UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ESTABILIDADE DE EQUILÍBRIOS DE SISTEMAS HAMILTONIANOS AUTÔNOMOS E PERIÓDICOS

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

FÁBIO DOS SANTOS

Sob orientação do professor Cláudio Vidal Diaz

Recife, 2007.

Santos, Fábio dos
Estabilidade de equilíbrios de sistemas hamiltonianos autônomos e periódicos / Fábio dos Santos. – Recife : O Autor, 2007.
82 folhas.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Sistemas hamiltonianos. 2. Estabilidade. 3. Mecânica Celeste. 4. Equilíbrios. I. Título.

515.39 CDD (22.ed.) MEI2007-087

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

Aprovado: ______________________________

José Cláudio Vidal Diaz, UFPE
Orientador

____
Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE

____
Eduardo Shirlippe Góes Leandro, UFPE

____
Jair Koiller, UGF

____
Ronaldo Alves Garcia, UFG

ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO DE SISTEMAS HAMILTONIANOS AUTÔNOMOS E PERIÓDICOS

por
Fábio dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Maio - 2007

À minha filha Amanda.

AGRADECIMENTOS

À minha filha Amanda, simplesmente por existir.

Aos meus pais José Inácio e Arlete, pelo incentivo dado a cada coisa que faço, inclusive aos meus estudos de doutorado.

À minha esposa Cristina Carvalho pela amizade, companheirismo, compreensão e por nossa linda filha Amanda.

Ao professor Cláudio Vidal por sua orientação, dedicação, disponibilidade e amizade.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Aos meus irmãos Naldison e Unaldo e minhas irmãs Ana, Neuma, Flávia, Fabiana e Ada, que sempre torceram por mim.

A todos meus colegas do dmat-UFPE que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização deste trabalho, em particular, a Éder, Allyson, André, Paulo Rabelo, Rodrigo, João Paulo, Joilson, Marcelo, Zaqueu, Claudio Cristino, Adriano Regis, Adriano Veiga, Ana Cristina, Hélio, Umberto, Débora, Eudes, Anete, Wallison, Evaneide, Renata, Wilberclay, Tarciana, Luis del Campos, Hugo, Lucas, Kalasas, Cleto, Ademarkson, Angelo, Lúcia, Isis, Adecarlos, etc.

A todos que esqueci de citar no ítem acima.

Ao meu grande Amigo de mestrado Gleidson Gomes.

Aos pernas de pau da pelada do Inocop, por me deixarem fazer mais gols que Pelé.

Novamente, agradeço a Éder (subentende-se Éder e Marta), Allyson e André pela boa convivência como colegas de apartamento.

A todos os professores do Dmat-UFPE, em particular a Claudio Vidal, César Castilho, Eduardo Leandro, Aron Simis, Fernando Cardoso, pelos bons cursos dados, importantes na minha formaçao e, quanto aos três primeiros e Hildeberto Cabral, também pelas palestras do grupo de pesquisa Sistemas Dinâmicos em Mecânica Classica e Celeste.

Aos funcionários do Dmat-UFPE: Tânia, Claudia, Seu Antonio, Fátima, Manoel Ronaldo e todos do Dma-UFS que, direta ou indiretamente, tiveram um papel importante na minha formação.

A Lucas o amigão conhecido popularmente como Alemão que, por vender cervejas geladas e baratas, tem um papel importante na formação dos alunos do Dmat-UFPE, pois lá saem grandes teoremas.

A todos os meus amigos sergipanos e pernambucanos, que sempre torceram por mim.

RESUMO

Nesta tese, fazemos um estudo detalhado da estabilidade de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos autônomos e periódicos com n graus de liberdade que possuem todos os autovalores imaginários puros nos casos de existência de ressonâncias simples e múltiplas . Observando que o conjunto das ressonâncias possui estrutura de módulo finitamente gerado, caracterizamos a forma normal de Lie da função Hamiltoniana dependendo da matriz do sistema linearizado ser diagonalizável ou não. Usando esta caracterização, obtemos integrais primeiras do sistema truncado na forma normal de Lie em qualquer ordem, as quais são bastante úteis para fornecer nossos critérios para conhecer a estabilidade do equilíbrio. Nossos Teoremas Principais são bastantes gerais pois incluem e estendem vários resultados existentes na literatura além de fornecerem respostas a estabilidade nos casos críticos de vários artigos. Para sistemas com ressonâncias simples, nosso Teorema Principal esgota todas as possibilidades de se detectar estabilidade e instabilidade em alguma ordem finita através do truncamento da forma normal de Lie da função Hamiltoniana. No caso de ressonâncias múltiplas, uma resposta bem geral, mas não completa, é dada sobre a estabilidade do equilíbrio. Como aplicação dos nossos resultados, fizemos um estudo da estabilidade do movimento de partes centrais de galáxias.

Palavras chaves: Sistemas Hamiltonianos, Estabilidade, Equilíbrios.

ABSTRACT

In this thesis, we made a detailed study of the stability of equilibrium solutions of autonomous and periodic Hamiltonianos systems with n degrees of freedom that possess all eigenvalues pure imaginary in the case of existence of simple and multiple resonances. Observing that the set of the resonances possess structure of module finitely generated, we characterize the Lie normal form of the Hamiltoniana function depending on the matrix of the linearized system to be diagonalizable or not. Using this characterization, we get first integrals of the system truncated in any order in its Lie normal form, which are sufficiently useful to supply our criteria to decide the stability of the equilibrium. Our Main Theorems are sufficient generalities therefore indicate and extend some existing results in literature beyond supplying to answers the stability in the critical cases of some articles. For systems with simple resonances our Main Theorem depletes all the possibilities of detecting stability and instability in some finite order through the truncation of the Lie normal form of the Hamiltonian function. In the case of multiples resonances, a general, but not complete reply, it is given on the stability of the equilibrium. As application of our results, we made a study of the stability of motions of galaxies central parts.

Key words: Hamiltonian systems, Stability, equilibrium.

Sumário

Introdução

Os sistemas Hamiltonianos aparecem naturalmente em diversas teorias importantes, por exemplo o problema dos n-corpos, problema fundamental da Mecânica Celeste, admite uma formulação Hamiltoniana. O estudo dos tais sistemas tem sido uma das principais áreas de pesquisa das últimas décadas e entre os problemas mais importantes, destaca-se o de saber se uma determinada solução é estável ou não. Uma motivação inicial a este problema foi dada por Newton, ao questionar sobre a estabilidade do sistema solar. O sistema solar é eterno? ou será que as pertubações externas farão com que o sistema solar deixe de existir num futuro distante?

Desde que a estabilidade de certas soluções de um sistema Hamiltoniano pode ser reduzido a estabilidade de um equilíbrio que, podemos supor sem perder generalidade, seja a origem do espaço de fase, é suficiente estudar estabilidade de equilíbrios. Nesta tese, daremos respostas sobre a estabilidade de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos em alguns casos que ainda não foram considerados. É importante frisar que o problema de detectar a estabilidade de uma solução de equilíbrio de um sistema Hamiltoniano é, em geral, um problema aberto demasiadamente difícil e somente em casos particulares existem métodos para conhecer. Dois grandes resultados gerais são:

- se a parte quadrática da expansão da função Hamiltoniana em série de Taylor em torno da solução de equilíbrio nula tem sinal definido no caso autônomo, a solução nula é estável no sentido de Liapunov (ver, por exemplo [11] ou [35]), desde que podemos tomar a função Hamiltoniana como função de Liapunov e, então o Teorema de Liapunov pode ser aplicado. Este resultado é conhecido como Teorema de Dirichlet.

- se existir um autovalor (respectivamente, no caso periódico, expoente característico) do sistema linearizado com parte real não-nula, então a solução nula é instável (ver, por exemplo, [11] ou [35]).

Assim, suporemos em toda esta tese que os autovalores (respectivamente, no caso periódico, expoentes característicos) são imaginários puros e que a parte quadrática não tem sinal definido no caso autônomo. Neste caso, diversos resultados parciais foram publicados com informação sobre esta pergunta, a maioria deles por pesquisadores Russos, por exemplo, A. Kolmogorov (Teoria

KAM); M. Liapunov [22]; N. Chetaev [11]; N. Krasovskii [20]; V. Arnold [2], [4], [4];A. Markeev [24], [25], [26], [27], [28], [29]; A. Bruno [7]; A. Sokolskii [36], [37], [38], [14], [15]; A. Kunitsyn [18], [19]; L. Khazin [16], [17]; A. Ivanov [14], [15], etc. deram importantes contribuições. Além desses, J. K. Moser [31], [32] teve importantes contribuições. Com o desenvolvimento da teoria KAM, vários matemáticos trabalharam na direção de usar tal teoria para estabelecer estabilidade, só que esta técnica impõe grandes limitações, por exemplo, de dimensões, já que tal teoria só vale no plano. Dois grandes resultados para sistema autônomos com dois graus de liberdade que usam esta teoria são o Teorema de Arnold-Moser e o Teorema de Cabral-Meyer (1999). O último é o teorema mais importante sobre sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade e ele é uma generalização de vários resultados particulares sobre estabilidade na presença de ressonâncias e, em particular, do Teorema de Arnold-Moser. Este teorema deixa possibilidades de generalização, já que ele não da informação no caso crítico, isto é, quando a função ângulo tem todos os zeros degenerados. Este caso crítico será tratado nesta tese. Outras importantes contribuições no caso autônomo diagonalizável foram dadas por Moser em [32] com o Teorema de Arnold-Moser; Markeev em [25] ou [24] estudou sistema Hamiltonianos com dois graus de liberdade; Alfriend, Richardson [5] e Khazin [16] estudaram a estabilidade sob hipóteses de existência de ressonâncias simples de terceira e quarta ordem para sistemas Hamiltonianos autônomos com n graus de liberdade. Khazin em [17] estudou estabilidade sob existência de ressonâncias múltiplas de terceira ordem em sistemas com número de graus de liberdade arbitrário e em [18] os autores Kunitsyn e Perezhogin consideram o caso de ressonâncias múltiplas de quarta ordem. Sobre sistemas não-autônomos, o problema de estabilidade com um grau de liberdade foi considerado por Markeev em [27], Sokolskii em [37] (ver Teorema 2.1) e recentemente Cabral e Meyer [8] usando idéias do livro de Markeev [24] estabelecem o resultado geral citado acima. Para dois graus de liberdade alguns casos dependendo das ressonâncias foram analisados por Markeev em [26] quando todos seus multiplicadores são distintos e as freqüências apresentam certas relações de ressonância de terceira e quarta ordem. O caso onde os multiplicadores do sistema linearizado são iguais e satisfazem certas ressonâncias paramétricas foi estudado por Ivanov e Sokolskii em [14] e [15]. Em [19], Dzhumabayeva e Kunitsyn estudaram o problema de estabilidade no caso periódico sob hipótese de existência de ressonâncias múltiplas de quarta ordem. Outra importante contribuição é devido a Moser [32], provando que na ausência de ressonância temos estabilidade formal. Apesar dos grandes progressos nesta área nos últimos anos, ainda restam muitas perguntas. Algumas delas serão respondidas nesta tese.

Em praticamente todos resultados publicados os autores dão informações em alguns sub-casos nos quais analisam a forma normal do sistema Hamiltoniano até uma ordem finita, mas o tipo de estabilidade fornecido, em geral, não é no sentido de Liapunov. A técnica usada nesta tese é estudar a estabilidade do ponto do equilíbrio como segue. Primeiramente, a forma normal de Lie até determinada ordem é obtida e após isso, aplicamos o Teorema de Chetaev ao Hamiltonian truncado na forma normal para obter um critério para a instabilidade. A fim de obter a informação sobre a estabilidade usamos o Teorema de Liapunov ao sistema truncado, em toda a ordem finita mas arbitrária. Neste ponto, Khazin em [16] introduziu o conceito da Birkhoff-estabilidade, para dizer que o equilíbrio do sistema Hamiltoniano após aplicar uma transformação de Birkhoff é estável em toda a ordem finita mas arbitrária. Desde que estamos considerando a transformação de Lie e incluiremos o caso não diagonalizável no qual não está definida a forma normal de Birkhoff, por analogia nós chamaremos este tipo de estabilidade de Lie-estabilidade. Em geral, para nosso conhecimento, após ter revisado a literatura com tópicos relacionados, a afirmação "Lie-estabilidade (resp. a Birkhoff-estabilidade) implica a estabilidade no sentido de Liapunov "ainda não foi provada.

Nós últimos anos pouquíssimos pesquisadores se dedicam a estudar o problema de estabilidade de soluções de equilíbrios em sistemas Hamiltonianos e poucos são os resultados recentes de grande relevância. Uma grande dificuldade da área é a pouca vastidão de resultados gerais que podem ser aplicados. Os principais teoremas gerais usados são os clássicos Teorema da Estabilidade de Liapunov, Teorema da Instabilidade de Liapunov e o Teorema de Chetaev além, é claro, da Teoria KAM no caso de baixas dimensões.

É importante enfatizar que o estudo da estabilidade de uma solução periódica de um sistema Hamiltonian autônomo com n graus de liberdade pode ser reduzido ao estudo de uma solução do equilíbrio de um sistema Hamiltoniano periódico. Nesse ponto, como nossos resultados no caso diagonalizável se aplicam ao caso periódico, nosso trabalho pode ser aplicado ao estudo da estabilidade de soluções periódicas.

No estudo da estabilidade dos sistemas truncados é crucial saber se as freqüências $\omega_1, \cdots, \omega_n$ são linearmente independentes ou dependente sobre $\mathbb{Q}$ como é notado por Arnold em [1] e Moser em [32]. No primeiro caso, dizemos que o sistema não possui ressonâncias e, no segundo caso, possui ressonâncias. Na ausência de ressonâncias, Lie-estabilidade (Birkhoff-estabilidade) é fácil de verificar, mas no segundo caso, apenas em casos particulares é possível ter a informação sobre a Lie-estabilidade. Nesta tese, deixaremos bem explícito o papel das ressonâncias para a forma normal da função Hamiltoniana, a qual é usada para obter os teoremas de estabilidade.

A importância dos resultados principais desta tese podem ser vistos de diferentes ponto de vista. Por exemplo, usando idéias do livro clássico de Markeev [24], Cabral e Meyer [8] no Teorema 4.1 deram um resultado geral para sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade válido nos casos ressonantes e não-ressonantes. Nesta tese, nós damos resultados similares mas para sistemas com n-graus da liberdade no caso autônomo e no caso periódico. Por outro lado, existe um caso crítico no Teorema 4.1, onde os autores não deram qualquer informação sobre o tipo de estabilidade. Em nosso trabalho, nós damos a informação no caso crítico também. Para sistemas Hamiltonianos autônomos com n graus de liberdade sob a presença de uma única ressonância de ordem três e quatro temos os trabalhos de Khazin [16] e de Alfriend e Richardson [5]. Em nosso trabalho nós generalizamos estes resultados para toda a ordem de ressonância e incluímos o caso periódico. Recentemente em 2001, Markeev [28] estudou estabilidade no caso crítico da ressonância $3:1$. Em nosso trabalho nós também re-obtemos o resultado de Markeev e, além disso, melhoramos estes resultados, porque damos informações num caso adicional que Markeev não considerou. No caso onde a matriz do sistema linearizado é não-diagonalizável, alguns resultados parciais foram publicados com informações sobre a questão da estabilidade do equilíbrio. Por exemplo, para sistemas Hamiltonian com dois graus de liberdade, Sokolskii em [36] forneceu um teorema sobre a estabilidade formal e a instabilidade no sentido de Liapunov. Em seu critério, a estabilidade depende somente de um coeficiente real, A, o qual depende dos coeficientes dos termos de quarta ordem da função Hamiltoniana original. Então, se $A > 0$ a solução nula é formalmente estável e se $A < 0$ a solução nula é instável no sentido de Liapunov. Em [38] Sokolskii melhora seu resultado e mostra que no caso $A > 0$ a solução nula é estável no sentido de Liapunov. Mas, seguindo argumentos de Treshchev [39], a prova dada por Sokolskii em [38] envolve um erro, porque a integral que define a variável ação não é avaliada corretamente. Além disso, Treshchev em [39] mostra que se $A > 0$ de fato, a solução do equilíbrio é estável no sentido de Liapunov. Também, enfatizamos que nos artigos [36], [38] e [39] os autores não deram nenhuma informação sobre o tipo de estabilidade da solução de equilíbrio no caso crítico, isto é, $A = 0$. Para sistemas Hamiltonianos com três graus de liberdade, temos o trabalho de Mansilla [23] publicado em 2006, o qual dá informações de acordo com termos de quarta ordem. Outra vez, neste artigo o autor não dá informações sobre a estabilidade no caso crítico de quarta ordem. Nesta tese, damos uma generalização dos resultados de Sokolskii [36] no sentido de dar informações sobre a estabilidade nos casos em que os termos de quarta ordem nada afirmam, isto é, no caso $A = 0$. Também generalizamos os resultados de Sokolskii e de Mansilla para sistemas com n graus de liberdade e melhoramos o Teorema de Mansilla no sentido de dar informações nos casos críticos.

É importante frisar aqui que, esta tese de doutorado é uma continuação da minha Dissertação de Mestrado [34] sob a orientação, também, de Cláudio Vidal Diaz. Assim, uma leitura preliminar da minha Dissertação de Mestrado facilita a leitura desta tese.

Esta tese está dividida em seis capítulos organizados como segue.

No primeiro capítulo damos uma visão geral do problema, mostrando definições e resultados provados nos últimos anos que serão melhorados e/ou estendidos nesta tese, ele não tem um caráter essencial para a leitura da tese e o leitor mais especializado pode começar com o capítulo dois, no qual fornecemos resultados importantes envolvendo propriedades do módulo de ressonâncias e da forma normal de Lie da função Hamiltoniana. Uma conseqüência importante dos teoremas deste capítulo é que podemos explicitar algumas integrais primeiras do Hamiltoniano truncado na forma normal de Lie dependendo de propriedades das ressonâncias, as quais serão importantes para provar os teoremas sobre estabilidade dos capítulos seguintes.

No terceiro capítulo, assumindo que o módulo de ressonâncias é cíclico usaremos as caracterizações das formas normais ou, mais precisamente, as integrais primeiras do sistema truncado na forma normal de Lie para obter condições necessárias para Lie-estabilidade e instabilidade no sentido de Liapunov no caso diagonalizável autônomo e periódico. No caso não-diagonalizável autônomo forneceremos um teorema geral para Lie-estabilidade ou Lie-instabilidade no qual usamos um lema sobre sistemas mecânicos para provar a instabilidade. Os resultados deste capítulo, apesar de serem aplicados apenas quando o módulo de ressonâncias é simples, são bastante gerais e um fato importante a ser frisado é que dão informações nos casos críticos de vários artigos.

O capítulo quatro é dedicado ao estudo da estabilidade no caso diagonalizável de sistemas autônomos e periódicos quando o módulo de ressonâncias tem mais de um gerador. Damos diferentes condições necessária para Lie-estabilidade da solução de equilíbrio e assumindo uma certa particularidade sobre o módulo de ressonâncias damos condições necessárias para instabilidade no sentido de Liapunov, que apesar da particularidade sobre o módulo, o resultado é bem geral ao ponto de ser o mais geral desta tese.

Afim de mostrar generalidade nos nossos resultados, no quinto capítulo mostramos que os nossos resultados estendem e melhoram vários resultados conhecidos na literatura, inclusive um resultado nosso publicado recentemente (2005) no periódico "Regular and Chaotic Dynamics"que também é parte desta tese.

No último capítulo, damos uma aplicação dos nossos resultados ao estudo da estabilidade de um potencial galático. Nessa aplicação temos ressonância de segunda ordem e parte quadrática diagonalizável. O nosso critério utiliza até termos de oitava ordem. É bom saber que os resultados conhecidos, por exemplo, o Teorema de Cabral-Meyer não daria informações neste caso e os nossos resultados fornecem um critério. Para fornecer este critério, calculamos a forma normal de Lie da função Hamiltoniana usando o Maple 10 e estudamos os zeros da função ângulo do nosso Teorema Principal.

Capítulo 1

Uma visão geral do problema

O objetivo deste capítulo é passar ao leitor uma visão geral do problema de estabilidade, notando algumas diferentes definições de estabilidade e alguns resultados conhecidos que serão melhorados nesta tese. A leitura deste capítulo deixará o leitor ciente da importância dos resultados principais desta tese, como por exemplo, o caso crítico de vários artigos que, até o momento não eram bem entendidos.

1.1 Algumas definições de estabilidade

Considere um sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \tag{1.1}$$

Sabe-se da teoria básica das equações diferenciais ordinárias que satisfeitas certas condições sobre o campo acima, cada solução $\mathbf{z}(t)$ do sistema Hamiltoniano (1.1) depende continuamente de t e das condições iniciais $(\mathbf{z}_0, t_0)$. Em particular, prova-se que pequenas mudanças ou pertubações em $\mathbf{z}_0$ produzem pequenas mudanças em $\mathbf{z}(t)$ num intervalo ao redor de t_0. Mostra-se também que duas soluções que começam próximas, permanecem próximas durante um intervalo de tempo suficientemente grande, mas finito. Uma pergunta que se faz é se duas soluções que se iniciam próximas permanecem próximas para todo tempo, ou será que existem soluções que desviam-se, não importando o quão próximas elas se iniciaram. Questões como estas pertencem a um ramo da matemática conhecido como teoria da estabilidade, assunto fundamental desta tese.

Dada uma solução $\mathbf{z}(t)$ do sistema Hamiltoniano (1.1) é possível escolher um sistema de coordenadas dependendo de t tal que a solução $\mathbf{z}(t)$ seja uma solução de equilíbrio do novo sistema, mais especificamente, podemos supor que essa solução de equilíbrio é a origem do espaço de fase. Por esse motivo, assumiremos sem perda de generalidade que a origem do espaço da fase é um solução de equilíbrio de (1.1). Nesta tese $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ no caso autônomo ou $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) =$

$H(\mathbf{q},\mathbf{p},t+2\pi)$ no caso 2π-periódico, é uma função analítica real de $(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (q_1,\cdots,q_n,p_1\cdots,p_n)$ numa vizinhança do ponto de equilíbrio. Supõe-se que a série de Taylor de H numa vizinhança da origem é

$$H = H_2 + H_3 + \cdots + H_j + \cdots, \tag{1.2}$$

onde H_j representa um polinômio homogêneo do grau j em $(\mathbf{q},\mathbf{p})$, isto é,

$$H_j = \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=j} h_{\mathbf{kl}}\, \mathbf{q}^{\mathbf{k}}\mathbf{p}^{\mathbf{l}}, \tag{1.3}$$

com $\mathbf{k} = (k_1,\cdots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{l} = (l_1,\cdots,l_n) \in \mathbb{Z}^n$, $|\mathbf{k}| = |k_1| + \cdots + |k_n|$, $|\mathbf{l}| = |l_1| + \cdots + |l_n|$, $h_{\mathbf{kl}} = h_{k_1\cdots k_n l_1 \cdots l_n}$, $\mathbf{q}^{\mathbf{k}} = q_1^{k_1}\cdots q_n^{k_n}$ e $\mathbf{p}^{\mathbf{l}} = p_1^{l_1}\cdots p_n^{l_n}$. Note que no caso 2π-periódico $h_{\mathbf{kl}} = h_{\mathbf{kl}}(t) = h_{\mathbf{kl}}(t+2\pi)$.

Vamos agora definir estabilidade da solução de equilíbrio nula de (1.1). A grosso modo, dizemos que esta solução é estável quando toda solução $\mathbf{z}(t)$ que se inicia com valores próximos de zero está definida para todo $t \geq 0$ e permanece próxima durante todo o tempo. Vamos a definição precisa:

Definição 1.1.1 (Estabilidade no sentido de Liapunov) *(A) A solução de equilíbrio nula de (1.1) é dita estável no sentido de Liapunov se para cada número real $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathbf{z}(t)$ é uma solução de (1.1) satisfazendo $\|\mathbf{z}(0)\| < \delta$, então $\|\mathbf{z}(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$;*
(B) Se a solução nula não é estável dizemos que ela é instável no sentido de Liapunov.

Devido ao grande valor prático e teórico, a teoria da estabilidade é uma área muito importantes de pesquisa em equações diferenciais. Freqüentemente, em problemas das engenharias, da física, ou da própria matemática, precisa-se saber sobre a estabilidade de uma certa solução. Na Mecânica Celeste, por exemplo, é de grande interesse prático saber sobre a estabilidade de soluções particulares do problema dos n-corpos, por exemplo, dos pontos de equilíbrio relativos.

Existem outros tipos de estabilidade que algumas vezes é mais fácil de checar e suficiente em aplicações no caso tratado aqui, por exemplo, a estabilidade formal definida a seguir.

Definição 1.1.2 (Estabilidade formal) *Dizemos que a solução de equilíbrio nula do sistema Hamiltoniano (1.1) é formalmente estável (ou "quase estável"na notação de Moser [31]) se existe uma série de potências G, talvez divergente, que formalmente é uma integral primeira definida positiva autônomo ou 2π-periódico em t, dependendo do caso.*

Observação 1.1.1 *Em outras palavras, o equilíbrio é formalmente estável se todos os coeficientes da série de potências*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{1.4}$$

são identicamente nulos e um número finito de formas de grau mínimo na série G representa uma função definida positiva.

A noção de estabilidade formal é muito importante para analisar a estabilidade num intervalo de tempo muito grande, porém finito. A presença da estabilidade formal significa que a instabilidade no sentido de Liapunov não é detectada pelo cálculo de termos de ordem por mais elevada que seja no desenvolvimento do Hamiltoniano em série de potências. Em outras palavras: se o sistema é instável no sentido de Liapunov mas formalmente estável, então a instabilidade não é causada por termos de ordem finita. Sob a existência de estabilidade formal, se existem trajetórias que se afastam do movimento não perturbado, então o movimento ao longo dela se faz de modo extremamente lento. Vamos, neste momento, invocar Moser [31] e lembrar seu comentário "É um importante problema matemático encontrar a relação entre estabilidade formal e estabilidade no sentido de Liapunov". A priori não se conhece um exemplo de um equilíbrio formalmente estável mas instável no sentido de Liapunov. Segundo Moser [31] a conjectura é que esta é a situação. No caso particular onde o sistema é autônomo e a parte quadrática é definida positiva, trivialmente os dois tipos de estabilidade discutidos coincidem, assim como no caso onde a forma normal da função Hamiltoniana converge.

Outra definição de estabilidade, a qual aparece no paper de Khazin [16] será lembrada aqui.

Definição 1.1.3 (Birkhoff-estabilidade) *No caso em que a matriz do sistema linearizado associado a (1.1) é diagonalizável, dizemos que a solução nula de (1.1) é Birkhoff-estável se existe $m > 2$ tal que a solução nula do sistema Hamiltoniano na forma normal de Birkhoff em toda ordem $j \geq m$ é estável no sentido de Liapunov.*

Como nesta tese também estudaremos o caso não-diagonalizável, para a qual a forma normal de Birkhoff não está bem definida e a forma normal de Lie está, definiremos e usaremos outro tipo de estabilidade que no caso diagonalizável coincide com a definição acima.

Definição 1.1.4 (Lie-estabilidade e Lie-instabilidade) *(A) Dizemos que a solução nula de (1.1) é Lie-estável se existe $m > 2$ tal que a solução nula do sistema Hamiltoniano na forma normal de Lie em toda ordem $j \geq m$ é estável no sentido de Liapunov.*
(B) Analogamente, dizemos que a solução nula de (1.1) é Lie-instável se existe $m > 2$ tal que a solução nula do sistema Hamiltoniano na forma normal de Lie em toda ordem $j \geq m$ é instável no sentido de Liapunov.

Mais um problema matemático interessante: qual a relação ente Lie-estabilidade e estabilidade no sentido de Liapunov? e entre Lie-instabilidade e instabilidade no sentido de Liapunov? por enquanto não conhecemos respostas para estas questões. Não conhecemos nenhuma solução de equilíbrio estável no sentido de Liapunov que não seja Lie-estável, ou vice versa.

Outro tipo de estabilidade é a estabilidade para a maioria das condições iniciais que definiremos a seguir segundo Arnold [4].

Fixe V uma vizinhança da origem e seja E_V o conjunto dos pontos $\mathbf{z}_0 \in V$ tais que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathbf{z}(t)$ é uma solução de (1.1) satisfazendo $\|\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0\| < \delta$ então $\|\mathbf{z}(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$

Definição 1.1.5 (Estabilidade para a maioria das condições iniciais) *Dizemos que a solução de equilíbrio nula de (1.1) é estável para a maioria das condições iniciais se a medida de Lebesgue de E_V coincide com a de V para alguma vizinhança da origem V.*

Sabe-se que o conceito de estabilidade para a maioria das condições inicias é, em geral, mais fraco que o conceito de estabilidade no sentido de Liapunov como foi provado por Arnold [4] por meio de um exemplo e será feito em breve, nesta tese.

