

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**Taís Freitas de Carvalho Castro**

**Aspectos do pensamento algébrico revelados por  
professores-estudantes de um curso de formação  
continuada em Educação Matemática**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**SÃO PAULO  
2009**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**Taís Freitas de Carvalho Castro**

**Aspectos do pensamento algébrico revelados por  
professores-estudantes de um curso de formação  
continuada em Educação Matemática**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação da Profa. Dra. Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão.

**SÃO PAULO  
2009**

## **Banca Examinadora**

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

*Dedico esse trabalho ao meu querido marido  
Richard, meu grande incentivador, que com  
paciência e tolerância me apoiou  
incondicionalmente. E aos meus amados  
filhos Vitor e Rafael que vivenciaram minhas  
dificuldades e conquistas e compreenderam  
com carinho os tantos momentos de ausência.*

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, a Deus por iluminar a minha vida em todos os momentos.

Aos meus pais Cláudio e Lúcia pela minha existência e educação.

À minha orientadora Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão pela orientação precisa e exigente e pelos preciosos momentos de aprendizagem.

Às professoras Celina Aparecida Almeida Pereira Abar e Auriluci de Carvalho Figueiredo, pelas observações durante o exame de qualificação, que trouxeram importantes contribuições para a pesquisa.

Aos professores-estudantes e à professora da disciplina que participaram desse estudo, pela colaboração.

Às amigas Kelly Rosa e Adriana Hamazaki que conheci durante o mestrado, pelo companheirismo, incentivo e apoio.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GEPEA), pelas valiosas contribuições durante as reuniões do grupo.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, que com toda experiência e sabedoria contribuíram para meu crescimento profissional.

À amiga Ana Mary, pelo incentivo inicial para o ingresso no Mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa.

A todos que de alguma maneira contribuíram para a concretização desse sonho, os meus eternos agradecimentos.

## RESUMO

Esse estudo tem o objetivo de analisar que aspectos do pensamento algébrico os professores-estudantes de um curso de formação continuada em Educação Matemática que participaram da pesquisa apresentaram ao resolverem problemas envolvendo a Álgebra. Esse objetivo se desdobra nas seguintes questões de pesquisa: Que aspectos do pensamento algébrico são explicitados nas resoluções dos professores-estudantes? Que aspectos da linguagem algébrica são explicitados em suas justificativas às resoluções? O uso da tecnologia contribuiu para a resolução de um dos problemas propostos? Em que sentido? Quanto ao pensamento algébrico adotamos como fundamentação teórica Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005). Os dados foram coletados em uma disciplina de um curso de pós-graduação stricto sensu em Educação Matemática durante a resolução de problemas comprometidos com a manifestação do pensamento algébrico. Participaram da investigação 15 professores daí a denominação professores-estudantes. Dos protocolos coletados constam as resoluções escritas dos problemas e questionários nos quais são requeridas explicações e justificativas matemáticas. Os resultados mostram que diversos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico foram explicitados nos procedimentos dos professores-estudantes e que esses nem sempre utilizaram a linguagem algébrica simbólica ao resolverem problemas envolvendo a Álgebra. Além disso, mostram que eles tiveram dificuldades em explicar os porquês de seus procedimentos e de dar justificativas matemáticas. Quanto ao uso da tecnologia, constatamos que este nem sempre auxilia na resolução de problemas matemáticos.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico; Linguagem Algébrica; Formação Continuada; Educação Matemática.

## **ABSTRACT**

This study aims to analyse the professors-students algebraic thoughts aspects in a Mathematics Education Continuing Formation Course when solving some Algebra problems. This objective have theses questions to be answered: Which are the professors-students algebraic thoughts aspects? Which are the algebraic language justifications used? Did the technology using help to solve at least one of the problems? In what? We used the theory by Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) and Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) to discuss about algebraic thoughts. The data were colected during a post-graduation class in Mathematics Education when the algebraic thoughts were used in order to solve some mathematical problems. Fifteen professors took part in the study that is why the nomination professors-students. From the colected forms there are written solutions on the problems and a quizz where mathematical explations and justifications were required. The conclusions show that many aspects of the algebric thoughts classificators are shown in the professors-students procedures and they didn't always use the algebraic language when solving Algebra problems. Besides, the study shows that they had difficulties in explaining the reasons of their procedures and in justifying mathematical resolutions. When comes to technology, we could notice that it not always helps in the mathematical problems resolution.

