



UFRJ

**EFEITOS DO AMBIENTE NO EMARANHAMENTO DE
ESTADOS QUÂNTICOS**

Malena Osorio Hor-Meyll

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Orientador: Luiz Davidovich

Rio de Janeiro
Abril de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Efeitos do Ambiente no Emaranhamento de Estados Quânticos

Malena Osorio Hor-Meyll

Orientador: Luiz Davidovich

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários a obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Banca Examinadora:

Dr. Luiz Davidovich
(Presidente e Orientador)

Dr.

Dr.

Dr.
(Suplente interno)

Dr.
(Suplente externo)

Rio de Janeiro

Abril de 2009

Hor-Meyll, Malena Osorio

H813 Efeitos do Ambiente no Emaranhamento de Estados Quânticos /
Malena Osorio Hor-Meyll. - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2009.

xiii, 143f.: il.; 31 cm.

Orientador: Luiz Davidovich

Tese (doutorado) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-
graduação em Física, 2009.

Referências Bibliográficas: f. 139-149.

1. Informação Quântica. 2. Emaranhamento. 3. Descoerência. I.
Luiz Davidovich. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de
Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Efeitos do Ambiente no
Emaranhamento de Estados Quânticos.

Dedico à minha mãe.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Luiz Davidovich, meu orientador. Foi um privilégio poder conviver com pessoa tão extraordinária. Segui a área de Ótica Quântica inspirada por suas palestras ainda na época de estudante de graduação. Suas aulas brilhantes, suas intervenções sempre esclarecedoras, que tanto enriqueciam o encontro semanal do nosso grupo bem como as discussões relativas à minha pesquisa de tese, foram determinantes na minha formação. Isto para não mencionar seu humor impagável:

Cenário: Sala de reunião, finalzinho da revisão.

Luiz: “O professor J... está vindo passar uma temporada conosco. Alguém sabe de algum lugar onde possa ficar?”

Alejo: “Tem um quartinho de empregada sobrando lá em casa.”

Luiz: “Ok, só não sei se ele cozinha bem ...”

Eu fui muito feliz aqui e aprendi muito também. Agradeço a todo grupo da Ótica por isto.

Um agradecimento especial aos professores Nicim e Ruynet pela generosidade com que se disponibilizavam para tirar dúvidas e, às vezes, criá-las também!

Duas pessoas, além de se tornarem grandes amigos, tiveram contribuições decisivas na minha tese: Adriana Auyuanet e Fernando de Melo.

Gostaria de fazer uma menção especial à Adriana Auyuanet, que desempenhou praticamente o papel de uma co-orientada. Encontrou soluções para vários problemas importantes relacionados a meu segundo tópico de pesquisa e para fazer justiça, devo afirmar que o referido tópico foi de fato desenvolvido a quatro mãos. Agradeço a ela também por todo apoio psicológico, e que não foi pouco!

Fazendo o papel de um co-orientador, o Fernando me ajudou muito no começo, me transmitindo seu conhecimento de uma forma leve e divertida, e depois, na Alemanha,

fornecendo a idéia do meu último tópico de pesquisa e sempre se disponibilizando para discussões quando algum obstáculo me impedia de prosseguir por meus próprios meios.

Falando em idéias, também quero dar os créditos ao Prof. Marcelo França pela sugestão de investigar os efeitos de um ambiente comum no emaranhamento de dois qbits. E falando em Alemanha, agradecer ao Prof. Andreas Buchleitner pela cuidadosa supervisão durante meu doutorado sanduíche no Instituto Max-Planck em Dresden.

E a lista não termina aqui ...

Marcelo (Camisa), eu teria tantas páginas de agradecimento quanto de tese se fosse mencionar tudo o que você já fez por mim, no doutorado e na graduação. Diney, obrigada por me dar a mão literalmente :-)) nos momentos mais difíceis. Paula, que bom você ser tão doce e compartilhar comigo um pouco da sua enorme paz interior. Alejo, valeu por todas as discussões, nunca mais esqueço o método Monte Carlo! Fabrício, obrigada pelos ensinamentos durante nossa interação no início do doutorado. Marcelo Roberto, quanta Física você me ensinou quando eu ainda não sonhava sequer com o curso de graduação! Professor e amigo Zelaquett, obrigada pela oportunidade de pos-doc sob a sua supervisão e pelas discussões técnicas sobre o efeito do ambiente comum no emaranhamento. E finalmente, Prof. Steve, além de agradecê-lo eu queria tirar uma última dúvida: como você consegue ser tão bom físico, ser tão legal, ter sempre tempo de discutir com as pessoas e ainda por cima costurar um vestido para a sua sogra???

Agradeço às agências CNPq, CAPES e Faperj pelo financiamento durante estes quatro anos de doutorado, e à Cristina e Carlos José pela enorme boa vontade na solução dos problemas burocráticos.

Para terminar, queria agradecer a minha família por sempre considerar o estudo o maior dos ideais, a Paulo Raad por me transformar na pessoa que sou hoje e ao Saboia por fazer este período de finalização de doutorado uma das melhores épocas da minha vida.

Resumo

EFEITOS DO AMBIENTE NO EMARANHAMENTO DE ESTADOS QUÂNTICOS

Malena Osorio Hor-Meyll

Orientador: Luiz Davidovich

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

A maioria dos protocolos de informação e computação quântica fundamenta-se no emaranhamento e nas superposições coerentes de estados. Entretanto, ambos o emaranhamento e as superposições coerentes de estados são extremamente frágeis perante a descoerência, provocada pela inevitável interação entre um sistema físico com o seu ambiente. A proposta principal desta tese é a investigação dos efeitos do ambiente em sistemas de dois níveis, usando elementos simples de ótica linear com fótons obtidos por conversão paramétrica descendente.

Na primeira parte do trabalho estuda-se a dinâmica de partícula única e a dinâmica global de sistemas quânticos emaranhados interagindo independentemente com ambientes individuais. Demonstra-se experimentalmente, pela primeira vez, que mesmo quando o decaimento induzido pelo ambiente de cada sistema é assintótico no tempo, o emaranhamento quântico pode se extinguir em tempo finito. Este é um aspecto bastante não intuitivo do emaranhamento conhecido como “morte súbita de emaranhamento”. Além disto, a flexibilidade da abordagem experimental permite a monitoração

contínua do ambiente e mostra-se que um sistema pode decair mesmo quando o ambiente encontra-se em um estado não excitado. Isto implica que o emaranhamento pode ser aumentado por monitoração local, o que equivale à filtragem de emaranhamento.

A hipótese de ambientes independentes requer que os sistemas individuais estejam suficientemente separados. Pressupondo-se que esta condição não é satisfeita, prossegue-se investigando a dinâmica do emaranhamento de sistemas acoplados a um ambiente *comum*. A interação com um ambiente comum dá origem a efeitos coletivos e é possível emaranhar um sistema inicialmente em um estado separável. A proposta experimental para observar geração de emaranhamento pelo ambiente pode descrever não apenas a interação coletiva de dois sistemas de dois níveis interagindo com um banho à temperatura zero, mas também a troca reversível de excitação entre estes sistemas e um único modo de uma cavidade. O emaranhamento é quantificado por uma testemunha de emaranhamento independente do tempo – um único observável – proporcional à concorrência para os estados considerados. Assim esta proposta evita medidas tomográficas, dispendiosas em termos de tempo, para determinar o estado do sistema e então uma medida de emaranhamento.

Levando-se em consideração a dificuldade de se preservar estados genuinamente puros maximamente emaranhados durante a evolução dos sistemas, na última parte deste trabalho, propõe-se um ferramenta útil para testar protocolos reais de informação e computação quântica: uma fonte de estados mistos bipartidos com emaranhamento e pureza arbitrários. A estratégia para obter o estado misto alvo é forçar um dos subsistemas a interagir com um ambiente específico, neste caso usado como recurso.

Palavras-chave: Informação Quântica, Emaranhamento, Descoerência, Sistemas Abertos, Canais Quânticos, Experimentos com Ótica Linear.

Rio de Janeiro

Abril de 2009

Abstract

EFFECTS OF THE ENVIRONMENT ON THE ENTANGLEMENT OF QUANTUM STATES

Malena Osorio Hor-Meyll

Orientador: Luiz Davidovich

Abstract da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Most quantum information and quantum computation protocols rely on entanglement and coherent superpositions of states. However both entanglement and coherent superpositions of states are extremely fragile against decoherence, which arises due to the unavoidable interaction of a physical system with its environment. The main purpose of this thesis is the investigation of the effects of the environment on two-level systems, using simple linear optical setups with photons obtained from parametric down-conversion. Different degrees of freedom of photons are used to represent the system and the environment.

In the first part of this work we study local single-particle dynamics and global dynamics of entangled quantum systems interacting independently with individual environments. We demonstrate experimentally, for the first time, that even when the environment-induced decay of each system is asymptotic in time, quantum entanglement may vanish in finite time. This is a rather counterintuitive aspect of entanglement known as “entanglement sudden death”. Besides, the flexibility of our experimental ap-

proach allows for continuous monitoring of the environment and we show that a system may decay even when the environment is found in the unexcited state. This implies that entanglement can be increased by local monitoring which is equivalent to entanglement filtering.

The assumption of independent environments requires that the individual systems be sufficiently far apart. We proceed supposing that this condition is not met and thus we investigate the dynamics of entanglement on systems coupled to a *common* environment. The interaction with a common environment gives rise to collective effects and it is possible to entangle an initially separate system. The same setup may describe not only the collective interaction of two two-level systems with a zero-temperature bath, but also the reversible exchange of excitation between these systems and a single cavity mode. Entanglement is quantified by a time-independent entanglement witness – a single observable – shown to be proportional to the concurrence for the states considered, thus our proposal avoids time-consuming tomographic measurements to determine the state of the system and then an entanglement measure.

Taking into account the difficulty of preserving genuine maximally entangled pure states during the system evolution, in the last part of this work we propose a useful tool to test real quantum computation and quantum information protocols: a source of bipartite mixed states of arbitrary entanglement and purity. The strategy to obtain a target mixed state is to force one of the subsystems to interact with a specific environment, used here as a resource.

Keywords: Quantum Information, Entanglement, Decoherence, Open Systems, Quantum Channels, Experiments with Linear Optics.

Rio de Janeiro

Abril de 2009

Lista de Publicações

- M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro e L. Davidovich, “Environment-induced sudden death of entanglement”. *Science* 316, 579, 2007.
- M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro e L. Davidovich, “Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment”. *Physical Review A* 78, 022322, 2008.
- M. Hor-Meyll, A. Auyuanet, C. V. S. Borges, A. Aragão, J. A. O. Huguenin, A. Z. Khoury e L. Davidovich, “Environment-induced entanglement with a single photon”. Submetido a *Physical Review A*.
- M. Hor-Meyll, A. Auyuanet e F. de Melo. “Controlled dynamical generation of any two qubit state”. Em preparação.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Efeitos de Ambientes Independentes no Emaranhamento	9
2.1	Introdução	9
2.2	Conceitos Preliminares	11
2.2.1	Definição e Medida de Emaranhamento	11
2.2.2	Elementos Óticos	12
2.2.3	Tomografia Quântica	15
2.2.4	Canais Quânticos e Formalismo de Kraus	18
2.3	Dinâmica das Populações e Coerências de um Qbit	20
2.3.1	Canal de Decaimento de Amplitude	20
2.3.2	Canal de Defasagem	23
2.3.3	Implementação Experimental	24
2.4	Dinâmica das Populações, Coerências e Emaranhamento em dois Qbits	29
2.4.1	Canais Independentes de Decaimento de Amplitude	29
2.4.2	Canais Independentes de Defasagem	31
2.4.3	Implementação Experimental	33
2.5	Trajetórias Quânticas	36
2.5.1	Monitoramento do Ambiente	39
2.5.2	Filtragem de Emaranhamento	42
2.5.3	Implementação Experimental	43
2.6	Conclusões e Perspectivas Futuras	46

3	Emaranhamento Induzido por Ambiente Comum	48
3.1	Introdução	48
3.2	Conceitos Preliminares	50
3.2.1	Os Modos Transversos Hermite-Gaussianos	50
3.2.2	Elementos Óticos	54
3.3	Modelo Teórico	59
3.4	Mapa Unitário e Operadores de Kraus	60
3.5	Medida de Emaranhamento	66
3.6	Proposta de Implementação Experimental	69
3.6.1	Circuito da Dinâmica do Sistema mais Ambiente	69
3.6.2	Circuito de Medida de Emaranhamento	72
3.7	Generalização do Modelo	73
3.8	Conclusões e Perspectivas Futuras	74
4	Geração de Estados Mistos Arbitrários de dois Qbits	76
4.1	Introdução	76
4.2	Conceitos Preliminares	78
4.2.1	A Representação R de Estados e Canais Quânticos	78
4.2.2	O Isomorfismo de Jamiolkowski	80
4.2.3	Determinação dos Operadores de Kraus de Mapas Completamente Positivos	82
4.3	Definição do Problema	83
4.4	Desenvolvimento Teórico	84
4.4.1	Determinação do Estado Puro Inicial	84
4.4.2	Determinação do Canal	85
4.4.3	Redução do Canal à Forma Normal de Lorentz	86
4.4.4	Operadores de Kraus e Mapa Unitário do Canal na Forma Normal	91
4.4.5	Operações SLOCC A e B	94
4.5	Proposta de Implementação Experimental	97

4.5.1	Preparação do Estado Puro Inicial	97
4.5.2	Canal na Forma Normal	98
4.5.3	Filtragem Local B	101
4.5.4	Circuito Completo	103
4.6	Comparação com outras Propostas da Literatura	103
4.6.1	Proposta de Tzu-Chieh Wei et al.	104
4.6.2	Proposta de Chuanwei Zhang	106
4.6.3	Análise Comparativa	108
4.7	Conclusões e Perspectivas Futuras	109
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	111
A	Programa em Mathematica v.6 para Cálculo dos Operadores de Kraus	114
B	Programa em Mathematica v.6 para Cálculo do Estado Puro Inicial, do Canal na Forma Normal e das Operações de Filtragem	120

Capítulo 1

Introdução

O emaranhamento tem consequências teóricas e práticas profundas na mecânica quântica, como foi discutido pelo artigo seminal de Schrödinger em 1935 [1]. De acordo com o próprio Schrödinger, em um sistema emaranhado “o melhor conhecimento do todo não inclui o melhor conhecimento de suas partes”.

As correlações quânticas inerentes aos sistemas emaranhados levantaram questões teóricas de fundamental relevância, conhecidas como paradoxo EPR, devido às iniciais de seus autores, apresentadas em um artigo publicado por Einstein, Podolsky e Rosen em 1935 intitulado: “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” [2]. Segundo o ponto de vista dos autores, em uma teoria completa existe uma quantidade física correspondendo a cada elemento de realidade. Por realidade o seguinte critério foi adotado: se, sem perturbar de modo algum um sistema físico, pode-se prever com certeza absoluta o valor de uma dada grandeza, então existe um elemento de realidade física predeterminado correspondendo a esta grandeza.

O experimento idealizado originalmente proposto no artigo EPR para questionar se a teoria quântica era completa consistia em um sistema de duas partículas preparado em um estado emaranhado tal que a posição relativa $x_1 - x_2$ e o momento total $p_1 + p_2$ possuíam valores precisos. No entanto, este estado não é muito realista do ponto de vista experimental pela dificuldade de se preparar um autoestado de posição relativa e momento total. Uma descrição mais simples, que permite ilustrar os mesmos princípios e mais consonante com o formalismo desta tese, por usar variáveis discretas, foi proposto

por Bohm e Aharonov [3] e será usada, sem perda de generalidade, no lugar da proposta original baseada em posição relativa e momento total. Consiste em um sistema de dois átomos com spin $s = 1/2$ preparado no estado emaranhado singleto:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle), \quad (1.1)$$

onde os vetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$ denotam os estados de spin correspondentes aos autovalores $+1/2$ e $-1/2$ em relação a um dado sistema de coordenadas. Sejam σ_x , σ_y e σ_z os operadores associados à medida do spin nas direções \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} , respectivamente. O critério de realidade, que por simplicidade será designado de EPR, pode então ser testado neste estado emaranhado levando às mesmas conclusões do artigo EPR.

As partículas, após interação para preparação no estado singleto, são afastadas espacialmente de modo que uma medida na primeira partícula não possa interferir na segunda e vice-versa, respeitando o critério de localidade que estabelece que se dois sistemas A e B estão afastados por intervalo tipo espacial, então uma ação em A não deve modificar a descrição do sistema B.

Suponha que mede-se a componente z de spin da primeira partícula. Como o spin total é zero, pode-se prever com exatidão, sem se perturbar a segunda partícula que o seu spin tem valor contrário. Segundo o critério EPR, então o valor do observável σ_z é um elemento de realidade. Sabe-se, no entanto, que o estado singleto é invariante sob rotações, de modo que se agora a medida do spin for feita na primeira partícula com respeito à direção \vec{x} , o valor da componente de spin relativa à segunda partícula nesta nova direção também fica determinada (valor oposto ao obtido para a primeira partícula). Assim, o observável σ_x também corresponde a um elemento de realidade, uma vez que nesta medida igualmente não há interferência possível entre a primeira e a segunda partícula. Cabe notar que estes resultados se estendem para a medida em qualquer direção arbitrária \vec{n} .

Ocorre que, segundo a mecânica quântica, os operadores σ_z e σ_x não comutam e consequentemente não possuem autovetores comuns. Portanto não há como atribuir um valor exato simultaneamente para estes elementos de realidade, o que levaria à

conclusão de que a descrição física dada pela teoria quântica através do vetor de estado não seria completa, segundo o critério definido por Einstein, Podolsky e Rosen.

Brevemente após sua publicação, o artigo EPR recebeu críticas de Bohr [4]. Embora concordasse que a medida em um sistema com separação espacial de outro não poderia perturbar este último, Bohr considerou que foi desprezada a questão da influência nas condições que definiriam quais tipos de predições relativas ao comportamento futuro do sistema seriam possíveis. Este ponto de vista, denotado pelo próprio Bohr como *princípio de complementaridade*, estava relacionado ao fato de que certos tipos de predições são possíveis enquanto outras não, porque estariam relacionadas a testes mutuamente incompatíveis, ou seja, a execução de certos tipos de experimentos tornam impossível a realização de outros. No caso específico do experimento sugerido no artigo EPR, seria impossível medir posição e velocidade simultaneamente. Einstein, contudo não concorda que a questão levantada por Bohr refutasse sua conclusão de que a descrição da realidade fornecida pela mecânica quântica não seria completa, mas deixou em aberto a questão de que uma teoria completa pudesse existir ou não.

A busca por uma teoria completa sugeria a existência de um modelo clássico incorporando mais informações de modo que as predições dos fenômenos físicos fossem determinísticas e não probabilísticas. Por exemplo, no experimento de Stern-Gerlach [5], de posse do conhecimento absoluto de todos os dados relacionados ao dispositivo para criar o campo magnético, do átomo de prata e do forno utilizado para criá-lo, seria possível prever de forma unívoca se o átomo seria defletido para cima ou para baixo. Estas informações adicionais receberiam o nome de *variáveis escondidas*. A óbvia impossibilidade de se obter todas as informações necessárias para se alcançar predições determinísticas levou a teoria de variáveis escondidas para uma abordagem onde os cálculos seriam feitos com base em médias de *ensembles*, que levariam aos mesmos resultados estatísticos da teoria quântica. Assim sendo, o caráter probabilístico da mecânica quântica seria devido unicamente à falta de uma especificação completa das variáveis do problema, em analogia à mecânica estatística, e não uma propriedade intrínseca dos fundamentos básicos da teoria [6].

Foram necessários aproximadamente trinta anos até que o físico teórico John Bell propusesse uma forma *quantitativa* de resolver o dilema levantado pelo artigo EPR [7]. Bell propôs expressões matemáticas na forma de desigualdades que deveriam ser satisfeitas por qualquer teoria local de variáveis escondidas. Usando estados emaranhados, Bell mostrou que os resultados previstos pela mecânica quântica violavam estas desigualdades, estabelecendo uma distinção absoluta entre a teoria quântica e a teoria clássica de variáveis escondidas. Em outras palavras, Bell provou que não existiria um regime de variáveis escondidas, respeitando o princípio da localidade de Einstein, que pudessem reproduzir todos os resultados da mecânica quântica. O primeiro experimento de violação de desigualdade de Bell¹ foi realizado em 1972 por Freedman e Clauser [8, 9] medindo correlações em polarização de fótons emitidos por um átomo de cálcio. No entanto, dada a sua importância, de 1972 até os dias de hoje uma inumerável quantidade de trabalhos teóricos e experimentais foram publicados sobre desigualdades genéricas de Bell nos mais diversos sistemas físicos.

À parte a sua enorme relevância em aspectos fundamentais da mecânica quântica, conforme discutido anteriormente, o emaranhamento começou a ser investigado, em torno do anos 90, como um poderoso recurso físico na ciência da informação e da computação, impulsionado pela perspectiva de um altíssimo controle na manipulação de átomos, íons e fótons em armadilhas e em cavidades [10, 11, 12]. Na área de informação quântica, as aplicações mais relevantes na utilização do emaranhamento quântico foram os protocolos para criptografia e teletransporte. Na área de computação quântica, Deutsch, Jozsa e Shor demonstraram que o emaranhamento poderia ser explorado para se executar tarefas com eficiência muito maior que a de um computador clássico.

Em criptografia clássica, duas ou mais partes produzem uma cadeia de bits aleatória secreta usada como chave para codificar e decodificar mensagens. Uma importante característica da criptografia quântica é a habilidade das partes que se comunicam de detectar a presença de um espião. Esta habilidade está ligada ao fato de que em

¹De fato, a desigualdade que foi testada experimentalmente não foi proposta por Bell, sendo conhecida por CHSH, devido às iniciais de seus autores: Clauser, Horne, Shimony e Holt.

mecânica quântica o processo de medida em geral perturba o sistema. Para tentar obter a chave, um espião necessariamente efetua algum tipo de medida introduzindo perturbações fisicamente detectáveis. O uso de emaranhamento em criptografia quântica está estreitamente relacionado ao processo de identificar estas perturbações, revelando tentativas de quebra de chaves por espiões [13]. A distribuição quântica de chave criptográfica foi realizada experimentalmente pela primeira vez em 1989 [14]. Desde então inúmeros sistemas físicos foram utilizados para demonstrar experimentalmente criptografia quântica e de fato, cabe notar que foi a primeira aplicação de um protocolo de informação quântica a ser disponibilizada comercialmente [15].

Em 1993 Bennett e colaboradores mostraram teoricamente a possibilidade de transferir um estado quântico desconhecido $|\phi\rangle$ de uma partícula para outra remota - processo denominado de teletransporte quântico [16]. Não há transferência de energia ou matéria neste processo, tampouco comunicação superluminal e o emaranhamento desempenha papel essencial funcionando como o canal quântico de comunicação. De fato, o protocolo é bastante simples. O transmissor e o receptor compartilham inicialmente um par de partículas em um estado maximamente emaranhado. O transmissor realiza uma medida conjunta na partícula emaranhada e na partícula que contém o estado a ser transferido e comunica, usando um canal clássico, o resultado de sua medida para o receptor. Condicionada à informação sobre o resultado da medida conjunta, uma dada operação local é efetuada pelo receptor na partícula emaranhada convertendo seu estado numa réplica exata do estado $|\phi\rangle$. A primeira demonstração experimental de teletransporte foi realizada em 1997 pelo grupo de Zeilinger [17] usando um par de fótons emaranhados obtidos de uma fonte de conversão paramétrica descendente [18] e métodos interferométricos para realização das medidas.

O problema proposto por Deutsch e Jozsa [19], embora de uso restrito, serve para ilustrar de forma simples a potencial superioridade do computador quântico em relação ao clássico, no que se refere à utilização de emaranhamento como recurso físico. Trata-se de verificar se uma dada função booleana desconhecida de n bits, normalmente referida como *oráculo*, é constante (todas as saídas da função são iguais para qualquer

combinação de entrada) ou balanceada (metade das entradas retornam 0 e metade 1). Com os melhores algoritmos clássicos conhecidos é necessário interrogar o oráculo $2^{n-1} + 1$ vezes, portanto a computação cresce exponencialmente com o número de bits de entrada. A solução usando o algoritmo quântico de Deutsch e Jozsa revela que emaranhando-se os bits de entrada é possível resolver o problema com no máximo $3n + 2$ operações. Verifica-se que, em contraste com o aumento exponencial da solução clássica, no caso quântico a computação cresce linearmente com o número de bits de entrada. Desde a sua introdução em 1992 até hoje, vários tipos de sistemas físicos já foram utilizados para demonstrar experimentalmente o algoritmo quântico de Deutsch e Jozsa [20, 21, 22, 23].

Usando algoritmos clássicos conhecidos, o número de passos necessários para decompor um número inteiro de n dígitos em fatores primos aumenta exponencialmente com n . O algoritmo quântico proposto por Shor [24] em 1994, para fatoração de números inteiros em tempo polinomial, despertou enorme interesse pelos computadores quânticos, dentro e fora dos meios acadêmicos, devido à possibilidade de ser usado para quebra de sistemas de criptografia. A primeira implementação experimental do algoritmo de Shor foi realizada em 2001 pelo grupo de Chuang usando ressonância magnética nuclear [25].

A despeito de sua enorme importância, tanto de ponto de vista teórico como prático, como foi ressaltado através da discussão anterior, a dinâmica do emaranhamento sob o inevitável efeito do ambiente ainda representa um território de investigação pouco explorado. A ausência de superposições coerentes de estados clássicos distintos em objetos macroscópicos é analisada pela teoria da descoerência [26]. A idéia central desta teoria, utilizada para a compreensão da transição quântico-clássico, é que sistemas quânticos reais nunca estão isolados e sim imersos em um ambiente externo com o qual interagem continuamente. Neste enfoque, a emergência do mundo clássico está estreitamente relacionada com o fato de que a escala de tempo relativa à descoerência de objetos macroscópicos é extremamente reduzida. Dentro de um pequeno intervalo de tempo que decresce com o tamanho do sistema, uma superposição coerente de dois estados clássicos distintos se transforma em uma mistura estatística, devido ao emaranhamento

com o ambiente. A dinâmica de decaimento usualmente é bem descrita por uma lei exponencial. As implicações da descoerência promovida pelo emaranhamento do sistema com o ambiente são sumamente negativas para as aplicações de informação e computação quântica que se valem de superposições coerentes de estados puros, em muitos casos emaranhados como no teletransporte, para realizar a maioria de seus protocolos.

Neste contexto, se coloca o assunto principal desta tese, que estuda o efeito do ambiente na dinâmica do emaranhamento com propostas de demonstração experimental baseadas em ótica linear. Os circuitos óticos propostos nos experimentos são capazes de simular de forma controlada a evolução no tempo de sistemas interagindo com ambientes que tipicamente aparecem no contexto de informação e computação quântica. De fato, o assunto se divide em três linhas principais de investigação: o efeito destrutivo do ambiente no emaranhamento de subsistemas interagindo com reservatórios locais independentes, o efeito construtivo do ambiente no emaranhamento de subsistemas interagindo com um ambiente comum e finalmente a utilização do ambiente para criar estados mistos sob demanda, uma vez que os mesmos, devido aos inevitáveis efeitos da descoerência, são os constituintes básicos da informação e da computação quântica no estágio tecnológico atual.

No Capítulo 2 estuda-se os efeitos do ambiente na dinâmica de propriedades de partícula única, como populações e coerências e a evolução de propriedades globais, com ênfase na dinâmica do emaranhamento para um sistema bipartido. Mostra-se experimentalmente pela primeira vez que se os subsistemas interagem com ambientes independentes, o emaranhamento pode decair em tempo finito, ao contrário de outras propriedades globais como populações e coerências que decaem assintoticamente no tempo. Os ambientes estudados estão relacionados a processos de dissipação e defasagem. Os experimentos óticos baseiam-se em um interferômetro do tipo Sagnac e tanto o sistema quanto o ambiente são representados por diferentes graus de liberdade de um mesmo fóton – polarização e modo espacial. O aparato experimental permite controle total sobre o ambiente de modo que é possível monitorá-lo observando-se trajetórias quânticas e realizando filtragem de emaranhamento.

No Capítulo 3 investiga-se o efeito de um ambiente comum no emaranhamento de um sistema bipartido no qual os subsistemas não interagem diretamente. De fato, neste caso o ambiente pode desempenhar um papel construtivo de forma que um sistema bipartido em um estado inicial separável pode se tornar emaranhado. Para demonstrar experimentalmente este efeito utiliza-se novamente graus de liberdades internos do mesmo fóton. O sistema bipartido é representado pela polarização e pelos modos transversais Hermite-Gaussianos do fóton, ao passo que os modos espaciais representam o ambiente comum. O experimento é composto de duas partes: um circuito para representar a interação sistema-ambiente e outro para realizar a medida de emaranhamento, neste caso simplificada pela obtenção de uma testemunha de emaranhamento independente do tempo, que dispensa a realização de tomografia quântica.

No Capítulo 4 descreve-se a utilização do ambiente como recurso para a proposta de uma fonte capaz de gerar estados mistos arbitrários de dois qbits com emaranhamento e entropia no grau desejado. Tal fonte é útil para estudo de sistemas reais. É possível, por exemplo, investigar de forma controlada como resultados de protocolos de informação e computação quântica são degradados reduzindo-se continuamente o emaranhamento e/ou o grau de pureza dos estados de entrada.

À parte sua importância em termos de aplicação, esta proposta envolve conceitos teóricos interessantes como por exemplo um formalismo alternativo aos operadores de Kraus para representar canais quânticos² e o desdobramento de um canal quântico, através da *decomposição singular de Lorentz*, em um canal na forma denominada normal, mais simples de se realizar experimentalmente, precedido e sucedido por operações de filtragens locais. Na implementação experimental da fonte de estados mistos, os qbits são representados pelo grau de liberdade de polarização de dois fótons independentes e um conjunto de interferômetros tipo Sagnac descrito no Capítulo 2 são utilizados para implementar a ação do ambiente em um dos qbits.

Finalmente, o Capítulo 5 é dedicado às conclusões e perspectivas futuras.

²O conceito de canal quântico representando o ambiente é utilizado em toda a tese.

Capítulo 2

Efeitos de Ambientes Independentes no Emaranhamento

2.1 Introdução

Um dos maiores desafios da informação e computação quântica é controlar o mecanismo de descoerência dos qbits devido à sua inevitável interação com o ambiente, que pode ocasionar, no caso de um qbit, a transformação de um estado puro em um estado misto e no caso de mais qbits, a perda de emaranhamento, propriedade fundamental tanto do ponto de vista teórico, como de aplicações, como discutido previamente.

Neste capítulo investiga-se experimentalmente, usando elementos simples de ótica linear, a dinâmica do emaranhamento entre um sistema de um qbit e um ambiente e também o emaranhamento entre dois qbits interagindo de forma independente com ambientes locais. Tipicamente os processos de descoerência levam a decaimentos assintóticos das grandezas físicas que caracterizam um estado quântico como populações de estados excitados e coerências [26]. No entanto, foi demonstrado teoricamente que em certos casos o emaranhamento pode se extinguir em tempo finito, fenômeno que ficou conhecido na literatura como *morte súbita de emaranhamento* [27, 28]. Um dos pontos centrais deste capítulo é apresentar a primeira demonstração experimental deste fenômeno [29, 30].

O esquema ótico utilizado nos experimentos está baseado em um interferômetro Sagnac modificado que permite realizar vários canais quânticos [31] representando diversos

tipos de ambiente no contexto do processamento quântico de informação. Em particular a análise será feita para dois canais bastante discutidos na literatura: decaimento de amplitude e defasagem.

O aparato experimental para implementar os canais mencionados está baseado na utilização de dois graus de liberdade do mesmo fóton para representar o sistema e o ambiente. Mais especificamente, a polarização representa o qbit e o modo de propagação do fóton representa o ambiente. Desta forma, o controle sobre o ambiente é tal que, em contraste com outras propostas na literatura para induzir descoerência, é possível monitorá-lo continuamente. O monitoramento do ambiente permite, entre outros aspectos, observar trajetórias quânticas [32] e aumentar o emaranhamento através de operações de filtragem locais [33, 34].

Finalmente, cabe ressaltar que o uso de múltiplos graus de liberdade de fótons, embora não resulte em computação quântica escalável [35], permite o estudo de algoritmos quânticos básicos [36, 37, 38], teletransporte quântico [39], purificação de emaranhamento [40], e distribuição quântica de chave criptográfica [41, 42], entre outras aplicações.

O capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2.2 são apresentados conceitos preliminares que serão utilizados ao longo de todo o texto, incluindo uma introdução aos canais quânticos no formalismo de Kraus [43], no qual estão baseados os esquemas experimentais, uma breve discussão da fonte de fótons gêmeos e dos dispositivos óticos básicos utilizados nos experimentos, o quantificador de emaranhamento adotado e a idéia geral do processo de tomografia quântica. A seguir, na Seção 2.3 discute-se a influência do ambiente na dinâmica das populações e coerências de um sistema de um qbit, introduzindo-se os dois tipos de canais de descoerência representando o ambiente: decaimento de amplitude e defasagem. A dinâmica do emaranhamento em um sistema de dois qbits sob influência destes canais, atuando de forma independente em cada qbit, é assunto da Seção 2.4. A possibilidade de se monitorar o ambiente, inerente ao esquema experimental baseado no formalismo de Kraus para implementar os canais de descoerência, é explorada na Seção 2.5. Finalmente, a Seção 2.6 é dedicada

às conclusões e perspectivas futuras.

2.2 Conceitos Preliminares

2.2.1 Definição e Medida de Emaranhamento

Uma consideração detalhada da dinâmica do emaranhamento requer definições matemáticas precisas do que é um estado emaranhado e de uma medida apropriada para quantificá-lo.

Seja um estado bipartido puro de dois subsistemas $|\chi\rangle$ definido no espaço de Hilbert¹ $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Este estado é separável ou não emaranhado se puder ser expresso da seguinte forma:

$$|\chi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle, \quad (2.1)$$

onde $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ são estados puros dos dois subsistemas, respectivamente. Observa-se que o conhecimento dos estados nos subespaços de cada subsistema define completamente o estado total do sistema. Qualquer estado puro que não possa ser expresso na forma (2.1) é emaranhado.

Considere agora um estado mistura de dois subsistemas ρ definido no espaço $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ onde $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ é um operador linear finito atuando em \mathcal{H}_i . O estado ρ é separável ou não emaranhado se puder ser expresso como:

$$\rho = \sum_j c_j \rho_1^j \otimes \rho_2^j, \quad (2.2)$$

onde $0 \leq c_j \leq 1$, $\sum_j c_j = 1$, $\rho_1^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $\rho_2^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ são operadores densidade correspondentes aos dois subsistemas, respectivamente. O estado ρ é emaranhado se não puder ser expresso na forma da Eq. (2.2).

Para quantificar o emaranhamento tanto de estados puros como mistos de dois qbits será utilizada a *concorrência* [45], definida como:

$$\mathcal{C} = \max\{0, \Lambda\}, \quad (2.3)$$

¹Espaço vetorial munido de produto interno e completo em relação à norma definida por este produto interno [44].

onde:

$$\Lambda = \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, \quad (2.4)$$

λ_i sendo os autovalores em ordem decrescente da matriz:

$$\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (2.5)$$

onde ρ é a matriz densidade do sistema de dois qbits, σ_y é a segunda matriz de Pauli e a conjugação é realizada na base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. A concorrência varia de 0, que corresponde a um estado separável, a 1 que corresponde a um estado maximamente emaranhado.

2.2.2 Elementos Óticos

Nesta seção serão apresentados os dispositivos óticos utilizados nas realizações experimentais.

Divisor de Feixes Polarizado

O divisor de feixes polarizado (“polarizing beam splitter” ou PBS, na sigla em inglês) é um dispositivo ótico construído com material birefringente que reflete ou transmite um fóton incidente dependendo de sua polarização. Possui duas portas de entrada (A e B) e duas portas de saídas (A' e B'), como mostra a Figura 2.1. Um fóton horizontalmente polarizado incidente na entrada A (B) é transmitido para a saída A' (B'), ao passo que um fóton verticalmente polarizado é refletido na saída B' (A').

Placas de Onda

Uma placa de onda (“wave plate” ou WP, na sigla em inglês) é um dispositivo ótico tipicamente constituído de um cristal birefringente com uma dada orientação e espessura, cortado de tal forma que o eixo denominado extraordinário (ou eixo ótico) é paralelo à superfície da placa, e o eixo denominado ordinário é perpendicular ao eixo ótico e à direção de propagação do fóton², como mostra a Figura 2.2.

²Na Figura 2.2 o eixo ordinário é perpendicular à superfície do papel.

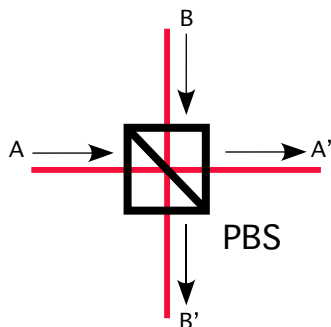


Figura 2.1: Divisor de feixes polarizado (PBS).

