrando pela transmitância da objetiva dada pela equação (5.6) e realizando a integração de 0 a $R = 3,5 \text{ mm}$, o raio da abertura de entrada da objetiva. O que medimos diretamente é a potência total, que é utilizada no cálculo de P_L . Obtemos os valores $P_L = 48 \text{ mW}$ para o feixe gaussiano com uma potência total $P_{tot} = 248 \text{ mW}$ e $P_L = 16 \text{ mW}$ para o feixe laguerre gaussiano com uma potência total $P_{tot} = 64 \text{ mW}$. Na Figura 5.12 apresentamos os resultados experimentais para as constantes elásticas na direção y . Aqui observamos o mesmo efeito da utilização de um feixe com momento angular, maiores valores de κ/P . Observamos uma pequena diferença entre os valores de κ_x/P e κ_y/P , maior para o feixe laguerre-gaussiano. Contudo, essa diferença pode ser atribuída à polarização linear do feixe.

Usando a equação para o fator de eficiência Q_ρ apresentada no capítulo 4, calcu-

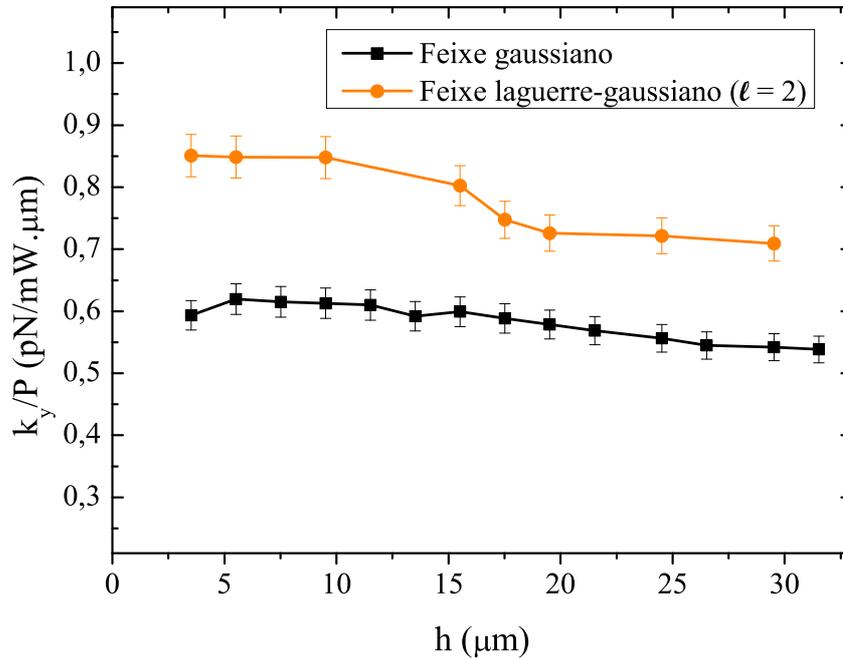


Figura 5.12: Constante elástica na direção y dividida pela potência local em função do deslocamento do carrossel (lamínula). Comparação entre medidas experimentais para um feixe gaussiano e um feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$.

ℓ	Resultado experimental ($pN/mW.\mu m$)	Resultado teórico ($pN/mW.\mu m$)
0	$(0,63 \pm 0,02)_x$, $(0,61 \pm 0,04)_y$	$(0,62 \pm 0,06)_x$, $(0,67 \pm 0,04)_y$
2	$(0,72 \pm 0,03)_x$, $(0,85 \pm 0,03)_y$	$(0,95 \pm 0,02)_\rho$

Tabela 5.1: Comparação entre os valores medidos e calculados para a constante elástica da pinça óptica dividida pela potência em função da altura do foco.

lamos numericamente os valores de κ/P para o feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$. Como consideramos um feixe com polarização circular, calculamos a constante elástica transversa κ_ρ no lugar de κ_x ou κ_y . No caso gaussiano, utilizamos as expressões para a constante elástica de um feixe linearmente polarizado obtidas em [54]. As curvas teóricas são apresentadas na Figura 5.13. Podemos observar que o comportamento previsto pelo nosso modelo está qualitativamente em acordo com os resultados experimentais.