Key words: Algebraic Thought; Algebraic Language, Continuing Formation; Mathematics Education

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1: Ilustração referente ao Problema 2 .....                                           | 42  |
| Figura 2: Ilustração referente ao Problema 3 .....                                           | 43  |
| Figura 3: Ilustração referente ao Problema 5 .....                                           | 44  |
| Figura 4: Ilustração do aplicativo apresentado no Problema 2.....                            | 66  |
| Figura 5: Protocolo do questionário referente à resolução do Problema 2, Professor “K” ..... | 81  |
| Figura 6: Protocolo do questionário referente à resolução do Problema 2, Professor “N” ..... | 81  |
| Figura 7: Protocolo de resolução do Problema 3, Professor “M” .....                          | 87  |
| Figura 8: Protocolo de resolução do Problema 4, Professor “A” .....                          | 92  |
| Figura 9: Protocolo de resolução do Problema 5, Professor “M” .....                          | 101 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Quadro 1: Aspectos caracterizadores do pensamento algébrico .....                                                                                                                         | 32 |
| Quadro 2: Formação dos professores-estudantes participantes da pesquisa .....                                                                                                             | 37 |
| Quadro 3: Atuação profissional dos professores-estudantes participantes da pesquisa .....                                                                                                 | 39 |
| Quadro 4: Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram e operaram com a forma genérica do número ímpar .....                                                        | 50 |
| Quadro 5: Professores-estudantes que representaram, mas não operaram com a forma genérica do número ímpar .....                                                                           | 52 |
| Quadro 6: Professores-estudantes que não usaram a forma genérica do número ímpar .....                                                                                                    | 53 |
| Quadro 7: Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente .....                                                                                | 54 |
| Quadro 8: Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias .....                                                                                                                    | 55 |
| Quadro 9: Percepção e expressão das estruturas de um problema .....                                                                                                                       | 56 |
| Quadro 10: Transformação de uma expressão em outra mais simples .....                                                                                                                     | 58 |
| Quadro 11: Produção de mais de um modelo para um mesmo problema .....                                                                                                                     | 59 |
| Quadro 12: Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 1 .....                                                                              | 61 |
| Quadro 13: Grade de análise - indicadores baseados nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão. (2005) referentes ao Problema 1 ..... | 64 |
| Quadro 14: Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram e operaram com as formas genéricas das áreas das figuras .....                                              | 68 |
| Quadro 15: Professores-estudantes que não usaram as formas genéricas das áreas das figuras .....                                                                                          | 70 |
| Quadro 16: Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos .....                                                                                          | 73 |
| Quadro 17: Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões .....                                                                           | 75 |

|                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Quadro 18: Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 2.....                                    | 78  |
| Quadro19 Resolução representativa dos professores-estudantes referente ao Problema 3.....                                                      | 83  |
| Quadro 20: Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 3.....                                    | 85  |
| Quadro 21: Resolução representativa dos professores-estudantes referente ao Problema 4.....                                                    | 89  |
| Quadro 22: Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 4.....                                    | 91  |
| Quadro 23: Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram a forma genérica do número de bolinhas do $n$ -ésimo termo ..... | 95  |
| Quadro 24: Produção de mais de um modelo para um mesmo problema .....                                                                          | 97  |
| Quadro 25: Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 5.....                                    | 99  |
| Quadro 26: Síntese dos indicadores revelados nas resoluções dos 5 problemas ..                                                                 | 102 |

# SUMÁRIO

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| CAPÍTULO I .....                                                                         | 15 |
| PROBLEMÁTICA .....                                                                       | 15 |
| 1.1 PROBLEMÁTICA.....                                                                    | 15 |
| 1.2 PESQUISAS NO TEMA DO PENSAMENTO ALGÉBRICO.....                                       | 18 |
| 1.2.1 Pesquisas em âmbito nacional.....                                                  | 18 |
| 1.2.2 Pesquisas no sítio do programa pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP..... | 22 |
| 1.3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....                                                          | 27 |
| CAPÍTULO II .....                                                                        | 34 |
| METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA .....                                            | 34 |
| 2.1 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA.....                                                       | 35 |
| CAPÍTULO III .....                                                                       | 48 |
| RESULTADOS DAS ANÁLISES DOS DADOS.....                                                   | 48 |
| 3.1 RESULTADOS DA ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO PROBLEMA 1 .....                  | 49 |
| 3.1.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 4.....                    | 50 |
| 3.1.2 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 5.....                    | 52 |
| 3.1.3 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 6.....                    | 53 |
| 3.1.4 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 7.....                    | 54 |
| 3.1.5 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 8.....                    | 55 |
| 3.1.6 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 9.....                    | 57 |
| 3.1.7 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 10.....                   | 58 |
| 3.1.8 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 11.....                   | 59 |
| 3.1.9 Síntese dos indicadores revelados nas resoluções do Problema 1 .....               | 60 |
| 3.2 RESULTADOS DA ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO PROBLEMA 2.....                   | 65 |
| 3.2.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 14.....                   | 69 |
| 3.2.2 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 15.....                   | 71 |
| 3.2.3 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 16.....                   | 73 |
| 3.2.4 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 17.....                   | 75 |

