

Teletransporte quântico em múltiplos graus de liberdade de um fóton

Diney Soares Ether Júnior

Orientador : Ruynet Lima de Matos Filho

Co-orientador : Stephen Patrick Walborn

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



TELETRANSPORTE QUÂNTICO EM MÚLTIPLOS
GRAUS DE LIBERDADE DE UM FÓTON

Diney Soares Ether Júnior

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Orientador: Ruynet Lima de Matos Filho

Co-orientador: Stephen Patrick Walborn

Rio de Janeiro

Maio de 2009

Ether Júnior, Diney Soares.

E-84t Teletransporte quântico em múltiplos graus de liberdade de um fóton / Diney Soares Ether Júnior. Rio de Janeiro: UFRJ/ IF, 2009.

XII, 90f il.; 29.7cm.

Orientadores: Ruynet Lima de Matos Filho e Stephen Patrick Walborn.

Tese (doutorado) - UFRJ/ IF/ Programa de Pós Graduação em Física, 2009.

Referências Bibliográficas: f. 93-107.

1. Informação quântica. 2. Ótica quântica. 3. Teletransporte quântico. 4. Fóton paraxial I. Matos Filho, Ruynet Lima de; Walborn, Stephen Patrick II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação o em Física. III. Teletransporte Quântico em Múltiplos Graus de Liberdade de um Fóton.

Esta tese é dedicada a Deus, à minha amada mãe, ao meu amado pai, à minha amada família, aos meus amados amigos, e a todos aqueles que me ajudaram.

O meu profundo obrigado.

Resumo

Teletransporte quântico em múltiplos graus de liberdade de um fóton

Diney Soares Ether Júnior

Orientador: Ruynet Lima de Matos Filho

Co-orientador: Stephen Patrick Walborn

Resumo da tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em ciências (Física).

Neste trabalho é proposta uma extensão do protocolo de teletransporte quântico a todos os graus de liberdade de um fóton paraxial, que são o vetor de onda transversal, a frequência, e a polarização. Como todo o estado quântico é teletransportado, o protocolo é chamado de completo. Alguns exemplos são discutidos, e um esquema experimental é proposto. Além disso, propusemos um esquema simplificado que permite o teletransporte no vetor de onda transversal. Neste contexto, analisamos exemplos, comparamos as fidelidades com aquelas obtidas no limite clássico, e analisamos o caso de detectores não-pontuais.

O protocolo desenvolvido poderá ser útil em tarefas de informação quântica, pois permite a transmissão com alta fidelidade de uma grande quantidade de informação quântica codificada em múltiplos graus de liberdade de um fóton.

Palavras-chave: teletransporte quântico, campo de um único fóton, espectro angular, hiper-emaranhamento, e conversão paramétrica descendente espontânea.

Rio de Janeiro

Maio de 2009

Abstract

Quantum teleportation in multiple degrees of freedom of a single-photon

Diney Soares Ether Júnior

Orientador: Ruynet Lima de Matos Filho

Co-orientador: Stephen Patrick Walborn

Abstract da tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em ciências (Física).

In this thesis, we discuss an extension of the quantum teleportation to all the degrees of freedom of a paraxial single-photon field: the polarization, the transverse wave vector and the frequency. Our protocol is named complete since the whole quantum state of the photon is teleported. We analyze several illustrative examples and propose an experimental scheme. We also proposed a simplified experimental scheme which teleports only the quantum state codified in the transverse wave vector degree of freedom of a single-photon. In this context, fidelities are calculated for some examples and compared with the ones obtained in classical limit regime and in the case of nonpoint detectors.

Our protocol may be useful for some quantum information tasks, since it allows for the transmission with high fidelities of a huge amount of information codified in multiple degrees of freedom of a single-photon field.

Key words: quantum teleportation, single-photon field, angular spectrum, hyper-entangled states, spontaneous parametric down conversion, and sum frequency generation.

Rio de Janeiro

maio de 2009

Agradecimentos

Esta seção de agradecimentos, que foi escrita por último, marca o fim de um período de 12 anos de minha vida no Instituto de Física da U.F.R.J. Lá entrei “moleque”, e saí homem.

Nos últimos quatro anos tive a honra e a oportunidade de fazer parte, como aluno de doutorado, de um dos melhores grupos de pesquisa em Física do Brasil. A sua excelência não se dá somente pelo alto nível das publicações, mas também pelo alegre e cordial ambiente de trabalho.

Queria agradecer a todos os professores do grupo. Primeiro, agradeço ao meu orientador, o Ruynet. É verdade que tivemos problemas ao longo do caminho, e muitos deles surgiram pela minha ansiedade e titubeio. Não obstante, com a sua ajuda, sua força, sua confiança, seu respeito, e sua integridade, que sempre apareceram em nossas discussões sobre a Física e a vida, acredito que alcancei a meta estipulada, que era a realização de um bom trabalho. Ruynet, como seu querido filho Adrian diz: muito obrigado “mamma”.

Nicim, obrigado pelo carinho. Obrigado pelos ensinamentos de Física, pelo velejar na Lagoa Rodrigo de Freitas, e por você tantas vezes fazer-me lembrar de meu pai. Ausente do grupo no período de escrita da tese, fiquei particularmente emocionado quando um dia apareci, e você carinhosamente insistiu em conversar sobre o meu futuro. Você me disse: “Diney, entre e sente aqui na sala. E aí? Quais são seus planos para o futuro? Rapaz, calma.....”. Obrigado mais uma vez.

Conviver com o Luís nestes últimos quatro anos foi um prazer. Obrigado pelos ensinamentos passados ao longo dos 6 cursos que fiz sob sua orientação, e pelas conversas sobre as perspectivas de trabalho após o doutorado. Espero que embalado pela música “A Hard Day’s Night” de seu telefone (que toca nos momentos mais “oportunos”), você contagie e estimule muitos outros alunos. Um grande abraço.

Queria fazer um agradecimento especial ao meu amigo norte-americano, surfista, Rocky Balboa, e co-orientador, o Steve. Obrigado por ter me ensinado tanto. Obrigado

pelos ensinamentos sobre o significado das palavras trabalho e independência, que se manifestam em sua postura e modo de encarar a vida. A lógica do trabalho é simples: “Sem esforços, sem resultados.”. Lembro-me particularmente da história que você me contou sobre seu pai nos E.U.A.: ao invés de lhe dar um brinquedo desejado, ele o fazia realizar uma tarefa, como arrumar a lenha da fogueira ou limpar o jardim, em troca do brinquedo. Desta forma, ele o realmente educava. Fico feliz por ter colaborado, aprendido contigo, e ser seu amigo.

Agradeço aos demais professores do grupo, Paulão e Fabrício, ao professor Andreas Buchleitner de Freiburg, e aos membros de minha banca examinadora: Sebastião de Pádua, ao bacana Antônio Zelaquett, ao Paulo Américo, e ao gentil Daniel Jonathan.

Aos antigos professores Carlos Farina e Maria Antonieta. A vocês meu obrigado pela ajuda em um dos momentos mais difíceis do doutorado, o ano de 2005.

Agradeço à rapaziada “das antigas” do grupo de ótica: ao grande amigo Alexandre Tacla, ao bacaníssimo Fernando de Melo (viva cabeludo!), ao Leandro Aolita, e ao engraçado e “figura” Pablo Barberis. Também agradeço à nova geração: ao grande amigo Alejo (ãhhh!), à carinhosa Malena (por todo o carinho e palavras de incentivo), à minha querida uruguaia Adriana (talvez ff?), ao grande corredor aventureiro e bacaníssimo Bruno San Taketani, ao queridíssimo e trabalhador Osvaldo (você nos ensina a todo tempo com sua força para trabalhar! Pelas Tabelas!), ao “cumpadi” e futuro físico Saulo (torço por você!), ao forte e confiante Gabo (Quê? Quê? Fala!), ao sereno Planet, à Gabi, ao Daniel Schneider (vamos à Potá?), ao Bruno Escher, ao trabalhador e sereno Rafael Moraes, ao François, à Paula, e ao Adriano. Aprendi e me diverti com todos vocês.

Aos amados amigos e amigas do chopp “2 por 1”: Boiúna (sua presença é sempre querida por todos nós), Mari Orioli (grande beijo!), Maria Borba (querida!), Érico (você não fará isso comigo...), Tatá (valeu!), Nando (ô cara bacana!), Gracindo (Parente! Já terminou Nitzche?), Flávio Canetti (valeu DJ!), João Paulo (amigo de muitos anos), Maria João (Viva as festas juninas! Um beijo!), e a Helena. Além disso, aos amigos da vida

Serginho e Aline (ô casal bacana!), e ao alegre pessoal do monobloco e da “turma do passo” Karlinha (viva diretoria!), e Daniel (Boi-Preto!). Finalmente, agradeço à Eva Hirsh, pela ajuda no “ligar os pontos”.

Agradeço especialmente ao Felipe Sarmiento monobloco, e a Vanessa. Felipe, você foi um dos maiores incentivadores e críticos. Você abriu os meus olhos para a importância da independência financeira. Com ela é possível viver dignamente, construir uma família, e ter uma vida tranquila. Tenha certeza que um dia eu a alcançarei. Torço por você, e obrigado por tudo.

Agradeço especialmente ao meu amigo, irmão, médico, e professor Dom Haroldo Falcão pelas conversas e ensinamentos de anos e anos que sempre iluminaram meu caminho. Irmão, que Deus cuide de você e de sua família.

A minha irmã Cristina, ao Cícero, ao Dudinha, e a Pat por todas as demonstrações de amor e carinho. A minha família distante: tia Enóe, tio Sérgio, Lélia, primo Zé, tia Riva, tio Augusto, Ernesto, Belinha, Luís Otávio, e ao grande Boané, com muitas saudades.

Finalmente, ao meu pai, com muitas saudade, à Maria das Dores e à minha mãe, obrigado por tudo. Mãe, obrigado por ter me ajudado a crescer, e a virar o homem que sou. Este trabalho é dedicado a você. Eu te amo.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	O teletransporte quântico	3
1.2	O campo de um fóton	5
1.3	Motivação, objetivos, e estrutura da tese	7
1.4	Publicações	9
2	O teletransporte quântico	10
2.1	O problema	10
2.1.1	O protocolo	13
2.1.2	A medida de Bell	16
2.1.3	Observações	19
2.2	Implementações experimentais óticas	25
2.2.1	A experiência de Innsbruck: pioneirismo	25
2.2.2	O teletransporte quântico em variáveis contínuas	35
3	Fundamentos	44
3.1	Ótica de Fourier	44
3.1.1	Vetor de onda transversal e espectro angular	44
3.1.2	Propagação em meios lineares, aproximações, e exemplos	46
3.2	Mecânica quântica	47
3.2.1	Os campos de um e dois fótons	47

3.2.2	Generalizações para campos policromáticos: codificação em diferentes graus de liberdade e hiper-emaranhamento	49
3.3	A conversão paramétrica	52
3.3.1	Teoria quântica e aproximações	52
3.3.2	O estado quântico da C.P.D.E.	55
3.4	A geração de soma de frequências	57
3.4.1	Processo reverso temporal à C.P.D.E., Hamiltonianos efetivos, e estado quântico	57
3.4.2	O detector emaranhador de dois fótons (D.E.D.F.)	58
4	O teletransporte quântico completo de um fóton paraxial	63
4.1	O teletransporte quântico completo	63
4.1.1	Medida conjunta	66
4.1.2	Operação unitária, estado final, e fidelidade	72
4.2	Exemplos	76
5	Um caso mais simples: o teletransporte quântico em vetor de onda transversal	82
5.1	Teletransporte quântico em vetor de onda transversal	82
5.2	Exemplos e limite clássico	85
5.3	Detecção não-pontual, e transmissão de emaranhamento	86
6	Conclusões e perspectivas	90
A	Cálculos adicionais	108
A.1	Teletransporte quântico completo	108
A.2	Medida conjunta destrutiva versus projetiva	111

Capítulo 1

Introdução

A definição da palavra **informação** é a ação e efeito de **informar**, que, na linguagem escolástica, é dar uma **forma** a uma **matéria**. Também emprega-se, na linguagem comum, para indicar o ato pelo qual se faz conhecer alguma coisa a alguém [49]. Este ato, estudado pelas tradicionais áreas da informação¹ e computação, sofreu uma revolução na década de 80, quando físicos, em colaboração com cientistas destas áreas, propuseram a utilização da teoria quântica para o armazenamento, a transmissão, e a codificação de informação. O resultado destes estudos foi o surgimento de duas novas áreas interdisciplinares, nomeadas **informação** e **computação** quânticas, que estão atualmente em expansão [95].

A diferença fundamental entre a tradicional teoria de informação e a informação quântica é o uso do **princípio de superposição quântico**, aplicado a um ou mais sistemas físicos, para a codificação de informação. Enquanto esta era anteriormente codificada em “bits”, que são entidades discretas e binárias, isto é, que assumem somente os valores 0 ou 1, nos sistemas quânticos **toda** a informação é codificada no **estado quântico** do sistema, que geralmente pode ser escrito como a superposição dos elementos de uma base

¹A tradicional teoria da informação nasceu nas décadas de 40 e 50 com os trabalhos de Claude Shannon [113].

do espaço vetorial que o contêm. No caso de um sistema quântico de dois níveis, temos

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.1)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ sendo o conjunto dos números complexos, e $|0\rangle$ e $|1\rangle$ os elementos desta base. Esta nova unidade de codificação é chamada de “**qbit**” [95], e de fato corresponde a uma grande quantidade de bits, pois dados os números complexos α e β e uma alta precisão, é necessário um grande número de bits para descrevê-los. Todavia, de acordo com os postulados da teoria quântica [60, 121], esta quantidade enorme de informação é dita inacessível, escondida, ou “suspendida” entre os dois estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, pois ao se realizar uma medida projetiva do observável cujos autovetores são os elementos desta base, o resultado obtido será somente **um bit**, e o sistema quântico descrito pelo qbit acima sofrerá uma **transição** abrupta e irreversível (um “salto”) para um dos estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ correspondentes ao resultado obtido [60]. Em outras palavras, tanto a grande quantidade de bits como a superposição presentes no estado quântico a ser medido são destruídas no processo de medição.

A partir do princípio de superposição aplicado a sistemas simples e compostos, protocolos de transmissão de informação criptografada [10, 46], e algoritmos de computação paralela [64, 57, 58, 59] foram propostos, assim como a realização de redes quânticas de comunicação [34, 44, 33]. Neste contexto, um dos mais importantes protocolos de comunicação desenvolvidos é o **teletransporte quântico**.

1.1 O teletransporte quântico

O teletransporte quântico [11] é um protocolo de transmissão de informação quântica que foi desenvolvido pelos pesquisadores Charles Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, e William K. Woiters. Durante a sua elaboração, estes pesquisadores localizavam-se em quatro países que cobriam 8 fusos horários. Por esta razão, um dos autores, Asher Peres, comentou: “Enquanto uns dormiam, outros trabalhavam”, e

outro, Charles Bennett, disse: “O Sol nunca se pôs durante a nossa colaboração”[103].

A idéia básica deste protocolo é a transmissão de informação quântica **desconhecida**, ou **arbitrária**, entre dois sítios denominados Alice e Bob. Não obstante, conforme a etimologia da palavra teletransporte ², não ocorre a **passagem** da informação quântica entre os dois sítios: ela é destruída no sítio de Alice, e reconstruída no sítio de Bob, sem o seu **transporte direto** entre os dois sítios. De acordo com W. K. Wootters: “*It is quantum information, which cannot be copied and cannot appear at the new location without being destroyed at the old location*” [108]. De fato, para se realizar esta tarefa, a informação, que é codificada no estado quântico de um sistema, é necessariamente destruída [141] e posteriormente reconstruída a partir de **correlações quânticas**, que são estabelecidas entre os sítios compartilhando-se previamente um estado emaranhado [45, 111, 139], e **informação clássica**, que é obtida por Alice, e posteriormente enviada a Bob. Estes dois “canais” de comunicação distintos são necessários, e é justamente a necessidade do envio da informação clássica que faz com que o teletransporte satisfaça o princípio de **causalidade** da relatividade restrita [107], e que por sua vez impede a comunicação superluminal³.

²o prefixo **téle** vem do grego e significa **longe, ao longe** (**telégrafo, televisão, telefone, etc**), e o substantivo **transporte** vem do verbo latino **transportare**, que significa **levar de um lugar para o outro**. Sendo assim, teletransporte é **levar algo ao longe**.

³No antigo seriado de ficção científica da década de 60 *Star Trek*, o teletransporte aparecia como um mecanismo de envio instantâneo, isto é, superluminal, de matéria a distância. Existiam as máquinas “transportadoras”, que permitiam a “desmaterialização” de uma personagem em uma estação, digamos localizada em Marte, e seu reaparecimento instantâneo em outra na Terra. Este processo possui uma semelhança com o teletransporte quântico, que é o envio de algo sem o transporte direto entre os dois sítios, daí o “levar algo ao longe”. Não obstante, existem diferenças profundas: enquanto no *Star Trek* a matéria era destruída, e miraculosamente, reconstruída instantaneamente em um outro lugar, no teletransporte quântico é a **informação quântica**, e não o sistema (fóton, átomo, íon, etc), que é destruída, e reconstruída no outro sítio, mediante ao compartilhamento de um canal quântico e outro clássico. Por este último canal se transmite a informação clássica, que viaja a uma velocidade subluminal, e portanto impede a

A importância do protocolo de teletransporte se dá tanto no âmbito fundamental como no das aplicações. No âmbito fundamental, o protocolo demonstra que correlações quânticas acrescidas de comunicação clássica constituem um recurso poderoso, pois ele permite a transmissão de informação quântica de um sítio a outro sem o seu transporte direto. Portanto, entender a natureza das correlações quânticas se tornou uma tarefa fundamental [70]. Por outro lado, o teletransporte quântico foi aplicado nas redes de transmissão de informação criptografada, que poderão ser estendidas a longas distâncias via repetidores quânticos [22], e na arquitetura e comunicação de computadores quânticos [56].

Ao longo dos últimos doze anos, o protocolo de teletransporte quântico foi experimentalmente verificado em sistemas fotônicos [24, 23, 73, 83, 128], em íons aprisionados [106, 9, 99], em sistemas de ressonância nuclear magnética [94], em ensembles atômicos (interface luz-matéria) [114, 144], e em campos eletromagnéticos intensos [54], sendo esta última realização uma implementação da generalização do protocolo para variáveis contínuas [19], que neste caso são as quadraturas do campo. O protocolo foi também realizado a longas distâncias [86, 126], sendo uma das experiências realizada através do rio Danúbio [126]. Apesar do teletransporte ter sido implementado apenas parcialmente na maioria destes experimentos (por exemplo, em alguns deles somente alguns dos estados de Bell eram discriminados), todos representaram avanços importantes, e demonstraram o interesse da comunidade científica pelo tema.

1.2 O campo de um fóton

Em algumas das implementações experimentais fotônicas do teletransporte, o objetivo era teletransportar o estado de polarização $|\Psi\rangle$ de um fóton, que na base de polarização linear viola o princípio de **causalidade**.

$\{|H\rangle, |V\rangle\}$ é dado por

$$|\Psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle, \quad (1.2)$$

e corresponde a um qbit, expressão (1.1) ($|H\rangle \equiv |0\rangle$ e $|V\rangle \equiv |1\rangle$). Embora estas experiências tenham sido bem sucedidas, a polarização é apenas um dos graus de liberdade de um fóton. De fato, o fóton **paraxial**, que é o utilizado nestas experiências, é descrito de forma **completa**, isto é, em todos os seus **graus de liberdade**, pelo estado quântico

$$|\phi\rangle = \sum_s \int d\mathbf{q} \int d\omega u(\mathbf{q}, \omega, s) |\mathbf{q}, \omega, s\rangle, \quad (1.3)$$

onde $\mathbf{q}$, ω , e s são, respectivamente, o **vetor de onda transversal**, a **frequência**, e a **polarização**. Comparando as expressões (1.2) e (1.3), vemos que a última é muito mais rica e complexa; enquanto a polarização é uma variável discreta, que assume apenas dois valores, e corresponde a um qbit, o vetor de onda transversal e a frequência são variáveis contínuas, que permitem diferentes formas de codificação de informação. De fato, suponhamos que a amplitude $u(\mathbf{q}, \omega, s)$ em (1.3) seja uma função fatorável, isto é, os três graus de liberdade são descorrelacionados,

$$u(\mathbf{q}, \omega, s) = f(\mathbf{q}) g(\omega) \lambda_s, \quad (1.4)$$

onde $f(\mathbf{q})$ e $g(\omega)$ são funções bem comportadas, e $\lambda_s \in \mathbb{C}$. Se expandirmos f e g em uma base de seus espaços vetoriais, por exemplo a base dos polinômios de Hermite, teremos as superposições

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= \sum_{n=0, m=0}^{\infty} C_{nm} H_n \left(\frac{q_x}{\sigma} \right) H_m \left(\frac{q_y}{\sigma} \right) \exp \left[-\frac{(q_x^2 + q_y^2)}{2\sigma^2} \right], \\ g(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n H_n \left(\frac{\omega}{\beta} \right) \exp \left[-\frac{\omega^2}{2\beta^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Escolhendo convenientemente os coeficientes C_{nm} e D_n , podemos codificar informação quântica simultânea em diferentes graus de liberdade, e em dois sistemas de D-níveis, que são chamados de **qdit** [93], pois correspondem à generalização do qbit. Uma outra

possibilidade também interessante é aquela em que a amplitude $u(\mathbf{q}, \omega, s)$ **correlaciona** os diferentes graus de liberdade. Por exemplo, se

$$u(\mathbf{q}, \omega, s) = F(\mathbf{q}, \omega)\lambda_s, \quad (1.6)$$

teremos um estado emaranhado codificado entre os graus de liberdade de vetor transversal e frequência de um único fóton, que pode ser útil na criptografia quântica sem alinhamento de eixos [5, 117].

Ao longo dos últimos anos vários estudos envolvendo estes outros graus de liberdade de um fóton foram realizados, demonstrando assim sua importância e utilidade. De fato, os observáveis vetor de onda transversal e frequência (ou energia) são variáveis contínuas, isto é, seus autovalores têm um espectro contínuo, sendo portanto similares as quadraturas de campo. No âmbito da ótica quântica o vetor de onda transversal foi utilizado na manipulação de correlações espaciais transversais de fótons [91], que permitiram a verificação de efeitos quânticos genuínos, como o anti-agrupamento espacial de fótons [97, 31], a interferometria Hong-Ou-Mandel multimodal [130], o comprimento de de Broglie de um bi-fóton [50], etc. Por outro lado, na área de informação quântica, o vetor de onda transversal foi utilizado na criptografia [133], e na primeira medição experimental direta, isto é, sem a reconstrução tomográfica, de um quantificador de emaranhamento quântico, a concorrência [134]. A frequência tem sido bastante utilizada na geração de emaranhamento dos tipos energia-tempo [53] e time-bin [123, 21], assim como na criptografia [125, 4].

1.3 Motivação, objetivos, e estrutura da tese

Devido a todas as considerações acima discutidas, neste trabalho proporemos a extensão do protocolo de teletransporte quântico para todos os graus de liberdade de um fóton paraxial. Em outras palavras, estudaremos o **teletransporte quântico completo de um fóton paraxial**, isto é, o teletransporte de todo o seu estado quântico, que é codificado em todos

os graus de liberdade: o vetor de onda transversal, a frequência, e a polarização. Atualmente, o teletransporte quântico completo de um objeto quântico macroscópico, ou até mesmo mesoscópico, isto é, formado por algumas centenas de átomos, ainda é uma tarefa descrita somente em livros e filmes de ficção científica. No entanto, ainda poderíamos nos perguntar como realizar o teletransporte quântico completo de um objeto microscópico “simples”, como o fóton paraxial. Como se faz para teletransportá-lo completamente? Quais são os recursos necessários? Seria este teletransporte útil? Como realizá-lo experimentalmente? Caso o arranjo experimental seja de difícil implementação experimental, ainda seria possível teletransportar somente o estado codificado em uma das variáveis contínuas, digamos o vetor de onda transversal? Neste trabalho responderemos a estas questões.

No capítulo 2, discutiremos o protocolo de teletransporte quântico, e duas de suas implementações óticas, a experiência de Innsbruck [24] e o teletransporte em variáveis contínuas [54].

No capítulo 3, apresentaremos alguns conceitos importantes da ótica de Fourier, como o vetor de onda transversal e o espectro angular de um campo, e os relacionaremos aos estados dos campos quânticos de um e dois fótons paraxiais. Posteriormente, discutiremos o fenômeno não-linear da conversão paramétrica descendente espontânea (C.P.D.E.), que é a forma atualmente mais utilizada para a geração de dois fótons, e seu reverso temporal, a geração de soma de frequências (G.S.F.), que é parte importante de um detector emaranhador de dois fótons (D.E.D.F.).

No capítulo 4, utilizaremos os conceitos desenvolvidos para propor o teletransporte quântico completo de um fóton paraxial. Para realizar esta tarefa, Alice e Bob compartilharão um estado hiper-emaranhado codificado em dois fótons, e Alice utilizará um D.E.D.F. em sua medida conjunta. Analisaremos alguns exemplos que demonstram a utilidade do teletransporte, e proporemos um esquema experimental.

No capítulo 5, simplificaremos o esquema experimental proposto no capítulo anterior

e analisaremos um esquema que visa teletransportar somente o estado quântico de um fóton paraxial codificado no grau de liberdade contínuo de vetor de onda transversal. Analisaremos alguns exemplos, o limite clássico, o caso de detectores não-pontuais, e a transferência de emaranhamento entre diferentes frequências.

No capítulo 6, trataremos das perspectivas e conclusões deste trabalho.

Incluimos um apêndice onde encontram-se algumas passagens matemáticas, e uma comparação entre a medida destrutiva realizada por Alice e uma medida projetiva correspondente.

1.4 Publicações

Abaixo incluimos uma lista dos trabalhos desenvolvidos ao longo do período de doutoramento.

- ETHER, D. S., WALBORN, S. P., ZAGURY, N. Complete teleportation of a paraxial single-photon field. *Physical Review A*, v.79, n.3, 2009, p.032305.
- WALBORN, S. P., ETHER, D. S., DE MATOS FILHO, R. L., ZAGURY, N. Quantum teleportation of the angular spectrum of a single-photon field. *Physical Review A*, v.76, n.3, 2007, p.033801.
- ETHER, D. S., SOUTO RIBEIRO, P. H., MONKEN, C. H., DE MATOS FILHO, R. L. Effects of spatial transverse correlations in second-harmonic generation. *Physical Review A*, v.73, n.5, 2006, p.053819.

Capítulo 2

O teletransporte quântico

Neste capítulo apresentaremos o teletransporte quântico [11], assim como sua primeira implementação experimental [24].

2.1 O problema

Observemos a Figura 2.1. Um remetente, tradicionalmente chamado de Alice, recebeu **um** sistema quântico u no estado **desconhecido**¹

$$|\psi\rangle_u = \alpha |0\rangle_u + \beta |1\rangle_u, \quad (2.1)$$

e deseja transmiti-lo a Bob, o destinatário, cujo endereço é também **desconhecido**. Como realizar esta tarefa²?

Como possíveis soluções, Alice poderia:

1. Enviar o sistema diretamente a Bob. Caso seja difícil enviá-lo, Alice optaria por enviar um sistema ancilar i . De fato, dado este sistema em um estado padrão $|\phi_0\rangle_i$,

¹Neste capítulo trataremos somente de sistemas quânticos de dois níveis.

²Notem que o estado é dado pela expressão (2.1) para o **preparador**, que é o ente que o construiu, e portanto o conhece. Todavia, na **perspectiva de Alice**, o estado quântico de seu sistema é a mistura completamente aleatória $\mathbf{I}^u/2$, onde $\mathbf{I}^u$ é o operador identidade correspondente, e que representa seu total desconhecimento, ou “ignorância total”, sobre o estado preparado.

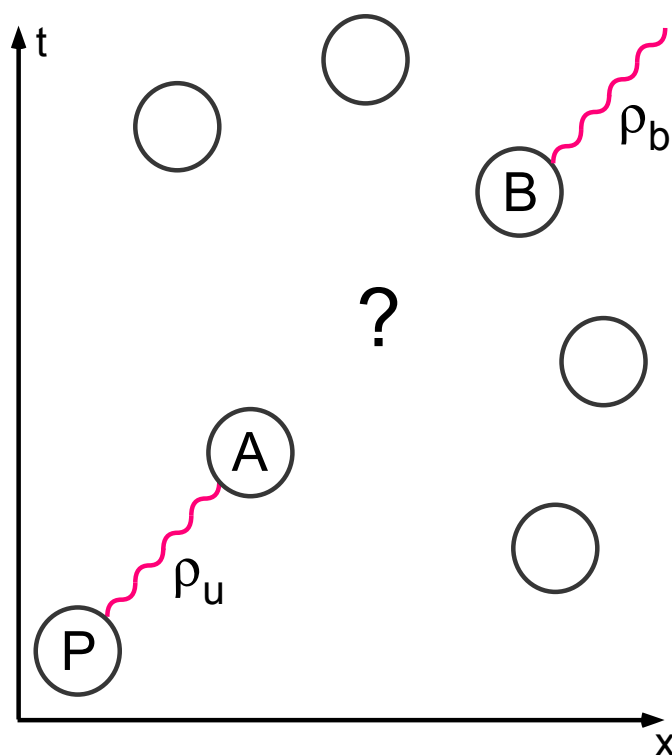


Figura 2.1: Diagrama t versus x que representa o problema. Alice recebe de um preparador P o sistema quântico u no estado $\varrho_u = |\psi\rangle_u \langle\psi|_u$ que deseja enviar a Bob. Todavia, Alice não sabe nem o paradeiro de Bob, que pode ser um dos diversos círculos da figura, nem o estado ϱ_u de seu sistema.

isto é, conhecido, Alice poderia interagí-lo unitariamente com seu sistema no estado desconhecido $|\psi\rangle_u$ via a operação de troca $\mathbf{U}_s$ (SWAP),

$$\mathbf{U}_s(|\psi\rangle_u |\phi_0\rangle_i) = |\phi_0\rangle_u |\psi\rangle_i. \quad (2.2)$$

Posteriormente, Alice enviaria o sistema ancilar a Bob, que o interagiria via a operação inversa $\mathbf{U}_s^\dagger$ com seu sistema preparado no estado conhecido $|\phi_0\rangle_b$,

$$\mathbf{U}_s^\dagger(|\phi_0\rangle_b |\psi\rangle_i) = |\psi\rangle_b |\phi_0\rangle_i, \quad (2.3)$$

e desse modo o estado $|\psi\rangle$ desconhecido de Alice seria transmitido a Bob.

2. Determinar seu estado quântico, e posteriormente enviar a Bob a informação necessária para reconstruí-lo. Por desconhecer o paradeiro de Bob, Alice realizaria inúmeras cópias da informação obtida, e a transmitiria para todos os endereços possíveis.