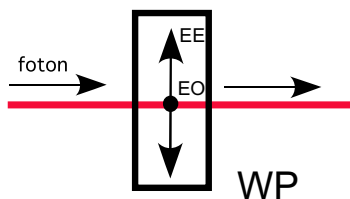


Figura 2.2: Placa de onda (WP). EE significa eixo extraordinário e EO eixo ordinário. As velocidades de propagação nos dois eixos são diferentes.

A componente de polarização de um fóton incidente paralela ao eixo extraordinário se propaga com velocidade diferente da componente de polarização perpendicular (ou paralela ao eixo ordinário), criando uma diferença de fase entre elas capaz de alterar a polarização do fóton. Quando o índice de refração na direção do eixo extraordinário é menor (maior) do que o índice na direção do eixo ordinário, o primeiro é denominado eixo rápido (lento).

Sejam $|e\rangle$ e $|o\rangle$ estados de polarização linear com direções paralelas aos eixos extraordinário e ordinário de uma placa de onda, respectivamente. O operador correspondente a esta placa é dado por [46]:

$$W = e^{-i\phi_e}|e\rangle\langle e| + e^{-i\phi_o}|o\rangle\langle o|, \quad (2.6)$$

onde ϕ_e e ϕ_o são as fases introduzidas na propagação na direção extraordinária e ordinária respectivamente. Atuando em um estado arbitrário de polarização dado por:

$$|a\rangle = \cos \alpha|e\rangle + \text{sen } \alpha|o\rangle, \quad (2.7)$$

o operador W produz o estado:

$$|b\rangle = e^{-i\phi_e} \cos \alpha |e\rangle + e^{-i\phi_o} \sin \alpha |o\rangle. \quad (2.8)$$

Se $\phi_o - \phi_e = \pi$, a placa é denominada de meia onda (“half-wave plate” ou HWP, da sigla em inglês). A menos de um fator de fase, a matriz que representa a placa de meia onda W_{HWP} , em uma base ortogonal no subespaço de polarização linear designada de $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é dada por [47]:

$$W_{HWP} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

onde θ é o ângulo físico entre o eixo extraordinário e a direção de polarização $|0\rangle$.

Analogamente, se $\phi_o - \phi_e = \pi/2$, a placa é denominada de quarto de onda (“quarter-wave plate” ou QWP, da sigla em inglês), cuja representação matricial W_{QWP} é dada por [47]:

$$W_{QWP} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & (1 - i) \cos \theta \sin \theta \\ (1 - i) \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + i \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Fonte de Fótons Gêmeos

Para investigar experimentalmente a dinâmica de emaranhamento envolvendo dois qubits foi usada uma fonte de geração de fótons gêmeos baseada no processo de conversão paramétrica descendente [48], ilustrada na Figura 2.3.

A fonte é composta de dois cristais não lineares adjacentes tipo I e orientados de tal forma que seus eixos óticos ficam alinhados perpendicularmente. Com o laser de bombeamento (“pump beam”) verticalmente polarizado o processo de conversão paramétrica descendente só ocorre no cristal 1 gerando um cone de pares de fótons polarizados horizontalmente. Analogamente, se a polarização do laser de bombeio for horizontal, a conversão só ocorre no cristal 2 gerando um cone idêntico ao anterior, mas com pares de fótons com polarização vertical. Se a polarização do laser de bombeio for uma superposição balanceada de $|H\rangle$ e $|V\rangle$, fótons serão criados no estado $(|HH\rangle + e^{i\phi}|VV\rangle)/\sqrt{2}$, ϕ

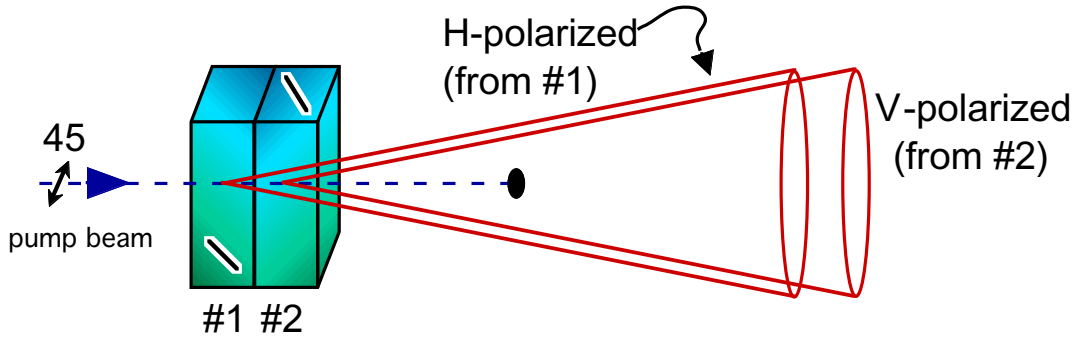


Figura 2.3: Fonte de fótons gêmeos emaranhados em polarização. Figura extraída da Ref. [48].

sendo determinado pela espessura do cristal e por outros detalhes técnicos. Colocando-se placas de meia e quarto de onda no laser de bombeio é possível criar qualquer estado do tipo $|\Phi\rangle = (\alpha|HH\rangle + e^{i\theta}\beta|VV\rangle)/\sqrt{2}$. Estados mais gerais, com o mesmo grau de emaranhamento, podem ser criados, a partir do estado $|\Phi\rangle$, por operações unitárias locais nos fótons gêmeos.

2.2.3 Tomografia Quântica

Tomografia quântica é o processo físico através do qual se determina o estado de um dado sistema quântico. A seguir descreve-se este processo para o estado de polarização de um fóton [47].

Um estado arbitrário de polarização ρ pode ser univocamente representado por:

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sum_{i=1}^3 S_i \sigma_i), \quad (2.11)$$

onde $S_i = \text{Tr}(\sigma_i \rho)$ são denominados parâmetros de Stokes e σ_i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Verifica-se que obtendo-se os parâmetros de Stokes o estado fica perfeitamente determinado. Fisicamente, cada um dos parâmetros de Stokes corresponde ao resultado de um par específico de medidas projetivas. Supondo as matrizes de Pauli na base de

polarização linear horizontal e vertical $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ estas medidas projetivas são dadas por:

$$\begin{aligned} S_1 &= P_{|D\rangle} - P_{|A\rangle} \\ S_2 &= P_{|R\rangle} - P_{|L\rangle} \\ S_3 &= P_{|H\rangle} - P_{|V\rangle}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde $P_{|\psi\rangle}$ é a probabilidade de medir o estado $|\psi\rangle$ e

$$\begin{aligned} |D\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle), \\ |A\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle), \\ |R\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle), \\ |L\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle), \end{aligned} \quad (2.14)$$

são os autoestados correspondentes aos valores $+1$ e -1 de σ_1 e σ_2 , respectivamente.

O circuito para medir os parâmetros de Stokes consiste de uma placa de quarto de onda (QWP), uma placa de meia onda (HWP), um divisor de feixes polarizado (PBS) e dois detectores de fótons ($D_{|H\rangle}$ e $D_{|V\rangle}$), como mostra a Figura 2.4.

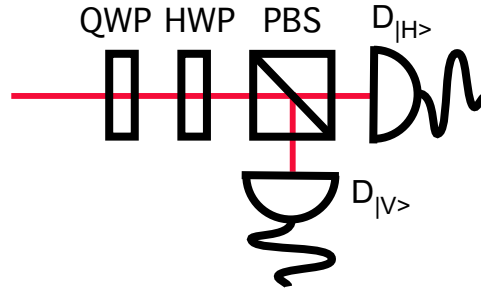


Figura 2.4: Circuito óptico para realizar tomografia quântica no estado de polarização de um fóton.

Para medir S_1 , o eixo ótico da placa de quarto de onda é alinhado com o estado de polarização $|D\rangle$ de modo que não afeta este estado e apenas introduz uma fase global em $|A\rangle$, que não altera a probabilidade de medir este estado. A placa de meia

onda é ajustada de forma que seu eixo ótico faça um ângulo de $22,5^\circ$ com o estado de polarização $|D\rangle$ girando este estado de modo a mapeá-lo no estado $|H\rangle$. Analogamente, o efeito da HWP nesta configuração é mapear o estado $|A\rangle$ no estado $|V\rangle$. Assim, contagens de fótons com polarização $|H\rangle$ ($|V\rangle$) correspondem de fato a contagens de fótons com polarização $|D\rangle$ ($|A\rangle$).

Para medir S_2 , o eixo ótico da placa de quarto de onda é alinhado com o estado de polarização $|D\rangle$ de modo que, a menos de um fator de fase, o estado $|R\rangle$ ($|L\rangle$) é mapeado em $|H\rangle$ ($|V\rangle$). A placa de meia onda fica alinhada com a polarização $|H\rangle$ de modo que este estado não é alterado e apenas uma fase global é introduzida no estado $|V\rangle$, que analogamente ao caso anterior não afeta as medidas. Nesta configuração, contagens de fótons com polarização $|H\rangle$ ($|V\rangle$) correspondem de fato à contagens de fótons com polarização $|R\rangle$ ($|L\rangle$), respectivamente.

Finalmente, para medir S_3 ambas as placas de onda são alinhadas de modo que o eixo ótico fique coincidente com a polarização $|H\rangle$, não alterando este estado e apenas introduzindo uma fase global em $|V\rangle$. Nesta configuração os detectores medem de fato as contagens de fótons nas polarizações $|H\rangle$ e $|V\rangle$.

Com efeito,

$$S_i = \frac{C_{|H\rangle}^i - C_{|V\rangle}^i}{C_{|H\rangle}^i + C_{|V\rangle}^i}, \quad (2.15)$$

onde $C_{|H\rangle}^i$ ($C_{|V\rangle}^i$) é a contagem de fótons no detector $D_{|H\rangle}$ ($D_{|V\rangle}$) quando as placas de onda estão configuradas para medir o parâmetro S_i .

Evidentemente, a obtenção da matriz densidade com os dados experimentais ρ_{exp} pode levar a resultados não físicos, como por exemplo: $\text{Tr}(\rho_{exp}) \neq 1$ ou autovalores de ρ_{exp} negativos. Assim, faz-se necessário determinar a matriz densidade física ρ_f mais próxima de ρ_{exp} . O procedimento adotado para a determinação de ρ_f é denominado “Maximum Likelihood” e está descrito em detalhes na Ref. [49].

A tomografia do estado de dois ou mais fótons é obtida de forma análoga, mas agora combinando-se os resultados das medidas projetivas em cada fóton detectadas em coincidência [47].

2.2.4 Canais Quânticos e Formalismo de Kraus

A evolução de um sistema fechado \mathcal{S} pode sempre ser descrita por uma dinâmica unitária $U_{\mathcal{S}}$ conforme mostra a Figura 2.5 (a). Por outro lado, a evolução de um sistema aberto acoplado a um ambiente \mathcal{E} pode também ser descrita como uma dinâmica unitária, mas que englobe o ambiente $U_{\mathcal{S}\mathcal{E}}$, como mostra a Figura 2.5 (b) [31]. Supondo que inici-

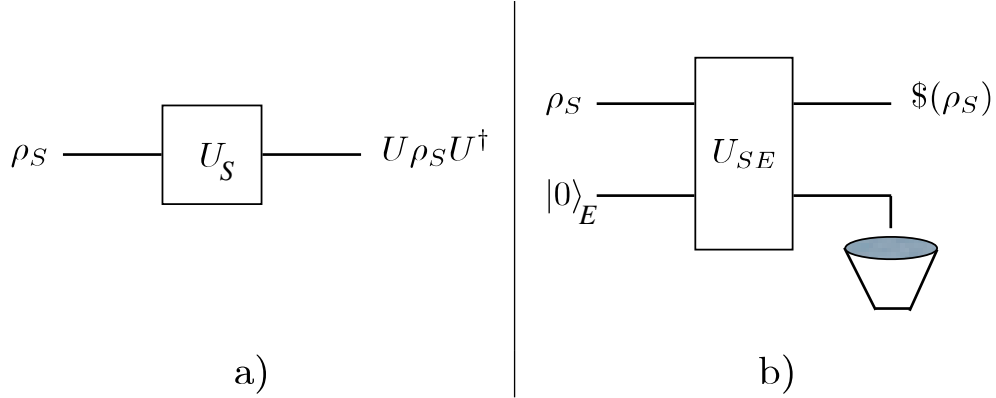


Figura 2.5: (a) Dinâmica unitária em um sistema fechado. (b) Dinâmica não unitária em um sistema aberto. $\$$ descreve a dinâmica do sistema \mathcal{S} quando se traça em relação às variáveis do ambiente \mathcal{E} .

almente o sistema e o ambiente estão desacoplados, a evolução total pode ser descrita como:

$$U_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(\rho_{\mathcal{S}} \otimes |0\rangle_{\mathcal{E}}\langle 0|)U_{\mathcal{S}\mathcal{E}}^\dagger, \quad (2.16)$$

onde sem perda de generalidade, $|0\rangle_{\mathcal{E}}$ representa o estado inicial do ambiente. Para recuperar a dinâmica do sistema, traça-se em relação às variáveis do ambiente. Desta forma, a evolução do sistema, não necessariamente unitária é dada por:

$$\begin{aligned} \$(\rho_{\mathcal{S}}) &= \text{Tr}_{\mathcal{E}}[U_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(\rho_{\mathcal{S}} \otimes |0\rangle_{\mathcal{E}}\langle 0|)U_{\mathcal{S}\mathcal{E}}^\dagger] \\ &= \sum_{\mu} \mathcal{E}\langle \mu|U_{\mathcal{S}\mathcal{E}}|0\rangle_{\mathcal{E}} \rho_{\mathcal{S}} \mathcal{E}\langle 0|U_{\mathcal{S}\mathcal{E}}^\dagger|\mu\rangle_{\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde o superoperador³ $\$$ descreve a evolução do sistema \mathcal{S} e $\{|\mu\rangle_{\mathcal{E}}\}$ forma uma base ortonormal para o ambiente \mathcal{E} . Com base na Eq. (2.17), pode-se escrever a evolução em termos de operadores atuando apenas no sistema \mathcal{S} da seguinte forma:

$$\$(\rho_{\mathcal{S}}) = \sum_{\mu} M_{\mu} \rho_{\mathcal{S}} M_{\mu}^{\dagger}, \quad (2.18)$$

onde:

$$M_{\mu} \equiv {}_{\mathcal{E}}\langle \mu | U_{\mathcal{S}\mathcal{E}} | 0 \rangle_{\mathcal{E}}, \quad (2.19)$$

são operadores de Kraus [50]. A propriedade $\sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = I$, que pode ser demonstrada trivialmente, assegura que $\text{Tr}[\$(\rho_{\mathcal{S}})] = 1$, logo o superoperador $\$$ preserva o traço. Admitindo que é um mapa completamente positivo⁴ e uma vez que preserva o traço, o superoperador $\$$ recebe a denominação de *canal quântico* em analogia com a teoria de comunicação clássica. É interessante notar que os operadores de Kraus não são definidos univocamente. Computando-se o traço na Eq. (2.17) em diferentes bases obtêm-se outros conjuntos de operadores de Kraus equivalentes, que dão origem a diferentes decomposições da matriz densidade resultante.

Para caracterizar um canal quântico que atua em um sistema de d dimensões, é suficiente utilizar d^2 operadores de Kraus independentes [31]. Esta propriedade implica, juntamente com a Eq. (2.19), que a evolução dinâmica de \mathcal{S} , caracterizada pelos operadores de Kraus $\{M_{\mu}\}$, $\mu = 0, \dots, d^2 - 1$, pode ser derivada do seguinte mapa unitário englobando tanto o sistema quanto o ambiente:

$$\begin{aligned} |\phi_0\rangle_{\mathcal{S}}|0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow M_0|\phi_0\rangle_{\mathcal{S}}|0\rangle_{\mathcal{E}} + \dots + M_{d^2-1}|\phi_0\rangle_{\mathcal{S}}|d^2-1\rangle_{\mathcal{E}}; \\ |\phi_1\rangle_{\mathcal{S}}|0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow M_0|\phi_1\rangle_{\mathcal{S}}|0\rangle_{\mathcal{E}} + \dots + M_{d^2-1}|\phi_1\rangle_{\mathcal{S}}|d^2-1\rangle_{\mathcal{E}}; \\ &\vdots \\ |\phi_{d-1}\rangle_{\mathcal{S}}|0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow M_0|\phi_{d-1}\rangle_{\mathcal{S}}|0\rangle_{\mathcal{E}} + \dots + M_{d^2-1}|\phi_{d-1}\rangle_{\mathcal{S}}|d^2-1\rangle_{\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $\{|\phi_i\rangle_{\mathcal{S}}\}$, $i = 0, \dots, d - 1$, é uma base no espaço do sistema e $|\mu\rangle_{\mathcal{E}}$ é o estado do ambiente associado ao operador de Kraus M_{μ} , respectivamente. Os operadores de

³Assim denominado por atuar em outro operador e não em um estado.

⁴Significando que $\$$ é positivo, ou seja, $\$(\rho)$ não possui autovalores negativos e que qualquer extensão $I \otimes \$$ atuando em um espaço de maior dimensão leva operadores positivos em operadores positivos.

Kraus atuam somente sobre os estados do sistema. Este mapa descreve a operação unitária $U_{S\mathcal{E}}$ a que se refere a Figura 2.5(b) e vai servir de base para as implementações experimentais.

Se o ambiente possui muitos graus de liberdade, de modo que possa ser considerado um reservatório, então sob certas aproximações a Eq. (2.18) leva a uma equação mestra [43]. A abordagem com base na equação mestra no entanto é menos geral que o formalismo de Kraus que se aplica mesmo quando o ambiente possui um número reduzido de graus de liberdade.

2.3 Dinâmica das Populações e Coerências de um Qbit

Nesta seção serão analisados os efeitos de dois tipos de ambientes, caracterizados respectivamente pelos canais de decaimento de amplitude e de defasagem em um sistema de um qbit, tanto do ponto de vista teórico quanto prático, usando como base o formalismo de Kraus. Os experimentos, que ilustram estes processos usando ótica linear, permitem acompanhar a evolução temporal do qbit em sua interação com o ambiente de uma forma totalmente controlada como será mostrado na Seção 2.3.3.

2.3.1 Canal de Decaimento de Amplitude

Este canal representa uma interação dissipativa entre o qbit e o seu ambiente externo. O exemplo mais natural para ilustrar este tipo de dinâmica é o processo de emissão espontânea de um fóton por um átomo de dois níveis interagindo com os infinitos modos de um campo eletromagnético à temperatura zero. O processo é descrito pelo seguinte mapa unitário envolvendo o sistema e o ambiente:

$$\begin{aligned} |0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow |0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} \\ |1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow \sqrt{1-p} |1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} + \sqrt{p} |0\rangle_S |1\rangle_{\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde $|0\rangle_S$ e $|1\rangle_S$ são os estados excitado e fundamental do sistema de um qbit, e $|0\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|1\rangle_{\mathcal{E}}$ são estados com zero e uma excitação no ambiente, respectivamente. De acordo

com este mapa, se o sistema estiver inicialmente no estado fundamental não há evolução dinâmica, permanecendo ambos o sistema e o ambiente em seus estados iniciais. Por outro lado, se o sistema inicia no estado excitado, há uma probabilidade $1 - p$ de permanecer neste estado e uma probabilidade p de decair para o estado fundamental emitindo uma excitação para o ambiente.

Cabe notar que p na Eq. (2.21) é apenas uma parametrização para o tempo. A relação entre o parâmetro p e o tempo para um átomo interagindo com os infinitos modos do campo eletromagnético inicialmente no estado de vácuo, na aproximação de Born e Markov [51], é dada por $p = (1 - e^{-\Gamma t})$, onde Γ representa a probabilidade por unidade de tempo do átomo emitir uma excitação. Neste caso, $|1\rangle_{\mathcal{E}}$ representa o estado do ambiente com uma excitação distribuída em todos os modos do campo. A utilização do parâmetro p em lugar do tempo permite uma generalização do mapa para situações físicas significativamente distintas daquela consistindo de um átomo interagindo com o reservatório de infinitos modos do campo eletromagnético no vácuo. De fato, o mapa (2.21) pode ser usado, por exemplo, para descrever a dinâmica não dissipativa da interação de um átomo de dois níveis com um único modo de uma cavidade ressonante de alta qualidade [11]. Neste caso, a excitação oscila entre o átomo e o campo e a parametrização de p com o tempo é dada por $p = \text{sen}^2(\Omega t/2)$, onde Ω é a frequência de Rabi no vácuo. O fato de que o mesmo conjunto de equações, cuja forma geral é descrita em (2.20), possa descrever a interação com um reservatório ou com um ambiente com apenas um único grau de liberdade é uma consequência direta do caráter geral do formalismo de Kraus, como foi enfatizado anteriormente.

Comparando-se as Eqs. (2.20) e (2.21) é possível obter os operadores de Kraus para o canal de decaimento de amplitude. Na base computacional $\{|0\rangle_{\mathcal{S}}, |1\rangle_{\mathcal{S}}\}$ os operadores são dados por:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

A evolução do sistema de um qbit sob efeito deste canal pode ser analisada partindo-se de um estado puro arbitrário dado por $|\chi\rangle = \alpha|0\rangle_{\mathcal{S}} + \beta|1\rangle_{\mathcal{S}}$ inicialmente descorrela-

cionado do ambiente. Segundo o mapa unitário (2.21), obtém-se:

$$U_{S\mathcal{E}}|\chi\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} = U_{S\mathcal{E}}(\alpha|0\rangle_S + \beta|1\rangle_S)|0\rangle_{\mathcal{E}} = (\alpha|0\rangle_S + \beta\sqrt{1-p}|1\rangle_S)|0\rangle_{\mathcal{E}} + \beta\sqrt{p}|0\rangle_S|1\rangle_{\mathcal{E}}. \quad (2.23)$$

O emaranhamento do sistema com o ambiente em função do parâmetro p , quantificado pela concorrência é dado por:

$$C_{S\mathcal{E}}(p) = 2|\beta|^2\sqrt{p(1-p)}. \quad (2.24)$$

De acordo com a Eq. (2.24), embora o sistema e o ambiente iniciem em um estado separável em $p = 0$, à medida que o tempo evolui, representado matematicamente pela variação do parâmetro p , o sistema emaranha-se com o ambiente. O emaranhamento ocorre para todo o intervalo $0 < p < 1$ e somente em $p = 1$ o estado do sistema mais ambiente volta a ser separável.

Para analisar o comportamento das populações e coerências do sistema, traça-se na Eq. (2.23) as variáveis do ambiente, obtendo-se a seguinte matriz densidade do sistema em função de p :

$$\rho_S(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + p|\beta|^2 & \alpha\beta^*\sqrt{1-p} \\ \alpha^*\beta\sqrt{1-p} & (1-p)|\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

A pureza de $\rho_S(p)$ é dada por:

$$\text{Tr}[(\rho_S(p))^2] = |\alpha|^4 + 2|\alpha|^2|\beta|^2 + p^2|\beta|^4 + (1-p)^2|\beta|^4. \quad (2.26)$$

Observa-se que as coerências decrescem com o aumento de p e o estado deixa de ser puro, o que era esperado devido ao fato do sistema se emaranhar com o ambiente. Além disto, a população do estado $|1\rangle_S$ vai sendo transferida para o estado $|0\rangle_S$. O estado do sistema só volta a ser puro em $p = 1$.

Quando este canal descreve o processo de emissão espontânea ($p = 1 - e^{-\Gamma t}$) somente no limite assintótico a coerência cai para zero e o sistema tende para o estado fundamental. Cabe notar que a matriz densidade (2.25) também poderia ser obtida aplicando-se os operadores de Kraus do canal de decaimento de amplitude fornecidos em (2.22) ao estado inicial $\rho_S(0) = |\chi\rangle\langle\chi|$ de acordo com a Eq. (2.18).

2.3.2 Canal de Defasagem

Este canal descreve uma interação não dissipativa entre o sistema e o ambiente na qual as coerências do qbit desaparecem sem que haja alteração nas populações. Este processo ocorre, por exemplo, quando um campo magnético ruidoso se acopla a um sistema de spin 1/2, produzindo flutuações no deslocamento de energia. O mapa unitário que descreve o canal de defasagem é o seguinte:

$$\begin{aligned} |0\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} &\rightarrow |0\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} \\ |1\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} + \sqrt{p}|1\rangle_S|1\rangle_\mathcal{E}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A primeira linha do mapa indica que, se não há excitação no sistema, o estado composto total fica inalterado. De acordo com a segunda linha, se o sistema inicia no estado excitado, há uma probabilidade $1-p$ de permanecer neste estado sem nenhuma alteração no ambiente e uma probabilidade p de permanecer neste estado, contudo o estado do ambiente sendo alterado de $|0\rangle_\mathcal{E}$ para $|1\rangle_\mathcal{E}$.

Os estados do sistema $|0\rangle_S$ e $|1\rangle_S$ não são afetados pela interação, mas qualquer superposição coerente destes estados, como será visto, fica emaranhada com o ambiente.

Os operadores de Kraus para o canal de defasagem na base computacional são dados por:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Os operadores de Kraus são representados por matrizes diagonais, consistentemente com o fato de que não há troca de energia entre o sistema e o ambiente.

As características deste tipo de canal podem ser analisadas, como anteriormente, observando a evolução de um estado geral puro. Com efeito, de acordo com o mapa unitário (2.27):

$$U_{S\mathcal{E}}(\alpha|0\rangle_S + \beta|1\rangle_S)|0\rangle_\mathcal{E} = (\alpha|0\rangle_S + \beta\sqrt{1-p}|1\rangle_S)|0\rangle_\mathcal{E} + \beta\sqrt{p}|1\rangle_S|1\rangle_\mathcal{E}. \quad (2.29)$$

A concorrência do sistema composto como função do parâmetro p é dada por:

$$C_{S\mathcal{E}}(p) = 2|\alpha\beta|\sqrt{p}. \quad (2.30)$$

De acordo com a Eq. (2.30), observa-se que o emaranhamento aumenta sempre com p . Cabe notar que, ao contrário do comportamento do canal de decaimento de amplitude, se o estado inicial for $|1\rangle_S$, o sistema não se emaranha com o ambiente.

Novamente, para avaliar a evolução das populações e coerências do sistema, traça-se na Eq. (2.29) as variáveis do ambiente. Então para o canal de defasagem obtém-se a seguinte matriz densidade em função de p :

$$\rho_S(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^*\sqrt{1-p} \\ \alpha^*\beta\sqrt{1-p} & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

A pureza de $\rho_S(p)$ sendo dada por:

$$\text{Tr}[(\rho_S(p))^2] = 1 - 2|\alpha\beta|^2p. \quad (2.32)$$

Ambas as coerências e a pureza decrescem monotonicamente com o aumento de p à medida que o sistema se emaranha com o ambiente. Entretanto, as populações dos estados $|0\rangle_S$ e $|1\rangle_S$ ficam inalteradas para todo o intervalo $0 \leq p \leq 1$.

2.3.3 Implementação Experimental

A Figura 2.6 ilustra o arranjo experimental, baseado em ótica linear, utilizado para implementar a dinâmica de interação do sistema de um qbit com o ambiente. O circuito consiste basicamente de um interferômetro Sagnac modificado de tal forma que caminhos óticos contrapropagantes não se sobrepõem, o que permite a realização dos mapas de decaimento de amplitude e de defasagem. O arranjo do tipo Sagnac é robusto contra flutuações mecânicas e térmicas dos espelhos e do divisor de feixes polarizado (PBS), pois fótons nos dois caminhos óticos incidem sobre os mesmos componentes. Ambos o sistema e o ambiente são representados por graus internos diferentes de um mesmo fóton. Associa-se a polarização horizontal (H) do fóton ao estado fundamental $|0\rangle_S$ e a polarização vertical (V) ao estado excitado $|1\rangle_S$ do sistema. Diferentes modos

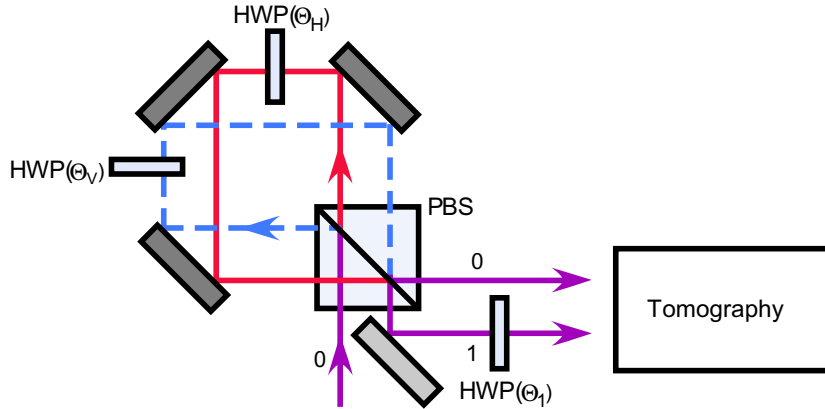


Figura 2.6: Interferômetro Sagnac modificado para implementar os canais de decaimento de amplitude e defasagem.

de propagação do fóton, rotulados na Figura 2.6 com 0 e 1 representam os estados do ambiente com zero e uma excitação, respectivamente. Um fóton incidente tem as suas componentes de polarização H e V separadas pelo PBS, fazendo com que se propaguem em direções opostas dentro do interferômetro. A componente H (V) se propaga no sentido anti-horário (horário). No caminho relativo à propagação em sentido horário encontra-se uma placa de meia onda (HWP) inclinada de um ângulo θ_V em relação à polarização V . A placa de meia onda introduzida no caminho de propagação em sentido anti-horário tem a função apenas de igualar os dois caminhos óticos contrapropagantes, sendo mantida com inclinação fixa de $\theta_H = 0^\circ$ em relação à polarização H ao longo de todo o experimento. Na saída do PBS uma placa de meia onda, com inclinação θ_1 em relação à polarização horizontal, inserida no caminho 1 (correspondendo ao estado excitado do ambiente) será fundamental na determinação do tipo de canal, como será visto a seguir.

Suponha que o fóton incidente tenha polarização H de forma que o estado nos graus de liberdade de polarização e modo de propagação seja dado por $|H\rangle|0\rangle$. O fóton é transmitido pelo PBS, se propaga no sentido anti-horário refletindo nos espelhos e é novamente transmitido pelo PBS no modo de propagação 0. Neste caso, a

transformação realizada pelo interferômetro é dada por:

$$|H\rangle|0\rangle \rightarrow |H\rangle|0\rangle \quad (2.33)$$

A Eq. (2.33) implementa a primeira linha dos mapas de decaimento de amplitude e de defasagem, uma vez que o estado de polarização $|H\rangle$ é associado ao estado fundamental $|0\rangle_S$ e o modo de propagação 0 ao estado de vácuo do ambiente $|0\rangle_E$.

Um fóton incidente com polarização V , correspondendo ao estado de entrada $|V\rangle|0\rangle$, é refletido pelo PBS e se propaga no sentido horário dentro do interferômetro. Após refletir no primeiro espelho atravessa a placa de meia onda cujo efeito é transformar o estado de polarização $|V\rangle$ em uma superposição $\cos 2\theta_V|V\rangle + \sin 2\theta_V|H\rangle$. A componente $|H\rangle$ desta superposição, após reflexão nos espelhos superiores, é transmitida pelo PBS, saindo no modo de propagação 1 ao passo que a componente $|V\rangle$ é refletida no PBS, saindo no modo de propagação 0. A seguir a componente $|H\rangle$ atravessa a placa de meia onda no caminho 1 se transformando na superposição $\cos 2\theta_1|H\rangle + \sin 2\theta_1|V\rangle$. Sendo assim este circuito ótico realiza a seguinte transformação total no estado inicial $|V\rangle|0\rangle$:

$$|V\rangle|0\rangle \rightarrow \cos 2\theta_V|V\rangle|0\rangle + (\sin 2\theta_V \cos 2\theta_1|H\rangle + \sin 2\theta_V \sin 2\theta_1|V\rangle)|1\rangle \quad (2.34)$$

Identificando-se $\cos 2\theta_V = \sqrt{1-p}$ na Eq. (2.34), vem:

$$|V\rangle|0\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}|V\rangle|0\rangle + (\sqrt{p} \cos 2\theta_1|H\rangle + \sqrt{p} \sin 2\theta_1|V\rangle)|1\rangle \quad (2.35)$$

Observa-se que desta forma pode-se variar o parâmetro p de forma totalmente controlada simplesmente alterando-se o ângulo de inclinação θ_V da placa de meia onda.

Uma vez que a componente $|H\rangle$ ($|V\rangle$) está associada ao estado fundamental (excitado) do sistema $|0\rangle_S$ ($|1\rangle_S$) e o caminho de propagação 0 (1) ao estado do ambiente com zero (uma) excitação $|0\rangle_E$ ($|1\rangle_E$) esta transformação realiza a segunda linha dos mapas de decaimento de amplitude e de defasagem escolhendo-se adequadamente o ângulo de inclinação θ_1 . A segunda linha do mapa de decaimento de amplitude é obtida, de acordo com a Eq. (2.35), ajustando-se $\theta_1 = 0^\circ$:

$$|V\rangle|0\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}|V\rangle|0\rangle + \sqrt{p}|H\rangle|1\rangle, \quad (2.36)$$

ao passo que o ajuste $\theta_1 = 45^\circ$ leva à segunda linha do mapa de defasagem:

$$|V\rangle|0\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}|V\rangle|0\rangle + \sqrt{p}|V\rangle|1\rangle. \quad (2.37)$$

A Figura 2.7 mostra o esquema de tomografia quântica para obter a matriz densidade final do sistema. As placas de quarto e meia onda QWP e HWP nos caminhos óticos 0 e 1 são usadas para medir o estado na base de autovetores das matrizes de Pauli, conforme discutido na Seção 2.2.3. Para traçar as variáveis do ambiente deve-se somar as contagens de fótons nos caminhos 0 e 1, sem se identificar por qual caminho o fóton se propagou. A fim de se evitar a utilização de dois PBS e dois detectores de fótons, utiliza-se uma placa de meia onda HWP a 45° em relação a polarização H de modo que todos os fótons com polarização H que seriam detectados após um PBS posicionado no caminho 1, são convertidos para polarização V , sendo refletidos pelo PBS e portanto contabilizados pelo detector posicionado no caminho 0. É importante ressaltar que a diferença entre os caminhos óticos 0 e 1 é maior que o comprimento de coerência dos fótons de modo que a combinação no PBS é incoerente, preservando assim a ortogonalidade dos estados do ambiente.

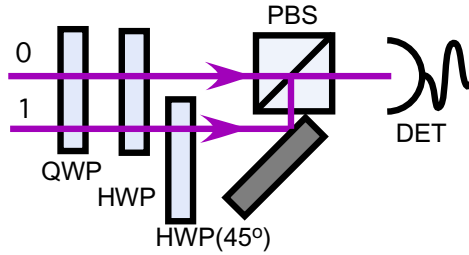


Figura 2.7: Esquema para realizar a tomografia do sistema de um qbit traçando sobre as variáveis do ambiente.

Nos experimentos apresentados nesta seção e nas Seções 2.4.3 e 2.5.3, a interação entre o sistema e o ambiente é controlada variando-se o parâmetro p através da mudança no ângulo de inclinação θ_V da placa de meia onda situada no caminho de propagação do fóton em sentido horário dentro do interferômetro Sagnac modificado. Para cada valor de p , são realizadas tomografias completas do estado de polarização de um

ou dois fótons e reconstrói-se a matriz densidade usando o método “Maximum Likelihood” descrito em [49]. A partir da matriz densidade reconstruída são calculadas as grandezas apresentadas nos gráficos, como por exemplo a concorrência e a pureza.

Os resultados experimentais para o canal de decaimento de amplitude são apresentados no gráfico da Figura 2.8. As linhas são retas ajustadas aos pontos experimentais. As barras de erro horizontais representam incerteza no alinhamento das placas de onda, ao passo que as barras de erro verticais correspondem ao desvio padrão de contagens geradas randomicamente com base nas estatísticas dos dados experimentais segundo o método de Monte Carlo⁵ [47]. Consistentemente com o mapa de decaimento de amplitude, se o estado inicial é $|H\rangle$, ou seja $|0\rangle_S$, não há alteração nas populações do estado fundamental e excitado. Apenas quando o estado inicial é $|V\rangle$, ou seja $|1\rangle_S$, observa-se o decaimento da população do estado excitado com conseqüente aumento da população do estado fundamental à medida que o parâmetro p varia.