|                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2.5 Síntese dos indicadores revelados no Problema 2 .....                                     | 77  |
| 3.2.6 Considerações sobre o uso do aplicativo na aplicação do Problema 2 ....                   | 80  |
| 3.3 RESULTADOS DA ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO<br>PROBLEMA 3 .....                      | 82  |
| 3.3.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 19.....                          | 84  |
| 3.3.2 Outras considerações sobre os resultados da análise das resoluções do<br>Problema 3 ..... | 85  |
| 3.4 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO PROBLEMA 4.....                                        | 88  |
| 3.4.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 21.....                          | 89  |
| 3.4.2 Outras considerações sobre os resultados da análise das resoluções do<br>Problema 4 ..... | 92  |
| 3.5 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO PROBLEMA 5.....                                        | 94  |
| 3.5.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 23.....                          | 95  |
| 3.5.2 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 24.....                          | 97  |
| 3.5.3 Síntese dos indicadores revelados no Problema 5 .....                                     | 98  |
| 3.5.4 Outras considerações sobre os resultados da análise das resoluções do<br>Problema 5.....  | 100 |
| 3.6 SÍNTESE DOS INDICADORES REVELADOS NAS RESOLUÇÕES DOS 5<br>PROBLEMAS .....                   | 102 |
| CAPÍTULO VI .....                                                                               | 104 |
| CONCLUSÕES .....                                                                                | 104 |
| REFERÊNCIAS .....                                                                               | 110 |
| ANEXO A – Termo de consentimento.....                                                           | 115 |
| ANEXO B – Questionário referente ao Problema 1.....                                             | 116 |

# CAPÍTULO I

## PROBLEMÁTICA

### 1.1 PROBLEMÁTICA

A busca por aprimoramento profissional foi a principal razão do nosso ingresso no mestrado acadêmico em Educação Matemática. Além disso, almejamos, com o mestrado, atuar em cursos de formação de professores do ensino básico e seguir rumo ao doutorado, com o objetivo ulterior de atuar em cursos de pós-graduação.

Esses motivos, aliados à importância que atribuímos à Álgebra nos levaram a optar pelo Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Nesse grupo, o projeto *O que se entende por Álgebra?* levanta questões sobre a formação do professor de matemática no Brasil, além de destacar a crescente desvalorização da Álgebra em todos os segmentos de ensino após a década de 1960 (período em que ganhou importância devido à valorização do formalismo) e o início de sua revalorização pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998). Esses referenciais baseados em pressupostos construtivistas, tanto no ensino da Álgebra quanto em outros campos da Matemática, demandam novas concepções de ensino.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), fazendo um panorama da educação escolar no Brasil, destacam que

[...] estabeleceu-se um núcleo conceitual teórico de diferentes correntes denominadas construtivistas, cujo pressuposto básico é tomar a aprendizagem como resultado da construção do conhecimento pelo aluno, processo em que se respeitam as idéias dos alunos prévias ao processo de aprendizagem. Esta proposta de condução do aprendizado tem sido aperfeiçoada no sentido de se levar em conta que a construção de conhecimento científico envolve valores humanos, relaciona-se com a tecnologia e, mais em geral, com toda a vida em sociedade, de se enfatizar a organicidade conceitual das teorias científicas, de se explicitar a função essencial do diálogo e da interação social na produção coletiva. (BRASIL, 1998, p. 48).

Segundo Maranhão, Machado e Coelho (2004, p.2) “[...] os novos conceitos e referenciais de cunho construtivista para o ensino básico incitam novos processos formativos de professores em todos os cursos, não apenas os de formação inicial, mas também os de formação continuada.” Esse contexto demanda uma “[...] urgência de estudos, nessa orientação, sobre a formação inicial do professor de Matemática e sobre programas de formação continuada de professores”.

Essas autoras destacam, após uma leitura dos títulos das teses e dissertações produzidas no Brasil no período de 1998 a 2001, que:

[...] é incipiente ainda a produção científica, pretendida neste projeto, que tem a intenção de abarcar estudos sobre a Aritmética e a Álgebra, investigando suas dimensões, as visões, as tendências no ensino e seu impacto na aprendizagem, bem como as articulações de noções e concepções matemáticas de professores, de alunos e, também, presentes em documentos curriculares, nos variados segmentos de ensino [...] (p. 9).