Enquanto a primeira tentativa malogra por Alice desconhecer o paradeiro de Bob, e pelo fato de sistemas quânticos serem **frágeis** sob a ação do meio ambiente [96], de modo que Bob recebe o sistema ancilar corrompido, isto é, sem as suas propriedades quânticas (por exemplo, sem as suas coerências), a segunda fracassa pela razão de não ser possível determinar o estado quântico desconhecido [35]. De fato, Alice possui **um** sistema quântico, ou em outras palavras, uma **única cópia** deste sistema. Ao tentar determinar seu estado, Alice atuará sobre ele, isto é, o **medirá**. Todavia, como discutimos acima, esta medida projetiva provocará uma “transição abrupta do estado do sistema para um dos autovetores do observável correspondente”. Ou seja, apesar de Alice obter uma informação parcial neste procedimento, o sistema é irreversivelmente e aleatoriamente modificado. A informação codificada no estado quântico desconhecido é irremediavelmente perdida, e não poderá ser recuperada. Reconhecendo esta limitação, Alice poderia copiar, ou **clonar**, o estado quântico desconhecido muitas vezes, e medir cada um dos constituintes deste ensemble. Alice obteria informações parciais a cada medida, que a permitiriam obter o estado quântico, ou aproximá-lo, após um grande número delas. No entanto, este

procedimento fracassa pela existência do **teorema da não-clonagem** [141], que impede clonagem perfeita de um estado quântico **desconhecido**.³

A solução deste problema foi obtida através do protocolo de teletransporte quântico, que descreveremos a seguir.

2.1.1 O protocolo

Observemos a Figura 2.2. Antes da comunicação se estabelecer, Alice e Bob compartilham dois sistemas a e b descritos no estado quântico

$$|\psi^-\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{ab} - |10\rangle_{ab}). \quad (2.4)$$

Este estado pertence a um importante conjunto de estados quânticos, os **estados de Bell**, que são dados por

$$\begin{aligned} |\phi^+\rangle_{ab} &= (|00\rangle_{ab} + |11\rangle_{ab})/\sqrt{2}, \\ |\phi^-\rangle_{ab} &= (|00\rangle_{ab} - |11\rangle_{ab})/\sqrt{2}, \\ |\psi^+\rangle_{ab} &= (|01\rangle_{ab} + |10\rangle_{ab})/\sqrt{2}, \\ |\psi^-\rangle_{ab} &= (|01\rangle_{ab} - |10\rangle_{ab})/\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

e formam uma base no espaço de Hilbert conjunto dos sistemas a e b . Após Alice receber o estado desconhecido (2.1), o estado inicial será dado então por

$$\begin{aligned} |\psi_I\rangle &= |\psi\rangle_u |\psi^-\rangle_{ab} \\ &= (\alpha |0\rangle_u + \beta |1\rangle_u) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{ab} - |10\rangle_{ab}) \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

que é um estado produto tensorial entre u e ab : o sistema u de Alice é **descorrelacionado** do sistema ab [118]. Reescrevendo o estado do subsistema ua na base dos estados de Bell

³Notem que o estado é desconhecido. A clonagem de um estado conhecido é obviamente permitida.

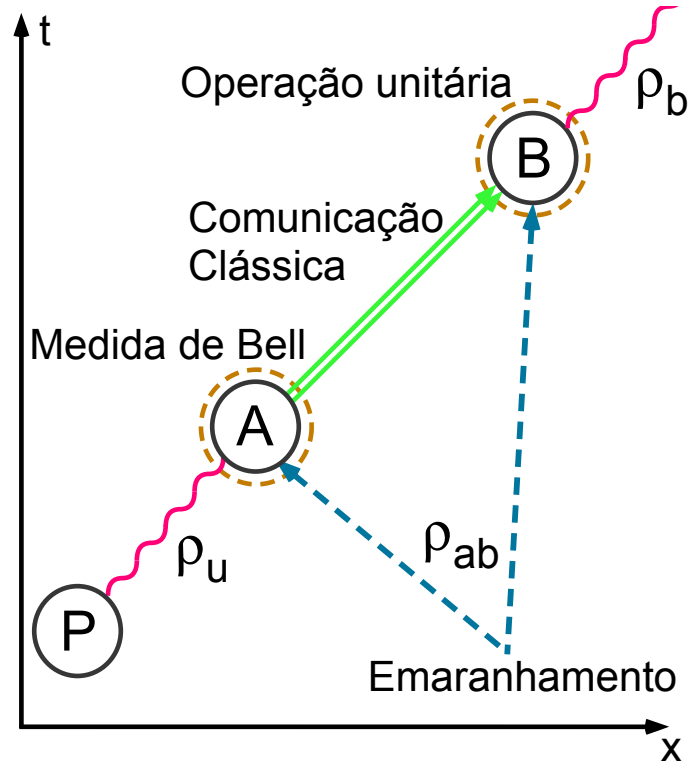


Figura 2.2: Diagrama t versus x que ilustra o protocolo de teletransporte. Após o compartilhamento com Bob do sistema ab preparado no estado emaranhado $\varrho_{ab} = |\psi^-\rangle_{ab}\langle\psi^-|_{ab}$, Alice recebe o sistema u , e realiza sobre ele e o sistema a uma medida de Bell, cujos resultados são enviados a Bob por um canal de comunicação clássica. De acordo com os resultados obtidos, Bob realiza uma operação unitária, e recupera o estado do sistema u em seu sistema. No caso em que Alice e Bob compartilham um par de Bell, e dois bits são enviados, temos $\varrho_b = \varrho_u$.

deste espaço, teremos

$$\begin{aligned} |\psi_I\rangle = & |\phi^+\rangle_{ua} (\alpha |1\rangle_b - \beta |0\rangle_b)/2 + |\phi^-\rangle_{ua} (\alpha |1\rangle_b + \beta |0\rangle_b)/2 \\ & - |\psi^+\rangle_{ua} (\alpha |0\rangle_b - \beta |1\rangle_b)/2 - |\psi^-\rangle_{ua} (\alpha |0\rangle_b + \beta |1\rangle_b)/2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nesta etapa, Alice realiza uma **medida de Bell** no subsistema ua , que o projeta em um dos estados de Bell (2.5). Aplicando os postulados da mecânica quântica ao estado acima, vemos que esta medida projeta com iguais probabilidades o estado do sistema de Bob em uma de quatro superposições de $|0\rangle_b$ e $|1\rangle_b$, dependendo do resultado da medida. Por exemplo, se o resultado da medida corresponder ao estado $|\phi^+\rangle_{ua}$, o estado do sistema de Bob será projetado em $\alpha |1\rangle_b - \beta |0\rangle_b$. Após a obtenção do resultado da medida, Alice o **comunica** a Bob por meio de um **canal de comunicação clássico**.⁴

A etapa final consiste em Bob realizar uma operação unitária **U** no estado de seu sistema, **condicionada** aos resultados recebidos na comunicação com Alice. Não haverá dúvidas sobre qual operação realizar, pois, como veremos abaixo, cada resultado da medida de Alice corresponde a uma operação unitária distinta. Por exemplo, no caso acima descrito em que o estado de Bob é igual a $\alpha |1\rangle_b - \beta |0\rangle_b$, ele aplicará a operação $\sigma_Z \sigma_X$, onde σ_Z e σ_X são duas das matrizes de Pauli, de modo que

$$(\sigma_Z \sigma_X)(\alpha |1\rangle_b - \beta |0\rangle_b) = \sigma_Z(\alpha |0\rangle_b - \beta |1\rangle_b) = \alpha |0\rangle_b + \beta |1\rangle_b,$$

que corresponde a uma **cópia** do estado desconhecido recebido por Alice: a tarefa foi realizada com sucesso. Na Tabela 2.1, indicamos as probabilidades e as projeções correspondentes a menos de fases globais irrelevantes, assim como as operações unitárias condicionadas de Bob.

⁴Um canal é dito “clássico” quando permite a transmissão de bits. Como veremos adiante, dois bits serão obtidos por Alice e enviados a Bob.

<i>probabilidade</i>	<i>sistema ua</i>	<i>sistema b</i>	<i>operação $\mathbf{U}$</i>
1/4	$ \phi^+\rangle_{ua}$	$\alpha 1\rangle_b - \beta 0\rangle_b$	$\sigma_Z \sigma_X$
1/4	$ \phi^-\rangle_{ua}$	$\alpha 1\rangle_b + \beta 0\rangle_b$	σ_X
1/4	$ \psi^+\rangle_{ua}$	$\alpha 0\rangle_b - \beta 1\rangle_b$	σ_Z
1/4	$ \psi^-\rangle_{ua}$	$\alpha 0\rangle_b + \beta 1\rangle_b$	$\mathbf{1}$

Tabela 2.1: Probabilidades de medida, projeções dos sistema ua e b , e operações unitárias de Bob.

2.1.2 A medida de Bell

Como se dá a medida de Bell? Quais são os resultados obtidos? Como realizá-la? Para respondermos a estas perguntas, analisemos esta medida com mais detalhes, e os recursos necessários para implementá-la. Os estados de Bell (2.5) formam uma base no espaço vetorial conjunto ua , que é formado pela reunião dos espaços dos sistemas u e a . Portanto, é de se esperar que eles sejam autovetores de um observável, ou mais geralmente, autovetores comuns de um **conjunto completo de observáveis que comutam** (C.C.O.C.). Que observáveis são estes e quais são as suas interpretações físicas? Estes observáveis são [37]

$$\begin{aligned} \sigma_Z^u \sigma_Z^a, \\ \sigma_X^u \sigma_X^a, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde os índices u e a designam as matrizes de Pauli σ_Z e σ_X correspondentes aos subsistemas u e a , respectivamente. Ao realizarmos uma medida de $\sigma_Z^u \sigma_Z^a$ sobre o sistema ua em um dos estados de Bell, obteremos informação sobre o valor da **paridade** deste estado: os valores encontrados são iguais ou opostos? Por outro lado, ao medirmos $\sigma_X^u \sigma_X^a$, obteremos informação sobre a **fase** (+/-) da superposição. Na Tabela abaixo, indicamos os autovalores, isto é os resultados das medidas destes observáveis, correspondentes a cada um dos estados (2.5). Enquanto a medida do primeiro observável realiza a distinção

ϕ/ψ , a segunda diferencia o sinal $+/-$, permitindo assim a distinção dos quatro estado de Bell. Esta distinção corresponde à **determinação do estado do sistema ua após a medida**, que é obtida na medição de um C.C.O.C. [119] (o sistema ua é projetado em um dos estados de Bell). Além disso, notemos que a medida simultânea destes observáveis

<i>Estado de Bell</i>	$\sigma_Z^u \sigma_Z^a$	$\sigma_X^u \sigma_X^a$
$ \phi^+\rangle_{ua}$	1	1
$ \phi^-\rangle_{ua}$	1	-1
$ \psi^+\rangle_{ua}$	-1	1
$ \psi^-\rangle_{ua}$	-1	-1

Tabela 2.2: Estados de Bell e autovalores de $\sigma_Z^u \sigma_Z^a$ e $\sigma_X^u \sigma_X^a$ correspondentes.

não nos fornece informação **individual** sobre o sistema u ou a . Por exemplo, suponhamos que os observáveis **locais**⁵ $\sigma_Z^u \otimes \mathbb{I}^a$ e $\mathbb{I}^u \otimes \sigma_Z^a$, onde $\mathbb{I}^u$ e $\mathbb{I}^a$ são as respectivas identidades nos sistemas u e a , fossem medidos. Obteríamos resultados em cada um dos sistemas **individualmente**, isto é, os valores de σ_Z^u e σ_Z^a , que poderiam ser combinados para obter o valor do bit de paridade. No entanto, estes observáveis são incompatíveis com $\sigma_X^u \sigma_X^a$, de modo que é impossível medí-los sem perturbar o valor o bit de fase. Analogamente, poderíamos medir $\sigma_X^u \otimes \mathbb{I}^a$ e $\mathbb{I}^u \otimes \sigma_X^a$ nos dois sistemas u e a , combinar os resultados, e obter o bit de fase. Todavia, não seria possível obter o valor do bit de paridade, pois estes últimos observáveis locais são incompatíveis com $\sigma_Z^u \sigma_Z^a$. Sendo assim, a única forma de obter a informação simultânea sobre os valores dos bits de paridade e fase é medir o C.O.C.C. $\{\sigma_Z^u \sigma_Z^a, \sigma_X^u \sigma_X^a\}$, o que implica em não obter informação individual sobre os sistemas. Por estas razões, dizemos que a medida de Bell é **global** ou **conjunta** sobre os sistemas u e a .

⁵A palavra local é aqui empregada no sentido de um observável que atua no **espaço de Hilbert** de um dos sistemas, u **ou** a , e portanto não deve ser confundida com o conceito físico de **local**, que concerne o lugar **espacial**.

Finalmente, para analisarmos a implementação da medida de Bell, notemos que os projetores da base conjunta do C.C.O.C. $\{\sigma_Z^u \sigma_Z^a, \sigma_X^u \sigma_X^a\}$, que é a base de Bell, podem ser escritos em termos dos projetores da base computacional do sistema ua . De fato, se utilizarmos a operação unitária $\mathbf{U}$, definida como

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_H \mathbf{U}_{\text{CNOT}}, \quad (2.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_H &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_X^u + \sigma_Z^u) \otimes \mathbf{I}^a, \\ \mathbf{U}_{\text{CNOT}} &= |0\rangle_u \langle 0|_u \otimes \mathbf{I}^a + |1\rangle_u \langle 1|_u \otimes \sigma_X^a, \end{aligned} \quad (2.10)$$

teremos a correspondência biunívoca entre os projetores das bases de Bell e computacional:

$$\begin{aligned} |00\rangle_{ua} \langle 00|_{ua} &= \mathbf{U} |\phi^+\rangle_{ua} \langle \phi^+|_{ua} \mathbf{U}^\dagger, \\ |10\rangle_{ua} \langle 10|_{ua} &= \mathbf{U} |\phi^-\rangle_{ua} \langle \phi^-|_{ua} \mathbf{U}^\dagger, \\ |01\rangle_{ua} \langle 01|_{ua} &= \mathbf{U} |\psi^+\rangle_{ua} \langle \psi^+|_{ua} \mathbf{U}^\dagger, \\ |11\rangle_{ua} \langle 11|_{ua} &= \mathbf{U} |\psi^-\rangle_{ua} \langle \psi^-|_{ua} \mathbf{U}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Vemos então que, após a operação unitária $\mathbf{U}$, a medida do C.C.O.C. $\{\sigma_Z^u \sigma_Z^a, \sigma_X^u \sigma_X^a\}$ é equivalente à medida conjunta dos observáveis **locais** $\sigma_Z^u \otimes \mathbf{I}^a$ e $\mathbf{I}^u \otimes \sigma_Z^a$. Em outras palavras, ao invés de medir os observáveis conjuntos $\{\sigma_Z^u \sigma_Z^a, \sigma_X^u \sigma_X^a\}$, aplica-se $\mathbf{U}$ sobre o sistema ua , e mede-se os observáveis locais $\sigma_Z^u \otimes \mathbf{I}^a$ e $\mathbf{I}^u \otimes \sigma_Z^a$: os dois bits de fase e paridade são obtidos nas medidas de σ_Z^u e σ_Z^a , respectivamente. De acordo com as expressões (2.9) e (2.10), notemos que $\mathbf{U}$ é o produto de duas operações unitárias distintas: enquanto $\mathbf{U}_H$, que é chamada de **porta de Hadamard**, é uma operação local sobre o sistema u , $\mathbf{U}_{\text{CNOT}}$, ou **porta não-controlada**, é uma operação **conjunta** sobre o sistema ua , que altera o valor do bit do sistema a , o bit **alvo**, dependendo do valor do bit do sistema u , o bit de **controle**.

Em resumo, a quantidade de informação extraída pela medida de Bell é igual **dois bits**, e, no contexto do teletransporte, esta é a informação a ser enviada a Bob através de um canal de comunicação clássico.

2.1.3 Observações

A discussão acima nos mostra que o teletransporte é um protocolo de transmissão de informação quântica que utiliza dois canais de comunicação **distintos**: (i) um canal quântico, que é o estado emaranhado compartilhado, e que define as correlações quânticas entre Alice e Bob (ii) um canal de comunicação clássico, por onde serão enviados os dois bits obtidos na medida de Bell. Simbolicamente, representamos esta **separação** da informação quântica em dois canais pela relação “1 qbit = 1 ebit + 2 bits”, onde 1 qbit é a quantidade de informação a ser enviada, 1 ebit é uma unidade de informação que corresponde a um par de Bell [12], e 2 bits é a quantidade de informação a ser enviada pelo canal clássico.

Poderíamos nos questionar sobre a **necessidade** e a **qualidade** destes dois canais de comunicação na realização do teletransporte. Por exemplo, caso um canal não seja utilizado, funcionaria corretamente o protocolo? O que aconteceria se os canais fossem ruidosos, de modo a ocorrerem perdas na transmissão de informação? Para respondermos a estas perguntas, primeiramente definamos uma medida do **sucesso** do teletransporte, isto é, definamos uma quantidade que nos indique quão diferentes são os estados inicial e final dos sistemas u e b . Consideremos então a **fidelidade** [96, 72], que será dada por

$$\mathcal{F}(|\psi\rangle_u, \varrho_b) \equiv \sqrt{\langle \psi |_u \varrho_b |\psi\rangle_u} = \sqrt{\langle \varrho_b \rangle_u} \quad (2.12)$$

no caso em que o estado inicial $|\psi\rangle_u$ é puro, e ϱ_b é o estado final do sistema b . Além disso, definamos a **fidelidade média**, que a fidelidade acima ponderada sobre todos os estados puros⁶ do sistema u ,

$$\bar{\mathcal{F}} = \langle \mathcal{F} \rangle_{|\psi\rangle_u}, \quad (2.13)$$

⁶A limitação da média sob estados puros é justificada pela hipótese razoável de que o prepa-

e que nos dá uma medida do sucesso ou qualidade do teletransporte **independente** do estado desconhecido do sistema u . Notemos que estas quantidades são valores **médios**, isto é, definidas sobre um ensemble de sistemas idênticos, e portanto impossíveis de serem determinadas no caso discutido acima, em que Alice recebe uma única cópia do sistema quântico. De fato, para determinar estas quantidades, Alice deveria receber um ensemble de cópias de seu sistema e subdividi-lo em dois grupos: enquanto o primeiro seria utilizado para realizar um procedimento tomográfico que a permitiria determinar seu estado com certo erro experimental, o segundo seria enviado por teletransporte a Bob, que também realizaria uma tomografia, e portanto determinaria aproximadamente o estado teletransportado. Comparando os dados obtidos, Alice e Bob poderiam calcular a fidelidade. Finalmente, notemos que é conveniente calcular as fidelidades acima reescrevendo os coeficientes α e β do estado desconhecido (2.1) do sistema u na forma

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos \frac{\theta}{2}, \\ \beta &= e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2},\end{aligned}\tag{2.14}$$

de modo que a fidelidade será dada por $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\theta, \phi, \varrho_b)$, e a fidelidade média por

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}(\theta, \phi, \varrho_b) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.\tag{2.15}$$

Suponhamos que Alice realize a medida de Bell, e envie os dois bits extraídos a Bob através de um canal de comunicação clássico ruidoso, de modo que Bob os receba, mas não consiga lê-los⁷. Nesta situação, qual é o estado teletransportado⁸?

rador tem um alto controle sob o sistema u , de modo a conseguir prepará-lo em um estado com um alto grau de pureza.

⁷Dizemos que, na perspectiva de Bob, a medida de Alice é **não lida**, pois Bob sabe que ela a realizou, mas ele desconhece seu resultado.

⁸Notemos que esta pergunta é feita sob a perspectiva do **preparador**, que conhece o estado enviado a Alice e deseja transmiti-lo. Na perspectiva de Bob, o estado de seu sistema é a mistura estatística completamente aleatória $\varrho_b = \mathbf{I}^b/2$, onde $\mathbf{I}^b$ é o operador identidade, e que representa sua “ignorância total”.

Observando a Tabela 2.1, vemos que o estado do sistema de Bob será dado por uma soma de todas as possíveis superposições de $|0\rangle_b$ e $|1\rangle_b$ ponderada pela probabilidade de ocorrência de cada uma delas, que é igual a $1/4$, ou seja, pelo operador densidade

$$\begin{aligned}\rho_b &= \frac{1}{4}[(\alpha|1\rangle_b - \beta|0\rangle_b)(\alpha^*\langle 1|_b - \beta^*\langle 0|_b) + (\alpha|1\rangle_b + \beta|0\rangle_b)(\alpha^*\langle 1|_b + \beta^*\langle 0|_b) \\ &\quad + (\alpha|0\rangle_b - \beta|1\rangle_b)(\alpha^*\langle 0|_b - \beta^*\langle 1|_b) + (\alpha|0\rangle_b + \beta|1\rangle_b)(\alpha^*\langle 0|_b + \beta^*\langle 1|_b)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{I}^b,\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde $\mathbf{I}^b$ é o operador identidade no sistema b . Vemos então que o estado teletransportado é a mistura estatística completamente aleatória, cuja fidelidade e fidelidade média em relação a estado inicial (2.1) são dadas por

$$\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707.\tag{2.17}$$

De fato, este caso é análogo à situação em que após receber um ensemble de sistemas preparados no estado puro desconhecido (2.1), Bob tenta descobrir este estado “chutando” a mistura completamente aleatória. A medida de acerto será dada pela fidelidade, que é igual a $1/\sqrt{2}$ [105].

Um segundo exemplo é o caso em que Bob recebe os dois bits de Alice, mas somente **um** bit é conhecido [36]. Em outras palavras, suponhamos que Bob sabe o resultado do bit de paridade, digamos -1 , mas desconhece o valor do bit de fase. Novamente, qual é o estado teletransportado? Se observarmos a Tabela 2.1, veremos que o estado do sistema de Bob será dado por uma soma das possibilidades correspondentes aos estados $|\psi^+\rangle_{ua}$ ou $|\psi^-\rangle_{ua}$, ponderadas pelas probabilidades de ocorrência, que são iguais a $1/2$,

$$\begin{aligned}\rho_b &= \frac{1}{2}(\alpha|0\rangle_b - \beta|1\rangle_b)(\alpha^*\langle 0|_b - \beta^*\langle 1|_b) + \frac{1}{2}(\alpha|0\rangle_b + \beta|1\rangle_b)(\alpha^*\langle 0|_b + \beta^*\langle 1|_b) \\ &= |\alpha|^2|0\rangle_b\langle 0|_b + |\beta|^2|1\rangle_b\langle 1|_b.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Este estado corresponde a situação em que as **populações** do estado quântico desconhecido são transmitidas, mas as **coerências** são perdidas. A fidelidade e a fidelidade média

serão dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\theta) &= \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}, \\ \bar{\mathcal{F}} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta} \sin \theta d\theta \approx 0.812.\end{aligned}\quad (2.19)$$

A situação acima é análoga ao caso em que após receber um ensemble de sistemas preparados em um estado puro desconhecido (2.1), Bob realiza uma medida projetiva sobre estes sistemas ao invés de adivinhar seu estado [105]. De fato, escolhendo o observável σ_Z , o estado do ensemble após a medida será igual a

$$\rho_b = |\alpha|^2 |0\rangle_b \langle 0|_b + |\beta|^2 |1\rangle_b \langle 1|_b, \quad (2.20)$$

que coincide com (2.18). Sendo assim, ao calcularmos a fidelidade e fidelidade média entre este estado e aquele da Eq.(2.1), chegaremos aos mesmos resultados (2.19). Além disso, como demonstrado em [36, 104], esta situação também é análoga ao caso em que Alice e Bob compartilham um estado separável, isto é, **desemaranhado**, e dois bits são enviados, de modo que o valor $\bar{\mathcal{F}} \approx 0.812$ define o **limite clássico**, isto é, o melhor que se faz sem a utilização de emaranhamento⁹.

Comparando estes dois exemplos, vemos que a qualidade do teletransporte é pior no caso em que Bob não lê nenhum bit enviado do que naquele em que somente um bit é lido: o teletransporte depende da utilização e da qualidade dos dois canais de comunicação envolvidos, e para que o teletransporte funcione corretamente é necessário o envio de **dois bits** de informação, que correspondem aos resultados das medidas dos observáveis paridade e fase. De fato, a natureza destes bits é bem diferente: enquanto o bit de paridade nos indica uma correlação **clássica**¹⁰ entre os sistemas u e a , isto é, se simplesmente

⁹Notemos que a definição de fidelidade aqui utilizada, Eq. (2.12), é diferente daquela utilizada nestes trabalhos (de fato, esta fidelidade é a raiz quadrada da outra), de modo que os resultados para a fidelidade e fidelidade média são diferentes. Quando se utiliza a definição proposta pelos autores em [36, 104], chega-se ao limite clássico $\bar{\mathcal{F}} = 2/3$.

¹⁰O termo “clássico” aqui utilizado nos indica que estas correlações poderiam ser reproduzidas

foram preparados no mesmo estado ($|0\rangle_u \otimes |0\rangle_a$ ou $|1\rangle_u \otimes |1\rangle_a$), ou em estados diferentes ($|0\rangle_u \otimes |1\rangle_a$ ou $|1\rangle_u \otimes |0\rangle_a$), o bit de fase indica uma correlação **quântica**, pois, como vimos acima, esta é uma informação sobre a superposição presente neste estados, que é uma característica genuinamente quântica. Além disso, notemos que os valores dos bits de paridade e fase são intercambiáveis, isto é, realizando rotações sob os sistemas u e a antes da medida projetiva do C.C.O.C. $\{\sigma_Z^u \sigma_Z^a, \sigma_X^u \sigma_X^a\}$, obteremos resultados trocados em relação aos expostos na Tabela 2.2. Por exemplo, aplicando as rotações¹¹ $\mathbf{H}^u \otimes \mathbf{H}^a = (\mathbf{H}^u \otimes \mathbf{I}^a)(\mathbf{I}^u \otimes \mathbf{H}^a)$ ao estado $|\phi^-\rangle_{ua}$, teremos

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^u \otimes \mathbf{H}^a) |\phi^-\rangle_{ua} &= (\mathbf{H}^u \otimes \mathbf{I}^a)(\mathbf{I}^u \otimes \mathbf{H}^a) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{ab} - |11\rangle_{ab}), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{ua} + |10\rangle_{ua}), \\ &= |\psi^+\rangle_{ua}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Observando a Tabela 2.2, vemos que os autovalores correspondentes aos observáveis $\sigma_Z^u \sigma_Z^a$ e $\sigma_X^u \sigma_X^a$ serão agora -1 e 1, respectivamente (o oposto dos valores obtidos para $|\phi^-\rangle_{ua}$).

Enfatizemos que não há nenhuma informação sobre o estado desconhecido (2.1) nos canais quântico e clássico quando analisados **individualmente**: enquanto o sistema de Bob, que é parte do canal quântico, encontra-se sempre, em sua perspectiva, em uma mistura estatística completamente aleatória, e portanto sem nenhuma informação sobre o estado desconhecido, pelo canal clássico serão enviados os resultados da medida de Alice, que são **equiprováveis**, e portanto também independentes deste estado [15]. De fato, durante a transmissão via teletransporte, nem Alice nem Bob possuem informação alguma sobre o estado desconhecido, que é destruído na medida de Bell, e posteriormente reconstruído no sistema de Bob a partir de correlações quânticas (1 ebit), e informação por dois sistemas que assumem **somente** dois valores, e não a sua superposição, como por exemplo, duas moedas, ou duas bolas que assumem somente duas cores, *etc.*

¹¹Notemos que $\mathbf{H}^u \otimes \mathbf{H}^a$ é observável **não-local**, todavia pode ser escrito como um produto dos observáveis **locais** $\mathbf{H}^u \otimes \mathbf{I}^a$ e $\mathbf{I}^u \otimes \mathbf{H}^a$.

clássica (2 bits). Este estado não é transportado entre Alice e Bob; ele é **teletransportado**, ou “levado ao longe”, como discutimos na seção 1 da introdução. Esta propriedade pode ser útil no envio de informação segura entre Alice e Bob.

O teletransporte está de acordo com o **princípio de causalidade**¹²: a transmissão do estado quântico só ocorrerá quando Bob receber e ler os dois bits de informação enviados pelo canal de comunicação clássico. Como esta informação se propaga a uma **velocidade finita**, a reconstrução do estado quântico não poderá ser instantânea, e portanto sua transmissão não violará o princípio de causalidade. Finalmente, vemos que há um **ordenamento temporal** implícito no teletransporte quântico: Bob saberá qual é a operação unitária a realizar somente **após** o recebimento dos dois bits de informação de Alice.

Finalmente, notemos o caráter **econômico** do protocolo: compartilhado o estado emaranhado entre Alice e Bob, basta a Alice comunicar somente dois bits clássicos obtidos na medida de Bell para que os números complexos α e β sejam transmitidos. De fato, a transmissão direta destes números com uma alta precisão exigiria o envio de um grande número de bits, e não somente dois, daí a economia. Além disso, como estes dois bits podem ser copiados, Alice não precisa conhecer o endereço de Bob para realizar a transmissão de seu estado: compartilhado o estado emaranhado, basta copiar os bits e enviá-los a todos os sítios possíveis de Bob.

Antes de discutirmos uma implementação experimental fotônica do protocolo de teletransporte, lembremos que na proposta original [11], é também discutido o teletransporte de estados quânticos mais complicados, pertencentes a espaços vetoriais de dimensão maior (sistemas discretos de D níveis ou **qbits** [93]).

¹²No contexto da Relatividade, o princípio de causalidade afirma que a velocidade de propagação da ação entre eventos causais é inferior ou igual à velocidade de propagação da luz [107].

2.2 Implementações experimentais óticas

Ao longo dos últimos doze anos, o protocolo de teletransporte quântico foi experimentalmente verificado em sistemas fotônicos [24, 23, 73, 83, 128], em íons aprisionados [106, 9], em sistemas de ressonância nuclear magnética [94], em ensembles atômicos (interface luz-matéria) [114, 144], e em campos eletromagnéticos intensos [54], sendo esta última realização uma implementação da generalização do protocolo para variáveis contínuas [19], que neste caso são as quadraturas do campo. O protocolo foi também realizado a longas distâncias [86, 126], sendo uma das experiências realizada através do rio Danúbio [126]. Apesar do teletransporte ter sido implementado apenas parcialmente na maioria destes experimentos (por exemplo, em alguns deles somente alguns dos estados de Bell eram discriminados), todos representaram avanços importantes, e demonstraram o interesse da comunidade científica pelo tema. Como neste trabalho estaremos interessados em implementações óticas, descreveremos brevemente nesta seção duas das experiências citadas. A primeira delas é a experiência de Innsbruck, que foi a primeira realização experimental do teletransporte, e a segunda é a primeira realização do teletransporte em variáveis contínuas.

