

Universidade de São Paulo  
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”

**Modelos de fronteira estocástica: uma abordagem bayesiana**

Juliana Garcia Cespedes

Tese apresentada, para obtenção do título de Doutor em  
Agronomia. Área de concentração: Estatística e Experi-  
mentação Agronômica.

Piracicaba  
2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Juliana Garcia Cespedes  
Matemático

## **Modelos de fronteira estocástica: uma abordagem bayesiana**

Orientadora:

Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. **ROSELI APARECIDA LEANDRO**

Tese apresentada, para obtenção do título de Doutor em  
Agronomia. Área de concentração: Estatística e Experi-  
mentação Agronômica.

Piracicaba  
2008

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - ESALQ/USP**

Cespedes, Juliana Garcia  
Modelos de fronteira estocástica: uma abordagem bayesiana / Juliana Garcia  
Cespedes. - - Piracicaba, 2008.  
152 p.

Tese (Doutorado) - - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, 2008.  
Bibliografia.

1. Análise de Fourier 2. Econometria 3. Economia – Eficiência 4. Inferência bayesiana – Inferência estatística 5. Modelos lineares 6. Programação estocástica  
I. Título

CDD 636.513  
C422m

**“Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor”**

## Dedicatória

À  
**DEUS**  
Senhor todo poderoso.

À minha família,  
**João Garcia Cespedes,**  
**Nair da Graças Lomazini Garcia e**  
**Luis Fernando Garcia Cespedes,**  
fundamentais nesta conquista, pelo apoio, amor e confiança,  
que nortearam minha vida e me fizeram progredir.

Ao meu noivo  
**Douglas Schiavoni Froemming**  
o amor, a compreensão, a confiança e a ajuda nos momentos  
mais difíceis.

## Agradecimentos

À Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Roseli Aparecida Leandro a orientação, a amizade, os ensinamentos, as sugestões, as discussões, a paciência e o apoio, que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos professores Clarice Garcia Borges Demétrio e Vitor Augusto Ozaki, as sugestões, as discussões, os ensinamentos e a ajuda.

Aos professores Adriano F. Borgatto, Helio S. Migon, Mark Steel, Willian Greene, João Maurício A. Mota, Juvêncio Nobre, Ricardo Shiota e todos que contribuíram de forma direta para a realização deste trabalho.

Ao meu noivo Douglas Schiavoni Froemming o carinho especial, o conforto nas horas difíceis, a ajuda, a paciência e o apoio, além de fornecer os dados fundamentais para a realização desta tese.

Aos meus pais João Garcia Cespedes e Nair das Graças Lomazini Garcia e ao meu irmão Luís Fernando Garcia Cespedes a força, o amor incondicional, a confiança e a dedicação que me deram nos momentos decisivos.

A todos os amigos do mestrado e doutorado, em especial a Ana Maria, Genevile, Elizabeth, Denise, Ana Alice, Luciano, David, Idemauro, Osmar, Luciana e aos amigos Hugo, Aline e Michele.

Aos professores e funcionários do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, que propiciaram condições para a realização deste trabalho.

À CAPES o apoio financeiro.

A todos, que de forma direta ou indireta, colaboraram para a realização deste trabalho.

# SUMÁRIO

RESUMO . . . . .	7
ABSTRACT . . . . .	8
1 INTRODUÇÃO . . . . .	9
Referências . . . . .	13
2 MODELO DE FRONTEIRA ESTOCÁSTICA DE CUSTO COM FORMA FUNCIONAL FLEXÍVEL FOURIER: UMA ABORDAGEM BAYESIANA . . . . .	18
Resumo . . . . .	18
Abstract . . . . .	18
2.1 Introdução . . . . .	19
2.2 Desenvolvimento . . . . .	20
2.2.1 Forma funcional flexível Fourier . . . . .	20
2.2.2 Modelo de fronteira estocástica de custo com forma funcional flexível Fourier . . . . .	23
2.2.3 Simulação de dados . . . . .	27
2.2.4 Aplicação a dados reais . . . . .	29
2.3 Resultados e discussão . . . . .	30
2.3.1 Simulação . . . . .	30
2.3.2 Aplicação empírica . . . . .	38
2.4 Considerações Finais . . . . .	45
Referências . . . . .	46
3 MODELOS GENERALIZADOS DE FRONTEIRA ESTOCÁSTICA . . . . .	50
Resumo . . . . .	50
Abstract . . . . .	50
3.1 Introdução . . . . .	51
3.2 Desenvolvimento . . . . .	52
3.2.1 Modelos de fronteira de produção estocástica . . . . .	52
3.2.2 Modelos lineares generalizados . . . . .	53
3.3 Modelos generalizados de fronteira estocástica . . . . .	54
3.3.1 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $\ln Y_{it} u_i$ com distribuição Normal . . . . .	54
3.3.2 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $Y_{it} u_i$ com distribuição gama . . . . .	56
3.3.3 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $Y_{it} u_i$ com distribuição normal . . . . .	57
3.3.4 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $Y_{it} u_i$ com distribuição de Poisson . . . . .	59
3.3.5 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $Y_{it} u_i$ com distribuição binomial negativa . . . . .	60
3.4 Simulação de dados . . . . .	62

3.5 Aplicação a dados reais . . . . .	63
3.5.1 Vendedores de autopeças . . . . .	63
3.5.2 Instituição Financeira . . . . .	63
3.6 Resultados e Discussão . . . . .	64
3.6.1 Simulação . . . . .	64
3.6.2 Aplicação empírica . . . . .	87
3.7 Conclusões . . . . .	98
Referências . . . . .	98
APÊNDICES . . . . .	103
ANEXOS . . . . .	117



## RESUMO

### **Modelos de fronteira estocástica: uma abordagem bayesiana**

A firma é o principal agente econômico para a produção e distribuição de bens e serviços. Seu constante investimento em melhorias e o aperfeiçoamento de sua capacidade produtiva, visando tornar-se cada vez mais eficiente, transforma-se em um determinante central do bem estar econômico da sociedade. O processo de medir a ineficiência de firmas baseia-se em análises de fronteiras, onde a ineficiência é medida como a distância entre os pontos observados da variável resposta e a função de produção, custo ou lucro verdadeiras, dependendo do modelo assumido para descrever a variável resposta. Existe uma variedade de formas funcionais para essas funções e algumas vezes é difícil julgar qual delas deve ser escolhida, visto que a forma verdadeira é desconhecida e pode ser somente aproximada. Em geral, na literatura, dados de produção são analisados assumindo-se modelos multiplicativos que impõem a restrição de que a produção é estritamente positiva e utiliza-se a transformação logarítmica para linearizar o modelo. Considera-se que o logaritmo do produto dada a ineficiência técnica tem distribuição contínua, independentemente de os dados serem contínuos ou discretos. A tese divide-se em dois artigos: o primeiro utiliza a inferência bayesiana para estimar a eficiência econômica de firmas utilizando os modelos de fronteira estocástica de custo com forma funcional flexível Fourier, que asseguram um bom ajuste para a fronteira, sendo fundamental para o cálculo da ineficiência econômica; o segundo artigo propõe os modelos generalizados de fronteira estocástica, baseando-se nos modelos lineares generalizados mistos com a abordagem bayesiana, para quantificar a ineficiência técnica de firmas (medida de incerteza) utilizando a variável resposta na escala original e distribuições pertencentes à família exponencial para a variável resposta dada a medida de ineficiência.

Palavras-chave: Inferência bayesiana; Modelos de fronteira estocástica; Função de custo Fourier; Eficiência técnica; Eficiência econômica; Modelos lineares generalizados mistos

# ABSTRACT

## **Stochastic frontier models: a bayesian approach**

The firm is the main economic agent for the production and distribution of goods and services. Its constant investment in improvements and enhancement of its productive capacity to make itself more efficient becomes a central determinant of economic welfare of society. The measure process of inefficiency is based on frontier analysis, where inefficiency is measured as the distance between the observed points from variable response and real production, cost or profit function, depending on chosen model to describe the variable response. There are several functional forms to these functions and sometimes it is very difficult to decide which one has to be chosen because the true form is unknown and it can just be approximate. Generally, in the literature, production data are analyzed assuming multiplicative models that impose the restriction of what the production is strictly positive and use the logarithm transformation to turn the model lineal. It is considerate that the product's logarithm given the technical inefficiency has distribution continual, independent if the data are continuous or discrete. The papers presented in this thesis are: the first paper uses the bayesian inference to estimate the economic efficiency of firms in the cost stochastic frontier models using the Fourier flexible cost function, that assure a good settlement to the frontier being essential to calculate the economic inefficiency. The second paper proposes a generalized stochastic frontier models, based on generalized linear mixed models with the Bayesian approach, to quantify the inefficiency technical of the firms (uncertainty measures) by using the response variable in the scale original with distributions belonging on the exponential family to the response variable given the measure of inefficiency.

**Keywords:** Bayesian inference; Stochastic frontier models; Fourier cost function; Technical efficiency; Economic efficiency; Generalized linear mixed models

# 1 INTRODUÇÃO

Em uma economia de mercado, a firma, sendo o principal agente econômico para a produção e distribuição de bens e serviços, economiza em custos de transação e, mais do que qualquer outra unidade, serve como o centro de atividade econômica. As firmas investem em máquinas mais eficientes, desenvolvem novas tecnologias, vendem novos e melhores produtos, antecipam quais os tipos de insumos que serão utilizados nas atividades de produção e servem como a fonte principal de empregos e renda. Assim, o papel econômico das firmas é tão importante que a eficiência com que desempenham suas atividades torna-se um determinante central do bem-estar econômico da sociedade, e para determinar essa eficiência é necessário considerar toda essa diversidade (THOMPSON; FORMBY, 1998).

O processo de medir a eficiência de firmas baseia-se nos modelos de fronteira, compostos por uma parte determinística representada por uma forma funcional das funções de produção, custo ou lucro e um componente aleatório que incorpora incertezas. A teoria microeconômica define a função de produção como o máximo produto possível produzido por uma firma dado uma combinação de insumos; analogamente, define a função de custo como o custo mínimo necessário para produzir um conjunto de produtos (a função lucro define o máximo lucro) dado os preços de insumos. Existe uma variedade de formas funcionais utilizadas em modelos de fronteira, elas diferem em muitos aspectos e algumas vezes é difícil julgar qual delas deve ser escolhida, desde que a função (produção, custo ou lucro) verdadeira é desconhecida e pode ser somente aproximada. As formas funcionais mais utilizadas são a Cobb-Douglas, translog e Leontief generalizada.

Baseado no fato de que uma aproximação de uma função por uma série de Fourier permite uma aproximação global desta função, Gallant (1981) propôs a forma funcional flexível Fourier, também conhecida como função de custo Fourier, para fazer uma aproximação da função de custo verdadeira tanto quanto os dados permitirem.

Estudos feitos por McAllister e McManus (1993), Berger et al. (1997), Berger e Mester (1997) e Mitchell e Onvural (1996) mostram que para dados de instituições financeiras a forma funcional flexível Fourier produz melhor ajuste que a forma funcional translog para a fronteira de custo. Ivaldi et al. (1996) mostram a diferença dos modelos de fronteira de custo entre o uso da forma funcional flexível Fourier e o da forma funcional translog para dados de fazendas frutíferas da França. Trabalhos recentes que utilizam a forma funcional flexível Fourier são Huang e Wang (2003, 2004), Rossi et al. (2005), Kraft et al. (2002), Hussein (2004), dentre outros. Os trabalhos encontrados na literatura utilizam a estatística clássica.

O componente aleatório que incorpora incertezas nos modelos de fronteira pode ser dividido em duas partes: a primeira refere-se à ineficiência e a segunda refere-se a uma variação natural

que os dados podem conter e que não são controladas, tais como, um funcionário ficar doente, uma máquina quebrar, escassez de chuva em determinada época de plantio, animais envolvidos na produção adoecerem, efeitos de tempo, greves, sorte etc, sobre os valores dos produtos, juntamente aos efeitos combinados de insumos não-especificados na função de produção.

Inicialmente, foram propostos por Aigner e Chu (1968), seguidos por Seitz (1971) e Timmer (1971), os modelos de fronteira de produção determinística, que possuem apenas uma medida de incerteza que se refere a ineficiência técnica orientada ao produto, ou apenas ineficiência técnica, que é medida como a distância entre os pontos observados da variável resposta e a função de produção (FØRSUND et al., 1980). Mesmo contendo uma incerteza, esses modelos foram chamados de determinísticos porque todo o desvio do valor observado em relação à forma funcional deve-se à ineficiência técnica das firmas.

Motivados pela idéia de que os desvios dos dados observados em relação à função de produção podem não estar inteiramente sob o controle das firmas, Meeusen e van den Broeck (1977) e Aigner et al. (1977), independentemente e quase simultaneamente, propuseram os modelos de fronteira de produção estocástica, os quais consideram um erro aleatório no modelo, responsável pela variação natural dos dados que não podem ser controladas, além da ineficiência técnica.

Com poucas alterações no modelo de fronteira de produção estocástica obtém-se o modelo de fronteira de custo estocástica, cuja diferença é a utilização da função de custo, no lugar da função de produção, a qual incorpora, além das quantidades de mais de um produto e insumos, a informação dos preços das variáveis e o custo de produção.

A principal diferença entre os modelos de fronteira de custo e de produção está no fato do modelo de fronteira de produção estocástica quantificar o produto máximo obtido a partir de uma dada quantidade de insumos, e, dessa forma, pode-se apenas estimar a ineficiência técnica orientada ao produto da firma; agora, o modelo de fronteira de custo estocástica minimiza o custo de produção, então, os desvios da fronteira podem ser interpretados como o reflexo de uma mistura das ineficiências técnica orientada aos insumos e alocativa, ou seja, a ineficiência econômica.

Um dos primeiros artigos que utilizam a inferência bayesiana nos modelos de fronteira estocástica foi apresentado por van den Broeck et al. (1994). Nesse trabalho, incorpora-se a incerteza relativa à ineficiência técnica considerando-se a distribuição gama com parâmetro de forma conhecido. Outros trabalhos relevantes que empregam a abordagem bayesiana são de Koop et al. (1995), e utilizam o amostrador de Gibbs para analisar o modelo de fronteira estocástica com distribuição gama para a ineficiência, Fernández et al. (1997) e Koop et al. (1997) utilizam dados em painel, Osiewalski e Steel (1998) discutem aspectos numéricos da análise bayesiana para modelos de fronteira estocástica, Steel e Koop (2001) apresentam uma revisão da abordagem, Migon (2004) utiliza a distribuição log-normal para o termo de ineficiência da firma. Fernández et al. (2000) generalizam o modelo de fronteira de produção estocástica para dados que apresentam múltiplos produtos

(um estudo detalhado desse artigo pode ser encontrado em Cespedes (2003)), Fonseca et al. (2005) utilizam a distribuição t-Student para o erro aleatório para avaliar a ineficiência técnica na presença de “outliers”, Cespedes e Leandro (2006) comparam os modelos de fronteira estocástica com erro normal e com erro t-Student e aplicam a dados de fazendas produtoras de carne, Tsionas (2000), defrontando-se com alguns parâmetros que não possuem distribuição condicional completa a posteriori completa, utiliza um método de aceitação para gerar valores dessas distribuições, Tsionas (2002) propõe um modelo de fronteira estocástica com coeficientes aleatórios para separar a ineficiência técnica de diferenças tecnológicas de firmas, libertando o modelo de fronteira da suposição restritiva que todas as firmas tenham que compartilhar as mesmas possibilidades tecnológicas, dentre outros.

As distribuições utilizadas para o termo de ineficiência são: a distribuição exponencial (MEEUSEN; VAN DEN BROECK, 1977; AIGNER et al. 1977), a distribuição meia normal<sup>1</sup> (AIGNER et al., 1977), a distribuição gama (STEVENSON, 1980; GREENE, 1980a, 1980b), a distribuição normal truncada (STEVENSON, 1980) e a distribuição log-normal (MIGON, 2004).

A eficiência de uma firma é medida como uma função da ineficiência, ou seja, uma firma ineficiente é também uma firma não eficiente e uma firma eficiente é uma firma não ineficiente. Koopmans (1951) definiu eficiência técnica por: “Um produtor é tecnicamente eficiente se, e somente se, é impossível produzir mais de um produto qualquer sem produzir menos de outro produto ou usar mais quantidades de alguns insumos”. Inspirado nesse trabalho, Farrell (1957) foi o primeiro a medir a eficiência produtiva e mostrou como definir eficiência de custo (ou eficiência econômica) e como decompor a eficiência de custo nos componentes eficiência técnica e eficiência alocativa:

- i) a eficiência técnica refere-se à habilidade de uma firma obter o nível de produto máximo a partir de um dado conjunto de insumos, e considera-se dois casos especiais:
  - a) A eficiência técnica orientada aos insumos: mantém as quantidades de produtos fixas e determina-se o conjunto de quantidades de insumos mínimos, ou seja, quando nenhuma redução em qualquer insumo é possível. É medida a partir dos modelos de fronteira de custo através de uma função da ineficiência técnica orientada aos insumos;
  - b) A eficiência técnica orientada aos produtos: mantém as quantidades de insumos fixas e determina os máximos produtos, ou seja, quando nenhum aumento em qualquer produto é possível. É medida a partir dos modelos de fronteira de produção através de uma função da ineficiência técnica orientada aos produtos.

A medida de eficiência técnica orientada aos produtos é igual à medida de eficiência técnica orientada aos insumos quando a tecnologia de produção satisfaz retornos de escala constante,

---

<sup>1</sup>Distribution half normal,  $|x| \sim N^+(a, b)$

ou quando a firma é completamente eficiente (eficiência técnica igual a 1), ou quando a firma é completamente ineficiente (eficiência técnica igual a 0). Caso contrário, a eficiência técnica orientada aos insumos é diferente da eficiência técnica orientada aos produtos. É maior quando o retorno de escala for crescente e menor quando o retorno for decrescente sobre a região da tecnologia de produção, respectivamente (KUMBHAKAR; LOVELL, 2000).

Necessitam-se apenas das informações sobre quantidades de insumos e quantidades de produtos para ser calculada. Pode ser interpretada como a razão do produto observado pelo produto máximo factível;

- ii) a eficiência alocativa envolve a seleção de uma combinação de insumos que produzem uma dada quantidade de produtos à um custo mínimo, reflete a habilidade de uma firma usar os insumos em proporções ótimas, dados seus respectivos preços. É uma medida orientada aos insumos e relaciona a eficiência do custo com a eficiência técnica orientada aos insumos (FARRELL, 1957) e pode ser obtida através da relação:

$$EA_i = \frac{EE_i}{ET_i}, \quad (1.1)$$

em que,  $ET_i$  é a eficiência técnica orientada aos insumos,  $EE_i$  é a eficiência econômica e  $i$  representa a  $i$ -ésima firma; e

- iii) a eficiência econômica é uma função que mede a razão do custo mínimo pelo custo observado, é uma combinação das medidas de eficiência técnica orientada aos insumos e alocativa da firma e é obtida a partir do modelo de fronteira de custo através de uma função da ineficiência econômica.

A decomposição da medida de eficiência econômica, que exige algumas condições de regularidade, é possível por meio de modelos de equações simultâneas, que são conhecidas como parcelas de custo, e necessitam de dados do custo total, quantidades de produtos, preços e quantidades dos insumos de cada produtor (KUMBHAKAR; LOVELL, 2000):

$$EE_i = ET_i EA_i.$$

Os artigos apresentados nesta tese foram motivados por situações distintas. A primeira delas surgiu com a dificuldade em estimar a ineficiência nos modelos de fronteira estocástica, e seguindo o raciocínio de Berger e Mester (1997), que asseguram que um bom ajuste da fronteira é crucial no cálculo da ineficiência, procurou-se técnicas de ajuste, sob o ponto de vista bayesiano, com o intuito de facilitar o processo inferencial dos parâmetros da fronteira. A segunda situação surgiu ao encontrar produtos que são discretos, tais como, número de automóveis e eletrodomésticos produzidos ou valores nulos na variável resposta, o que impossibilita utilizar a transformação logarítmica.

O primeiro artigo utiliza-se da inferência bayesiana para estimar a ineficiência econômica de firmas através dos modelos de fronteira de custo estocástica com forma funcional flexível Fourier; faz-se um estudo de simulação para verificar o comportamento das estimativas dos parâmetros da fronteira e do vetor de ineficiências da firma e analisa-se dados reais, previamente analisados por Koop et al. (1997) e Griffin e Steel (2007), que referem-se a 382 hospitais nos Estados Unidos, observados nos anos de 1987 a 1991.

O segundo artigo propõe-se os modelos generalizados de fronteira estocástica, que utilizam modelos lineares generalizados mistos para analisar os dados na escala original, dispensando a necessidade da transformação logarítmica, que permite considerar valores nulos na variável resposta ou ser uma variável na forma de contagem. A inferência bayesiana é utilizada para obtenção dos resumos a posteriori de interesse; faz-se um estudo de simulação para verificar o comportamento das estimativas dos parâmetros e analisa-se dois conjuntos de dados reais. O primeiro refere-se a quantidade de vendas efetuadas por mês, durante os meses de maio a outubro de 2007, de 7 vendedores de uma loja de auto peças. O segundo conjunto de dados refere-se a 52 filiais de uma instituição financeira brasileira que realizam financiamentos de veículos.

## REFERÊNCIAS

AIGNER, D.J.; CHU, S.F. On estimating the industry production functions. **American Economic Review**, Pittsburgh, v.58, n.4, p.826-839, 1968.

AIGNER, D.J.; LOVELL, C.A.K.; SCHMIDT, P. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.6, n.1, p.21-37, 1977.

BERGER, A.N.; MESTER, L.J. Inside de black box: what explains differences in the efficiencies of financial institutions. **Journal of Banking and Finance**, Carbondale, v. 21, n.7, p.895-947, 1997.

BERGER, A.N.; LEUSNER, J.H.; MINGO, J.J. The efficiency of bank branches. **Journal of Monetary Economics**, Boston, v. 40, n.1, p.141-162, 1997.

CESPEDES, J.G. **Eficiência de Produção**: um enfoque Bayesiano, 2003. 63p. Dissertação (Mestre em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2003.

CESPEDES, J.G.; LEANDRO, R.A. Uma aplicação de modelos de fronteira de produção estocástica com erro normal e com erro t-Student. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v.24, n.3, p.25-34, 2006.

FARRELL, M.J. The measurement of productive efficiency. **Journal of the Royal Statistical Society. Series A**, London, v.120, n.3, p.253-290, 1957.

FERNÁNDEZ, C.; KOOP, G.; STEEL, M.F.J. A Bayesian analysis of multiple-output production frontiers. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.98, n.1, p.47-79, 2000.

FERNÁNDEZ, C.; OSIEWALSKI, J.; STEEL, M.F.J. On the use of panel data in stochastic frontier models with improper priors. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.79, n.1, p.169-193, 1997.

FONSECA, T.C.O.; MEDRANO, L.A.; FERREIRA, M.A.R.; MIGON, H.S. **Regressão Multivariada com Erro t-Student**: uma análise Bayesiana. Disponível em: [www.sbe.org.br/ebe26/031.pdf](http://www.sbe.org.br/ebe26/031.pdf). Acesso em 9 mar. 2005.

FØRSUND, F.R.; LOVELL, C.A.K.; SCHMIDT, P. A Survey of Frontier Production Functions and of their Relationship to Efficiency Measurement. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.13, n.1, p.5-25, 1980.

GALLANT, A. R. On the bias in flexible functional forms and an essentially unbiased form: the Fourier flexible form. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.15, n.2, p.211-245, 1981.

GREENE, W. Maximum likelihood estimation of econometric frontier functions. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.13, n.1, p.27-56, 1980a.

GREENE, W. On the estimation of a flexible frontier production model. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.13, n.1, p.101-115, 1980b.

GRIFFIN, J.E.; STEEL, M.F.J. Bayesian stochastic frontier analysis using WinBUGS. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.27, n.3 p.163-177, 2007.



HUANG, T.H.; WANG, M.H. Estimation of technical and allocative inefficiency using Fourier flexible cost frontiers for Taiwan's banking industry. **The Manchester School**, Manchester, v.71, n.3, p.341-362, 2003.

HUANG, T.H.; WANG, M.H. Comparisons of economic inefficiency between output and input measures of technical inefficiency using the Fourier flexible cost function. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.22, n.1-2, p.123-142, 2004.

HUSSEIN, K.A. Banking efficiency in Bahrain: Islamic vs conventional banks. **Islamic Development Bank**, Saudi Arabia, N.68, p.1-62, 2004.

IVALDI, M.; LADOUX, N.; OSSARD, H.; SIMIONI, M. Comparing Fourier and Translog specifications of multiproduct technology: evidence from an incomplete panel of French farmers. **Journal of Applied Econometrics**, Cambridge, v.11, n.6, p.649-667, 1996.

KOOP, G.; STEEL, M.F.J.; OSIEWALSKI, J. Posterior analysis of stochastic frontier models using Gibbs sampling. **Computational Statistics**, Germany, v.10, p.353-373, 1995.

KOOP, G.; OSIEWALSKI, J.; STEEL, M.F.J. Bayesian efficiency analysis through individual effects: hospital cost frontiers. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.76, n.1-2, p.77-105, 1997.

KOOPMANS, T.C. An analysis of production as an efficient combination of activities. In: KOOPMANS, T.C. (Ed.). **Activity Analysis of Production and Allocation**. New-York: Wiley, 1951.

KRAFT, E.; HOLFER, R.; PAYNE, J. Privatization, foreign bank entry and bank efficiency in Croatia: a Fourier - flexible function stochastic cost frontier analysis. **Croatian National Bank**, Croatia, p.1-17, 2002.

KUMBHAKAR, S. C.; LOVELL C.A.K. **Stochastic Frontier Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 333p.

MEEUSEN, W.; VAN DEN BROECK, J. Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. **International Economic Review**, Philadelphia, v.18, n.2, p.435-444, 1977.

- MCALLISTER, P.H.; MCMANUS, D. Resolving the scale efficiency puzzle in banking. **Journal of Banking and Finance**, Carbondale, v. 17, n.2-3, p.389-405, 1993.
- MIGON, E. Bayesian hierarchical models for stochastic production frontier. **Estadística**, Santiago do Chile, v. 56, p.10-30, 2004.
- MITCHELL, K.; ONVURAL, N.M. Economies of scale and scope at large commercial banks: evidence from the Fourier flexible functional form. **Journal of Money, Credit and Banking**, Ohio, v. 28, n.2 p.178-199, 1996.
- OSIEWALSKI, J.; STEEL, M.F.J. Numerical tools for the Bayesian analysis of frontier models. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.10, n.1, p.103-117, 1998.
- ROSSI, S.P.S.; SCHAWAIGER, M.; WINKLER, G. Managerial behavior and cost/profit efficiency in the banking sectors of Central and Eastern European countries. **Oesterreichische Nationalbank**, Austria, p.1-34, 2005.
- SEITZ, W.D. Productive efficiency in the steam-electric generating industry. **Journal of Political Economy**, Chicago, v.79, n.4, p.878-886, 1971.
- STEEL, M.; KOOP, G. Bayesian analysis of stochastic frontier models in **A Companion to Theoretical Econometrics**. Editors: Baltagi B, 2001. 520-537p.
- STEVENSON, R.E. Likelihood functions for generalized stochastic frontier estimation. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.13, n.1, p.57-66, 1980.
- TIMMER, C.P. Using a probabilistic frontier production function to measure technical efficiency. **Journal of Political Economy**, Chicago, v.79, n.4, p.776-794, 1971.
- THOMPSON, A.A.; FORMBY, J.P. **Microeconomia da firma: teoria e prática**. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1998. 358p.
- TSIONAS, E.G. Full likelihood inference in normal-gamma stochastic models. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.13, n.3, p.183-205, 2000.

TSIONAS, E.G. Stochastic frontier models with random coefficients. **Journal of Applied Econometrics**, Cambridge, v.17, n.2, p.127-147, 2002.

VAN DEN BROECK, J.; KOOP, G.; OSIEWALSKI, J.; STEEL, M.F.J. Stochastic frontier models: a Bayesian perspective. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.61, n.2, p.273-303, 1994.

## 2 MODELO DE FRONTEIRA ESTOCÁSTICA DE CUSTO COM FORMA FUNCIONAL FLEXÍVEL FOURIER: UMA ABORDAGEM BAYESIANA

### Resumo

O processo de quantificar a eficiência econômica de firmas consiste em comparar firmas dentro da mesma tecnologia de produção, valorizando as que utilizam melhor seus insumos e produtos e as que minimizam seus custos e baseia-se nos modelos de fronteira de custo, que são compostos por uma forma funcional e um componente aleatório que incorpora incertezas. Existe uma variedade de formas funcionais utilizadas em modelos de fronteira, elas diferem em muitos aspectos e algumas vezes é difícil julgar qual delas deve ser escolhida, visto que a função de custo verdadeira é desconhecida e pode ser somente aproximada. As formas funcionais mais utilizadas são a Cobb-Douglas, translog e Leontief generalizada, que aproximam a função custo verdadeira de maneira local. A forma funcional flexível de Fourier possui a propriedade de flexibilidade global e aproxima a função custo verdadeira tanto quanto desejada na norma de Sobolev. Neste trabalho utiliza-se a inferência bayesiana para calcular a ineficiência econômica de cada firma envolvida no processo de produção utilizando os modelos de fronteira de custo estocástica com forma funcional flexível Fourier. Apresenta-se um estudo de simulação e analisa-se dados reais.

Palavras-chave: Inferência bayesiana; Função de custo Fourier; Modelos de fronteira estocástica; Eficiência econômica

### Abstract

The process of quantifying economic efficiency of firms is to compare them within the technology of production, appraising the better use of their inputs and outputs, minimizing their costs or maximizing their profits and this process is based on cost frontier models that are composed of one functional form and one random component who embodies uncertainty. There are a variety of functional forms used in stochastic frontier models and they have many differences among them and sometimes it is very difficult to decide which one has to be chosen because the true form is unknown and it can just be approximated. The most used functional forms are the Cobb-Douglas, translog and generalized Leontief that approximate the true cost function in local form. The flexible Fourier functional form has global flexibility and approximates the true cost function as wanted as Sobolev norm. In this paper it is used the bayesian approach to valuation the economic inefficiency of each firm involved at production process using the cost stochastic frontier models with flexible Fourier functional form. It is showed a study of simulation and analyzed set of real data.

Keywords: Bayesian inference; Fourier cost function; Stochastic frontier models; Economic efficiency

## 2.1 Introdução

O processo de medir a ineficiência econômica de firmas baseia-se nos modelos de fronteira de custo que são compostos por uma forma funcional, que representa a função de custo, e um componente aleatório que incorpora incertezas. O componente aleatório nos modelos de fronteira de custo estocástica divide-se em duas partes: a primeira refere-se à ineficiência econômica e a segunda refere-se a uma variação natural que os dados podem conter e que não são controladas, tais como, um funcionário ficar doente, uma máquina quebrar, escassez de chuva em determinada época de plantio, animais envolvidos na produção adoecerem, efeitos de tempo, greves, sorte etc, sobre os valores dos produtos, juntamente aos efeitos combinados de insumos não-especificados na função de produção.

Existe uma variedade de formas funcionais utilizadas em modelos de fronteira de custo estocástica que diferem em muitos aspectos sendo, algumas vezes, difícil julgar qual delas deve ser escolhida, visto que a forma verdadeira da função de custo é desconhecida e pode ser somente aproximada. As formas funcionais mais utilizadas são a Cobb-Douglas, translog (Apêndice H) e Leontief generalizada.

Dois métodos bastante utilizados para aproximar uma função são: aproximações em séries de Taylor e aproximações em série de Fourier (Apêndice A). A série de Taylor dá uma aproximação muito boa para uma função nas vizinhanças de um ponto, portanto uma aproximação local, enquanto que a aproximação de uma função em série de Fourier dá uma aproximação global (GALLANT, 1981).

Considerando-se a propriedade de aproximação global da expansão em série de Fourier, Gallant (1981) propôs a forma funcional flexível Fourier, também conhecida como função de custo Fourier, para fazer uma aproximação da função de custo verdadeira tanto quanto desejada na norma de Sobolev (Apêndice B), que depende do tamanho amostral. Além disso, essa função possui uma propriedade de flexibilidade global que permite aproximar não somente uma função de custo arbitrária, mas também qualquer de suas derivadas, que são conhecidas como parcelas de custo.

Como a forma funcional flexível Fourier aproxima a função de custo verdadeira tanto quanto os dados permitem, entende-se que a ineficiência será estimada com maior precisão, no entanto, o processo inferencial envolvido na estimação dos modelos de fronteira de custo estocástica com forma funcional flexível Fourier é bastante complexo, pois existem muitos parâmetros a serem estimados.

Estudos feitos por McAllister e McManus (1993), Berger et al. (1997), Berger e Mester (1997) e Mitchell e Onvural (1996) mostram que para dados de instituições financeiras a forma funcional flexível Fourier produz melhor ajuste que a forma funcional translog para a fronteira de custo. Ivaldi et al. (1996) mostram a diferença dos modelos de fronteira de custo entre o uso da forma

funcional flexível Fourier e o da forma funcional translog para dados de fazendas frutíferas da França. Trabalhos recentes que utilizam a forma funcional flexível Fourier são Huang e Wang (2003, 2004), Rossi et al. (2005), Kraft et al. (2002), Hussein (2004), dentre outros. Os trabalhos encontrados na literatura utilizam a estatística clássica.

Neste trabalho propõem-se utilizar a inferência bayesiana para estimar a ineficiência econômica de firmas nos modelos de fronteira estocástica de custo com forma funcional flexível Fourier. Na seção 2.2.1 apresenta-se a forma funcional flexível Fourier, na seção 2.2.2 define-se o modelo de fronteira de custo estocástica com forma funcional flexível Fourier na forma matricial e descreve-se a análise utilizando a inferência bayesiana, na seção 2.2.3 faz-se um estudo de simulação para verificar o comportamento das estimativas dos parâmetros da fronteira e da ineficiência econômica das firmas baseado em 50 amostras, na seção 2.2.4 descreve-se os dados reais e os resultados e discussões são apresentados na seção 2.3.

## 2.2 Desenvolvimento

### 2.2.1 Forma funcional flexível Fourier

A forma funcional flexível Fourier consiste em dois componentes principais. O primeiro é uma função translog, com algumas modificações, que depende da ordem de aproximação utilizada, e o segundo componente é uma aproximação da expansão em série de Fourier trigonométrica, que possui termos que são combinações lineares de funções de senos e cossenos e podem representar exatamente qualquer função multivariada bem comportada, tal como uma função de custo (HUANG; WANG, 2004).

Considere  $\ln c(\mathbf{y}, \mathbf{w})$  o logaritmo da função de custo verdadeira, em que  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_S)'$  é um vetor de preços de insumos de tamanho  $S$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_H)'$  é um vetor de quantidades de produtos de tamanho  $H$ .

Para aproximar uma função por série de Fourier de senos e cossenos é necessário que esta função seja periódica. A função de custo não é periódica, a idéia, então, é limitar as variáveis  $w_s$  e  $y_h$  no intervalo de  $(0, 2\pi)$ . Gallant (1982) propôs fazer a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} l_s &= \ln w_s + \ln a_s > 0 \quad s = 1, 2, \dots, S, \\ q_h &= \mu_h(\ln y_h + \ln a_h) > 0 \quad h = 1, 2, \dots, H, \end{aligned}$$

sendo  $l_s$  e  $q_h$  transformações dos vetores de preços de insumos e quantidades de produtos.

Os parâmetros de locação  $\ln a_s$  e  $\ln a_h$  são comumente especificados como:

$$\ln a_s = -\min(\ln w_s) + 10^{-5}, \quad (2.1)$$

$$\ln a_h = -\min(\ln y_h) + 10^{-5}. \quad (2.2)$$

As equações (2.1) e (2.2) garantem que os valores mínimos da transformação do logaritmo dos preços dos insumos e do logaritmo das quantidades de produtos sejam ligeiramente maiores do que zero.

A notação  $\mu_h$  é o fator de escala do produto  $h$ :

$$\mu_h = \frac{\max(l_1, l_2, \dots, l_S)}{\ln y_h^{\max} + \ln a_h},$$

em que,  $y_h^{\max}$  é o valor máximo do produto  $h$  na amostra.

O fator de escala comum  $\lambda$  é calculado como:

$$\lambda = \frac{2\pi - \epsilon}{\max(l_1, l_2, \dots, l_S)},$$

para algum  $\epsilon$  entre 0 e  $2\pi$ . Gallant (1982) sugere que  $2\pi - \epsilon = 6$ .

As propostas de  $\lambda$  e  $\mu_h$  são fazer o valor máximo do logaritmo dos preços dos insumos e o valor máximo das quantidades dos produtos ligeiramente menores do que  $2\pi$ . Enquanto necessitasse que  $\lambda$  seja comum para todos os preços de insumos, para garantir homogeneidade linear, as quantidades de produtos podem ser medidas pelo uso de uma escala distinta de medida,  $\mu_h$ , sem qualquer impacto na análise (GALLANT, 1984).

Gallant (1981) sugere que o número de termos de senos e cossenos em uma aproximação em série de Fourier de uma função não-periódica pode ser reduzida consideravelmente se um termo linear  $\mathbf{b}'\mathbf{x}$  é incluído; agora, se um termo quadrático  $\mathbf{x}'\Psi\mathbf{x}$  também é incluído, pode-se impor as propriedades de curvatura da função de custo, e assim, a versão logarítmica da função de Fourier,  $g_K(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta})$ , é expressa por:

$$g_K(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) = d_0 + \mathbf{b}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\Psi\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^A \left\{ d_{0\alpha} + 2 \sum_{j=1}^J \left[ d_{j\alpha} \cos(j\lambda \mathbf{k}'_{\alpha} \mathbf{x}) - r_{j\alpha} \sin(j\lambda \mathbf{k}'_{\alpha} \mathbf{x}) \right] \right\},$$

em que

$$\Psi = - \sum_{\alpha=1}^A d_{0\alpha} \lambda^2 \mathbf{k}_{\alpha} \mathbf{k}'_{\alpha},$$

$\mathbf{k}_{\alpha}$  são  $\alpha$  vetores paramétricos, em que  $\alpha = 1, \dots, A$  de dimensão  $E = S + H$  com componentes inteiros,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{r}$  são vetores de coeficientes a serem estimados,  $\mathbf{x} = (\mathbf{l}', \mathbf{q}')$  é a transformação dos vetores dos logaritmos dos preços de insumos e quantidades de produtos. A ordem de aproximação da equação  $g_K(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta})$  é representada por  $K$ .

O termo linear  $\mathbf{b}'\mathbf{x}$  representa a forma funcional Cobb-Douglas e adicionando o termo quadrático  $\frac{1}{2}\mathbf{x}'\Psi\mathbf{x}$  representa-se a forma funcional translog, portanto, pode-se falar que a forma funcional Cobb-Douglas e a forma funcional translog são casos especiais da forma funcional flexível Fourier. O termo  $d_{0\alpha} + 2 \sum_{j=1}^J \left[ d_{j\alpha} \cos(j\lambda \mathbf{k}'_{\alpha} \mathbf{x}) - r_{j\alpha} \sin(j\lambda \mathbf{k}'_{\alpha} \mathbf{x}) \right]$  representa a aproximação da função em série de Fourier.

Para que finalmente  $g_K(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta})$  seja uma função de custo, é preciso impor homogeneidade com respeito ao primeiro elemento do vetor de preços dos insumos. Essa condição se mantém quando  $\sum_{s=1}^S b_s = 1$  e  $d_{0\alpha} = d_{j\alpha} = r_{j\alpha} = 0$ , para qualquer  $\alpha$  tal que  $\sum_{s=1}^S k_{\alpha s} \neq 0$ .

Recomenda-se que o número de parâmetros a serem estimados na forma funcional flexível Fourier seja igual ao tamanho da amostra efetiva elevado a dois terços (CHALFANT; GALLANT, 1985, EASTWOOD; GALLANT, 1991, MITCHELL; ONVURAL, 1996). A amostra efetiva corresponde ao total de observações amostradas de  $N$  firmas em  $T$  tempos, ou seja, o tamanho da amostra efetiva é  $NT$ . É muito comum encontrar na literatura  $J = 1$  (HUANG; WANG, 2004), neste caso,  $A$  será forçado a ser menor do que a metade do tamanho amostral.

### Construção dos multi-índices $\mathbf{k}_\alpha$

A notação de multi-índices reduz a complexidade da notação requerida para denotar derivadas parciais de ordem superiores e as expansões em séries de Fourier multivariadas. Um multi-índice é um vetor com componentes inteiros, possui dimensão  $E = S + H$ , e satisfaz as condições:

- i)  $\mathbf{k}_\alpha$  não pode ser um vetor de zeros;
- ii) seu primeiro elemento diferente de zero deve ser estritamente positivo;
- iii) seus elementos não podem ter um divisor inteiro comum; e,
- iv) devem-se rearranjar os  $\mathbf{k}_\alpha$  em uma seqüência tal que  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_\alpha$  são vetores elementares e que seus tamanhos sejam não decrescentes em  $\alpha$ .

O valor de  $K$  é menor do que ou igual a soma dos valores absolutos dos elementos de cada vetor  $\mathbf{k}_\alpha$ . O critério de escolha desse valor deve-se a dois motivos: o primeiro motivo refere-se ao tamanho amostral, quanto maior o valor de  $K$ , um maior número de vetores de multi-índices serão utilizados e, conseqüentemente, mais parâmetros  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{r}$  deverão ser estimados, e o segundo motivo refere-se ao interesse econômico, pois para se obter uma função translog completa no primeiro termo da forma funcional flexível Fourier é necessário que a ordem de aproximação  $K$  seja maior do que ou igual a 3. Se a ordem de aproximação for  $K = 2$  os termos da função translog que se referem aos cruzamentos entre os preços de insumos e quantidades de produtos são omitidos.

Como exemplo, considere o caso com dois preços de insumos  $S = 2$  e um produto  $H = 1$ . Para a aproximação de ordem  $K = 3$ , os elementos dos vetores multi-índices  $\mathbf{k}_\alpha$  possuem dimensão  $E = S + H = 3$  e podem assumir os valores  $-3, -2, -1, 0, 1, 2$  e  $3$ . Observando-se as condições i) a iv) apresentam-se todos os possíveis vetores  $\mathbf{k}_\alpha$  na Tabela 2.1.

A soma dos 2 primeiros elementos dos vetores multi-índices devem ser zero, para impor a restrição de homogeneidade nos preços dos insumos. Sendo assim, neste caso, existem  $\alpha = 6$



Tabela 2.1 – Possíveis vetores multi-índices ( $k_\alpha$ )

K=1			K=2						K=3					
$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$	$k_{14}$	$k_{15}$
0	0	1	0	0	2	0	1	1	0	1	1	0	0	3
0	1	0	0	2	0	1	0	1	1	0	-1	0	3	0
1	0	0	2	0	0	1	1	0	-1	-1	0	3	0	0

---

K=3															
$k_{16}$	$k_{17}$	$k_{18}$	$k_{19}$	$k_{20}$	$k_{21}$	$k_{22}$	$k_{23}$	$k_{24}$	$k_{25}$	$k_{26}$	$k_{27}$	$k_{28}$	$k_{29}$	$k_{30}$	$k_{31}$
1	1	0	1	1	0	2	2	0	2	2	0	1	1	1	1
0	2	1	0	-2	1	0	1	2	0	-1	2	1	-1	1	-1
2	0	2	-2	0	-2	1	0	1	-1	0	-1	1	1	-1	-1

vetores multi-índices admissíveis que encontram-se na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Vetores multi-índices ( $k_\alpha$ ) admissíveis

K=1	K=2		K=3		
$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
0	0	1	0	1	1
0	0	-1	0	-1	-1
1	2	0	3	1	-1

Os cálculos necessários para calcular a forma funcional flexível Fourier a partir dos vetores multi-índices encontram-se no Anexo A.

### 2.2.2 Modelo de fronteira estocástica de custo com forma funcional flexível Fourier

Considerando-se um conjunto com  $N$  firmas diferentes em  $T$  tempos, correspondendo a  $S$  preços de insumos e  $H$  produtos. Define-se o modelo de fronteira estocástica de custo com forma funcional flexível Fourier na forma matricial:

$$\ln C = \mathbf{X}\beta + 2\mathbf{W}d - 2\mathbf{Q}r + \mathbf{D}u + \mathbf{I}v, \quad (2.3)$$

sendo  $\mathbf{X}\beta + 2\mathbf{W}d - 2\mathbf{Q}r$  a forma funcional flexível Fourier,  $\mathbf{D}u$  o termo de ineficiência econômica das firmas e  $\mathbf{I}v$  o erro aleatório do modelo. O modelo (2.3) é composto por:

i) Forma funcional:

A forma funcional do modelo baseia-se nas matrizes  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{Q}$  e definem a forma funcional flexível Fourier. A matriz  $\mathbf{X}$  tem dimensão  $NT \times R$ , em que  $R = 1 + S + H$ , com cada linha composta por uma constante, que indica o intercepto, seguido das transformações dos

logaritmos dos preços dos insumos  $l$  e quantidades de produtos  $q$ , adicionado dos quadrados e produtos cruzados dessas variáveis, para cada firma  $i$ , no tempo  $t$ . A matrix  $\mathbf{X}$  representa a forma funcional translog.

A matriz  $\mathbf{W}$  tem dimensão  $NT \times J\alpha$  e suas linhas são compostas por cossenos de funções das transformações dos logaritmos dos preços dos insumos  $l$  e quantidades de produtos  $q$ , e, finalmente a matriz  $\mathbf{Q}$  tem dimensão  $NT \times J\alpha$  e suas linhas são compostas por senos de funções das transformações dos logaritmos dos preços dos insumos  $l$  e quantidades de produtos  $q$ . As matrizes  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{Q}$  representam a parte trigonométrica da forma funcional flexível Fourier.

Os vetores  $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_R)$ ,  $d' = (d_1, \dots, d_{J\alpha})$  e  $r' = (r_1, \dots, r_{J\alpha})$  são vetores de parâmetros a serem estimados.

ii) Termo de ineficiência econômica:

A ineficiência econômica da firma é definida pelo termo  $Du$ , sendo  $D$  uma matriz  $NT \times M$ , com  $M \leq NT$ . Através da escolha de  $D$ , define-se como estimar o vetor de ineficiência econômica. Se  $D$  é igual à matriz identidade de dimensão  $M = NT$ , obtém-se um termo de ineficiência econômica diferente para cada firma  $i$  e em cada tempo  $t$ . Se  $M = N$ , a matriz  $D$  tem a forma:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

especifica-se um termo de ineficiência para cada firma, mas constante no tempo. Pode-se também especificar o termo de ineficiência econômica para grupos de firmas, por exemplo, para as firmas que pertencem a mesma região, para firmas pequenas, médias e grandes, de acordo com as características de interesse. Necessitam-se apenas de pequenas modificações na matriz  $D$ .

