UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Extensão Não-Comutativa da Equação KdV

George Chaves da Silva Valadares

Orientadora: Prof[a].Dr[a].Iraida Cabrera Carnero

Julho de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Extensão Não-Comutativa da Equação KdV

George Chaves da Silva Valadares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Mato Grosso como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física

Orientadora: Prof^a.Dr^a.Iraida Cabrera Carnero

Julho de 2008

Não sabeis vós que os que correm no estádio, todos, na verdade, correm, mas um só leva o prêmio? Correi de tal maneira que o alcanceis. E todo aquele que luta de tudo se abstém; (...). Pois eu assim corro, não como a coisa incerta; assim combato, não como batendo no ar.

Apóstolo Paulo

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela família que tenho, pois sempre apoiou minhas decisões, lapidando as mesmas, devido minha imaturidade, e, quando pensei em desistir de meus objetivos, foi no seio da minha família que descobri estar equivocado. Dessa forma, uma pessoa em especial tem que ser mencionada, chama-se Luzemar Chaves da Silva de Aquino, minha mãe. Não posso esquecer de meu amigo Marceliano, parceiro das madrugadas de estudo árduo, de sua esposa Ione que sempre compreendeu a necessidade de tal empreendimento e minha querida Flavia Pampolini de Rezende, que sempre demonstrou alegria de estar ao meu lado. Devo mencionar meus professores Alberto, Romildo, Iraida com quem apreendi, respectivamente, a importância da humildade no mundo da pesquisa, o valor da minnha formação, sempre querer conhecer mais da Física e ao professor Harold por ter me ajudado quando precisei, revelando-se um amigo. E por ùltimo quero agradecer a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por ter financiado meus estudos durante esses dois anos que passaram e assim permitir que eu pudesse me dedicar exclusivamente ao mestrado de Física em Mato Grosso.

Resumo

Desenvolvemos algumas idéias de integrabilidade clássica através da equação Korteweg-de Vries (KdV). Posteriormente, no contexto de uma Mecânica Newtoniana Deformada obtida como limite de uma Mecânica Quântica Não-Comutativa, onde a não-comutatividade é incluida em todos os graus de liberdade da teoria, obtemos uma versão perturbada da equação KdV. Nesse mesmo contexto investigamos alguns sistemas bidimensionais de muitas partículas, que ao aplicar o limite contínuo, resultam em generalizações não-comutativas alternativas de teorias de campo bidimensionais.

Palavras-chave: integrabilidade, não-comutatividade

Área do conhecimneto: física matemática

Abstract

We develop some ideas about classical integrability conditions applied to Korteweg-de Vries (KdV) equation. Later, in the context of a Deformed Newtoniam Mechanics obtained as a limit of a Noncommutative Quantum Mechanics, where the noncommutativity includes all degrees of freedom of noncommutative theory, we get a perturbed version of the KdV equation. In the same context we investigated some two-dimensional many-particle systems, which apply to the continuous limit, build up alternative noncomutative generalizations of the two-dimensioanal field theories.

Índice

1

Introdução

Em 1687 foi publicado Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, onde Newton em três volumes conseguiu formular a evolução temporal dos corpos usando três leis, sendo que a segunda dessas envolve cálculo diferencial. Louis de Lagrange (1736 - 1813) em seu trabalho "Mecanique Analytique"publicado em 1788, apresenta uma nova formulação da teoria, hoje conhecida como formalismo lagrangiano, não podemos deixar de mencionar Euler (1707 - 1783) que foi quem iniciou a racionalização da Mecânica.

Posteriormente em 1834 e 1835, Hamilton (1805 - 1865) apresenta uma forma geral para solucionar um problema de Mecânica, hoje conhecido como formalismo Hamiltoniano. Nesses quase dois séculos de desenvolvimento da Mecânica Clássica o maior ganho foi a simplificação, pois de Newton para Lagrange a descrição dos movimentos dos corpos passou de equações vetoriais para equações escalares e de Lagrange para Hamilton de equações diferencias de segunda ordem para equações diferenciais de primeira ordem.

A idéia de simplicidade está ligada ao fato de exibirmos soluções explícitas dessas equações diferenciais. Portanto dado um conjunto de equações diferenciais, que representa um sistema clássico, sempre será possível exibir soluções explícitas? Com o trabalho “Note sur les équations de la dynamique”, J. Math. Pures Appl. **20** (1855) 137-138, Joseph Liouville (1809 - 1882) demonstrou que a resposta para tal pergunta está ligada com a integrabilidade desse sistema, e, no século XX essa resposta foi enriquecida por Arnold.

Nossos estudos sobre a integrabilidade de um sistema será a nível clássico, e, dentro desse contexto um dos primeiros problemas a serem analisados segundo essa ótica foi o problema de Kepler. Mas foi no período formado entre a década de sessenta e a década de setenta do século XX que tivemos um surto em estudos que se propunham verificar como a integrabilidade pode nos fornecer as soluções de um sistema, que de forma geral são representados por equações diferenciais.

No caso do problema de Kepler por uma questão dimensional é facil ver que a grandeza momento angular se conserva, tornando assim as equações de movimneto mais simples, ou seja, obtém-se a solução de uma forma "trivial". Em geral, para sistemas não-lineares a análise se torna mais complexa e não é tão simples, mesmo com o teorema de Liouvlle, analisar a integrabilidade do sistema.

Em 1834 John Scott Russel descobre o fenômeno ondulatório, que mais tarde seria chamado de onda solitária ou sóliton. Depois dessa descoberta, Russel realizou vários experimentos e concluiu que a onda se propagava com uma velocidade proporcional a gravidade, amplitude e profundidade do canal onde essas ondas solitárias eram produzidas.

Tal resultado estava em contradicão com os resultados teóricos obtidos por Sir G.B. Airy em seu livro "Tides and Waves", onde também encontrou uma fórmula para o velocidade de uma onda relativa a sua altura e amplitude, Airy concluiu que uma onda solitária não poderia existir. Somente em 1895 D.J. Korteweg and G. de Vries propuseram uma equação diferencial não-linear que apresentava soluções que conseguiam retratar o resultado obtido por Russel e que por consequência recebeu o nome de equação Korteweg-de Vries.

O resultado computacional obtido em 1955 por Fermi, Pasta e Ulam [31] após a simulação de uma rede cristalina unidimensional com interações quadráticas e cúbicas mostrou que após um longo período o sistema tem um comportamento periódico ao invés de ergódico. No ano de 1964 o limite contínuo obtido desse modelo(com forças quadráticas) mostrado por Zabusky e Kruskal [24], mostrou-se relacionado com a equação Korteweg-de Vrie.

Por outro lado, pode-se mostrar [42] que existe uma infinidade de grandezas que são conservadas associadas a equação Korteweg-de Vries de tal forma que a conservação dessas grandezas implica na integrabilidade desse sistema, assim a equação Korteweg-de Vries é um dos principais exemplos de sistemas integráveis.

Posteriormente Peter D. Lax em seu trabalho "Integrals of nonlinear equations of evolutions and solitary waves", Comm. Pure and Appl. Math. **21** (1968) 467-490 apresentou um método geral para obter soluções para equações diferenciais não-lineares. O método consiste em associar um operador linear com a evolução de equações diferenciais não-lineares. Tal procedimento é chamado atualmente de par de Lax. Dessa forma qual será o operador linear associadoa à equação KDV? Veremos que tal operador é $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}u$ e com o mesmo teremos então outra maneira de obter soluções para a equação KDV. Portanto, classicamente podemos verificar a integrabilidade de um sistema de equações diferenciais pelo teorema de Liouville-Arnold ou pelo par de Lax.

Além de sistemas integráveis, outro assunto que se tem estudado é a não-comutatividade. Um exemplo simples de não-comutatividade, que está em nosso dia-a-dia é as rotações espaciais. Porém, rotações espaciais se referem a dimensões macroscópicas. Será que a idéia de não-comutatividade está presente em situações que envolvem dimensões microscópicas? Caso envolva, quais seriam as consequências?

Para responder essas perguntas, ou pelo menos, obter um esclarecimento, precisamos nos remeter à Mecânica Quântica. Outro fato que nos estimula a estudar uma formulação não-comutativa da Mecânica Quântica é que teorias de campo definidas em espaços não-comutativos aparecem como certos limites de baixas energias de teorias de corda na presença de campos magnéticos [1], além disso não-comutatividade também tem sido abordada em outros contextos, como matéria condesada [44]. Nesse sentido, é que nos dispusemos estudar extensões não-comutativas de alguns tópicos da Física.

Assim no segundo capítulo buscaremos compreender o teorema de Liouville-Arnold e segundo o mesmo estudar a integrabilidade da equação KDV, finalizando com a formulação do par de Lax. No terceiro capítulo faremos uma breve introdução de teorias de campo não-comutativas. Partiremos então do espaço de fase quântico considerando a não-comutatividade entre os operadores de posição e na situação em que $\hbar$[1] $\longrightarrow 0$ analisaremos quais consequências ocorrem devido a não-comutatividade entre os operadores de posição do espaço de fase quântico.

Finalmente , no quarto capítulo, de posse dos resultados obtidos no terceiro capítulo, estudaremos extensões não-comutativas de alguns modelos clássicos, no limite do discreto para o contínuo.

[1] $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, onde h é a constante de Planck

2

Modelos Integráveis Clássicos

2.1 Introdução

Décadas de estudo de modelos integráveis, seja a nível quântico ou a nível clássico tem gerado um desenvolvimento matemático que une vários aspectos referentes a problemas físicos que parecem dispersos. A proposta desse capítulo é apresentar idéias básicas de integrabilidade de um sistema clássico através da equação Korteweg-de Vries e isso será feito usando fortemente os seis primeiros capítulos do livro Integrable Models publicado por World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. escrito por Ashok Das. É aconselhável ao leitor que veja primeiro o apêndice A da dissertação para que tenha uma leitura mais agradàvel do presente capítulo.

2.2 Sistemas Hamiltonianos

Em Mecânica Clássica um sistema Hamiltoniano com **n** graus de liberdade[1] é formado por uma Hamiltoniana $H(q_i, p_i)$ e um conjunto de variáveis canônicas (q_i, p_i) com i,j = 1,2,...n cuja evoluções temporais são dadas pelos colchetes de Poisson[2]

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \tag{2.1}$$
$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}, \tag{2.2}$$

sendo que q_i e p_i obedecem as seguintes relações

$$\{q_i, q_j\} = 0 \tag{2.3}$$
$$\{p_i, p_j\} = 0 \tag{2.4}$$
$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad j = i \\ 0 & \text{se} \quad j \neq i \end{cases} \tag{2.5}$$

[1] n = M - p, onde M é número de coordenadas e p o número de vínculos.

[2] O colchete de Poisson de duas variáveis dinâmicas F e G, defini-se como

$$\{F, G\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial G}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} \right)$$

De maneira mais explícita temos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.6}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{2.7}$$

2.3 Integrabilidade de Sistemas Hamiltonianos

Conforme foi dito na introdução, nossa proposta será compreender o teorema de Liouville - Arnold [43, 42], que passaremos chamar somente de Liouville e estudar a integrabilidade da equação KdV através do mesmo.

Definição 2.1. *Um sistema Hamiltoniano conservativo com* **n** *graus de liberdade e Hamiltoniana $H(q_i, p_i)$ é dito integrável se existem* **n** *constantes de movimento em involução, isto é:*
1)$\{K_i, H\} = 0$
2)$\{K_i, K_j\} = 0$
3)os vetores[3] ∇K_i*, são linearmente indepedentes em cada ponto do espaço de fase, onde* $i, j = 1, 2, ..., n$.

Teorema de Liouvile-Arnold 1. *Considere um sistema Hamiltoniano integrável com* **n** *graus de liberdade. Então:*
a) Existem variáveis canônicas $(\varphi_1, ..., \varphi_n, J_1, ..., J_n)$ tais que $H = H(J_1..., J_n)$, de modo que a solução das equações de movimento nas novas variáveis é

$$J_k = constante, \quad \varphi_k = \varphi_k(0) + w_k t, \quad k = 1, ...n$$

onde cada $w_k = \frac{\partial H}{\partial J_k}$ é constante.
b) As equações de Hamilton nas variáveis originais (q,p) podem ser resolvidas por quadraturas.
c) Se o conjunto de hipersuperfícies de nível das constantes de movimento em involução F_k, definido por

$$M_c = \{(q, p) \mid F_k(q, p) = C_k, \quad k = 1, ...n\},$$

é compacto e conexo,[4] *as variáveis canônicas (J, φ) podem ser escolhidas como variáveis de ação-ângulo e o movimento é multiperiódico com frequências $w_k = \frac{\partial H}{\partial J_k}$.*

[3] ∇ é o operador nabla no espaço de fase.

[4] No presente contexto, compacto significa a mesma coisa que fechado e limitado. Um conjunto é conexo se não é união de conjuntos disjuntos.

Ratificando, não estamos interassados em provar[5] o teorema de Liouville, mas sim em entender sua implicações, portanto se um sitema é descrito pelas coordenadas canônicas (q_i, p_i), $i = 1, 2, ..., \mathbf{n}$. Seja K_i $\mathbf{n}$ funcionais independentes que representam quantidades conservadas, sendo assim

$$\{K_i, K_j\} = 0, \quad i, j = 1, 2...\mathbf{n} \tag{2.8}$$

onde

$$K_i = K_i(q_j, p_j) = P_i. \tag{2.9}$$

Considere uma transformação canônica gerada por $W(q_i, P_i)$, tal que

$$H = \mathtt{H}(P_i), \tag{2.10}$$

onde os P_i são os novos momentos. As variáveis canônicas conjugadas aos P_i, conhecidas como variáveis angulares θ_i são definidas por

$$\theta_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}. \tag{2.11}$$

De tal forma que

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \tag{2.12}$$
$$\{P_i, \theta_j\} = \{K_i, \theta_j\} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2...\mathbf{n} \quad . \tag{2.13}$$

As equações de movimento para a novas variáveis canônicas são

$$\dot{P}_i = \{P_i, H\} = 0 \tag{2.14}$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \{\theta_i, H(P_j)\} = f_i(P_j) \tag{2.15}$$

onde foi admitido que os P_i são grandezas conservadas. Dessa maneira temos

$$\dot{\theta}_i = constante, \tag{2.16}$$

pois os f_i são constantes já que dependem das constantes P_i. Os θ_i podem ser facilmente integrados, dando

$$\theta_i = f_i t + \alpha_i \tag{2.17}$$

sendo que α_i são constantes de integração. Portanto, satisfeita as três condições contidas na definição (2.1) mediante uma transformação canônica, obtem-se de forma explícita as soluções das equações de movimento. É importante ressaltar que pode ser impossível obter a transformação e assim não inverter a solução para ter as evoluções como

$$q_i = q_i(f_i, \alpha_i, t) \tag{2.18}$$
$$p_i = p_i(f_i, \alpha_i, t). \tag{2.19}$$
$$\tag{2.20}$$

È necessario frisar que o teorema de Liouville afirma somente a existência das soluções.

[5] Veja a demonstração na referência [43]

2.4 Equação Korteweg-de Vries

No século XV, os países europeus que desejavam comprar especiarias (pimenta, açafrão, gengibre, canela e outros temperos), tinham que recorrer aos comerciantes de Veneza ou Gênova, que possuíam o monopólio destes produtos. Esses comerciantes tinham acesso aos mercados orientais tendo a Índia como principal fornecedor. Por isso os burgueses italianos cobravam preços exorbitantes pelas especiarias vindas do oriente. A comunicação e o transporte de mercadorias vindas do oriente eram realizados pelo Mar Mediterrâneo, dominado pelos italianos. Encontrar uma nova rota para as Índias era uma tarefa difícil, porém muito desejada. Portugal e Espanha queriam muito ter acesso direto às fontes orientais, para também lucrar com este interessante comércio. Outro fator importante, que estimulou as navegações nesta época, era a necessidade dos europeus de conquistarem novas terras. Eles desejvam isso para poder obter matérias-primas, metais preciosos e produtos não encontrados na Europa. Até a Igreja Católica estava interessada neste empreendimento, pois, implicava em novos fiéis.

Logicamente para concretizar seus objetivos os europeus tiveram que desenvolver tecnologia de navegação. Além disso, criação de novos portos e canais de navegação foi um passo natural desse empreendimento, provocando assim um avanço em estudos Hidrodinâmicos. Em 1834 a margem do canal Eddinburgh-Glasgow um engenheiro naval britânico chamado John Scott Russel observava uma barcaça sendo puxada por dois cavalos, um em cada margem do canal, quando a embarcação parou a massa de água que estava sendo arrastada proseguiu por mais três quilômetros a quase quinze quilômetros por hora.

"Este fenômeno é belíssimo e estraordinário: quando o vi pela primeira vez foi o dia mais feliz da minha vida. (...) È isto que uma elevação de água faz: ela não permanece onde está, mas viaja a grande distância."Assim Russel descreveu esse fenômeno, que hoje é chamada de sóliton ou onda sólitaria. E como relatado na introdução, a própria história da equaçao KdV demonstra sua importância ao descrever resultados de problemas computacionais [24].

Conforme mencionado, estudaremos a integrabilidade da equação KdV. Para realizar nosso objetivo se faz impotante analisar de forma qualitativa algumas características de soluções de equações diferenciais, porque as soluções nos permitem compreender e quantificar as grandezas envolvidas em fenômenos físicos.

Por exemplo as soluções da equação de Schrödinger nos informam qual é o comportamento de uma partícula sob a ação de um dado potencial. Depois de uma certa manipulação algébrica, através das equações de Maxwell obtemos uma equação de onda e percebemos que o campo elétrico e o campo magnético propagam-se perpendiculares entre si a uma velocidade c no vácuo. Dessa forma a solução da equação KdV nos permitirá entender os resultados mais importantes, intrínsecos ao sistema por ela descrito. Ao dissertar sobre alguns assuntos que envolvem funções do tipo h(x,t), será omitida a depedência temporal e espacial quando estivermos realizando operações sobre as mesmas. No caso, em que tal escolha possa prejudicar o entendimento da dissertação, as variáveis não serão omitidas. Por hora vamos focar nossa atenção na propagação de ondas unidimensionais, que são representadas por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2.21}$$

que é denominada equação de onda. De forma geral u(x,t) se apresenta da seguinte forma

$$u(x,t) = g(x+vt) + f(x-vt), \tag{2.22}$$

sendo que f e g são funções arbitrárias. Uma forma mais explícita para $u(x,t)$ seria $\cos(Kx-\omega t)$ ou $sen(Kx-\omega t)$ ou a soma das duas que pode ser escrita como $e^{i(Kx-\omega t)}$, onde K é o número de ondas e ω é a frequência. Isso, significa que, para a equação (2.21) é valido o principío da superposição, ou seja a equação (2.21) é uma equação diferencial linear. Assumindo

$$u(x,t) = Ae^{i(Kx-\omega t)} \tag{2.23}$$

e substituindo na equação (2.21) vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Ae^{i(Kx-\omega t)}}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Ae^{i(Kx-\omega t)}}{\partial t^2} \\ A^2 e^{i(Kx-\omega t)} i^2 K^2 &= \frac{1}{v^2} A^2 e^{i(Kx-\omega t)} i^2 \omega^2. \end{aligned}$$

Consequentemente temos

$$\omega = Kv. \tag{2.24}$$

Se $u(x,t)$ for escrita como a superposição de soluções da equação de onda, podemos definir uma velocidade para esses pacotes de ondas chamada velocidade de grupo, que será dada por

$$v_g = \frac{d\omega}{dK}. \tag{2.25}$$

Perceba que a definição acima aplicada a equação (2.24), nos dá

$$v_g = \frac{d\omega}{dK} = v. \tag{2.26}$$

Isso indica que essas ondas não se espalham, pois as ondas que formam o pacote propagam com a mesma velocidade v, indepedente do número de ondas K e do comprimento de onda λ. De maneira simples obtemos um resultado importante através da solução da equação de onda, como haviamos comentado antes. Vamos analisar outras duas equações diferenciais lineares e ver o que acontece com a propagação dos pacotes de ondas. Seja

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.27}$$

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \tag{2.28}$$

onde u_t significa a derivada de u em relação a t e u_x a derivada de u em relação a x. Podemos propor o mesmo tipo de solução $e^{i(Kx-\omega t)}$ para as equações (2.27), (2.28) e obter respectivamente

$$\begin{aligned} \omega &= K - K^3 \qquad (2.29)\\ \omega &= K - iK^2. \qquad (2.30) \end{aligned}$$

Por definição, dimensionalmente, velocidade é espaço dividido pelo tempo e pelo fato de $[K] = L^{-1}$ e $[\omega] = T^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} v &= \tfrac{\omega}{K} = 1 - K^2 \qquad (2.31)\\ v_g &= \tfrac{d\omega}{dK} = 1 - 3K^2 \qquad (2.32)\\ v_g &\leq v. \qquad (2.33) \end{aligned}$$

Claramente vemos que, no caso de (2.27) há ondas viajando com diferentes velocidades, ou seja, há uma dispersão no pacote de ondas. Por essa razão o termo u_{xxx} da equação (2.27) recebe o nome de dispersivo. Já para a equação (2.28), temos que

$$u(x,t) = e^{-K^2 t + iKx - iKt}. \qquad (2.34)$$

A solução obtida decai exponencialmente para o caso em que $K \neq 0$ e $t \to \infty$; tal decaimento é chamado de dissipativo. Portanto, dado uma equação diferencial, basta encontrar sua solução para estudarmos as propriedades dos fenômenos ocorridos. Nesse sentido vamos analisar que efeitos surgem de:

$$u_t + uu_x = 0. \qquad (2.35)$$

Equações de tal tipo são chamadas não-lineares e em geral os métodos para encontrar suas soluções são mais complicados. O termo uu_x torna inválido o uso do princípio da superposição para equação a (2.35). A equação diferencial

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0 \qquad (2.36)$$

é denominada equação KdV. Somente resolvendo a equação KdV é que podemos saber qual comportamento terá a solução que satisfaça uma equação diferencial que tem um termo não-linear e um termo dispersivo. A equação KdV é invariante em relação as seguintes mudanças de variáveis.
I)$x \longrightarrow b^{\frac{1}{3}}x, t \longrightarrow -t, u \longrightarrow ua^{-1}b^{\frac{1}{3}}$
II)$t \longrightarrow t + c_1$
III)$x \longrightarrow x + c_2$
IV)$x \longrightarrow cx, t \longrightarrow c^3 t, u \longrightarrow c^{-2}u$
V)$x \longrightarrow x + \gamma t, u \longrightarrow u + \gamma$.
Aplicando a mudança de variável dada em **I** à equação KdV, obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^{-1}b^{\frac{1}{3}}u}{\partial(-t)} &= -aa^{-1}b^{\frac{1}{3}}u\frac{\partial a^{-1}b^{\frac{1}{3}}u}{\partial b^{\frac{1}{3}}x} - b\frac{\partial^3 a^{-1}b^{\frac{1}{3}}u}{\partial(b^{\frac{1}{3}}x)^3}\\ \frac{a^{-1}b^{\frac{1}{3}}}{-1}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{aa^{-1}b^{\frac{1}{3}}a^{-1}b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{ba^{-1}b^{\frac{1}{3}}}{b}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\\ u_t &= uu_x + u_{xxx}, \qquad (2.37) \end{aligned}$$

ou seja, mantém a mesma estrutura. Vamos nos conter em fazer apenas a mudança de variável indicada em **I**, pois será útil para realização de nossos cálculos. Para verificar que a estrura da equação KdV se mantém em relação as outras mudanças de variáveis basta seguir o mesmo procedimento.