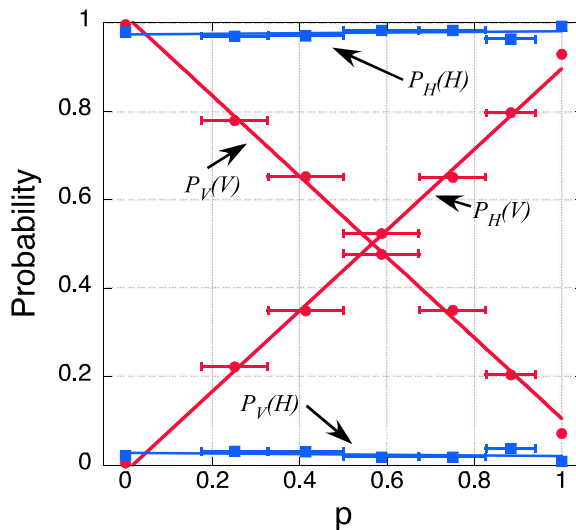


Figura 2.8: Canal de decaimento de amplitude. Dinâmica das populações. $P_J(K)$ é a probabilidade de detectar um fóton com polarização J durante a evolução do estado inicial $|K\rangle_S = \{|V\rangle_S, |H\rangle_S\}$.

⁵Esta interpretação das barras de erros será válida para os demais gráficos apresentados neste capítulo.

2.4 Dinâmica das Populações, Coerências e Emaranhamento em dois Qbits

Nesta seção serão analisados, teorica e experimentalmente os efeitos do ambiente na evolução de um sistema de dois qbits que não interagem entre si. Para tal serão considerados canais idênticos de mesmo tipo – decaimento de amplitude ou defasagem – atuando localmente em cada subsistema. Particular ênfase será dada às consequências da interação com o ambiente na dinâmica do emaranhamento, em virtude da importância deste recurso nas mais diversas aplicações de informação e computação quântica, como já discutido anteriormente.

2.4.1 Canais Independentes de Decaimento de Amplitude

Considere dois qbits suficientemente separados de modo que cada qual interaja com seu ambiente local, neste caso representado pelo canal de decaimento de amplitude. Como os canais são independentes e idênticos, os operadores de Kraus que permitem determinar a evolução do sistema de dois qbits são obtidos através do produto tensorial de todas as combinações possíveis de operadores de Kraus para um qbit, cujas expressões são dadas em (2.22). Desta forma:

$$\begin{aligned}
 K_0 &= M_0 \otimes M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}; \\
 K_1 &= M_0 \otimes M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 K_2 &= M_1 \otimes M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}; \\
 K_3 &= M_1 \otimes M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Um caso interessante a ser analisado é a evolução do sistema para o estado inicial $|\phi\rangle = \alpha|00\rangle_S + \beta|11\rangle_S$. A matriz densidade do sistema de dois qbits para qualquer p é determinada substituindo os operadores de Kraus (2.38) e o estado inicial $|\phi\rangle$ na Eq.

(2.18):

$$\rho_S(p) = \sum_{\mu=0}^4 K_\mu |\phi\rangle \langle \phi| K_\mu^\dagger, \quad (2.39)$$

Calculando (2.39) explicitamente obtém-se, na base computacional $\{|00\rangle_S, |01\rangle_S, |10\rangle_S, |11\rangle_S\}$, a seguinte evolução do sistema para canais locais de decaimento de amplitude:

$$\rho_S(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + p^2|\beta|^2 & 0 & 0 & (1-p)\alpha\beta^* \\ 0 & (1-p)p|\beta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p)p|\beta|^2 & 0 \\ (1-p)\alpha^*\beta & 0 & 0 & (1-p)^2|\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Como esperado, a população do estado $|11\rangle_S$ ($|00\rangle_S$) decresce (cresce) com o aumento de p . Os estados $|01\rangle_S$ e $|10\rangle_S$ são populados incoerentemente no regime intermediário $0 < p < 1$, até que para $p = 1$ toda a população é transferida para o estado fundamental $|00\rangle_S$. À medida que os subsistemas se emaranham com seus ambientes locais, as coerências decrescem monotonicamente com p . Estas considerações são consistentes com a expressão para a pureza do estado $\rho_S(p)$:

$$\text{Tr}[(\rho_S(p))^2] = (1 - 2p|\beta|^2 + 2p^2|\beta|^2)^2. \quad (2.41)$$

Como a componente $|00\rangle_S$, correspondente ao estado fundamental, não é afetada pelos canais como se observa pelo mapa unitário (2.21), quanto maior o módulo do coeficiente da componente $|11\rangle_S$, que efetivamente sofre a interação com o ambiente (e portanto menor o valor de $|\alpha|$ uma vez que está relacionada com $|\beta|$ pela normalização), maior o grau de mistura máximo atingido antes do estado voltar a ser puro. De fato, o menor valor da pureza é obtido para $p = 1/2$ e é dado por:

$$\text{Min}\{\text{Tr}[(\rho_S(p))^2]\} = \frac{1}{4}(1 + |\alpha|^2)^2. \quad (2.42)$$

O emaranhamento entre os subsistemas, designados de \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , quantificado pela concorrência é dado por:

$$C_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}(p) = \max\{0, 2(1-p)|\beta|(|\alpha| - p|\beta|)\}. \quad (2.43)$$

À medida que cada subsistema se emaranha com seu ambiente, o emaranhamento entre eles decresce, como mostra a Eq. (2.43). No entanto, é interessante notar que para a mesma concorrência inicial $C_{S_1 S_2}(0) = 2|\alpha\beta|$, dois regimes de decaimento de emaranhamento podem ser encontrados. Se $|\alpha| \geq |\beta|$, então $C_{S_1 S_2}(p) > 0$ para $p \in [0, 1)$, anulando-se apenas para $p = 1$. Entretanto, para $|\alpha| < |\beta|$ o emaranhamento entre S_1 e S_2 se anula para $p_{ESD} = |\alpha/\beta|$, situação que ficou conhecida na literatura pela denominação de *morte súbita de emaranhamento* (“entanglement sudden death” ou ESD na sigla em inglês) [27, 29]. Se a parametrização $(1 - p) = e^{-\Gamma t}$ for usada, isto implica em desemaranhamento em tempo finito, em contraste com as coerências bipartidas que se anulam apenas no limite assintótico. Este fenômeno evidencia que a coerência bipartida, embora sendo uma propriedade global do sistema, não tem o mesmo comportamento dinâmico que o emaranhamento, este último se revelando mais frágil perante os efeitos do ambiente.

A morte súbita de emaranhamento requer que a população do estado duplamente excitado $|11\rangle_S$ seja inicialmente maior que a população do estado fundamental $|00\rangle_S$. Novamente, isto está relacionado ao fato de que os estados excitados dos dois qbits de $|11\rangle_S$ são perturbados pelo ambiente, como mostra o mapa de decaimento de amplitude (2.21), o que não ocorre com o estado $|00\rangle_S$. Desta forma, quanto maior a componente do estado duplamente excitado no estado inicial $|\phi\rangle$, maior o emaranhamento com o ambiente, levando a um decaimento mais rápido de $C_{S_1 S_2}(p)$.

2.4.2 Canais Independentes de Defasagem

Novamente serão considerados dois qbits suficientemente separados e não interagentes, mas agora cada qual interagindo com um ambiente local descrito pelo canal de defasagem. Os operadores de Kraus para o sistema de dois qbits são obtidos de modo análogo à seção anterior: produto tensorial de todas as combinações dos operadores de Kraus

de um qbit para canal de defasagem, definidos em (2.28). Com efeito:

$$\begin{aligned}
K_0 &= M_0 \otimes M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}; \\
K_1 &= M_0 \otimes M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}; \\
K_2 &= M_1 \otimes M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}; \\
K_3 &= M_1 \otimes M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

A evolução do estado inicial $|\phi\rangle = \alpha|00\rangle_{\mathcal{S}} + \beta|11\rangle_{\mathcal{S}}$ sob a ação do canal de defasagem é obtida usando os operadores (2.44) na Eq. (2.39). Calculando explicitamente, a matriz densidade na base computacional em função de p resulta:

$$\rho_{\mathcal{S}}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & (1-p)\alpha\beta^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p)\alpha^*\beta & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

A pureza deste estado é dada pela seguinte expressão:

$$\text{Tr}[(\rho_{\mathcal{S}}(p))^2] = 1 + 2|\alpha\beta|^2(-2+p)p. \tag{2.46}$$

As coerências e a pureza decrescem monotonicamente com o aumento de p à medida que cada qbit interage com seu ambiente. As populações dos estados $|00\rangle_{\mathcal{S}}$ e $|11\rangle_{\mathcal{S}}$, como esperado para um canal de defasagem, não sofrem alteração e o estado final é uma mistura estatística destes estados com probabilidades dadas por $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$, respectivamente.

O emaranhamento entre os subsistemas \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , medido pela concorrência, é dado por:

$$C_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}(p) = 2(1-p)|\alpha\beta|. \tag{2.47}$$

Independentemente dos valores de $|\alpha|$ e $|\beta|$, o emaranhamento só se extingue para $p = 1$. Não há portanto morte súbita de emaranhamento.

2.4.3 Implementação Experimental

Para investigar experimentalmente a dinâmica do sistema bipartido utiliza-se o arranjo óptico da Figura 2.9, onde são criados dois fótons gêmeos não maximamente emaranhados por conversão paramétrica descendente, conforme discutido na Seção 2.2.2, e cada fóton é direcionado para um interferômetro Sagnac modificado que implementa o canal de decaimento de amplitude ou defasagem, conforme discutido na Seção 2.3.3. As placas

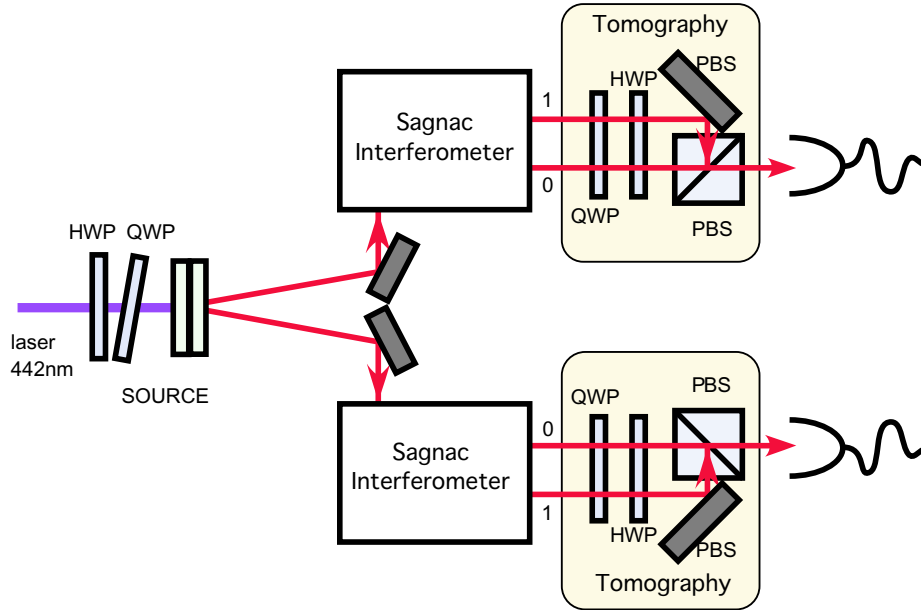


Figura 2.9: Esquema experimental para investigar a dinâmica do emaranhamento sob canais de descoerência.

de meia e quarto de onda na fonte de conversão paramétrica descendente são ajustadas de modo a gerar o par de fótons em um estado muito próximo do seguinte estado não maximamente emaranhado:

$$|\Phi\rangle = |\alpha\rangle|HH\rangle + |\beta\rangle e^{i\delta}|VV\rangle \quad (2.48)$$

Modificando-se simultaneamente o ângulo θ_V nos dois interferômetros de modo a variar o parâmetro p de 0 a 1, foram realizadas tomografias dos estados evoluídos sob os canais de decaimento de amplitude e de defasagem a partir de dois tipos de estados iniciais:

$|\beta|^2 = |\alpha|^2/3$ e $|\beta|^2 = 3|\alpha|^2$. Cabe notar que ambos os estados contêm o mesmo grau de emaranhamento dado por $C_{S_1S_2}(0) = 2|\alpha\beta|$.

A Figura 2.10 ilustra a concorrência e a quantidade Λ em função de p , definidas pela Eqs. (2.43) e (2.4) respectivamente, para o canal de decaimento de amplitude, nos casos $|\beta| < |\alpha|$ e $|\beta| > |\alpha|$. Os pontos representados por triângulos são os valores da

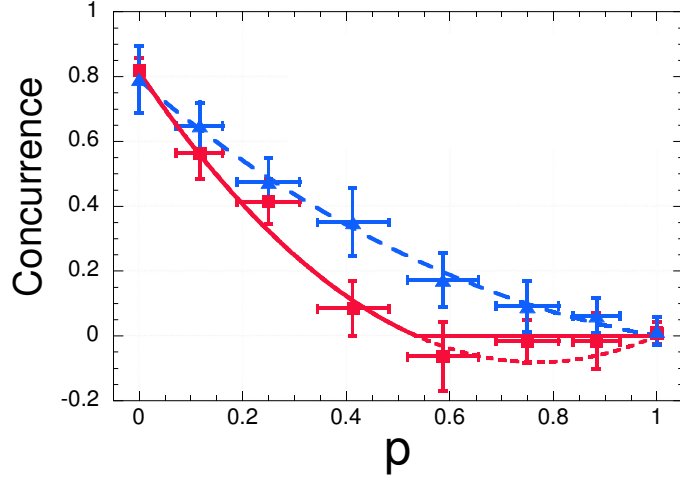


Figura 2.10: Dinâmica do emaranhamento em função de p para o canal de decaimento de amplitude. Os triângulos representam os valores da concorrência calculados a partir dos dados experimentais e a linha tracejada representa a curva teórica correspondente para o caso $|\beta|^2 = |\alpha|^2/3$. Os quadrados representam os valores de Λ obtidos experimentalmente, as linhas cheia e tracejada correspondentes representam as previsões teóricas da concorrência e de Λ , respectivamente, para o caso $|\beta|^2 = 3|\alpha|^2$.

concorrência, ou de Λ já que são coincidentes, calculados a partir dos dados experimentais para o caso $|\beta|^2 = |\alpha|^2/3$. A linha tracejada corresponde à curva teórica calculada para a matriz densidade evoluída obtida através da Eq. (2.39) usando o estado inicial medido experimentalmente pela tomografia⁶. Neste caso o emaranhamento só se extingue em $p = 1$, ou equivalentemente, se a parametrização for dada por $p = (1 - e^{-\Gamma t})$, em tempo assintótico. Os pontos representados por quadrados correspondem aos valores de Λ obtidos experimentalmente para o caso $|\beta|^2 = 3|\alpha|^2$. As linhas cheia e tracejada correspondem às previsões teóricas da concorrência e de Λ , respectivamente. Neste

⁶Todas as demais curvas teóricas deste capítulo foram determinadas segundo esta mesma metodologia.

caso observa-se a morte súbita de emaranhamento que se traduz na concorrência indo para 0 para $p < 1$, mais precisamente quando Λ atinge um valor negativo. Novamente usando a parametrização $p = (1 - e^{-\Gamma t})$ isto significa que o emaranhamento desaparece em um tempo finito, contrastando com as coerências que só se extinguem em tempo assintótico, conforme discutido anteriormente.

É ilustrativo também analisar pureza, cuja expressão teórica é dada na Eq. (2.41) em função do parâmetro p , para os casos $|\beta| < |\alpha|$ e $|\beta| > |\alpha|$. A Figura 2.11 mostra os resultados obtidos a partir dos dados experimentais. Os pontos triangulares e quadrados

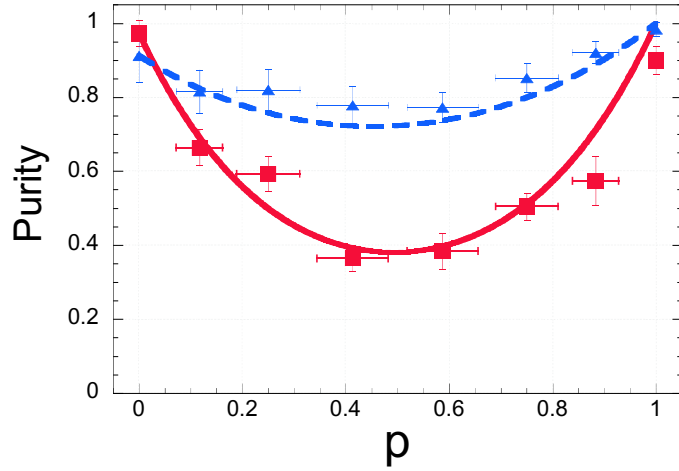


Figura 2.11: Pureza em função de p para o canal de decaimento de amplitude. Os triângulos e quadrados correspondem à pureza calculada a partir dos dados experimentais, enquanto as linhas tracejada e cheia correspondem às previsões teóricas para os casos $|\beta|^2 = |\alpha|^2/3$ e $|\beta|^2 = 3|\alpha|^2$, respectivamente.

correspondem ao cálculo da pureza a partir dos dados experimentais, enquanto as linhas tracejada e cheia correspondem às previsões teóricas para os casos $|\beta|^2 = |\alpha|^2/3$ e $|\beta|^2 = 3|\alpha|^2$, respectivamente. Em ambos os casos a pureza atinge um mínimo em $p = 1/2$ sendo posteriormente restaurada em $p = 1$, quando ambos os fótons vão para o estado de polarização horizontal, correspondendo ao decaimento dos qbits para o estado fundamental. A pureza atinge valores menores nos estágios intermediários para o caso $|\beta| > |\alpha|$ porque a componente $|VV\rangle$, que corresponde ao estado duplamente excitado, é maior, ficando o sistema mais emaranhado com o ambiente, conforme discutido na

Seção 2.4.1.

Para o canal de defasagem a dinâmica de emaranhamento é a mesma para os casos $|\beta|^2 = |\alpha|^2/3$ e $|\beta|^2 = 3|\alpha|^2$, no sentido de que o desemaranhamento só ocorre para $p = 1$. Sendo assim a Figura 2.12 mostra a concorrência e a pureza, definidas pelas Eqs. (2.47) e (2.46) e representadas pelos pontos quadrados e triangulares com as correspondentes curvas teóricas cheia e tracejada, respectivamente, apenas para o caso $|\beta|^2 = 3|\alpha|^2$.

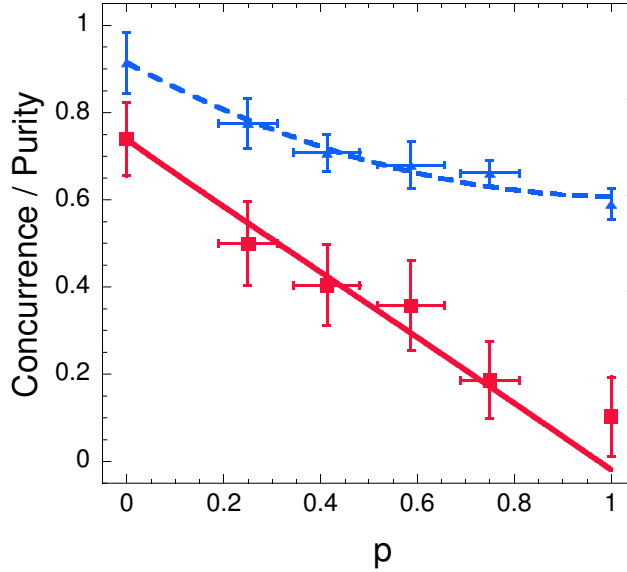


Figura 2.12: Concorrência e pureza em função de p para o canal de defasagem. Os quadrados e triângulos representam a concorrência e a pureza, respectivamente, calculadas a partir dos dados experimentais e as linhas cheia e tracejada representam as curvas teóricas correspondentes para o caso $|\beta|^2 = 3|\alpha|^2$.

2.5 Trajetórias Quânticas

O método das trajetórias quânticas representa uma alternativa aos mapas unitários ou à equação mestra [51] para obter a evolução no tempo de um sistema interagindo com o ambiente. A descrição usual da mecânica quântica é em termos de *ensembles*. Uma trajetória quântica permite descrever a evolução no tempo de um sistema em termos de uma sequência de saltos quânticos que não poderia ser observada diretamente em um

ensemble. As trajetórias quânticas estão condicionadas ao monitoramento contínuo do ambiente. Se o estado inicial for puro, este monitoramento permite que a descrição do sistema seja feita sempre em termos de estados puros, no lugar de matrizes densidade. A evolução não unitária do sistema e os estados mistos são recuperados quando se faz uma média sobre todas as possíveis trajetórias. Nesta seção será mostrado que o esquema ótico discutido anteriormente, para a implementação dos mapas de descoerência, permite o monitoramento do ambiente através de uma pequena alteração na forma de realizar a tomografia, sendo portanto capaz de implementar experimentalmente o método das trajetórias quânticas.

Formalmente, a descrição pelo métodos das trajetórias quânticas envolve um Hamiltoniano não hermitiano, interrompido eventualmente, por um salto quântico instantâneo. Seguindo a prescrição dada na referência [32], o método consiste em calcular a mudança do estado de um sistema $|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t + \delta t)\rangle$ em dois passos:

a) Calcula-se $|\psi^1(t + \delta t)\rangle$ obtido da evolução de $|\psi(t)\rangle$ com um Hamiltoniano não hermitiano dado por:

$$\tilde{H} = H_u - \frac{i\hbar}{2} \sum_m C_m^\dagger C_m, \quad (2.49)$$

onde C_m são os operadores relacionados aos saltos e H_u está relacionado à dinâmica não dissipativa. Por exemplo, para descrever a emissão espontânea em um sistema de dois níveis, onde $|e\rangle$ representa o estado excitado e $|g\rangle$ o estado fundamental, $C_1 = \sqrt{\Gamma}\sigma^-$, Γ sendo a probabilidade por unidade de tempo de uma emissão espontânea (inverso do tempo de vida da transição atômica) e $\sigma^- = |g\rangle\langle e|$.

Para δt pequeno, obtém-se:

$$|\psi^1(t + \delta t)\rangle = \left(1 - \frac{i\tilde{H}\delta t}{\hbar}\right) |\psi(t)\rangle. \quad (2.50)$$

Como \tilde{H} não é hermitiano, $|\psi^1(t + \delta t)\rangle$ não é normalizado. Assim,

$$\langle\psi^1(t + \delta t)|\psi^1(t + \delta t)\rangle = \langle\psi(t)| \left(1 + \frac{i\tilde{H}^\dagger\delta t}{\hbar}\right) \left(1 - \frac{i\tilde{H}\delta t}{\hbar}\right) |\psi(t)\rangle \equiv 1 - \delta p, \quad (2.51)$$

onde:

$$\delta p = \delta t \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \tilde{H} - \tilde{H}^\dagger | \psi(t) \rangle \equiv \sum_m \delta p_m, \quad (2.52)$$

$$\delta p_m = \delta t \langle \psi(t) | C_m^\dagger C_m | \psi(t) \rangle \geq 0. \quad (2.53)$$

Sempre é possível ajustar δt de modo que $\delta p \ll 1$.

b) O segundo passo corresponde ao processo de medida, onde se considera a possibilidade de um salto quântico. Para decidir se o salto quântico ocorrerá ou não define-se um número aleatório ε uniformemente distribuído entre 0 e 1 que é comparado com δp . Duas situações podem ocorrer:

(I) $\varepsilon \geq \delta p$. Este vai ser a maioria dos casos, pois $\delta p \ll 1$. Neste caso não há salto quântico e:

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = \frac{|\psi^1(t + \delta t)\rangle}{\sqrt{1 - \delta p}}. \quad (2.54)$$

(II) $\varepsilon < \delta p$. Um salto quântico ocorre para um dos estados $C_m |\psi(t)\rangle$ de acordo com a probabilidade relativa entre os vários possíveis saltos quânticos dada por, $\Pi_m = \delta p_m / \delta p$. Então:

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = \frac{C_m |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\frac{\delta p_m}{\delta t}}}. \quad (2.55)$$

Pode-se mostrar que $\bar{\sigma}(t)$, definido como $\bar{\sigma}(t) \equiv M[\sigma(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|]$, onde M significa a média sobre um número suficientemente elevado de resultados no tempo t , segundo a prescrição anterior, todos começando do mesmo estado inicial, coincide com a matriz densidade obtida a partir da equação mestra.

A Figura 2.13 ilustra a dinâmica do processo para o caso de apenas um operador de salto. A sequência de sucessivas evoluções e medidas define uma trajetória quântica, como mostram as linhas contínuas. A matriz densidade no tempo $t = n\delta t$ é dada por $\sum_i \frac{1}{i} |\psi_{n\delta t}^i\rangle\langle\psi_{n\delta t}^i|$, onde $|\psi_{n\delta t}^i\rangle$ é o estado puro final de cada trajetória no tempo t .

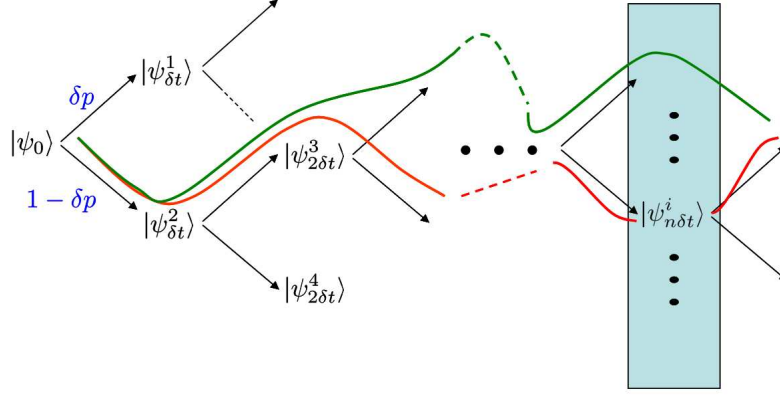


Figura 2.13: Trajetórias quânticas. Figura extraída da Ref. [52].

2.5.1 Monitoramento do Ambiente

Nesta seção será mostrado que aplicar o mapa de decaimento de amplitude, representando o processo de emissão espontânea de um sistema de dois níveis interagindo com os infinitos modos do campo eletromagnético à temperatura zero, e projetar o estado do ambiente no vácuo $|0\rangle_S$ no tempo t , leva ao mesmo estado do sistema que seria obtido em uma trajetória sem saltos até o instante t . Para tal será utilizada a parametrização $p = 1 - e^{-\Gamma t}$ e será considerado um estado inicial arbitrário para o sistema dado por:

$$|\psi(0)\rangle_S = \alpha|1\rangle_S + \beta|0\rangle_S. \quad (2.56)$$

Cálculo pelo Mapa de Decaimento de Amplitude

O mapa unitário para o reservatório de amplitude, escrito em termos do tempo fica:

$$\begin{aligned} |0\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} &\rightarrow |0\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E}, \\ |1\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} &\rightarrow \sqrt{e^{-\Gamma t}}|1\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} + \sqrt{1 - e^{-\Gamma t}}|0\rangle_S|1\rangle_\mathcal{E}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

De acordo com este mapa, o estado $|\psi(0)\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E}$ depois de um tempo t , evolui para:

$$|\psi(0)\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} \rightarrow \alpha(\sqrt{e^{-\Gamma t}}|1\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} + \sqrt{1 - e^{-\Gamma t}}|0\rangle_S|1\rangle_\mathcal{E}) + \beta|0\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E}. \quad (2.58)$$

Projetando o ambiente no estado de vácuo $|0\rangle_{\mathcal{E}}$ obtém-se o seguinte estado puro para o sistema:

$$|\psi(t)\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{e^{-\Gamma t}} \alpha |1\rangle_S + \beta |0\rangle_S \right), \quad (2.59)$$

onde:

$$N = e^{-\Gamma t} |\alpha|^2 + |\beta|^2. \quad (2.60)$$

Cálculo pelo Método das Trajetórias Quânticas

No caso de emissão espontânea há apenas um operador associado a salto $C_1 = \sqrt{\Gamma} \sigma^- = \sqrt{\Gamma} |0\rangle\langle 1|$ ($C_1^\dagger = \sqrt{\Gamma} \sigma^+ = \sqrt{\Gamma} |1\rangle\langle 0|$) e se considera $H_u = 0$, uma vez que apenas a componente dissipativa é pertinente à discussão. Assim, o Hamiltoniano não hermitiano, definido anteriormente, será dado por ($\hbar = 1$):

$$\tilde{H} = -\frac{i}{2} \Gamma \sigma^+ \sigma^- = -\frac{i}{2} \Gamma |1\rangle\langle 1|. \quad (2.61)$$

No caso de não haver salto quântico, a evolução do estado depois de um tempo Δt será dada, a menos de um fator de normalização, por:

$$|\widetilde{\psi(t + \Delta t)}\rangle = (1 - i\tilde{H}\Delta t)|\psi(t)\rangle. \quad (2.62)$$

Então a evolução do sistema, a partir de um estado inicial $|\psi(0)\rangle$, em uma trajetória em que não houve salto até o tempo $t = M\Delta t$ é dada por:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(1 - i\tilde{H} \frac{t}{M} \right)^M |\psi(0)\rangle, \quad (2.63)$$

onde:

$$N = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle. \quad (2.64)$$

No limite $M \rightarrow \infty$, vem:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\tilde{H}t} |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{1}{2}\Gamma |1\rangle\langle 1|t} |\psi(0)\rangle. \quad (2.65)$$

Substituindo o estado arbitrário inicial (2.56) na Eq. (2.65), obtém-se o estado no tempo t , dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{e^{-\Gamma t}} \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle \right), \quad (2.66)$$

onde:

$$N = e^{-\Gamma t} |\alpha|^2 + |\beta|^2, \quad (2.67)$$

que é exatamente o resultado obtido utilizando o mapa unitário com projeção no estado de vácuo do ambiente no tempo t , conforme se queria demonstrar.

No processo de emissão espontânea é natural que ao monitorar o ambiente e encontrá-lo no estado excitado haja certeza de que o sistema se encontra no estado fundamental. No entanto é notável que para o caso estudado, isto é, o monitoramento do ambiente no estado de vácuo, ou seja quando não há saltos, ainda assim o sistema decaia, mesmo sem nenhuma excitação ser emitida para o ambiente, como mostra a Eq. (2.66). A interpretação é de que o conhecimento de que não há excitação no ambiente constitui informação. Assim houve de fato transferência de informação para o ambiente, o que justifica a evolução do estado do sistema.

Enquanto traçar o ambiente corresponde a obter a evolução do sistema através da Eq. (2.18), monitorar o ambiente, obtendo o resultado $|i\rangle_{\mathcal{E}}$, o que equivale a fazer uma medida projetiva no ambiente, pós-seleciona o estado do sistema para:

$$\rho_{\mathcal{S}}(p) = \frac{M_i \rho_{\mathcal{S}}(0) M_i^\dagger}{p_i}, \quad (2.68)$$

onde M_i é o operador de Kraus associado ao estado $|i\rangle_{\mathcal{E}}$ do ambiente, segundo o mapa unitário (2.20) e $p_i = \text{Tr}[M_i \rho_{\mathcal{S}}(0) M_i^\dagger]$ é a probabilidade de encontrar o ambiente neste estado, como ilustra a Figura 2.14.

A aplicação de um único operador de Kraus é usualmente denominada de operação de filtragem [31, 53].

Usando estes conceitos, o estado descrito na Eq. (2.59) poderia ser obtido usando o formalismo de Kraus:

$$|\psi(t)\rangle_{\mathcal{S}} \langle\psi(t)| = \frac{M_0 |\psi(0)\rangle_{\mathcal{S}} \langle\psi(0)| M_0^\dagger}{\text{Tr}[M_0 |\psi(0)\rangle_{\mathcal{S}} \langle\psi(0)| M_0^\dagger]}, \quad (2.69)$$

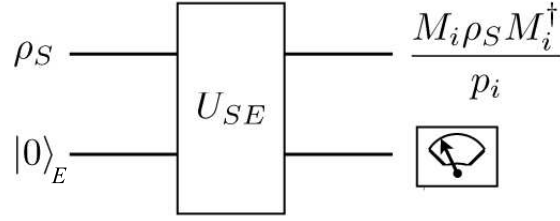


Figura 2.14: Dinâmica não unitária em um sistema aberto monitorando-se o estado do ambiente \mathcal{E} .

onde M_0 é o operador de Kraus do canal de decaimento de amplitude associado ao estado de vácuo $|0\rangle_{\mathcal{E}}$ do ambiente.

2.5.2 Filtragem de Emaranhamento

Os resultados da seção anterior mostraram que apesar de nenhuma excitação ser transferida para o ambiente, a contínua aquisição de informação a este respeito muda o estado do sistema, aumentando a probabilidade de que seja encontrado no estado fundamental. Este fenômeno permite a filtragem de emaranhamento de um sistema de dois qbits, através da contínua monitoração dos seus respectivos ambientes. De fato, para um estado inicial do tipo $|\Phi(0)\rangle = \alpha|00\rangle_S + \beta|11\rangle_S$, com $|\alpha| < |\beta|$, o contínuo monitoramento do ambiente no estado de vácuo leva a um aumento na componente $|00\rangle_S$, implicando que este estado se aproxima de um estado maximamente emaranhado, antes de decair para o estado fundamental $|00\rangle_S$. Com efeito, aplicando o mapa de decaimento de amplitude para cada qbit do estado inicial $|\Phi(0)\rangle$, obtém-se:

$$U_{SE}(\alpha|00\rangle_S + |11\rangle_S)|00\rangle_{\mathcal{E}} = \alpha|00\rangle_S|00\rangle_{\mathcal{E}} + \beta[(1-p)|11\rangle_S|00\rangle_{\mathcal{E}} + \sqrt{p(1-p)}(|10\rangle_S|01\rangle_{\mathcal{E}} + |01\rangle_S|10\rangle_{\mathcal{E}}) + p|00\rangle_S|11\rangle_{\mathcal{E}}]. \quad (2.70)$$

Projetando-se no estado fundamental do ambiente $|00\rangle_{\mathcal{E}}$, obtém-se para o estado do sistema:

$$|\Psi(p)\rangle = \frac{\alpha|00\rangle_S + \beta(1-p)|11\rangle_S}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p)^2}} \quad (2.71)$$

Escolhendo-se $1 - p = |\alpha/\beta|$, ou equivalentemente o tempo t , tal que $e^{-\Gamma t} = |\alpha/\beta|$ obtém-se o estado maximamente emaranhado.

A descrição anterior é uma alternativa de aplicação prática do método de filtragem procrustea [33], objeto de um experimento similar já realizado [34], com a diferença de que foi usado um canal de defasagem. Embora o método utilize apenas operações locais e comunicação clássica (detecção de trajetórias sem saltos em coincidência) não há violação da quantidade de emaranhamento. Em outras palavras, contabilizando-se também as trajetórias com saltos, o emaranhamento médio será o mesmo que o obtido somente através das trajetórias sem saltos. Verifica-se assim que o método consiste de fato em um processo de filtragem de emaranhamento.

2.5.3 Implementação Experimental

Em oposição a processos físicos não controláveis que induzem descoerência, o arranjo ótico baseado no interferômetro Sagnac modificado da Figura 2.6 permite monitorar o ambiente e será utilizado para demonstrar experimentalmente o peculiar fenômeno do decaimento do sistema de dois níveis sem que nenhuma excitação seja emitida para o ambiente, o que equivale a uma trajetória quântica sem saltos, conforme discutido na Seção 2.5.1.

Considere o estado inicial arbitrário $|\Psi(0)\rangle = (\alpha|H\rangle_S + \beta|V\rangle_S)|0\rangle_E$, o interferômetro Sagnac ajustado para a realização do canal de decaimento de amplitude no tempo t com parametrização $p = 1 - e^{-\Gamma t}$ e o circuito ótico para realizar a tomografia quântica da Figura 2.15:

Com detectores nos modos 0 e 1, monitorando os estados do ambiente, conforme mostra a Figura 2.15, duas situações podem ocorrer:

I) Clique no detector do modo 0 (vácuo do ambiente): corresponde a uma trajetória sem saltos quânticos ao longo do tempo t .

II) Clique no detector do modo 1 (uma excitação no ambiente): corresponde a uma trajetória na qual em algum momento durante o intervalo de tempo t ocorreu um salto quântico.

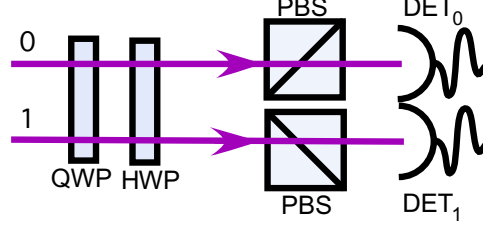


Figura 2.15: Esquema para realizar a tomografia do sistema de um qbit monitorando o ambiente. Os detectores DET_0 e DET_1 detectam fótons nos modos 0 e 1, respectivamente.

Como já foi visto, a evolução sob o canal de decaimento de amplitude em função de p para o estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ é dada por:

$$|\Psi(p)\rangle = \alpha|H\rangle|0\rangle + \beta\sqrt{1-p}|V\rangle|0\rangle + \beta\sqrt{p}|H\rangle|1\rangle. \quad (2.72)$$

Como o interesse é estudar o decaimento sem emissão de excitação serão considerados apenas os eventos em que o detector clica no modo 0. Com efeito, o estado do sistema condicionado à detecção do ambiente no estado de vácuo $|0\rangle_{\mathcal{E}}$ é dado por:

$$|\Psi(p)\rangle_{cond} = \frac{\alpha|H\rangle + \beta\sqrt{1-p}|V\rangle}{[|\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p)]^{1/2}}, \quad (2.73)$$

que decai para o estado fundamental representado por $|H\rangle$ à medida que $p \rightarrow 1$, de acordo com a discussão da Seção 2.5.1.