O vetor  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  representa a ineficiência econômica das firmas, em que  $u_m > 0$  e, geralmente, utiliza-se as distribuições: exponencial, gama, normal-truncada, meia-normal ou log-normal para representá-lo.

iii) Erro aleatório:

O modelo considera que a fronteira não é conhecida realmente, portanto, possui uma perturbação aleatória  $\mathbf{v}$ , com distribuição normal  $NT$ -variada com média zero e matriz de variâncias e covariâncias  $\sigma_v^2 \mathbf{I}_{NT}$ , sendo  $\mathbf{I}_{NT}$  a matriz identidade de dimensão  $NT$ .

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{C} | \mathbf{u} &\sim N_{NT}((\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + 2\mathbf{W}\mathbf{d} - 2\mathbf{Q}\mathbf{r} + \mathbf{D}\mathbf{u}), \sigma_v^2 \mathbf{I}_{NT}), \\ u_m | P, \theta &\sim G(P, \theta), \text{ para } m = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

em que cada elemento do vetor de ineficiência econômica  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  possui distribuição gama:

$$p(\mathbf{u} | P, \theta) \propto \prod_{m=1}^M G(u_m | P, \theta),$$

sendo  $P$  e  $\theta$  efeitos aleatórios.

Considerando-se o termo de ineficiência econômica específico para cada firma, mas constante no tempo, ou seja, utilizando a matriz  $\mathbf{D}$  como (2.4) e considerando-se  $M = N$ , define-se a eficiência econômica da  $i$ -ésima firma como:

$$EE_i = \exp(-u_i),$$

sendo  $u_i$  os elementos do vetor de ineficiência econômica  $\mathbf{u}$  e  $i = 1, \dots, N$ .

Para utilizar a abordagem bayesiana (Apêndice C) é necessário incorporar a incerteza relativa as quantidades de interesse. Para tanto, considera-se independência entre os parâmetros  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $P$ ,  $\theta$  e  $\sigma_v^2$  e a distribuição a priori conjunta é dada por:

$$\pi(P, \theta, \sigma_v^2, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}) = \pi(P)\pi(\theta)\pi(\sigma_v^2)\pi(\boldsymbol{\beta})\pi(\mathbf{d})\pi(\mathbf{r}),$$

para as quais:  $P \sim G(a_0, b_0)$ ;  $\theta \sim G(v_0, w_0)$ ; a distribuição a priori de  $\sigma_v^2$  é dada pela precisão  $\tau = \sigma_v^{-2}$ :  $\tau \sim G(\alpha, \delta)$ ;  $\boldsymbol{\beta} \sim NT_R(\mathbf{a}_\beta, \mathbf{I}_R \sigma_\beta^2) I_\beta(\boldsymbol{\beta})$ ;  $\mathbf{d} \sim N_{J\alpha}(\mathbf{a}_d, \mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_d^2)$ ;  $\mathbf{v} \sim N_{J\alpha}(\mathbf{a}_r, \mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^2)$ , sendo  $G(a, b)$  a função densidade de probabilidade da distribuição gama com média  $\frac{a}{b}$  e variância  $\frac{a}{b^2}$ ,  $N_{J\alpha}(m, V)$  a distribuição normal  $J\alpha$ -variada e  $NT_R(m, V)$  a distribuição normal truncada  $R$ -variada (Apêndice D).

A distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u} | \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) &= (2\pi)^{-\frac{NT}{2}} \tau^{\frac{NT}{2}} \frac{\theta^{MP}}{\Gamma(P)^M} \prod_{m=1}^M u_m^{P-1} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})' (\tau \mathbf{I}_{NT}) (\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right. \\ &\left. - \theta \sum_{m=1}^M u_m \right\} \pi(P)\pi(\theta)\pi(\boldsymbol{\beta})\pi(\mathbf{d})\pi(\mathbf{r})\pi(\tau). \end{aligned}$$

De forma equivalente, tem-se:

$$\begin{aligned} \pi(P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u} | \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) &\propto \tau^{\frac{NT}{2}} \frac{\theta^{MP}}{\Gamma(P)^M} \prod_{m=1}^M u_m^{P-1} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau \mathbf{I}_{NT})(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right. \\ &\left. -\theta \sum_{m=1}^M u_m \right\} P^{a_0-1} \exp\{-b_0 P\} \theta^{v_0-1} \exp\{-w_0 \theta\} \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta \tau\} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)'(\mathbf{I}_R \sigma_\beta^2)^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)] \right\} I_\beta(\boldsymbol{\beta}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)'(\mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_d^2)^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)] \right\} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)'(\mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^2)^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como a distribuição conjunta a posteriori não é tratável algebricamente, resumos a posteriori de interesse são obtidos de amostras da distribuição (2.5) utilizando-se algoritmos MCMC (Apêndice E), tais como, Gibbs *sampling* (CASELLA; GEORGE, 1992; GELFAND, 2000; GELFAND et al., 1990) e Metropolis-Hastings (CHIB; GREENBERG, 1995; HASTINGS, 1970; METROPOLIS et al., 1953). Para a implementação computacional desses algoritmos é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori de todas as quantidades desconhecidas de interesse presentes no modelo.

Apresentam-se, a seguir, as distribuições condicionais completas a posteriori associadas a distribuição (2.5). Os cálculos para sua obtenção são apresentados no Anexo B.

i) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\theta$  é gama:

$$\theta | \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, P, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C} \sim G\left(MP + v_0, w_0 + \sum_{m=1}^M u_m\right).$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\boldsymbol{\beta}$  é normal truncada  $R$ -variada na região de regularidade do  $\boldsymbol{\beta}$ :

$$\boldsymbol{\beta} | P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C} \sim N_R(\mathbf{b}_\beta, \mathbf{H}_\beta^{-1}) I_\beta(\boldsymbol{\beta}),$$

sendo  $\mathbf{H}_\beta = \mathbf{X}'\tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} + \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2}$ ;  $\mathbf{b}_\beta = \mathbf{H}_\beta^{-1}(-\mathbf{b}_1)$ ,  $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{X}'\tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \mathbf{X}'\tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W}\mathbf{d} - \mathbf{X}'\tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} + \mathbf{X}'\tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} a_\beta$  e  $I_\beta(\boldsymbol{\beta})$  corresponde a uma restrição para que os elementos do vetor  $\boldsymbol{\beta}$ , exceto o intercepto, sejam não negativos.

iii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\mathbf{d}$  é normal  $J_\alpha$ -variada:

$$\mathbf{d} | P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C} \sim N_{J_\alpha}(\mathbf{b}_d, \mathbf{H}_d^{-1}),$$

sendo  $\mathbf{H}_d = 2\mathbf{W}'\tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} + \mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_d^{-2}$  e  $\mathbf{b}_d = \mathbf{H}_d^{-1}(-\mathbf{b}_2)$  e  $\mathbf{b}_2 = -2\mathbf{W}'\tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + 2\mathbf{W}'\tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}'\tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} + 2\mathbf{W}'\tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_d^{-2} a_d$ .

iv) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\mathbf{r}$  é normal  $J\alpha$ -variada:

$$\mathbf{r} | P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C} \sim N_{J\alpha}(\mathbf{b}_r, \mathbf{H}_r^{-1}),$$

$$\text{sendo } \mathbf{H}_r = 2\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q} + \mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_r^{-2} \text{ e } \mathbf{b}_r = \mathbf{H}_r^{-1}(-\mathbf{b}_3) \text{ e } \mathbf{b}_3 = 2\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} - 2\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - 2\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_r^{-2}\mathbf{a}_r.$$

v) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\tau = \sigma_v^{-2}$  é gama:

$$\tau | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, P, \theta, \mathbf{u}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C} \sim G\left(\frac{N}{2} + \alpha, \frac{(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u}) + 2\delta}{2}\right).$$

vi) Distribuição condicional completa a posteriori para  $P$ :

$$\pi(P | \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \frac{\theta^{MP}}{\Gamma(P)^M} P^{a_0-1} \exp\left\{P\left[-b_0 + \sum_{m=1}^M \ln(u_m)\right]\right\}.$$

vii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{u} | P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) &\propto \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau\mathbf{I}_{NT})(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})\right]\right\} & \\ \exp\left\{-\theta \sum_{m=1}^M u_m + (P-1) \sum_{m=1}^M \ln(u_m)\right\}. & \end{aligned}$$

As distribuições condicionais completas a posteriori para os parâmetros  $\boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \tau$  e  $\theta$ , possuem forma fechada, ou seja, são distribuições conhecidas (normal e gama), portanto, pode-se utilizar o algoritmo Gibbs *sampling* para obter amostras dessas distribuições e as distribuições condicionais completas a posteriori para os parâmetros  $\mathbf{u}$  e  $P$  não possuem forma fechada e amostrar dessas distribuições não é simples. Para amostrar destas distribuições, pode-se utilizar o algoritmo de Metropolis-Hastings.

### 2.2.3 Simulação de dados

Os dados simulados baseiam-se em valores reais, relativos a produção de leite do Estado de São Paulo. As variáveis referem-se: ao preço do farelo de soja; ao preço da mão de obra e à produção de leite. Coletou-se as médias e as variâncias dos logaritmos dos dados disponíveis no sítio do Instituto de Economia Agrícola<sup>1</sup> e foram utilizadas como base para a simulação das

<sup>1</sup><http://www.iea.sp.gov.br/out/banco/menu.php> (03 fev. 2008)

variáveis. O logaritmo do preço do insumo farelo de soja, na simulação, possui distribuição normal com média 6,17 e desvio padrão 0,06, o logaritmo do preço da mão de obra possui distribuição normal com média 5,40 e desvio-padrão 0,20 e o logaritmo da produção de leite possui distribuição normal com média 10,50 e desvio-padrão 0,12.

Considere  $N = 60$  firmas em  $T = 6$  tempos,  $S = 2$  preços de insumos e  $H = 1$  quantidade de produto. Os passos a seguir são necessários para obter os dados simulados:

**Passo 1:** Gera-se os logaritmos dos preços unitários dos dois insumos e o logaritmo da quantidade do produto para cada uma das 60 firmas, que são denotados por  $\ln w_{i1}$ ,  $\ln w_{i2}$ , e  $\ln y_i$  e assume-se que  $\ln w_{i1} \sim N(6, 17; 0, 06)$ ,  $\ln w_{i2} \sim N(5, 40; 0, 20)$  e  $\ln y_i \sim N(10, 50; 0, 12)$ , respectivamente.

**Passo 2:** Utiliza-se o caminho aleatório governado pela função densidade de probabilidade da distribuição normal com média 0 e desvio padrão igual a 0, 01 para gerar as variáveis no tempo. Esta idéia foi originalmente proposta por Fernández et al. (2000) e utilizada em Cespedes (2003):

$$\ln w_{it1} = \ln w_{i(t-1)1} + \varsigma,$$

em que  $\varsigma$  tem distribuição normal com média 0 e desvio padrão 0,01,  $i = 1, \dots, N$  e  $t = 1, \dots, T$ . Se valores negativos são gerados para as variáveis, esses são descartados e gerados novamente. Utiliza-se o mesmo processo para  $\ln w_{it2}$  e  $\ln y_{it}$ .

**Passo 3:** Faz-se a transformação dos logaritmos dos preços dos insumos e a transformação da quantidade do produto para que todos os valores sejam estritamente positivos e menores do que  $2\pi$ , obtendo-se assim,  $l$  e  $q$ , respectivamente. Essas variáveis formam a matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $360 \times 10$ . A linha  $i$  da matriz  $\mathbf{X}$  é dada por:

$$\mathbf{X}[i, t, ] = (1, l_{it1}, l_{it2}, q_{it}, \lambda^2 l_{it1}^2, \lambda^2 l_{it2}^2, \lambda^2 q_{it}^2, \lambda^2 l_{it1} l_{it2}, \lambda^2 l_{it1} q_{it}, \lambda^2 l_{it2} q_{it}).$$

**Passo 4:** As matrizes  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{Q}$ , de dimensão  $360 \times 6$  são compostas por combinações de cossenos e senos das transformações dos logaritmos dos preços dos insumos e da quantidade de produto: A linha  $i$  das matrizes  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{Q}$  são definidas como:

$$\mathbf{W}[i, t, ] = 2 \left( \cos(3\lambda q_{it}), \cos(2\lambda q_{it}), \cos(\lambda q_{it}), \cos(\lambda(l_{it1} - l_{it2} - q_{it})), \right. \\ \left. \cos(\lambda(l_{it1} - l_{it2} + q_{it})), \cos(\lambda(l_{it1} - l_{it2})) \right),$$

e

$$\mathbf{Q}[i, t, ] = 2 \left( \sin(3\lambda q_{it}), \sin(2\lambda q_{it}), \sin(\lambda q_{it}), \sin(\lambda(l_{it1} - l_{it2} - q_{it})), \right. \\ \left. \sin(\lambda(l_{it1} - l_{it2} + q_{it})), \sin(\lambda(l_{it1} - l_{it2})) \right).$$

A ordem de aproximação utilizada é  $K = 3$ . Os cálculos para a obtenção dos multi-índices  $k_\alpha$  e das matrizes  $W$  e  $Q$  encontram-se no Anexo A.

**Passo 5:** Consideram-se os vetores de parâmetros  $\beta = (0, 5; 0, 4; 0, 6; 0, 3; 0, 5; 0, 5; 0, 5; 1, 0; 1, 0; 1, 0)$ ,  $d = (d_1, d_2, \dots, d_6) = (1, 1, \dots, 1)$  e  $r = (r_1, r_2, \dots, r_6) = (1, 1, \dots, 1)$ . Assume-se ineficiência constante no tempo. A matriz  $D$ , de dimensão  $360 \times 60$  é expressa por:

$$D = \begin{bmatrix} \iota_6 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \iota_6 & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \iota_6 \end{bmatrix},$$

em que  $\iota_6$  é um vetor de uns de tamanho 6.

O vetor de ineficiências possui distribuição gama com parâmetros  $P = 0,8$  e  $\theta = 1$ , valores esses sugeridos por Tsionas (2000). Os valores gerados são ordenados de forma que a firma 1 seja a mais eficiente e a firma 60 a menos eficiente.

O fator de escala  $\sigma_v^2 = 0,05$  para que a parte da variância da fronteira explicada pela ineficiência econômica,  $VF$ , esteja próximo de 95%, em que  $VF = \frac{\sigma_u^2}{(\sigma_v^2 + \sigma_u^2)} = 0,9412$  e  $\sigma_u^2 = \frac{P}{\theta^2} = 0,8000$ .

**Passo 6:** Obtém-se  $\ln C$  da distribuição  $N((X\beta + 2Wd - 2Qr + Du), I_{360}\sigma_v^2)$ .

Repete-se 50 vezes os passos de 1 a 6 e gera-se 50 amostras do  $\ln C$ , em que obtém-se um vetor de ineficiências diferente para cada amostra.

## 2.2.4 Aplicação a dados reais

Os dados referem-se a 382 hospitais dos Estados Unidos, observados de 1987 a 1991. Os dados foram previamente analisados por Koop et al. (1997) e Griffin e Steel (2007). Nesses artigos utiliza-se a função de custo translog para o modelo de fronteira estocástica.

Os dados são compostos por:

- i)  $C$  = custos (facilidade despesas operacionais),
- i)  $Y_1$  = número de casos (para explicar os serviços médicos),
- ii)  $Y_2$  = número de dias de internação “inpatient” (para explicar enfermagem, acomodação e outros serviços de hospedagem),
- iii)  $Y_3$  = número de leitos (para satisfazer uma opção da procura de serviços hospitalares),
- iv)  $Y_4$  = o número de visitas ambulatoriais,

- v)  $Y_5$  = uma mistura de outros aspectos dos produtos que estão incluídos no custo,
- vi)  $w_1$  = medida de capital social (total de ativos fixos),
- vii)  $w_2$  = índice salarial. Os dados originais contêm apenas um índice agregado dos salários,
- viii)  $t, t^2$  = variável tempo e o quadrado dessa variável. Essas variáveis são adicionadas no modelo para capturar a falta de dimensão temporal de um outro insumo importante que está presente na rotina de um hospital, que são materiais gerais e suprimentos, mas que não estão presentes nos dados. Dado o poder de compra dos hospitais, é razoável supor que o preço dos materiais é relativamente constante em todos os hospitais. Então, lida-se com o preço dos materiais como uma constante. Este tipo de tratamento é, sem dúvida, razoável para dados “cross sectional”, mas não é razoável para dados em painel. Assim, a tendência é adicionar uma variável de tempo e o quadrado dessa variável como variáveis explicativas na fronteira de custo, para tentar capturar a falta da dimensão temporal do preço dos materiais ou outras dinâmicas que não são modeladas explicitamente.

## 2.3 Resultados e discussão

Os resultados dividem-se em duas seções: a primeira refere-se a simulação de 50 amostras da variável resposta obtidas a partir do modelo de fronteira estocástica de custo com forma funcional flexível Fourier e a segunda seção refere-se a aplicação da metodologia a dados reais.

### 2.3.1 Simulação

Os dados foram gerados, conforme descrição da seção 2.2.3, utilizando o programa estatístico *R* (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2008). Obteve-se 50 amostras do  $\ln C$  para  $N = 60$  firmas em  $T = 6$  tempos,  $S = 2$  insumos e  $H = 1$  produto. O programa para gerar as amostras encontra-se no Anexo C.

A implementação computacional foi feita usando-se o programa Winbugs (LUNN et al., 2000) gerando uma cadeia com 90.000 valores para cada parâmetro, desprezando os primeiros 30.000 valores para o período de aquecimento da cadeia (“burn-in”) e selecionando um a cada 5 dos 60.000 valores restantes (“thin”), formando uma amostra de 12.000 valores. As 50 amostras foram iniciadas em três pontos distintos, totalizando três cadeias e a convergência das estimativas dos parâmetros foi monitorada através do critério de convergência de Gelman e Rubin (1992) (Apêndice F), disponível no programa Winbugs. O programa para analisar os dados encontra-se no Anexo D.

Os hiperparâmetros das distribuições a priori para os parâmetros  $\beta, d, r, \theta$  e  $\tau$  são escolhidos para que as distribuições sejam não informativas. Segundo Tsionas (2002) não é razoável que a distribuição a priori de  $P$  seja não informativa, em tais casos não é possível identificar os desvios



da fronteira em relação aos erros de observação, assim, considerou-se informação a priori para esse parâmetro. Os valores dos hiperparâmetros encontram-se na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Hiperparâmetros das distribuições a priori dos parâmetros  $\beta, d, r, P, \theta, \tau$

Parâmetro	Hiperparâmetro	
$\beta_R$	$a_\beta = 0,00$	$\sigma_\beta^2 = 100,00$
$d_{J\alpha}$	$a_d = 0,00$	$\sigma_d^2 = 100,00$
$r_{J\alpha}$	$a_r = 0,00$	$\sigma_r^2 = 100,00$
$P$	$a_0 = 0,80$	$b_0 = 1,00$
$\theta$	$v_0 = 0,01$	$w_0 = 0,01$
$\tau$	$\alpha = 0,01$	$\delta = 0,01$

A Tabela 2.4 apresenta um resumo a posteriori para cada parâmetro obtido no estudo de simulação.

Tabela 2.4 – Resumo a posteriori para os parâmetros da fronteira

Par.	V. verd.	Média	d.p.	(continua)		
				2,5%	50%	97,5%
$\beta_1$	0,5000	0,4818	0,5694	0,2991	0,4985	0,6985
$\beta_2$	0,4000	0,4645	0,5409	0,2517	0,4910	0,8097
$\beta_3$	0,6000	0,5676	0,6099	0,1727	0,5142	0,8154
$\beta_4$	0,3000	0,3496	0,3219	0,1473	0,3307	0,4802
$\beta_5$	0,5000	0,4312	0,1251	0,1746	0,3718	0,5860
$\beta_6$	0,5000	0,5323	0,2376	0,1344	0,8532	1,1140
$\beta_7$	0,5000	0,4586	0,0810	0,1942	0,4480	0,5694
$\beta_8$	1,0000	0,9898	0,1415	0,2512	1,1810	1,2677
$\beta_9$	1,0000	1,0282	0,0635	0,7128	1,0530	1,1528
$\beta_{10}$	1,0000	0,9939	0,2033	0,7039	0,9560	1,3946
$d_1$	1,0000	1,0172	0,0355	0,9484	1,0169	1,0873
$d_2$	1,0000	1,0123	0,0576	0,8925	1,0148	1,1183
$d_3$	1,0000	0,9439	0,0556	0,8367	0,9431	1,0551
$d_4$	1,0000	1,0543	0,0695	0,9234	1,0529	1,1905
$d_5$	1,0000	1,2016	0,2478	0,7678	1,1873	1,6816
$d_6$	1,0000	1,0057	0,1017	0,8115	1,0035	1,2132
$r_1$	1,0000	1,0046	0,0340	0,9385	1,0045	1,0717
$r_2$	1,0000	0,9718	0,0554	0,8631	0,9717	1,0808
$r_3$	1,0000	1,0241	0,0606	0,9072	1,0232	1,1457
$r_4$	1,0000	1,0211	0,0675	0,8911	1,0203	1,1558
$r_5$	1,0000	0,9754	0,1503	0,6909	0,9717	1,2823
$r_6$	1,0000	0,8786	0,1386	0,5619	0,8346	1,1058

Tabela 2.4 - Resumo a posteriori para os parâmetros da fronteira

Par.	V. Verd.	Média	d.p.	(continuação)		
				2,5%	50%	97,5%
$P$	0,8000	0,8468	0,4069	0,4517	0,5424	2,0120
$\theta$	1,0000	1,1548	0,3662	0,5654	1,1118	1,9915
$\sigma_v^2$	0,0500	0,0518	0,0044	0,0440	0,0516	0,0611
$u_1$	0,0063	0,1597	0,1442	0,0032	0,1211	0,5294
$u_2$	0,0130	0,1550	0,1287	0,0035	0,1256	0,4735
$u_3$	0,0221	0,1850	0,2622	0,0084	0,2718	0,9646
$u_4$	0,0331	0,1451	0,1195	0,0042	0,1177	0,4419
$u_5$	0,0431	0,1161	0,1111	0,0017	0,0846	0,4041
$u_6$	0,0534	0,2286	0,2032	0,0042	0,1748	0,7425
$u_7$	0,0654	0,1843	0,1553	0,0034	0,1481	0,5690
$u_8$	0,0761	0,2246	0,1600	0,0093	0,1972	0,6017
$u_9$	0,0931	0,1345	0,1293	0,0019	0,0970	0,4712
$u_{10}$	0,1060	0,1937	0,1367	0,0118	0,1686	0,5204
$u_{11}$	0,1181	0,2219	0,1967	0,0056	0,1701	0,7257
$u_{12}$	0,1344	0,2589	0,3219	0,0221	0,3863	1,2182
$u_{13}$	0,1560	0,2571	0,1736	0,0131	0,2310	0,6571
$u_{14}$	0,1663	0,3437	0,3528	0,0065	0,2938	1,2918
$u_{15}$	0,1825	0,2601	0,1532	0,0349	0,2390	0,6129
$u_{16}$	0,1996	0,3858	0,4616	0,0089	0,3866	1,6875
$u_{17}$	0,2214	0,2655	0,2212	0,0068	0,2131	0,8106
$u_{18}$	0,2357	0,2256	0,1498	0,0199	0,2012	0,5768
$u_{19}$	0,2560	0,2717	0,1781	0,0284	0,2402	0,6961
$u_{20}$	0,2721	0,3307	0,1622	0,0666	0,3155	0,6900
$u_{21}$	0,2890	0,3372	0,1728	0,0582	0,3198	0,7205
$u_{22}$	0,3124	0,2469	0,1823	0,0095	0,2134	0,6794
$u_{23}$	0,3332	0,3376	0,2025	0,0389	0,3093	0,8032
$u_{24}$	0,3552	0,3779	0,1786	0,0806	0,3619	0,7707
$u_{25}$	0,3733	0,5413	0,3080	0,0709	0,5055	1,2223
$u_{26}$	0,3974	0,5119	0,2079	0,1486	0,4984	0,9573
$u_{27}$	0,4188	0,4917	0,1836	0,1675	0,4794	0,8877
$u_{28}$	0,4387	0,5461	0,1869	0,2096	0,5362	0,9428
$u_{29}$	0,4673	0,5001	0,1980	0,1555	0,4865	0,9278
$u_{30}$	0,4914	0,5465	0,3159	0,0634	0,5083	1,2608
$u_{31}$	0,5208	0,5566	0,2053	0,1993	0,5412	1,0037
$u_{32}$	0,5473	0,5033	0,2402	0,1145	0,4793	1,0324
$u_{33}$	0,5814	0,5563	0,1848	0,2341	0,5433	0,9557
$u_{34}$	0,6172	0,6943	0,1581	0,4131	0,6839	1,0371

Tabela 2.4 - Resumo a posteriori para os parâmetros da fronteira

Par.	V. Verd.	Média	d.p.	(conclusão)		
				2,5%	50%	97,5%
$u_{35}$	0,6426	0,7907	0,2226	0,4024	0,7740	1,2752
$u_{36}$	0,6813	0,6940	0,1702	0,3894	0,6836	1,0604
$u_{37}$	0,7129	0,5260	0,2175	0,1522	0,4890	0,9883
$u_{38}$	0,7595	0,7879	0,5012	0,0694	0,7138	1,9339
$u_{39}$	0,7984	0,8194	0,1807	0,4993	0,8072	1,2110
$u_{40}$	0,8394	0,8380	0,1583	0,5562	0,8278	1,1809
$u_{41}$	0,8804	0,8444	0,2208	0,4556	0,8291	1,3222
$u_{42}$	0,9282	1,0957	0,3573	0,6324	1,2165	2,0331
$u_{43}$	0,9735	0,8019	0,5336	0,0632	0,7152	2,0386
$u_{44}$	1,0294	1,0494	0,2256	0,6484	1,0347	1,5337
$u_{45}$	1,0878	0,9141	0,3974	0,2157	0,8919	1,7489
$u_{46}$	1,1607	1,1318	0,1989	0,7754	1,1198	1,5578
$u_{47}$	1,2250	1,3140	0,1755	1,0033	1,3022	1,6932
$u_{48}$	1,2966	1,3593	0,1623	1,0686	1,3496	1,7081
$u_{49}$	1,3536	1,4174	0,1858	1,0877	1,4052	1,8181
$u_{50}$	1,4246	1,4343	0,2148	1,0620	1,4168	1,9051
$u_{51}$	1,5167	1,3402	0,2109	0,9562	1,3294	1,7866
$u_{52}$	1,5999	1,4286	0,5687	0,4016	1,4072	2,6017
$u_{53}$	1,6913	1,5275	0,3063	0,8008	1,3551	2,0045
$u_{54}$	1,8416	1,6698	0,2915	0,9934	1,5438	2,1405
$u_{55}$	1,9971	2,0535	0,1925	1,7128	2,0406	2,4691
$u_{56}$	2,2001	2,2530	0,1606	1,9659	2,2433	2,5985
$u_{57}$	2,4455	2,4697	0,2102	2,0862	2,4595	2,9127
$u_{58}$	2,8710	2,8366	0,2388	2,4098	2,8221	3,3455
$u_{59}$	3,2765	3,2505	0,1681	2,9496	3,2403	3,6122
$u_{60}$	4,3155	4,3087	0,2330	3,8125	4,2142	4,7290

Observa-se que os valores estimados estão próximos dos valores verdadeiros, omitiu-se os valores da estatística  $R$  do critério de convergência de Gelman e Rubin, pois encontrou-se valor aproximadamente igual a 1 para todos os parâmetros, o que indica convergência das cadeias.

As Figuras 2.1 e 2.2 apresentam os histogramas das médias a posteriori dos parâmetros obtidas nas 50 simulações. A linha vertical azul representa o valor verdadeiro.

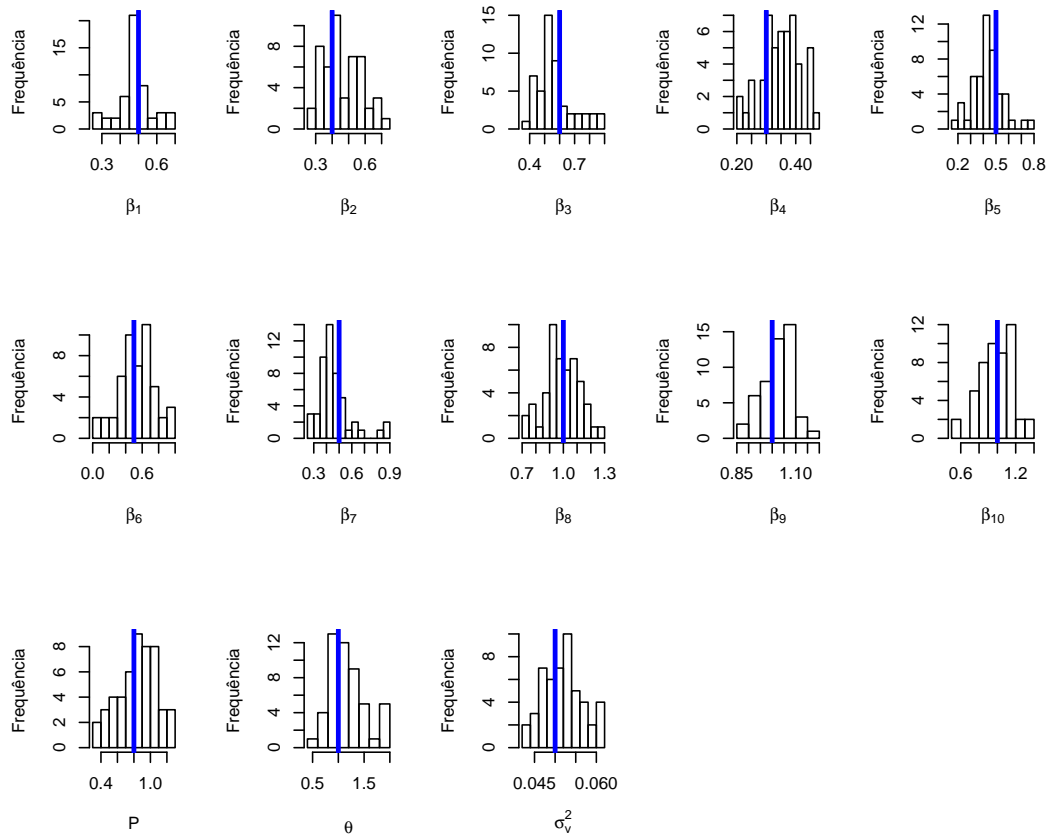


Figura 2.1 – Histogramas das médias a posteriori dos parâmetros da fronteira

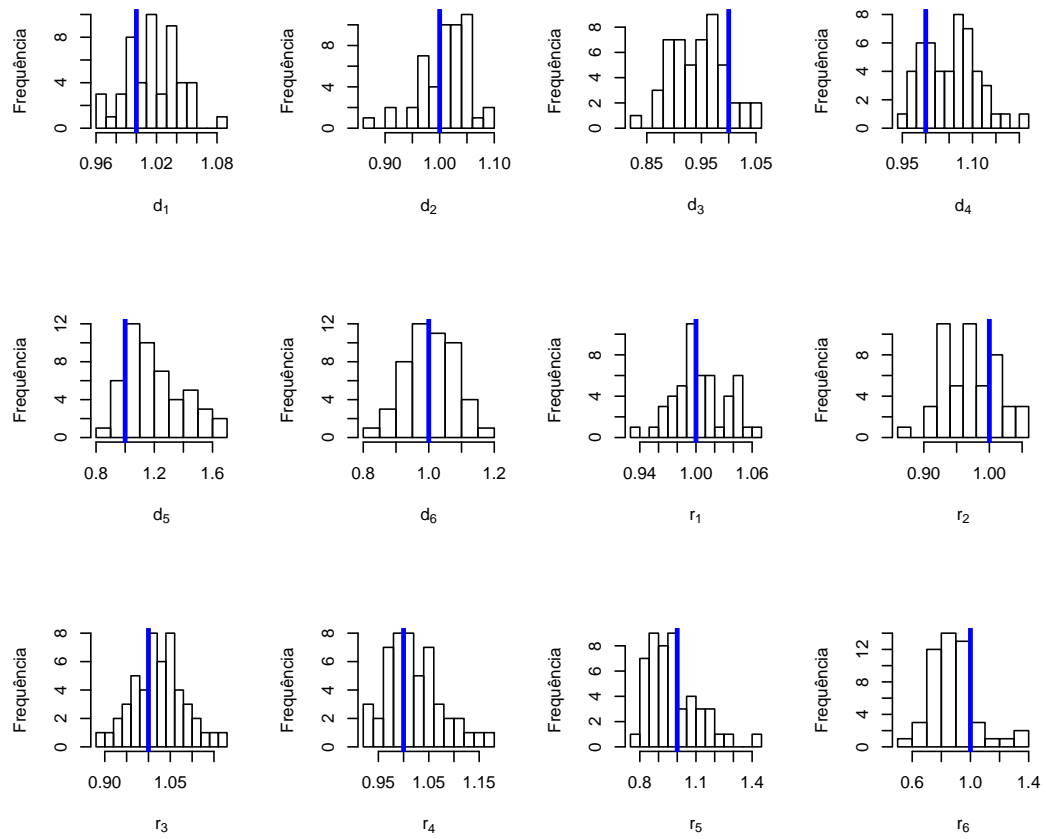


Figura 2.2 – Histogramas das médias a posteriori dos parâmetros da fronteira

A Figura 2.3 apresenta os histogramas das médias a posteriori da ineficiência econômica das firmas que foram consideradas menos ineficientes, as firmas que estão na posição central e as mais ineficientes, respectivamente. A linha vertical azul representa o valor verdadeiro.

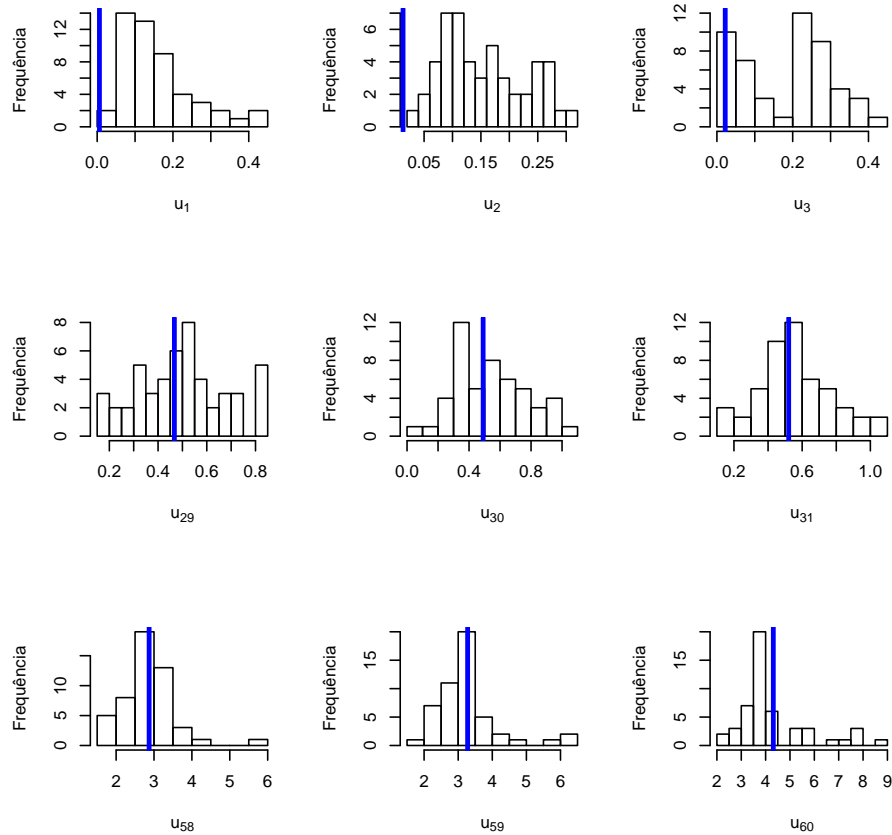


Figura 2.3 – Histograma da média a posteriori da ineficiência econômica de firmas menos ineficientes, medianas e mais ineficientes, respectivamente

Observa-se que a estimativa das firmas mais ineficientes está mais próxima do valor verdadeiro do que as das firmas menos ineficientes.

A Tabela 2.5 mostra a classificação da eficiência econômica das 60 firmas. O índice de eficiência econômica das firmas manteve a ordem de classificação para maioria das firmas, mas algumas posições foram trocadas. Observa-se também que a estimativa das firmas menos eficientes está mais próxima do valor verdadeiro do que as firmas mais eficientes.

Tabela 2.5 – Classificação da eficiência econômica das firmas

Par.	V. verd.	Média	Par.	V. verd.	Média
$EE_1$	0,9937	0,8524	$EE_{31}$	0,5940	0,5732
$EE_2$	0,9871	0,8564	$EE_{32}$	0,5785	0,6045
$EE_3$	0,9781	0,8311	$EE_{33}$	0,5591	0,5733
$EE_4$	0,9674	0,8649	$EE_{34}$	0,5395	0,4994
$EE_5$	0,9578	0,8904	$EE_{35}$	0,5259	0,4535
$EE_6$	0,9480	0,7957	$EE_{36}$	0,5060	0,4996
$EE_7$	0,9367	0,8316	$EE_{37}$	0,4902	0,5909
$EE_8$	0,9267	0,7988	$EE_{38}$	0,4679	0,4548
$EE_9$	0,9111	0,8741	$EE_{39}$	0,4500	0,4407
$EE_{10}$	0,8994	0,8239	$EE_{40}$	0,4320	0,4326
$EE_{11}$	0,8886	0,8010	$EE_{41}$	0,4146	0,4298
$EE_{12}$	0,8742	0,7719	$EE_{42}$	0,3953	0,3343
$EE_{13}$	0,8556	0,7733	$EE_{43}$	0,3778	0,4485
$EE_{14}$	0,8468	0,7091	$EE_{44}$	0,3572	0,3502
$EE_{15}$	0,8332	0,7710	$EE_{45}$	0,3370	0,4009
$EE_{16}$	0,8191	0,6799	$EE_{46}$	0,3133	0,3224
$EE_{17}$	0,8014	0,7668	$EE_{47}$	0,2938	0,2688
$EE_{18}$	0,7900	0,7980	$EE_{48}$	0,2735	0,2568
$EE_{19}$	0,7741	0,7621	$EE_{49}$	0,2583	0,2423
$EE_{20}$	0,7618	0,7184	$EE_{50}$	0,2406	0,2383
$EE_{21}$	0,7490	0,7137	$EE_{51}$	0,2194	0,2618
$EE_{22}$	0,7317	0,7813	$EE_{52}$	0,2019	0,2396
$EE_{23}$	0,7166	0,7135	$EE_{53}$	0,1843	0,2171
$EE_{24}$	0,7010	0,6853	$EE_{54}$	0,1586	0,1883
$EE_{25}$	0,6885	0,5820	$EE_{55}$	0,1357	0,1283
$EE_{26}$	0,6721	0,5994	$EE_{56}$	0,1108	0,1051
$EE_{27}$	0,6578	0,6116	$EE_{57}$	0,0867	0,0846
$EE_{28}$	0,6449	0,5792	$EE_{58}$	0,0566	0,0586
$EE_{29}$	0,6267	0,6064	$EE_{59}$	0,0378	0,0388
$EE_{30}$	0,6118	0,5790	$EE_{60}$	0,0134	0,0135

A Figura 2.4 apresenta o gráfico da eficiência econômica estimada de cada firma versus a eficiência econômica verdadeira.

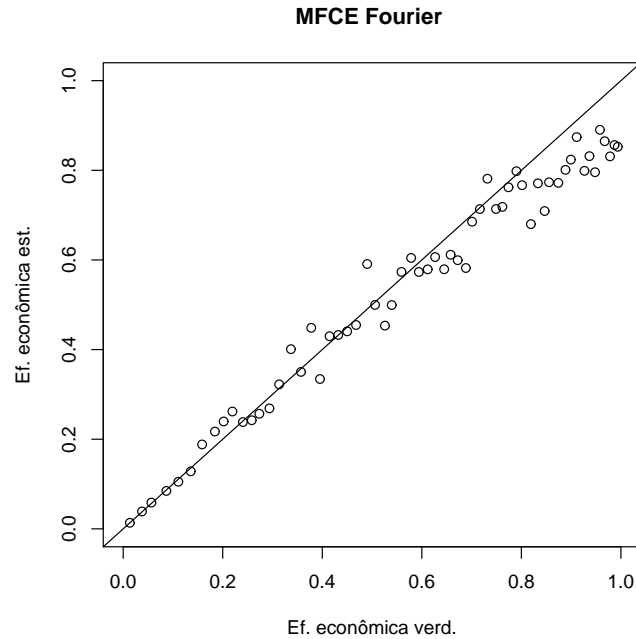


Figura 2.4 – Eficiência econômica estimada versus eficiência econômica verdadeira

Observa-se que existe uma variabilidade crescente nas estimativas da eficiência econômica. Quanto mais eficiente a firma é, maior o erro na comparação do valor estimado com o valor verdadeiro.

### 2.3.2 Aplicação empírica

A implementação computacional foi feita usando-se o programa Winbugs gerando uma cadeia com 50.000 valores para cada parâmetro, desprezando os primeiros 10.000 valores para o período de aquecimento da cadeia (“burn-in”) e selecionando um a cada 5 dos 40.000 valores restantes (“thin”), formando uma amostra de 8.000 valores.

Os hiperparâmetros das distribuições a priori são escolhidos para que as distribuições sejam não informativas para os parâmetros  $\beta$ ,  $d$ ,  $r$ ,  $\theta$  e  $\tau$ . Assume-se informação a priori para o parâmetro  $P$ . Os valores dos hiperparâmetros encontram-se na Tabela 2.6.

Outros valores foram testados para os hiperparâmetros da distribuição a priori de  $P$ . A escolha destes hiperparâmetros foi baseada de acordo com o critério DIC (Apêndice G), que encontra-se na Tabela 2.7.

A Tabela 2.8 apresenta um resumo a posteriori para cada parâmetro da fronteira.