1.2 Alguns resultados conhecidos

O objetivo desta seção é mostrar uma recompilação dos principais resultados obtidos nos últimos anos sobre estabilidade de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos. Na prática, é bastante difícil dizer se a solução de equilíbrio nula de (1.1) é estável no sentido de Liapunov, já que existem poucas ferramentas matemáticas que podem auxiliar-nos. Um método conhecido que as vezes pode responder a questão é a análise das equações linearizadas. Veremos como isso funciona. Primeiramente assuma que o campo do lado direito em (1.1) é de classe C^1 na vizinhança da origem, sejam A a matriz do sistema linearizado e $\pm\lambda_1,\ldots,\pm\lambda_n$ os autovalores de A. Se existe $j \in \{1,\ldots,n\}$ com parte real não-nula então o equilíbrio é instável no sentido de Liapunov. Em caso contrário, ou seja, quando todos os autovalores têm parte real nula, o problema de estabilidade no sentido de Liapunov é altamente não-trivial. Nesta tese, estudaremos o sub-caso no qual todos os autovalores são imaginários puros, os quais sempre denotaremos por $\pm\omega_1 i,\ldots,\pm\omega_n i$ todos não-nulos.

Mostraremos nesta seção que basicamente todos os resultados usam as mesmas técnicas, a saber, para sistemas Hamiltonianos periódicos com um grau de liberdade usar o Teorema da Curva Invariante para estabelecer estabilidade ou o Teorema de Chetaev para instabilidade. Um sistema com dois graus de liberdade autônomos se reduz a um sistema com um grau de liberdade e periódico no tempo e usam-se os resultados conhecidos. Para sistemas com n graus de liberdade os resultados sobre estabilidade são formais no sentido de dependerem da convergência da forma normal do Hamiltoniano e para instabilidade se usam o Teorema da Instabilidade de Liapunov ou o Teorema de Chetaev.

1.2.1 O caso autônomo versus o caso periódico em sistemas com um grau de liberdade

Nesta subseção mostraremos que existem importantes e significativas diferenças entre os casos autônomos e periódicos que podem ser facilmente notados já para sistema com um grau de liberdade. Para iniciar, no caso autônomo se a parte quadrática é definida positiva (ou definida negativa) então pelo Teorema de Dirichlet-Lagrange segue que o equilíbrio é estável no sentido de Liapunov. Este resultado, em geral, não é verdadeiro para o caso periódico como veremos nos próximos exemplos.

Primeiramente considere o seguinte exemplo

$$\ddot{x}+x=0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

É claro que a função Hamiltoniana associada é

$$H=\frac{1}{2}(x^2+y^2), \quad \text{com} \quad y=\dot{x},$$

que é definida positiva e ela é uma integral primeira, então pelo Teorema Dirichlet-Lagrange a origem é estável no sentido de Liapunov. No entanto, considere a equação de Hill,

$$\ddot{x}+p(t)\,x=0, \quad x,t\in\mathbb{R},$$

onde $p(t+T)=p(t)$, cuja função Hamiltoniana associada é

$$H=\frac{1}{2}\,[y^2+p(t)x^2], \quad \text{com} \quad y=\dot{x},$$

e as equações do movimento são

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-p(t)x. \tag{1.5}$$

Neste caso não é obvio o tipo de estabilidade da origem. O tipo de estabilidade dependerá da função periódica $p(t)$. Vamos discutir este exemplo com alguns detalhes aqui. Seja $X(t)$ a matriz fundamental de (1.5) dada por

$$X(t)=\begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}.$$

Como $det(X(T))=1$, pois o fluxo é simplético e para cada $t\in\mathbb{R}$ a equação característica é

$$\lambda^2-a\lambda+1=0, \quad \text{onde} \quad a=\varphi(T)+\dot{\psi}(T). \tag{1.6}$$

As raízes de (1.6) são

$$\lambda=\frac{1}{2}[a\pm\sqrt{a^2-4}], \tag{1.7}$$

então, se $a>2$ existe um multiplicador característico de $X(T)$ com módulo maior que um, e portanto a origem será instável. Por outro lado, se $-2<a<2$ então o equilíbrio será estável, pois os multiplicadores característico de $X(T)$ têm módulos um e são distintos.

Construiremos duas soluções independentes de nossa equação de Hill com condições iniciais $\varphi(0)=1$, $\dot{\varphi}(0)=0$, $\psi(0)=0$ e $\dot{\psi}(0)=1$. Elas são dadas pelas séries convergentes

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varphi_k(t) \\ \psi(t) = & \ t+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

com $\varphi_0(t) = 1$, $\psi_0(t) = t$, e para $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) = & \int_0^t (t-t_1)p(t_1)\varphi_{k-1}(t_1)dt_1 \\ = & \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} (t-t_1)(t_1-t_2)\cdots(t_{k-1}-t_k) \\ & p(t_1)p(t_2)\cdots p(t_k)dt_k\cdots dt_2dt_1, \end{aligned} \tag{1.9}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_k(t) = & \int_0^t (t-t_1)p(t_1)\psi_{k-1}(t_1)dt_1 \\ = & \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} (t-t_1)(t_1-t_2)\cdots(t_{k-1}-t_k)t_k \\ & p(t_1)p(t_2)\cdots p(t_k)dt_k\cdots dt_2dt_1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Derivando a última expressão, e substituindo na respectiva série temos

$$\begin{aligned} a = & \varphi(T) + \dot{\psi}(T) \\ = & 2 - T\int_0^T p(t)dt + \\ & \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \int_0^T \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} (T-t_1+t_k)(t_1-t_2)\cdots(t_{k-1}-t_k) \\ & p(t_1)p(t_2)\cdots p(t_k)dt_k\cdots dt_2dt_1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Se assumimos que $p(t) \leq 0$ e não identicamente nula, então

$$\int_0^T p(t)dt < 0,$$

e a integral múltipla e no k-ésimo termo da série (1.11) tem sinal igual a $(-1)^k$; então cada termo do lado direito da expressão (1.11) é positivo, então $a > 2$. Concluímos:

Teorema 1.2.1 *Se a função T-periódica $p(t)$ é não positiva e não identicamente nula, a origem da equação de Hill (1.5) é instável.*

Em particular, na equação de Hill

$$\ddot{x} - \cos^2(t)x = 0,$$

$p(t) = -\cos^2(t)$ (π-periódica) a origem é instável.

Por outro lado, se $p(t) \geq 0$ ponha

$$\begin{aligned} M_k = & \int_0^T \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} (T-t_1+t_k)(t_1-t_2)\cdots(t_{k-1}-t_k)p(t_1) \\ & p(t_2)\cdots p(t_k)dt_k\cdots dt_2dt_1, \end{aligned}$$

para $k \geq 2$ e

$$M_1 = T\int_0^T p(t)dt.$$

Então a expressão para a em (1.11) torna-se

$$a = 2 - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}M_k. \tag{1.12}$$

Pelas afirmações $M_k > 0$ ($k = 1,2,3,\cdots$) e como conhecendo a convergência da série temos que $M_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} M_{k+1} = & \int_0^T\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-1}}\int_0^{t_k}(T-t_1+t_{k+1})(t_1-t_2)\cdots(t_{k-1}-t_k)(t_k-t_{k+1}) \\ & p(t_1)p(t_2)\cdots p(t_k)p(t_{k+1})dt_{k+1}dt_k\cdots dt_2dt_1, \end{aligned}$$

e pela desigualdade

$$(T-t_1+t_{k+1})(t_k-t_{k+1}) \leq \frac{1}{4}(T-t_1+t_k)^2 < \frac{1}{4}(T-t_1+t_k)^2, \quad 0 \leq t_k \leq t_1$$

que é uma conseqüência entre a média geométrica e aritmética. Então

$$\begin{aligned} M_{k+1} \ & \leq \tfrac{T}{4}\int_0^T\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-1}}(T-t_1+t_k)(t_1-t_2)\cdots(t_{k-1}-t_k)p(t_1) \\ & p(t_2)\cdots p(t_k)\int_0^{t_k}p(t_{k+1})dt_{k+1}dt_k\cdots dt_2dt_1. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Agora, assumindo que

$$0 < T\int_0^T p(t)dt \leq 4, \tag{1.14}$$

segue de (1.13) que

$$M_{k+1} \leq M_k, \quad k \leq 1.$$

Portanto, a série em (1.12) é do tipo de Leibnitz e, como conseqüência,

$$-2 \leq -T\int_0^T p(t)dt + 2 < a < 2.$$

Assim, temos provado:

Teorema 1.2.2 *Se a função T-periódica $p(t)$ é não-negativa e satisfaz (1.14) então a origem da equação de Hill (1.5) é estável no sentido de Liapunov*

Com o importante exemplo da equação de Hill percebemos que o problema de estabilidade de equilíbrios de sistema Hamiltonianos periódicos com um grau de liberdade no caso não-autônomo é não trivial, ao contrário do caso autônomo para o qual temos:

Teorema 1.2.3 *Seja $\lambda \neq 0$ autovalor do sistema linearizado de um sistema Hamiltoniano autônomo com um grau de liberdade. Então a posição de equilíbrio é estável no sentido de Liapunov se, e somente se, λ é imaginário puro*

Demonstração. É imediata. ■

No entanto, no caso periódico o problema de estabilidade é não trivial e o resultado mais geral é seguinte teorema provado por Sokolskii [37] Cabral e Meyer [8]:

Teorema 1.2.4 (Teorema de Sokolskii (1977), Cabral e Meyer (1999)) *Seja*

$$K(r,\phi,t) = \Psi(\phi)r^m + O(r^{m+\frac{1}{2}}),$$

onde $m = l/2$ e $l \geq 3$ um número inteiro, a função Hamiltoniana H na forma normal até ordem $2m$ em variáveis ação-ângulo. Se $\Psi(\phi) \neq 0$ para todo ϕ então a origem é estável no sentido de Liapunov. No caso em que $\Psi(\phi)$ tem um zero simples o equilíbrio é instável no sentido de Liapunov.

O principal resultado usado na prova da estabilidade do Teorema 1.2.4 é o Teorema da Curva Invariante [2] e para instabilidade usa-se o Teorema de Chetaev [11].

No caso onde todos os zeros de Ψ não são simples pode ocorrer estabilidade ou instabilidade. Por exemplo, a origem do sistema Hamiltoniano associado a

$$H = r^2\ [1+\cos 4\phi] + r^3$$

é estável pois H é uma integral primeira positiva definida, enquanto no caso

$$H = r^2\ [1+\cos 4\phi] + r^4\ \text{sen}\, 8\phi,$$

a origem é instável. Pois existe a solução particular $\phi = \pi/4$ e $r(t) = \frac{r(0)}{[1-24r^3(0)t]^{1/3}}$ que é ilimitada quando $t \to \frac{1}{24r^3(0)}$. Note que em ambos os exemplos a função

$$\Psi(\phi) = 1+\cos 4\phi$$

possuem todos os zeros não simples.

Em geral não se conhece um critério para decidir a estabilidade no caso crítico, isto é, quando os zeros se Ψ não são simples. É conhecido apenas para ressonâncias de quarta ordem o qual foi fornecido por Markeev [29] em 1997. Nesta tese daremos um Teorema que generaliza e estende o Teorema 1.2.4 no sentido de ser válido para sistemas com n graus de liberdade e dar informações nos casos críticos.

1.2.2 Sistemas com dois graus de liberdade

Para sistema Hamiltonianos com dois graus de liberdade temos alguns resultados importantes mas, assim como no caso periódico com um grau de liberdade o problema não é fechado, pois existem casos críticos que não são bem compreendidos.

Começaremos exibindo os principais e mais gerais resultados no caso autônomo. Assuma que as freqüências ω_1, ω_2 têm sinais opostos e satisfazem a relação de ressonância

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0 \tag{1.15}$$

onde m_1 e m_2 são positivos e relativamente primos ou $m_1 = m_2 = 1$. Se $m_1 = m_2 = 1$ assuma que a matriz do sistema linearizado é diagonalizável.

Escreva a função Hamiltoniana em variáveis ação-ângulo $(r, \varphi) := (r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2)$ definidas por

$$q_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j}\operatorname{sen}\varphi_j, \qquad (j = 1, 2)$$

e assuma que a função Hamiltoniana H está na forma normal até termos de ordem m onde $m = 2l - 1$ ou $m = 2l$, i.e.,

$$H(r, \varphi_1, \varphi_2) = H_2(r) + \cdots + H_{2l-2}(r) + H_m(r, m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2) + H^* \tag{1.16}$$

onde

- $H_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2$
- H_{2j} é um polinômio homogêneo de grau j em r_1, r_2,
- $H_m(r, m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)$ é um polinômio homogêneo de grau m em $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}$ com coeficientes que são séries de Fourier no ângulo $m_1\varphi_1 + m_2\phi_2$,
- H^* denota termos de ordem maior que m nas variáveis $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}$.
- H é uma função analítica das variáveis $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}$, φ_1, φ_2 e 2π periódica em φ_1 e φ_2.

O seguinte teorema foi provado por Arnold [2] e Moser [31].

Teorema 1.2.5 (Teorema de Arnold (1963), Moser (1962)) *Seja $D_{2j} = H_{2j}(\omega_2, \omega_1)$. Se para algum $j = 2, \ldots, l-1$ temos $D_{2j} \neq 0$ então a solução de equilíbrio $q_i = p_i = 0$ é estável no sentido de Liapunov.*

Quando o Teorema de Arnold-Moser não pode ser aplicado, isto é, quando

$$D_{2j} = 0, \qquad \text{for} \quad j = 2, \ldots, l-1,$$

o termo H_m poderá decidir a estabilidade do equilíbrio. Neste caso, seja

$$\Psi(\phi) = H_m(\omega_2, \omega_1, m_1\phi).$$

Cabral e Meyer [8] forneceram o seguinte teorema:

Teorema 1.2.6 (Teorema de Cabral e Meyer (1999)) *Se $\Psi(\phi) \neq 0$ para todo ϕ então a solução de equilíbrio $q_i = p_i = 0$ é estável no sentido de Liapunov. Quando Ψ tem um zero simples a solução de equilíbrio é instável no sentido de Liapunov.*

Para a afirmação de estabilidade não precisamos da condição de ressonância e assim H_m poderia ser independente do ângulo. Então o Teorema de Cabral-Meyer inclui o Teorema de Arnold-Moser.

A prova destes teoremas consiste essencialmente em fixar um nível de energia e então reduzir a um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade dependendo periodicamente de um novo "tempo". Para provar a instabilidade é suficiente considerar o nível nulo de energia e então aplicando o Teorema 1.2.4 se conclui a instabilidade. Como a estabilidade é sobre uma vizinhança limitada da origem, não podemos considerar apenas o nível nulo. É necessário considerar um intervalo da forma $[-\varepsilon, \varepsilon]$ com $\varepsilon > 0$ e então usar Teoria KAM.

No caso onde todos os zeros de Ψ são não simples podemos ter estabilidade ou instabilidade. De fato, considere a função Hamiltoniana

$$H = 3r_1 - r_2 + r_2^2 + \sqrt{3}\, r_1^{1/2} r_2^{3/2}\ sen\phi +\ ar_1^3. \tag{1.17}$$

Note que temos relações de ressonâncias de quarta ordem (ω_1, ω_2)=$(3,1)$ e $\Psi(\phi) = 9(1+\mathrm{sen}\,\phi)$. Então:

- Se $a = 1$ então a solução de equilíbrio é estável no sentido de Liapunov pois a função $V = (r_1 - 3r_2)^2 + H^2$ é uma integral primeira definida positiva para o sistema Hamiltoniano associado.

- Se $a = -1$ a solução de equilíbrio é instável. Considere o movimento nas curvas de nível $V_1 = r_2 - 3r_2 = 1$, $V_2 = H = 0$ que são integrais primeiras. Nestes níveis $r_1 = r_2 = 0$ ou $r_2 = 3r_1 = 27[1+\mathrm{sen}\,(\phi)]$. O primeiro caso não tem interesse para nós pois corresponde ao próprio equilíbrio. No segundo caso, temos uma solução particular que é dupla assintótica para o ponto $r_1 = 0$. As trajetórias correspondendo a esta solução é o cardioide $r_1 = 9[1+\mathrm{sen}\,(\phi)]$. Se $t \to \pm\infty$ então $r_1 \to 0$ enquanto $\phi \to -\pi/2$. Neste caso a seguinte desigualdade vale
$$\frac{d\phi}{dt} = -81[1+\mathrm{sen}\,(\phi)]^2, \quad \frac{dr_1}{dt} = -9r_1^2\cos(\phi).$$
Se pomos $\phi(0) = -\pi/2 - \mu$ onde $0 < \mu << 1$ então $r_1(0) = 18\mathrm{sen}^2(\mu/2) - \mu^2$. O ângulo ϕ decresce monotonicamente com o tempo e permanece no terceiro quadrante, o valor de r_1 cresce monotonicamente do valor tão pequeno quanto desejado de $r_1(0)$ a $r_1 = 9$ o qual também indica que a solução de equilíbrio é instável.

O caso crítico requer tratamento especial. É claro que a resposta a estabilidade está nos termos de ordem maior que m. Recentemente em 2001, Markeev [28] estudou o caso crítico na ressonância 3:1, vejamos o resultado fornecido por ele. A forma normal de Lie da função Hamiltoniana até sexta ordem, H^6, em variáveis ação-ângulo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} H^6(r,\phi) &= \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 \\ &+ r_1^{1/2}r_2^{3/2}[a_{13}\mathrm{sen}\,\phi + b_{13}\cos\phi] + c_{30}r_1^3 + c_{21}r_1^2r_2 + c_{12}r_1r_2^2 + c_{03}r_2^2 \\ &+ r_1^{3/2}r_2^{3/2}[a_{33}\mathrm{sen}\,\phi + b_{33}\cos\phi] + r_1^{1/2}r_2^{5/2}[a_{15}\mathrm{sen}\,\phi + b_{15}\cos\phi], \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde c_{20}, c_{11}, c_{02}, a_{13}, b_{13}, c_{30}, c_{21}, c_{12}, c_{03}, a_{33}, b_{33}, a_{15} e b_{15} são constantes reais e $\phi = \varphi_1 + 3\varphi$ (ver Markeev [28] para maiores detalhes). Seja

$$\begin{aligned}
A_4 &= c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}, \\
B_4 &= \sqrt{27(a_{13}^2 + b_{13}^2)}, \\
A_6 &= c_{30} + 3c_{21} + 9c_{12} + 27c_{03}, \\
B_6 &= \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{a_{13}^2+b_{13}^2}}[a_{13}(a_{33}+3a_{15}) + b_{13}(b_{33}+3b_{15}], \\
C_6 &= \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{a_{13}^2+b_{13}^2}}[a_{13}(b_{33}+3b_{15}) - b_{13}(a_{33}+3a_{15}].
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.7 (Teorema de Markeev (2001)) *Assuma que $A_4 = B_4$ (caso critico de quarta ordem) e $A_4A_6 - B_4B_6 \neq 0$. Se*

$$A_4A_6 - B_4B_6 > 0 \textit{ (condição de Markeev)} \tag{1.20}$$

a solução nula é estável no sentido de Liapunov e para a desigualdade oposta em (1.20) a solução nula é instável.

Assim, o Teorema de Markeev dá informações no caso crítico de quarta ordem mas resta uma resposta a estabilidade quando $A_4A_6 - B_4B_6 = 0$. No último capítulo, usando nossos Teoremas Principais fornecidos nesta tese daremos um melhoramento deste Teorema.

Assumindo, agora, que a matriz do sistema linearizado é não-diagonalizável, a forma normal de Lie de H até quarta ordem tem a forma

$$\begin{aligned}
H^4 = \;& \tfrac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1p_2 - q_2p_1) + A(p_1^2 + p_2^2)^2 + \\
& B(p_1^2 + p_2^2)(q_1p_2 - q_2p_1) + C(q_1p_2 - q_2p_1)^2,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

onde $A = h_{20}$, $B = h_{11}$ e $C = h_{02}$. Sokolskii em [36] mostrou:

Teorema 1.2.8 (Teorema de Sokolskii (1974)) *Se $A > 0$, a posição de equilíbrio é formalmente estável. Se $A < 0$ a posição de equilíbrio é instável no sentido de Liapunov.*

No artigo [38] Sokolskii mostrou que no caso $A > 0$ a solução nula é estável no sentido de Liapunov. Mas, seguindo argumentos dados por Treshchev [39], a prova de Sokolskii em [38] envolve um erro, porque a integral definindo a variável ação não foi avaliada corretamente. Treshchev mostrou em [39] que se $A > 0$ a solução de equilíbrio é estável no sentido de Liapunov.

Nos artigos [36], [38] e [39] os autores não deram qualquer informação sobre a estabilidade do equilíbrio no caso $A = 0$. Nesta tese abordaremos este caso.

Passemos agora ao caso periódico com dois graus de liberdade. Os resultados que apresentaremos foram provados por Markeev [26] e aplicam-se somente ao caso onde as freqüências possuem relações de ressonâncias de terceira e quarta ordem.

Para ressonâncias de terceira ordem as possibilidades são (com $m \in \mathbb{Z}$):

(1) $3\omega_1 = m$;
(2) $3\omega_2 = m$;
(3) $\omega_1 + 2\omega_2 = m$;
(4) $2\omega_1 + \omega_2 = m$.

Nesta situação, a forma normal de H até terceira ordem, após introduzir variáveis ação-ângulo e usando uma simplificação conveniente o Hamiltoniano assume a forma:

$$K(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = H_3' + O((r_1 + r_2)^2), \tag{1.22}$$

onde de acordo com os diferentes casos temos, respectivamente:

(1) $H_3' = 4\sqrt{2(x_{3000}^2 + y_{3000}^2)}\; r_1^{3/2}\, \text{sen}\,(3\varphi_1)$;

(2) $H_3' = 4\sqrt{2(x_{0300}^2 + y_{0300}^2)}\; r_2^{3/2}\, \text{sen}\,(3\varphi_2)$;

(3) $H_3' = 4\sqrt{2(x_{1200}^2 + y_{1200}^2)}\; r_1^{1/2} r_2\, \text{sen}\,(\varphi_1 + 2\varphi_2)$;

(4) $H_3' = 4\sqrt{2(x_{2100}^2 + y_{2100}^2)}\; r_1 r_2^{1/2}\, \text{sen}\,(2\varphi_1 + \varphi_2)$,

onde x_{kl} e y_{kl} são constantes que dependem dos coeficientes do Hamiltoniano original H. Temos:

Teorema 1.2.9 (Teorema de Markeev (1968)) *Se* $x_{k_1k_2l_1l_2}^2 + y_{k_1k_2l_1l_2}^2 \neq 0$ *então a solução de equilíbrio é instável no sentido de Liapunov.*

No caso de existência de ressonância de quarta ordem e não existência de ressonâncias de terceira ordem as possibilidades são (com $m \in \mathbb{Z}$):

(1) $4\omega_1 = m$;
(2) $4\omega_2 = m$;
(3) $2(\omega_1 + \omega_2) = m$;
(4) $\omega_1 + 3\omega_2 = m$;
(5) $3\omega_1 + \omega_2 = m$.

A função Hamiltoniana H em variáveis ação-ângulo, usando uma conveniente simplificação, é dada por

$$K(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + H_4' + \cdots, \tag{1.23}$$

onde de acordo com os diferentes casos temos respectivamente:

(1) $H_4' = \sqrt{x_{4000}^2 + y_{4000}^2}\; r_1^2\, \text{sen}\,(4\phi_1)$;

(2) $H_4' = \sqrt{x_{0400}^2 + y_{0400}^2}\; r_2^2\, \text{sen}\,(4\phi_2)$;

(3) $H_4' = \sqrt{x_{2200}^2 + y_{2200}^2}\, r_1 r_2 \,\mathrm{sen}\, 2(\phi_1 + \phi_2)$;

(4) $H_4' = \sqrt{x_{1300}^2 + y_{1300}^2}\, r_1 r_2^{3/2} \,\mathrm{sen}\,(\phi_1 + 3\phi_2)$;

(5) $H_4' = \sqrt{x_{3100}^2 + y_{3100}^2}\, r_1^{3/2} r_2 \,\mathrm{sen}\,(3\phi_1 + \phi_2)$

onde x_{kl} e y_{kl} são constantes que dependem dos coeficientes do Hamiltoniano original H.

Definindo

$$
\begin{array}{ll}
A_1 = \sqrt{x_{4000}^2 + y_{4000}^2}, & B_1 = c_{20}, \\
A_2 = \sqrt{x_{0400}^2 + y_{0040}^2}, & B_2 = c_{02}, \\
A_3 = \sqrt{x_{2200}^2 + y_{2200}^2}, & B_3 = c_{20} + c_{11} + c_{02}, \\
A_4 = 3\sqrt{3(x_{1300}^2 + y_{1300}^2)}, & B_4 = c_{20} + 3c_{11} + c_{02}, \\
A_5 = 3\sqrt{3(x_{3100}^2 + y_{3100}^2)}, & B_5 = 9c_{20} + 3c_{11} + c_{02},
\end{array}
\tag{1.24}
$$

temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.10 (Teorema de Markeev (1968)) *Se $A_j > |B_j|$ então a posição de equilíbrio é instável no sentido de Liapunov. No caso $A_j < |B_j|$ o equilíbrio é formalmente estável.*

Os Teoremas de Markeev 1.2.9 e 1.2.10 não dão informações sobre a estabilidade nos casos $x_{k_1k_2l_1l_2}^2 + y_{k_1k_2l_1l_2}^2 = 0$ e $A_j = |B_j|$. De fato, podemos ter estabilidade ou instabilidade dependendo dos termos de maior ordem. Nesta tese, daremos melhoramentos dos Teorema de Markeev no sentido de dar informações nos casos críticos e também estenderemos a n graus de liberdade.

1.2.3 Sistemas com $n > 2$ graus de liberdade

No caso $n > 2$ pouco se conhece sobre a estabilidade do equilíbrio até o presente momento. Do pouco que se conhece os resultados são formais no sentido de dependerem da convergência da forma normal da função Hamiltoniana. Mostraremos alguns resultados conhecidos neste caso.

Khazin em [16] estudou o problema de estabilidade no caso autônomo para sistemas com n graus de liberdade assumindo a hipóteses de não existência de ressonâncias de ordem dois e:

- existe uma única ressonância de terceira ordem.
- existe uma única ressonância de quarta ordem e não existem de ordem três.

No primeiro caso a função Hamiltoniana H pode ser reduzida a forma:

$$\Gamma(r,\phi) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j\, r_j + 2A\,\sqrt{r^k}\,\cos\phi + \sum_{|s|=4} A_s\, r^s + \Gamma_6(r,\phi) + R(r,\phi), \tag{1.25}$$

onde

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0, \quad k_j \geq 0$$

$r^k = r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}$, $\phi = k_1\varphi_1 + \cdots + k_n\varphi_n$ com $k = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$ e $|k| = 3$ fixado. A função R em r tem grau maior que três.

Teorema 1.2.11 (Teorema de Khazin (1971)) *Se $A \neq 0$ então a solução de equilíbrio é instável no sentido de Liapunov.*

No segundo caso a forma normal de H assume a forma:

$$\Gamma(r,\phi) = \sum_{j=i}^{n} \omega_j r_j + 2A\,\sqrt{r^k}\,\cos(\phi) + \sum_{|s|=2} A_s r^s + \Gamma_6(r,\phi) + \Gamma_8(r,\phi) + R(r,\phi), \tag{1.26}$$

onde, agora, $k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0$, $k_j \geq 0$, $r^k = r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}$, $\phi = k_1\phi_1 + \cdots + k_n\phi_n$ com $k = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$ e $|k| = 4$ fixado. A função R tem grau maior que 4 nas variáveis $r_1,\ldots,r_n$.

Aqui

$$\sum_{|s|=4} A_s r^s := \sum_{i+j=2} A_{ij} r_i r_j.$$

Teorema 1.2.12 (Teorema de Khazin (1971)) *Se*

$$|A| > S := \frac{1}{2\sqrt{k^k}} \sum_{i+j=2} A_{ij} k_i k_j, \quad A \neq 0.$$

então a solução de equilíbrio é instável no sentido de Liapunov. Se $|A| < S$ o equilíbrio é Birkhoff-estável.

Novamente não é dada qualquer informação sobre a estabilidade nos casos $A = 0$ e $|A| = S$ nos Teoremas 1.2.11 e 1.2.12, respectivamente. Estes teoremas, também serão melhorados nesta tese no sentido de acrescentar as informações nos casos críticos, estender a sistemas periódicos também e incluir ressonâncias de qualquer ordem.

Apresentaremos, agora, o resultado obtido por Mansilla em [23] para sistemas Hamiltonianos com três graus de liberdade com parte linearizada não-diagonalizável. A forma normal de Lie de quarta ordem da função Hamiltoniana (1.1) com três graus de liberdade é

$$\begin{aligned} H^4 = \; & \tfrac{\omega_1}{2}(q_1^2+p_1^2) + \tfrac{1}{2}(q_2^2+q_3^2) + \omega(q_2p_3 - q_3p_2) + \\ & \sum_{j_1+j_2+j_3=2} h_{j_1 j_2 j_2}(q_1^2+p_1^2)^{j_1}(p_2^2+p_3^2)^{j_2}(q_2p_3-q_3p_2)^{j_3}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Então:

Teorema 1.2.13 (Teorema de Mansilla (2006)) *Assuma que $n = 3$ e $h_{020} \neq 0$. Se $h_{020} > 0$, a origem é uma solução de equilíbrio formalmente estável do sistema Hamiltoniano (1.1). No caso $h_{020} < 0$ o equilíbrio é Lie-instável.*

O Teorema de Mansilla [23] será estendido a sistemas com n graus de liberdade e melhorado no sentido de dar informações no caso $h_{020} = 0$, o qual será feito no Teorema 3.2.2.