Este fenômeno, cuja observação experimental deve-se à possibilidade de monitorar o ambiente, é ilustrado comparando-se a evolução do sistema dada pela Eq. (2.73) com o caso onde se traça o ambiente, cuja evolução é dada pela Eq. (2.25). A Figura 2.16 mostra a população do estado $|V\rangle$ em função de p nestes dois casos. Os pontos representados por quadrados (círculos) são os valores da população do estado $|V\rangle$ – estado excitado do sistema – calculados a partir dos dados experimentais para o caso em que se monitora (traça) o ambiente e a linha cheia (tracejada) corresponde à respectiva curva teórica. Observa-se que não só as dinâmicas são diferentes, como de fato o decaimento ocorre mesmo quando não há transferência de excitação do sistema para o ambiente.

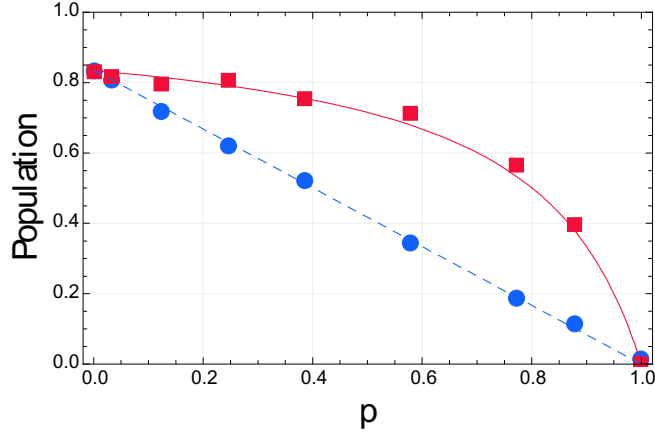


Figura 2.16: Evolução das populações do estado $|V\rangle$ em função de p . Os quadrados (círculos) são os valores da população do estado $|V\rangle$ calculados a partir dos dados experimentais para o caso em que se monitora (traça) o ambiente e a linha cheia (tracejada) corresponde à respectiva curva teórica.

A Figura 2.17 mostra a evolução da pureza em função de p nos dois casos. Os quadrados (círculos) representam os valores da pureza obtidos a partir dos dados experimentais para o caso em que se monitora (traça) o ambiente e a linha cheia (tracejada) corresponde à respectiva curva teórica. Observa-se que quando o ambiente é monitorado, o sistema sempre está próximo de um estado puro. O reduzido grau de mistura presente neste caso deve-se ao fato de que o estado inicial não é perfeitamente puro.

A realização experimental de filtragem de emaranhamento é obtida usando o aparato experimental da Figura 2.9, ajustado para canal de decaimento de amplitude, com o esquema de tomografia dado na Figura 2.15 e restringindo os resultados das medidas somente a eventos onde a contagem de fótons provenham dos detectores associados ao modo 0. Na prática, tanto na observação das trajetórias quânticas, como na filtragem de emaranhamento, o circuito montado é o da Figura 2.7, e o monitoramento do modo 0 é obtido bloqueando-se os fótons no modo 1.

O estado do sistema condicionado à obtenção de vácuo nos dois ambientes é dado por:

$$|\Psi(p)\rangle_{cond} = \frac{\alpha|HH\rangle_S + \beta(1-p)|VV\rangle_S}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p)^2}}, \quad (2.74)$$

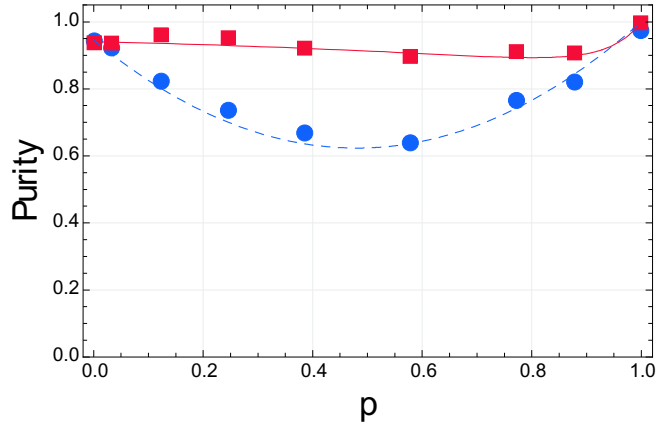


Figura 2.17: Evolução da pureza em função de p . Os quadrados (círculos) representam os valores da pureza obtidos a partir dos dados experimentais para o caso em que se monitora (traça) o ambiente e a linha cheia (tracejada) corresponde à respectiva curva teórica.

e o estado maximamente emaranhado é obtido para a escolha $1 - p = |\alpha/\beta|$, conforme discutido na Seção 2.5.2.

2.6 Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste capítulo foram apresentados diversos experimentos para investigar a dinâmica de sistemas abertos emaranhados bem como a dinâmica de um único qbit sob monitoramento contínuo do ambiente. Em particular, a análise dos efeitos da descoerência no emaranhamento de dois qbits constituiu a primeira demonstração experimental do fenômeno de morte súbita de emaranhamento [29]. A investigação experimental deste efeito em outro sistema físico foi realizada posteriormente pelo grupo de Kimble [54].

Ajustando apenas ângulos de inclinação de placas de onda, o esquema ótico experimental é capaz de implementar os canais de decaimento de amplitude e de defasagem para um qbit. Embora não tenham sido apresentados, com pequenas alterações no aparato experimental, é possível realizar outros tipos de canais típicos de processamento quântico de informação como bit-flip, fase-flip e bit-fase-flip [55].

O esquema experimental apresenta uma grande vantagem se comparado com outras

propostas de implementação de sistemas abertos - permite um monitoramento contínuo do ambiente. Esta possibilidade leva à realização experimental de trajetórias quânticas. No contexto de um qbit, os resultados demonstram que é possível induzir um decaimento por verificação, através de medidas contínuas, de que nenhuma excitação foi transferida para o ambiente, representando uma trajetória quântica sem saltos. Este procedimento realizado independentemente para cada qbit de um sistema bipartido inicialmente emaranhado constitui um processo de filtragem local e permite aumentar o emaranhamento.

A parametrização dos canais quânticos em termos da probabilidade de transição, ao invés de tempo, acomoda diversos tipos de comportamentos dinâmicos no âmbito da mesma descrição geral, o que permite estender o escopo de aplicação dos resultados obtidos, incluindo não apenas o decaimento de um sistema de dois níveis interagindo com ambientes individuais e independentes, mas também a troca oscilatória de energia entre cada qbit e um outro sistema de dois níveis, por exemplo o subespaço definido pelo vácuo e o estado de um fóton do modo de uma cavidade. De fato, mais do que a investigação de um sistema particular, o procedimento descrito neste capítulo corresponde à implementação de mapas quânticos, que devido à sua generalidade, desempenham um papel fundamental em informação e computação quântica.

Capítulo 3

Emaranhamento Induzido por Ambiente Comum

3.1 Introdução

A pesquisa do impacto do ambiente externo em sistemas emaranhados multipartidos ressaltou vários aspectos sutis do emaranhamento. Como foi mostrado no Capítulo 2, o comportamento temporal do emaranhamento pode ser muito diferente do decaimento das populações dos subsistemas, ou mesmo da coerência entre eles, quando se considera ambientes independentes. De fato, mostrou-se que o emaranhamento pode terminar muito antes da coerência se extinguir.

A hipótese de ambientes independentes requer que os subsistemas individuais sejam suficientemente separados. Para átomos interagindo com o reservatório de modos do campo eletromagnético, isto significa que a distância entre eles deve ser muito maior que o comprimento de onda da radiação ressonante. Se esta condição não é satisfeita, a interação de cada subsistema com o ambiente comum dá origem a efeitos coletivos, que foram discutidos no contexto de superradiância [56, 57]. Devido a estes efeitos coletivos, um ambiente comum pode emaranhar estados inicialmente separados [58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69], mesmo que esteja em um estado térmico [58, 59]. Entretanto, em uma possível demonstração experimental desta propriedade, surge um problema, uma vez que a criação de emaranhamento pelo ambiente pode ser mascarada por interações diretas entre os subsistemas, que devem ser levadas em consideração

quando os átomos estão muito próximos.

Neste capítulo mostra-se que um arranjo ótico combinando diferentes graus de liberdade de um único fóton pode ser usado para investigar o papel do ambiente na geração de emaranhamento entre dois qbits não interagentes. Polarização e modos transversos do fóton são usados para representar o sistema de dois qbits, ao passo que o caminho de propagação do fóton representa o ambiente.

O arranjo experimental proposto é dividido em duas partes. A primeira descreve a ação do ambiente comum nos dois qbits; a segunda analisa o estado do sistema através da medida de uma testemunha de emaranhamento que possui uma propriedade peculiar e muito útil: é independente do tempo, de modo que o mesmo aparato experimental pode ser usado à medida que a probabilidade de transição induzida pelo ambiente varia de 0 (que corresponde ao estado inicial) a 1.

O capítulo segue a seguinte organização. Na Seção 3.2 discute-se em detalhes os modos transversos Hermite-Gaussianos e novos dispositivos óticos utilizados nesta proposta experimental ainda não abordados em capítulos anteriores. Na Seção 3.3 deduz-se a equação mestra que descreve a dinâmica do sistema de dois qbits em decorrência de sua interação com um ambiente comum. O mapa unitário correspondente a esta interação, essencial para a elaboração do arranjo experimental é obtido na Seção 3.4. A seguir, na Seção 3.5, apresenta-se um único observável que permite uma medida direta do emaranhamento, evitando-se assim a necessidade de tomografia quântica [49]. A proposta experimental usando ótica linear que demonstra a criação de emaranhamento pelo ambiente e o circuito de medida que o quantifica são discutidos na Seção 3.6. Na Seção 3.7 mostra-se que o circuito ótico proposto pode ser usado também para realizar a dinâmica da interação coerente de dois qbits com um ambiente composto por um único modo. Finalmente, na Seção 3.8 são apresentadas as conclusões e as perspectivas futuras.

3.2 Conceitos Preliminares

3.2.1 Os Modos Transversos Hermite-Gaussianos

A Equação Paraxial de Helmholtz

Um onda ótica é descrita matematicamente por uma função real da posição e do tempo $u(\vec{r}, t)$ que satisfaz à equação de onda [70]:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano dado por $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ em coordenadas cartesianas. Uma possível solução para a Eq. (3.1) é dada pela onda monocromática:

$$u(\vec{r}, t) = \alpha(\vec{r}) \cos[2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})], \quad (3.2)$$

onde $\alpha(\vec{r})$ é a amplitude, $\varphi(\vec{r})$ é a fase e ν é a frequência de oscilação.

É útil representar a função real $u(\vec{r}, t)$ através da função de onda complexa:

$$U(\vec{r}, t) = \alpha(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})} e^{i2\pi\nu t}, \quad (3.3)$$

de modo que $u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{U(\vec{r}, t)\}$.

Como a função de onda $u(\vec{r}, t)$, a função complexa $U(\vec{r}, t)$ também satisfaz a equação de onda:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (3.4)$$

A Equação (3.3) pode ser escrita na forma:

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) e^{i2\pi\nu t}, \quad (3.5)$$

onde o fator independente do tempo $U(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})}$ é denotado amplitude complexa da onda.

Substituindo (3.5) em (3.4), obtém-se uma equação diferencial para a amplitude complexa:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad (3.6)$$

que é conhecida como equação de Helmholtz, onde k é o número de onda dado por $k = 2\pi\nu/c$.

Um onda é dita paraxial se os vetores normais às frentes de onda (superfícies de mesma fase) são raios paraxiais ¹. Uma das maneiras de se construir uma onda paraxial é tomar uma onda plana, cuja amplitude complexa é dada por Ae^{-ikz} , e modular seu envelope A através de uma função lentamente variável da posição, $A(\vec{r})$, de modo que a amplitude complexa da onda modulada seja:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{-ikz}. \quad (3.7)$$

A variação do envelope $A(\vec{r})$ e de sua derivada com a posição z deve ser lenta dentro da distância de um comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$, de modo que a onda se mantenha aproximadamente plana. A premissa de que $A(\vec{r})$ varia lentamente com respeito a z significa que dentro da distância $\Delta z = \lambda$, a variação ΔA é muito menor que A , ou seja, $\Delta A \ll A$. Como $\Delta A = (\partial A/\partial z)\Delta z = (\partial A/\partial z)\lambda$, resulta que $\partial A/\partial z \ll A/\lambda = Ak/2\pi$, de modo que:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA. \quad (3.8)$$

A derivada $\partial A/\partial z$ também deve variar lentamente com a distância λ , de modo que $\partial^2 A/\partial z^2 \ll k\partial A/\partial z$, e resulta:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A. \quad (3.9)$$

Substituindo a expressão da amplitude complexa (3.7) na equação de Helmholtz (3.6), chega-se a uma equação diferencial parcial para o envelope complexo $A(\vec{r})$:

$$\nabla_T^2 A - i2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (3.10)$$

onde $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o operador Laplaciano transversal. A Equação (3.10) é conhecida como equação paraxial de Helmholtz.

¹Raios paraxiais são aqueles que fazem um ângulo pequeno com o eixo óptico do sistema considerado.

Feixes Hermite-Gaussianos

Uma possível solução para a equação de Helmholtz paraxial é o feixe gaussiano cujo envelope complexo é dado por:

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{q(z)} e^{-ik\frac{\rho^2}{2q(z)}}, \quad (3.11)$$

onde A_1 é uma constante, $\rho^2 = x^2 + y^2$, $q(z) = z + iz_0$ é conhecido como o parâmetro q do feixe e z_0 é denominado comprimento Rayleigh. Para separar a amplitude e a fase, decompõe-se a função complexa $q(z)^{-1} = 1/(z + iz_0)$ em termos de suas partes real e imaginária, definindo-se duas novas funções reais, $R(z)$ e $W(z)$, de modo que:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}. \quad (3.12)$$

As funções $R(z)$ e $W(z)$ serão definidas a seguir e correspondem ao raio de curvatura da frente de onda e à largura do feixe, respectivamente. Substituindo (3.12) em (3.11) obtém-se a seguinte expressão para o envelope do feixe gaussiano:

$$A_G(\vec{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{\rho^2}{W^2(z)}} e^{-ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)}, \quad (3.13)$$

onde $A_0 = A_1/iz_0$, $W(z) = W_0\sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2}$, $R(z) = z[1 + (\frac{z}{z_0})^2]$, $\zeta(z) = \tan^{-1}\frac{z}{z_0}$ e $W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}$ são os parâmetros do feixe.

Os feixes gaussianos de envelope complexo dado por (3.13) não são as únicas soluções da equação paraxial de Helmholtz (3.10). Considere a onda cujo envelope complexo é uma versão modulada do feixe gaussiano:

$$A(\vec{r}) = \chi \left[\sqrt{2}\frac{x}{W(z)} \right] \Upsilon \left[\sqrt{2}\frac{y}{W(z)} \right] e^{i\Gamma(z)} A_G(\vec{r}), \quad (3.14)$$

onde χ , Υ e Γ são funções reais. Substituindo (3.14) na equação paraxial de Helmholtz (3.10), usando o fato de que A_G propriamente dita satisfaz (3.10) e definindo duas novas variáveis $u = \sqrt{2}x/W(z)$ e $v = \sqrt{2}y/W(z)$, obtém-se:

$$\frac{1}{\chi} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial \chi}{\partial u} \right) + \frac{1}{\Upsilon} \left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial \Upsilon}{\partial v} \right) + kW^2(z) \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0. \quad (3.15)$$

Como o lado esquerdo de (3.15) é a soma de três termos, cada qual dependendo de uma variável independente u , v e z , respectivamente, cada um destes termos tem que ser uma constante. Igualando o primeiro termo a $-2\mu_1$ e o segundo a $-2\mu_2$ reduz-se a equação diferencial de derivadas parciais (3.15) em três equações diferenciais ordinárias para $\chi(u)$, $\Upsilon(v)$ e $\Gamma(z)$, respectivamente:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + u \frac{\partial \chi}{\partial u} = \mu_1 \chi, \quad (3.16)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial v^2} + v \frac{\partial \Upsilon}{\partial v} = \mu_2 \Upsilon, \quad (3.17)$$

$$z_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \mu_1 + \mu_2, \quad (3.18)$$

usando a expressão de $W(z)$ da definição do envelope gaussiano (3.13). A Equação (3.16) corresponde a uma problema de autovalor cujas autofunções são dadas pelos polinômios de Hermite [71], $\chi(u) = \mathcal{H}_l$, $l = 0, 1, 2, \dots$ correspondendo aos autovalores μ_1 . Equivalentemente, as soluções para (3.17) são $\mu_2 = m$ e $\Upsilon(v) = \mathcal{H}_m$, onde $m = 0, 1, 2, \dots$. Assim existe uma família de soluções com índices (l, m) . Substituindo $\mu_1 = l$ e $\mu_2 = m$ na Eq. (3.18) e integrando, vem:

$$\Gamma(z) = (l + m)\zeta(z), \quad (3.19)$$

onde $\zeta(z) = \tan^{-1}(z/z_0)$.

Finalmente, substituindo estes resultados em (3.14), rearrumando os termos e multiplicando por e^{ikz} obtém-se a amplitude complexa do feixe Hermite-Gaussiano de ordem (l, m) :

$$U_{l,m}(\vec{r}) = A_{l,m} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] \mathcal{G}_l \left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] \mathcal{G}_m \left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right] e^{-ikz - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i(l+m+1)\zeta(z)}, \quad (3.20)$$

onde $A_{l,m}$ é uma constante e:

$$\mathcal{G}_l(u) = \mathcal{H}_l(u) e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

é conhecido como função Hermite-Gaussiana de ordem l . A intensidade ótica do feixe Hermite-Gaussiano de ordem (l, m) , $I_{l,m} = |U_{l,m}|^2$, é dada por:

$$I_{l,m}(\vec{r}) = |A_{l,m}|^2 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \mathcal{G}_l^2 \left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] \mathcal{G}_m^2 \left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right]. \quad (3.22)$$

A Figura 3.1 ilustra a distribuição de intensidade em função das distâncias transversas normalizadas $u = \sqrt{2}/W(z)$ e $v = \sqrt{2}/W(z)$ para diversos valores de l e m .

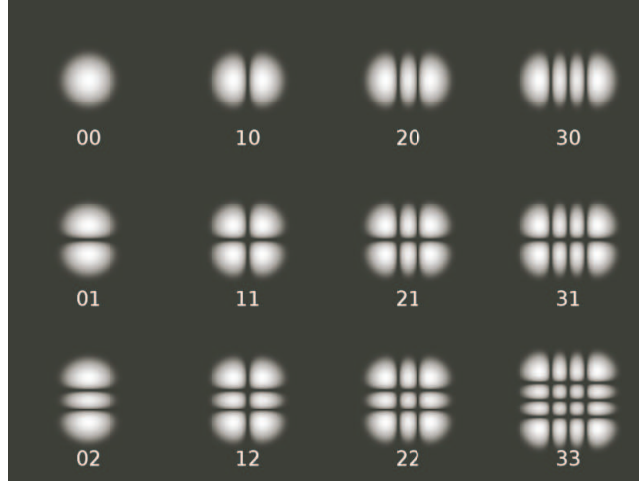


Figura 3.1: Distribuição de intensidade de feixes Hermite-Gaussianos de ordens mais baixas no plano transversal. A ordem (l, m) está indicada embaixo de cada padrão. Figura extraída do sítio http://en.wikipedia.org/wiki/Transverse_mode.

Na proposta de circuito ótico para observação de geração de emaranhamento pelo reservatório serão utilizados, para a representação de um dos qbits do sistema, os modos Hermite-Gaussianos de primeira ordem $(0, 1)$ e $(1, 0)$, denotados de HG_{01} e HG_{10} , cujas amplitudes complexas são dadas por:

$$U_{0,1}(\vec{r}) = A_{0,1} 2\sqrt{2} \frac{W_0}{W(z)} \frac{y}{W(z)} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{W(z)^2}} e^{-ikz - ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)} + i2\zeta(z)}, \quad (3.23)$$

$$U_{1,0}(\vec{r}) = A_{1,0} 2\sqrt{2} \frac{W_0}{W(z)} \frac{x}{W(z)} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{W(z)^2}} e^{-ikz - ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)} + i2\zeta(z)}, \quad (3.24)$$

respectivamente.

3.2.2 Elementos Óticos

Nesta seção discute-se alguns elementos óticos que não foram abordados nos capítulos anteriores e que serão utilizados na proposta do circuito para demonstração de geração de emaranhamento pelo ambiente.

Divisor de Feixes

O divisor de feixes (“beam splitter” ou BS, na sigla em inglês) consiste em uma lâmina de vidro com uma das faces espelhadas possuindo duas portas de entrada (A e B) e duas portas de saída (A' e B') associadas a modos espaciais distintos de propagação de um fóton (que serão designados de a e b , respectivamente), como mostra a Figura 3.2. Um fóton incidente na entrada A (B) tem uma probabilidade $\cos^2 \theta$ de ser transmitido para a saída A' (B') e $\sin^2 \theta$ de ser refletido na saída B' (A').

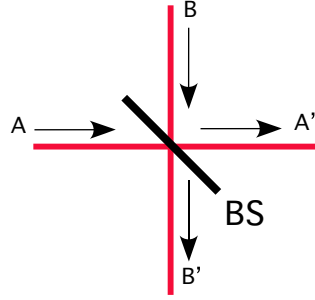


Figura 3.2: Divisor de feixes (BS).

De fato, a atuação do divisor de feixes, representado pelo operador S , a menos de fases que podem ser compensadas, é descrita como:

$$\begin{aligned} S|1_a 0_b\rangle &= \cos \theta |1_a 0_b\rangle + \sin \theta |0_a 1_b\rangle \\ S|0_a 1_b\rangle &= \cos \theta |0_a 1_b\rangle - \sin \theta |1_a 0_b\rangle, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde $|1_a 0_b\rangle$ representa o estado com um fóton no modo a e zero fótons no modo b e $|0_a 1_b\rangle$ representa o estado zero fótons no modo a e um fóton no modo b . Definindo uma base lógica como:

$$\begin{aligned} |0\rangle_L &\equiv |1_a 0_b\rangle, \\ |1\rangle_L &\equiv |0_a 1_b\rangle, \end{aligned} \quad (3.26)$$

a matriz correspondente ao operador S é dada por:

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Se $\theta = \pi/4$ o divisor de feixes é dito balanceado e sua atuação é representada por:

$$S_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Prisma de Dove (DP)

O prisma de Dove é geralmente usado para inverter uma imagem, como mostra a Figura 3.3 . Um feixe de luz entrando em uma das faces inclinadas sofre uma reflexão interna total na base do prisma e emerge na face inclinada oposta. A imagem é invertida, mas não transposta lateralmente.

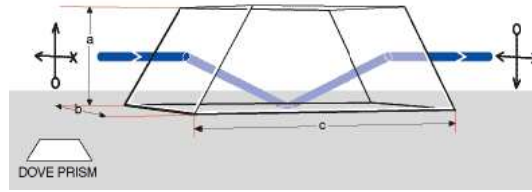


Figura 3.3: Inversão de imagem no Prisma de Dove.

O prisma de Dove possui a interessante propriedade de que quando é rodado em torno de seu eixo longitudinal de um ângulo θ a imagem transmitida gira de um ângulo 2θ . No circuito ótico proposto para a observar geração de emaranhamento pelo reservatório esta propriedade será explorada para converter estados HG_{10} em HG_{01} e vice-versa, usando o prisma de Dove girado de um ângulo de 45° .

Interferômetro de Mach-Zender com espelho adicional (MZIM)

A Figura 3.4 mostra um interferômetro de Mach-Zender modificado de tal forma que o braço inferior possui um espelho adicional [72].

Feixes de luz incidem no interferômetro nas portas de entrada 1 e 2 e emergem nas portas de saída 3 e 4. Define-se coordenadas locais de modo que o feixe de luz se propaga no eixo z e a seção transversal está no plano xy . Os espelhos invertem a imagem em relação ao eixo y , levando x e \vec{x} em $-x$ e $-\vec{x}$, respectivamente. A diferença de caminho ótico entre os braços do MZIM introduz uma diferença de fase ϕ que pode

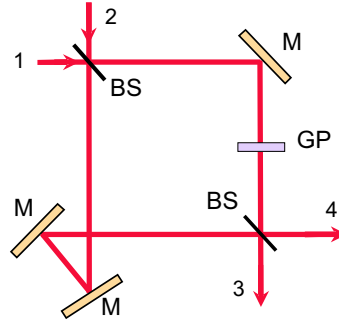


Figura 3.4: Interferômetro de Mach-Zehnder com espelho adicional. BS representa divisor de feixes balanceado, M espelho e GP placa de vidro.

ser ajustada inclinando-se a placa de vidro (GP). A expressão geral do campo elétrico de um feixe Hermite-Gaussiano de primeira ordem, com as coordenadas transversas normalizadas pela cintura do feixe W_0 e desconsiderando as variações longitudinais do envelope complexo (o que é válido quando o comprimento Rayleigh z_0 é muito maior que as dimensões do interferômetro), é dada por:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \{(E_{Xx}\hat{x} + E_{Xy}\hat{y})x + (E_{Yx}\hat{x} + E_{Yy}\hat{y})y\}e^{-(x^2+y^2)}e^{i(\omega t - kz)}, \quad (3.29)$$

onde E_{Xx} , E_{Xy} , E_{Yx} e E_{Yy} são as amplitudes complexas do campo. Os sub-índices com letras maiúsculas representam os modos transversos: X representa o modo HG_{10} e Y o modo HG_{01} . Os sub-índices com letras minúsculas representam a polarização. Os modos transversos combinados com a polarização formam uma base para um sistema de dois qbits. A Figura 3.5 ilustra esquematicamente a distribuição de intensidade e a polarização, representada com setas, em uma seção transversal do feixe para cada um dos estados da base.

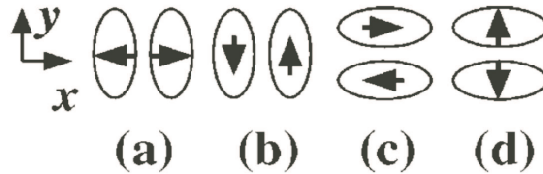


Figura 3.5: Bases formadas por modos transversos de primeira ordem e por polarização linear. (a) HG_{10} com polarização \hat{x} . (b) HG_{10} com polarização \hat{y} . (c) HG_{01} com polarização \hat{x} . (d) HG_{01} com polarização \hat{y} . Figura extraída da Ref. [72].

O espelho adicional não tem nenhum efeito sobre os estados HG_{10} com polarização \hat{x} e HG_{01} com polarização \hat{y} , por serem invariantes perante uma reflexão em torno do eixo y , e que portanto serão designados de estados pares. Neste caso a diferença de fase entre os braços do interferômetro será idêntica a ϕ e as amplitudes dos feixes pares nas quatro portas, denotadas de E_{ie} ($i = 1, \dots, 4$) serão relacionadas por:

$$\begin{pmatrix} E_{3e} \\ E_{4e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{1e} \\ E_{2e} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

onde a primeira e a terceira matriz correspondem à transformação realizada pelo divisor de feixes balanceado (BS) e a segunda matriz à evolução nos dois braços do interferômetro incluindo o efeito da placa de vidro (GP). Resulta:

$$E_{3e} = i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} E_{1e} - \cos \frac{\phi}{2} E_{2e}, \quad (3.31)$$

$$E_{4e} = \cos \frac{\phi}{2} E_{1e} - i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} E_{2e}. \quad (3.32)$$

Por outro lado, os estados HG_{10} com polarização \hat{y} e HG_{01} com polarização \hat{x} são designados de estados ímpares porque o espelho adicional do interferômetro inverte a componente do campo elétrico ao longo do eixo x , o que resulta em uma diferença de fase de $\phi + \pi$. Desta forma, as componentes ímpares, designadas de E_{io} ($i = 1, \dots, 4$) se transformam como:

$$\begin{pmatrix} E_{3o} \\ E_{4o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{1o} \\ E_{2o} \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

onde novamente a primeira e a terceira matriz correspondem à transformação realizada pelo divisor de feixes balanceado, a segunda matriz à evolução nos dois braços do interferômetro incluindo o efeito da placa de vidro e do espelho adicional. Assim:

$$E_{3o} = \cos \frac{\phi}{2} E_{1o} - i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} E_{2o}, \quad (3.34)$$

$$E_{4o} = i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} E_{1o} - \cos \frac{\phi}{2} E_{2o}. \quad (3.35)$$

Por conveniência futura, analisa-se agora o efeito resultante do MZIM, nos estados pares e ímpares, supondo-se que apenas a porta de entrada 1 é utilizada ($E_{2e} = E_{2o} = 0$) e

que a placa de vidro é ajustada para uma diferença de fase $\phi = 0$:

$$E_{3e} = 0, \quad (3.36)$$

$$E_{4e} = E_{1e}, \quad (3.37)$$

$$E_{3o} = E_{1o}, \quad (3.38)$$

$$E_{4o} = 0. \quad (3.39)$$

Concluindo, os estados pares HG_{10} com polarização \hat{x} (horizontal) e HG_{01} com polarização \hat{y} (vertical) mantêm sua direção de propagação depois de atravessar o MZIM enquanto que os estados ímpares HG_{10} com polarização \hat{y} (vertical) e HG_{01} com polarização \hat{x} (horizontal) têm sua direção de propagação girada de 90° .

3.3 Modelo Teórico

Considera-se um sistema de N qbits \mathcal{S} interagindo com um ambiente comum à temperatura zero \mathcal{E} . Os estados de cada qbit são representados na base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, onde $|e\rangle$ representa o estado excitado e $|g\rangle$ o estado fundamental. O estado $|e\rangle$ decai para o estado $|g\rangle$, produzindo uma excitação no ambiente. Associa-se ao qbit i o operador de Pauli $S_i^z = |e_i\rangle\langle e_i| - |g_i\rangle\langle g_i|$ e os operadores de levantamento $S_i^+ = |e_i\rangle\langle g_i|$ e abaixamento $S_i^- = |g_i\rangle\langle e_i|$. O Hamiltoniano que descreve a interação entre os qbits e os infinitos modos de um reservatório bosônico, digamos o campo eletromagnético é dado por:

$$H = \sum_{i=1}^N \hbar\omega S_i^z + \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega_k (a_{\vec{k},s}^\dagger a_{\vec{k},s} + 1/2) - i\hbar \sum_{\vec{k},s} \sum_{i=1}^N [g_{\vec{k}}(S_i^+ + S_i^-)a_{\vec{k},s} - h.c.], \quad (3.40)$$

onde $g_{\vec{k}}$ é a constante de acoplamento, ω é a frequência de transição entre os níveis de cada qbit e $a_{\vec{k},s}$ e $a_{\vec{k},s}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação do modo do campo com vetor de onda \vec{k} , polarização s e frequência ω_k .

A interação entre os qbits e o ambiente comum é mediada pelos operadores coletivos $S^\pm = \sum_{i=1}^N S_i^\pm$. A evolução dinâmica do sistema é regida por uma equação mestra, que na descrição de interação e nas aproximações usuais de Born e Markov, é dada por [57, 73]:

$$\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = \frac{\Gamma}{2} [2S^- \rho_S(t) S^+ - \rho_S(t) S^+ S^- - S^+ S^- \rho_S(t)], \quad (3.41)$$

onde Γ é a taxa de emissão espontânea de um único qbit e a interação dipolo-dipolo entre os qbits foi desprezada. A partir de agora a discussão será restrita ao caso de dois qbits.

3.4 Mapa Unitário e Operadores de Kraus

Como foi visto no Capítulo 2, a interação de um sistema \mathcal{S} com um ambiente \mathcal{E} pode ser descrita em termos de uma evolução unitária englobando ambos:

$$|\phi^i\rangle_{\mathcal{S}} |0\rangle_{\mathcal{E}} \rightarrow \sum_{\mu} M_{\mu} |\phi^i\rangle_{\mathcal{S}} |\mu\rangle_{\mathcal{E}}, \quad (3.42)$$

onde $|\phi^i\rangle_{\mathcal{S}}$ ($i = 1\dots 4$) são estados ortogonais do sistema, $|\mu\rangle_{\mathcal{E}}$ estados ortogonais do ambiente e M_{μ} são os operadores de Kraus atuando apenas no sistema \mathcal{S} . O mapa (3.42) é de fato mais geral que a equação mestra, podendo representar outras dinâmicas, como por exemplo, a evolução não dissipativa de dois átomos interagindo ressonantemente com um modo de uma cavidade ótica, como será visto na Seção 3.7.

No desenvolvimento a seguir determina-se os operadores de Kraus e consequentemente o mapa unitário correspondente à Eq. (3.41) usando o formalismo da matriz de Choi [74, 75].

O primeiro passo para a obtenção dos operadores de Kraus é resolver a equação de Lindblad (3.41). Na base coletiva $\{|0, 0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle - |ge\rangle), |1, 1\rangle \equiv |ee\rangle, |1, 0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle + |ge\rangle), |1, -1\rangle \equiv |gg\rangle\}$, que se denota pelos índices 1, 2, 3, 4, respectivamente,

a matriz densidade $\rho_S(t)$ é composta pelos seguintes elementos:

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t) &= \rho_{11}(0), \\
\rho_{12}(t) &= \rho_{12}(0)e^{-\Gamma t}, \\
\rho_{13}(t) &= \rho_{13}(0)e^{-\Gamma t}, \\
\rho_{14}(t) &= \rho_{14}(0), \\
\rho_{22}(t) &= \rho_{22}(0)e^{-2\Gamma t}, \\
\rho_{23}(t) &= \rho_{23}(0)e^{-2\Gamma t}, \\
\rho_{24}(t) &= \rho_{24}(0)e^{-\Gamma t}, \\
\rho_{33}(t) &= \rho_{33}(0)e^{-2\Gamma t} + 2\rho_{22}(0)\Gamma te^{-2\Gamma t}, \\
\rho_{34}(t) &= \rho_{34}(0)e^{-\Gamma t} + 2\rho_{23}(0)e^{-\Gamma t}(1 - e^{-\Gamma t}), \\
\rho_{44}(t) &= \rho_{44}(0) + \rho_{22}(0)(1 - e^{-2\Gamma t} - 2\Gamma te^{-2\Gamma t}) \\
&\quad + \rho_{33}(0)(1 - e^{-2\Gamma t}).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Define-se agora a matriz $E^{ij}(t)$ como $\rho_S(t)$ impondo-se as condições iniciais $\rho_{mn}(0) = \delta_{mi}\delta_{nj}$. Por exemplo, $E^{22}(t)$ é dada por $\rho_S(t)$ considerando-se apenas $\rho_{22}(0) = 1$ e todos os demais coeficientes iguais a zero. Usando (3.43) obtém-se:

$$E^{22}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\Gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Gamma te^{-2\Gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

O próximo passo é construir a matriz positiva semidefinida 16×16 , denominada matriz de Choi, composta das matrizes $E^{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) como se segue:

$$C = \begin{pmatrix} E^{11}(t) & E^{12}(t) & \dots \\ E^{21}(t) & E^{22}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

A matriz de Choi pode ser representada como:

$$C = \sum_{\mu} a_{\mu}|a_{\mu}\rangle\langle a_{\mu}| \equiv \sum_{\mu} |v_{\mu}\rangle\langle v_{\mu}|, \tag{3.46}$$

onde $|a_\mu\rangle$ são os autovetores normalizados de C com autovalores a_μ , e $|v_\mu\rangle$ vetores não normalizados ($\mu = 1\dots 16$). O passo final é representar cada $|v_\mu\rangle$ como um vetor coluna e dividi-lo em quatro segmentos de igual tamanho. Então a matriz que representa o operador de Kraus M_μ tem o i -ésimo segmento de $|v_\mu\rangle$ como sua i -ésima coluna.