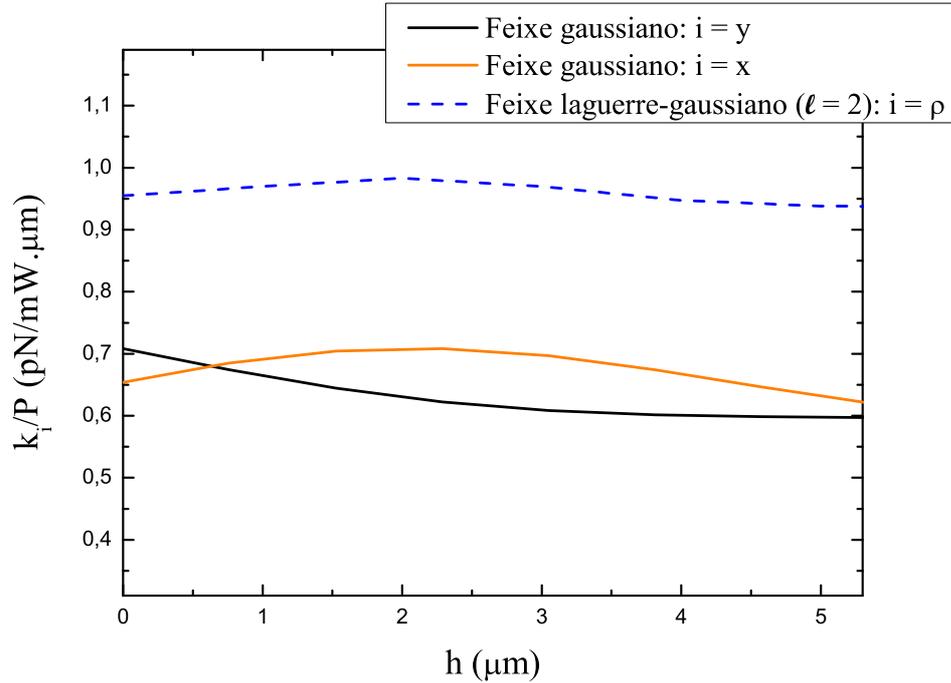


Figura 5.13: Constante elástica calculada para o feixe gaussiano e o feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$.

Por fim, comparamos na Tabela 5.1, a média dos valores calculados para as constantes elásticas nas direções \hat{x} , \hat{y} e $\hat{\rho}$ a diferentes alturas apresentados na Figura 5.13 e a média dos valores medidos para as constantes elásticas nas direções \hat{x} e \hat{y} a diferentes alturas apresentados nas Figuras 5.11 e 5.12 (apresentamos o desvio padrão do valor médio nos dois casos). Apesar do comportamento previsto pela teoria ter sido confirmado, há um pequeno desacordo quantitativo entre estes resultados e os valores obtidos em nossas medidas, especialmente no caso do feixe laguerre-gaussiano que é de até 24% (note que o resultado teórico corresponde a κ_ρ , enquanto o resultado experimental corresponde a κ_x e κ_y). Podemos atribuir esse fato a diferentes fatores como o desalinhamento do feixe ou aberrações não consideradas no modelo.

5.6 Resultados qualitativos para a transferência de momento angular

Com o objetivo de tentar observar a transferência de momento angular do feixe laguerre-gaussiano para a microesfera aprisionada na pinça, preparamos uma amostra composta de esferas de poliestireno com diâmetro de $(3,00 \pm 0,14) \mu m$ e $(0,53 \pm 0,01) \mu m$. As microesferas maiores foram primeiramente aprisionadas pela pinça e nesta situação, mesmo que a partícula esteja girando não conseguimos observar seu movimento. Quando uma microesfera menor é aprisionada juntamente com a primeira, em uma posição acima ou abaixo da microesfera maior, podemos observar o movimento de rotação do conjunto.