Uma versão dos Teoremas de Khazin para sistemas Hamiltonianos periódicos que podem ser considerados uma generalização dos Teoremas de Markeev 1.2.9 e 1.2.10 foi publicado recentemente em 2005 pelo autor e pelo orientador C. Vidal [40] no periódico "Regular and Chaotic Dynamics"e pode ser visto como parte desta tese. Como conseguimos resultados mais gerais que incluem o os resultados de tal artigo, o mesmo será visto no último capítulo como um caso particular dos nossos principais teoremas. Vamos enunciá-los aqui. Assumiremos, assim como nos Teoremas de Khazin, que o sistema não possui ressonâncias de segunda ordem e:

- existe uma única ressonância de terceira ordem.
- existe uma única ressonância de quarta ordem e não existem de ordem três.

Vamos considerar os seguintes casos ressonantes (m é um número inteiro):

- (A) $3\omega_j = m$ para um único $j \in \{1,\dots,n\}$;
- (B) $\omega_{j_1} + 2\omega_{j_2} = m$ para um único par $j_1, j_2 \in \{1,\dots,n\}$ com $j_1 \neq j_2$;
- (C) $\omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \omega_{j_3} = m$ para uma única tripla $j_1, j_2, j_3 \in \{1,\dots,n\}$ todos distintos;
- (D) $4\omega_j = m$ para um único $j \in \{1,\dots,n\}$;
- (E) $2(\omega_{j_1} + \omega_{j_2}) = m$ para um único par $j_1, j_2 \in \{1,\dots,n\}$ com $j_1 \neq j_2$;
- (F) $\omega_{j_1} + 3\omega_{j_2} = m$ para um único par $j_1, j_2 \in \{1,\dots,n\}$ com $j_1 \neq j_2$;
- (G) $\omega_{j_1} + \omega_{j_2} + 2\omega_{j_3} = m$ para uma única tripla $j_1, j_2, j_3 \in \{1,\dots,n\}$ todos distintos;
- (H) $\omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \omega_{j_3} + \omega_{j_4} = m$ para uma única quádrupla $j_1, j_2, j_3, j_4 \in \{1,\dots,n\}$ todos distintos.

Os casos (A), (B) e (C): Aplicando uma conveniente mudança canônica de coordenadas dependendo do tempo após normalizar o Hamiltoniano até termos de terceira ordem podemos assumir que o novo Hamiltoniano tem a forma

$$K = A_{kl}\tilde{K} + O(|\zeta|^4). \tag{1.28}$$

onde sem perda de generalidade podemos assumir que $j = 1$ no caso (A), $j_1 = 1, j_2 = 2$ no caso (B) e $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ no caso (C) e então obtemos respectivamente,

- (A-1) $\tilde{K} = r_1^{3/2}\mathrm{sen}\,(3\varphi_1)$,
- (B-1) $\tilde{K} = r_1^{1/2} r_2 \mathrm{sen}\,(\varphi_1 + 2\varphi_2)$,
- (C-1) $\tilde{K} = r_1^{1/2} r_2^{1/2} r_3^{1/2}\mathrm{sen}\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$,

e

$$A_{kl} = 4\sqrt{2(\alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2)}. \tag{1.29}$$

O seguinte resultado encontra-se provado em [40]:

Teorema 1.2.14 *[Vidal, C. e Santos, F. (2005)]. Se* $\alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2 \neq 0$ *então a solução de equilíbrio é instável no sentido de Liapunov.*

Observação. No caso (A), $k = (3,0,0,0,\cdots,0)$ e $l \equiv 0$; no caso (B), $k = (1,2,0,0,\cdots,0)$ e $l \equiv 0$ e no caso (C), $k = (1,1,1,0,\cdots,0)$ e $l \equiv 0$.

Os casos (D)-(H): Aqui o Hamiltoniano transformado tem a forma

$$K = -2 \sum_{k_1+\ldots+k_n=2} g_{k_1\ldots k_n k_1\ldots k_n}\, r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n} + A_{kl}\, \tilde{K} + O(|\zeta|^5), \tag{1.30}$$

onde $A_{kl} = 8\sqrt{\alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2}$ e a função $\tilde{K}$ para os casos (D)-(H) e assumindo sem perder generalidade que $j_1 = 1$ no caso (D); $j_1 = 2, j_2 = 2$ no caso (E); $j_1 = 1, j_2 = 3$ no caso (F); $j_1 = j_2 = 1, j_3 = 2$ no caso (G); $j_1 = j_2 = j_3 = j_4 = 1$ no coso (H), obtemos respectivamente,

- D-1) $\tilde{K} = r_1^2 \mathrm{sen}\,(4\varphi_1)$;
- E-1) $\tilde{K} = r_1 r_2 \mathrm{sen}\, 2(\varphi_1 + \varphi_2)$;
- F-1) $\tilde{K} = r_1^{1/2} r_2^{3/2}\mathrm{sen}\,(\varphi_1 + 3\varphi_2)$;
- G-1) $\tilde{K} = r_1^{1/2} r_2^{1/2} r_3 \mathrm{sen}\,(\varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3)$;
- H-1) $\tilde{K} = r_1^{1/2} r_2^{1/2} r_3^{1/2} r_4^{1/2}\mathrm{sen}\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$.

Pondo

$$\rho_k = \rho_{k_1\ldots k_n} = -2g_{k_1\ldots k_n k_1\ldots k_n}. \tag{1.31}$$

e

- $A_4 = 8\sqrt{\alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2}$, $\quad B_4 = \rho_{200\ldots0}$, no caso (D);
- $A_5 = 8\sqrt{\alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2}$, $\quad B_5 = \rho_{200\ldots0} + \rho_{110\ldots0} + \rho_{020\ldots0}$, no caso (E);
- $A_6 = 8\sqrt{3(\alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2)}$, $\quad B_6 = \rho_{200\ldots0} + 3\rho_{110\ldots0} + 9\rho_{020\ldots0}$, no caso (F);

- $A_7 = 8\sqrt{\alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2}$, $\quad B_7 = \rho_{200\ldots0} + 3\rho_{110\ldots0} + 9\rho_{020\ldots0}$, no caso (G);

- $A_8 = 8\sqrt{\alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2}$, $\quad B_8 = \rho_{20000\ldots0} + \rho_{02000\ldots0} + \rho_{00020\ldots0} + \rho_{11000\ldots0} + \rho_{10100\ldots0} + \rho_{10010\ldots0} + \rho_{01100\ldots0} + \rho_{01010\ldots0} + \rho_{00110\ldots0}$, no caso (H).

Agora podemos enunciar o seguinte teorema provado em [40]:

Teorema 1.2.15 *[Vidal, C. e Santos, F. (2005)]. Se $A_j > |B_j|$ ($j = 4,5,6,7,8$) então a posição de equilíbrio é instável no sentido de Liapunov.*

Observação. No caso (D), $k = (4,0,0,0,\cdots,0)$ e $l \equiv 0$; no caso (E), $k = (2,2,0,0,\cdots,0)$ e $l \equiv 0$; no caso (F), $k = (1,3,0,0,\cdots,0)$ e $l \equiv 0$; no caso (G), $k = (1,1,2,0,\cdots,0)$ e $l \equiv 0$ e no caso (H), $k = (1,1,1,1,0,\cdots,0)$ e $l \equiv 0$.

Também em [40] temos o seguinte teorema:

Teorema 1.2.16 *[Vidal, C. e Santos, F. (2005)]. Se $A_j < |B_j|$ ($j = 4,5,6,7,8$) temos que:*

- *i) A solução de equilíbrio é estável para o Hamiltoniano truncado em quarta ordem.*

- *ii) Se a função $H - O(|\zeta|^5)$ é definida positiva a solução de equilíbrio é formalmente estável.*

Vamos, agora, ver a condição necessária para estabilidade para a maioria das condições iniciais fornecido por Arnold e que pode ser encontrado no livro de Markeev [24]. Assumindo que o sistema Hamiltoniano (1.1) é autônomo e não possui relações de ressonâncias até quarta ordem, a função Hamiltoniana normalizada até termos de quarta ordem em variáveis ação-ângulo ordem tem a forma:

$$H(\mathbf{r},\varphi) = H_2(\mathbf{r}) + H_4(\mathbf{r}) + R(\mathbf{r},\varphi), \tag{1.32}$$

onde R tem ordem não inferior a cinco relativamente a $q_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i$, $p_i = \sqrt{2r_i}\operatorname{sen}\varphi_i$ e 2π-periódica em φ_i.

Teorema 1.2.17 (Teorema de Arnold (1964)) *Se para $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ é satisfeita uma das condições:*

$$det\left(\frac{\partial^2 H_4}{\partial r_i \partial r_j}\right) \neq 0 \tag{1.33}$$

ou

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_4}{\partial r_i \partial r_j} & \frac{\partial(H_2+H_4)}{\partial r_i} \\ \frac{\partial(H_2+H_4)}{\partial r_j} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

então a solução de equilíbrio nula é estável para a maioria das condições iniciais.

Como foi mostrado por Arnold em [4], estabilidade para a maioria das condições iniciais não é uma condição necessária para estabilidade no sentido de Liapunov. Um exemplo, o qual pode ser encontrado no livro de Markeev [24] é o sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade dependendo explicitamente do tempo associado a

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 + r_1 r_3 - r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_2 r_3^{1/2} \operatorname{sen}(2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3), \tag{1.34}$$

onde $\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0$ e $2\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3 = 0$. O segundo determinante do Teorema de Arnold acima vale $(\omega_1 + \omega_2)^2$ que é não-nulo e, portanto, temos estabilidade para a maioria das condições. Mostraremos na observação 3.1.4 que, como conseqüência do nosso Teorema 3.1.1, a solução nula é instável no sentido de Liapunov.

Passemos, agora, a alguns resultados envolvendo estabilidade formal devidos a Moser, Glimm e Bryuno. Assuma nesse momento que a função Hamiltoniana H é 2π-periódica em t. Se o sistema linearizado é estável então podemos escolher um sistema de coordenadas tal que o novo Hamiltoniano tem a forma

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{2}(q_j^2 + p_j^2) + H_3 + H_4 + \dots,$$

onde $\pm\omega_1 i, \dots, \pm\omega_n i$ são os expoentes característicos da matriz do sistema linearizado. Um primeiro resultado devido a Glimm [13] é

Teorema 1.2.18 (Teorema de Glimm (1964)) *Se a parte quadrática de H*

$$H_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{2}(q_j^2 + p_j^2)$$

é definida positiva então a solução nula é formalmente estável.

No artigo [32] Moser mostrou o seguinte teorema:

Teorema 1.2.19 (Teorema de Moser (1958)) *Se*

$$k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n \notin \mathbb{Z}, \tag{1.35}$$

para inteiros $k_1, \dots, k_n \geq 0$ satisfazendo $k_1 + \dots + k_n > 0$ então a solução nula é formalmente estável.

As condições do Teorema de Moser são muito fracas pois utilizam apenas informações sobre os termos lineares, no entanto as restrições sobre as freqüências são muito fortes.

Assuma agora que a condição (1.35) é satisfeita para inteiros satisfazendo $|k_1| + \dots + |k_n| < 4$. Então existe uma mudança canônica de variáveis tal que o novo Hamiltoniano possui a forma

$$H = \sum_{j=1}^{n} \omega_j r_j + \sum_{j_1, j_2 = 1}^{n} a_{j_1, j_2} r_{j_1} r_{j_2} + H_5 + \dots.$$

No artigo [7] Bryuno provou o seguinte teorema:

Teorema 1.2.20 (Teorema de Bryuno (1971)) *Sob prévias hipóteses, se*

$$\sum_{j_1,j_2=1}^{n} a_{j_1,j_2} r_{j_1} r_{j_2} \neq 0$$

para vetores $\mathbf{r}$ *pertencentes à interseção dos quadrantes* $k_j \geq 0$ *com o espaço linear formado pelos vetores com coordenadas inteiras que são soluções da equação*

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n \in \mathbb{Z}$$

então a solução nula é formalmente estável.

Os Teoremas de Moser, Glimm e Bryuno acima são casos particulares dos nossos Teoremas principais desta tese.

Capítulo 2

Ressonâncias e formas normais

Neste capítulo, mostraremos propriedades importantes da forma normal de Lie da função Hamiltoniana no caso em que os autovalores do sistema linearizado são imaginários puros. Este capítulo é bastante importante em nosso trabalho já que a caracterização dada da forma normal da função Hamiltoniana permite obter integrais primeiras dos sistemas truncados na forma normal de Lie, as quais serão usadas nos próximos capítulos para obter informações sobre a estabilidade do equilíbrio.

2.1 Ressonâncias

Lembrando que em toda a tese estamos assumindo que os autovalores (respectivamente, expoentes característicos no caso periódico) do sistema linearizado são imaginários puros, os quais denotamos $\pm\omega_1 i, \ldots, \pm\omega_n i \neq 0$, as vezes chamaremos $|\omega_1|, \ldots, |\omega_n|$ de freqüências do sistema linearizado, já que supondo que a solução de equilíbrio do sistema Hamiltoniano (1.1) é estável em aproximação linear (ou equivalentemente a matriz do sistema linearizado é diagonalizável) podemos supor, sem perda de generalidade (ver [24], [32] para mais detalhes), que uma transformação canônica linear foi construída tal que

$$H_2 = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \cdots + \frac{\omega_n}{2}(q_n^2 + p_n^2), \tag{2.1}$$

onde $\pm\omega_1 i, \cdots, \pm\omega_n i$ são os autovalores do sistema linearizado no caso autônomo ou os expoentes característicos no caso periódico. A função Hamiltoniana H_2 acima corresponde ao Hamiltoniano de um sistema linear de n osciladores harmônicos desacoplados.

No caso não-diagonalizável ou equivalentemente quando o equilíbrio é instável em aproximação linear, assumiremos que $\omega_{n-1} = \omega_n$ e $|\omega_i| \neq |\omega_j|$ for $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Além disso, podemos supor, sem perda de generalidade (veja [1] para maiores detalhes), que uma transformação canônica foi feita tal que

$$H_2 = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \cdots + \frac{\omega_{n-2}}{2}(q_{n-2}^2 + p_{n-2}^2) + \frac{1}{2}(q_{n-1}^2 + q_n^2) + \omega_n(q_{n-1}p_n - q_n p_{n-1}), \quad (2.2)$$

onde $\pm\omega_1 i, \cdots, \pm\omega_{n-2}i, \pm\omega_n i, \pm\omega_n i$ são os autovalores do sistema linearizado.

Como relações de ressonâncias entre as freqüências do sistema linearizado são muito importantes no problema de estabilidade (veja [3]), queremos torna-la precisa para o sistema (1.1) (de acordo com [3], [24]).

Definição 2.1.1 *Dizemos que o sistema (1.1) apresenta relação de ressonância se existe um vetor inteiro* $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \neq 0$ *tal que*

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0. \quad (2.3)$$

no caso autônomo ou

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

no caso 2π*-periódico. O número* $|\mathbf{k}| = |k_1| + \cdots + |k_n|$ *é chamado a ordem da ressonância. Por outro lado, se*

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n \neq 0 \; (\textit{resp.} \notin \mathbb{Z})\,. \quad (2.5)$$

vale para todos vetores inteiros $\mathbf{k} = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ *satisfazendo as desigualdades* $|\mathbf{k}| = j$*,* $j = 1, \cdots, s$*, dizemos que o sistema (1.1) não apresenta relações de ressonância até ordem s, inclusive.*

Considere o $\mathbb{Z}$-módulo

$$M_\omega = \{\mathbf{k} = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{Z}^n; \quad \mathbf{k}\cdot\omega = k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0 \text{ (resp. } \in \mathbb{Z})\},$$

associado as freqüências $\omega_1, \cdots, \omega_n$, aqui $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$. É claro que $M_\omega = \{0\}$ é equivalente a dizer que $\omega_1, \cdots, \omega_n$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$ no caso autônomo ou $\omega_1, \cdots, \omega_n, -1$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$ no caso periódico, isto é, $M_\omega = \{0\}$ se e somente se o sistema não possui ressonâncias. No caso oposto, o sistema possui ressonâncias e um vetor inteiro $\mathbf{k} \in M_\omega \setminus \{0\}$ é chamado vetor do ressonância e sua ordem de ressonância é $|\mathbf{k}| = |k_1| + \cdots + |k_n|$.

Proposição 2.1.1 *O* $\mathbb{Z}$*-módulo* M_ω *é finitamente gerado, isto é, existem* $\mathbf{k}^1, \ldots, \mathbf{k}^s \in M_\omega$ *tais que*

$$M_\omega = \mathbf{k}^1\mathbb{Z} + \cdots + \mathbf{k}^s\mathbb{Z} = \{j_1\mathbf{k}^j + \cdots + j_s\mathbf{k}^s; j_1, \ldots, j_s \in \mathbb{Z}; \quad \mathbf{k}^1, \cdots, \mathbf{k}^s \in M_\omega\},$$

com $s < n$ *no caso autônomo e* $s \leq n$ *no caso periódico.*

Demonstração. Desde que M_ω é um sub-módulo do módulo finitamente gerado $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{Z}$ é um domínio principal, temos que M_ω é finitamente gerado. ∎

Sempre assumiremos que o conjunto de geradores $\{\mathbf{k}^1, \ldots, \mathbf{k}^s\}$ é minimal.

Definição 2.1.2 *Assuma que $M_\omega \neq \{0\}$. Se M_ω é cíclico (ou equivalentemente $s = 1$) dizemos que o sistema (1.1) possui ressonâncias simples e no caso oposto (equivalentemente $s > 1$) dizemos que o sistema possui ressonâncias múltiplas.*

Observação 2.1.1 *Note que no caso especial de sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade ou periódicos com um grau de liberdade, $M_\omega = \{0\}$ ou M_ω is cíclico, isto é, $M_\omega = \mathbf{k}\mathbb{Z}$ para algum $\mathbf{k} \in M_\omega$. Então o caso de múltiplas ressonâncias pode ocorrer apenas em sistema Hamiltonianos autônomos com $n > 2$ ou periódico com $n \geq 2$. De fato, para sistemas Hamiltonianos autônomos com três graus de liberdade podemos ter ressonâncias múltiplas, por exemplo, o sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana em variáveis ação-ângulo*

$$H = r_1 - 2r_2 + 3r_3 + H_3 + \ldots,$$

tem $M_\omega = (2,1,0)\mathbb{Z} + (3,0,-1)\mathbb{Z}$ para o qual $s = 2$ então temos ressonâncias múltiplas. Para sistemas periódicos com dois graus de liberdade considere

$$H = r_1 + 2r_2 + H_3 + \ldots.$$

Para este Hamiltoniano $M_\omega = (1,0)\mathbb{Z} + (0,1)\mathbb{Z}$ e temos $s = 2$. Note que no caso periódico podemos ter H_2 definida positiva e $M_\omega \neq \{0\}$ o que não ocorre no caso autônomo.

Uma importante definição que aparece no caso de ressonâncias múltiplas é:

Definição 2.1.3 *Assuma que $s > 1$ e considere as ressonâncias $\mathbf{k}^{\alpha_1}$ e $\mathbf{k}^{\alpha_2}$ com $\alpha_1, \alpha_2 \in \{1, \ldots, s\}, \alpha_1 \neq \alpha_2$. Dizemos que estas ressonâncias não têm interações se $k_1^{\alpha_1} k_1^{\alpha_2} = \cdots = k_n^{\alpha_1} k_n^{\alpha_2} = 0$. Dizemos que $\mathbf{k}^{\alpha_1}, \ldots, \mathbf{k}^{\alpha_m}$ com $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \{1, \ldots, s\}$ não têm interações se $\mathbf{k}^{\alpha_i}$ e $\mathbf{k}^{\alpha_j}$ não têm interações para cada $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$.*

Observação 2.1.2 *Ressonâncias múltiplas sem interações podem aparecer apenas em sistemas Hamiltonianos autônomos com $n \geq 4$ ou periódico com $n \geq 3$. Um exemplo onde temos ressonâncias múltiplas sem interações é o sistema Hamiltoniano autônomo associado a*

$$H = r_1 - 2r_2 + \pi r_3 - 3\pi r_4 + H_3 + \ldots$$

para o qual $M_\omega = (2,1,0,0)\mathbb{Z} + (0,0,3,1)\mathbb{Z}$.

É importante notar que no caso em que a matriz do sistema linearizado é não-diagonalizável temos ressonância de segunda ordem, pois em caso contrário todos os autovalores seriam distintos e a matriz seria diagonalizável.

Nas próximas seções mostraremos propriedades importantes da forma normal de Lie da função Hamiltoniana dependendo das propriedades do módulo M_ω. No caso diagonalizável nossos resultados valem nos casos autônomo e periódico e no caso não-diagonalizável apenas no autônomo.

2.2 Forma normal de Lie de sistemas Hamiltonianos autônomos e periódicos no caso diagonalizável

Supondo que a matriz do sistema linearizado associado a (1.1) é diagonalizável, vimos que a parte quadrática da função Hamiltoniana tem forma normal H_2 como em (2.1) nos casos autônomo e periódico. Nesta seção, estudaremos e caracterizaremos a forma normal de Lie do sistema não-linear.

Seja $H^m(\mathbf{r},\varphi,t)$ o truncamento da função Hamiltoniana na forma normal de Lie nas variáveis canônicas ação-ângulo $(\mathbf{r},\varphi) = (r_1,\ldots,r_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ definidas por

$$q_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j}\operatorname{sen}\varphi_j. \tag{2.6}$$

Mostraremos que sob algumas hipóteses sobre $\omega_1,\cdots,\omega_n$ a função H^m depende apenas de algumas combinações lineares com coeficientes inteiros de $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$. O principal resultado desta seção é:

Proposição 2.2.1 *Assuma que H^m (m é um número inteiro fixado maior que dois) está na forma normal de Lie, isto é,*

$$\{H_2,H^m\} - \frac{\partial H^m}{\partial t} = 0, \tag{2.7}$$

onde $\{,\}$ é o colchete de Poisson (para maiores detalhes veja Meyer and Hall [30]). Então,

- *Se $M_\omega = \{0\}$, então $H^m = H^m(\mathbf{r})$ para todo m, isto é, H^m depende apenas das ações $r_1,\ldots,r_n$.*
- *Se $M_\omega = \mathbf{k}^1\mathbb{Z}+\ldots\mathbf{k}^s\mathbb{Z} \neq \{0\}$, temos que $H^m = H^m(\mathbf{r},\mathbf{k}^1\cdot\varphi,\cdots,\mathbf{k}^s\cdot\varphi)$ no caso autônomo ou $H^m = H^m(\mathbf{r},\mathbf{k}^1\cdot\varphi+\mathbf{k}^1\cdot\omega t,\cdots,\mathbf{k}^s\cdot\varphi+\mathbf{k}^s\cdot\omega t)$ no caso periódico.*

Demonstração. Desde que $H^m(\mathbf{r},\varphi,t)$ está na forma normal de Lie, segue da equação de Lie (2.7) que

$$\omega_1\frac{\partial H^m}{\partial\varphi_1}+\cdots+\omega_n\frac{\partial H^m}{\partial\varphi_n} = \omega\cdot\frac{\partial H^m}{\partial\varphi} = \{H_2,H^m\} = \frac{\partial H^m}{\partial t}. \tag{2.8}$$

Podemos assumir que

$$H^m(\mathbf{r},\varphi,t) = \sum_{\eta,\mu} a_\eta(\mathbf{r})e^{i(\eta\cdot\varphi+\mu t)}, \tag{2.9}$$

onde $\eta = (\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{Z}^n$, $\mu = 0$ no caso autônomo e $\mu\neq 0$ é um número real no caso periódico, e $a_\eta = a_{\eta_1\cdots\eta_n}$. A equação (2.8) nos fornece

$$\sum_{\eta,\mu} ia_\eta(\mathbf{r})(\eta\cdot\omega-\mu)e^{i\eta\cdot\varphi} = 0,$$

que ocorre se, e somente se, $\eta\cdot\omega = 0$ no caso autônomo ou $\eta\cdot\omega = \mu\in\mathbb{Z}$ no caso periódico; assim $a_\eta = 0$ se $\eta\notin M_\omega$. Se $M_\omega = \{0\}$, $a_\eta = 0$ exceto para $\eta = 0$, então $H^m(\mathbf{r},\varphi) = a_0(\mathbf{r})$.

No caso $M_\omega = \mathbf{k}^1\mathbb{Z} + \cdots + \mathbf{k}^s\mathbb{Z}$, a função H^m está na forma (2.9) onde $\eta \in M_\omega$ e assim $H^m = H^m(\mathbf{r}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^s \cdot \varphi)$ no caso autônomo ou $H^m = H^m(\mathbf{r}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi + \mathbf{k}^1 \cdot \omega t, \cdots, \mathbf{k}^s \cdot \varphi + \mathbf{k}^s \cdot \omega t)$ no caso periódico. ∎

Note que no caso especial de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, $M_\omega = \{0\}$ ou M_ω é cíclico, isto é, $M_\omega = \mathbf{k}\mathbb{Z}$ para algum $\mathbf{k} \in M_\omega$. Neste caso, $H^m = H^m(\mathbf{r})$ se o sistema não possui ressonâncias e $H^m = H^m(\mathbf{r}, \mathbf{k} \cdot \varphi + \mu t)$ com $\mu = 0$ no caso autônomo ou $\mu = \mathbf{k} \cdot \omega$ no caso periódico, no caso oposto.

Corolário 2.2.1 *Se o sistema (1.1) possui ressonâncias simples, isto é, $M_\omega = \mathbf{k}\mathbb{Z}$, temos que*

$$|\mathbf{k}| = \min\{|\mathbf{l}|; \mathbf{l} \in M_\omega \setminus \{0\}\}.$$

Neste caso, se o processo de normalização de Lie for feito até ordem $m \geq |\mathbf{k}|$ arbitraria, então o Hamiltoniano truncado em variáveis ação-ângulo tem a forma

$$H^m = H_2(\mathbf{r}) + H_4(\mathbf{r}) + \cdots + H_{2l}(\mathbf{r}) + H_{|k|}(\mathbf{r}, \phi + \mu t) + \cdots + H_m(\mathbf{r}, \phi + \mu t), \tag{2.10}$$

onde $\mu = 0$ no caso autônomo ou $\mu = \mathbf{k} \cdot \omega$ no caso periódico, $2l$ é o maior inteiro par menor que $|\mathbf{k}|$, $\phi = \mathbf{k} \cdot \varphi = k_1\varphi_1 + \cdots + k_n\varphi_n$ e m é arbitrário. Além disso,

$$\begin{aligned} H_{|\mathbf{k}|}(\mathbf{r}, \varphi) &= \sum_{|\eta| = 2|\mathbf{k}|} a_\eta(\mathbf{r}) e^{i\eta \cdot \varphi + \mu t} = a_0(\mathbf{r}) + a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \varphi + \mu t} + a_{-\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \varphi + \mu t} \\ &= A(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) \cos(\phi + \mu t), \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $A(\mathbf{r}) = a_0(\mathbf{r})$ e $B(\mathbf{r}) = a_k(\mathbf{r})/2$.

Observação 2.2.1 *No caso periódico, faça a mudança canônica de variáveis $(\mathbf{r}, \varphi) \rightarrowtail (\widetilde{\mathbf{r}}, \widetilde{\varphi})$ dependente do tempo:*

$$\widetilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}, \quad \widetilde{\varphi} = \varphi + \omega t.$$

Desde que esta transformação é dada pela função geradora $S(\widetilde{\mathbf{r}}, \varphi) = \widetilde{\mathbf{r}}(\varphi + \omega t)$ e pelas relações

$$\mathbf{r} = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad \widetilde{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \widetilde{\mathbf{r}}};$$

então $\frac{\partial S}{\partial t} = \widetilde{\mathbf{r}} \cdot \omega$ e o novo Hamiltoniano tem a forma

$$\widetilde{H}^m = H^m(\widetilde{\mathbf{r}}, \mathbf{k}^1 \cdot \widetilde{\varphi}, \ldots, \mathbf{k}^s \cdot \widetilde{\varphi}).$$

Note que $\widetilde{H}^m$ é autônomo e $\widetilde{H}_2 = 0$. Nós denotaremos no resto desta tese $\widetilde{H}^m = H^m$, $\widetilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ e $\widetilde{\varphi} = \varphi$, isto é, sempre que falarmos da forma normal do Hamiltoniano no caso periódico estamos supondo que a transformação acima que elimina o tempo em ordem menor que m foi feita.