2.2.1 A experiência de Innsbruck: pioneirismo

A primeira realização experimental do teletransporte quântico [24] foi uma implementação da proposta de S. L. Braunstein e A. Mann [15], e ocorreu em 1997, na cidade de Innsbruck, na Áustria. O objetivo desta experiência consistiu em teletransportar o estado de polarização $|\Psi\rangle$ de um fóton 1, que na base de polarização linear $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ é dado por

$$|\Psi\rangle_1 = \alpha |H\rangle_1 + \beta |V\rangle_1, \quad (2.22)$$

e corresponde a um qbit ($|H\rangle \equiv |0\rangle$ e $|V\rangle \equiv |1\rangle$), mediante à utilização de um canal quântico constituído por um par de fótons 2-3 preparado no estado de Bell

$$|\Psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle_{23} - |VH\rangle_{23}). \quad (2.23)$$

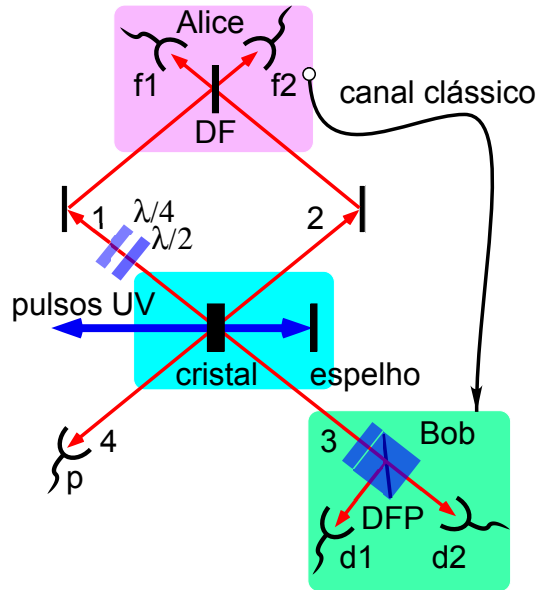


Figura 2.3: Esquema da experiência de Innsbruck.

Para compreendermos o mecanismo de geração destes fótons e a preparação de seus estados quânticos, assim como a medida conjunta realizada por Alice, observemos o esboço do esquema experimental, que encontra-se na Figura 2.3.

Geração de pares de fótons e preparação dos estados quânticos

Um cristal não-linear uniaxial é bombeado por pulsos de luz laser ultravioleta que possuem 200 fs de duração, taxa de repetição de 76 MHz, e que são retro-refletidos em um espelho. Durante as passagens destes pulsos pelo cristal, é possível que alguns dos fótons que os constituem se convertam espontaneamente num par de fótons, fenômeno chamado de **conversão paramétrica descendente espontânea** (C.P.D.E.) [77], e que estudaremos com mais detalhes nos capítulos ulteriores. A situação de interesse é aquela em que os pares de fótons 2-3 e 1-4 são gerados na ida e na volta dos pulsos, respectivamente. Além disso, nesta experiência utilizou-se um cristal cortado para o tipo II de C.P.D.E., em que os fótons de um par são sempre gerados com polarizações ortogonais entre si, e cada fóton

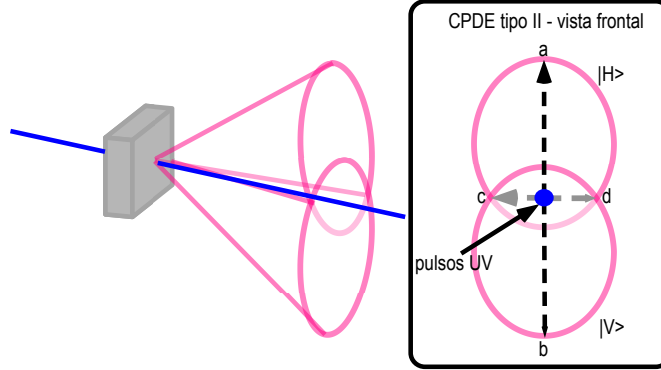


Figura 2.4: Na C.P.D.E. tipo II, cada fóton de um par é emitido ao longo de direções que formam um cone. Nesta ilustração, o cone de cima corresponde à direção do fóton gerado no estado de polarização horizontal $|H\rangle$, enquanto que o de baixo corresponde ao fóton gerado no estado $|V\rangle$. A orientação destas polarizações é definida em relação ao eixo do cristal. Direções diametralmente opostas, por exemplo a-b ou c-d, correspondem as direções em que os fótons de um par se correlacionam.

é emitido ao longo de direções de propagação que formam um cone, o que é ilustrado na Figura 2.4.

Orientando o cristal e escolhendo convenientemente as direções longitudinais de propagação, é possível preparar os pares de fótons em diferentes estados quânticos. Sendo assim, para o par 1-4 escolheram-se as direções longitudinais diametralmente opostas a e b indicadas na Figura 2.4, que dão origem ao estado quântico¹³

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{14} &= |H\rangle_1 |a\rangle_1 |V\rangle_4 |b\rangle_4, \\ &= |H\rangle_1 |V\rangle_4 |a\rangle_1 |b\rangle_4, \end{aligned} \quad (2.24)$$

¹³Notemos que neste estado não ocorrem as componentes $|H\rangle_1 |V\rangle_4 |a\rangle_1 |a\rangle_4$ e $|H\rangle_1 |V\rangle_4 |b\rangle_1 |b\rangle_4$, que correspondem a dois fótons com a mesma direção longitudinal, pois devido à conservação de momento linear que ocorre na C.P.D.E. entre os fótons destruído e criados, estes últimos têm sempre direções distintas (exceto no caso unidimensional, em que as direções 1 e 4 coincidem, e que não corresponde ao arranjo experimental descrito acima).

onde $|a\rangle$ e $|b\rangle$ descrevem os estados de direções longitudinais. Este estado é um produto tensorial tanto nos subespaços correspondentes aos dois fótons 1 e 4 quanto nos subespaços de polarização e de direção longitudinal de um dos fótons. Passando posteriormente o fóton 1 por um conjunto de placas de onda convenientemente orientadas, teremos a transformação $|H\rangle_1 \rightarrow |\Psi\rangle_1$, onde $|\Psi\rangle_1$ é dado pela Eq.(2.22), e corresponde ao estado a ser teletransportado. O fóton 4 será utilizado para sinalizar a presença do fóton 1.

Para o par de fótons 2-3, escolheram-se as direções longitudinais c e d indicadas na figura, em que os cones se cruzam, pois nestes pontos de intersecção duas possibilidades de preparação ocorrerão:

$$|H\rangle_2 |c\rangle_2 |V\rangle_3 |d\rangle_3 \quad \text{ou} \quad |V\rangle_2 |c\rangle_2 |H\rangle_3 |d\rangle_3. \quad (2.25)$$

Tornando estas possibilidades indistinguíveis, o que é alcançado através de placas de compensação (para detalhes ver [109]), e utilizando placas de ondas convenientes, teremos a superposição

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_2 |c\rangle_2 |V\rangle_3 |d\rangle_3 - |V\rangle_2 |c\rangle_2 |H\rangle_3 |d\rangle_3), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_2 |V\rangle_3 - |V\rangle_2 |H\rangle_3) |c\rangle_2 |d\rangle_3, \\ &= |\Psi^-\rangle_{23} |c\rangle_2 |d\rangle_3, \end{aligned} \quad (2.26)$$

cujas partes em polarização serão usadas como canal quântico no teletransporte.

Medida de Bell parcial e ótica linear: o divisor de feixes

Após receber os fótons 1 e 2, Alice deveria realizar uma medida de Bell em seus subespaços de polarização. No entanto, no caso em questão este procedimento é de difícil realização experimental, pois envolve uma interação fóton-fóton na forma de uma porta não-controlada. Sendo assim, nesta experiência optou-se por não realizar a medida de Bell “completa”, isto é, a projeção em seus quatro estados, mas uma medida de Bell parcial, que consiste somente numa projeção em um de seus estados, o singlete, $|\Psi^-\rangle_{12}$. O teletransporte passará então a não ser mais determinístico, e sim probabilístico, funcionando apenas em

1/4 das vezes. Abaixo descreveremos o procedimento experimental [25, 3] para se realizar esta projeção, que é baseado em ótica linear e interferência quântica de partículas idênticas.

Para realizar a projeção no estado singlete $|\Psi^-\rangle_{12}$ de polarização dos fótons 1 e 2, Alice os incide em um divisor de feixes simétrico e não-polarizado, cada fóton entrando por uma de suas portas, o que é ilustrado na figura 2.3. De acordo com o postulado da mecânica quântica de simetrização [120], se estes fótons, que são bósons, forem **indistinguíveis**, seu estado quântico “global”, isto é, formado tanto pelos seus graus de liberdade internos (polarização), quanto pelos externos (direção longitudinal ou momento longitudinal) será **simétrico** sob a permutação destas partículas. Sendo assim, combinando estes graus de liberdade, vemos que os estados quânticos “globais” possíveis destas duas partículas são dados por

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{12} &= |\Psi^-\rangle_{12} |\psi_A\rangle_{12}, \\ |\psi\rangle_{12} &= |\Psi^+\rangle_{12} |\psi_S\rangle_{12}, \\ |\psi\rangle_{12} &= |\Phi^-\rangle_{12} |\psi_S\rangle_{12}, \\ |\psi\rangle_{12} &= |\Phi^+\rangle_{12} |\psi_S\rangle_{12}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $\{|\Psi^-\rangle_{12}, |\Psi^+\rangle_{12}, |\Phi^-\rangle_{12}, |\Phi^+\rangle_{12}\}$ são os estados de Bell, Eq. (2.5), em polarização, e

$$\begin{aligned} |\psi_S\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle_1 |c\rangle_2 + |c\rangle_1 |a\rangle_2), \\ |\psi_A\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle_1 |c\rangle_2 - |c\rangle_1 |a\rangle_2), \end{aligned} \quad (2.28)$$

são, respectivamente, os estados simétrico e antissimétrico do subespaço formado pelas direções longitudinais destes fótons¹⁴. Observando os estados (2.27), vemos que devido

¹⁴Os demais estados simétricos e antissimétricos que envolvem superposições das componentes do tipo $|a\rangle_1 |a\rangle_2$ e $|c\rangle_1 |c\rangle_2$ não aparecem aqui, pois, como veremos adiante, estas componentes são eliminadas pelas detecções em coincidência entre os detectores f1-f2-p-d1 e f1-f2-p-d2.

à condição de simetrização, o estado singleto em polarização, que é o único dos estados de Bell **antissimétrico** na permutação das partículas, é também o único cujo estado de momento longitudinal é antissimétrico. Esta propriedade é extremamente importante, pois é devido a ela e à interferência quântica de amplitudes de probabilidade no DF que o estado $|\psi_A\rangle_{12}$ permanece invariante sob a ação do DF (o estado $|\psi_A\rangle_{12}$ é autovetor do operador Hamiltoniano do DF). De fato, utilizando as expressões de evolução para os operadores de aniquilação $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ referentes às direções longitudinais a e c [62],

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &\rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{U}_{DF}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{U}_{DF} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a} + i\mathbf{c}), \\ \mathbf{c} &\rightarrow \mathbf{c}' = \mathbf{U}_{DF}^\dagger \mathbf{c} \mathbf{U}_{DF} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\mathbf{a} + \mathbf{c}),\end{aligned}\quad (2.29)$$

onde $\mathbf{U}_{DF}$ é o operador de evolução do DF, teremos

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{DF} |\psi_A\rangle_{12} &= |\psi_A\rangle_{12}, \\ \mathbf{U}_{DF} |\psi_S\rangle_{12} &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(|a\rangle_1 |a\rangle_2 + |c\rangle_1 |c\rangle_2).\end{aligned}\quad (2.30)$$

Vemos então que a detecção em coincidência dos fótons nos detectores $f1$ e $f2$, que localizam-se nos braços distintos do DF, corresponde à projeção no estado de Bell $|\Psi^-\rangle_{12}$ em polarização (os outros estados de Bell estão associados a detecção de dois fótons no mesmo braço do DF, isto é, a detecção do estado $|\psi_S\rangle_{12}$). Devido à condição de simetrização do estado quântico das partículas idênticas, os graus de liberdade externos **assistem**, ou **auxiliam**, a projeção do estado singleto em polarização. Este é um exemplo de como outros graus de liberdade podem ajudar a realizar tarefas no grau de liberdade de trabalho, que neste caso é a polarização.

É importante observar que esta projeção no estado singleto só funcionará se os fótons 1 e 2 forem idênticos. Não obstante, vimos que estes fótons são independentes e gerados simultaneamente com os fótons 4 e 3, respectivamente, de modo que a detecção destes últimos fornece informação temporal sobre os primeiros, tornando-os assim distinguíveis temporalmente. Para torná-los indistinguíveis e assim apagar a informação temporal, antes do DF passam-se estes fótons por filtros ultra-finos centrados em 788 nm e de largura

4nm, que os alargam temporalmente de 50 fs, que é o tempo de coerência de sua emissão, para 520 fs, que é um intervalo de tempo superior ao intervalo máximo entre as emissões dos pares de fótons 2-3 e 1-4, que é dado por sua vez pelo tempo de coerência do bombeador, que é da ordem de 200 fs.

Operação unitária e previsões teóricas

De acordo com a discussão da seção 2.1.1, após a projeção no estado singlete $|\Psi^-\rangle_{12}$ Alice enviará seus resultados a Bob, que realizará uma operação unitária condicional no estado quântico do fóton 3. Como no caso em questão o canal quântico é também um estado singlete, Eq. (2.23), vemos pela Eq. (2.7) que esta operação será dada pela identidade.

Os resultados experimentais foram obtidos preparando-se o fóton 1 em uma dada polarização, e analisando a estatística das detecções em coincidências quádruplas dos detectores f1, f2, p, e d1/d2, em função da posição do espelho refletor, que controla o grau de indistinguibilidade dos fótons 1 e 2. Por exemplo, no caso em que o fóton 1 é preparado no estado de polarização linear $|+45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$, Bob utiliza uma placa de $\lambda/2$ orientada a $22,5^\circ$, que realiza a transformação $|+45^\circ\rangle \rightarrow |H\rangle$, juntamente com um divisor de feixes polarizado (DFP), que transmite esta componente. A ausência de coincidências f1-f2-p-d1, juntamente com a presença de coincidências f1-f2-p-d2 é uma assinatura do teletransporte, o que é ilustrado na Figura 2.5. Analogamente, para a preparação $|-45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$, que sofrerá pela placa $\lambda/2$ a transformação $|-45^\circ\rangle \rightarrow |V\rangle$, e depois a reflexão no DFP, teríamos a ausência e presença de coincidências dos tipos f1-f2-p-d2 e f1-f2-p-d1, respectivamente. Todavia, fora da região de teletransporte, que corresponde ao caso em que as partículas são distinguíveis, coincidências do tipo f1-f2-p-d1 quanto f1-f2-p-d2 seriam simultaneamente encontradas, pois o fóton 3 é membro de um par emaranhado, sendo portanto descrito pela mistura completamente aleatória, $\frac{1}{2}\mathbf{I}$.

Previsão : polarização $+45^\circ$

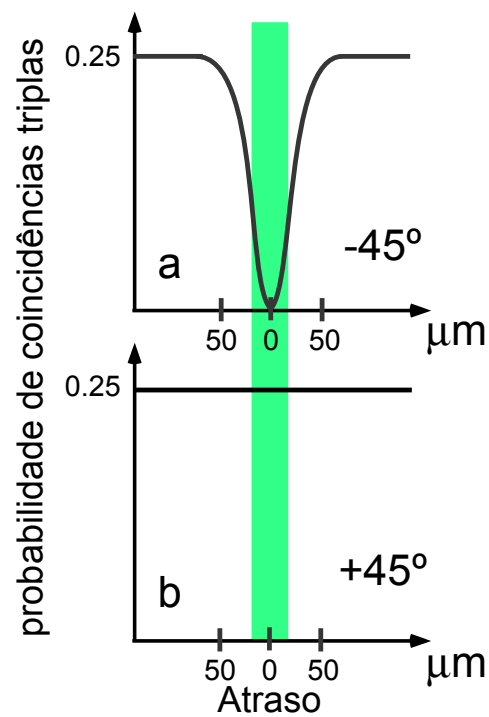


Figura 2.5: Esboço da previsão teórica das coincidências triplas em função da posição do espelho retrorefletor, para a preparação do fóton 1 no estado $|+45\rangle$. (a) coincidências f1-f2-d1 exibem declínio (b) coincidências f1-f2-d2 se mantêm inalteradas. A área marcada indica a região de teletransporte, em que os fótons 1 e 2 são indistinguíveis.

Críticas

Apesar de todos os resultados obtidos estarem de acordo com as previsões teóricas, demonstrando assim o sucesso da experiência e seu consequente pioneirismo, ela recebeu algumas críticas importantes. S. L. Braunstein e H. J. Kimble argumentaram [20] que, devido à natureza probabilística da C.P.D.E., a fidelidade média do teletransporte no esquema utilizado só é superior ao limite clássico¹⁵ se houver a detecção do fóton 3, que necessariamente o destrói, e assim impede seu uso em alguma tarefa ulterior. O teletransporte realizado só funcionaria *a posteriori*, sendo portanto chamado de **condicional** [54]. Para realizar o teletransporte *a priori*, ou **não-condicional**, seria então necessário preservar, ou não destruir, o fóton 3.

Para entendermos esta crítica, voltemos a Figura 2.3. Vimos que a situação de interesse na experiência é aquela em que os pares de fótons 2-3 e 1-4 são gerados, respectivamente, na ida e na volta dos pulsos UV. Não obstante, o estado quântico que descreve o campo gerado nestas duas C.P.D.E. sucessivas é dado geralmente por uma série perturbativa do tipo

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle_{1234} &= |\psi\rangle_{23} \otimes |\psi\rangle_{14}, \\
 &= (|\text{VAC}\rangle_{23} + \eta |1\rangle_2 |1\rangle_3 + \eta^2 |2\rangle_2 |2\rangle_3 + \dots) \otimes \\
 &\quad (|\text{VAC}\rangle_{14} + \eta |1\rangle_1 |1\rangle_4 + \eta^2 |2\rangle_1 |2\rangle_4 + \dots), \\
 &= |\text{VAC}\rangle_{23} |\text{VAC}\rangle_{14} + \eta (|\text{VAC}\rangle_{23} |1\rangle_1 |1\rangle_4 + |\text{VAC}\rangle_{14} |1\rangle_2 |1\rangle_3) + \\
 &\quad \eta^2 (|\text{VAC}\rangle_{23} |2\rangle_1 |2\rangle_4 + |1\rangle_2 |1\rangle_3 |1\rangle_1 |1\rangle_4 + |\text{VAC}\rangle_{14} |2\rangle_2 |2\rangle_3) + \dots,
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $|n\rangle_i$ representa n fótons no campo i , e η é um parâmetro perturbativo¹⁶. Enquanto o

¹⁵Conforme discutimos na seção 2.1.3, esta fidelidade assume o valor $\mathcal{F} = 0.812$ ou $\mathcal{F} = 2/3$ [36, 104] de acordo com a definição empregada.

¹⁶Enfatizemos que esta expressão é escrita de uma forma bastante simplificada, em que somente o número de fótons em cada modo é explicitado. Todavia, ela é suficiente para o entendimento da crítica.

primeiro termo da série (ordem η^0) corresponde ao caso em que nenhum fóton é gerado, os termos de ordem η correspondem a geração de um único par nas duas conversões (ou na ida, ou na volta dos pulsos). Além disso, os termos de ordem η^2 correspondem ao caso em que dois pares são gerados: dois na ida e nenhum na volta, e vice-versa, e a situação desejada, em que um par é gerado na ida e outro na volta.

Na experiência de Innsbruck, os termos de ordem η^0 , η^1 , e o termo de ordem η^2 $|\text{VAC}\rangle_{14} |2\rangle_2 |2\rangle_3$ são descartados pela seleção dos eventos em que ocorrem as coincidências triplas f1-f2-p, de modo que o teletransporte ocorrerá probabilisticamente, isto é, condicionado a estas detecções. No entanto, sem a detecção de um fóton no campo 3, duas das componentes da série perturbativa,

$$|1\rangle_2 |1\rangle_3 |1\rangle_1 |1\rangle_4 \quad \text{e} \quad |\text{VAC}\rangle_{23} |2\rangle_1 |2\rangle_4, \quad (2.32)$$

contribuirão para o estado deste campo, que será igual a

$$\rho_3 = \frac{1}{2} |1\rangle_3 \langle 1|_3 + \frac{1}{2} |\text{VAC}\rangle_3 \langle \text{VAC}|_3. \quad (2.33)$$

Enquanto o primeiro termo nos fornece a fidelidade média em polarização $\bar{\mathcal{F}}_{\text{foton}}$ entre os estados dos fótons 1 e 3, o segundo não fornece informação alguma sobre a polarização do fóton 1. Sendo assim, este segundo termo equivaleria a **receber um fóton cuja polarização é descrita por um estado mistura estatística completamente aleatória**, e cuja fidelidade média em relação ao estado inicial é igual a $\bar{\mathcal{F}}_{\text{mist}} \approx 1/2^{17}$. Ponderando estes resultados, teríamos a fidelidade média em polarização

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \times \bar{\mathcal{F}}_{\text{foton}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \bar{\mathcal{F}}_{\text{foton}} + \frac{1}{4}. \quad (2.34)$$

Para que a fidelidade média seja maior que o limite clássico, $\bar{\mathcal{F}} > 2/3$, é necessário que $\bar{\mathcal{F}}_{\text{foton}} > 0.83$, que é um valor próximo ao obtido experimentalmente, $\bar{\mathcal{F}}_{\text{foton}} =$

¹⁷Novamente, aqui aparece um problema de definição. De acordo com [36, 104], a fidelidade média para a mistura estatística completamente aleatória seria $1/2$, e não $1/\sqrt{2}$ como calculamos na expressão (2.17).

(0.80 ± 0.05) [27], de modo que o teletransporte realizado não forneceria resultados superiores aos obtidos na situação em que não há emaranhamento compartilhado (discutimos esta situação na seção (2.1.3)).

Os autores argumentaram que esta crítica não era relevante, pois a discriminação das componentes $|1\rangle_2 |1\rangle_3 |1\rangle_1 |1\rangle_4$ e $|\text{vac}\rangle_{23} |2\rangle_1 |2\rangle_4$ poderia ser alcançada através do uso de um detector p que discriminasse as componentes de um e dois fótons. Sendo assim, o problema não era fundamental, mas tecnológico, e com solução a ser alcançada dentro de alguns anos¹⁸. De fato, o problema foi resolvido em uma experiência realizada em 2003 [102], em que filtros colocados no modo 1 tornaram as coincidências f1-f2-p correspondentes ao termo $|\text{vac}\rangle_{23} |2\rangle_1 |2\rangle_4$ raríssimas em relação as relacionadas a $|1\rangle_2 |1\rangle_3 |1\rangle_1 |1\rangle_4$.

Finalmente, notemos que através de uma simples modificação experimental, que consiste em também preparar o par de fótons 1-4 em um estado emaranhado, foi possível a realização experimental da troca ou transferência de emaranhamento (*SWAP*) entre partículas [101].

2.2.2 O teletransporte quântico em variáveis contínuas

O teletransporte quântico foi também estudado no contexto das **quadraturas** de campos óticos [127, 19, 16], que são observáveis de espectro contínuo, ou **variáveis contínuas**. Em 1998, A. Furusawa *et al.* realizaram experimentalmente o primeiro teletransporte de um estado quântico coerente, que é um tipo de estado codificado nestas variáveis [54]. O experimento alcançou uma fidelidade média de $\mathcal{F} = 0.58 \pm 0.02$, que é superior ao limite clássico $\mathcal{F}^{\text{class.}} = 0.5$ para estados coerentes, e foi a primeira realização de um teletransporte *a priori*, ou **condicional**, em que o estado quântico após o teletransporte não é **destruído**, permitindo assim a sua aplicação em tarefas ulteriores.

¹⁸De fato, detectores do tipo *time multiplex detectors* (TMD) [1], que distinguem componentes de até 8 fótons, já são produzidos com tecnologia atual [84], mas ainda não são comercializados.

Para compreendermos esta experiência, faremos na próxima seção uma digressão sobre as quadraturas e a função de Wigner de um campo, e posteriormente uma discussão sobre o artigo teórico de S. L. Braunstein e H. J. Kimble [19], que suscitou esta realização experimental.

As quadraturas e a função de Wigner

As quadraturas de um modo de um campo eletromagnético são os observáveis adimensionais [65, 16]

$$\mathbf{X}_\phi = \frac{\mathbf{a}e^{-i\phi} + \mathbf{a}^\dagger e^{i\phi}}{2}, \quad (2.35)$$

onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}^\dagger$ são, respectivamente, os operadores criação e aniquilação de fótons do modo normal correspondente. Em particular, os observáveis $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{X}_{\pi/2}$, ou mais geralmente o par $\{\mathbf{X}_\phi, \mathbf{X}_{\phi+\pi/2}\}$, desempenham um papel análogo aos observáveis posição $\mathbf{X}_0$ e momento linear $\mathbf{P}_0$ de um oscilador mecânico. As quadraturas têm um espectro contínuo, ou seja, seus autovalores não assumem somente valores discretos (por esta razão são comumente chamadas de **variáveis contínuas**), e seus autovetores são não-normalizáveis. Por exemplo, dada a quadratura $\mathbf{X}_\phi$, temos

$$\mathbf{X}_\phi |x_\phi\rangle = x_\phi |x_\phi\rangle, \quad (2.36)$$

onde o autovalor $x_\phi \in \mathbb{R}$, e

$$\langle x'_\phi | x_\phi \rangle = \delta(x_\phi - x'_\phi), \quad (2.37)$$

sendo δ a distribuição de Dirac.

Dado que as quadraturas ortogonais $\{\mathbf{X}_\phi, \mathbf{X}_{\phi+\pi/2}\}$ satisfazem a regra de comutação

$$[\mathbf{X}_\phi, \mathbf{X}_{\phi+\pi/2}] = i/2, \quad (2.38)$$

e, portanto são observáveis incompatíveis, ou seja, não podem ser medidos simultaneamente por um procedimento projetivo, parece impossível associá-las um “espaço de

fase”, em que cada par de eixos ortogonais do espaço seria definido pelo par $\{\mathbf{X}_\phi, \mathbf{X}_{\phi+\pi/2}\}$ e cada ponto pelos autovalores $(x_\phi, x_{\phi+\pi/2})$ correspondentes, que definiriam o estado do sistema quântico. Não obstante, a idéia do espaço de fase quântico não é absurda, e de fato o estado do sistema é descrito por uma **distribuição de quase-probabilidades** neste espaço [112]. Uma das distribuições mais importantes é a função de Wigner [140, 60],

$$W(\alpha) = W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int du e^{-2ipu} \langle x + u/2 | \varrho | x - u/2 \rangle, \quad (2.39)$$

onde $\alpha = x + ip$, sendo $(x, p) \equiv (x_0, x_{\pi/2})$ os autovalores das quadraturas ortogonais $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{X}_{\pi/2}$, respectivamente, e ϱ é o operador densidade que descreve o sistema quântico. Enfatizemos a **equivalência** entre a função de Wigner e o estado quântico ϱ : toda a informação codificada no estado quântico está presente na função de Wigner¹⁹, que por sua vez é função dos valores (x, p) .

O teletransporte quântico

O teletransporte quântico em variáveis contínuas [19] encontra-se esquematizado na Figura 2.6. Victor prepara um campo eletromagnético monomodo u em uma função de Wigner $W_u(\alpha_1) = W_u(x_1, p_1)$, e o envia a Alice. Mesmo não conhecendo esta função, Alice deseja enviá-la a Bob, e para realizar esta tarefa utilizará o teletransporte quântico.

Inicialmente, Alice e Bob compartilham um campo eletromagnético de dois modos a e b preparado em um estado de **vácuo comprimido**, oriundo de um **oscilador paramétrico ótico** (OPO) [142], e cuja função de Wigner é dada por²⁰ [137, 54, 16]

$$W_{ab}(\alpha_2; \alpha_3) = \frac{4}{\pi^2} \exp \left\{ -e^{-2r} [(x_2 - x_3)^2 + (p_2 + p_3)^2] - e^{2r} [(x_2 + x_3)^2 + (p_2 - p_3)^2] \right\}, \quad (2.40)$$

¹⁹Para maiores informações sobre esta equivalência e o procedimento tomográfico de reconstrução da função de Wigner, ver [116, 38].

²⁰De fato, esta descrição monomodo do estado quântico dos campos provenientes de um OPO é uma simplificação, visto que estes campos são policromáticos. Para maiores detalhes consultar [17].

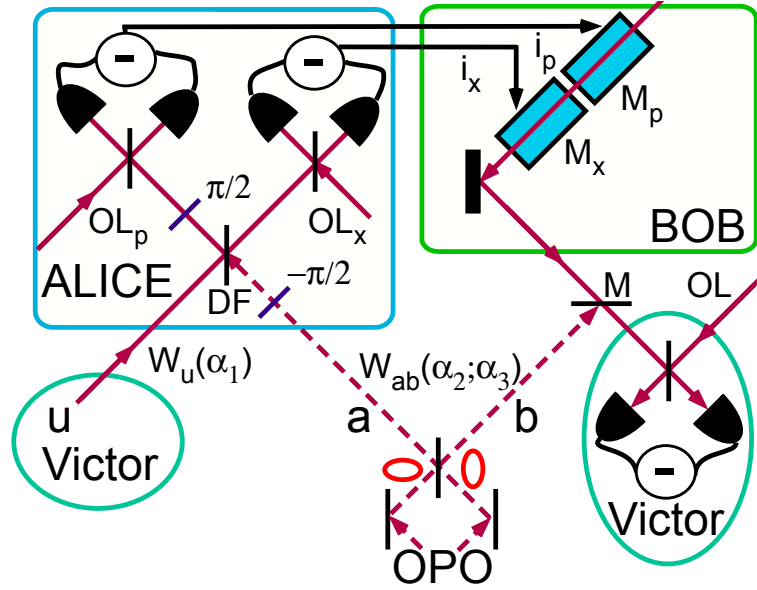


Figura 2.6: O teletransporte quântico em variáveis contínuas. Victor envia a Alice recebe o campo u preparado na função de Wigner $W_u(\alpha_1) = W_u(x_1, p_1)$. Alice e Bob compartilham o estado de vácuo comprimido proveniente de um OPO, e descrito por $W_{ab}(\alpha_2; \alpha_3)$. Alice mistura os modos u e a em um divisor de feixes acrescido de placas defasadoras de $\pi/2$, e realiza homodinagens das quadraturas $\{\mathbf{X}'_1, \mathbf{P}'_2\}$. As diferenças i_x e i_p entre correntes elétricas obtidas são enviadas a Bob, que realiza no modo b deslocamentos condicionais através dos moduladores M_x e M_p , e de um espelho M com alta refletividade. Finalmente, Bob envia o modo b a Victor, que realiza uma homodinagem para a confirmação do teletransporte.

onde $\alpha_j = x_j + ip_j$, sendo que $j = 2, 3$ definem as coordenadas (x_j, p_j) dos modos a e b , respectivamente, e $r > 0$ é um parâmetro real. Esta função de Wigner descreve dois modos do campo em um estado **emaranhado**, sendo que o limite $r \rightarrow \infty$, em que

$$W_{ab}(\alpha_2; \alpha_3) \rightarrow C\delta(x_2 + x_3)\delta(p_2 - p_3) \quad (2.41)$$

corresponde ao estado EPR proposto em [45] no contexto de duas partículas. De fato, na representação das posições x_2 e x_3 das duas partículas, este estado é dado por

$$|\psi^{\text{EPR}}\rangle_{ab} = \iint dx_2 dx_3 \Psi_{ab}(x_2, x_3) |x_2\rangle_a |x_3\rangle_b \quad (2.42)$$

onde

$$\Psi_{ab}(x_2, x_3) = \delta(x_2 + x_3 - x_0), \quad (2.43)$$

sendo x_0 uma constante, ou, equivalentemente,

$$|\psi^{\text{EPR}}\rangle_{ab} = \int dx_2 |x_2\rangle_a |x_0 - x_2\rangle_b. \quad (2.44)$$

Por outro lado, na representação dos momentos lineares, temos

$$|\psi^{\text{EPR}}\rangle_{ab} = \iint dp_2 dp_3 \Psi_{ab}(p_2, p_3) |p_2\rangle_a |p_3\rangle_b \quad (2.45)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_{ab}(p_2, p_3) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dx dx' e^{-\frac{i}{\hbar}(p_2x + p_3x')} \delta(x + x' - x_0) \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}p_3x_0} \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx e^{\frac{i}{\hbar}(p_3 - p_2)x} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}p_3x_0} \delta(p_3 - p_2). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Fazendo $x_0 = 0$, vemos a equivalência entre a função de onda $\Psi_{ab}(p_2, p_3)$, e o termo na expressão (2.41).