Usando um feixe laguerre-gaussiano com $\ell = 2$ e $\ell = -2$, ambos polarizados linearmente na direção \hat{y} , procuramos observar a mudança no sentido de rotação das esferas aprisionadas. Quando $\ell = -2$, o conjunto realiza giros em torno do seu próprio eixo no sentido horário. Quando $\ell = 2$, observamos o giro no sentido oposto, ou seja, no sentido anti-horário. Esta é a indicação de que o momento angular do feixe está sendo transferido e que o movimento da partícula aprisionada depende do sinal de ℓ . Variamos a altura do carrossel do microscópio durante o movimento de rotação das partículas e o que observamos é um aumento da velocidade angular, como podemos ver pela equação (5.10). Este efeito já é esperado devido à diminuição do atrito à medida que a esfera se afasta da lamínula. Destacamos que essa é uma transferência de momento angular orbital já que o feixe não possui momento angular de spin, o feixe é linearmente polarizado.

Os resultados brevemente descritos nessa seção podem ser visualizados em dois filmes gravados no CD que acompanha esta tese. A seguir descrevemos o conteúdo de cada filme.

- Filme 1

Aqui apresentamos a imagem de duas microesferas aprisionadas pela pinça óptica. A esfera maior com diâmetro $3 \mu m$ e a menor com diâmetro de $0,53 \mu m$ (correspondente à imagem escura na borda da imagem da esfera maior). Utilizamos um feixe laguerre gaussiano com $\ell = -2$ e uma objetiva de imersão em óleo de aumento $100\times$.

O filme possui a duração de 30 segundos e é separado em duas parte por uma tela escura. Na primeira parte o foco da objetiva está a uma altura $h = 10 \mu m$ da

lamínula, enquanto na segunda o foco da objetiva está a uma altura $h = 15 \mu m$. Podemos observar o aumento da frequência de rotação quando aumentamos h . Este efeito é devido à diminuição do atrito entre as microesferas e o meio, na região mais afastada da lamínula.

- Filme 2

O segundo filme mostra duas imagens correspondentes ao uso de feixes laser gaussianos com $\ell = -2$ (à esquerda) e $\ell = 2$ (à direita) para aprisionar as duas microesferas de diâmetro $3 \mu m$ e $0,53 \mu m$.

Este filme possui a duração de aproximadamente 12 segundos e demonstra o efeito da utilização de valores de ℓ com sinais diferentes. Para $\ell < 0$, a rotação tem sentido horário (imagem esquerda), enquanto para $\ell > 0$, a rotação tem sentido anti-horário (imagem direita). No caso apresentado à esquerda, o foco da objetiva está a uma altura $h = 15 \mu m$ da lamínula, enquanto no caso à direita o foco da objetiva está a uma altura $h = 25 \mu m$. Esperaríamos que a velocidade angular fosse maior para a altura $h = 25 \mu m$. Atribuímos o efeito contrário observado a um problema de desalinhamento no feixe que gera o aprisionamento das microesferas na imagem da direita, que diminui a transferência de momento angular para as esferas.

Capítulo 6

Conclusão

No capítulo 2, apresentamos uma introdução sobre feixes paraxiais, em especial, feixes laguerre-gaussianos. Discutimos alguns aspectos gerais, importantes para o estudo desenvolvido no capítulo 3, sobre a focalização de um feixe laguerre gaussiano circularmente polarizado por uma objetiva de grande abertura numérica. Investigamos o efeito da focalização sobre o momento angular do feixe, caracterizado pelos índices ℓ e σ . Ela é responsável por uma grande modificação na polarização local e na direção de propagação da energia na região próxima ao eixo do feixe. Nós mostramos que a energia propaga-se ao longo da direção negativa de z perto do ponto focal para qualquer valor $|\ell| \geq 2$ quando ℓ e σ têm sinais opostos.

Outros efeitos interessantes são observados neste caso. A polarização em uma região próxima ao eixo no plano focal é oposta à polarização do feixe incidente na porta de entrada da objetiva. Todos estes efeitos são consequência da focalização com grande abertura numérica NA , não sendo observados no limite paraxial, que pode ser obtido a partir do nosso modelo para valores pequenos de NA ou da cintura do feixe laguerre gaussiano na entrada da objetiva.