A proposição 2.2.1 também nos fornece a importante conseqüência:

Corolário 2.2.2 *Se $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}^1 = \cdots = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}^s = 0$ então a função $I = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano associado a H^m. Em particular, o sistema Hamiltoniano associado a H^m tem ao menos $n-s$ integrais primeiras na forma $I_j = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{r}$, $(j = 1, \ldots, n-s)$ com $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{k}^1 = \cdots = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{k}^s = 0$ com o conjunto $\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_{n-s}$ linearmente independentes.*

Demonstração. De fato, temos que

$$\{I, H^m\} = \mathbf{a} \cdot \frac{\partial H^m}{\partial \varphi} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}^1 \frac{\partial H^m}{\partial (\mathbf{k}^1 \cdot \varphi)} + \cdots + \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}^s \frac{\partial H^m}{\partial (\mathbf{k}^s \cdot \varphi)}.$$

Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}^j = 0,\ j = 1, \ldots, s$ a função I é uma integral primeira para o sistema associado a H^m. A segunda parte do corolário é trivial. ∎

Durante esta tese usaremos a notação $I_j = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{r}$, $(j = 1, \ldots, n-s)$, para as $n-s$ integrais primeiras do sistema Hamiltoniano associado a H^m fornecidas pelo Corolário 2.2.2.

A seguinte proposição será usada nesta tese:

Proposição 2.2.2 *A função Hamiltoniana na forma normal de Lie de ordem m tem a forma*

$$H^m = H_1^m(\mathbf{r}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi) + \cdots + H_s^m(\mathbf{r}, \mathbf{k}^s \cdot \varphi) \tag{2.12}$$

se para todo $(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ tal que $|\mathbf{k}| + |\mathbf{l}| \leq m$ temos $\mathbf{k} - \mathbf{l} \in \mathbf{k}^j \mathbb{Z}$ para algum $j \in \{1, \ldots, s\}$.

Demonstração. Assumindo que H^m está na forma normal de Lie de modo que

$$0 = \{H_2, H^m\} = \omega_1 \left(q_1 \frac{\partial H^m}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial H^m}{\partial q_1} \right) + \cdots + \omega_n \left(q_n \frac{\partial H^m}{\partial p_n} - p_n \frac{\partial H^m}{\partial q_n} \right), \tag{2.13}$$

e fazendo a conveniente mudança complexa de variáveis dada por

$$x_j = q_j + i p_j, \quad \bar{x}_j = q_j - i p_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.14}$$

o novo Hamiltoniano tem a forma

$$H^m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}| \leq m} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}}.$$

Logo a equação de Lie (2.13) nas variáveis $(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ assume a forma

$$\sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}| \leq m} i(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \omega \widetilde{h}_{\mathbf{kl}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}} = 0, \tag{2.15}$$

e temos que

$$H^m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}| \leq m, \mathbf{k}-\mathbf{l} \in M_\omega} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}}. \tag{2.16}$$

Assumindo que $x_j = r_j e^{i\varphi_j}$ e conseqüentemente $\bar{x}_j = r_j e^{-i\varphi_j}$ (para $j = 1, \ldots, n$) então

$$H^m(\mathbf{r}, \varphi) = \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}| \leq m, \mathbf{k}-\mathbf{l} \in M_\omega} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}} \mathbf{r}^{\frac{\mathbf{k}+\mathbf{l}}{2}} e^{(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \cdot \varphi}, \tag{2.17}$$

onde $a_{\mathbf{kl}} = a_{k_1\ldots k_n l_1\ldots l_n}$ são constantes reais. Por hipótese $\mathbf{k}-\mathbf{l} \in \mathbf{k}^j\mathbb{Z}$ para algum $j \in \{1,\ldots,s\}$ então

$$\begin{aligned} H^m &= \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|\leq m, \mathbf{k}-\mathbf{l}\in \mathbf{k}^1\mathbb{Z}} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}} \mathbf{r}^{\frac{\mathbf{k}+\mathbf{l}}{2}} e^{(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\varphi} + \cdots + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|\leq m, \mathbf{k}-\mathbf{l}\in \mathbf{k}^s\mathbb{Z}} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}} \mathbf{r}^{\frac{\mathbf{k}+\mathbf{l}}{2}} e^{(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\varphi}, \\ &= H_1^m(\mathbf{r}, \mathbf{k}^1\cdot\varphi) + \cdots + H_s^m(\mathbf{r}, \mathbf{k}^s\cdot\varphi), \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde

$$H_j^m(\mathbf{r}, \mathbf{k}^j\cdot\varphi) = \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|\leq m, \mathbf{k}-\mathbf{l}\in \mathbf{k}^j\mathbb{Z}} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}} \mathbf{r}^{\frac{\mathbf{k}+\mathbf{l}}{2}} e^{(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\varphi}$$

para $j = 1,\ldots,s$. A prova está completa. ■

Sobre a forma normal no caso em que os geradores $\mathbf{k}^1,\ldots,\mathbf{k}^s$ não têm interações temos o seguinte corolário da Proposição 2.2.2:

Corolário 2.2.3 *Se $\mathbf{k}^1,\ldots,\mathbf{k}^s$ não têm interações e $|\mathbf{k}^1| = \cdots = |\mathbf{k}^s| := \kappa$ então (2.12) é verificado se $m < 2\kappa$.*

2.3 Forma normal de Lie no caso não-diagonalizável para sistema Hamiltonianos autônomos com ressonâncias simples

Nesta seção, assumiremos que H_2 tem a forma dada em (2.2). Neste caso, caracterizaremos a forma normal de Lie da função Hamiltoniana (1.2) no caso autônomo. Usando esta caracterização mostraremos que o sistema Hamiltoniano na forma normal de Lie tem $n-1$ integrais primeiras e explicitaremos elas. Sobre a forma normal de Lie da função Hamiltoniana temos o teorema:

Teorema 2.3.1 *Se a função Hamiltoniana $H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots$ está na forma normal de Lie, então $H_j = 0$ se j é ímpar e*

$$H_j = \sum_{j_1+\cdots+j_n = j/2} a_{j_1\ldots j_n} X_1^{j_1} \ldots X_n^{j_n}, \tag{2.19}$$

se j é par, onde $X_1 = q_1^2 + p_1^2, \ldots, X_{n-2} = q_{n-2}^2 + p_{n-2}^2$, $X_{n-1} = p_{n-1}^2 + p_n^2$, $X_n = q_{n-1}p_n - q_n p_{n-1}$ e $a_{j_1\ldots j_n}$ são coeficientes reais dependendo dos coeficientes $h_{\mathbf{kl}}$ da função Hamiltoniana original.

Demonstração. Seja A a matriz tal que $\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H_2(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ com $\mathbf{z} = (\mathbf{q},\mathbf{p})^T$. Cálculos simples mostram que

$$H_2^T = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \cdots + \frac{\omega_{n-2}}{2}(q_{n-2}^2 + p_{n-2}^2) + \frac{1}{2}(p_{n-1}^2 + p_n^2) + \omega_n(q_{n-1}p_n - q_n p_{n-1}),$$

é a função Hamiltoniana associada a $\dot{\mathbf{z}} = A^T\mathbf{z}$. Agora, fixe $j \in \{3,4,\dots\}$ e assuma que H_j está na formal normal de Lie. Então a equação de Lie torna-se

$$
\begin{aligned}
0 &= \{H_2^T, H_j\} \\
&= \left(\frac{\partial H_2^T}{\partial q_1}\frac{\partial H_j}{\partial p_1} - \frac{\partial H_2^T}{\partial p_1}\frac{\partial H_j}{\partial q_1}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial H_2^T}{\partial q_{n-2}}\frac{\partial H_j}{\partial p_{n-2}} - \frac{\partial H_2^T}{\partial p_{n-2}}\frac{\partial H_j}{\partial q_{n-2}}\right) + \\
&\quad \left(\frac{\partial H_2^T}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial H_j}{\partial p_{n-1}} - \frac{\partial H_2^T}{\partial p_{n-1}}\frac{\partial H_j}{\partial q_{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial H_2^T}{\partial q_n}\frac{\partial H_j}{\partial p_n} - \frac{\partial H_2^T}{\partial p_n}\frac{\partial H_j}{\partial q_n}\right) \\
&= \omega_1\left(q_1\frac{\partial H_j}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial H_j}{\partial q_1}\right) + \cdots + \omega_{n-2}\left(q_{n-2}\frac{\partial H_j}{\partial p_{n-2}} - p_{n-2}\frac{\partial H_j}{\partial q_{n-2}}\right) + \\
&\quad \left(\omega_n p_n\frac{\partial H_j}{\partial p_{n-1}} - (p_{n-1} - \omega_n q_n)\frac{\partial H_j}{\partial q_{n-1}}\right) + \left(-\omega_n p_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial p_n} + (p_n + \omega_n q_{n-1})\frac{\partial H_j}{\partial q_n}\right) \\
&= \omega_1\left(q_1\frac{\partial H_j}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial H_j}{\partial q_1}\right) + \cdots + \omega_{n-2}\left(q_{n-2}\frac{\partial H_j}{\partial p_{n-2}} - p_{n-2}\frac{\partial H_j}{\partial q_{n-2}}\right) + \\
&\quad \omega_n\left(p_n\frac{\partial H_j}{\partial p_{n-1}} - p_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial p_n}\right) + \omega_n\left(q_n\frac{\partial H_j}{\partial q_{n-1}} - q_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial q_n}\right) - \\
&\quad \left(p_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial q_{n-1}} + p_n\frac{\partial H_j}{\partial q_n}\right).
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Para provar que $H_j = 0$ se j é ímpar e H_j tem a forma (2.19) se j é par, escreveremos a equação de Lie (2.20) nas variáveis complexas convenientes (não canônica) dada por

$$
\begin{aligned}
x_j &= q_j + ip_j, \quad \bar{x}_j = q_j - ip_j, \quad (j = 1,\dots,n-2) \\
x_{n-1} &= q_{n-1} + iq_n, \quad \bar{x}_{n-1} = q_{n-1} - iq_n, \\
x_n &= p_{n-1} + ip_n, \quad \bar{x}_n = p_{n-1} - ip_n.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Assumindo que

$$H_j(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=j} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}}\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}}$$

a equação de Lie (2.20) nas variáveis $(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}})$ assume a forma

$$\sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=j} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}}[i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega + k_{n-1}x_{n-1}^{-1}x_n + l_{n-1}\bar{x}_{n-1}^{-1}\bar{x}_n]\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}} = 0. \tag{2.22}$$

Obviamente, assumiremos que os coeficientes $\widetilde{h}_{\mathbf{kl}}$ não são todos nulos. Mostraremos que a equação (2.22) implica $(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega = 0$. Para fazer isso, suporemos o oposto para chegar em uma contradição. Primeiramente, re-escreveremos a equação de Lie (2.22) na forma conveniente

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=j} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}}i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}} + k_{n-1}\widetilde{h}_{\mathbf{kl}}x_{n-1}^{-1}x_n\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}} + l_{n-1}\widetilde{h}_{\mathbf{kl}}\bar{x}_{n-1}^{-1}\bar{x}_n\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}} \\
&= \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=j} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}}i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}} + (k_{n-1}+1)\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1}+1,k_n+1,\mathbf{l}}\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}} + \\
&\quad (l_{n-1}+1)\widetilde{h}_{\mathbf{k},l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1}+1,l_n-1}\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}}
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=j} [\widetilde{h}_{\mathbf{kl}}i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega + (k_{n-1}+1)\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1}+1,k_n-1,\mathbf{l}} + \\
&\quad (l_{n-1}+1)\widetilde{h}_{\mathbf{k},l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1}+1,l_n-1}]\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}}
\end{aligned}
$$

A última equação em (2.23) implica

$$\widetilde{h}_{\mathbf{kl}} = \frac{(k_{n-1}+1)\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1}+1,k_n-1,\mathbf{l}} + (l_{n-1}+1)\widetilde{h}_{\mathbf{k},l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1}+1,l_n-1}}{i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega}. \tag{2.24}$$

Note que aqui está implícito que os coeficientes

$$\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1}+1,-1,\mathbf{l}} = 0 \text{ e } \widetilde{h}_{\mathbf{k},l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1}+1,-1} = 0$$

e conseqüentemente, usando (2.24) temos que $\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1},0,l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1},0} = 0$. Isso é suficiente para concluir que

$$\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1},0,\mathbf{l}} = 0 \; 0 \; \widetilde{h}_{\mathbf{k},l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1},0} = 0. \tag{2.25}$$

De fato, usando (2.24) recursivamente temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1},0,\mathbf{l}} &= \frac{(l_{n-1}+1)}{i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega}\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1},0,l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1}+1,l_n-1} \\
&= \frac{(l_{n-1}+1)(l_{n-1}+2)}{i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega}\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1},0,l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1}+2,l_n-2} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= \frac{(l_{n-1}+1)\dots(l_{n-1}+l_n)}{i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega}\widetilde{h}_{\mathbf{k},\mathbf{l_1},\dots,\mathbf{l_{n-2}},\mathbf{l_{n-1}}+\mathbf{l_n},\mathbf{0}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

e de maneira similar temos que $\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1},k_n,l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1},0} = 0$.

Usando a equação (2.24) provaremos que se $(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega \neq 0$ então $\widetilde{h}_{\mathbf{kl}} = 0$ o que é uma contradição. De (2.24) e usando um processo recursivo temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}_{\mathbf{kl}} &= \frac{(k_{n-1}+1)}{i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega}\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-1}+1,k_n-1,\mathbf{l}} + \frac{(l_{n-1}+1)}{i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega}\widetilde{h}_{\mathbf{k},l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1}+1,l_n-1} \\
&= \frac{(k_{n-1}+1)(k_{n-1}+2)}{[i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega]^2}\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-2},k_{n-1}+2,k_n-2,\mathbf{l}} + \\
&\quad \tfrac{(l_{n-1}+1)(l_{n-1}+2)}{[i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega]^2}\widetilde{h}_{\mathbf{k},l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1}+2,l_n-2} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= \frac{(k_{n-1}+p)!}{p![i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega]^p}\widetilde{h}_{k_1,\dots,k_{n-1}+p,k_n-p,\mathbf{l}} + \frac{(l_{n-1}+p)!}{p![i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\omega]^p}\widetilde{h}_{\mathbf{k},l_1,\dots,l_{n-2},l_{n-1}+p,l_n-p},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde p é o máximo entre k_n e l_n. Além disso, pela afirmação em (2.25) concluímos que $\widetilde{h}_{\mathbf{kl}} = 0$. Desde que $\widetilde{h}_{\mathbf{kl}} = 0$ se $\mathbf{k}-\mathbf{l}\cdot\omega = 0$, sendo $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_{n-2},\omega_n,\omega_n)$ e

$$M_\omega = \{\mathbf{k} = (k_1,\cdots,k_n) \in \mathbb{Z}^n; \quad \mathbf{k}\cdot\omega = k_1\omega_1 + \cdots + k_{n-2}\omega_{n-2} + k_{n-1}\omega_n + k_n\omega_n = 0\},$$

então

$$H_j(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}}) = \sum_{\mathbf{k}-\mathbf{l}\in M_\Omega} \widetilde{h}_{\mathbf{kl}}\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{x}}^{\mathbf{l}}.$$

Temos que $\mathbf{k}-\mathbf{l}\in M_\Omega$ implica

$$k_1 = l_1, \ldots, k_{n-2} = l_{n-2} \text{ e } k_{n-1}+k_n = l_{n-1}+l_n, \tag{2.28}$$

assim, $j = k_1+\cdots+k_n+l_1+\cdots+l_n = 2(k_1+\cdots+k_n)$ é par. Então $H_j = 0$ se j é ímpar. Se j é par, usando as relações (2.28) e a equação de Lie (2.22) mostraremos que

$$H_j = H_j(x_1\bar{x}_1, \ldots, x_{n-2}\bar{x}_{n-2}, x_{n-1}\bar{x}_{n-1}, x_n\bar{x}_n, x_{n-1}\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}x_n). \tag{2.29}$$

De fato, se $\mathbf{k}-\mathbf{l}\notin M_\omega$ então a equação (2.23) nos fornece

$$k_{n-1}h_{\mathbf{kl}} = -(l_{n-1}+1)h_{k_1,\ldots,k_{n-2},k_{n-1}-1,k_n+1,k_1,\ldots,k_{n-2},l_{n-1}+1,l_n-1}, \tag{2.30}$$

onde $k_{n-1}+k_n = l_{n-1}+l_n$. Assuma que $k_2 \le l_n$ (ou equivalentemente $k_n \ge l_{n-1}$). Considerando a relação de ordem parcial definida por $(\mathbf{k},\mathbf{l}) \prec (\mathbf{k}',\mathbf{l}')$ se, e somente se, $l_{n-1} < l'_{n-1}$ obtemos a seguinte seqüencia de $(\mathbf{k},\mathbf{l})$ em $\mathbf{k}-\mathbf{l}\in M_\omega$

$$(k_1,\ldots,k_{n-2},k_{n-1}+l_{n-1}-j,k_n-l_{n-1}+j,k_1,\ldots,k_{n-2},j,k_{n-1}+k_n-j) := (j),$$

para $j = 0,1,\ldots,k_{n-1}+l_{n-1}$. Por (2.30) obtemos

$$h_{(j)} = (-1)^j \frac{(k_{n-1}+l_{n-1})!}{j!(k_{n-1}+l_{n-1}-j)!} h_{(0)};$$

então

$$\begin{aligned} H_j &= \sum_{j=1}^{k_{n-1}+l_{n-1}} (-1)^j \frac{(k_{n-1}+l_{n-1})!}{j!(k_{n-1}+l_{n-1}-j)!} h_{(0)} (x_1\bar{x}_1)^{k_1}\ldots(x_{n-2}\bar{x}_{n-2})^{k_{n-2}} \\ &\quad (x_n\bar{x}_n)^{k_n-l_{n-1}}(x_{n-1}\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1}x_n)^{k_{n-1}+l_{n-1}} \\ &= H_j(x_1\bar{x}_1,\ldots,x_{n-2}\bar{x}_{n-2},x_n\bar{x}_n,x_{n-1}\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1}x_n). \end{aligned} \tag{2.31}$$

No caso $k_{n-1} > l_n$ (ou equivalentemente $k_n < l_{n-1}$) considere a seqüencia

$$(k_1,\ldots,k_{n-2},k_{n-1}+k_n-j,j,k_1,\ldots,k_{n-2},l_{n-1}-k_n+j,l_n+k_n-j) := (j),$$

for $j = 0,1,\ldots,l_n+k_n$ ordenada por k_n. Então obtemos

$$\begin{aligned} H_j &= \sum_{j=1}^{k_n+l_n} (-1)^j \frac{(k_n+l_n)!}{j!(k_n+l_n-j)!} h_{(0)} (x_1\bar{x}_1)^{k_1}\ldots(x_{n-2}\bar{x}_{n-2})^{k_{n-2}} \\ &\quad (x_{n-1}\bar{x}_{n-1})^{l_{n-1}-k_n}(x_{n-1}\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1}x_n)^{l_n+k_n} \\ &= H_j(x_1\bar{x}_1,\ldots,x_{n-2}\bar{x}_{n-2},x_{n-1}\bar{x}_{n-1},x_{n-1}\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1}x_n). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Em ambos os casos (2.31) e (2.32) temos a veracidade de (2.29).

Desde que

$$\begin{aligned} &x_1\bar{x}_1 = (q_1^2+p_1^2),\ldots,x_{n-2}\bar{x}_{n-2} = (q_{n-2}^2+p_{n-2}^2), \\ &x_{n-1}\bar{x}_{n-1} = (q_{n-1}^2+q_n^2), \quad x_n\bar{x}_n = (p_{n-1}^2+p_n^2), \\ &x_{n-1}\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}x_n = -2i(q_{n-1}p_n - q_np_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.33}$$

por (2.29), a função H_j nas coordenadas $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ tem a forma

$$H_j = H_j(X_1,\ldots,X_{n-2},X_{n-1},X_n,X_{n+1}), \tag{2.34}$$

onde $X_j = q_j^2+p_j^2$ $(j=1,\ldots,n-2)$, $X_{n-1}=p_{n-1}^2+p_n^2$, $X_n = q_{n-1}p_n - q_np_{n-1}$ e $X_{n+1}=q_{n+1}^2+q_n^2$. Por outro lado, usando (2.34) e a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
0 &= \{H_2^T,H_j\}\\
&= \sum_{m=1}^{n-2}\omega_m\left(q_m\frac{\partial H_j}{\partial X_m}\frac{\partial X_m}{\partial p_m} - p_m\frac{\partial H_j}{\partial X_m}\frac{\partial X_m}{\partial q_m}\right)+\\
&\quad \omega_n\left(p_n\frac{\partial H_j}{\partial X_{n-1}}\frac{\partial X_{n-1}}{\partial p_{n-1}} - p_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial X_{n-1}}\frac{\partial X_{n-1}}{\partial p_n}\right)+\\
&\quad \omega_n\left(p_n\frac{\partial H_j}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial p_{n-1}} - p_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial p_n}\right)+\\
&\quad \omega_n\left(q_n\frac{\partial H_j}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial q_{n-1}} - q_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial q_n}\right)+\\
&\quad \omega_n\left(q_n\frac{\partial H_j}{\partial X_{n+1}}\frac{\partial X_{n+1}}{\partial q_{n-1}} - q_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial X_{n+1}}\frac{\partial X_{n+1}}{\partial q_n}\right)-\\
&\quad \left(p_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial q_{n-1}} + p_n\frac{\partial H_j}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial q_n}\right) - \left(p_{n-1}\frac{\partial H_j}{\partial X_{n+1}}\frac{\partial X_{n+1}}{\partial q_{n-1}} + p_n\frac{\partial H_j}{\partial X_{n+1}}\frac{\partial X_{n+1}}{\partial q_n}\right)\\
&= \sum_{m=1}^{n-2}2\omega_m\left(q_m\frac{\partial H_j}{X_m}p_m - p_m\frac{\partial H_j}{X_m}q_m\right)+\\
&\quad 2\omega_n\left(p_n\frac{\partial H_j}{X_{n-1}}p_{n-1} - p_{n-1}\frac{\partial H_j}{X_n}p_n\right) + \omega_n\left(-p_n\frac{\partial H_j}{X_{n+1}}q_n - p_{n-1}\frac{\partial H_j}{X_{n+1}}q_{n-1}\right)+\\
&\quad 2\omega_n\left(q_n\frac{\partial H_j}{X_{n-1}}q_{n-1} - q_{n-1}\frac{\partial H_j}{X_n}q_n\right) + \omega_n\left(q_n\frac{\partial H_j}{X_{n+1}}p_n + q_{n-1}\frac{\partial H_j}{X_{n+1}}p_{n-1}\right)-\\
&\quad \left(p_{n-1}\frac{\partial H_j}{X_n}p_n - p_n\frac{\partial H_j}{X_n}p_{n-1}\right) - 2\left(p_{n-1}\frac{\partial H_j}{X_{n+1}}q_{n-1} + p_n\frac{\partial H_j}{X_{n+1}}q_n\right)\\
&= -2(q_{n-1}p_{n-1}+q_np_n)\frac{\partial H_j}{\partial X_{n+1}}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

A equação (2.35) implica $H_j = H_j(X_1,\ldots,X_n)$. Então, a demonstração está completa. ■

Como conseqüência do Teorema 2.3.1 podemos provar:

Corolário 2.3.1 *As funções*

$$I_1 = \frac{1}{2}(q_1^2+p_1^2),\ldots,I_{n-2} = \frac{1}{2}(q_{n-2}^2+p_{n-2}^2), \quad I_{n-1} = q_{n-1}p_n - q_np_{n-1} \tag{2.36}$$

são integrais primeiras do sistema Hamiltoniano na forma normal de Lie.

Demonstração. De fato, assumindo que $H = H_2 + H_3 + \ldots$ está na forma normal de Lie, então pelo Teorema 2.3.1 temos

$$
\begin{aligned}
\{I_j,H\} &= q_j\frac{\partial H}{\partial p_j} - p_j\frac{\partial H}{\partial q_j} \\
&= q_j\frac{\partial H}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial p_j} - p_j\frac{\partial H}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial q_j} \\
&= q_j\frac{\partial H}{\partial X_j}p_j - p_j\frac{\partial H}{\partial X_j}q_j \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

para $j = 1,\ldots,n-2$. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\{I_{n-1},H\} &= \frac{\partial I_{n-1}}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial H}{\partial p_{n-1}} + \frac{\partial I_{n-1}}{\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial I_{n-1}}{\partial p_{n-1}}\frac{\partial H}{\partial q_{n-1}} - \frac{\partial I_{n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q_n} \\
&= p_n\frac{\partial H}{\partial p_{n-1}} - p_{n-1}\frac{\partial H}{\partial p_n} + q_n\frac{\partial H}{\partial q_{n-1}} - q_{n-1}\frac{\partial H}{\partial q_n} \\
&= p_n\frac{\partial H}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial p_{n-1}} - p_{n-1}\frac{\partial H}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial p_n} + q_n\frac{\partial H}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial q_{n-1}} - q_{n-1}\frac{\partial H}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial q_n} \\
&= -p_n\frac{\partial H}{\partial X_n}q_n - p_{n-1}\frac{\partial H}{\partial X_n}q_{n-1} + q_n\frac{\partial H}{\partial X_n}p_n + q_{n-1}\frac{\partial H}{\partial X_n}p_{n-1} \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

A prova do corolário está completa. ■

O Corolário 2.3.1 será muito importante no capítulo seguinte para obter um critério para conhecer a estabilidade da solução de equilíbrio.

Capítulo 3

Estabilidade no caso de ressonâncias simples

Assumindo que o módulo de ressonâncias é cíclico, forneceremos critérios para conhecer a estabilidade do equilíbrio nos casos diagonalizável (autônomo e periódico) e não-diagonalizável (autônomo) para sistemas com o número de graus de liberdade arbitrário. Mas, nossos resultados são enunciados e provados de tal forma que o caso cíclico é uma conseqüência natural dos Teoremas Principais. Os teoremas fornecidos neste capítulo generalizam e estendem vários resultados conhecidos na literatura, como veremos no capítulo 5 desta tese. Daremos uma interpretação geométrica das hipóteses do Teorema 3.1.1.

3.1 Estabilidade no caso diagonalizável para sistemas autônomos e periódicos

Nesta seção, assumindo que a matriz do sistema linearizado é diagonalizável daremos um teorema que fornece condições necessárias e suficientes para estabilidade nos casos autônomo e periódico quando M_ω é cíclico, digamos $M_\omega = \mathbf{k}\,\mathbb{Z}$ com $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Em geral, o problema de saber sobre a estabilidade da solução nula é resolvido somente em alguns casos particulares. Por exemplo, para um sistema Hamiltoniano autônomo sob ressonâncias simples Khazin [16], Alfriend e Richardson [5] fornecem um critério quando $m = |\mathbf{k}| = 3,4$, isto é, existe uma relação de ressonância da ordem três ou quatro. Este critério é:

- se $|\mathbf{k}| = 3$, existe uma transformação canônica tal que

$$H_3 = 2Ar_1^{|k_1|/2} \ldots r_n^{|k_n|/2} \cos\phi,$$

  onde A é uma constante real dependendo dos coeficientes do Hamiltoniano original. Se $A \neq 0$ a solução nula é instável.

- para $|\mathbf{k}| = 4$, existe uma transformação canônica tal que $H_3 = 0$ e

$$H_4 = \sum_{|j_1|+\cdots+|j_n|=2} c_{j_1\ldots j_n} r_1^{j_1} \ldots r_n^{j_n} + 2A r_1^{|k_1|/2} \ldots r_n^{|k_n|/2} \cos\phi,$$

onde A e $c_{j_1\ldots j_n}$ são constantes reais. Seja

$$S = \frac{\left| \sum_{|j_1|+\cdots+|j_n|=2} c_{j_1\ldots j_n} k_1^{j_1} \ldots k_n^{j_n} \right|}{|2A k_1^{|k_1|/2} \ldots k_n^{|k_n|/2}|}.$$

Se $S > 1$, a solução nula é estável para H^4 (para H^j se todas as ressonâncias são $j\mathbf{k} = (jk_1, \cdots, jk_n)$, $j \in \mathbb{Z}$) e no caso $S < 1$ a solução nula é instável.

O caso $S = 1$ corresponde a um caso crítico, já que o critério não dá informação. De fato, podemos obter estabilidade ou instabilidade dependendo dos termos de ordem maior que quatro. Por exemplo, seja

$$H = 3r_1 - r_2 + r_2^2 + \sqrt{3} r_1^{1/2} r_2^{3/2} \operatorname{sen}\phi + a\, r_1^3,$$

onde a é um coeficiente constante e $\phi = \varphi_1 + 3\varphi_2$. Neste caso, $\mathbf{k} = (1,3)$ e $S = 1$. Para $a = 1$, a solução nula é estável no sentido de Liapunov e para $a = -1$, instável (para mais detalhes, veja [28]).

Observação 3.1.1 *Os resultados de Khazin não dão informações nos casos $A = 0$ ou $S = 1$ para sistemas autônomos. O Teorema 3.1.1 que será fornecido nesta seção mostra como conhecer a estabilidade nestes casos e também se estende ao caso periódico.*

Em um trabalho recente Cabral e Meyer [8] deram um resultado geral para o problema de estabilidade para um sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade, que se aplica a ambos os casos ressonantes e não-ressonantes (Teorema 4.1). Encontramos um caso crítico que corresponde ao caso onde certa função possui todos os zeros não simples, e neste caso os autores não deram nenhuma informação. Markeev [28] recentemente em 2001 chama a atenção do caso crítico para um sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade sob presença de ressonância 3 : 1. Ele fornece condições para estabilidade, mas outra vez, em seus resultados temos um caso crítico que não é analisado. No caso geral, não há um resultado neste sentido.