Tabela 2.6 – Hiperparâmetros das distribuições a priori dos parâmetros  $\beta, d, r, P, \theta, \tau$ 

Parâmetro	Hiperparâmetro	
$\beta_R$	$a_\beta = 0,00$	$\sigma_\beta^2 = 100,00$
$d_{J\alpha}$	$a_d = 0,00$	$\sigma_d^2 = 100,00$
$r_{J\alpha}$	$a_r = 0,00$	$\sigma_r^2 = 100,00$
$P$	$a_0 = 0,80$	$b_0 = 1,00$
$\theta$	$v_0 = 0,01$	$w_0 = 0,01$
$\tau$	$\alpha = 0,01$	$\delta = 0,01$

Tabela 2.7 – Valores do DIC para diferentes hiperparâmetros da distribuição a priori do parâmetro  $P$ 

Hiperparâmetro		DIC
$a_0 = 0,01$	$b_0 = 0,01$	-4976,140
$a_0 = 0,80$	$b_0 = 1,00$	-4261,370
$a_0 = 2,00$	$b_0 = 1,00$	-4580,540

Tabela 2.8 – Resumo a posteriori para os parâmetros da fronteira

Par.	Média	d.p.	(continua)		
			2,5%	50%	97,5%
$\beta_1$	13,4700	2,3790	6,7770	14,7300	15,2100
$\beta_2$	0,0297	0,0540	0,0003	0,0083	0,1255
$\beta_3$	0,0277	0,0663	0,0003	0,0083	0,3333
$\beta_4$	0,0477	0,0547	0,0004	0,0181	0,1906
$\beta_5$	0,0504	0,1298	0,0002	0,0067	0,4866
$\beta_6$	0,0312	0,0619	0,0003	0,0087	0,2415
$\beta_7$	0,2069	0,1883	0,0007	0,1760	0,5684
$\beta_8$	0,4228	0,5010	0,0061	0,1596	1,5730
$\beta_9$	0,0063	0,0080	0,0001	0,0035	0,0329
$\beta_{10}$	0,0103	0,0126	0,0002	0,0050	0,0507
$\beta_{11}$	0,0056	0,0054	0,0002	0,0040	0,0220
$\beta_{12}$	0,0040	0,0055	0,0001	0,0017	0,0204
$\beta_{13}$	0,0015	0,0015	0,0000	0,0010	0,0055
$\beta_{14}$	0,2140	0,1691	0,0011	0,2039	0,5493
$\beta_{15}$	0,0015	0,0014	0,0000	0,0011	0,0051
$\beta_{16}$	0,0059	0,0064	0,0001	0,0037	0,0262
$\beta_{17}$	0,0049	0,0045	0,0001	0,0034	0,0170
$\beta_{18}$	0,0029	0,0031	0,0001	0,0018	0,0131
$\beta_{19}$	0,0018	0,0017	0,0000	0,0013	0,0065
$\beta_{20}$	0,0053	0,0051	0,0001	0,0035	0,0194

Tabela 2.8 - Resumo a posteriori para os parâmetros da fronteira

(continuação)					
Par.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$\beta_{21}$	0,0038	0,0045	0,0001	0,0023	0,0174
$\beta_{22}$	0,0022	0,0022	0,0000	0,0014	0,0080
$\beta_{23}$	0,0035	0,0031	0,0001	0,0026	0,0110
$\beta_{24}$	0,0025	0,0023	0,0001	0,0019	0,0082
$\beta_{25}$	0,0017	0,0017	0,0000	0,0012	0,0065
$\beta_{26}$	0,0055	0,0064	0,0001	0,0031	0,0233
$\beta_{27}$	0,0052	0,0060	0,0001	0,0031	0,0218
$\beta_{28}$	0,0058	0,0065	0,0001	0,0036	0,0237
$\beta_{29}$	0,0059	0,0064	0,0001	0,0037	0,0233
$\beta_{30}$	0,0055	0,0062	0,0001	0,0032	0,0225
$\beta_{31}$	0,0036	0,0038	0,0001	0,0024	0,0138
$\beta_{32}$	0,0034	0,0035	0,0001	0,0021	0,0130
$\beta_{33}$	0,0024	0,0024	0,0001	0,0016	0,0089
$\beta_{34}$	0,0027	0,0023	0,0001	0,0020	0,0083
$\beta_{35}$	0,0021	0,0024	0,0000	0,0013	0,0089
$\beta_{36}$	0,0017	0,0017	0,0000	0,0011	0,0062
$\beta_{37}$	0,1185	0,0039	0,1120	0,1179	0,1276
$\beta_{38}$	0,0003	0,0002	0,0000	0,0002	0,0009
$d_1$	0.0770	0.0313	0.0210	0.0753	0.1448
$d_2$	-0.0566	0.0433	-0.1300	-0.0596	0.0546
$d_3$	-0.0975	0.0440	-0.2069	-0.0874	-0.0360
$d_4$	-0.0280	0.0563	-0.1586	-0.0073	0.0390
$d_5$	-0.0264	0.0154	-0.0539	-0.0273	0.0087
$d_6$	-0.1089	0.1230	-0.4148	-0.0514	0.0046
$d_7$	-0.0025	0.0111	-0.0242	-0.0025	0.0195
$d_8$	0.0589	0.0247	0.0177	0.0563	0.1183
$d_9$	-0.0118	0.0306	-0.0902	-0.0043	0.0296
$d_{10}$	0.0343	0.0242	-0.0310	0.0389	0.0692
$d_{11}$	0.0114	0.0096	-0.0070	0.0112	0.0313
$d_{12}$	0.0147	0.0190	-0.0184	0.0133	0.0580
$d_{13}$	-0.0097	0.0378	-0.1039	0.0002	0.0414
$d_{14}$	0.0307	0.0160	-0.0014	0.0309	0.0618
$d_{15}$	0.0263	0.0102	0.0072	0.0259	0.0480
$d_{16}$	-0.0359	0.0225	-0.0934	-0.0313	-0.0026
$d_{17}$	-0.0115	0.0288	-0.0535	-0.0170	0.0635
$d_{18}$	-0.0268	0.0287	-0.0636	-0.0340	0.0523
$d_{19}$	-0.0028	0.0117	-0.0239	-0.0034	0.0220
$d_{20}$	-0.0643	0.0440	-0.1224	-0.0772	0.0391
$d_{21}$	0.0149	0.0287	-0.0230	0.0094	0.0994
$d_{22}$	-0.0308	0.0121	-0.0565	-0.0301	-0.0088

Tabela 2.8 - Resumo a posteriori para os parâmetros da fronteira

(continuação)					
Par.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$d_{23}$	-0.0059	0.0103	-0.0251	-0.0063	0.0155
$d_{24}$	-0.0316	0.0223	-0.0960	-0.0266	-0.0025
$d_{25}$	-0.0058	0.0082	-0.0223	-0.0058	0.0103
$d_{26}$	-0.0131	0.0125	-0.0365	-0.0135	0.0127
$d_{27}$	0.0046	0.0082	-0.0111	0.0044	0.0214
$d_{28}$	0.0003	0.0070	-0.0153	0.0008	0.0126
$d_{29}$	-0.0163	0.0121	-0.0465	-0.0144	0.0024
$d_{30}$	0.0019	0.0080	-0.0135	0.0018	0.0178
$d_{31}$	-0.0022	0.0058	-0.0101	-0.0033	0.0144
$d_{32}$	-0.0304	0.0379	-0.0790	-0.0414	0.0683
$d_{33}$	0.0391	0.0304	-0.0106	0.0353	0.1077
$d_{34}$	-0.0059	0.0271	-0.0726	-0.0019	0.0370
$d_{35}$	-0.0012	0.0124	-0.0271	-0.0009	0.0220
$d_{36}$	-0.0042	0.0129	-0.0344	-0.0031	0.0180
$d_{37}$	-0.0007	0.0172	-0.0340	-0.0009	0.0336
$d_{38}$	-0.0396	0.0367	-0.1296	-0.0302	0.0113
$d_{39}$	0.0119	0.0305	-0.0651	0.0202	0.0524
$d_{40}$	-0.0203	0.0152	-0.0549	-0.0184	0.0051
$d_{41}$	-0.0200	0.0116	-0.0455	-0.0192	0.0007
$r_1$	0.0699	0.0979	-0.1980	0.1030	0.1790
$r_2$	-0.2277	0.0999	-0.4692	-0.1930	-0.1064
$r_3$	0.0024	0.0544	-0.1480	0.0171	0.0693
$r_4$	-0.0161	0.0637	-0.2089	0.0045	0.0519
$r_5$	-0.0389	0.0433	-0.1679	-0.0261	0.0079
$r_6$	0.1907	0.1799	0.0293	0.1021	0.6478
$r_7$	0.0605	0.0115	0.0352	0.0613	0.0810
$r_8$	-0.0543	0.0194	-0.0917	-0.0545	-0.0155
$r_9$	-0.0513	0.0303	-0.1311	-0.0432	-0.0119
$r_{10}$	-0.0203	0.0233	-0.0841	-0.0162	0.0135
$r_{11}$	0.0016	0.0094	-0.0168	0.0017	0.0199
$r_{12}$	-0.0253	0.0337	-0.0909	-0.0253	0.0429
$r_{13}$	0.0030	0.0193	-0.0352	0.0032	0.0404
$r_{14}$	0.0192	0.0215	-0.0380	0.0227	0.0518
$r_{15}$	0.0023	0.0117	-0.0171	0.0009	0.0321
$r_{16}$	-0.0040	0.0149	-0.0329	-0.0041	0.0258
$r_{17}$	0.0296	0.0216	-0.0083	0.0279	0.0790
$r_{18}$	-0.0105	0.0152	-0.0412	-0.0103	0.0189
$r_{19}$	-0.0137	0.0115	-0.0355	-0.0139	0.0098
$r_{20}$	-0.0406	0.0558	-0.1180	-0.0550	0.0890
$r_{21}$	-0.0472	0.0171	-0.0885	-0.0457	-0.0179

Tabela 2.8 - Resumo a posteriori para os parâmetros da fronteira

Par.	Média	d.p.	(conclusão)		
			2,5%	50%	97,5%
$r_{22}$	-0.0076	0.0161	-0.0473	-0.0053	0.0179
$r_{23}$	-0.0031	0.0095	-0.0207	-0.0035	0.0168
$r_{24}$	0.0081	0.0118	-0.0179	0.0089	0.0289
$r_{25}$	0.0099	0.0088	-0.0078	0.0101	0.0269
$r_{26}$	-0.0251	0.0116	-0.0477	-0.0253	-0.0019
$r_{27}$	-0.0001	0.0119	-0.0209	-0.0012	0.0260
$r_{28}$	-0.0011	0.0075	-0.0196	-0.0004	0.0115
$r_{29}$	0.0078	0.0072	-0.0052	0.0074	0.0236
$r_{30}$	-0.0016	0.0097	-0.0183	-0.0024	0.0208
$r_{31}$	0.0069	0.0043	-0.0030	0.0072	0.0144
$r_{32}$	0.0687	0.0235	0.0281	0.0668	0.1228
$r_{33}$	-0.0632	0.0602	-0.2031	-0.0413	0.0097
$r_{34}$	-0,0194	0,0144	-0,0506	-0,0185	0,0064
$r_{35}$	-0,0131	0,0335	-0,0925	-0,0033	0,0310
$r_{36}$	-0,0178	0,0090	-0,0351	-0,0180	0,0005
$r_{37}$	0,0170	0,0377	-0,0290	0,0044	0,1105
$r_{38}$	0,0441	0,0367	-0,0080	0,0351	0,1327
$r_{39}$	-0,0165	0,0239	-0,0757	-0,0118	0,0195
$r_{40}$	0,0196	0,0161	-0,0071	0,0179	0,0590
$r_{41}$	0,0079	0,0118	-0,0099	0,0061	0,0388
$P$	10,7100	3,9120	4,2240	10,6300	18,7500
$\theta$	23,6900	6,3580	11,2000	24,8400	33,9600
$\sigma_v^2$	0,0041	0,0012	0,0033	0,0036	0,0077

Alguns elementos dos vetores de parâmetros da forma funcional flexível Fourier relacionados com a aproximação da expansão em série de Fourier,  $d$  e  $r$ , são não significativos, pois o valor zero pertence a seus intervalos de credibilidade, ou seja, existe a probabilidade de alguns componentes desses vetores assumirem o valor zero, mas os elementos  $d_1, d_3, d_8, d_{15}, d_{16}, d_{22}, d_{24}, r_2, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{21}$  e  $r_{32}$  são significativos, o que indica a importância da expansão da série de Fourier para o ajuste da fronteira.

A média da ineficiência econômica é  $\mu_u = \frac{P}{\theta} = 0,4520$  e a variância é  $\sigma_u^2 = \frac{P}{\theta^2} = 0,0191$ . A parte da variância da fronteira explicada pela ineficiência econômica é  $VF = \frac{\sigma_u^2}{(\sigma_v^2 + \sigma_u^2)} = 0,8232$ .

A Tabela 2.9 mostra a classificação a posteriori da eficiência econômica dos 382 hospitais.

Os hospitais mais eficientes são os 284 e 320 e os menos eficientes são os 348 e 279. A classificação da eficiência econômica varia de 0,3839 até 0,8702, pode-se dizer que o hospital 279 é apenas 38,39% eficiente economicamente.

Tabela 2.9 – Classificação a posteriori da eficiência econômica dos 382 hospitais

(continua)

Par.	Média	Par.	Média	Par.	Média	Par.	Média	Par.	Média
$EE_1$	0,6104	$EE_{39}$	0,7256	$EE_{77}$	0,6546	$EE_{115}$	0,7733	$EE_{153}$	0,6651
$EE_2$	0,6494	$EE_{40}$	0,5554	$EE_{78}$	0,6149	$EE_{116}$	0,6060	$EE_{154}$	0,6487
$EE_3$	0,6102	$EE_{41}$	0,6809	$EE_{79}$	0,6694	$EE_{117}$	0,6632	$EE_{155}$	0,5548
$EE_4$	0,6019	$EE_{42}$	0,6993	$EE_{80}$	0,6950	$EE_{118}$	0,5940	$EE_{156}$	0,6285
$EE_5$	0,7519	$EE_{43}$	0,6759	$EE_{81}$	0,6609	$EE_{119}$	0,7186	$EE_{157}$	0,5248
$EE_6$	0,5481	$EE_{44}$	0,7267	$EE_{82}$	0,6880	$EE_{120}$	0,7542	$EE_{158}$	0,6187
$EE_7$	0,5625	$EE_{45}$	0,8156	$EE_{83}$	0,6033	$EE_{121}$	0,7911	$EE_{159}$	0,6476
$EE_8$	0,6249	$EE_{46}$	0,7723	$EE_{84}$	0,6609	$EE_{122}$	0,7337	$EE_{160}$	0,5728
$EE_9$	0,6260	$EE_{47}$	0,7262	$EE_{85}$	0,6632	$EE_{123}$	0,6515	$EE_{161}$	0,5365
$EE_{10}$	0,5773	$EE_{48}$	0,6232	$EE_{86}$	0,6919	$EE_{124}$	0,7549	$EE_{162}$	0,6079
$EE_{11}$	0,6890	$EE_{49}$	0,7522	$EE_{87}$	0,7209	$EE_{125}$	0,5616	$EE_{163}$	0,6721
$EE_{12}$	0,5855	$EE_{50}$	0,5676	$EE_{88}$	0,7581	$EE_{126}$	0,7308	$EE_{164}$	0,6767
$EE_{13}$	0,6018	$EE_{51}$	0,7686	$EE_{89}$	0,6149	$EE_{127}$	0,6987	$EE_{165}$	0,5077
$EE_{14}$	0,5820	$EE_{52}$	0,6710	$EE_{90}$	0,6794	$EE_{128}$	0,6159	$EE_{166}$	0,6017
$EE_{15}$	0,6852	$EE_{53}$	0,6182	$EE_{91}$	0,7933	$EE_{129}$	0,7099	$EE_{167}$	0,5602
$EE_{16}$	0,5679	$EE_{54}$	0,6381	$EE_{92}$	0,7151	$EE_{130}$	0,6725	$EE_{168}$	0,5424
$EE_{17}$	0,5452	$EE_{55}$	0,6207	$EE_{93}$	0,6488	$EE_{131}$	0,5520	$EE_{169}$	0,5961
$EE_{18}$	0,5749	$EE_{56}$	0,6958	$EE_{94}$	0,6263	$EE_{132}$	0,6437	$EE_{170}$	0,6454
$EE_{19}$	0,5371	$EE_{57}$	0,6957	$EE_{95}$	0,6323	$EE_{133}$	0,7863	$EE_{171}$	0,4072
$EE_{20}$	0,7794	$EE_{58}$	0,7126	$EE_{96}$	0,7222	$EE_{134}$	0,6765	$EE_{172}$	0,6425
$EE_{21}$	0,7071	$EE_{59}$	0,6849	$EE_{97}$	0,6109	$EE_{135}$	0,7566	$EE_{173}$	0,5845
$EE_{22}$	0,6091	$EE_{60}$	0,6606	$EE_{98}$	0,7311	$EE_{136}$	0,6741	$EE_{174}$	0,6233
$EE_{23}$	0,7578	$EE_{61}$	0,6622	$EE_{99}$	0,6760	$EE_{137}$	0,6883	$EE_{175}$	0,5561
$EE_{24}$	0,7385	$EE_{62}$	0,6741	$EE_{100}$	0,6365	$EE_{138}$	0,7666	$EE_{176}$	0,5495
$EE_{25}$	0,6654	$EE_{63}$	0,6849	$EE_{101}$	0,5711	$EE_{139}$	0,6929	$EE_{177}$	0,6673
$EE_{26}$	0,7360	$EE_{64}$	0,6246	$EE_{102}$	0,6419	$EE_{140}$	0,6634	$EE_{178}$	0,6935
$EE_{27}$	0,6396	$EE_{65}$	0,6550	$EE_{103}$	0,6086	$EE_{141}$	0,6243	$EE_{179}$	0,5729
$EE_{28}$	0,8145	$EE_{66}$	0,6415	$EE_{104}$	0,6604	$EE_{142}$	0,5977	$EE_{180}$	0,5728
$EE_{29}$	0,7178	$EE_{67}$	0,6681	$EE_{105}$	0,6232	$EE_{143}$	0,6258	$EE_{181}$	0,5730
$EE_{30}$	0,7087	$EE_{68}$	0,6628	$EE_{106}$	0,6815	$EE_{144}$	0,6326	$EE_{182}$	0,5554
$EE_{31}$	0,7938	$EE_{69}$	0,6788	$EE_{107}$	0,6060	$EE_{145}$	0,6930	$EE_{183}$	0,5553
$EE_{32}$	0,7695	$EE_{70}$	0,6990	$EE_{108}$	0,7589	$EE_{146}$	0,6994	$EE_{184}$	0,5811
$EE_{33}$	0,7352	$EE_{71}$	0,6950	$EE_{109}$	0,5659	$EE_{147}$	0,6398	$EE_{185}$	0,6388
$EE_{34}$	0,6464	$EE_{72}$	0,6578	$EE_{110}$	0,5683	$EE_{148}$	0,5953	$EE_{186}$	0,6226
$EE_{35}$	0,6487	$EE_{73}$	0,7587	$EE_{111}$	0,5885	$EE_{149}$	0,6831	$EE_{187}$	0,6316
$EE_{36}$	0,7717	$EE_{74}$	0,8041	$EE_{112}$	0,5996	$EE_{150}$	0,5822	$EE_{188}$	0,5274
$EE_{37}$	0,7054	$EE_{75}$	0,6369	$EE_{113}$	0,7377	$EE_{151}$	0,6969	$EE_{189}$	0,7065
$EE_{38}$	0,8049	$EE_{76}$	0,6215	$EE_{114}$	0,5570	$EE_{152}$	0,5734	$EE_{190}$	0,6532

Tabela 2.9 - Classificação a posteriori da eficiência econômica dos 382 hospitais

								(conclusão)	
Par.	Média	Par.	Média	Par.	Média	Par.	Média	Par.	Média
<i>EE</i> <sub>191</sub>	0,5338	<i>EE</i> <sub>230</sub>	0,5789	<i>EE</i> <sub>269</sub>	0,6938	<i>EE</i> <sub>308</sub>	0,6681	<i>EE</i> <sub>347</sub>	0,6003
<i>EE</i> <sub>192</sub>	0,6357	<i>EE</i> <sub>231</sub>	0,7195	<i>EE</i> <sub>270</sub>	0,5712	<i>EE</i> <sub>309</sub>	0,5939	<i>EE</i> <sub>348</sub>	0,3839
<i>EE</i> <sub>193</sub>	0,5932	<i>EE</i> <sub>232</sub>	0,6246	<i>EE</i> <sub>271</sub>	0,5124	<i>EE</i> <sub>310</sub>	0,7577	<i>EE</i> <sub>349</sub>	0,5957
<i>EE</i> <sub>194</sub>	0,7241	<i>EE</i> <sub>233</sub>	0,6384	<i>EE</i> <sub>272</sub>	0,4786	<i>EE</i> <sub>311</sub>	0,6920	<i>EE</i> <sub>350</sub>	0,6316
<i>EE</i> <sub>195</sub>	0,6365	<i>EE</i> <sub>234</sub>	0,6104	<i>EE</i> <sub>273</sub>	0,5393	<i>EE</i> <sub>312</sub>	0,7337	<i>EE</i> <sub>351</sub>	0,6343
<i>EE</i> <sub>196</sub>	0,6840	<i>EE</i> <sub>235</sub>	0,5473	<i>EE</i> <sub>274</sub>	0,6207	<i>EE</i> <sub>313</sub>	0,6839	<i>EE</i> <sub>352</sub>	0,6909
<i>EE</i> <sub>197</sub>	0,6910	<i>EE</i> <sub>236</sub>	0,6106	<i>EE</i> <sub>275</sub>	0,6857	<i>EE</i> <sub>314</sub>	0,7454	<i>EE</i> <sub>353</sub>	0,7959
<i>EE</i> <sub>198</sub>	0,7109	<i>EE</i> <sub>237</sub>	0,4999	<i>EE</i> <sub>276</sub>	0,6264	<i>EE</i> <sub>315</sub>	0,7154	<i>EE</i> <sub>354</sub>	0,6916
<i>EE</i> <sub>199</sub>	0,7060	<i>EE</i> <sub>238</sub>	0,6102	<i>EE</i> <sub>277</sub>	0,6329	<i>EE</i> <sub>316</sub>	0,6506	<i>EE</i> <sub>355</sub>	0,7048
<i>EE</i> <sub>200</sub>	0,4927	<i>EE</i> <sub>239</sub>	0,5533	<i>EE</i> <sub>278</sub>	0,5946	<i>EE</i> <sub>317</sub>	0,7956	<i>EE</i> <sub>356</sub>	0,6429
<i>EE</i> <sub>201</sub>	0,6748	<i>EE</i> <sub>240</sub>	0,6004	<i>EE</i> <sub>279</sub>	0,4204	<i>EE</i> <sub>318</sub>	0,6644	<i>EE</i> <sub>357</sub>	0,5549
<i>EE</i> <sub>202</sub>	0,5983	<i>EE</i> <sub>241</sub>	0,6569	<i>EE</i> <sub>280</sub>	0,6528	<i>EE</i> <sub>319</sub>	0,6033	<i>EE</i> <sub>358</sub>	0,6170
<i>EE</i> <sub>203</sub>	0,6999	<i>EE</i> <sub>242</sub>	0,7005	<i>EE</i> <sub>281</sub>	0,5478	<i>EE</i> <sub>320</sub>	0,8634	<i>EE</i> <sub>359</sub>	0,7129
<i>EE</i> <sub>204</sub>	0,8409	<i>EE</i> <sub>243</sub>	0,6204	<i>EE</i> <sub>282</sub>	0,6006	<i>EE</i> <sub>321</sub>	0,7035	<i>EE</i> <sub>360</sub>	0,6502
<i>EE</i> <sub>205</sub>	0,5797	<i>EE</i> <sub>244</sub>	0,5909	<i>EE</i> <sub>283</sub>	0,6589	<i>EE</i> <sub>322</sub>	0,6608	<i>EE</i> <sub>361</sub>	0,6687
<i>EE</i> <sub>206</sub>	0,7658	<i>EE</i> <sub>245</sub>	0,5898	<i>EE</i> <sub>284</sub>	0,8702	<i>EE</i> <sub>323</sub>	0,5937	<i>EE</i> <sub>362</sub>	0,5756
<i>EE</i> <sub>207</sub>	0,6631	<i>EE</i> <sub>246</sub>	0,6342	<i>EE</i> <sub>285</sub>	0,5797	<i>EE</i> <sub>324</sub>	0,7213	<i>EE</i> <sub>363</sub>	0,6314
<i>EE</i> <sub>208</sub>	0,6807	<i>EE</i> <sub>247</sub>	0,6483	<i>EE</i> <sub>286</sub>	0,8082	<i>EE</i> <sub>325</sub>	0,5974	<i>EE</i> <sub>364</sub>	0,5528
<i>EE</i> <sub>209</sub>	0,6536	<i>EE</i> <sub>248</sub>	0,6565	<i>EE</i> <sub>287</sub>	0,5709	<i>EE</i> <sub>326</sub>	0,5707	<i>EE</i> <sub>365</sub>	0,6487
<i>EE</i> <sub>210</sub>	0,6241	<i>EE</i> <sub>249</sub>	0,6809	<i>EE</i> <sub>288</sub>	0,5883	<i>EE</i> <sub>327</sub>	0,5813	<i>EE</i> <sub>366</sub>	0,4578
<i>EE</i> <sub>211</sub>	0,6220	<i>EE</i> <sub>250</sub>	0,6659	<i>EE</i> <sub>289</sub>	0,5394	<i>EE</i> <sub>328</sub>	0,6348	<i>EE</i> <sub>367</sub>	0,6881
<i>EE</i> <sub>212</sub>	0,7220	<i>EE</i> <sub>251</sub>	0,6318	<i>EE</i> <sub>290</sub>	0,7311	<i>EE</i> <sub>329</sub>	0,6880	<i>EE</i> <sub>368</sub>	0,6497
<i>EE</i> <sub>213</sub>	0,6404	<i>EE</i> <sub>252</sub>	0,6440	<i>EE</i> <sub>291</sub>	0,6736	<i>EE</i> <sub>330</sub>	0,8243	<i>EE</i> <sub>369</sub>	0,6575
<i>EE</i> <sub>214</sub>	0,5597	<i>EE</i> <sub>253</sub>	0,5705	<i>EE</i> <sub>292</sub>	0,6293	<i>EE</i> <sub>331</sub>	0,6114	<i>EE</i> <sub>370</sub>	0,5687
<i>EE</i> <sub>215</sub>	0,7142	<i>EE</i> <sub>254</sub>	0,6781	<i>EE</i> <sub>293</sub>	0,6456	<i>EE</i> <sub>332</sub>	0,6635	<i>EE</i> <sub>371</sub>	0,5876
<i>EE</i> <sub>216</sub>	0,7081	<i>EE</i> <sub>255</sub>	0,6455	<i>EE</i> <sub>294</sub>	0,6232	<i>EE</i> <sub>333</sub>	0,6627	<i>EE</i> <sub>372</sub>	0,6797
<i>EE</i> <sub>217</sub>	0,6522	<i>EE</i> <sub>256</sub>	0,6850	<i>EE</i> <sub>295</sub>	0,7054	<i>EE</i> <sub>334</sub>	0,6510	<i>EE</i> <sub>373</sub>	0,5500
<i>EE</i> <sub>218</sub>	0,6438	<i>EE</i> <sub>257</sub>	0,7690	<i>EE</i> <sub>296</sub>	0,6728	<i>EE</i> <sub>335</sub>	0,6522	<i>EE</i> <sub>374</sub>	0,5702
<i>EE</i> <sub>219</sub>	0,7133	<i>EE</i> <sub>258</sub>	0,7148	<i>EE</i> <sub>297</sub>	0,7161	<i>EE</i> <sub>336</sub>	0,6135	<i>EE</i> <sub>375</sub>	0,5359
<i>EE</i> <sub>220</sub>	0,6095	<i>EE</i> <sub>259</sub>	0,7026	<i>EE</i> <sub>298</sub>	0,6327	<i>EE</i> <sub>337</sub>	0,5824	<i>EE</i> <sub>376</sub>	0,5579
<i>EE</i> <sub>221</sub>	0,6775	<i>EE</i> <sub>260</sub>	0,6830	<i>EE</i> <sub>299</sub>	0,7163	<i>EE</i> <sub>338</sub>	0,6480	<i>EE</i> <sub>377</sub>	0,7140
<i>EE</i> <sub>222</sub>	0,5962	<i>EE</i> <sub>261</sub>	0,6406	<i>EE</i> <sub>300</sub>	0,6867	<i>EE</i> <sub>339</sub>	0,5852	<i>EE</i> <sub>378</sub>	0,6420
<i>EE</i> <sub>223</sub>	0,6073	<i>EE</i> <sub>262</sub>	0,6773	<i>EE</i> <sub>301</sub>	0,7047	<i>EE</i> <sub>340</sub>	0,6512	<i>EE</i> <sub>379</sub>	0,5954
<i>EE</i> <sub>224</sub>	0,6065	<i>EE</i> <sub>263</sub>	0,7544	<i>EE</i> <sub>302</sub>	0,5938	<i>EE</i> <sub>341</sub>	0,6857	<i>EE</i> <sub>380</sub>	0,5081
<i>EE</i> <sub>225</sub>	0,6248	<i>EE</i> <sub>264</sub>	0,8074	<i>EE</i> <sub>303</sub>	0,7703	<i>EE</i> <sub>342</sub>	0,7842	<i>EE</i> <sub>381</sub>	0,7453
<i>EE</i> <sub>226</sub>	0,5256	<i>EE</i> <sub>265</sub>	0,6586	<i>EE</i> <sub>304</sub>	0,5977	<i>EE</i> <sub>343</sub>	0,7434	<i>EE</i> <sub>382</sub>	0,5876
<i>EE</i> <sub>227</sub>	0,5952	<i>EE</i> <sub>266</sub>	0,5848	<i>EE</i> <sub>305</sub>	0,6112	<i>EE</i> <sub>344</sub>	0,7710		
<i>EE</i> <sub>228</sub>	0,6872	<i>EE</i> <sub>267</sub>	0,6334	<i>EE</i> <sub>306</sub>	0,5668	<i>EE</i> <sub>345</sub>	0,6447		
<i>EE</i> <sub>229</sub>	0,7105	<i>EE</i> <sub>268</sub>	0,7995	<i>EE</i> <sub>307</sub>	0,6142	<i>EE</i> <sub>346</sub>	0,6664		

Para concluir a análise, apresentam-se as distribuições dos postos associados à medida de eficiência econômica para hospitais mais eficientes, medianos e menos eficientes (MEDRANO, 2003). Essas distribuições são diretamente obtidas utilizando as cadeias de Markov. Denota-se por  $EE_i^{(m)} = \exp(-u_i^{(m)})$  à medida de eficiência econômica para o  $i$ -ésimo hospital na  $m$ -ésima iteração da cadeia de Markov, e ordena-se os  $EE_i^{(m)}$  de forma que  $i = 1, \dots, N$ , assim, o posto associado ao  $j$ -ésimo hospital na  $m$ -ésima iteração é a posição ocupada pela  $EE_i^{(m)}$  na ordenação. O objetivo desta última análise é verificar a capacidade do modelo em classificar os hospitais. Nota-se na Figura 2.5 que o modelo diferencia bem hospitais eficientes de hospitais não eficientes.

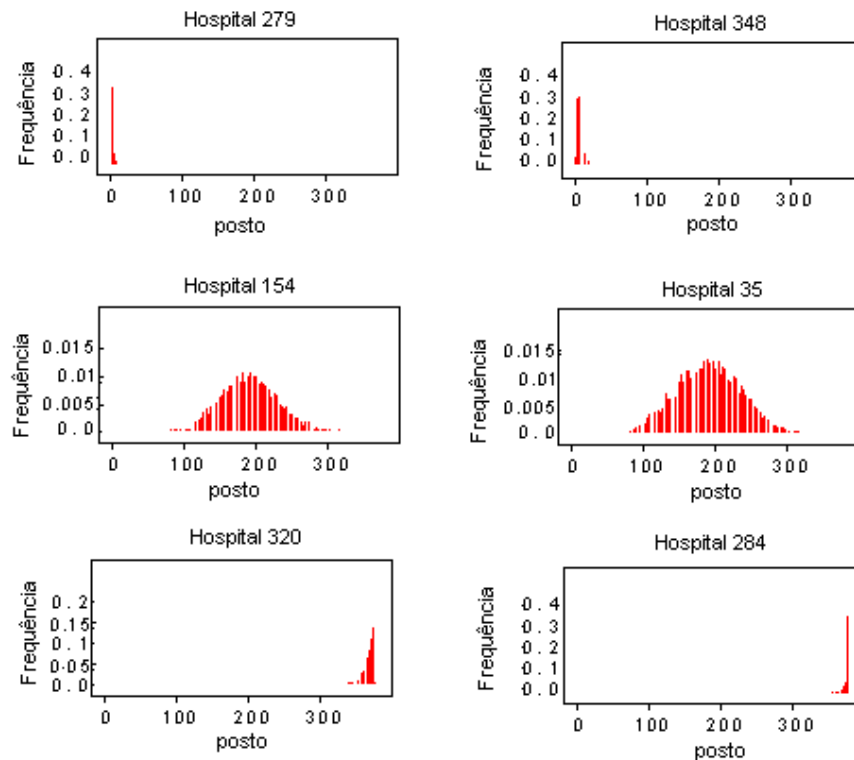


Figura 2.5 – Distribuição a posteriori do posto associado à medida de eficiência econômica para hospitais eficientes, medianos e não eficientes, respectivamente

## 2.4 Considerações Finais

Para o estudo de simulação conclui-se que os parâmetros da fronteira estocástica de custo com forma funcional flexível Fourier foram estimados com maior precisão, observou-se que os parâmetros  $d$  e  $r$ , relativos a expansão em série de Fourier possuem suas médias a posteriori próximas ao valor verdadeiro, o que diminui a imprecisão com relação ao erro natural que os dados podem conter e isso conduz a conclusão que o vetor de ineficiências econômicas das firmas foi estimado

com maior precisão. Ainda percebe-se que existe dificuldade em estimar as firmas mais eficientes, sendo o modelo proposto melhor utilizado para estimar as firmas não eficientes.

O tempo computacional necessário para obter o resultado das simulações de cada amostra foi equivalente a 24 horas.

Para os dados reais, conclui-se que o hospital mais eficiente é o 284 e o menos eficiente é o 279. A parte da variância da fronteira explicada pelo termo de ineficiência econômica é aproximadamente 82%.

O tempo computacional necessário para obter o resultado da análise dos dados reais foi equivalente a 7 dias. Existe a necessidade de possuir um processador bastante eficiente para esses casos.

A proposta original deste trabalho foi cumprida, mostrando como calcular eficiência econômica de firmas através dos modelos de fronteira estocástica de custo com forma funcional flexível Fourier, usando a abordagem bayesiana, fundamental para a análise dos dados devido ao excesso de parâmetros.

Possíveis extensões deste trabalho são:

- i) Utilizar diferentes distribuições para o termo de ineficiência econômica, tais como, normal truncada, log normal, etc;
- ii) Utilizar a distribuição t-Student para o erro aleatório do modelo;
- iii) Inserir covariáveis no modelo, com a finalidade de analisar a eficiência econômica das firmas variando no tempo;
- iv) Dividir a eficiência econômica em técnica e alocativa, utilizando as parcelas de custo sob a abordagem bayesiana.

## Referências

BERGER, A.N.; MESTER, L.J. Inside de black box: what explains differences in the efficiencies of financial institutions. **Journal of Banking and Finance**, Carbondale, v. 21, n.7, p.895-947, 1997.

BERGER, A.N.; LEUSNER, J.H.; MINGO, J.J. The efficiency of bank branches. **Journal of Monetary Economics**, Boston, v. 40, n.1, p.141-162, 1997.

CASELLA, G.; GEORGE, E.I. Explaining the Gibbs sampler. **The American Statistician**, Alexandria, v.46, n.3, p.167-174, 1992.



CESPEDES, J.G. **Eficiência de Produção: um enfoque Bayesiano**, 2003. 63p. Dissertação (Mestre em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2003.

CHALFANT, J.A.; GALLANT, A.R. Estimating Substitution Elasticities With The Fourier Cost Function. Some Monte Carlo Results. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.28, n.2, p.205-222, 1985.

CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. **The American Statistician**, Alexandria, v.49, n.4, p.327-335, 1995.

EASTWOOD, B.J.; GALLANT, A.R. Adaptive rules for semi-nonparametric estimators that achieve asymptotic normality. **Econometric Theory**, New Haven, v.7, p.307-340, 1991.

FERNÁNDEZ, C.; KOOP, G.; STEEL, M.F.J. A Bayesian analysis of multiple-output production frontiers. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.98, n.1, p.47-79, 2000.

GALLANT, A. R. On the bias in flexible functional forms and an essentially unbiased form: the Fourier flexible form. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.15, n.2, p.211-245, 1981.

GALLANT, A. R. Unbiased determination of production technologies. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.20, n.2, p.285-323, 1982.

GALLANT, A. R. The Fourier flexible form. **American Agricultural Economics Association**, Ohio, v.66, n.2, p.204-208, 1984.

GELFAND, A.E.; HILLS, S.E.; RACINE-POON, A.; SMITH, A.F.M. Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.85, n.412, p.972-985, 1990.

GELFAND, A.E. Gibbs sampling. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.95, n.452, p.1300-1304, 2000.

GELMAN, A.; RUBIN, D.B. Inference from iterative simulation using multiple sequences, **Statistical Science**, Beachwood, v.7, n.4, p.457-511, 1992.

GRIFFIN, J.E.; STEEL, M.F.J. Bayesian stochastic frontier analysis using WinBUGS. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.27, n.3 p.163-177, 2007.

HASTINGS, W.K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, Lausanne, v.57, n.1, p.97-109, 1970.

HUANG, T.H.; WANG, M.H. Estimation of technical and allocative inefficiency using Fourier flexible cost frontiers for Taiwan's banking industry. **The Manchester School**, Manchester, v.71, n.3, p.341-362, 2003.

HUANG, T.H.; WANG, M.H. Comparisons of economic inefficiency between output and input measures of technical inefficiency using the Fourier flexible cost function. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.22, n.1-2, p.123-142, 2004.

HUSSEIN, K.A. Banking efficiency in Bahrain: Islamic vs conventional banks. **Islamic Development Bank**, Saudi Arabia, N.68, p.1-62, 2004.

IVALDI, M.; LADOUX, N.; OSSARD, H.; SIMIONI, M. Comparing Fourier and Translog specifications of multiproduct technology: evidence from an incomplete panel of French farmers. **Journal of Applied Econometrics**, Cambridge, v.11, n.6, p.649-667, 1996.

KOOP, G.; OSIEWALSKI, J.; STEEL, M.F.J. Bayesian efficiency analysis through individual effects: hospital cost frontiers. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.76, n.1-2, p.77-105, 1997.

KRAFT, E.; HOLFER, R.; PAYNE, J. Privatization, foreign bank entry and bank efficiency in Croatia: a Fourier - flexible function stochastic cost frontier analysis. **Croatian National Bank**, Croatia, p.1-17, 2002.

LUNN, D.J.; THOMAS, A.; BEST, N.; SPIEGELHALTER, D. WinBUGS: a Bayesian modelling framework: concepts, structure, and extensibility. **Statistics and Computing**, Orsay, v.10, n.4, p.325-337, 2000.

MCALLISTER, P.H.; MCMANUS, D. Resolving the scale efficiency puzzle in banking. **Journal of Banking and Finance**, Carbondale, v. 17, n.2-3, p.389-405, 1993.

MEDRANO, L.A.T. **Análise Bayesiana de Modelos de Fronteiras de Produção Estocásticas**, 2003. 63p. Dissertação (Mestre em Estatística) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A.W.; ROSENBLUTH, M.N.; TELLER, A.H.; TELLER, E. Equations of state calculations by fast computing machines. **Journal of Chemical Physics**, Chicago, v.21, n.6, p.1087-1092, 1953.

MITCHELL, K.; ONVURAL, N.M. Economies of scale and scope at large commercial banks: evidence from the Fourier flexible functional form. **Journal of Money, Credit and Banking**, Ohio, v. 28, n.2 p.178-199, 1996.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. **R Foundation for Statistical Computing**, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, Disponível em: [www.R-project.org](http://www.R-project.org). Acesso em: 03 fev. 2008.

ROSSI, S.P.S.; SCHAWAIGER, M.; WINKLER, G. Managerial behavior and cost/profit efficiency in the banking sectors of Central and Eastern European countries. **Oesterreichische Nationalbank**, Austria, p.1-34, 2005.

TSIONAS, E.G. Full likelihood inference in normal-gamma stochastic models. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.13, n.3, p.183-205, 2000.

TSIONAS, E.G. Stochastic frontier models with random coefficients. **Journal of Applied Econometrics**, Cambridge, v.17, n.2, p.127-147, 2002.

### 3 MODELOS GENERALIZADOS DE FRONTEIRA ESTOCÁSTICA

#### Resumo

Os modelos de fronteira de produção estocástica são compostos por uma função de produção e medidas de incerteza, em que as variáveis explicativas agem multiplicativamente no modelo. A variável resposta é medida por valores não negativos que podem ser contínuos, tais como, produção de leite (litros) e carne (kilos), ou discretos, como por exemplo, número de automóveis e eletrodomésticos produzidos. Em geral, na literatura, dados de produção são analisados assumindo-se modelos multiplicativos que impõem a restrição de que a produção é estritamente positiva e utiliza-se a transformação logarítmica para linearizar o modelo. Considera-se que o logaritmo do produto dada a ineficiência técnica tem distribuição contínua, independentemente de os dados serem contínuos ou discretos. A proposta deste trabalho é desenvolver os modelos generalizados de fronteira estocástica, baseando-se nos modelos lineares generalizados mistos com a abordagem bayesiana, para quantificar a ineficiência técnica de firmas (medida de incerteza) utilizando a variável resposta na escala original e distribuições pertencentes à família exponencial para a variável resposta dada a medida de ineficiência.

Palavras-chave: Modelos lineares generalizados mistos; Modelos de fronteira estocástica; Eficiência técnica; Inferência bayesiana

#### Abstract

The stochastic production frontier models are composed by a production function and measures of uncertainty, on which, the explaining variables act multiplicative into the model. The response variable of these models, is measured for values not negatives that can be continuous as milk production (liters) and meat (kilos), or discrete, like putting example, number of motorcars and of appliances that are producing. Generally, in the literature, production data are analyzed assuming multiplicative models that impose the restriction of what the production is strictly positive and use the logarithm transformation to turn the model lineal. It is considerate that the product's logarithm given the technical inefficiency has distribution continual, independent if the data are continuous or discrete. The propose of this paper is to develop generalized stochastic frontier models, based on generalized linear mixed models with the Bayesian approach, to quantify the inefficiency technical of the firms (uncertainty measures) by using the response variable in the scale original with distributions belonging on the exponential family to the response variable given the measure of inefficiency.

Keywords: Generalized Linear Mixed Models; Stochastic frontier models; Technical efficiency; Bayesian inference

### 3.1 Introdução

Em microeconomia, um problema de interesse prático, é estudar a relação entre produtos e insumos. Essa relação não é perfeita e utilizam-se modelos que envolvem uma parte determinística a qual é representada por uma forma funcional e componentes aleatórios que incorporam incertezas. A forma funcional representa uma função de produção, que é definida como o máximo produto possível produzido por uma firma dada uma combinação de insumos (COELLI et al., 1999), e as formas funcionais mais utilizadas são a Cobb Douglas e a translog (Apêndice H), para as quais assume-se que os insumos agem multiplicativamente. As medidas de incerteza representam a ineficiência técnica orientada ao produto de firmas, que assume valores positivos, e uma variação natural que os dados podem conter.

Inicialmente, Aigner e Chu (1968), seguidos por Seitz (1971) e Timmer (1971), propuseram os modelos de fronteira de produção determinística que possuem apenas uma medida de incerteza que mede a ineficiência técnica orientada ao produto, ou apenas ineficiência técnica. Mesmo contendo uma incerteza esses modelos foram chamados de determinísticos porque todo o desvio do valor observado em relação à forma funcional deve-se à ineficiência técnica das firmas.

Uma crítica relevante a esses modelos é que eles não controlam fatores aleatórios tais como: um funcionário ficar doente, uma máquina quebrar, escassez de chuva em determinada época de plantio, animais envolvidos na produção adoecerem, efeitos de tempo, greves, sorte, juntamente com os efeitos combinados de insumos não-especificados na função de produção.

Motivados pela idéia de que os desvios dos dados observados em relação à função de produção podem não estar inteiramente sob o controle das firmas, Meeusen e van den Broeck (1977) e Aigner et al. (1977), independentemente e quase simultaneamente, propuseram os modelos de fronteira de produção estocástica, os quais consideram um erro aleatório no modelo além da ineficiência técnica.

Um dos primeiros artigos sobre modelos de fronteira estocástica utilizando a abordagem bayesiana, foi apresentado por van den Broeck et al. (1994) que incorporou a incerteza relativa à ineficiência técnica considerando um termo com distribuição gama com parâmetro de forma conhecido. Outros trabalhos relevantes que utilizam a abordagem Bayesiana são Koop et al. (1995), Koop et al. (1997), Osiewalski e Steel (1998), Fernández et al. (2000), Tsionas (2000), Cespedes (2003), Migon (2004), Fonseca et al. (2005), Cespedes e Leandro (2006), dentre outros.

A produção de uma firma é medida por valores não negativos que podem ser contínuos, tais como, produção de leite (litros) e carne (kilos), ou discretos, como por exemplo, número de automóveis e eletrodomésticos produzidos. Em geral, na literatura, dados de produção são analisados assumindo-se modelos multiplicativos que impõem a restrição de que a produção é estritamente positiva e utiliza-se a transformação logarítmica para linearizar o modelo (KUMBHAKAR; LOVELL,

2000). Considera-se que o logaritmo do produto dada a ineficiência técnica tem distribuição contínua, independentemente de os dados serem contínuos ou discretos.

A proposta deste trabalho é analisar os dados na escala original utilizando modelos lineares generalizados mistos, com a abordagem bayesiana, dispensando assim, a necessidade da transformação logarítmica. O artigo é organizado como segue. Na seção 3.2, apresenta-se uma revisão dos modelos de produção estocástica e dos modelos lineares generalizados. Na seção 3.3, propõem-se os modelos generalizados de fronteira estocástica considerando-se diferentes distribuições para a variável resposta dada a ineficiência técnica. Nas seções 3.4 e 3.5, descrevem-se os dados simulados e os dados reais e as discussões são apresentadas na seção 3.6.

## 3.2 Desenvolvimento

### 3.2.1 Modelos de fronteira de produção estocástica

O modelo de fronteira de produção estocástica pode ser escrito da seguinte forma:

$$Y_{it} = f(x_{it}, \beta) \exp(v_{it} - u_i), \quad (3.1)$$

sendo  $Y_{it}$  a variável resposta que representa o produto da  $i$ -ésima firma no  $t$ -ésimo tempo,  $i = 1, \dots, N$  e  $t = 1, \dots, T$ ;  $f(x_{it}, \beta)$  a função de produção dependente dos insumos e dos coeficientes de regressão, em que  $x_{it}$  é o vetor de quantidades de insumos utilizados pela  $i$ -ésima firma no  $t$ -ésimo tempo e  $\beta$  o vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados, cuja dimensão depende da forma funcional utilizada;  $u_i$  o erro aleatório que assume valores maiores do que zero, associado à ineficiência técnica da  $i$ -ésima firma e  $v_{it}$  o erro aleatório com distribuição simétrica, que se supõe idêntico e independentemente distribuído, com média zero e variância constante, independente de  $u_i$ .

De forma equivalente, escreve-se o modelo (3.1) na forma logarítmica:

$$\ln Y_{it} = \ln(f(x_{it}, \beta)) + v_{it} - u_i.$$

Por facilidade de cálculos, utiliza-se neste trabalho, a forma funcional Cobb-Douglas e assume-se que:

$$\begin{aligned} \ln Y_{it}|u_i &\sim N(\beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_S \ln x_{itS} - u_i, \sigma_v^2), \\ u_i|P, \theta &\sim G(P, \theta), \end{aligned} \quad (3.2)$$

neste caso, as quantidades desconhecidas associadas ao modelo (3.2) são  $\beta$ ,  $\sigma_v^2$ ,  $P$ ,  $\theta$  e  $u$ .

Considerando-se a ineficiência técnica específica para cada firma, mas constante no tempo, define-se a eficiência técnica da  $i$ -ésima firma como:

$$ET_i = \exp(-u_i).$$

### 3.2.2 Modelos lineares generalizados

Os modelos lineares generalizados podem ser usados quando se tem uma única variável resposta  $Y$  associada a um conjunto de variáveis explicativas  $x_1, x_2, \dots, x_s$  e envolve os três componentes (CORDEIRO; DEMÉTRIO, 2007):

- i) Componente aleatório: constituído de um conjunto de variáveis respostas, isto é, variáveis aleatórias  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  provenientes de uma mesma distribuição pertencente à família exponencial na forma canônica, com médias  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , isto é:

$$f(y_i; \theta_i, \phi) = \exp \left\{ \frac{1}{a_i(\phi)} [y_i \theta_i - b(\theta_i)] + c(y_i, \phi) \right\}, \quad (3.3)$$

em que  $b(\cdot)$  e  $c(\cdot)$  são funções conhecidas e  $\theta_i$  é o parâmetro canônico. Em geral,  $a_i(\phi) = \frac{\phi}{w_i}$ , sendo  $w_i$  pesos a priori e  $\phi > 0$ , um parâmetro de escala conhecido. Além disso, demonstra-se que:

$$E(Y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y_i) = a_i(\phi) b''(\theta_i) = a_i(\phi) V(\mu_i),$$

sendo  $V(\mu_i) = \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i}$  a função de variância, uma função que depende unicamente da média. A função de variância desempenha papel fundamental nos modelos lineares generalizados, pois caracteriza a distribuição. A importância da família exponencial (3.3) na teoria dos modelos lineares generalizados é que ela permite incorporar dados que exibem assimetria, dados de natureza discreta ou contínua e dados que são restritos a um intervalo do conjunto dos reais.

- ii) Componente sistemático: constituído por um conjunto de  $S$  variáveis explicativas, isto é,  $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{si})$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ , que entram no modelo na forma da soma linear de seus efeitos, constituindo o vetor dos preditores lineares,  $\boldsymbol{\eta}$ , de dimensão  $N \times 1$ , ou seja, com elementos:

$$\eta_i = \sum_{s=1}^S x_{is} \beta_s,$$

em que  $\boldsymbol{\beta}$  é o vetor de parâmetros desconhecidos.

- iii) Função de ligação: uma função que relaciona o componente aleatório ao componente sistemático, ou seja, relaciona a média ao preditor linear, isto é,

$$\eta_i = g(\mu_i),$$

sendo  $g(\cdot)$  uma função monótona e diferenciável.

Nos modelos lineares generalizados mistos, incorpora-se um efeito aleatório no preditor linear:

$$\eta_i = \sum_{s=1}^S x_{is}\beta_s + \gamma_i, \quad (3.4)$$

em que  $\gamma_i$  tem geralmente distribuição normal com média zero e variância  $\sigma_\gamma^2$ . Outras distribuições, no entanto, podem ser usadas (ANDERSON; AITKIN, 1985; CHAN et al., 2005; CLAYTON, 1996; DIGGLE et al., 1998; FAHRMEIR; LANG, 2001; HANDCOCK; STEIN, 1993; MCCULLOCH; SEARLE, 2001; MCNEIL; WENDIN, 2007; NATARAJAM; KASS, 2000; STIRATELLI et al., 1984; ZEGER; KARIM, 1991; ZHAO et al., 2006).

Utilizando modelos lineares generalizados mistos (3.4) estende-se os modelos de fronteira de produção estocástica (3.1) para variáveis resposta que, eventualmente, possuem valores nulos e que não sejam contínuas.