Propriedades das Soluções da Equação KdV

Proposição 2.1. *A equação KdV admite uma solução única dada uma condição inicial(c.i.).*

De fato, considere a equação

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \tag{2.38}$$

e

$$v_t = vv_x + v_{xxx} \tag{2.39}$$

admitindo que

$$u(x,0) = v(x,0) \quad c.i. \tag{2.40}$$

com x $\in [-\infty, \infty]$. Consequentemente

$$(u-v)_t = uu_x - vv_x + (u-v)_{xxx} \tag{2.41}$$

que pode ser reescrita como

$$(u-v)_t = u(u-v)_x + (u-v)v_x + (u-v)_{xxx}. \tag{2.42}$$

Definindo $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$, a equação (2.42) fica

$$w_t = uw_x + wv_x + w_{xxx}. \tag{2.43}$$

Suponha que para $x \longrightarrow \pm\infty$, $u(x,t)$ e $v(x,t) \longrightarrow 0$. Mutiplicando (2.43) por w e integrando-a no intervalo $[-\infty, \infty]$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxww_t = \int_{-\infty}^{\infty} dxwuw_x + \int_{-\infty}^{\infty} dx(w^2)v_x + \int_{-\infty}^{\infty} dxww_{xxx}. \tag{2.44}$$

O primeiro e último termo do lado direito da equação (2.44), podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dxwuw_x &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{2}\left(w^2\right)_x u \\
&= \left[\frac{1}{2}w^2u\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{2}w^2u_x \\
\int_{-\infty}^{\infty} dxww_{xxx} &= [ww_{xx}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dxw_{xx}w_x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(w_x^2\right)_x \\
&= \left[\frac{w_x^2}{2}\right]_{\infty}^{-\infty}.
\end{aligned}$$

Assumindo que as derivadas de u e $v \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow 0$ a equação (2.44), fica

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{2}w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dxw^2\Big(v_x - \frac{1}{2}u_x\Big) \tag{2.45}$$

onde o termo do lado esquerdo da equação (2.44) foi reescrito de forma conveniente. Podemos definir

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{2}w^2 \tag{2.46}$$

$$m = 2max|v_x - \frac{1}{2}u_x| \tag{2.47}$$

e pela relação (2.47) a equação (2.45) pode ser escrita como[6]

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq mE(t) \tag{2.48}$$

$$E(t) \leq E(0)e^{mt}. \tag{2.49}$$

Assim, da equação (2.40) vem que $w(x,0) = 0$ e portanto usando (2.46):

$$E(0) = 0 \tag{2.50}$$

implicando em

$$E(t) = 0 \quad \forall \quad t. \tag{2.51}$$

Dessa forma, tem-se

$$E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{2}w^2(x,0) \tag{2.52}$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{2}w^2(x,t) \tag{2.53}$$

que nos remete, com (2.50) e (2.51), a:

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t) = 0 \tag{2.54}$$

implicando em

$$u(x,t) = v(x,t) \quad \forall (x,t), \quad (x,t) \to (-\infty, \infty) \tag{2.55}$$

confirmando assim a afirmação feita .

[6] $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x)g(x) \mid dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid\mid g(x) \mid \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid max\mid g(x) \mid$

Soluções Tipo Sóliton

Definição 2.2. *Uma onda tipo sóliton para a equação KdV tem as seguintes propriedades:*
I)$u(x,t) \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow \pm\infty$
II)A onda representada por $u(x,t)$ viaja somente para esquerda.
III)A amplitude da onda é diretamente proporcional a sua velocidade.
IV)A onda $u(x,t)$ não tem dispersão.

Assuma que

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x + ct \quad com \quad c > 0. \tag{2.56}$$

Substituindo na equação (2.37), vem que

$$\begin{aligned} u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} &= uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} && (2.57) \\ cu_\xi &= uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} && (2.58) \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$c\frac{du}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\Big(\frac{1}{2}u^2 + \frac{d^2u}{d\xi^2}\Big). \tag{2.59}$$

A integral indefinida de (2.59) é

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{d^2u}{d\xi^2} - cu = A \tag{2.60}$$

onde A é uma constante. Mutiplicando (2.60) por $\frac{du}{d\xi}$, temos

$$\frac{du}{d\xi}\Big(\frac{1}{2}u^2 + \frac{d^2u}{d\xi^2} - cu\Big) = \frac{du}{d\xi}(A) \tag{2.61}$$

que por conveniência será reescrita da seguinte forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\Big(\Big(\frac{du}{d\xi}\Big)^2\Big) + \frac{1}{6}\frac{d}{d\xi}(u^3) - \frac{c}{2}\frac{d}{d\xi}(u^2) = \frac{du}{d\xi}A. \tag{2.62}$$

Já a integral indefinida da equação (2.62) nos dá

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{du}{d\xi}\Big)^2 + \frac{u^3}{6} - \frac{cu^2}{2} = u(A) + A' \tag{2.63}$$

onde A' é outra constante. Impondo as condições de contorno $u, \frac{du}{d\xi}, \frac{d^2u}{d\xi^2} \longrightarrow 0$ quando $\xi \longrightarrow \pm\infty$, concluimos que $A' = 0$. Assim

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{du}{\xi}\Big)^2 + \frac{u^3}{6} - \frac{cu^2}{2} = 0, \tag{2.64}$$

sendo que admitimos $A = 0$ por conviniência. Repare que a equação diferencial, tornou-se separável. Portanto realizando a separação de variável, temos

$$\int_0^u \frac{du'}{u'\sqrt{-\frac{u'}{3}+c}} = \pm\int_0^\xi d\xi' \tag{2.65}$$

definindo $u = \chi sech^2(\theta)$, onde $\chi = 3c$ e sob a condição $-\frac{1}{3}u + c \geq 0$ obtemos o seguinte resultado

$$\xi = \pm\frac{2\theta}{\sqrt{c}} + x_0; \quad \xi \in [-\infty, \infty] \tag{2.66}$$

onde x_0 é uma constante de integração. Assim $u(x,t)$ fica

$$u(x,t) = \chi sech^2(\frac{\pm\sqrt{c}}{2}(x+ct) - x_0) \tag{2.67}$$

ou

$$u(x,t) = \chi sech^2(\frac{\pm\sqrt{c}}{2}\xi - x_0). \tag{2.68}$$

Agora vamos analisar as propriedades dessa solução. A escolha de sinal é irrelevante, pois $u(x,t)$ é par em relação a ξ. Fica evidende que $u(x,t) \longrightarrow 0$, quando x $\longrightarrow \infty$ pois $sech^2(\pm\infty) = 0$. Outro detalhe é que a condição $-\frac{1}{3}u + c \geq 0$ implica em $c > \frac{1}{3}u > 0$, nos garantindo uma solução real, evitando que a solução seja oscilante. Explicitamente temos a amplitude proporcional a velocidade de propagação. Falta somente analisar a relação de dispersão de $u(x,t)$. Desde que

$$u(x,t) = f(x+ct) \tag{2.69}$$

cada modo de Fourier pode ter a seguinte forma[7]

$$u_k(x,t) = exp(ik(x+ct))\widetilde{f}(k) \tag{2.70}$$

que claramente nos dá

$$w_k = kc. \tag{2.71}$$

Consequentemente

$$c = \frac{w_k}{k} \tag{2.72}$$

$$v_g = \frac{dw_k}{dk} = c \tag{2.73}$$

portanto $u(x,t)$ não dispersa. Logo $u(x,t)$ é um sóliton.

[7] $f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i(kx+wt)}\widetilde{f}(k)$

Equação KdV Como Sistema Hamiltoniano

Na definição 2.1 e pelo o enunciado do teorema de Liouville, vimos que satisfeita as condições de integrabilidade, obtemos $\dot{P}_i = \{P_i, H\} = 0$, ou seja, é preciso conhecer a Hamiltoniana do sistema. Portanto para estudarmos a integrabilidade da equação KdV é fundamental saber a forma da Hamiltoniana para a mesma. Usando os colchetes de Poisson, damos à equação KdV, uma estrutura canônica e assim obtemos a Hamiltoniana relacionada a ela. Então a forma

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \tag{2.74}$$

deve ser apresentada como

$$u_t = \{u(x,t), H\}. \tag{2.75}$$

Para isso, basta escrever (2.74) como

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u^2}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) \tag{2.76}$$

e observar que o funcional

$$F[u] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{u^3}{3!} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\right) \tag{2.77}$$

tem como derivada[8]

$$\frac{\delta F}{\delta u(x)} = \frac{u^2(x)}{2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}. \tag{2.78}$$

Fazendo

$$F[u] \equiv H[u] \tag{2.79}$$

podemos escrever (2.76) como:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H[u]}{\delta u(x)} \tag{2.80}$$

obtendo (2.75) sob a forma:

$$\{u(x,t), H[u]\} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H[u]}{\delta u(x)}. \tag{2.81}$$

Usando os colchetes[9] de Poisson e H dada por (2.77) temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\delta H[u]}{\delta u(y)}\{u(x), u(y)\} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H[u]}{\delta u(x)}. \tag{2.82}$$

[8] A derivada para funcionais é discutida no apêndice A

[9] A evolução temporal de u(x) pode ser obtida através do colchetes de Poisson para funcionais, ver apêndice A

Isso nos mostra que[10]

$$\{u(x), u(y)\}_1 = \frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y), \tag{2.83}$$

portanto a equação KdV é um sistema Hamiltoniano com

$$H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{u^3}{3!} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\} \tag{2.84}$$

tal que[11]

$$u_t = \{u(x,t), H_2\}_1 = uu_x + u_{xxx}. \tag{2.85}$$

Um fato interessante e importante em relação a equação KdV é que podemos expressar outras Hamiltonianas com outros colchetes de Poisson para $u(x)$ e $u(y)$. Para confirmar nossa afirmação vamos definir:

$$\{u(x), u(y)\}_2 = \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x) + u(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big)\right]\delta(x-y) \tag{2.86}$$

e

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2}u^2(x). \tag{2.87}$$

A derivada funcional da equação (2.87) é

$$\frac{\delta H_1}{\delta u(y)} = u(y), \tag{2.88}$$

de tal maneira que

$$\begin{aligned} u_t &= \{u(x,t), H_1\}_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta u(x)}{\delta u(x)}\{u(x), u(y)\}\frac{\delta H_1}{\delta u(y)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta u(x)}{\delta u(x)} \int_{-\infty}^{\infty} dy \{u(x), u(y)\}\frac{\delta H_1}{\delta u(y)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-y) \int_{-\infty}^{\infty} dy \Big(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x) + u(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)\delta(x-y)u(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \Big(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x) + u(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)\delta(y-x)u(y) \end{aligned} \tag{2.89}$$

[10] Os índices são colocados nos colchetes de Poisson e Hamiltonianas de forma convenientes.

[11] A notação da equação (2.85) deve ser interpretada da seguinte forma: os cálculos serão realizados com a Hamiltoniana H_2 usando o colchete de Poisson $\{u(x), u(y)\}_1$ segundo a definição A.3 do apêndice A

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dyu(y)\frac{\partial^3\delta(x-y)}{\partial x^3} + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} dyu(y)\frac{\partial(u(x)\delta(x-y))}{\partial x} + \\
&+ \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} dyu(y)u(x)\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x} \\
&= u_{xxx} + \frac{1}{3}uu_x + \frac{2}{3}uu_x \\
u_t &= uu_x + u_{xxx} \qquad (2.90)
\end{aligned}
$$

onde da antepenútima igualdade para penultima igualdade foi realizada integração por partes[12]. Portanto podemos ter mais de uma Hamiltoniana para um dado sistema e esse fato será usado para mostrar a integrabilidade da equação KdV.

Integrabilidade da Equação KdV

Estendendo a idéia vista na seção (2.2) para um sistema contínuo, caso um sistema possua um número infinito de quantidades conservadas em involução esse sistema é integrável e como foi mencionado a equação KdV é integrável. Portanto devemos conseguir exibir um número infinito de quantidades conservadas em involução relacionadas a equação KdV para confirmar nossa afirmação. Se $Q[u]$ é uma quantidade conservada, então

$$\frac{dQ[u]}{dt} = \{Q[u], H\} = 0 \qquad (2.91)$$

onde definiremos para um $Q[u]$ qualquer

$$Q[u] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\rho[u(x,t)] \qquad (2.92)$$

de tal forma que

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ[u]}{dt} &= \lim_{\triangle t\longrightarrow 0}\left\{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\rho[u(x,t+\triangle t)] - \rho[u(x,t)]\right)}{\triangle t}\right\} \\
&= \lim_{\triangle t\longrightarrow 0}\left\{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\rho[u(x,t)] + \frac{\partial\rho[u(x,t)]}{\partial t}\triangle t + O((\triangle t)^2) + ... - \rho[u(x,t)]\right)}{\triangle t}\right\} \\
&= \lim_{\triangle t\longrightarrow 0}\left\{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{\partial\rho[u(x,t)]}{\partial t}\triangle t + O((\triangle t)^2) + ...\right)}{\triangle t}\right\} \\
&= \lim_{\triangle t\longrightarrow 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{\partial\rho[u(x,t)]}{\partial t} + O((\triangle t)) + ...\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

[12] As integrais foram resolvidas usando as propriedades da função delta de Dirac, as quais se encontram no apêndice A

Portanto, aplicando o limite, temos

$$\frac{dQ[u]}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \rho[u(x,t)]}{\partial t} = 0, \tag{2.93}$$

pode-se dizer que a densidade $\rho[u(x,t)]$ é parte de uma equação de continuidade, desde que uma corrente $J[u(x,t)]$ se anule nos extremos, dessa forma teremos

$$\frac{\partial \rho[u(x,t)]}{\partial t} + \frac{\partial J[u(x,t)]}{\partial x} = 0 \tag{2.94}$$

uma equação da continuidade. Portanto além dos $Q_i[u]$ serem integráveis a própria densidade deve satisfazer a equação da continuidade. Perceba que definindo

$$\rho_0[u(x,t)] = u(x,t) \tag{2.95}$$

$$J_0 = -\Big(\frac{1}{2}u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) \tag{2.96}$$

podemos reescrever a equação KdV na forma da equação da continuidade. Assim

$$Q_0(u) = H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_0[u(x,t)] = \int_{\infty}^{\infty} dx u(x,t) \tag{2.97}$$

é uma constante de movimento. A segunda constante de movimento pode ser obtida fazendo

$$uu_t = u(uu_x + u_{xxx}) \tag{2.98}$$

$$ou$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{u^2}{2}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big). \tag{2.99}$$

Com procedimento análogo logramos

$$\rho_1[u(x,t)] = \frac{1}{2}u^2 \tag{2.100}$$

$$J_1 = -\Big(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) \tag{2.101}$$

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_1[u(x,t)]. \tag{2.102}$$

Note que a equação (2.102) é igual a equação (2.87). A Hamiltoniana H_2 pode ser nossa terceira constante, que por uma questão de notação passaremos representar a mesma por H_{KdV}. Então, para que H_{KdV} seja nossa terceira constante de movimento, basta satisfazer a segunda condição da definição 2.1. Portanto

$$\frac{dH_{KdV}}{dt} = \{H_{KdV}, H_{KdV}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(x)} \{u(x), u(y)\} \frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(y)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(x)} \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x} \frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(y)} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(x)} \frac{\partial \delta(y-x)}{\partial y} \frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(y)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(x)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(x)} \right)^2 \right] \\
&= \left[\left(\frac{\delta H_{KdV}}{\delta u(x)} \right)^2 \right]_{-\infty}^{\infty} = \left[\left(\frac{u^2(x)}{2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x} \right)^2 \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.103}
$$

onde u e suas derivadas vão a zero quando $x \longrightarrow \pm\infty$. Para averiguarmos coerência em nossa notação, notemos que

$$
\begin{aligned}
\{u(x,t), H_2\}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta u(x,t)}{\delta u(x)} \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x} \frac{\delta H_2}{\delta u(y)} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta u(x,t)}{\delta u(x)} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{\partial \delta(y-x)}{\partial y} \frac{\delta H_2}{\delta u(y)} \right) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-y) \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{\partial \delta(y-x)}{\partial y} \frac{\delta H_2}{\delta u(y)} \right) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{\partial \delta(y-x)}{\partial y} \frac{\delta H_2}{\delta u(y)} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
&= u u_x + u_{xxx} \\
&= u_t .
\end{aligned} \tag{2.104}
$$

Já o colchete de Poisson para u(x) e H_1 usando $\{u(x), u(y)\}_1$ é[13]

$$
\begin{aligned}
\{u(x,t), H_1\}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \{u(x), \frac{1}{2} u^2(y)\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy u(y) \{u(x), u(y)\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy u(y) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y)
\end{aligned}
$$

[13] Algumas propriedades algébricas do colchete de Poisson das variáveis dinâmicas F e G.
$\{F + \alpha G, J\}$ = {F,J} + α{G,J}
$\{FG, J\}$ = F{G,J} + {F,J}G

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial u(x)}{\partial x} \\
&= u_x.
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

H_2 e H_1 podem ser considerados como geradores da evolução temporal e de translação espacial respectivamente, portanto energia e momento. Agora vamos mostrar que usando uma versão da equação de Ricatti iremos obter uma transformação chamada Miura, sendo que isso será importante para construir sistematicamente quantidades conservadas.