A abordagem construtivista amplia o sentido do termo conhecimento que deve levar em consideração além do conhecimento científico, o conhecimento cotidiano do aluno, seus valores, suas relações com mundo etc. Dessa forma, surge a necessidade de uma nova postura do professor para fazer frente a essa realidade. Baseados nessas exigências construtivistas, os PCN sugerem uma reflexão sobre o ensino da Álgebra:

Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (BRASIL, 1998, p. 117).

Ao tratarem da Álgebra no Ensino Fundamental, os PCN ressaltam sua importância como um espaço bastante significativo para o desenvolvimento e exercício da capacidade de abstração e generalização do aluno, além de lhe possibilitar aquisição de uma ferramenta poderosa para resolução de problemas. Propõem abordagens como identificação e generalização das propriedades aritméticas, observação de regularidades, investigação de padrões em seqüências

---

<sup>1</sup> Atualizamos essa leitura no decorrer desse trabalho no item: pesquisas no tema do pensamento algébrico.

numéricas e representações geométricas para a introdução da linguagem algébrica. Sugerem o ensino de expressões, equações, inequações e sistemas lineares através da resolução de problemas que abarquem contextos dentro e fora da matemática.

As necessidades de uma nova postura do professor com relação à construção do conhecimento, e de pesquisas no plano da formação continuada do professor, aliadas ao início da revalorização da Álgebra, nos levaram a escolher o tema: **Aspectos do pensamento algébrico revelados por professores-estudantes de um curso de formação continuada em Educação Matemática<sup>2</sup>**.

A evolução histórica do ensino e aprendizagem da Álgebra segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) revela que sempre foi dada prioridade a Álgebra como uma linguagem já constituída, enfatizando suas propriedades e regras de manipulação, ou seja, o seu caráter estrutural. Ensinavam-se muitas técnicas e poucos significados. Essas constatações levaram vários pesquisadores em Educação Matemática a repensarem o ensino e aprendizagem da Álgebra.

Autores como L. Lee, J. Mason, D. Fiorentini entre outros ressaltam a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico para a compreensão da Álgebra. A necessidade de observar seqüências, descobrir padrões, fazer generalizações, por exemplo, são fundamentais para que as variáveis ganhem significado.

Lee (2001) defende que nos primeiros anos de escolaridade, o pensamento algébrico deve ser incentivado e desenvolvido. Para isso, sugere questões do tipo: *E se?* , *É sempre assim?* a partir da observação de padrões, de semelhanças e diferenças e da manipulação das operações (desfazendo-as e revertendo-as). A autora afirma que a forma de comunicação desse pensamento deve ser a linguagem algébrica, mas sugere que haja uma evolução natural desta, em lugar de forçar a representação de símbolos literais e suas manipulações.

---

<sup>2</sup> A banca de qualificação pediu esclarecimento sobre o tipo de formação continuada aqui tratado, visto que essa informação traz esclarecimentos sobre uma variável importante da pesquisa. Assim, explicamos que se trata de um curso de pós-graduação stricto-sensu.

Para Mason, Graham e Johnston-Wilder (2007), o pensamento algébrico, em particular, o reconhecimento e articulação da generalidade, está próximo dos alunos que já chegam à escola trazendo consigo um grande potencial para pensar algebricamente. Esses alunos só precisam ser encorajados e incentivados a desenvolver essas potencialidades num ambiente que seja favorável. Sugerem também que a expressão da generalidade deve ser natural e prazerosa.

Mason, Graham e Johnston-Wilder (2007, tradução nossa) defendem que a generalização é fundamental para a matemática, pois faz parte de todos os tópicos matemáticos e afirmam que “uma lição sem que os alunos tenham a oportunidade de expressar a generalidade não é uma lição matemática.”<sup>3</sup>

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.88) vão além e definem pensamento algébrico como: “[...] um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da matemática como também em outras áreas do conhecimento.” Para detectá-lo e desenvolvê-lo, os autores apontam elementos caracterizadores desse tipo de pensamento (percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, presença do processo de generalização, etc.). Nesse aspecto, é essencial compreender como deve ser a relação entre pensamento e linguagem algébrica, uma relação dialética, que será apresentada mais adiante, no item fundamentação teórica.

## **1.2 PESQUISAS NO TEMA DO PENSAMENTO ALGÉBRICO**

A seguir apresentamos dissertações e teses que tratam do pensamento algébrico em diferentes contextos visando levantar o que vem sendo estudado pelos pesquisadores em Educação Matemática sobre o tema.