### 3.3 Modelos generalizados de fronteira estocástica

#### 3.3.1 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $\ln Y_{it}|u_i$ com distribuição Normal

O modelo de fronteira de produção estocástica (3.1), utilizado na literatura, pode ser reescrito utilizando os modelos lineares generalizados mistos (3.4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ln Y_{it}|u_i &\sim N(\beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_S \ln x_{itS} - u_i, \sigma_v^2), \\ u_i|P, \theta &\sim G(P, \theta), \end{aligned} \quad (3.5)$$

e utiliza-se a função de ligação identidade com preditor linear dado por:

$$\eta_{it} = \mu_{it} = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_S \ln x_{itS} - u_i.$$

Para utilizar a abordagem bayesiana (Apêndice C) é necessário incorporar à incerteza relativa as quantidades desconhecidas de interesse  $P$ ,  $\theta$ ,  $\beta$  e  $\tau$ . Assumindo-se independência entre estas quantidades, a distribuição a priori conjunta é dada por:

$$\pi(P, \theta, \beta, \tau) = \pi(P)\pi(\theta)\pi(\beta)\pi(\tau),$$

em que  $\tau = \frac{1}{\sigma_v^2}$ ,  $P \sim G(a, b)$ ,  $\theta \sim G(d, w)$ ,  $\beta_s \sim NT(\mu_\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\forall s = 1, \dots, S$  e  $\tau \sim G(\alpha, \delta)$ , sendo que  $G(a, b)$  representa a função densidade de probabilidade da distribuição gama com média  $\frac{a}{b}$  e variância  $\frac{a}{b^2}$ ;  $NT(\mu, \sigma^2)$  representa a função densidade de probabilidade da distribuição normal truncada. A distribuição normal truncada é utilizada porque a forma funcional Cobb Douglas exige que os componentes do vetor  $\beta$  assumam valores positivos (GRIFFIN; STEEL, 2007).



Desto forma a distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\beta}, P, \tau, \theta, u_i | x_{its}, \ln Y_{it}) &\propto \tau^{\frac{NT}{2} + \alpha - 1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \eta_{it})^2 - 2\delta \right] - bP \right. \\ &\quad \left. - \theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como a distribuição conjunta a posteriori não é tratável algebricamente, resumos a posteriori de interesse são obtidos de amostras da distribuição (3.6) utilizando-se algoritmos MCMC, tais como, Gibbs *sampling* e Metropolis-Hastings (Apêndice E). Para a implementação computacional desses algoritmos é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori de todas as quantidades desconhecidas de interesse presentes no modelo.

Apresentam-se, a seguir, as distribuições condicionais completas a posteriori associadas à distribuição (3.6). Os cálculos para sua obtenção são apresentados no Anexo E.

i) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\theta$ :

$$\theta | \boldsymbol{\beta}, u_i, P, \tau, x_{its}, \ln y_{it} \sim G\left(NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i\right).$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $P$ :

$$\pi(P | \boldsymbol{\beta}, \tau, \theta, u_i, x_{its}, \ln y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ P \left( -b + \sum_{i=1}^N \ln u_i \right) \right\}.$$

iii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\tau$ :

$$\tau | \boldsymbol{\beta}, \theta, u_i, P, x_{its}, \ln y_{it} \sim G\left(\frac{NT}{2} + \alpha, \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \eta_{it})^2 - 2\delta}{2}\right).$$

iv) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\beta_S$ :

$$\beta_s | P, \theta, \beta_{-s}, \tau, u_i, x_{its}, \ln y_{it} \sim NT(\mu_H, \sigma_H^2),$$

$$\text{sendo } \sigma_H^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \sigma_v^{-2} \ln x_{its}^2 - \sigma_\beta^{-2}} \text{ e } \mu_H = \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ln x_{its} \sigma_v^{-2} (\ln y_{it} + u_i) - \mu_\beta \sigma_\beta^{-2} \right] \sigma_H^2.$$

iv) Distribuição condicional completa a posteriori para  $u_i$ :

$$\pi(u_i | P, \theta, \boldsymbol{\beta}, \tau, u_{-i}, x_{its}, \ln y_{it}) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T u_i^2 - 2u_i \left( \sum_{s=0}^S \beta_s \ln x_{its} - \ln y_{it} + \theta \right) \right] \right\} u_i^{P-1}.$$

Observa-se que as distribuições condicionais completas a posteriori para os parâmetros  $\theta$ ,  $\beta_s$  e  $\tau$  possuem forma fechada, portanto, pode-se utilizar o algoritmo *Gibbs sampling* para amostrar dessas distribuições (CASELLA e GEORGE, 1992; GELFAND et al., 1990; GELFAND, 2000) e as distribuições condicionais completas a posteriori para os parâmetros  $u_i$  e  $P$  não possuem forma fechada e amostrar dessas distribuições não é simples, utiliza-se o algoritmo de Metropolis-Hastings (CHIB e GREENBERG, 1995; HASTINGS, 1970; METROPOLIS et al., 1953).

### 3.3.2 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $Y_{it}|u_i$ com distribuição gama

Baseado no modelo descrito em Singer e Andrade (1997), que dispensa a necessidade da transformação logarítmica da variável resposta, propõe-se o modelo:

$$\begin{aligned} Y_{it}|u_i &\sim G\left(\nu^{-2}, \left(\prod_{s=0}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i}\right)^{-1} \nu^{-2}\right), \\ u_i|P, \theta &\sim G(P, \theta), \end{aligned} \quad (3.7)$$

neste caso, as quantidades desconhecidas associadas ao modelo (3.7) são  $\beta$ ,  $\nu$ ,  $P$ ,  $\theta$  e  $u$  e utiliza-se a função de ligação logarítmica,  $\ln \mu_{it}$ , com preditor linear dado por:

$$\eta_{it} = \ln \mu_{it} = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_S \ln x_{its} - u_i.$$

Dessa forma,  $E[Y_{it}] = \prod_{s=0}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i}$  e  $Var[Y_{it}] = (\prod_{s=0}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i})^2 \nu^2$ .

Para utilizar a abordagem bayesiana é necessário incorporar à incerteza relativa as quantidades desconhecidas de interesse  $P$ ,  $\theta$ ,  $\beta$  e  $\nu$ . Assumindo-se independência entre estas quantidades, a distribuição a priori conjunta é dada por:

$$\pi(P, \theta, \beta, \nu) = \pi(P)\pi(\theta)\pi(\beta)\pi(\nu),$$

em que  $P \sim G(a, b)$ ,  $\theta \sim G(d, w)$ ,  $\beta_S \sim NT(\mu_\beta, \sigma_\beta^2)$  e  $\nu \sim G(l, m)$ , e assim, a distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\beta, P, \nu, \theta, u_i | x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{\nu^2} \left[-\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \eta_{it}\right] + \nu^{-2} \ln(\nu^{-2} y_{it})\right)\right. \\ &\quad - \ln(\Gamma(\nu^{-2}))^{NT} - \theta \left(d + \sum_{i=1}^N u_i\right) - bP - l\nu \\ &\quad \left. - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \nu^{m-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como a distribuição conjunta a posteriori não é tratável algebricamente, resumos a posteriori de interesse são obtidos de amostras da distribuição (3.8) utilizando-se algoritmos MCMC, tais como, Gibbs *sampling* e Metropolis-Hastings. Para a implementação computacional desses algoritmos é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori de todas as quantidades desconhecidas de interesse presentes no modelo. Apresentam-se, a seguir, as distribuições condicionais completas a posteriori, os cálculos para sua obtenção são apresentados no Anexo F.

i) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\theta$ :

$$\theta | \beta, \nu, u_i, P, x_{its}, Y_{it} \sim G\left(NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i\right).$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $P$ :

$$\pi(P|\boldsymbol{\beta}, \nu, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ P \left( -b + \sum_{i=1}^N \ln u_i \right) \right\}.$$

iii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\beta_s$ :

$$\begin{aligned} \pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \nu, u_i, x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \beta_s \ln x_{its} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta). \end{aligned}$$

iv) Distribuição condicional completa a posteriori para  $u_i$ :

$$\pi(u_i|P, \theta, \boldsymbol{\beta}, \nu, u_{-i}, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} + u_i \right] - \theta u_i \right\} u_i^{P-1}.$$

iv) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \pi(\nu|\boldsymbol{\beta}, P, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \eta_{it} + \ln \nu^{-2} + \ln y_{it} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - \ln \Gamma(\nu^{-2})^{NT} - l\nu \right\} \nu^{m-1}. \end{aligned}$$

Observa-se que a distribuição condicional completa a posteriori para o parâmetro  $\theta$  possui forma fechada, portanto, pode-se utilizar o algoritmo Gibbs *sampling* para amostrar dessa distribuição e as distribuições condicionais completas a posteriori para os parâmetros  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\nu$  e  $P$  não possuem forma fechada e para amostrar dessas distribuições pode-se utilizar o algoritmo de Metropolis-Hastings.

### 3.3.3 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $Y_{it}|u_i$ com distribuição normal

Um problema relatado em Kumbhakar e Lovell (2000) ocorre quando a variável resposta  $Y_{it}$  assume valores nulos. Neste caso propõe-se o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} Y_{it}|u_i &\sim N \left( \prod_{s=0}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i}, \sigma_v^2 \right), \\ u_i|P, \theta &\sim G(P, \theta), \end{aligned} \quad (3.9)$$

com função de ligação logarítmica,  $\ln \mu_{it}$ , e preditor linear dado por:

$$\eta_{it} = \ln \mu_{it} = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_s \ln x_{its} - u_i.$$

Neste caso, as quantidades desconhecidas associadas ao modelo (3.9) são  $\beta$ ,  $P$ ,  $\theta$ ,  $\sigma_v^2$  e  $\mathbf{u}$  e dessa forma, o modelo (3.9) permite que a variável resposta possua valores iguais a zero.

Para utilizar a abordagem bayesiana necessita-se incorporar à incerteza relativa as quantidades desconhecidas de interesse  $P$ ,  $\theta$ ,  $\beta$  e  $\sigma_v^2$ . Assumindo-se independência entre estas quantidades a distribuição a priori conjunta é dada por:

$$\pi(P, \theta, \beta, \nu) = \pi(P)\pi(\theta)\pi(\beta)\pi(\tau).$$

em que  $\tau = \frac{1}{\sigma_v^2}$ ,  $P \sim G(a, b)$ ,  $\theta \sim G(d, w)$ ,  $\beta_S \sim NT(\mu_\beta, \sigma_\beta^2)$  e  $\tau \sim G(\alpha, \delta)$ , e assume-se que a distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\beta, P, \tau, \theta, u_i | x_{its}, Y_{it}) &\propto \tau^{\frac{NT}{2} + \alpha - 1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \exp(\eta_{it}))^2 - 2\delta \right] - bP \right. \\ &\quad \left. - \theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como a distribuição conjunta a posteriori não é tratável algebricamente, resumos a posteriori de interesse são obtidos de amostras da distribuição (3.10) utilizando-se algoritmos MCMC, tais como, Gibbs *sampling* e Metropolis-Hastings. Para a implementação computacional desses algoritmos é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori de todas as quantidades desconhecidas de interesse presentes no modelo. Apresentam-se, a seguir, as distribuições condicionais completas a posteriori, os cálculos para sua obtenção são apresentados no Anexo G.

i) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\theta$ :

$$\theta | \beta, P, \tau, u_i, x_{its}, Y_{it} \sim G\left(NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i\right).$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $P$ :

$$\pi(P | \beta, \theta, \tau, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ P \left( -b + \sum_{i=1}^N \ln u_i \right) \right\}.$$

iii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\beta_S$ :

$$\pi(\beta_s | P, \theta, \beta_{-s}, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \ln y_{it} - \prod_{s=1}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i} \right)^2 \right] - \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta).$$

iv) Distribuição condicional completa a posteriori para  $u_i$ :

$$\pi(u_i | \beta, u_{-i}, P, \theta, \tau, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \exp(\eta_{it}))^2 \right] - \theta u_i \right\} u_i^{P-1}.$$

iv) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\tau$ :

$$\tau|\beta, P, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it} \sim G\left(\frac{NT}{2} + \alpha, \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \exp(\eta_{it}))^2 - 2\delta}{2}\right).$$

Observa-se que as distribuições condicionais completas a posteriori para os parâmetros  $\theta$  e  $\tau$  possuem forma fechada, portanto, pode-se utilizar o algoritmo Gibbs *sampling* para amostrar dessas distribuições e as distribuições condicionais completas a posteriori para os parâmetros  $u_i, \beta_s$  e  $P$  não possuem forma fechada e para amostrar dessas distribuições pode-se utilizar o algoritmo de Metropolis-Hastings.

### 3.3.4 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $Y_{it}|u_i$ com distribuição de Poisson

Considerando-se o fato de que a variável resposta  $Y_{it}$  é medida na forma de contagem propõe-se o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição de Poisson:

$$\begin{aligned} Y_{it}|u_i &\sim \text{Pois}\left(\prod_{s=0}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i}\right), \\ u_i|P, \theta &\sim G(P, \theta), \end{aligned} \quad (3.11)$$

e assume-se função de ligação canônica logarítmica,  $\ln(\lambda_{it})$ , com o preditor linear definido como:

$$\eta_{it} = \ln(\lambda_{it}) = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_s \ln x_{its} - u_i.$$

As pressuposições da distribuição de Poisson são (COSTA, 2003) independência entre as observações e a mesma média para todas as firmas, e, quando satisfeitas as pressuposições, a função de variância é dada por  $V(Y_{it}) = \mu_{it}$ .

Para utilizar a abordagem bayesiana é necessário incorporar à incerteza relativa as quantidades desconhecidas de interesse  $P, \theta$  e  $\beta$ . Assumindo-se independência entre estas quantidades, a distribuição a priori conjunta é dada por:

$$\pi(P, \theta, \beta) = \pi(P)\pi(\theta)\pi(\beta),$$

em que  $P \sim G(a, b)$ ,  $\theta \sim G(d, w)$  e  $\beta_s \sim NT(\mu_\beta, \sigma_\beta^2)$ , e assume-se que a distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(P, \theta, \beta, u_i|x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\eta_{it} - \exp(\eta_{it})] - \theta\left(d + \sum_{i=1}^N u_i\right)\right. \\ &\quad \left. - bP - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como a distribuição conjunta a posteriori não é tratável algebricamente, resumos a posteriori de interesse são obtidos de amostras da distribuição (3.12) utilizando-se algoritmos MCMC, tais como, Gibbs *sampling* e Metropolis-Hastings. Apresentam-se, a seguir, as distribuições condicionais completas a posteriori, os cálculos para sua obtenção são apresentados no Anexo H.

i) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\theta$ :

$$\theta|\boldsymbol{\beta}, u_i, P, x_{its}, Y_{it} \sim G\left(NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i\right).$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $P$ :

$$\pi(P|\boldsymbol{\beta}, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp\left\{P\left(-b + \sum_{i=1}^N \ln u_i\right)\right\}.$$

iii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\beta_s$ :

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\beta_s \ln x_{its} - \exp(\eta_{it})] - \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} I_\beta(\beta).$$

iv) Distribuição condicional completa a posteriori para  $u_i$ :

$$\pi(u_i|P, \theta, \boldsymbol{\beta}, u_{-i}, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [-y_{it}u_i - \exp(\eta_{it})] - \theta u_i\right\} u_i^{P-1}.$$

Observa-se que a distribuição condicional completa a posteriori para o parâmetro  $\theta$  possui forma fechada, portanto, pode-se utilizar o algoritmo Gibbs *sampling* para amostrar dessa distribuição e as distribuições condicionais completas a posteriori para os parâmetros  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  e  $P$  não possuem forma fechada e para amostrar dessas distribuições pode-se utilizar o algoritmo de Metropolis-Hastings.

### 3.3.5 Modelo generalizado de fronteira estocástica para $Y_{it}|u_i$ com distribuição binomial negativa

Entretanto, se uma das pressuposições da distribuição de Poisson não é satisfeita, a variação residual pode ser maior do que a predita pelo modelo com distribuição de Poisson e uma solução para este caso é assumir uma forma mais geral para a função de variância, através do uso da distribuição binomial negativa (MOLEMBERGHS et al., 2007), que possui função de variância dada por:  $V(Y_{it}) = \mu_{it}[1 + \phi\mu_{it}]$ .

Propõe-se o modelo generalizado de fronteira estocástica:

$$\begin{aligned} Y_{it}|u_i &\sim BN\left(\prod_{s=0}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i}, k\right), \\ u_i|P, \theta &\sim G(P, \theta), \end{aligned} \quad (3.13)$$

e utiliza-se a função de ligação logarítmica,  $\ln \mu_{it}$ , com o preditor linear dado como:

$$\eta_{it} = \ln \mu_{it} = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_s \ln x_{its} - u_i,$$

sendo  $k$  um parâmetro fixo e as quantidades desconhecidas associadas ao modelo são  $\beta$ ,  $P$ ,  $\theta$  e  $\mathbf{u}$ .

Para utilizar a abordagem bayesiana é necessário incorporar à incerteza relativa as quantidades desconhecidas de interesse  $P$ ,  $\theta$  e  $\beta$ . Assumindo-se independência entre estas quantidades, a distribuição a priori conjunta é dada por:

$$\pi(P, \theta, \beta) = \pi(P)\pi(\theta)\pi(\beta),$$

em que  $P \sim G(a, b)$ ,  $\theta \sim G(d, w)$  e  $\beta_s \sim NT(\mu_\beta, \sigma_\beta^2)$ , e assume-se que a distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(P, \theta, \beta, u_i | x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\eta_{it} + k \ln(1 - \exp(\eta_{it}))] - \theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right. \\ &\quad \left. - bP - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como a distribuição conjunta a posteriori não é tratável algebricamente, resumos a posteriori de interesse são obtidos de amostras da distribuição (3.14) utilizando-se algoritmos MCMC, tais como, Gibbs *sampling* e Metropolis-Hastings. Apresentam-se, a seguir, as distribuições condicionais completas a posteriori, os cálculos para sua obtenção são apresentados no Anexo I.

i) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\theta$ :

$$\theta | \beta, u_i, P, x_{its}, Y_{it} \sim G\left(NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i\right).$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $P$ :

$$\pi(P | \beta, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ P \left( -b + \sum_{i=1}^N \ln u_i \right) \right\}.$$

iii) Distribuição condicional completa a posteriori para  $\beta_s$ :

$$\begin{aligned} \pi(\beta_s | P, \theta, \beta_{-s}, u_i, x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\beta_s \ln x_{its} + k \ln(1 - \exp(\eta_{it}))] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta). \end{aligned}$$

iv) Distribuição condicional completa a posteriori para  $u_i$ :

$$\pi(u_i | P, \theta, \beta, u_{-i}, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [-y_{it}u_i + k \ln(1 - \exp(\eta_{it}))] - \theta u_i \right\} u_i^{P-1}.$$

Observa-se que a distribuição condicional completa a posteriori para o parâmetro  $\theta$  possui forma fechada, portanto, pode-se utilizar o algoritmo Gibbs *sampling* para amostrar dessa distribuição e as distribuições condicionais completas a posteriori para os parâmetros  $\mathbf{u}$ ,  $\beta$  e  $P$  não possuem forma fechada e para amostrar dessas distribuições pode-se utilizar o algoritmo de Metropolis-Hastings.

### 3.4 Simulação de dados

Os dados simulados baseiam-se em valores reais, referentes a produção de leite do Estado de São Paulo. Coletou-se as médias e variâncias dos logaritmos dos dados disponíveis no sítio do Instituto de Economia Agrícola<sup>1</sup> e foram utilizadas como base para a simulação das variáveis. Considerou-se  $N = 60$  firmas em  $T = 6$  tempos,  $S = 2$  insumos e  $H = 1$  produto. Por facilidade de cálculos, a forma funcional para a função de produção considerada é a Cobb-Douglas, e o vetor de coeficientes a ser estimado,  $\beta$ , possui dimensão 3, incluindo o intercepto. Os passos, a seguir, foram necessários para obter os dados simulados para os modelos (3.5), (3.7), (3.9), (3.11) e (3.13):

- Passo 1:** Gerou-se os logaritmos dos dois insumos para cada uma das 60 firmas, os quais foram denotados por  $\ln x_{i1}$  e  $\ln x_{i2}$  e assumiu-se que  $\ln x_{i1} \sim N(3, 22; 0, 17)$  e  $\ln x_{i2} \sim N(4, 80; 0, 10)$ , respectivamente.
- Passo 2:** Para simular as variáveis no tempo, utilizou-se o caminho aleatório governado pela função densidade de probabilidade da distribuição normal com média 0 e desvio padrão igual a 0,01. Se valores negativos foram gerados para as variáveis, esses foram descartados e gerados novamente. A idéia desenvolvida acima foi originalmente proposta por Fernández et al. (2000) e utilizada em Céspedes (2003).
- Passo 3:** Considerou-se o vetor de parâmetros  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (0, 5; 0, 3; 0, 7)$ . Assumiu-se ineficiência constante no tempo. O vetor de ineficiências possui distribuição gama com parâmetros  $P = 0,8$  e  $\theta = 1$ , valores esses sugeridos por Tsionas (2000). Os valores gerados foram ordenados de forma que a firma 1 fosse a mais eficiente e a firma 60 a menos eficiente.
- Passo 4:** Obteve-se o produto  $Y_{it}$  (ou  $\ln Y_{it}$  para o modelo descrito no item a) a partir das distribuições:
- Normal com média  $\mu_{it}$  e desvio padrão  $\sigma_v$  com preditor linear dado por  $\eta_{it} = \mu_{it} = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \beta_2 \ln x_{it2} - u_i$ ;
  - Gama com parâmetros  $\mu_{it}$  e  $\nu$  com preditor linear dado por  $\eta_{it} = \ln(\mu_{it}) = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \beta_2 \ln x_{it2} - u_i$ ;
  - Normal com média  $\mu_{it}$  e desvio padrão  $\sigma_v$  com preditor linear dado por  $\eta_{it} = \ln(\mu_{it}) = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \beta_2 \ln x_{it2} - u_i$ ;
  - Poisson com parâmetro  $\lambda_{it}$  e preditor linear dado por  $\eta_{it} = \ln(\lambda_{it}) = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \beta_2 \ln x_{it2} - u_i$ ,

<sup>1</sup><http://www.iea.sp.gov.br/out/banco/menu.php> (03 fev. 2008)



- e) Binomial negativa com parâmetro  $\mu_{it}$  e preditor linear dado por  $\eta_{it} = \ln(\mu_{it}) = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \beta_2 \ln x_{it2} - u_i$ .

Repetiu-se 50 vezes os passos de 1 a 4 e gerou-se 50 amostras de  $\ln Y_{it}$  para o modelo com distribuição normal e função de ligação identidade, 50 amostra de  $Y_{it}$  para o modelo com distribuição normal e função de ligação logarítmica e 50 amostra de  $Y_{it}$  para cada um dos modelos com distribuições gama, Poisson e binomial negativa, em que obteve-se um vetor de ineficiência técnica diferente para cada amostra.

### 3.5 Aplicação a dados reais

#### 3.5.1 Vendedores de autopeças

A loja de autopeças localiza-se em uma avenida na cidade de São Paulo conhecida por conter muitas lojas do mesmo setor. Desta forma, a concorrência é bastante acirrada e a eficiência com que os clientes são atendidos é fundamental para o faturamento da loja. As vendas desta loja são feitas de duas maneiras: por telefone e por atendimento de balcão, sendo que, as vendas por telefone representam 70% do faturamento e a rapidez com que essas vendas são efetuadas é fundamental para que as linhas estejam desocupadas para receberem outras ligações. Com base nessas informações, um bom funcionário não se qualifica apenas por vender bastante, mas também por atender o cliente com rapidez e agilidade, de forma eficiente.

Neste trabalho, pretende-se calcular a eficiência técnica de 7 vendedores de uma loja de autopeças que atendem clientes tanto por telefone, como no balcão da loja, coletou-se as informações sobre a quantidade de vendas efetuadas por esses funcionários, o tempo médio de atendimento por venda, o acúmulo de outra função na loja e a comissão das vendas desses funcionários, durante os meses de maio a outubro de 2007.

#### 3.5.2 Instituição Financeira

Os dados referem-se a 52 filiais de uma instituição financeira brasileira que realizam financiamentos de veículos. As filias são responsáveis por macro regiões sendo que o raio de atuação de cada uma delas não é limitado ao bairro ou cidade em que tem presença física.

Em cada filial existe um gerente e funcionários responsáveis por setores específicos de vendas. Ainda que as filiais tenham quantidade total de funcionários semelhantes (em cada categoria), existe diferença nas porcentagens de funcionários responsáveis por financiamentos de veículos em relação ao total de funcionários da filial, isso acontece porque existem focos distintos em função de cada região.

As metas das filiais são definidas em função da área de atuação e do potencial de cada região, por exemplo, se a região possuir um número elevado de concessionárias com um público mais qualificado define-se um número maior de funcionários responsáveis para vendas de financiamentos de veículos. Definido o quadro de pessoal da filial, a meta anual é o resultado entre a quantidade de operadores multiplicado por 56 contratos.

Os dados reais são compostos por um produto e 3 insumos que são descritos como a quantidade de vendas de financiamentos de veículos (carros/motos/pesados) de até 10 mil reais, o número de funcionários em cada filial, o número de funcionários responsáveis por veículos e as metas de vendas.

### 3.6 Resultados e Discussão

Os resultados dividem-se em duas seções: a primeira refere-se as simulações de 50 amostras da variável resposta obtidas a partir dos modelos generalizados de fronteira estocástica e a segunda seção refere-se a análise de dois conjuntos de dados.

#### 3.6.1 Simulação

Conforme descrição da seção 3.4, utilizou-se o programa estatístico *R* (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2008) para simular os dados, obteve-se 50 amostras da variável resposta,  $Y_{it}$  (ou  $\ln Y_{it}$ ), para cada um dos cinco modelos generalizados de fronteira estocástica (3.5), (3.7), (3.9), (3.11) e (3.13). O programa para gerar as amostras encontra-se no Anexo J.

A implementação computacional foi feita usando-se o programa Winbugs (LUNN et al., 2000) gerando uma cadeia com 90.000 valores para cada parâmetro, desprezando os primeiros 30.000 valores para o período de aquecimento da cadeia ("burn-in") e selecionando um a cada 5 dos 60.000 valores restantes ("thin"), formando uma amostra de 12.000 valores. Cada uma das 50 amostras foram iniciadas em três pontos distintos, totalizando três cadeias e a convergência das estimativas dos parâmetros foi monitorada através do critério de convergência de Gelman e Rubin (1992) (Apêndice F), disponível no programa Winbugs. O programa para analisar os dados encontra-se no Anexo K.

Os hiperparâmetros das distribuições a priori dos parâmetros  $\beta_S$ ,  $\theta$ ,  $\nu$  e  $\tau$  foram escolhidos de forma que as distribuições a priori são não informativas. Segundo Tsionas (2002) não é razoável que a distribuição a priori de  $P$  seja não informativa, pois, em tais casos, não é possível identificar os desvios da fronteira em relação aos erros de observação, então, considerou-se distribuição a priori informativa para esse parâmetro. Os valores dos hiperparâmetros das distribuições a priori considerados nas análises encontram-se na Tabela 3.1.

A Tabela 3.2 apresenta um resumo das distribuições a posteriori para cada parâmetro obtido

Tabela 3.1 – Hiperparâmetros das distribuições a priori para os parâmetros  $\beta, P, \theta, \tau$  e  $\nu$ 

Parâmetro	Hiperparâmetro	
$\beta_S$	$a_\beta = 0,00$	$\sigma_\beta^2 = 100,00$
$P$	$a_0 = 0,80$	$b_0 = 1,00$
$\theta$	$v_0 = 0,01$	$w_0 = 0,01$
$\tau$	$\alpha = 0,01$	$\delta = 0,01$
$\nu$	$l = 0,01$	$m = 0,01$

no estudo de simulação para o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal (3.5).

Tabela 3.2 – Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal

(continua)						
Par.	V. verd.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$\beta_0$	0,5000	0,5227	0,2100	0,4156	0,5136	0,6851
$\beta_1$	0,3000	0,2496	0,1697	0,0292	0,2350	0,5584
$\beta_2$	0,7000	0,7508	0,4211	0,1763	0,7387	1,4061
$P$	0,8000	0,9133	0,3948	0,4788	0,8615	1,6531
$\theta$	0,0500	0,0505	0,0046	0,0430	0,0503	0,0592
$\sigma_v^2$	1,0000	1,1249	0,3655	0,5888	1,0902	1,8599
$u_1$	0,0070	0,0843	0,0922	0,0015	0,0646	0,2749
$u_2$	0,0150	0,0982	0,0658	0,0046	0,0786	0,3019
$u_3$	0,0230	0,1076	0,0709	0,0045	0,0910	0,3053
$u_4$	0,0320	0,1021	0,1488	0,0032	0,0828	0,3075
$u_5$	0,0430	0,1025	0,0908	0,0026	0,0848	0,3021
$u_6$	0,0520	0,1280	0,1152	0,0084	0,1112	0,3441
$u_7$	0,0640	0,1244	0,1397	0,0052	0,1072	0,3433
$u_8$	0,0760	0,1230	0,1505	0,0034	0,1009	0,3672
$u_9$	0,0900	0,1511	0,1325	0,0159	0,1373	0,3674
$u_{10}$	0,1020	0,1432	0,1439	0,0100	0,1276	0,3678
$u_{11}$	0,1150	0,1341	0,1050	0,0085	0,1166	0,3592
$u_{12}$	0,1290	0,1884	0,1489	0,0174	0,1749	0,4414
$u_{13}$	0,1440	0,1983	0,1419	0,0249	0,1868	0,4416
$u_{14}$	0,1600	0,1712	0,1335	0,0196	0,1588	0,3990
$u_{15}$	0,1790	0,2014	0,1283	0,0345	0,1900	0,4388
$u_{16}$	0,1970	0,2394	0,1348	0,0610	0,2304	0,4718
$u_{17}$	0,2100	0,2111	0,1381	0,0345	0,1992	0,4604
$u_{18}$	0,2250	0,2285	0,1507	0,0418	0,2160	0,4919
$u_{19}$	0,2420	0,2712	0,1421	0,0745	0,2640	0,5135
$u_{20}$	0,2650	0,2717	0,1387	0,0777	0,2642	0,5119
$u_{21}$	0,2860	0,2902	0,1419	0,0807	0,2845	0,5367

Tabela 3.2 - Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal

Par.	V. Verd.	Média	d.p.	(conclusão)		
				2,5%	50%	97,5%
$u_{22}$	0,3050	0,3093	0,1543	0,0877	0,3034	0,5693
$u_{23}$	0,3240	0,2968	0,1394	0,0925	0,2904	0,5395
$u_{24}$	0,3460	0,3353	0,1528	0,1136	0,3289	0,5975
$u_{25}$	0,3670	0,3797	0,1382	0,1587	0,3751	0,6276
$u_{26}$	0,3870	0,3842	0,1400	0,1695	0,3792	0,6291
$u_{27}$	0,4090	0,4235	0,1425	0,1998	0,4201	0,6693
$u_{28}$	0,4340	0,4314	0,1447	0,2019	0,4273	0,6867
$u_{29}$	0,4580	0,4778	0,1353	0,2556	0,4746	0,7200
$u_{30}$	0,4820	0,4801	0,1390	0,2548	0,4765	0,7264
$u_{31}$	0,5130	0,5092	0,1405	0,2809	0,5051	0,7623
$u_{32}$	0,5450	0,5610	0,1403	0,3340	0,5574	0,8084
$u_{33}$	0,5760	0,5954	0,1413	0,3639	0,5910	0,8531
$u_{34}$	0,6000	0,6227	0,1530	0,3758	0,6176	0,9017
$u_{35}$	0,6300	0,6224	0,1427	0,3933	0,6183	0,8755
$u_{36}$	0,6630	0,6471	0,1629	0,3967	0,6428	0,9241
$u_{37}$	0,6980	0,7142	0,2184	0,3858	0,7046	1,0993
$u_{38}$	0,7300	0,7508	0,1502	0,5101	0,7455	1,0232
$u_{39}$	0,7690	0,7978	0,1443	0,5653	0,7930	1,0593
$u_{40}$	0,8210	0,8059	0,1446	0,5787	0,8020	1,0562
$u_{41}$	0,8660	0,8391	0,1702	0,5805	0,8341	1,1275
$u_{42}$	0,9160	0,9147	0,1445	0,6886	0,9109	1,1641
$u_{43}$	0,9550	0,9564	0,1463	0,7287	0,9527	1,2058
$u_{44}$	1,0060	1,0439	0,1429	0,8121	1,0409	1,2931
$u_{45}$	1,0630	1,0643	0,1400	0,8431	1,0608	1,3057
$u_{46}$	1,1140	1,1114	0,1380	0,8927	1,1077	1,3526
$u_{47}$	1,1710	1,1963	0,1467	0,9691	1,1928	1,4440
$u_{48}$	1,2450	1,2596	0,1385	1,0368	1,2555	1,5072
$u_{49}$	1,3240	1,3165	0,1379	1,0946	1,3125	1,5625
$u_{50}$	1,4060	1,4087	0,1629	1,1527	1,4024	1,7025
$u_{51}$	1,4860	1,5048	0,1384	1,2852	1,5011	1,7464
$u_{52}$	1,5980	1,5990	0,1586	1,3488	1,5930	1,8853
$u_{53}$	1,7280	1,7408	0,1564	1,4934	1,7350	2,0235
$u_{54}$	1,8160	1,8363	0,1352	1,6203	1,8328	2,0737
$u_{55}$	1,9670	1,9873	0,1338	1,7681	1,9837	2,2279
$u_{56}$	2,1450	2,1582	0,1611	1,9142	2,1545	2,4228
$u_{57}$	2,3680	2,3783	0,1526	2,1366	2,3756	2,6361
$u_{58}$	2,7260	2,7601	0,1409	2,5319	2,7555	3,0163
$u_{59}$	3,1810	3,2032	0,1333	2,9869	3,1997	3,4414
$u_{60}$	4,0350	4,0509	0,1549	3,8039	4,0484	4,3120

A Tabela 3.3 apresenta um resumo a posteriori para cada parâmetro obtido no estudo de simulação para o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição gama (3.7).

Tabela 3.3 – Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição gama

(continua)

Par.	V. verd.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$\beta_0$	0,5000	0,5157	0,1502	0,2632	0,5069	0,5632
$\beta_1$	0,3000	0,2418	0,1380	0,0285	0,2314	0,5350
$\beta_2$	0,7000	0,6868	0,3043	0,1598	0,6798	1,3038
$P$	0,8000	0,8825	0,2968	0,4734	0,8332	1,5773
$\theta$	1,0000	1,0952	0,3269	0,5819	1,0625	1,8011
$\nu$	0,2200	0,2192	0,0132	0,2030	0,2197	0,2375
$u_1$	0,0070	0,0840	0,0747	0,0027	0,0675	0,2695
$u_2$	0,0150	0,0831	0,0734	0,0028	0,0640	0,2655
$u_3$	0,0230	0,0958	0,0796	0,0023	0,0782	0,2821
$u_4$	0,0320	0,0907	0,0771	0,0038	0,0712	0,2796
$u_5$	0,0430	0,1165	0,0824	0,0076	0,1047	0,3080
$u_6$	0,0520	0,1103	0,0839	0,0074	0,0941	0,3083
$u_7$	0,0640	0,1057	0,0831	0,0050	0,0900	0,3055
$u_8$	0,0760	0,1179	0,0933	0,0064	0,0977	0,3471
$u_9$	0,0900	0,1212	0,0843	0,0080	0,1067	0,3169
$u_{10}$	0,1020	0,1385	0,0920	0,0119	0,1235	0,3518
$u_{11}$	0,1150	0,1188	0,0892	0,0077	0,1017	0,3280
$u_{12}$	0,1290	0,1726	0,1063	0,0201	0,1584	0,4066
$u_{13}$	0,1440	0,1760	0,1029	0,0199	0,1657	0,4038
$u_{14}$	0,1600	0,1851	0,0998	0,0314	0,1737	0,4037
$u_{15}$	0,1790	0,1922	0,1028	0,0279	0,1836	0,4166
$u_{16}$	0,1970	0,2046	0,1010	0,0460	0,1972	0,4268
$u_{17}$	0,2100	0,2086	0,1087	0,0359	0,1914	0,4395
$u_{18}$	0,2250	0,2207	0,1139	0,0414	0,2160	0,4720
$u_{19}$	0,2420	0,2520	0,1119	0,0605	0,2448	0,4796
$u_{20}$	0,2650	0,2449	0,1080	0,0548	0,2367	0,4706
$u_{21}$	0,2860	0,2873	0,1118	0,0952	0,2786	0,5226
$u_{22}$	0,3050	0,3111	0,1236	0,0959	0,3042	0,5586
$u_{23}$	0,3240	0,3326	0,1127	0,1306	0,3265	0,5669
$u_{24}$	0,3460	0,3173	0,1200	0,1050	0,3107	0,5638
$u_{25}$	0,3670	0,3891	0,1174	0,1752	0,3867	0,6245
$u_{26}$	0,3870	0,3901	0,1186	0,1737	0,3843	0,6242

Tabela 3.3 - Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição gama

Par.	V. Verd.	Média	d.p.	(conclusão)		
				2,5%	50%	97,5%
$u_{27}$	0,4090	0,4141	0,1152	0,2086	0,4095	0,6492
$u_{28}$	0,4340	0,4326	0,1184	0,2115	0,4269	0,6775
$u_{29}$	0,4580	0,4637	0,1174	0,2476	0,4639	0,6927
$u_{30}$	0,4820	0,4853	0,1187	0,2661	0,4789	0,7148
$u_{31}$	0,5130	0,4915	0,1242	0,2690	0,4885	0,7367
$u_{32}$	0,5450	0,5608	0,1249	0,3402	0,5529	0,8001
$u_{33}$	0,5760	0,5598	0,1230	0,3295	0,5525	0,8003
$u_{34}$	0,6000	0,6080	0,1356	0,3687	0,5974	0,8714
$u_{35}$	0,6300	0,6180	0,1286	0,3913	0,6129	0,8596
$u_{36}$	0,6630	0,6219	0,1343	0,3676	0,6080	0,8840
$u_{37}$	0,6980	0,7111	0,1747	0,3963	0,6947	1,0736
$u_{38}$	0,7300	0,7201	0,1325	0,4825	0,7120	0,9841
$u_{39}$	0,7690	0,7560	0,1324	0,5250	0,7519	1,0040
$u_{40}$	0,8210	0,8267	0,1329	0,6042	0,8256	1,0698
$u_{41}$	0,8660	0,8460	0,1516	0,5965	0,8412	1,1247
$u_{42}$	0,9160	0,9199	0,1306	0,6985	0,9138	1,1634
$u_{43}$	0,9550	0,9740	0,1346	0,7582	0,9670	1,2127
$u_{44}$	1,0060	1,0309	0,1373	0,8115	1,0225	1,2696
$u_{45}$	1,0630	1,0696	0,1354	0,8598	1,0623	1,3040
$u_{46}$	1,1140	1,1252	0,1346	0,9114	1,1211	1,3563
$u_{47}$	1,1710	1,2090	0,1391	0,9920	1,2032	1,4457
$u_{48}$	1,2450	1,2352	0,1377	1,0236	1,2304	1,4744
$u_{49}$	1,3240	1,3093	0,1393	1,0979	1,3086	1,5495
$u_{50}$	1,4060	1,4131	0,1577	1,1651	1,4069	1,6915
$u_{51}$	1,4860	1,4909	0,1432	1,2814	1,4909	1,7277
$u_{52}$	1,5980	1,6192	0,1627	1,3788	1,6217	1,8958
$u_{53}$	1,7280	1,7388	0,1610	1,5177	1,7510	2,0107
$u_{54}$	1,8160	1,8098	0,1460	1,6117	1,8196	2,0501
$u_{55}$	1,9670	1,9982	0,1445	1,7976	2,0072	2,2392
$u_{56}$	2,1450	2,1741	0,1605	1,9477	2,1774	2,4309
$u_{57}$	2,3680	2,4328	0,1644	2,1991	2,4377	2,6786
$u_{58}$	2,7260	2,7102	0,1607	2,5005	2,7144	2,9630
$u_{59}$	3,1810	3,1700	0,1534	2,9528	3,1525	3,3896
$u_{60}$	4,0350	4,0895	0,2110	3,8003	4,0370	4,2976

A Tabela 3.4 apresenta um resumo das distribuições a posteriori para cada parâmetro obtido no estudo de simulação para o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição normal (3.9).

Tabela 3.4 – Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição normal

(continua)

Par.	V. verd.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$\beta_0$	0,5000	0,5669	0,0100	0,4408	0,5557	0,6655
$\beta_1$	0,3000	0,2997	0,0144	0,2911	0,2997	0,3082
$\beta_2$	0,7000	0,6989	0,0139	0,6721	0,6987	0,7267
$P$	0,8000	1,1100	0,3014	0,6620	1,0638	1,7956
$\theta$	0,0500	1,2676	0,3274	0,7246	1,2346	1,9888
$\sigma_v^2$	1,0000	0,0499	0,0041	0,0425	0,0497	0,0586
$u_1$	0,0070	0,0756	0,0460	0,0241	0,0643	0,1740
$u_2$	0,0150	0,0831	0,0464	0,0287	0,0722	0,1822
$u_3$	0,0230	0,0907	0,0462	0,0373	0,0797	0,1895
$u_4$	0,0320	0,0997	0,0461	0,0473	0,0885	0,1982
$u_5$	0,0430	0,1095	0,0461	0,0568	0,0983	0,2080
$u_6$	0,0520	0,1187	0,0464	0,0645	0,1078	0,2177
$u_7$	0,0640	0,1314	0,0463	0,0775	0,1204	0,2303
$u_8$	0,0760	0,1427	0,0466	0,0872	0,1321	0,2421
$u_9$	0,0900	0,1556	0,0462	0,1026	0,1445	0,2543
$u_{10}$	0,1020	0,1651	0,0461	0,1126	0,1539	0,2636
$u_{11}$	0,1150	0,1776	0,0461	0,1247	0,1665	0,2762
$u_{12}$	0,1290	0,1915	0,0465	0,1363	0,1807	0,2906
$u_{13}$	0,1440	0,2074	0,0463	0,1532	0,1964	0,3062
$u_{14}$	0,1600	0,2219	0,0462	0,1684	0,2109	0,3207
$u_{15}$	0,1790	0,2411	0,0463	0,1871	0,2301	0,3400
$u_{16}$	0,1970	0,2573	0,0462	0,2041	0,2463	0,3560
$u_{17}$	0,2100	0,2706	0,0462	0,2170	0,2595	0,3693
$u_{18}$	0,2250	0,2843	0,0463	0,2301	0,2734	0,3832
$u_{19}$	0,2420	0,2993	0,0461	0,2467	0,2881	0,3979
$u_{20}$	0,2650	0,3232	0,0461	0,2703	0,3120	0,4218
$u_{21}$	0,2860	0,3418	0,0461	0,2890	0,3307	0,4404
$u_{22}$	0,3050	0,3656	0,0461	0,3125	0,3545	0,4642
$u_{23}$	0,3240	0,3832	0,0461	0,3302	0,3720	0,4818
$u_{24}$	0,3460	0,4053	0,0461	0,3525	0,3941	0,5038
$u_{25}$	0,3670	0,4260	0,0462	0,3726	0,4149	0,5247
$u_{26}$	0,3870	0,4435	0,0461	0,3906	0,4324	0,5421
$u_{27}$	0,4090	0,4688	0,0461	0,4160	0,4577	0,5674
$u_{28}$	0,4340	0,4917	0,0462	0,4385	0,4806	0,5903
$u_{29}$	0,4580	0,5233	0,0462	0,4699	0,5122	0,6220
$u_{30}$	0,4820	0,5430	0,0462	0,4897	0,5319	0,6416

Tabela 3.4 - Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição normal

Par.	V. Verd.	Média	d.p.	(conclusão)		
				2,5%	50%	97,5%
$u_{31}$	0,5130	0,5719	0,0462	0,5182	0,5609	0,6707
$u_{32}$	0,5450	0,6017	0,0461	0,5486	0,5906	0,7003
$u_{33}$	0,5760	0,6314	0,0464	0,5770	0,6206	0,7304
$u_{34}$	0,6000	0,6532	0,0467	0,5974	0,6426	0,7526
$u_{35}$	0,6300	0,6876	0,0462	0,6342	0,6766	0,7863
$u_{36}$	0,6630	0,7228	0,0461	0,6696	0,7118	0,8214
$u_{37}$	0,6980	0,7584	0,0475	0,6989	0,7485	0,8590
$u_{38}$	0,7300	0,7951	0,0465	0,7398	0,7845	0,8944
$u_{39}$	0,7690	0,8285	0,0464	0,7736	0,8177	0,9275
$u_{40}$	0,8210	0,8809	0,0461	0,8276	0,8698	0,9794
$u_{41}$	0,8660	0,9318	0,0461	0,8781	0,9209	1,0305
$u_{42}$	0,9160	0,9801	0,0462	0,9267	0,9692	1,0787
$u_{43}$	0,9550	1,0180	0,0461	0,9645	1,0071	1,1166
$u_{44}$	1,0060	1,0809	0,0464	1,0262	1,0701	1,1798
$u_{45}$	1,0630	1,1431	0,0462	1,0891	1,1322	1,2420
$u_{46}$	1,1140	1,1975	0,0462	1,1434	1,1867	1,2961
$u_{47}$	1,1710	1,2593	0,0463	1,2049	1,2483	1,3580
$u_{48}$	1,2450	1,3256	0,0464	1,2708	1,3149	1,4245
$u_{49}$	1,3240	1,4051	0,0464	1,3502	1,3944	1,5040
$u_{50}$	1,4060	1,4885	0,0468	1,4314	1,4781	1,5879
$u_{51}$	1,4860	1,5583	0,0464	1,5031	1,5477	1,6572
$u_{52}$	1,5980	1,6783	0,0467	1,6214	1,6678	1,7775
$u_{53}$	1,7280	1,8091	0,0470	1,7512	1,7989	1,9088
$u_{54}$	1,8160	1,9063	0,0467	1,8490	1,8959	2,0056
$u_{55}$	1,9670	2,0436	0,0470	1,9848	2,0335	2,1432
$u_{56}$	2,1450	2,2267	0,0475	2,1653	2,2171	2,3270
$u_{57}$	2,3680	2,4658	0,0488	2,4001	2,4567	2,5681
$u_{58}$	2,7260	2,8230	0,0498	2,7545	2,8141	2,9272
$u_{59}$	3,1810	3,2811	0,0541	3,1992	3,2736	3,3941
$u_{60}$	4,0350	3,9148	0,0935	3,7656	3,9048	4,1178

A Tabela 3.5 apresenta um resumo a posteriori para cada parâmetro obtido no estudo de simulação para o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson (3.11).