Nosso principal objetivo nesta seção é generalizar os resultados obtidos por Cabral e Meyer [8] para sistemas com número de graus de liberdade maior que dois e estender os resultados obtidos por Khazin [16], Alfriend and Richardson [5] sob hipóteses de ressonâncias simples, no sentido de dar informações nos casos críticos também.

Para enunciar e provar o nosso resultado, faremos algumas considerações e/ou notações sobre a forma da função Hamiltoniana H dada em (1.2) após normalizado introduzir variáveis ação-ângulo.

1. A função Hamiltoniana truncada H^m de ordem $m \geq |\mathbf{k}| \geq 2$ é assumida ser escrita em variáveis ação-ângulo como

$$H^m = H_2(\mathbf{r}) + \cdots + H_{2l}(\mathbf{r}) + H_{|k|}(\mathbf{r}, \phi + \mu t) + \cdots + H_m(\mathbf{r}, \phi + \mu t) \tag{3.1}$$

onde, $\mu = 0$ no caso autônomo, $\mu = \mathbf{k} \cdot \omega$ no caso periódico, $2l$ é o maior inteiro par menor $|\mathbf{k}|$, $\phi = \mathbf{k} \cdot \varphi = k_1\varphi_1 + \cdots + k_n\varphi_n$.

2. No caso $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ ou ≤ 0, sem perda de generalidade, assumiremos que $k_1 \neq 0$. Defina a função

$$\begin{aligned} F_m(r_1, \phi) = &\ H^m\left(\tfrac{k_1}{k_1} r_1, \tfrac{k_2}{k_1} r_1, \cdots, \tfrac{k_n}{k_1} r_1, \phi\right) \\ = &\ A_4\, r_1 + \cdots + A_{2l}\, r_1^l + \Psi_{|\mathbf{k}|}(\phi)\, r_1^{|k|/2} + \cdots + \Psi_m(\phi)\, r_1^{m/2}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde

$$A_{2j} = \frac{1}{k_1^j} H_{2j}(\mathbf{k}),\ j = 2, \cdots, l, \text{ e } \Psi_\alpha(\phi) = \frac{1}{k_1^{s/2}} H_\alpha(\mathbf{k}, \phi), \tag{3.3}$$

com $\alpha = |\mathbf{k}|, \cdots, m$.

Observação 3.1.2 *Do Corolário 2.2.1 é claro que a primeira condição acima sobre H^m é verificada se o sistema (1.1) possui ressonâncias simples.*

Khazin em [16] introduziu o conceito de Birkhoff-estabilidade para dizer que a solução de equilíbrio é estável no sentido de Liapunov para qualquer ordem finita. Aqui, nós também usaremos este conceito e o chamaremos de Lie-estabilidade conforme definição no capítulo anterior, desde que estamos considerando a função Hamiltoniana H após aplicada uma transformação de Lie.

A versão analítica do principal teorema desta seção é:

Teorema 3.1.1 *Sob as notações acima:*
(A) Se existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, tais que $k_i k_j < 0$ e o Hamiltoniano truncado em (3.1) é verificado para qualquer ordem $m > 2$, então a solução nula de (1.1) é Lie-estável;

(B) Se $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ ou ≤ 0 e para algum $m > 2$ a função em (3.2) $F_m(r_1, \phi) \neq 0$ para todo (r_1, ϕ) com $r_1 > 0$ suficientemente pequeno e o Hamiltoniano truncado em (3.1) é verificado para qualquer qualquer ordem maior que 2, então a solução nula de (1.1) é Lie-estável;

(C) Se $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ ou ≤ 0 e para algum $m > 2$ existe $\phi = \phi^*$ tal que $F_m(r_1, \phi^*) = 0$ para todo $r_1 > 0$ suficientemente pequeno, e além disso, para todo ϕ com $F_m(r_1, \phi) = 0$ nós temos que $\frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1, \phi) \neq 0$ para todo $r_1 > 0$ suficientemente pequeno e o Hamiltoniano truncado em (3.1) é válido ao menos até ordem $3(m-1) - |\mathbf{k}|$ então existe uma função V e uma região Γ tais que $V < 0$ em Γ, $V = 0$ em $\partial\Gamma$ e para todo $\rho > 0$ existe $\iota = \iota(\rho) > 0$ tal que

$$|V| \geq \rho \Rightarrow |\dot{V}| > \iota \text{ em } \Gamma,$$

onde $\dot{V}$ é a derivada de V ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano associado a H. Em particular, a solução nula de (1.1) é instável no sentido de Liapunov.

Demonstração. Para provar (A), inicialmente consideremos o caso onde existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, tais que $k_i k_j < 0$. Como $k_1 \neq 0$, podemos assumir sem perda de generalidade que $k_1 > 0$. Após selecionar números reais positivos $a_2, \cdots, a_n$ tais que $a_2k_2 + \cdots + a_nk_n < 0$, a função

$$\begin{aligned} G = \;& a_2(k_2r_1 - k_1r_2) + \cdots + a_n(k_nr_1 - k_1r_n) \\ = \;& (a_2k_2 + \cdots + a_nk_n)r_1 - k_1a_2r_2 - \cdots - k_1a_nr_n \end{aligned}$$

é uma integral primeira negativa definida para H^m. Como G é uma integral primeira para $j \geq m$ do sistema Hamiltoniano H^j, no caso autônomo ou periódico, então a solução nula é Lie-estável.

No caso (B), $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ ou ≤ 0, e como $k_1 \neq 0$ defina as funções $I_j = k_jr_1 - k_1r_j$ ($j = 2, \cdots, n$). Pelo Corolário 2.2.2, H^m e I_j são integrais primeiras para H^m nos casos autônomo e periódico. Assumindo que $F_m(r_1, \phi) \neq 0$ para todo (r_1, ϕ) com $r_1 > 0$ suficientemente pequeno, e como

$$W = I_2^2 + \cdots + I_n^2 + (H^m)^2$$

é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano H^m e $W = 0$ se, e somente se, $r_j = \frac{k_j}{k_1}r_1$ ($j = 2, \cdots, n$) e então

$$0 = H^m\left(\frac{k_1}{k_1}r_1, \frac{k_2}{k_1}r_1, \cdots, \frac{k_n}{k_1}r_1, \phi\right) = F_m(r_1, \phi),$$

que é possível se e somente se $r_1 = \cdots = r_n = 0$. Então, o Teorema de Liapunov assegura a estabilidade da solução nula de H^m. Como W é uma integral primeira para o Hamiltoniano H^j para todo $j \geq m$, a solução nula é Lie-estável.

Para provar o caso (C), está implícito que

$$F_m(r_1, \phi) = \Psi_{|\mathbf{k}|}(\phi)r_1^{|\mathbf{k}|/2} + \cdots \Psi_m(\phi)r_1^{m/2},$$

pois em caso contrário a função F_m teria sinal definido para r_1 suficientemente pequeno. Assuma que m é minimal entre todos os valores de m que satisfazem (C). Nós obteremos um número real positivo δ e uma região Γ tal que

$$V = I_2^2 + \cdots + I_n^2 + (H - H_2)^2 - \delta^2 r_1^m$$

satisfaz $V < 0$ em Γ, $V = 0$ em $\partial\Gamma$ e para todo $\rho > 0$ existe $\iota = \iota(\rho) > 0$ tal que

$$|V| > \rho \Rightarrow |\{V, H\}| > \iota \text{ em } \Gamma.$$

Como $H_2 = 0$ no caso periódico, a função V neste caso possui a forma

$$V = I_2^2 + \cdots + I_n^2 + H^2 - \delta^2 r_1^m.$$

Seja

$$\Omega_a = \{V \ \leq 0, \ r_1 < a\},$$

$$\Omega_a^+ = \{V \ \leq 0, \ r_1 < a, \ \frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1, \phi) > 0\}$$

e

$$\Omega_a^- = \{V \leq 0,\ \ r_1 < a,\ \ \frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1, \phi) < 0\},$$

onde a é um número real positivo o qual será escolhido convenientemente. Desde que, por hipótese, F_m possui ao menos um zero, digamos ϕ^*, é fácil ver que $\Omega_a \neq \emptyset$, pois $V(\frac{k_1}{k_1}r_1, \frac{k_2}{k_1}r_1, \cdots, \frac{k_n}{k_1}r_1, \phi^*) = F_m(r_1, \phi^*) = 0$ para algum r_1 suficientemente pequeno. Por outro lado, como F_m possui um zero simples e é periódica em ϕ, segue que Ω_a^+ e Ω_a^- são subconjuntos não vazios de Ω_a.

Em Ω_a vale $(k_j r_1 - k_1 r_j)^2 = I_j^2 \leq \delta^2 r_1^m$ assim, existem funções reais diferenciáveis $\beta_j = \beta_j(r_1, r_j)$ $(j = 2, \ldots, n)$ com $|\beta_j| \leq 1$ tais que

$$r_j = \frac{k_j}{k_1} r_1 + \beta_j \delta r_1^{m/2}, \quad j = 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Por outro lado, $(H - H_2)^2 \leq \delta^2 r_1^m$ e como em Ω_a

$$\begin{aligned}(H - H_2)(r, \varphi) &= (H - H_2)(\tfrac{k_1}{k_1}r_1, \tfrac{k_2}{k_1}r_1 + \beta\delta r_1^{m/2}, \ldots, \tfrac{k_n}{k_1}r_1 + \beta\delta r_1^{m/2}, \phi) \\ &= H^m(\tfrac{k_1}{k_1}r_1, \tfrac{k_2}{k_1}r_1, \cdots, \tfrac{k_n}{k_1}r_1, \phi) + \cdots \\ &= F_m(r_1, \phi) + \ldots,\end{aligned} \tag{3.5}$$

temos que

$$F_m(r_1, \phi)^2 + R(r_1, \varphi) = (F_m(r_1, \phi) + \cdots)^2 \leq \delta^2 r_1^m, \tag{3.6}$$

onde $R(r_1, \varphi)$ denota termos de ordem maior que $m/2$ na variável r_1.

Agora, obteremos condições sobre δ tais que, para o número a suficientemente pequeno, $\Omega_a = \Omega_a^+ \bigcup \Omega_a^-$ e $\Omega_a^+ \bigcap \Omega_a^- = \{r_1 = \cdots = r_n = 0\}$. Para fazer isto é suficiente mostrar que para todo $r_1 > 0$ suficientemente pequeno

$$\frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1, \phi) \neq 0$$

em Ω_a, para a suficientemente pequeno. Vamos assumir o oposto e chegar em uma contradição. Então, escolhendo $(r_1^\#, \phi^\#)$ $(r_1^\# < a)$ tal que $\frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1^\#, \phi^\#) = 0$ por hipótese, segue que $F_m(r_1^\#, \phi^\#) \neq 0$. Agora escolha a suficientemente pequeno tal que

$$|R(r_1^\#, \phi^\#)| < \frac{1}{2} F_m(r_1^\#, \phi^\#)^2.$$

Então, combinando a desigualdade anterior e a escolha de δ temos que

$$\frac{F_m(r_1^\#, \phi^\#)^2}{(r_1^\star)^m} + \frac{R(r_1^\#, \varphi^\#)}{(r_1^\#)^m} \leq \delta^2,$$

assim, escolhendo $\delta^2 = F_m(r_1^\#, \phi^\#)^2 / (2(r_1^\#)^m)$, temos

$$\frac{F_m(r_1^\#, \phi^\#)^2}{2(r_1^\#)^m} < \frac{F_m(r_1^\#, \phi^\#)^2}{(r_1^\#)^m} + \frac{R(r_1^\#, \phi^\#)}{(r_1^\#)^m} \leq \frac{F_m(r_1^\#, \phi^\#)^2}{2(r_1^\#)^m},$$

que é uma contradição.

Na continuação, calcularemos a derivada de V ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano associado a H,

$$\begin{aligned}\tfrac{dV}{dt} &= \{V,H\} \\ &= 2I_2\{I_2,H\}+\cdots+I_n\{I_n,H\}+2(H-H_2)\{H-H_2,H\} \\ &-\delta^2 m r_1^{m-1}\{r_1,H\} \\ &= 2I_2\{I_2,H\}+\cdots+I_n\{I_n,H\}-2(H-H_2)\{H_2,H\}-\delta^2 m r_1^{m-1}\{r_1,H\}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $I_j,\ j=2,\cdots,n$, e H_2 (ou $H_2=0$ no caso periódico) são integrais primeiras para o sistema Hamiltoniano truncado de ordem $m'/2$ (para todo inteiro $m'\geq 2$) nas variáveis ação-ângulo, então

$$\{I_j,H\}=O(r_1^{m'/2+1/2}),\ \ (j=2,\ldots,n) \text{ e } \{H_2,H\}=O(r_1^{m'/2+1/2}),$$

em Ω_a. Em outras palavras, por (3.4) e (3.5), em Ω_a temos $I_j=O(r_1^{m/2}),\ j=2,\ldots,n$ e $H-H_2=O(r_1^{|k|/2})$. Então

$$2I_2\{I_2,H\}+\cdots+I_n\{I_n,H\}=O(r_1^{m/2+m'/2+1/2})$$
$$2(H-H_2)\{H_2,H\}=O(r_1^{|k|/2+m'/2+1/2})$$

em Ω_a. Note que

$$\begin{aligned}\{r_1,H\} &= \tfrac{\partial H^m}{\partial\varphi_1}(r,\phi)+O(r_1^{m/2+1/2}) \\ &= \tfrac{\partial H^m}{\partial\phi}(r,\phi)\tfrac{\partial\phi}{\partial\varphi_1}+O(r_1^{m/2+1/2}) \\ &= k_1\tfrac{\partial H^m}{\partial\phi}(r,\phi)+O(r_1^{m/2+1/2}),\end{aligned}$$

assim, em Ω_a

$$\delta^2 m r_1^{m-1}\{r_1,H\}=k_1\delta^2 m r_1^{m-1}\frac{\partial F_m}{\partial\phi}(r_1,\phi)+O(r_1^{3m/2-1/2}).$$

Tomando $m'>3(m-1)-|\mathbf{k}|$, temos que

$$\frac{m+m'+1}{2}\geq\frac{|\mathbf{k}|+m'+1}{2}>\frac{3m}{2}-1,$$

além disso, em Ω_a, vale

$$\frac{dV}{dt}=-\delta^2 m k_1\frac{\partial F_m}{\partial\phi}(r_1,\phi)\ r_1^{m-1}+O(r_1^{3m/2-1/2}),$$

onde os pontos representam termos de grau maior que $m/2$ em r_1. Escolha $\Gamma=\Omega_a^+$ se $k_1>0$ ou $\Gamma=\Omega_a^-$ se $k_1<0$ e a suficientemente pequeno tal que dV/dt é negativo em Γ. Temos que $V=0$ em $\partial\Gamma$, $V<0$ emΓ e para todo ρ tal que $|V|\geq\rho$

$$a\geq r_1\geq\frac{\rho^{1/m}}{\delta^{2/m}}.$$

Como

$$\{V,H\}=-\delta^2 m k_1\frac{\partial F_m}{\partial\phi}(r_1,\phi)\ r_1^{m-1}+O(r_1^{3m/2-1/2}),$$

escolhendo r_1 tal que

$$|O(r_1^{3m/2-1/2})|<|\frac{1}{2}\delta^2 m k_1\frac{\partial F_m}{\partial\phi}(r_1,\phi)\ r_1^{m-1}|$$

e observando que em $[\frac{\rho^{1/m}}{\delta^{2/m}}, a] \times [0, 2\pi]$ a função $\frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1, \phi)$ tem um mínimo positivo, digamos μ, em Γ, se $|V| \geq \rho$ temos que

$$|\{V, H\}| > \frac{1}{2}\delta^2 m k_1 \mu \, \frac{\rho^{(m-1)/m}}{\delta^{2(m-1)/m}},$$

escolha

$$\iota(\rho) = \frac{1}{2}\delta^2 m k_1 \mu \, \frac{\rho^{(m-1)/m}}{\delta^{2(m-1)/m}}$$

e temos provado (C).

Note que, desde que a função V é uma função de Chetaev na região Γ, no caso autônomo ou periódico, o Teorema de Chetaev garante a instabilidade da solução nula. ■

Um importante caso particular do Teorema 3.1.1 é:

Teorema 3.1.2 *Assuma que o sistema (1.1) possui ressonâncias simples com vetor de ressonâncias dado por* $\mathbf{k} = (k_1, \cdots, k_n)$*. Além disso,*
(A) Se existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*,* $i \neq j$*, tais que* $k_i k_j < 0$*, então a solução nula de (1.1) é Lie-estável;*

(B) Se $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ *ou* ≤ 0 *e para algum m a função em (3.2)* $F_m(r_1, \phi) \neq 0$ *para todo* (r_1, ϕ) *com* $r_1 > 0$ *suficientemente pequeno, então a solução nula de (1.1) é Lie-estável;*

(C) Se $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ *ou* ≤ 0 *e para algum* $m > 2$ *existe* $\phi = \phi^*$ *tal que* $F_m(r_1, \phi^*) = 0$ *para todo* $r_1 > 0$ *suficientemente pequeno, e além disso, para todo* ϕ *com* $F_m(r_1, \phi) = 0$ *implica* $\frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1, \phi) \neq 0$ *para todo* $r_1 > 0$ *suficientemente pequeno, então a solução nula de (1.1) é instável no sentido de Liapunov.*

Demonstração. Segue diretamente do Corolário 2.2.1 e do Teorema 3.1.1. ■

Observação 3.1.3 *Nos Teorema 3.1.1 e 3.1.2 podemos trocar Lie-estável por formalmente estável. De fato, a função G da prova de (A) é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano formal na forma normal de Lie. Em (B) trocando a função W por*

$$\widetilde{W} = I_2^2 + \cdots + I_n^2 + H^2,$$

onde H está na forma normal de Lie, segue que ela é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano formal na forma normal de Lie. Portanto, em ambos os casos temos que a solução nula é formalmente estável.

Observação 3.1.4 *Mostraremos agora, que como havíamos afirmado antes, a solução nula do sistema Hamiltoniano associado a (1.34), que é estável para a maioria das condições iniciais, é instável no sentido de Liapunov. De fato, para tal sistema*

$$F_5(r_1, \phi) = H(2r_1, 2r_1, r_1, \phi) = 4r_1^{5/2} \operatorname{sen} \phi$$

onde $\phi = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3$*. Desde que* F_5 *possui zeros simples em* ϕ*, pelo Teorema 3.1.1 segue a instabilidade do equilíbrio.*

Agora, daremos uma interpretação geométrica das hipóteses do nosso Teorema 3.1.1. Considere os seguintes conjuntos

$$S_1 = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ H^m(r,\phi) = 0\}$$

e

$$S_j = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ k_j r_1 - k_1 r_j = I_j = 0\}, \quad \text{com} \quad j = 2, \cdots, n.$$

Como $S_1 = (H^m)^{-1}(\{0\})$ e $\nabla_{(r,\phi)} H^m(r,\phi) \neq 0$, S_1 é uma superfície n-dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$. Os conjuntos S_j $(j = 2, \ldots, n)$ são planos n-dimensionais em $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $S_j = \{r_1 = r_j = 0\}$. Note que $\{\mathbf{r} = \mathbf{0}\} \subset S_1 \cap \cdots \cap S_n$. Temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.3 *Sob prévias notações:*
(I) $S_1 \cap \cdots \cap S_n = \{\mathbf{r} = \mathbf{0}\}$ (para algum $m > 2$) se, e somente se, existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, tais que $k_i k_j < 0$ ou no caso $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ ou ≤ 0 a função em (3.2) é tal que $F_m(r_1,\phi) \neq 0$ para todo (r_1,ϕ) com $r_1 > 0$ suficientemente pequeno;

(II) existe ϕ^* tal que $(r,\phi^*) \in S_1 \cap \cdots \cap S_n$ $(r \neq 0)$ e a intersecção entre S_1 e $S_2 \cap \cdots \cap S_n$ nos pontos (r,ϕ^*) é transversal (para algum m) se, e somente se, $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ ou ≤ 0 e para algum $m > 2$ existe $\phi = \phi^*$ tal que $F_m(r_1,\phi^*) = 0$ para todo $r_1 > 0$ suficientemente pequeno, e além disso, para todo ϕ com $F_m(r_1,\phi) = 0$ implica $\frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1,\phi) \neq 0$ para todo $r_1 > 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração. (I) É claro que precisamos analisar apenas o caso $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ ou ≤ 0. Neste caso, $(r,\phi) \in S_2 \cap \cdots S_n$ se, e somente se, $r_j = \frac{k_j}{k_1} r_1$ para todo $j \in \{2, \cdots, n\}$. Por outro lado, se $(r,\phi) \in S_1$ então $0 = H^m(r,\phi) = F^m(r_1,\phi) = 0$ se, e somente se, $r_1 = 0$ para todo ϕ. Com isso concluímos a prova de (I).

(II) Seja $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ ou ≤ 0 e $(r,\phi^*) \in S_1 \cap \cdots \cap S_n$ e $r_1 > 0$. Então, $r_j = \frac{k_j}{k_1} r_1$ para todo $j \in \{2, \cdots, n\}$ e $H^m(r_1, \frac{k_2}{k_1} r_1, \cdots, \frac{k_n}{k_1} r_1, \phi^*) = F^m(r_1,\phi^*) = 0$. Por definição, a intersecção entre S_1 e $S_2, \cap \cdots \cap S_n$ ocorre transversalmente em (r,ϕ^*) se, e somente se,

$$T_{(r,\phi^*)} S_1 + T_{(r,\phi^*)}(S_2 \cap \cdots \cap S_n) = \mathbb{R}^{n+1}. \tag{3.8}$$

Note que $T_{(r,\phi^*)}(S_2, \cap \cdots \cap S_n)$ é o subespaço gerado por $(k_1, \cdots, k_n, 0)$ e $(0, \cdots, 0, 1)$. Por outro lado, como $S_1 = (H^m)^{-1}(\{0\})$ temos que $T_{(r,\phi^*)} S_1$ é o complemento ortogonal de

$$\nabla_{(r,\phi)} H^m(r,\phi^*) = \left(\frac{\partial H^m}{\partial r_1}(r,\phi^*), \cdots, \frac{\partial H^m}{\partial r_n}(r,\phi^*), \frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1,\phi^*) \right),$$

onde $r = (\frac{k_1}{k_1} r_1, \cdots, \frac{k_n}{k_1} r_1)$. Note que

$$(0, \cdots, 0, 1) \cdot \nabla H^m(r,\phi^*) = \frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1,\phi^*). \tag{3.9}$$

Agora, assumindo a veracidade de (3.8), mostraremos que $\frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1,\phi) \neq 0$. Para fazer isso é suficiente observar que

$$(k_1, \ldots, k_n, 0) \cdot \nabla H^m(r,\phi^*) = k_1 \frac{\partial H^m}{\partial r_1}(r,\phi^*) + \cdots + k_n \frac{\partial H^m}{\partial r_n}(r,\phi^*) = 0, \tag{3.10}$$

pois $F_m(r_1,\phi^*) = 0$ e $r = (\frac{k_1}{k_1}r_1,\ldots,\frac{k_n}{k_1}r_1)$. Então, neste caso $(k_1,\cdots,k_n,0) \in T_{(r,\phi^*)}S_1$, e pela condição (3.8) temos que $(0,\cdots,0,1) \notin T_{(r,\phi^*)}S_1$, e então pela relação em (3.9), $\frac{\partial F_m}{\partial \phi}(r_1,\phi^*) = 0$.

A recíproca é claro das afirmações, pois $(0,\cdots,0,1) \in T_{(r,\phi^*)}(S_2 \cap \cdots \cap S_n) \setminus T_{(r,\phi^*)}S_1$; assim (3.8) vale e então concluímos (II). ■

3.2 Estabilidade no caso não-diagonalizável para sistemas Hamiltonianos autônomos

Nesta seção, assumindo que a matriz do sistema linearizado é não-diagonalizável e que $M_\omega = (0,\ldots,0,1,1)\mathbb{Z}$ forneceremos teoremas sobre estabilidade do equilíbrio.

Inicialmente assuma que o sistema Hamiltoniano (1.1) tem dois graus de liberdade. Então pelo Teorema 2.3.1, a forma normal de Lie da função Hamiltoniana (1.1) numa ordem arbitrária $j > 2$ tem a forma

$$H^j = \frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2) + \omega_2(q_1p_2 - q_2p_1) + \sum_{j_1+j_2=2}^{[j/2]} h_{j_1j_2}(p_1^2+p_2^2)^{j_1}(q_1p_2-q_2p_1)^{j_2}. \tag{3.11}$$

O seguinte teorema dá informações no caso $h_{20} = 0$.

Teorema 3.2.1 *Assuma que $n = 2$ e existe $s \geq 2$ tal que $h_{j0} = 0$, $j = 2,\ldots,s-1$, e $h_{s0} \neq 0$. Então*
(A) Se $h_{s0} > 0$, a origem é uma solução de equilíbrio Lie-estável do sistema Hamiltoniano associado a H;
(B) Se $h_{s0} < 0$, $h_{j_1j_2} = 0$ para $j_1+j_2 < s$, $j_1 \neq 0$, e $j_1+j_2 = s$, $0 \neq j_1 \neq s-1$, então a origem é uma solução de equilíbrio instável no sentido de Liapunov.

Demonstração. (A) É suficiente tomar $m = 2s$ e considerar

$$I = q_1p_2 - q_2p_1 \text{ e } H^j$$

que são integrais primeiras do sistema Hamiltoniano associado a H^j onde j é um número inteiro arbitrário maior ou igual a m. Assim, a função

$$W = I^2 + (H^j)^2$$

é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano associado a H^j, e como para $h_{s0} > 0$ temos

$$\begin{aligned} W = 0 \quad &\Leftrightarrow I = H^m = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2) + h_{s0}(p_1^2+p_2^2)^s + \sum_{i=s+1}^{[j/2]} h_{i0}(p_1^2+p_2^2)^i = 0 \\ &\Leftrightarrow q_1 = p_1 = q_2 = p_2 = 0 \text{ numa vizinhança da origem,} \end{aligned} \tag{3.12}$$

então o Teorema de Liapunov garante a estabilidade da solução nula de H^j para todo inteiro arbitrário $j \geq m$. Portanto, a solução nula é Lie-estável e a prova de (A) está completa.

(B) Assumindo que $h_{s0} < 0$, $h_{j_1 j_2} = 0$ para $j_1 + j_2 < s$, $j_1 \neq 0$, e $j_1 + j_2 = s$, $0 \neq j_1 \neq s-1$, então a função Hamiltoniana normalizada até ordem $2s$ tem a forma

$$\begin{aligned} H = \ & \tfrac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)+\omega(q_1p_2-q_2p_1)+ \\ & h_{02}(q_1p_2-q_2p_1)^2+\cdots+h_{0,s-1}(q_1p_2-q_2p_1)^{s-1}+ \\ & h_{s0}(p_1^2+p_2^2)^s+h_{s-1,1}(p_1^2+p_2^2)^{s-1}(q_1p_2-q_2p_1)+h_{0s}(q_1p_2-q_2p_1)^s+\ldots, \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde os pontos significam termos de ordem maior que $2s$ nas variáveis q_1, q_2, p_1 e p_2. Seja $V = q_1p_1+q_2p_2$. Desde que,

$$\{V, q_1^2+q_2^2\} = 2(q_1^2+q_2^2), \{V, p_1^2+p_2^2\} = 2(p_1^2+p_2^2), \text{ e } \{V, q_1p_2-q_2p_1\} = 0, \tag{3.14}$$

então

$$\begin{aligned} \{V,H\} \ &= -(q_1^2+q_2^2)+2sh_{s0}(p_1^2+p_2^2)^s+ \\ & \quad 2(s-1)h_{s-1,1}(p_1^2+p_2^2)^{s-1}(q_1p_2-q_2p_1)+\ldots \\ &= -(q_1^2+q_2^2)+2sh_{s0}(p_1^2+p_2^2)^{s-1}[p_1^2+p_2^2+2\alpha q_1p_2-2\alpha q_2p_1)]+\ldots \\ &= -(q_1^2+q_2^2)[1-2sh_{s0}\alpha^2(q_1^2+q_2^2)(p_1^2+p_2^2)^{s-1}]+ \\ & \quad 2sh_{s0}(p_1^2+p_2^2)^{s-1}[(p_1-\alpha q_2)+(p_2-\alpha q_1)]+\ldots, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde

$$\alpha = \frac{(s-1)h_{s-1,1}}{2sh_{s0}}$$

e os pontos indicam termos de ordem maior que $2s$ nas variáveis q_1, q_2, p_1 e p_2. Pela última expressão de $\{V,H\}$ em (3.15) é claro que ela é definida negativa numa vizinhança da origem se $h_{s0} < 0$ e como V não tem sinal definido, pelo Teorema da Instabilidade de Liapunov concluímos a instabilidade do equilíbrio. ∎

Observação 3.2.1 *Na tese do Teorema 3.2.1 podemos trocar o tipo de estabilidade de Lie-estável por formalmente estável. De fato, mudando a função W por*

$$\widetilde{W} = I^2 + H^2,$$

onde H está na forma normal de Lie segue que esta função é uma integral primeira formal para o sistema Hamiltoniano na forma normal de Lie.