O estado inicial do sistema de três modos normais do campo será dado então por

$$W_I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = W_u(\alpha_1)W_{ab}(\alpha_2; \alpha_3). \quad (2.47)$$

De acordo com a Figura (2.6), após o compartilhamento com Bob do estado emaranhado, Alice incide os modos u e a em um divisor de feixes acrescido de placas defasadoras de $\pi/2$, de modo a realizar a evolução [67]

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &\rightarrow \mathbf{a}'_1 = \mathbf{U}_{DF}^\dagger \mathbf{a}_1 \mathbf{U}_{DF} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \\ \mathbf{a}_2 &\rightarrow \mathbf{a}'_2 = \mathbf{U}_{DF}^\dagger \mathbf{a}_2 \mathbf{U}_{DF} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \end{aligned} \quad (2.48)$$

nos operadores de aniquilação $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ correspondentes aos modos u e a , respectivamente. Reescrevendo estes operadores em termos das quadraturas de cada um dos modos ($j = 1, 2$) $\mathbf{X}_{0j} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_j^\dagger)$, e $\mathbf{X}_{\frac{\pi}{2}j} = \mathbf{P}_{0j} = -\frac{i}{2}(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^\dagger)$, que passaremos a denotar por $\mathbf{X}_j$ e $\mathbf{P}_j$, teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j &= \mathbf{X}_j + i\mathbf{P}_j, \\ \mathbf{a}_j^\dagger &= \mathbf{X}_j - i\mathbf{P}_j, \end{aligned} \quad (2.49)$$

de modo que (2.48) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &\rightarrow \mathbf{X}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2), \\ \mathbf{P}_1 &\rightarrow \mathbf{P}'_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2), \\ \mathbf{X}_2 &\rightarrow \mathbf{X}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2), \\ \mathbf{P}_2 &\rightarrow \mathbf{P}'_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Invertendo estas expressões, podemos obter a evolução em termos das funções de Wigner, que, de acordo com [16, 19, 115, 82], será dada por

$$\begin{aligned} W_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= W_1(x_1, p_1, x_2, p_2; x_3, p_3) \\ &= W_u(x_1, p_1)W_{ab}(x_2, p_2; x_3, p_3) \\ &\rightarrow W(x'_1, p'_1, x'_2, p'_2, x_3, p_3) = W_u \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 + x'_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(p'_1 + p'_2) \right] \times \\ &\quad W_{ab} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 - x'_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(p'_1 - p'_2); x_3, p_3 \right], \end{aligned} \quad (2.51)$$

e que pode ser reescrita na forma

$$W(x'_1, p'_1, x'_2, p'_2, x_3, p_3) = \iint dx dp W_u(x, p) \delta \left[x - \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 + x'_2) \right] \times \\ \delta \left[p - \frac{1}{\sqrt{2}}(p'_1 + p'_2) \right] W_{ab} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 - x'_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(p'_1 - p'_2); x_3, p_3 \right]. \quad (2.52)$$

onde utilizamos as distribuições delta de Dirac para incluir as integrais em x e p .

Após o divisor de feixes, Alice realiza a medida projetiva do par de quadraturas $\{\mathbf{X}'_1, \mathbf{P}'_2\}$, que, conforme (2.50), são observáveis compatíveis:

$$[\mathbf{X}'_1, \mathbf{P}'_2] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2), \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \right] = 0. \quad (2.53)$$

Notemos que a evolução (2.50) **mistura** as quadraturas dos modos u e a , de modo que a medida de qualquer uma delas após a interação fornecerá somente informações sobre a **soma** e a **diferença** destas quadraturas antes da interação, e não sobre seus valores individuais. Vemos então que esta medida é **conjunta**, e se assemelha à medida de Bell em sistemas discretos (ver seção (2.1.2)).

A medida projetiva de Alice é realizada através de medidas **homodinas** [68], que, conforme a Figura (2.6), consistem na mistura das saídas do divisor de feixes com osciladores locais com fases ajustáveis (conforme [68], $\theta = \pi$ para a medida de $\mathbf{X}$ e $\theta = 0$ para $\mathbf{P}$), seguida das medidas das diferenças entre os números de fótons de cada uma das saídas. De fato, através de um ensemble de medidas, Alice consegue medir a distribuição de probabilidades de $\mathbf{X}'_1$ e $\mathbf{P}'_2$, que em termos da função de Wigner (2.52), é obtidas através de integrações parciais em $\mathbf{X}'_2$ e $\mathbf{P}'_1$:

$$W(x'_1, p'_2, x_3, p_3) = \iint dp'_1 dx'_2 W(x'_1, p'_1, x'_2, p'_2, x_3, p_3) \\ = \iint dx dp W_u(x, p) W_{ab} \left(\sqrt{2}x'_1 - x, p - \sqrt{2}p'_2; x_3, p_3 \right) \quad (2.54)$$

As diferenças entre os números de fótons obtidas durante intervalos de tempo, que no regime intenso se transformam nas correntes elétricas i_X e i_P , são enviadas a Bob por meio

de um canal de comunicação clássico. Condicionado aos valores recebidos, Bob realiza a operação unitária $x_3 \rightarrow x'_3 = x_3 - \sqrt{2}x'_1$ e $p_3 \rightarrow p'_3 = p_3 - \sqrt{2}p'_2$, que corresponde à deslocamentos nas quadraturas do modo b :

$$W(x'_1, p'_2, x_3, p_3) = \iint dx dp W_u(x, p) \times W_{ab}(\sqrt{2}x'_1 - x, p - \sqrt{2}p'_2; x_3 - \sqrt{2}x'_1, p_3 - \sqrt{2}p'_2) \quad (2.55)$$

Finalmente, o modo b é enviado a Victor, que realiza uma medida homodina neste campo, obtem sua função de Wigner, e consegue assim compará-la com aquela do modo u . De fato, o resultado desta última homodinagem é dado pelas integrações parciais de (2.55) em x'_1 e p'_2 , que, juntamente com a expressão (2.40), nos fornecem a função de Wigner do modo b :

$$\begin{aligned} W_b(x_3, p_3) &= \iint dx'_1 dp'_2 \iint dx dp W_u(x, p) \times \\ &\quad W_{ab}(\sqrt{2}x'_1 - x, p - \sqrt{2}p'_2; x_3 - \sqrt{2}x'_1, p_3 - \sqrt{2}p'_2) \\ &= \frac{1}{2\pi e^{-2r}} \iint dx dp W_u(x, p) \exp \left[-\frac{(x - x_3)^2 + (p - p_3)^2}{e^{-2r}} \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

Definindo $G(x, p) \equiv \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\frac{(x^2 + p^2)}{\sigma} \right]$, onde $\sigma = e^{-2r}$, vemos que o resultado acima pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} W_b(x_3, p_3) &= \frac{1}{2\pi} \iint dx dp W_u(x, p) G(x - x_3, p - p_3) \\ &= (W * G)(x_3, p_3), \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde $*$ denota a convolução entre as funções W_u e G . Notemos que no limite $r \rightarrow \infty$, temos $G(x - x_3, p - p_3) \propto \delta(x - x_3)\delta(p - p_3)$, o que dá

$$W_b(x_3, p_3) \rightarrow W_u(x, p), \quad (2.58)$$

ou seja, no caso em que o par emaranhado é do tipo EPR, expressão (2.41), a função de Wigner que descreve o modo u é transferida integralmente para o modo de b .

No caso em que o parâmetro r , que define o grau de compressão no estado emaranhado (2.40), é finito, é conveniente definir uma medida do sucesso do teletransporte. No presente contexto de variáveis contínuas em que **somente estados coerentes** serão considerados no modo u , esta medida será dada pela **fidelidade** [18]:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(|\alpha_1\rangle_u, \varrho_b) = \langle \alpha_1 |_u \varrho_b |\alpha_1\rangle_u, \quad (2.59)$$

onde $|\alpha_1\rangle_u$ é um estado coerente do modo u , e ϱ_b é operador densidade final do campo b . Notemos que esta expressão pode ser reescrita em termos da função distribuição Q de Husimi [112, 129]:

$$\mathcal{F} = \pi Q^{\varrho_b}(\alpha_1), \quad (2.60)$$

Além disso, é definida a **fidelidade média** sobre todos os estados coerentes iniciais

$$\bar{\mathcal{F}} = \int \mathcal{F}(|\alpha_1\rangle_u, \varrho_b) P(|\alpha_1\rangle_u) d|\alpha_1\rangle_u, \quad (2.61)$$

onde $P(|\alpha_1\rangle_u)$ é a densidade de probabilidade correspondente. De acordo com [14], se não houver emaranhamento compartilhado entre Alice e Bob (situação em que $r = 0$ na expressão (2.40)), a fidelidade média será limitada por

$$\bar{\mathcal{F}} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.62)$$

que define o limiar clássico. Como havíamos dito, a fidelidade média alcançado no experimento de Furusawa *et al.* [54] foi igual a $\mathcal{F} = 0.58 \pm 0.02$, de modo que o teletransporte foi realizado com sucesso.

Capítulo 3

Fundamentos

Neste capítulo, apresentaremos uma breve síntese de conceitos importantes para este trabalho.

3.1 Ótica de Fourier

Com o objetivo de clarificar os conceitos de vetor de onda transversal e espectro angular de um campo eletromagnético, assim como suas extensões para os campos quânticos de um e dois fótons, façamos uma breve revisão sobre a ótica de Fourier [90, 55, 110].

3.1.1 Vetor de onda transversal e espectro angular

Consideremos uma região $0 \leq z \leq Z$ do espaço (ver Figura 3.1), onde é definido um campo escalar monocromático de frequência ω , tal que

$$E(\mathbf{r}, t) = \mathcal{U}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{U}(\mathbf{r})$ é uma amplitude complexa. Sendo uma função de quadrado integrável em todos os planos $z = \text{cte}$, $0 \leq z \leq Z$, esta amplitude pode ser decomposta numa transfor-

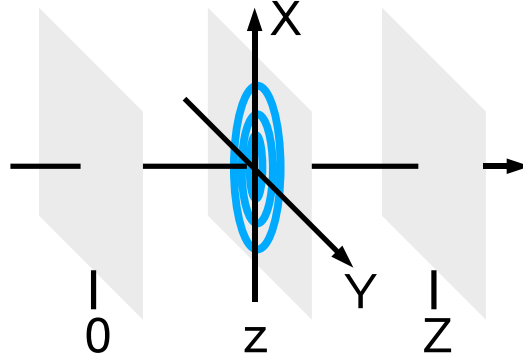


Figura 3.1: Ilustração da região $0 \leq z \leq Z$, onde no plano z a amplitude $\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, z)$ é linearmente decomposta.

mada de Fourier bidimensional,

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} u(\mathbf{q}, z) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}}, \quad (3.2)$$

ou equivalentemente

$$u(\mathbf{q}, z) = \int d\boldsymbol{\rho} \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, z) e^{-i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}}, \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z)$, sendo $\boldsymbol{\rho}$ o vetor de **posição transversal** no plano z , e $\mathbf{q}$ o vetor de **onda transversal** ao vetor de onda $\mathbf{k}$. Além disso, $u(\mathbf{q}, z)$ é o **espectro angular**, que satisfaz a equação de propagação [90]

$$u(\mathbf{q}, z) = u(\mathbf{q}, 0) e^{\pm i k_z z}, \quad (3.4)$$

onde o sinal $\pm$ corresponde à propagação no sentido positivo (negativo), e

$$k_z^2 = \mathbf{k}^2 - \mathbf{q}^2. \quad (3.5)$$

Considerando somente a propagação ao longo do eixo z positivo, e substituindo (3.5) e (3.4) em (3.2), teremos

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} u(\mathbf{q}, 0) e^{i(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} + \sqrt{\mathbf{k}^2 - \mathbf{q}^2} z)}, \quad (3.6)$$

que tem uma interpretação interessante: a amplitude $\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, z)$ em um ponto $\boldsymbol{\rho}$ num dado plano z é obtida a partir de uma superposição de ondas planas $e^{i(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} + \sqrt{k^2 - \mathbf{q}^2} z)}$ ponderada pelo espectro angular $u(\mathbf{q}, 0)$ no plano $z = 0$. Como a direção de propagação de cada onda plana é dada exclusivamente pelo vetor transversal $\mathbf{q}^1$, vemos que o espectro angular seleciona ondas planas propagantes em diferentes ângulos, o que justifica o adjetivo **angular** em seu nome.

3.1.2 Propagação em meios lineares, aproximações, e exemplos

Através dos conceitos da ótica de Fourier, é possível tratar a propagação de campos em meios materiais. De fato, os campos de maior interesse são os **feixes óticos** ou **paraxiais**, que se propagam nas vizinhanças de uma direção preferencial, e são descritos por espectros angulares que satisfazem a aproximação de Fresnel (paraxial) [110],

$$k_z = \sqrt{k^2 - \mathbf{q}^2} \approx k \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{2k^2} \right), \quad (3.7)$$

onde $|\mathbf{q}| \ll k = |\mathbf{k}|$. Os meios materiais de interesse são os lineares, que satisfazem a relação

$$u(\mathbf{q}, z) = H(\mathbf{q}, z) u(\mathbf{q}, 0), \quad (3.8)$$

onde $H(\mathbf{q}, z)$, que caracteriza as propriedades do meio, é chamada de função de transferência. Um exemplo é dado pela expressão (3.4), que nos fornece $H(\mathbf{q}, z) = e^{i\sqrt{k^2 - \mathbf{q}^2} z}$, e que corresponde à propagação no espaço livre. Um outro exemplo, importante nos próximos capítulos, é a propagação de um campo entre os planos focais de uma lente fina (ver Figura 3.2), que nos fornece a relação [90, 110]

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, 2f) \propto u\left(\frac{\kappa}{f}\boldsymbol{\rho}, 0\right). \quad (3.9)$$

¹A relação (3.5) vincula as componentes $\mathbf{q}$ e k_z do vetor de onda $\mathbf{k}$, pois neste caso o campo é monocromático (k^2 é uma constante), e se propaga ao longo da direção positiva. Sendo assim, a partir dos valores de $\mathbf{q}$ determina-se k_z , e por consequência a direção de propagação da onda plana correspondente.

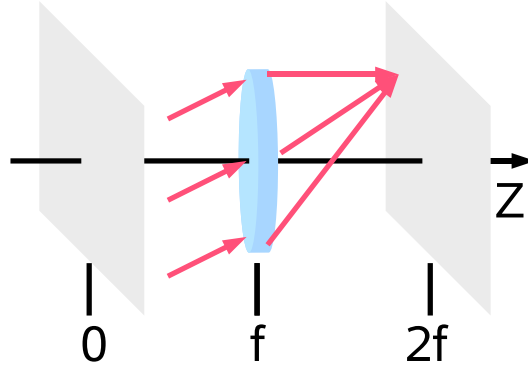


Figura 3.2: Propagação entre os planos focais de uma lente fina, que realiza o mapeamento $u(\mathbf{q}_f, 0) \Longleftrightarrow \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, 2f)$, onde $\mathbf{q}_f = \frac{\kappa}{f}\boldsymbol{\rho}$.

Vemos que a lente realiza uma transformada de Fourier bidimensional: o espectro angular $u(\mathbf{q}_f, 0)$ avaliado no vetor de onda transversal $\mathbf{q}_f = \frac{\kappa}{f}\boldsymbol{\rho}$ no plano $z = 0$, é mapeado na amplitude $\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, 2f)$ no plano $z = 2f$.

3.2 Mecânica quântica

A ótica de Fourier também é um instrumento útil na descrição do estado de campos quânticos, como os campos de um e dois fótons.

3.2.1 Os campos de um e dois fótons

No caso de um campo de **um único fóton** polarizado, monocromático, e paraxial ao longo da direção definida pelo vetor unitário $\mathbf{n}_1$, temos

$$|\phi\rangle = \int d\mathbf{q} u(\mathbf{q}) |\mathbf{q}\rangle_1, \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{q}$ é o vetor de onda transversal, isto é, a componente do vetor de onda $\mathbf{k}$ perpendicular a $\mathbf{n}_1$, tal que $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{k}|$. Além disso, $|\mathbf{q}\rangle_1 \equiv |\mathbf{q} + k(1 - \mathbf{q}^2/2\mathbf{k}^2)\mathbf{n}_1\rangle$ é um estado de Fock que representa um fóton com polarização, e vetor de onda $\mathbf{q} + k(1 - \mathbf{q}^2/2\mathbf{k}^2)\mathbf{n}_1$

definidos, tal que

$$\langle \mathbf{q} | \mathbf{q}' \rangle = \delta^2(\mathbf{q}' - \mathbf{q}), \quad (3.11)$$

onde δ^2 é uma distribuição de Dirac bidimensional. A amplitude $u(\mathbf{q})$ é o espectro angular no plano z (omitimos o índice z para simplificar a notação), que é interpretado como a densidade de probabilidade de encontrar um fóton no estado (3.10) com vetor transversal entre $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$,

$$u(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q} | \phi \rangle. \quad (3.12)$$

Através do uso de elementos óticos, como anteparos ou filtros, é possível manipular o espectro angular, e assim codificar informação no campo de um único fóton. Por exemplo, Walborn *et al.* [133] utilizaram anteparos para codificar 37 símbolos na amplitude $\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, 0)$ de um fóton, e o utilizaram na distribuição de uma chave quântica [10]. Uma outra possibilidade de codificação é decompor o espectro angular em uma base do espaço de funções, e manipular adequadamente os coeficientes da expansão. Por exemplo, tomando a base das funções Hermite-Gaussianas, teríamos

$$u(\mathbf{q}) = \sum_{n=0, m=0}^{\infty} D_{nm} H_n \left(\frac{k_x}{\sigma} \right) H_m \left(\frac{k_y}{\sigma} \right) \exp \left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)}{2\sigma^2} \right]. \quad (3.13)$$

Selecionando convenientemente os coeficientes D_{nm} , teríamos um sistema de D -níveis, ou **qdit** [93], que é a extensão natural do qbit, e que poderá ser útil na implementação de tarefas de informação quântica que envolvam sistemas de dimensões superiores a $D=2$.

Um outro sistema quântico importante é o campo de **dois fótons**, que no caso monocromático, polarizado, e paraxial ao longo de direções² definidas por $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$, é descrito pelo estado [91, 132]

$$|\psi\rangle = \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') |\mathbf{q}\rangle_1 |\mathbf{q}'\rangle_2. \quad (3.14)$$

²Estas direções são distintas a princípio, de modo que os fótons são distinguíveis. Caso elas sejam iguais, é necessário simetrizar o estado (3.14), o que equivalente à simetrização de $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$.

A amplitude normalizada $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q}' | \psi \rangle$, que é interpretada como a densidade de probabilidade de encontrar, respectivamente, os fótons 1 e 2 com vetores transversais entre $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ e $\mathbf{q}' + d\mathbf{q}'$, define as correlações presentes nos vetores transversais destes fótons. De fato, na maioria dos casos, esta amplitude não assume a forma fatorável, $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \neq \mathcal{F}_1(\mathbf{q})\mathcal{F}_2(\mathbf{q}')$, o que implica na impossibilidade de escrever o estado quântico acima como o produto de dois estados de um fóton³. Por exemplo, se

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \delta^2(\mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{q}_0), \quad (3.15)$$

onde δ é uma delta de Dirac, e $\mathbf{q}_0$ é uma constante, teríamos

$$|\psi^{\text{EPR}}\rangle = \int d\mathbf{q} |\mathbf{q}\rangle_1 |\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}\rangle_2, \quad (3.16)$$

que é um estado do tipo EPR [45], maximamente emaranhado, e similar aos encontrados no âmbito das quadraturas, expressões (2.44) e (2.45).

3.2.2 Generalizações para campos policromáticos: codificação em diferentes graus de liberdade e hiper-emaranhamento

A ótica de Fourier pode ser generalizada para campos vetoriais policromáticos [110], que são descritos por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int d\omega \mathcal{U}(\mathbf{r}, \omega, s) \boldsymbol{\epsilon}(s) e^{-i\omega t}, \quad (3.17)$$

onde ω e s são, respectivamente, a frequência e a polarização, sendo a soma em s sobre os valores $\{0, 1\}$ de uma base ortonormal de polarização, e $\boldsymbol{\epsilon}(s)$ o vetor unitário correspondente. Analogamente à expressão (3.3), a amplitude $\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, z, t, s)$ se relaciona com o espectro angular generalizado $u(\mathbf{q}, z, \omega, s)$ através da relação

$$u(\mathbf{q}, z, \omega, s) = \iint d\boldsymbol{\rho} dt \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, z, t, s) e^{-i(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)}, \quad (3.18)$$

³Devido a esta inseparabilidade, os dois fótons se comportam como uma entidade única, que é comumente chamada de **bi-fóton** [132, 50, 51].

que nos permite generalizar o estado de um fóton (3.10) para

$$|\phi\rangle = \sum_s \int d\mathbf{q} \int d\omega u(\mathbf{q}, \omega, s) |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1, \quad (3.19)$$

cuja manipulação do espectro angular generalizado $u(\mathbf{q}, \omega, s)$ também permite a codificação de informação. Por exemplo, se o espectro angular assumisse a forma fatorável

$$u(\mathbf{q}, \omega, s) = f(\mathbf{q}) g(\omega) \lambda_s, \quad (3.20)$$

que é justificada pela aproximação de pulsos paraxiais quase-contínuos⁴ [110], poderíamos, analogamente à expressão (3.13), decompor as funções bem comportadas $f(\mathbf{q})$ e $g(\omega)$ em bases de seus espaços vetoriais, e ajustar os coeficientes da expansão para codificar informação quântica simultânea no vetor de onda transversal e frequência. De fato, escolhendo a base dos polinômios de Hermite, teríamos as superposições

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= \sum_{n=0, m=0}^{\infty} C_{nm} H_n \left(\frac{k_x}{\sigma} \right) H_m \left(\frac{k_y}{\sigma} \right) \exp \left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)}{2\sigma^2} \right], \\ g(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n H_n \left(\frac{\omega}{\beta} \right) \exp \left[-\frac{\omega^2}{2\beta^2} \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

cujos coeficientes C_{nm} e D_n nos permitem codificar informação quântica simultânea na forma de qdits no vetor de onda transversal e na frequência. Um outro caso de interesse é aquele em que o espectro angular assume uma forma não-separável, como por exemplo,

$$u(\mathbf{q}, \omega, s) = F(\mathbf{q}, \omega) \lambda(s), \quad (3.22)$$

que corresponde à situação em que há emaranhamento⁵ entre diferentes graus de liberdade de um único fóton.

⁴Esta aproximação supõe que os envelopes temporal e espacial do pulso variam lentamente, de modo que o pulso é praticamente constante em um ciclo. Neste regime, uma das soluções possíveis da equação de onda é uma onda que evolui no tempo sem alterar sua estrutura espacial, isto é, com sua amplitude temporal e espacial separadas.

⁵A palavra emaranhamento é aqui utilizada de acordo com a sua definição [63], que equivale a **não-separabilidade**.

Finalmente, também podemos generalizar o estado de dois fótons (3.14) para

$$|\psi\rangle = \sum_{s,s'} \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' \Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s') |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1 |\mathbf{q}'\omega', s'\rangle_2, \quad (3.23)$$

onde a amplitude $\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s')$ correlaciona seus diferentes graus de liberdade, pois em geral ela não assume a forma separável $\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s') \neq \mathcal{F}_1(\mathbf{q})\mathcal{F}_2(\mathbf{q}')\mathcal{G}_1(\omega)\mathcal{G}_2(\omega')\lambda_s\lambda_{s'}$. Se

$$\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s') = F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') G(\omega, \omega') \lambda_{s,s'}, \quad (3.24)$$

onde $F(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, e $G(\omega, \omega')$ são funções bem comportadas, teríamos uma situação em que estes graus de liberdade são descorrelacionados, mas há emaranhamento simultâneo em cada um. Esta propriedade é conhecida como **hiper-emaranhamento** [78, 7, 6], e tem sido utilizada em aplicações recentes na informação quântica [134, 136, 8]. Um exemplo é dado por

$$\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s') = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^2(\mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{q}_0) \delta(\omega + \omega' - \omega_0) (-1)^s \delta_{ss'}, \quad (3.25)$$

onde $\mathbf{q}_0, \omega_0$ são constantes, o que dá

$$|\psi^{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s (-1)^s \int d\mathbf{q} \int d\omega |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1 |\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}, \omega_0 - \omega, s\rangle_2, \quad (3.26)$$

e que corresponde a um estado em que a polarização é descrita por um estado de Bell (conforme (2.5)), e o vetor de onda transversal e frequência por estados do tipo EPR (expressão (3.16)).

Até aqui vimos o campo de dois fótons, todavia não discutimos como gerá-lo experimentalmente. Na próxima seção, descreveremos o método atualmente mais utilizado para a sua geração, a **conversão paramétrica descendente espontânea**. Além disso, descreveremos o processo temporal reverso, a **geração de soma de frequências**, que adicionada a um detector, permite a “projeção” em estados maximamente emaranhados.

3.3 A conversão paramétrica

A conversão paramétrica descendente espontânea (C.P.D.E.) é um fenômeno que consiste no **decaimento espontâneo** de um fóton bombeador, de vetor de onda $\mathbf{k}_p$ e frequência ω_p , em um par de fótons, denominados sinal e complementar, cujos vetores de onda são dados por $\mathbf{k}_s$ e $\mathbf{k}_i$, e frequências ω_s e ω_i , respectivamente. Neste decaimento, que é mediado por um cristal não-linear, a energia e o vetor de onda são aproximadamente conservados,

$$\begin{aligned}\omega_p &\approx \omega_i + \omega_s, \\ \mathbf{k}_p &\approx \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_s,\end{aligned}\tag{3.27}$$

sendo que esta última condição, que também é chamada de ajustamento de fase [41], é alcançada devido a propriedades de birrefringência do cristal não-linear. De fato, em cristais uniaxiais, existem dois tipos de ajustamento de fase: enquanto na conversão de ajustamento tipo I os fótons gerados têm a mesma polarização, que é ortogonal à do fóton bombeador, e são emitidos em cones concêntricos, no tipo II, como vimos na seção 2.2.1, os fótons são gerados com polarizações ortogonais entre si, e são emitidos em cones não-concêntricos (para maiores detalhes ver [132]).

3.3.1 Teoria quântica e aproximações

As primeiras investigações experimental [29] e teórica [75] da C.P.D.E. datam da década de 70. Posteriormente, vários tratamentos teóricos foram apresentados [69, 138, 91, 124, 92], cada um abordando diferentes aspectos do fenômeno. Não obstante, em todos os trabalhos em que muitos modos são envolvidos, a C.P.D.E. é modelada por um operador Hamiltoniano efetivo, que, no formalismo de Schrödinger, é dado por

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}^{\text{NL}}(t),\tag{3.28}$$

onde

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^c,\tag{3.29}$$

é o operador de campo livre, sendo

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^p &= \hbar \sum_s \int_{\mathfrak{R}} d\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) \left[\mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}, s) \mathbf{a}(\mathbf{k}, s) + \frac{\mathbf{I}}{2} \right], \\ \mathbf{H}^s &= \hbar \sum_s \int_{\mathfrak{R}} d\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) \left[\mathbf{b}^\dagger(\mathbf{k}, s) \mathbf{b}(\mathbf{k}, s) + \frac{\mathbf{I}}{2} \right], \\ \mathbf{H}^c &= \hbar \sum_s \int_{\mathfrak{R}} d\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) \left[\mathbf{c}^\dagger(\mathbf{k}, s) \mathbf{c}(\mathbf{k}, s) + \frac{\mathbf{I}}{2} \right]\end{aligned}\quad (3.30)$$

os operadores livres correspondentes aos modos bombeador, sinal, e complementar, e

$$\mathbf{H}^{\text{NL}}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}} d\mathbf{r} \mathbf{E}^p(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}^{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) \quad (3.31)$$

é uma perturbação não-linear quadrática dependente do tempo, onde o operador polarizabilidade não-linear elétrica $\mathbf{P}^{\text{NL}}(\mathbf{r}, t)$ é dado por

$$\mathbf{P}_i^{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)}(t) \mathbf{E}_j^s(\mathbf{r}) \mathbf{E}_k^c(\mathbf{r}), \quad (3.32)$$

sendo $\chi_{ijk}^{(2)}(t)$ os elementos do tensor susceptibilidade quadrática [28, 30]. Nestas expressões, $\mathfrak{R}$ é a região de integração, que corresponde a todo o espaço.

Substituindo nesta expressão a expansão dos operadores de campo elétrico [89],

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^p(\mathbf{r}) &= \sum_s \int d\mathbf{k} l(\omega, s) \mathbf{a}(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, s) + c.h., \\ \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) &= \sum_s \int d\mathbf{k} l(\omega, s) \mathbf{b}(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, s) + c.h., \\ \mathbf{E}^c(\mathbf{r}) &= \sum_s \int d\mathbf{k} l(\omega, s) \mathbf{c}(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, s) + c.h.,\end{aligned}\quad (3.33)$$

onde

$$l(\omega, s) = i \left[\frac{\hbar \omega(\mathbf{k}, s)}{2 (2\pi)^3 \epsilon_0 n^2(\mathbf{k}, s)} \right]^{1/2}, \quad (3.34)$$

e considerando somente os termos em que ocorre a conservação do momento linear, $\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \approx 0$, teremos

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{\text{NL}}(t) &= \sum_{s, s', s''} \iiint d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' \Xi(\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s', \mathbf{k}'', s'', \mathbf{r}, t) \mathbf{a}(\mathbf{k}, s) \mathbf{b}^\dagger(\mathbf{k}', s') \mathbf{c}^\dagger(\mathbf{k}'', s'') \\ &+ c.h.\end{aligned}\quad (3.35)$$

onde

$$\Xi(\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s', \mathbf{k}'', s'', \mathbf{r}, t, V) = \frac{1}{2} V \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)}(t) l(\omega, s) l^*(\omega', s') l^*(\omega'', s'') \epsilon_i(\mathbf{k}, s) \epsilon_j^*(\mathbf{k}, s) \epsilon_k^*(\mathbf{k}, s) \times \\ \Pi_{j=x,y,z} \text{sinc}(\Delta k_j L_j) \quad (3.36)$$

sendo $\Delta k_j = (\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')_j$, e $V = L_x L_y L_z$ o volume de quantização.