Tabela 3.5 – Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson

(continua)

Par.	V. verd.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$\beta_0$	0,5000	0,5185	0,1539	0,4603	0,5117	0,6170
$\beta_1$	0,3000	0,2811	0,1157	0,0684	0,2785	0,5133
$\beta_2$	0,7000	0,6961	0,1921	0,3234	0,6924	1,0905
$P$	0,8000	0,8492	0,2424	0,5375	0,8654	1,4750
$\theta$	1,0000	1,1044	0,2977	0,6315	1,0994	1,7923
$u_1$	0,0070	0,0461	0,0438	0,0008	0,0340	0,1594
$u_2$	0,0150	0,0486	0,0454	0,0016	0,0361	0,1666
$u_3$	0,0230	0,0610	0,0469	0,0030	0,0513	0,1752
$u_4$	0,0320	0,0630	0,0495	0,0027	0,0524	0,1850
$u_5$	0,0430	0,0721	0,0489	0,0072	0,0635	0,1885
$u_6$	0,0520	0,0847	0,0545	0,0095	0,0758	0,2133
$u_7$	0,0640	0,0830	0,0533	0,0091	0,0742	0,2095
$u_8$	0,0760	0,0972	0,0637	0,0119	0,0857	0,2505
$u_9$	0,0900	0,1159	0,0549	0,0289	0,1101	0,2389
$u_{10}$	0,1020	0,1198	0,0577	0,0304	0,1128	0,2511
$u_{11}$	0,1150	0,1177	0,0603	0,0249	0,1105	0,2537
$u_{12}$	0,1290	0,1482	0,0742	0,0279	0,1414	0,3102
$u_{13}$	0,1440	0,1719	0,0711	0,0501	0,1671	0,3236
$u_{14}$	0,1600	0,1744	0,0586	0,0743	0,1698	0,3031
$u_{15}$	0,1790	0,1963	0,0639	0,0840	0,1922	0,3342
$u_{16}$	0,1970	0,2177	0,0597	0,1132	0,2137	0,3468
$u_{17}$	0,2100	0,2179	0,0650	0,1039	0,2136	0,3586
$u_{18}$	0,2250	0,2328	0,0700	0,1105	0,2278	0,3849
$u_{19}$	0,2420	0,2592	0,0608	0,1522	0,2553	0,3903
$u_{20}$	0,2650	0,2727	0,0601	0,1667	0,2689	0,4020
$u_{21}$	0,2860	0,2932	0,0615	0,1837	0,2895	0,4252
$u_{22}$	0,3050	0,3203	0,0729	0,1869	0,3170	0,4738
$u_{23}$	0,3240	0,3295	0,0611	0,2206	0,3258	0,4606
$u_{24}$	0,3460	0,3615	0,0688	0,2377	0,3576	0,5083
$u_{25}$	0,3670	0,3796	0,0620	0,2697	0,3758	0,5129
$u_{26}$	0,3870	0,4106	0,0626	0,2986	0,4069	0,5443
$u_{27}$	0,4090	0,4204	0,0638	0,3057	0,4169	0,5565
$u_{28}$	0,4340	0,4409	0,0660	0,3225	0,4372	0,5817
$u_{29}$	0,4580	0,4741	0,0624	0,3625	0,4705	0,6073
$u_{30}$	0,4820	0,5040	0,0637	0,3899	0,5004	0,6397
$u_{31}$	0,5130	0,5151	0,0658	0,3976	0,5112	0,6560

Tabela 3.5 - Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson

Par.	V. Verd.	Média	d.p.	(conclusão)		
				2,5%	50%	97,5%
$u_{32}$	0,5450	0,5594	0,0658	0,4407	0,5559	0,6991
$u_{33}$	0,5760	0,5937	0,0676	0,4746	0,5892	0,7400
$u_{34}$	0,6000	0,6095	0,0754	0,4775	0,6042	0,7739
$u_{35}$	0,6300	0,6409	0,0692	0,5159	0,6374	0,7873
$u_{36}$	0,6630	0,6739	0,0793	0,5295	0,6700	0,8413
$u_{37}$	0,6980	0,7016	0,1042	0,5233	0,6927	0,9339
$u_{38}$	0,7300	0,7478	0,0741	0,6177	0,7427	0,9090
$u_{39}$	0,7690	0,7823	0,0721	0,6543	0,7777	0,9375
$u_{40}$	0,8210	0,8313	0,0729	0,6979	0,8279	0,9843
$u_{41}$	0,8660	0,8875	0,0881	0,7257	0,8838	1,0717
$u_{42}$	0,9160	0,9321	0,0750	0,7944	0,9289	1,0889
$u_{43}$	0,9550	0,9687	0,0768	0,8276	0,9656	1,1294
$u_{44}$	1,0060	1,0364	0,0857	0,8761	1,0338	1,2124
$u_{45}$	1,0630	1,0752	0,0789	0,9291	1,0723	1,2387
$u_{46}$	1,1140	1,1231	0,0771	0,9805	1,1201	1,2833
$u_{47}$	1,1710	1,2003	0,0848	1,0427	1,1974	1,3758
$u_{48}$	1,2450	1,2710	0,0816	1,1203	1,2679	1,4408
$u_{49}$	1,3240	1,3314	0,0833	1,1769	1,3283	1,5038
$u_{50}$	1,4060	1,4021	0,0937	1,2331	1,3971	1,6011
$u_{51}$	1,4860	1,5174	0,0903	1,3486	1,5145	1,7030
$u_{52}$	1,5980	1,5985	0,0985	1,4180	1,5942	1,8047
$u_{53}$	1,7280	1,7501	0,1017	1,5639	1,7456	1,9637
$u_{54}$	1,8160	1,8335	0,1019	1,6422	1,8306	2,0420
$u_{55}$	1,9670	1,9858	0,1118	1,7760	1,9825	2,2144
$u_{56}$	2,1450	2,1583	0,1307	1,9125	2,1545	2,4254
$u_{57}$	2,3680	2,4163	0,1502	2,1329	2,4124	2,7216
$u_{58}$	2,7260	2,7377	0,1506	2,4563	2,7328	3,0468
$u_{59}$	3,1810	3,2112	0,1972	2,8464	3,2035	3,6193
$u_{60}$	4,0350	3,9680	0,3355	3,3758	3,9457	4,6885

A Tabela 3.6 apresenta um resumo a posteriori para cada parâmetro obtido no estudo de simulação para o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa (3.13).

Os valores estimados dos parâmetros no modelos generalizados de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal e para  $Y_{it}|u_i$  com distribuições gama, normal, Poisson e binomial negativa estão próximos do valor verdadeiro.

Tabela 3.6 – Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa

(continua)						
Par.	V. verd.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$\beta_0$	0,5000	0,5283	0,1848	0,3871	0,5164	0,7401
$\beta_1$	0,3000	0,2669	0,1627	0,1145	0,3159	0,7044
$\beta_2$	0,7000	0,7628	0,4206	0,0905	0,7765	1,6398
$P$	0,8000	0,8758	0,3697	0,4431	0,8532	1,7848
$\theta$	1,0000	1,0898	0,3665	0,5441	1,0499	1,8522
$u_1$	0,0070	0,1122	0,0988	0,0037	0,0854	0,3566
$u_2$	0,0150	0,1311	0,1132	0,0048	0,1052	0,4055
$u_3$	0,0230	0,1354	0,1098	0,0040	0,1118	0,3969
$u_4$	0,0320	0,1298	0,1087	0,0064	0,1047	0,3929
$u_5$	0,0430	0,1371	0,1086	0,0052	0,1135	0,3896
$u_6$	0,0520	0,1288	0,1096	0,0040	0,1045	0,3920
$u_7$	0,0640	0,1557	0,1180	0,0116	0,1303	0,4325
$u_8$	0,0760	0,1709	0,1339	0,0090	0,1422	0,4906
$u_9$	0,0900	0,1561	0,1206	0,0075	0,1333	0,4296
$u_{10}$	0,1020	0,1833	0,1253	0,0096	0,1572	0,4631
$u_{11}$	0,1150	0,1658	0,1238	0,0077	0,1391	0,4548
$u_{12}$	0,1290	0,2084	0,1377	0,0158	0,1825	0,5150
$u_{13}$	0,1440	0,2226	0,1423	0,0178	0,2042	0,5305
$u_{14}$	0,1600	0,2415	0,1406	0,0290	0,2151	0,5427
$u_{15}$	0,1790	0,2268	0,1425	0,0271	0,2083	0,5324
$u_{16}$	0,1970	0,2372	0,1418	0,0308	0,2208	0,5422
$u_{17}$	0,2100	0,2291	0,1488	0,0237	0,2086	0,5509
$u_{18}$	0,2250	0,2291	0,1502	0,0192	0,2071	0,5626
$u_{19}$	0,2420	0,2663	0,1510	0,0353	0,2571	0,5846
$u_{20}$	0,2650	0,2772	0,1515	0,0377	0,2630	0,5968
$u_{21}$	0,2860	0,2923	0,1494	0,0576	0,2727	0,6024
$u_{22}$	0,3050	0,3319	0,1684	0,0656	0,3188	0,6589
$u_{23}$	0,3240	0,3369	0,1605	0,0786	0,3254	0,6668
$u_{24}$	0,3460	0,3488	0,1640	0,0808	0,3293	0,6799
$u_{25}$	0,3670	0,3812	0,1657	0,0900	0,3685	0,7129
$u_{26}$	0,3870	0,3955	0,1708	0,1014	0,3834	0,7223
$u_{27}$	0,4090	0,4184	0,1680	0,1245	0,4101	0,7490
$u_{28}$	0,4340	0,4211	0,1757	0,1140	0,4073	0,7626
$u_{29}$	0,4580	0,4736	0,1694	0,1630	0,4724	0,8032
$u_{30}$	0,4820	0,4533	0,1728	0,1510	0,4437	0,7891
$u_{31}$	0,5130	0,4954	0,1830	0,1709	0,4887	0,8411
$u_{32}$	0,5450	0,5406	0,1815	0,2291	0,5326	0,8860
$u_{33}$	0,5760	0,6050	0,1830	0,2697	0,5987	0,9558
$u_{34}$	0,6000	0,6071	0,1946	0,2576	0,5969	0,9791
$u_{35}$	0,6300	0,6467	0,1836	0,3130	0,6385	0,9928

Tabela 3.6 - Resumo a posteriori para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa

Par.	V. Verd.	Média	d.p.	(conclusão)		
				2,5%	50%	97,5%
$u_{36}$	0,6630	0,6431	0,1962	0,2880	0,6362	1,0111
$u_{37}$	0,6980	0,7378	0,2524	0,3027	0,7187	1,2272
$u_{38}$	0,7300	0,7088	0,1903	0,3619	0,7018	1,0804
$u_{39}$	0,7690	0,7639	0,1904	0,4220	0,7654	1,1269
$u_{40}$	0,8210	0,8572	0,1907	0,5242	0,8565	1,2062
$u_{41}$	0,8660	0,8284	0,2014	0,4731	0,8251	1,2248
$u_{42}$	0,9160	0,9366	0,1891	0,6039	0,9296	1,2800
$u_{43}$	0,9550	0,9639	0,1886	0,6377	0,9666	1,3161
$u_{44}$	1,0060	1,0569	0,1925	0,7145	1,0506	1,3958
$u_{45}$	1,0630	1,0482	0,1890	0,7123	1,0442	1,3836
$u_{46}$	1,1140	1,1095	0,1916	0,7779	1,0987	1,4435
$u_{47}$	1,1710	1,2202	0,1962	0,8716	1,2157	1,5617
$u_{48}$	1,2450	1,2693	0,1963	0,9259	1,2561	1,6163
$u_{49}$	1,3240	1,3917	0,1972	1,0499	1,3773	1,7316
$u_{50}$	1,4060	1,4409	0,2181	1,0636	1,4352	1,8384
$u_{51}$	1,4860	1,4762	0,1929	1,1327	1,4660	1,8234
$u_{52}$	1,5980	1,6494	0,2119	1,2720	1,6361	2,0397
$u_{53}$	1,7280	1,7653	0,2135	1,3881	1,7469	2,1492
$u_{54}$	1,8160	1,8218	0,2105	1,4827	1,8088	2,1843
$u_{55}$	1,9670	2,0099	0,2134	1,6493	1,9961	2,3880
$u_{56}$	2,1450	2,1547	0,2368	1,7607	2,1445	2,5681
$u_{57}$	2,3680	2,4241	0,2518	1,9971	2,4136	2,8377
$u_{58}$	2,7260	2,7354	0,2563	2,3037	2,7136	3,1658
$u_{59}$	3,1810	3,2562	0,3067	2,7833	3,2215	3,7812
$u_{60}$	4,0350	4,0371	0,4736	3,3469	4,0036	4,9370

Observa-se que a análise recuperou a informação relativa às quantidades de interesse em todos os modelos estudados. Omitiu-se os valores da estatística  $R$  do critério de convergência de Gelman e Rubin, pois encontrou-se valor aproximadamente igual a 1 para todos os parâmetros, o que indica convergência das cadeias.

Apresentam-se nas Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 os intervalos de credibilidade obtidos no estudo de simulação para os modelos generalizados de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal (3.5),  $Y_{it}|u_i$  com distribuição gama (3.7),  $Y_{it}|u_i$  com distribuição normal (3.9),  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson (3.11) e  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa (3.13), respectivamente. As linhas em preto são os intervalos de credibilidade que cobrem o valor verdadeiro e as linhas em vermelho são os intervalos de credibilidade que não cobrem o verdadeiro valor do parâmetro.

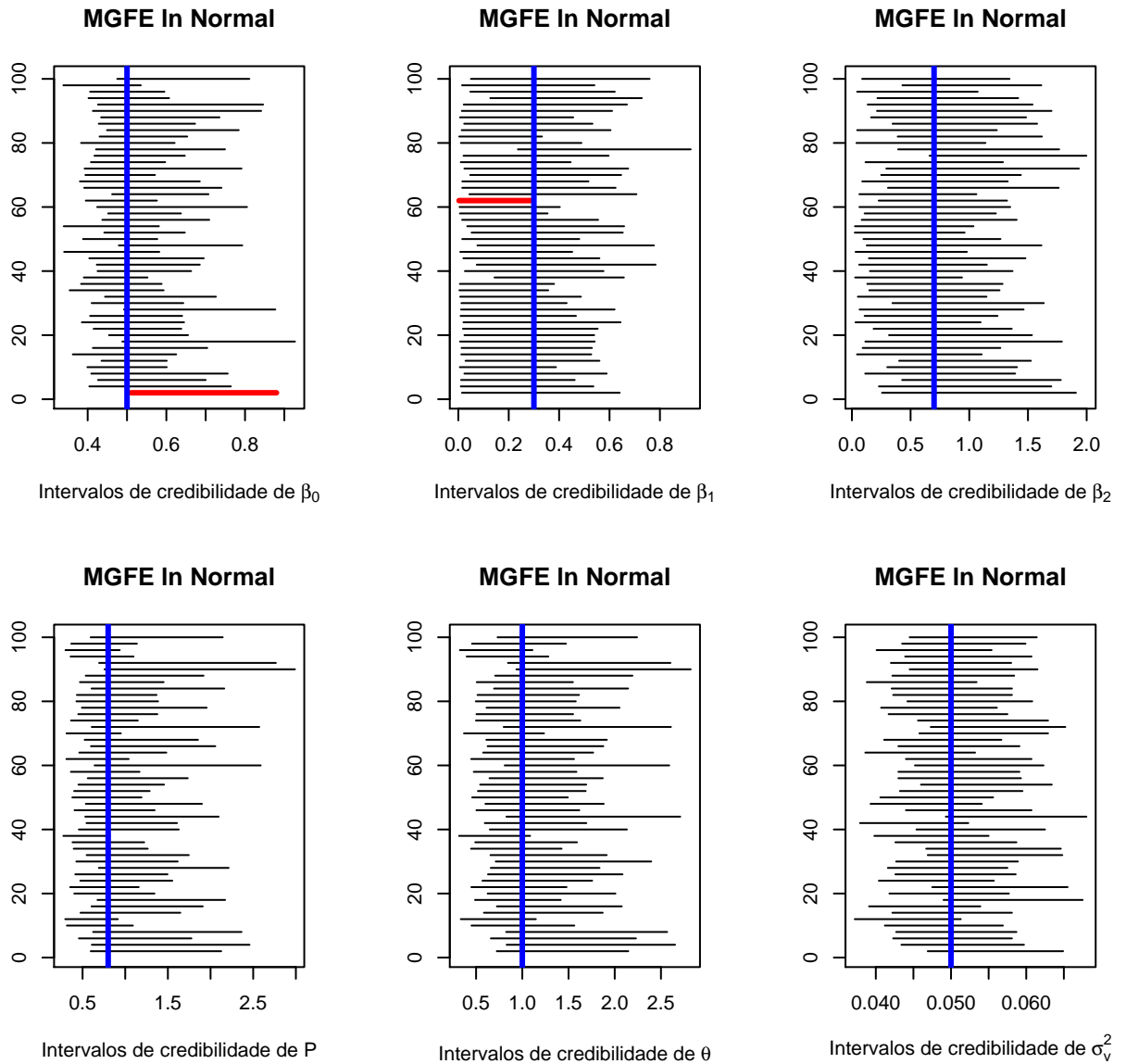


Figura 3.1 – Intervalos de credibilidade para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal

Para o modelo com  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal, observa-se que somente em duas amostras os intervalos de credibilidade não cobriram o valor verdadeiro de todos os parâmetros, sendo que um não cobre o valor verdadeiro de  $\beta_0$  e um não cobre o valor verdadeiro de  $\beta_1$ , mas isso não se dá simultaneamente.

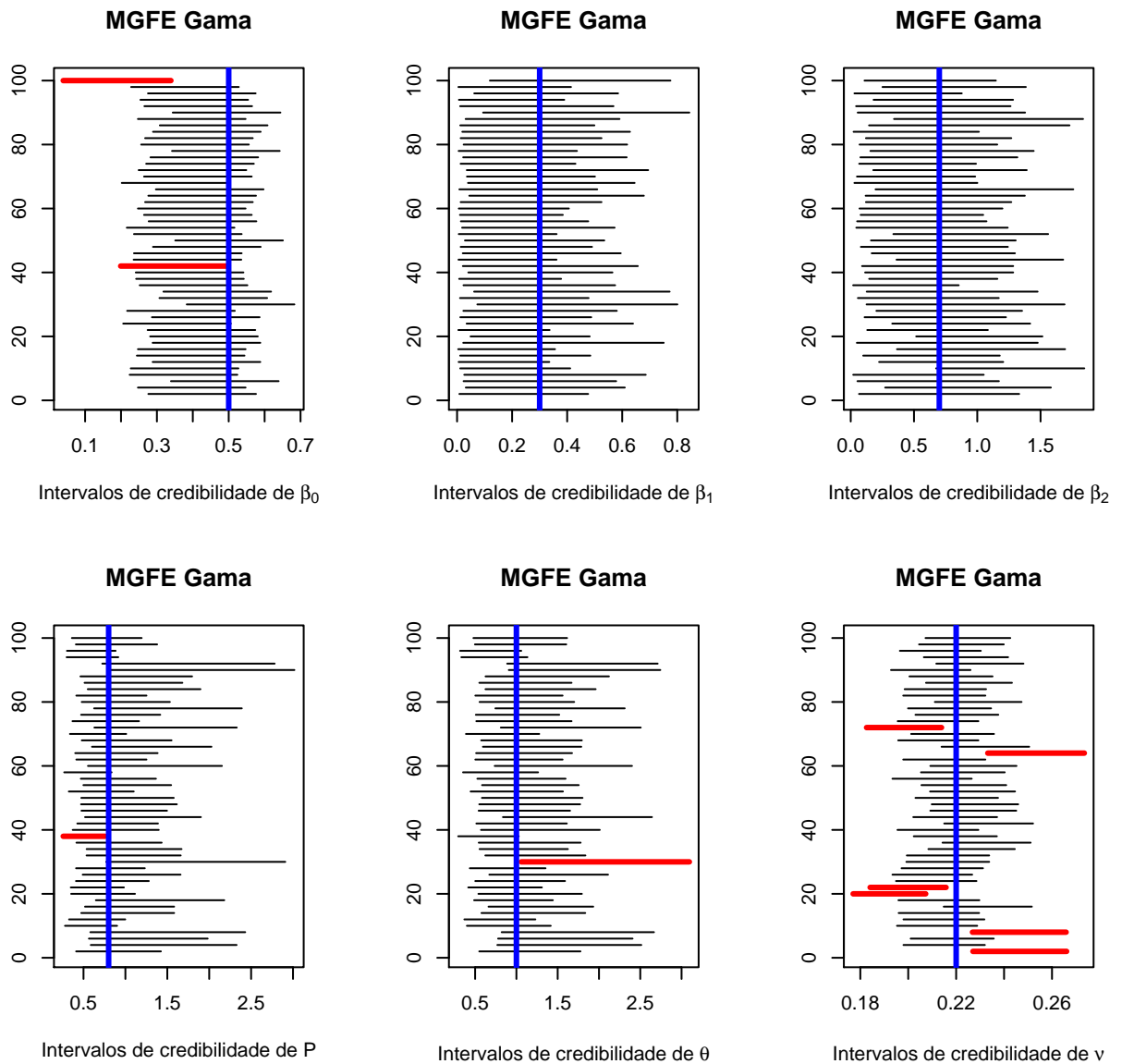


Figura 3.2 – Intervalos de credibilidade para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  distribuição gama

Para o modelo com  $Y_{it}|u_i$  distribuição gama, observa-se que somente dois intervalos não cobrem o valor verdadeiro de  $\beta_0$ , um intervalo não cobre o valor verdadeiro do parâmetro  $P$ , um intervalo não cobre o valor verdadeiro de  $\theta$  e seis intervalos não cobrem o valor verdadeiro de  $\nu$ , mas isso não se dá simultaneamente. Observa-se que o valor verdadeiro do parâmetro  $\nu$  é o mais difícil de ser recuperado neste modelo.

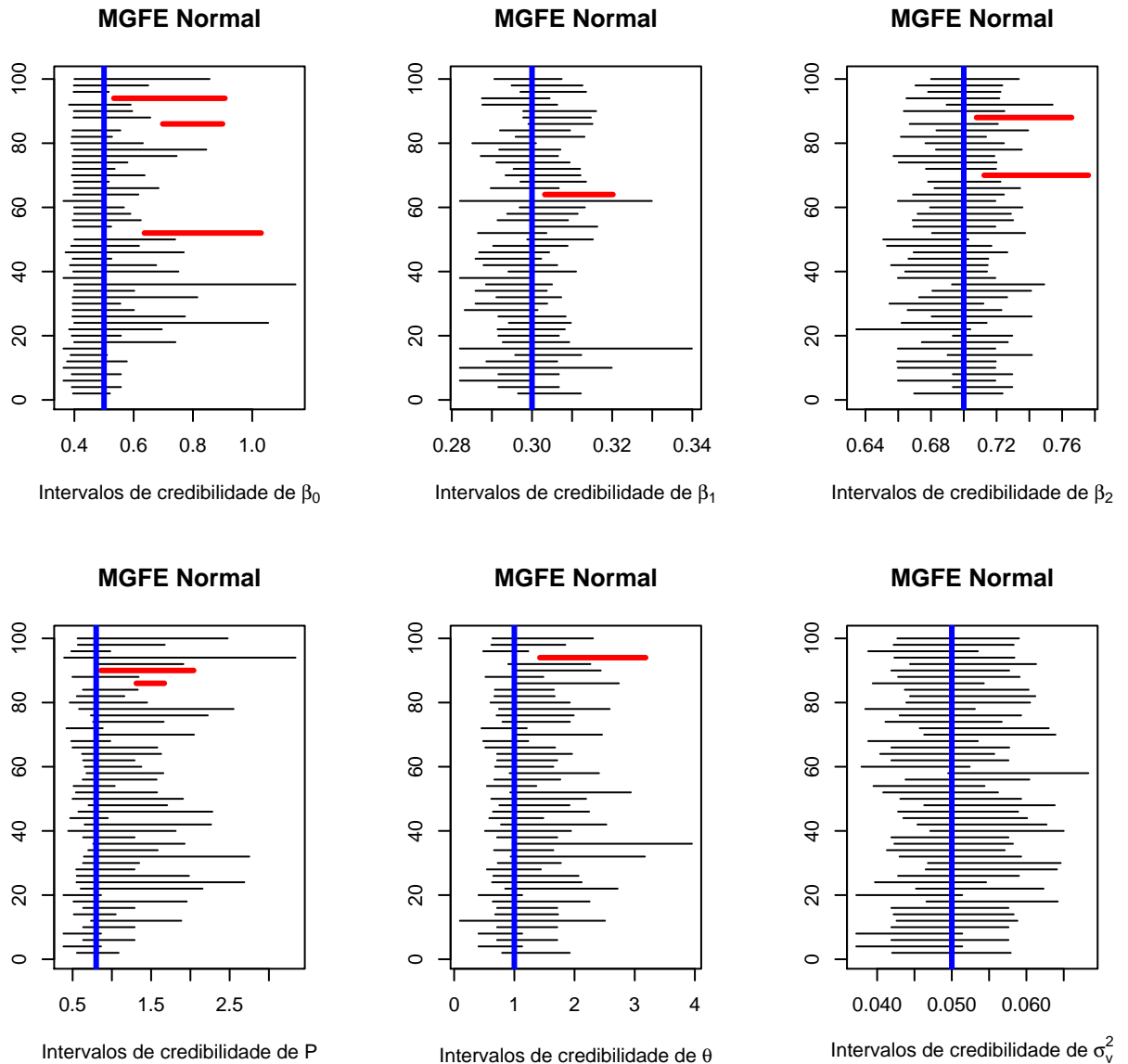


Figura 3.3 – Intervalos de credibilidade para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  distribuição normal

Para o modelo com  $Y_{it}|u_i$  distribuição normal, observa-se que três intervalos não cobrem o valor verdadeiro de  $\beta_0$ , um intervalo não cobre o valor verdadeiro do parâmetro  $\beta_1$ , dois intervalos não cobrem o valor verdadeiro de  $\beta_2$ , dois intervalos não cobrem o valor verdadeiro de  $P$  e um intervalo não cobre o valor verdadeiro de  $\theta$ . Apenas uma amostra não recuperou o valor verdadeiro de mais de um parâmetro ( $\beta_0$  e  $P$ ). Os outros intervalos que não cobrem o valor verdadeiro dos parâmetros não acontecem na mesma amostra.

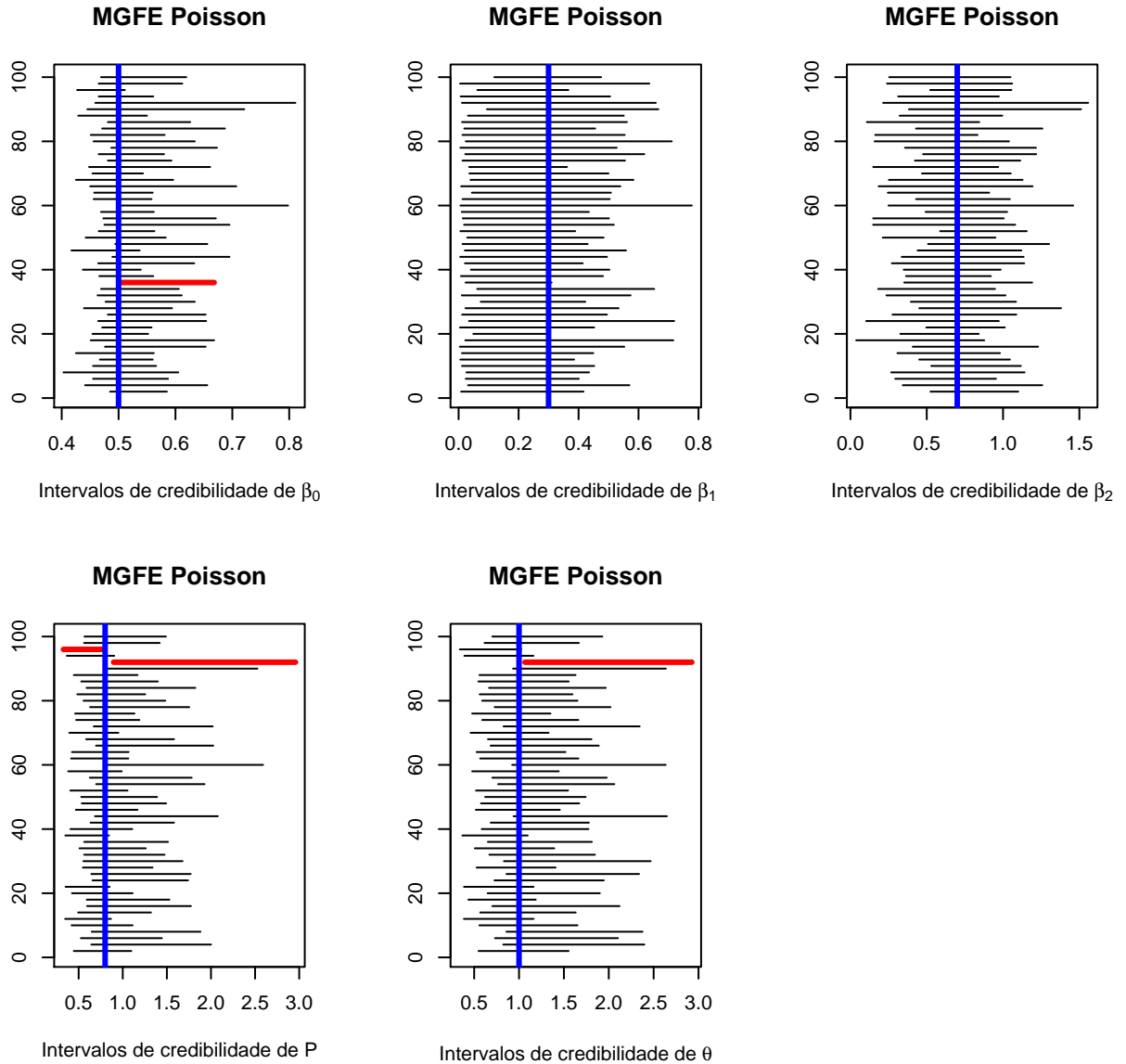


Figura 3.4 – Intervalos de credibilidade para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson

Para o modelo com  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson, observa-se que somente um intervalo não cobre o valor verdadeiro de  $\beta_0$ , dois intervalos não cobrem o valor verdadeiro de  $P$  e um intervalo não cobre o valor verdadeiro de  $\theta$ . Apenas uma amostra não cobriu o valor verdadeiro dos parâmetros  $P$  e  $\theta$  simultaneamente.

Para o modelo com  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa, observa-se que somente dois intervalos não cobrem o valor verdadeiro de  $\beta_0$ , um intervalo não cobre o valor verdadeiro do parâmetro  $\beta_1$ , um intervalo não cobre o valor verdadeiro do parâmetro  $\beta_2$ , um intervalo não cobre o valor verdadeiro de  $P$  e dois intervalos não cobrem o valor verdadeiro de  $\theta$ . Em uma amostra o



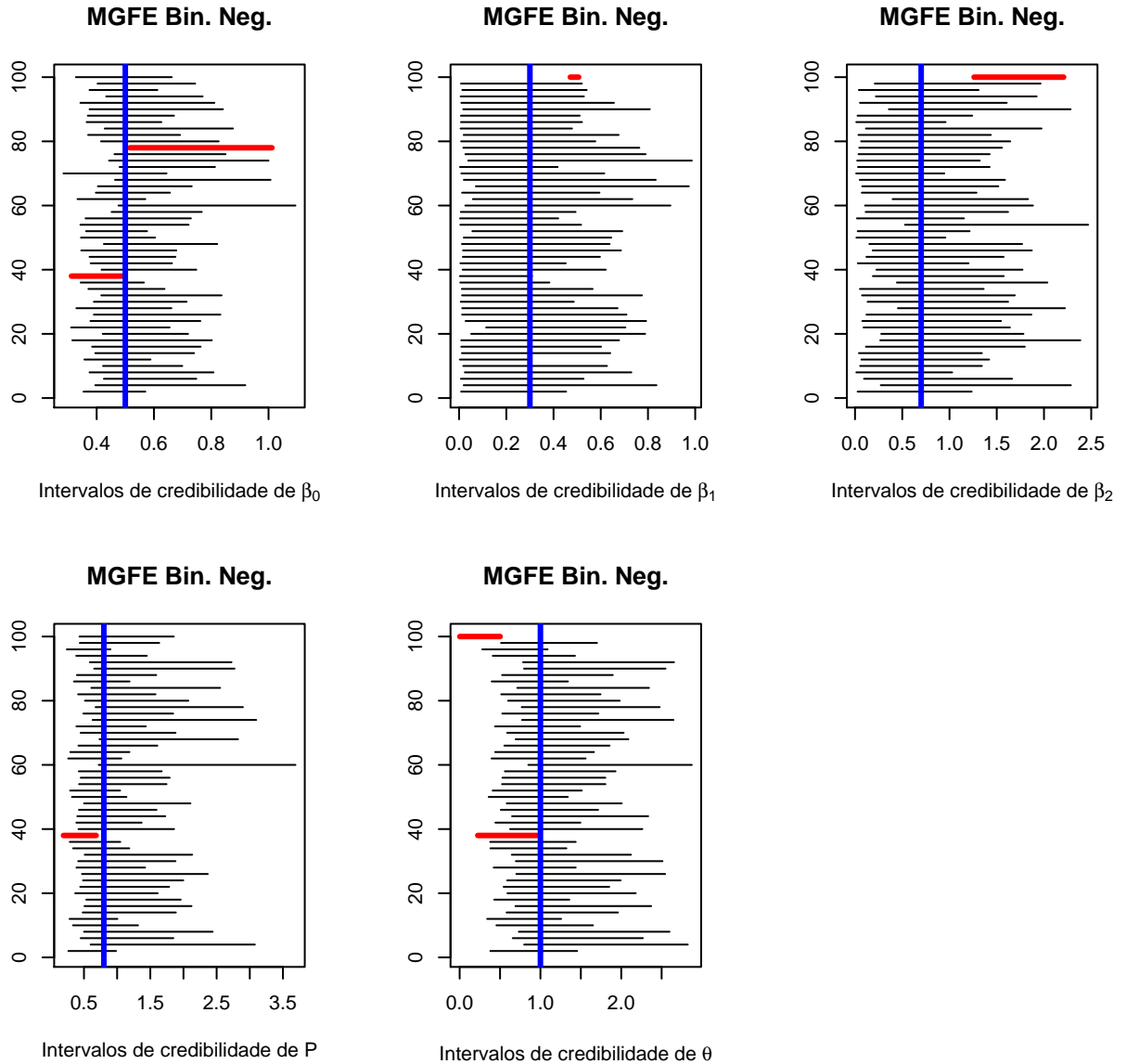


Figura 3.5 – Intervalos de credibilidade para os parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa

valor verdadeiro das quantidades de interesse  $\beta_1, \beta_2$  e  $\theta$  não foram recuperados e em outra o valor verdadeiro de  $\beta_0, P$  e  $\theta$  não foram recuperados, simultaneamente.

As Figuras 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10 apresentam os histogramas das médias a posteriori dos parâmetros obtidas nas 50 simulações para os modelos generalizados de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal (3.5),  $Y_{it}|u_i$  com distribuição gama (3.7),  $Y_{it}|u_i$  com distribuição normal (3.9),  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson (3.11) e  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa (3.13), respectivamente. A linha vertical azul representa o valor verdadeiro.

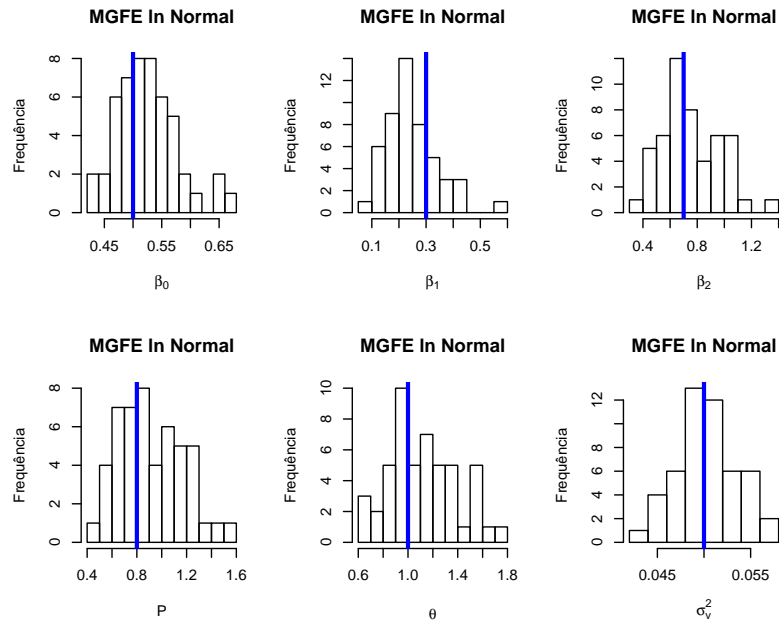


Figura 3.6 – Histogramas das médias a posteriori dos parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal

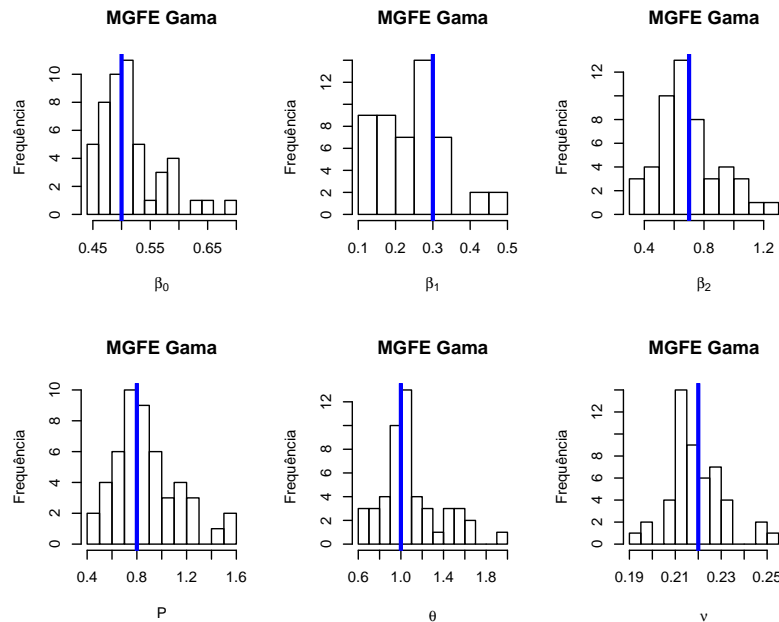


Figura 3.7 – Histogramas das médias a posteriori dos parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição gama

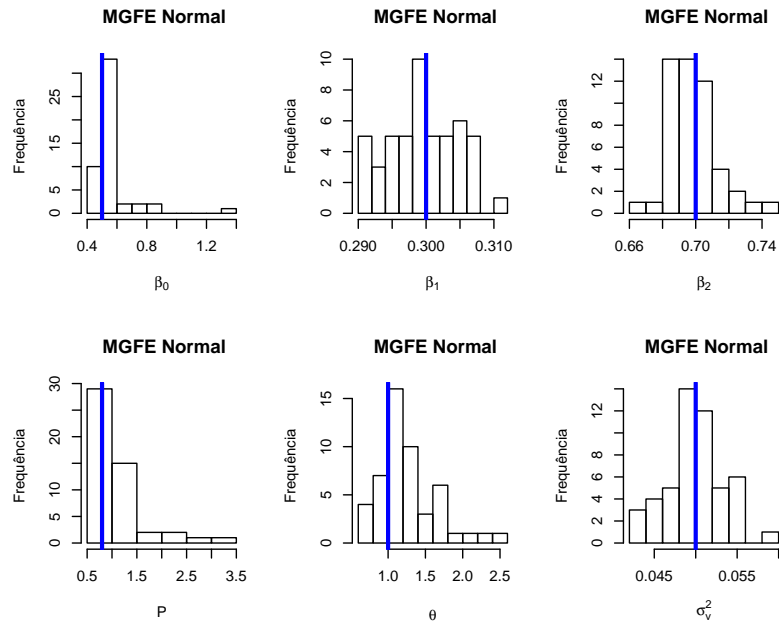


Figura 3.8 – Histogramas das médias a posteriori dos parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição normal

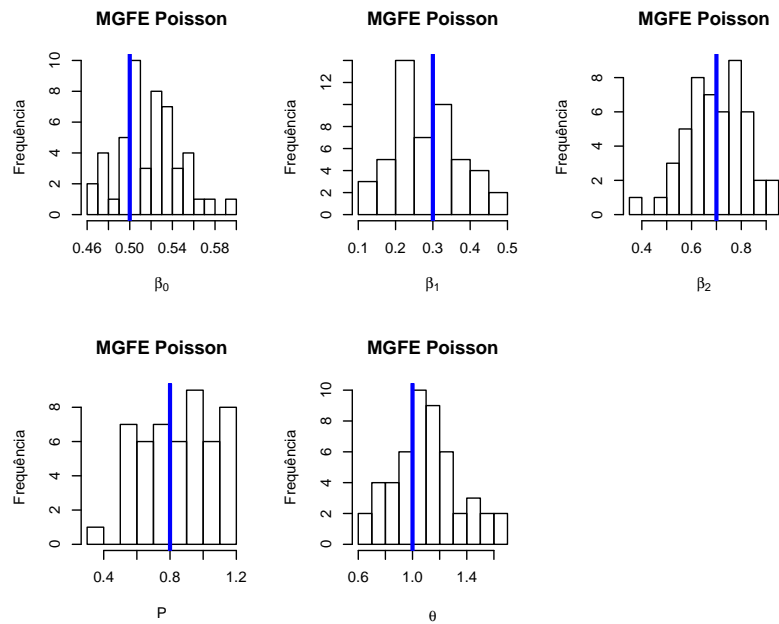


Figura 3.9 – Histogramas das médias a posteriori dos parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson

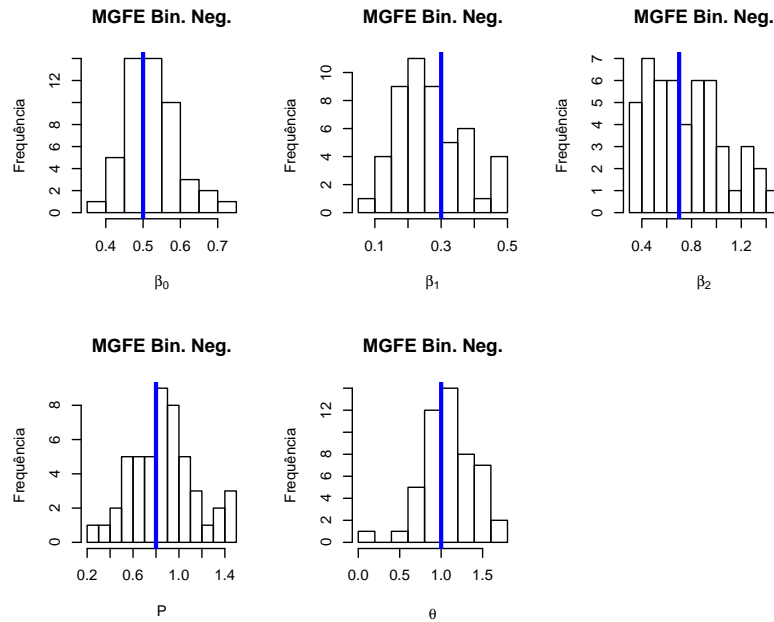


Figura 3.10 – Histogramas das médias a posteriori dos parâmetros do modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa

A Tabela 3.7 mostra a classificação da eficiência técnica das 60 firmas.

Observa-se que, para a maior parte das firmas, manteve-se a ordem de classificação da eficiência técnica nos modelos generalizados de fronteira estocástica e a estimativa das firmas menos eficientes está mais próxima do valor verdadeiro em todos os modelos. O modelo em que a estimativa das firmas mais eficientes está mais próxima do valor verdadeiro é o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição de Poisson.

Tabela 3.7 – Classificação da eficiência técnica das firmas para os modelos generalizados de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal e  $Y_{it}|u_i$  com distribuições gama, normal, Poisson e binomial negativa, respectivamente

(continua)

Parâmetro	Valor verd.	Média ln Normal	Média Gama	Média Normal	Média Poisson	Média Bin. neg.
$ET_1$	0,9930	0,9228	0,9195	0,9372	0,9549	0,8939
$ET_2$	0,9851	0,9112	0,9202	0,9301	0,9525	0,8771
$ET_3$	0,9773	0,9028	0,9086	0,9232	0,9409	0,8734
$ET_4$	0,9685	0,9077	0,9133	0,9148	0,9389	0,8783
$ET_5$	0,9579	0,9068	0,8901	0,9059	0,9304	0,8719
$ET_6$	0,9493	0,8861	0,8956	0,8981	0,9188	0,8792
$ET_7$	0,9380	0,8888	0,8997	0,8867	0,9203	0,8558
$ET_8$	0,9268	0,8905	0,8888	0,8766	0,9074	0,8429
$ET_9$	0,9139	0,8670	0,8859	0,8653	0,8906	0,8555
$ET_{10}$	0,9030	0,8733	0,8707	0,8574	0,8871	0,8325
$ET_{11}$	0,8914	0,8812	0,8880	0,8468	0,8890	0,8472
$ET_{12}$	0,8790	0,8372	0,8414	0,8355	0,8623	0,8119
$ET_{13}$	0,8659	0,8293	0,8386	0,8223	0,8421	0,8005
$ET_{14}$	0,8521	0,8510	0,8310	0,8104	0,8400	0,7854
$ET_{15}$	0,8361	0,8275	0,8252	0,7952	0,8218	0,7971
$ET_{16}$	0,8212	0,7980	0,8150	0,7824	0,8044	0,7888
$ET_{17}$	0,8106	0,8196	0,8117	0,7719	0,8042	0,7953
$ET_{18}$	0,7985	0,8070	0,8020	0,7613	0,7924	0,7953
$ET_{19}$	0,7851	0,7738	0,7772	0,7499	0,7717	0,7662
$ET_{20}$	0,7672	0,7739	0,7828	0,7327	0,7613	0,7579
$ET_{21}$	0,7513	0,7578	0,7503	0,7197	0,7459	0,7465
$ET_{22}$	0,7371	0,7467	0,7326	0,7028	0,7259	0,7175
$ET_{23}$	0,7233	0,7554	0,7171	0,6904	0,7193	0,7140
$ET_{24}$	0,7075	0,7277	0,7281	0,6752	0,6967	0,7056
$ET_{25}$	0,6928	0,6954	0,6776	0,6611	0,6841	0,6830
$ET_{26}$	0,6791	0,6963	0,6770	0,6497	0,6633	0,6733
$ET_{27}$	0,6643	0,6688	0,6609	0,6331	0,6568	0,6581
$ET_{28}$	0,6479	0,6624	0,6488	0,6188	0,6435	0,6563
$ET_{29}$	0,6325	0,6327	0,6290	0,5995	0,6225	0,6227
$ET_{30}$	0,6175	0,6297	0,6155	0,5877	0,6041	0,6355

Tabela 3.7 - Classificação da eficiência técnica das firmas para os modelos generalizados de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal e  $Y_{it}|u_i$  com distribuições gama, normal, Poisson e binomial negativa, respectivamente

teira  
son

Parâmetro	Valor verd.	(conclusão)				
		Média ln Normal	Média Gama	Média Normal	Média Poisson	Média Bin. neg.
$ET_{31}$	0,5987	0,6149	0,6117	0,5713	0,5975	0,6093
$ET_{32}$	0,5798	0,5831	0,5708	0,5550	0,5716	0,5824
$ET_{33}$	0,5621	0,5638	0,5713	0,5389	0,5523	0,5461
$ET_{34}$	0,5488	0,5503	0,5444	0,5276	0,5436	0,5449
$ET_{35}$	0,5326	0,5494	0,5390	0,5099	0,5268	0,5238
$ET_{36}$	0,5153	0,5379	0,5369	0,4928	0,5097	0,5256
$ET_{37}$	0,4976	0,5085	0,4911	0,4758	0,4958	0,4782
$ET_{38}$	0,4819	0,4855	0,4867	0,4582	0,4734	0,4922
$ET_{39}$	0,4635	0,4620	0,4696	0,4433	0,4574	0,4658
$ET_{40}$	0,4400	0,4576	0,4375	0,4212	0,4355	0,4243
$ET_{41}$	0,4206	0,4418	0,4291	0,4003	0,4117	0,4368
$ET_{42}$	0,4001	0,4097	0,3985	0,3820	0,3937	0,3920
$ET_{43}$	0,3848	0,3940	0,3776	0,3680	0,3796	0,3814
$ET_{44}$	0,3657	0,3627	0,3567	0,3457	0,3547	0,3475
$ET_{45}$	0,3454	0,3532	0,3431	0,3250	0,3412	0,3506
$ET_{46}$	0,3282	0,3390	0,3246	0,3083	0,3253	0,3297
$ET_{47}$	0,3101	0,3108	0,2985	0,2904	0,3011	0,2952
$ET_{48}$	0,2879	0,2940	0,2908	0,2714	0,2805	0,2810
$ET_{49}$	0,2661	0,2774	0,2700	0,2511	0,2641	0,2487
$ET_{50}$	0,2451	0,2546	0,2434	0,2313	0,2461	0,2367
$ET_{51}$	0,2263	0,2308	0,2252	0,2164	0,2193	0,2285
$ET_{52}$	0,2023	0,2120	0,1981	0,1924	0,2022	0,1922
$ET_{53}$	0,1776	0,1856	0,1757	0,1713	0,1738	0,1711
$ET_{54}$	0,1627	0,1684	0,1637	0,1551	0,1598	0,1617
$ET_{55}$	0,1399	0,1471	0,1356	0,1363	0,1373	0,1340
$ET_{56}$	0,1171	0,1238	0,1137	0,1141	0,1155	0,1159
$ET_{57}$	0,0937	0,1017	0,0878	0,0930	0,0893	0,0886
$ET_{58}$	0,0655	0,0737	0,0665	0,0679	0,0647	0,0649
$ET_{59}$	0,0415	0,0509	0,0420	0,0467	0,0403	0,0385
$ET_{60}$	0,0177	0,0251	0,0167	0,0268	0,0189	0,0176

As Figuras 3.11 e 3.12 apresentam os histogramas das médias a posteriori da ineficiência técnica das firmas que foram consideradas menos ineficientes e as mais ineficientes para os modelos generalizados de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal, e para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição gama, normal, Poisson e binomial negativa, respectivamente. A linha azul representa o valor verdadeiro.