Para ilustrar, seja o vetor $|v_\mu\rangle$ dado por:

$$|v_\mu\rangle = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ v_{41} \\ v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ v_{42} \\ v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ v_{43} \\ v_{14} \\ v_{24} \\ v_{34} \\ v_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Então o operador de Kraus M_μ é determinado por:

$$M_\mu = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Seguindo a prescrição anterior, obtém-se quatro operadores de Kraus, que por razões físicas que ficarão claras posteriormente são identificados por $\mu = 0, 1_A, 1_B, 2$. O programa para o cálculo explícito destes operadores usando o Mathematica encontra-se no Apêndice A. Resulta:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

$$M_{1A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$M_{1B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

onde:

$$A = e^{-\Gamma t}, \quad B = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{2\gamma_1}}, \quad C = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\gamma_1}}, \quad D = \frac{\beta_1 \beta_2}{\sqrt{2\gamma_2}}, \quad E = \frac{\beta_2}{\sqrt{2\gamma_2}},$$

$$F = \sqrt{1 - e^{-2\Gamma t} - 2e^{-2\Gamma t} - \Gamma t},$$

$$\Omega = \sqrt{17 - 32e^{\Gamma t} + e^{4\Gamma t} + e^{2\Gamma t}(14 - 4\Gamma t) + 4\Gamma t(1 + \Gamma t)},$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t - \Omega}{4(-1 + e^{\Gamma t})},$$

$$\beta_1 = \frac{1 - e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t + \Omega}{4(-1 + e^{\Gamma t})},$$

$$\alpha_2 = \sqrt{e^{-2\Gamma t}(-1 + e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t - \Omega)},$$

$$\beta_2 = \sqrt{e^{-2\Gamma t}(-1 + e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t + \Omega)},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + \frac{(-1 + e^{2\Gamma t} - 2\Gamma t + \Omega)^2}{16(-1 + e^{\Gamma t})^2}},$$

$$\gamma_2 = \sqrt{1 + \frac{(1 - e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t + \Omega)^2}{16(-1 + e^{\Gamma t})^2}}.$$

Substituindo os operadores de Kraus (3.49-3.52) na Eq. (3.42), obtém-se, na base

coletiva, o mapa unitário:

$$\begin{aligned}
|1, 1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow A|1, 1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} + B|1, 0\rangle_S |1_A\rangle_{\mathcal{E}} + \\
&\quad D|1, 0\rangle_S |1_B\rangle_{\mathcal{E}} + F|1, -1\rangle_S |2\rangle_{\mathcal{E}}, \\
|1, 0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow A|1, 0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} + C|1, -1\rangle_S |1_A\rangle_{\mathcal{E}} + \\
&\quad E|1, -1\rangle_S |1_B\rangle_{\mathcal{E}}, \\
|1, -1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow |1, -1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}}, \\
|0, 0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow |0, 0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}},
\end{aligned} \tag{3.53}$$

onde os estados do ambiente são designados de tal forma a ressaltar seu significado físico em termos do número de excitações, ou seja, $|0\rangle_{\mathcal{E}}$ corresponde ao estado de vácuo, $|1_A\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|1_B\rangle_{\mathcal{E}}$ a estados com apenas uma excitação e $|2\rangle_{\mathcal{E}}$ ao estado com duas excitações. Este mapa unitário tem uma interpretação física imediata: cada coeficiente representa a amplitude de probabilidade de transição entre os estados dos qbits em função do tempo, seja os qbits emitindo excitações para o ambiente, que está inicialmente no estado de vácuo, seja trocando excitações entre eles ou ainda não emitindo nenhuma excitação, quando ambos o sistema e o ambiente permanecem no mesmo estado. Por exemplo, na primeira linha, quando ambos os qbits estão inicialmente no estado excitado $|1, 1\rangle_S$, há uma amplitude de probabilidade A de que ambos os qbits permaneçam no estado excitado não emitindo nenhuma excitação para o ambiente, que então permanece no estado de vácuo $|0\rangle_{\mathcal{E}}$. Por outro lado, existe uma amplitude de probabilidade B(D) de que um único qbit decaia, o sistema indo para uma superposição de $|eg\rangle_S$ e $|ge\rangle_S$ com apenas uma excitação sendo transferida para o ambiente, que vai para o estado $|1_A\rangle_{\mathcal{E}}$ ($|1_B\rangle_{\mathcal{E}}$). Finalmente, há uma amplitude de probabilidade F de que ambos os qbits decaiam para $|1, -1\rangle_S$ emitindo duas excitações para o ambiente, cujo estado se torna $|2\rangle_{\mathcal{E}}$. Raciocínio análogo pode ser aplicado para as outras linhas do mapa.

Nota-se no mapa (3.53), o aparecimento de dois estados ortogonais do ambiente com apenas uma excitação $|1_A\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|1_B\rangle_{\mathcal{E}}$. Um melhor entendimento físico desta situação é

obtido reescrevendo o mapa (3.53) como:

$$\begin{aligned}
|1, 1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow A|1, 1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} + G|1, 0\rangle_S |1_{1,1}\rangle_{\mathcal{E}} + \\
&\quad F|1, -1\rangle_S |2\rangle_{\mathcal{E}}, \\
|1, 0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow A|1, 0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} + H|1, -1\rangle_S |1_{1,0}\rangle_{\mathcal{E}}, \\
|1, -1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow |1, -1\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}}, \\
|0, 0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow |0, 0\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

onde $|1_{1,1}\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|1_{1,0}\rangle_{\mathcal{E}}$ são estados não ortogonais do ambiente com apenas uma excitação dados por:

$$\begin{aligned}
|1_{1,1}\rangle_{\mathcal{E}} &\equiv \left(\frac{B}{G}|1_A\rangle_{\mathcal{E}} + \frac{D}{G}|1_B\rangle_{\mathcal{E}} \right), \\
G &\equiv \sqrt{B^2 + D^2}, \\
|1_{1,0}\rangle_{\mathcal{E}} &\equiv \left(\frac{C}{H}|1_A\rangle_{\mathcal{E}} + \frac{E}{H}|1_B\rangle_{\mathcal{E}} \right), \\
H &\equiv \sqrt{C^2 + E^2}.
\end{aligned}$$

A explicação para a presença de dois estados diferentes com apenas uma excitação na primeira e na segunda linha do mapa (3.54) tem sua origem na consideração do processo de emissão de fótons para os estados iniciais $|1, 1\rangle$ e $|1, 0\rangle$, respectivamente. A taxa de emissão de fótons para os dois qbits é dada por [57]:

$$W_2 = \Gamma \langle S^+ S^- \rangle. \tag{3.55}$$

Calculando esta taxa para os estados iniciais $|1, 1\rangle$ e $|1, 0\rangle$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
W_2^{1,1} &= \Gamma \langle 1, 1 | S^+ S^- | 1, 1 \rangle = 2\Gamma, \\
W_2^{1,0} &= \Gamma \langle 1, 0 | S^+ S^- | 1, 0 \rangle = 2\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

A taxa correspondendo a $|1, 1\rangle$ é exatamente a que se esperaria para a emissão independente de dois qbits, implicando que neste caso o primeiro fóton emitido tem largura de linha de Γ . A taxa de decaimento de um único qbit excitado no estado $|1, 0\rangle$ é duas vezes a de cada qbit no estado $|1, 1\rangle$, então este estado é superradiante e a largura de

linha do fóton emitido é 2Γ . Como fótons emitidos pelos estados $|1,1\rangle$ e $|1,0\rangle$ apresentam larguras de linha diferentes, isto explica porque aparecem dois estados diferentes do ambiente correspondendo a uma única excitação $|1_{1,1}\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|1_{1,0}\rangle_{\mathcal{E}}$, na primeira e na segunda linha do mapa (3.54), respectivamente.

Na base computacional $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$, o mapa (3.53) é dado por:

$$\begin{aligned}
|ee\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow M|ee\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} + P(|eg\rangle + |ge\rangle)_S|1_{ee}\rangle_{\mathcal{E}} + N|gg\rangle_S|2\rangle_{\mathcal{E}}, \\
|eg\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow Q|eg\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} + R|ge\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} + S|gg\rangle_S|1_{eg}\rangle_{\mathcal{E}}, \\
|ge\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow Q|ge\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} + R|eg\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} + S|gg\rangle_S|1_{eg}\rangle_{\mathcal{E}}, \\
|gg\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow |gg\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}},
\end{aligned} \tag{3.57}$$

onde $M = e^{-\Gamma t}$, $P = \sqrt{\Gamma t e^{-2\Gamma t}}$, $N = \sqrt{1 - e^{-2\Gamma t} - 2\Gamma t e^{-2\Gamma t}}$, $Q = \frac{e^{-\Gamma t} + 1}{2}$, $R = \frac{e^{-\Gamma t} - 1}{2}$, $S = \sqrt{\frac{1 - e^{-2\Gamma t}}{2}}$. Os novos estados de uma excitação $|1_{ee}\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|1_{eg}\rangle_{\mathcal{E}}$ estão relacionados com os estados ortogonais do ambiente $|1_A\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|1_B\rangle_{\mathcal{E}}$ por:

$$\begin{aligned}
|1_{ee}\rangle_{\mathcal{E}} &\equiv \left(\frac{X}{P}|1_A\rangle_{\mathcal{E}} + \frac{Y}{P}|1_B\rangle_{\mathcal{E}} \right), \\
|1_{eg}\rangle_{\mathcal{E}} &\equiv \left(\frac{Z}{S}|1_A\rangle_{\mathcal{E}} + \frac{W}{S}|1_B\rangle_{\mathcal{E}} \right),
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
\text{onde } X &= \frac{\delta_1(1 - e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t - \Omega)}{\epsilon_1 8(-1 + e^{\Gamma t})}, \quad Y = \frac{(1 - e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t + \Omega)\delta_2}{8(-1 + e^{\Gamma t})\epsilon_2}, \quad Z = \frac{\delta_1}{2\epsilon_1}, \quad W = \frac{\delta_2}{2\epsilon_2}, \\
\delta_1 &= \sqrt{e^{-2\Gamma t}(-1 + e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t - \Omega)}, \\
\epsilon_1 &= \sqrt{1 + \frac{(-1 + e^{2\Gamma t} - 2\Gamma t + \Omega)^2}{16(-1 + e^{\Gamma t})^2}}, \\
\delta_2 &= \sqrt{e^{-2\Gamma t}(-1 + e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t + \Omega)}, \\
\epsilon_2 &= \sqrt{1 + \frac{(1 - e^{2\Gamma t} + 2\Gamma t + \Omega)^2}{16(-1 + e^{\Gamma t})^2}}.
\end{aligned}$$

Como mostrado será mostrado na Seção 3.6.1, o mapa unitário (3.57) permite uma demonstração simples do emaranhamento produzido pelo ambiente usando ótica linear.

3.5 Medida de Emaranhamento

Para quantificar o emaranhamento será utilizada a *concorrência*, definida no Capítulo 2, Seção 2.2.1.

Considere o sistema inicialmente no estado separável $\rho_S(0) = |eg\rangle\langle eg|$. Aplicando o mapa unitário (3.57) e traçando sobre os estados do ambiente, obtém-se o seguinte estado para o sistema:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = & \left(\frac{e^{-\Gamma t} + 1}{2}\right)^2 |eg\rangle\langle eg| + \left(\frac{e^{-\Gamma t} - 1}{2}\right)^2 |ge\rangle\langle ge| + \frac{e^{-2\Gamma t} - 1}{4}(|eg\rangle\langle ge| + \\ & |ge\rangle\langle eg|) + \frac{1 - e^{-2\Gamma t}}{2}|gg\rangle\langle gg|. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Um cálculo simples mostra que a concorrência para este estado é dada por:

$$\mathcal{C}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\Gamma t}). \quad (3.60)$$

Nota-se que, embora inicialmente em um estado separável, o sistema evolui para um estado emaranhado com a concorrência atingindo o valor máximo de $1/2$ no regime assintótico $t \rightarrow \infty$. Este emaranhamento é devido apenas à interação indireta mediada pelo ambiente comum, uma vez que no modelo considerado não há interação direta entre os qbits. Sendo assim, a fim de observar a criação de emaranhamento é suficiente realizar experimentalmente apenas a segunda ou a terceira linha do mapa unitário (3.57).

O aparecimento de emaranhamento neste caso pode ser entendido qualitativamente considerando que o estado inicial separável $|eg\rangle$ pode ser expresso como uma superposição dos estados de Bell [76] singlete $|0, 0\rangle$ e tripleto $|1, 0\rangle$:

$$|eg\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0\rangle + |1, 0\rangle). \quad (3.61)$$

Pela Eq. (3.41) conclui-se trivialmente que o estado singlete não evolui. Por outro lado, o estado tripleto decai assintoticamente para o estado fundamental. Então para um tempo infinitamente longo, o estado do sistema é dado por:

$$\rho_S^{est} = \frac{1}{2}|1, -1\rangle\langle 1, -1| + \frac{1}{2}|0, 0\rangle\langle 0, 0|. \quad (3.62)$$

A concorrência deste estado é $1/2$, de acordo com o regime assintótico da Eq. (3.60), de onde se conclui que a contribuição para o emaranhamento vem apenas do estado singlete.

Sendo suficiente realizar a segunda linha do mapa (3.57) para observar emaranhamento induzido pelo ambiente, a dinâmica da evolução fica restrita ao subespaço descrito pela Eq. (3.59). Consequentemente, no lugar de realizar tomografia [49] para a completa reconstrução do estado a fim de determinar o emaranhamento através da Eq. (2.3), o que requereria a medição de dezesseis observáveis, utiliza-se uma *testemunha de emaranhamento* independente do tempo. Por definição, uma testemunha de emaranhamento é um observável usado para detectar emaranhamento quando se possui algum conhecimento a priori dos estados envolvidos, e que satisfaz as seguintes relações: $\text{Tr}(W\rho_{sep}) \geq 0$ para qualquer estado separável ρ_{sep} e $\text{Tr}(W\rho_{ent}) < 0$ para pelo menos um estado emaranhado ρ_{ent} , que é dito *detectado* pela testemunha.

Para uma matriz densidade bipartida arbitrária ρ , uma possível testemunha de emaranhamento é dada por [77]:

$$W = \mathbf{1} - (UV^\dagger)^{T_A}, \quad (3.63)$$

onde U e V são matrizes unitárias obtidas pela decomposição singular [78] de ρ^{T_A} , T_A sendo a transposição parcial com respeito a qualquer um dos dois qbits. A decomposição singular é dada por $\rho^{T_A} = U\Sigma V^\dagger$, onde Σ é uma matriz diagonal cujos elementos são as raízes quadradas dos autovalores não negativos de $\rho^{T_A}\rho^{T_A\dagger}$.

Para a família de estados dados pela Eq. (3.59), a avaliação da Eq. (3.63) leva de fato a uma testemunha de emaranhamento independente do tempo, dada por:

$$W = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} |ee\rangle\langle ee| + \frac{1}{\sqrt{2}} |eg\rangle\langle ge| + \frac{1}{\sqrt{2}} |ge\rangle\langle eg| + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} |gg\rangle\langle gg|. \quad (3.64)$$

Além disto, esta testemunha é ótima para a família de estados considerada, levando diretamente à concorrência, que pode ser calculada em termos do valor médio de W como:

$$\mathcal{C} = \frac{\text{Tr}(W\rho_S(t))}{(1 - \sqrt{2})}. \quad (3.65)$$

Assim, medindo apenas um único observável é possível, não apenas detectar o emaranhamento, mas também, quantificá-lo ao longo de toda a evolução do sistema.

$ ee\rangle \equiv$	$ V, HG_{10}\rangle \equiv$	$ Vv\rangle$
$ eg\rangle \equiv$	$ V, HG_{01}\rangle \equiv$	$ Vh\rangle$
$ ge\rangle \equiv$	$ H, HG_{10}\rangle \equiv$	$ Hv\rangle$
$ gg\rangle \equiv$	$ H, HG_{01}\rangle \equiv$	$ Hh\rangle$

Tabela 3.1: Codificação dos estados do sistema de dois qbits usando polarização e modos transversos Hermite-Gaussianos.

3.6 Proposta de Implementação Experimental

Nesta seção discute-se o arranjo experimental baseado em ótica linear que demonstra a geração de emaranhamento induzido pelo ambiente bem como o circuito para medir a testemunha de emaranhamento dada pela Eq. (3.64).

3.6.1 Circuito da Dinâmica do Sistema mais Ambiente

Para demonstrar a criação de emaranhamento pelo ambiente é suficiente, como já discutido, implementar apenas a segunda linha do mapa unitário (3.57). Ambos o sistema e o ambiente são representados por graus internos diferentes de um mesmo fóton. Associa-se a polarização horizontal (H) e a vertical (V) do fóton ao estado fundamental e excitado do primeiro qbit, respectivamente, e os modos transversos Hermite-Gaussianos de primeira ordem aos estados do segundo qbit - o modo HG_{01} é associado ao estado fundamental e HG_{10} ao estado excitado. Por simplicidade de notação define-se: $|HG_{01}\rangle \equiv |h\rangle$ e $|HG_{10}\rangle \equiv |v\rangle$. A codificação para os estados do sistema está resumida na Tabela 3.1. Os estados do ambiente são representados por diferentes caminhos do fóton. A Figura 3.6 mostra o arranjo experimental proposto. Por se implementar apenas a segunda linha do mapa só há um estado do ambiente com uma excitação, então $|1_{eg}\rangle_{\mathcal{E}}$ é redefinido como $|1\rangle_{\mathcal{E}}$.

Uma fonte de conversão paramétrica descendente composta por um cristal não linear tipo I é bombeada por um feixe laser com polarização horizontal produzindo dois fótons gêmeos verticalmente polarizados. O sistema de dois qbits e o ambiente são representados pelo fóton no caminho inferior. A função do fóton no caminho superior é validar

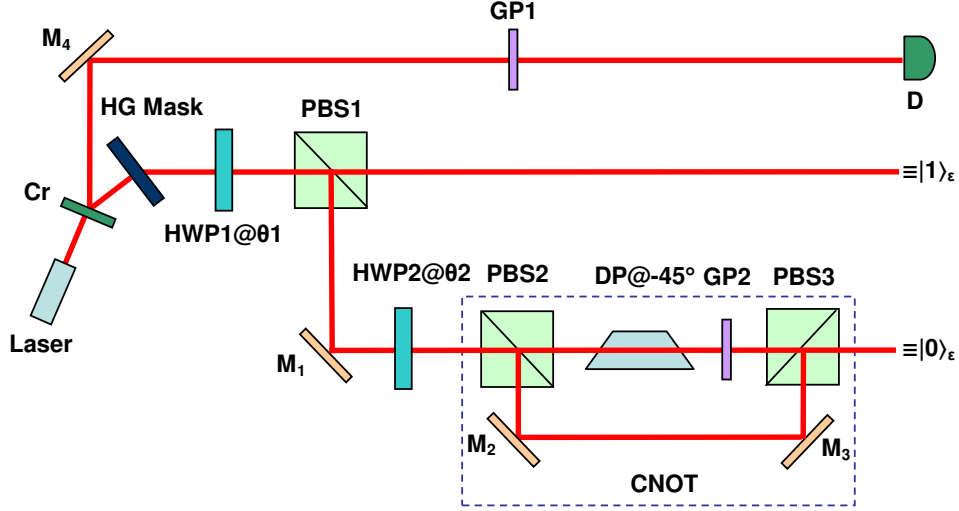


Figura 3.6: Arranjo experimental para investigar geração de emaranhamento pelo ambiente.

as contagens de f3tons no caminho inferior no regime de detecção em coincid4ncias. Uma placa de vidro (GP1) 4 usada para ajustar os dois caminhos 3ticos. Para gerar o estado inicial $|eg\rangle \equiv |Vh\rangle$ coloca-se uma m1scara hologr1fica, especialmente desenhada para produzir o modo HG_{01} no caminho do f3ton inferior. O modo de propagação do f3ton depois da m1scara 4 associado ao estado de v1cuo do ambiente $|0\rangle_{\mathcal{E}}$. Depois da preparação no estado inicial $|Vh\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}}$, o f3ton se propaga atrav4s de uma placa de meia onda (HWP1) inclinada de um 1ngulo θ_1 com respeito 1 polarização vertical. O estado ap3s HWP1 4:

$$|\Phi\rangle = (\cos(2\theta_1)|Vh\rangle + \sin(2\theta_1)|Hh\rangle)_S|0\rangle_{\mathcal{E}}. \quad (3.66)$$

Ap3s HWP1, um divisor de feixes polarizado (PBS1) transmite f3tons com polarização horizontal e reflete f3tons com polarização vertical. O caminho do f3ton refletido 4 associado ao estado de v1cuo do ambiente $|0\rangle_{\mathcal{E}}$ ao passo que o estado do ambiente com uma excitação $|1\rangle_{\mathcal{E}}$ 4 associado ao caminho do f3ton transmitido. Ent1o, o estado ap3s PBS1 4 dado por:

$$|\Phi'\rangle = \cos(2\theta_1)|Vh\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} + \sin(2\theta_1)|Hh\rangle_S|1\rangle_{\mathcal{E}}. \quad (3.67)$$

Entrada	Saída
C T	C T
$ Vv\rangle$	$ Vv\rangle$
$ Vh\rangle$	$ Vh\rangle$
$ Hv\rangle$	$ Hh\rangle$
$ Hh\rangle$	$ Hv\rangle$

Tabela 3.2: Porta CNOT. C representa o bit de controle e T o bit alvo.

No caminho associado ao estado de vácuo do ambiente, o fóton se propaga através de outra placa de meia onda (HWP2) com um ângulo de inclinação θ_2 em relação à polarização vertical e depois através de uma porta CNOT, que será detalhada a seguir. Depois de atravessar HWP2 o estado do fóton $|\Phi'\rangle$ evolui para:

$$|\Phi''\rangle = [\cos(2\theta_1)(\cos(2\theta_2)|Vh\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} + \sin(2\theta_2)|Hh\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E}) + \sin(2\theta_1)|Hh\rangle_S|1\rangle_\mathcal{E}] \quad (3.68)$$

A porta CNOT é um interferômetro composto por dois divisores de feixes polarizados (PBS2 e PBS3), dois espelhos (M2 e M3), um prisma de Dove (DP) e uma placa de vidro (GP2). O PBS2 separa fótons com polarização horizontal, que se propagam pelo caminho superior, dos fótons com polarização vertical que são refletidos para o caminho inferior. Girado de 45° , o prisma de Dove inverte os modos Hermite-Gaussianos: $HG_{01} \leftrightarrow HG_{10} \equiv h \leftrightarrow v$. Os comprimentos dos caminhos óticos superior e inferior são ajustados por uma placa de vidro possibilitando combinação coerente e em fase no PBS3. Este arranjo corresponde ao CNOT usual [31] onde o grau de liberdade de polarização atua como o qbit de controle e o modo transversal como qbit alvo, de acordo com a Tabela 3.2. O estado resultante após a propagação pela porta CNOT é dado por:

$$|\Phi'''\rangle = \cos(2\theta_1)\cos(2\theta_2)|Vh\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} + \cos(2\theta_1)\sin(2\theta_2)|Hv\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} + \sin(2\theta_1)|Hh\rangle_S|1\rangle_\mathcal{E}. \quad (3.69)$$

Finalmente, associando-se $\cos(2\theta_1)\cos(2\theta_2)$, $\cos(2\theta_1)\sin(2\theta_2)$ e $\sin(2\theta_1)$ com os coefici-

entes Q, R, e S, respectivamente, realiza-se a segunda linha do mapa unitário (3.57). Cabe notar que a interação do sistema com o ambiente é alcançada de uma forma totalmente controlada, com o tempo sendo parametrizado pelos ângulos de orientação das placas de meia onda HWP1 e HWP2.

3.6.2 Circuito de Medida de Emaranhamento

A fim de medir o valor médio da testemunha de emaranhamento (3.64) procede-se a sua diagonalização na base de autovetores, que resulta ser a base coletiva, assim:

$$W = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) |1, 1\rangle\langle 1, 1| + \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle\langle 1, 0| - \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle\langle 0, 0| + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) |1, -1\rangle\langle 1, -1|. \quad (3.70)$$

Na Figura 3.7 é apresentado o circuito que realiza a medida projetiva de $\rho_S(t)$ na base coletiva. Fótons nos modos $|0\rangle_\mathcal{E}$ e $|1\rangle_\mathcal{E}$, provenientes do circuito que realiza a dinâmica do sistema mais ambiente (ver Figura 3.6), percorrem caminhos óticos cuja diferença no comprimento é maior que o comprimento de coerência e são direcionados para o circuito de medida de emaranhamento, o que corresponde matematicamente a se traçar sobre os estados do ambiente. O circuito é composto de um interferômetro do tipo Mach-Zender com um espelho adicional (MZIM), dois divisores de feixes polarizados (PBS4 e PBS5), uma porta CNOT, uma placa de meia onda (HWP3), e quatro detectores de fótons (D1, D2, D3 e D4).

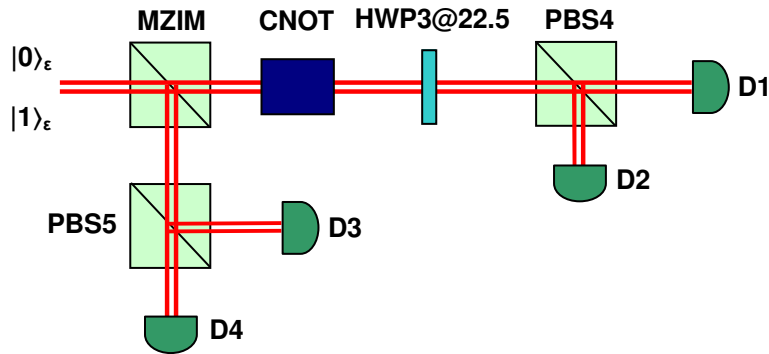


Figura 3.7: Arranjo experimental para medir a testemunha de emaranhamento.

Ajustando a placa de vidro (ver Figura 3.4) para uma diferença de fase ϕ nula entre os dois braços do interferômetro, o MZIM conserva o caminho dos fótons nos estados $|Vh\rangle$ e $|Hv\rangle$ e gira de 90° os estados $|Vv\rangle$ e $|Hh\rangle$, como foi visto na Seção 3.2.2. Isto implica que fótons nos estados $|1, 0\rangle$ e $|0, 0\rangle$ serão transmitidos pelo MZIM ao passo que fótons nos estados $|1, 1\rangle$ e $|1, -1\rangle$ serão refletidos.

Posicionada logo após o MZIM, no caminho horizontal, a porta CNOT, a mesma mostrada na Figura 3.6 circundada pela linha pontilhada e descrita pela Tabela 3.2, em conjunto com a HWP3 alinhada a 22.5° com respeito a polarização horizontal, que desempenha o papel de uma porta de Hadamard no grau de liberdade de polarização, i.e., $|H\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ e $|V\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$, realiza as seguintes transformações: $|1, 0\rangle \rightarrow |Hh\rangle$ e $|0, 0\rangle \rightarrow -|Vh\rangle$. Então, através do PBS4, que transmite fótons com polarização horizontal e reflete fótons com polarização vertical, os detectores D1 e D2 contabilizam as populações dos estados $|1, 0\rangle$ e $|0, 0\rangle$, respectivamente. No caminho vertical após o MZIM, em virtude do PBS5, as populações dos estados $|1, 1\rangle$ e $|1, -1\rangle$ são registradas nos detectores D3 e D4, respectivamente.

Seja C_i as contagens de fótons do detector i e $N = \sum_{i=1}^4 C_i$ a contagem total durante o intervalo de medida. Então, de acordo com a Eq. (3.70),

$$\text{Tr}(W\rho_S(t)) = \frac{1}{N} \left[C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + C_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + C_3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + C_4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (3.71)$$

A concorrência pode ser obtida diretamente através da Eq. (3.65).

3.7 Generalização do Modelo

A descrição de um problema físico através de mapas quânticos unitários é muito geral e engloba vários tipos de dinâmicas, dependendo da forma como se parametriza os coeficientes do mapa com o tempo. Para ilustrar, o mapa (3.57) seria adequado para a descrição da evolução coerente de dois qbits não interagentes em uma cavidade

ressonante, regida pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H = \sum_{i=1}^2 \hbar\omega S_i^z + \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) - i\hbar g \sum_{i=1}^2 [(S_i^+ + S_i^-)(a - a^\dagger)]. \quad (3.72)$$

onde g é a constante de acoplamento, enquanto a and a^\dagger são os operadores de aniquilação e criação do modo da cavidade, respectivamente. Neste caso, $|1_{ee}\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|1_{eg}\rangle_{\mathcal{E}}$ representam o mesmo estado, dado que há apenas um único modo na cavidade. Nenhuma alteração significativa no circuito que descreve a evolução da dinâmica do sistema mais ambiente é necessária para representar esta dinâmica sem dissipação, basta apenas redefinir a dependência temporal dos coeficientes. De fato, o circuito descrevendo a dinâmica dissipativa pode ser usado no caso ressonante desde que os coeficientes do mapa (3.57) como função do tempo sejam dados por: $M = \frac{1}{2}(1 + \cos(2gt))$, $P = -\frac{i}{2}\text{sen}(2gt)$, $N = \frac{1}{2}(-1 + \cos(2gt))$, $Q = \frac{1}{2}(1 + \cos(\sqrt{2}gt))$, $R = \frac{1}{2}(-1 + \cos(\sqrt{2}gt))$ e $S = \frac{-i}{\sqrt{2}}\text{sen}(\sqrt{2}gt)$. A fase extra i pode ser facilmente compensada introduzindo-se uma placa de vidro no circuito.

3.8 Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste capítulo foi proposto um experimento simples, usando apenas dispositivos de ótica linear, para observar a geração de emaranhamento entre dois qbits não interagentes induzida por um ambiente comum. O sistema de dois qbits e o ambiente foram codificados em um único fóton, usando diferentes graus de liberdade: a polarização, os modos transversos e os modos de propagação espacial.

O arranjo experimental implementa diretamente o mapa unitário que descreve a evolução temporal do sistema e do ambiente. A dinâmica do sistema de dois qbits é recuperada traçando-se sobre os modos de propagação do fóton, que representam os estados do ambiente.

O mesmo aparato experimental que descreve a dinâmica dissipativa da interação de dois qbits com um banho à temperatura zero, pode ser usado para implementar a dinâmica de troca reversível de excitação entre dois qbits e um único modo de uma cavidade ressonante.

O emaranhamento é quantificado por uma testemunha de emaranhamento independente do tempo - um único observável, proporcional à concorrência para a família de estados considerada, que pode ser medido diretamente. Evita-se com o esquema experimental proposto para quantificar o emaranhamento através da medida da testemunha, a realização de tomografia quântica para determinar o estado do sistema, um processo dispendioso em termos de tempo.

Como mencionado, uma vez que considera-se qubits próximos, é interessante para uma proposta futura, considerar a interação dipolo-dipolo no modelo. Embora seus efeitos no emaranhamento tenham sido estudados teoricamente [76], seria a primeira demonstração experimental deste resultado usando ótica linear e com o ambiente implementado de forma totalmente controlada.

Finalmente, como perspectiva futura, espera-se que esta proposta seja realizada em breve pelo grupo do Laboratório de Ótica Quântica da Universidade Federal Fluminense, com o qual várias discussões já foram realizadas para resolver problemas técnicos inerentes à implementação experimental, e que já acumula experiência no desenvolvimento de circuitos óticos similares utilizando diferentes graus de liberdade do mesmo fóton [42, 79].

Capítulo 4

Geração de Estados Mistos Arbitrários de dois Qbits

4.1 Introdução

Na área de informação quântica, como já discutido anteriormente, a demanda por estados puros com emaranhamento máximo estava no núcleo das primeiras demonstrações teóricas das vantagens de certos protocolos de computação, teletransporte, criptografia, entre outros, em relação a seus análogos clássicos. No entanto, estas propostas idealizadas foram rapidamente questionadas quanto à sua aplicação prática, pelo reconhecimento de que os sistemas físicos reais estão sujeitos à interação com o ambiente, o que degrada a sua coerência, resultando em perda de emaranhamento e de pureza. Uma vez que estes efeitos são inevitáveis, estados mistos e não maximamente emaranhados são de fato considerados os constituintes básicos da informação quântica moderna [80].

Correção quântica de erros [81] e destilação de emaranhamento [82] foram alguns dos mecanismos que surgiram para fazer face ao problema de descoerência. Mas, seguindo uma linha diametralmente oposta, surgiram propostas de computação quântica já partindo de estados mistos totalmente desprovidos de emaranhamento, como por exemplo um experimento para implementar o algoritmo de Grover usando ressonância magnética nuclear [83] e um outro experimento usando ótica para determinar o traço normalizado de um operador linear [84]. Para ambas as propostas desconhece-se qualquer método usando processadores clássicos que apresentem a mesma eficiência.

Estas considerações, mostrando a emergência de estados mistos como um recurso prático, somadas ao interesse de se investigar sistemas básicos da Física de um ponto de vista fundamental, motivam a elaboração de uma fonte universal capaz de gerar estados mistos arbitrários de dois qbits - menor sistema quântico que pode apresentar emaranhamento. Sendo assim, neste capítulo propõe-se um arranjo experimental, baseado em ótica linear, que explora o uso de canais quânticos para gerar estados mistos arbitrários de dois qbits com qualquer grau de emaranhamento e entropia. O modelo teórico utilizado requer a realização de um canal arbitrário de um qbit. A complexidade do circuito ótico para realizar um canal arbitrário é reduzida pela utilização da chamada decomposição singular de Lorentz [85], que até onde se sabe, está sendo explorada pela primeira vez em uma proposta experimental.

Embora existam outras propostas de fontes deste tipo na literatura, a serem apresentadas no final do capítulo a título de comparação, é a primeira vez que se utiliza a dualidade entre canais quânticos e matrizes densidades representando estados mistos para este fim. De fato, está embutido no circuito ótico proposto a implementação de qualquer canal quântico de um qbit. Este canal quântico é realizado de forma totalmente controlada e a flexibilidade do arranjo experimental é tal que o ajuste para preparar o estado alvo, ou equivalentemente o canal correspondente, é feito apenas alterando-se ângulos de inclinação de placas de onda.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 4.2 apresenta-se alguns conceitos preliminares que serão utilizados ao longo de todo o texto; na Seção 4.3 detalha-se o fundamento teórico que será usado para abordar o problema em questão. O desenvolvimento teórico, constituído essencialmente pela determinação do estado puro que será transformado em misto pela atuação de um dado canal quântico, a determinação do canal propriamente dito e a redução deste canal à chamada forma normal através da decomposição singular de Lorentz, visando a simplificação do circuito, é assunto da Seção 4.4. Na Seção 4.5, detalha-se o arranjo experimental baseado em ótica linear que realiza a fonte de estados mistos arbitrários. Na Seção 4.6 são apresentadas propostas semelhantes encontradas na literatura visando uma comparação com a proposta desta

tese e, finalmente, na Seção 4.7 as conclusões e as perspectivas futuras. Todas as rotinas computacionais relativas aos passos para obter o estado misto alvo, codificadas no Mathematica, encontram-se no Apêndice B.

4.2 Conceitos Preliminares

4.2.1 A Representação R de Estados e Canais Quânticos

Usando como base as matrizes de Pauli σ_i ($i = 0, \dots, 3$) definidas em (2.12), um estado arbitrário de um qbit ρ pode ser representado por um vetor quadridimensional real \vec{R} definido como:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 x_i \sigma_i = \frac{1}{2} (\vec{R} \cdot \vec{\sigma}), \quad (4.1)$$

onde:

$$\vec{R} \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Tr}(\rho \cdot \sigma_0) \\ \text{Tr}(\rho \cdot \sigma_1) \\ \text{Tr}(\rho \cdot \sigma_2) \\ \text{Tr}(\rho \cdot \sigma_3) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

com $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ e

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

A representação R do estado de um qbit dada pela Eq. (4.2) e a representação de matriz densidade ρ dada pela Eq. (4.1) estão biunivocamente relacionadas. A componente x_0 da representação R equivale ao traço da matriz densidade, de modo que é igual a 1 para estados normalizados. Vale notar que as componentes x_1 , x_2 e x_3 de \vec{R} formam o vetor associado à representação do estado de um qbit na esfera de Bloch [31].

Equivalentemente, no espaço associado a dois qbits é possível decompor a matriz densidade ρ usando como base o produto tensorial das matrizes de Pauli:

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 R_{i,j} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad (4.4)$$

e definir a representação R , neste caso uma matriz real 4×4 cujas componentes $R_{i,j}$ são dadas por:

$$R_{i,j} = \text{Tr}[\rho(\sigma_i \otimes \sigma_j)]. \quad (4.5)$$

A representação R de um canal quântico $\$$ de um qbit [86], ou seja, um mapa completamente positivo e que preserva o traço, é uma matriz real 4×4 com a forma a seguir:

$$\$ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{t} & E \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde:

$$E \equiv \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

e

$$\vec{t} \equiv \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Nesta representação, o estado \vec{R}' resultante da aplicação do canal $\$$ em \vec{R} é obtido por multiplicação matricial direta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ t_2 & E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ t_3 & E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

supondo-se o estado inicial \vec{R} normalizado. O vetor \vec{t} corresponde a uma translação em relação ao centro da esfera de Bloch. Se $\vec{t} = \vec{0}$ um estado mistura total é preservado ($\$I/2 = I/2$) e o canal é denominado *unital*. A matriz E , corresponde a contrações ou expansões e/ou rotações no vetor de Bloch. Em transformações unitárias, E corresponde a rotações ortogonais tridimensionais, ou seja $E^{-1} = E^T$. A primeira linha da representação matricial de $\$$ garante a preservação do traço.