Passando ao formalismo de interação [122], o estado do sistema, que é dado por

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i t}{\hbar} \mathbf{H}_0} |\Psi_S(t)\rangle, \quad (3.37)$$

onde $|\Psi_S(t)\rangle$ é o estado na formulação de Schrödinger, evoluirá segundo a equação

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = \mathbf{H}_I^{\text{NL}}(t) |\Psi_I(t)\rangle, \quad (3.38)$$

onde

$$\mathbf{H}_I^{\text{NL}}(t) = e^{\frac{i t}{\hbar} \mathbf{H}_0} \mathbf{H}^{\text{NL}}(t) e^{-\frac{i t}{\hbar} \mathbf{H}_0} \\ = \sum_{s,s',s''} \iiint d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' \Xi(\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s', \mathbf{k}'', s'', \mathbf{r}, t, V) e^{i\Delta\omega t} \times \\ \mathbf{a}(\mathbf{k}, s) \mathbf{b}^\dagger(\mathbf{k}', s') \mathbf{c}^\dagger(\mathbf{k}'', s'') + c.h.. \quad (3.39)$$

onde $\Delta\omega = \omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k}'')$. Realizando uma expansão perturbativa na equação (3.38), teremos então

$$|\Psi_I(t)\rangle = \left[\mathbf{I} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \mathbf{H}_I^{\text{NL}}(t') + \dots \right] |\Psi_I(t_0)\rangle. \quad (3.40)$$

Neste ponto da teoria, algumas aproximações são usualmente realizadas. Por exemplo, no estudo de correlações envolvendo campos multimodais paraxiais [91, 132, 6, 47], admite-se que:

1. O tensor $\chi_{ijk}^{(2)}(t)$ é constante no tempo, de modo se escolhermos a origem dos tempos tal que $t = T/2$ e $t_0 = -T/2$, e tomarmos o limite $T \rightarrow \infty$ no estado (3.40), teremos

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{i\Delta\omega t} \propto \delta(\Delta\omega), \quad (3.41)$$

onde δ é uma distribuição de Dirac.

2. O estado quântico do campo bombeador é polarizado e descrito por um estado coerente, de modo que

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, s) \rightarrow \delta_{s,s_0} u(\mathbf{k}), \quad (3.42)$$

ou seja, o operador de aniquilação dos modos do bombeador é transformado em uma amplitude complexa.

3. As dimensões transversais espaciais $\mathcal{R}_T$ do cristal abarcam o perfil do bombeador, de modo tomando o limite $L_x, L_y \rightarrow \infty$ na expressão (3.36), teremos

$$\text{sinc}(\Delta k_x L_x) \text{sinc}(\Delta k_y L_y) \propto \delta(\Delta k_x) \delta(\Delta k_y), \quad (3.43)$$

onde, novamente, δ é a distribuições de Dirac.

4. As funções $l(\omega, s)$ na (3.36) são aproximadamente constantes para todos os modos envolvidos. Não obstante, elas acoplam somente os modos paraxiais, isto é, dadas as direções de propagação preferenciais $\mathbf{n}_j$, onde $j = p, s, i$ corresponde aos modos bombeador, sinal, e complementar, vale a aproximação de Fresnel (paraxial), Eq. (3.7). Sendo assim, podemos escrever

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, s) \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{q}, \omega, s) \equiv \mathbf{a}[\mathbf{q} + (\omega/c) (1 - \mathbf{q}^2 c^2 / 2\omega^2) \mathbf{n}_p, s] \quad (3.44)$$

para o operador de aniquilação do bombeador. Nesta expressão, $\mathbf{q}$ é o vetor de onda transversal à direção $\mathbf{n}_p$ de propagação do bombeador, e ω é a frequência correspondente. O mesmo vale para os operadores $\mathbf{b}(\mathbf{k}, s)$ e $\mathbf{c}(\mathbf{k}, s)$ dos modos sinal e complementar.

3.3.2 O estado quântico da C.P.D.E.

Utilizando estas aproximações no estado (3.40), supondo que os modos sinal e complementar estão inicialmente no estado de vácuo, $|\Psi_I(-\frac{T}{2})\rangle = |\text{vac}\rangle$, e considerando

somente a primeira correção na série perturbativa, chegaremos ao estado quântico que descreve a C.P.D.E. [91, 6]:

$$|\psi\rangle_{CPDE} = C_1 |\text{VAC}\rangle + C_2 |\psi\rangle, \quad (3.45)$$

onde

$$|\psi\rangle = \sum_{s,s'} \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' \Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s') |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_s |\mathbf{q}' \omega', s'\rangle_i \quad (3.46)$$

é um estado de dois fótons, expressão (3.23). C_1 e C_2 são constantes de normalização, tais que $|C_2| \ll |C_1|$, com C_2 dependente da susceptibilidade não-linear do cristal, assim como de sua dimensão longitudinal L_z , etc. A expressão (3.45) nos mostra que o estado quântico resultante da conversão paramétrica é uma superposição, ponderada pelos coeficientes C_1 e C_2 , do estado de vácuo quântico com um estado de dois fótons, cuja amplitude de probabilidade é dada por

$$\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s') = \lambda_{s,s'} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L_z}{k}} u(\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', Z) \gamma(\mathbf{q}, \omega, \mathbf{q}', \omega'), \quad (3.47)$$

onde $u(\mathbf{q}, \omega, Z)$ é o **espectro angular normalizado** do bombeador [91] no plano Z que passa pelo plano do cristal, e $\gamma(\mathbf{q}, \omega, \mathbf{q}', \omega')$ é a função ajustamento de fase longitudinal, que em geral depende da dimensão L_z longitudinal do cristal, e das magnitudes k , k_s , e k_i do bombeador, sinal e complementar, respectivamente. No regime quase-monocromático ou de pulsos paraxiais quase-contínuos [110, 91, 92, 2] esta função é aproximadamente igual a

$$\gamma(\mathbf{q}, \omega, \mathbf{q}', \omega') \approx \text{sinc} \left[\frac{L_z |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{4K} \right] \text{sinc} [\alpha(\omega - \omega')], \quad (3.48)$$

que se reduz a uma constante,

$$\gamma(\mathbf{q}, \omega, \mathbf{q}', \omega') \rightarrow 1, \quad (3.49)$$

no limite de cristal fino, $L_z \rightarrow 0$, e é muitas vezes aproximada por uma função Gaussiana em alguns cálculos [80],

$$\gamma(\mathbf{q}, \omega, \mathbf{q}', \omega') = \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{2g^2} \right) \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{|\omega - \omega'|^2}{2\sigma^2} \right), \quad (3.50)$$

onde $g = \sqrt{L_z/4K}$. Finalmente, combinando estes resultados com a fatoração do espectro angular $u(\mathbf{q}+\mathbf{q}', \omega+\omega', Z) \approx F(\mathbf{q}+\mathbf{q}')G(\omega+\omega')$, que, conforme [110], é válida neste regime, teríamos a amplitude (3.47) escrita numa forma fatorável ⁶ similar à da expressão (3.24).

Aplicando os postulados da mecânica quântica [121] à superposição (3.45), vemos que as probabilidades de encontrar zero fótons e dois fótons no campo gerado pela C.P.D.E. são dadas respectivamente por $|C_1|^2$ e $|C_2|^2$, onde $|C_1|^2 \gg |C_2|^2$: a C.P.D.E. pode ser vista então como uma **fonte probabilística de dois fótons**.

3.4 A geração de soma de frequências

3.4.1 Processo reverso temporal à C.P.D.E., Hamiltonianos efetivos, e estado quântico

Um outro fenômeno de interesse é a **geração de soma de frequências** (G.S.F.), que consiste na aniquilação de dois fótons, de momentos $\mathbf{k}_{1f}$ e $\mathbf{k}_{2f}$, e frequências ω_{1f} e ω_{2f} , e a criação de outro, com momento e frequência $\mathbf{k}_g$ e ω_g . Assim como a C.P.D.E., este processo é mediado por um cristal não-linear, que impõe os vínculos de **conservação de energia**, e a **conservação de momento**:

$$\begin{aligned}\omega_{1f} + \omega_{2f} &\approx \omega_g, \\ \hbar(\mathbf{k}_{1f} + \mathbf{k}_{2f}) &\approx \hbar\mathbf{k}_g.\end{aligned}\tag{3.51}$$

Estes vínculos são alcançados de duas maneiras através da birrefringência do cristal: no tipo I, os dois fótons aniquilados têm a **mesma polarização**, e a G.S.F. dá origem a um fóton com polarização ortogonal a desses fótons. Já no tipo II, os dois fótons têm

⁶De fato, argumentos experimentais para esta fatoração foram demonstrados no trabalho de J. T. Barreiro *et al.* [7], onde estados de dois fótons hiper-emaranhados com alta pureza em cada grau de liberdade separado foram gerados.

polarizações ortogonais, e a G.S.F. dá origem a um fóton com polarização igual à de um deles. Além disso, notemos que no caso degenerado de G.S.F., isto é, em que $\omega_{1f} = \omega_{2f} = \omega_f$, e $\omega_g \approx 2\omega_f$, temos a **geração de segundo harmônico** (G.S.H.), que foi o primeiro processo não-linear observado [52], o que ocorreu no início da década de 60.

Comparando a G.S.F. com a C.P.D.E., vemos que um processo é o reverso temporal do outro. De fato, a G.S.F. é tratada quanticamente [143, 88, 76] pelo termo conjugado hermiteano da C.P.D.E. no Hamiltoniano efetivo (3.35), em que aparece o termo

$$\mathbf{b}(\mathbf{k}, s) \mathbf{c}(\mathbf{k}', s') \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}'', s''), \quad (3.52)$$

sendo $\mathbf{b}(\mathbf{k}, s) \equiv \mathbf{a}_{1f}(\mathbf{k}, s)$ e $\mathbf{c}(\mathbf{k}', s') \equiv \mathbf{a}_{2f}(\mathbf{k}', s')$ os operadores de aniquilação correspondentes aos modos do campo fundamental. Seguindo aproximações similares àquelas descritas na seção anterior, é possível demonstrar que, no regime paraxial, os Hamiltonianos efetivos (3.35) para as conversões tipo I e II, podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_I &\equiv g_1 \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' \mathbf{a}_{1f}(\mathbf{q}, \omega, s) \mathbf{a}_{2f}(\mathbf{q}', \omega', s) \mathbf{a}_g^\dagger(\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', s^\perp) + h.c., \\ \mathbf{H}_{II} &\equiv g_2 \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' \mathbf{a}_{1f}(\mathbf{q}, \omega, s) \mathbf{a}_{2f}(\mathbf{q}', \omega', s^\perp) \mathbf{a}_g^\dagger(\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', s) + h.c., \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde g_1 e g_2 são constantes de acoplamento, que dependem das dimensões do cristal, da susceptibilidade não-linear, etc.

3.4.2 O detector emaranhador de dois fótons (D.E.D.F.)

Uma das aplicações da G.S.F. é a realização de um **detector emaranhador de dois fótons** [81], que descreveremos através da sigla D.E.D.F.⁷ que realiza “projeções” em estados maximamente emaranhados. Para que este ponto se torne compreensível, estudemos primeiramente o caso de um único grau de liberdade, o vetor de onda transversal.

⁷Esta abreviação vem da tradução do termo *entangling two-photon detector*, definida em [81].

Suponhamos que um par de fótons descrito no estado (3.14) incida sobre um cristal não-linear cortado para a G.S.F., cujo Hamiltoniano efetivo é descrito por [135]

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= g_1 \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' d\mathbf{q}'' \delta^2(\mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{q}'') \mathbf{a}_{1f}(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{2f}(\mathbf{q}') \mathbf{a}_g^\dagger(\mathbf{q}'') + h.c., \\ &= g_1 \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \mathbf{a}_{1f}(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{2f}(\mathbf{q}') \mathbf{a}_g^\dagger(\mathbf{q} + \mathbf{q}') + h.c., \end{aligned} \quad (3.54)$$

e que corresponde a um caso particular de (3.53). Após a interação perturbativa, o estado quântico do sistema evoluirá para

$$|\psi\rangle_{\text{GSF}} = |\psi\rangle_f |\text{VAC}\rangle_g + g_1 |\text{VAC}\rangle_f \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') |\mathbf{q} + \mathbf{q}'\rangle_g + \dots, \quad (3.55)$$

onde $|\text{VAC}\rangle_f$ é o estado de vácuo do campo incidente. Considerando somente a componente em primeira ordem deste estado,

$$|\psi^{(1)}\rangle_{\text{GSF}} = |\text{VAC}\rangle_f \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') |\mathbf{q} + \mathbf{q}'\rangle_g, \quad (3.56)$$

teremos a probabilidade de encontrar o campo incidente no vácuo e o fóton gerado com o vetor de onda transversal entre $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_0 + d\mathbf{q}_0$ igual a

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}(\mathbf{q}_0) &= \left| \langle \text{VAC} |_f \langle \mathbf{q}_0 |_g |\psi\rangle_{\text{GSF}} \right|^2 d\mathbf{q}_0 \\ &= \left| \int d\mathbf{q} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}) \right|^2 d\mathbf{q}_0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

e se detectarmos destrutivamente o fóton gerado com o vetor transversal $\mathbf{q}_0$, teremos o estado final

$$\begin{aligned} |\psi_F\rangle &= \mathbf{a}_g(\mathbf{q}_0) |\psi\rangle_{\text{GSF}} \\ &\propto |\text{VAC}\rangle, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde $|\text{VAC}\rangle$ é o estado de vácuo de todos os campos envolvidos.

Suponhamos agora que ao invés de incidirmos os fótons sobre um cristal não-linear, os incidamos sobre um dispositivo que realiza a medida projetiva do observável soma dos vetores de onda transversais $\mathbf{Q}$, cujos autovetores são estados do tipo (3.16), ou seja,

$$\mathbf{Q} |\psi^{\text{EPR}}\rangle = \mathbf{q}_0 |\psi^{\text{EPR}}\rangle, \quad (3.59)$$

onde

$$\begin{aligned} |\psi^{\text{EPR}}\rangle &= \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \delta^2(\mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{q}_0) |\mathbf{q}\rangle_1 |\mathbf{q}'\rangle_2, \\ &= \int d\mathbf{q} |\mathbf{q}\rangle_1 |\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}\rangle_2, \end{aligned} \quad (3.60)$$

sendo $\mathbf{q}_0$ uma constante. De acordo com os postulados da mecânica quântica [121], a probabilidade de encontrar numa medida de $\mathbf{Q}$ no estado (3.14) o vetor de onda transversal entre $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_0 + d\mathbf{q}_0$ é dada por

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}(\mathbf{q}_0)d\mathbf{q}_0 &= |\langle \psi^{\text{EPR}} | \psi \rangle|^2 d\mathbf{q}_0 \\ &= \left| \int d\mathbf{q} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}) \right|^2 d\mathbf{q}_0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

e o estado após a medida fica

$$|\psi_F\rangle = |\psi^{\text{EPR}}\rangle. \quad (3.62)$$

Comparando estas duas expressões com (3.57) e (3.58), vemos que na G.S.F. a probabilidade de encontrar o campo incidente no vácuo e o fóton gerado com o vetor de onda transversal entre $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_0 + d\mathbf{q}_0$ é igual à probabilidade de encontrar o valor $\mathbf{q}_0$ numa medida projetiva do observável $\mathbf{Q}$ no estado (3.14). A G.S.F. mais detecção se assemelha então a um dispositivo que realiza uma “projeção” no estado maximamente emaranhado (3.16). Todavia, notemos a diferença entre a “G.S.F.+detecção” e a medida projetiva de $\mathbf{Q}$: enquanto a primeira é destrutiva, ou seja, envolve uma detecção que evolui o sistema para o estado de vácuo, a segunda é projetiva, e evolui os dois fótons para o autovetor correspondente ao autovalor medido.

A extensão destas idéias para o grau de liberdade de frequência é trivial: a G.S.F., que é descrita pelo operador Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = g_1 \iint d\omega d\omega' \mathbf{a}_{1f}(\omega) \mathbf{a}_{2f}(\omega') \mathbf{a}_g^\dagger(\omega + \omega') + h.c., \quad (3.63)$$

seguida da detecção do fóton gerado equivale a uma projeção sobre um autovetor do observável soma de frequências Ω , ou, equivalentemente, do observável energia, $\Omega/\hbar$:

$$\Omega |\psi^{\text{EPR}}\rangle = \omega_0 |\psi^{\text{EPR}}\rangle, \quad (3.64)$$

onde

$$|\psi^{\text{EPR}}\rangle = \int d\omega |\omega\rangle_1 |\omega_0 - \omega\rangle_2. \quad (3.65)$$

No caso da polarização a “G.S.F.+detector” equivale a um discriminador completo⁸ dos estados de Bell em polarização, isto é, um dispositivo que mede simultaneamente os observáveis $\sigma_Z^1 \sigma_Z^2$ e $\sigma_X^1 \sigma_X^2$ em polarização. Conforme apresentado em [73], se dois cristais cortados para G.S.F. do tipo I forem combinados de modo que seus eixos sejam perpendiculares entre si, teremos uma interação descrita por um Hamiltoniano dado por

$$\mathbf{H} = g \sum_s \mathbf{a}_{1f}(s) \mathbf{a}_{1f}(s) \mathbf{a}_g^\dagger(s^\perp) + h.c., \quad (3.66)$$

onde a soma é sobre a base ortonormal de polarização $\{0, 1\}$, que pode ser a base linear $\{H, V\}$, e $s^\perp$ denota o valor ortogonal a s . Se incidirmos um par de fótons preparado no estado de polarização $|\psi_I\rangle = \alpha |\phi^+\rangle + \beta |\phi^-\rangle = 1/\sqrt{2}[(\alpha + \beta) |00\rangle + (\alpha - \beta) |11\rangle]$ sobre este conjunto, teremos, após a interação perturbativa, o estado renormalizado

$$|\psi_F\rangle = |\text{VAC}\rangle_f \frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha + \beta) |1\rangle_g + (\alpha - \beta) |0\rangle_g]. \quad (3.67)$$

Reescrevendo este estado na base de polarização linear $\{0_X, 1_X\}$ do fóton gerado, onde $|0_X\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $|1_X\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle - |1\rangle)$, chegaremos a

$$|\psi_F\rangle = |\text{VAC}\rangle_f (\alpha |0_X\rangle_g + \beta |1_X\rangle_g). \quad (3.68)$$

A partir desta expressão, vemos que as probabilidades de encontrar os valores 0_X e 1_X para a polarização do fóton gerado são dadas por $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$, respectivamente, que são as probabilidades de ocorrência dos estados $|\phi^+\rangle$ e $|\phi^-\rangle$ no estado inicial. Em outras palavras, o Hamiltoniano (3.66) permite a distinção entre estados $|\phi^+\rangle$ e $|\phi^-\rangle$.

⁸Como demonstrado experimentalmente em [73], é possível a discriminação de todos os estados de Bell mediante a utilização de uma interação não-linear. Todavia, esta tarefa é impossível quando somente interações lineares são utilizadas [85], sendo um exemplo a experiência discutida na seção 2.2.1.

Analogamente, para a discriminação dos estados de Bell $|\psi^+\rangle$ e $|\psi^-\rangle$ basta combinar dois cristais cortados para G.S.F. tipo II com os eixos cruzados, de modo a ter o Hamiltoniano de interação

$$\mathbf{H} = g \sum_s \mathbf{a}_{1f}(s) \mathbf{a}_{1f}(s^\perp) \mathbf{a}_g^\dagger(s) + h.c.. \quad (3.69)$$

Finalmente, notemos que se os Hamiltonianos (3.54), (3.63), (3.66), e (3.69), que descrevem a interação nos diferentes graus de liberdade, fossem combinados, teríamos um D.E.D.F. completo, isto é, que permitiria a “projeção” sobre autovetores do tipo (3.26),

$$|\psi^{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s (-1)^s \int d\mathbf{q} \int d\omega |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1 |\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}, \omega_0 - \omega, s\rangle_2, \quad (3.70)$$

que de fato é um autovetor comum do conjunto de observáveis que comuta $\{\mathbf{Q}, \mathbf{\Omega}, \sigma_Z^1 \sigma_Z^2, \sigma_X^1 \sigma_X^2\}$.

No próximo capítulo desenvolveremos estas idéias e as utilizaremos na proposta de realização do teletransporte completo de um fóton.

Capítulo 4

O teletransporte quântico completo de um fóton paraxial

Neste capítulo, utilizaremos os conceitos desenvolvidos para analisar o teletransporte quântico completo de um fóton paraxial [48, 71], que é um dos objetos quânticos mais simples. O termo completo significa que o teletransporte transmite todo o estado quântico do fóton, que é codificado em todos os graus de liberdade: frequência, vetor de onda transversal, e polarização. A medida que o esquema geral é explicado, apresentaremos uma possível proposta experimental, que é baseado nos conceitos discutidos no capítulo 3. Posteriormente, analisaremos alguns exemplos.

4.1 O teletransporte quântico completo

No capítulo 2, discutimos duas implementações experimentais do teletransporte quântico. Enquanto na primeira o estado quântico era codificado na polarização, que é um grau de liberdade **discreto**, na segunda eram utilizadas as quadraturas do campo, que são variáveis **contínuas**. No presente capítulo, apresentaremos um esquema **híbrido**, que transmite o estado quântico de um fóton paraxial codificado tanto em variáveis contínuas, o vetor de

onda transversal e a frequência, como na polarização. De fato, como estes são todos os graus de liberdade possíveis, e portanto aonde todo o estado quântico de um fóton paraxial é codificado, denominaremos este esquema de teletransporte quântico **completo**.

Como havíamos discutido na seção 3.2.2, o estado quântico puro mais geral de um fóton paraxial é dado pela expressão

$$|\phi\rangle_1 = \sum_s \int d\mathbf{q} \int d\omega u(\mathbf{q}, \omega, s) |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1, \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{q}$, ω , e s são, respectivamente, o vetor de onda transversal, a frequência, e a polarização, e $|\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1 \equiv |\mathbf{q} + (\omega/c)(1 - \mathbf{q}^2 c^2 / 2\omega^2) \mathbf{n}_1, s\rangle$ é um estado de Fock que descreve um fóton com vetor de onda $\mathbf{k} = \mathbf{q} + (\omega/c)(1 - \mathbf{q}^2 c^2 / 2\omega^2) \mathbf{n}_1$ tal que $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{k}|$, e polarização s . Dependendo da forma do espectro angular $u(\mathbf{q}, \omega, s)$, é possível codificar informação quântica em múltiplos graus de liberdade, ou até mesmo emaranhamento entre eles, de modo que este tipo de sistema poderá ser útil em tarefas de informação quântica que envolvam sistemas com dimensões superiores a $D = 2$. Suponhamos que Alice receba um fóton preparado no estado quântico acima, e deseje transmiti-lo a Bob¹. Como realizar esta tarefa? Alice e Bob utilizarão o teletransporte quântico, cujo esquema geral encontra-se ilustrado na Figura 4.1.

Como parte inicial do protocolo, Alice e Bob compartilham previamente um par de fótons 2 e 3 preparados no estado quântico

$$|\psi\rangle_{23} = \sum_{s=0}^1 \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' \Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s) |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_2 |\mathbf{q}', \omega', s\rangle_3, \quad (4.2)$$

onde a amplitude normalizada $\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s)$ é dada por

$$\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s) = F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') G(\omega, \omega') \lambda_s, \quad (4.3)$$

sendo que as funções $F(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, $G(\omega, \omega')$, e λ_s determinam o emaranhamento nos diferentes graus de liberdade. De fato, como vimos no capítulo anterior, esta situação cor-

¹Notemos que transmitir o estado (4.1) equivale a enviar o espectro angular generalizado $u(\mathbf{q}, \omega, s)$.

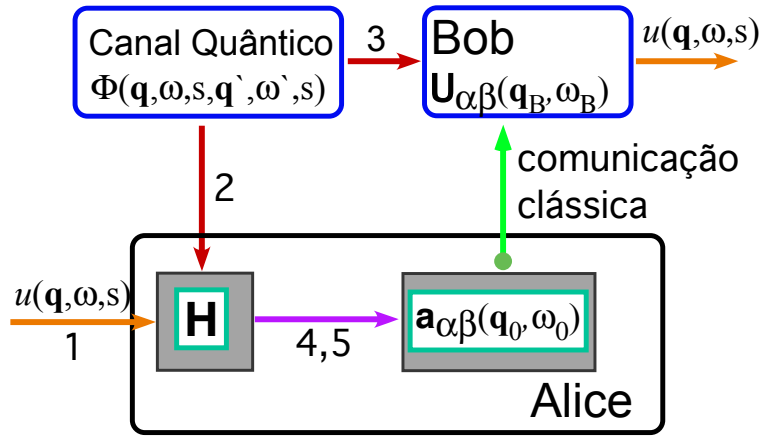


Figura 4.1: Esquema geral do teletransporte quântico completo de um fóton paraxial. Alice e Bob compartilham previamente um par de fótons 2 e 3 preparado no estado hiperemaranhado de amplitude $\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s)$. Alice realiza uma medida de Bell generalizada nos fótons 1 e 2, que consiste numa interação não-linear perturbativa que gera um fóton na direção 4 e 5, seguida de sua detecção, que fornece informações sobre seu vetor de onda $\mathbf{q}_0$, sua frequência ω_0 , e a sua polarização na base diagonal, $\{A, D\}$. Os resultados da medida são enviados por um canal de comunicação clássica a Bob, que realiza uma operação unitária condicional, e assim obtêm o estado do fóton 1 codificado no fóton 3.

responde ao compartilhamento de um par de fótons hiper-emaranhado, que pode ser gerado probabilisticamente via C.P.D.E. [78, 6, 7]: enquanto o emaranhamento presente nos graus de liberdade de vetor de onda transversal e frequência é consequência direta das leis de conservação de momento linear e energia, respectivamente, o emaranhamento em polarização é gerado ou através da configuração de “cones cruzados” [77], que ocorre na C.P.D.E. tipo II e que foi discutida na seção 2.2.1, ou por meio de dois cristais cruzados e cortados para C.P.D.E. tipo I [79]. Combinando estes recursos, temos um par de fótons que, no regime de pulsos paraxiais quase-contínuos, é aproximadamente descrito pelo estado hiper-emaranhado acima.

O estado quântico inicial do sistema de três fótons será dado então por

$$|\psi_I\rangle_{123} = |\phi\rangle_1 |\psi\rangle_{23}. \quad (4.4)$$

4.1.1 Medida conjunta

Após o compartilhamento do par de fótons 2 e 3, Alice realizará uma medida conjunta sobre os fótons 1 e 2, que será dividida em duas partes, e corresponde a uma generalização da medida de Bell em polarização descrita na seção 2.1.2.

Interação não-linear

De acordo com a Figura 4.1, a primeira parte da medida de Alice consiste numa interação não-linear entre os fótons 1 e 2, que será descrita pelo Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{H}_i, \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &\equiv g_1 \sum_{s=0}^1 \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' \mathbf{a}_1(\mathbf{q}, \omega, s) \mathbf{a}_2(\mathbf{q}', \omega', s) \mathbf{a}_4^\dagger(\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', s^\perp) + h.c. \\ \mathbf{H}_2 &\equiv g_2 \sum_{s=0}^1 \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' \mathbf{a}_1(\mathbf{q}, \omega, s) \mathbf{a}_2(\mathbf{q}', \omega', s^\perp) \mathbf{a}_5^\dagger(\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', s) + h.c. \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo $\mathbf{a}_i^\dagger(\mathbf{q}, \omega, s)$ e $\mathbf{a}_i(\mathbf{q}, \omega, s)$ operadores de criação e aniquilação de fótons com vetores de onda $\mathbf{k} = \mathbf{q} + (\omega/c)(1 - \mathbf{q}^2 c^2 / 2\omega^2) \mathbf{n}_i$ e polarização s , e g_1 e g_2 constantes de acoplamento. Estas expressões descrevem uma interação não-linear em que dois fótons são destruídos, e outro é criado; enquanto $\mathbf{H}_1$ destrói fótons com a mesma polarização s nas direções 1 e 2, e cria outro com a polarização ortogonal $s^\perp$ na direção 4, $\mathbf{H}_2$ destrói fótons com polarizações ortogonais s and $s^\perp$ nas direções 1 e 2, e cria outro com polarização s na direção 5. Admitindo que g_1 and g_2 são pequenas, podemos utilizar o tratamento perturbativo descrito nas seções 3.3.1, 3.3.2, e 3.4, e obter o estado quântico

$$|\Psi_F\rangle = [\mathbf{I} + \eta \mathbf{H} + \dots] |\Psi_I\rangle, \quad (4.7)$$

onde η é um parâmetro perturbativo que depende das constantes de acoplamento g_1 e g_2 . Supondo que o estado inicial do sistema é dado por $|\Psi_I\rangle = |\psi_I\rangle_{123} |\text{vac}\rangle_{45}$, onde $|\psi_I\rangle_{123}$ é dado pela expressão (4.4), e $|\text{vac}\rangle_{45}$ é o estado de vácuo dos modos 4 e 5, teremos a correção em primeira ordem dada por

$$|\psi^{(1)}\rangle = N \mathbf{H} |\psi_I\rangle_{123} |\text{vac}\rangle_{45}, \quad (4.8)$$

onde N é uma constante de normalização.

A realização experimental do Hamiltoniano (4.5) pode ser alcançada através de cristais não-lineares cortados para a geração de soma de frequências (G.S.F.), e arranjos conforme ilustrado na Figura 4.2. Enquanto o primeiro par é constituído por cristais cortados para o tipo I de conversão e alinhados com eixos óticos perpendiculares de modo a realizarem a conversão $H, H \rightarrow V$ e $V, V \rightarrow H$, o segundo par é constituído por cristais do tipo II, que alinhados levam a evolução $H, V \rightarrow H$ e $V, H \rightarrow V$ para as componentes dos fótons 1 e 2. Além disso, devido ao ajustamento de fase e finura dos cristais [91], são garantidas as conservações de vetor de onda transversal e frequência.

Apesar deste esquema ter sido experimentalmente implementado por Kim *et al.* [73], a eficiência de conversão² da G.S.F. envolvendo fótons da C.P.D.E. é extremamente baixa,

²A eficiência η na C.P.D.E. é definida como a razão do número de pares produzidos pelo

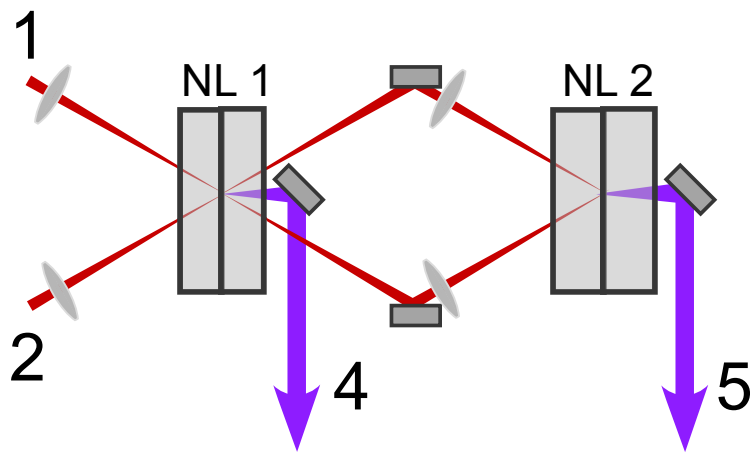


Figura 4.2: Esquema de implementação do Hamiltoniano não-linear de Alice. Os fótons 1 e 2 impingem em cristais não-lineares cortados para G.S.F. Enquanto o primeiro par, NL1, realiza conversões do tipo I, em que as componentes dos fótons 1 e 2 sofrem as evoluções $H, V \rightarrow H$ e $V, H \rightarrow V$, o segundo, NL2, realiza $H, V \rightarrow H$ e $V, H \rightarrow V$. As conservações de vetor de onda transversal e frequência são asseguradas pelo ajustamento de fase e finura dos cristais, conforme [91].

tipicamente da ordem de 10^{-14} , de modo que torna-se inviável a realização destas duas conversões. Não obstante, existem alternativas promissoras, como a utilização de novos cristais não-lineares [39], ou o uso do processo ótico não-linear de mistura de quatro ondas estimulado, em que ocorre a conversão $\omega_1 + \omega_2 \longrightarrow \omega_s + \omega_i$, onde s é um laser externo intenso. De acordo com Ou [100], dependendo da intensidade do laser externo, este “aniquilador de dois fótons” atingiria altas eficiências.