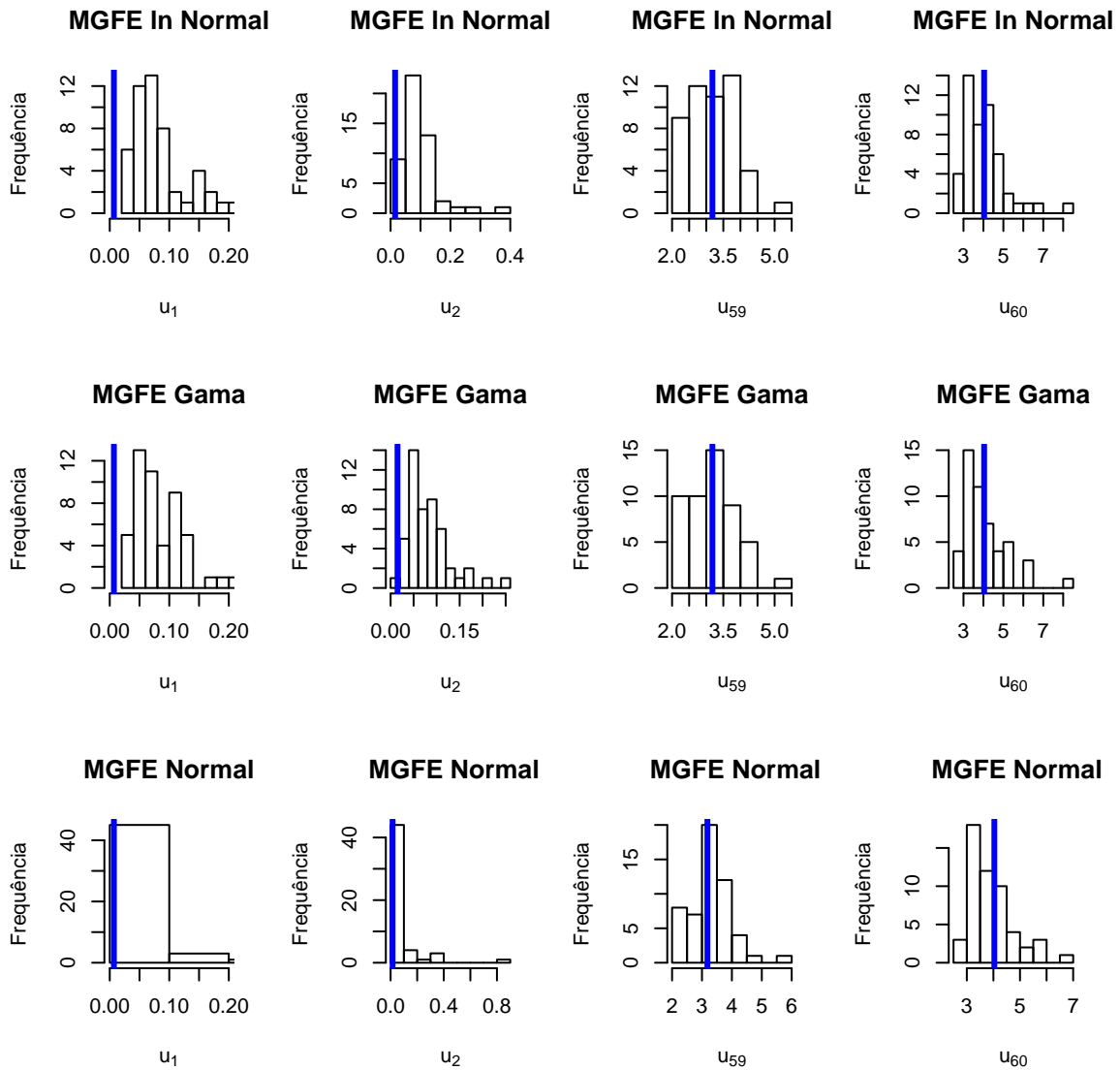


Figura 3.11 – Histograma da média a posteriori da ineficiência técnica de firmas menos ineficientes e mais ineficientes

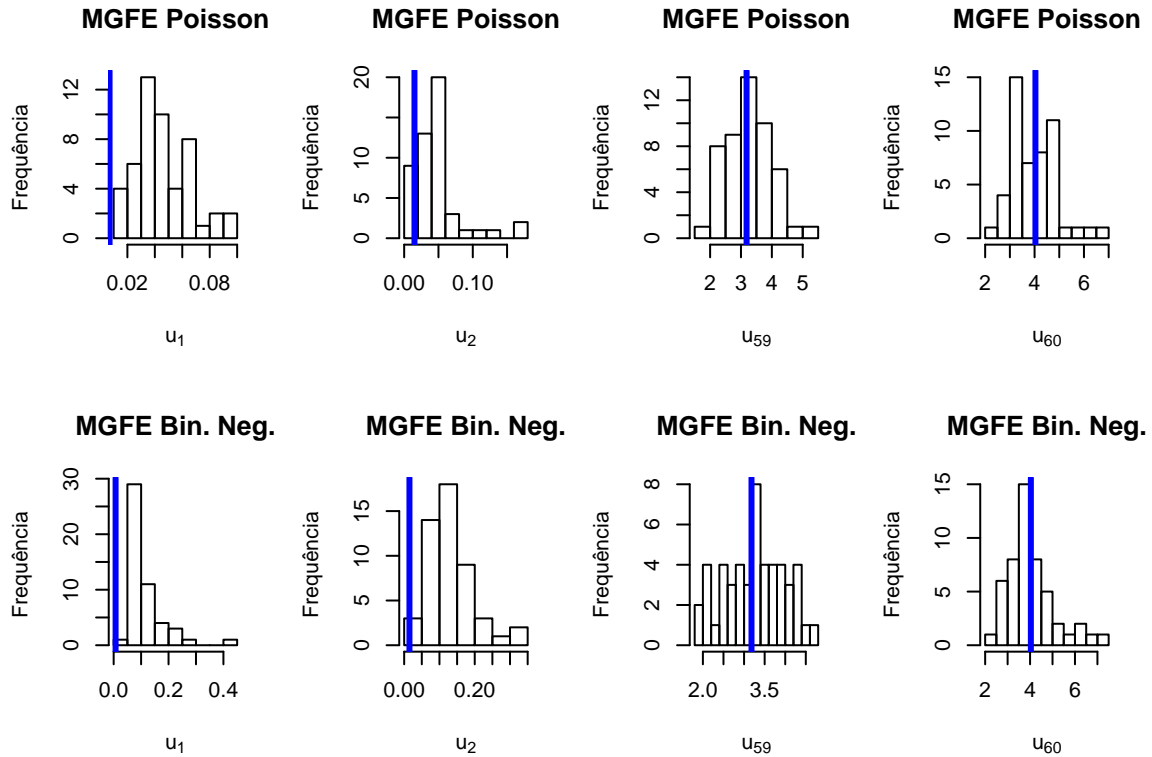


Figura 3.12 – Histograma da média a posteriori da ineficiência técnica de firmas menos ineficientes e mais ineficientes

A Figura 3.13 apresenta o gráfico da eficiência técnica estimada de cada firma versus a eficiência técnica verdadeira para os modelos para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal e para  $Y_{it}|u_i$  com distribuições gama, normal, Poisson e binomial negativa, respectivamente.

Observa-se que as estimativas das firmas menos eficientes estão mais próximas do valor verdadeiro que as firmas mais eficientes nos modelos generalizados de fronteira estocástica com distribuição normal, gama e binomial negativa. O modelo em que a estimativa das firmas mais eficientes está mais próxima do valor verdadeiro é o modelo generalizado de fronteira estocástica com distribuição de Poisson.



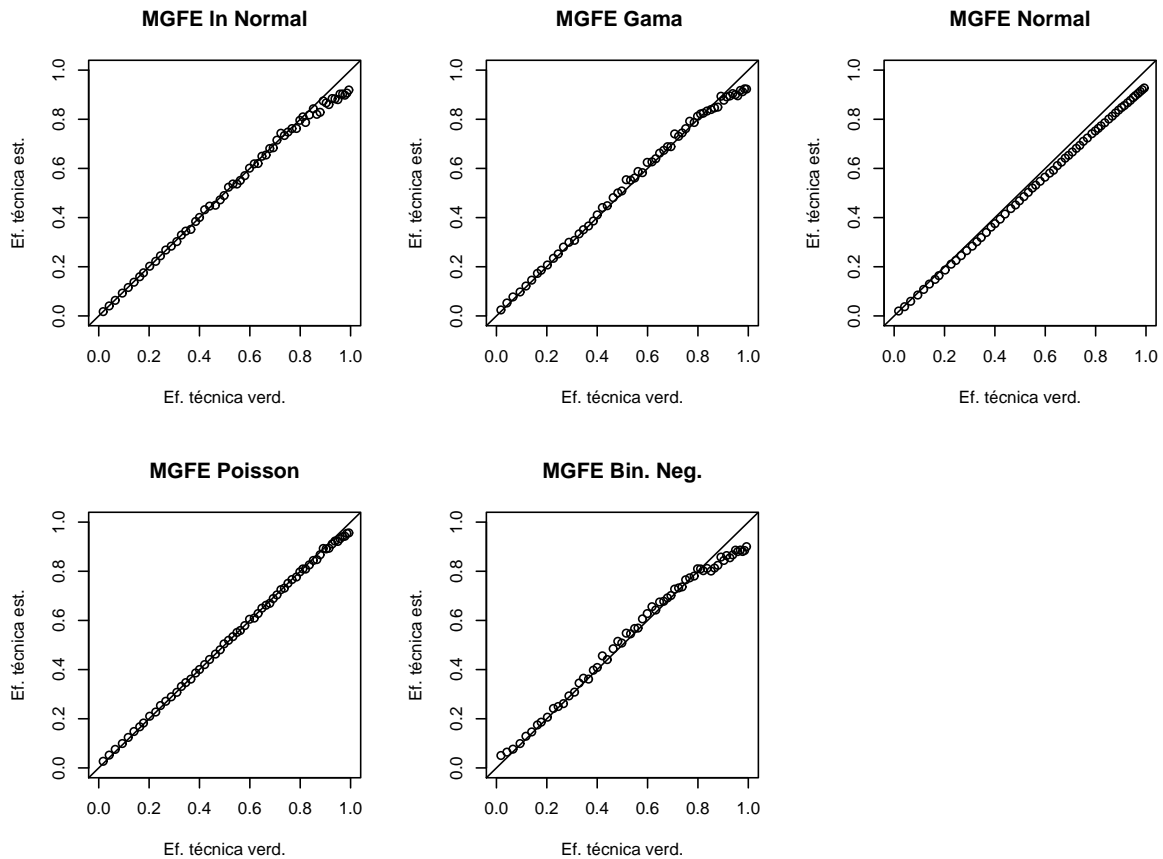


Figura 3.13 – Eficiência técnica estimada versus Eficiência técnica verdadeira

De maneira geral, verificou-se a validade dos modelos generalizados de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal e para  $Y_{it}|u_i$  com distribuições gama, normal, Poisson e binomial negativa. As estimativas das distribuições a posteriori dos parâmetros estão próximas do valor verdadeiro e manteve-se a classificação das firmas quanto a eficiência técnica.

### 3.6.2 Aplicação empírica

Os resultados desta seção referem-se a aplicação da metodologia proposta neste trabalho à dois conjuntos de dados: o primeiro refere-se a 7 vendedores de uma loja de autopeças, observados durante 6 meses, ou seja, são dados em painel de dimensão  $7 \times 6$  e as variáveis observadas referem-se a 1 produto e 4 insumos, em que a variável resposta é medida na forma de contagem. O segundo conjunto de dados é *cross-sectional* e refere-se a 55 filiais de uma instituição financeira, em que as variáveis medidas referem-se a 1 produto e 3 insumos, sendo a variável resposta também medida na forma de contagem.

### Vendedores de autopeças

A implementação computacional foi feita usando-se o programa Winbugs (LUNN et al., 2000) gerando uma cadeia com 90.000 valores para cada parâmetro, desprezando os primeiros 30.000 valores para o período de aquecimento da cadeia ("burn-in") e selecionando um a cada 5 dos 60.000 valores restantes ("thin"), formando uma amostra de 12.000 valores. Foram iniciadas três cadeias em pontos distintos e a convergência das estimativas dos parâmetros foi monitorada através do critério de convergência de Gelman e Rubin (1992), disponível no programa Winbugs (Apêndice F).

Os hiperparâmetros das distribuições a priori dos parâmetros  $\beta_s$  e  $\theta$  foram escolhidos de forma que as distribuições a priori são não informativas e considerou-se informação a priori para o parâmetro  $P$ . Os valores dos hiperparâmetros das distribuições a priori considerados nas análises encontram-se na Tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Hiperparâmetros das distribuições a priori dos parâmetros  $\beta, P, \theta$

Parâmetro	Hiperparâmetro	
$\beta_s$	$a_\beta = 0,00$	$\sigma_\beta^2 = 100,00$
$P$	$a_0 = 0,80$	$b_0 = 1,00$
$\theta$	$v_0 = 0,01$	$w_0 = 0,01$

As Tabelas 3.9 e 3.10 apresentam um resumo a posteriori para cada parâmetro obtido nos modelos generalizados de fronteira estocástica com  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson (3.11) e com binomial negativa (3.13), respectivamente.

A média e a variância da ineficiência técnica para o modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson são  $\mu_u = 0,3942$  e  $\sigma_u^2 = 0,1709$  e a média e a variância da ineficiência técnica para o modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa são  $\mu_u = 0,8866$  e  $\sigma_u^2 = 0,4882$ .

Tabela 3.9 – Resumo a posteriori para os parâmetros no modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson

Par.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$\beta_0$	-1,6260	0,6857	-2,7810	-1,6940	-0,1693
$\beta_1$	0,6743	0,0645	0,5373	0,6788	0,7854
$\beta_2$	0,1071	0,0881	0,0034	0,0845	0,3236
$\beta_3$	0,0103	0,0101	0,0003	0,0072	0,0375
$\beta_4$	3,2860	11,9700	0,0042	0,1173	48,0100
$P$	0,9094	0,8425	0,0880	0,6552	3,1800
$\theta$	2,3070	2,0340	0,0047	1,8470	7,4470
$u_1$	4,0990	12,0000	0,4751	0,9287	49,2600
$u_2$	3,7250	11,9800	0,2529	0,5480	48,6300
$u_3$	0,0795	0,1774	0,0000	0,0215	0,4940
$u_4$	0,1709	0,2129	0,0000	0,1239	0,6549
$u_5$	0,1335	0,2009	0,0000	0,0817	0,5964
$u_6$	3,4580	11,9800	0,0000	0,2669	48,4700
$u_7$	0,3687	0,1962	0,2023	0,3223	0,8236

Tabela 3.10 – Resumo a posteriori para os parâmetros no modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Binomial negativa

Par.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$\beta_0$	1,2060	5,0860	0,0116	0,3214	6,6030
$\beta_1$	0,5040	0,0799	0,3378	0,5088	0,6608
$\beta_2$	0,0831	0,1154	0,0019	0,0514	0,3349
$\beta_3$	0,0303	0,0308	0,0007	0,0208	0,1133
$\beta_4$	0,5751	2,0240	0,0055	0,1736	3,0850
$P$	1,6100	1,3070	0,1621	1,2530	5,0470
$\theta$	1,8160	1,4430	0,0768	1,4880	5,4850
$u_1$	2,9360	7,6480	0,8399	1,6140	18,7900
$u_2$	2,2860	7,6610	0,2379	0,9515	17,8700
$u_3$	1,2180	5,8550	0,0000	0,1624	8,9840
$u_4$	1,4350	5,8110	0,0007	0,4431	9,1940
$u_5$	1,3560	5,8240	0,0002	0,3457	9,1690
$u_6$	2,4650	7,4670	0,4475	1,1840	17,5300
$u_7$	1,5270	5,8470	0,0038	0,5290	9,3380

A Tabela 3.11 apresenta a classificação da eficiência técnica dos 7 funcionários da loja de autopeças.

Tabela 3.11 – Classificação da eficiência técnica dos funcionários da loja de autopeças para os modelos com  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson e binomial negativa, respectivamente

Parâmetro	Média Poisson	Média Bin. Neg.
$ET_1$	0,3687	0,2029
$ET_2$	0,5216	0,3848
$ET_3$	0,9346	0,7573
$ET_4$	0,8579	0,6168
$ET_5$	0,8887	0,6659
$ET_6$	0,6912	0,3088
$ET_7$	0,7019	0,5708

Observa-se na Tabela 3.11 que a ordem na classificação para a maioria dos funcionários se manteve nos dois modelos, observa-se apenas uma troca na posição do funcionário 2 com o funcionário 6 no modelo generalizado de fronteira estocástica com distribuição binomial negativa. Isto pode ter acontecido porque o funcionário 6 é o funcionário mais novo da empresa e ainda está em fase de adaptação. O vendedor número 3 é o mais eficiente e o número 1 é o menos eficiente nos dois modelos.

Avaliaram-se os ajustes dos modelos segundo o critério DIC (Apêndice G), os valores encontrados para os modelos com distribuição Poisson e binomial negativa são respectivamente 368, 474 e 379, 862. Segundo esse critério o modelo que melhor se ajusta aos dados é o com distribuição Poisson.

Para concluir a comparação dos modelos, as distribuições dos postos associados à medida de eficiência técnica são apresentados na Figura 3.14 (MEDRANO, 2006). Essas distribuições são diretamente obtidas utilizando as cadeias de Markov. Denota-se por  $ET_i^{(m)} = \exp(-u_i^{(m)})$  a medida de eficiência técnica para o  $i$ -ésimo funcionário na  $m$ -ésima iteração da cadeia de Markov, e ordenam-se os  $ET_i^{(m)}$  de forma que  $i = 1, \dots, N$ . Assim, o posto associado ao  $j$ -ésimo funcionário na  $m$ -ésima iteração é a posição ocupada pela  $ET_i^{(m)}$  na ordenação. O objetivo desta última análise é comparar a capacidade dos modelos em classificar os funcionários. Nota-se na Figura 3.14 que o modelo generalizado de fronteira estocástica com distribuição Poisson diferencia melhor as firmas eficientes das não eficientes. Por exemplo, comparando o lado direito da Figura 3.14 com o lado esquerdo, observa-se que a variabilidade da distribuição do posto da eficiência técnica para um vendedor considerado eficiente, 3, no modelo generalizado de fronteira estocástica com distribuição Poisson é menor do que utilizando o modelo generalizado de fronteira estocástica com distribuição binomial negativa.

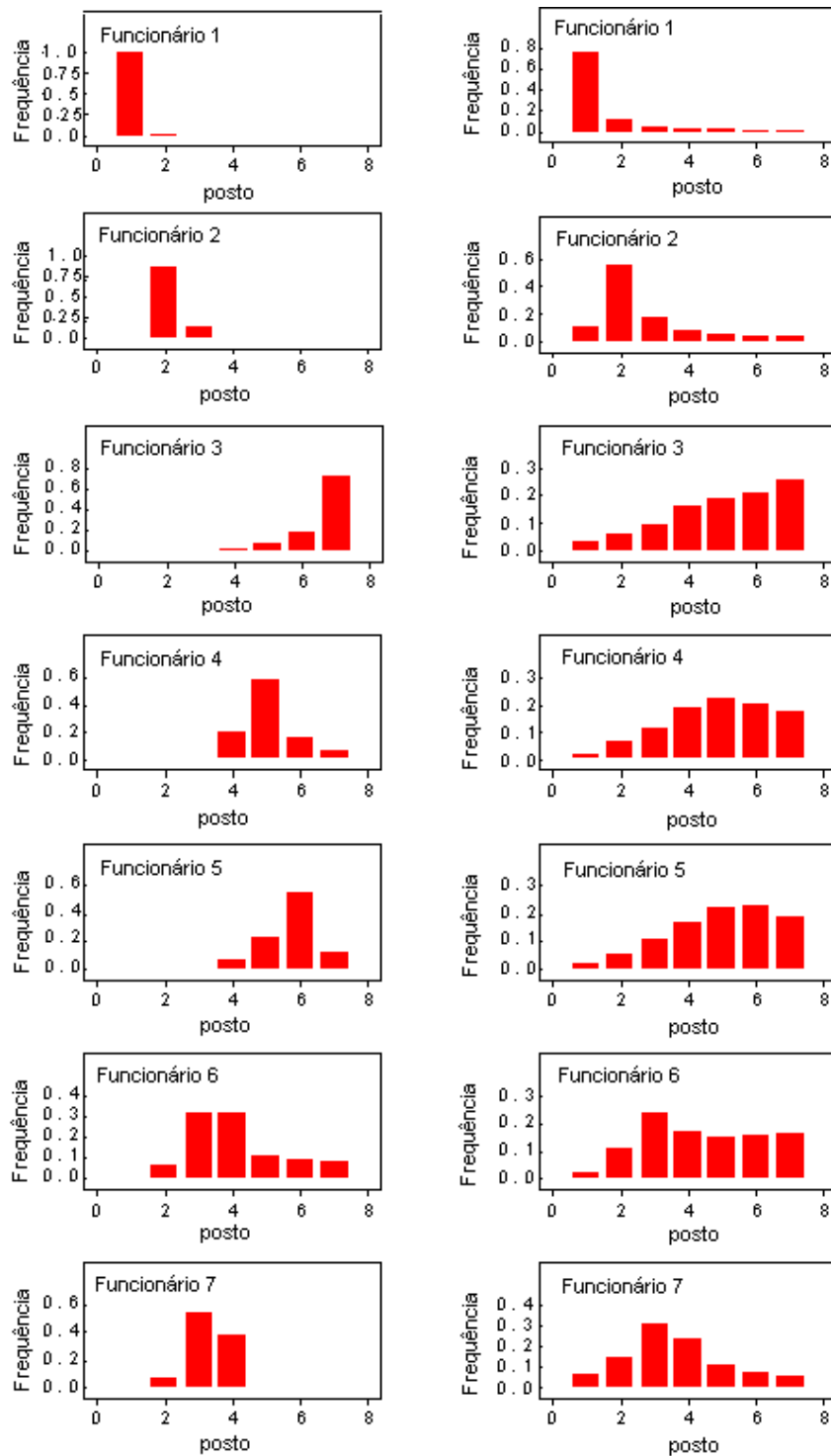


Figura 3.14 – Distribuição a posteriori do posto associado à medida de eficiência técnica para os modelos generalizados de fronteira estocástica com  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson e binomial negativa, respectivamente

### Filiais de uma instituição financeira

A implementação computacional foi feita usando-se o programa Winbugs (LUNN et al., 2000) gerando uma cadeia com 90.000 valores para cada parâmetro, desprezando os primeiros 30.000 valores para o período de aquecimento da cadeia ("burn-in") e selecionando um a cada 5 dos 60.000 valores restantes ("thin"), formando uma amostra de 12.000 valores. Foram iniciadas três cadeias em pontos distintos e a convergência das estimativas dos parâmetros foi monitorada através do critério de convergência de Gelman e Rubin (1992), disponível no programa Winbugs.

Os hiperparâmetros das distribuições a priori dos parâmetros  $\beta_s$  e  $\theta$  foram escolhidos para que as distribuições sejam não informativas e considerou-se informação a priori para o parâmetro  $P$ . Os valores dos hiperparâmetros das distribuições a priori considerados nas análises encontram-se na Tabela 3.12.

Tabela 3.12 – Hiperparâmetros das distribuições a priori dos parâmetros  $\beta, P, \theta$

Parâmetro	Hiperparâmetro	
$\beta_s$	$a_\beta = 0,00$	$\sigma_\beta^2 = 100,00$
$P$	$a_0 = 0,80$	$b_0 = 1,00$
$\theta$	$v_0 = 0,01$	$w_0 = 0,01$

As Tabelas 3.13 e 3.14 apresentam um resumo a posteriori para cada parâmetro obtido nos modelos generalizados de fronteira estocástica com  $Y_i|u_i$  com distribuição Poisson (3.11) e binomial negativa (3.13), respectivamente.

Observa-se que os valores das estimativas a posteriori para os parâmetros da fronteira são semelhantes nos dois modelos. A média e a variância da ineficiência técnica para o modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_i|u_i$  com distribuição Poisson são  $\mu_u = 0,7986$  e  $\sigma_u^2 = 0,1648$  e a média e a variância da ineficiência técnica para o modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_i|u_i$  com distribuição binomial negativa são  $\mu_u = 0,6787$  e  $\sigma_u^2 = 0,1505$ .

Tabela 3.13 – Resumo a posteriori para os parâmetros no modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_i|u_i$  com distribuição Poisson

(continua)					
Par.	Média	d.p.	2,5%	50%	97,5%
$\beta_0$	3,9340	0,7052	2,5630	3,9600	5,2460
$\beta_1$	0,2558	0,1764	0,0111	0,2307	0,6600
$\beta_2$	0,5489	0,2001	0,1384	0,5557	0,9192
$\beta_3$	0,2487	0,1691	0,0110	0,2251	0,6195
$P$	3,8690	1,3490	1,8660	3,6580	7,1000
$\theta$	4,8450	1,2370	2,7450	4,7390	7,5770
$u_1$	1,3620	0,1030	1,2040	1,3460	1,6120
$u_2$	0,4795	0,1111	0,3150	0,4622	0,7458
$u_3$	1,0550	0,1057	0,8934	1,0400	1,3080
$u_4$	0,6098	0,1033	0,4590	0,5919	0,8674
$u_5$	1,6880	0,1046	1,5250	1,6730	1,9380
$u_6$	0,1448	0,0975	0,0188	0,1244	0,3940
$u_7$	0,8314	0,1138	0,6612	0,8140	1,1030
$u_8$	0,6553	0,1027	0,5079	0,6376	0,9085
$u_9$	0,6231	0,1156	0,4314	0,6113	0,8834
$u_{10}$	0,8026	0,1033	0,6477	0,7865	1,0520
$u_{11}$	0,8852	0,1230	0,6727	0,8746	1,1600
$u_{12}$	0,9376	0,1360	0,7114	0,9236	1,2400
$u_{13}$	0,2295	0,1229	0,0437	0,2123	0,5130
$u_{14}$	1,2030	0,1475	0,9431	1,1930	1,5180
$u_{15}$	0,6075	0,1535	0,3350	0,5978	0,9339
$u_{16}$	1,3770	0,1329	1,1460	1,3670	1,6660
$u_{17}$	1,0790	0,1685	0,7751	1,0710	1,4270
$u_{18}$	0,9898	0,1567	0,7092	0,9817	1,3170
$u_{19}$	0,6988	0,1456	0,4410	0,6903	1,0060
$u_{20}$	1,5990	0,1076	1,4270	1,5860	1,8500
$u_{21}$	1,0560	0,1322	0,8262	1,0460	1,3410
$u_{22}$	0,4918	0,1656	0,1957	0,4832	0,8347
$u_{23}$	0,7345	0,1141	0,5464	0,7224	0,9921
$u_{24}$	0,3064	0,1167	0,1130	0,2946	0,5673
$u_{25}$	0,5046	0,1012	0,3518	0,4887	0,7509
$u_{26}$	0,5494	0,1212	0,3464	0,5383	0,8178
$u_{27}$	0,5768	0,1213	0,3732	0,5653	0,8454
$u_{28}$	1,0160	0,1197	0,8178	1,0050	1,2830
$u_{29}$	0,3576	0,1193	0,1614	0,3452	0,6254
$u_{30}$	0,7278	0,1040	0,5694	0,7124	0,9774
$u_{31}$	0,6076	0,1053	0,4476	0,5919	0,8599
$u_{32}$	0,5950	0,1034	0,4399	0,5789	0,8451
$u_{33}$	0,3474	0,1439	0,1021	0,3368	0,6554
$u_{34}$	0,8574	0,1220	0,6583	0,8445	1,1320

Tabela 3.13 - Resumo a posteriori para os parâmetros no modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_i|u_i$  com distribuição Poisson

Par.	Média	d.p.	(conclusão)		
			2,5%	50%	97,5%
$u_{35}$	0,4755	0,1018	0,3291	0,4578	0,7259
$u_{36}$	0,6630	0,1196	0,4706	0,6494	0,9353
$u_{37}$	0,4771	0,1411	0,2386	0,4657	0,7823
$u_{38}$	1,2360	0,1451	0,9903	1,2250	1,5510
$u_{39}$	1,0790	0,1209	0,8866	1,0650	1,3550
$u_{40}$	0,3024	0,1334	0,0829	0,2895	0,5979
$u_{41}$	0,7906	0,1080	0,6325	0,7730	1,0530
$u_{42}$	1,3390	0,1083	1,1800	1,3200	1,6030
$u_{43}$	0,5727	0,1139	0,3999	0,5566	0,8415
$u_{44}$	1,1490	0,1358	0,9255	1,1360	1,4520
$u_{45}$	0,7740	0,1105	0,6112	0,7552	1,0470
$u_{46}$	1,1030	0,1090	0,9457	1,0840	1,3730
$u_{47}$	0,8369	0,1181	0,6567	0,8200	1,1150
$u_{48}$	0,3766	0,1227	0,1861	0,3607	0,6608
$u_{49}$	0,5787	0,1120	0,4166	0,5593	0,8559
$u_{50}$	0,4958	0,1381	0,2716	0,4815	0,8045
$u_{51}$	1,0590	0,1196	0,8780	1,0410	1,3470
$u_{52}$	0,8152	0,1245	0,6204	0,7971	1,1150

Tabela 3.14 – Resumo a posteriori para os parâmetros no modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_i|u_i$  com distribuição binomial negativa

Par.	Média	d.p.	(continua)		
			2,5%	50%	97,5%
$\beta_0$	3,8460	0,7521	2,3430	3,8860	5,1820
$\beta_1$	0,2753	0,1813	0,0127	0,2540	0,6673
$\beta_2$	0,4749	0,1896	0,1038	0,4760	0,8445
$\beta_3$	0,2739	0,1823	0,0123	0,2511	0,6700
$P$	3,0610	1,2510	1,2880	2,8380	6,1200
$\theta$	4,5100	1,2710	2,3830	4,3860	7,3310
$u_1$	1,1990	0,1481	0,9273	1,1920	1,5100
$u_2$	0,3583	0,1466	0,1010	0,3474	0,6773
$u_3$	0,9117	0,1444	0,6502	0,9031	1,2210
$u_4$	0,4593	0,1505	0,1862	0,4514	0,7788
$u_5$	1,5330	0,1449	1,2680	1,5260	1,8400
$u_6$	0,1276	0,0930	0,0111	0,1069	0,3627
$u_7$	0,6891	0,1542	0,4127	0,6795	1,0190
$u_8$	0,5164	0,1460	0,2530	0,5079	0,8277
$u_9$	0,5034	0,1449	0,2429	0,4952	0,8110
$u_{10}$	0,6631	0,1436	0,4032	0,6549	0,9698
$u_{11}$	0,7144	0,1658	0,4092	0,7072	1,0600



Tabela 3.14 - Resumo a posteriori para os parâmetros no modelo generalizado de fronteira estocástica com  $Y_i|u_i$  com distribuição binomial negativa

Par.	Média	d.p.	(conclusão)		
			2,5%	50%	97,5%
$u_{12}$	0,8058	0,1628	0,5087	0,7977	1,1490
$u_{13}$	0,1805	0,1157	0,0203	0,1601	0,4575
$u_{14}$	1,0830	0,1657	0,7800	1,0750	1,4300
$u_{15}$	0,5082	0,1657	0,2096	0,4994	0,8585
$u_{16}$	1,2470	0,1565	0,9606	1,2390	1,5770
$u_{17}$	0,9754	0,1760	0,6530	0,9666	1,3440
$u_{18}$	0,8816	0,1682	0,5757	0,8731	1,2360
$u_{19}$	0,5930	0,1603	0,3020	0,5845	0,9318
$u_{20}$	1,4450	0,1464	1,1770	1,4370	1,7530
$u_{21}$	0,9339	0,1535	0,6552	0,9261	1,2580
$u_{22}$	0,4098	0,1674	0,1152	0,3990	0,7659
$u_{23}$	0,6087	0,1451	0,3457	0,6009	0,9187
$u_{24}$	0,2333	0,1262	0,0355	0,2188	0,5205
$u_{25}$	0,3701	0,1422	0,1159	0,3614	0,6736
$u_{26}$	0,4385	0,1466	0,1763	0,4291	0,7525
$u_{27}$	0,4639	0,1468	0,1999	0,4550	0,7778
$u_{28}$	0,8867	0,1479	0,6210	0,8780	1,2030
$u_{29}$	0,2710	0,1351	0,0488	0,2572	0,5721
$u_{30}$	0,5927	0,1432	0,3342	0,5847	0,8980
$u_{31}$	0,4791	0,1434	0,2208	0,4709	0,7862
$u_{32}$	0,4648	0,1425	0,2087	0,4562	0,7697
$u_{33}$	0,2752	0,1452	0,0433	0,2591	0,6007
$u_{34}$	0,7297	0,1511	0,4590	0,7206	1,0540
$u_{35}$	0,3528	0,1407	0,1049	0,3432	0,6572
$u_{36}$	0,5396	0,1500	0,2732	0,5301	0,8607
$u_{37}$	0,3795	0,1560	0,1075	0,3678	0,7183
$u_{38}$	1,1130	0,1643	0,8202	1,1020	1,4650
$u_{39}$	0,9436	0,1523	0,6717	0,9333	1,2700
$u_{40}$	0,2347	0,1354	0,0305	0,2161	0,5452
$u_{41}$	0,6479	0,1499	0,3773	0,6391	0,9687
$u_{42}$	1,1820	0,1517	0,9083	1,1740	1,5060
$u_{43}$	0,4462	0,1504	0,1775	0,4364	0,7706
$u_{44}$	1,0190	0,1610	0,7326	1,0090	1,3650
$u_{45}$	0,6122	0,1602	0,3192	0,6045	0,9483
$u_{46}$	0,9444	0,1556	0,6623	0,9356	1,2760
$u_{47}$	0,6962	0,1567	0,4153	0,6869	1,0330
$u_{48}$	0,2788	0,1431	0,0473	0,2639	0,6001
$u_{49}$	0,4346	0,1568	0,1535	0,4255	0,7704
$u_{50}$	0,3867	0,1606	0,1084	0,3739	0,7375
$u_{51}$	0,9054	0,1631	0,6116	0,8959	1,2560
$u_{52}$	0,6462	0,1738	0,3280	0,6378	1,0130

A Tabela 3.15 apresenta a classificação da eficiência técnica das 52 filiais.

Tabela 3.15 – Classificação da eficiência técnica das filias da instituição financeira para os modelos com  $Y_i|u_i$  com distribuição Poisson e binomial negativa, respectivamente

Parâmetro	Média Poisson	Média Bin. Neg.	Parâmetro	Média Poisson	Média Bin. Neg.
$ET_1$	0,2561	0,3015	$ET_{27}$	0,5617	0,6288
$ET_2$	0,6191	0,6989	$ET_{28}$	0,3620	0,4120
$ET_3$	0,3482	0,4018	$ET_{29}$	0,6994	0,7626
$ET_4$	0,5435	0,6317	$ET_{30}$	0,4830	0,5528
$ET_5$	0,1849	0,2159	$ET_{31}$	0,5447	0,6193
$ET_6$	0,8652	0,8802	$ET_{32}$	0,5516	0,6283
$ET_7$	0,4354	0,5020	$ET_{33}$	0,7065	0,7594
$ET_8$	0,5193	0,5967	$ET_{34}$	0,4243	0,4821
$ET_9$	0,5363	0,6045	$ET_{35}$	0,6216	0,7027
$ET_{10}$	0,4482	0,5153	$ET_{36}$	0,5153	0,5830
$ET_{11}$	0,4126	0,4895	$ET_{37}$	0,6206	0,6842
$ET_{12}$	0,3916	0,4467	$ET_{38}$	0,2905	0,3286
$ET_{13}$	0,7949	0,8349	$ET_{39}$	0,3399	0,3892
$ET_{14}$	0,3003	0,3386	$ET_{40}$	0,7390	0,7908
$ET_{15}$	0,5447	0,6016	$ET_{41}$	0,4536	0,5231
$ET_{16}$	0,2523	0,2874	$ET_{42}$	0,2621	0,3067
$ET_{17}$	0,3399	0,3770	$ET_{43}$	0,5640	0,6401
$ET_{18}$	0,3717	0,4141	$ET_{44}$	0,3170	0,3610
$ET_{19}$	0,4972	0,5527	$ET_{45}$	0,4612	0,5422
$ET_{20}$	0,2021	0,2357	$ET_{46}$	0,3319	0,3889
$ET_{21}$	0,3478	0,3930	$ET_{47}$	0,4331	0,4985
$ET_{22}$	0,6115	0,6638	$ET_{48}$	0,6862	0,7567
$ET_{23}$	0,4797	0,5441	$ET_{49}$	0,5606	0,6475
$ET_{24}$	0,7361	0,7919	$ET_{50}$	0,6091	0,6793
$ET_{25}$	0,6037	0,6907	$ET_{51}$	0,3468	0,4044
$ET_{26}$	0,5773	0,6450	$ET_{52}$	0,4426	0,5240

Observa-se na Tabela 3.15 que a ordem na classificação de 23 filias nos dois modelos é mantida com exceção da classificação de 29 filias. A filial mais eficiente é a filial 6 e a filial 5 é a menos eficiente.

Avaliou-se os ajustes dos modelos segundo o critério DIC, os valores encontrados para os modelos com distribuição Poisson e binomial negativa são respectivamente 579, 555 e 703, 960. Segundo esse critério o modelo que melhor se ajusta aos dados é o modelo com  $Y_i|u_i$  com distribuição Poisson.

Para concluir a comparação dos modelos, as distribuições dos postos associados à medida de eficiência técnica (MEDRANO, 2003) são apresentados na Figura 3.15. O objetivo dessa última

análise é comparar a capacidade dos modelos de classificar as filiais. Nota-se na Figura 3.15 que o modelo generalizado de fronteira estocástica com distribuição Poisson diferencia melhor as firmas eficientes das não eficientes. Por exemplo, comparando o lado direito da Figura 3.15 com o lado esquerdo, observa-se que a variabilidade da distribuição do posto da eficiência técnica para a filial 45 no modelo generalizado de fronteira estocástica com distribuição Poisson é bem menor do que utilizando o modelo generalizado de fronteira estocástica com distribuição binomial negativa.

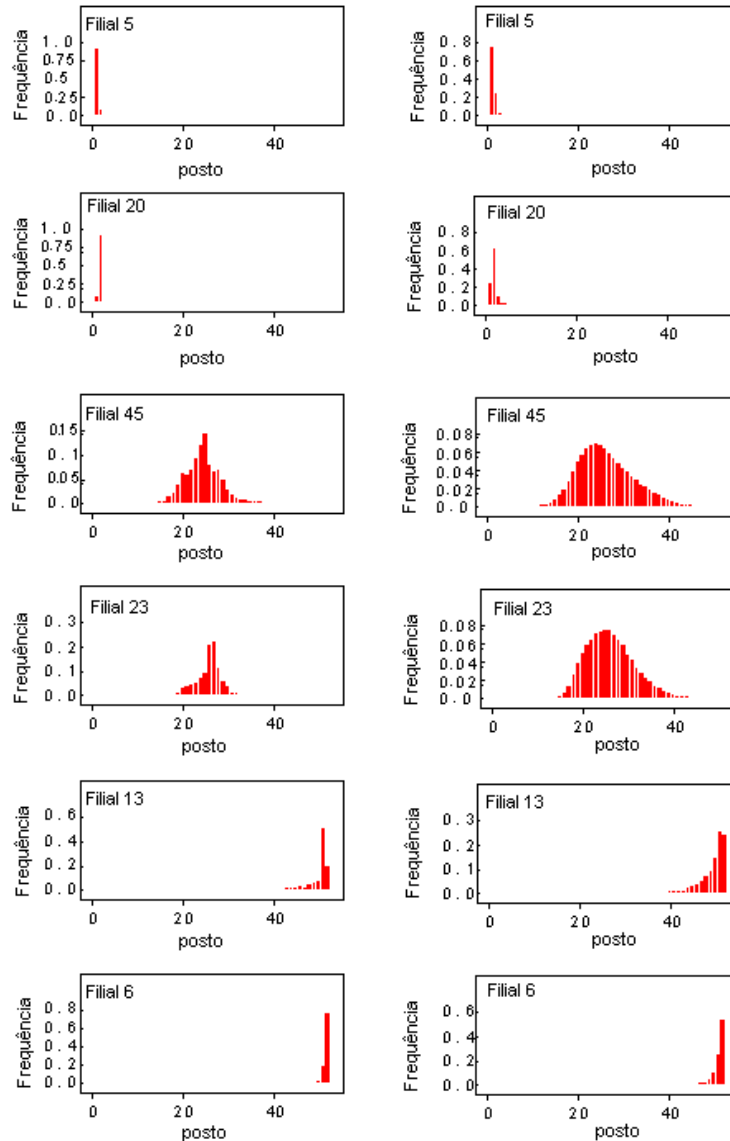


Figura 3.15 – Distribuição a posteriori do posto associado à medida de eficiência técnica para os modelos generalizados de fronteira estocástica com distribuição Poisson e binomial negativa, respectivamente, de firmas eficientes, medianas e não eficientes

### 3.7 Conclusões

Conclui-se que a abordagem proposta neste trabalho soluciona os problemas encontrados na prática, tais como, a variável resposta possuir valores nulos ou ser uma variável na forma de contagem.

Os modelos generalizados de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal e para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição normal, gama e binomial negativa estimam melhor as firmas menos eficientes. Isso é menos evidente no modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_i|u_i$  com distribuição de Poisson, que estima bem tanto firmas eficientes como firmas não eficientes.

Os valores estimados nos estudos de simulação estão próximos dos valores verdadeiros.

A proposta original deste trabalho foi cumprida, mostrando como calcular eficiência técnica de firmas utilizando os modelos generalizados de fronteira estocástica sob a abordagem bayesiana.

Possíveis extensões deste trabalho são:

- i) Utilizar diferentes distribuições para o termo de ineficiência técnica, tais como: normal truncada, log normal, etc;
- ii) Utilizar a distribuição t-Student para o erro aleatório do modelo;
- iii) Utilizar diferentes formas funcionais para a função de produção;
- iv) Analisar a eficiência técnica das firmas ao longo do tempo;
- v) Utilizar os modelos generalizados de fronteira estocástica com a função custo para estimar a eficiência econômica de firmas.

### Referências

AIGNER, D.J.; CHU, S.F. On estimating the industry production functions. **American Economic Review**, Pittsburgh, v.58, n.4, p.826-839, 1968.

AIGNER, D.J.; LOVELL, C.A.K.; SCHMIDT, P. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.6, n.1, p.21-37, 1977.

ANDERSON, D. A.; AITKIN, M. Variance component models with binary response: Interviewer variability. **Journal of the Royal Statistical Society, Series B**, Gainesville, v.47, n.2, p.203-210, 1985.

CASELLA, G.; GEORGE, E.I. Explaining the Gibbs sampler. **The American Statistician**, Alexandria, v.46, n.3, p.167-174, 1992.

CESPEDES, J.G. **Eficiência de Produção: um enfoque Bayesiano**, 2003. 63p. Dissertação (Mestre em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2003.

CESPEDES, J.G.; LEANDRO, R.A. Uma aplicação de modelos de fronteira de produção estocástica com erro normal e com erro t-Student. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v.24, n.3, p.25-34, 2006.

CHAN, J.S.K.; KUK, A.Y.C.; YAM, C.H.K. Monte Carlo approximation through Gibbs output in generalized linear mixed models. **Journal of Multivariate Analysis**, California, v.94, n.2, p.300-312, 2005.

CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. **The American Statistician**, Alexandria, v.49, n.4, p.327-335, 1995.

CLAYTON, D. Generalized linear mixed models. In: GILKS, W. R.; Richardson, S.; SPIEGELHALTER, D. J. (Eds.). **Markov Chain Monte Carlo in Practice**. London: Chapman and Hall, 1996. 275-301p.

COELLI, T.; RAO, D.S.P.; BATTESE, G.E. **An introduction to efficiency and productivity analysis**. Boston: Klumber Academic Publishers, 1999. 275p.

CORDEIRO, G.M.; DEMÉTRIO, C.G.B. **Modelos lineares generalizados**. Santa Maria: 52 SEAGRO e 12 RBRAS, 2007. 161p.