Vimos nesta seção um critério (Teorema 3.2.1) para obter Lie-estabilidade (ou estabilidade formal) e instabilidade no sentido de Liapunov da solução de equilíbrio que generaliza o Teorema de Sokolskii (Teorema 1.2.8) no sentido de dar informações no caso $A = h_{20} = 0$. Vamos agora dar uma generalização parcial de nosso resultado a sistemas com n graus de liberdade. A expressão "generalização parcial"é porque nesta generalização forneceremos Lie-instabilidade e não estabilidade no sentido de Liapunov.

Antes de provar o principal resultado desta seção, lembraremos e provaremos o seguinte resultado que será usado.

Lema 3.2.1 *Considere um sistema mecânico* $\ddot{\mathbf{q}} = \nabla U(\mathbf{q})$, *com* $\nabla U(\mathbf{q}_0) = 0$. *Seja*

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \parallel \mathbf{p} \parallel^2 - U(\mathbf{q})$$

o sistema Hamiltoniano associado e considere a região

$$C : H < 0, \sum_{i=1}^{n} q_i p_i > 0.$$

Se a série de Taylor de U numa vizinhança da origem term a forma $U = U_m + U_{m+1} + \dots$ *com* U_m *definida positiva na região C, então a solução de equilíbrio* $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ *do sistema Hamiltoniano H é instável no sentido de Liapunov.*

Demonstração. Considere a função

$$V(\mathbf{q},\mathbf{p}) = -H \sum_{i=1}^{n} q_i p_i.$$

Desde que,

$$\dot{V} = \{V,H\} = -H \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = -H[2 \parallel \mathbf{p} \parallel^2 + mU_m(\mathbf{q})] + \dots,$$

é definida positiva na região C, em uma vizinhança da origem, pelo Teorema de Chetaev a solução nula é instável. ∎

O principal teorema desta seção é:

Teorema 3.2.2 *Assuma que o sistema Hamiltoniano (1.1) tem n graus de liberdade. Então usando notações do Teorema 2.3.1 temos:*
(A) Assumindo que existe um número inteiro $s \geq 2$ *tal que* $h_{0\dots 0j0} = 0$, $j = 2, \dots, s-1$, *e* $h_{0\dots 0s0} \neq 0$, *então*
(A.1) Se $h_{0\dots 0s0} > 0$ *a solução nula é Lie-estável;*
(A.2) No caso $h_{0\dots 0s0} < 0$ *a solução nula é Lie-instável;*
(B) a solução nula é Lie-instável se não existe um número s como no ítem (A).

Demonstração. (A.1) A prova neste caso é similar a prova do ítem (A) do Teorema 3.2.1. De fato, é suficiente tomar $m = 2s$ e como as funções

$$I_1 = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2), \dots, I_{n-2} = \frac{1}{2}(q_{n-2}^2 + p_{n-2}^2), \quad I_{n-1} = q_{n-1}p_n - q_n p_{n-1} \text{ e } I_n = H^j$$

são integrais primeiras do sistema Hamiltoniano associado a H^j para todo número inteiro arbitrário $j \geq m$; assim, a função

$$W = I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2$$

é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano associado a H^j. Como $h_{0\dots0s0} > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
W = 0 \quad & \Leftrightarrow I_1 = I_2 = \cdots = I_n = 0 \\
& \Leftrightarrow q_1 = p_1 = \cdots = q_{n-2} = p_{n-2} = 0 \text{ e} \\
& \tfrac{1}{2}(q_{n-1}^2 + q_n^2) + h_{0\dots0s0}(p_{n-1}^2 + p_n^2)^s + \sum_{i=s+1}^{[j/2]} h_{0\dots0i0}(p_{n-1}^2 + p_n^2)^i = 0 \\
& \Leftrightarrow q_1 = p_1 = \cdots = q_n = p_n = 0 \text{ numa vizinhança da origem.}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Então a estabilidade da solução de equilíbrio do sistema Hamiltoniano associado a H^j segue do Teorema de Liapunov. Como $j \geq m$ pode ser escolhido arbitrário, a solução nula é Lie-estável.

(A.2) Assuma que $h_{0\dots0j0} = 0$, $j = 2, \dots, s-1$, e $h_{0\dots0s0} < 0$ e seja $m = 2s$. Neste caso, como $I_1, \dots, I_{n-1}$ são integrais primeiras do sistema Hamiltoniano associado a H^j para todo número inteiro arbitrário $j \geq m$ então $\overline{S} : I_1 = \cdots = I_{n-2} = I_{n-1} = 0$ é um subconjunto invariante pelo fluxo definido pelo sistema Hamiltoniano associado a H^m. Restringindo o Hamiltoniano H^j a $\overline{S}$, a função Hamiltoniana torna-se

$$
H^j|_{\overline{S}} = \tfrac{1}{2}(q_{n-1}^2 + q_n^2) + h_{0\dots0s0}(p_{n-1}^2 + p_n^2)^s + \sum_{i=s+1}^{[j/2]} h_{0\dots0i0}(p_{n-1}^2 + p_n^2)^i. \tag{3.17}
$$

Então, o sistema Hamiltoniano associado a $H^j|_{\overline{S}}$ é

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_{n-1} &= 2sh_{0\dots0s0}p_{n-1}(p_{n-1}^2 + p_n^2)^{s-1} + \sum_{i=s+1}^{[j/2]} 2ih_{0\dots0i0}p_{n-1}(p_{n-1}^2 + p_n^2)^{i-1} \\
\dot{q}_n &= 2sh_{0\dots0s0}p_n(p_{n-1}^2 + p_n^2)^{s-1} + \sum_{i=s+1}^{[j/2]} 2ih_{0\dots0j0}p_n(p_{n-1}^2 + p_n^2)^{i-1} \\
\dot{p}_{n-1} &= -q_{n-1} \\
\dot{p}_n &= -q_n.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

O sistema Hamiltoniano (3.18) é equivalente ao sistema mecânico $\ddot{\mathbf{Z}} = \nabla U(\mathbf{Z})$, onde $\mathbf{Z} = (p_{n-1}, p_n)^T$ e

$$
U(\mathbf{Z}) = -h_{0\dots0s0}(p_{n-1}^2 + p_n^2)^s - \sum_{i=s+1}^{[j/2]} h_{0\dots0i0}(p_{n-1}^2 + p_n^2)^i.
$$

Assumindo $h_{0\dots0s0} < 0$, a função $U_s(\mathbf{Z}) = -h_{0\dots0s0}(p_{n-1}^2 + p_n^2)^s$ é definida positiva na região $C : H^m|_{\overline{S}} < 0, \quad q_2p_2 + q_3p_3 > 0$, assim pelo Lema 3.2.1 a solução nula do sistema mecânico $\ddot{\mathbf{Z}} = \nabla U(\mathbf{Z})$ é instável no sentido de Liapunov; conseqüentemente, a solução nula de H^j é instável para todo $j \geq m$. Desde que j pode ser escolhido arbitrariamente $\geq m$ a solução nula é e Lie-instável para o sistema Hamiltoniano associado a H.

(B) Neste caso seja $m = 2$. Note que restringindo H^j ao subconjunto invariante $\overline{S} : I_1 = \cdots = I_{n-2} = I_{n-1} = 0$ no caso $h_{0\dots0i0} = 0$ para todo inteiro $i \geq 2$ a função Hamiltoniana assume a forma

$$
H^j|_{\overline{S}} = \frac{1}{2}(q_{n-1}^2 + q_n^2).
$$

Desde que solução nula do sistema Hamiltoniano associado a $H^j|_{\overline{S}}$ é instável para todo $j \geq m = 2$; assim a solução nula de H é Lie-instável. A prova do teorema está completa. ∎

Nosso Teorema 3.2.2 estende o Teorema de Mansilla 1.2.13 a n graus de liberdade e dá informações no caso $h_{020} = 0$ o qual não foi considerado por Mansilla em [23].

Observação 3.2.2 *A observação 3.2.1 é verdadeira também para o Teorema 3.2.2. De fato, a integral primeira formal do sistema Hamiltoniano é*

$$\widetilde{W} = I_1^2 + I_2^2 + \cdots + I_n^2,$$

onde $I_n = H$ *está na forma normal de Lie.*

Capítulo 4

Estabilidade no caso de ressonâncias múltiplas para sistemas autônomos e periódicos

Este capítulo é dedicado ao estudo da estabilidade da solução de equilíbrio nula de um sistema Hamiltoniano autônomo ou periódico com n graus de liberdade cujo sistema linearizado é diagonalizável e possui múltiplas ressonâncias de ordens arbitrárias. Nós damos condições necessárias e suficientes para estabilidade (Lie-estabilidade e instabilidade no sentido de Liapunov) sob condições bastante gerais.

4.1 Condições necessárias para Lie-estabilidade

Neste capítulo estamos assumindo que $M_\omega = \mathbf{k}^1\mathbb{Z} + \cdots + \mathbf{k}^s\mathbb{Z}$, com $s > 1$. Iniciemos com o simples resultado:

Proposição 4.1.1 *Se existe $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, com $a_1, \ldots, a_n > 0$ tal que*

$$\mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{a} = \cdots = \mathbf{k}^s \cdot \mathbf{a} = 0,$$

então a solução nula de (1.1) é Lie-estável.

Demonstração. Neste caso, usando o Corolário 2.2.2 temos que $I = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano associado a H^m para todo m. Desde que $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, com $a_1, \ldots, a_n > 0$, I é definido positivo e pelo Teorema de Liapunov concluímos que a solução nula de (1.1) é Lie-estável. ■

Uma condição necessária para existência de $\mathbf{a}$ como na Proposição 4.1.1 é que para todo $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, tais que $k_i^\alpha k_j^\alpha < 0$. Esta condição em geral não é suficiente pois no caso $s = n-1$ todo $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{a} = \cdots = \mathbf{k}^s \cdot \mathbf{a} = 0$ tem a forma $\mathbf{a} = c\omega = (c\omega_1, \ldots, c\omega_n)$ onde c é uma constante real.

Considere o conjunto

$$S = \{(\mathbf{r}, \varphi); \quad I_1(\mathbf{r}) = \cdots = I_{n-s}(\mathbf{r}) = 0\},$$

onde $I_1(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r}, \ldots, I_{n-s}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_{n-s} \cdot \mathbf{r}$ são as integrais primeiras fornecidas pelo Corolário 2.2.2. Outro resultado sobre Lie-estabilidade é:

Proposição 4.1.2 *Se $S = \{\mathbf{r} = 0\}$ então a solução nula de (1.1) é Lie-estável;*

Demonstração. Uma simples prova desta proposição é obtida tomando a função

$$W = I_1^2 + \cdots + I_{n-2}^2$$

como função de Liapunov. De fato, é uma integral primeira definida positiva do sistema Hamiltoniano truncado na forma normal de Lie de qualquer ordem. ■

Observação 4.1.1 *Note que a existência de $\mathbf{a}$ como na Proposição 4.1.1 implica $S = \{\mathbf{0}\}$. De fato, como $\mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{a} = \cdots = \mathbf{k}^s \cdot \mathbf{a} = 0$ existem constantes reais $c_1, \ldots, c_{n-s}$ tais que $\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_{n-s}\mathbf{a}_{n-s}$ e então $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 0$ que ocorre se, e somente se, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Então temos outra prova diferente da Proposição 4.1.1.*

As condições da Proposição 4.1.1 e 4.1.2 dependem apenas de condições sobre os vetores de ressonância $\mathbf{k}^1, \ldots, \mathbf{k}^s$. Ela é independente dos termos de ordem maior que dois. Por exemplo, um sistema Hamiltoniano autônomo com quatro graus de liberdade que tem função Hamiltoniana em variáveis ação-ângulo

$$H = r_1 + 2r_2 + 3r_3 - \pi r_4 + H_3 + \ldots$$

é Lie-estável independente dos termos de ordem maior que dois. De fato, neste caso $M_\omega = (2,-1,0,0)\mathbb{Z} + (3,0,-1,0)\mathbb{Z}$ e tomando $\mathbf{a} = (1,2,3,\pi)$ temos $\mathbf{a} \cdot (2,-1,0,0) = \mathbf{a} \cdot (3,0,-1,0) = 0$ ou equivalentemente $(2,-1,0,0)$ e $(3,0,-1,0)$ têm componentes que mudam de sinal.

Agora, obteremos condições necessárias para Lie-estabilidade da solução de equilíbrio dependendo da forma normal de Lie de (1.1) truncada em alguma ordem $m > 2$. É assumido que $S \neq \{\mathbf{r} = \mathbf{0}\}$. Neste caso considere a função

$$F_m = H^m|_{S \times \mathbb{R}^s} = F_m(r_{j_1}, \ldots, r_{j_s}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^s \cdot \varphi), \tag{4.1}$$

para alguns $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}$. Temos o seguinte teorema geral:

Teorema 4.1.1 *Usando notações prévias, se $S \neq \{\mathbf{r} = \mathbf{0}\}$ e existe $m > 2$ tal que $F_m(r_{j_1}, \ldots, r_{j_s}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^s \cdot \varphi) \neq 0$ para todo $(r_{j_1}, \ldots, r_{j_s}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^s \cdot \varphi)$ com $r_{j_1}, \ldots, r_{j_s} > 0$ suficientemente pequeno, então a solução nula é Lie-estável.*

Demonstração. Assuma que $S \neq \{\mathbf{r} = \mathbf{0}\}$ e considere a função

$$V = I_1^2 + \cdots + I_{n-s}^2 + (H^m)^2.$$

Esta função é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano associado a H^m para todo $m \geq 2$. Por outro lado, temos que $V = 0$ se, e somente se, $\mathbf{r} \in S$ e $F_m(r_{j_1}, \ldots, r_{j_s}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^s \cdot \varphi) = 0$. Assumindo que existe $m > 2$ tal que $F_m(r_{j_1}, \ldots, r_{j_s}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^s \cdot \varphi) \neq 0$ para todo $(r_{j_1}, \ldots, r_{j_s}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^s \cdot \varphi)$ com $r_{j_1}, \ldots, r_{j_s} > 0$ suficientemente pequeno temos que $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Pelo Teorema de Liapunov a solução nula é estável para o sistema Hamiltoniano associado a H^j para $j \geq m$. O teorema está provado. ∎

Seja

$$S^m = \{(\mathbf{r}, \varphi); H^m(\mathbf{r}, \varphi) = 0\}.$$

As hipóteses do teorema anterior são claramente equivalentes a $S \cap S^m = \{\mathbf{r} = \mathbf{0}\}$.

No caso $S^m = \{\mathbf{r} = \mathbf{0}\}$ temos estabilidade no sentido de Liapunov. De fato, a função Hamiltoniana H na forma normal de Lie até ordem m é uma integral primeira definida positiva para o sistema Hamiltoniano associado a (1.1). O Teorema de Liapunov (tomando H como função de Liapunov) garante que a solução nula é estável no sentido de Liapunov.

Observação 4.1.2 *Nas teses das Proposições 4.1.1, 4.1.2 e Teorema 4.1.1 podemos mudar Lie-estável por formalmente estável (ou "quase estável"na notação de Moser [32]). De fato, a função I da prova em 4.1.1 e W da Proposição 4.1.2 são integrais primeiras do Hamiltoniano formal em sua forma normal de Lie. No Teorema 4.1.1 mudando a função V por*

$$V = I_2^2 + \cdots + I_n + H^2,$$

onde H está na forma normal de Lie, segue que ele é uma integral primeira formal do sistema Hamiltoniano na forma normal de Lie. Portanto, em ambos os casos temos que a solução nula é formalmente estável.

4.2 Condições necessárias para instabilidade no sentido de Liapunov

É claro que nesta seção suporemos $S \cap S^m \neq \{\mathbf{r} = \mathbf{0}\}$ para todo $m > 2$. Uma questão natural que surge é saber se neste caso a solução nula é instável no sentido de Liapunov. Nesta seção, damos uma resposta a esta questão adicionando algumas hipóteses extras.

Assuma que $|\mathbf{k}^1| \leq \cdots \leq |\mathbf{k}^s|$ e $\mathbf{k}^1, \ldots, \mathbf{k}^\gamma$ não têm interações onde $0 \leq \gamma \leq s$. Assumamos, por simplicidade, que

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^1 &= (k_1^1, \dots, k_{\alpha_1}, 0, \dots, 0), \\
\mathbf{k}^2 &= (0, \dots, 0, k_{\alpha_1+1}^2, \dots, k_{\alpha_1+\alpha_2}^2, 0, \dots, 0), \\
&\ \vdots \\
\mathbf{k}^\gamma &= (0, \dots, 0, k_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\gamma-1}+1}^\gamma, \dots, k_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\gamma-1}+\alpha_\gamma}^\gamma, 0, \dots, 0),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $k_1^1, k_2^1, \dots, k_{\alpha_1}^1 \geq 0, \dots, k_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\mu-1}+1}^\mu, \dots, k_{\alpha_1+\dots+\alpha_\mu}^\mu \geq 0$, com $k_1^1 > 0, \dots, k_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\mu-1}+1}^\mu > 0$ e para todo $l \in \{\mu+1, \dots, \gamma\}$ existem i, j tais que $k_i^l k_j^l < 0$, onde $1 \leq \mu \leq \gamma$. Se existe $m > |\mathbf{k}^1|$ número inteiro tal que $m' := |\mathbf{k}^{\gamma+1}| - 1 < 3(m-1) - |\mathbf{k}^1|$ e se

$$H^m = H_1^m(\mathbf{r}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi) + \dots + H_\gamma^m(\mathbf{r}, \mathbf{k}^\gamma \cdot \varphi), \tag{4.3}$$

considere as funções

$$\begin{aligned}
F_m^1(r_1, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi) &= H_1^m\Big(\frac{k_1^1}{k_1^1} r_1, \dots, \frac{k_{\alpha_1}^1}{k_1^1} r_1, 0, \dots, 0, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi\Big) \\
F_m^2(r_{\alpha_1+1}, \mathbf{k}^2 \cdot \varphi) &= H_1^m\Big(0, \dots, 0, \frac{k_{\alpha_1+1}^{\alpha_1+1}}{k_{\alpha_1+1}^{\alpha_1+1}} r_{\alpha_1+1}, \dots, \frac{k_{\alpha_1+\alpha_2}^{\alpha_1+1}}{k_{\alpha_1+1}^{\alpha_1+1}} r_{\alpha_1+1}, 0, \dots, 0, \mathbf{k}^2 \cdot \varphi\Big) \\
&\ \vdots \\
F_m^\mu(r_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\mu-1}+1}, \mathbf{k}^\mu \cdot \varphi) &= H_\mu^m\Big(0, \dots, 0, \frac{k_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\mu-1}+1}}{k_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\mu-1}+1}^\mu} r_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\mu-1}+1}, \dots, \\
&\qquad \frac{k_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu}^\mu}{k_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\mu-1}+1}^\mu} r_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\mu-1}+1}, 0, \dots, 0, \mathbf{k}^\mu \cdot \varphi\Big).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1 *Sob prévias notações, assuma que existe $j \in \{1, \dots, \mu\}$ tal que para todo $r_j > 0$ suficientemente pequeno existe $\mathbf{k}^j \cdot \varphi$ tal que*

$$F_m^j(r_{\alpha_1+\dots+\alpha_{j-1}+1}, \mathbf{k}^j \cdot \varphi) = 0, \tag{4.5}$$

e existe $\mathbf{c} = (0, \dots, 0, c_{\mu+1}, \dots, c_n)$ com $c_{\mu+1}, \dots, c_n > 0$ tal que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{k}^1, \dots, \mathbf{c} \cdot \mathbf{k}^s = 0$. Se

$$\frac{\partial F_m^j}{\partial(\mathbf{k}^j \cdot \varphi)}(r_{\alpha_1+\dots+\alpha_{j-1}+1}, \mathbf{k}^j \cdot \varphi) \neq 0 \tag{4.6}$$

para todo $(r_{\alpha_1+\dots+\alpha_{j-1}+1}, \mathbf{k}^j \cdot \varphi)$ satisfazendo (4.5) então existe uma função V e uma região Γ tal que $V < 0$ em Γ, $V = 0$ em $\partial\Gamma$ e para todo $\rho > 0$ existe $\iota = \iota(\rho) > 0$ tal que

$$|V| \geq \rho \text{ implica } |\dot{V}| > \iota \text{ em } \Gamma,$$

onde $\dot{V}$ significa a derivada de V ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano associado a H. Em particular, a solução nula de (1.1) é instável no sentido de Liapunov.

Demonstração. Por simplicidade assumiremos que $j = 1$ (os casos $j \neq 1$ são análogos). Para $\mathbf{k}^1, \ldots, \mathbf{k}^\mu$ como em (4.2) escolhendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_2 &= (k_2^1, -k_1^1, 0, \ldots, 0), \ldots, \\
\mathbf{a}_{\alpha_1} &= (k_{\alpha_1}^1, 0, \ldots, 0, -k_1^1, 0, \ldots, 0) \\
\mathbf{a}_{\alpha_1+2} &= (0, \ldots, 0, k_{\alpha_1+2}^2, -k_{\alpha_1+1}^2, 0, \ldots, 0), \ldots, \\
\mathbf{a}_{\alpha_1+\alpha_2} &= (k_{\alpha_1+\alpha_2}^1, 0, \ldots, 0, -k_{\alpha_1+1}^2, 0, \ldots, 0) \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+2} &= (0, \ldots, 0, k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+2}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}}, -k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}}, 0, \ldots, 0), \ldots, \\
\mathbf{a}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu} &= (0, \ldots, 0, k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}}, 0, \ldots, 0, -k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}}, 0, \ldots, 0),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

temos que $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k}^1 = \cdots = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k}^s = 0$ para $i \in \Lambda := \{1, \ldots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_\mu\} \setminus \{1, \alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\mu-1} + 1\}$. Pelo Corolário 2.2.2 as funções $I_j = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}$, $i \in \Lambda$, são integrais primeiras do sistema Hamiltoniano associado a H^m. Por outro lado, existe $\mathbf{c} = (0, \ldots, 0, c_{\mu+1}, \ldots, c_n)$ com $c_{\mu+1}, \ldots, c_n > 0$ tal que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{k}^1, \ldots, \mathbf{c} \cdot \mathbf{k}^s = 0$ e então a função $I = c_{\mu+1} r_{\mu+1} \cdots + c_n r_n$ é uma integral primeira positiva do sistema Hamiltoniano associado a H^m.

Vamos obter um número real positivo δ e uma região Γ tal que

$$V = \sum_{i \in \Lambda} I_i^2 + I^2 + (H - H_2)^2 - \delta^2 r_1^m \tag{4.8}$$

satisfaz $V < 0$ em Γ, $V = 0$ em $\partial\Gamma$ e para todo $\rho > 0$ existe $\iota = \iota(\rho) > 0$ tal que

$$|V| > \rho \Rightarrow |\dot{V}| > \iota \text{ em } \Gamma.$$

Seja

$$\Omega_a = \{V \ \leq 0, \ r_1 < a\},$$

$$\Omega_a^+ = \{V \ \leq 0, \ r_1 < a, \ \frac{\partial F_m^1}{\partial \phi}(r_1, \phi) > 0\}$$

e

$$\Omega_a^- = \{V \leq 0, \ r_1 < a, \ \frac{\partial F_m^1}{\partial \phi}(r_1, \phi) < 0\},$$

onde a é um número inteiro positivo. Desde que por hipótese F_m^1 possui ao menos um zero, digamos $\mathbf{k}^1 \cdot \varphi^*$, é fácil ver que $\Omega_a \neq \emptyset$, pois

$$V(\frac{k_1^1}{k_1^1} r_1, \ldots, \frac{k_{\alpha_1}^1}{k_1^1} r_1, 0, \ldots, 0, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi^*) = F_m^1(r_1, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi^*) = 0$$

para algum r_1 suficientemente pequeno. Por outro lado, como F_m^1 possui um zero simples e esta função é periódica em $\mathbf{k}^1\varphi$, segue que Ω_a^+ e Ω_a^- são subconjuntos não-vazios Ω_a.

Em Ω_a vale $I_i^2 \leq \delta^2 r_1^m$ para $i \in \Lambda$ e $I^2 \leq \delta^2 r_1^m$ (conseqüentemente $c_{\mu+1}^2 r_{\mu+1}^2, \ldots, c_n^2 r_n^2 \leq \delta^2 r_1^m$);

assim, existem funções reais $f_i = f_i(r_1, r_i)$ $i \in \Lambda \cup \{\mu+1, \ldots, n\}$ com $|f_j| \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{k_2^1}{k_1^1} r_1 + f_2 \delta r_1^{m/2}, \ldots, \\
r_{\alpha_1} &= \frac{k_{\alpha_1}^1}{k_1^1} r_1 + f_{\alpha_1} \delta r_1^{m/2}, \\
r_{\alpha_1+2} &= \frac{k_{\alpha_1+2}^{\alpha_1+1}}{k_{\alpha_1+1}^{\alpha_1+1}} r_{\alpha_1+1} + f_{\alpha_1+2} \delta r_1^{m/2}, \ldots, \\
r_{\alpha_1+\alpha_2} &= \frac{k_{\alpha_1+\alpha_2}^{\alpha_1+1}}{k_{\alpha_1+1}^{\alpha_1+1}} r_{\alpha_1+1} + f_{\alpha_1+\alpha_2} \delta r_1^{m/2}, \\
&\vdots \\
r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+2} &= \frac{k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+2}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}}{k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}} r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1} + f_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+2} \delta r_1^{m/2}, \ldots, \\
r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu} &= \frac{k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}}{k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}} r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1} + f_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu} \delta r_1^{m/2}, \\
r_{\mu+1} &= f_{\mu+1} \frac{\delta}{c_{\mu+1}} r_1^{m/2}, \ldots, r_n = f_n \frac{\delta}{c_n} r_1^{m/2}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por outro lado, em Ω_a temos $(H - H_2)^2 \leq \delta^2 r_1^m$ e usando (4.9) concluímos

$$(H - H_2)(\mathbf{r}, \varphi) = H^m(r_1, \ldots, r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^\mu \cdot \varphi) + O(r_1^{m/2+1/2}), \tag{4.10}$$

e, portanto

$$H^m(r_1, \ldots, r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1}, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^\mu \cdot \varphi)^2 + R(r_1, \varphi) \leq \delta^2 r_1^m, \tag{4.11}$$

onde $R(r_1, \varphi)$ denota termos of ordem maior que m na variável r_1. Neste ponto é importante observar que

$$F_m^1(r_1, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi) = H^m(r_1, 0, \ldots, 0, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi, \ldots, \mathbf{k}^\mu \cdot \varphi).$$

Agora, vamos obter condições sobre δ tal que, para a suficientemente pequeno, $\Omega_a = \Omega_a^+ \bigcup \Omega_a^-$ e $\Omega_a^+ \bigcap \Omega_a^- = \{r_1 = \cdots = r_n = 0\}$. Para fazer isso é suficiente mostrar que para todo $r_1 > 0$ suficientemente pequeno é verificado

$$\frac{\partial F_m^1}{\partial(\mathbf{k}^1 \cdot \varphi)}(r_1, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi) \neq 0$$

em Ω_a, para a suficientemente pequeno. Vamos assumir o oposto para chegar numa contradição. Então, escolhendo $(r_1^\#, \mathbf{k}^1 \varphi^\#)$ $(r_1^\# < a)$ tal que $\frac{\partial F_m^1}{\partial(\mathbf{k}^1 \cdot \varphi)}(r_1^\#, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi^\#) = 0$ por hipótese temos que $F_m(r_1^\#, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi^\#) \neq 0$. Agora, escolhemos a suficientemente pequeno tal que

$$|R(r_1^\#, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi^\#)| < \frac{1}{2} F_m(r_1^\#, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi^\#)^2$$

e $r_{\alpha_1+1} = \cdots = r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}+1} = 0$. Então, pela desigualdade em (4.11) temos

$$\frac{F_m^1(r_1^\#, \mathbf{k}^1 \cdot \varphi^\#)^2}{(r_1^\#)^m} + \frac{R(r_1^\#, \varphi^\#)}{(r_1^\#)^m} \leq \delta^2,$$

assim, escolhendo $\delta^2 = F_m^1(r_1^\#, \mathbf{k}^1\cdot\varphi^\#)^2/(2(r_1^\#)^m)$ temos

$$\frac{F_m^1(r_1^\#,\mathbf{k}^1\cdot\varphi^\#)^2}{2(r_1^\#)^m} < \frac{F_m^1(r_1^\#,\mathbf{k}^1\cdot\varphi^\#)^2}{(r_1^\#)^m} + \frac{R(r_1^\#,\varphi^\#)}{(r_1^\#)^m} \leq \frac{F_m^1(r_1^\#,\mathbf{k}^1\cdot\varphi^\#)}{2(r_1^\#)^m},$$

o que é uma contradição.