Transformação de Miura

Usando a transformação

$$
u(x,t) = v^2(x,t) + i\sqrt{6}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.106}
$$

chamada equação de Ricatti na equação (2.37), obtem-se

$$
v_t = v^2 v_x + v_{xxx}, \tag{2.107}
$$

conhecida como equação KdV modificada (MKdV). Substituindo equação (2.106) na equação (2.37), vem que

$$
\begin{aligned}
\Big(v^2(x,t) + i\sqrt{6}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)_t &= \Big(v^2(x,t) + i\sqrt{6}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big(v^2(x,t) + i\sqrt{6}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)_x + \\
\Big(v^2(x,t) + i\sqrt{6}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)_{xxx} & \\
2vv_t + i\sqrt{6}v_{xt} &= 2v^3 v_x + 2vv_{xxx} + i\sqrt{6}v^2 v_{xx} + 2i\sqrt{6}vv_x^2 + i\sqrt{6}v_{xxxx} \\
+6v_x v_{xx} - 6v_x v_{xx} & \\
\Big(2v + i\sqrt{6}v_x\Big)v_t &= \underbrace{2v^3 v_x + 2vv_{xxx}}_{2v(v^2 v_x + v_{xxx})} + \underbrace{i\sqrt{6}v^2 v_{xx} + 2i\sqrt{6}vv_x^2 + i\sqrt{6}v_{xxxx}}_{i\sqrt{6}\frac{\partial}{\partial x}(v^2 v_x + v_{xxx})} \\
\underbrace{+6v_x v_{xx} - 6v_x v_{xx}}_{0} & \\
(2v + i\sqrt{6}v_x)v_t &= (2v + i\sqrt{6}v_x)(v^2 v_x + v_{xxx}) \\
v_t &= v^2 v_x + v_{xxx}.
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

Portanto, além de verificarmos a veracidade da afirmação, concluimos pelas equações (2.106) e (2.107) que qualquer solução da equação MKdV nos fornece solução para a equação KdV. Um outro detalhe relacionando as equações MKdV e KdV é que apesar da equação MKdV ser derivada da equação KdV, elas não possuem as mesmas simetrias. Isso pode ser verificado por meio das mudanças de variáveis do tipo **V**, as quais a equação KdV é invariante [42]. Além disso, o resultado obtido realizando as mudanças de variáveis do tipo **V** será usado posteriormente para mostrar que as equações MKdV e KdV possuem infinitas quantidades conservadas. Note que dada a seguinte mudança de variáveis

$$t \longrightarrow t \tag{2.109}$$

$$x \longrightarrow x + \frac{3}{2\epsilon^2}t \tag{2.110}$$

$$u \longrightarrow u + \frac{3}{2\epsilon^2} \tag{2.111}$$

$$v \longrightarrow \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon} \tag{2.112}$$

ao substituirmos na equação (2.107), vem que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon}\right)}{\partial t} &= \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon}\right)}{\partial x} + \frac{\partial^3\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon}\right)}{\partial x^3} \\
\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t}\right\} &= \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon}\right)^2 \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v_x + + \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v_{xxx} \\
\left\{\frac{3}{2\epsilon^2}v_x + v_t\right\} &= \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon}\right)^2 v_x + + v_{xxx} \\
v_t &= -\frac{3}{2\epsilon^2}v_x + \left(\frac{\epsilon^2}{6}v^2 + v + \frac{3}{2\epsilon^2}\right)v_x + v_{xxx}
\end{aligned}$$

$$v_t = \left(\frac{\epsilon^2}{6}v^2 + v\right)v_x + v_{xxx}. \tag{2.113}$$

Portanto, explicitamente a equação MKdV não é invariante mediante mudança de variáveis do tipo **V**. Perceba que quando $\epsilon \longrightarrow 0$ nós temos

$$v_t = vv_x + v_{xxx} \tag{2.114}$$

que é a equação KdV para $v(x,t)$. Já para $\epsilon \longrightarrow \infty$, realizando o reescalamento $v \longrightarrow \frac{\sqrt{6}}{\epsilon}v$ vem que

$$v_t = v^2 v_x + v_{xxx}, \tag{2.115}$$

ou seja, a equação MKdV. Agora, como foi mencionado, vamos mostrar que a equação KdV tem infinitas quantidades conservadas. Se $v(x,t)$ é uma solução[14] da equação

$$v_t = \left(\frac{\epsilon^2}{6}v^2 + v\right)v_x + v_{xxx},$$

ou

$$v_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\epsilon^2}{18}v^3 + \frac{1}{2}v^2 + v_{xx}\right), \tag{2.116}$$

[14] $v(x,t)$ é uma solução geral, ou seja, $v(x,t)$ é qualquer função que satisfaça a equação (2.113).

então, $v(x,t)$ também fornece soluções para equação KdV quando $\epsilon \longrightarrow 0$ através da relação

$$u = \frac{\epsilon^2 v^2}{6} + v + i\epsilon\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.117}$$

obtida substituindo as equações (2.111), (2.112) na equação (2.106). Pois

$$u = v, \quad \epsilon = 0, \tag{2.118}$$

ou seja, quando $\epsilon \longrightarrow 0$ a equação MKdV fornece soluções para equação KdV. Olhando para (2.117) notamos que se conseguirmos encontrar quantidades conservadas para a equação MKdV automaticamente estaremos encontrando para KdV. Perceba que a equação (2.116) tem a forma da equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \tag{2.119}$$

onde

$$\rho[v(x,t)] = v(x,t) \tag{2.120}$$

$$J_v = -\left(\frac{\epsilon^2}{18}v^3 + \frac{1}{2}v^2 + v_{xx}\right). \tag{2.121}$$

Portanto, definindo

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho[v(x,t)], \tag{2.122}$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} dx v(x,t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial J}{\partial x} \\
&= \left[\frac{\epsilon^2}{18}v^3 + \frac{1}{2}v^2 + v_{xx}\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.123}$$

onde v, $v_{xx} \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow \pm\infty$. Como na equação (2.95) temos uma relação direta de $\rho[v(x,t)]$ com $v(x,t)$ e na equação (2.96) uma corrente J_v associada à $\rho[v(x,t)]$. Nesse sentido, ao exibirmos infinitas quantidades para equação MKdV estaremos obtendo infinitas quantidades para a equação KdV. Para isso, ao invés de termos $u(x,t)$ em função de $v(x,t)$ na equação (2.117), nós podemos inverter a equação (2.117) e expandir $v(x,t)$ em termos de $u(x,t)$ como

$$v(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n v_n[u(x,t)]. \tag{2.124}$$

Da equação (2.116) podemos ver $v_n[u(x,t)]$ como quantidade conservada da equação KdV , desde que a série em ϵ satisfaça a equação da continuidade. Note que

$$\begin{aligned}
Q[u] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(v + i\epsilon \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\epsilon^2 v^2}{6} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(v + \frac{\epsilon^2 v^2}{6} \right) + i\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(v + \frac{\epsilon^2 v^2}{6} \right) + i\epsilon v|_{-\infty}^{\infty} \qquad (2.125) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(v + \frac{\epsilon^2 v^2}{6} \right) + i\epsilon(0-0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(v + \frac{\epsilon^2 v^2}{6} \right). \qquad (2.126)
\end{aligned}$$

Podemos nos perguntar se a equação (2.117) pode nos levar a uma relação polinomial inversa em termos de u(x,t) já que pela equação (2.126) o termo que envolve derivada espacial não contribui para escrever $Q[u(x,t)]$. Para investigar essa questão vamos ignorar o terceiro termo do lado direito da equação (2.117). Portanto

$$u(x,t) \;=\; \frac{\epsilon^2}{6} v^2 + v \tag{2.127}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
u + \frac{6}{4\epsilon^2} &= \left(\frac{\sqrt{6}}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{\sqrt{6}} v \right)^2 \\
\frac{\sqrt{6}}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{\sqrt{6}} v &= \left(u + \frac{6}{4\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
v &= \frac{\sqrt{6}}{\epsilon} \left[\left(u + \frac{3}{2\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon} \\
v &= \frac{3}{\epsilon^2} \left[\left(1 + \frac{2}{3}\epsilon^2 u \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right], \qquad (2.128)
\end{aligned}$$

ou seja, v tem uma relação polinomial em termos u e essa relação é uma série em termos pares de ϵ, já que

$$(1+x)^k \;=\; \sum_{0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{x^n}{n!} \quad para \quad |x| < 1. \tag{2.129}$$

Portanto, definindo $x = \frac{2}{3}\epsilon^2 u$ a equação (2.128) em relação a ϵ se comporta da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v &\sim \frac{3}{\epsilon^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2u\epsilon^2}{3} + \sum_2^\infty \frac{k!}{(k-n)!}\frac{x^n}{n!} - 1\right) \\ v &\sim \left(u + \sum_2^\infty \frac{k!}{(k-n)!} 3\epsilon^{2n-2}\frac{\left(\frac{2u}{3}\right)^n}{n!}\right). \end{aligned} \tag{2.130}$$

Vamos mostrar que os termos impares da expansão de $v_n[u(x,t)]$ em ϵ estão envolvidos com derivadas espaciais. Considere v escrita como:

$$v = y + iz, \quad y, z \in \mathbb{R}. \tag{2.131}$$

Então ao substituirmos (2.131) em (2.117), obtemos

$$\begin{aligned} u &= y + iz + i\epsilon\frac{\partial}{\partial x}(y + iz) + \frac{\epsilon 2}{6}(y^2 - z^2 + i2yz) \\ u &= \left(y - \epsilon\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{3}(y^2 - z^2)\right) + i\left(z + \epsilon\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\epsilon^2}{3}yzi. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Desde que u seja real, temos que

$$z + \epsilon\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{3}yz = 0$$

ou

$$z\left(1 + \frac{\epsilon^2}{3}y\right) = -\epsilon\frac{\partial y}{\partial x}$$

de outra forma

$$z = -\epsilon\frac{\partial y}{\partial x}\frac{1}{\left(1 + \frac{\epsilon^2}{3}y\right)} = -\frac{3}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(1 + \frac{\epsilon^2}{3}y\right). \tag{2.133}$$

A relação (2.133) é o suficiente para mostrar que a parte imaginaria de v é uma derivada espacial que envolve termos impares da série em ϵ, pois

$$\ln(1 + x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}, \quad para \quad |x| < 1 \tag{2.134}$$

e definindo

$$x = \frac{\epsilon^2}{3}y, \tag{2.135}$$

tem-se que

$$z \sim \frac{\epsilon^{2n+2}}{\epsilon} \sim \epsilon^{2n+1}. \tag{2.136}$$

Com o objetivo de mostrar que através da equação (2.124) podemos obter infinitas quantidades de movimento, vamos usar a equação (2.117) para definir a escala de dimensões das mesmas. Portanto

$$\begin{aligned} [u] &= 1 \\ [v] &= 1 \\ [x] &= -\frac{1}{2} \\ [\epsilon] &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.137}$$

Ao substituirmos a proposta de $v(x,t)$ feita em (2.124) na equação (2.117) vem que

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n v_n + i\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{n+1}(v_n)_x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{n+2}}{6} \sum_{m=0}^{n} v_{n-m}v_m \\ u &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n [v_n + i(v_{n-1})_x + \frac{1}{6}\sum_{m=0}^{n-2} \epsilon^n v_{n-m-2}v_m] \end{aligned}$$

assumindo que $v_{-1} = v_{-2} = 0$ concluimos que $u = v_0$ e consequentemente temos

$$v_n + i(v_x)_{n-1} + \frac{1}{6}\sum_{m=0}^{n-2} \epsilon^n v_{n-m-2}v_m \quad = \quad 0 \quad n > 0 \tag{2.138}$$

uma relação recursiva entre varias densidades que por sua vez, nos permite realizar construções das mesmas. Por exemplo, para n = 1 e n = 2 temos respectivamente

$$\begin{aligned} v_1 + i\frac{\partial v_0}{\partial x} &= 0 \\ v_1 &= -i\frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned} \tag{2.139}$$

$$\begin{aligned} v_2 + i\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{6}v_0^2 &= 0 \\ v_2 &= -\frac{1}{6}u^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{2.140}$$

Como já haviamos comentado ao analisarmos as equações (2.130) e (2.136), os termos pares de ϵ em v estarião associados a u e os impares à parte imaginária, que são derivadas. Precisamos agora mostrar que através de (2.138) podemos obter infinitas quantidades conservadas para a equação KdV. Podemos escrever ρ_0 e ρ_1 por meio das equações (2.139)e (2.140) já que:

$$\rho_0 = 3u \tag{2.141}$$

onde o fator 3 não muda o resultado obtido em (2.97). Dessa forma concluimos que

$$\rho_0 \quad = \quad 3v_0. \tag{2.142}$$

Para ρ_1 temos:

$$\rho_1 = \frac{1}{2}u^2. \tag{2.143}$$

De (2.140), vem que

$$v_2 = -(\frac{1}{6}u^2 + u_{xx}). \tag{2.144}$$

Dessa forma obtemos

$$\rho_1 = -3v_2 = \frac{1}{2}u^2 + derivadas. \tag{2.145}$$

$$\rho_2 = 3v_4 = \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{2.146}$$

Vale lembrar da equação (2.126) que as derivadas não contribuem para escrever as quantidades conservadas. O processo realizado para ρ_0 e ρ_1 pode ser feito para ρ_n, logo

$$\rho_n = 3(-1)^n v_{2n}, \tag{2.147}$$

nos levando à

$$H_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\rho_n = 3(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx v_{2n}. \tag{2.148}$$

Fazendo

$$m' = \frac{n}{2}$$

temos

$$\begin{aligned} H_{m'} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\rho_{m'} &= 3(-1)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx v_n \\ &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} dx v_n. \end{aligned} \tag{2.149}$$

Dessa forma, pela definição de K obtemos

$$\begin{aligned} K &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\rho[v(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx v(x,t) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dx\epsilon^n v_n[u(x,t)] \\ &= \sum_n \mu^{-1}\epsilon^n H_{m'} \end{aligned} \tag{2.150}$$

O comportamento das escalas das n constantes de movimento podem ser calculado como segue. Definindo

$$[\frac{\partial}{\partial x}] = \frac{1}{2} \tag{2.151}$$

e das equações (2.138), (2.139) e (2.140) vem que

$$[u] = [v_0] = 1$$

$$[v_1] = \frac{1}{2} + 1 = [v_0] + \frac{1}{2}$$

$$[v_2] = 2 = [v_1] + \frac{1}{2}$$

ou de outra maneira

$$[u] = [v_0] = \frac{0}{2} + 1$$

$$[v_1] = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$$

$$[v_2] = 2 = \frac{2}{2} + 1.$$

Dessa forma podemos concluir que

$$[v_n] = [v_{n-1}] + \frac{1}{2} \tag{2.152}$$

$$[v_n] = \frac{n}{2} + 1. \tag{2.153}$$

Portanto para as densidades fica

$$[\rho_n] = [v_{2n}] = n + 1 \tag{2.154}$$

pois

$$\rho_n \sim v_{2n}. \tag{2.155}$$

Sendo assim claramente existem infinitas constantes de movimento e como cada constante está associada a uma escala distinta fica evidente que elas são independentes. Nos falta mostrar que essas constantes estão em involução, para isso é interessante notar que as quantidades conservadas

$$H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x,t) \tag{2.156}$$

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} u^2(x,t) \tag{2.157}$$

$$H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Big(\frac{1}{3!} u^3 - \frac{1}{2} u_x^2 \Big) \tag{2.158}$$

$$\vdots$$

$$H_n \qquad para \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.159}$$

satisfazem a relação

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right)\frac{\delta H_{-1}}{\delta u(x)} = D\frac{\delta H_0}{\delta u(x)}, \quad D = D_x = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.160}$$

Assumindo que $H_{-1} = 0$, logicamente temos

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right)\frac{\delta H_{-1}}{\delta u(x)} = 0 \tag{2.161}$$

e

$$D\frac{\delta H_0}{\delta u(x)} = D_x(1) = 0. \tag{2.162}$$

Note que o mesmo ocorre para H_0 e H_1

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right)\frac{\delta H_0}{\delta u(x)} = D\frac{\delta H_1}{\delta u(x)}, \tag{2.163}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right)\frac{\delta H_0}{\delta u(x)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\left(D_x^3 + \frac{1}{3}(D_x u + u_x D_x)\right)3\delta(x-y) \\
&= 3D_x\int_{-\infty}^{\infty} dy\delta(x-y) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} dy[(D_x u(x)\delta(x-y) + 2u(x)D_x\delta(x-y))] \\
&= 3D_x(1) + D_x u(x)\int_{-\infty}^{\infty} dy\delta(x-y) \\
&+ 2u(x)D_x\int_{-\infty}^{\infty} dy\delta(x-y) \\
&= D_x u(x)(1) + 2u(x)D_x(1) \\
&= D_x u(x) \\
&= u_x.
\end{aligned} \tag{2.164}$$

De outra forma, temos que

$$D\frac{\delta H_1}{\delta u(x)} = D_x u(x). \tag{2.165}$$

Como conseguimos obter êxito para H_{-1} e H_0 isso nos permite conjecturar que vale para todo n,

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right)\frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} = D\frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \qquad n = 0, 1, 2, ... \quad . \tag{2.166}$$

Esses resultados indicam que todas as constantes de movimento obedecem a relação funcional acima. Das equações (2.123) e (2.150) segue que

$$\frac{dH_m}{dt} = 0. \tag{2.167}$$

Pelas equações (2.83), (2.86), (2.90) e (2.104) a evolução temporal de uma constante de movimento pode ser dada por

$$\frac{dH_m}{dt} = \{H_m, H_2\}_1 \tag{2.168}$$

ou

$$\frac{dH_m}{dt} = \{H_m, H_1\}_2. \tag{2.169}$$

Portanto[15]

$$\begin{aligned}
\frac{dH_m}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta H_m}{\delta u(x)}\Big(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x) + u(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)\delta(x-y)\frac{\delta H_1}{\delta u(y)}u(x) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx\Big(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x) + u(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)\delta(x-y)\frac{\delta H_m}{u(x)}u(x). \qquad (2.170)
\end{aligned}$$

As quantidades conservadas são funcionais. Logo suas derivadas funcionais dependem de u e das derivadas de u. Olhando a equação (2.170) percebemos que o resultado da integral dependerá de u e das derivadas de u. Isso irá ocorrer devido a propriedade da função delta. Portanto a equação (2.170) será nula, pois u e suas derivadas são nulas para x $= \mp \infty$, o que ratifica o resultado da equação (2.167). Nos resta mostrar que as quanidades conservadas estão em involução. Sendo assim

$$\begin{aligned}
\{H_n, H_m\}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} D_x \delta(x-y) \frac{\delta H_m}{\delta u(y)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} D_x \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx D_x \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx \Big(D_x^3 + \frac{1}{3}\Big(D_x u + u D_x\Big)\Big) \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} \Big(D_x^3 + \frac{1}{3}\Big(D_x u + u D_x\Big)\Big) \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} D_x \frac{\delta H_{m+1}}{\delta u(x)} \\
&= \{H_{n-1}, H_{m+1}\}_1. \qquad (2.171)
\end{aligned}$$

[15] Os cáculos referentes as integrais das equações (2.170) e (2.171), encontran-se no apêndice A.

Então pelas equações (2.167), (2.168) e (2.171) temos

$$\{H_{m+1}, H_1\}_1 = \{H_m, H_2\}_1 = 0$$

$$\{H_m, H_2\}_1 = \{H_{m-1}, H_3\}_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\{H_2, H_m\}_1 = \{H_1, H_{m+1}\}_1 = 0.$$

E por um processo de recorrência, conclui-se que

$$\{H_n, H_m\}_1 = \{H_{n-1}, H_{m+1}\}_1 = 0, \tag{2.172}$$

ou de outra forma

$$\{H_n, H_m\}_1 = \{H_m, H_n\}_1 = 0. \tag{2.173}$$

Portanto mostramos que todas as quantidades estão em involução e além disso são independentes. Isto prova , pelo teorema de Liouville, que a equação KdV é integrável.

2.5 Método de Lax

Existem conhecidos métodos para resolver equações diferenciais lineares para um dado conjunto de condições iniciais. Um exemplo é a transformada de Fourier que troca uma equação diferencial por uma equação algébrica que é resolvida facilmente. Agora se a equação diferencial for não-linear, como a equação KdV, qual procedimento deve ser realizado para que possamos obter as soluções de tal equação diferencial não-linear? Nesse sentido é que vamos procurar entender como uma equação linear surge para a evolução de uma dada equação não-linear e como encontrar a equação linear apropriada para essa equação não-linear. Para entender esse procedimento precisamos conhecer o método chamado par de Lax.

Equação de Riccati e Equação de Schrödinger

Na seção anterior escrevemos a equação KdV como um sistema Hamiltoniano. Através de uma generalização da equação de Riccati vamos obter uma equação diferencial com a estrutura da equação de Schrödinger. Seja então

$$u(x,t) = v^2(x,t) + i\sqrt{6}v_x(x,t) \tag{2.174}$$

ao substituirmos em

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \tag{2.175}$$

obtemos

$$v_t = v^2 v_x + v_{xxx}. \tag{2.176}$$

Definindo

$$u(x,t) + 6\lambda = v^2(x,t) + i\sqrt{6}v_x(x,t) \tag{2.177}$$

como outro caso da equação de Riccati para equação KdV e substituindo novamente em

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \tag{2.178}$$

vem que

$$\begin{aligned}
2vv_t + i\sqrt{6}v_{xt} &= -12\lambda vv_x - i\lambda 6\sqrt{6}v_{xx} + 2v^3 + i\sqrt{6}v^2 v_{xx} + i2\sqrt{6}vv_x v_x \\
&+ 2vv_{xxx} + i\sqrt{6}v_{xxxx} \\
v_t &= \frac{i\sqrt{6}}{2v}[-6\lambda v_{xx} + (v_t - v^2 v_x - v_{xxx})_x] - 6\lambda vv_x + v^2 v_x + v_{xxx} \\
v_t - (v^2 - 6\lambda)v_x - v_{xxx} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.179}$$

Nós já sabemos que a solução da equação MKdV fornece a solução da equação KdV. Definindo

$$v(x,t) = i\sqrt{6}\frac{\psi_x}{\psi} \tag{2.180}$$

a equação (2.177) fica

$$\begin{aligned}
u(x,t) + 6\lambda &= -6\frac{\psi_{xx}}{\psi^2} - 6\frac{\psi_x^2}{\psi^2} + 6\frac{\psi_x^2}{\psi^2} \\
\psi_{xx} + \left(\frac{1}{6}u(x,t) + \lambda\right)\psi &= 0,
\end{aligned} \tag{2.181}$$

que é a equação de Schrödinger independente do tempo. Em geral não é possível inverter a equação (2.177), porém se conhecermos ψ que satisfaz a equação acima podemos então inverter a equação (2.177). Desde que λ seja o autovalor da equação de Schrödinger o espectro é invariante ao parâmetro t, já que foi realizada uma transformação de Galileu. Da equação (2.180) podemos espressar ψ em função de v, tal que

$$\psi(x,t) = \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{6}}\int_{y_1}^{y_2} dxv(x,t)\right) \tag{2.182}$$

e assim obtermos

$$\psi_t = \psi\left(-\frac{i}{\sqrt{6}}\int_{y_1}^{y_2} dxv_t(x,t)\right). \tag{2.183}$$

A equação obtida em (2.179) pode ser escrita como

$$v_t = \left(\frac{1}{3}v^3 - 6\lambda v + v_{xx}\right)_x \tag{2.184}$$

que ao ser substituida em (2.183) fica

$$\psi_t = \psi\left(-\frac{i}{\sqrt{6}}\int_{y_1}^{y_2} dx \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{3}v^3 - 6\lambda v + v_{xx}\Big)\right) \tag{2.185}$$

consequentemente

$$\psi_t = \psi\left(-\frac{i}{\sqrt{6}}\Big(\frac{1}{3}v^3 - 6\lambda v + v_{xx}\Big)\right) \tag{2.186}$$

e pela definição de $v(x,t)$ temos

$$\psi_t + \frac{1}{6}u_x\psi + 4\lambda\psi_x - \frac{1}{3}u\psi_x = const.\psi, \tag{2.187}$$

a evolução temporal de ψ que satisfaz a equação de Schrödinger.