O fluxo de momento angular total por unidade de potência que atravessa um plano perpendicular ao eixo z é conservado pelo efeito da focalização, o que não acontece para as contribuições de spin e orbital separadamente. Nós apresentamos resultados quantitativos para a modificação dos fluxos de momento angular de spin e orbital. Obtemos também, através dos nossos resultados, uma demonstração de que há uma relação linear entre o raio de intensidade máxima do feixe e ℓ , para ℓ grande.

Uma aplicação natural para feixes fortemente focalizados é o aprisionamento de micropartículas ou átomos. Nesta tese, nós investigamos a influência do momento angular orbital do feixe incidente sobre a eficiência de aprisionamento de microesferas

em uma pinça óptica. No capítulo 4, mostramos que uma pinça óptica pode ser mais eficaz quando feixes laguerre-gaussianos são utilizados para aprisionar partículas. Nosso modelo indica a existência de posições de equilíbrio em diferentes regiões do feixe e que o tamanho da microesfera pode definir se o aprisionamento ocorre sobre o eixo óptico ou fora dele. Definimos um fator de eficiência relacionado ao torque exercido pelo feixe sobre a microesfera e analisamos a taxa de variação do momento angular orbital do centro de massa.

No capítulo 5, descrevemos a etapa experimental realizada nesta tese, desde a confecção do sistema óptico para a geração do feixe com momento angular ao método de medida da constante elástica de uma pinça óptica. Nossos resultados experimentais confirmam o aumento da eficiência do aprisionamento com a utilização de feixes laguerre gaussianos. Nós também observamos a transferência de momento angular do feixe para as partículas aprisionadas.

O formalismo e os resultados apresentados nesta tese abrem o caminho para vários desdobramentos de interesse. Como perspectiva teórica, seria interessante obter resultados formais diretamente para o torque óptico, por meio da manipulação do tensor densidade de fluxo de momento angular eletromagnético. Com isto, seria possível calcular a taxa de variação do momento angular em relação ao centro de massa, associado à rotação da microesfera em torno do seu próprio eixo. Este efeito seria particularmente importante para esferas absorvedoras.

Do ponto de vista experimental, seria bastante interessante explorar, de forma controlada e quantitativa, alguns dos resultados teóricos obtidos nesta tese. Recentemente, o laboratório de pinças ópticas (LPO) adquiriu um modulador de fase espacial. Este equipamento permite a geração de feixes laguerre gaussianos com grandes valores de ℓ , abrindo o caminho para o estudo experimental do efeito de transferência de momento angular orbital para microesferas aprisionadas na região do anel de intensidade máxima do feixe.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Ashkin, *Acceleration and trapping of particles by radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **24**, (1970) 156.
- [2] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu e D. E. Pritchard, *Trapping of neutral Sodium atoms with radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **59**, (1987) 2631.
- [3] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm e S. Chu, *Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles*, Opt. Lett. **11**, (1986) 288.
- [4] A. Ashkin, *Optical Trapping and Manipulation of Neutral Particles Using Lasers* (World Scientific, Singapore, 2006).
- [5] A. Ashkin e J. M. Dziedzic, *Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria*, Science **235** (1987) 1517-1520.
- [6] D. N. Fuller, G. J. Gemmen, J. P. Rickgauer, A. Dupont, R. Millin, P. Recouvreur e D. E. Smith, *A general method for manipulating DNA sequences from any organism with optical tweezers*, Nucleic Acids Res. **34**(2006) e15.
- [7] J. Beugnon, C. Tuchendler, H. Marion, A. Gaëtan, Y. Miroshnychenko, Y. R. P. Sortais, A. M. Lance, M. P. A. Jones, G. Messin, A. Browaeys e P. Grangier, *Two-dimensional transport and transfer of a single atomic qubit in optical tweezers*, Nature Physics **3** (2007) 696.
- [8] L. Paterson, M. P. MacDonald, J. Arlt, W. Sibbett, P. E. Bryant e K. Dholakia, *Controlled Rotation of Optically Trapped Microscopic Particles*, Science **292** (2001) 912.
- [9] M. E. J. Friese, H. Rubinsztein-Dunlop, J. Gold, P. Hagberg, D. Hanstorp, *Optically driven micromachine elements*, Appl. Phys. Lett. **78**, (2001) 547.