### **1.2.1 Pesquisas em âmbito nacional**

---

<sup>3</sup> A lesson without learners having the opportunity to express a generality is not a mathematic lesson. (MASON, GRAHAM e JOHNSTON-WILDER, 2007, p.ix)

Fizemos uma busca no sítio da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) utilizando como palavra-chave: pensamento algébrico. Em seguida, selecionamos as pesquisas encontradas a partir de 2002 com a finalidade de atualizar as leituras feitas por Maranhão, Machado e Coelho (2004) no que se refere ao tema. Por fim, selecionamos as pesquisas no âmbito da Educação Matemática e obtivemos os resumos dos trabalhos que passamos a relatar de maneira sintética.

A pesquisa de Schwantes (2003) objetivou entender o que caracteriza e sustenta o pensamento algébrico e como ele pode ser desenvolvido no ensino fundamental. O percurso investigativo constituiu-se em um enfoque no qual a produção de significados foi compartilhada entre os participantes, numa interlocução dinâmica que visou à qualidade no processo ensino-aprendizagem. Daqui pode-se depreender que se tratou de uma pesquisa aplicada a estudantes do ensino fundamental. Os resultados revelaram que é possível, pela posse da linguagem simplificada, identificar os significados produzidos na interlocução através da observação e comunicação das idéias matemáticas presentes em situações-problema.

Miranda (2003) identificou e analisou as dificuldades que interferem na apropriação de conceitos do campo algébrico junto a professores de matemática e alunos de 5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> séries do ensino fundamental. A pesquisadora investigou as diferentes concepções de matemática e educação algébrica dos sujeitos envolvidos no processo baseada na análise de seus depoimentos e dos erros cometidos pelos alunos ao realizarem atividades matemáticas, identificou os fatores que dificultam a aprendizagem da álgebra estudou-os ressaltando as implicações pedagógicas emergidas e sinalizou com orientações para a elaboração de uma nova prática pedagógica de educação algébrica. Os resultados mostram que as dificuldades que interferem no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos da Álgebra decorrem de uma prática pedagógica apoiada na reprodução do sistema simbólico que constitui a linguagem algébrica, desprezando o desenvolvimento do pensamento algébrico que deveria estar respaldado na apropriação de significados. A pesquisadora ressalta a necessidade da formação de grupos de estudos que possibilitem aos professores realizar uma reflexão continuada como auxílio para

compreenderem melhor as especificidades do saber algébrico e os conduzam à superação das dificuldades ou obstáculos identificados.

Trentin (2005) investigou se o ensino do tópico Expressões Algébricas, abordado por uma seqüência didática elaborada pelo pesquisador e, posteriormente, comparada com o ensino oferecido pelos livros didáticos, instrumentalizaria uma forma de pensar, definida por Pensamento Algébrico. O pesquisador aplicou a seqüência, elaborada a partir de situações-problema, para um grupo de alunos, que chamou de experimental, enquanto o outro grupo, o de referência, teve o assunto introduzido a partir do material didático adotado pela instituição de ensino. Antes, porém, os dois grupos foram submetidos a um pré-teste. Após a introdução do tópico, ambos foram submetidos a um pós-teste cujos resultados foram analisados sob os seguintes aspectos: desempenho geral de cada grupo, desempenho por item, por objetivo, a evolução de cada grupo por questão e a análise da qualidade dos resultados obtidos. As análises permitiram concluir que a abordagem apresentada pela seqüência didática elaborada pelo pesquisador fornece indícios de contribuição para a instrumentalização do Pensamento Algébrico.

Freire (2007) estudou o desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino fundamental (3º e 5º ano). A pesquisadora destacou que os alunos não estão desenvolvendo conceitos matemáticos suficientes para a série que estão concluindo devido ao ensino que é desprovido de significado e prioriza a manipulação simbólica. Baseada em pesquisas que mostram que ambientes computacionais ajudam no desenvolvimento de conceitos matemáticos, a pesquisadora utilizou como alternativa para a introdução da Álgebra o que designa de objetos de aprendizagem com o propósito de facilitar o processo de ensino e aprendizagem. O objetivo do trabalho foi investigar como esses objetos podem contribuir no desenvolvimento de pensamento algébrico em alunos de séries iniciais. Os resultados foram elaborados a partir de uma entrevista que analisou o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos durante as atividades. O estudo concluiu que os alunos superam suas dificuldades iniciais sobre as atividades proposta e elaboram estratégias de resolução que facilitam a compreensão de conceitos algébricos exigidos em séries mais avançadas.