O Par de Lax

Dada uma evolução não-linear, estamos interessado em encontrar um operador linear cujos autovalores são constantes sobre a evolução não-linear. Por simplicidade vamos considerar uma evolução linear regida por um Hamiltoniano H independente do tempo, ou seja, queremos operadores em que o valor esperado não mudam com o passar do tempo. Portanto se A tem essas propriedades temos

$$U^\dagger(t)A(t)U(t) = A(0) \tag{2.188}$$

com

$$U(t) = \exp(-iHt) \tag{2.189}$$

diferenciando ambos lados da equação (2.188), vem que

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = i[A(t), H] = i\left(A(t)H - HA(t)\right) \tag{2.190}$$

isto é, o valor esperado de $A(t)$ é independente do tempo. Perceba que podemos escrever

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -iHU(t) = BU(t) \tag{2.191}$$

e

$$B = iH \tag{2.192}$$

um operador anti hermitiano. Vamos exigir o mesmo para uma evolução não-linear. Portanto, seja

$$L(u(x,t)) = L(t) \tag{2.193}$$

um operador linear em $u(x,t)$ com autovalores independentes do parâmetro t, dessa forma temos

$$U(t)^\dagger L(u(t)U(t) = L(0). \tag{2.194}$$

Diferenciando ambos os lados da equação acima vem que

$$\frac{\partial U(t)^\dagger}{\partial t} L(u(t)U(t) + U(t)^\dagger \frac{\partial L(t)}{\partial t} U(t) + U(t)^\dagger L(u(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t} = 0. \tag{2.195}$$

Apesar de não sabermos a forma de $U(t)$ continua sendo valido que

$$U(t)^\dagger U(t) = 1 \tag{2.196}$$

e diferenciando a equação (2.196) obtemos

$$\frac{\partial U(t)^\dagger}{\partial t} U(t) + U(t)^\dagger \frac{\partial U(t)}{\partial t} = 0. \tag{2.197}$$

E como antes temos

$$\frac{\partial U}{\partial t} = B(t)U(t), \tag{2.198}$$

onde novamente $B(t)$ é um operador anti hermitiano. Substituindo esse resultado na equação (2.195) vem que

$$\begin{aligned} -U(t)^\dagger B(t) L(u(t)U(t) + U(t)^\dagger \frac{\partial L(t)}{\partial t} U(t) + U(t)^\dagger L(u(t)B(t)U(t) &= 0 \\ -U(t)^\dagger [B(t), L(t)] U(t) + U(t)^\dagger \frac{\partial L(t)}{\partial t} U(t) &= 0 \\ \frac{\partial L(t)}{\partial t} &= [B(t), L(t)]. \end{aligned} \tag{2.199}$$

Portanto, assumindo que $L(t)$ tem um espectro invariante em relação ao tempo, temos que sua evolução temporal é similar ao caso linear. A diferença é que nesse caso não conhecemos a forma de $B(t)$. Então seja

$$L(t)\psi(t) = -\lambda\psi(t) \tag{2.200}$$

ψ deve estar unitariamente relacionada ao seu valor em $t = 0$. Isto é,

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) \tag{2.201}$$

a evolução temporal de ψ será

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \frac{\partial U(t)}{\partial t}\psi(0) = B(t)\psi. \tag{2.202}$$

Os operadores L(t) e B(t), quando existem, são conhecidos como método de Lax ou par de Lax correspondendo a evolução de uma dada equação diferencial não-linear e desempenha uma regra fundamental para determinar a solução da mesma.

Par de Lax e Equação KdV

Agora estamos interessado em encontrar os operadores que formam o par de Lax da equação KdV. Seja

$$\psi_{xx} + \left(\frac{1}{6}u(x,t) + \lambda\right)\psi = 0 \tag{2.203}$$

a equação de Schödinger independente do tempo com o potencial $u(x,t)$ que satisfaz $u_t = uux + u_{xxx}$ nos induzindo a definir

$$L(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}u(x,t) = D^2 + \frac{1}{6}u(x,t)$$

e consequentemente

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = \frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Logo, de acordo com a definção de $L(t)$ temos que

$$[B(t), L(t)] = \frac{\partial L(t)}{\partial t} = \frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.204}$$

Analisando a equação (2.204) podemos propor diferentes formas para $B(t)$. A primeira delas é:

$$B \;=\; \sigma D, \quad D = \frac{\partial}{\partial x}.$$

onde σ é uma constante. Porém, deve-se notar que a escala de $\frac{\partial u}{\partial x}$ é $\frac{3}{2}$ equanto a escala de D é $\frac{1}{2}$. A próxima forma para $B(t)$ seria

$$B \;=\; a_3D^3 + a_1(Du + uD),$$

onde a_1 e a_3 são constantes. Essa proposta para $B(t)$ parece ter a forma adequada do ponto de vista da escala de $\frac{\partial u}{\partial x}$, já que $[D^3] = \frac{3}{2}$ e $[(Du + uD)] = \frac{3}{2}$. Então, vamos assumir que

$$[B(t), L(t)] = \frac{\partial L(t)}{\partial t},$$

onde

$$\begin{aligned} L &= D^2 + \frac{1}{6}u \\ B &= a_3D^3 + a_1(Du + uD) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}[B, L]\varphi = &\underbrace{\left(a_3D^3 + a_1(Du + uD)\right)\left(D^2 + \frac{1}{6}u\right)\varphi}_{d_1} \\ &-\underbrace{\left(D^2 + \frac{1}{6}u\right)\left(a_3D^3 + a_1(Du + uD)\right)\varphi}_{d_2}.\end{aligned}$$

Para verificar se nossa proposta descreve a evolução temporal de $u(x,t)$, precisamos escrever $d_1 - d_2$ de uma maneira mais explícita. Portanto, de maneira mais explícita d_1 fica

$$\begin{aligned}
d_1 &= a_3\left\{D^5(\varphi)+\frac{1}{6}D^3(u\varphi)\right\}+a_1\left\{D(u\varphi_{xx})+\frac{1}{6}D(u^2\varphi)\right\}\\
&+ a_1\left\{u\varphi_{xxx}+\frac{1}{6}uD(u\varphi)\right\}\\
&= a_3\left\{D^5(\varphi)+\frac{1}{6}u_{xxx}\varphi+\frac{3}{6}u_{xx}\varphi_x+\frac{3}{6}u_x\varphi_{xx}+\frac{1}{6}u\varphi_{xxx}\right\}+a_1\left\{u_x\varphi_{xx}+u\varphi_{xxx}\right\}\\
&+ a_1\left\{\frac{2}{6}uu_x\varphi+\frac{1}{6}u^2\varphi_x+u\varphi_{xxx}+\frac{1}{6}u^2\varphi_x+\frac{1}{6}uu_x\varphi\right\}\\
&= a_3D^5(\varphi)+a_3\frac{1}{6}u_{xxx}\varphi+a_3\frac{3}{6}u_{xx}\varphi_x+\left(a_3\frac{3}{6}+a_1\right)u\varphi_{xxx}+\left(a_3\frac{3}{6}+a_1\right)u_x\varphi_{xx}\\
&+ a_1\frac{2}{6}u^2\varphi_x+a_1\frac{3}{6}uu_x\varphi,
\end{aligned}$$

equanto que para d_2, tem-se

$$\begin{aligned}
d_2 &= a_3\left\{D^5(\varphi)+\frac{1}{6}u\varphi_{xxx}\right\}+a_1\left\{2u\varphi_{xxx}+4u_{xx}\varphi_x+5u_x\varphi_{xx}+u_{xxx}\varphi+\frac{2}{6}u^2\varphi x\right\}\\
&+ \left\{\frac{1}{6}uu_x\varphi\right\}\\
&= a_3D^5(\varphi)+\left(a_3\frac{1}{6}+2a_1\right)u\varphi_{xxx}+5a_1u_x\varphi_{xx}+4a_1u_{xx}\varphi_x+a_1u_{xxx}\varphi+a_3\frac{1}{6}u\varphi xxx\\
&+ a_1\frac{2}{6}u^2\varphi_x+a_1\frac{1}{6}uu_x\varphi. \qquad (2.205)
\end{aligned}$$

Logo,

$$d_1-d_2 = \left(\frac{a_3}{6}-a_1\right)u_{xxx}\varphi+\frac{a_1}{3}uu_x\varphi+\left(\frac{a_3}{2}-4a_1\right)(u_{xx}\varphi x+u_x\varphi_{xx}). \qquad (2.206)$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
[B,L]\varphi &= \left(\frac{a_3}{6}-a_1\right)D^3\varphi+\frac{a_1}{3}uD(u)\varphi+\left(\frac{a_3}{2}-4a_1\right)(D^2(u)D+D(u)D^2)\varphi\\
[B,L] &= \left(\frac{a_3}{6}-a_1\right)D^3+\frac{a_1}{3}uD(u)+\left(\frac{a_3}{2}-4a_1\right)(D^2(u)D+D(u)D^2).
\end{aligned}$$

As constantes a_1 e a_3 deve satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{a_3}{2}-4a_1 = 0 \qquad (2.207)$$

ou

$$a_3 = 8a_1, \qquad (2.208)$$

para que $B(t)$ forme o par de Lax da equação KdV com $L(t)$, pois dessa forma

$$[B,L] \;=\; (u(Du)+(D^3u)).$$

Então, ao escolhermos $a_1=\frac{1}{2}$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t} &= [B,L] \\
\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{6}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \qquad (2.209)
\end{aligned}$$

Portanto o par de Lax para equação KdV é:

$$L(t) \;=\; D^2+\frac{1}{6}u \qquad (2.210)$$

$$B(t) \;=\; 4D^3+\frac{1}{2}(Du+uD). \qquad (2.211)$$

Para ratificar que nossa proposta é verdadeira, de acordo com a equação (2.202), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} &= B\psi \\
\psi_t &= -\frac{1}{6}u_x\psi-4\lambda\psi_x+\frac{1}{3}u\psi_x+const.\psi \\
&= -\frac{1}{6}u_x\psi 4\psi_{xxx}+\frac{2}{3}(u\psi_x+\psi u_x)+\frac{1}{3}u\psi_x+const.\psi \\
\psi_t &= (4D^3+\frac{1}{2}(Du+uD)+const)\psi,
\end{aligned}$$

sendo que a constante não muda o comutador entre B e L. Assim

$$B=4D^3+\frac{1}{2}(Du+uD). \qquad (2.212)$$

Portanto, de acordo com o proposto conseguimos relacionar a evolução temporal de uma equação não-linear com a evolução temporal de uma equação linear. Da equação (2.180) vemos que se obtermos ψ teremos $v(x,t)$ e consequentemente lograremos $u(x,t)$ através da equação de Riccati. Perceba que ψ é solução da equação diferencial linear, que em geral é simples de ser obtida. Então, ao conseguirmos exibir o par de Lax implica em obter $v(x,t)$ e $u(x,t)$. Agora, no próximo capítulo iremos dissertar a respeito de teorias não-comutativas e analisar quais são as consequências da não-comutatividade a nível clássico.

3

Teorias Não-Comutativas

3.1 Introdução

Não-comutatividade pode ser observada em simples rotações espaciais ou até no problema de Landau, onde momento linear não comuta na presença de campo magnético. Porém não são essas as principais motivações que tem levado muitos pesquisadores a estudarem esse assunto. Sobretudo nos últimos anos [40], muitas propostas foram feitas, mas a que sobreviveu e ainda não tem qualquer comprovação experimental é a teoria de cordas. É justamente nesse contexto (teorias de corda), no limite de baixas energias na presença de campos magnéticos, que surgem teorias de campos não-comutativas [1]. Deve-se notar porém que há razões que tornam as teorias não-comutativas pouco viáveis ou úteis, pois a não-comutatividade pode ser expressa como

$$[x_i, x^j] = \theta_{ij}, \tag{3.1}$$

onde θ tem dimensão $[L^2]$, postulando assim uma incerteza na posição que implica em uma teoria não local com todas as complicações que isso pode trazer. Além disso, da equação (3.1) podem surgir conflitos em relação a invariância de Lorentz.

Em contra partida talvez a não-comutatividade melhore algumas características de teorias de renormalização e na perspectiva de unir gravitação e teoria quântica existe uma expectativa de que o espaço-tempo deve ter sua natureza alterada em distâncias na escala de Planck apresentando assim uma incerteza que impede precisões melhores que o comprimento de Planck e isso poderia ser descrito pela equação (3.1). Por isso muitas formulações da Mecânica Quântica nesse tipo de espaços têm sido consideradas por vários autores [7, 8], interessados principalmente pelas possíveis consequências fenomenológicas. Além de extensões não-comutativas da Mecânica Quântica, também tem sido realizadas extensões de teorias de campo não-comutativas [34, 35]. Essas extensões são feitas substituindo o produto usual do espaço de funções suaves sobre o $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (x,t) pelo produto associativo não-comutativo chamado Moyal ($*$). A realização dessa extensão através da ação para sine-Gordon quebra a integrabilidade do sistema, porém para o modelo quiral principal não há problema algum [4].

Desde que geometrias não-comutativas começaram a ser considerados no contexto da teoria cordas [1] e em teorias de campo em geral [2], a não-comutatividade tem sido geralmente considerada apenas no espaço entre as coordenadas, para evitar problemas de unitáriedade e causalidade [3]. Por outro lado para o caso particular da não-comutatividade bidimensional de teorias campo introduzir o tempo como uma coordenada não-comutativa é obrigatório [4, 6]. Na formulação da Mecânica Quântica sobre estes espaços não-comutativos também é considerado que as coordenadas do espaço de uma única partícula não comutam [7], [8], [9], [10] e [11]. Dessa maneira, uma formulação da Mecânica Quântica Não-Comutativa com apenas uma dimensão espacial, não é possível ou implicaria no tempo como uma coordenada não-comutativa.

Porém existe uma forma alternativa de incluir os efeitos não-comutativos em teorias de campo: baseia-se na consideração da não-comutatividade entre os graus de liberdade [12, 13]; por exemplo, na Mecânica Quântica Não-Comutativa as coordenadas de uma partícula, que são os graus de liberdade do sistema não comutam. Então, se o conceito de não-comutatividade entre os graus de liberdade for estendido para a teoria quântica de campo, talvez a forma mais natural de introduzir a não-comutatividade seria a de considerar que os campos em cada ponto do espaço não comutam ao invés da noção de não-comutatividade usual de campos [12].

A situação intermediária entre teorias de campos não-comutativas e Mecânica Quântica Não-Comutativa de uma partícula, e portanto Mecânica Quântica de multipartículas, não foi profundamente estudada até agora. Embora se considere geralmente que as coordenadas de diferentes partículas comutam [10], não existe qualquer limitação conceitual matemática ou física, no cenário não relativistico, para implementar a não-comutatividade entre as coordenadas de diferentes partículas [14] . Neste sentido, aplicar o conceito de não-comutatividade entre os graus de liberdade para sistemas discretos com N partículas seria uma razoável consideração.

Por outro lado, a Mecânica Clássica é visto como uma situação limite da Mecânica Quântica , portanto é um assunto interessante investigar as modificações da habitual Mecânica Clássica no limite da Mecânica Quântica Não-Comutativa [15, 17]. A aplicação do limite clássico , mostrou-se não Newtoniana. Assim, neste capítulo vamos mostrar de forma minuciosa o teorema de Ehrenfest[1] no contexto da Mecânica Quântica Não-Comutativa, e, nós vamos ver que o mesmo nos leva à segunda lei de Newton deformada.

3.2 O Limite Clássico da Mecânica Quântica Não-Comutativa

Como foi mencionado vamos investigar o limite clássico do teorema de Ehrenfest que nos afirma que o valor esperado de operadores quânticos seguem uma equação de movimento clássico. Nós veremos que as equações de movimento dos valores esperados dos operadores da Mecânica Quântica Não-Comutativa não são Newtonianas e coincidem com as equações obtidas em [15, 16, 17]. Vamos considerar uma partícula movendo em n-dimensões dentro do contexto da Mecânica Quântica Não-Comutativa com o tempo

[1] A demonstração do teorema de Ehrenfest, encontra-se na seguinte referência: A.S.Davydov, Quantum Mechanics, Pergamon Press Ltd **2nd Edition** (1976)

comutando com as coordenadas. Este sistema é descrito pelas coordenadas canônicas

$$(\hat{x}_i, \hat{p}_i) \tag{3.2}$$

que obdecem a relação de comutação[2]

$$\begin{aligned}
[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] &= i\theta_{ij} && (3.3)\\
[\tilde{x}_i, \tilde{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij} && (3.4)\\
[\tilde{p}_i, \tilde{p}_j] &= 0. && (3.5)
\end{aligned}$$

com θ_{ij} sendo um tensor antisimétrico de dimensão $[L^2]$. Vamos considerar para tais sistemas o espaço de Hilbert usual da Mecânica Quântica [7]. Nesse sentido a evolução dinânmica do estado $|\psi\rangle$ é dada pela usual equação de Schr$\ddot{o}$dinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \tag{3.6}$$

onde o Hamiltoniano é definido como

$$H = \frac{\hat{p}\hat{p}}{2m} + V(\hat{x}) \tag{3.7}$$

onde $\hat{p}$ é o operador momento e $V(\hat{x})$ é o operador potencial. O Hamiltoniano dependerá de coordenadas que respeitam as equações (3.3), (3.4) e (3.5). È possível definir um novo sistema

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_i &= \hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\hat{p}_j && (3.8)\\
\tilde{p}_i &= \hat{p}_i && (3.9)
\end{aligned}$$

sendo que esse novo sistema de coordenadas satisfaz as relações usuais de comutações

$$\begin{aligned}
[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] &= 0 && (3.10)\\
[\tilde{x}_i, \tilde{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij} && (3.11)\\
[\tilde{p}_i, \tilde{p}_j] &= 0. && (3.12)
\end{aligned}$$

Portando o Hamiltoniano nesse novo sistema de coordenadas será

$$H = \frac{\hat{p}\hat{p}}{2m} + V(\hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\hat{p}_j). \tag{3.13}$$

Se considerarmos que o parâmetro não-comutativo é pequeno, o potencial pode ser expandido em torno de $\tilde{x}_i$ e portanto

$$\begin{aligned}
V &= V(\tilde{x}_i) + V'(\hat{x}_i - \tilde{x}_i) + O(\theta^2) + ...\\
V &= V(\tilde{x}_i) + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i}((\tilde{x}_i - \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\hat{p}_j) - \tilde{x}_i) + O(\theta^2) + ...\\
V &= V(\tilde{x}_i) - \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\hat{p}_j\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i} + O(\theta^2) + ...
\end{aligned}$$

[2] O comutador dos operadores A e B, defini-se como: [A,B] = AB - BA.

Considerando a expansão até a primeira ordem, temos

$$V = V(\tilde{x}_i) - \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\hat{p}_j\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i}. \tag{3.14}$$

Agora nós vamos averiguar como o teorema de Ehrenfest se comporta nesse contexto. Vamos admitir ainda que podemos usar a forma habitual do valor médio uma vez que o parâmetro de não-comutatividade entra como um termo perturbativo. Sendo assim, pelo teorema de Ehrenfest, a média da evolução temporal de um operador Ω é dada por

$$\langle\frac{d\Omega}{dt}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H,\Omega]\rangle + \frac{\partial\Omega}{\partial t}. \tag{3.15}$$

Usando a equação (3.15), vem que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\tilde{x}_i\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle[H,\tilde{x}_i]\rangle \qquad (3.16)\\ \frac{d}{dt}\langle\tilde{p}_i\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle[H,\tilde{p}_i],\rangle \qquad (3.17) \end{aligned}$$

onde consideramos que os operadores $\tilde{x}_i$ e $\tilde{p}_i$ não dependem do tempo. Para $\tilde{x}_i$ temos que[3]

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar}\langle[H,\tilde{x}_i]\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle[\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V(\hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\hat{p}_j),\tilde{x}_i]\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\langle[\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V(\tilde{x}_i) - \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\hat{p}_j\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i},\tilde{x}_i]\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\langle([V(\tilde{x}_i),\tilde{x}_i] - \frac{1}{2}\theta_{ij}\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i}[\tilde{p}_j,\tilde{x}_i] + \frac{1}{2m}[\tilde{p}_i^2,\tilde{x}_i])\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\langle(\underbrace{[V(\tilde{x}_i),\tilde{x}_i]}_{0}) - \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i}\underbrace{[\tilde{p}_j,\tilde{x}_i]}_{-i\hbar} + \frac{1}{2m}([\tilde{p}_i,\tilde{x}_i]\tilde{p}_i + \tilde{p}_i[\tilde{p}_i,\tilde{x}_i])\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i}(-i\hbar) + \frac{1}{2m}(-2i\hbar\tilde{p}_i)\right) \\ &= \frac{1}{m}\langle\tilde{p}_i\rangle - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar}\langle\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i}\rangle. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\frac{d}{dt}\langle\tilde{x}_i\rangle = \frac{1}{m}\langle\tilde{p}_i\rangle - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar}\langle\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i}\rangle \tag{3.18}$$

[3] Algumas propriedades algébricas do comutador dos operadores A e B.
$[A+\alpha B,C]$ = [A,C] + α[B,C]
$[AB,C]$ = A[B,C] + [A,C]B

já para $\tilde{p_i}$ temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{\hbar}\langle[H,\tilde{p_i}]\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle[\frac{\hat{p}_i^2}{2m}+V(\hat{x_k}+\frac{1}{2\hbar}\theta_{kj}\hat{p_j}),\tilde{p_i}]\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle\frac{1}{2m}[\tilde{p^2}_i,\tilde{p}_i]-\frac{1}{2\hbar}\theta_{kj}[\tilde{p}_j\frac{\partial V}{\partial\tilde{x_k}},\tilde{p}_i]+[V(\tilde{x_k}),\tilde{p}_i]\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle\frac{1}{2m}\underbrace{[\tilde{p^2}_i,\tilde{p}_i]}_{0}-\frac{1}{2\hbar}\theta_{kj}\left([\tilde{p}_i,\tilde{p}_j]\frac{\partial V}{\partial\tilde{x_k}}+\tilde{p}_j[\frac{\partial V}{\partial\tilde{x_k}},\tilde{p}_i]\right)+\underbrace{[V(\tilde{x_k}),\tilde{p}_i]}_{i\hbar\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i}}\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\left(-\frac{i\hbar}{2\hbar}\theta_{kj}\langle\tilde{p}_j\frac{\partial^2 V}{\partial\tilde{x_k}\partial\tilde{x}_i}\rangle+i\hbar\langle\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i}\rangle\right) \\
&= -\langle\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i}\rangle+\frac{\theta_{kj}}{2\hbar}\langle\tilde{p}_j\frac{\partial^2 V}{\partial\tilde{x_k}\partial\tilde{x}_i}\rangle
\end{aligned}
$$

dessa forma logramos

$$
\frac{d}{dt}\langle\tilde{p_i}\rangle=-\langle\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}_i}\rangle+\frac{\theta_{ij}}{2\hbar}\langle\tilde{p}_j\frac{\partial^2 V}{\partial\tilde{x_k}\partial\tilde{x}_i}\rangle. \tag{3.19}
$$