Nosso próximo passo é calcular a derivada $\dot V$ de V ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano associado a H. Primeiramente, é imediato que

$$\dot V = \sum_{i\in\Lambda} 2I_i\{I_i,H\} + 2I\{I,H\} - 2(H-H_2)\{H_2,H\} - \delta^2 m r_1^{m-1}\{r_1,H\} + \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{4.12}$$

Como I_i, $i\in\Lambda$, I e H_2 (ou $H_2 = 0$ no caso periódico) são integrais primeiras do sistema Hamiltoniano truncado de ordem $m'/2$ na forma normal de Lie em variáveis ação-ângulo, então

$$\{I_i,H\} = O(r_1^{m'/2+1/2}),\ \ (i\in\Lambda),\ \ \{I,H\} = O(r_1^{m'/2+1/2}) \text{ e } \{H_2,H\} = O(r_1^{m'/2+1/2}),$$

in Ω_a. Em outras palavras, por (4.9) e (4.10), em Ω_a temos $I_i = O(r_1^{m/2})$, $i\in\Lambda$, $I = O(r_1^{m/2})$ e $H - H_2 = O(r_1^{|\mathbf{k}^1|/2})$. Então

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\Lambda} 2I_i\{I_i,H\} + 2I\{I,H\} &= O(r_1^{m/2+m'/2+1/2})\\ 2(H-H_2)\{H_2,H\} &= O(r_1^{m/2+m'/2+1/2})\end{aligned} \tag{4.13}$$

em Ω_a. Note que

$$\begin{aligned}\{r_1,H\} &= \frac{\partial H_1^m}{\partial\varphi_1}(\mathbf{r},\mathbf{k}^1\cdot\varphi) + O(r_1^{m/2+1/2})\\ &= \frac{\partial H^m}{\partial(\mathbf{k}^1\cdot\varphi)}\frac{\partial(\mathbf{k}^1\cdot\varphi)}{\partial\varphi_1}(\mathbf{r},\mathbf{k}^1\cdot\varphi) + O(r_1^{m/2+1/2})\\ &= k_1^1\frac{\partial H_1^m}{\partial(\mathbf{k}^1\cdot\varphi)}(r_1,\mathbf{k}^1\cdot\varphi) + O(r_1^{m/2+1/2}),\end{aligned}$$

assim, em Ω_a

$$\delta^2 m r_1^{m-1}\{r_1,H\} = k_1^1\delta^2 m r_1^{m-1}\frac{\partial F_m^1}{\partial(\mathbf{k^1}\cdot\varphi)}(r_1,\mathbf{k^1}\cdot\varphi) + O(r_1^{3m/2-1/2}).$$

É importante observar que como $H^{m'}$ é autônomo então

$$\frac{\partial V}{\partial t} = O(r_1^{m'/2+1/2}).$$

Desde que $m' > 3(m-1) - |\mathbf{k}^1|$ então

$$\frac{m+m'+1}{2} > \frac{3m}{2} - 1,$$

portanto em Ω_a temos

$$\dot V = -\delta^2 m k_1^1 \frac{\partial F_m^1}{\partial(\mathbf{k^1}\cdot\varphi)}(r_1,\mathbf{k^1}\cdot\varphi)\ r_1^{m-1} + O(r_1^{3m/2-1/2}).$$

Escolha $\Gamma = \Omega_a^+$ se $k_1^1 > 0$ ou $\Gamma = \Omega_a^-$ se $k_1^1 < 0$ e a suficientemente pequeno tal que $\dot{V}$ é negativo em Γ. Temos que $V = 0$ em $\partial\Gamma$, $V < 0$ em Γ e para todo ρ tal que $|V| \geq \rho$ temos

$$a \geq r_1 \geq \frac{\rho^{1/m}}{\delta^{2/m}}.$$

Como

$$\dot{V} = -\delta^2 m k_1^1 \frac{\partial F_m^1}{\partial(\mathbf{k^1}\cdot\varphi)}(r_1, \mathbf{k^1}\cdot\varphi)\ r_1^{m-1} + O(r_1^{3m/2-1/2}),$$

escolhendo r_1 tal que

$$|O(r_1^{3m/2-1/2})| < |\frac{1}{2}\delta^2 m k_1^1 \frac{\partial F_m^1}{\partial(\mathbf{k^1}\cdot\varphi)}(r_1, \mathbf{k^1}\cdot\varphi)\ r_1^{m-1}|$$

e observando que no conjunto compacto $[\frac{\rho^{1/m}}{\delta^{2/m}}, a] \times [0, 2\pi]$ a função $\frac{\partial F_m^1}{\partial(\mathbf{k^1}\cdot\varphi)}(r_1, \phi)$ tem um mínimo positivo, digamos b, então em Γ, se $|V| \geq \rho$ temos que

$$|\dot{V}| > \frac{1}{2}\delta^2 m k_1^1 b\ \frac{\rho^{(m-1)/m}}{\delta^{2(m-1)/m}},$$

escolhendo

$$\iota(\rho) = \frac{1}{2}\delta^2 m k_1^1 b\ \frac{\rho^{(m-1)/m}}{\delta^{2(m-1)/m}}$$

temos provado o teorema.

Note que, como V é uma função de Chetaev na região Γ, em ambos os casos autônomo e periódico, o Teorema de Chetaev garante a instabilidade da solução nula. ∎

No caso de ressonâncias simples $M_\omega = \mathbf{k}\mathbb{Z}$ para algum $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ temos que

$$|\mathbf{k}| = \min\{|\mathbf{l}|; \mathbf{l} \in M_\omega \setminus \{0\}\}.$$

Pela Proposição 2.2.1, se o processo da normalização de Lie segue até uma ordem $m \geq |\mathbf{k}|$, inclusive, então o Hamiltoniano truncado em variáveis ação-ângulo toma a forma

$$H^m = H_2(\mathbf{r}) + H_4(\mathbf{r}) + \cdots + H_{2l}(\mathbf{r}) + H_{|k|}(\mathbf{r}, \phi + \mu t) + \cdots + H_m(\mathbf{r}, \phi + \mu t), \tag{4.14}$$

onde $2l$ é o maior número inteiro par menor que $|\mathbf{k}|$, $\phi = \mathbf{k}\cdot\varphi = k_1\varphi_1 + \cdots + k_n\varphi_n$ e m é arbitrário. Então os Teoremas 4.2.1 e 4.1.1 fornecem o Teorema 3.1.1 como conseqüência.

Outro corolário do Teorema 4.2.1 é o seguinte:

Corolário 4.2.1 *Assuma que os geradores do módulo de ressonâncias $\mathbf{k}^1, \ldots, \mathbf{k}^s$ não têm interações (i.e., para todo $l \in \{1, \ldots, s\}$ e todo $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ temos $k_{i_1}^l k_{i_2}^l = 0$) e existe $j \in \{1, \ldots, \mu\}$ tal que para todo $r_j > 0$ suficientemente pequeno existe $\mathbf{k}^j \cdot \varphi$ tal que*

$$F_m^j(r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1}+1}, \mathbf{k}^j\cdot\varphi) = 0. \tag{4.15}$$

Se

$$\frac{\partial F_m^j}{\partial(\mathbf{k}^j\cdot\varphi)}(r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1}+1}, \mathbf{k}^j\cdot\varphi) \neq 0 \tag{4.16}$$

para todo $(r_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1}+1}, \mathbf{k}^j\cdot\varphi)$ satisfazendo (4.15) então a solução nula de (1.1) é instável no sentido de Liapunov.

Demonstração. Assuma por simplicidade que $\mathbf{k}^1,\dots,\mathbf{k}^\mu$ têm todas as componentes positivas e $\mathbf{k}^{\mu+1},\dots,\mathbf{k}^s$ têm componentes que mudam de sinal. Mostraremos que existe $\mathbf{c}=(0,\dots,0,c_{\mu+1},\dots,c_n)$ com $c_{\mu+1},\dots,c_n>0$ tal que $\mathbf{c}\cdot\mathbf{k}^1,\dots,\mathbf{c}\cdot\mathbf{k}^s=0$ e o corolário segue.

Comecemos com o caso $s=\mu+1$. Neste caso, assuma que $\mathbf{k}^{\mu+1}=(0,\dots,0k^{\mu+1}_{\mu+1},\dots,k^{\mu+1}_n)$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $k^{\mu+1}_{\mu+1}>0$. Note que $\mathbf{c}_{\mu+2}=(0,\dots,0,k^{\mu+1}_{\mu+2},-k^{\mu+1}_{\mu+1},0,\dots,0)$ $\mathbf{c}_{\mu+3}=(k^{\mu+1}_{\mu+3},0,-k^{\mu+1}_{\mu+1},0,\dots,0),\dots,\mathbf{c}_n=(k^{\mu+1}_n,0,\dots,0,-k^{\mu+1}_{\mu+1})$ formam uma base de

$$P=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}^{\mu+1}=0\};$$

assim, dado $\mathbf{c}\in P$ existem $a_{\mu+1},\dots,a_n$ tais que

$$\mathbf{c}=a_{\mu+1}\mathbf{c}_{\mu+2}+\cdots+a_n\mathbf{c}_n=(a_{\mu+1}k^{\mu+1}_{\mu+2}+\cdots+a_nk^{\mu+1}_n,-a_{\mu+1}k^{\mu+1}_1,\dots,-a_nk^{\mu+1}_1).$$

Desde que $k^{\mu+1}_{\mu+1}k^{\mu+1}_j<0$ para algum $j\in\{2,\dots,n\}$ podemos escolher $a_{\mu+1},\dots,a_n<0$ tais que $a_{\mu+}k^{\mu+1}_2+\cdots+a_nk^{\mu+1}_n>0$ e conseqüentemente $\mathbf{c}$ tem todas as componentes positivas.

No caso $s>\mu+1$ basta tomar $\mathbf{c}=\mathbf{c}_{\mu+1}+\cdots+\mathbf{c}_s$ onde $\mathbf{c}_{\mu+1},\dots,\mathbf{c}_s$ são tais que $\mathbf{k}^j\cdot\mathbf{c}_j=0$ com $j\in\{\mu+1,\dots,s\}$ obtidos de forma análoga ao $\mathbf{c}$ do caso $s=\mu+1$. ∎

Capítulo 5

Casos particulares

Mostraremos neste capítulo que vários teoremas importantes podem ser vistos como casos particulares dos nossos principais teoremas.

Iniciamos com um sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade. Seja $D_{2j} = H_{2j}(|\omega_2|,|\omega_1|)$ e $\overline{\Psi}(\phi) = H_{|\mathbf{k}|}(|\omega_1|,|\omega_1|,\phi)$. O Teorema Principal 3.1.1 implica:

Corolário 5.0.2 (Teorema de Cabral Meyer (1999)) *Assuma que H em (1.2) possui dois graus de liberdade.*
(I) Se $D_{2j} \neq 0$ para algum $j \in \{2,\cdots,l\}$ ou $\overline{\Psi}(\phi) \neq 0$ para todo ϕ, a solução nula é Lie-estável.
(II) Se $\overline{\Psi}$ tem um zero simples, isto é, se existe ϕ^* tal que $\Psi(\phi^*) = 0$ e $\Psi'(\phi^*) \neq 0$, a solução de equilíbrio é instável.

Demonstração. Neste

$$F_{|\mathbf{k}|}(r_1,\phi) = \frac{D_2}{|\omega_2|}r_1 + \cdots + \frac{D_{2j}}{|\omega_2|^j}r_1^l + \frac{\overline{\Psi}(\phi)}{|\omega_2|^{|\mathbf{k}|/2}}r_1^{|\mathbf{k}|/2}.$$

Se $D_{2j} \neq 0$ para algum $j \in \{2,\cdots,l\}$ ou $\overline{\Psi}(\phi) \neq 0$ para todo ϕ temos que $F_{|\mathbf{k}|}(r_1,\phi) = 0$ implica $r_1 = 0$. No caso oposto, desde que

$$F_{|\mathbf{k}|}(r_1,\phi) = \overline{\Psi}(\phi)r_1^{|\mathbf{k}|/2} \text{ e } \frac{\partial F_{|\mathbf{k}|}}{\partial\phi}(r_1,\phi) = \overline{\Psi}(\phi)r_1^{|\mathbf{k}|/2},$$

temos que

$$F_{|\mathbf{k}|}(r_1,\phi)^2 + \frac{\partial F_{|\mathbf{k}|}}{\partial\phi}(r_1,\phi)^2 \neq 0$$

para todo (r_1,ϕ) com $r_1 > 0$; assim, o Teorema 3.1.1 conclui the instabilidade da solução nula. ■

O caso $D_{2j} \neq 0$ é conhecido como o Teorema de Arnold. Os outros casos deste teorema podem ser encontrados em [8], por Cabral e Meyer que fornecem estabilidade no sentido de Liapunov.

Mas, chamamos atenção que eles não dão informações no caso crítico, i.e., quando a função $\overline{\Psi}$ tem um zero, o qual não é simples.

Outro resultado que pode ser encontrado na literatura diz respeito a um sistema Hamiltoniano autônomo com n graus de liberdade. Seja $\Psi(\phi) = k_1^{|\mathbf{k}|/2}\Psi_{|\mathbf{k}|}(\phi) = k_1^{|\mathbf{k}|/2}H_{|\mathbf{k}|}(\mathbf{k},\phi) = A + B\cos\phi$, onde $A = k_1^{|\mathbf{k}|/2}A(\mathbf{k})$ e $B = k_1^{|\mathbf{k}|/2}B(\mathbf{k})$. O Teorema Principal 3.1.1 nos dá:

Corolário 5.0.3 *Assuma que H em (1.2) possui n graus de liberdade.*
(I) Se $A_{2j} \neq 0$ para algum $j \in \{2,\cdots,l\}$ ou $\Psi(\phi) \neq 0$ para todo ϕ (equivalentemente $|A| > |B|$), a solução nula é Lie-estável.
(II) Se Ψ possui um zero simples (equivalentemente $|A| < |B|$), então a solução de equilíbrio é instável.

Demonstração. Como

$$F_{|\mathbf{k}|}(r_1,\phi) = A_2 r_1 + \cdots + A_{2l} r_1^l + [A + B\cos\phi]\; r_1^{|\mathbf{k}|/2},$$

se $A_{2j} \neq 0$ for some $j \in \{2,\cdots,l\}$ ou $|A| > |B|$ temos que $F_{|\mathbf{k}|}(r_1,\phi) = 0$ implica $r_1 = 0$. No caso oposto,

$$F_{|\mathbf{k}|}(r_1,\phi) = [A + B\cos\phi] r_1^{|\mathbf{k}|/2} \text{ e } \frac{\partial F_{|\mathbf{k}|}}{\partial\phi}(r_1,\phi) = -B r_1^{|\mathbf{k}|/2}\operatorname{sen}\phi,$$

assim, se $|A| < |B|$ temos

$$\frac{\partial F_{|\mathbf{k}|}}{\partial\phi}(r_1,\phi) = 0 \quad \text{implica} \quad F_{|\mathbf{k}|}(r_1,\phi) = A \pm B \neq 0.$$

Pelo Teorema Principal 3.1.1 segue a veracidade deste corolário. ■

Resultados equivalentes a este corolário no caso de existência de ressonâncias simples de terceira e quarta ordem foram provados por Khazin [16], Alfriend e Richardson [5]. Novamente, nestes trabalhos os autores não dão informações sobre a estabilidade no caso crítico, i.e., no caso onde $\Psi'(\phi) = 0$ para todo ϕ tal que $\Psi(\phi) = 0$. Além disso, os autores não consideraram o caso periódico.

Agora, consideraremos uma função Hamiltoniana H com dois graus de liberdade que possui ressonâncias de ordem 4 dada por $\omega_1 = 3\omega_2 > 0$, (neste caso $\mathbf{k} = (1,3)$). A forma normal de Lie de H até sexta ordem H^6 em variáveis ação-ângulo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} H^6(r,\phi) \;&= \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \\ & r_1^{1/2} r_2^{3/2}[a_{13}\operatorname{sen}\phi + b_{13}\cos\phi] + c_{30} r_1^3 + c_{21} r_1^2 r_2 + c_{12} r_1 r_2^2 + c_{03} r_2^2 + \\ & r_1^{3/2} r_2^{3/2}[a_{33}\operatorname{sen}\phi + b_{33}\cos\phi] + r_1^{1/2} r_2^{5/2}[a_{15}\operatorname{sen}\phi + b_{15}\cos\phi], \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde c_{20}, c_{11}, c_{02}, a_{13}, b_{13}, c_{30}, c_{21}, c_{12}, c_{03}, a_{33}, b_{33}, a_{15} e b_{15} são constantes reais e $\phi = \varphi_1 + 3\varphi_2$ (ver Markeev [28] para maiores detalhes). Seja

$$\begin{aligned} A_4 &= c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}, \\ B_4 &= \sqrt{27(a_{13}^2 + b_{13}^2)}, \\ A_6 &= c_{30} + 3c_{21} + 9c_{12} + 27c_{03}, \\ B_6 &= \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{a_{13}^2+b_{13}^2}}[a_{13}(a_{33} + 3a_{15}) + b_{13}(b_{33} + 3b_{15}], \\ C_6 &= \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{a_{13}^2+b_{13}^2}}[a_{13}(b_{33} + 3b_{15}) - b_{13}(a_{33} + 3a_{15}]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Aqui o Teorema Principal 3.1.1 nos dá

Corolário 5.0.4 *Assuma que a função Hamiltoniana H em (1.2) tem dois graus de liberdade e possui a relação de ressonância* $\omega_1 = 3\omega_2 > 0$ *com parte quadrática não definida.*
(I) Assuma que $a_{13}^2 + b_{13}^2 \neq 0$*. Se*

$$|A_4| > B_4 \tag{5.3}$$

a solução nula é Lie-estável; para o sinal oposto na desigualdade (5.3) a solução nula é instável.
(II) No caso $|A_4| = B_4$ *(caso crítico de quarta ordem) e* $A_4A_6 - B_4B_6 \neq 0$*, se*

$$A_4A_6 - B_4B_6 > 0 \text{ (condição de Markeev)} \tag{5.4}$$

a solução nula é Lie-estável e para a desigualdade oposta em (5.4) a solução nula é instável.
(III) Se $|A_4| = B_4$*,* $A_4A_6 - B_4B_6 = 0$ *e* $C_6 \neq 0$*, a solução nula é instável.*
(IV) No caso $|A_4| = B_4$*,* $A_4A_6 - B_4B_6 = 0$ *e* $C_6 = 0$ *podemos obter estabilidade ou instabilidade dependendo dos termos de maior ordem.*

Demonstração. (I) Desde que $a_{13}^2 + b_{13}^2 \neq 0$, podemos fazer a mudança canônica de variáveis

$$r_j \to r_j, \quad \varphi_j \to \varphi_j - 4\theta \text{ onde } \operatorname{sen} 4\theta = \frac{b_{13}}{\sqrt{a_{13}^2 + b_{13}^2}}, \cos 4\theta = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{13}^2 + b_{13}^2}}.$$

O novo Hamiltoniano até termos de sexta ordem é dado por

$$\begin{aligned} H^6(r,\phi) &= \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \sqrt{a_{13}^2 + b_{13}^2}\, r_1^{1/2} r_2^{3/2} \operatorname{sen}\phi + \\ & c_{30}r_1^3 + c_{21}r_1^2r_2 + c_{12}r_1r_2^2 + c_{03}r_2^2 + \\ & \frac{1}{\sqrt{a_{13}^2+b_{13}^2}} r_1^{3/2} r_2^{3/2} [(a_{33}a_{13} + b_{33}b_{13})\operatorname{sen}\phi + (-a_{33}b_{13} + b_{33}a_{13})\cos\phi] + \\ & \frac{1}{\sqrt{a_{13}^2+b_{13}^2}} r_1^{1/2} r_2^{5/2} [(a_{15}a_{13} + b_{15}b_{13})\operatorname{sen}\phi + (-a_{15}b_{13} + b_{15}a_{13})\cos\phi]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

A função ângulo de quarta ordem é $F_4(r_1,\phi) = (A_4 + B_4 \operatorname{sen}\phi) r_1^2$; assim, se $|A_4| > |B_4| = B_4$ a função $F_4(r_1,\phi) \neq 0$ para todo (r_1,ϕ) e para $|A_4| < B_4$ para todo $r_1 > 0$ existe $\phi = \arcsin(-A_4/B_4)$ tal que $F_4(r_1,\phi) = 0$ e $\frac{\partial F_4}{\partial \phi}(r_1,\phi) \neq 0$. Pelo Principal Teorema 3.1.1 concluímos (I).

(II) No caso $|A_4| = B_4 \neq 0$ temos que $F_4(r_1,\phi) = A_4[1 + \frac{B_4}{A_4}\operatorname{sen}\phi]\, r_1^2$ e pelo Teorema Principal com $m = 4$ nada podemos concluir sobre a estabilidade da solução nula. Então, neste caso nós devemos analisar a função ângulo de sexta ordem, a qual é dada por

$$F_6(r_1,\phi) = A_4[1 + \frac{B_4}{A_4}\operatorname{sen}\phi]\, r_1^2 + [A_6 + B_6 \operatorname{sen}\phi + C_6\cos\phi]\, r_1^3.$$

Para decidir o sinal de F_6 para $r_1 > 0$ suficientemente pequeno, primeiro considere ϕ tal que $\operatorname{sen}\phi \neq -A_4/B_4$. Temos que $F_6(r_1,\phi) \neq 0$ e escolhendo $r_1 > 0$ suficientemente pequeno segue que $sign(F_6) = sign(A_4)$. Por outro lado, se $\operatorname{sen}\phi = -A_4/B_4 = \pm 1$, isto implica em $\cos\phi = 0$ e

$$sign(A_4) = sign(F_6|_{\operatorname{sen}\phi = \frac{-A_4}{B_4}}) = sign(A_6 - B_6\frac{A_4}{B_4}) = sign(\frac{A_4A_6 - B_4B_6}{A_4}),$$

ou equivalentemente,

$$A_4A_6 - B_4B_6 > 0.$$

Em qualquer caso temos que $F_6 \neq 0$ para todo $r_1 > 0$ suficientemente pequeno e pelo Teorema 3.1.1 a solução nula é Lie-estável.

De forma similar a analise anterior, se $\operatorname{sen}\phi = -A_4/B_4$ e $A_4A_6 - B_4B_6 < 0$, segue que $sign(A_4) = -sign(A_6)$. Por outro lado, para todo ϕ tal que $\operatorname{sen}\phi \neq -A_4/B_4$, segue que $sign(F_6) = sign(A_4)$. Então, existe ϕ (para todo $r_1 > 0$ suficientemente pequeno) tal que $F_6(r_1,\phi) = 0$. Além disso, nestes pontos

$$\frac{\partial F_6}{\partial \phi} = |A_4|\cos\phi r_1^2 + (B_6\cos\phi - C_6\operatorname{sen}\phi)r_1^3 \neq 0,$$

pois $\cos(\phi) \neq 0$. Então, pelo Teorema 3.1.1 concluímos a instabilidade da solução nula.

(III) Neste caso, temos que

$$F_6(r_1,\phi) = A_4[1 + \frac{B_4}{A_4}\operatorname{sen}\phi]\ r_1^2 + [A_6(1 + \frac{B_4}{A_4}\operatorname{sen}\phi) + C_6\cos\phi]\ r_1^3.$$

Assim, $F_6(r_1,\phi) = 0$ se e somente se $\operatorname{sen}\phi = -A_4/B_4 = \pm 1$ (então $\cos\phi = 0$) e nestes pontos

$$\frac{\partial F_6}{\partial \phi}(r_1,\phi) = \frac{C_6A_4}{B_4}r_1^3 = \pm C_6 r_1^3 \neq 0$$

se $C_6 \neq 0$. Pelo Teorema 3.1.1 a solução nula é instável.

(IV) Para provar este ítem, exibiremos um exemplo onde de acordo com termos de ordem maior que seis podemos obter estabilidade ou instabilidade da solução nula. Considere a função Hamiltoniana com dois graus de liberdade em variáveis ação-ângulo

$$H = 3r_1 - r_2 + 3\sqrt{3}r_1^2 - r_1^{1/2}r_2^{3/2}\operatorname{sen}\phi + 3\sqrt{3}r_1^3 - r_1^{3/2}r_2^{3/2}\operatorname{sen}\phi + \delta r_1^4 - r_1 r_2^3\cos\phi,$$

onde $\phi = \varphi_1 + 3\varphi_2$ e δ é uma constante real. Desde que, para este Hamiltoniano

$$c_{30} = 3\sqrt{3}, \quad c_{21} = c_{12} = c_{03} = 0, \quad a_{13} = -1, \quad b_{13} = 0,$$

$$c_{40} = 3\sqrt{3}, \quad c_{31} = c_{22} = c_{13} = c_{04} = 0, \quad a_{33} = -1, \quad b_{33} = a_{15} = b_{15} = 0,$$

obtemos $|A_4| = 3\sqrt{3} = B_4$, $A_4A_6 = 27 = B_4B_6$ e $C_6 = 0$. Neste caso

$$F_8(r_1,\phi) = 3\sqrt{3}[1 - \operatorname{sen}\phi]\ r_1^2 + 3\sqrt{3}[1 - \operatorname{sen}\phi]\ r_1^3 + [\delta - 27\cos\phi]\ r_1^4$$

e

$$\frac{\partial F_8}{\partial \phi}(r_1,\phi) = -3\sqrt{3}\cos\phi r_1^2 - 3\sqrt{3}\cos\phi r_1^3 + 27\operatorname{sen}\phi r_1^4.$$

Se $\delta = 0$, então $F_8(r_1, \phi) = 0$ para $r_1 > 0$ suficientemente pequeno, sen$\phi = 1$ e, nestes pontos

$$\frac{\partial F_8}{\partial \phi}(r_1, \phi) = 27 r_1^4 \neq 0,$$

for all $r_1 > 0$. Pelo Teorema 3.1.1 a solução nula é instável. Por outro lado, para $\delta > 27$ temos que $F_8(r_1, \phi) > 0$ para todo $r_1 > 0$ e pelo Principal Teorema a solução nula é Lie-estável. ∎

O ítem (I) deste corolário é uma conseqüência do Corolário 5.0.2, enquanto o ítem (II) foi provado por Markeev (2001) em [28]. De fato, como estamos considerando uma função Hamiltoniana com dois graus de liberdade, Markeev fornece estabilidade no sentido de Liapunov. O caso $A_4A_6 - B_4B_6 = 0$, no ítem (III) não foi considerado por Markeev em seu trabalho. Mas, aqui nós mostramos que a solução nula é instável quando $C_6 \neq 0$.

Como aplicação do Teorema 3.1.1 no caso periódico, $k_1, \ldots, k_n \geq 0$ ou ≤ 0 e sob existência de ressonâncias simples de terceira ordem, existe uma transformação canônica tal que

$$H^3(\mathbf{r}, \phi) = \omega_1 r_1 + \cdots + \omega_n r_n + A r_1^{k_1/2} \cdots r_n^{k_n/2} \operatorname{sen} \phi,$$

onde $\phi = \mathbf{k} \cdot \varphi$. Neste caso, a função ângulo é

$$F_3(r_1, \phi) = A k_1^{k_1/2} \ldots k_n^{k_n/2} r_1^{3/2} \operatorname{sen} \phi;$$

assim, se $A \neq 0$, pelo Teorema 3.1.1 a solução nula é instável no sentido de Liapunov.

Sob existência de ressonâncias simples de quarta ordem, podemos assumir que

$$H^4(\mathbf{r}, \phi) = c_{40\ldots0} r_1^2 + c_{310\ldots0} r_1^{3/2} r_2^{1/2} + \cdots + c_{0\ldots04} r_n^2 + A r_1^{k_1/2} \ldots r_n^{k_n/2} \operatorname{sen} \phi.$$

Para este caso

$$F_4(r_1, \phi) = [C + D \operatorname{sen} \phi]\, r_1^2$$

onde

$$C = c_{40\ldots0} k_1^2 + c_{310\ldots0} k_1^{3/2} k_2^{1/2} + \cdots + c_{0\ldots04} k_n^2 \text{ e } D = A k_1^{k_1/2} \ldots k_n^{k_n/2}.$$

Pelo Teorema 3.1.1, se $|C| > |D|$ a solução nula é Lie-estável e para $|C| < |D|$ a solução nula é instável no sentido de Liapunov.

Uma prova direta sem usar o Teorema 3.1.1 foi dada pelo autor e orientador em [40]. Vejamos sem muitos detalhes:

Desde que no caso $|\mathbf{k}| = 3$ podemos obter $H_3(\mathbf{r}, \phi) = A \mathbf{r}^{\mathbf{k}/2} \operatorname{sen} \phi$, onde $\mathbf{r}^{\mathbf{k}/2} = r_1^{k_1/2} \ldots r_n^{k_n/2}$, $\phi = k_1 \varphi_1 + \cdots + k_n \varphi_n$ e A é uma constante real; assim, a demonstração da instabilidade é equivalente a mostrar que se $A \neq 0$ então a solução nula é instável no sentido de Liapunov. Vamos provar a afirmação de instabilidade nos casos:

- (A): $\mathbf{k} = (3, 0, \ldots, 0)$;

- (B): $\mathbf{k} = (1,2,0,\dots,0)$;
- (C): $\mathbf{k} = (1,1,1,0,\dots,0)$.

Os demais casos são similares.