Aquisição de informação

A segunda parte da medida de Alice é a aquisição de informação sobre o vetor de onda transversal, a frequência, e a polarização do fóton criado. Para obtê-las, Alice utiliza fotodetectores, filtros, e polarizadores que implementam os operadores de aniquilação

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{00}(\mathbf{q}_0, \omega_0) &= \mathbf{a}_4(\mathbf{q}_0, \omega_0, D), \\ \mathbf{a}_{01}(\mathbf{q}_0, \omega_0) &= \mathbf{a}_5(\mathbf{q}_0, \omega_0, A), \\ \mathbf{a}_{10}(\mathbf{q}_0, \omega_0) &= \mathbf{a}_4(\mathbf{q}_0, \omega_0, D), \\ \mathbf{a}_{11}(\mathbf{q}_0, \omega_0) &= \mathbf{a}_5(\mathbf{q}_0, \omega_0, A). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Cada operador $\mathbf{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0)$ destrói um fóton com vetor de onda $\mathbf{k}_0 = \mathbf{q}_0 + (\omega_0/c) (1 - \mathbf{q}_0^2 c^2 / 2\omega_0^2) \mathbf{n}_j$, onde $j = 4, 5$, e polarização D ou A, onde D(A) são os elementos da base de polarização linear que forma $45^\circ(135^\circ)$ com os elementos H(V) da base padrão. Aplicando um destes operadores no estado (4.8), teremos o estado do sistema após a medida:

$$|\psi_{\alpha\beta}\rangle \propto \mathbf{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0) |\psi^{(1)}\rangle, \quad (4.10)$$

que naturalmente dependerá do operador de aniquilação aplicado (para maiores detalhes, consultar o apêndice A.1).

número de fótons do bombeador. Tipicamente, para um cristal β -borato de bário, bombeado com um laser UV pulsado de 100mW, teríamos 10^{10} pares de fótons convertidos por segundo. Usando $\nu \sim 10^{15}\text{Hz}$ para UV, chegaríamos a $P = 100\text{mW} \sim 10^{17}$ fótons/s, o que dá $\eta \sim 10^{-7}$ [26].

Assim como a medida de Bell em polarização descrita na seção (2.1.2), notemos a característica **conjunta** ou **global** desta medida de Alice. A interação não-linear descrita pelo Hamiltoniano (4.5) destrói fótons com vetores de onda transversais $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ e frequências ω e ω' , e cria outro com vetor de onda $\mathbf{q} + \mathbf{q}'$ e $\omega + \omega'$. Sendo assim, ao detectar o fóton gerado nas direções 4 ou 5, Alice obterá informações somente sobre a **soma** dos vetores de onda transversais e frequências dos fótons 1 e 2, e não sobre seus valores individuais³. Analogamente, ao detectar sua polarização na base diagonal $\{D, A\}$, Alice não distinguirá se este fóton nasceu do primeiro ou segundo termos ($s = 0$ e $s = 1$) das Hamiltonianas $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$, e portanto também não terá informação sobre as polarizações individuais dos fótons 1 e 2. Além disso, notemos que apesar de **destrutiva**, a medida realizada por Alice sobre os fótons 1 e 2 se assemelha a uma **projeção** do estado inicial (4.4) em estados do tipo EPR no vetor de onda transversal, frequência, e polarização

$$\begin{aligned} |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s (-1)^s \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' \delta^2(\mathbf{q}' + \mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \delta(\omega + \omega' - \omega_0) \times \\ &\quad |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1 |\mathbf{q}', \omega', s^\perp\rangle_2, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s (-1)^s \int d\mathbf{q} \int d\omega |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1 |\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}, \omega_0 - \omega, s^\perp\rangle_2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

De fato, como vimos na seção 3.4.2, este procedimento corresponde à ação de um detector emaranhador de dois fótons (D.E.D.F.), que mede projetivamente o conjunto de observáveis que comutam $\{\mathbf{Q}, \mathbf{\Omega}, \sigma_Z^1 \sigma_Z^2, \sigma_X^1 \sigma_X^2\}$, onde $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{\Omega}$ são os operadores soma dos vetores de onda transversais e a soma das frequências dos fótons 1 e 2, e $\sigma_Z^1 \sigma_Z^2$ e $\sigma_X^1 \sigma_X^2$ são a paridade e a fase da polarização, conforme a seção 2.1.2. Na seção A.2 do apêndice, analisamos com mais detalhes esta correspondência entre as medidas destrutiva

³Notemos que este procedimento é análogo à mistura no divisor de feixes seguida da homodinagem na experiência de teletransporte em quadraturas, seção 2.2.2. Não obstante, apesar de ambos os teletransportes lidarem com variáveis contínuas, notemos as diferenças: enquanto nas quadraturas a aquisição de informação é contínua no tempo, isto é, é dada pela aquisição de uma corrente elétrica, no presente contexto as informações sobre o vetor de onda transversal e frequência do fóton gerado são obtidas de uma única vez, na detecção do fóton.

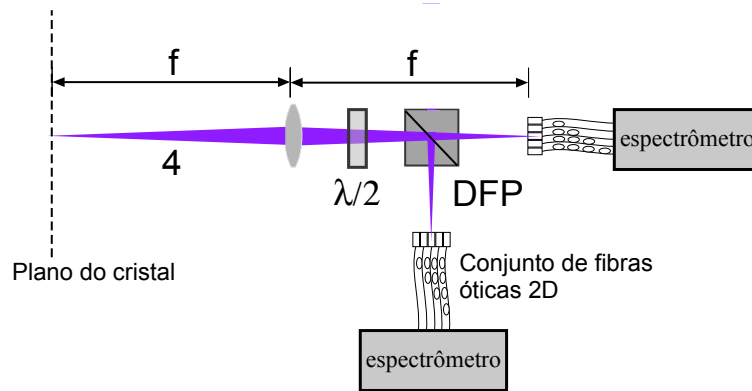


Figura 4.3: Esquema de detecção de Alice. O fóton gerado na direção 4 atravessa uma lente fina, uma placa de $\lambda/2$, um divisor de feixes polarizado (D.F.P.), um sistema de fibras ópticas, e um conjunto de espectrômetros.

e projetiva.

A realização experimental dos operadores de aniquilação (4.9) está ilustrada na Figura 4.3. Após as interações não-lineares, o fóton gerado em uma dada direção atravessa uma lente fina, uma placa de meia-onda, um divisor de feixes polarizado (D.F.P.), um sistema de fibras ópticas, e um conjunto de espectrômetros. A placa de meia-onda $\lambda/2$ orientada a $22,5^\circ$ e o D.F.P. permitem a separação entre as componentes de polarização D e A, de modo a discriminar todos os estados de Bell [73], como discutimos na seção 3.4.2. Por outro lado, de acordo com o exemplo da seção 3.1.2, a lente fina montada na configuração f-f mapeia a distribuição do vetor de onda transversal no plano do cristal nas posições no plano de detecção. Em cada uma destas posições encontra-se uma fibra óptica de um dado comprimento conhecido, de modo que as posições são mapeadas no tempo de trânsito do fóton pelas fibras. As fibras são conectadas a espectrômetros, que realizam a separação das frequências. Após todos estes estágios, o fóton é finalmente detectado em um dado tempo⁴ τ , e sua detecção nos fornecerá as informações α e β , isto é, a sua direção (4 ou 5)

⁴Neste esquema experimental lasers pulsados se fazem necessários para a contagem do tempo. Além disso, o comprimento das fibras será limitado superiormente pela diferença entre

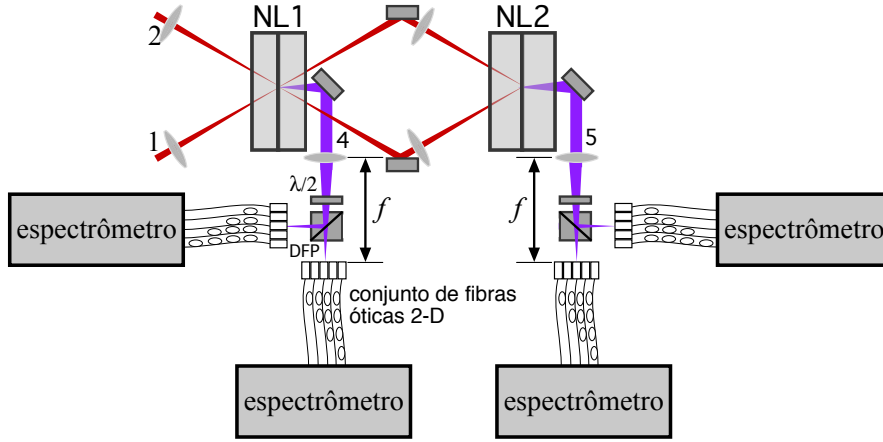


Figura 4.4: Esquema completo de detecção de Alice: interações não-lineares seguidas da detecção do fóton gerado.

e polarização (D e A), além de $\mathbf{q}_0$, e ω_0 . Estas informações serão posteriormente enviadas a Bob para a realização da operação unitária. O esquema completo da detecção de Alice encontra-se na Figura 4.4.

Finalmente, notemos que este esquema experimental de teletransporte quântico é condicionado à detecção do fóton gerado na G.S.F. Sendo assim, ele é dito **senalizado** (Um outro exemplo de teletransporte sinalizado é fornecido em [144]).

4.1.2 Operação unitária, estado final, e fidelidade

Após a medida, Alice envia seus resultados a Bob, que realiza sobre o fóton 3 a operação unitária condicional $\mathbf{U}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_B, \omega_B)$ definida por

$$\mathbf{U}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_B, \omega_B) |\mathbf{q}, \omega, s\rangle = \sigma_Z^\alpha \sigma_X^\beta |\mathbf{q} + \mathbf{q}_B, \omega + \omega_B, s\rangle, \quad (4.12)$$

onde $\sigma_Z^\alpha \sigma_X^\beta$ corresponde à identidade $\mathbf{1}$, ou os operadores de Pauli σ_Z , σ_X , e $\sigma_Z \sigma_X$ dependendo dos valores 0 e 1 dos índices α e β . A operação (4.12) corresponde a deslocamentos $\mathbf{q}_B$ e ω_B no vetor de onda transversal e frequência, respectivamente, além de dois pulsos, e inferiormente pelo tempo de duração destes pulsos.

uma rotação $\sigma_Z^\alpha \sigma_X^\beta$ na polarização. Os deslocamentos $\mathbf{q}_B$ e ω_B dependem dos valores $\mathbf{q}_0$ e ω_0 obtidos por Alice, e dos valores centrais do vetor de onda transversal central e frequência $\mathbf{q}_p$ e ω_p da amplitude $\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s)$ no estado (4.2). Por outro lado, as rotações dependem, respectivamente, dos índices α e β que definem a polarização e a direção em que o fóton criado na GSF é detectado. Utilizando (4.12) em (4.10), chegaremos ao estado final do sistema:

$$|\psi_F^{\alpha\beta}\rangle \propto \mathbf{U}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_B, \omega_B) |\psi_{\alpha\beta}\rangle. \quad (4.13)$$

Para ilustrar este resultado, consideremos o caso limite em que Alice e Bob compartilham um estado maximamente hiper-emaranhado, isto é, um estado tipo EPR [45] nos graus de liberdade $\mathbf{q}$ e ω , juntamente com o estado de Bell $|\phi^+\rangle_{23}$ em polarização. Neste caso, as funções $F(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, $G(\omega, \omega')$, e λ_s na amplitude (4.3) assumem a forma

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &\propto \delta^2(\mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{q}_p), \\ G(\omega, \omega') &\propto \delta(\omega + \omega' - \omega_p), \\ \lambda_s &= 1/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Na seção A.1 do apêndice, é demonstrado que, após as respectivas correções na polarização, todos os estados (4.13) assumem a forma

$$|\psi_F^{\alpha\beta}\rangle \propto \sum_s \int d\mathbf{q} \int d\omega u(\Delta\mathbf{q} - \mathbf{q}_B, \Delta\omega - \omega_B, s) |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_3, \quad (4.15)$$

onde $\Delta\mathbf{q} \equiv \mathbf{q} + \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_p$, $\Delta\omega \equiv \omega + \omega_0 - \omega_p$, e excluímos o estado dos outros campos, todos no vácuo. Usando $\mathbf{q}_B = \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_p$ e $\omega_B = \omega_0 - \omega_p$, Bob terá

$$|\psi_F^{11}\rangle \propto |\phi\rangle_3, \quad (4.16)$$

que corresponde ao teletransporte perfeito do estado quântico do fóton 1.

Ao invés de obter o estado quântico final neste caso limite, substituamos a Eq (4.14) no estado (4.10). Por exemplo, no caso $\alpha = \beta = 1$, teremos

$$|\psi_{11}\rangle \propto \sum_s (-1)^s \int d\mathbf{q} \int d\omega u(\Delta\mathbf{q}, \Delta\omega, s) |\mathbf{q}, \omega, s^\perp\rangle_3. \quad (4.17)$$

Usando a expressão da transformada de Fourier do espectro angular dada no capítulo 3,

$$u(\mathbf{q}, z, \omega, s) = \iint d\boldsymbol{\rho} dt \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, z, t, s) e^{-i(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)}, \quad (4.18)$$

chegaremos a

$$|\psi_{11}\rangle \propto \sum_s (-1)^s \iint d\mathbf{q} d\omega \iint d\boldsymbol{\rho} dt \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, t, s) e^{-i[(\Delta\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\rho} - \Delta\omega t]} |\mathbf{q}, \omega, s^\perp\rangle_3. \quad (4.19)$$

Aplicando nesta expressão a operação

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, t, s) \rightarrow e^{i(\mathbf{q}_B \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega_B t)} \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, t, s), \quad (4.20)$$

onde novamente $\mathbf{q}_B = \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_p$ e $\omega_B = \omega_0 - \omega_p$, juntamente com a rotação $|\mathbf{q}, \omega, s^\perp\rangle_3 \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\sigma}_X |\mathbf{q}, \omega, s^\perp\rangle_3 = (-1)^s |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_3$ na polarização, obteremos novamente $|\psi\rangle \rightarrow |\psi_F^{11}\rangle \propto |\phi\rangle_3$. Vemos então que os deslocamentos no vetor de onda transversal e frequência realizados por Bob são respectivamente equivalentes a inclusão de fases dependentes da posição e do tempo na amplitude $\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}, t, s)$. Os demais casos do estado quântico final (4.13) são idênticos, exceto pela rotação em polarização ($\mathbf{I}$ para $\alpha = \beta = 0$, $\boldsymbol{\sigma}_Z$ para $\alpha = 1, \beta = 0$, e $\boldsymbol{\sigma}_X$ para $\alpha = 0, \beta = 1$, conforme (4.12)).

Experimentalmente a operação unitária (4.13) condicional pode ser implementada através de um par de placas de ondas, ou células de Pockels, que implementam a rotação em polarização, seguida de um modulador espacial eletro-ótico, que inclui na amplitude do vetor de onda transversal uma fase $e^{i\mathbf{q}_B \cdot \boldsymbol{\rho}}$ dependente da posição, e que, como vimos, corresponde ao deslocamento no vetor de onda transversal. Finalmente, o deslocamento em frequência seria realizado através de uma outra G.S.F. entre o fóton 3 e um campo de luz laser intenso de frequência ω_B , tal que $\omega_3 + \omega_B \rightarrow \omega_1$. Altas eficiências percentuais (93%) foram recentemente alcançadas neste processo [43].

Antes de discutirmos outros exemplos, definiremos a medida do sucesso do teletransporte como a fidelidade⁵ $\mathcal{F}$, que no caso de dois estados puros $|\eta\rangle$ e $|\xi\rangle$ se reduz

⁵Novamente aqui nos deparamos com o problema da definição da fidelidade. No presente capítulo, tomaremos aquela definida em [36], que é diferente daquela apresentada no capítulo (2), expressão (2.12).

a $\mathcal{F} = |\langle \eta | \xi \rangle|^2$. No presente caso, teremos

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0) = |\langle \phi | \psi_F^{\alpha\beta} \rangle|^2, \quad (4.21)$$

onde $|\phi\rangle$ é o estado do fóton 1, Eq. (4.1), e $|\psi_F^{\alpha\beta}\rangle$ é o estado final (4.13). Como o estado final depende dos resultados das medidas de Alice, isto é, de qual operador (4.9) foi implementado, definiremos também a fidelidade média⁶

$$\bar{\mathcal{F}} = \sum_{\alpha,\beta} \int d\mathbf{q}_0 \int d\omega_0 p_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0) \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0), \quad (4.22)$$

onde $p_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0)$ é um peso dado por

$$p_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0) = \text{Tr}[\varrho_{45} \Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0)], \quad (4.23)$$

onde $\varrho_{45} = \text{Tr}_{123}(|\psi^{(1)}\rangle \langle \psi^{(1)}|)$, com $|\psi^{(1)}\rangle$ dado pela Eq. (4.8), é o operador densidade dos campos 4 e 5 antes da aniquilação do fóton gerado, e

$$\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0) = \mathbf{a}_{\alpha\beta}^\dagger(q_0, \omega_0) |\text{VAC}\rangle \langle \text{VAC}| \mathbf{a}_{\alpha\beta}(q_0, \omega_0) \quad (4.24)$$

é um projetor correspondente ao estado de Fock de um fóton. Este peso corresponde à probabilidade de medir o fóton criado com vetor de onda $\mathbf{k}_0 = \mathbf{q}_0 + (\omega_0/c)(1 - \mathbf{q}_0^2 c^2 / 2\omega_0^2) \mathbf{n}_j$, onde $j = 4$ ou 5 , e polarização A ou D.

⁶Para evitar uma possível confusão, notemos que a média aqui considerada é diferente daquela encontrada na expressão (2.13) do capítulo 2. Enquanto a expressão (4.21) é sobre os resultados da medida de Alice, (2.13) é realizada sobre todos os possíveis estados desconhecidos.

4.2 Exemplos

Suponhamos agora que as funções $F(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, $G(\omega, \omega')$, e λ_s na amplitude (4.3) sejam dadas por

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= v(\mathbf{q} + \mathbf{q}')\gamma(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \\ G(\omega, \omega') &= t(\omega + \omega')\mu(\omega - \omega'), \\ \lambda_s &= 1/\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

que aproximam os resultados em experimentos de CPDE com bombesadores pulsados (ver seção 3.3.2 e [6]), e que o espectro angular do fóton 1 assuma a forma fatorável

$$u(\mathbf{q}, \omega, s) = f(\mathbf{q}) g(\omega) \lambda_s, \tag{4.26}$$

que é justificada pela aproximação de pulsos paraxiais quase-contínuos, conforme discutido na seção 3.2.2 e em [110]. Substituindo estas expressões e os deslocamentos $\mathbf{q}_B = \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_p$ e $\omega_B = \omega_0 - \omega_p$ na (4.13), e o resultado obtido na (4.21), chegaremos a

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0, \omega_0) = \mathcal{M}(\mathbf{q}_0)\mathcal{T}(\omega_0), \tag{4.27}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{q}_0) &= \left| C \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' f^*(\mathbf{q}') f(\mathbf{q}) v(\mathbf{q}' - \mathbf{q} + \mathbf{q}_p) \gamma(2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}' - \mathbf{q} - \mathbf{q}_p) \right|^2, \\ \mathcal{T}(\omega_0) &= \left| D \iint d\omega d\omega' g^*(\omega') g(\omega) t(\omega' - \omega + \omega_p) \mu(2\omega_0 - \omega' - \omega - \omega_p) \right|^2, \end{aligned} \tag{4.28}$$

sendo C e D constantes de normalização. Como Alice e Bob compartilham um estado maximamente emaranhado em polarização, notemos que as expressões acima não dependem nem dos índices α e β nem dos coeficientes λ_s do estado inicial. Todavia, ela depende tanto dos resultados das medidas $\mathbf{q}_0$ e ω_0 como das amplitudes $f(\mathbf{q})$ e $g(\omega)$.

A fidelidade média, Eq. (4.22), será dada por

$$\bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{M}} \bar{\mathcal{T}}, \quad (4.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}} &= \int d\mathbf{q}_0 \mathcal{M}(\mathbf{q}_0), \\ \bar{\mathcal{T}} &= \int d\omega_0 \mathcal{T}(\omega_0). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Finalmente, suporemos que as funções $v(\mathbf{q})$, $\gamma(\mathbf{q})$, $t(\omega)$, e $\mu(\omega)$ são Gaussianas,

$$\begin{aligned} v(\mathbf{q}) &= J(q_X - q_{pX}, 0, \sigma_{q+}) J(q_Y - q_{pY}, 0, \sigma_{q+}), \\ \gamma(\mathbf{q}) &= J(q_X, 0, \sigma_{q-}) J(q_Y, 0, \sigma_{q-}), \\ t(\omega) &= J(\omega - \omega_p, 0, \sigma_{\omega+}), \\ \mu(\omega) &= J(\omega, 0, \sigma_{\omega-}), \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde $\mathbf{q}_p$ e ω_p são, respectivamente, o vetor de onda transversal central e a frequência central do par hiper-emaranhado, e

$$J(a, b, \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{\Delta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\Delta^2} - i a b\right). \quad (4.32)$$

Como veremos abaixo, se tomarmos nas (4.31) os limites $\sigma_{q+}/\sigma \rightarrow 0$ e $\sigma_{q-}/\sigma \rightarrow \infty$, teremos o caso EPR discutido acima, expressões (4.14).

Exemplo 1: amplitude gaussiana deslocada em vetor de onda transversal e frequência

Suponhamos que as funções na amplitude (4.26) sejam descritas por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= J(q_X - q_{cX}, 0, \sigma_q) J(q_Y - q_{cY}, 0, \sigma_q), \\ g(\omega) &= J(\omega - \omega_c, 0, \sigma_\omega), \end{aligned} \quad (4.33)$$

que correspondem a funções Gaussianas deslocadas nos espaços dos vetores de onda transversal e frequências pelas quantidades $\mathbf{q}_c$ e ω_c , respectivamente.

A Figura 4.5 mostra a dependência de $\mathcal{M}$ com a razão q_{0X}/σ_q entre a componente X do vetor de onda transversal detectado q_{0X} e a largura σ_q da amplitude do fóton 1, para diferentes valores centrais $q_{cX}/\sigma_q = 0, 2, 4$, e para os parâmetros $q_{pX} = 0$, $\sigma_{q+}/\sigma_q = 1/2$, e $\sigma_{q-}/\sigma_q = 5$. Vemos que altas fidelidades ($\mathcal{M} > 0.9$) são alcançadas no intervalo $q_{0X} = q_{cX} \pm 2\sigma_q$, sendo o valor máximo obtido quando os vetores de onda transversal detectado e central coincidem, $q_{0X} = q_{cX}$. O mesmo deve ocorrer para $q_{0Y} = q_{cY}$.

Um resultado importante é ilustrado na Figura 4.6, que ilustra a dependência da fidelidade média $\bar{\mathcal{M}}$ com as razões σ_{q+}/σ_q e σ_{q-}/σ_q , que quantificam a qualidade das correlações quânticas, para os parâmetros $q_{cx}/\sigma_q = 1$, $q_{px} = 0$. A média é calculada no intervalo $Q/\sigma_q = 4.2$. Vemos que altas fidelidades são alcançadas quando as razões σ_{q+}/σ_q e σ_{q-}/σ_q se tornam pequena e grande, respectivamente, o que corresponde a mais correlações quânticas, sendo o limite $\sigma_{q+}/\sigma_q \rightarrow 0$ e $\sigma_{q-}/\sigma_q \rightarrow \infty$ dado pelo estado tipo EPR⁷. Este gráfico nos demonstra que apesar de correlações EPR serem somente alcançadas em um limite que de fato é não-físico⁸, quanto mais fina for a largura da função soma e mais larga a função diferença frente à largura da amplitude a ser teletransportada, melhores serão os resultados obtidos.

Os resultados numéricos para a frequência são similares aos apresentados acima, pois as fidelidades (4.28) correspondentes ao vetor de onda transversal e frequência são semelhantes. Não obstante, a Figura 4.7 mostra a dependência da fidelidade $\mathcal{T}$ com a razão ω_0/σ_ω entre a frequência detectada ω_0 e a largura σ_ω da amplitude do fóton 1, para $\omega_c/\sigma_\omega = 2.5 \times 10^4$, $\omega_p/\sigma_\omega = 5.0 \times 10^4$, que correspondem a pulsos de duração de picosegundos com frequências centrais $\omega_c \approx 2.5 \times 10^{15}\text{Hz}$ e $\omega_p \approx 5.0 \times 10^{15}\text{Hz}$, respectivamente, e larguras espectrais $\sigma_\omega \approx 100\text{GHz}$. Além disso, fixaram-se os parâmetros

⁷Poderíamos nos questionar sobre o limite inverso $\sigma_{q+}/\sigma_q \rightarrow \infty$ e $\sigma_{q-}/\sigma_q \rightarrow 0$. De fato, neste limite também teremos correlações tipo EPR na diferença dos vetores de onda transversais. Se Bob realizar operações unitárias do tipo soma, e não de diferença, altas fidelidades serão encontradas.

⁸Um limite similar ocorre para o caso das quadraturas de campo. Ver expressão (2.40).

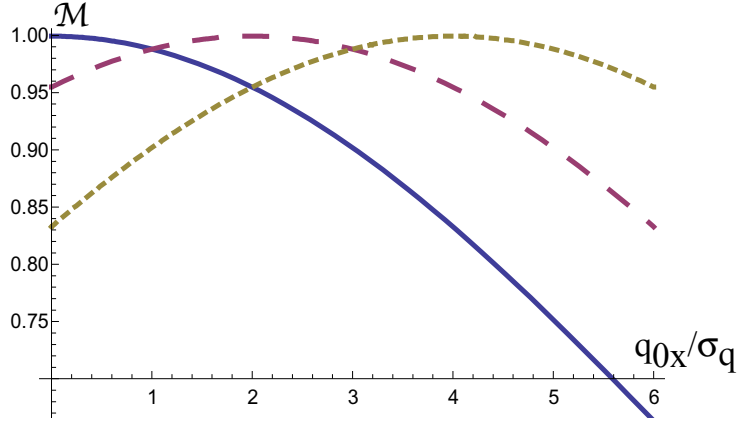


Figura 4.5: Dependência da fidelidade $\mathcal{M}$ com a razão q_{0X}/σ_q para os valores centrais $q_{cX}/\sigma_q = 0, 2, 4$ (linhas sólida, pontilhada larga, e pontilhada pequena, respectivamente) e parâmetros $q_{pX}/\sigma_q = 0$, $\sigma_{q+}/\sigma_q = 1/2$, e $\sigma_{q-}/\sigma_q = 5$. Altas fidelidades ($\mathcal{M} > 0.9$) são alcançadas para $q_{0X} = q_{cX} \pm 2\sigma_q$.

$\sigma_{\omega+}/\sigma_\omega = 1/2$, e $\sigma_{\omega-}/\sigma_\omega = 20$. Vemos que altas fidelidades ($\mathcal{T} > 0.9$) são alcançadas no intervalo $\omega_0 = \omega_c \pm 50\sigma_\omega$.

Exemplo 2: amplitude gaussiana deslocada em posição e tempo

Consideremos agora o caso em que as funções na amplitude do fóton 1 são dadas por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= J(q_X, x_c, \sigma_q) J(q_Y, y_c, \sigma_q), \\ g(\omega) &= J(\omega - \omega_c, t_c, \sigma_\omega), \end{aligned} \quad (4.34)$$

que correspondem a uma amplitude Gaussiana deslocada de $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$ no espaço transversal, e também deslocada de ω_c e t_c na frequência e tempo, respectivamente. Na Figura 4.8, ilustramos a dependência da fidelidade média $\bar{\mathcal{M}}$ com o produto $x_c\sigma_q$, para os parâmetros $q_{pX}/\sigma_q = q_{cX}/\sigma_q = 0$, $\sigma_{q+}/\sigma_q = 1/2$, $\sigma_{q-}/\sigma_q = 10$, e $Q/\sigma_q = 4.2$. Vemos que . Além disso, os resultados obtidos demonstram que a fidelidade média decresce com o aumento do deslocamento transversal x_c . A razão deste decréscimo é a seguinte: quanto maior o valor de x_c , menor é a sobreposição das amplitudes dos fótons 1 e 2, o

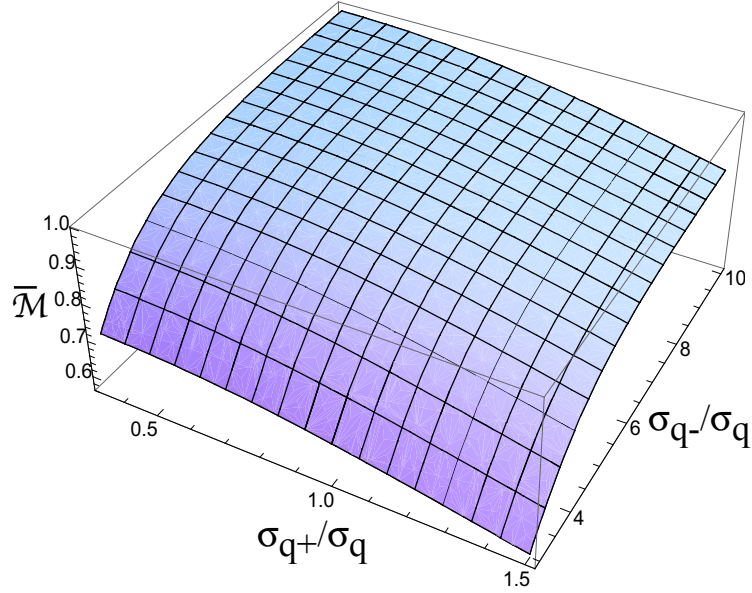


Figura 4.6: Fidelidade média $\bar{\mathcal{M}}$ como função de σ_{q+}/σ_q e σ_{q-}/σ_q , para $q_{cX}/\sigma_q = 1$, $q_{pX}/\sigma_q = 0$, e um intervalo de tamanho $Q/\sigma_q = 4.2$. Altas fidelidades são alcançadas quando $\sigma_{q+}/\sigma_q \rightarrow 0$ e $\sigma_{q-}/\sigma_q \rightarrow \infty$.