Santos (2007) investigou a introdução do pensamento algébrico nos livros didáticos de matemática, e a influência que sua abordagem e o discurso dos autores causam no ensino e aprendizagem da álgebra em sala de aula. Além disso, investigou a influência dos livros didáticos na concepção algébrica do professor e em suas ações pedagógicas. O estudo baseou-se na análise dos discursos de professores e das informações orais e escritas de alunos e na análise do conteúdo dos manuais didáticos e do discurso dos autores dos livros adotados. A pesquisadora estabeleceu diálogos com professores e alunos sobre as dificuldades no ensino e aprendizagem da álgebra e sobre o entendimento do professor em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico. A análise dos dados revelou alguns aspectos de como os docentes pesquisados concebem o ensino da álgebra, suas crenças algébricas e como estas estão impregnadas de mitos, conjecturas e preconceitos devido à sua formação acadêmica e à forma simplificada como a álgebra vem sendo apresentada. A análise indicou também que as ações pedagógicas desses professores refletem um currículo prescrito e/ou influenciado pelo livro didático. A pesquisadora sugere, nas considerações finais, atividades visando contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno. Além disso, ressalta que o uso do livro didático de forma sábia e consciente pode ser fundamental no trabalho com a Álgebra, mas que o professor deve utilizar também outros recursos no ensino da matemática.

Scarlassari (2007) estudou as dificuldades na aprendizagem da Álgebra em situações diferenciais de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental. A pesquisadora observou duas turmas de 6ª série submetidas a aulas de Álgebra numa abordagem tradicional (manipulação simbólica, resolução e correção de listas de exercícios). Depois, atuando como pesquisadora e professora, aplicou em outras duas turmas de 6ª série atividades que propunham o desenvolvimento dos nexos conceituais da álgebra elementar: fluência, variável, campo de variação e linguagem. A partir da análise das resoluções de uma mesma lista de exercícios aplicada a todas as turmas participantes, a pesquisadora levantou as dificuldades apresentadas. A comparação dos resultados entre as turmas submetidas às aulas tradicionais e as que tiveram aulas diferenciadas mostrou que as últimas apresentaram menos dificuldades na resolução das atividades e menor frequência de erros. Com isso, a pesquisadora concluiu que essa forma de abordagem

diferenciada proporcionou uma aprendizagem mais significativa das idéias algébricas do que a abordagem tradicional.

### **1.2.2 Pesquisas no sítio do programa pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP**

Fizemos uma busca no sítio do programa de pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP, utilizando como palavras-chave pensamento algébrico, generalização de padrões, expressões, equações, inequações e Álgebra. Selecionamos, em seguida, as dissertações e teses a partir de 2002, com o mesmo objetivo das buscas no sítio da CAPES, ou seja, atualizar as leituras feitas por Maranhão, Machado e Coelho (2004) no que se refere ao tema. Ao final, após as leituras dos resumos, destacamos aquelas que se relacionavam com o pensamento algébrico.

No seio do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) do programa de pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP, do qual fazemos parte, encontramos várias dissertações e teses com o tema pensamento algébrico. São os trabalhos de: Mondanez (2003), Nakamura (2003), Santos (2005), Almeida (2006), Perez (2006), Figueiredo (2007), Ribeiro (2007), Silva (2007), Aquino (2008), Santolin (2008) e Santos (2008).

A generalização de padrões é um dos aspectos do pensamento algébrico que serão utilizados como base teórica de nossa investigação. Sua importância para a introdução da Álgebra é atestada por vários autores e sugerida nos PCN.

Vale e Pimentel (2005) consideram que os padrões são a base do pensamento algébrico e afirmam que a generalização surge com o reconhecimento de padrões e a identificação de relações.

Mason, Graham e Johnston-Wilder (2007) defendem o trabalho com padrões como um caminho para a generalização e a construção de uma linguagem simbólica significativa.

Mondanez (2003), Nakamura (2003), Aquino (2008) e Santolin (2008) que desenvolveram suas pesquisas com alunos do Ensino Fundamental e Perez (2006) que investigou alunos do Ensino Médio, aplicaram atividades envolvendo observação e generalização de padrões com o objetivo de estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Dentre os resultados, essas pesquisas revelaram avanços dos alunos no desenvolvimento do pensamento algébrico bem como uma diversidade de estratégias de resolução.

Almeida (2006) desenvolveu o tema generalização de padrões com professores do Ensino Fundamental, buscando investigar se eles utilizavam em suas aulas, atividades que envolviam o tema e, em caso afirmativo, quais as previsões dos professores sobre as estratégias de resolução dos alunos. A pesquisadora concluiu que os professores utilizavam esporadicamente esse tipo de atividade e que supuseram que seus alunos utilizariam principalmente as estratégias de desenho e contagem.