As equações (3.19), (3.18) são as relações correspondente ao teorema de Ehrenfest para primeira ordem de θ e mostram que devem seguir para equações classicas dentro do contexto da mecânica Newtoniana deformada. De fato o limite clássico existirá somente se o parâmetro não-comutativo for para zero mais rápido do que $\hbar \longrightarrow 0$, e somente para $\frac{\theta_{ij}}{\hbar} \longrightarrow 0$ quando $\theta_{ij} \longrightarrow 0$ esse limite conduzirá a mecânica Newtoniana. As equações abaixo

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x_i &= \frac{p_i}{m}-\tilde{\theta}_{ji}\frac{\partial V}{\partial x_j} && (3.20)\\
\frac{d}{dt}p_i &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} && (3.21)
\end{aligned}
$$

foram obtidas em [16] admitindo que

$$
\begin{aligned}
\{x_i,x_j\} &= i\tilde{\theta}_{ij} && (3.22)\\
\{x_i,p_j\} &= \delta_{ij} && (3.23)\\
\{p_i,p_j\} &= 0. && (3.24)
\end{aligned}
$$

Agora vamos realizar uma mudança de variável no contexto clássico semelhante a feita no contexto quântico. Portanto $\tilde{x}_i = x_i + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}p_j, \quad \tilde{p}_i = p_i$ tal que

$$
\begin{aligned}
\{x_i,x_j\} &= 0 && (3.25)\\
\{x_i,p_j\} &= \delta_{ij} && (3.26)\\
\{p_i,p_j\} &= 0, && (3.27)
\end{aligned}
$$

ou seja, as variáveis satisfazem as relações usuais dos colchetes de Poisson. Consequentemente as equações de movimento são dadas por

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{x}_i &= \{\tilde{x}_i,H\} && (3.28)\\
\frac{d}{dt}\tilde{p}_i &= \{\tilde{p}_i,H\}. && (3.29)
\end{aligned}
$$

Vamos admitir que a Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \frac{\tilde{p}\tilde{p}}{2m} + V(\tilde{x}_i - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}\tilde{p}_j), \tag{3.30}$$

nesse sentido, o potencial, até a primeira ordem de $\tilde{\theta}$, pode ser expresso como

$$V = V(\tilde{x}_i) - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}\tilde{p}_j\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i}. \tag{3.31}$$

Então os colchetes de Poisson[4] para $\tilde{x}_i$ e $\tilde{p}_i$ ficam

$$\begin{aligned}
\{H, \tilde{x}_i\} &= \{\frac{\tilde{p}_i^2}{2m} + V(\tilde{x}_i + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}\hat{p}_j), \tilde{x}_i\} \\
&= \{\frac{\tilde{p}_i^2}{2m} + V(\tilde{x}_i) - \tilde{\theta}_{ij}\tilde{p}_j\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i}, \tilde{x}_i\} \\
&= \{V(\tilde{x}_i), \tilde{x}_i\} - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i}\{\tilde{p}_j, \tilde{x}_i\} - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}\tilde{p}_j\underbrace{\{\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i}, \tilde{x}_i\}}_{0} + \frac{1}{2m}\{\tilde{p}_i^2, \tilde{x}_i\} \\
&= (\underbrace{\{V(\tilde{x}_i), \tilde{x}_i\}}_{0}) - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_j}\underbrace{\{\tilde{p}_j, \tilde{x}_i\}}_{\delta_{ij}} + \frac{1}{2m}\left(\{\tilde{p}_i, \tilde{x}_i\}\tilde{p}_i + \tilde{p}_i\{\tilde{p}_i, \tilde{x}_i\}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{1}{2m}(2\tilde{p}_i) \\
&= \frac{1}{m}\tilde{p}_i - \frac{\tilde{\theta}_{ij}}{2}\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_j}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
\{H, \tilde{p}_i\} &= \{\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V(\tilde{x}_k + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{kj}\tilde{p}_j), \tilde{p}_i\} \\
&= \frac{1}{2m}\{\tilde{p^2}_i, \tilde{p}_i\} - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{kj}\{\tilde{p}_j\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_k}, \tilde{p}_i\} + \{V(\tilde{x}_k), \tilde{p}_i\} \\
&= \frac{1}{2m}\underbrace{\{\tilde{p^2}_i, \tilde{p}_i\}}_{0} - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{kj}\left(\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\}\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_k} + \tilde{p}_j\{\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_k}, \tilde{p}_i\}\right) + \underbrace{\{V(\tilde{x}_k), \tilde{p}_i\}}_{-\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i}} \\
&= \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{kj}\tilde{p}_j\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i} \\
&= -\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}\tilde{p}_j\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_i}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Dessa forma a evolução temporal das variáveis canônicas são

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}_i = \frac{\tilde{p}_i}{m} - \frac{\tilde{\theta}_{ji}}{2}\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_j} \tag{3.34}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\tilde{\theta}_{kj}}{2}\tilde{p}_j\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_i}. \tag{3.35}$$

[4]Foram usadas as propriedades algébricas dos colchetes de Poisson citadas no capítulo 2

A equivalência entre equações (3.19) e (3.35) pode ser provada tomando o limite clássico da Mecânica Quântica. Desde que o limite clássico da equação (3.19) exista, a princípio podemos tomar $\theta_{ij} = \hbar\tilde{\theta}_{ij}$ em (3.19). Além disso devemos assumir que a função de onda de nosso sistema seja diferente de zero somente em uma pequena região do espaço em torno do valor médio da coordenada, ou seja, que podemos expandir o potencial em torno do valor médio $\langle \tilde{x}_i \rangle = \bar{\tilde{x}}_i$. Seguindo esse caminho obteremos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{\tilde{x}}_i &= \frac{\bar{\tilde{p}}_i}{m} - \frac{\tilde{\theta}_{ji}}{2}\frac{\partial V}{\partial \bar{\tilde{x}}_j}, && (3.36)\\
\frac{d}{dt}\bar{\tilde{p}}_i &= -\frac{\partial V}{\partial \bar{\tilde{x}}_i} + \frac{\tilde{\theta}_{kj}}{2}\bar{\tilde{p}}_j\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\tilde{x}}_k \partial \bar{\tilde{x}}_i} && (3.37)
\end{aligned}
$$

que são relações anàlogas as equações (3.35), (3.34) para o valor médio de $\tilde{x}_i$, que são válidas a medida em que $|\frac{\partial V}{\partial \bar{\tilde{x}}_i}| \gg \frac{1}{2}|\frac{\partial^3 V}{\partial \bar{\tilde{x}}_k \bar{\tilde{x}}_j \bar{\tilde{x}}_i}| < \Delta\tilde{x}_j \Delta\tilde{x}_k >$. Essa inequação é valida quando o potencial muda suavemente com a coordenada $\tilde{x}_i$ e quando o desvio médio é pequeno. Porém pequenos valores para $\langle \Delta\tilde{x} \rangle$ implicam em uma considerável indeterminação no valor do momento. Por outro lado, para continuar mantendo idéias clássicas sobre o movimento de uma partícula é necessário considerar também que $< \frac{\tilde{p}_i^2}{2\mu} > \gg \frac{<(\Delta\tilde{p}_i)^2>}{2\mu}$. Essas condições são melhores satisfeitas quando a partícula está se movendo com grande momento e há uma suave variação do campo externo. Portanto numa situação como essa , o centro do pacote de onda se move classicamente regido pela segunda lei de Newton deformada, que é,

$$
m\frac{d^2}{dt^2}\bar{\hat{x}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \bar{\hat{x}}_i} + m\tilde{\theta}_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\hat{x}}_k \partial \bar{\hat{x}}_j}\frac{d}{dt}\bar{\hat{x}}_k \qquad (3.38)
$$

que é obtida da equação (3.37) depois de retornar para variável original de acordo com as equações (3.8), (3.9). È extraordinário que as equações (3.18), (3.19) coincidam com as equações de movimento obtidas em [15, 16, 17] usando uma proposta diferente. Perceba que para uma unica partícula se movendo em uma dimensão o termo não-comutativo não estará presente. Então, a fim de considerar modelos bidimensionais não-comutativos estaremos forçados a considerar a não-comutatividade da coordenada tempo. A formulação de uma teoria não-comutativa alternativa contem muitos aspectos interessantes a serem investigados, como por exemplo a descrição da evolução temporal de alguns modelos discretos através da segunda lei de Newton deformada. Justamente isso, será realizado no quarto capítulo.

4

Modelos Não-lineares da Não-Comutatividade

4.1 Introdução

Seguindo nosso estudo de uma teoria não-comutativa alternativa, investigamos alguns modelos discretos bidimensionais de muitas partículas incluindo a não-comutatividade em todos os graus de liberdade da teoria. O limite contínuo desses modelos, considerando a não-comutatividade entre todos os graus de liberdade da teoria, resultam em generalizações não-comutativas alternativas de teorias de campo bidimensionais.

4.2 Infinitas Correntes de Osciladores e a Segunda Lei de Newton Deformada

Seja um sistema com **N** partículas em um espaço com $(\mathbf{n}+1)$ dimensões. Nós podemos introduzir uma não-comutatividade geral entre todas as coordenadas sobre a configuração espacial como,

$$[x_i^I, x_j^J] = i\theta_{IJ}\delta_{ij} + i\Theta_{ij}g_{IJ} \tag{4.1}$$

onde I, J = 1,..., n e i, j = 1,..., N. O primeiro termo representa a usual não-comutatividade [7] e [8] entre as coordenadas da mesma partícula que nós chamaremos de não-comutatividade local e é representado por um tensor constante antissimétrico θ_{IJ}. O segundo termo representa a não-comutatividade entre as coordenadas de diferentes partículas que nós chamaremos de não-comutatividade não-local que é descrito por um tensor constante antissimétrico, também com dimensões $[L^2]$. Aqui g_{IJ} é uma matriz simétrica que estabelece entre quais coordenadas de diferentes partículas a não-comutatividade será considerada. Se apenas as coordenadas com a mesma direção não comutam $g_{IJ} = \delta_{IJ}$. Para a situação bidimensional, onde o tempo é uma coordenada que comuta, há obviamente uma dimensão espacial e, desta maneira, o primeiro termo da equação (4.1) não irá contribuir, levando a

$$[x_i, x_j] = i\hbar\tilde{\Theta}_{ij} \tag{4.2}$$

onde $g_{IJ} = \delta_{IJ} = 1$ e $\tilde{\Theta}_{ij} = \frac{\Theta_{ij}}{\hbar}$. Por razões óbvias a não-comutatividade não-local não estará presente em sistemas de uma partícula. Portanto, neste sentido a inclusão deste tipo de não-comutatividade não contradiz as habituais formulações de uma única partícula [7],[8]. No cenário não relativistico aparentemente não existe uma aparente restrição à não-comutatividade das posições físicas [14]. Na transição de sistemas de muitas partículas para teoria de campos, esta situação mais geral dá a possibilidade de introduzir a não-comutatividade num contexto bidimensional com a liberdade de considerar a possibilidade da coordenada tempo comutar. Além disso, anteriormente não-comutatividade não-local também tem sido considerada em outros cenários [20], [22].

A partir de agora, vamos investigar a forma como a evolução dinâmica de um sistema bidimensional (uma espacial) de osciladores é afetada quando os parênteses Poisson entre as coordenadas de diferentes partículas são diferentes de zero. Esta situação pode ser visto como o limite clássico de um sistema quântico de multipartículas onde existe a não-comutattividade não-local entre as coordenadas de diferentes partículas. Sobre o caso em apreço a interação dos potenciais podem ser harmônicas, cúbicas, quadraticas ou até mesmo exponenciais. Assim, as coordenadas de diferente partículas irão satisfazer o parêntes de Poisson expresso pelas equações (3.22), (3.23) e (3.24), tomando $\tilde{\Theta}_{ij}$ ao invés de $\tilde{\theta}_{ij}$. A evolução temporal desse sistema com N graus de liberdade [13] será dada pela segunda lei de Newton sobre o espaço não-comutativo expressa por

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + m\tilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\frac{dx_k}{dt}. \tag{4.3}$$

4.3 Equação da Onda Deformada

Inicialmente vamos considerar a simples situação da interação elástica que é dada por

$$V = \frac{1}{2}\sum_i [(x_{i+1} - x_i)^2] \tag{4.4}$$

onde nós vamos assumir que os pontos de massa podem somente se moverem ao longo do comprimento da corrente e temos denotado o deslocamento da i-ésima partícula por x_i. Como tentativa preliminar de introdução da não-comutatividade não-local nós iremos considerar somente as interações entre os primeiros vizinhos, então

$$\tilde{\Theta}_{ij} = \begin{cases} \Theta & \text{para} \quad j = i+1, \\ -\Theta & \text{para} \quad j = i-1, \\ 0 & \text{de outra forma.} \end{cases}, \tag{4.5}$$

sendo Θ um parâmetro constante e dessa forma a evolução temporal dessas coordenadas serão governadas pela equação (4.3). Então considerando apenas a interação entre os primeiros vizinhos para nosso potencial quadrático

$$V = \frac{k}{2}\{(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_i - x_{i-1})^2\} \tag{4.6}$$

a equação (4.3) fica

$$m\ddot{x}_i = -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\{(x_{i+1}-x_i)^2 + (x_i - x_{i-1})^2\} + m\tilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k}\dot{x}_k. \tag{4.7}$$

Por conviniência, vamos definir

$$\mathbf{c} = m\tilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k}\dot{x}_k \tag{4.8}$$

e simplificar o primeiro termo do lado esquerdo da equação (4.7). Então

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= -k\{(x_{i+1}-x_i)(-1) + (x_i - x_{i-1})(1)\} + \mathbf{c} \\ m\ddot{x}_i &= \quad k(x_{i+1} - x_i - x_i + x_{i-1}) + \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Os primeiros vizinhos da i-ésima partícula são x_{i-1} e x_{i+1}; portanto

$$\mathbf{c} = m\Theta_{i,i+1}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_{i+1}}\dot{x}_k + m\Theta_{i,i-1}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_{i-1}}\dot{x}_k \tag{4.9}$$

e para facilitar os cálculos, notemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x_{i+1}} = f_{i+1} = k(x_{i+2} - x_{i+1})(-1) + k(x_{i+1} - x_i)(1) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_{i-1}} = f_{i-1} = k(x_i - x_{i-1})(-1) + k(x_{i-1} - x_{i-2})(1). \tag{4.11}$$

Então $\mathbf{c}$ fica

$$\mathbf{c} = m\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\{f_{i+1}\}\dot{x}_k - \frac{\partial}{\partial x_k}\{f_{i+1}\}\dot{x}_k\right\}$$

e como os primeiros vizinhos de x_{i+1} e x_{i-1} são x_{i+2}, x_i, x_{i-2}, x_i respectivamente, $\mathbf{c}$, torna-se

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = m\Theta&\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\{f_{i+1}\}\dot{x}_{i+1} + \frac{\partial}{\partial x_i}\{f_{i+1}\}\dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}\{f_{i+1}\}\right\}\dot{x}_{i+2} \\ -m\Theta&\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i-2}}\{f_{i-1}\}\dot{x}_{i-2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\{f_{i-1}\}\dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}\{f_{i+1}\}\right\}\dot{x}_{i-1}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= mk\Theta\{\{((-1)(-1) + (1)(1))\}\dot{x}_{i+1} + \{((1)(-1) + (0)(1))\}\dot{x}_i \\ &+ \{((-1)(1) + (0)(1))\}\dot{x}_{i+2}\} - mk\Theta\{\{((0)(-1) + (-1)(1))\}\dot{x}_{i-2} \\ &+ \{((1)(-1) + (0)(1))\}\dot{x}_i + \{((-1)(-1) + (1)(1))\}\dot{x}_{i-1}\} \end{aligned}$$

e naturalmente chegamos a

$$\mathbf{c} = mk\Theta\{2\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_{i+2} + \dot{x}_{i-2}\}. \tag{4.12}$$

Então temos que

$$m\ddot{x}_i - k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) - m\Theta k(2\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_{i+2} + \dot{x}_{i-2}) = 0 \tag{4.13}$$

Aqui $\cdot$ representa a derivada temporal. Perceba que quando nós consideramos a interação para os primeiros vizinhos levando em conta a não-comutatividade temos também a influência dos segundos vizinhos na forma de termos dispersivos. Tendo um olhar mais atento a esta equação, é possível notar que ela também pode ser interpretada como a equação do movimento de uma partícula carregada em um espaço n-dimensional que executa pequenas oscilações na posição equilíbrio de tal modo que a expansão do potencial em série de Taylor na posição equilíbrio pode ser representada por
$V = K_{ij}x_ix_j$ com

$$K_{ij} = k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

submetidos à ação de um campo magnético constante n-dimensional $B_{ij} = \Theta(K_{i+1,j}$ - $K_{i-1,j})$ [22]. Neste sentido, a não-comutatividade conduz a um termo de correção que pode ser visto como uma interação adicional entre a partícula e o espaço, devido à existência de um campo externo. Se o potencial não estiver presente as partículas irão se comportar como livre. Assim, no caso dos efeitos perturbativos da não-comutatividade não-local entre as coordenadas será relacionado com a presença de uma interação potencial.

Algumas propriedades macroscópicas de sistemas discretos podem ser melhor investigadas no limite contínuo. Por isso, vamos ver como os efeitos não-comutativos irão aparecer na teoria de campo correspondente aplicando o limite contínuo. Mas, para fazer face a este limite, devemos ser cuidadosos. Se tomarmos o limite contínuo exato todos os vestígios discretos poderão ser perdidos. Por isso vamos considerar uma distância δ muito pequena entre as partículas , embora diferente de zero [24], e desta forma, podemos considerar as expansões de Taylor,

$$x_{i\pm1} \quad \rightarrow \quad \phi(x \pm \delta, t) = \phi(x,t) \pm \delta\partial_x\phi \pm \frac{\delta^2}{2}\partial_{xx}\phi \pm \frac{1}{3!}\delta^3\partial_{xxx}\phi + O(\delta^4) \tag{4.15}$$

$$x_{i\pm2} \quad \rightarrow \quad \phi(x \pm 2\delta, t) = \phi(x,t) \pm 2\delta\partial_x\phi \pm \frac{4\delta^4}{2}\partial_{xx}\phi \pm \frac{8}{3!}\delta^3\partial_{xxx}\phi + O(\delta^4). \tag{4.16}$$

Então vamos verificar como a equação (4.13) fica expandida até terceira ordem. Vamos definir

$$\widetilde{a} \;=\; m\ddot{x}_i \tag{4.17}$$

$$\widetilde{b} \;=\; k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \tag{4.18}$$

$$\widetilde{c} \;=\; m\Theta k(2\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_{i+2} + \dot{x}_{i-2}) \tag{4.19}$$

Portanto

$$\widetilde{a} = m\ddot{x}_i = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi) = m\phi_{tt}, \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{b} &= k\left\{(\phi + \delta\phi_x + \frac{\delta^2}{2}\phi_{xx} + \frac{\delta^3}{3!}\phi_{xxx}) - 2\phi + \phi(x) - \delta\phi_x + \frac{\delta^2}{2}\phi_{xx} - \frac{\delta^3}{3!}\phi_{xxx}\right\} \\
\widetilde{b} &= k\left\{2\phi - 2\phi + \delta\phi_x - \delta\phi_x + \frac{2\delta^2}{2}\phi_{xx} - \frac{\delta^3}{3!}\phi_{xxx} + \frac{\delta^3}{3!}\phi_{xxx}\right\} \\
\widetilde{b} &= \frac{2k\delta^2}{2}\phi_{xx}, \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{c} &= 2m\Theta k\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi + \delta\phi_x + \frac{\delta^2}{2}\phi_{xx} + \frac{\delta^3}{3!}\phi_{xxx}\right)\right\} \\
&- 2m\Theta k\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi - \delta\phi_x + \frac{\delta^2}{2}\phi_{xx} + -\frac{\delta^3}{3!}\phi_{xxx}\right)\right\} \\
&- m\Theta k\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_x + 2\delta\phi_x + \frac{4\delta^2}{2}\phi_{xx} + \frac{8}{3!}\delta^3\phi_{xxx}\right)\right\} \\
&+ m\Theta k\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi - 2\delta\phi_x + \frac{4\delta^2}{2}\phi_{xx} - \frac{8\delta^3}{3!}\phi_{xxx}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Continuando nosso cálculo, temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{c} &= m\Theta k\frac{\partial}{\partial t}\left(2\phi - 2\phi + \phi - \phi\right) \\
&+ m\Theta k\frac{\partial}{\partial t}\left(2\delta\phi_x + 2\delta\phi_x - 2\delta\phi_x - 2\delta\phi_x\right) \\
&+ m\Theta k\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\delta^2}{2}\phi_{xx} - \frac{2\delta^2}{2}\phi_{xx} - \frac{4\delta^2}{2}\phi_{xx} + \frac{4\delta^2}{2}\phi_{xx}\right) \\
&+ m\Theta k\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\delta^3}{3!}\phi_{xxx} + \frac{2\delta^3}{3!}\phi_{xxx} - \frac{8\delta^3}{3!}\phi_{xxx} - \frac{8\delta^3}{3!}\phi_{xxx}\right).
\end{aligned}$$

E finalmente

$$\widetilde{c} = m\Theta k\frac{\partial}{\partial t}(-2\delta^3\phi_{xxx}) = -2m\Theta k\delta^3\frac{\partial^4\phi}{\partial x^3\partial t}. \tag{4.22}$$

Logo a equação de movimento da interação quadrática no limite contínuo é

$$m\phi_{tt} - k\delta^2\phi_{xx} + 2km\Theta\delta^3\phi_{xxxt} = 0. \tag{4.23}$$

Redefinindo as variáveis como

$$t \to t\sqrt{\frac{Y}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m}{\delta}, \quad Y = k\delta, \quad [Y] = ML^{-1}T^{-2}, \quad [\mu] = ML^{-1} \tag{4.24}$$

onde verificamos que a nova de variável é admensional, pois

$$\sqrt{\frac{[Y]}{[\mu]}} = \sqrt{\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-1}}} = T^{-1} \tag{4.25}$$

e da mudança de variável, vem que

$$\frac{Y}{\mu}m\phi_{tt} - k\delta^2\phi_{xx} + 2\sqrt{\frac{Y}{\mu}}km\Theta\delta^3\phi_{xxxt} = 0$$

$$\phi_{tt} - \frac{k\delta^2}{m}\frac{\mu}{Y}\phi_{xx} + 2\frac{m}{m}\frac{\mu}{Y}k\sqrt{\frac{Y}{\mu}}\Theta\delta^3\phi_{xxxt} = 0$$

$$\phi_{tt} - \frac{k\delta}{Y}\frac{\delta}{m}\mu\phi_{xx} + 2\Theta\sqrt{\mu Y}\frac{k\delta}{Y}\delta^2\phi_{xxxt} = 0$$

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + 2\Theta\sqrt{\mu Y}\delta^2\phi_{xxxt} = 0 \tag{4.26}$$

Portanto verificamos que a equação da onda nesta aproximação ganhou uma correção dispersiva . Se uma abordagem ingenua para o contínuo ($\delta = 0$) fosse tomada, poderíamos deixar de fora um efeito dispersivo devido ao termo relacionado com a não-comutatividade proveniente do sistema discreto. Como a equação Klein-Gordon que descreve o campo escalar está profundamente ligada à equação de onda, uma extensão não-comutativa do campo escalar nesta abordagem, pode ter um termo adicional. Então ela irá contrastar com as tradicionais extensões náo comutativas do campo escalar feitas através da introdução do produto no Moyal na ação e que devido às propriedades deste produto preservam sua forma original comutativa [23]. A não-comutatividade nesta abordagem tradicional aparece apenas em termos da interação [23].