Nestes casos, construímos as seguintes funções de Chetaev:

$$V = V_1 V_2 \dots V_n,$$

onde:

- (A): $V_1 = r_1^{3/2} cos 6\phi$ e $V_j = r_1^{\alpha} - r_j^2$, $j = 2,\dots,n$;
- (B): $V_1 = r_1^{1/2} r_2 \cos 2\phi$, $V_2 = r_2^{\alpha} - (2r_1 - r_2)^2$ e $V_j = r_2^{\alpha} - r_j^2$, $j = 3,\dots,n$;
- (C): $V_1 = r_1 r_2 r_3 \cos 2\phi$, $V_2 = r_1^{\alpha} - (r_2 - r_1)^2$, $V_3 = r_1^{\alpha} - (r_3 - r_1)^2$ e $V_j = r_1^{\alpha} - r_j^2$, $j = 4,\dots,n$.

com $2 < \alpha < 3$. Defina a região $V > 0$ por

$$-\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4} \;\; e \;\; V_j > 0, \;\; j = 2,\dots,n.$$

Na fronteira desta região V_j $(j = 2,\dots,n)$ é igual a zero e no interior as seguintes desigualdades valem:

- (A): $r_j = \beta_j r_1^{\alpha/2}$, $0 < \beta_j < 1$, $j = 2,\dots,n$;
- (B): $r_1 = \frac{1}{2}(r_2 + \beta_2 r_2^{\alpha/2})$ e $r_j = \beta_j r_2^{\alpha}$, $0 < |\beta_2|, \beta_j < 1$, $j = 3,\dots,n$;
- (C): $r_2 = r_1 + \beta_2 r_1^{\alpha/2}$, $r_3 = r_1 + \beta_3 r_1^{\alpha/2}$ e $r_j = \beta_j r_1^{\alpha/2}$, $0 < |\beta_2|, |\beta_3|, \beta_j < 1$, $j = 3,\dots,n$.

A derivada de V ao longo das soluções de H são, respectivamente:

- (A): $\frac{dV}{dt} = A r_1^{(n-1)\alpha+2} g_1(\phi) + O(r_1^{(n-1)\alpha+5/2})$;
- (B): $\frac{dV}{dt} = A r_1^{(n-1)\alpha+5/2} g_2(\phi) + O(r_1^{(n-1)\alpha+3})$;
- (C): $\frac{dV}{dt} = A r_1^{(n-1)\alpha+7/2} g_3(\phi) + O(r_1^{(n-1)\alpha+4})$,

onde $a_1 = 9/2$, $b_1 = 3$, $a_2 = 3/2$, $b_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = 1$, $b_3 = 1$ e

$$g_j(\phi) = a_j \prod_{l=2}^{n} (1 - \beta_l^2) \cos\phi + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}(2\phi)] + \alpha b_j \gamma_j \cos\phi \cos(2\phi),$$

com

$$\gamma_j = \sum_{i=2^n} \prod_{2=l\neq i}^{n} (1 - \beta_l^2), \;\; æ = 1,2,3).$$

Desde que na região $V > 0$, $\gamma_j \cos(\phi)\cos(2\phi) > 0$ e $\cos\phi + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen} 2\phi \geq 1$, o seguinte lema conclui que $\frac{dV}{dt}$ é definido positivo na região $V > 0$. O Teorema de Chetaev garante a instabilidade da solução nula.

Lema *Assuma que* $V(r,\phi) = r^l h(r)\Omega(\phi)$ *onde* $(r,\phi) \in^2$, $l > 0$, $0 < h(r) < 1$, $h, \Omega \in C^1$ *e a região* $V > 0$ *é definida por* $a < \phi < b$ *onde dentro dela é satisfeito* $\Omega(\phi) < 1$. *Suponha que na região* $V > 0$,

$$\frac{dV}{dt} = Ar^{\alpha} h(r) g(\phi) + O(r^{\alpha+1/2}),$$

onde $A > 0$, $\alpha > 1$ *e* g *é contínua com* $g(\phi) > 0$ *para todo* $\phi \in [a,b]$. *Então* $\frac{dV}{dt}$ *é definida positiva na região* $V > 0$.

Demonstração. Como g é contínua, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, g assume um mínimo m o qual é positivo. Dado $\varepsilon > 0$ com $V > \varepsilon$, como na região $V > 0$, $0 < \Omega(\phi), h(r) < 1$ temos $r > \varepsilon^{1/l} + O(\varepsilon)$. Então

$$\frac{dV}{dt} \geq A\varepsilon^{\alpha/l} m + O(\varepsilon)$$

e, escolhendo ε suficientemente pequeno, por exemplo, ε tal que $|O(\varepsilon)| < \frac{A\varepsilon^{\alpha/l} m}{2}$ obtemos

$$\frac{dV}{dt} > \frac{A\varepsilon^{\alpha/l} m}{2} = \delta;$$

Assim, $\frac{dV}{dt}$ é definido positivo na região $V > 0$. ∎

No caso $|\mathbf{k}| = 4$ a forma normal de Lie da função Hamiltoniana até quarta ordem tem a forma

$$H_4(\mathbf{r},\phi) = \sum_{|\mathbf{j}|=2} c_{\mathbf{j}} \mathbf{r}^{\mathbf{j}} + C\mathbf{r}^{\mathbf{k}/2} \operatorname{sen}\phi,$$

onde $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$, $|j| = |j_1| + \ldots |j_n|$, $c_j = c_{j_1 \ldots j_n}$, $r^j = r_1^{j_1} \ldots r_n^{j_n}$ e C é uma constante real. Então,

$$\Psi(\phi) = \sum_{|j|=2} c_j k^j + Ck^{k/2} \operatorname{sen}\phi = A + B \operatorname{sen}\phi,$$

onde $A = \sum_{|\mathbf{j}|=2} c_{\mathbf{j}} \mathbf{k}^{\mathbf{j}}$ e $B = C\mathbf{k}^{\mathbf{k}/2}$; Assim, existe ϕ^+ tal que $\Psi(\phi^+) = 0$ e $\Psi'(\phi^+) \neq 0$ se e somente se $|A| > |B|$. Provaremos a instabilidade da solução nula nos casos:

- (A): $\mathbf{k} = (4, 0, \ldots, 0)$;
- (B): $\mathbf{k} = (2, 2, 0, \ldots, 0)$;
- (C): $\mathbf{k} = (1, 3, 0, \ldots, 0)$;
- (D): $\mathbf{k} = (1, 1, 2, 0, \ldots, 0)$;
- (E): $\mathbf{k} = (1, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$.

Os demais casos são similares.

Considere a função de Chetaev V dada por

$$V = V_1 V_2 \dots V_n,$$

onde

- (A): $V_1 = r_1^2 \cos(a\phi)$ e $V_j = r_1^{\alpha} - r_j^2$, $j = 2, \dots, n$;
- (B): $V_1 = r_1 r_2 \cos(a\phi)$ $V_2 = r_2^{\alpha} - (r_1 - r_2)^2$ e $V_j = r_2^{\alpha} - r_j^2$, $j = 3, \dots, n$;
- (C): $V_1 = r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos(a\phi)$, $V_2 = r_2^{\alpha} - (3r_1 - r_2)^2$ e $V_j = r_2^{\alpha} - r_j^2$, $j = 3, \dots, n$;
- (D): $V_1 = r_1^{1/2} r_2^{1/2} r_3 \cos(a\phi)$, $V_2 = r_3^{\alpha} - (2r_1 - r_3)^2$, $V_3 = r_3^{\alpha} - (2r_2 - r_3)^2$, $V_j = r_3^{\alpha} - r_j^2$, $j = 4, \dots, n$;
- (E): $V_1 = r_1^{1/2} r_2^{1/2} r_3^{1/2} r_4^{1/2} \cos(a\phi)$, $V_2 = r_1^{\alpha} - (r_2 - r_1)^2$, $V_3 = r_1^{\alpha} - (r_3 - r_1)^2$, $V_4 = r_1^{\alpha} - (r_4 - r_1)^2$, $V_j = r_1^{\alpha} - r_j^2$, $j = 5, \dots, n$,

com $a = 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon << 1$ e $2 < \alpha < 3$.

Defina a região $V > 0$ por

$$-\frac{\pi}{4a} < \phi < \frac{\pi}{4a} \;\; e \;\; V_j > 0, \quad j = 2, \dots, n.$$

Dentro da região $V > 0$ a seguinte desigualdade vale:

- (A): $r_j = \beta_j r_1^{\alpha_2}$, $0 < \beta_j < 1$, $j = 2, \dots, n$;
- (B): $r_1 = r_2 + \beta_2 r_2^{\alpha/2}$, $r_j = \beta_j r_2^{\alpha}$, $0 < |\beta_2|, \beta_j < 1$, $j = 3, \dots, n$;
- (C): $r_1 = \frac{1}{3}(r_2 + \beta_2 r_2^{\alpha/2})$, $r_j = \beta_j r_2^{\alpha/2}$, $0 < |\beta_2|, \beta_j < 1$, $j = 3, \dots, n$;
- (D): $r_1 = \frac{1}{2}(r_3 + \beta_1 r_3^{\alpha/2})$, $r_2 = \frac{1}{2}(r_3 + \beta_2 r_3^{\alpha/2})$,$r_j = \beta_j r_2^{\alpha/2}$, $0 < |\beta_1|, |\beta_2|, \beta_j < 1$, $j = 4, \dots, n$;
- (E): $r_2 = r_1 + \beta_2 r_1^{\alpha/2}$, $r_4 = r_1 + \beta_4 r_1^{\alpha/2}$, $r_j = \beta_j r_2^{\alpha/2}$, $0 < |\beta_2|, |\beta_3|, |\beta_4|, \beta_j < 1$, $j = 5, \dots, n$.

As derivadas de V ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano associado a H são:

- (A): $\frac{dV}{dt} = r_1^{(n-1)\alpha+3}[g_1(\phi) + O(\varepsilon)] + O(r_1^{(n-1)\alpha+7/2})$;
- (B): $\frac{dV}{dt} = r_1^{(n-1)\alpha+3}[g_2(\phi) + O(\varepsilon)] + O(r_1^{(n-1)\alpha+7/2})$;
- (C): $\frac{dV}{dt} = r_1^{(n-1)\alpha+3}[g_3(\phi) + O(\varepsilon)] + O(r_1^{(n-1)\alpha+7/2})$;
- (D): $\frac{dV}{dt} = r_1^{(n-1)\alpha+3}[g_4(\phi) + O(\varepsilon)] + O(r_1^{(n-1)\alpha+7/2})$;

- (E): $\frac{dV}{dt} = r_1^{(n-1)\alpha+5}[g_5(\phi)+O(\varepsilon)]+O(r_1^{(n-1)\alpha+11/2})$.

onde
$$g_j(\phi) = a_j\prod_{l=2}^{n}(1-\beta_l^2)[A+B\operatorname{sen}\phi]+\alpha A b_j\gamma_j\cos\phi\cos(a\phi)$$
com $a_1 = 8$, $b_1 = 4$,$a_2 = 4$, $b_2 = 2$,$a_3 = 2/3^{3/2}$, $b_3 = 1$,$a_4 = 1$, $b_4 = 1$,$a_5 = 1$, $b_5 = 1$ e
$$\gamma_j = \sum_{i=2^n}\prod_{2=l\neq i}^{n}(1-\beta_l^2),\quad j = 1,\ldots,5.$$
Como por hipótese $|A| > |B|$ e em $V > 0$ temos $\gamma_j\cos\phi\cos a\phi > 0$ e, usando o lema, segue que tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função $\frac{dV}{dt}$ será definida positiva na região $V > 0$. O Teorema de Chetaev assegura a instabilidade no sentido de Liapunov. $\blacksquare$

Capítulo 6

Aplicação a um Hamiltoniano galático

Neste capítulo, aplicaremos o Teorema Principal 3.1.1 ao estudo da estabilidade da solução de equilíbrio nula de Hamiltonianos galáticos. Esta aplicação é importante, pois é um típico exemplo onde os teoremas clássicos não se aplicam e o nosso sim, já que temos casos críticos em quarta e sexta ordem num sistema com ressonâncias de segunda ordem.

Considere o Hamiltoniano galático associado a

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + \omega_1^2 x_1^2) - \frac{1}{2}(y_2^2 + \omega_2^2 x_2^2) - \varepsilon[\beta(x_1^4 + x_2^4) + 2\alpha x_1^2 x_2^2], \tag{6.1}$$

onde $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ são as freqüências ao longo dos eixos x_1 e x_2 respectivamente, $\varepsilon > 0$ é um parâmetro de perturbação enquanto α e β são parâmetros reais. Sistemas Hamiltonianos similares foram consideradas por vários pesquisadores para estudar o movimento de partes centrais de galáxias, por exemplo, um Hamiltoniano similar aparece em Caranicolas [10].

Se $\varepsilon = 0$, o sistema Hamiltoniano associado a H é linear com autovalores imaginários puros e a matriz associada é diagonalizável; assim, a solução nula é estável no sentido de Liapunov. Assuma que $\varepsilon \neq 0$. Neste caso, para obter um critério para estabilidade não-linear obteremos a forma normal da função Hamiltoniana (6.1) até uma ordem necessária.

Primeiro, fazendo a mudança canônica de variáveis $(x_1, x_2, y_1, y_2) \longrightarrow (q_1, q_2, p_1, p_2)$ dada por

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} y_1, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} y_2, \quad p_1 = \sqrt{\omega_1} x_1 \quad p_2 = \sqrt{\omega_2} x_2,$$

obtemos

$$H = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) - \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2) - \varepsilon[\beta(\frac{p_1^4}{\omega_1^2} + \frac{p_2^4}{\omega_2^2}) + \frac{2\alpha}{\omega_1\omega_2} p_1^2 p_2^2]. \tag{6.2}$$

Assumindo que $\omega_1 \neq \omega_2$ e usando Maple 10 obtemos

$$F_4 = [4\alpha\omega_1^2\omega_2^2 + 3\beta(\omega_1^4 + \omega_2^4)]r_1^2.$$

Pelo Teorema 3.1.1 a solução nula é Lie-estável se $4\alpha\omega_1^2\omega_2^2+3\beta(\omega_1^4+\omega_2^4)\neq 0$. Caso contrário, precisamos considerar os termos de sexta ordem, os quais verificam

$$\begin{aligned}F_6 = \; & [4\alpha^2(\omega_1^6\omega_2^4+\omega_1^4\omega_2^6)+24\alpha\beta(\omega_1^4\omega_2^{10}+\omega_1^6\omega_2^4-\omega_1^2\omega_2^8-\omega_1^8\omega_2^2)\\ & +17\beta^2(\omega_1^2\omega_2^8+\omega_1^8\omega_2^2-\omega_1^{10}-\omega_2^{10})]r_1^3\end{aligned}$$

e se

$$\begin{aligned}& 4\alpha^2(\omega_1^6\omega_2^4+\omega_1^4\omega_2^6)+24\alpha\beta(\omega_1^4\omega_2^{10}+\omega_1^6\omega_2^4-\omega_1^2\omega_2^8-\omega_1^8\omega_2^2)\\ & +17\beta^2(\omega_1^2\omega_2^8+\omega_1^8\omega_2^2-\omega_1^{10}-\omega_2^{10})\neq 0,\end{aligned}$$

segue que $F_6\neq 0$ para todo $r_1>0$ suficientemente pequeno. Então, a solução nula é Lie-estável.

Consideremos agora o caso $\omega_1=\omega_2=\omega$, i.e., existem relações de ressonância de segunda ordem. Usando Maple 10 obtemos

$$F_4(r_1,\phi)=\Psi_4(\phi)r_1^2,\quad \Psi_4(\phi)=H_4(1,1,\phi)=-\varepsilon(2\alpha+3\beta+\alpha\cos 2\phi),$$

onde $\phi=\varphi_1+\varphi_2$. No caso $|2\alpha+3\beta|>|\alpha|$ temos que $\Psi_4(\phi)\neq 0$ para todo ϕ; assim, pelo Teorema 3.1.1 a solução nula é Lie-estável. Se $|2\alpha+3\beta|<|\alpha|$ a função Ψ_4 tem um zero simples e podemos concluir a instabilidade no sentido de Liapunov da solução nula.

Assuma agora que $|2\alpha+3\beta|=|\alpha|$, isto é, $\alpha=-\beta$ ou $\alpha=-3\beta$. Neste caso, a função F_4 não dá informações sobre a estabilidade da solução nula; assim, obtemos

$$F_6(r_1,\phi)=\Psi_4(\phi)r_1^2+\Psi_6(\phi)r_1^3,\quad \Psi_6(\phi)=H_6(1,1,\phi)=30\alpha\varepsilon^2(\alpha+(2\alpha+3\beta)\cos 2\phi).$$

Desde que, neste caso,

$$F_6(r_1,\phi)^2+\frac{\partial F_6}{\partial\phi}(r_1,\phi)^2=0$$

quando $\cos 2\phi=(2\alpha+3\beta)/\alpha=\pm 1$ (então $\operatorname{sen} 2\phi=0$) a função F_6 não dá informações no caso crítico de quarta ordem. Então, é necessário obter a função F_8. Usando Maple 10

$$F_8(r_1,\phi)=H^8(r_1,r_1,\phi)=\Psi_4(\phi)r_1^2+\Psi_6(\phi)r_1^3+\Psi_8(\phi)r_1^4,$$

com

$$\Psi_8(\phi)=H_8(1,1,\phi)=\frac{\varepsilon^3}{4}[A+B\cos 2\phi+C\cos 4\phi],$$

$$A=-6720\alpha^3-24120\alpha\beta^2-46275\alpha^2\beta-16875\beta^3,$$

$$B=-2130\alpha^3+90\alpha\beta^2+1380\alpha^2\beta,$$

$$C=1425\alpha^3-57357\alpha\beta^2-27060\alpha^2\beta.$$

Se $\alpha=-\beta$, temos que

$$F_8(r_1,\phi)=r_1^2[\Psi_4(\phi)+\Psi_6(\phi)r_1+\Psi_8(\phi)r_1^2],$$

onde

$$\Psi_4(\phi)=\varepsilon\alpha[1-\cos 2\phi],$$

$$\Psi_6(\phi) = 30\varepsilon^2\alpha^2[1-\cos 2\phi],$$

e

$$\Psi_8(\phi) = \frac{\varepsilon^3\alpha^3}{4}[32310 - 3420\cos 2\phi - 28872\cos 4\phi].$$

Neste caso

$$\begin{aligned}\Delta(\phi) &= \Psi_6(\phi)^2 - 4\Psi_8(\phi)\Psi(\phi)\\ &= 36\alpha^4\varepsilon^4\text{sen}^2\phi[12832\cos^4\phi - 12552\cos^2\phi - 281],\end{aligned}$$

assim, $\Delta(\phi) < 0$ para todo $\phi \neq \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ e $\Delta(\phi) = 0$ para $\phi = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Isto mostra que $F_8(r_1, \phi) \neq 0$ para todo $r_1 > 0$ e, pelo Teorema 3.1.1, a solução nula é Lie-estável.

No caso $\alpha = -3\beta$ temos que

$$\Psi_4(\phi) = -\varepsilon\alpha[1+\cos 2\phi],$$

$$\Psi_6(\phi) = 30\varepsilon^2\alpha^2[1+\cos 2\phi],$$

e

$$\Psi_8(\phi) = \frac{\varepsilon^3\alpha^3}{4}[6650 - 2580\cos 2\phi - 4072\cos 4\phi],$$

assim

$$\begin{aligned}\Delta(\phi) &= \Psi_6(\phi)^2 - 4\Psi_8(\phi)\Psi(\phi)\\ &= 4\alpha^4\varepsilon^4\cos^2\phi[16288\cos^4\phi - 17968\cos^2\phi + 6651].\end{aligned}$$

Neste caso $\Delta(\phi) > 0$ para todo $\phi \neq \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ e $\Delta(\phi) = 0$ para $\phi = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$; assim, para todo $r_1^* > 0$ suficientemente pequeno existe ϕ^* tal que $F_8(r_1^*, \phi^*) = 0$ além disso, nestes pontos

$$\frac{\partial F_8}{\partial \phi}(r_1^*, \phi^*) \neq 0.$$

De fato, para $r_1 > 0$ suficientemente pequeno

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial F_8}{\partial \phi}(r_1, \phi) &= r_1^2[2\varepsilon\alpha\text{sen}\,2\phi - 60\varepsilon^2\alpha^2\text{sen}\,2\phi r_1^2 + \varepsilon^3\alpha^3(1290\text{sen}\,2\phi + 4072\text{sen}\,4\phi)r_1^2]\\ &= r_1^2\text{sen}\,2\phi[2\varepsilon\alpha - 60\varepsilon^2\alpha^2 + 1290\varepsilon^3\alpha^3 + 8144\varepsilon^3\alpha^3\cos 2\phi]\\ &= 0,\end{aligned}$$

se, e somente se, $\text{sen}\,2\phi = 0$ ou

$$2\varepsilon\alpha - 60\varepsilon^2\alpha^2 + 1290\varepsilon^3\alpha^3 + 8144\varepsilon^3\alpha^3\cos 2\phi = 0.$$

Nestes casos $F_8(r_1, \phi) \neq 0$; assim, a solução nula é instável.

Os resultados obtidos neste capítulo podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 6.0.2 *Se $\varepsilon = 0$, a solução nula de (6.1) é estável no sentido de Liapunov. Assumindo que $\varepsilon \neq 0$ então:*

(A) No caso $\omega_1 \neq \omega_2$, se $4\alpha\omega_1^2\omega_2^2 + 3\beta(\omega_1^4 + \omega_2^4) \neq 0$ ou $4\alpha\omega_1^2\omega_2^2 + 3\beta(\omega_1^4 + \omega_2^4) = 0$ e $4\alpha^2(\omega_1^6\omega_2^4 + \omega_1^4\omega_2^6) + 24\alpha\beta(\omega_1^4\omega_2^{10} + \omega_1^6\omega_2^4 - \omega_1^2\omega_2^8 - \omega_1^8\omega_2^2) + 17\beta^2(\omega_1^2\omega_2^8 + \omega_1^8\omega_2^2 - \omega_1^{10} - \omega_2^{10}) \neq 0$ a solução nula de (6.1) é Lie-estável.

(B) Assumindo $\omega_1 = \omega_2 = \omega$*, se* $|2\alpha + 3\beta| > |\alpha|$ *a solução nula de (6.1) é Lie-estável; para a desigualdade oposta temos instabilidade no sentido de Liapunov. No caso* $|2\alpha + 3\beta| = |\alpha|$ *(caso crítico), se* $\alpha = -\beta$ *a solução nula é Lie-estável e no caso* $\alpha = -3\beta$ *é instável.*

Referências Bibliográficas

[1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechamics*. New York: Springer-Verlag, 1978.

[2] ARNOLD, V. I. Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preserving of quasiperiodic motions under small pertubations of the Hamiltonian. *Russ. Math. Surv.*, [S. l.], v.18, p.9-36, 1963.

[3] ARNOLD, V. I. Small divisor problems in classical and celestial mecanics. *Russ. Math. Surv.*, [S. l.], v.18, p.9-36, 1963.

[4] ARNOLD, V. I. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. *Doklady Akad Nauk.*, SSSR, v.5, p.581-585, 1964.

[5] ALFRIEND,K. T., RICHARDSON D. L. Third and fourth order resonances in Hamiltonian systems. *Celestial Mechanics*, v.7, p.408-420, 1973.

[6] BIRKHOFF, G. D. *Dynamical systems*. Providence. (Amer. Math. Soc. Colloq.; 9),1927.

[7] BRUNO, A. D. sobre a estabilidade formal de sistema Hamiltonianos. *Matematitcheskii zametki*, v.1, n.3, p.325-330, 1971. (em Russo)

[8] CABRAL, H. E., MEYER, K. R. Stability of equilibria and fixed points of conservative systems. *Nonlinearity*, [S. l.], v.12, p. 1351-1362, 1999.

[9] CABRAL, H. E., DIACU, F. *Classical and celestial mechamics, the Recife lectures*. Princeton: Princeton Univ. Press, 2002. p. 117-169.

[10] CRANICOLAS N. D., VOZIKIS C. L. Order and chaos in galactic maps. *Astronomy and astrophysics*, 1999.

[11] CHETAEV, N. *The stability of motion*. New York: Pergamom Press, 1961.

[12] ELIPE, A., LANCHARES, V., LÓPEZ-MORATALLA, T., RIAGUAS, A. Nonlinear stability in resonant cases: a geometrical approach. *J. Nonlinear Sci.*, v.11, 3, p.211-222, 2003.

[13] GLIMM, J. Formal stability of Hamiltonian systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, v.17, p.509-526, 1964.

[14] IVANOV, A.,SOKOLSKII, A. On the stability of a nonautonomous Hamiltonian system under second-order resonance, *J. Appl. Math. Mech.*, v.44, 5, p.811-822, 1980.

[15] IVANOV, A.,SOKOLSKII, A. On the stability of a non-autonomous Hamiltonian system under parametric resonance of essential type, *J. Appl. Math. Mech.*, v.44, 6, p.963-970, 1980.

[16] KHAZIN, L. G. On the stability of Hamiltonian systems in the presence of resonances. *App. Math. and Mech.*, v.35, p.384-391, 1971.

[17] KHAZIN, L. G. Interaction of third-order resonances in problems of the stability of Hamiltonian systems. *Prikl. Matem. Mekhan.*, v.48, p.496-498, 1984.

[18] KUNITSYN A.L., PEREZHOGIN, A. A. The stability of neutral systems in the case of a multiple fourth-order resonance, *Prikl. Matem. Mekhan.*, v.49, p.72-77, 1985.

[19] DZHUMABAYEVA, A. A., KUNITSYN A.L. The stability of periodic Hamiltonian systems with multiple fourth-order resonance. *Prikl. Matem. Mekhan.*, v.62, p.756-761, 1998.

[20] KRASOVSKII, N., *Stability of motion*, Stanford Univ. Press-Stanford, California, 1963.

[21] LAGRANGE, J. L. *Analytic Mechamics*. Gostekhizdat: O krivykh, opredelyaemykh diffentsial'-nymi uravneniyami, 1950. v. 1. (2nd Russian edition translated from the French).

[22] LYAPUNOV, A. M. *General problem of the stability of motion*. Gostekhizdat: Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya, 1950.

[23] MANSILLA, J. E. Stability of Hamiltonian systems with three degrees of freedom and the three body-problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v.94, p.249-269, 2006.

[24] MARKEEV, A. P. *Pontos de libração em mecânica celeste e cosmodinâmica*.Tradução de Hidelberto E. Cabral. Recife, 1997. (Não publicado).

[25] MARKEEV, A. P. Stability of a canonical system with two degrees of freedom in the presence of resonance, *J. Appl. Math. Mech.*, v.32, n.2, p.766-772, 1968.

[26] MARKEEV, A. P. On the stability of a nonautonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom, *J. Appl. Math. Mech.*, v.33, n.3, p. 563-569, 1968.

[27] MARKEEV, A. P. On the problem of stability of equilibrium positions of Hamiltonian system, *J. Appl. Math. Mech.*, v. 34, n.6, p.941-948, 1970.

[28] MARKEEV, A. P. The problem of the stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system at 3 : 1 resonance. J. Appl. Maths. and Mechs., v.65, p.639-645, 2001.

[29] MARKEEV, A. P. The critical case of fourth-order resonance in a Hamiltonian system with one degree of freedom, *J. Appl. Math. Mech.*, v.61, n.3, p.355-361, 1997.

[30] MEYER, K. R., HALL, G. R. *Introduction to Hamiltonian dinamical systems and the n-body problem*. New York: Springer-Verlag, 1992. (Applied mathematical science; v. 90).

[31] MOSER, J. K. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys.*, [S. l.], 1962.

[32] MOSER, J. K. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems, *Comm. Appl. Math.*, v. 11, n.1, p.81-114, 1958.

[33] POINCARÉ, H. *On curves defined by differential equations*. Gostekhizdat: O krivykh, opredelyaemykh diffentsial'-nymi uravneniyami, 1947.

[34] DOS SANTOS, F. *Formas normais e estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos*.211f. Dissertação (Mestrado em Matematica), Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

[35] SIEGEL, C. L., MOSER, J. K. *Lectures on celestial mechamics*. New York: Springer-Verlag, 1971.

[36] SOKOLSKII, A. G. On Stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom in the case of equal frequencies. *Appl. Math. Mech.*, Moscow, v.38, p.791-799, 1974.

[37] SOKOLSKII, A. G. On the stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom under first-order resonance, *J. Appl. Math. Mech.*, v.41, n.1, p.24-33, 1977.

[38] SOKOLSKII, A. G. Proof of the stability of Lagrangian solutions for a critical mass ratio. *Sov. Asrtron. Lett.*, Moscow, v.4, n.2, p.79-81, 1978.

[39] TRESHCHEV, D. V. Loss of stability in Hamiltonian systems that depend on parameters. *Prikl. Mat. Mekh.*, Moscow, v.56, n. 4 p.587-596, 1992.

[40] VIDAL, C. ,DOS SANTOS, F. Stability of equilibrium positions of periodic Hamiltonian systems umder third and fourth order resonances. *Regular and Chaotic Dynamics*, Moscow, v.10, n. 01, p. 95-110, 2005.