Santos (2008) investigou um grupo de professores em formação continuada ao realizarem pesquisas em sua própria sala de aula a respeito de atividades de observação e generalização de padrões. Essa experiência levou os professores a notarem a importância do tema e passarem a considerar questões que envolvem padrões em suas aulas como parte da rotina escolar. Além disso, observou-se uma mudança no olhar dos professores durante a análise dos protocolos, que passaram a observar e buscar compreender o raciocínio dos alunos, ao invés de classificar as resoluções apenas como certas ou erradas. Nessa pesquisa, supomos que, ao trabalharem em suas aulas com atividades que estimulam o pensamento algébrico dos alunos, os professores perceberam a importância de observar como esse pensamento se desenvolve, ou seja, o processo, ao invés de olhar apenas o resultado final das resoluções.

No nosso entender, no uso das equações o pensamento algébrico se manifesta através da linguagem algébrica simbólica. Segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) no ensino “antigo”, as equações eram diretamente associadas à resolução de problemas, ou seja, tinham um caráter essencialmente pragmático. Por outro lado, durante o ensino “moderno”, a preocupação exacerbada com o

fundamentalismo e o rigor, associava o ensino de equações às suas transformações e propriedades estruturais de forma descontextualizada e estática.

Para Maranhão (2007, p.1), “Expressões, equações e inequações têm um papel importante no desenvolvimento de diversos campos da matemática e do conhecimento humano em geral”. A autora defende que a articulação desses tópicos com problemas de outras áreas do conhecimento contribuem, por exemplo, para que os conceitos de variável, incógnita e parâmetro ganhem sentido.

Ribeiro (2007) pesquisou as diferentes formas de conceber a noção de equação, que chamou de multisignificados das equações. Segundo o pesquisador, “[...] não podemos limitar o estudo de equações aos seus procedimentos e técnicas de resolução, se desejarmos que os estudantes sejam capazes de utilizar essa idéia matemática de forma significativa [...]” (p.89). Dessa forma, sustenta como argumento de pesquisa que: “Embora não seja um objeto do saber, a noção de equação possui vários significados e deve tomar lugar junto aos objetos de ensino” (p.89). Após categorizar e nomear os multisignificados das equações, o pesquisador conclui que no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra deve-se considerar o significado axiomático-postulacional. Nele, a idéia de equação pode ser trabalhada com os seus vários significados de forma integrada, afirmando que “[...] não precisamos nos preocupar em definir equação, mas sim, tomá-la como uma noção primitiva, o que nos permite o trabalho em sala de aula dessa idéia matemática”. (p. 131)

Silva (2007) apresentou uma proposta de ensino para a introdução dos conceitos de variável, incógnita e equação do 1º grau para alunos de Educação para Jovens e Adultos (EJA). As atividades estimulavam o desenvolvimento do pensamento algébrico apoiando-se na modelagem matemática e nos estudos da Etnomatemática. O pesquisador constatou, em sua análise, que os alunos participantes apresentaram um desempenho satisfatório e que o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos algébricos é estimulado quando se inicia a partir da resolução de situações-problema concretas, pertencentes ao cotidiano do aluno.

Os estudos das concepções de Educação Algébrica de professores revelam como eles concebem o ensino da Álgebra. Nesses estudos emergem relações entre pensamento e linguagem algébrica como podemos observar nos trabalhos a seguir.

Santos (2005) investigou concepções do professor de matemática sobre o ensino da Álgebra. Dentre os resultados, todos os professores, no total de 28, apresentaram a concepção de “Álgebra como Aritmética Generalizada” e 23 deles apresentaram a concepção de “Álgebra como o estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas”<sup>4</sup> de acordo com a fundamentação teórica adotada. A pesquisadora mostrou-se preocupada com esses resultados uma vez que, segundo ela, a primeira pode levar o aluno a recorrer sempre a casos particulares deixando de generalizar, supondo ser uma forma facilitadora da aprendizagem, e a segunda poderá “[...] desenvolver, no aluno, apenas a capacidade de memorização, que segundo Ausubel é o nível mais elementar da ocorrência de aprendizagem, pois, tende a ser facilmente esquecida”. (SANTOS, 2005, p. 99).