Por outro lado poderia ser interessante analisar a relação de dispersão que pode ser obtida a partir da equação obtida acima, E^2 - K^2 + $2\Theta E_k\sqrt{\mu y}k^3$=0. Dessa relação podemos ver como o termo adicional da equação obtida irá conduzir a efeitos dispersivos para o pacote de onda. Considerando Θ pequeno o limite da relação de dispersão pode ser expresso como $E_k^2 \sim K^2 + 2\Theta\sqrt{\mu y}\delta^2 k^4$. É interessante notar a semelhança entre esta expressão da dispersão e relações consideradas por diferentes autores (ver [26], [27] e [28]), a fim de explicar os desvios da invariância de Lorentz que alguns resultados astrofísicos experimentais têm sugerido [29].

4.4 Modelos α e β Deformados

Em muitas situações práticas, considerar apenas interações elásticas não é uma boa aproximação e é necessário incluir termos não-lineares. Assim, vamos estudar a modelo Fermi-Pasta-Ulam [31] onde podemos introduzir adicionalmente forças cúbicas,

$$V_\alpha = \sum_i \left[\frac{k}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{\alpha}{3}(x_{i+1} - x_i)^3\right] \tag{4.27}$$

conhecido como modelo α ou forças quárticas adicionais,

$$V_\beta = \sum_i \left[\frac{k}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{\beta}{4}(x_{i+1} - x_i)^4 \right] \tag{4.28}$$

conhecido como modelo β.

Estas teorias estão estreitamente relacionadas com muitos problemas físicos como a integrabilidade das equações não-lineares, as suas soluções sóliton, dinâmica do caos e condensados Bose-Einstein. Elas foram introduzidas por Fermi, Pasta e Ulam [31] quando eles foram investigar a distribuição da energia entre os modos de vibração de um sólido. O limite contínuo do modelo (com as forças quadráticas), como demonstrado em 1964 por Zabusky e Kruskal [24] está relacionado com uma notável equação diferencial parcial não-linear chamado de Korteweg-de Vries [32], que descreve propagação da onda em águas rasas e plasmas e que possuem soluções tipo sóliton interessantes. Dessa forma, torna-se relevante verificar como se apresentará a evolução temporal de N partículas submetidas a essas interações no limite contínuo segundo a segunda lei de Newton deformada. Para isso, precisamos primeiro obter a equação de movimento discreta, portanto para o modelo α, vem que

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_i = -\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_i} + m\widetilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V_\alpha}{\partial x_j \partial x_k}\dot{x}_k. \tag{4.29}$$

Dessa forma, o primeira termo do lado direito da igualdade acima fica

$$-\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_i} \quad = \quad k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \alpha(x_{i+1} - x_i)^2 \tag{4.30}$$

e naturalmente obtemos

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i \quad &= \quad k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \alpha(x_{i+1} - x_i)^2 \\ +m\widetilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V_\alpha}{\partial x_j \partial x_k}\dot{x}_k. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Para aproveitarmos resultados já obtidos no modelo do potencial elástico, vamos adotar que

$$B_\alpha \quad = \quad m\tilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 \widetilde{V}_\alpha}{\partial x_k \partial x_j}\dot{x}_k, \quad \widetilde{V}_\alpha = \sum_j \left[\frac{\alpha}{3}(x_{i+1} - x_i)^3 \right]; \tag{4.32}$$

logo

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i \quad &= \quad k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \alpha(x_{i+1} - x_i)^2 \\ &+ \quad m\Theta\frac{d}{dt}\{k(2x_{i+1} - 2x_{i-1} - x_{i+2} + x_{i-2})\} + m\widetilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 \widetilde{V}_\alpha}{\partial x_j}\partial x_k \dot{x}_k \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde o segundo termo do lado direito da equação acima foi obtido nos cáculos da segunda lei de Newton deformada para o potencial elástico. Novamente levaremos em conta a interação entre os primeiros vizinhos, onde $\tilde{\Theta}_{ij}$ satisfaz

$$\tilde{\Theta}_{ij} = \begin{cases} \Theta & \text{para} \quad j = i+1, \\ -\Theta & \text{para} \quad j = i-1, \\ 0 & \text{de outra forma.} \end{cases} , \tag{4.34}$$

de tal maneira que

$$\begin{aligned} B_\alpha &= m\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\left(\frac{\alpha}{3}(x_{i+2}-x_{i+1})^3+\frac{\alpha}{3}(x_{i+1}-x_i)^3\right)\right]\dot{x}_k\right\} \\ &- m\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}\left(\frac{\alpha}{3}(x_i-x_{i-1})^3+\frac{\alpha}{3}(x_{i-1}-x_{i-2})^3\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

que após a derivação parcial, torna-se

$$\begin{aligned} B_\alpha &= m\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\alpha(x_{i+2}-x_{i+1})^2(-1)+\alpha(x_{i+1}-x_i)^2(1)\right]\dot{x}_k\right\} \\ &- m\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\alpha(x_i-x_{i-1})^2(-1)+\alpha(x_{i-1}-x_{i-2})^2(1)\right]\dot{x}_k\right\}. \end{aligned}$$

Por conviniência, agora definimos

$$f_{\alpha,x_{i+1}} \equiv -\alpha(x_{i+2}-x_{i+1})^2+\alpha(x_{i+1}-x_i)^2 \tag{4.35}$$

e

$$f_{\alpha,x_i} \equiv -\alpha(x_i-x_{i-1})^2+\alpha(x_{i-1}-x_{i-2})^2 \tag{4.36}$$

tal que

$$\begin{aligned} B_\alpha &= m\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}(f_{\alpha,x_{i+1}})\dot{x}_{i+1}+\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{\alpha,x_{i+1}})\dot{x}_i+\frac{\partial}{\partial x_{i+2}}(f_{\alpha,x_{i+1}})\dot{x}_{i+2}\right\} \\ &- m\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}(f_{\alpha,x_i})\dot{x}_{i-1}+\frac{\partial}{\partial x_{i-2}}(f_{\alpha,x_i})\dot{x}_{i-2}+\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{\alpha,x_i})\dot{x}_i\right\} \end{aligned}$$

onde levamos em conta a interação entre os primeiros vinhos de x_{i+1} e x_{i-1}; dessa forma temos que

$$\begin{aligned} B_\alpha &= m\Theta\{2\alpha(x_{i+2}-x_{i+1})(-1)+2\alpha(x_{i+1}-x_i)(1)\}\dot{x}_{i+1} \\ &+ m\Theta\{2\alpha(x_{i+2}-x_{i+1})(1)+2\alpha(x_{i+1}-x_i)(0)\}\dot{x}_{i+2} \\ &+ m\Theta\{2\alpha(x_{i+1}-x_i)(-1)\}\dot{x}_i \\ &- m\Theta\{2\alpha(x_i-x_{i-1})(-1)(-1)2\alpha(x_{i-1}-x_{i-2})(1)\}\dot{x}_{i-1} \\ &- m\Theta\{2\alpha(x_{i-1}-x_{i-2})(-1)\}\dot{x}_{i-2} \\ &- m\Theta\{2\alpha(x_i-x_{i-1})(-1)(1)\}\dot{x}_i \end{aligned} \tag{4.37}$$

ou de uma maneira mais elegante, a equação acima pode ser reescrita como

$$B_\alpha = m\Theta\frac{d}{dt}\{\alpha[(x_{i+1}-x_i)^2-(x_{i-1}-x_{i-2})^2-(x_{i+2}-x_{i+1})^2+(x_i-x_{i-1})^2]\}. \quad (4.38)$$

Lembrando que nossa intenção é obter a equação de movimento do modelo α no limite contínuo, para isso e por facilitar nossos cálculos, vamos escrever

$$a = (x_{i+2}-x_{i+1}) \quad (4.39)$$
$$b = (x_{i+1}-x_i) \quad (4.40)$$
$$c = (x_i-x_{i-1}) \quad (4.41)$$
$$d = (x_{i-1}-x_{i-2}) \quad (4.42)$$

que no limite contínuo, até a quarta ordem de δ fica

$$(x_{i+2}-x_{i+1}) = \left(\delta\phi_x+\frac{3}{2}\delta^2\phi_{xx}+\frac{7}{6}\delta^3\phi_{xxx}+\frac{5}{8}\delta^4\phi_{xxxx}\right) \quad (4.43)$$
$$(x_{i+1}-x_i) = \left(\delta\phi_x+\frac{1}{2}\delta^2\phi_{xx}+\frac{1}{6}\delta^3\phi_{xxx}+\frac{1}{24}\delta^4\phi_{xxxx}\right) \quad (4.44)$$
$$(x_i-x_{i-1}) = \left(\delta\phi_x-\frac{1}{2}\delta^2\phi_{xx}+\frac{1}{6}\delta^3\phi_{xxx}-\frac{1}{24}\delta^4\phi_{xxxx}\right) \quad (4.45)$$
$$(x_{i-1}-x_{i-2}) = \left(\delta\phi_x-\frac{3}{2}\delta^2\phi_{xx}+\frac{7}{6}\delta^3\phi_{xxx}-\frac{5}{8}\delta^4\phi_{xxxx}\right). \quad (4.46)$$

Usando as últimas definições e as anteriores podemo escrever a equação de movimento do modelo α como

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= k\widetilde{a}+\alpha[(b)^2-(c)^2] \\ &+ m\Theta\frac{d}{dt}\{k(2x_{i+1}-2x_{i-1}+x_{i-2}-x_{i+2}) \\ &+ \alpha[(b)^2-(d)^2-(a)^2+(c)^2]\} \end{aligned} \quad (4.47)$$

de $\widetilde{c}$ dado por (4.19) e $\widetilde{a}$ dado por (4.17) vemos que

$$k(2x_{i+1}-2x_{i-1}+x_{i-2}-x_{i+2}) = -2K\delta^3\phi_{xxx} \quad (4.48)$$
$$\ddot{x}_i = \phi_{tt} \quad (4.49)$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} m\phi_{tt} &= k\widetilde{a}+\alpha[(b)^2-(c)^2] \\ &+ m\Theta\frac{d}{dt}\{-2K\delta^3\phi_{xxx} \\ &+ \alpha[(b)^2-(d)^2-(a)^2+(c)^2]\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Agora nos resta calcular $(b)^2-(c)^2$ e $(b^2-d^2-a^2+c^2)$. Nesse sentido

$$\begin{aligned} b^2-c^2 &= (b-c)(b+c) \\ &= \left(2\delta\phi_x+\frac{1}{3}\delta^3\phi_{xxx}\right)\left(\delta\phi_x+\frac{1}{12}\delta^4\phi_{xxxx}\right) \\ &= 2\delta^3\phi_x\phi_{xxx} \end{aligned} \quad (4.51)$$

e definindo

$$\nu \;=\; b^2 - d^2 - a^2 + c^2, \tag{4.52}$$

vem que

$$\begin{aligned}
\nu \;=\;& \left(\delta\phi_x + \frac{1}{2}\delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{6}\delta^3\phi_{xxx} + \frac{1}{24}\delta^4\phi_{xxxx}\right)^2 \\
-\;& \left(\delta\phi_x - \frac{3}{2}\delta^2\phi_{xx} + \frac{7}{6}\delta^3\phi_{xxx} - \frac{5}{8}\delta^4\phi_{xxxx}\right)^2 \\
-\;& \left(\delta\phi_x + \frac{3}{2}\delta^2\phi_{xx} + \frac{7}{6}\delta^3\phi_{xxx} + \frac{5}{8}\delta^4\phi_{xxxx}\right)^2 \\
+\;& \left(\delta\phi_x - \frac{1}{2}\delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{6}\delta^3\phi_{xxx} - \frac{1}{24}\delta^4\phi_{xxxx}\right)^2 \\
=\;& \left(\delta^2\phi_x^2 + \delta^3\phi_x\delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{4}\delta^4\phi_{xx}^2\right) + \frac{1}{3}\delta^4\delta\phi_x\phi_{xxx} \\
-\;& \left(\delta^2\phi_x^2 - 3\delta^3\phi_x\delta\phi_{xx} + \frac{9}{4}\delta^4\phi_{xx}^2\right) - \frac{7}{3}\delta^4\phi_x\phi_{xx} \\
-\;& \left(\delta^2\phi_x^2 + 3\delta^3\phi_x\delta^2\phi_{xx} + \frac{9}{4}\delta^4\phi_{xx}^2\right) - \frac{7}{3}\delta^4\delta\phi_x\phi_{xxx} \\
+\;& \left(\delta^2\phi_x^2 - \delta^3\phi_x\delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{4}\delta^4\phi_{xx}^2\right) + \frac{1}{3}\delta^4\delta\phi_x\phi_{xxx}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\nu \;=\; -4(\delta^4\phi_{xx}^2 + \delta^4\delta\phi_x\phi_{xxx}). \tag{4.53}$$

Dessa forma a equação de movimento do modelo α pode ser reescrita como

$$m\phi_{tt} = k\widetilde{a} + 2\alpha\delta^3\phi_x\phi_{xxx} + m\Theta\frac{d}{dt}\{-2K\delta^3\phi_{xxx} - 4\alpha(\delta^4\phi_{xx}^2 + \delta^4\delta\phi_x\phi_{xxx})\}. \tag{4.54}$$

Redefinindo t $\longrightarrow \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$t e definindo $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{K}$ a equação de movimento do modelo α fica

$$\begin{aligned}
\phi_{tt} \;& -[1 + 2\bar{\alpha}\delta\phi_x]\phi_{xx} - \frac{\delta^2}{12}\phi_{xxxx}\phi \\
+\;& 2\Theta\sqrt{\mu Y}\delta^2\frac{d}{dt}\Big[\phi_{xxx} + 2\delta\bar{\alpha}\partial_x(\phi_x\phi_{xx})\Big] = 0 \quad \alpha - \text{modelo}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Realizando processo análogo devemos encontrar a equação de movimento para o modelo β. Sendo assim

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_i = -\frac{\partial V_\beta}{\partial x_i} + m\widetilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x_j \partial x_k}\dot{x}_k, \tag{4.56}$$

e para derivada parcial de V_β em relação a x_i, teremos

$$-\frac{\partial V_\beta}{\partial x_i} = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \beta\{(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_i - x_{i-1})^3\}. \quad (4.57)$$

Consequentemente a segunda lei de Newton deformada para o modelo β, torna-se

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}x_i &= k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \beta\{(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_i - x_{i-1})^3\} \\ &+ m\widetilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x_j \partial x_k}\dot{x}_k \end{aligned} \quad (4.58)$$

e novamente para aproveitar resultados já obtidos, adotaremos que

$$B_\beta = m\tilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 \widetilde{V}_\beta}{\partial x_k \partial x_j}\dot{x}_k, \quad \widetilde{V}_\beta = \sum_i [\frac{\beta}{4}(x_{i+1} - x_i)^4] \quad (4.59)$$

e portanto

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \alpha(x_{i+1} - x_i)^2 + \\ &+ m\Theta\frac{d}{dt}\{k(2x_{i+1} - 2x_{i-1} - x_{i+2} + x_{i-2})\} + m\tilde{\Theta}_{ij}\left\{\frac{\partial^2 \widetilde{V}_\beta}{\partial x_k \partial x_j}\dot{x}_k\right\}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde outra vez foi usado o resultado do potencial elástico e levamos em conta a interação entre os primeiros vizinhos. Agora vamos prosseguir calculando B_β. Então

$$B_\beta = m\tilde{\Theta}_{i,i+1}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_{i+1}}\dot{x}_k + m\tilde{\Theta}_{i,i-1}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_{i-1}}\dot{x}_k \quad (4.61)$$

já que x_{i+1} e x_{i-1} são os vizinhos mais próximos de x_i. Usando as condições que $\tilde{\Theta}$ satisfaz, vem que

$$\begin{aligned} B_\beta &= m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\left(\frac{\beta}{4}(x_{i+2} - x_{i+1})^4 + +\frac{\beta}{4}(x_{i+1} - x_i)^4\right)\right)\dot{x}_k \\ &- m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}\left(\frac{\beta}{4}(x_i - x_{i-1})^4 + \frac{\beta}{4}(x_{i-1} - x_{i-2})^4\right)\right)\dot{x}_k \end{aligned}$$

que derivando nos dá

$$\begin{aligned} B_\beta &= m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}(\beta(x_{i+2} - x_{i+1})^3(-1) + \beta(x_{i+1} - x_i)^3(1))\dot{x}_k \\ &- m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}(\beta(x_i - x_{i-1})^3(-1) + \beta(x_{i-1} - x_{i-2})^3(1))\dot{x}_k. \end{aligned}$$

Por conviniência vamos adotar

$$f_{\beta,x_{x+1}} \equiv -\beta(x_{i+2} - x_{i+1})^3 + \beta(x_{i-1} - x_{i-2})^3 \quad (4.62)$$

e

$$f_{\beta,x_{x-1}} \equiv -\beta(x_i - x_{i-1})^3 + \beta(x_{i-1} - x_{i-2})^3, \tag{4.63}$$

que para os primeiros vizinhos de x_{x+1} e x_{x-1} fica

$$\begin{aligned} B_\beta &= m\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{\beta,x_{x+1}})\dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}(f_{\beta,x_{x+1}})\dot{x}_{i+1} + \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}(f_{\beta,x_{x+1}})\dot{x}_{i+2}\right\} \\ &- m\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{\beta,x_{x-1}})\dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}(f_{\beta,x_{x-1}})\dot{x}_{i-1} + \frac{\partial}{\partial x_{i-2}}(f_{\beta,x_{x-1}})\dot{x}_{i-2}\right\}. \end{aligned}$$

Após derivarmos $f_{\beta,x_{x+1}}$ e $f_{\beta,x_{x-1}}$, vemos que

$$\begin{aligned} B_\beta &= m\Theta\{+3\beta(x_{i+1} - x_i)^2(-1) + +3\beta(x_{i+2} - x_{i+1})^2(-1)(-1)\dot{x}_{i+1} \\ &+ 3\beta(x_{i+1} - x_i)^2(1)(1)\dot{x}_{i+1} + +3\beta(x_{i+2} - x_{i+1})^2(-1)(1)\dot{x}_{i+2}\} \\ &- m\Theta\{+3\beta(-x_{i-1} + x_i)^2(-1)(1)\dot{x}_i + +3\beta(-x_{i-1} + x_i)^2(-1)(-1)\dot{x}_{i-1} \\ &+ 3\beta(x_{i-1} - x_{i-2})^2(1)(1)\dot{x}_{i-1} + +3\beta(x_{i-1} - x_{i-2})^2(1)(-1)\dot{x}_{i-2}\}. \end{aligned}$$

Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} B_\beta &= m\Theta\{-3\beta(x_{i+1} - x_i)^2 + 3\beta(x_{i+2} - x_{i+1})^2\dot{x}_{i+1} + 3\beta(x_{i+1} - x_i)^2\dot{x}_{i+1} \\ &- 3\beta(x_{i+2} - x_{i+1})^2\dot{x}_{i+2}\} \\ &- m\Theta\{-3\beta(-x_{i-1} + x_i)^2\dot{x}_i + 3\beta(x_i - x_{i-1})^2\dot{x}_{i-1} + 3\beta(x_{i-1} - x_{i-2})^2\dot{x}_{i-1} \\ &- 3\beta(x_{i-1} - x_{i-2})^2\dot{x}_{i-2}\} \end{aligned}$$

que colocando termos iguais em evidência, fica

$$\begin{aligned} B_\beta &= m\Theta\{3\beta[-(x_{i-1} - x_{i-2})^2(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_{i-2}) - (x_{i-1} - x_{i-2})^2(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_{i-2}) \\ &- (x_{i+2} - x_{i+1})^2(\dot{x}_{i+2} - \dot{x}_{i+1}) + (x_i - x_{i-1})^1(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + (x_{i+1} - x_i)^2(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i)]\} \end{aligned}$$

que de forma mais compacta, escreve-se

$$\begin{aligned} B_\beta &= m\Theta\frac{d}{dt}\{\beta[-(x_{i-1} - x_{i-2})^3 - (x_{i+2} - x_{i+1})^3 + (x_i - x_{i-1})^3]\} \\ &+ m\Theta\frac{d}{dt}\{\beta(x_{i+1} - x_i)^3\}. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Portanto, para o caso discreto, a equação de movimento da modelo β é