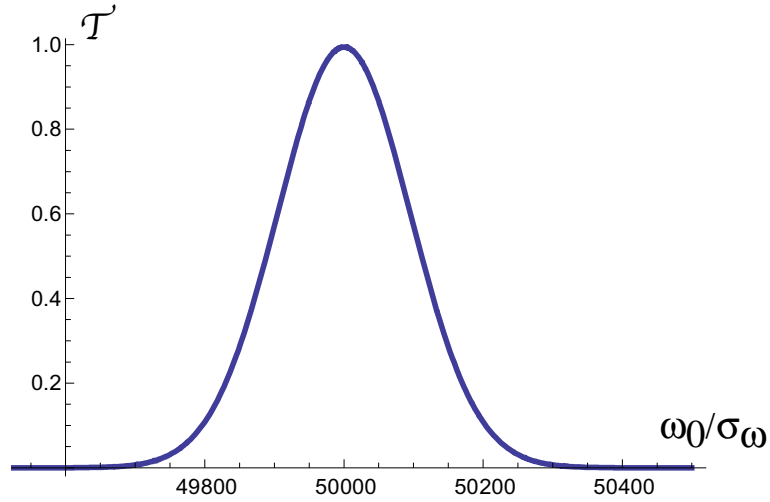


Figura 4.7: Dependência de $\mathcal{T}$ com ω_0/σ_ω para $\omega_c/\sigma_\omega = 2.5 \times 10^4$, $\omega_p/\sigma_\omega = 5.0 \times 10^4$, $\sigma_{\omega+}/\sigma_\omega = 1/2$, e $\sigma_{\omega-}/\sigma_\omega = 20$. Altas fidelidades ($\mathcal{T} > 0.9$) são alcançadas no intervalo $\omega_0 = \omega_c \pm 50\sigma_\omega$.

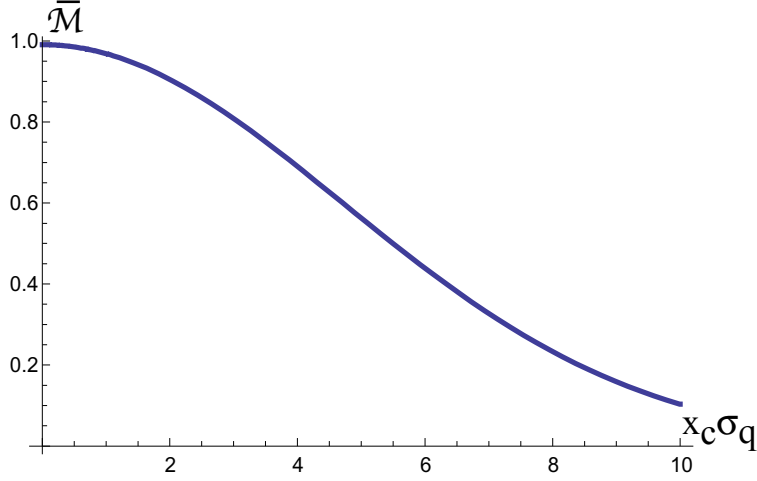


Figura 4.8: Fidelidade média $\bar{\mathcal{M}}$ como função de $x_c \sigma_q$, para $q_{pX}/\sigma_q = q_{cX}/\sigma_q = 0$, $\sigma_{q+}/\sigma_q = 1/2$, $\sigma_{q-}/\sigma_q = 10$, e $Q/\sigma_q = 4.2$. Vemos que $\bar{\mathcal{M}} > 0.95$ para $x_c = (0 \pm 1/\sigma_q)$. A fidelidade média decresce a medida que o deslocamento transversal x_c aumenta.

que implica em uma perda de informação sobre a amplitude do primeiro, e portanto em uma diminuição da fidelidade média. O mesmo raciocínio é empregado para a amplitude deslocada temporalmente em t_c : quanto maior é a separação temporal dos “pacotes” das amplitudes dos fótons 1 e 2, menor é a sobreposição entre eles, e portanto menor será a fidelidade.

É importante notarmos que, de acordo com a Eq. (4.29), para termos altos valores da fidelidade $\bar{\mathcal{F}}$, é necessário que tanto $\bar{\mathcal{M}}$ como $\bar{\mathcal{T}}$ também assumam altos valores. Além disso, notemos que os dois exemplos acima discutidos demonstram que o esquema de teletransporte completo pode funcionar bem para os pares de variáveis de Fourier conjugadas: posição transversal - vetor de onda transversal, e frequência - tempo. Sendo o teletransporte um protocolo linear, vemos então que qualquer campo paraxial com amplitude fatorável e na forma de uma combinação linear de Gaussianas (que pode ser utilizado para codificação de qdits [93]) também poderá ser teletransportado com uma razoável fidelidade.

Capítulo 5

Um caso mais simples: o teletransporte quântico em vetor de onda transversal

No capítulo anterior, vimos que a realização experimental do teletransporte quântico completo de um fóton paraxial é um grande desafio. Neste capítulo, apresentaremos um esquema experimental mais simples [135], em que somente o estado quântico codificado em vetor de onda transversal é teletransportado¹. Como discutimos na seção 3.2.1, este grau de liberdade é muito versátil para a codificação de informação quântica, o que o torna bastante interessante e útil, além de ser uma variável contínua análoga às quadraturas de campo. Analisaremos alguns exemplos, o limite clássico correspondente, o caso de detectores não-pontuais, e a transferência de emaranhamento entre diferentes frequências.

5.1 Teletransporte quântico em vetor de onda transversal

O esquema experimental simplificado do teletransporte encontra-se ilustrado na Figura 5.1. Os passos são idênticos aos discutidos no capítulo 4:

¹Um estudo similar foi recentemente proposto em [87].

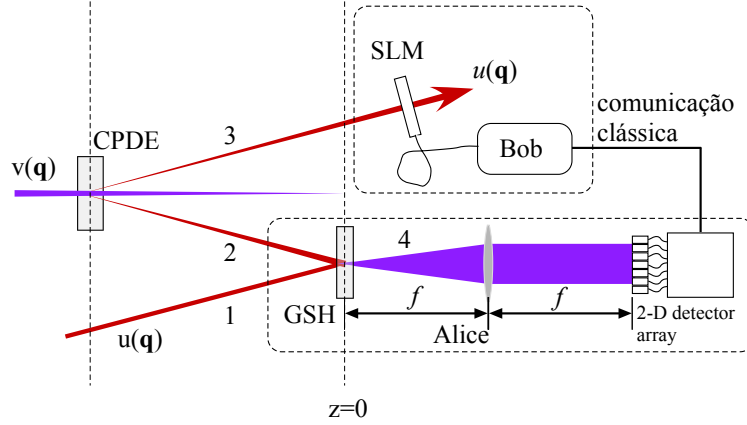


Figura 5.1: Esquema experimental para o teletransporte quântico de um fóton em vetor de onda transversal. SLM designa *spatial light modulator*, ou modulador espacial eletro-ótico.

1. Alice recebe um fóton preparado no estado quântico²

$$|\phi\rangle_1 = \int d\mathbf{q} u(\mathbf{q}) |\mathbf{q}\rangle_1, \quad (5.1)$$

onde $u(\mathbf{q})$ é o espectro angular no plano $z = 0$ da figura.

2. Alice e Bob compartilham os fótons 2 e 3, que são produzidos em uma CPDE (conforme a seção 3.3.2), e preparados no estado emaranhado monocromático e polarizado

$$|\psi\rangle_{23} = \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') |\mathbf{q}\rangle_2 |\mathbf{q}'\rangle_3, \quad (5.2)$$

onde

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = v(\mathbf{q} + \mathbf{q}', Z) \gamma(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (5.3)$$

sendo $v(\mathbf{q} + \mathbf{q}', Z)$ o espectro angular no campo bombeador da CPDE no plano do primeiro cristal, e $\gamma(\mathbf{q}) = \sqrt{2L/\pi^2 K} \text{sinc}(Lq^2/4K)$ é a função ajustamento de fase, onde L é o comprimento longitudinal do cristal, e K é o número de onda do bombeador, conforme a expressão (3.48).

²Discutimos este estado no capítulo 3, seção 3.2.1.

3. O estado inicial dos três fótons será dado então por

$$|\psi_I\rangle = \iiint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' d\mathbf{q}'' u(\mathbf{q}) \Phi(\mathbf{q}', \mathbf{q}'') |\mathbf{q}\rangle_1 |\mathbf{q}'\rangle_2 |\mathbf{q}''\rangle_3. \quad (5.4)$$

4. Alice realiza uma medida conjunta sobre os fótons 1 e 2, cuja primeira parte é dada por uma GSF descrita pelo Hamiltoniano (ver seção 3.4.2)

$$\mathbf{H} \propto \iiint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' d\mathbf{q}'' \delta^2(\mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{q}'') \mathbf{a}_1(\mathbf{q}) \mathbf{a}_2(\mathbf{q}') \mathbf{a}_4^\dagger(\mathbf{q}'') + h.c., \quad (5.5)$$

que leva o sistema ao estado

$$|\psi\rangle \propto |0\rangle_1 |0\rangle_2 \iiint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' d\mathbf{q}'' u(\mathbf{q}) \Phi(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}, \mathbf{q}') |0\rangle_1 |0\rangle_2 |\mathbf{q}'\rangle_3 |\mathbf{q}''\rangle_4. \quad (5.6)$$

Posteriormente, o fóton 4 atravessa uma lente fina arranjada na configuração f-f, e é detectado no plano focal. O operador de detecção é dado por

$$\mathbf{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_D) \propto \mathbf{a}(\mathbf{q}_D), \quad (5.7)$$

onde $\boldsymbol{\rho}_D$ é a posição de detecção, e $\mathbf{q}_D = \frac{\kappa}{f} \boldsymbol{\rho}_D$ é o vetor de onda transversal correspondente no plano do cristal. Como vimos no capítulo 3, seção 3.1.2, esta configuração da lente fina realiza o mapeamento $\mathbf{q}_D \leftrightarrow \boldsymbol{\rho}_D$.

Após a detecção, o estado do fóton 3 evoluirá para

$$|\psi\rangle \propto \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' u(\mathbf{q}) \Phi(\mathbf{q}_D - \mathbf{q}, \mathbf{q}') |\mathbf{q}'\rangle_3. \quad (5.8)$$

5. Alice envia o valor $\mathbf{q}_D$ a Bob, que realiza a operação unitária

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) |\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{q} + \boldsymbol{\alpha}\rangle, \quad (5.9)$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{q}_D$. O estado final do fóton 3 é dado então por

$$|\psi_F\rangle \propto \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' u(\mathbf{q}) \Phi(\mathbf{q}_D - \mathbf{q}, \mathbf{q}' - \boldsymbol{\alpha}) |\mathbf{q}'\rangle_3. \quad (5.10)$$

Substituindo (5.3) em (5.10), e calculando a fidelidade $\mathcal{F} = |\langle \phi | \psi_F \rangle|$ (ver Eq.(2.12)) entre os estados (5.10) e (5.1), teremos

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}_D) = \left| C \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' u^*(\mathbf{q}') u(\mathbf{q}) v(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \gamma(2\mathbf{q}_D - \mathbf{q}' - \mathbf{q}) \right|, \quad (5.11)$$

onde C é uma constante de normalização. Como esta quantidade depende de $\mathbf{q}_D = \frac{\kappa}{f} \boldsymbol{\rho}_D$, tomemos uma média ao longo de uma região de detecção Q , de modo a obter a fidelidade média

$$\overline{\mathcal{F}} = \frac{1}{Q} \int_Q d\mathbf{q}_D \mathcal{F}(\mathbf{q}_D). \quad (5.12)$$

5.2 Exemplos e limite clássico

Suponhamos que $v(\mathbf{q})$ e $\gamma(\mathbf{q})$ sejam funções Gaussianas, ou seja,

$$\begin{aligned} v(\mathbf{q}) &= \frac{1}{w\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{q^2}{2\varepsilon^2}\right), \\ \gamma(\mathbf{q}) &= \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{q^2}{2g^2}\right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde ε e $g = \sqrt{L/4K}$ são as larguras correspondentes, e $u(\mathbf{q})$ seja um modo Hermite-Gauss (HG),

$$u_{nm}(\mathbf{q}) = D_{nm} H_n\left(\frac{k_x}{\sigma}\right) H_m\left(\frac{k_y}{\sigma}\right) \exp\left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)}{2\sigma^2}\right], \quad (5.14)$$

onde $H_n(x)$ é o n -ésimo polinômio de Hermite, D_{nm} é uma constante, e σ é a sua largura. A Figura 5.2 ilustra resultados numéricos da dependência da fidelidade média $\overline{\mathcal{F}}$ com a razão ε/σ para diferentes modos HG em dois casos distintos, e para uma área $Q = 3\sigma \times 3\sigma$. Para as linhas sólidas, $g/\sigma = 200$, isto é, a função ajustamento de fase é muito mais larga do que o espectro angular do bombeador, o que implica em $(\varepsilon/\sigma)/(g/\sigma) = \varepsilon/g \ll 1$ para todos os valores ε/σ do gráfico. Neste regime, vemos que altas fidelidades ($\overline{\mathcal{F}} > 0.90$) são alcançadas para $\varepsilon/\sigma < 1$, ou seja, quanto mais fino é o espectro angular do bombeador em relação ao do fóton 1, mais os fótons 2 e 3 se assemelham a um par

tipo EPR, e por consequência maior é a fidelidade média. Por outro lado, para as linhas interrompidas, temos $g/\sigma = \varepsilon/\sigma$, ou equivalentemente $(\varepsilon/\sigma)/(g/\sigma) = \varepsilon/g = 1$. Neste regime, baixas fidelidades ($\overline{\mathcal{F}} < 0.5$) são sempre encontradas, mesmo para $\varepsilon/\sigma < 1$. Qual é a razão para a grande discrepância entre os valores das fidelidades nestes dois casos?

No caso das linhas interrompidas, em que $\varepsilon/g = 1$, vemos que o produto das Gaussianas (5.13) assume a forma fatorável $\mathcal{F}(\mathbf{q})\mathcal{F}(\mathbf{q}')$. Sendo assim, não há emaranhamento presente no canal quântico (o estado dos fótons 2 e 3 é um produto tensorial), o que implica na drástica diminuição da fidelidade reportada acima. Por outro lado, quando $\varepsilon/g < 1$, temos uma situação em que o estado do par de fótons 2 e 3 é emaranhado, o que provoca as altas fidelidades encontradas. De fato, no caso da CPDE, o caso quântico é experimentalmente alcançado manipulando-se o campo bombeador e usando um cristal fino, tal que $\varepsilon/g < 1$.

Finalmente, notemos que este protocolo permite o envio com alta fidelidade de uma grande quantidade de informação codificada no espectro angular. Por exemplo, considerando o conjunto dos modos HG de ordem $n = 0$ até N , existem $M = \sum_{j=0}^{N+1} j = (N+1)(N+2)/2$ modos disponíveis. Usando os parâmetros $\varepsilon/\sigma = 0.3$ e $g/\sigma = 200$, temos $\mathcal{F} > 0.97$ para N até 7, o que é equivalente ao envio de $\log_2 M > 5$ qbits com esta alta fidelidade.

5.3 Detecção não-pontual, e transmissão de emaranhamento

Até agora consideramos que Alice detecta o fóton 4 através de um detector pontual, que permite descobrir sua posição de detecção ρ_D . Não obstante, os detectores reais são não-pontuais, tendo uma área aonde os fótons são detectados. Qual é a influência deste detector na fidelidade do teletransporte?

Suponhamos que Alice utilize um detector de área D descrito pela função abertura

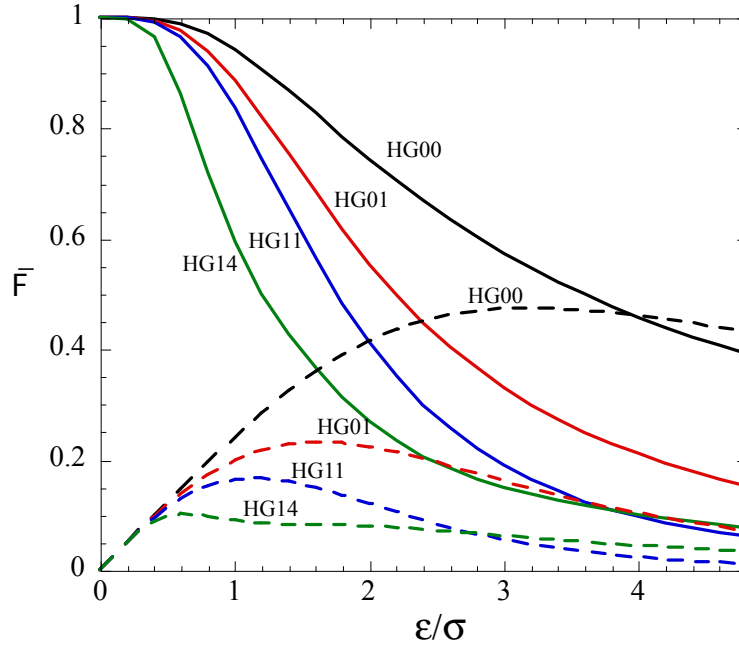


Figura 5.2: Dependência da fidelidade média $\bar{\mathcal{F}}$ com a razão ε/σ para diferentes modos HG. As linhas sólidas correspondem ao caso quântico em que $g/\sigma = 200$, e as interrompidas ao caso de descorrelação, em que $g/\sigma = \varepsilon/\sigma$. Em ambos os casos, a área de detecção é igual a $Q = 3\sigma \times 3\sigma$.

$\mathcal{D}(\rho_D - \rho_0)$, que é centrada em ρ_0 . Após a detecção do fóton 4, o estado do fóton 3 evoluirá para o operador densidade mistura estatística

$$\varrho = \int d\rho_D \mathcal{D}(\rho_D - \rho_0) |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (5.15)$$

onde $|\psi\rangle$ é dado pela expressão (5.8). As condições de hermiticidade e normalização deste estado implicam que $\mathcal{D}(\rho)$ é um número real, e $\int d\rho_D \mathcal{D}(\rho_D - \rho_0) = 1$, respectivamente. Agora, surge a questão: qual é o deslocamento a ser realizado por Bob, se Alice não sabe lhe informar em que ponto dentro da área ocorreu a detecção? Uma possibilidade é aplicar $\mathbf{P}(\kappa\rho_0/f)$, embora este deslocamento possa não ser o melhor possível. Após esta correção, teremos o estado final

$$\varrho_F = \mathbf{P}(\kappa\rho_0/f) \varrho \mathbf{P}^\dagger(\kappa\rho_0/f), \quad (5.16)$$

cuja fidelidade em relação ao estado inicial (5.1), $\mathcal{F} = \sqrt{\text{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi| \varrho_F)}$, é dada por

$$\mathcal{F} = \left[|C|^2 \int d\boldsymbol{\rho}_D \mathcal{D}(\boldsymbol{\rho}_D - \boldsymbol{\rho}_0) |T(\boldsymbol{\rho}_D, \boldsymbol{\rho}_0)|^2 \right]^{1/2}, \quad (5.17)$$

onde

$$T(\boldsymbol{\rho}_D, \boldsymbol{\rho}_0) = \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' u(\mathbf{q}) u^* \left(\mathbf{q}' - \kappa \frac{\boldsymbol{\rho}_D - \boldsymbol{\rho}_0}{f} \right) v(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \gamma \left(\frac{2\kappa \boldsymbol{\rho}_D}{f} - \mathbf{q}' - \mathbf{q} \right). \quad (5.18)$$

Na Figura 5.3 analisamos a dependência da fidelidade $\mathcal{F}$ em função da razão ε/σ para diferentes modos HG, no caso em que a área de detecção é um quadrado de largura $a = 0.8\sigma$ centrado na origem, de modo que $\mathcal{D}(\boldsymbol{\rho}_D) = \text{const.}$ dentro do quadrado, e zero fora. Comparando estes resultados com os correspondentes no caso de detectores pontuais, vemos que todas as fidelidades sofrem um pequeno decréscimo. Todavia, elas são ainda superiores às fidelidades correspondentes aos casos em que o estado dos fótons 2-3 é descorrelacionado. Enfatizemos a diferença entre os resultados apresentados nas figuras 5.2 e 5.3: enquanto na primeira a posição de detecção é conhecida, e a média é realizada sobre todas as posições possíveis, na segunda não se sabe ao certo a posição de detecção dentro da área do detector, o que permite a Bob realizar somente um deslocamento médio.

Uma outra possibilidade no esquema da Figura 5.1 é a transferência de emaranhamento presente em um par de fótons para outro em que os fótons têm frequências bem diferentes, que é um processo análogo ao verificado em [123]. Observando a expressão (5.2), vimos que em geral a função $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ é não-separável, o que implica na existência de emaranhamento entre os vetores de onda transversais dos fótons 2 e 3, que possuem frequências centrais próximas. No entanto, se manipularmos o fóton 1 de modo que $u(\mathbf{q}) \propto \delta^2(\mathbf{q})$, ou seja, se espectro angular é muito mais fino que o do bombeador da CPDE, e o substituirmos no estado (5.6), teremos

$$|\psi\rangle_{34} \propto \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \Phi(\mathbf{q}', \mathbf{q}) |\mathbf{q}\rangle_3 |\mathbf{q}'\rangle_4, \quad (5.19)$$

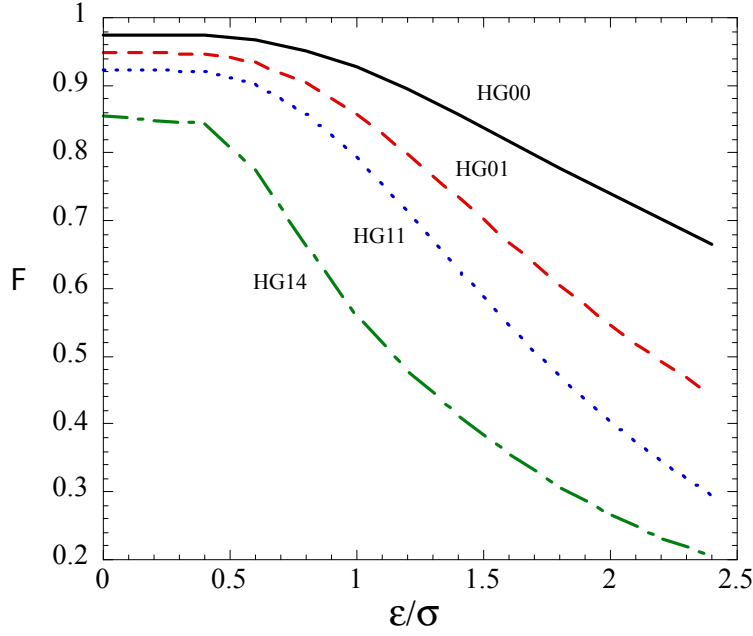


Figura 5.3: Fidelidade $\mathcal{F}$ em função da razão ε/σ para diferentes modos HG, e parâmetros $g/\sigma = 200$, e $a = 0.8\sigma$, onde a é a largura da função incerteza do vetor de onda detectado.

que corresponde ao mesmo estado emaranhado anterior, mas codificado nos fótons 3 e 4, que possuem diferentes frequências centrais. Vemos então que o emaranhamento entre o par de fótons 2 e 3, é transferido para o par de fótons 3 e 4. Além disso, ajustando a frequência do fóton 1 e as condições de ajustamento de fase, podemos controlar a frequência do fóton 4, e assim sintonizá-lo para uma transição atômica ou iônica específica em uma rede quântica, por exemplo.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Nesta tese de doutorado propusemos um estudo teórico do teletransporte quântico completo de um fóton paraxial, que é um dos objetos quânticos mais simples. O termo completo significa que o protocolo proposto transmite o estado quântico codificado em todos os possíveis graus de liberdade: o vetor de onda transversal, a frequência, e a polarização. Analisamos o protocolo detalhadamente, propusemos alguns exemplos, e um esquema experimental baseado nos fenômenos óticos não-lineares de C.P.D.E. e G.S.F. Sendo esta tarefa de difícil realização experimental, propusemos uma versão simplificada deste protocolo, em que somente o estado quântico codificado no grau de liberdade de vetor de onda transversal é teletransportado. Neste contexto, também analisamos exemplos, o limite clássico, e o uso de detectores não-pontuais.

Para que as idéias apresentadas se tornassem claras e acessíveis, desenvolvemos os capítulos 2 e 3. No capítulo 2 discutimos o protocolo de teletransporte quântico, e duas implementações experimentais óticas: uma no contexto de variáveis discretas, e outra em variáveis contínuas. No capítulo 3 discutimos o conceito de espectro angular de um campo, e os estendemos aos campos quânticos de um e dois fótons. Além disso, discutimos os fenômenos não-lineares da C.P.D.E. e G.S.F., que são processos temporais reversos. Enquanto o primeiro gera fótons emaranhados probabilisticamente, e é uma das

formas atualmente mais empregadas, o segundo, quando agregado a um detector, permite a “projeção” do campo incidente em estados maximamente emaranhados.

Neste trabalho, há algumas questões em aberto que merecem investigação. Enumeremo-las:

1. **Envio de emaranhamento:** Um caso a ser analisado no protocolo de teletransporte completo é aquele em que o espectro angular do fóton a ser teletransportado assume uma forma não-fatorável, por exemplo

$$u(\mathbf{q}, \omega, s) = F(\mathbf{q}, \omega) \lambda_s. \quad (6.1)$$

Conforme discutimos na seção 1.2, o teletransporte transmitiria um estado quântico com emaranhamento codificado entre diferentes graus de liberdade de um fóton.

2. **Emaranhamento não-Gaussiano:** Uma outra situação de interesse é aquela em que Alice e Bob compartilham um estado emaranhado não-Gaussiano. Seria interessante comparar as fidelidades do teletransporte obtidas nesta tese, que correspondem ao caso Gaussiano, com aquelas a serem obtidas nesta nova situação.
3. **Sobre o D.E.D.F.:** Recentemente, Lamata *et al.* [81] demonstraram, por um argumento similar a proposta KLM de computação [74], que um D.E.D.F., que é baseado numa interação não-linear, pode ser simulado através de ótica linear, fótons anclares, e medidas projetivas. Sendo assim, seria interessante analisar esta simulação e sua viabilidade experimental. Este ponto é importante, visto que, conforme este mesmo artigo, o uso de ótica linear na detecção de fótons no teletransporte limita a quantidade de informação a ser enviada.
4. **Alice e Bob compartilham um estado emaranhado misto em variáveis contínuas:** Em nosso trabalho analisamos o caso em que Alice e Bob compartilhavam um estado hiper-emaranhado, mas puro em cada grau de liberdade separado. Uma questão a ser analisada é o teletransporte em variáveis contínuas no caso em que

Alice e Bob compartilham um estado emaranhado misto. De fato, no caso discreto, M. Horodecki *et al.* [70] demonstraram uma relação entre a fidelidade mínima do protocolo de teletransporte e a fração de singleto, que é a fidelidade entre o estado misto em questão e um estado de Bell. Talvez estas idéias tenham correspondência nos protocolos de teletransporte em variáveis contínuas.

5. **Extensões para outros sistemas:** A idéia do teletransporte completo talvez possa ser aplicada a outros sistemas, como por exemplo em moléculas, ou em condensados de Bose-Einstein [98]. De fato, interações não-lineares entre condensados de Bose-Einstein já foram experimentalmente realizadas [42], assim como propostas teóricas para a criação de emaranhamento entre dois condensados [32]. Combinando estes recursos com uma operação unitária apropriada, talvez seja possível teletransportar completamente o estado quântico de um condensado de Bose-Einstein.

Referências Bibliográficas

- [1] ACHILLES D., SILBERHORN C., SLIWA, C. *et al.*, Photon-number-resolving detection using time-multiplexing. *Journal of Modern Optics*, v. 51, n.9 e 10, 2004, p.1499.
- [2] ABOURADDY, A. F., YARNALL, T., SALEH, B. E. A. *et al.* Violation of Bell's inequality with continuous spatial variables. *Physical Review A*, v.75, n.5, 2007, p.052114.
- [3] ALBER G., BETH, T., HORODECKI, M. *et al.* *Quantum Information*. Alemanha, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001, cap.3, p.79.
- [4] ALI-KHAN, I., BROADBENT, C. J., HOWELL, J. C. Large-Alphabet Quantum Key Distribution Using Energy-Time Entangled Bipartite States. *Physical Review Letters*, v.98, n.6, 2007, p.060503.
- [5] AOLITA, L., WALBORN, S. P. Quantum Communication without Alignment using Multiple-Qubit Single-Photon States. *Physical Review Letters*, v.98, n.10, 2007, p.100501.
- [6] ATATÜRE, M., GIUSEPPE, G. D., SHAW, M. D. *et al.* Multiparameter entanglement in femtosecond parametric down-conversion. *Physical Review A*, v.65, n.2, 2002, p.023808.

-
- [7] BARREIRO, J. T., LANGFORD, N. K., PETERS, N. A. *et al.* Generation of Hyperentangled Photon Pairs. *Physical Review Letters*, v.95, n.26, 2005, p.260501.
- [8] BARREIRO, J. T., WEI, T., KWIAT, P. G. Beating the channel capacity limit for linear photonic superdense coding. *Nature Physics*, v.4, 2008, p.282.
- [9] BARRETT, M. D., CHIAVERINI, J., SCHAEZT, T. *et al.* Deterministic quantum teleportation of atomic qubits. *Nature*, v.429, 2004, p.737.
- [10] BENNETT, C. H., BRASSARD, G. Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Computers Systems and Signal Processing*, p.175, 1984, Nova York.
- [11] BENNETT, C. H., BRASSARD G., CRÉPEAU C. *et al.* Teleporting and unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, v.70, n.13, 1993, p.1895.
- [12] BENNETT, C. H., BERNSTEIN, H. J., POPESCU, S. *et al.* Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A*, v.53, n.4, 1996, p.2046.
- [13] BENNINK, R. S., BENTLEY, S. J., BOYD, R. W. *et al.* Quantum and Classical Coincidence Imaging. *Physical Review Letters*, v.92, n.3, 2004, p.033601.
- [14] BRAUNSTEIN, S. L., FUCHS, C. A., KIMBLE, H. J. Criteria for continuous-variable quantum teleportation. *Journal of Modern Optics*, v.47, n.2, 2000, p.267.
- [15] BRAUNSTEIN, S. L., MANN A. Measurement of the Bell operator and quantum teleportation. *Physical Review A*, v.51, n.3, 1995, p.R1727.
- [16] BRAUNSTEIN, S. L., VAN LOOCK, P. Quantum information with continuous variables. *Review of Modern Physics*, v.77, n.2, 2005, p.513.
- [17] BRAUNSTEIN, S. L., VAN LOOCK, P. Quantum information with continuous variables. *Review of Modern Physics*, v.77, n.2, 2005, p.565.

- [18] BRAUNSTEIN, S. L., VAN LOOCK, P. Quantum information with continuous variables. *Review of Modern Physics*, v.77, n.2, 2005, p.545.
- [19] BRAUNSTEIN, S. L., KIMBLE, H. J. Teleportation of Continuous Quantum Variables. *Physical Review Letters*, v.80, n.4, 1998, p.869.
- [20] BRAUNSTEIN, S. L., KIMBLE, H. J. A posteriori teleportation. *Nature*, v.394, 1998, p.840.
- [21] BRENDL, J., GISIN, N., TITTEL, W. *et al.* Pulsed Energy-Time Entangled Twin-Photon Source for Quantum Communication. *Physical Review Letters*, v.82, n.12, 1999, p.2594.
- [22] BRIEGEL, H. J., DÜR, W., CIRAC J. I. *et al.* Quantum Repeaters: The Role of Imperfect Local Operations in Quantum Communication. *Physical Review Letters*, v.81, n.26, 1998, p.5932.
- [23] BOSCHI, D., BRANCA, S., DE MARTINI *et al.* Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. *Physical Review Letters*, v.80, n.6, 1998, p.1121.
- [24] BOUWMEESTER, D., PAN, J.-W, MATTLE, K. *et al.* Experimental quantum teleportation. *Nature*, v.390, n.6660, 1997, p.575.
- [25] BOUWMEESTER, D., EKERT A. ZEILINGER, A. The physics of Quantum Information. Alemanha, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000, cap.3, p.60.
- [26] BOUWMEESTER, D., EKERT A. ZEILINGER, A. The physics of Quantum Information. Alemanha, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000, cap.3, p.54.
- [27] BOUWMEESTER, D., PAN, J.-W, WEINFURTER, H. *et al.* High-fidelity teleportation of independent qubits. *Journal of Modern Optics*, v.47, n.2, 2000, p.279.