A ação do canal também pode ser visualizada através de uma transformação linear sobre as matrizes de Pauli, mantendo-se a representação R do qbit inalterada, como

será descrito a seguir, por conveniência futura. De (4.9), vem:

$$\vec{R}' = \$\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 + E_{11}x_1 + E_{12}x_2 + E_{13}x_3 \\ t_2 + E_{21}x_1 + E_{22}x_2 + E_{23}x_3 \\ t_3 + E_{31}x_1 + E_{32}x_2 + E_{33}x_3 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Retornando para a representação de matriz densidade,

$$\begin{aligned} \rho' = \frac{1}{2}(\vec{R}' \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2}[\sigma_0 + (t_1 + E_{11}x_1 + E_{12}x_2 + E_{13}x_3)\sigma_1 + \\ (t_2 + E_{21}x_1 + E_{22}x_2 + E_{23}x_3)\sigma_2 + \\ (t_3 + E_{31}x_1 + E_{32}x_2 + E_{33}x_3)\sigma_3]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Reescrevendo de modo a colocar em evidência as componentes do vetor \vec{R} , vem:

$$\begin{aligned} \rho' = \frac{1}{2}[\sigma_0 + t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2 + t_3\sigma_3 + \\ x_1(E_{11}\sigma_1 + E_{21}\sigma_2 + E_{31}\sigma_3) + \\ x_2(E_{12}\sigma_1 + E_{22}\sigma_2 + E_{32}\sigma_3) + \\ x_3(E_{13}\sigma_1 + E_{23}\sigma_2 + E_{33}\sigma_3)] = \frac{1}{2}(\vec{R} \cdot \vec{\sigma}'), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde:

$$\vec{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma'_0 \\ \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_0 \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

com,

$$\vec{e}_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \vec{e}_i \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ E_{1i} \\ E_{2i} \\ E_{3i} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

4.2.2 O Isomorfismo de Jamiołkowski

Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert de dimensão n e um canal quântico $\$: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um operador linear finito atuando em \mathcal{H} . Para cada $\$$ associa-se uma

matriz densidade ρ_D definida em $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$, denotada de matriz dual do canal, de acordo com:

$$\rho_D = (\$ \otimes I)P^+, \quad (4.15)$$

onde P^+ corresponde a um estado maximamente emaranhado do tipo:

$$P^+ = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n |a_i\rangle|a_i\rangle\langle a_j|\langle a_j|, \quad (4.16)$$

sendo $\{|a_i\rangle\}$ uma base ortonormal em \mathcal{H} . No caso $n = 2$, P^+ se reduz a um estado de Bell.

O mapeamento $\rho_D = J(\$)$ segundo a Eq. (4.15) é denominado isomorfismo de Jamiolkowski e estabelece uma dualidade entre canais e estados quânticos [87, 88]. Esta dualidade fica bastante evidente na representação R, como será ilustrado, utilizando $n = 2$. Escolhendo $P^+ = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ como o estado maximamente emaranhado, onde $|\Phi^+\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$, tem-se na representação das matrizes de Pauli na base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$:

$$P^+ = \frac{1}{4}(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_1 \otimes \sigma_1 - \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3). \quad (4.17)$$

Considerando a representação R do canal $\$$ dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ t_2 & E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ t_3 & E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

a aplicação do canal $\$$ ao primeiro qbit de P^+ resulta:

$$\rho_D = \frac{1}{4}(\sigma'_0 \otimes \sigma_0 + \sigma'_1 \otimes \sigma_1 - \sigma'_2 \otimes \sigma_2 + \sigma'_3 \otimes \sigma_3), \quad (4.19)$$

onde σ'_i ($i = 0, 1, 2, 3$) está definido nas Expressões (4.13) e (4.14). Calculando a representação R de (4.19) de acordo com (4.5), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & E_{11} & -E_{12} & E_{13} \\ t_2 & E_{21} & -E_{22} & E_{23} \\ t_3 & E_{31} & -E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Resulta que a representação R do canal e da matriz densidade dual podem ser obtidas diretamente uma a partir da outra bastando para isto multiplicar a terceira coluna por -1 . Aplicando-se o canal ao segundo qbit do estado maximamente emaranhado chega-se a um resultado análogo, mas agora a matriz dual é obtida transpondo-se a matriz da representação R do canal e a seguir multiplicando-se a terceira linha por -1 .

O isomorfismo de Jamiolkowski está estreitamente relacionado com a determinação dos operadores de Kraus de mapas completamente positivos que será apresentada na próxima seção.

4.2.3 Determinação dos Operadores de Kraus de Mapas Completamente Positivos

Nesta seção apresenta-se uma descrição alternativa [89] ao método de Choi apresentado no Capítulo 3 para determinação de operadores de Kraus.

Sejam \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 dois espaços de Hilbert e $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ o conjunto de todos os operadores lineares finitos atuando em \mathcal{H}_i para $i = 1, 2$. Se \mathcal{E} é um mapa completamente positivo levando de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ para $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ então $\mathcal{E}(M) = \sum_k B_k M B_k^\dagger$, onde $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e B_k são os operadores de Kraus de dimensão $n_2 \times n_1$, onde n_i é a dimensão de \mathcal{H}_i .

Seja um estado maximamente emaranhado em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ dado por:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_i |a_i\rangle |a_i\rangle, \quad (4.21)$$

onde $\{|a_i\rangle\}_{i=1, \dots, n_1}$ é uma base ortonormal para \mathcal{H}_1 .

Considere $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})\tilde{M}$ onde \tilde{M} é a matriz não normalizada dada por:

$$\tilde{M} = n_1 |\Phi\rangle \langle \Phi|. \quad (4.22)$$

Como \tilde{M} é positiva e \mathcal{E} é completamente positivo então $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})\tilde{M}$ é positiva e pode ser expressa como:

$$(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})\tilde{M} = n_1 \rho_D = \sum_k b_k |b_k\rangle \langle b_k|, \quad (4.23)$$

onde $|b_k\rangle$ para $k = 1, \dots, n_1 n_2$ são os autovetores normalizados correspondentes aos autovalores b_k , respectivamente, e ρ_D é a matriz dual do operador quântico \mathcal{E} , aplicado ao segundo qbit do estado maximamente emaranhado.

Seja o autovetor $|b_k\rangle$ dado por:

$$|b_k\rangle = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n_2 1} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n_2 2} \\ \vdots \\ b_{1 n_1} \\ b_{2 n_1} \\ \vdots \\ b_{n_2 n_1} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

então o operador de Kraus B_k fica:

$$B_k = \sqrt{b_k} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1 n_1} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2 n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n_2 1} & b_{n_2 2} & \dots & b_{n_2 n_1} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

4.3 Definição do Problema

A proposta para a construção de um circuito baseado em ótica linear para gerar um estado misto arbitrário de dois qbits ρ_A está baseada no mecanismo de descoerência. A estratégia para obter o estado misto alvo é preparar um dado estado puro e aplicar um canal quântico específico em apenas um dos qbits do sistema bipartido, como mostra a Fig. 4.1.

O fundamento teórico utilizado é um lema [90] que estabelece que sendo ρ uma matriz densidade em um espaço de Hilbert definido por $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, então existe um espaço

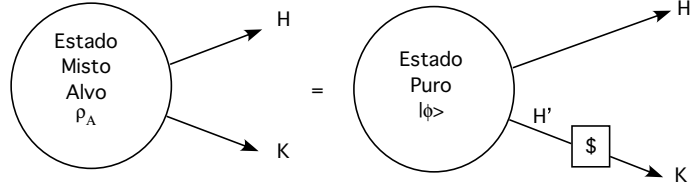


Figura 4.1: Esquema para gerar um estado misto arbitrário ρ_A .

de Hilbert \mathcal{H}' , um estado puro $|\phi\rangle$ em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ e um canal quântico $\$,$ levando \mathcal{H}' em \mathcal{K} , tal que $(I \otimes \$)|\phi\rangle\langle\phi| = \rho$.

Na próxima seção serão discutidos os passos que levam à elaboração do circuito ótico, que inclui a determinação do estado puro inicial, a determinação do canal quântico a ser aplicado e a conversão deste canal à chamada forma normal de Lorentz, que permite uma grande simplificação do ponto de vista experimental. As rotinas computacionais correspondentes, implementadas no Mathematica, encontram-se no Apêndice B.

4.4 Desenvolvimento Teórico

4.4.1 Determinação do Estado Puro Inicial

Inicialmente será mostrado que a aplicação de um canal quântico em um dos qbits de um sistema bipartido não altera a matriz reduzida do outro qbit. Seja ρ_i o estado inicial do sistema bipartido. Suponha que o canal quântico é aplicado ao segundo qbit, conforme a Fig. 4.1. A matriz reduzida do primeiro qbit antes da aplicação do canal é dada por:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{Tr}_2(\rho_i) = \text{Tr}_2 \left(\frac{1}{4} \sum_{m,n=0}^3 R_{m,n} \sigma_m \otimes \sigma_n \right) = \frac{1}{4} \sum_{m,n=0}^3 R_{m,n} \sigma_m \text{Tr}(\sigma_n) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m,n=0}^3 R_{m,n} \sigma_m 2\delta_{n,0} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^3 R_{m,0} \sigma_m. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Depois da aplicação do canal, o estado ρ' do sistema é dado por:

$$\rho' = (I \otimes \$)\rho_i = \frac{1}{4} \sum_{m,n} R_{m,n} \sigma_m \otimes \sigma'_n. \quad (4.27)$$

Uma rápida inspeção na expressão de σ'_n definida em (4.13) e (4.14), mostra que:

$$\sum_{k=0}^1 \langle b_k | \sigma'_n | b_k \rangle = 2\delta_{n,0}, \quad (4.28)$$

onde $\{|b_k\rangle\}$ é uma base no espaço de Hilbert do segundo qbit. Com efeito, $\rho_1 = \rho'_1$, onde $\rho'_1 \equiv \text{Tr}_2(\rho')$.

O estado inicial $|\phi\rangle$ pode ser obtido portanto a partir de uma purificação do traço parcial da matriz densidade alvo ρ_A com respeito ao qbit que não sofre descoerência. Por purificação entende-se o processo no qual um estado arbitrário ρ no espaço de Hilbert \mathcal{H} pode ser estendido para um estado puro em um sistema de dimensão maior com um espaço de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ [90]. Seja:

$$\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho_A) \equiv \text{Tr}_2(|\phi\rangle\langle\phi|). \quad (4.29)$$

Decompondo ρ_1 na base de seus autovetores $\{|a_k\rangle\}$, correspondentes aos autovalores a_k :

$$\rho_1 = \sum_{k=0}^1 a_k |a_k\rangle\langle a_k|, \quad (4.30)$$

obtém-se diretamente uma expressão para o estado puro inicial:

$$|\phi\rangle = \sum_{k=0}^1 \sqrt{a_k} |a_k\rangle |b_k\rangle. \quad (4.31)$$

Observa-se que estado puro inicial não é único. Depende da escolha da base $\{|b_k\rangle\}$.

4.4.2 Determinação do Canal

A determinação do canal quântico é trivial. Seja a seguinte decomposição em termos de matrizes de Pauli do estado puro inicial $|\phi\rangle\langle\phi|$:

$$|\phi\rangle\langle\phi| = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 R_{i,j} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad (4.32)$$

Aplicando-se o canal $\$$ no segundo qbit de $|\phi\rangle\langle\phi|$, vem:

$$(I \otimes \$)|\phi\rangle\langle\phi| = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 R_{i,j} \sigma_i \otimes \sigma'_j, \quad (4.33)$$

onde σ'_j , como foi visto na Seção 4.2, Eqs. (4.13) e (4.14), é função linear dos coeficientes do canal quântico $\$,$ descrito pelas Expressões (4.6), (4.7) e (4.8). Desta forma, igualando-se a Expressão (4.33) ao estado alvo ρ_A obtém-se um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os coeficientes que definem o canal quântico. Resolvendo-se este sistema, o canal fica determinado.

4.4.3 Redução do Canal à Forma Normal de Lorentz

Com o objetivo de simplificar o projeto do circuito ótico, o canal obtido pelo procedimento descrito na Seção 4.4.2 pode ser reduzido à chamada forma normal de Lorentz [85]. O embasamento teórico para esta redução é o teorema a seguir enunciado na representação R.

Teorema da Forma Normal de Lorentz: “Para todo canal quântico T (mapa completamente positivo e que preserva o traço) existem mapas completamente positivos invertíveis T_A e T_B cujas representações de Kraus são constituídas de um único operador, tal que o canal quântico $T_B T T_A = \tilde{T}$ tem uma das seguintes três formas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x/\sqrt{3} & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.” \quad (4.34)$$

A primeira forma corresponde a um canal unital, ou seja, que mantém o estado maximamente mistura inalterado. A segunda forma tem representação de Kraus com três operadores se $x < 1$ e dois operadores se $x = 1$. Cabe ressaltar que $x > 1$ leva a mapas que não são completamente positivos. A terceira é representada por dois operadores de Kraus e é singular pois mapeia qualquer estado de entrada no mesmo estado de saída.

Desta forma, a atuação de um canal quântico arbitrário $\$$ em um dado qbit ρ_1 pode ser decomposta como:

$$\$_1 \rho_1 = \frac{B(\$_N(A\rho_1 A^\dagger))B^\dagger}{\text{Tr}[B(\$_N(A\rho_1 A^\dagger))B^\dagger]}, \quad (4.35)$$

onde $\$N$ é o canal em uma das três formas normais dadas em (4.34) e A e B são os operadores de Kraus correspondentes aos operadores T_A^{-1} e T_B^{-1} , mencionados no Teorema da Forma Normal de Lorentz. A Figura 4.2 ilustra o esquema para a geração de estados mistos, com a decomposição normal do canal $\$$ da Figura 4.1, e que será efetivamente usado na proposta experimental.

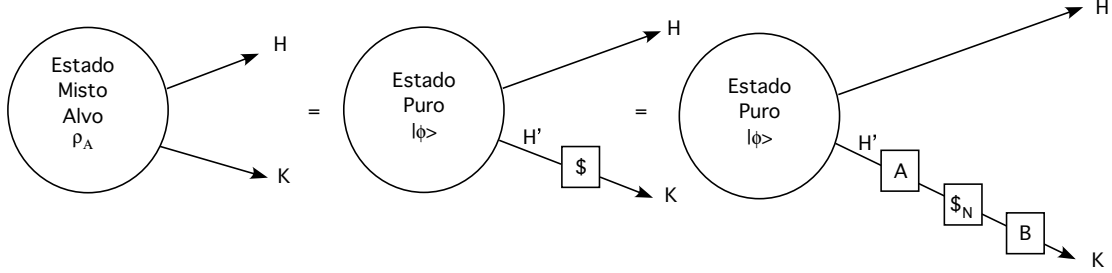


Figura 4.2: Esquema para gerar um estado misto arbitrário ρ usando a decomposição normal.

Dado um canal $\$$, as operações A e B, normalmente denominadas de filtragens locais e que pertencem ao conjunto de operações estocásticas locais assistidas por comunicação clássica (“stochastic local operations assisted by classical communication” ou SLOCC, na sigla em inglês) - podem ser obtidas com base no isomorfismo de Jamiolkowski usando um conjunto de teoremas válidos para matrizes densidades e que serão apresentados nas seções seguintes.

A Decomposição Singular de Lorentz

Considere as seguintes operações de filtragem A e B para um estado bipartido representado pela matriz densidade ρ [53]:

$$\rho' = \frac{(A \otimes B)\rho(A \otimes B)^\dagger}{\text{Tr}[(A \otimes B)\rho(A \otimes B)^\dagger]}, \quad (4.36)$$

onde $A^\dagger A \leq I$ and $B^\dagger B \leq I$.

Teorema 1: “A matriz R com elementos $R_{i,j} = \text{Tr}(\rho(\sigma_i \otimes \sigma_j))$ se transforma a menos de normalização sob operações SLOCC como:

$$R' = L_A R L_B^T, \quad (4.37)$$

onde L_A and L_B são transformações próprias ortócronas de Lorentz, isto é, os determinantes são iguais a +1, os elementos (1, 1) são positivos, onde o primeiro índice corresponde à primeira linha e o segundo à primeira coluna, e $L_i M L_i^T = M$ para $i = A, B$, onde M é a métrica de Lorentz $M = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$. L_A e L_B estão relacionadas com as operações de filtragem como:

$$L_A = T(A \otimes A^*)T^\dagger / |\det(A)|, \quad (4.38)$$

$$L_B = T(B \otimes B^*)T^\dagger / |\det(B)|, \quad (4.39)$$

onde

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

e a notação A^* representa conjugação complexa.”

Teorema 2: “A matriz R com elementos $R_{i,j} = \text{Tr}(\rho(\sigma_i \otimes \sigma_j))$ pode ser decomposta como [91]:

$$R = L_1 \Sigma L_2^T, \quad (4.41)$$

onde L_1 e L_2 são transformações próprias ortócronas de Lorentz e Σ é da forma diagonal:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

com $s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq |s_3|$, ou da forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & b + c - a \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

com a, b, c e d reais. As formas (4.42) e (4.43) são chamadas *normais*, a primeira correspondendo a matrizes ρ de posto completo e a segunda a matrizes com posto deficiente.” A prova do teorema a seguir representa uma forma construtiva de se obter as operações de filtragem e a forma normal de Lorentz [92].

Teorema 3: “Considere um estado puro multipartido $|\Psi\rangle$ cujas partes têm dimensões $N_1 \times \dots \times N_p$. Este estado pode ser construtivamente convertido para a forma normal por operações SLOCC de determinante 1. As matrizes reduzidas da forma normal são todas proporcionais à identidade e a forma normal é única a menos de transformações unitárias locais.” A prova construtiva do Teorema 3 segue a Referência [92]: “Os operadores locais A_i de determinante 1, trazendo o estado original $|\Psi\rangle$ para a sua forma normal, podem ser determinados iterativamente por um procedimento onde para cada passo o traço de $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho$ é minimizado por uma operação de filtragem em um dos subsistemas. Considere então a matriz reduzida relativa ao primeiro subsistema $\rho_1 = \text{Tr}_{2\dots p}(\rho)$. Se ρ_1 for de posto completo, então existe um operador X de determinante 1 tal que:

$$\rho'_1 = X\rho_1 X^\dagger \sim I_{N_1}. \quad (4.44)$$

De fato, $X = |\det(\rho_1)|^{1/2N_1}(\sqrt{\rho_1})^{-1}$ satisfaz a relação (4.44)¹ e resulta que $\rho'_1 = \det(\rho_1)^{1/N_1} I_{N_1}$. Além disto a seguinte relação é válida:

$$\text{Tr}(\rho'_1) = N_1 \det(\rho_1)^{1/N_1} \leq \text{Tr}(\rho_1), \quad (4.45)$$

onde $\rho'_1 = (X \otimes I \cdots \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|(X \otimes I \cdots \otimes I)^\dagger$. Esta desigualdade decorre do fato de a média geométrica ser sempre menor que a média aritmética, com a igualdade no caso de ρ_1 ser proporcional à identidade. Desta forma, o traço de ρ decresce após cada operação. Aplica-se este procedimento para os outros subsistemas e depois repete-se tudo iterativamente várias vezes. Para cada iteração, o traço de ρ irá decrescer a menos que todas as matrizes reduzidas sejam proporcionais à identidade. Em virtude do traço de um operador semipositivo definido ser limitado inferiormente, sabe-se que os decrementos se tornarão arbitrariamente pequenos e de acordo com a Expressão (4.44) isto implica que todas as matrizes reduzidas convergirão para operadores arbitrariamente próximos da identidade. No caso de ρ_i não ser de posto completo, existe uma série

¹O algoritmo numérico no apêndice B calcula X a partir da decomposição singular $\rho_1 = U\Sigma V^\dagger$. X é proporcional a $\Sigma^{-1/2}U^\dagger$.

de operadores X cujas normas tendem para infinito mas têm determinante 1 de modo que $X\rho_1X^\dagger = 0$, levando a uma forma normal idêntica a zero, claramente o operador positivo semidefinido com o menor traço possível. Este teorema também é válido para estados mistos uma vez que em nenhum momento se utiliza o fato de que o estado inicial é um estado puro.”

No caso de matrizes de posto completo, o algoritmo numérico no Apêndice B para determinar a forma normal termina quando as matrizes reduzidas ficam proporcionais à identidade, retornando portanto a forma (4.42), a menos de operações unitárias. No caso de matrizes densidade de posto deficiente, o programa termina² antes que as matrizes densidades reduzidas fiquem proporcionais à identidade, uma vez que isto só pode ocorrer assintoticamente [53] e portanto o algoritmo gera matrizes do tipo normal (4.43), a menos de operações unitárias³.

Obtenção do canal na forma normal a partir da matriz dual

O canal na forma normal $\$_N$ e as operações de filtragem A e B da Eq. (4.35) podem ser obtidas com base no isomorfismo de Jamiolkowski, calculando a decomposição singular de Lorentz da matriz dual do canal $\$$, que resulta, a menos de normalização:

$$\rho_D = (C \otimes D)\rho_N(C \otimes D)^\dagger, \quad (4.46)$$

onde ρ_D é a matriz dual do canal $\$$ definida pela Expressão (4.15), ρ_N é a forma normal de ρ_D com representação R do tipo (4.42) ou (4.43) e C e D são operações SLOCC de determinante 1, cujas inversas são obtidas segundo a prescrição contida no Teorema 3.

Do isomorfismo de Jamiolkowski, vem:

$$\rho_D = (\$ \otimes I)P^+, \quad (4.47)$$

$$\rho_N = (\$_N \otimes I)P^+. \quad (4.48)$$

²A condição de parada do programa neste caso dependerá da precisão da máquina utilizada.

³Atualmente estuda-se um meio para determinar as operações unitárias que levam a formas normais com representações dadas pelas Expressões (4.42) e (4.43).

Aplicando as operações de filtragem C e D definidas em (4.46) em ambos os lados de (4.48), vem:

$$\begin{aligned}\rho_D &= (\$ \otimes I)P^+ = (C \otimes D)[(\$_N \otimes I)P^+](C \otimes D)^\dagger = \\ &= (C \otimes I)[(\$_N \otimes I)(I \otimes D)P^+(I \otimes D)^\dagger](C \otimes I)^\dagger.\end{aligned}\quad (4.49)$$

Usando que:

$$(I \otimes D)P^+(I \otimes D)^\dagger = (D^T \otimes I)P^+(D^T \otimes I)^\dagger, \quad (4.50)$$

a Expressão (4.49) pode ser reescrita como:

$$(\$ \otimes I)P^+ = (C \otimes I)\{(\$_N \otimes I)[(D^T \otimes I)P^+(D^T \otimes I)^\dagger]\}(C \otimes I)^\dagger \quad (4.51)$$

e resulta que a ação do canal $\$$ em um estado de um qbit ρ_1 pode ser expressa como:

$$\$_1\rho_1 = C[\$_N(D^T \rho_1 (D^T)^\dagger)]C^\dagger. \quad (4.52)$$

Portanto as operações de filtragem que levam o canal à forma normal de acordo com a Eq. (4.35) estão relacionadas com as operações que levam a matriz dual à forma normal por: $A = D^T$ e $B = C$.

4.4.4 Operadores de Kraus e Mapa Unitário do Canal na Forma Normal

De acordo com (4.34), qualquer uma das três formas normais de um canal quântico pode ser representada pela seguinte matriz genérica:

$$\$_{NG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ t & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Assim, os operadores de Kraus e o mapa unitário obtidos para o canal genérico $\$_{NG}$ englobam as três formas normais associando-se adequadamente os valores de λ_1 , λ_2 , λ_3 e t . De acordo com o formalismo apresentado na Seção 4.2.3, para a obtenção dos operadores de Kraus é necessário calcular inicialmente a matriz dual do canal,

aplicando-se o mesmo no segundo qbit de um estado maximamente emaranhado. Como visto na Seção 4.2.2, a matriz dual na representação R é obtida transpondo-se a matriz do canal na representação R e multiplicando-se a terceira linha por -1 . Assim:

$$R_{D,NG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

A matriz densidade correspondente a (4.54) é obtida usando a Eq. (4.4) e é dada por:

$$\rho_{D,NG} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+t+\lambda_3 & 0 & 0 & \lambda_1+\lambda_2 \\ 0 & 1-t-\lambda_3 & \lambda_1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1-\lambda_2 & 1+t-\lambda_3 & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 & 0 & 0 & 1-t+\lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Multiplicando-se $\rho_{D,NG}$ por 2 e calculando seus autovalores a_k e autovetores normalizados correspondentes $|a_k\rangle$ ($k = 0\dots 3$), vem:

$$a_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{t^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2} + \lambda_3),$$

$$|a_0\rangle = \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{t^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \lambda_3),$$

$$|a_1\rangle = \frac{1}{N_1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{t^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \lambda_3),$$

$$|a_2\rangle = \frac{1}{N_2} \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{t^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2} + \lambda_3),$$

$$|a_3\rangle = \frac{1}{N_3} \begin{pmatrix} b_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

onde: $b_0 = \frac{t + \sqrt{t^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $b_1 = \frac{-t - \sqrt{t^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $b_2 = \frac{-t + \sqrt{t^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $b_3 = \frac{t - \sqrt{t^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\lambda_1 + \lambda_2}$ e $N_k = \sqrt{1 + b_k^2}$ ($k = 0 \dots 3$). Finalmente, usando (4.24) e (4.25), obtém-se os operadores de Kraus A_k ($k = 0 \dots 3$) relativos ao canal na forma normal \mathcal{K}_{NG} :

$$A_0 = \frac{\sqrt{a_0}}{N_0} \begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{a_1}}{N_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{a_2}}{N_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \frac{\sqrt{a_3}}{N_3} \begin{pmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

O mapa unitário que descreve a ação do canal normal genérico e que serve de base para a implementação experimental é dado por:

$$|0\rangle_S |0\rangle_\mathcal{E} \rightarrow A_0 |0\rangle_S |0\rangle_\mathcal{E} + A_1 |0\rangle_S |1\rangle_\mathcal{E} + A_2 |0\rangle_S |2\rangle_\mathcal{E} + A_3 |0\rangle_S |3\rangle_\mathcal{E},$$

$$|1\rangle_S |0\rangle_\mathcal{E} \rightarrow A_0 |1\rangle_S |0\rangle_\mathcal{E} + A_1 |1\rangle_S |1\rangle_\mathcal{E} + A_2 |1\rangle_S |2\rangle_\mathcal{E} + A_3 |1\rangle_S |3\rangle_\mathcal{E}. \quad (4.61)$$

Seja a seguinte convenção para os estados de um qbit:

$$|0\rangle_S \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle_S \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Substituindo as expressões dos operadores de Kraus do canal na forma normal (4.60) no mapa unitário (4.61) vem:

$$|0\rangle_S |0\rangle_\mathcal{E} \rightarrow \frac{\sqrt{a_0} b_0}{N_0} |0\rangle_S |0\rangle_\mathcal{E} + \frac{\sqrt{a_1} b_1}{N_1} |1\rangle_S |1\rangle_\mathcal{E} + \frac{\sqrt{a_2} b_2}{N_2} |1\rangle_S |2\rangle_\mathcal{E} + \frac{\sqrt{a_3} b_3}{N_3} |0\rangle_S |3\rangle_\mathcal{E},$$

$$|1\rangle_S |0\rangle_\mathcal{E} \rightarrow \frac{\sqrt{a_0}}{N_0} |1\rangle_S |0\rangle_\mathcal{E} + \frac{\sqrt{a_1}}{N_1} |0\rangle_S |1\rangle_\mathcal{E} + \frac{\sqrt{a_2}}{N_2} |0\rangle_S |2\rangle_\mathcal{E} + \frac{\sqrt{a_3}}{N_3} |1\rangle_S |3\rangle_\mathcal{E}. \quad (4.63)$$

4.4.5 Operações SLOCC A e B

Como foi visto na Seção 4.4.3, Expressão (4.35), um canal genérico pode ser decomposto na forma normal através de operações SLOCC A e B como ilustrado na Fig. 4.2.

Operador A

Como o operador A será aplicado a um estado puro, não há necessidade de produzir um circuito para a sua implementação. A aplicação de uma operação SLOCC, cuja representação de Kraus só possui um único operador, a um estado puro converte este estado em outro estado puro. Então para os propósitos deste trabalho basta redefinir o estado puro inicial $|\phi\rangle$ incorporando a ação do operador A. Com efeito o novo estado inicial será dado por:

$$|\phi'\rangle = \frac{(I \otimes A)|\phi\rangle}{\sqrt{\langle\phi|(I \otimes A)^\dagger(I \otimes A)|\phi\rangle}}. \quad (4.64)$$

Operador B

Para simplificar o circuito relativo ao operador B será utilizada a decomposição de Schmidt [31]. O objetivo é obter o operador B através de uma combinação de duas operações unitárias intercaladas por uma operação SLOCC com operador de Kraus na forma diagonal. Para tal, considere a aplicação do operador B no segundo qbit do estado maximamente emaranhado $|\Phi^+\rangle$. A menos de normalização obtém-se:

$$(I \otimes B)|\Phi^+\rangle = |\chi\rangle, \quad (4.65)$$

onde $|\chi\rangle$ é um estado puro.

Pela decomposição de Schmidt é sempre possível escrever o estado puro $|\chi\rangle$ como:

$$|\chi\rangle = \cos\theta|\zeta\rangle|\xi\rangle + \sin\theta|\zeta^\perp\rangle|\xi^\perp\rangle, \quad (4.66)$$

com $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\{|\zeta\rangle, |\zeta^\perp\rangle\}$ e $\{|\xi\rangle, |\xi^\perp\rangle\}$ bases ortonormais para o primeiro e segundo qbit, respectivamente, e que serão designadas aqui como bases de Schmidt. Sejam U_1 e U_2 as matrizes de mudança para as respectivas bases de Schmidt. Então:

$$(U_1 \otimes U_2)|\chi\rangle = |\chi'\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle. \quad (4.67)$$

Define-se agora o operador B_D da classe SLOCC com representação de Kraus na forma diagonal como:

$$(I \otimes B_D)|\Phi^+\rangle = |\chi'\rangle. \quad (4.68)$$

De (4.65) e (4.67), vem:

$$(U_1 \otimes U_2)(I \otimes B)|\Phi^+\rangle = |\chi'\rangle. \quad (4.69)$$

Usando que:

$$(U_1 \otimes I)|\Phi^+\rangle = (I \otimes U_1^T)|\Phi^+\rangle, \quad (4.70)$$

obtém-se:

$$(I \otimes U_2 B U_1^T)|\Phi^+\rangle = |\chi'\rangle. \quad (4.71)$$

Comparando (4.68) e (4.71), vem:

$$B_D = U_2 B U_1^T \Rightarrow B = U_2^{-1} B_D (U_1^T)^{-1}. \quad (4.72)$$

Usando a prescrição apresentada na Seção 4.2.3 para a determinação dos operadores de Kraus, obtém-se explicitamente:

$$B_D = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

Cabe notar que o procedimento anterior é equivalente a uma decomposição singular.

Para realizar o circuito ótico que corresponde à ação do operador B_D , para $\theta \neq \pi/4$ (operações não unitárias), usa-se o formalismo de medidas generalizadas baseadas em operadores não negativos (“Positive operator valued measure” ou POVM, na sigla em inglês) [31]. A idéia é estender o espaço de Hilbert e realizar medidas projetivas no espaço estendido. Fisicamente, este espaço de Hilbert auxiliar representaria um ambiente externo. No caso tratado aqui é suficiente representar o ambiente por um qbit. Definindo B_D^\perp , como:

$$B_D^\perp = \sqrt{I - B_D^\dagger B_D}, \quad (4.74)$$

o mapa unitário a seguir, no espaço de Hilbert estendido, representando sistema mais ambiente, serve para implementar o operador B_D :

$$\begin{aligned} |0\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow B_D|0\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} + B_D^\dagger|1\rangle_S|1_B\rangle_{\mathcal{E}}, \\ |1\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow B_D|1\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} + B_D^\dagger|0\rangle_S|1_B\rangle_{\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

condicionado ao ambiente ser detectado no estado $|0_B\rangle_{\mathcal{E}}$. De fato, de acordo com o mapa (4.75), a transformação sofrida por uma matriz arbitrária de um qbit σ , ao se detectar o ambiente no estado $|0_B\rangle_{\mathcal{E}}$, é dada por:

$$\sigma \rightarrow \frac{B_D \sigma B_D^\dagger}{\text{Tr}(B_D \sigma B_D^\dagger)}, \quad (4.76)$$

onde $P_0 = \text{Tr}(B_D \sigma B_D^\dagger)$ é a probabilidade de se medir o ambiente no estado $|0_B\rangle_{\mathcal{E}}$.

O mapa (4.75) no entanto pode ser otimizado, para aumentar a probabilidade P_0 , sem alterar o efeito final do operador B_D no caso não unitário, que corresponde a atenuar o estado $|1\rangle_S$ do sistema em relação ao estado $|0\rangle_S$ se $0 \leq \theta < \pi/4$ ou vice-versa, para $\pi/4 < \theta \leq \pi/2$. O operador ótimo B_D^{ot} é dado por:

$$B_D^{ot} = \frac{1}{\sqrt{2} \text{Max}(\cos \theta, \text{sen } \theta)} B_D. \quad (4.77)$$

Resulta que para $0 \leq \theta < \pi/4$:

$$B_D^{ot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

com $\sqrt{p} = \text{sen } \theta / \cos \theta$ e para $\pi/4 < \theta \leq \pi/2$:

$$B_D^{ot} = \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

com $\sqrt{p} = \cos \theta / \text{sen } \theta$. Os mapas correspondentes são dados por:

$$\begin{aligned} |0\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow |0\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}}, \\ |1\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow \sqrt{p}|1\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} + \sqrt{1-p}|0\rangle_S|1_B\rangle_{\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

e

$$\begin{aligned} |0\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow \sqrt{p}|0\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} + \sqrt{1-p}|1\rangle_S|1_B\rangle_{\mathcal{E}}, \\ |1\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow |1\rangle_S|0_B\rangle_{\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

respectivamente.

4.5 Proposta de Implementação Experimental

De acordo com a discussão teórica precedente, o arranjo experimental baseado em ótica linear para a geração de estados mistos pode ser dividido em três partes principais como mostra a Figura 4.3.

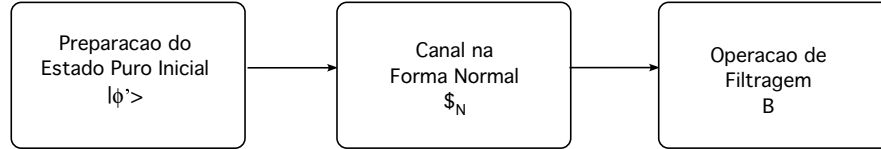


Figura 4.3: Esquema geral do experimento para a geração de estados mistura arbitrários.

Cada qbit é representado pelo grau de polarização de um fóton, onde a polarização horizontal (H) é associada ao estado $|0\rangle_{\mathcal{S}}$ e a vertical (V) ao estado $|1\rangle_{\mathcal{S}}$. As próximas seções detalham os circuitos óticos que implementam cada um dos blocos da Figura 4.3.

4.5.1 Preparação do Estado Puro Inicial

Para a preparação do estado puro inicial $|\phi'\rangle$, com a operação de filtragem A embutida, conforme discutido na Seção 4.4.5, utiliza-se uma fonte de conversão paramétrica descendente composta de dois cristais tipo I, descrita na Seção 2.2.2, que produz fótons gêmeos sobre os quais são aplicadas operações unitárias locais [93], como mostra a Figura 4.4.

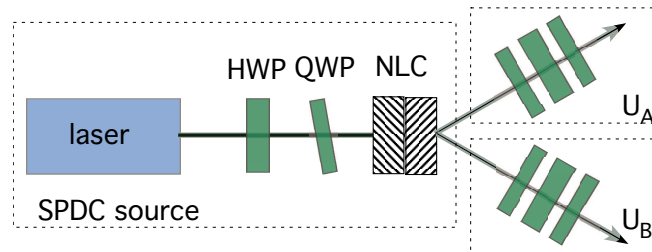


Figura 4.4: Preparação do estado puro inicial.

O fundamento teórico por trás deste esquema é a decomposição de Schmidt, in-

troduzida na Seção 4.4.5, que estabelece que qualquer estado puro bipartido pode ser escrito utilizando apenas dois termos. Logo:

$$|\phi'\rangle = \cos\theta|\zeta\rangle|\xi\rangle + \sin\theta|\zeta^\perp\rangle|\xi^\perp\rangle. \quad (4.82)$$

A fonte de conversão paramétrica descendente gera o estado emaranhado:

$$\cos\theta|H_A\rangle|H_B\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|V_A\rangle|V_B\rangle. \quad (4.83)$$

Ajustando a placa de quarto de onda do laser de bombeamento para $\phi = 0$ e escolhendo as transformações unitárias locais U_A e U_B , realizadas através de duas placas de quarto de onda intercaladas por uma placa de meia onda no caminho do primeiro e do segundo fóton, respectivamente [94], de tal forma que:

$$\begin{aligned} U_A\{|H_A\rangle, |V_A\rangle\} &\rightarrow \{|\zeta\rangle, |\zeta^\perp\rangle\}, \\ U_B\{|H_B\rangle, |V_B\rangle\} &\rightarrow \{|\xi\rangle, |\xi^\perp\rangle\}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

obtém-se o estado puro inicial $|\phi'\rangle$ satisfazendo (4.64).