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \beta[(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_i - x_{i-1})^3] \\ &+ m\Theta\frac{d}{dt}\{k(2x_{i+1} - 2x_{i-1} + x_{i-2} - x_{i+2}) + \beta[-(x_{i-1} - x_{i-2})^3 \\ &- (x_{i+2} - x_{i+1})^3 + (x_i - x_{i-1})^3 + (x_{i+1} - x_i)^3]\} \end{aligned} \tag{4.65}$$

Porém nosso objetivo é obter a equação de movimneto no limite contínuo. Isso será feito usando resultados de cálculos anteriores, pois o limite contínuo de alguns termos já são conhecidos, então a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} m\phi_{tt} &= \left(\delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{12}\delta^4\phi_{xxxx}\right) + \beta[b^3 - c^3] \\ &+ m\Theta\frac{d}{dt}\{-2\delta^3\phi_{xxx} + \beta[-d^3 - a^3 + c^3 + b^3]\} \end{aligned} \tag{4.66}$$

onde também foi usado algumas definições realizadas anteriormente. Os termos que envolvem a,b,c e d podem ser simplificados utilizando algumas propriedades básica de fatoração. Nós temos que

$$\begin{aligned} b^3 - c^3 &= (b-c)(a^2 + ab + b^2) \\ &= \left(\delta\phi_x + \frac{1}{2}\delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{6}\delta^3\phi_{xxx} + \frac{1}{24}\delta^4\phi_{xxxx}\right)(a^2 + ab + b^2) \\ &- \left(\delta\phi_x - \frac{1}{2}\delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{6}\delta^3\phi_{xxx} - \frac{1}{24}\delta^4\phi_{xxxx}\right)(a^2 + ab + b^2) \\ &= \left(\delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{12}\delta^4\phi_{xxxx}\right)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

qualquer termo que resulte da mutiplicação por $\frac{1}{12}\delta^4\phi_{xxxx}$ será despresado , pois terá δ com potência superior a quarta ordem. Portanto

$$b^3 - c^3 = (\delta^2\phi_{xx})(a^2 + ab + b^2)$$

por outro lado, levando em conta somente os termos até quarta ordem de δ, temos que

$$(a^2 + ab + b^2) = \left(3\delta^2\phi_{xx}^2 + \frac{1}{3}\delta^4\phi_x\phi_{xxxx} + \frac{1}{4}\delta^4\phi_x^2\right)$$

então

$$\begin{aligned} (b-c)(a^2 + ab + b^2) &= (\delta^2\phi_{xx})\left(3\delta^2\phi_{xx}^2 + \frac{1}{3}\delta^4\phi_x\phi_{xxxx} + \frac{1}{4}\delta^4\phi_x^2\right) \\ &= 3\delta^4\phi_{xx}(\phi_x)^2. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Para outra parte da equação de movimento do modelo β,vamos definir

$$\eta = c^3 - a^3 + d^3 - b^3$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \eta &= (c-a)(c^2 + ac + a^2) + (d-b)(d^2 + db + b^2) \\ &= \left(-2\delta^2\phi_{xx} - \delta^3\phi - \frac{3}{8}\delta^4\phi_{xxxx}\right)(c^2 + ac + a^2) + (2\delta^2\phi_{xx} - \delta^3\phi_{xxx})(d^2 + db + b^2) \\ &= \left(-2\delta^2\phi_{xx} - \delta^3\phi - \frac{3}{8}\delta^4\phi_{xxxx}\right)\left(3\delta^2\phi_x^2 + 3\delta^3\phi_x\phi_{xx} + 4\delta^4\phi_{xxx}\phi_x + \frac{37}{24}\delta^4\phi_{xx}^2\right) \\ &+ (2\delta^2\phi_{xx} - \delta^3\phi_{xxx})\left(3\delta^2\phi_x^2 - 3\delta^3\phi_x\phi_{xx}\frac{17}{6} - 2\delta^4\phi_x\phi_{xxx} + \frac{7}{4}\delta^4\phi_x^2\phi_{xxxx}\right) \\ &= (6-6)\delta^4\phi_{xx}\phi_x^2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.68}$$

É importante ressaltar que esse resultado foi obtido desconsiderando os termos com δ com potência acima da quarta ordem. Sendo assim, a equação de movimento do modelo β no limite contínuo pode ser reescrita como

$$m\phi_{tt} \;=\; \left(\delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{12}\delta^4\phi_{xxxx}\right) + 3\beta\delta^4\phi_{xx}(\phi_x)^2 + -2m\Theta\delta^3\phi_{xxxt}$$

novamente, redefinindo t $\longrightarrow \sqrt{\frac{\mu}{y}}$t e definindo $\bar{\beta} = \frac{\beta}{K}$ a equação de movimento do modelo β fica

$$m\phi_{tt} - [1 + 3\delta\bar{\beta}(\phi_x)^2]\phi_{xx} - \frac{1}{12}\delta^2\phi_{xxxx} + 2m\Theta\sqrt{\mu y}\delta^2\phi_{xxxt} = 0 \quad \beta - \text{modelo} \tag{4.69}$$

Note que o termo de deformação do modelo β é equivalente ao dos osciladores harmônicos, que é uma consequência do fato de que as contribuições dos β termos aparecem apenas para quinta ordem de δ. Portanto, a aplicação da segunda lei de Newton deformada (4.3) para evolução dinâmica de alguns sistemas tem nos levado a equações não-lineares por termos dispersivos no caso da modelo β $(2m\Theta\sqrt{\mu y}\delta^2\phi_{xxxt})$ e por termos dispersivos e não-lineares, no caso de modelo α $(2\Theta\sqrt{\mu Y}\delta^2\frac{d}{dt}\left[\phi_{xxx} + 2\delta\bar{\alpha}\partial_x(\phi_x\phi_{xx})\right])$.

4.5 Equação KdV Deformada

Um sistema relacionado com integrabilidade é a corrente de Toda aberta [33]. O modelo consiste de uma cadeia unidimensional de **N** partículas com interações exponenciais não-lineares entre os vizinhos mais próximos [33] de forma que o potencial é expressa como

$$V_T = \sum_i \left\{\frac{a}{b}\exp\left[b(x_{i+1} - x_i)\right] - \left[a(x_{i+1} - x_i)\right]\right\} \tag{4.70}$$

com a, b sendo parâmetros constantes. Se estamos considerando que o comportamento dinâmico deste sistema é regido pela segunda lei de Newton deformada, isso implica que

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_i = -\frac{\partial V_T}{\partial x_i} + m\tilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V_T}{\partial x_j \partial x_k}\frac{d}{dt}x_k. \tag{4.71}$$

Derivando V_T em relação a x_i a equação acima fica

$$m\ddot{x}_i = -\frac{ba}{b}\exp\left[b(x_{i+1} - x_i)\right] + \frac{ba}{b}\exp\left[b(x_i - x_{i-1})\right] + (a(-1) + a(1)) + m\tilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V_T}{\partial x_k \partial x_j}\dot{x}_k.$$

Definindo

$$\widetilde{\mathbf{c}} = m\tilde{\Theta}_{ij}\frac{\partial^2 V_T}{\partial x_k \partial x_j}\dot{x}_k \tag{4.72}$$

a equação (4.71), torna-se

$$m\ddot{x}_i = -\frac{ba}{b}\exp\left[b(x_{i+1}-x_i)\right] + \frac{ba}{b}\exp\left[b(x_i-x_{i-1})\right] + \widetilde{\mathbf{c}} \tag{4.73}$$

e lembrando que

$$\tilde{\Theta}_{ij} = \begin{cases} \Theta & \text{para} \quad j = i+1, \\ -\Theta & \text{para} \quad j = i-1, \\ 0 & \text{de} \quad \text{outra} \quad \text{forma.} \end{cases}, \tag{4.74}$$

$\widetilde{\mathbf{c}}$ fica

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{c}} &= m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\left[\frac{a}{b}\exp\left[b(x_{i+2}-x_{i+1})\right] + \frac{a}{b}\exp\left[b(x_{i+1}-x_i)\right]\right]\dot{x}_k\right\} \\
&- m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\left[a(x_{i+2}-x_{i+1})\right]\dot{x}_k\right\} \\
&+ m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\left[-a(x_{i+1}-x_i)\right]\dot{x}_k\right\} \\
&- m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}\left[\frac{a}{b}\exp\left[b(x_i-x_{i-1})\right] + \frac{a}{b}\exp\left[b(x_{i-1}-x_{i-2})\right] - a(x_i-x_{i-1})\right]\dot{x}_k\right\} \\
&- m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}\left[-a(x_{i-1}-x_{i-2})\right]\dot{x}_k\right\}.
\end{aligned}$$

Então derivando V_T para x_{i+1} e x_{i-1} obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{c}} &= m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{ab(-1)}{b}\exp\left[b(x_{i+2}-x_{i+1})\right] + \frac{ab(1)}{b}\exp\left[b(x_{i+1}-x_i)\right]\right]\dot{x}_k \\
&- m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left[a((-1)+(1))\right]\dot{x}_k \\
&- m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{ab(-1)}{b}\exp\left[b(x_i-x_{i-1})\right] + \frac{ab(1)}{b}\exp\left[b(x_{i-1}-x_{i-2})\right]\right]\dot{x}_k \\
&- m\Theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left[a((-1)+(1))\right]\dot{x}_k
\end{aligned}$$

e definindo

$$f_{i+1}(x) = \frac{ab(-1)}{b}\exp\left[b(x_{i+2}-x_{i+1})\right] + \frac{ab(1)}{b}\exp\left[b(x_{i+1}-x_i)\right] \tag{4.75}$$

$$f_{i-1}(x) = \frac{ab(-1)}{b}\exp\left[b(x_i-x_{i-1})\right] + \frac{ab(1)}{b}\exp\left[b(x_{i-1}-x_{i-2})\right] \tag{4.76}$$

e levando em conta a interação entre os primeiros vizinhos, logramos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{c}} = m\Theta&\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{i+1}(x)\right]\dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\left[f_{i+1}(x)\right]\dot{x}_{i+1} + \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}\left[f_{i+1}(x)\right]\dot{x}_{i+2}\right\} \\
-m\Theta&\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{i-1}(x)\right]\dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}\left[f_{i-1}(x)\right]\dot{x}_{i-1} + \frac{\partial}{\partial x_{i-2}}\left[f_{i-1}(x)\right]\dot{x}_{i-2}\right\}
\end{aligned}$$

que após colocar os termos em evidência, nos dá

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{c}} = mab\Theta\{(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i)\exp[b(x_{i+1}-x_i)] - (\dot{x}_{i+2} - \dot{x}_{i+1})\exp[b(x_{i+2}-x_{i+1})]\} \\ mab\Theta\{(\dot{x}_{i} - \dot{x}_{i-1})\exp[b(x_{i}-x_{i-1})] - (\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_{i-2})\exp[b(x_{i-1}-x_{i-2})]\}\end{aligned}$$

que de forma equivalente, nos fonece

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{c}} &= mab\Theta\frac{d}{dt}\{\exp[b(x_{i+1}-x_i)] - \exp[b(x_{i+2}-x_{i+1})] + \exp[b(x_i - x_{i-1})]\} \\ &- mab\Theta\frac{d}{dt}\{\exp[b(x_{i-1}-x_{i-2})]\} \qquad (4.77)\end{aligned}$$

Portanto a equação(4.71), torna-se

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_i &= a\Big\{\exp[b(x_{i+1}-x_i)] - \exp[b(x_i-x_{i-1})]\Big\} \\ &+ m\Theta ab\frac{d}{dt}\{\exp[b(x_{i+1}-x_i]) + \exp[b(x_i-x_{i-1})] - \exp[b(x_{i+2}-x_{i+1})]\} \\ &- m\Theta ab\frac{d}{dt}\{\exp[b(x_{i-1}-x_{i-2})]\}. \qquad (4.78)\end{aligned}$$

Para simplificar os cáculos da equação (4.78) no limite contínuo vamos assumir que a=b=m=1. E além disso vamos considerar que $x_{i+1} - x_i \longrightarrow X_i$. E dessa forma obtermos

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i &= \ddot{X}_i \\ &= \Big\{\exp[b(x_{i+2}-x_{i+1})] - \exp[(x_{i+1}-x_i)]\Big\} \\ &+ \Theta\frac{d}{dt}\Big\{\exp[(x_{i+2}-x_{i+1}]) + \exp[(x_{i+1}-x_i)] - \exp[(x_{i+3}-x_{i+2})] \\ &- \exp[(x_i - x_{i-1})]\Big\} \\ &- \Big\{\exp[(x_{i+1}-x_i)] - \exp[(x_i-x_{i-1})]\Big\} \\ &+ \Theta\frac{d}{dt}\Big\{\exp[(x_{i+1}-x_i]) + \exp[(x_i-x_{i-1})] - \exp[(x_{i+2}-x_{i+1})] \\ &- \exp[(x_{i-1}-x_{i-2})]\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{X}_i &= \exp[(X_{i+1})] + \exp[(X_{i-1})] - 2\exp[(X_i)] + \Theta\frac{d}{dt}\Big\{2(\exp[(X_{i+1})] - \exp[(X_{i-1})] \\ &- \exp[(X_{i+2})] + \exp[(X_{i+2})]\Big\}. \qquad (4.79)\end{aligned}$$

Agora vamos definir

$$\exp[(X_i)] = 1 + V_i. \qquad (4.80)$$

Substituindo a equação (4.80) na equação (4.79), obtemos

$$\ddot{X}_i = V_{i+1} + V_{i-1} + \Theta\frac{d}{dt}\left\{2V_{i+1} - 2V_{i-1} - V_{i+2} + V_{i-2}\right\}. \tag{4.81}$$

Quando o limite contínuo é aplicado, temos que

$$V_i \rightarrow \phi(x,t) \tag{4.82}$$

$$V_{i\pm1} \rightarrow \phi(x\pm\delta,t) \tag{4.83}$$

$$V_{i\pm2} \rightarrow \phi(x\pm2\delta,t). \tag{4.84}$$

Então a equação (4.81) fica

$$\begin{aligned}\ddot{X}_i &= \phi(x+\delta,t) + \phi(x-\delta,t) - 2\phi(x,t) + \Theta\frac{d}{dt}\left\{2\phi(x+\delta,t) - 2\phi(x-\delta,t)\right\}\\ &+ \Theta\frac{d}{dt}\left\{-\phi(x+2\delta,t) + \phi(x-2\delta,t)\right\}\\ &= \delta^2\phi_{xx} + \frac{1}{12}\delta^4\phi_{xxxx} - 2\Theta\frac{d}{dt}\left\{\delta^3\phi xxx\right\},\end{aligned} \tag{4.85}$$

onde foi usado os resultados das equações (4.16) e (4.16) até quarta ordem. De forma idêntica a equação (4.80), no limite contínuo, temos

$$\phi = \exp(\delta u) - 1. \tag{4.86}$$

A equações (4.80) e (4.86), no limite contínuo, nos dá

$$X_i = \delta u. \tag{4.87}$$

Portanto, podemos reescrever a equação (4.85) como:

$$u_{tt} = \delta\phi_{xx} + \frac{1}{12}\delta^3\phi_{xxxx} - 2\Theta\frac{d}{dt}\left\{\delta^2\phi xxx\right\}. \tag{4.88}$$

Precisamos derivar ϕ quatro vezes. No entanto, como estamos considerando os termos até a quarta ordem de δ, percebemos que para primeiro termo do lado direito da equação (4.88) só os termos até terceira ordem de δ contribuirá, já que o mesmo está mutiplicada por δ. Para o segundo termo do lado direito, só os termos de primeira ordem, pois ele está mutiplicado por δ^3. Seguindo o mesmo raciocínio, para o terceiro termo do lado direito, apenas os termos de segunda ordem em δ serão computados. Essa análise é útil, pois assim não precisamos derivar todos os termos em todas as ordens de δ. Sendo assim, definindo $\zeta = \delta u$ e expandindo $\exp[\zeta]$ em série de taylor, até quarta ordem de δ , chegamos a

$$\begin{aligned}\exp[\zeta] &= \exp[0] + \frac{\partial \exp[\zeta]}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\delta u + \frac{\partial^2 \exp[\zeta]}{\partial\zeta^2}\frac{\partial\zeta}{\partial u}(\delta u)^2 + ...\\ &= 1 + \delta^2 u + \frac{1}{2}\delta^3 u^2 + \frac{1}{6}\delta^4 u^3 + ...,\end{aligned} \tag{4.89}$$

em seguida derivando ϕ quatro vezes em relação a x, logramos

$$\begin{aligned}\phi_x &= \delta \exp[\zeta] u_x \\ \phi_{xx} &= \left(\delta u_{xx} + \delta^2 (ux)^2\right) exp[\zeta] u_x \\ \phi_{xxx} &= \left(\delta u_{xxx} + \delta^2 u_{xx} u_x\right) \exp[\zeta] + ... \\ \phi_{xxxx} &= \delta u_{xxxx} \exp[\zeta].\end{aligned} \tag{4.90}$$

Usando os resultados das equações (4.89) e (4.90), obtemos

$$\begin{aligned}u_{tt} &= \delta^2 uxx \left(\delta 1 + \delta^2 u + ...\right) + \delta^3 (u_x)^2 \left(\delta 1 + \delta^2 u + ...\right) + \frac{1}{12}\delta^3 u_{xxxx}\left(1 + \delta^2 u + ...\right) \\ &- 2\Theta \frac{d}{dt}\left\{\delta^2 \left(\delta u_{xxx} + \delta^2 u_{xx} u_x + ...\right)\left(1 + \delta^2 u + ...\right)\right\}.\end{aligned} \tag{4.91}$$

Realizando a seguinte troca de variável

$$t \longrightarrow t\delta, \tag{4.92}$$

a equação (4.91) fica

$$u_{tt} = uxx + \delta\left(u_{xx} u + (u_x)^2\right) + \frac{\delta^2}{12} u_{xxxx} - 2\delta^2 \Theta u_{xxxt}. \tag{4.93}$$

Por conviniência, vamos mudar para a notação em que

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u. \tag{4.94}$$

Reescrevendo a equação (4.93) segundo a notação da equação (4.94), temos

$$\partial_{tt} u = \partial_{xx} u + \frac{\delta}{2}\partial_{xx}(u^2) + \frac{\delta^2}{12}\partial_{xxxx} u - 2\delta^2 \Theta \partial_{xxxt} u \tag{4.95}$$

Desta maneira, obtemos a equação Boussinesq pertubada por um termo dispersivo não-comutativo que é o mesmo que aparece na perturbação da onda equação (4.26) e no β-modelo (4.69). Por outro lado, é sabido que a equação Boussinesq leva à equação KdV quando é considerado que as ondas viajam em uma só direção. Vamos tentar , derivar da equação (4.95) a correspondente extensão não comutativa da equação KdV. Para isso vamos fazer a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{4.96}$$

de tal forma que

$$\partial_{tt}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big) = \partial_{xx}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big) + \frac{1}{2}\delta\partial_{xx}\Big(\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)^2\Big) + \frac{\delta^2}{12}\partial_{xxxx}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big) - 2\Theta\delta^2\partial_{xxxt}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big).$$

Integrando, vem que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_{tt}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left\{\partial_{xx}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big) + \frac{1}{2}\delta\partial_{xx}\Big(\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)\Big) + \frac{\delta^2}{12}\partial_{xxxx}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big) - 2\Theta\delta^2\partial_{xxxt}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)\right\}$$

de acordo com a definição feita na equação (4.96) obtemos

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\varphi &= \partial_{xx}\varphi + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\delta^2}{12}\partial_{xxxx}\varphi \\ -2\Theta\delta^2\partial_{xxxt}\varphi + const\end{aligned} \tag{4.97}$$

Agora nós iremos considerar que a função φ representa uma onda se propagando para a direita, ou seja, $\varphi(x,t) = \varphi(x - vt)$, onde $v \neq 0$ é um parâmetro proporcional à velocidade de propagação das ondas com a condição extra $v \neq 1$. Nesse sentido, seja

$$\varphi(x - vt) = \varphi(z). \tag{4.98}$$

Derivando a equação (4.98) em relação a x e t respectivamente, temos

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z} \tag{4.99}$$

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}v. \tag{4.100}$$

Das equações (4.99), (4.100), obtem-se

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial t} \tag{4.101}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial t^2}. \tag{4.102}$$

Substituindo o resultado das equação (4.101), (4.102) na equação (4.97), logra-se

$$(1 - v^2)\partial_{xx}\varphi + \delta\partial_{xx}\varphi\partial_x\varphi + \frac{\delta^2}{12}\partial_{xxxx}\varphi \tag{4.103}$$

$$+ 2\Theta\delta^2 v\partial_{xxxx}\varphi + const = 0. \tag{4.104}$$

Considerando-se para equação que $\partial_x\varphi = \Phi$ e que as derivadas do tempo podem ser recuperadas introduzindo um parâmetro ϵ, $\epsilon \neq 1$ que irá nos dar a proporção da derivada temporal e derivada espacial, nos termos onde $v\partial_x\varphi$ = -$\partial_t\varphi$ foi introduzido, portanto admitindo que

$$\partial_x\Phi \longrightarrow \epsilon\partial_x + (1 - \epsilon)\partial_t\Phi \tag{4.105}$$

a equação para Φ fica

$$\begin{aligned}(1 - v^2)\epsilon\partial_x\Phi &+ (1 - v^2)(1 - \epsilon)\partial_t\Phi + \delta\Phi\partial_x\Phi + \frac{\delta^2}{12}\partial_{xxx}\Phi \\ + &\quad 2\Theta\delta^2 v\epsilon\partial_{xxx}\Phi + 2\Theta\delta^2 v(1 - \epsilon)\partial_{xxt}\Phi + const = 0.\end{aligned} \tag{4.106}$$