- [28] BOYD, R. W. Nonlinear Optics. EUA, Academic Press, 1992, cap.2.
- [29] BURNHAM, D. C., WEINBERG, D. L. Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs. *Physical Review Letters*, v.25, n.2, 1970, p.84.
- [30] BUTCHER, P. N., COTTER, D. The elements of Nonlinear Optics, Grã Bretanha, Cambridge University Press, 1990, cap.2.
- [31] CAETANO, D. P., SOUTO RIBEIRO, P. H. Generation of spatial antibunching with free-propagating twin beams. *Physical Review A*, v.68, n.4, 2003, p.043806.
- [32] CASTIN, Y., DALIBARD, J. Relative phase of two Bose-Einstein condensates, *Physical Review A*, v.55, n.6, 1997, p.4330.
- [33] CHOU, C. W., DE RIEDMATTEN, FELINTO, D. *et al.* Measurement-induced entanglement for excitation stored in remote atomic ensembles. *Nature*, v.438, 2005, p.828.
- [34] CIRAC, J. I., ZOLLER, P., KIMBLE, H. J. *et al.* Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network. *Physical Review Letters*, v.78, n.16, 1997, p.3221.
- [35] D'ARIANO, G. M., YUEN, H. P. Impossibility of Measuring the Wave Function of a Single Quantum System. *Physical Review Letters*, v.76, n.16, 1996, p.2832.
- [36] DAVIDOVICH, L., ZAGURY, N., BRUNE, M. *et al.* Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields. *Physical Review A*, v.50, n.2, 1994, p.R895.
- [37] DAVIDOVICH, L. Rio de Janeiro: UFRJ, 2005. Apostila de informação quântica. cap.8.

- [38] DAVIDOVICH, L. Decoherence, quantum information, and quantum-state measurement in quantum optics . In: Michael Rieth; Wolfram Schommers. (Org.). Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology. Valencia, California: American Scientific Publishers, 2006, v. 8, p. 101-168.
- [39] DAYAN, B., PE'ER, A., FRIESEM A. A. *et al.* Nonlinear Interactions with an Ultrahigh Flux of Broadband Entangled Photons. Physical Review Letters, v.94, n.4, 2005, p.043602.
- [40] DIECKS, D. Communication by EPR devices. Physics Letters A, v.92, n.6, 1982, p.271.
- [41] DMITRIEV, V., GURZADYAN, G., NIKOYOSYAN, D. Handbook of Nonlinear Optical Crystals. EUA, Springer-Verlag, 1999, cap.2.
- [42] DENG, L., HAGLEY, E. W., WEN, J. *et al.* Four-wave mixing with matter waves. Nature, v.398, 1999, p.218.
- [43] DONG, H., PAN, H., LI, Y. *et al.* Efficient single-photon frequency upconversion at $1.06\mu\text{m}$ with ultralow background counts. Applied Physics Letters, v.93, n.7, 2008, p.071101.
- [44] DUAN, L.-M., LUKIN, M. D., CIRAC, J. I. *et al.* Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics. Nature, v.414, 2001, p.413.
- [45] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B., ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? Physical Review, v.47, n.10, 1935, p.777.
- [46] EKERT, A. Quantum cryptography based on Bell's theorem. Physical Review Letters, v.67, n.6, 1991, p.661.

- [47] ETHER, D. S., SOUTO RIBEIRO, P. H., MONKEN, C. H. *et al.* Effects of spatial transverse correlations in second-harmonic generation. *Physical Review A*, v.73, n.5, 2006, p.053819.
- [48] ETHER, D. S., WALBORN, S. P., ZAGURY, N. Complete teleportation of a paraxial single-photon field. *Physical Review A*, v.79, n.3, 2009, p.032305.
- [49] DOS SANTOS, M. F. *Dicionário de Filosofia e Ciências Culturais*. Brasil, Editora Matese, 1963, v.3, p.794.
- [50] FONSECA, E. J. S., MONKEN, C. H., PÁDUA, S. Measurement of the de Broglie Wavelength of a Multiphoton Wave Packet. *Physical Review Letters*, v.82, n.14, 1999, p.2868.
- [51] FONSECA, E. J. S., MACHADO DA SILVA, J. C., MONKEN, C. H. *et al.* Controlling two-particle conditional interference. *Physical Review A*, v.61, n.2, 2000, p.023801.
- [52] FRANKEN, P. A., HILL, A. E., PETERS, C. W. *et al.* Generation of Optical Harmonics. *Physical Review Letters*, v.7, n.4, 1961, p.118.
- [53] FRANSON, J. D. Bell inequality for position and time. *Physical Review Letters*, v.62, n.19, 1989, p.2205.
- [54] FURUSAWA, A., SORENSEN, J. L., BRAUNSTEIN, S. L. *et al.* Unconditional Quantum Teleportation. *Science*, v.282, 1998, n.5389, p.706.
- [55] GOODMAN, J. W. *Introduction to Fourier Optics*. Singapura, Mc Graw Hill, 1996, cap.2.
- [56] GOTTESMAN, D., CHUANG, I. L. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations, *Nature*, v.402, 1999, p.390.

- [57] GROVER, L. K. Quantum Computers Can Search Arbitrarily Large Databases by a Single Query. *Physical Review Letters*, v.79, n.23, 1997, p.4709.
- [58] GROVER, L. K. Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack. *Physical Review Letters*, v.79, n.2, 1997, p.325.
- [59] GROVER, L. K. Quantum Computers Can Search Rapidly by Using Almost Any Transformation. *Physical Review Letters*, v.80, n.19, 1998, p.4329.
- [60] HAROCHE, S., RAIMOND, J. M. *Exploring the Quantum*. Grã Bretanha, Oxford University Press, 2006, cap.27.
- [61] HAROCHE, S., RAIMOND, J. M. *Exploring the Quantum*. Grã Bretanha, Oxford University Press, 2006, cap.2, p.90.
- [62] HAROCHE, S., RAIMOND, J. M. *Exploring the Quantum*. Grã Bretanha, Oxford University Press, 2006, cap.3, p.131.
- [63] HAROCHE, S., RAIMOND, J. M. *Exploring the Quantum*. Grã Bretanha, Oxford University Press, 2006, cap.2, p.53.
- [64] HAROCHE, S., RAIMOND, J. M. *Exploring the Quantum*. Grã Bretanha, Oxford University Press, 2006, cap.2, p.97.
- [65] HAROCHE, S., RAIMOND, J. M. *Exploring the Quantum*. Grã Bretanha, Oxford University Press, 2006, cap.2, p.110.
- [66] HAROCHE, S., RAIMOND, J. M. *Exploring the Quantum*. Grã Bretanha, Oxford University Press, 2006, Apêndice, p.569.
- [67] HAROCHE, S., RAIMOND, J. M. *Exploring the Quantum*. Grã Bretanha, Oxford University Press, 2006, Apêndice, p.130.

- [68] HAROCHE, S., RAIMOND, J. M. Exploring the Quantum. Grã Bretanha, Oxford University Press, 2006, Apêndice, p.140.
- [69] HONG, C. K., MANDEL, L. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Physical Review A*, v.31, n.4, 1985, p.2409.
- [70] HORODECKI, M., HORODECKI, P., HORODECKI, R. General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation, *Physical Review A*, v.60, n.3, 1999, p.1898.
- [71] HUMBLE, T. S., BENNINK, R. S., GRICE, W. P. Total teleportation of a single-photon state. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, v.7092, 2008, n.70920V.
- [72] JOZSA, R. Fidelity for Mixed Quantum States. *Journal of Modern Optics*, v.41, n.2, 1994, p.2315.
- [73] KIM, Y. H., KULIK, S. P., SHIH, Y. Quantum Teleportation of a Polarization State with a Complete Bell State Measurement. *Physical Review Letters*, v.86, n.7, 2001, p.1370.
- [74] KNILL, E., LAFLAMME, R., MILBURN, G. J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, v.409, 2001, p.46
- [75] KLYSHKO, D. N. Scattering of light in a medium with nonlinear polarizability. *Soviet Physics JETP-USSR*, v.28, n.3, 1969, p.522.
- [76] KOZIEROWSKI, M., TANÁŠ, R. Quantum fluctuations in second-harmonic light generation. *Optics Communications*, v.21, n.2, 1977, p.229.
- [77] KWIAT, P. G., MATTLE, K., WEINFURTER, H. *et al.* New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs. *Physical Review Letters*, v.75, n.24, 1995, p.4337.

- [78] KWIAT, P. G. Hyper-entangled states. *Journal of Modern Optics*, v.44, n.11, 1997, p.2173.
- [79] KWIAT, P. G., WAKS E., WHITE, A. G. *et al.* Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Physical Review A*, v.60, n.2, 1999, p.R773.
- [80] LAW, C. K., EBERLY, J. H. Analysis and Interpretation of High Transverse Entanglement in Optical Parametric Down Conversion. *Physical Review Letters*, v.92, n.12, 2004, p.127903.
- [81] LAMATA, L., GARCÍA-RIPOLL, J. J., CIRAC, J. I. How Much Entanglement Can Be Generated between Two Atoms by Detecting Photons? *Physical Review Letters*, v.98, n.1, 2007, p.010502.
- [82] LITTLEJOHN, R. G. The semiclassical evolution of wave-packets. *Physics Reports-Review section of physics letters*. v.138, n.4-5, 1986, p.193.
- [83] LOMBARDI E., SCIARRINO F., POPESCU, S. *et al.* Teleportation of a VacuumOne-Photon Qubit. *Physical Review Letters*, v.88, n.7, 2002, p.070402.
- [84] LUNDEEN, J. S., FEITO A., COLDENSTRODT-RONGE, H. *et al.* Tomography of quantum detectors. *Nature Physics*, v.5, n.1, 2009, p.27.
- [85] LÜTKENHAUS, N., CALSAMIGLIA, J., SUOMINEN, K. -A. Bell measurements for teleportation. *Physical Review A*, v.59, n.5, 1999, p.3295.
- [86] MARCIKIC, I., DE RIEDMATTEN, H., TITTEL W. *et al.* Long-distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths. *Nature*, v.421, n.6922, 2003, p.509.
- [87] MAGDENKO, L. V., SOKOLOV, I. V., KOLOBOV, M. I. Quantum teleportation of optical images with frequency conversion. *Optics and Spectroscopy*, v.103, n.1, 2007, p.62.

- [88] MANDEL, L., WOLF, E. Optical Coherence and Quantum Optics. EUA, Cambridge University Press, 1995, cap.22, p.1070.
- [89] MANDEL, L., WOLF, E. Optical Coherence and Quantum Optics. EUA, Cambridge University Press, 1995, cap.10, p.472.
- [90] MONKEN, C. H. Minas Gerais: UFMG, 1998-2002. Introdução à óptica de Fourier.
- [91] MONKEN, C. H., SOUTO RIBEIRO, P. H., PÁDUA, S. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Physical Review A*, v.57, n.4, 1998, p.3123.
- [92] DA COSTA MOURA, A. G., NOGUEIRA, W. A. T., MONKEN C. H. *et al.* Transverse spatial and frequency properties of two-photon states generated by spontaneous parametric down-conversion. Disponível na internet via <http://arxiv.org/pdf/0806.4624>. Arquivo consultado em 2009.
- [93] NEVES, L., LIMA, G., AGUIRRE GÓMEZ, J. G. *et al.* Generation of Entangled States of Qudits using Twin Photons. *Physical Review Letters*, v.94, n.10, 2005, p.100501.
- [94] NIELSEN, M. A., KNILL, E., LAFLAMME, R. Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance. *Nature*, v.396, 1998, p.52.
- [95] NIELSEN, M. A., CHUANG, I. L. Quantum Computation and Quantum Information. Grã Bretanha, Cambridge University Press, 2000, cap.9, p.409.
- [96] NIELSEN, M. A., CHUANG, I. L. Quantum Computation and Quantum Information. Grã Bretanha, Cambridge University Press, 2000, cap.8, p.353.
- [97] NOGUEIRA, W. A. T., WALBORN, S. P., PÁDUA, S. *et al.* Experimental Observation of Spatial Antibunching of Photons. *Physical Review Letters*, v.86, n.18, 2001, p.4009.

- [98] OLIVEIRA, M. C. DE, Teleportation of a Bose-Einstein condensate state by controlled elastic collisions. *Physical Review A*, v.67, n.2, 2003, p.022307.
- [99] OLMSCHENK, S., MATSUKEVICH, D. N., MAUNZ, P. *et al.* Quantum Teleportation Between Distant Matter Qubits. *Science*, v.323, 2009, p.486.
- [100] OU, Z. Y. Efficient conversion between photons and between photon and atom by stimulated emission. *Physical Review A*, v.78, n.2, 2008, p.023819.
- [101] PAN, J.-W., BOUWMEESTER, D., WEINFURTER, H. *et al.* Experimental Entanglement Swapping: Entangling Photons That Never Interacted. *Physical Review Letters*, v.80, n.18, 1998, p.3891.
- [102] PAN, J.-W, GASPARONI, S., ASPELMEYER, M. *et al.* Experimental realization of freely propagating teleported qubits. *Nature*, v.421, 2003, p.721.
- [103] PERES, A. What is actually teleported? Disponível na internet via <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0304158> Arquivo consultado em 2009.
- [104] POPESCU, S. Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality? *Physical Review Letters*, v.72, n.6, 1994, p.797.
- [105] PRESKILL, J. Lectures Notes for Physics 229: Quantum Information and Quantum Computation. 1998, cap.2, p.75.
- [106] RIEBE, M., HÄFFNER, H., ROOS, C. F. *et al.* Deterministic quantum teleportation with atoms. *Nature*, v.429, 2004, p.734.
- [107] RINDLER, W. Introduction to Special Relativity. Inglaterra, Oxford University Press, 1982, cap.1, p.20.
- [108] ROACH, J. Physicists Teleport Quantum Bits Over Long Distance. *National Geographic News*, 29 jan. 2003. January 29, 2003

- [109] RUBIN, M. H., KLYSHKO, D., SHIS, Y. H. *et al.* Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion. *Physical Review A*, v.50, n.6, 1994, 5122.
- [110] SALEH, B. E. A., TEICH, M. C. *Fundamentals of Photonics*. EUA, John Wiley and Sons, 2007, cap.4.
- [111] SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, v.23, n.48, 49, 50, 1935, p.807, 823, 844.
- [112] SCLEICH, W. *Quantum Optics in Phase Space*. Alemanha, John Wiley and Sons, 2001.
- [113] SHANNON, C., WEAVER, W. *The Mathematical Theory of Communication*, EUA, University of Illinois Press, 1998.
- [114] SHERSON, J. F., KRAUTER, H., OLSSON R. *et al.* Quantum teleportation between light and matter. *Nature*, v.443, 2006, p. 557.
- [115] SIMON, R., MUKUNDA, N., DUTTA, B. Quantum noise matrices for multimode systems: $U(n)$ invariance, squeezing, and normal forms. *Physical Review A*, v.49, n.3, 1994, p.1567.
- [116] SMITHEY, D. T., BECK, M., RAYMER, M. G. *et al.* Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum. *Physical Review Letters*, v.70, n.9, 2003, p. 1244.
- [117] SOUZA, C. E. R., BORGES, C. V. S., KHOURY, A. Z. *et al.* Quantum key distribution without a shared reference frame. *Physical Review A*, v.77, n.3, 2008, p.032345.
- [118] TANNOUDJI, C. C., DIU, B., LALOË, F. *Quantum Mechanics*. França, John Wiley and Sons, 1977, 1v, cap.3, p.292.

- [119] TANNOUDJI, C. C., DIU, B., LALOË, F. Quantum Mechanics. França, John Wiley and Sons, 1977, 1v, cap.2, p.143.
- [120] TANNOUDJI, C. C., DIU, B., LALOË, F. Quantum Mechanics. França, John Wiley and Sons, 1977, 2v, cap.14, p.1386.
- [121] TANNOUDJI, C. C., DIU, B., LALOË, F. Quantum Mechanics. França, John Wiley and Sons, 1977, 1v, cap.3, p.214.
- [122] TANNOUDJI, C. C., DUPONT-ROC, J., GRYNBERG, G. Atom-photon Interactions. Alemanha, WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2004, cap.1, p.23.
- [123] TANZILLI, S., TITTEL, W., HALDER, M. *et al.* A photonic quantum information interface. Nature, v.437, 2005, p.116.
- [124] THEBALDI, R. S. Estados de dois fótons com momento angular orbital. Orientador: Carlos Henrique Monken. Minas Gerais, UFMG, 2001, Dissertação (Mestrado em Física).
- [125] TITTEL, W., BRENDDEL, J., ZBINDEN, H. *et al.* Quantum Cryptography Using Entangled Photons in Energy-Time Bell States. Physical Review Letters, v.84, n.20, 2000, p.4737.
- [126] URSIN, R., JENNEWEIN, T., ASPELMEYER, M. *et al.* Quantum teleportation across the Danube. Nature, v.426, 2003, p.52.
- [127] VAIDMAN, L. Teleportation of quantum states. Physical Review A, v.49, n.2, 1994, p.1473.
- [128] VAN HOUWELINGEN, J. A. W., BRUNNER, N., BEVERATOS, A. *et al.* Physical Review Letters, v.96, n.13, 2006, p.130502.
- [129] VOGEL, W., WELSCH, D. G., WALLENTOWITZ, S. Quantum Optics: an Introduction. Alemanha, John Wiley and Sons, 2001.

- [130] WALBORN, S. P., DE OLIVEIRA, A. N., PÁDUA, S. *et al.* Multimode Hong-Ou-Mandel Interference. *Physical Review Letters*, v.90, n.14, 2003, p.143601.
- [131] WALBORN, S. P., PÁDUA S., MONKEN, C. H. Hyperentanglement-assisted Bell-state analysis. *Physical Review A*, v.68, n.4, 2003, p.042313.
- [132] WALBORN, S. P. The Brothers Q: Multimode entangled photons with parametric down conversion. Orientador: Carlos Henrique Monken. Minas Gerais, UFMG, 2004, 151p, Tese de Doutorado.
- [133] WALBORN, S. P., LEMELLE, D. S., ALMEIDA, M. P. *et al.* Quantum Key Distribution with Higher-Order Alphabets Using Spatially Encoded Qudits. *Physical Review Letters*, v.96, n.9, 2006, p.090501.
- [134] WALBORN, S. P., SOUTO RIBEIRO, P. H., DAVIDOVICH, L. *et al.* Experimental determination of entanglement with a single measurement. *Nature* v.440, 2006, p. 1022.
- [135] WALBORN, S. P., ETHER, D. S., DE MATOS FILHO, R. L. *et al.* Quantum teleportation of the angular spectrum of a single-photon field. *Physical Review A*, v.76, n.3, 2007, p.033801.
- [136] WALBORN, S. P. Hyperentanglement: Breaking the communication barrier. *Nature Physics*, v.4, 2008, p.268.
- [137] WALLS, D. F., MILBURN, G. J. *Quantum Optics*. Alemanha, Springer-Verlag, 2008, cap.5 , p.82.
- [138] WANG, L. J. Investigation of induced coherence with and without induced emission Orientador: Leonard Mandel. Rochester, University of Rochester, 1992. Tese de Doutorado.

- [139] WERNER, R. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, v.40, n.8, 1989, p.4277.
- [140] WIGNER, E. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. *Physical Review*, v.40, n.5, 1932, p.749.
- [141] WOOTTERS, W. K., ZUREK, W. H. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, v.299, 1982, p.802.
- [142] WU, L-A, KIMBLE H. J., HALL, J. L. *et al.* Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion. *Physical Review Letters*, v.57, n.20, 1986, p.2520.
- [143] YARIV, A. *Quantum Electronics*. EUA, John Wiley and Sons, 1989, cap.16, p.392.
- [144] YUAN, Z.-S, CHEN, CHEN Y.-A., ZHAO, B. *et al.* Experimental demonstration of a BDCZ quantum repeater node. *Nature*, v.454, 2008, p.1098.

Apêndice A

Cálculos adicionais

Neste apêndice explicitamos os cálculos referentes a seção 4.1 em que o protocolo de teletransporte quântico completo de um fóton é apresentado. Além disso, desenvolvemos a semelhança entre a medida destrutiva realizada por Alice e a medida projetiva do conjunto de observáveis que comutam $\{\mathbf{Q}, \mathbf{\Omega}, \sigma_Z^1 \sigma_Z^2, \sigma_X^1 \sigma_X^2\}$.

A.1 Teletransporte quântico completo

Reescrevamos a expressão (4.8) em uma forma mais detalhada:

$$\begin{aligned} |\psi^{(1)}\rangle &= N \sum_{i=1}^2 \mathbf{H}_i |\psi_I\rangle_{123} |\text{VAC}\rangle_{45}, \\ &\equiv |\zeta\rangle + |\eta\rangle \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde definimos

$$\begin{aligned} |\zeta\rangle &\equiv N \mathbf{H}_1 |\psi_I\rangle_{123} |\text{VAC}\rangle_{45}, \\ |\eta\rangle &\equiv N \mathbf{H}_2 |\psi_I\rangle_{123} |\text{VAC}\rangle_{45}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Usando as (4.1), (4.2), e (4.6), teremos

$$\begin{aligned}
 |\zeta\rangle &= |\text{VAC}\rangle_{125} \otimes N_{g1} \sum_s \iiint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' d\mathbf{q}'' \iiint d\omega d\omega' d\omega'' u(\mathbf{q}, \omega, s) \Phi(\mathbf{q}', \omega', s, \mathbf{q}'', \omega'', s) \times \\
 &\quad |\mathbf{q}'', \omega'', s\rangle_3 |\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', s^\perp\rangle_4, \\
 |\eta\rangle &= |\text{VAC}\rangle_{124} \otimes N_{g2} \sum_s \iiint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' d\mathbf{q}'' \iiint d\omega d\omega' d\omega'' u(\mathbf{q}, \omega, s) \Phi(\mathbf{q}', \omega', s^\perp, \mathbf{q}'', \omega'', s^\perp) \\
 &\quad |\mathbf{q}'', \omega'', s^\perp\rangle_3 |\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', s\rangle_5,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Realizando nos subespaços dos fótons 4 e 5 a mudança de base em polarização

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{q}, \omega, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{q}, \omega, 0_X\rangle + |\mathbf{q}, \omega, 1_X\rangle), \\
 |\mathbf{q}, \omega, 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{q}, \omega, 0_X\rangle - |\mathbf{q}, \omega, 1_X\rangle),
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

onde $\{0, 1\}$ e $\{0_X, 1_X\}$ denotam, respectivamente, as bases $\{H, V\}$ e $\{D, A\}$, teremos

$$\begin{aligned}
 |\zeta\rangle &= |\text{VAC}\rangle_{125} \otimes \frac{N_{g1}}{\sqrt{2}} \sum_s \iiint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' d\mathbf{q}'' \iiint d\omega d\omega' d\omega'' u(\mathbf{q}, \omega, s) \Phi(\mathbf{q}', \omega', s, \mathbf{q}'', \omega'', s) \times \\
 &\quad |\mathbf{q}'', \omega'', s\rangle_3 [|\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', 0_X\rangle_4 + (-1)^{s+1} |\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', 1_X\rangle_4], \\
 |\eta\rangle &= |\text{VAC}\rangle_{124} \otimes \frac{N_{g2}}{\sqrt{2}} \sum_s \iiint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' d\mathbf{q}'' \iiint d\omega d\omega' d\omega'' u(\mathbf{q}, \omega, s) \Phi(\mathbf{q}', \omega', s^\perp, \mathbf{q}'', \omega'', s^\perp) \times \\
 &\quad |\mathbf{q}'', \omega'', s^\perp\rangle_3 [|\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', 0_X\rangle_5 + (-1)^s |\mathbf{q} + \mathbf{q}', \omega + \omega', 1_X\rangle_5].
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Observando estas expressões, é evidente que uma medida dos observáveis vetor de onda transversal, frequência, e polarização do fóton 4 ou 5 projetará o fóton 3 em um estado quântico correlacionado aos resultados destas medidas. Por exemplo, se uma medida destrutiva descrita pelo operador $\mathbf{a}_{11}(\mathbf{q}_0, \omega_0) = \mathbf{a}_5(\mathbf{q}_0, \omega_0, 1_X)$ for realizada sobre fóton 5, teremos

$$\begin{aligned}
 |\psi_{11}\rangle &\propto \mathbf{a}_{11}(\mathbf{q}_0, \omega_0) |\psi^{(1)}\rangle \\
 &\propto |\text{VAC}\rangle \otimes \sum_s \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}'' \iint d\omega d\omega'' (-1)^s u(\mathbf{q}, \omega, s) \times \\
 &\quad \Phi(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}, \omega_0 - \omega, s^\perp, \mathbf{q}'', \omega'', s^\perp) |\mathbf{q}'', \omega'', s^\perp\rangle_3,
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

onde $|\text{VAC}\rangle$ é o estado de vácuo de todos os campos envolvidos. Se Bob aplicar sobre este estado a operação unitária $\mathbf{U}_{11}(\mathbf{q}_B, \omega_B)$, tal que

$$\mathbf{U}_{11}(\mathbf{q}_B, \omega_B) |\mathbf{q}, \omega, s\rangle = \sigma_Z \sigma_X |\mathbf{q} + \mathbf{q}_B, \omega + \omega_B, s\rangle, \quad (\text{A.7})$$

teremos

$$\begin{aligned} |\psi_F^{11}\rangle &\propto \mathbf{U}_{11}(\mathbf{q}_B, \omega_B) |\psi_{11}\rangle \\ &\propto |\text{VAC}\rangle \otimes \sum_s \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}'' \iint d\omega d\omega'' u(\mathbf{q}, \omega, s) \times \\ &\quad \Phi(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}, \omega_0 - \omega, s^\perp, \mathbf{q}'' - \mathbf{q}_B, \omega'' - \omega_B, s^\perp) |\mathbf{q}'', \omega'', s\rangle_3, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde utilizamos

$$\begin{aligned} \sigma_Z \sigma_X (-1)^s |\mathbf{q}'', \omega'', s^\perp\rangle_3 &= (-1)^s |\mathbf{q}'', \omega'', (\sigma_Z \sigma_X)(s^\perp)\rangle_3, \\ &= (-1)^s |\mathbf{q}'', \omega'', (\sigma_Z)(s)\rangle_3, \\ &= |\mathbf{q}'', \omega'', s\rangle_3. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Se, por exemplo,

$$\Phi(\mathbf{q}, \omega, s, \mathbf{q}', \omega', s) = \frac{1}{\sqrt{2}} F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') G(\omega, \omega'), \quad (\text{A.10})$$

com

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &\propto \delta^2(\mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{q}_p), \\ G(\omega, \omega') &\propto \delta(\omega + \omega' - \omega_p), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

teremos

$$|\psi_F^{11}\rangle \propto |\text{VAC}\rangle \otimes \sum_s \int d\mathbf{q} \int d\omega u(\Delta\mathbf{q} - \mathbf{q}_B, \Delta\omega - \omega_B, s) |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_3, \quad (\text{A.12})$$

onde $\Delta\mathbf{q} \equiv \mathbf{q} + \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_p$ and $\Delta\omega \equiv \omega + \omega_0 - \omega_p$. Utilizando os deslocamentos $\mathbf{q}_B = \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_p$ e $\omega_B = \omega_0 - \omega_p$,

$$|\psi_F^{11}\rangle \propto |\text{VAC}\rangle \otimes |\phi\rangle_3, \quad (\text{A.13})$$

que corresponde ao perfeito teletransporte completo do fóton 1.

A.2 Medida conjunta destrutiva versus projetiva

Primeiramente, notemos que o conjunto de observáveis $\{\mathbf{Q}, \mathbf{\Omega}, \sigma_Z^1 \sigma_Z^2, \sigma_X^1 \sigma_X^2\}$ tem como autovetores comuns estados da forma

$$\begin{aligned} |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s (-1)^s \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' \delta^2(\mathbf{q}' + \mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \delta(\omega + \omega' - \omega_0) \times \\ &\quad |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1 |\mathbf{q}', \omega', s^\perp\rangle_2, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s (-1)^s \int d\mathbf{q} \int d\omega |\mathbf{q}, \omega, s\rangle_1 |\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}, \omega_0 - \omega, s^\perp\rangle_2, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

que é um estado **maximamente emaranhados** do tipo EPR [45] no vetor de onda transversal e frequência, e um estado de Bell $|\psi^-\rangle_{12}$ em polarização. De fato, aplicando $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{\Omega}$ no estado acima, teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12} &= \mathbf{q}_0 |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12}, \\ \mathbf{\Omega} |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12} &= \omega_0 |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12}, \\ \sigma_Z^1 \sigma_Z^2 |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12} &= -|\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12}, \\ \sigma_X^1 \sigma_X^2 |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12} &= -|\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Ao invés de realizar uma medida conjunta via ótica não-linear, suponhamos que Alice realizasse uma medida projetiva deste conjunto no estado inicial de três fótons (4.4). Teríamos então o seguinte estado quântico:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{proj}} &\propto \Pi |\psi_I\rangle_{123} \\ &= |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12} \otimes \sum_s \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' (-1)^s u(\mathbf{q}, \omega, s) \times \\ &\quad \Phi(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}, \omega_0 - \omega, s^\perp, \mathbf{q}', \omega', s^\perp) |\mathbf{q}', \omega', s^\perp\rangle_3 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

onde $\Pi = |\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12} \langle \psi^{\text{EPR}}|_{12}$. Se Bob aplicar sobre este estado a operação unitária $\mathbf{U}_{11}(\mathbf{q}_B, \omega_B)$, teremos

$$\begin{aligned} |\psi_F^{11}\rangle_{\text{proj}} &\propto \mathbf{U}_{11}(\mathbf{q}_B, \omega_B) |\psi\rangle_{\text{proj}} \\ &|\psi^{\text{EPR}}\rangle_{12} \otimes \sum_s \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \iint d\omega d\omega' u(\mathbf{q}, \omega, s) \times \\ &\Phi(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}, \omega_0 - \omega, s^\perp, \mathbf{q}' - \mathbf{q}_B, \omega' - \omega_B, s^\perp) |\mathbf{q}', \omega', s\rangle_3, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Comparando esta expressão com a (A.8), vemos claramente a diferença e a semelhança entre as duas medidas adotadas por Alice. Enquanto a medida via interação não-linear destrói os fótons 1 e 2, isto é, evolui os campos 1 e 2 para o estado de vácuo, a segunda projeta estes campos no estado maximamente emaranhado (A.14). Não obstante, o estado quântico do fóton 3 é o mesmo nos dois procedimentos.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)