COSTA, S.C. **Modelos lineares generalizados mistos para dados longitudinais**, 2003. 111p. Tese (Doutor em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2003.

DIGGLE, P.J.; TAWN, J.A.; MOYEED, R. A. Model-based geostatistics (with discussion). **Journal of the Royal Statistical Society, Series C (Applied Statistics)**, London, v.47, n.3, p.299-350, 1998.

FAHRMEIR, L.; LANG, S. Bayesian inference for generalized additive mixed models based on Markov random field priors. **Journal of the Royal Statistical Society, Series C (Applied Statistics)**, London, v.50, n.2, p.201-220, 2001.

FERNÁNDEZ, C.; KOOP, G.; STEEL, M.F.J. A Bayesian analysis of multiple-output production frontiers. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.98, n.1, p.47-79, 2000.

FONSECA, T.C.O.; MEDRANO, L.A.; FERREIRA, M.A.R. e MIGON, H.S. **Regressão Multivariada com Erro t-Studenti: uma análise Bayesiana**. Disponível em: [www.sbe.org.br/ebe26/031.pdf](http://www.sbe.org.br/ebe26/031.pdf). Acesso em: 09 Mar. 2005.

GELFAND, A.E.; HILLS, S.E.; RACINE-POON, A.; SMITH, A.F.M. Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.85, n.412, p.972-985, 1990.

GELFAND, A.E. Gibbs sampling. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.95, n.452, p.1300-1304, 2000.

GELMAN, A.; RUBIN, D.B. Inference from iterative simulation using multiple sequences, **Statistical Science**, Beachwood, v.7, n.4, p.457-511, 1992.

GRIFFIN, J.E.; STEEL, M.F.J. Bayesian stochastic frontier analysis using WinBUGS. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.27, n.3 p.163-177, 2007.

HANDCOCK, M.S.; STEIN, M.L. A Bayesian analysis of kriging. **Technometrics**, Alexandria, v.35, n.4, p.403-410, 1993.

HASTINGS, W.K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, Lausanne, v.57, n.1, p.97-109, 1970.

KOOP, G.; STEEL, M.F.J.; OSIEWALSKI, J. Posterior analysis of stochastic frontier models using Gibbs sampling. **Computational Statistics**, Germany, v.10, p.353-373, 1995.

KOOP, G.; OSIEWALSKI, J.; STEEL, M.F.J. Bayesian efficiency analysis through individual effects: hospital cost frontiers. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.76, n.1-2, p.77-105, 1997.

- KUMBHAKAR, S. C.; LOVELL C.A.K. **Stochastic Frontier Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 333p.
- LUNN, D.J.; THOMAS, A.; BEST, N.; SPIEGELHALTER, D. WinBUGS: a Bayesian modelling framework: concepts, structure, and extensibility. **Statistics and Computing**, Orsay, v.10, n.4, p.325-337, 2000.
- MCCULLOCH, C.E.; SEARLE, S.R. **Generalized, Linear, and mixed Models**. New York: John Wiley and Sons, 2001. 358p.
- MCNEIL, J.A.; WENDIN, J. Bayesian Inference for Generalized Linear Mixed Models of Portfolio Credit Risk. **Journal of Empirical Finance**, East Lansing, v. 14, n.2, p.131-149, 2007.
- MEDRANO, L.A.T. **Análise Bayesiana de Modelos de Fronteiras de Produção Estocásticas**, 2003. 63p. Dissertação (Mestre em Estatística) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.
- MEEUSEN, W.; VAN DEN BROECK, J. Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. **International Economic Review**, Philadelphia, v.18, n.2, p.435-444, 1977.
- METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A.W.; ROSENBLUTH, M.N.; TELLER, A.H.; TELLER, E. Equations of state calculations by fast computing machines. **Journal of Chemical Physics**, Chicago, v.21, n.6, p.1087-1092, 1953.
- MIGON, E. Bayesian hierarchical models for stochastic production frontier. **Estadística**, Santiago do Chile, v. 56, p.10-30, 2004.
- MOLENBERGHS, G.; VERBEKE, G., DEMÉTRIO, C.G. An extended random-effects approach to modeling repeated, overdispersed count data. **Lifetime Data Analysis**, Netherlands, v.13, n.4, p.513-531, 2007.
- NATARAJAN, R.; KASS, R. E. Reference Bayesian methods for generalized linear mixed models. **Journal of American Statistical Association**, v.95, n.449, p.227-237, 2000.

OSIEWALSKI, J.; STEEL, M.F.J. Numerical tools for the Bayesian analysis of frontier models. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.10, n.1, p.103-117, 1998.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. **R Foundation for Statistical Computing**, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, Disponível em: [www.R-project.org](http://www.R-project.org). Acesso em: 03 fev. 2008.

SEITZ, W.D. Productive efficiency in the steam-electric generating industry. **Journal of Political Economy**, Chicago, v.79, n.4, p.878-886, 1971.

SINGER, J.M.; ANDRADE, D.F. Regression models for the analysis of pretest/posttest data. **Biometrics**, Arlington, v.53, n.2, p.729-735, 1997.

STIRATELLI, R.; LAIRD, N. M.; WARE, J. H. Random effects models for serial observations with binary response. **Biometrics**, Arlington, v.40, n.4, p.961-971, 1984.

TIMMER, C.P. Using a probabilistic frontier production function to measure technical efficiency. **Journal of Political Economy**, Chicago, v.79, n.4, p.776-794, 1971.

TSIONAS, E.G. Full likelihood inference in normal-gamma stochastic models. **Journal of Productivity Analysis**, Houston, v.13, n.3, p.183-205, 2000.

TSIONAS, E.G. Stochastic frontier models with random coefficients. **Journal of Applied Econometrics**, Cambridge, v.17, n.2, p.127-147, 2002.

VAN DEN BROECK, J.; KOOP, G.; OSIEWALSKI, J.; STEEL, M.F.J. Stochastic frontier models: a Bayesian perspective. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.61, n.2, p.273-303, 1994.

ZHAO, Y.; STAUDENMAYER, J.; COULL, B.A.; WAND, M.P. General design Bayesian generalized linear mixed models. **Statistical Science**, Baltimore, v.21, n.1, p.35-51, 2006.

ZEGER, S.L.; KARIM, M.R. Generalized linear models with random effects: A Gibbs sampling approach. **Journal of the American Statistics Association**, Durham, v.86, n. 413 p.79-86, 1991.



## APÊNDICE

## APÊNDICE A - Série de Fourier

Uma série trigonométrica é definida como (KHURI, 2003):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx]. \quad (3.15)$$

Seja  $f(x)$  uma função definida e com integral de Riemann sobre o intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Por definição, a série de Fourier associada com  $f(x)$  é uma série trigonométrica da forma (3.15), em que:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.16)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen } nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Neste caso, escreve-se

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx]. \quad (3.18)$$

Se a série trigonométrica (3.18) é uniformemente convergente para  $f(x)$  sobre  $[-\pi, \pi]$  então:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx].$$

Uma função pode ser aproximada por uma série de Fourier se satisfizer o teorema:

Teorema de Weierstrass: Se  $f$  é uma função contínua de período  $2\pi$ , então  $f$  pode ser aproximada uniformemente por uma seqüência de polinômios trigonométricos. Então, para um dado  $\epsilon > 0$ , existe um polinômio trigonométrico da forma:

$$t_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^J [\alpha_j \cos(jx) + \beta_j \text{sen}(jx)].$$

tal que  $|f(x) - t_n(x)| < \epsilon$  para todos os valores de  $x$ .

Neste caso a série de Fourier para  $f(x)$  é uniformemente convergente, então  $t_n(x)$  pode ser escolhido igual a  $S_n(x)$ , a  $n$ -ésima soma parcial da série de Fourier:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^J [a_j \cos(jx) + b_j \text{sen}(jx)],$$

em que  $a_n$  e  $b_n$  são dados por (3.16) e (3.17), respectivamente.

Este trabalho preocupa-se em aproximar a função de custo verdadeira tanto quanto os dados permitirem. A Figura 3.16 apresenta um estudo de simulação onde considera-se um cenário univariado, com apenas um insumo, em que se conhece a fronteira estocástica de custo, a função de custo

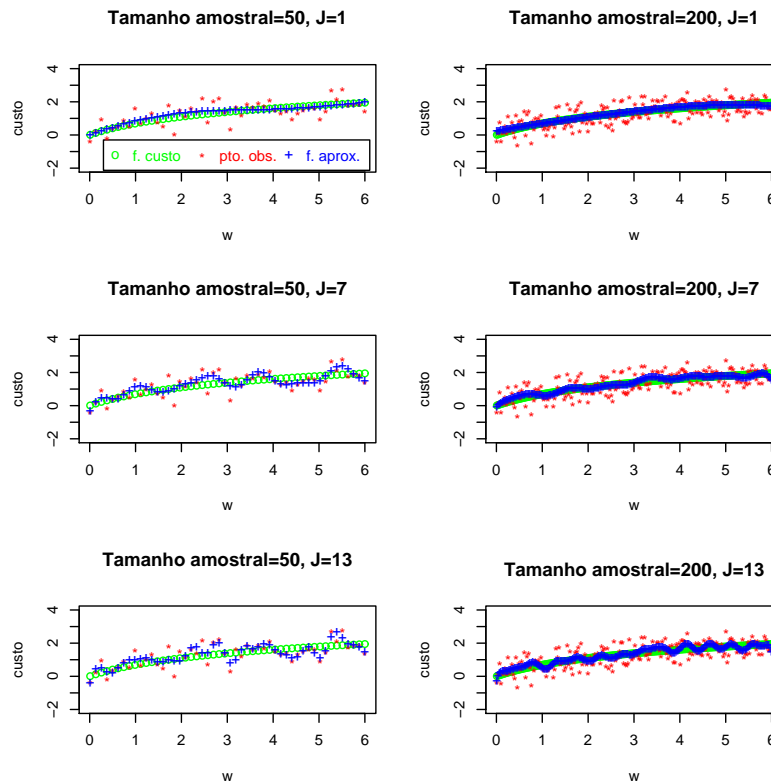


Figura 3.16 – Aproximação de uma função em séries de Fourier.

e os valores observados. Para aproximar a função de custo por uma série de Fourier consideram-se diferentes tamanhos amostrais  $N = 50$  e  $N = 200$  e diferentes valores para  $J = 1, 7$  e  $13$ .

Observa-se na Figura 3.16 que aumentando-se o valor de  $J$  a aproximação em séries de Fourier aproxima-se dos valores observados e não da fronteira de custo.

Em quase todas as aplicações encontradas na literatura, considera-se  $J = 1$  (HUANG; WANG, 2004).

### Referências

HUANG, T.H.; WANG, M.H. Comparisons of economic inefficiency between output and input measures of technical inefficiency using the Fourier flexible cost function. **Journal of Productivity Analysis**, v.22, n.1-2, p.123-142, 2004.

KHURI, A.I. **Advanced calculus with applications in statistics**. 2nd ed. United States of America: John Wiley & Sons, 2003. 673p.

## APÊNDICE B - Norma de Sobolev

Se  $1 \leq p < \infty$  e  $\Omega^{m,p}(\chi)$  denotar uma coleção de todas as funções complexas estimadas  $f(x)$  com  $\int_{\chi} |D^{\lambda} f|^p dx < \infty$  para todo  $\lambda$  com  $|\lambda|^* \leq m$ .

Para  $f \in \Omega^{m,p}(\chi)$  define-se a norma de Sobolev:

$$\|f\|_{m,p,\chi} = \left( \sum_{|\lambda|^* \leq m} \int_{\chi} |D^{\lambda} f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se  $p = \infty$  e  $\Omega^{m,\infty}(\chi)$  denotar uma coleção de todas as funções complexas estimadas  $f(x)$  com  $\sup_{x \in \chi} |D^{\lambda} f| < \infty$  para todo  $\lambda$  com  $|\lambda|^* \leq m$ .

Para  $f \in \Omega^{m,\infty}(\chi)$  define-se a norma de Sobolev:

$$\|f\|_{m,\infty,\chi} = \sum_{|\lambda|^* \leq m} \sup_{x \in \chi} |D^{\lambda} f|.$$

Uma expansão em série de Fourier tem a capacidade de aproximar a função de custo verdadeira  $f^*(x)$  tão próximo quanto a derivada da norma de Sobolev,  $1 \leq p \leq \infty$  (GALLANT, 1981).

Portanto, informalmente, entende-se que a norma de Sobolev é uma medida da distância entre as funções verdadeira e aproximada que incluem as informações sobre a proximidade de suas derivadas. Informalmente, a norma de Sobolev sobre a diferença entre a função verdadeira  $f^*(x)$  e a função aproximada  $f(x)$  é:

$$\|f^*(x) - f(x)\| = \left( \sum_{\lambda} \int |D^{\lambda} f^*(x) - D^{\lambda} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para qualquer inteiro } p \in 1 \leq p < \infty.$$

sendo  $D^{\lambda}$  o operador de derivadas sobre o vetor de multi-índices com componentes inteiros não negativos  $\lambda$  (HAVENNER; SAHA, 1999).

### Referências

GALLANT, A. R. On the bias in flexible functional forms and an essentially unbiased form: the Fourier flexible form. **Journal of Econometrics**, Los Angeles, v.15, n.2, p.211-245, 1981.

HAVENNER, A.; SAHA, A. Globally Flexible Asymptotically Ideal Models. **American Journal of Agricultural Economics**, Milwaukee, v.81, n.3, p.703-710, 1999.

## APÊNDICE C - Inferência bayesiana

A inferência bayesiana teve seu início, em 1763, com o artigo do Rev. Thomas Bayes: “*An essay towards solving a problem in doctrine of chances*” (BAYES, 1763), mas foi esquecida durante algum tempo. No século 19, Laplace e Gauss tiveram algum interesse pela área, mas devido às dificuldades na resolução das equações envolvidas no processo inferencial, a estatística bayesiana foi bastante ignorada até o século 20.

Felizmente, vários pesquisadores proeminentes, dentre os mais célebres Harold Jeffreys (um físico) e Arthur Bowley (um econométrista), continuaram a discutir as idéias bayesianas, que chamavam de probabilidade inversa, durante esse período. Então, em meados de 1950, pesquisadores estatísticos tais como L.J. Savage, Bruno de Finetti, Dennis Lindley, Jack Kiefer e muitos outros começaram a defender e difundir os métodos bayesianos.

A abordagem bayesiana considera incertezas associadas com todas as quantidades desconhecidas mesmo que elas são observadas ou não observadas. Constrói-se uma distribuição de probabilidade conjunta de todas essas quantidades baseado em tudo o que é conhecido sobre elas. Esse conhecimento incorpora informações prévias sobre o fenômeno a ser estudado e também se baseia em valores de quantidades observadas, quando elas estão disponíveis (GAMERMAN; LOPES, 2006).

Pelo teorema de Bayes tem-se que, dados dois eventos  $A$  e  $B$  quaisquer do espaço amostral  $\Omega$ , a probabilidade condicional do evento  $A$ , dada a ocorrência do evento  $B$ , é expressa por:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

ou ainda,

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

No contexto bayesiano pode-se utilizar a idéia do Teorema de Bayes para encontrar a distribuição de probabilidade de  $\theta$ , após a observação dos dados, chamada de distribuição de probabilidade a posteriori de  $\theta$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \pi(\theta | \mathbf{y}) &= \frac{f(\mathbf{y} | \theta)\pi(\theta)}{f(\mathbf{y})} \\ &= \frac{L(\theta | \mathbf{y})\pi(\theta)}{f(\mathbf{y})}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

em que  $f(\mathbf{y}) = \sum_{\theta} f(\mathbf{y}|\theta)\pi(\theta)$ , no caso em que  $\theta$  é discreto e  $f(\mathbf{y}) = \int_{\theta} f(\mathbf{y}|\theta)\pi(\theta)d\theta$ , no caso em que  $\theta$  é contínuo.

Uma forma equivalente da eq. (3.19) omite o valor  $f(\mathbf{y})$ , que não depende de  $\theta$  e, com  $\mathbf{y}$  fixo, pode, então, ser considerado constante, produzindo uma densidade a posteriori não normalizada:

$$\pi(\theta|\mathbf{y}) \propto L(\theta | \mathbf{y})\pi(\theta). \quad (3.20)$$

A expressão (3.20) contém o princípio técnico da inferência bayesiana, ou seja, o teorema de Bayes conta que a distribuição para  $\theta$  posterior aos dados é proporcional ao produto da distribuição a priori para  $\theta$  e a verossimilhança de  $\theta$  dado  $\mathbf{y}$  (BOX e TIAO, 1992).

Usar o teorema de Bayes com um determinado modelo de probabilidade significa que os dados  $\mathbf{y}$  afetam a distribuição a posteriori (3.20) somente através da função  $f(\mathbf{y}|\theta)$ , que, quando considerada como função de  $\theta$  para  $\mathbf{y}$  fixo, é chamada de função de verossimilhança e é denotada por  $L(\theta | \mathbf{y})$ . Essa função pode ser vista como a representação do que os dados têm a contar a respeito do parâmetro  $\theta$ , e permite que o conhecimento a priori sobre  $\theta$  seja modificado.

Pode-se justificar a presença do símbolo de proporcionalidade da seguinte maneira: quando se multiplica a função de verossimilhança por uma constante não se altera a inferência relativa ao parâmetro  $\theta$  e, assim, a distribuição a posteriori não será alterada (LEANDRO, 2001).

### Referências

BAYES, T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, London, v.53, p.370-418, 1763.

BOX, G.E.P.; TIAO, G.C. **Bayesian inference in statistical analysis**. New York: Wiley, 1992. 588p.

GAMERMAN, D.; LOPES, H.F. **Markov chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference**. 2nd ed. New York: Chapman and Hall, 2006. 323p.

LEANDRO, R.A. **Introdução à estatística Bayesiana**. Piracicaba: Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Departamento de Ciências Exatas, 2001. 51p.

## APÊNDICE D - Distribuição normal truncada multivariada

A distribuição de  $\boldsymbol{\beta}$  normal truncada  $R$ -variada é dada por (HORRACE, 2005):

$$NT_R(\boldsymbol{\beta}; \mathbf{a}_\beta, \sigma_\beta^2 \mathbf{I}_R) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)' (\mathbf{I}_R \sigma_\beta^2)^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)] \right\}}{\int_c^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)' (\mathbf{I}_R \sigma_\beta^2)^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)] \right\} d\boldsymbol{\beta}}, \quad (3.21)$$

sendo  $\boldsymbol{\beta} \in R_{\geq c}^R$ ,  $\int_c^\infty$  é uma integral de Riemann  $R$ -dimensional e  $R_{\geq c}^R = \{\boldsymbol{\beta} \in R^R : \boldsymbol{\beta} \geq c\}$ .

### Referências

HORRACE, W.C. Some results on the multivariate truncated normal distribution. **Journal of Multivariate Analysis**, California, v.94, n.1, p.209-221, 2005.

## APÊNDICE E - Algoritmos Monte Carlo com cadeias de Markov (MCMC)

### Algoritmo Metropolis-Hastings

O algoritmo Metropolis-Hastings permite gerar uma amostra da distribuição conjunta a posteriori  $\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | \mathbf{y})$ , a partir das distribuições condicionais completas  $\pi(\theta_i | \mathbf{y}, \theta_{-i})$ , que podem possuir forma fechada ou não (CHIB; GREENBERG, 1995; HASTINGS, 1970; METROPOLIS et al., 1953).

Os fatos principais desse método para gerar amostras de uma distribuição com densidade  $\pi(\theta | \mathbf{y}) = p(\theta)$  são:

- i) os cálculos dependem de  $p(\theta)$  somente através de razões da forma  $\frac{p(\theta')}{p(\theta)}$  em que  $\theta$  e  $\theta'$  são pontos amostrais. Assim, a constante normalizadora não precisa ser conhecida pois será cancelada no quociente;
- ii) nenhuma fatoração de  $p(\theta)$  será necessária;
- iii) os métodos são facilmente implementados, e
- iv) a seqüência de amostras é obtida através de uma cadeia de Markov.

Seja a cadeia de Markov  $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_z, \dots\}$ . Para o algoritmo de Metropolis-Hastings, a cada tempo  $t \geq 0$  o próximo estado  $\theta_{t+1}$  é escolhido, primeiramente, amostrando um ponto candidato  $Y$  da distribuição proposta  $q(\cdot | \theta_t)$  (a distribuição proposta pode depender do ponto atual,  $\theta_t$ ).

O ponto candidato  $Y$  é então aceito com probabilidade  $\alpha(\theta_t, Y)$  sendo que:

$$\alpha(\theta_t, Y) = \min \left\{ 1, \frac{p(Y)q(\theta_t | Y)}{p(\theta_t)q(Y | \theta_t)} \right\}.$$

Quando  $q(\cdot | \cdot)$  for simétrica:

$$\alpha(\theta_t, Y) = \min \left\{ 1, \frac{p(Y)}{p(\theta_t)} \right\}.$$

Se o ponto candidato  $Y$  for aceito, o próximo estado será  $\theta_{t+1} = Y$ . Se o candidato for rejeitado, a cadeia não se moverá, isto é,  $\theta_{t+1} = \theta_t$ .

O algoritmo Metropolis-Hastings (GILKS et al., 1997) é dado por:

Inicie  $\theta_0$ ;

Faça  $t = 0$

Repita {



Amostre um ponto  $Y$  de  $q(\cdot|\theta_t)$   
 Amostre um valor  $U$  de uma uniforme(0,1)  
 Se  $U \leq \alpha(\theta_t, Y)$  faça  $\theta_{t+1} = Y$   
 caso contrário faça  $\theta_{t+1} = \theta_t$   
 Incremente  $t$   
 }  
 em que  $\alpha(\theta_t, Y) = \min \left\{ 1, \frac{p(Y)q(\theta_t|Y)}{p(\theta_t)q(Y|\theta_t)} \right\}$ .

### Algoritmo Gibbs *sampling*

O Gibbs *sampling* é um caso especial do Metropolis-Hastings, que permite gerar uma amostra da distribuição conjunta a posteriori  $\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|\mathbf{y})$ , desde que as distribuições condicionais cheias possuam forma fechada, no sentido que seja fácil amostrar de seus elementos (CASELLA; GEORGE, 1992; GELFAND, 2000; GELFAND et al., 1990).

Suponha que  $\theta$ , um vetor de quantidades desconhecidas, tem componentes  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ . Seja  $\pi(\theta_i|\theta_{-i}, \mathbf{y})$ ,  $i = 1, \dots, k$  a distribuição condicional completa para todos os componentes individuais do vetor de quantidades desconhecidas  $\theta$ , dadas as observações. Valores especificados para todos os outros componentes  $\theta$  são facilmente identificados, como função de  $\theta_i$  pela inspeção da forma  $\pi(\theta|\mathbf{y}) \propto L(\theta | \mathbf{y})\pi(\theta)$  em qualquer aplicação dada.

Suponha que dado o ponto inicial,  $\theta^0 = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})$  para uma quantidade desconhecida, implementa-se o seguinte procedimento iterativo:

- i) Gerar  $\theta_1^{(1)}$  da densidade condicional cheia  $\pi(\theta_1|\theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, \mathbf{y})$ ;
- ii) Gerar  $\theta_2^{(1)}$  da densidade condicional cheia  $\pi(\theta_2|\theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, \mathbf{y})$ ;
- ...
- k) Gerar  $\theta_k^{(1)}$  de  $\pi(\theta_k|\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(1)}, \mathbf{y})$ ;

e iteragir o processo  $t$  vezes.

Executando os passos de  $(i) - (k)$   $t$  vezes, segundo Geman e Geman (1984), obtém-se a amostra  $\theta^t = (\theta_1^t, \dots, \theta_k^t)$ , em que  $\theta$  é uma realização da cadeia de Markov, sendo o primeiro elemento amostral da distribuição conjunta  $\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|\mathbf{y})$ , isto é, o ponto  $k$ -dimensional produzido na  $t$ -ésima iteração do esquema amostral converge em distribuição para a variável aleatória cuja distribuição a posteriori é dada por  $\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|\mathbf{y})$  para um  $t$  suficientemente grande. Além disso,  $\theta_i^{(t)}$  pode ser considerado como uma observação simulada da distribuição marginal a posteriori de  $\theta_i$ ,  $\pi(\theta_i|\mathbf{y})$  (CASELLA; GEORGE, 1992).

## Referências

CASELLA, G.; GEORGE, E.I. Explaining the Gibbs sampler. **The American Statistician**, Alexandria, v.46, n.3, p.167-174, 1992.

CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. **The American Statistician**, Alexandria, v.49, n.4, p.327-335, 1995.

GELFAND, A.E.; HILLS, S.E.; RACINE-POON, A.; SMITH, A.F.M. Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.85, n.412, p.972-985, 1990.

GELFAND, A.E. Gibbs sampling. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.95, n.452, p.1300-1304, 2000.

GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, Los Alamitos, v.6, p.721-741, 1984.

GILKS, W.R.; RICHARDSON, S.; SPIEGELHALTER, D.J. **Markov chain Monte Carlo in practice**. London: Chapman and Hall, 1997. 486p.

HASTINGS, W.K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, Lausanne, v.57, n.1, p.97-109, 1970.

METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A.W., ROSENBLUTH, M.N.; TELLER, A.H.; TELLER, E. Equations of state calculations by fast computing machines. **Journal of Chemical Physics**, Chicago, v.21, n.6, p.1087-1092, 1953.

## APÊNDICE F - Critério de convergência de Gelman e Rubin

Gelman e Rubin (1992) sugerem uma abordagem para averiguar a convergência das cadeias dos métodos Monte Carlo com cadeias de Markov, usando componentes da variância de seqüências múltiplas da cadeia, simuladas a partir de uma variedade de pontos iniciais dispersos. O método funciona do seguinte modo (PAULINO et al., 2003):

Simulam-se  $m \geq 2$  seqüências, cada uma de comprimento  $2n$ , a partir de pontos iniciais simulados de uma distribuição sobre dispersa relativamente à distribuição alvo (distribuição de equilíbrio). Usam-se apenas as  $n$  últimas iterações de cada seqüência.

Seja  $U$  a quantidade escalar de interesse que se pretende estimar ( $U$  é tipicamente uma função do parâmetro  $\theta$ ). Designado por  $u_{ij}$  o valor que  $U$  toma na  $j$ -ésima iteração (entre as últimas  $n$  das  $2n$  geradas) da  $i$ -ésima cadeia, calcula-se:

$$\bar{u}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_{ij},$$

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (u_{ij} - \bar{u}_{i.})^2,$$

em que,  $\bar{u}_{i.}$  é a média e  $s_i^2$  é a variância de  $U$  para cada seqüência  $i = 1, \dots, m$ .

Calculam-se as seguintes componentes da variância:

$$W = \sum_{i=1}^m \frac{s_i^2}{m},$$

em que  $W$  é a média das  $m$  variâncias dentro das seqüências, cada uma baseada em  $n - 1$  graus de liberdade, e

$$\frac{B}{n} = \sum_{i=1}^m \frac{(\bar{u}_{i.} - \bar{u}_{..})^2}{(m-1)},$$

em que  $\frac{B}{n}$  é a variância entre as médias das  $m$  seqüências,  $\bar{u}_{i.}$ , cada uma baseada em  $n$  valores de  $U$ .

Estima-se a média alvo de  $U$  como uma média amostral de todos os  $mn$  valores simulados de  $U$ , isto é,

$$\hat{\mu} = \bar{u}_{..} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{u}_{i.}.$$

Estima-se a variância alvo de  $U$  como uma média ponderada de  $W$  e  $B$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}W + \frac{1}{n}B,$$

$\hat{\sigma}^2$  sobre estima  $\sigma^2$  se a distribuição inicial for sobre dispersa e é não enviesada sob estacionaridade.

Cria-se uma distribuição t-Student conservativa (com poucos graus de liberdade) para  $U$  com locação  $\hat{\mu}$ , dispersão  $\sqrt{\hat{V}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \frac{B}{mn}}$  e graus de liberdade  $\nu = \frac{2\hat{V}^2}{\text{var}(\hat{V})}$ , onde

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{V}) &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{m} \text{var}(s_i^2) + \left(\frac{m+1}{mn}\right)^2 \frac{2}{m-1} B^2 \\ &+ 2 \frac{(m-1)(n-1)}{mn^2} \frac{n}{m} [\text{cov}(s_i^2, \bar{u}_i^2) - 2\bar{u}_i \text{cov}(s_i^2, \bar{u}_i)], \end{aligned}$$

As variâncias e covariâncias são estimadas a partir dos  $m$  valores amostrais de  $s_i^2$ ,  $\bar{u}_i$  e  $\bar{u}_i^2$ .

Estima-se o fator de redução da escala como:

$$\sqrt{\hat{R}} = \sqrt{\frac{\hat{V}}{W} \frac{\nu}{\nu-2}}.$$

Esta razão decresce para 1 quando  $n \rightarrow \infty$ . Valores de  $\hat{R} \approx 1$  sugerem que o período de aquecimento pode terminar e o processo iterativo continuar.

### Referências

GELMAN, A.; RUBIN, D.B. Inference from iterative simulation using multiple sequences, **Statistical Science**, Beachwood, v.7, n.4, p.457-511, 1992.

PAULINO, C.D.; TURKMAN, M.A.; MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. 446p.

## APÊNDICE G - DIC: *Deviance Information Criterion*

O critério DIC, (*Deviance Information Criterion*) (SPIEGELHALTER et al. 2002) é uma generalização do AIC baseado na distribuição a posteriori de  $D_i(\theta) = -2 \ln \frac{f(x | \theta, M_i)}{h(x)}$ , em que  $h(x)$  é uma função apenas dos dados. Propõem como medida da adequabilidade do modelo o valor esperado a posteriori  $D_i(\theta)$  e como penalização  $p_{Di}$  associada à complexidade do modelo a diferença entre este valor esperado e o valor de  $D_i(\theta_i)$  calculado no valor esperado a posteriori de  $\theta_i$  (PAULINO et al, 2003). Assim

$$p_{Di} = E_{(\theta_i|x, M_i)}[D_i(\theta_i)] - D_i(E_{(\theta_i|x, M_i)}[\theta_i])$$

e

$$DIC_i = E_{(\theta_i|x, M_i)}[D_i(\theta_i)] + p_{Di} = 2E_{(\theta_i|x, M_i)}[D_i(\theta_i)] - D_i(E_{(\theta_i|x, M_i)}[\theta_i]).$$

O modelo com o menor DIC estima-se ser o modelo que melhor consegue prever uma repetição de dados, que possui a mesma estrutura atualmente observada. Segundo o programa Winbugs<sup>2</sup> é difícil dizer o que constituiria uma diferença importante em DIC. A grosso modo, as diferenças maiores que 10 poderiam descartar definitivamente o modelo com o DIC mais elevado, as diferenças entre 5 e 10 são importantes, mas, se a diferença do DIC é menor que 5 e os modelos são muito diferentes nas inferências, pode ser falso descartar o modelo com menor valor de DIC apenas baseado nessa informação.

### Referências

PAULINO, C.D.; TURKMAN, M.A.; MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. 446p.

SPIEGELHALTER, D.J., BEST, N.G., CARLIN, B.P.; VAN DER LINDE A. Bayesian Measures of Model Complexity and Fit (with Discussion), **Journal of the Royal Statistical Society, Series B**, Gainesville, v. 64, n. 4, p. 583-616, 2002.

---

<sup>2</sup><http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/winbugs/dicpage.shtml> - (07 fev. 2008)

## APÊNDICE H - Formas funcionais: Cobb-Douglas e translog

Considere o caso com  $S$  insumos, um produto,  $i = 1, \dots, N$  firmas e  $t = 1, \dots, T$  tempos, a forma funcional Cobb-Douglas pode ser expressa como:

$$Y_{it} = A \prod_{s=1}^S x_{its}^{\beta_s}, \quad (3.22)$$

sendo  $Y_{it}$  o produto,  $x_{its}$  os insumos,  $A$  é o intercepto e  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  parâmetros positivos, os quais medem a elasticidade do produto. Considerando-se os quadrados e os produtos cruzados dos insumos obtém-se a função de produção translog:

$$Y_{it} = A \prod_{s=1}^S x_{its}^{\beta_s} \prod_{s=1}^S \prod_{l=1}^S (x_{itl} x_{its})^{\frac{1}{2} \beta_{ls}}, \quad (3.23)$$

que tem como caso especial a função Cobb-Douglas.

A estimação dos parâmetros da forma funcional Cobb Douglas (3.22) não é uma tarefa muito difícil e nem sua manipulação matemática, no entanto, as propriedades impostas pela estrutura de produção exigem retorno constante à escala, isto é,  $\sum_{s=1}^S \beta_s = 1$ . Os retornos à escala refletem o grau em que um aumento proporcional em todas as quantidades de insumos, aumentam as quantidades de produtos (COELLI et al., 1999).

A forma funcional Translog (3.23) não impõe restrições sobre a estrutura de produção. Não há necessidade de considerar retorno à escala constante, mas é mais difícil de manipular algebricamente e pode sofrer com problemas de multicolinearidade.

COELLI, T.; RAO, D.S.P.; BATTESE, G.E. **An introduction to efficiency and productivity analysis**. Boston: Kluwer Academic Pub Publishers, 1998. 275p.

## ANEXO

## ANEXO A - Construção dos multi-índices $k_\alpha$

Os vetores de multi-índices são usados para obter a forma funcional Fourier que é composta por dois termos. O primeiro termo refere-se a forma funcional translog, com algumas modificações que devem-se a ordem de aproximação escolhida para a forma funcional Fourier, por exemplo, se  $K = 2$  os termos da forma funcional translog que se referem aos cruzamentos entre os preços de insumos e quantidades de produtos são omitidos, se  $K \geq 3$  obtém-se a forma funcional translog completa. O segundo termo refere-se a expansão em série de Fourier.

Considere  $S = 2$  preços de insumos,  $H = 1$  quantidade de produto, os vetores de múlti-índices definidos na Tabela 2.2, o vetor de coeficientes  $\mathbf{b}' = (b_1, b_2, b_3)$ , o vetor de transformações dos insumos e produtos  $\mathbf{x}' = (l_1, l_2, q)$ , e  $\Psi = -\sum_{\alpha=1}^6 d_{0\alpha} k_\alpha k'_\alpha$ .

A matriz  $\Psi$  é dada por:

$$\Psi = \lambda^2 \begin{bmatrix} -d_{02} - d_{03} - d_{06} & d_{02} + d_{03} + d_{06} & d_{02} - d_{03} \\ d_{02} + d_{03} + d_{06} & -d_{02} - d_{03} - d_{06} & -d_{02} + d_{03} \\ d_{02} - d_{03} & -d_{02} + d_{03} & -9d_{01} - d_{02} - d_{03} - 4d_{04} - d_{05} \end{bmatrix}.$$

O primeiro termo da forma funcional Fourier é dado por:

$$\begin{aligned} d_0 + \mathbf{b}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\Psi\mathbf{x} &= d_0 + b_1l_1 + b_2l_2 + b_3q + \lambda^2 \left( -\frac{l_1^2}{2}(d_{02} + d_{03} + d_{06}) - \frac{l_2^2}{2}(d_{02} + d_{03} + d_{06}) \right. \\ &\quad - \frac{q^2}{2}(9d_{01} + d_{02} + d_{03} + 4d_{04} + d_{05}) + l_1l_2(d_{02} + d_{03} + d_{06}) + l_1q(d_{02} - d_{03}) \\ &\quad \left. + l_2q(-d_{02} + d_{03}) \right). \end{aligned}$$

O segundo termo da forma funcional Fourier é dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^6 \{d_{0\alpha} + 2[d_{j\alpha} \cos(j\lambda k'_\alpha \mathbf{x}) - r_{j\alpha} \text{sen}(j\lambda k'_\alpha \mathbf{x})]\} &= d_{01} + d_{02} + d_{03} + d_{04} + d_{05} + d_{06} \\ &\quad + 2 \left( d_{11} \cos(3\lambda q) + d_{12} \cos(\lambda(l_1 - l_2 - q)) + d_{13} \cos(\lambda(l_1 - l_2 + q)) + d_{14} \cos(2\lambda q) \right. \\ &\quad \left. + d_{15} \cos(\lambda q) + d_{16} \cos(\lambda(l_1 - l_2)) \right) - 2 \left( r_{11} \text{sen}(3\lambda q) + r_{12} \text{sen}(\lambda(l_1 - l_2 - q)) \right. \\ &\quad \left. + r_{13} \text{sen}(\lambda(l_1 - l_2 + q)) + r_{14} \text{sen}(2\lambda q) + r_{15} \text{sen}(\lambda q) + r_{16} \text{sen}(\lambda(l_1 - l_2)) \right). \end{aligned}$$

A forma funcional flexível Fourier com ordem de aproximação  $K = 3$  é dada por:

$$\begin{aligned} g_3(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}) &= \left( d_0 + \sum_{\alpha=1}^6 d_{0\alpha} \right) + b_1l_1 + b_2l_2 + b_3q \\ &\quad + \lambda^2 \left( -\frac{l_1^2}{2}(d_{02} + d_{03} + d_{06}) - \frac{l_2^2}{2}(d_{02} + d_{03} + d_{06}) - \frac{q^2}{2}(9d_{01} + d_{02} + d_{03} \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 4d_{04} + d_{05}) + l_1 l_2 (d_{02} + d_{03} + d_{06}) + l_1 q (d_{02} - d_{03}) + l_2 q (-d_{02} + d_{03}) \\
& + 2 (d_{11} \cos(3\lambda q) + d_{12} \cos(\lambda(l_1 - l_2 - q)) + d_{13} \cos(\lambda(l_1 - l_2 + q))) \\
& + d_{14} \cos(2\lambda q) + d_{15} \cos(\lambda q) + d_{16} \cos(\lambda(l_1 - l_2))) \\
& - 2 (r_{11} \text{sen}(3\lambda q) + r_{12} \text{sen}(\lambda(l_1 - l_2 - q)) + r_{13} \text{sen}(\lambda(l_1 - l_2 + q))) \\
& + r_{14} \text{sen}(2\lambda q) + r_{15} \text{sen}(\lambda q) + r_{16} \text{sen}(\lambda(l_1 - l_2))).
\end{aligned}$$

Considere  $\beta_1 = (d_0 + \sum_{\alpha=1}^6 d_{0\alpha})$ ,  $\beta_2 = b_1$ ,  $\beta_3 = b_2$ ,  $\beta_4 = b_3$ ,  $\beta_5 = -(d_{02} + d_{03} + d_{06})$ ,  $\beta_6 = -(d_{02} + d_{03} + d_{06})$ ,  $\beta_7 = -(9d_{01} + d_{02} + d_{03} + 4d_{04} + d_{05})$ ,  $\beta_8 = (d_{02} + d_{03} + d_{06})$ ,  $\beta_9 = (d_{02} - d_{03})$ ,  $\beta_{10} = (-d_{02} + d_{03})$ , substituindo na equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned}
g_3(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}) & = \beta_1 + \beta_2 l_1 + \beta_3 l_2 + \beta_4 q + \frac{\lambda^2}{2} (\beta_5 l_1^2 + \beta_6 l_2^2 + \beta_7 q^2) + \lambda^2 (\beta_8 l_1 l_2 + \beta_9 l_1 q + \beta_{10} l_2 q) \\
& + 2 [d_{11} \cos(3\lambda q) + d_{12} \cos(\lambda(l_1 - l_2 - q)) + d_{13} \cos(\lambda(l_1 - l_2 + q)) + d_{14} \cos(2\lambda q) \\
& + d_{15} \cos(\lambda q) + d_{16} \cos(\lambda(l_1 - l_2))] - 2 [r_{11} \text{sen}(3\lambda q) + r_{12} \text{sen}(\lambda(l_1 - l_2 - q)) \\
& + r_{13} \text{sen}(\lambda(l_1 - l_2 + q)) + r_{14} \text{sen}(2\lambda q) + r_{15} \text{sen}(\lambda q) + r_{16} \text{sen}(\lambda(l_1 - l_2))].
\end{aligned}$$

## ANEXO B - Distribuições condicionais completas a posteriori - Fourier

Considere o modelo de fronteira estocástica de custo:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{C} | \mathbf{u} &\sim N_{NT}((\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + 2\mathbf{W}\mathbf{d} - 2\mathbf{Q}\mathbf{r} + \mathbf{D}\mathbf{u}), \sigma_v^2 \mathbf{I}_{NT}) \\ u_m | P, \theta &\sim G(P, \theta), \text{ para } m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (3.24)$$

sendo  $\mathbf{X}$  uma matriz de dimensões  $NT \times R$  contendo a transformação do logaritmo dos preços dos insumos e a transformação das quantidades dos produtos, seus produtos cruzados e quadrados,  $\mathbf{W}$  uma matriz de dimensões  $NT \times J_\alpha$  contendo os cossenos das combinações das variáveis,  $\mathbf{Q}$  uma matriz de dimensões  $NT \times J_\alpha$  contendo os senos de combinações das variáveis,  $\boldsymbol{\beta}$  um vetor de coeficientes de dimensão  $R$ ,  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{r}$  vetores de coeficientes de dimensão  $J_\alpha$ .