4.5.2 Canal na Forma Normal

O segundo qbit do estado puro $|\phi'\rangle$ é direcionado para o circuito ótico que implementa o canal na forma normal, mostrado na Figura 4.5. Como será detalhado a seguir, este circuito corresponde à realização do mapa unitário (4.63). Similarmente às propostas anteriores, o ambiente é representado pelo caminho do fóton. O caráter não unitário do canal é recuperado traçando sobre os modos do ambiente, que experimentalmente, corresponde a se ignorar na saída do circuito por qual caminho o fóton se propagou.

O circuito consiste basicamente de três interferômetros do tipo Sagnac modificado, dispostos em cascata. Cada interferômetro opera de forma análoga à descrita no Capítulo 2, salvo que agora a placa de meia onda colocada no caminho do fóton com polarização horizontal não está no circuito apenas para compensar os dois caminhos óticos contrapropagantes. Dependendo do estado misto que se deseja preparar, a placa

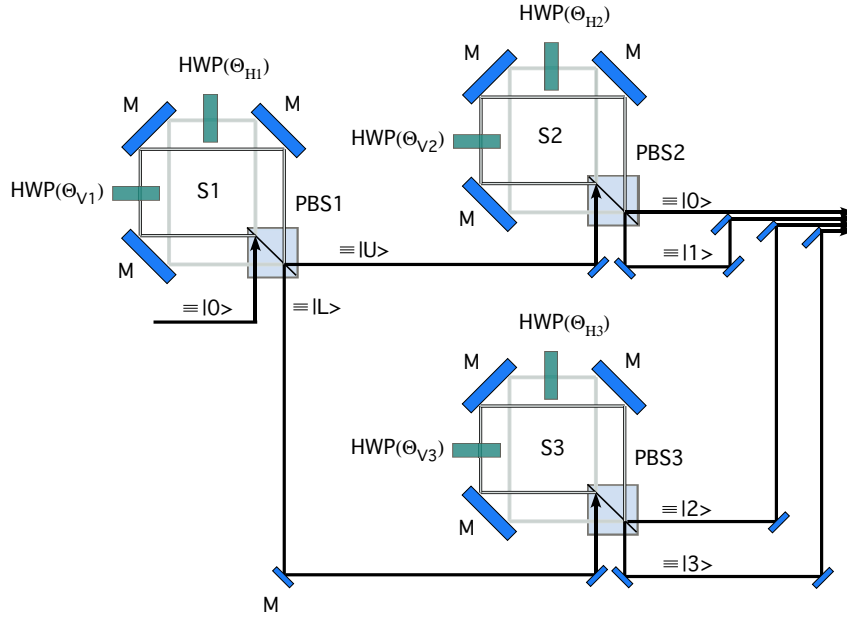


Figura 4.5: Arranjo experimental que implementa o canal normal \mathcal{S}_N .

pode ser alinhada com ângulo de θ_H em relação à polarização horizontal, provocando uma rotação do tipo: $|H\rangle \rightarrow \cos(2\theta_H)|H\rangle + \sin(2\theta_H)|V\rangle$.

Suponha que um fóton com polarização horizontal propaga-se através do primeiro interferômetro (S1) cujo modo de entrada é associado ao estado $|0\rangle_{\mathcal{E}}$ do ambiente, conforme mostra a Fig. 4.6. O estado do sistema mais ambiente após o primeiro interferômetro é dado por:

$$|H\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} \rightarrow \cos(2\theta_{H1})|H\rangle_S |U\rangle_{\mathcal{E}} + \sin(2\theta_{H1})|V\rangle_S |L\rangle_{\mathcal{E}}, \quad (4.85)$$

onde $|U\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|L\rangle_{\mathcal{E}}$ são os dois modos de saída do PBS1.

Fótons no modo $|U\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|L\rangle_{\mathcal{E}}$ são direcionados para o segundo (S2) e para o terceiro (S3) interferômetro, respectivamente, que realizam as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \cos(2\theta_{H1})|H\rangle_S |U\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow \cos(2\theta_{H1})\cos(2\theta_{H2})|H\rangle_S |0\rangle_{\mathcal{E}} + \cos(2\theta_{H1})\sin(2\theta_{H2})|V\rangle_S |1\rangle_{\mathcal{E}}, \\ \sin(2\theta_{H1})|V\rangle_S |L\rangle_{\mathcal{E}} &\rightarrow \sin(2\theta_{H1})\cos(2\theta_{V3})|V\rangle_S |2\rangle_{\mathcal{E}} + \sin(2\theta_{H1})\sin(2\theta_{H3})|H\rangle_S |3\rangle_{\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

onde $|0\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|1\rangle_{\mathcal{E}}$ são os dois modos de saída do PBS2 e $|2\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|3\rangle_{\mathcal{E}}$ os modos de saída

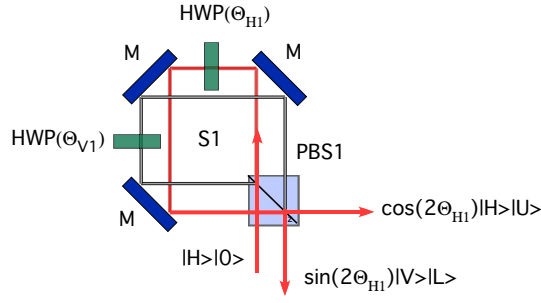


Figura 4.6: Propagação de um fóton com polarização H pelo interferômetro S1.

do PBS3, como mostra a Figura 4.7. Resulta que a transformação total realizada pelos

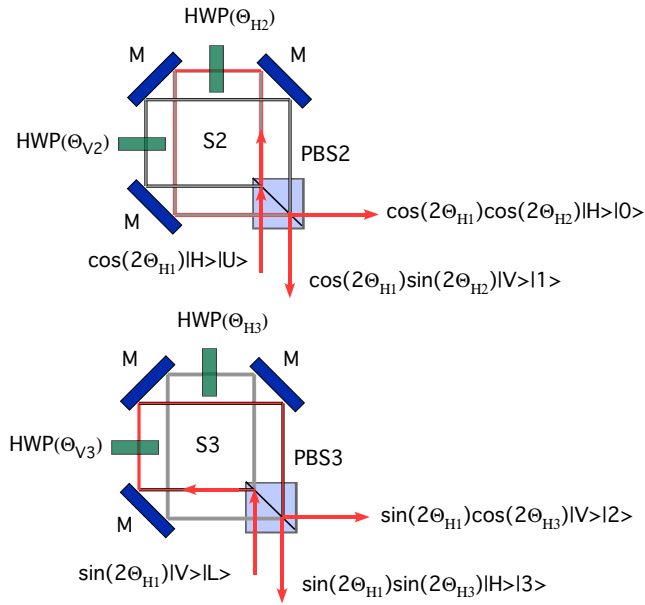


Figura 4.7: Transformações realizadas pelos interferômetros S2 e S3 em um fóton com polarização inicial H no interferômetro S1.

três interferômetros sobre o estado inicial $|H\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 |H\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} \rightarrow & \cos(2\theta_{H1})\cos(2\theta_{H2})|H\rangle_S|0\rangle_\mathcal{E} + \cos(2\theta_{H1})\sin(2\theta_{H2})|V\rangle_S|1\rangle_\mathcal{E} + \\
 & \sin(2\theta_{H1})\cos(2\theta_{V3})|V\rangle_S|2\rangle_\mathcal{E} + \sin(2\theta_{H1})\sin(2\theta_{H3})|H\rangle_S|3\rangle_\mathcal{E}. \quad (4.87)
 \end{aligned}$$

Utilizando raciocínio análogo para um estado de entrada com polarização vertical

$|V\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}}$, obtém-se após a propagação do fóton pelos três interferômetros:

$$\begin{aligned} |V\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} \rightarrow & \cos(2\theta_{V_1})\cos(2\theta_{V_2})|V\rangle_S|0\rangle_{\mathcal{E}} + \cos(2\theta_{V_1})\sin(2\theta_{V_2})|H\rangle_S|1\rangle_{\mathcal{E}} + \\ & \sin(2\theta_{V_1})\cos(2\theta_{H_3})|H\rangle_S|2\rangle_{\mathcal{E}} + \sin(2\theta_{V_1})\sin(2\theta_{H_3})|V\rangle_S|3\rangle_{\mathcal{E}}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

As Expressões (4.87) e (4.88) realizam o mapa (4.63) ajustando os ângulos das placas de meia onda do circuito óptico que implementa o canal normal de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned} \cos(2\theta_{H_1})\cos(2\theta_{H_2}) &= \frac{\sqrt{a_0}b_0}{N_0}, \\ \cos(2\theta_{H_1})\sin(2\theta_{H_2}) &= \frac{\sqrt{a_1}b_1}{N_1}, \\ \sin(2\theta_{H_1})\cos(2\theta_{V_3}) &= \frac{\sqrt{a_2}b_2}{N_2}, \\ \sin(2\theta_{H_1})\sin(2\theta_{V_3}) &= \frac{\sqrt{a_3}b_3}{N_3}, \\ \cos(2\theta_{V_1})\cos(2\theta_{V_2}) &= \frac{\sqrt{a_0}}{N_0}, \\ \cos(2\theta_{V_1})\sin(2\theta_{V_2}) &= \frac{\sqrt{a_1}}{N_1}, \\ \sin(2\theta_{V_1})\cos(2\theta_{H_3}) &= \frac{\sqrt{a_2}}{N_2}, \\ \sin(2\theta_{V_1})\sin(2\theta_{H_3}) &= \frac{\sqrt{a_3}}{N_3}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Os quatro modos de saída da Figura 4.5 são reunidos incoerentemente, de modo a se preservar a ortogonalidade dos estados do ambiente, e direcionados para a entrada do circuito que implementa a operação de filtragem B. Cabe notar que para o circuito B é indiferente o caminho pelo qual o fóton passou, o que corresponde matematicamente a traçar sobre os estados do reservatório, como já foi enfatizado anteriormente.

4.5.3 Filtragem Local B

O circuito que realiza a filtragem local B é mostrado na Figura 4.8. Com o objetivo de não sobrecarregar a figura, os quatro modos provenientes do circuito que gera o canal

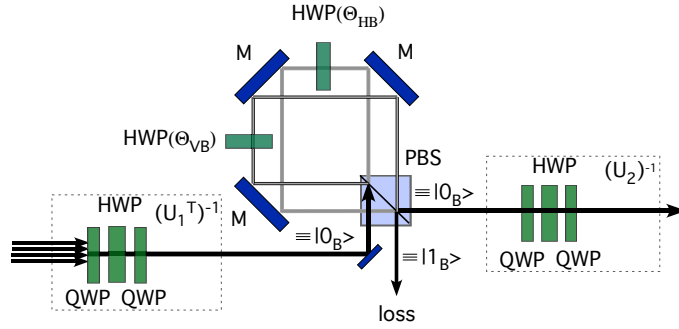


Figura 4.8: Arranjo experimental para a operação de filtragem B.

na forma normal foram reunidos em apenas uma linha a partir da primeira placa de quarto de onda.

Para simplificar o arranjo experimental, como foi discutido na Seção 4.4.5, a filtragem B é decomposta em operações unitárias intercaladas com uma operação de filtragem com operador de Kraus diagonal. As operações unitárias são realizadas pelo mesmo arranjo, composto por duas placas de quarto de onda intercaladas por uma placa de meia onda, discutido na Seção 4.5.1. Estas operações unitárias são determinadas pelas matrizes de mudança para a base de Schmidt, conforme discutido na Seção 4.4.5. A operação de filtragem com operador de Kraus diagonal é realizada com um interferômetro idêntico aos que foram usados no circuito que implementa o canal na forma normal. Contudo, agora os modos de saída não são combinados incoerentemente. De fato o circuito só realiza a filtragem condicionado à propagação do fóton por uma das saídas do PBS, como será detalhado a seguir.

O interferômetro da Figura 4.8 realiza o seguinte mapa unitário:

$$\begin{aligned}
 |H\rangle_S |0_B\rangle_\mathcal{E} &\rightarrow \cos(2\theta_{HB}) |H\rangle_S |0_B\rangle_\mathcal{E} + \sin(2\theta_{HB}) |V\rangle_S |1_B\rangle_\mathcal{E}, \\
 |V\rangle_S |0_B\rangle_\mathcal{E} &\rightarrow \cos(2\theta_{VB}) |V\rangle_S |0_B\rangle_\mathcal{E} + \sin(2\theta_{VB}) |H\rangle_S |1_B\rangle_\mathcal{E},
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

onde $|0_B\rangle_\mathcal{E}$ e $|1_B\rangle_\mathcal{E}$ são os dois modos de saída do PBS. Este circuito é probabilístico e apenas quando o fóton se propaga pelo modo $|0_B\rangle_\mathcal{E}$ o resultado da preparação do estado mistura é válido. Todas as vezes que um fóton for detectado no modo $|1_B\rangle_\mathcal{E}$ o resultado deve ser descartado. Como foi visto na Seção 4.4.5, há dois tipos de mapas unitários

relacionados às filtragens ótimas dados em (4.80) e (4.81). Para a realização do mapa (4.80) basta ajustar os ângulos de inclinação das placas de meia onda no caminho dos fótons com polarização horizontal e vertical no interferômetro de tal forma que $\cos(2\theta_{HB}) = 0$ e $\cos(2\theta_{VB}) = \sqrt{p}$, respectivamente. Para o mapa (4.81), inversamente, basta fazer $\cos(2\theta_{VB}) = 0$ e $\cos(2\theta_{HB}) = \sqrt{p}$.

4.5.4 Circuito Completo

A Figura 4.9 a seguir mostra o circuito completo para gerar um estado misto arbitrário de dois qbits.

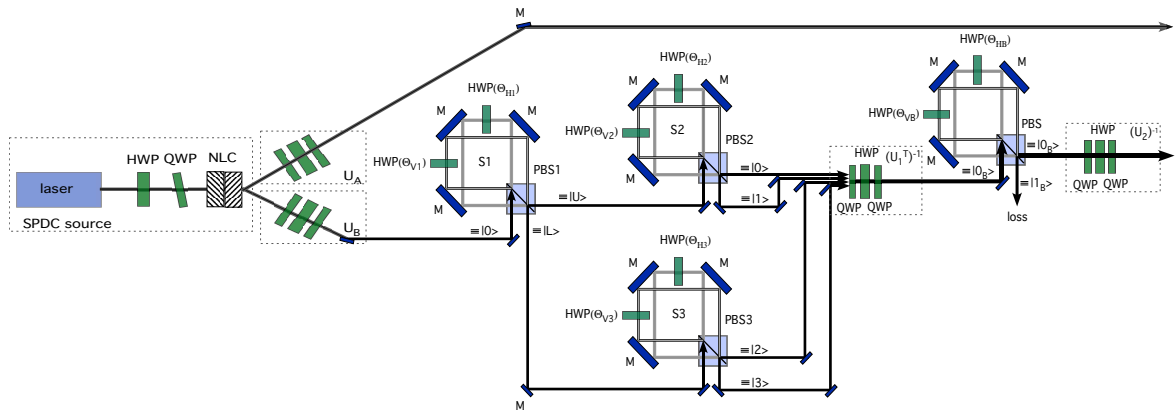


Figura 4.9: Arranjo óptico baseado em canais quânticos para gerar um estado misto arbitrário de dois qbits.

4.6 Comparação com outras Propostas da Literatura

Nesta seção discutem-se outros arranjos experimentais para gerar estados mistos arbitrários destacando-se as vantagens e desvantagens com relação à proposta desta tese, baseada em canais quânticos.

pulso de bombeio pode revelar onde o par foi criado. Para um laser contínuo, pode se acrescentar um atraso no caminho de cada par maior que o tempo de coerência do laser de bombeio de modo a garantir que os estados sejam combinados de forma incoerente.

Esquema II

O aparato consiste na extensão do arranjo experimental mostrado na Figura 4.11 para gerar estados puros baseado em interferometria. Este esquema está baseado na consi-

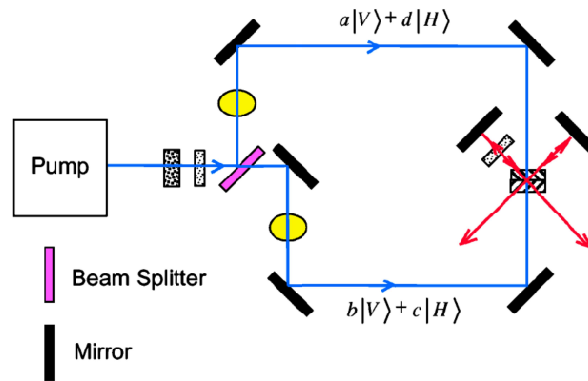


Figura 4.11: Arranjo óptico baseado em interferometria para gerar um estado puro arbitrário de dois qubits. Figura extraída da Ref. [93].

deração de que um estado puro arbitrário $|\psi\rangle = a|HH\rangle + b|HV\rangle + c|VH\rangle + d|VV\rangle$ pode ser formado pela superposição coerente de duas partes (não normalizadas): $a|HH\rangle + d|VV\rangle$ e $b|HV\rangle + c|VH\rangle$. Para criar o primeiro estado basta que o laser de bombeio esteja no estado $|\psi_U\rangle = a|V\rangle + d|H\rangle$. Para criar o segundo estado o laser de bombeio deve ser colocado no estado $|\psi_L\rangle = b|V\rangle + c|H\rangle$, que resulta na criação de pares emaranhados no estado $b|HH\rangle + c|VV\rangle$. Uma placa de quarto de onda por onde um dos fótons se propaga duas vezes, possibilita a conversão do estado para $b|HV\rangle + c|VH\rangle$. A combinação coerente dos dois processos leva à geração do estado arbitrário $|\psi\rangle$. A amplitude de cada processo, determinada pelos valores relativos de $\langle\psi_U|\psi_U\rangle$ e $\langle\psi_L|\psi_L\rangle$ pode ser ajustada pela transmissividade do divisor de feixes.

O circuito para gerar estados mistos arbitrários de dois qubits, mostrado na Figura

4.12 usa o método de superposição coerente da Figura 4.11 para produzir cada um dos quatro estados da decomposição (4.91). Estes estados são misturados incoerentemente

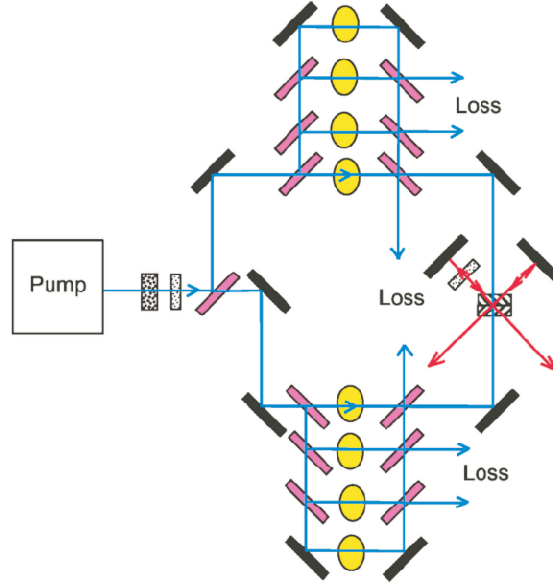


Figura 4.12: Arranjo óptico baseado em interferometria para gerar um estado misto arbitrário de dois qubits. Figura extraída da Ref. [93].

de acordo com os autovalores λ_i controlando-se os coeficientes de transmissão dos divisores de feixes. Como se nota, este circuito é probabilístico, as perdas devendo-se às saídas não utilizadas dos divisores de feixes. Para garantir a incoerência da mistura são utilizados os mesmos mecanismos do esquema I.

4.6.2 Proposta de Chuanwei Zhang

Nessa proposta [95] emaranha-se polarização de fótons com modos espaciais que são traçados no final para se obter o estado misto desejado ρ no grau de liberdade de polarização. A decomposição (4.91) pode ser feita de tal forma que $\lambda_i \geq \lambda_j$ e os estados $|\psi_i\rangle$ sejam estados puros de dois qubits com o mesmo emaranhamento de formação que ρ . Então os estados $|\psi_i\rangle$ são iguais a menos de transformações unitárias, ou seja, $|\psi_i\rangle = U_i \otimes V_i |\Phi\rangle$, onde U_i e V_i são operações unitárias locais e $|\Phi\rangle = \cos\theta|00\rangle +$

sen $\theta|11\rangle$, com $0 \leq \theta \leq \pi/4$. O arranjo experimental é mostrado na Figura 4.13. O estado $|\Phi\rangle = \cos\theta|HH\rangle + \sin\theta|VV\rangle$ é produzido por um conjunto de cristais e

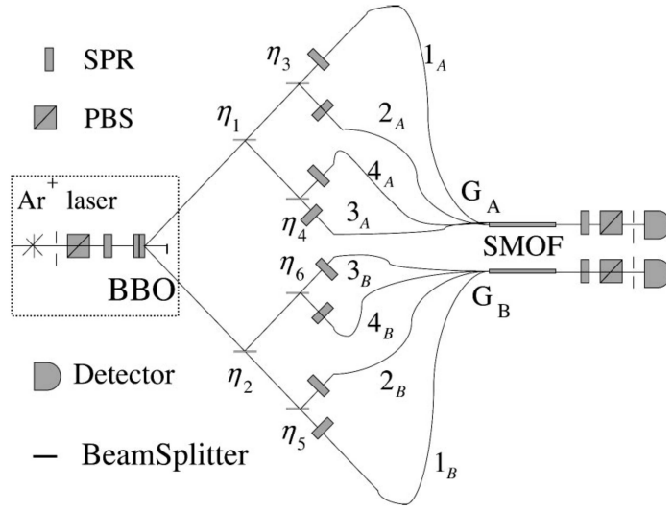


Figura 4.13: Arranjo óptico baseado em acoplamento com modos longitudinais para gerar um estado misto arbitrário de dois qbits. Figura extraída da Ref. [95].

acoplado a modos espaciais distintos através de seis divisores de feixes com transmissão variável, de tal forma que cada fóton tem quatro caminhos óticos possíveis. Em cada caminho, elementos óticos que produzem rotações na polarização realizam as operações unitárias U_i e V_i e transformam o estado inicial $|\psi\rangle$ nos diferentes estados $|\psi_i\rangle$. Os quatro caminhos de cada fóton são reunidos em acopladores e transmitidos em um único caminho através de fibras óticas. Para garantir combinação incoerente, a diferença de comprimento dos quatro caminhos é maior que o comprimento de coerência do fóton. Assim fótons de caminhos diferentes chegam no detector em tempos diferentes. Resulta que o estado de saída é composto de dois subespaços de estados: dois fótons A, B chegando no mesmo instante ou em instantes diferentes. Fazendo a janela temporal do contador de coincidências suficientemente pequena, somente fótons provenientes de caminhos com o mesmo comprimento contribuem para as contagens e os estados de polarização dos fótons são reduzidos ao subespaço com o mesmo tempo de chegada.

Esquema	NLC	WP	PBS	ATT	BS	G	OF	Total
EMACQ	2	22	4	0	0	0	0	28
Wei-Esquema I	8	29	0	3	0	0	0	40
Wei-Esquema II	2	27	0	0	13	0	0	42
Zhang	2	26	0	0	6	2	2	38

Tabela 4.1: Número de elementos óticos utilizados nos quatro esquemas de fonte de estados mistos arbitrários. NLC: cristal não linear, WP: placa de onda, PBS: divisor de feixes polarizado, ATT: atenuador, BS: divisor de feixes, G: acoplador ótico, OF: fibra ótica.

4.6.3 Análise Comparativa

A proposta de geração de estados **mistos arbitrários** baseada na aplicação de **canais quânticos**, que por simplicidade será denotada de EMACQ, traz vantagem em relação às outras propostas com relação ao número de elementos óticos utilizados, como pode ser verificado na Tabela 4.1. O número de espelhos não foi contabilizado pois depende fundamentalmente do tipo de montagem do arranjo experimental.

Outra vantagem interessante do esquema EMACQ é em relação à preparação remota do estado misto. Enquanto todos os outros esquemas requerem operações locais em ambos os fótons gerados pela conversão paramétrica, ao contrário, o esquema EMACQ requer operações locais em apenas um dos fótons do par. Assim, uma vez gerado o estado puro inicial, um dos fótons pode ser enviado para uma localização distante e a preparação do estado misto feita localmente ou remotamente por apenas uma das partes.

Uma desvantagem do esquema EMACQ em relação ao Esquema I de Wei é o fato de não ser um circuito determinístico. O esquema EMACQ, no entanto, em relação aos demais não determinísticos é o que apresenta menor perda, apenas no PBS do circuito da operação de filtragem B. Como o sucesso no EMACQ está condicionado à detecção do ambiente no estado $|0_B\rangle_{\mathcal{E}}$, de acordo com as Expressões (4.80) e (4.81), a probabilidade de geração do estado misto desejado depende de p . No Esquema II de Wei, há possibilidade de perdas em seis divisores de feixes. A situação é mais grave ainda

no esquema de Zhang onde o estado misto desejado só é gerado para uma pequena fração (da ordem de $1/16$) do conjunto de fótons que são gerados. Evidentemente uma comparação mais rigorosa da eficiência dos quatro métodos requer uma análise estatística com base em uma massa de dados representativa de todo o espectro de matrizes densidade de dois qbits, o que é previsto para um trabalho futuro. Também para uma fase posterior, foi deixado o cálculo da fidelidade da preparação do estado misto no esquema EMACQ, levando-se em conta erros ocasionados, entre outros, por perdas nos diversos elementos óticos e imprecisão no ajuste dos ângulos das placas de onda.

4.7 Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste capítulo foi apresentada uma proposta original de circuito ótico baseado em canais quânticos para geração de estados arbitrários de dois qbits codificados em polarização. Embora a ênfase seja na geração de estados mistos, estados puros podem ser utilizados diretamente da fonte de conversão paramétrica descendente, sem se alterar a montagem experimental, ajustando as placas de onda de modo que o canal quântico e as operações unitárias correspondam à identidade. O circuito utiliza elementos óticos usuais e pode ser implementado com tecnologia atual.

Valendo-se da maneira como o circuito foi concebido é possível manter um dado estado inicial e variar dinamicamente o canal quântico ou vice-versa, manter o canal quântico e variar continuamente o estado inicial acompanhando-se trajetórias possivelmente ainda inexploradas no espaço de Hilbert. Em particular, neste contexto, este circuito pode ser utilizado para demonstrar experimentalmente a lei de fatoração para decaimento de emaranhamento [96], resultado que estabelece que a redução no emaranhamento quando apenas um de dois qbits sofre a ação de um canal é independente do estado inicial, sendo determinada apenas pela ação do canal em um estado maximamente emaranhado.

Com possibilidade de gerar estados com qualquer grau de emaranhamento e en-

tropia, a fonte é um recurso útil para estudo de diversos tipos de estados investigados na literatura, tanto teórica como experimentalmente, como estados de Werner [97, 98], estados mistos maximamente emaranhados (“maximally entangled mixed states ou MEMS, na sigla em inglês) [99, 100], estados com correlação quântica distinta de emaranhamento [101, 84], entre outros. Outras aplicações podem incluir testes de desigualdades do tipo Bell [8, 80] métodos de destilação e filtragem de emaranhamento [82, 102], tomografia de canal quântico [103] e outros protocolos de informação quântica.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

O assunto principal desta tese é a investigação do efeito do ambiente em sistemas simples ou bipartidos de dois níveis, onde se destaca a estratégia, que se revelou bastante versátil do ponto de vista prático, de representar tanto o sistema como o ambiente usando graus de liberdade internos diferentes do mesmo fóton. Os estudos realizados são de grande importância no que se refere a protocolos de informação e computação quântica que dependem da preservação da coerência e do emaranhamento – ambos afetados pela ação do ambiente – para superar seus equivalentes clássicos.

Inicialmente foram apresentados resultados obtidos pelo grupo de Ótica Quântica da Universidade Federal do Rio de Janeiro relativos tanto à dinâmica de propriedades de partícula única quanto de propriedades coletivas de um sistema bipartido, com ênfase na dinâmica do emaranhamento, sob o efeito de ambientes independentes. Mostrou-se experimentalmente, usando elementos simples de ótica linear, com a polarização representando o sistema e o modo de propagação espacial do fóton representando o ambiente, que as populações e coerências de uma única partícula decaem exponencialmente com o tempo, ao passo que o emaranhamento pode se extinguir em tempo finito, dependendo do tipo de ambiente a que o sistema está exposto. Esta foi a primeira demonstração experimental deste fenômeno, conhecido como morte súbita de emaranhamento [29].

O controle obtido pela representação do ambiente através do modo de propagação espacial do fóton permitiu explorar outros aspectos interessantes da dinâmica de um sistema aberto. Em particular foi possível acompanhar uma trajetória quântica sem

saltos através da monitoração contínua do ambiente. Embora não demonstrado experimentalmente, verificou-se também que o esquema de monitoração do ambiente permite realizar filtragem de emaranhamento. Destaca-se ainda que a versatilidade do aparato experimental é tal que, com pequenas alterações, é possível implementar outros tipos de ambientes, como foi mostrado posteriormente na Ref. [55].

A seguir discutiu-se a dinâmica do emaranhamento de um sistema bipartido sob efeito de um ambiente comum. Em oposição ao efeito destrutivo de ambientes locais independentes, é possível neste caso gerar emaranhamento em um sistema inicialmente em um estado separável. O esquema experimental proposto para observar este fenômeno baseia-se na representação do sistema bipartido pelos graus de liberdade de polarização e modos transversos do fóton e do ambiente pelos modos de propagação espacial. Como o objetivo deste estudo foi avaliar exclusivamente a dinâmica do emaranhamento, optou-se por utilizar, como uma alternativa mais eficiente ao processo de tomografia quântica, uma testemunha para quantificar o emaranhamento. O observável utilizado como testemunha apresenta a interessante propriedade de ser independente do tempo, assim para quantificar o emaranhamento o mesmo circuito pode ser usado ao longo de todo o experimento.

Esta proposta foi discutida com o grupo do Laboratório de Ótica Quântica da Universidade Federal Fluminense e está em vias de ser realizada. Além disto, as discussões para a realização deste experimento desencadearam novas idéias, explorando a utilização de múltiplos graus de liberdade de um mesmo fóton e um novo experimento para violação de uma desigualdade similar à de Bell [104] usando feixes intensos está em andamento. Cabe ressaltar ainda que como perspectiva futura estuda-se a possibilidade de incorporar a interação dipolo-dipolo no modelo.

Finalmente, tendo discutido o inevitável efeito do ambiente na dinâmica das propriedades de sistemas de um e dois qbits, a parte final da tese explora o ambiente como recurso ao propor um esquema experimental, baseado em descoerência para gerar uma fonte universal de estados mistos de dois qbits. Novamente o sistema é representado pela polarização e o ambiente pelo modos de propagação espacial do fóton, como no es-

tudo de ambientes independentes. O formalismo teórico desta proposta fundamenta-se no princípio da dualidade entre canais quânticos e estados. Com efeito, preparando-se um determinado estado puro e sujeitando-se um dos qbits a um determinado ambiente, representado por um canal quântico específico, obtém-se qualquer estado misto desejado. Esta proposta implica na necessidade de se produzir um canal arbitrário para um sistema de um qbit, o que representa um desafio do ponto de vista experimental. A solução encontrada para se chegar a um circuito viável foi utilizar a decomposição singular de Lorentz, que estabelece que um canal arbitrário pode ser obtido pela combinação de um canal mais simples – na chamada forma normal – com operações de filtragens. Até onde se sabe é a primeira proposta experimental utilizando esta decomposição. Produzindo estados com qualquer grau de emaranhamento e entropia, esta fonte pode ser muito útil no estudo de várias aplicações de informação e computação quântica.