- [10] H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg e H. Rubinsztein-Dunlop, *Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser with a phase singularity*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 826.
- [11] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw e J. P. Woerdman, *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*, Phys. Rev. A **45** (1992) 8185.
- [12] N. B. Simpson, K. Dholakia, L. Allen e M. J. Padgett, *Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner*, Opt. Lett. **22** (1997) 52.
- [13] D. Grier, *A revolution in optical manipulation*, Nature **424** (2003) 810.
- [14] V. Y. Bazhenov, M. V. Vasnetsov e M. S. Soskin, *Laser beams with wave front screw dislocations*, JETP Lett. **52** (1990) 429.
- [15] L. Allen e M. J. Padgett, *The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density*, Opt. Commun. **184** (2000) 67.
- [16] A. T. O'Neil e M. J. Padgett, *Axial and lateral trapping efficiency of Laguerre-Gaussian modes in inverted optical tweezers*, Opt. Commun. **193** (2001) 45.
- [17] E. Wolf, *Electromagnetic diffraction in optical systems I. An integral representation of the image field*, Proc. R. Soc. London A **253** (1959) 349.
- [18] B. Richards e E. Wolf, *Electromagnetic diffraction in optical systems II. Structure of the image field in a aplanatic system*, Proc. R. Soc. London A **253** (1959) 358.
- [19] P. A. Maia Neto e H. M. Nussenzveig, *Theory of optical tweezers*, Europhys. Lett. **50** (2000) 702.
- [20] A. Mazolli, P. A. Maia Neto e H. M. Nussenzveig, *Theory of trapping forces in optical tweezers*, Proc. R. Soc. London A. **459** (2003) 3021.
- [21] R. S. Dutra, N. B. Viana, P. A. Maia Neto, H. M. Nussenzveig, *Polarization effects in optical tweezers*, J. Opt. A **9** (2007) S221.
- [22] N. B. Viana, M. S. Rocha, O. N. Mesquita, A. Mazolli, P. A. Maia Neto e H. M. Nussenzveig, *Absolute calibration of optical tweezers*, Appl. Phys. Lett. **88** (2006) 131110.

- [23] N. B. Viana, M. S. Rocha, O. N. Mesquita, A. Mazolli, P. A. Maia Neto e H. M. Nussenzveig, *Towards absolute calibration of optical tweezers*, Phys. Rev. E **75** (2007) 021914.
- [24] R. Dorn, S. Quabis e G. Leuchs, *The focus of light-linear polarization breaks the rotational symmetry of the focal spot*, J. Mod. Opt. **50** (2003) 1917.
- [25] L. Allen, S. M. Barnett e M. J. Padgett, *Optical Angular Momentum* (Institute of Physics, Bristol, 2003).
- [26] P. B. Monteiro, P. A. Maia Neto, H. M. Nussenzveig, *Angular momentum of focused beams: beyond the paraxial approximation*, Phys. Rev. A **79** (2009) 033830.
- [27] R. A. Beth, *Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light*, Phys. Rev. **50** (1936) 115.
- [28] J. D. Jackson, *Classical Eletrodynamics* (Wiley, New York, 1962). k
- [29] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, Mill Valley, 1986).
- [30] S. M. Barnett, *Optical angular-momentum flux*, J. Opt. B **4** (2002) S7.
- [31] M. Bruhat, *Cours de Phisique* (Masson et C^{ie}, Paris, 1950).
- [32] Alexander Masolli Lisboa, *Teoria das Pinças Ópticas - Uma Aplicação da Teoria de Espalhamento Mie* (Tese de doutorado, Instituto de Física/ UFRJ, 2003).
- [33] M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972).
- [34] D. Ganic, X. Gan e M. Gu, *Fokcusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space*, Opt. Express **11** (2003) 2747.
- [35] E. Abramochkin e V. Volostnikov, *Beam transformations and nontransformed beams*, Opt. Commun. **83** (1991) 123.
- [36] N. Bokor, Y. Yketaki, T. Watanabe e M. Fujii, *Investigation of polarization effects for high-numerical-aperture first-order Laguerre-Gaussian beams by 2D scanning with a single fluorescent microbead*, Opt. Express **13** (2005) 10440.
- [37] Y. Yketaki, T. Watanabe, N. Bokor e M. Fujii, *Investigation of the center intensity of first- and second-order Laguerre-Gaussian beams with linear and circular polarization*, Opt. Lett. **32** (2007) 2357.