Fazendo $\xi = x - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}t$, $\tau = \frac{t}{1-\epsilon}$ e $const = 0$. Essa mudança de variável proposta implica em $\Phi(x,t) \longrightarrow \Phi(\xi,\tau)$ e usando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t}, \tag{4.107}$$

que substituindo na equação(4.106), obtem-se

$$
\begin{aligned}
(1-v^2)\epsilon\partial_\xi\Phi \quad &+(1-v^2)(1-\epsilon)\left\{-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\epsilon}{1-\epsilon}+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{1}{1-\epsilon}\right\}+\delta\Phi\partial_\xi\Phi+\frac{\delta^2}{12}\partial_{\xi\xi\xi}\Phi \\
-2\Theta\delta^2 v\epsilon\partial_{\xi\xi\xi}\Phi \quad &-2\Theta\delta^2 v(1-\epsilon)\partial_{\xi\xi}\left\{-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\epsilon}{1-\epsilon}+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{1}{1-\epsilon}\right\}=0 \qquad (4.108)
\end{aligned}
$$

evidenciando os termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
(1-1)(1-v^2)\epsilon\partial_\xi\Phi+\partial_\tau\Phi+\frac{1}{(1-v^2)}\delta\Phi\partial_\xi\Phi\frac{1}{(1-v^2)}\frac{\delta^2}{12}\partial_{\xi\xi\xi}\Phi \\
+(2-2)\frac{1}{(1-v^2)}\Theta\delta^2 v\epsilon\partial_{\xi\xi\xi}\Phi-2\frac{1}{(1-v^2)}\Theta\delta^2 v\partial_{\xi\xi\tau}\Phi=0 \qquad (4.109)
\end{aligned}
$$

tal que

$$
\partial_\tau\Phi+\frac{1}{(1-v^2)}\delta\Phi\partial_\xi\Phi+\frac{1}{(1-v^2)}\frac{\delta^2}{12}\partial_{\xi\xi\xi}\Phi-2\frac{1}{(1-v^2)}\Theta\delta^2 v\partial_{\xi\xi\tau}\Phi=0. \qquad (4.110)
$$

Definindo

$$
\bar{a}=\frac{\delta}{1-v^2},\quad \bar{b}=\frac{\delta^2}{12(1-v^2)},\quad \bar{c}=\frac{2\delta^2 v}{1-v^2} \qquad (4.111)
$$

chegamos a

$$
\partial_\tau\Phi+\bar{a}\Phi\partial_\xi\Phi+\bar{b}\partial_{\xi\xi\xi}\Phi-\Theta\bar{c}\partial_{\xi\xi\tau}\Phi=0. \qquad (4.112)
$$

Fazendo o seguinte reescalamento

$$
\xi\to(\bar{b})^{\frac{1}{3}}\xi \quad \tau\to-\tau \quad \Phi\to(\bar{a})^{-1}(\bar{b})^{\frac{1}{3}}\Phi \qquad (4.113)
$$

e em seguida realizando o procedimento utizado para obter a equação (2.37), podemos expressar a equação KdV em sua forma usual, mas agora com um termo não-comutativo adicional

$$
\partial_\tau\Phi=\Phi\partial_\xi\Phi+\partial_{\xi\xi\xi}\Phi+\Theta 2v\left(\frac{12^2\delta^2}{1-v^2}\right)^{\frac{1}{3}}\partial_{\xi\xi\tau}\Phi \qquad (4.114)
$$

Considerando o parâmetro não commutativo muito pequeno o termo adicional, em princípio, pode ser considerado como uma perturbação fraca sobre a equação KdV. Note que, neste caso, esta perturbação, a fim de ser real também deve satisfazer $v > 1$. Os efeitos das perturbações fracas sobre as soluções da equação KdV tem sido estudada por diferentes métodos [36],[37] e [38]. Por isso, empregando estes métodos seria possível investigar a influência do termo não-comutativo adicional sobre soluções sóliton da equação KdV original. Neste ponto poderia ser interessante para comparar com as outras extensões não comutativas da equação KdV propostas sobre a literatura [34] e [35]. Se, na proposta Moyal (KdV) apresentada em [34] e [35] nós expandirmos o produto Moyal (estrela) em θ vamos descobrir que a primeira correção será exibida para a segunda ordem do parâmetro θ,

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x - \frac{\theta^2}{2}\Big[\partial_{xt}u\partial_{xtt}u + \partial_{xxx}u\partial_{tt}u - 4\partial_{xxt}u\partial_{xt}u\Big] = 0. \quad (4.115)$$

Note que esta expressão contrasta com o resultado obtido nos cálculos realizados nesse capítulo em que o termo de correção em primeira ordem de Θ. Este fato, em certo sentido é natural uma vez que, na extensão não comutativa da equação KdV da equação (4.115) a não-comutatividade é introduzida ao nível do espaço-tempo, assumindo desta maneira, o tempo como uma coordenada não comutativa, enquanto que para nós o tempo tem sido sempre uma coordenada comutativa. Neste sentido, não se espera uma equivalência entre os dois formalismo. Os modelos aqui apresentados podem ser vistos como formulações não-comutativas alternativas de teorias de campo que surgem a partir do limite contínuo de sistemas discretos cujas evoluções são regidas pela segunda lei de Newton deformada, equação (4.3). Note que em todos os casos as habituais teorias comutativas são recuperados quando o limite de $\Theta \longrightarrow 0$ é estabelecida. Além disso, gostaríamos de dizer que exploramos as implicações da não-comutatividade não-local no nível clássico onde o seu efeito se manifesta sob a forma de um termo adicional sobre as equações de movimento que pode, em princípio, ser considerado como uma perturbação. Obviamente, a nível quântico as consequências podem ser mais drásticas, uma vez que não será possível ter uma teoria quântica de campo livre, no sentido de que não pode ser visto como uma coleção de infinitos osciladores hârmonicos quânticos. Consequentemente a investigação das implicações desta não-comutatividade não-local a nível quântico é um assunto interessante que pode ser prosseguido no futuro. Do outro lado, a nova física que a introdução desta não-comutatividade implica pode ser explorada em cenários onde as violações da simetria de Lorentz foram considerados [26],[27] e [28]. Por último, seria interessante uma investigação mais profunda da relação discreta-contínua dentro do contexto não-comutativo, incluindo também o tempo como uma coordenada não-comutativa [39]. Um dos modelos estudados foi a corrente de Toda aberta, cujo limite contínuo resultou em uma generalização da equação KdV, que conforme vimos no segundo capítulo tem uma estrutura de estudo muito rica. Logo, poderia-se analisar os critérios de integrabilidade dessa extensão não-comutativa da equação KdV de forma semelhante a que foi analisada no segundo capítulo para equação KdV.

5

Conclusão

Começamos dissertando sobre a integrabilidade de um sistema a nível clássico e a respeito da não-comutatividade. Prosseguindo, desenvolvemos alguns conceitos de integrabilidade clássica usando a equação KdV. Em seguida por meio de uma Mecânica Quântica Não -Comutativa, que inclui a não-comutatividade em todos os graus de liberdade da teoria, detalhe cerne do quarto capítulo, obtemos uma Mecânica Newtoniana Deformada. E por último, estudamos a evolução temporal das correntes de osciladores através da segunda lei de Newton deformada, e verificamos como se da a relação discreto-contínuo para as equações de movimento, agora deformadas pelo parâmetro não-comutativo.

Ao trilharmos esse caminho, descobrimos que a equação KdV é um sistema integrável, pois satisfaz os critérios de integrabilidade estabelicidos pelo teorema de Liouville e que a evolução temporal de $\widetilde{x}_i$ e $\widetilde{p}_i$, admitindo a mudança de variável proposta pelas equações (3.8), (3.9) são equações equivalentes as equações (3.20), (3.21). Além disso, vimos também a equivalência entre as equações (3.19) e (3.35) tomando o limite clássico da Mecânica Quântica. Outro fato de relevância está representado pela equação (4.1) que trata da não-comutatividade local e não local diferente da equação (3.1). E ao final desse caminho construimos generalizações não comutativas alternativas de teorias de campo bidimensionais aplicando o limite contínuo para as correntes de osciladores.

Dessa forma, nosso trabalho propoem uma forma alternativa para construir generalizações não comutativas, onde não se tem a necessidade de considerar o tempo como uma coordenada não comutativa. Isso é expresso explicitamente pelo contraste entre as equações (4.114) e (4.115).

Referências

[1] A. Connes, M.R. Douglas e A. Schwarz, JHEP **9802** (1998) 003;
M.R. Douglas e C. Hull, JHEP **9802** (1998) 008;
N. Seiberg e E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032.

[2] R. Szabo, Phys. Rep. **378** (2003) 207.

[3] J. Gomis e T. Mehen, Nucl. Phys. B **591** (2000) 265.

[4] I. Cabrera-Carnero e M. Moriconi, Nucl. Phys. B **673** (2003) 437.

[5] I. Cabrera-Carnero, JHEP **0510** (2005) 071.

[6] I. Cabrera-Carnero, J. Phys. A **39** (2006) 5979.

[7] M. Chaichian, M.M. Sheik-Jabbari e A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2716.

[8] V.P. Nair e A. Polychronakos, Phys. Lett. B **505** (2001) 267.

[9] C. Duval e P.A. Horvathy, Phys. Lett. B 479 (2000) 284;
C.Duval e P.A. Horvathy, J. Phys. A **34** (2001) 10097.

[10] P.-M. Ho e H.-C. Kao, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 151602.

[11] A. Eftekharzadeh e B.L. Hu, Braz. J. Phys. **35** (2A) (2005) 333.

[12] J.M. Carmona, J.L. Cortes, J. Gamboa e F. Mendez, Phys. Lett. B **565** (2003) 222;
J.M. Carmona, J.L. Cortes, J. Gamboa e F. Mendez, JHEP **0303** (2003) 058.

[13] I. Cortese e J. Antonio Garcia, Phys. Lett. A **358** (2006) 327.

[14] A. Peres, Quantum Theory: Concepts e Methods, Kluwer Academic Publishers (1993).

[15] C. Acatrinei hep-th/0106141.

[16] J.M. Romero, J.A. Santiago e J.D. Vergara, Phys. Lett. A **310** (2003) 9. (2003)

[17] B. Mirza e M. Dehghani, Commun. Theor. Phys. **42** (2004) 183.

[18] J.M. Romero e J.D. Vergara, Mod. Phys. Lett. A **18** (2003) 1673.

[19] S. Benczik, L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan e T. Takeuchi hep-th/0209119.

[20] F. Ardalan, H. Arfaei e M.M. Sheikh-Jabbari hep-th/9803067;
F. Ardalan, H. Arfaei e M.M. Sheikh-Jabbari, JHEP **9902** (1999) 016.

[21] J. Gamboa, M. Loewe e F. Mendez, Phys. Rev. D **70** (2004) 106006.

[22] W. Florek e M. Thomas, Acta Phys. Pol. A **97** (2000) 935.

[23] A. Micu e M.M. Sheikh-Jabbari, JHEP **0101** (2001) 025.

[24] M. Kruskal e N. Zabusky, J. Math. Phys. **5** (1964) 231.

[25] P. Roseneau, Phys. Rev. B 36 (1987), p. 5868. P. Roseneau, Phys. Lett. A **311** (2003) 39.

[26] G. Amelino-Camelia e T. Piran, Phys. Rev. D **64** (2001) 036005.

[27] J. Magueijo e L. Smolin, Phys. Rev. D **67** (2003) 044017.

[28] R.C. Myers e M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 211601.

[29] M. Takeda et al., Astrophys. J. **522** (1999) 225;
M. Takeda et al., Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1163;
D.P. Finkbeiner, M. Davis e D.J. Schlegel, Astrophys. J. **524** (1999) 867.

[30] A.A. Samarskii e A.N. Tikhonov, Equations of Mathematical Physics, Pergamon Press Ltd (1990)

[31] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Los Alamos Report LA-1940 (1955).

[32] D.J. Korteweg e F. de Vries, Phil. Mag. **39** (1895) 422.

[33] M. Toda, J. Phys. Soc. Jpn. **22** (1967) 431.

[34] A. Dimakis e F. Mueller-Hoissen hep-th/0007074.

[35] M. Legare, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 5489;
M. Legare hep-th/0012077.

[36] D.J. Kaup e A.C. Newell, Proc. R. Soc. London Ser. A **361** (1978) 413;
V.I. Karpman e E.M. Maslov, Sov. Phys. JETP **46** (1977) 281;
V.I. Karpman e E.M. Maslov, Sov. Phys. JETP **48** (1978) 252.

[37] Y. Kodama e M.J. Ablowitz, Stud. Appl. Math. **64** (1981) 225. MathSciNet

[38] E. Mann, J. Math. Phys. **38** (1997) 3772.

[39] A.P. Balacheran, T.R. Govindarajan, A.G. Martins e P. Teotonio-Sobrinho, JHEP **0411** (2004) 068.

[40] Michael R. Douglas, Nikita A. Nekrasov,Rev.Mod.Phys.**73** (2001) 977.

[41] R. Szabo, International Journal of Modern Physics, **19** (2004) 1837.

[42] Ashok Das, Integrable Models, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (1989)

[43] Nivaldo Lemos, Mecânica Analítica, Editora Livraria da Física **2ed** (2007)

[44] Peter A. Horvathy, Non-Commutative Mechanics in Mathematical & in Condensed Matter Physics, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, **2** (2006)

Apêndice A

Propriedades da Função Delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad x = 0, \\ 0 & \text{se} \quad x \neq 0, \end{cases} \tag{A.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{A.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a) \tag{A.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} f(x) dx = -\frac{\partial f(a)}{\partial x}. \tag{A.4}$$

$$\delta(x) \quad = \quad \delta(-x) \tag{A.5}$$

Definindo

$$f(x,y) = \delta(x-y), \quad z = x - y.$$

Note que

$$\partial_x f = \frac{d\delta(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \delta^{'}(z)$$

$$\partial_y f = \frac{d\delta(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = -\delta^{'}(z)$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\partial_x f = -\partial_y f. \tag{A.6}$$

Seja a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxg(x)\delta(x-y).$$

Por conviniência, escreve-se

$$f(z) = \delta(z), \tag{A.7}$$

definindo

$$z = x - y \tag{A.8}$$

que a derivada em relação a x é

$$\frac{dz}{dx} = 1. \tag{A.9}$$

Pelas equações (A.8) , (A.9), a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxg(x)\delta(x-y) \tag{A.10}$$

pode ser reescrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dzg(z+y)\delta(z). \tag{A.11}$$

Dessa forma, pela equação (A.3) da função delta de Dirac, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dzg(z+y)\delta(z) = g(y). \tag{A.12}$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxg(x)\delta(x-y) = g(y). \tag{A.13}$$

De posse dos resultados contidos nas equações acima, pode-se realizar algumas integrações que são uteis para obter os resultados das equações (2.90), (2.170) e (2.171). As integrais referentes a equação (2.90) são:

1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dyu(y)\frac{\partial^3\delta(x-y)}{\partial x^3} &= \\
-\int_{-\infty}^{\infty} dyu(y)\frac{\partial^3\delta(x-y)}{\partial y^3} &= \\
&= -\left[u(y)\frac{\partial^2\delta(x-y)}{\partial y^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dyu_y\frac{\partial^2\delta(x-y)}{\partial x^2} \\
&= \left[u_y\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial y}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dyu_{yy}\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial y} \\
&= -u_{yy}\delta(x-y) + \int_{-\infty}^{\infty} dyu_{yyy}\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial y} \\
&= u_{xxx}, \qquad (A.14)
\end{aligned}$$

onde assumimos que $u(x)$ e suas derivadas vão a zero quando $x \longrightarrow 0$.

2.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dy \left\{ u(y)\frac{\partial(u(x)\delta(x-y))}{\partial x} + u(y)u(x)\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x} \right\} &= \\
-3u(x)\int_{-\infty}^{\infty} dy u(y)\frac{\partial\delta(y-x)}{\partial y} &= 3uu_x. \quad \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

A integrail envolvida na equação (2.170) é

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta H_m}{\delta u(x)}\Big(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x) + u(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)\delta(x-y)\frac{\delta H_1}{\delta u(y)}u(x), \tag{A.16}$$

onde, por conviniência será definido

$$\frac{\delta H_m}{\delta u(x)} = f_m[u(x)] = f_m.$$

Assim

3.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dxdy f_m u(y)\frac{\partial^3\delta(x-y)}{\partial x^3} &= \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx f_m \int_{-\infty}^{\infty} dy u(y)\frac{\partial^3\delta(y-x)}{\partial y^3} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx f_m u_{xxx} \\
&= [f_m u_{xx}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx (f_m)_x u_{xx} \\
&= -[(f_m)_x u_{xx}]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dx (f_m)_{xx} u_x \\
&= [(f_m)_{xx} u_x]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx (f_m)_{xxx} u \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx (f_m)_{xxx} u \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}$$

onde assumimos que $u(x)$ e suas derivadas vão a zero quando $x \longrightarrow 0$.

4.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dxdy f_m u_x u(y)\delta(x-y) &= \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx f_m u_x \int_{-\infty}^{\infty} dy u(y)\delta(x-y) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx f_m u_x u(x) \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}$$

5.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dxdyf_m u(x)\frac{\partial u(y)\delta(x-y)}{\partial x} &= \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dxf_m u(x)\int_{-\infty}^{\infty} dyu(y)\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial y} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dxf_m u_x u(x) \\
&= [f_m u(x)u(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx(f_m u(x))_x u(x) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx(f_m u(x))_x u(x) \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

onde mais uma vez, $u(x)$ e suas derivadas vão a zero quando $x \longrightarrow 0$.

Para a equação (2.171) são realizados cálculos idênticos.

Derivada de um Funcional

Algumas equações no capítulo um foram obtidas através de algumas operações que serão melhor estudadas nesse apêndice.

Uma dessas operações foi a derivada de funcionais. Por isso é importante saber a definição de um funcional e saber também a definião da operação chamada derivada de um funcional. Portanto:

Definição A.1. *Seja* $\mathbb{V}$ *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$*; um funcional é toda função F:* $\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Definição A.2. *A derivada de um funcional F:* $\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ *é definida*

$$
\frac{\delta F[u(x)]}{\delta u(y)} = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{\epsilon}(F[u(x)+\epsilon\delta(x-y)] - F[u(x)]) \qquad \text{(A.20)}
$$

Agora vamos usar a definição acima para ver como se da a passagem da equação (2.77) para equação (2.78). Para esse caso em especifico,

$$
F[u] = \int_{\infty}^{\infty} dx\left(\frac{u^3}{3!} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\right) \qquad \text{(A.21)}
$$

da definição A.2, vem que

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F[u(x)]}{\delta u(y)} &= \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{1}{3!}\left(u+\epsilon\delta(x-y)\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+\epsilon\delta(x-y))}{\partial x}\right)^2\right) \\
&- F[u(x)]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}dx\Big[\frac{1}{3!}\Big(u^3(x)+3u^2(x)\epsilon\delta(x-y)+3u\epsilon^2(\delta(x-y))^2\\
&+ \epsilon^3(\delta(x-y)^3)\Big)-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2-\epsilon\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x}-\frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x}^2\Big]-F[u(x)]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F[u(x)]}{\delta u(y)} &= \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}dx\Big[\frac{u^3(x)}{3!\epsilon}+\frac{1}{2}u^2(x)\delta(x-y)+\frac{1}{2}u\epsilon(\delta(x-y))^2\\
&+ \frac{1}{3!}\epsilon^2(\delta(x-y))^3-\frac{1}{2\epsilon}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2-\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x}-\frac{1}{2}\epsilon\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x}^2-\frac{u^3}{\epsilon 3!}\\
&+ \frac{1}{2\epsilon}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Aplicando o limite e somando os termos semelhantes, temos

$$
\frac{\delta F[u(x)]}{\delta u(y)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dxu^2(x)\delta(x-y)-\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x}.
$$

Realizando uma integração por partes no segundo termo do lado direito da igualdade acima e usando a propriedade da função delta de Dirac nas duas integrais da mesma igualdade, logramos

$$
\frac{\delta F[u(x)]}{\delta u(y)} = \frac{1}{2}u^2(y)+\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} \tag{A.22}
$$

que é a equação (2.78) da capítulo um. Portanto, com a definição A.2 podemos obter a derivada de um funcional. Então, usando a definição 2.1 na equação (2.156), temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta H_0}{\delta u(y)} &= \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(u(x)+\epsilon\delta(x-y)-u(x)\right)\\
&= \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(\epsilon\delta(x-y)\right),
\end{aligned} \tag{A.23}
$$

que ao aplicar o limite, obtem-se

$$
\frac{\delta H_0}{\delta u(y)} = \int_{-\infty}^{\infty}dx\delta(x-y). \tag{A.24}
$$

Já para equação (2.157) fica

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta H_1}{\delta u(y)} &= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(u(x)^2+2\epsilon\delta(x-y)u(x)+(\epsilon\delta(x-y))^2-u(x)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(2\epsilon\delta(x-y)u(x)\right),
\end{aligned} \tag{A.25}
$$

que ao aplicar o limite, logra-se

$$
\frac{\delta H_1}{\delta u(y)} = u(y). \tag{A.26}
$$

Colchetes de Poisson

Definição A.3. *O colchete de Poisson de dois funcionais $A[u]$ e $B[u]$ é definido como*

$$\{A[u], B[u]\} = \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta A[u]}{\delta u(x)} f(x,y) \frac{\delta B[u]}{\delta u(y)}, \quad f(x,y) = \{u(x), u(y)\}. \tag{A.27}$$

Como exemplo da aplicação da definição A.3, vamos calcular o colchete de Poisson de $u(x)$ e $H[u]$, descritos abaixo

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x) \\ H[u] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{u^3}{3!} - \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2 \right) \\ f(x,y) &= \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Portanto, usando a deinição A.3, temos que

$$\begin{aligned} \{u(x,t), H[u]\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta u(x)}{\delta u(x)} f(x,y) \frac{\delta H}{\delta u(y)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-y) \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2(y) + \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} \right) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial y} \left(\frac{1}{2} u^2(y) + \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2(x) + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \right) \\ &= u u_x + u_{xxx} \\ &= u_t. \end{aligned} \tag{A.28}$$

No capítulo dois, vimos que o resultado acima é a evolução temporal da equação KdV, ou seja, a definição A.3 nos fornece a evolução de um funcional.