Apêndice A

Programa em Mathematica v.6 para Cálculo dos Operadores de Kraus

(* Elaborado por Adriana Auyuanet e Malena Hor Meyll *)

(* Definicao de Parametros *)

$$CC = 1/2 * (2 * e^{(-2 * \gamma * t)} * \gamma * t - e^{(-2 * \gamma * t)} + 1 - e^{(-2 * \gamma * t)} * \text{Sqrt}[17 - 32 * e^{(\gamma * t)} + 14 * e^{(2 * \gamma * t)} + e^{(4 * \gamma * t)} + 4 * \gamma * t - 4 * e^{(2 * \gamma * t)} * \gamma * t + (2 * \gamma * t)^2])$$

DD =

1/2*

$$(2 * e^{(-2 * \gamma * t)} * \gamma * t - e^{(-2 * \gamma * t)} + 1 + e^{(-2 * \gamma * t)} * \text{Sqrt}[17 - 32 * e^{(\gamma * t)} + 14 * e^{(2 * \gamma * t)} + e^{(4 * \gamma * t)} + 4 * \gamma * t - 4 * e^{(2 * \gamma * t)} * \gamma * t + (2 * \gamma * t)^2])$$

$$AA = -(-2 * \gamma * t - 1 + e^{(2 * \gamma * t)} + \text{Sqrt}[17 - 32 * e^{(\gamma * t)} + 14 * e^{(2 * \gamma * t)} + e^{(4 * \gamma * t)} + 4 * \gamma * t - 4 * e^{(2 * \gamma * t)} * \gamma * t + (2 * \gamma * t)^2]) / (4 * (-1 + e^{(\gamma * t)}))$$

$$BB = -(-2 * \gamma * t - 1 + e^{(2 * \gamma * t)} - \text{Sqrt}[17 - 32 * e^{(\gamma * t)} + 14 * e^{(2 * \gamma * t)} + e^{(4 * \gamma * t)} + 4 * \gamma * t - 4 * e^{(2 * \gamma * t)} * \gamma * t + (2 * \gamma * t)^2]) / (4 * (-1 + e^{(\gamma * t)}))$$

$$e^{4 * \gamma * t} + 4 * \gamma * t - 4 * e^{(2 * \gamma * t) * \gamma * t + (2 * \gamma * t)^2} / (4 * (-1 + e^{\gamma * t}))$$

$$T1 = 1/\text{Sqrt}[2 * (1 + e^{(-2 * \gamma * t)})] * \{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, e^{(-\gamma * t)}, 0, 0\}, \{0, 0, e^{(-\gamma * t)}, 0\}, \{0, 0, 0, 1\}\};$$

MatrixForm[T1]

$$\text{avalor1} = 2 * (1 + e^{(-2 * \gamma * t)})$$

$$T2 = \{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0\}\};$$

MatrixForm[T2]

$$\text{avalor2} = 1 - e^{(-2 * \gamma * t)} - 2 * e^{(-2 * \gamma * t) * \gamma * t}$$

$$T3 = 1/(\text{Sqrt}[AA^2 + 1]) * \{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, AA, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0\}\};$$

MatrixForm[T3]

$$\text{avalor3} = CC$$

$$T4 = 1/(\text{Sqrt}[BB^2 + 1]) * \{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, BB, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0\}\};$$

MatrixForm[T4]

$$\text{avalor4} = DD$$

$$s = \{\{a, b, c, d\}, \{z, f, g, h\}, \{r, j, k, q\}, \{w, n, o, p\}\};$$

MatrixForm[s]

Tr[s]

Eigenvalues[s];

Eigenvectors[s];

$$KRAUS = \text{avalor1} * T1.(s.\text{Transpose}[T1]) + \text{avalor2} * T2.(s.\text{Transpose}[T2]) + \text{avalor3} * T3.(s.\text{Transpose}[T3]) +$$

```
avalor4 * T4.(s.Transpose[T4]);  
MatrixForm[KRAUS]  
nueva = FullSimplify[KRAUS];  
MatrixForm[nueva]
```

(* Operadores de Kraus *)

```
M0 = Sqrt[avalor1] * T1;  
MatrixForm[M0]  
M1 = Sqrt[avalor2] * T2;  
MatrixForm[M1]  
M2 = Sqrt[avalor3] * T3;  
M2 = FullSimplify[M2];  
MatrixForm[M2]  
M3 = Sqrt[avalor4] * T4;  
M3 = FullSimplify[M3];  
MatrixForm[M3]
```

(* Checando a consistencia *)

```
suma = Transpose[M0].M0 + Transpose[M1].M1 + Transpose[M2].M2 +  
Transpose[M3].M3  
identidad = FullSimplify[suma];  
MatrixForm[identidad]
```

(* Passando para a base computacional *)

(* Matriz de mudanca de base B *)

```
B = {{0, 1, 0, 0}, {1/Sqrt[2], 0, 1/Sqrt[2], 0}, {-1/Sqrt[2], 0, 1/Sqrt[2], 0},
{0, 0, 0, 1}};
```

```
MatrixForm[B]
```

```
(* Transformando cada operador para a nova base *)
```

```
N0 = B.M0.Transpose[B];
```

```
N1 = B.M1.Transpose[B];
```

```
N2 = B.M2.Transpose[B];
```

```
N3 = B.M3.Transpose[B];
```

```
MatrixForm[N0]
```

```
MatrixForm[N1]
```

```
MatrixForm[N2]
```

```
MatrixForm[N3]
```

```
(* Checando a consistencia dos operadores de Kraus na nova base *)
```

```
nuevasuma = Transpose[N0].N0 + Transpose[N1].N1 + Transpose[N2].N2 +
Transpose[N3].N3
```

```
nuevaidentidad = FullSimplify[nuevasuma];
```

```
MatrixForm[nuevaidentidad]
```

```
(* Matriz densidade na nova base *)
```

```
nuevaesedete = B.nueva.Transpose[B];
```

```
pepe = FullSimplify[nuevaesedete];
```

```
MatrixForm[pepe]
```

```
nuevaese0 = B.s.Transpose[B];
```

```
otropepe = FullSimplify[nuevaese0];
```

```

MatrixForm[otropepe]
evolucion = N0.otropepe.Transpose[N0] + N1.otropepe.Transpose[N1]+
N2.otropepe.Transpose[N2]+
N3.otropepe.Transpose[N3];
resultado = FullSimplify[evolucion];
MatrixForm[resultado]

```

```
FullSimplify[evolucion - pepe]
```

(*Calculo dos coeficientes por linha na ordem pp plusplus pm plusminus *)

(* mp minusplus mm minusminus *)

$$C_{0pp} = N_0. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{1pp} = N_1. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{2pp} = N_2. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{3pp} = N_3. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{0pm} = N_0. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{1pm} = N_1. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{C2pm} = \text{N2.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{C3pm} = \text{N3.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{C0mp} = \text{N0.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{C1mp} = \text{N1.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{C2mp} = \text{N2.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{C3mp} = \text{N3.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{C0mm} = \text{N0.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{C1mm} = \text{N1.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{C2mm} = \text{N2.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{C3mm} = \text{N3.} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Apêndice B

Programa em Mathematica v.6 para Cálculo do Estado Puro Inicial, do Canal na Forma Normal e das Operações de Filtragem

(* Elaborado por Malena Hor Meyll e Fernando de Melo *)

Preliminaries

Partial Trace (Wolfran) – Modified to keep local variables local!

```
SwapParts[expr_, pos1_, pos2_] :=  
ReplacePart[#, #, {pos1, pos2}, {pos2, pos1}] & [expr]  
TraceSystem[D_, s_] :=  
Module[{Qubits, TrkM, z, q, n, M, k, p, j, b, i, Permut, c, perm, },  
  
Qubits = Reverse[Sort[s]];  
TrkM = D;  
  
z = (Dimensions[Qubits][[1]] + 1);
```

```

For[q = 1, q < z, q++,
n = Log[2, (Dimensions[TrkM][[1]])];
M = TrkM;
k = Qubits[[q]];
If[k == n,
TrkM = {};
For [p = 1, p < 2^n + 1, p = p + 2,
TrkM = Append[TrkM, Take[M[[p, All]],
{1, 2^n, 2}] + Take [M[[p + 1, All]], {2, 2^n, 2}]] ;
],
For[j = 0, j < (n - k), j++,
b = {0};
For [i = 1, i < 2^n + 1, i++,
If[(Mod[(IntegerDigits[i - 1, 2, n][[n]] +
IntegerDigits[i - 1, 2, n][[n - j - 1]]), 2])
== 1 && Count[b, i] == 0, Permut = {i,
(FromDigits[SwapParts[
(IntegerDigits[i - 1, 2, n]), {n}, {n - j - 1}], 2] + 1)}];
b = Append[b, (FromDigits[SwapParts[
(IntegerDigits[i - 1, 2, n]), {n}, {n - j - 1}], 2] + 1)];
c = Range [2^n];
perm = SwapParts[c, {i}, {(FromDigits[SwapParts[
(IntegerDigits[i - 1, 2, n]), {n}, {n - j - 1}], 2] + 1)}];

M = M[[perm, perm]];];
TrkM = {};
For [p = 1, p < 2^n + 1, p = p + 2,
TrkM = Append [TrkM, Take [M[[p, All]], {1, 2^n, 2}] +
Take [M[[p + 1, All]], {2, 2^n, 2}]] ;];];

```



```
;Return[TrkM]]
```

Tensor Product

```
CircleTimes = KroneckerProduct
```

Computational Basis

```
ket0 = {{1}, {0}};
```

```
ket1 = {{0}, {1}};
```

Sigma Matrices

```
 $\sigma = \text{Table}[\text{Table}[0, \{i, 1, 2\}, \{j, 1, 2\}], \{k, 1, 4\}];$ 
```

```
 $\sigma[[1]] = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\};$ 
```

```
 $\sigma[[2]] = \{\{0, 1\}, \{1, 0\}\};$ 
```

```
 $\sigma[[3]] = \{\{0, -i\}, \{i, 0\}\};$ 
```

```
 $\sigma[[4]] = \{\{1, 0\}, \{0, -1\}\};$ 
```

```
Phimais =  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix};$ 
```

Routines to compute the Schmidt Decomposition extraida do site <http://quantum.phys.cmu.edu/QPM/funcdef.html>

```
dyad[a_, b_] := Outer[Times, a, Conjugate[b]]
```

```
transpose[args_] := Module[{f}, If[TensorRank[List[args][[1]]] < 2,
```

```
Return[List[args][[1]], Return[Transpose[args]],
```

```
Print[Errorintransposition]]]
```

```
permno[n_] := Join[-1 + 2 * Table[i, {i, n}], 2 * Table[i, {i, n}]]
```

```
nten2oten[ntn_] := transpose[ntn, permno[TensorRank[ntn]/2]]
```

```

mat2nten[mt_, ddl_] := Module[{ddm = ddl, fmt =
Flatten[mt], jm, lnd = Length[ddl]}, For[jm = 1, jm ≤ lnd, ++jm,
If[0 == Length[ddm[[jm]]],
ddm[[jm]] = {ddl[[jm]], ddl[[jm]]}];];
Fold[Partition, fmt, Most[Reverse[Flatten[Transpose[ddm]]]]]]
mat2oten[mt_, ddl_] := nten2oten[mat2nten[mt, ddl]]
permptrace[n_, q_] := Array[If[# < (2 * q - 1), # + 2, If[# > (2 * q), #,
If[OddQ[#], 1, 2]]] &, 2 * n]
prodlist[ls_] := Product[ls[[i]], {i, Length[ls]}]
nten2mat[ntn_] := Module[{dims = Dimensions[ntn]},
Partition[Flatten[ntn], prodlist[Take[dims, -Length[dims]/2]]]]
permon[n_] := Flatten[Table[{i, i}, {i, n}] + Table[{0, n}, {n}]]
oten2nten[otn_] := transpose[otn, permon[TensorRank[otn]/2]]
oten2mat[otn_] := nten2mat[oten2nten[otn]]
partrace[mat_, q_, dl_] := Module[{t = transpose[mat2oten[mat, dl],
permptrace[Length[dl], q]]}, oten2mat[Sum[t[[i, i]],
{i, Length[t]}]]]
adjoint[mat_] := transpose[Conjugate[mat]]
ketinner[v_, w_] := adjoint[v].w
ketnorm[v_] := v/Sqrt[Conjugate[v].v]
grschm[ls_] := Module[{j, k, ln = Length[ls], ns = {}, v, w},
For[j = 1, j ≤ ln, ++j, v = ls[[j]]; w = v;
For[k = 1, k < j, ++k, w = w - ketinner[ns[[k]], v] * ns[[k]];];
ns = Append[ns, ketnorm[w]];]; ns]
ket2kten[v_, dl_] := If[Length[dl] == 1, v,
Map[ket2kten[#, Rest[dl]] &, Partition[v, Length[v]/First[dl]]]]
ketcofs[v_, b_, dl_] := Map[Flatten, Conjugate[b].ket2kten[v, dl]]
quadrn[m_] := Module[{lng = Length[m]}, If[0 == lng,
Return[Conjugate[m] * m]];

```

```

Re[Conjugate[Flatten[m]].Flatten[m]];
schmidt[ket_, dl_] := Module[{basa, bkets,
eps = 10^-16, j, list, rho, rhoa, snorm}, rho = dyad[ket, ket];
rhoa = partrace[rho, 2, dl];
basa = grschm[Eigenvalues[rhoa]];
bkets = ketcofs[ket, basa, dl];
list = {};
For[j = 1, j ≤ dl[[1]], ++j, snorm = quadn[bkets[[j]]];
If[snorm < eps, Continue[]];
AppendTo[list, {Sqrt[snorm], basa[[j]], ketnorm[bkets[[j]]}]];
list]

```

Random Density Matrix Generation - Kwiat

```

RandomDensityMatrix := Module[{TMatrix, RandomVector, RandomMatrix},
RandomVector = Table[0, {i, 1, 16}];
For[i = 1, i ≤ 16, i++, RandomVector[[i]] = Random[Real, {-1, 1}]];
TMatrix = {{RandomVector[[1]], 0, 0, 0}, {RandomVector[[2]] +
iRandomVector[[3]], RandomVector[[4]], 0, 0},
{RandomVector[[5]] + iRandomVector[[6]], RandomVector[[7]] +
iRandomVector[[8]], RandomVector[[9]], 0},
{RandomVector[[10]] + iRandomVector[[11]], RandomVector[[12]] +
iRandomVector[[13]], RandomVector[[14]] + iRandomVector[[15]],
RandomVector[[16]}}];
RandomMatrix = (Conjugate[Transpose[TMatrix]].TMatrix)/
Tr[Conjugate[Transpose[TMatrix]].TMatrix];
Return[Chop[RandomMatrix]]

```

R-Picture

```
RPicture[DensityMatrix_]:=Module[{i, j, RPictureMatrix},
RPictureMatrix = Table[0, {i, 1, 4}, {j, 1, 4}];
For[i = 1, i < 5, For[j = 1, j < 5, RPictureMatrix[[i, j]] =
Tr[( $\sigma[[i]] \otimes \sigma[[j]]$ ).DensityMatrix]; j++]; i++];
Return[Chop[RPictureMatrix]]]
```

Random Mixed State – Hilbert-Schmidt distributed

```
RandomState[Dimension_]:=Module[{rho, i, j},
rho = Table[0, {i, 1, Dimension}, {j, 1, Dimension}];
For[i = 1, i ≤ Dimension, i++,
For[j = 1, j ≤ Dimension, j++,
rho[[i, j]] = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]]+
iRandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
];
];
rho = Chop[rho.ConjugateTranspose[rho]/
Tr[rho.ConjugateTranspose[rho]]];
Return[rho];
]
```

Normal Form Evaluation

```
NormalForm[rho_, Dim_, imax_]:=Module[{i, ii, j, jj, A,
AA, rhop, Nsub, sub, u, w, v,
tr, tr0, dsub, X, SubSys, rhoOut, TDim, tiny},
Nsub = Length[Dim];
TDim = Product[Dim[[i]], {i, 1, Nsub}];
```

```

rhoOut = Table[0, {i, 1, TDim}, {j, 1, TDim}];
A = Table[IdentityMatrix[Dim[[i]], {i, 1, Nsub}];
SubSys = Table[i, {i, 1, Nsub}];
tiny = $MachineEpsilon;

tr = 1; tr0 = 2;
i = 0;
rhoOut = rho;

While[(tr0 - tr > $MachineEpsilon && i < imax), i++;
tr0 = tr;
AA = {1};
For[sub = 1, sub ≤ Nsub, sub++,
dsub = Dim[[sub]];
rhop = Table[0, {ii, 1, dsub}, {jj, 1, dsub}];
rhop = TraceSystem[rhoOut, Delete[SubSys, sub]];
{u, w, v} = SingularValueDecomposition[rhop];
X = MatrixPower[Inverse[w + tiny], 1/2].
ConjugateTranspose[u].A[[sub]];
X = Chop[X]/((Det[Chop[X]])^(1/dsub));
A[[sub]] = X;
AA = AA ⊗ A[[sub]]
];

rhoOut = Chop[AA.rho.ConjugateTranspose[AA]];
tr = Tr[rhoOut];
];
Return[{A, rhoOut, i}
]

```

Initial Pure State Density Matrix Generation

```

InitialPureState[TargetDensityMatrix_]:=
Module[{ $\rho$ 1,  $\rho$ 1EigenSystem, PureState,  $k$ },
 $\rho$ 1 = TraceSystem[TargetDensityMatrix, {2}];
 $\rho$ 1EigenSystem = Chop[EigenSystem[ $\rho$ 1]];
PureState =  $\sum_{k=1}^2$  Sqrt[ $\rho$ 1EigenSystem[[1,  $k$ ]]*
( $\rho$ 1EigenSystem[[2,  $k$ ]]  $\otimes$  ComputationalBasis[[ $k$ ]]);
Return[Chop[PureState.PureStateF3C9]]

```

Channel Determination

```

ChannelDetermination[TargetDensityMatrix_]:=
Module[{ $\phi$ , R $\phi$ , Result, TargetChannel,  $i$ ,  $j$ ,  $k$ },
 $\phi$  = Table[0, { $i$ , 1, 4}, { $j$ , 1, 4}];
R $\phi$  = Table[0, { $i$ , 1, 4}, { $j$ , 1, 4}];
 $\phi$  = InitialPureState[TargetDensityMatrix];
R $\phi$  = Chop[RPicture[ $\phi$ ]; ParameterDensityMatrix
{t1_, t2_, t3_, E11_, E12_, E13_, E21_, E22_,
E23_, E31_, E32_, E33_}:=
T = Table[Table[0, { $i$ , 1, 2}, { $j$ , 1, 2}], { $k$ , 1, 4}];
T[[1]] = ( $\sigma$ [[1]] + t1 *  $\sigma$ [[2]] + t2 *  $\sigma$ [[3]] + t3 *  $\sigma$ [[4]]);
T[[2]] = E11 *  $\sigma$ [[2]] + E21 *  $\sigma$ [[3]] + E31 *  $\sigma$ [[4]];
T[[3]] = E12 *  $\sigma$ [[2]] + E22 *  $\sigma$ [[3]] + E32 *  $\sigma$ [[4]];
T[[4]] = E13 *  $\sigma$ [[2]] + E23 *  $\sigma$ [[3]] + E33 *  $\sigma$ [[4]];
Return [(1/4) *  $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4$  R $\phi$ [[ $i$ ,  $j$ ]] * ( $\sigma$ [[ $i$ ]]  $\otimes$  T[[ $j$ ]])];
Result = Chop[Solve[{ParameterDensityMatrix
{t1, t2, t3, E11, E12, E13, E21, E22, E23, E31, E32, E33}

```

```

== TargetDensityMatrix}, {t1, t2, t3, E11, E12, E13, E21,
E22, E23, E31, E32, E33}]];
ParameterChannel[t1_, t2_, t3_, E11_, E12_, E13_, E21_, E22_,
E23_, E31_, E32_, E33_] := {{1, 0, 0, 0}, {t1, E11, E12, E13},
{t2, E21, E22, E23}, {t3, E31, E32, E33}};
TargetChannel = ReplaceAll[ParameterChannel[t1, t2, t3, E11,
E12, E13, E21, E22, E23, E31, E32, E33], Result[[1]]];
Return[TargetChannel]

```

Dual Matrix Generation - Channel acting on the First Qubit

```

DualDensityMatrixFirst[RPictureChannel_] :=
Module[{RPictureDualMatrix, TargetDualMatrix, i, j},
RPictureDualMatrix = RPictureChannel.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
TargetDualMatrix = Chop[
(1/4) *  $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4$  RPictureDualMatrix[[i, j]] * ( $\sigma[[i]] \otimes \sigma[[j]]$ )]];
Return[TargetDualMatrix]

```

Dual Matrix Generation - Channel acting on the Second Qubit

```

DualDensityMatrixSecond[RPictureChannel_] :=
Module[{RPictureDualMatrix, TargetDualMatrix, i, j},
RPictureDualMatrix =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .Transpose[RPictureChannel];
TargetDualMatrix =
Chop  $\left[ (1/4) * \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4$  RPictureDualMatrix[[i, j]] * ( $\sigma[[i]] \otimes \sigma[[j]]$ )  $\right]$ ;

```

```
Return[TargetDualMatrix]]
```

RPicture Qubit Density Matrix

```
RPictureQubit[ρ_]:=Module[{BlochVector, m},
BlochVector = Table[{0}, {i, 1, 4}];
For[m = 1, m < 5, m++,
BlochVector[[m, 1]] = Tr[ρ.σ[[m]]];
Return[Chop[BlochVector]]]
```

Qubit Density Matrix from RPicture

```
DensityMatrixQubit[RPictureQubit_]:=
Module[{DensityMatrix, i, j, k},
DensityMatrix = Table[0, {i, 1, 2}, {j, 1, 2}];
DensityMatrix = (1/2) * Sum[RPictureQubit[[k, 1]] * σ[[k]],
Return[DensityMatrix]]
```

Kraus Determination from DualMatrix

```
KrausOperatorsDM[DualMatrix_]:=Module[
{KrausTable, i, j, k, m, Eigen, Temp, Vals, Vecs, TempVec},
KrausTable = Table[IdentityMatrix[2], {i, 1, 4}];
{Vals, Vecs} = Chop[Eigensystem[2 * DualMatrix]];
Temp = Table[0, {i, 1, 2}, {j, 1, 2}];
For[m = 1, m < 5, m++,
TempVec = Normalize[Vecs[[m]]];
Temp = Sqrt[Vals[[m]]] * {{TempVec[[1]], TempVec[[3]],
{TempVec[[2]], TempVec[[4]]}};
KrausTable[[m]] = Temp;
```



```
];
Return[Chop[KrausTable]]]
```

Kraus Determination from RPicture

```
KrausOperatorsRP[RPictureChannel_]:=Module[{DualMatrix},
DualMatrix = DualDensityMatrixSecond[RPictureChannel];
Return[KrausOperatorsDM[DualMatrix]]]
```

Apply Kraus Operators

```
ApplyKraus[KrausOperatorsTable_, DensityMatrix_, Dim_] :=
Module[{EvolvedDensityMatrix, i},
EvolvedDensityMatrix = Table[0, {i, 1, Dim}, {j, 1, Dim}];
For[i = 1, i < 5, i++,
EvolvedDensityMatrix = EvolvedDensityMatrix +
KrausOperatorsTable[[i]].
DensityMatrix.KrausOperatorsTable[[i]]];
Return[Chop[EvolvedDensityMatrix]]]
```

Filtering Operations and Channel Normal Form

```
FilteringOperationsNormalChannel[DualMatrix_,
MaxIterations_] := Module[{KrausA, KrausB, An,
NormalDualMatrix, Iterations, NormalChannel},
{An, NormalDualMatrix, Iterations} =
NormalForm[DualMatrix, {2, 2}, MaxIterations];
KrausA = Transpose[Inverse[An[[2]]]];
KrausB = Inverse[An[[1]]];
NormalChannel = (RPicture[NormalDualMatrix/
```

$$\text{Tr}[\text{NormalDualMatrix}]]). \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Return[Chop[{KrausA, KrausB, NormalChannel, Iterations}]]]

B Schmidt Form and Associated Unitaries

BSchmidtUnitaryMatrices[KrausB_]:=

Module[{U1, U2, DiagonalKrausB, TotalKrausB,

χ , Aux, ket χ , DL, SDB, SchmidtBasisAket0,

SchmidtBasisAket1, SchmidtBasisBket0, SchmidtBasisBket1, UA, UB},

TotalKrausB = $\sigma[[1]] \otimes$ KrausB;

χ = Chop[TotalKrausB.Phimais.TotalKrausBF3C9/

Tr[TotalKrausB.Phimais.TotalKrausBF3C9]];

Aux = Chop[Eigensystem[χ]];

ket χ = Aux[[2, 1]];

DL = {2, 2};

SDB = Chop[FullSimplify[schmidt[ket χ , DL]]];

SchmidtBasisAket0 = {{SDB[[1, 2, 1]]}, {SDB[[1, 2, 2]]}};

SchmidtBasisAket1 = {{SDB[[2, 2, 1]]}, {SDB[[2, 2, 2]]}};

UA = Chop[(SchmidtBasisAket0 \otimes ket0F3C9 + SchmidtBasisAket1 \otimes ket1F3C9)F3C9];

SchmidtBasisBket0 = {{SDB[[1, 3, 1]]}, {SDB[[1, 3, 2]]}};

SchmidtBasisBket1 = {{SDB[[2, 3, 1]]}, {SDB[[2, 3, 2]]}};

UB = Chop[(SchmidtBasisBket0 \otimes ket0F3C9 + SchmidtBasisBket1 \otimes ket1F3C9)F3C9];

DiagonalKrausB = {{SDB[[1, 1]], 0}, {0, SDB[[2, 1]]}}/

Norm[{{SDB[[1, 1]], 0}, {0, SDB[[2, 1]]}}];

U1 = Chop[Inverse[UB]];

U2 = Chop[Inverse[Transpose[UA]]];

Return[Chop[{U1, U2, DiagonalKrausB}]]]

New Initial Pure State Ket applying A

```
AEmbedInitialPureStateKet[InitialPureStateDensityMatrix_, KrausA_] :=  
Module[{NewPureStateKet, TotalKrausA, Aux, Aux1, Aux2, Auxket},  
TotalKrausA =  $\sigma[[1]] \otimes$  KrausA;  
Aux1 = TotalKrausA.InitialPureStateDensityMatrix.TotalKrausA/  
Tr[TotalKrausA.InitialPureStateDensityMatrix.TotalKrausAF3C9];  
Aux2 = Chop[Eigensystem[Aux1]];  
Auxket = Aux2[[2, 1]];  
NewPureStateKet = {{Auxket[[1]]}, {Auxket[[2]]},  
{Auxket[[3]]}, {Auxket[[4]]}};  
Return[Chop[NewPureStateKet]]]
```

Main

```
Main[TargetDensityMatrix_, MaxIterations_] :=  
Module[{InitialPureStateKet, RPictureNormalChannel,  
DiagonalKrausB, U1, U2, Iterations,  
InitialPureStateDensityMatrix, RPictureTargetChannel,  
DualMatrix, KrausA, KrausB},  
InitialPureStateDensityMatrix = InitialPureState[TargetDensityMatrix];  
RPictureTargetChannel = ChannelDetermination[TargetDensityMatrix];  
DualMatrix = DualDensityMatrixFirst[RPictureTargetChannel];  
{KrausA, KrausB, RPictureNormalChannel, Iterations} =  
FilteringOperationsNormalChannel[DualMatrix, MaxIterations];  
InitialPureStateKet =  
AEmbedInitialPureStateKet[InitialPureStateDensityMatrix, KrausA];  
{U1, U2, DiagonalKrausB} = BSchmidtUnitaryMatrices[KrausB];  
Return[Chop[{InitialPureStateKet, RPictureNormalChannel,  
DiagonalKrausB, U1, U2, Iterations}]]]
```

Bibliografia

- [1] E. Schrödinger. Die gegenwertige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23:807–812; 823–828; 844–849, 1935.
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47(10):777–780, May 1935.
- [3] D. Bohm and Y. Aharonov. Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Phys. Rev.*, 108(4):1070–1076, Nov 1957.
- [4] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 48(8):696–702, Oct 1935.
- [5] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, 1994.
- [6] Asher Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [7] J. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1:195, 1964.
- [8] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23(15):880–884, Oct 1969.
- [9] Stuart J. Freedman and John F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28(14):938–941, Apr 1972.
- [10] D. Kielpinski, C. Monroe, and D. J. Wineland. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer. *Nature*, 417:709–711, 2002.

- [11] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.*, 73(3):565–582, Aug 2001.
- [12] Immanuel Bloch. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature Physics*, 1:23–30, 2005.
- [13] A. K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661, 1991.
- [14] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden. Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, 74:145–195, 2002.
- [15] Sítios de empresas produzindo comercialmente sistemas de criptografia quântica.: <http://www.idquantique.com>, <http://www.magicqtech.com>, <http://www.smartquantum.com>, <http://www.toshiba-europe.com>.
- [16] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895, 1993.
- [17] D. Bouwmeester, J. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390:575, 1997.
- [18] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75(24):4337–4341, Dec 1995.
- [19] D. Deutsch and R. Jozsa. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proc. Roy. Soc. London A*, 439:553–558, 1992.
- [20] Shigeki Takeuchi. Experimental demonstration of a three-qubit quantum computation algorithm using a single photon and linear optics. *Phys. Rev. A*, 62(3):032301, Aug 2000.

- [21] Stephan Gulde, Mark Riebe, Gavin P. T. Lancaster, Christoph Becher, Jürgen Eschner, Hartmut Häffner, Ferdinand Schmidt-Kaler, Isaac L. Chuang, and Rainer Blatt. Implementation of the Deutsch–Jozsa algorithm on an ion-trap quantum computer. *Nature*, 421:48–50, 2002.
- [22] Vladimir L. Ermakov and B. M. Fung. Nuclear magnetic resonance implementation of the deutsch-jozsa algorithm using different initial states. *arXiv:quant-ph/0302124*, 2003.
- [23] E. Brainis, L.-P. Lamoureaux, N. J. Cerf, Ph. Emplit, M. Haelterman, and S. Massar. Fiber-optics implementation of the Deutsch-Jozsa and Bernstein-Vazirani quantum algorithms with three qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 90(15):157902, Apr 2003.
- [24] P. W. Shor. In S. Goldwasser, editor, *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, page 124. IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, 1994.
- [25] Lieven M. K. Vandersypen, Matthias Steffen, Gregory Breyta, Costantino S. Yannoni, Mark H. Sherwood, and Isaac L. Chuang. Experimental realization of shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 414:883–887, 2001.
- [26] Wojciech Hubert Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.*, 75(3):715, 2003.
- [27] T. Yu and J. H. Eberly. Quantum open system theory: Bipartite aspects. *Phys. Rev. Lett.*, 97(14):140403, 2006.
- [28] T. Yu and J. H. Eberly. Sudden death of entanglement. *Science*, 323:598–601, 2009.

- [29] M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and L. Davidovich. Environment-induced sudden death of entanglement. *Science*, 316:579–582, 2007.
- [30] Fernando de Melo. *Emaranhamento, complementaridade e descoerência*. Tese de Doutorado, 2005.
- [31] Michael A. Nielsen and Issac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [32] M. Orszag. *Quantum Optics*. Springer, 2000.
- [33] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53(4):2046–2052, Apr 1996.
- [34] P. Kwiat, S. Barraza-Lopez, A. Stefanov, and N. Gisin. Experimental entanglement distillation and “hidden” non-locality. *Nature*, 409:1014, 2001.
- [35] Robin Blume-Kohout, Carlton M. Caves, and Ivan H. Deutsch. Climbing mount scalable: Physical resource requirements for a scalable quantum computer. *Foundations of Physics*, 32:1641, 2002.
- [36] N. J. Cerf, C. Adami, and P. Kwiat. Optical simulation of quantum logic. *Phys. Rev. A*, 57:R1477, 1998.
- [37] A. N. de Oliveira, S. P. Walborn, and C. H. Monken. Implementation of the Deutsch algorithm using polarization and transverse modes. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 7:288–292, 2005.
- [38] S. P. Walborn, M. P. Almeida, P. H. Souto Ribeiro, and C. H. Monken. Quantum information processing with hyperentangled states. *Quantum Information and Computation*, 6:336–350, 2006.

- [39] D. Boschi, S. Branca, F. DeMartini, L. Hardy, and S. Popescu. Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1121, 1998.
- [40] Jian-Wei Pan, Sara Gasparoni, Rupert Ursin, Gregor Wiehs, and Anton Zeilinger. Experimental entanglement purification of arbitrary unknown states. *Nature*, 423:417, 2003.
- [41] L. Aolita and S. P. Walborn. Quantum communication without alignment using multiple-qubit single-photon states. *Physical Review Letters*, 98(10):100501, 2007.
- [42] C. E. R. Souza, C. V. S. Borges, A. Z. Khoury, J. A. O. Huguenin, L. Aolita, and S. P. Walborn. Quantum key distribution without a shared reference frame. *Physical Review A*, 77(3):032345, 2008.
- [43] John Preskill. Lecture notes. <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/>.
- [44] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1983.
- [45] W. K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, 1998.
- [46] Johannes Courtial. Wave plates and the Pancharatnam phase. *Optics Communications*, 171:179–183, 1999.
- [47] J. B. Altepeter, E. R. Jeffrey, and P. G. Kwiat. Photonic state tomography. In P. Berman and C. Lin, editors, *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*, volume 52, page 107. Elsevier, 2005.
- [48] Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, and Phillippe H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A.*, 60:R773, 1999.

- [49] Daniel F. V. James, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Andrew G. White. Measurement of qubits. *Phys. Rev. A*, 64:052312, 2001.
- [50] K. Kraus. *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*. Springer Verlag, 1983.
- [51] H. P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002.
- [52] A. R. R. Carvalho, M. Busse, O. Brodier, C. Viviescas, and A. Buchleitner. Unravelling entanglement. *arXiv:quant-ph/0510006v1*, 2008.
- [53] Frank Verstraete, Jeroen Dehaene, and Bart DeMoor. Local filtering operations on two qubits. *Phys. Rev. A*, 64(1):010101, Jun 2001.
- [54] J. Laurat, K. S. Choi, H. Deng, C. W. Chou, and H. J. Kimble. Heralded entanglement between atomic ensembles: Preparation, decoherence, and scaling. *Physical Review Letters*, 99(18):180504, 2007.
- [55] A. Salles, F. de Melo, M. P. Almeida, M. Hor-Meyll, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and L. Davidovich. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment. *Physical Review A*, 78:022322, 2008.
- [56] R.H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation process. *Phys. Rev.*, 93:99, 1954.
- [57] M. Gross and S. Haroche. Superradiance: an essay on the theory of collective spontaneous emission. *Phys. Rep.*, 93:302–396, 1982.
- [58] D. Braun. Creation of entanglement by interaction with a common heat bath. *Phys. Rev. Lett.*, 89:277901, 2002.
- [59] M.S. Kim, Jinhyoung Lee, D. Ahn, and L. Knight. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Phys. Rev. A*, 65:040101, 2002.

- [60] L. Jakóbczyk. Entangling two qubits by dissipation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35:6383, 2002.
- [61] S. Schneider and G. J. Milburn. Entanglement in the steady state of a collective-angular momentum (Dicke) model. *Physical Review A*, 65:042107, 2002.
- [62] Jun-Hong An, Shun-Jin Wang, and Hong-Gang Luo. Entanglement production and decoherence-free subspace of two single-mode cavities embedded in a common environment. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:3579, 2005.
- [63] K. Lendi and A. J. van Wonderen. Davies theory for reservoir-induced entanglement in a bipartite system. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:279, 2007.
- [64] Z. Ficek and R. Tanaś. Entanglement induced by spontaneous emission in spatially extended two-atom systems. *arXiv:quant-ph/0302124*, 2003.
- [65] Z. Ficek and R. Tanaś. Delayed (sudden) birth of entanglement. *arXiv:quant-ph/08024287*, 2008.
- [66] L. Derkacz and L. Jakóbczyk. Vacuum-induced stationary entanglement in radiatively coupled three-level atoms. *arXiv:07105048*, 2008.
- [67] L. Jakóbczyk and A. Jamróz. Entanglement and nonlocality versus spontaneous emission in two-atom systems. *Phys. Lett. A*, 318:318, 2003.
- [68] F. Benatti, R. Floreanini, and M. Piani. Environment induced entanglement in markovian dissipative dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 91:070402, 2003.
- [69] Z. Ficek and R. Tanaś. Dark periods and revivals of entanglement in a two-qubit system. *Physical Review A*, 74:024304, 2006.
- [70] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamental of Photonics*. Wiley, 1991.
- [71] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Harcourt Academic Press, 2001.

- [72] H. Sasada and M. Okamoto. Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography. *Physical Review A*, 68:012323, 2003.
- [73] R. Tanaś Z. Ficek. Entangled states and collective nonclassical effects in two-atom systems. *Phys. Rep.*, 372:369, 2002.
- [74] M-D. Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Lin. Alg. App.*, 10:285–290, 1975.
- [75] T. Havel. Robust procedures for converting among lindblad, kraus and matrix representations of quantum dynamical semigroups. *Journal of Mathematical Physics*, 44:534–557, 2003.
- [76] J. An, S. Wang, and H. Luo. Entanglement dynamics of qubits in a common environment. *Physica A*, 382:753–764, 2007.
- [77] Ling-An Wu Kai Chen. Test for entanglement using physically observable witness operators and positive maps. *Phys. Rev. A*, 69:022312, 2004.
- [78] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [79] C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, P. Milman, and A. Z. Khoury. Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam. *Physical Review Letters*, 99(16):160401, 2007.
- [80] M. Barbieri, F. De Martini, G. Di Nepi, and P. Mataloni. Generation and characterization of Werner states and maximally entangled mixed states by a universal source of entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 92(17):177901, Apr 2004.
- [81] Peter W. Shor. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Phys. Rev. A*, 52(4):R2493–R2496, Oct 1995.
- [82] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Sandu Popescu, Benjamin Schumacher, John A. Smolin, and William K. Wootters. Purification of noisy entanglement

- and faithful teleportation via noisy channels. *Phys. Rev. Lett.*, 76(5):722–725, Jan 1996.
- [83] Isaac L. Chuang, Neil Gershenfeld, and Mark Kubinec. Experimental implementation of fast quantum searching. *Phys. Rev. Lett.*, 80(15):3408–3411, Apr 1998.
- [84] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida, and A. G. White. Experimental quantum computing without entanglement. *Physical Review Letters*, 101(20):200501, 2008.
- [85] Michael M. Wolf and J. Ignacio Cirac. Dividing quantum channels. *Communications in Mathematical Physics*, 279(1):147–168, 2008.
- [86] M. Ziman, M. Plesch, and V. Buzek. Reconstruction of superoperators from incomplete measurements. *Foundations of Physics*, 36:127, 2006.
- [87] A. Jamiolkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275 – 278, 1972.
- [88] Siendong Huang. Schmidt number for quantum operations. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 73(5):052318, 2006.
- [89] Debbie W. Leung. Choi’s proof as a recipe for quantum process tomography. *Journal of Mathematical Physics*, 44(2):528–533, 2003.
- [90] R. Werner. *Quantum Information, An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments*. Springer Tracts in Modern Physics, 2001, pp. 14.
- [91] Frank Verstraete, Jeroen Dehaene, and Bart De Moor. Lorentz singular-value decomposition and its applications to pure states of three qubits. *Phys. Rev. A*, 65(3):032308, Feb 2002.

- [92] Frank Verstraete, Jeroen Dehaene, and Bart De Moor. Normal forms and entanglement measures for multipartite quantum states. *Phys. Rev. A*, 68(1):012103, Jul 2003.
- [93] Tzu-Chieh Wei, Joseph B. Altepeter, David Branning, Paul M. Goldbart, D. F. V. James, Evan Jeffrey, Paul G. Kwiat, Swagatam Mukhopadhyay, and Nicholas A. Peters. Synthesizing arbitrary two-photon polarization mixed states. *Physical Review A*, 71(3):032329, 2005.
- [94] Berthold-Georg Englert, Christian Kurtsiefer, and Harald Weinfurter. Universal unitary gate for single-photon two-qubit states. *Phys. Rev. A*, 63(3):032303, Feb 2001.
- [95] Chuanwei Zhang. Preparation of polarization-entangled mixed states of two photons. *Phys. Rev. A*, 69(1):014304, Jan 2004.
- [96] Thomas Konrad, Fernando de Melo, Markus Tiersch, Christian Kasztelan, Adriano Arag ao, and Andreas Buchleitner. Evolution equation for quantum entanglement. *Nature Physics*, 4:99–102, 2008.
- [97] Reinhard F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40(8):4277–4281, Oct 1989.
- [98] Yong-Sheng Zhang, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. Experimental preparation of the Werner state via spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 66(6):062315, Dec 2002.
- [99] W. J. Munro, D. F. V. James, A. G. White, and P. G. Kwiat. Maximizing the entanglement of two mixed qubits. *Phys. Rev. A*, 64(3):030302, Aug 2001.
- [100] Nicholas A. Peters, Joseph B. Altepeter, David Branning, Evan R. Jeffrey, Tzu-Chieh Wei, and Paul G. Kwiat. Maximally entangled mixed states: Creation and concentration. *Phys. Rev. Lett.*, 92(13):133601, Apr 2004.

- [101] Animesh Datta, Anil Shaji, and Carlton M. Caves. Quantum discord and the power of one qubit. *Physical Review Letters*, 100(5):050502, 2008.
- [102] Zhi-Wei Wang, Xiang-Fa Zhou, Yun-Feng Huang, Yong-Sheng Zhang, Xi-Feng Ren, and Guang-Can Guo. Experimental entanglement distillation of two-qubit mixed states under local operations. *Physical Review Letters*, 96(22):220505, 2006.
- [103] J. B. Altepeter, D. Branning, E. Jeffrey, T. C. Wei, P. G. Kwiat, R. T. Thew, J. L. O'Brien, M. A. Nielsen, and A. G. White. Ancilla-assisted quantum process tomography. *Phys. Rev. Lett.*, 90(19):193601, May 2003.
- [104] Yugi Hasegawa, Rudolf Loidl, Gerald Badurek, Matthias Baron, and Helmuth Rauch. Violation of a Bell-like inequality in single-neutron interferometry. *Nature*, 425:45–48, 2003.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)