As distribuições a priori para os parâmetros são dadas por:

$$\text{i) } \pi(P) = \frac{b_0^{a_0}}{\Gamma(a_0)} P^{a_0-1} \exp\{-b_0 P\} \propto P^{a_0-1} \exp\{-b_0 P\};$$

$$\text{ii) } \pi(\theta) = \frac{w_0^{v_0}}{\Gamma(v_0)} \theta^{v_0-1} \exp\{-w_0 \theta\} \propto \theta^{v_0-1} \exp\{-w_0 \theta\};$$

iii) A distribuição a priori de  $\sigma_v^2$  será escrita em função da precisão  $\tau = \frac{1}{\sigma_v^2}$

$$\pi(\tau) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta \tau\} \propto \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta \tau\};$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \pi(\boldsymbol{\beta}) &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)'(\mathbf{I}_R \sigma_\beta^2)^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)]\right\}}{\int_c^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)'(\mathbf{I}_R \sigma_\beta^2)^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)]\right\} d\boldsymbol{\beta}} I_\beta(\boldsymbol{\beta}) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)'(\mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2})(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)]\right\} I_\beta(\boldsymbol{\beta}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{v) } \pi(\mathbf{d}) &= (2\pi)^{-\frac{J_\alpha}{2}} |\mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_d^2|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)'(\mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_d^2)^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)]\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)'(\mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_d^{-2})(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)]\right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vi) } \pi(\mathbf{r}) &= (2\pi)^{-\frac{J_\alpha}{2}} |\mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^2|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)'(\mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^2)^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)]\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)'(\mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^{-2})(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)]\right\}. \end{aligned}$$

A distribuição a posteriori conjunta é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi(P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u} | \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) &= (2\pi)^{-\frac{NT}{2}} \tau^{\frac{NT}{2}} \frac{\theta^{MP}}{\Gamma(P)^M} \prod_{m=1}^M u_m^{P-1} \\
&\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau \mathbf{I}_{NT})(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right. \\
&- \theta \sum_{m=1}^M u_m \left. \right\} \frac{b_0^{a_0}}{\Gamma(a_0)} P^{a_0-1} \exp\{-b_0 P\} \frac{w_0^{v_0}}{\Gamma(v_0)} \theta^{v_0-1} \exp\{-w_0 \theta\} \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta \tau\} \\
&\frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)'(\mathbf{I}_R \sigma_\beta^2)^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)] \right\}}{\int_c^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)'(\mathbf{I}_R \sigma_\beta^2)^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)] \right\} d\boldsymbol{\beta}} I_\beta(\boldsymbol{\beta}) \\
&(2\pi)^{-\frac{J\alpha}{2}} |\mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_d^2|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)'(\mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_d^2)^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)] \right\} \\
&(2\pi)^{-\frac{J\alpha}{2}} |\mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^2|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)'(\mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^2)^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)] \right\}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\pi(P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u} | \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) &\propto \tau^{\frac{NT}{2}} \frac{\theta^{MP}}{\Gamma(P)^M} \prod_{m=1}^M u_m^{P-1} \\
&\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau \mathbf{I}_{NT})(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right. \\
&- \theta \sum_{m=1}^M u_m \left. \right\} P^{a_0-1} \exp\{-b_0 P\} \theta^{v_0-1} \exp\{-w_0 \theta\} \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta \tau\} \\
&\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)'(\mathbf{I}_R \sigma_\beta^2)^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)] \right\} I_\beta(\boldsymbol{\beta}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)'(\mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_d^2)^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)] \right\} \\
&\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)'(\mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^2)^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)] \right\}.
\end{aligned}$$

Para a implementação computacional é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori dos parâmetros:

i) Distribuição a posteriori condicional de  $\boldsymbol{\beta}$

$$\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\beta} | P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) &\propto \\
&\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau \mathbf{I}_{NT})(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right. \\
&\left. \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)'(\mathbf{I}_R \sigma_\beta^2)^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_\beta)] \right\} \right\} I_\beta(\boldsymbol{\beta})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi(\beta|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\
& \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \ln \mathbf{C}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} - \ln \mathbf{C}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta - \ln \mathbf{C}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} + \ln \mathbf{C}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} \mathbf{r} \right. \right. \\
& - \ln \mathbf{C}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} - \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} \\
& + \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} - \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} \mathbf{r} + \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} - 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} \\
& + 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta + 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} - 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} \mathbf{r} + 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} \\
& + 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} + 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} \mathbf{r} \\
& - \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta + \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} - \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} \mathbf{r} \\
& \left. \left. + \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} + \beta' \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} \beta - \beta' \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} a_\beta - a'_\beta \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} \beta + a'_\beta \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} a_\beta \right] \right\} I_\beta(\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi(\beta|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\
& \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ -\ln \mathbf{C}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta - \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta + \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} \right. \right. \\
& - \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} \mathbf{r} + \beta' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} + 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta \\
& \left. \left. + \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \beta + \beta' \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} \beta - \beta' \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} a_\beta - a'_\beta \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} \beta \right] \right\} I_\beta(\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi(\beta|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\
& \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( -\ln \mathbf{C}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} + 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} + \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} - a'_\beta \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} \right) \beta \right. \right. \\
& + \beta' \left( \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} + \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} \right) \beta \\
& \left. \left. + \beta' \left( -\mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} - \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} \mathbf{r} + \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} a_\beta \right) \right] \right\} I_\beta(\beta)
\end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_\beta &= \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} + \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} \\
\mathbf{b}'_1 &= -\ln \mathbf{C}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} + 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} + \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} - a'_\beta \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} \\
\mathbf{b}_1 &= -\mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} - \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} \mathbf{r} + \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{I}_R \sigma_\beta^{-2} a_\beta
\end{aligned}$$

Então

$$\pi(\beta|P, \theta, \tau, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \mathbf{b}'_1 \beta + \beta' \mathbf{H}_\beta \beta + \beta' \mathbf{b}_1 \right] \right\} I_\beta(\beta)$$

Portanto

$$\mathbf{b}_\beta = \mathbf{H}_\beta^{-1}(-\mathbf{b}_1)$$

Logo,

$$\pi(\beta|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \sim N_R(\mathbf{b}_\beta, \mathbf{H}_\beta^{-1}) I_\beta(\beta)$$

ii) Distribuição a posteriori condicional de  $d$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{d}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau\mathbf{I}_{NT})(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right\} \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)'(\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2})(\mathbf{d} - \mathbf{a}_d)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{d}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} - \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} + \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} \right. \right. \\ & - \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} \\ & + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} - 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} \\ & + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} \\ & + 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} \\ & - \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} \\ & \left. \left. + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{d}'\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2}\mathbf{d} - \mathbf{d}'\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2}\mathbf{a}_d - \mathbf{a}_d'\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2}\mathbf{d} + \mathbf{a}_d'\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2}\mathbf{a}_d \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{d}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ -\ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right. \right. \\ & + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} \\ & \left. \left. + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} + \mathbf{d}'\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2}\mathbf{d} - \mathbf{d}'\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2}\mathbf{a}_d - \mathbf{a}_d'\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2}\mathbf{d} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{d}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( -\ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathbf{a}_d'\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2} \right) \mathbf{d} + \mathbf{d}'(2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} + \mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2})\mathbf{d} \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{d}' \left( -2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + 2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} + 2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2}\mathbf{a}_d \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d &= 2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} + \mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2} \\ \mathbf{b}'_2 &= -\ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W} - \mathbf{a}_d'\mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2} \\ \mathbf{b}_2 &= -2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + 2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} + 2\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{I}_{J\alpha}\sigma_d^{-2}\mathbf{a}_d \end{aligned}$$

Então

$$\pi(\mathbf{d}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{b}'_2 \mathbf{d} + \mathbf{d}' \mathbf{H}_d \mathbf{d} + \mathbf{d}' \mathbf{b}_2] \right\}$$

Portanto

$$\mathbf{b}_d = \mathbf{H}_d^{-1}(-\mathbf{b}_2)$$

Logo,

$$\pi(\mathbf{d}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \sim N_{J_\alpha}(\mathbf{b}_d, \mathbf{H}_d^{-1})$$

iii) Distribuição a posteriori condicional de  $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{r}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln C - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau \mathbf{I}_{NT})(\ln C - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right\} \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)'(\mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^{-2})(\mathbf{r} - \mathbf{a}_r)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{r}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \ln C' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln C - \ln C' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \ln C' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W}\mathbf{d} + \ln C' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} \right. \right. \\ & - \ln C' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D}\mathbf{u} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln C + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D}\mathbf{u} \\ & + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W}\mathbf{d} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D}\mathbf{u} - 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln C \\ & + 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W}\mathbf{d} - 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} + 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D}\mathbf{u} \\ & + 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln C - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} \\ & - \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln C + \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W}\mathbf{d} - \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} \\ & \left. + \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{r}' \mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^{-2} \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^{-2} \mathbf{a}_r - \mathbf{a}'_r \mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^{-2} \mathbf{r} + \mathbf{a}'_r \mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^{-2} \mathbf{a}_r \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{r}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \ln C' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} \right. \right. \\ & + 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln C - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - 2\mathbf{r}' \mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D}\mathbf{u} \\ & \left. - \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q}\mathbf{r} + \mathbf{r}' \mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^{-2} \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^{-2} \mathbf{a}_r - \mathbf{a}'_r \mathbf{I}_{J_\alpha} \sigma_r^{-2} \mathbf{r} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{r}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) &\propto \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \ln C' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} - 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} - \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} - a_r' \mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^{-2} \right) \mathbf{r} \right. \right. \\ &+ \mathbf{r}' (2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} + \mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^{-2}) \mathbf{r} \\ &\left. \left. + \mathbf{r}' \left( 2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln C - 2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} - 2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^{-2} a_r \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r &= 2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} + \mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^{-2} \\ \mathbf{b}'_3 &= \ln C' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} - 2\mathbf{d}' \mathbf{W}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} - \mathbf{u}' \mathbf{D}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{Q} - a_r' \mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^{-2} \\ \mathbf{b}_3 &= 2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \ln C - 2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} 2\mathbf{W} \mathbf{d} - 2\mathbf{Q}' \tau \mathbf{I}_{NT} \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{I}_{J\alpha} \sigma_r^{-2} a_r \end{aligned}$$

Então

$$\pi(\mathbf{r}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \mathbf{b}'_3 \mathbf{r} + \mathbf{r}' \mathbf{H}_r \mathbf{r} + \mathbf{r}' \mathbf{b}_3 \right] \right\}$$

Portanto

$$\mathbf{b}_r = \mathbf{H}_r^{-1}(-\mathbf{b}_3)$$

Logo,

$$\pi(\mathbf{r}|P, \theta, \tau, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \sim N_{J\alpha}(\mathbf{b}_r, \mathbf{H}_r^{-1})$$

iv) Distribuição a posteriori condicional de  $\theta$

$$\pi(\theta|\tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, P, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \propto \theta^{MP} \exp \left\{ -\theta \sum_{m=1}^M u_m \right\} \theta^{v_0-1} \exp\{-w_0 \theta\}$$

$$\pi(\theta|\tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, P, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \propto \theta^{MP+v_0-1} \exp \left\{ -\theta \left[ w_0 + \sum_{m=1}^M u_m \right] \right\}$$

Portanto,

$$\pi(\theta|\tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, P, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln C) \sim G\left(MP + v_0, w_0 + \sum_{m=1}^M u_m\right)$$

v) Distribuição a posteriori condicional de  $\sigma_v^2$  A distribuição a posteriori condicional de  $\sigma_v^2$  será dada pela precisão  $\tau = \frac{1}{\sigma_v^2}$

$$\pi(\tau|P, \theta, \beta, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \tau^{\frac{NT}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\beta - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})' (\tau \mathbf{I}_{NT}) (\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\beta - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right\} \tau^{\alpha-1} \exp \{ -\delta\tau \}$$

$$\pi(\tau|P, \theta, \beta, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \tau^{\frac{NT}{2} + \alpha - 1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\beta - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})' (\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\beta - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u}) + 2\delta] \right\}$$

$$\pi(\tau|P, \theta, \beta, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \tau^{(\frac{NT}{2} + \alpha) - 1} \exp \left\{ -\left( \frac{[(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\beta - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})' (\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\beta - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u}) + 2\delta]}{2} \right) \tau \right\}$$

Portanto

$$\tau \sim G\left(\frac{NT}{2} + \alpha, \frac{(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\beta - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})' (\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\beta - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u}) + 2\delta}{2}\right)$$

vi) Distribuição a posteriori condicional de P

$$\pi(P|\theta, \tau, \beta, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \frac{\theta^{MP}}{\Gamma(P)^M} \prod_{m=1}^M u_m^{P-1} P^{a_0-1} \exp\{-b_0 P\}$$

$$\pi(P|\theta, \tau, \beta, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \frac{\theta^{MP}}{\Gamma(P)^M} P^{a_0-1} \exp \left\{ \sum_{m=1}^M (P-1) \ln(u_m) \right\} \exp\{-b_0 P\}$$

$$\pi(P|\theta, \tau, \beta, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \frac{\theta^{MP}}{\Gamma(P)^M} P^{a_0-1} \exp \left\{ -b_0 P + (P-1) \sum_{m=1}^M \ln(u_m) \right\}$$

$$\pi(P|\theta, \tau, \beta, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \frac{\theta^{MP}}{\Gamma(P)^M} P^{a_0-1} \exp \left\{ P[-b_0 + \sum_{m=1}^M \ln(u_m)] \right\}$$



vii) Distribuição a posteriori condicional de  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{u}|P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau\mathbf{I}_{NT})(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right. \\ & \left. -\theta \sum_{m=1}^M u_m \right\} \prod_{m=1}^M u_m^{P-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{u}|P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau\mathbf{I}_{NT})(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right. \\ & \left. -\theta \sum_{m=1}^M u_m \right\} \exp \left\{ (P-1) \sum_{m=1}^M \ln(u_m) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{u}|P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})'(\tau\mathbf{I}_{NT})(\ln \mathbf{C} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{Q}\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{u})] \right\} \\ & \exp \left\{ -\theta \sum_{m=1}^M u_m + (P-1) \sum_{m=1}^M \ln(u_m) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{u}|P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} - \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} + \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} \right. \right. \\ & - \ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} \\ & + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} - 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} \\ & + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} \\ & + 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} + 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} \\ & \left. - \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT} \ln \mathbf{C} + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} \right. \\ & \left. + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} \right\} \exp \left\{ -\theta \sum_{m=1}^M u_m + (P-1) \sum_{m=1}^M \ln(u_m) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi(\mathbf{u}|P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln \mathbf{C}) \propto \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ -\ln \mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. -\mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\ln\mathbf{C} + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r} + \mathbf{u}'\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\mathbf{u} \right\} \\
& \exp\left\{-\theta\sum_{m=1}^M u_m + (P-1)\sum_{m=1}^M \ln(u_m)\right\} \\
& \pi(\mathbf{u}|P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln\mathbf{C}) \propto \\
& \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(-\ln\mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D} + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\right)\mathbf{u} \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathbf{u}'\left(\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D}\right)\mathbf{u} + \mathbf{u}'\left(-\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\ln\mathbf{C} + \mathbf{D}'\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - \mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r}\right)\right]\right\} \\
& \exp\left\{-\theta\sum_{m=1}^M u_m + (P-1)\sum_{m=1}^M \ln(u_m)\right\}
\end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_u &= \mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D} \\
\mathbf{b}'_4 &= -\ln\mathbf{C}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D} + 2\mathbf{d}'\mathbf{W}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D} - 2\mathbf{r}'\mathbf{Q}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{D} \\
\mathbf{b}_4 &= -\mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\ln\mathbf{C} + \mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{W}\mathbf{d} - \mathbf{D}'\tau\mathbf{I}_{NT}2\mathbf{Q}\mathbf{r}
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\pi(\mathbf{u}|P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln\mathbf{C}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathbf{b}'_4\mathbf{u} + \mathbf{u}'\mathbf{H}_u\mathbf{u} + \mathbf{u}'\mathbf{b}_4\right]\right\} \\
&\exp\left\{-\theta\sum_{m=1}^M u_m + (P-1)\sum_{m=1}^M \ln(u_m)\right\}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbf{b}_u = \mathbf{H}_u^{-1}(-\mathbf{b}_4)$$

Logo,

$$\pi(\mathbf{u}|P, \theta, \tau, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}, \ln\mathbf{C}) \propto N_K(\mathbf{b}_u, \mathbf{H}_u^{-1}) \exp\left\{-\theta\sum_{m=1}^M u_m + (P-1)\sum_{m=1}^M \ln(u_m)\right\}$$

## ANEXO C - Programa R: simulação dos dados Fourier

```
#####
# N=60 FIRMAS em T= 6 TEMPOS, com H=1 PRODUTO, e S= 2 INSUMOS
#####
#NÚMERO DE INSUMOS#
S<-2
#NÚMERO DE PRODUTOS#
H<-1
#VARIÁVIES REGRESSORAS#
K=4
#TAMANHO AMOSTRAL#
N<-60
#TEMPOS#
T<-6

# SIMULAR PREÇOS DE INSUMOS#
farelosoja<-NULL
for(i in 1:N){
  wy<-NULL
  wx<-rnorm(1,mean=6.17,sd=0.06)
  wy<-wx
  wy1<-wy
  for(j in 2:T){
    wy1<-wy1+rnorm(1,mean=0,sd=0.01)
    if(wy1<0) wy1<-wy1+rnorm(1,mean=0,sd=0.01)
    wy<-c(wy,wy1)
  }
  farelosoja<-round(rbind(farelosoja,wy),3)
}
maoobra<-NULL
for(i in 1:N){
  vy<-NULL
  vx<-rnorm(1,mean=5.4,sd=0.2)
  vy<-vx
  vy1<-vy
  for(j in 2:T){
    vy1<-vy1+rnorm(1,mean=0,sd=0.01)
    if(vy1<0) vy1<-vy1+rnorm(1,mean=0,sd=0.01) # simulando X2
    vy<-c(vy,vy1)
  }
  maoobra<-round(rbind(maoobra,vy),3)
}
w0<-matrix(rep(1,N),N,T)
lnw<-array(c(farelosoja, maoobra),c(N,T,K-2))

#TRANSFORMAÇÃO DOS PREÇOS DE INSUMOS#
l<-array(0,c(N,T,K-2))
```

```

lna<-array(0,c(N,T,K-2))
for(i in 1:N){
  for(t in 1:T){
    for(j in 1:S){
      lnw[,,j] <- -min(lnw[,,j])+10^(-5)
      l[i,t,j] <-round(lnw[i,t,j]+lna[i,t,j],3)
    } } }

#SIMULAR PRODUTO#
leite<-NULL
for(i in 1:N){
  yy<-NULL
  yx<-rnorm(1,mean=10.5,sd=0.12)
  yy<-yx
  yy1<-yy
  for(j in 2:T){
    yy1<-(yy1+rnorm(1,mean=0,sd=0.01))
    if(yy1<0) yy1<-yy1+rnorm(1,mean=0,sd=0.01)
    yy<-c(yy,yy1)
  }
  leite<-round(rbind(leite,yy),3)
}
lny<-leite

#TRANSFORMAÇÃO DO PRODUTO#
q<-matrix(0,N,T)
lnb<-NULL
mu<-NULL
lnb <- -min(lny)+10^(-5)
mu=max(1)/(max(lny+lnb))
q <- round(mu*(lny+lnb),3)
#FATOR DE ESCALA#
lambda<-6/max(1)

#MATRIZ DO PRODUTO E PREÇOS DE INSUMOS#
X0<-matrix(rep(1,N),N,T)
x<-array(c(X0,q,1),c(N,T,K))
x34<-x[,3]*x[,4]
x23<-x[,2]*x[,3]
x24<-x[,2]*x[,4]
X<-array(c(x,x[,2]^2,x[,3]^2,x[,4]^2,x23,x24,x34),c(N,T,K+6))

#VETOR DE PARAMETROS
beta<-c(0.5,0.2,0.5,0.3,0.5*rep(1,3),rep(1,3))
u<-rep(1,6)
v<-rep(1,6)

#VETOR DE INEFICIÊNCIAS

```

```

z<-matrix(0,N,50)
for(a in 1:50){
z[,a]<-sort(rgamma(N,shape=0.8,scale=1))
}
zmedio<-apply(z,1,mean)

#MATRIZ W e Q
W<- array(c(
cos(lambda*3*x[, , 2]),
cos(lambda*(x[, , 3]-x[, , 4]-x[, , 2])),
cos(lambda*(x[, , 3]-x[, , 4]+x[, , 2])),
cos(lambda*2*x[, , 2]),
cos(lambda*x[, , 2]),
cos(lambda*(x[, , 3]-x[, , 4]))), c(N,T,6))
Q<- array(c(
sin(lambda*3*x[, , 2]),
sin(lambda*(x[, , 3]-x[, , 4]-x[, , 2])),
sin(lambda*(x[, , 3]-x[, , 4]+x[, , 2])),
sin(lambda*2*x[, , 2]),
sin(lambda*x[, , 2]),
sin(lambda*(x[, , 3]-x[, , 4]))), c(N,T,6))

#MÉDIA
mu<-array(0,c(N,T,50))
for(i in 1:N){
for(j in 1:T){
for(a in 1:50){
mu[i,j,a]<-X[i,j,1:4]*%*%beta[1:4]+lambda^2*X[i,j,5:10]
%*%beta[5:10] + 2*W[i,j,]*%*%u - 2*Q[i,j,]*%*%v + z[i,a]
} } }

#CUSTO
Custo<-array(0,c(N,T,50))
sigma2e<-0.05
for(i in 1:N){
for(j in 1:T){
for(a in 1:50){
Custo[i,j,a]<-round(rnorm(1,mean=mu[i,j,a],sd=sqrt(sigma2e)),3)
}}
}

```

## ANEXO D - Programa Winbugs: análise dos dados Fourier

```

model {
  for (i in 1:num.obs){
    z[i] ~ dgamma(P,theta)
    eff[i] <- exp(-z[i])
  }
  for(t in 1:num.temp){
    X[i,t,1] <-y1[i,t]
    X[i,t,2] <- w1[i,t]
    X[i,t,3] <-w2[i,t]
    X[i,t,4] <- pow(y1[i,t],2)
    X[i,t,5] <-pow(w1[i,t],2)
    X[i,t,6] <-pow(w2[i,t],2)
    X[i,t,7] <- y1[i,t]*w1[i,t]
    X[i,t,8] <- y1[i,t]*w2[i,t]
    X[i,t,9] <- w1[i,t]*w2[i,t]
    W[i,t,1] <- cos(lambda*3*y1[i,t])
    W[i,t,2] <- cos(lambda*(w1[i,t]-w2[i,t]-y1[i,t]))
    W[i,t,3] <- cos(lambda*(w1[i,t]-w2[i,t]+y1[i,t]))
    W[i,t,4] <- cos(lambda*2*y1[i,t])
    W[i,t,5] <- cos(lambda*y1[i,t])
    W[i,t,6] <- cos(lambda*(w1[i,t]-w2[i,t]))
    Q[i,t,1] <- sin(lambda*3*y1[i,t])
    Q[i,t,2] <- sin(lambda*(w1[i,t]-w2[i,t]-y1[i,t]))
    Q[i,t,3] <- sin(lambda*(w1[i,t]-w2[i,t]+y1[i,t]))
    Q[i,t,4] <- sin(lambda*2*y1[i,t])
    Q[i,t,5] <- sin(lambda*y1[i,t])
    Q[i,t,6] <- sin(lambda*(w1[i,t]-w2[i,t]))
    custo[i,t] ~ dnorm(mu[i,t],tau)
    mu[i,t] <- beta0 +inprod(beta[1:3],X[i,t,1:3])+ pow(lambda,2)
    *inprod(beta[4:9],X[i,t,4:9]) + 2*inprod(u[],W[i,t,]) -
    2*inprod(v[],Q[i,t,]) + z[i]
  }
  beta0 ~ dnorm(0.0,0.01)
  for(i in 1:9){
    beta[i] ~ djl.dnorm.trunc(0.0,0.01,0,1000)
  }
  for(j in 1:6){
    u[j] ~ dnorm(0.0,0.01)
    v[j] ~ dnorm(0.0,0.01)
  }
  lambda <- 6.376128
  P ~ dgamma(0.8,1)
  theta~ dgamma(0.01,0.01)
  sigmau<-P/pow(theta,2)
  tau ~ dgamma(0.01,0.01)
  sigma2<-1/tau
}

```

## ANEXO E - Distribuições condicionais completas a posteriori - $\ln Y_{it}|u_i$ Normal

Considere o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $\ln Y_{it}|u_i$  com distribuição normal:

$$\begin{aligned}\ln Y_{it}|u_i &\sim N(\beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_S \ln x_{itS} - u_i, \sigma_v^2), \\ u_i|P, \theta &\sim G(P, \theta),\end{aligned}$$

com função de ligação logarítmica  $\ln \mu_{it}$  e preditor linear dado por:

$$\eta_{it} = \mu_{it} = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_S \ln x_{itS} - u_i.$$

As distribuições a priori para os parâmetros são:

$$\text{i) } \pi(P) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \exp\{-bP\} \propto P^{a-1} \exp\{-bP\};$$

$$\text{ii) } \pi(\theta) = \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \propto \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\};$$

$$\text{iii) } \pi(\beta_s) = \frac{\exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\}}{\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} d\beta_s} I_\beta(\beta) \propto \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} I_\beta(\beta);$$

$$\text{iv) } \pi(\tau) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta\tau\} \propto \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta\tau\};$$

A distribuição a posteriori conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned}\pi(\beta, P, \tau, \theta, u_i|x_{its}, \ln Y_{it}) &= \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} [\ln y_{it} - \eta_{it}]^2\right\} \prod_{i=1}^N \frac{\theta^P}{\Gamma(P)} u_i^{P-1} \exp(-\theta u_i) \\ &\quad \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \exp(-bP) \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \\ &\quad \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta\tau\} \prod_{s=1}^S \frac{\exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\}}{\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} d\beta_s} I_\beta(\beta),\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\pi(\beta, P, \tau, \theta, u_i|x_{its}, \ln Y_{it}) &\propto \tau^{\frac{NT}{2} + \alpha - 1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \eta_{it})^2 - 2\delta\right] - bP\right. \\ &\quad \left. - \theta \left(d + \sum_{i=1}^N u_i\right) - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta).\end{aligned}$$

Para a implementação computacional é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori dos parâmetros:

i) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\beta$ :

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \eta_{it})^2 \right] - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta);$$

$$\begin{aligned} \pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) &\propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ln y_{it} - \left( \sum_{s=1}^S \beta_s \ln x_{its} - u_i \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (-2 \ln y_{it} \ln x_{its} \beta_s \tau - 2 \ln x_{its} \beta_s u_i \tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln x_{its}^2 \beta_s^2 \tau - \beta_s^2 \sigma_\beta^{-2} + 2\beta_s \mu_\beta \sigma_\beta^{-2} \right) \right] \right\} I_\beta(\beta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \beta_s^2 (\ln x_{its}^2 \tau - \sigma_\beta^{-2}) + 2\beta_s (\ln y_{it} \ln x_{its} \tau \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \ln x_{its} u_i \tau - \mu_\beta \sigma_\beta^{-2} \right) \right) \right] \right\} I_\beta(\beta). \end{aligned}$$

$$\text{Considere } \sigma_H^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \tau \ln x_{its}^2 - \sigma_\beta^{-2}} \text{ e } \mu_H = \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ln x_{its} \tau (\ln y_{it} + u_i) - \mu_\beta \sigma_\beta^{-2} \right] \sigma_H^2.$$

Então,

$$\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \tau, u_i, x_{its}, \ln y_{it} \sim NT(\mu_H, \sigma_H^2) I_\beta(\beta).$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori  $\theta$ :

$$\pi(\theta|\beta, P, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) \propto \theta^{NP+w-1} \exp \left\{ -\theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right\}.$$

Portanto,

$$\theta|\beta, P, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it} \sim G\left(NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i\right).$$



v) Distribuição condicional completa a posteriori de  $P$ :

$$\pi(P|\boldsymbol{\beta}, \theta, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} \exp\{-bP\};$$

$$\pi(P|\boldsymbol{\beta}, \theta, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp\left\{\sum_{i=1}^N (P-1) \ln u_i\right\} \exp\{-bP\}.$$

Portanto,

$$\pi(P|\boldsymbol{\beta}, \theta, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp\left\{P\left(-b + \sum_{i=1}^N \ln u_i\right)\right\}.$$

vi) Distribuição condicional completa a posteriori de  $u$ :

$$\pi(u_i|\boldsymbol{\beta}, u_{-i}, P, \theta, \tau, x_{its}, \ln Y_{it}) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \eta_{it})^2\right] - \theta \left(d + \sum_{i=1}^N u_i\right)\right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1}.$$

Portanto,

$$\pi(u_i|P, \theta, \boldsymbol{\beta}, \tau, u_{-i}, x_{its}, \ln Y_{it}) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T u_i^2 - 2u_i \left(\sum_{s=0}^S \beta_s \ln x_{its} - \ln y_{it} + \theta\right)\right]\right\} u_i^{P-1}.$$

v) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\tau$ :

$$\pi(\tau|\boldsymbol{\beta}, P, \theta, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \eta_{it})^2 - 2\delta\right]\right\}.$$

Portanto,

$$\tau|\boldsymbol{\beta}, P, \theta, u_i, x_{its}, \ln Y_{it} \sim G\left(\frac{NT}{2} + \alpha, \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \eta_{it})^2 - 2\delta}{2}\right).$$

## ANEXO F - Distribuições condicionais completas a posteriori - $Y_{it}|u_i$ gama

Considere o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição gama:

$$Y_{it}|u_i \sim G\left(\nu^{-2}, \left(A \prod_{s=1}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i}\right)^{-1} \nu^{-2}\right)$$

$$u_i|P, \theta \sim G(P, \theta),$$

com função de ligação logarítmica  $\ln \mu_{it}$  e preditor linear dado por:

$$\eta_{it} = \ln \mu_{it} = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_s \ln x_{its} - u_i.$$

As distribuições a priori para os parâmetros são:

$$\text{i) } \pi(P) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \exp\{-bP\} \propto P^{a-1} \exp\{-bP\};$$

$$\text{ii) } \pi(\theta) = \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \propto \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\};$$

$$\text{iii) } \pi(\beta_s) = \frac{\exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\}}{\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} d\beta_s} I_\beta(\beta) \propto \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} I_\beta(\beta)$$

$$\text{iv) } \pi(\nu) = \frac{l^m}{\Gamma(m)} \nu^{m-1} \exp\{-l\nu\} \propto \nu^{m-1} \exp\{-l\nu\};$$

A distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\beta, P, \nu, \theta, u_i|x_{its}, Y_{it}) &= \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \exp\left\{\frac{1}{\nu^2} \left[-\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \eta_{it}\right] + \nu^{-2} \ln(\nu^{-2} y_{it}) - \ln y_{it} - \ln(\Gamma(\nu^{-2}))\right\} \\ &\quad \prod_{i=1}^N \frac{\theta^P}{\Gamma(P)} u_i^{P-1} \exp(-\theta u_i) \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \exp(-bP) \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \\ &\quad \nu^{m-1} \exp\{-l\nu\} \prod_{s=1}^S \frac{\exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\}}{\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} d\beta_s} I_\beta(\beta), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \pi(\beta, P, \nu, \theta, u_i|x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{\nu^2} \left[-\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \eta_{it}\right] + \nu^{-2} \ln(\nu^{-2} y_{it})\right)\right. \\ &\quad \left. - \ln(\Gamma(\nu^{-2}))^{NT} - \theta \left(d + \sum_{i=1}^N u_i\right) - bP - l\nu\right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \nu^{m-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta). \end{aligned}$$

Para a implementação computacional é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori dos parâmetros:

i) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\beta$ :

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \nu, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \eta_{it} \right] \right) - \sum_{s=1}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta);$$

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \nu, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \left( \sum_{s=1}^S \beta_s \ln x_{its} - u_i \right) \right] \right) - \sum_{s=1}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta).$$

Logo,

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \nu, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \beta_s \ln x_{its} \right] \right) - \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta).$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\theta$ :

$$\pi(\theta|\beta, P, \nu, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \theta^{NP+w-1} \exp \left\{ -\theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right\}.$$

Portanto,

$$\pi(\theta|\beta, P, \nu, u_i, x_{its}, Y_{it}) \sim G \left( NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i \right).$$

v) Distribuição condicional completa a posteriori de  $P$ :

$$\pi(P|\beta, \theta, \nu, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} \exp \{-bP\};$$

$$\pi(P|\beta, \theta, \nu, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ \sum_{i=1}^N (P-1) \ln u_i \right\} \exp \{-bP\}.$$

Portanto,

$$\pi(P|\beta, \theta, \nu, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ P \left( -b + \sum_{i=1}^N \ln u_i \right) \right\}.$$

vi) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\mathbf{u}$ :

$$\pi(u_i|\boldsymbol{\beta}, u_{-i}, P, \theta, \nu, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \eta_{it} \right] - \theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1};$$

$$\pi(u_i|\boldsymbol{\beta}, u_{-i}, P, \theta, \nu, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \left( \sum_{s=1}^S \beta_s \ln x_{its} - u_i \right) \right] \right. \\ \left. - \theta \sum_{i=1}^N u_i \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1}.$$

Portanto,

$$\pi(u_i|\boldsymbol{\beta}, u_{-i}, P, \theta, \nu, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} + u_i \right] - \theta u_i \right\} u_i^{P-1}.$$

v) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\nu$  :

$$\pi(\nu|\boldsymbol{\beta}, P, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \eta_{it} \right] + \nu^{-2} \ln(\nu^{-2} y_{it}) \right) \right. \\ \left. - \ln \Gamma(\nu^{-2})^{NT} - l\nu \right\} \nu^{m-1}.$$

Portanto,

$$\pi(\nu|\boldsymbol{\beta}, P, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{\nu^2} \left[ -\frac{y_{it}}{\exp(\eta_{it})} - \eta_{it} + \ln \nu^{-2} + \ln y_{it} \right] \right) \right. \\ \left. - \ln \Gamma(\nu^{-2})^{NT} - l\nu \right\} \nu^{m-1}.$$

## ANEXO G - Distribuições condicionais completas a posteriori - $Y_{it}|u_i$ normal

Considere o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição normal:

$$\begin{aligned} Y_{it}|u_i &\sim N\left(\prod_{s=0}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i}, \sigma_v^2\right), \\ u_i|P, \theta &\sim G(P, \theta) \end{aligned}$$

com função de ligação logarítmica  $\ln \mu_{it}$  e preditor linear dado por:

$$\eta_{it} = \ln \mu_{it} = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_s \ln x_{its} - u_i.$$

As distribuições a priori para os parâmetros são:

$$\text{i) } \pi(P) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \exp\{-bP\} \propto P^{a-1} \exp\{-bP\};$$

$$\text{ii) } \pi(\theta) = \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \propto \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\};$$

$$\text{iii) } \pi(\beta_s) = \frac{\exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\}}{\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} d\beta_s} I_\beta(\beta) \propto \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} I_\beta(\beta);$$

$$\text{iv) } \pi(\tau) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta\tau\} \propto \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta\tau\};$$

A distribuição a posteriori conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\beta, P, \tau, \theta, u_i|x_{its}, Y_{it}) &= \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} [\ln y_{it} - \exp(\eta_{it})]^2\right\} \prod_{i=1}^N \frac{\theta^P}{\Gamma(P)} u_i^{P-1} \exp(-\theta u_i) \\ &\quad \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \exp(-bP) \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \\ &\quad \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \tau^{\alpha-1} \exp\{-\delta\tau\} \prod_{s=1}^S \frac{\exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\}}{\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} d\beta_s} I_\beta(\beta), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \pi(\beta, P, \tau, \theta, u_i|x_{its}, Y_{it}) &\propto \tau^{\frac{NT}{2} + \alpha - 1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \exp(\eta_{it}))^2 - 2\delta\right] - bP\right. \\ &\quad \left. - \theta \left(d + \sum_{i=1}^N u_i\right) - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta). \end{aligned}$$

Para a implementação computacional é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori dos parâmetros:

i) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\beta$ :

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \tau, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \exp(\eta_{it}))^2 \right] - \sum_{s=0}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, \tau, u_i, x_{its}, \ln Y_{it}) &\propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \ln y_{it} - \prod_{s=1}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta). \end{aligned}$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori  $\theta$ :

$$\pi(\theta|\beta, P, \tau, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \theta^{NP+w-1} \exp \left\{ -\theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right\}.$$

Portanto,

$$\theta|\beta, P, \tau, u_i, x_{its}, Y_{it} \sim G\left(NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i\right).$$

v) Distribuição condicional completa a posteriori de  $P$ :

$$\pi(P|\beta, \theta, \tau, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} \exp\{-bP\};$$

$$\pi(P|\beta, \theta, \tau, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ \sum_{i=1}^N (P-1) \ln u_i \right\} \exp\{-bP\}.$$

Portanto,

$$\pi(P|\beta, \theta, \tau, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ P \left( -b + \sum_{i=1}^N \ln u_i \right) \right\}.$$

vi) Distribuição condicional completa a posteriori de  $u$ :

$$\pi(u_i|\beta, u_{-i}, P, \theta, \tau, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \exp(\eta_{it}))^2 \right] - \theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1}.$$

Portanto,

$$\pi(u_i|\beta, u_{-i}, P, \theta, \tau, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \exp(\eta_{it}))^2 \right] - \theta u_i \right\} u_i^{P-1}.$$

v) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\tau$  :

$$\pi(\tau|\boldsymbol{\beta}, P, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \exp(\eta_{it}))^2 - 2\delta \right] \right\}.$$

Portanto,

$$\tau|\boldsymbol{\beta}, P, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it} \sim G \left( \frac{NT}{2} + \alpha, \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln y_{it} - \exp(\eta_{it}))^2 - 2\delta}{2} \right).$$

## ANEXO H - Distribuições condicionais completas a posteriori - $Y_{it}|u_i$ Poisson

Considere o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição Poisson:

$$\begin{aligned} Y_{it}|u_i &\sim \text{Pois} \left( A \prod_{s=1}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i} \right) \\ u_i|P, \theta &\sim G(P, \theta), \end{aligned}$$

com função de ligação canônica logarítmica  $\ln(\lambda_{it})$  e o preditor linear dado por:

$$\eta_{it} = \ln(\lambda_{it}) = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_s \ln x_{its} - u_i.$$

As distribuições a priori para os parâmetros são dadas por:

$$\text{i) } \pi(P) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \exp\{-bP\} \propto P^{a-1} \exp\{-bP\};$$

$$\text{ii) } \pi(\theta) = \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \propto \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\};$$

$$\text{iii) } \pi(\beta_s) = \frac{\exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\}}{\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} d\beta_s} I_\beta(\beta) \propto \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} I_\beta(\beta)$$

A distribuição a posteriori conjunta é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\beta, P, \theta, u_i|x_{its}, Y_{it}) &= \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \exp\{y_{it}\eta_{it} - \exp(\eta_{it}) - \ln y_{it}!\} \prod_{i=1}^N \frac{\theta^P}{\Gamma(P)} u_i^{P-1} \exp(-\theta u_i) \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \\ &\quad \exp(-bP) \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \prod_{s=1}^S \frac{\exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\}}{\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} d\beta_s} I_\beta(\beta) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \pi(\beta, P, \theta, u_i|x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\eta_{it} - \exp(\eta_{it})] - \theta \left(d + \sum_{i=1}^N u_i\right) - bP\right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta) \end{aligned}$$

Para a implementação computacional é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori dos parâmetros:

i) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\beta$ :

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\eta_{it} - \exp(\eta_{it})] - \sum_{s=1}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right\} I_\beta(\beta)$$



$$\begin{aligned} \pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, u_i, x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[ y_{it} \left( \sum_{s=1}^S \beta_s \ln x_{its} - u_i \right) - \exp(\eta_{it}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta) \end{aligned}$$

Logo,

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\beta_s \ln x_{its} - \exp(\eta_{it})] - \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta)$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\theta$ :

$$\pi(\theta|\beta, P, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \theta^{NP+w-1} \exp \left\{ -\theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right\}$$

Portanto,

$$\pi(\theta|\beta, P, u_i, x_{its}, Y_{it}) \sim G \left( NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i \right)$$

v) Distribuição condicional completa a posteriori de  $P$ :

$$\pi(P|\beta, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} \exp \{-bP\}$$

$$\pi(P|\beta, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ \sum_{i=1}^N (P-1) \ln u_i \right\} \exp \{-bP\}$$

Portanto,

$$\pi(P|\beta, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ P \left( -b + \sum_{i=1}^N \ln u_i \right) \right\}$$

vi) Distribuição condicional completa a posteriori de  $u$ :

$$\pi(u_i|\beta, P, \theta, u_{-i}, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\eta_{it} - \exp(\eta_{it})] - \theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1}$$

$$\begin{aligned} \pi(u_i|\beta, P, \theta, u_{-i}, x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[ y_{it} \left( \sum_{s=1}^S \beta_s \ln x_{its} - u_i \right) - \exp(\eta_{it}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \theta \sum_{i=1}^N u_i \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi(u_i | \beta, P, \theta, u_{-i}, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [-y_{it} u_i - \exp(\eta_{it})] - \theta u_i \right\} u_i^{P-1}$$

## ANEXO I - Distribuições condicionais completas a posteriori - $Y_{it}|u_i$ Binomial negativa

Considere o modelo generalizado de fronteira estocástica para  $Y_{it}|u_i$  com distribuição binomial negativa:

$$Y_{it}|u_i \sim BN \left( \frac{kA \prod_{s=1}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i}}{1 - A \prod_{s=1}^S x_{its}^{\beta_s} e^{-u_i}}, k \right)$$

$$u_i|P, \theta \sim G(P, \theta),$$

com função de ligação canônica  $\ln \left( \frac{\mu_{it}}{\mu_{it} + k} \right)$  e o preditor linear dado por:

$$\eta_{it} = \ln \left( \frac{\mu_{it}}{\mu_{it} + k} \right) = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{it1} + \dots + \beta_s \ln x_{its} - u_i,$$

As distribuições a priori para os parâmetros são:

$$\text{i) } \pi(P) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \exp\{-bP\} \propto P^{a-1} \exp\{-bP\};$$

$$\text{ii) } \pi(\theta) = \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \propto \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\};$$

$$\text{iii) } \pi(\beta_s) = \frac{\exp \left\{ -\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\}}{\int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} d\beta_s} I_\beta(\beta) \propto \exp \left\{ -\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta)$$

A distribuição a posteriori conjunta é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\beta}, P, \theta, u_i | x_{its}, Y_{it}) &= \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \exp \left\{ y_{it} \eta_{it} + k \ln(1 - \exp(\eta_{it})) + \ln \left( \frac{\Gamma(k + y_{it})}{\Gamma(k) y_{it}!} \right) \right\} \\ &\quad \prod_{i=1}^N \frac{\theta^P}{\Gamma(P)} u_i^{P-1} \exp(-\theta u_i) \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} \exp(-bP) \frac{d^w}{\Gamma(w)} \theta^{w-1} \exp\{-d\theta\} \\ &\quad \prod_{s=1}^S \frac{\exp \left\{ -\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\}}{\int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} d\beta_s} I_\beta(\beta) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\beta}, P, \theta, u_i | x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it} \eta_{it} + k \ln(1 - \exp(\eta_{it}))] - \theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) - bP \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} P^{a-1} \frac{\theta^{NP+w-1}}{\Gamma(P)^N} I_\beta(\beta) \end{aligned}$$

Para a implementação computacional é necessário o conhecimento das distribuições condicionais completas a posteriori dos parâmetros:

i) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\beta$ :

$$\pi(\beta_s|P, \theta, u_i, \beta_{-s}, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\eta_{it} + k \ln(1 - \exp(\eta_{it}))] - \sum_{s=1}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta)$$

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[ y_{it} \left( \sum_{s=1}^S \beta_s \ln x_{its} - u_i \right) + k \ln(1 - \exp(\eta_{it})) \right] - \sum_{s=1}^S \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta)$$

Logo,

$$\pi(\beta_s|P, \theta, \beta_{-s}, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it}\beta_s \ln x_{its} + k \ln(1 - \exp(\eta_{it}))] - \frac{(\beta_s - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2} \right\} I_\beta(\beta)$$

ii) Distribuição condicional completa a posteriori de  $\theta$ :

$$\pi(\theta|\beta, P, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \theta^{NP+w-1} \exp \left\{ -\theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right\}$$

Portanto,

$$\pi(\theta|\beta, P, u_i, x_{its}, Y_{it}) \sim G\left(NP + w, d + \sum_{i=1}^N u_i\right)$$

v) Distribuição condicional completa a posteriori de  $P$ :

$$\pi(P|\beta, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} \exp\{-bP\}$$

$$\pi(P|\beta, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ \sum_{i=1}^N (P-1) \ln u_i \right\} \exp\{-bP\}$$

Portanto,

$$\pi(P|\beta, \theta, u_i, x_{its}, Y_{it}) \propto \frac{\theta^{NP}}{\Gamma(P)^N} P^{a-1} \exp \left\{ P \left( -b + \sum_{i=1}^N \ln u_i \right) \right\}$$

vi) Distribuição condicional completa a posteriori de  $u$ :

$$\pi(u_i | \beta, P, \theta, u_{-i}, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it} \eta_{it} + k \ln(1 - \exp(\eta_{it}))] - \theta \left( d + \sum_{i=1}^N u_i \right) \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1}$$

$$\begin{aligned} \pi(u_i | \beta, P, \theta, u_{-i}, x_{its}, Y_{it}) &\propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[ y_{it} \left( \sum_{s=1}^S \beta_s \ln x_{its} - u_i \right) + k \ln(1 - \exp(\eta_{it})) \right] \right. \\ &\quad \left. - \theta \sum_{i=1}^N u_i \right\} \prod_{i=1}^N u_i^{P-1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi(u_i | \beta, P, \theta, u_{-i}, x_{its}, Y_{it}) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [-y_{it} u_i + k \ln(1 - \exp(\eta_{it}))] - \theta u_i \right\} u_i^{P-1}$$

## ANEXO J - Programa R: simulação dos dados MGFE

```

# NÚMERO DE FIRMAS
N=60
# PERÍODO DE TEMPO
T=6
#Variáveis Regressoras
K=3
# MATRIZ DE CORAVIRÁVEIS - CAMINHO ALEATÓRIO
X1<-NULL
for(i in 1:N){
  xy<-NULL
  xx<-rnorm(1,3.2,0.18)
  xy<-xx
  xy1<-xy
  for(j in 2:T){
    xy1<-xy1+rnorm(1,0,0.01)
    if(xy1<0) xy1<-xy1+rnorm(1,0,0.01)
    xy<-c(xy,xy1)
  }
X1<-round(rbind(X1,xy),3)
}

X2<-NULL
for(i in 1:N){
  vy<-NULL
  vx<-rnorm(1,4.8,0.1)
  vy<-vx
  vy1<-vy
  for(j in 2:T){
    vy1<-vy1+rnorm(1,0,0.01)
    if(vy1<0) vy1<-vy1+rnorm(1,0,0.01)
    vy<-c(vy,vy1)
  }
X2<-round(rbind(X2,vy),3)
}

X0<-matrix(rep(1,N),N,T)
X<-array(c(X0,X1,X2),c(N,T,K))

#BETA
beta<-c(0.5,0.3,0.7)

#INEFICIÊNCIA GAMMA
z<-matrix(0,N,50)
for(a in 1:50){
z[,a]<-round(sort(rgamma(N,shape=0.8,scale=1)),3)
zmed<-round(apply(z,1,mean),3)
}

```

```

#LOG(LAMBDA)
eta<-array(0,c(N,T,50))
for(i in 1:N){
  for(j in 1:T){
    for(a in 1:50){
      eta[i,j,a]<-X[i,j,]*%*%beta - z[i,a] }}}

#MODELO LNY|u ~ NORMAL
sigma2e<-0.05
Y<-array(0,c(N,T,50))
nu<-0.22
for(i in 1:N){
  for(j in 1:T){
    for(a in 1:50){
Y[i,j,a]<-round(rnorm(1,mean=eta[i,j,a],sd=sqrt(sigma2e)),3) }}}

#MODELO Y|u ~ GAMA
Y<-array(0,c(N,T,50))
nu<-0.22
for(i in 1:N){
  for(j in 1:T){
    for(a in 1:50){
Y[i,j,a]<-round(rgamma(1,shape=nu^(-2),
      rate=1/(exp(eta[i,j,a]))*nu^(-2)),3)
    }}}

#MODELO Y|u ~ NORMAL
sigma2e<-0.05
Y<-array(0,c(N,T,50))
nu<-0.22
for(i in 1:N){
  for(j in 1:T){
    for(a in 1:50){
Y[i,j,a]<-round(rnorm(1,mean=exp(eta[i,j,a]),sd=sqrt(sigma2e)),3) }}}

#MODELO Y|u ~ POISSON
Y<-array(0,c(N,T,50))
for(i in 1:N){
  for(j in 1:T){
    for(a in 1:50){
Y[i,j,a]<-rpois(1,exp(loglamb[i,j,a])) }}}

#MODELO Y|u ~ BINOMIAL NEGATIVA
pe<-array(0,c(N,T,50))
for(i in 1:N){
  for(j in 1:T){
    for(a in 1:50){
pe[i,j,a]<-k/(exp(logmu[i,j,a])+k)}}}

```

```
Y<-array(0,c(N,T,50))
for(i in 1:N){
  for(j in 1:T){
    for(a in 1:50){
      Y[i,j,a]<-round(rnbinom(1, size=k, prob=pe[i,j,a]),3) }}}}
```



## ANEXO K - Programa Winbugs: análise dos dados MGFE

```

#MODELO LNY|u ~ NORMAL
model {
  for (i in 1:num.obs){
    u[i] ~ dgamma(P,theta)
    eff[i] <- exp(-u[i])
    for(t in 1:num.temp){
      X[i,t,1] <- x1[i,t]
      X[i,t,2] <- x2[i,t]
mu[i,t] <- beta0 + beta[1]*(X[i,t,1]-xbar1)
      + beta[2]*(X[i,t,2]-xbar2) - u[i]
y[i,t] ~ dnorm(mu[i,t],tau) }}

#MODELO Y|u ~ Gama
model {
  for (i in 1:num.obs){
    u[i] ~ dgamma(P,theta)
    eff[i] <- exp(-u[i])
    for(t in 1:num.temp){
      X[i,t,1] <- x1[i,t]
      X[i,t,2] <- x2[i,t]
log(mu[i,t]) <- beta0 + beta[1]*(X[i,t,1]-xbar1)
      + beta[2]*(X[i,t,2]-xbar2) - u[i]
sha[i,t]<-pow(nu,-2)
      b[i,t]<-pow(nu,-2) / mu[i,t]
y[i,t] ~ dgamma(sha[i,t],b[i,t])}}

#MODELO Y|u ~ NORMAL
model {
  for (i in 1:num.obs){
    u[i] ~ dgamma(P,theta)
    eff[i] <- exp(-u[i])
    for(t in 1:num.temp){
      X[i,t,1] <- x1[i,t]
      X[i,t,2] <- x2[i,t]
log(mu[i,t]) <- beta0 + beta[1]*(X[i,t,1]-xbar1)
      + beta[2]*(X[i,t,2]-xbar2) - u[i]
y[i,t] ~ dnorm(mu[i,t],tau) }}

#MODELO Y|u ~ POISSON
model {
  for (i in 1:num.obs){
    u[i] ~ dgamma(P,theta)
    eff[i] <- exp(-u[i])
  for(t in 1:num.temp){
    X[i,t,1] <- x1[i,t]
    X[i,t,2] <- x2[i,t]

```

```

log(mu[i,t]) <- beta0 + beta[1]*(X[i,t,2]-xbar1)
                + beta[2]*(X[i,t,2]-xbar2) - u[i]
y[i,t] ~ dpois(mu[i,t]) }}

#MODELO Y|u ~ BINOMIAL NEGATIVA
model {
  for (i in 1:num.obs){
    u[i] ~ dgamma(P,theta)
    eff[i] <- exp(-u[i])
    for(t in 1:num.temp){
      X[i,t,1] <- x1[i,t]
      X[i,t,2] <- x2[i,t]
      log(mu[i,t]) <- beta0 + beta[1]*(X[i,t,1]-xbar1)
                    + beta[2]*(X[i,t,2]-xbar2) - u[i]
      p[i,t] <- A/(mu[i,t]+A)
      Y[i,t] ~ dnegbin(p[i,t],A)
    }
  }
}

beta0 ~ djl.dnorm.trunc(0.03,0.01,0,1000)
for(k in 1:2){
  beta[k] ~ djl.dnorm.trunc(0.03,0.01,0,1000)
}
P ~ dgamma(0.8,1)
theta~ dgamma(0.01,0.01)
nu ~ dgamma(0.01,0.01)
tau ~ dgamma(0.01,0.01)
sigma2u <- P/pow(theta,2)
sigma2v <- 1/tau
beta_ini <- beta0 - beta[1]*xbar1 - beta[2]*xbar2
A <-10 }

```

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)