- [38] Q. Zhan, *Properties of circularly polarized vortex beams*, Opt. Lett. **31** (2006) 867.
- [39] J. E. Curtis e D. G. Grier, *Structure of Optical Vortices*, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 133901.
- [40] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg, *Photons et atomes* (InterEditions, Paris, 1987).
- [41] S. J. van Enk and G. Nienhuis, *Spin and Orbital Angular Momentum of Photons*, Europhys. Lett. **25** (1994) 497.
- [42] S. M. Barnett e L. Allen, *Orbital angular momentum and nonparaxial light beams*, Opt. Commun. **110** (1994) 670.
- [43] Y. Zhao, J. S. Edgar, G. D. M. Jeffries, D. McGloin e D. T. Chiu, *Spin-to-Orbital Angular Momentum Conversion in a Strongly Focused Optical Beam*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 073901.
- [44] J. E. Molloy, K. Dholakia e M. J. Padgett, *Optical tweezers in a new light*, J. Mod. Opt. **50** (2003) 1501.
- [45] M. Padgett e L. Allen, *Optical tweezers and spanners*, Phys. World **10** (1997) 35.
- [46] M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. E. L. O. van der Veen e J. P. Woerdman, *Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum*, Opt. Commun. **96** (1993) 123.
- [47] M. Padgett e L. Allen, *Light with a twist in its tail*, Contemporary Phys. **41** (2000) 275.
- [48] W. K. H. Panofsky e M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (Addison-Wesley, London, 1962).
- [49] C. J. Bouwkamp e H. B. G. Casimir, *On multipole expansions in the theory of electromagnetic radiation*, Physica **20** (1954) 539.
- [50] C. G. Gray, *Multipole expansions of electromagnetic fields using Debye potentials* Am. J. Phys. **46** (1978) 169.
- [51] V. A. Varshalovich, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [52] H. C. Van de Hulst, *Light Scattering by small Particles* (Dover, New York, 1981).

- [53] A. Ashkin, *Forces Of a Single-Beam Gradient Laser Trap On a Dielectric Sphere In the Ray Optics Regime*, Biophys. J. **61** (1992) 569.
- [54] Rafael de Sousa Dutra, *Efeitos de polarização nas pinças ópticas* (Dissertação de mestrado, Instituto de Física/ UFRJ, 2007).
- [55] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice Hall, New Jersey, 1999).
- [56] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1993).
- [57] J. E. Curtis, B. A. Koss e D. G. Grier, *Dynamic holographic optical tweezers*, Opt. Commun **207** (2002) 169.
- [58] P. L. Marston e J. H. Crichton, *Radiation torque on a sphere caused by a circularly-polarized electromagnetic wave*, Phys. Rev. A **30**, (1984) 2508.
- [59] N. B. Viana, M. S. Rocha, O. N. Mesquita, A. Mazolli, P. A. Maia Neto, *Characterization of objective transmittance for optical tweezers*, Appl. Opt. **45**, (2006) 4265.
- [60] Cristiano Monteiro de Barros Cordeiro, *Mistura de Ondas para caracterização de Redes em Relevo e Materiais Fotosensíveis*, (Tese de doutorado, Unicamp/ SP, 2003).
- [61] H. Misawa, M. Koshioka, K. Sasak, N. Nikamura e H. Masuhara, *Three-dimensional optical trapping and laser ablation of a single polymer latex particle in water*, J. App. Phys. **70** (1991) 3829.
- [62] M. I. M. Feitosa e O. N. Mesquita, *Wall-drag effect on diffusion of colloidal particles near surfaces: A photon correlation study*, Phys. Rev. A **44** (1991) 6677.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)