Figueiredo (2007) pesquisou saberes e concepções de Educação Algébrica mobilizados em um curso de licenciatura em Matemática, por alunos, professores e coordenadores. A pesquisadora, apoiando-se em pesquisas anteriores, afirma que as dificuldades com tópicos de Álgebra apresentadas por alunos dos diversos segmentos de ensino podem estar relacionadas com suas próprias concepções de Educação Algébrica e de seus professores. Usou diversos referenciais, entre eles o de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que também interessam à presente pesquisa. Dentre os resultados que apresentou, com base nesses autores, a pesquisadora concluiu que, quanto aos professores houve o predomínio da concepção Fundamentalista-estrutural e quanto aos alunos da Linguístico-pragmática. Tais concepções de Educação Algébrica, de acordo com os autores, enfatizam a linguagem em detrimento do pensamento algébrico.

Dentre os saberes revelados pelos alunos, Figueiredo (2007) constatou que estes sentem necessidade de serem capazes de justificar os porquês das atividades que realizam e não apenas saber resolvê-las. A pesquisadora acredita que os

---

<sup>4</sup> Aspas da autora

alunos estejam se referindo a “[...] um trabalho que articule os aspectos sintático e semântico da Álgebra elementar [...]” (p. 272). Nesse caso, podemos perceber que os próprios alunos têm consciência da necessidade de desenvolver o pensamento algébrico (“os porquês”) aliado ao trabalho de manipulação algébrica.

A revisão bibliográfica revelou que diversos pesquisadores têm se dedicado a temas que abarcam o pensamento algébrico e seu ensino. Isso atesta a relevância de investigarmos o tema. Das pesquisas relatadas nesse estudo, apenas a investigação de Santos (2008) trabalhou com professores em formação continuada, porém o foco foi a generalização de padrões. Assim como a de Santos (2008), as pesquisas desenvolvidas no seio do GEPEA trouxeram importantes contribuições para o projeto *O que se entende por Álgebra?*. Porém este tem se revelado profícuo por não possuir pesquisas que focalizem a manifestação e desenvolvimento do pensamento algébrico de professores em formação continuada. Por esse motivo, o projeto carece de nossa investigação, uma vez que demanda estudos sobre modos de pensar do professor, conforme afirmam Maranhão, Machado e Coelho (2004):

O estudo no plano do professor pesquisa conhecimento e modos de pensar de professores com relação aos assuntos em que ensina, suas escolhas, suas formas de avaliação. Visa-se reconhecer como são integrados os saberes e modos de pensar do professor [...] (p. 13).

Dentro dessa perspectiva, a investigação tem a intenção de olhar para a expressão do pensamento do professor, mais especificamente do pensamento algébrico do professor em formação continuada. Com esse propósito, analisamos resoluções de problemas comprometidos com a manifestação desse pensamento, que envolvem expressões matemáticas, equações e inequações. Dessa forma, dentro do projeto *O que se entende por Álgebra?*, esse estudo se insere no subprojeto *Expressões, equações e inequações*, linha de pesquisa *A Matemática na estrutura curricular e formação de professores*.

Maranhão (2007) ressalta a importância dos tópicos expressões, equações e inequações não só na matemática, mas também em outros campos do conhecimento, quando afirma que:

Expressões, equações e inequações têm um papel importante no desenvolvimento de diversos campos da matemática e do conhecimento

humano em geral. Se, de um lado, esses tópicos são ferramentas para a resolução de problemas intra e extra matemáticos, de outro, problemas de outras áreas do conhecimento humano contribuem para que conceitos como os de variável, incógnita e parâmetro ganhem sentido. (p.1)

Atualmente, a tecnologia é um recurso que faz parte do ensino da matemática. Sobre esse aspecto, Maranhão, Machado e Coelho (2004) destacam:

O uso recente de computadores e calculadoras no ensino levanta questões sobre as contribuições das novas tecnologias para o ensino e aprendizagem de Matemática, para não mencionar a possibilidade de que essa introdução gere por si só novos problemas de compreensão e raciocínio. (p.3)

Nesse sentido, Mason, e Johnston-Wilder (2006) apresentam um substancial interesse na relação entre o pensamento matemático e a geometria dinâmica no ensino e aprendizagem da matemática.

A obra citada vem acompanhada de um CD-ROM abordando geometria dinâmica, que permite a visualização e variação das figuras conforme o enunciado de problemas propostos que se voltam para a formação continuada de professores. Um desses problemas é abordado na presente pesquisa. Por isso, não deixamos de lado a análise sobre o uso de um recurso tecnológico, buscando detectar se a exploração do movimento de uma figura contida no CD-ROM citado auxilia ou se de alguma maneira restringe a resolução de um dos problemas pelos professores-estudantes.

Neste quadro, definimos nosso objetivo que é **analisar que aspectos do pensamento algébrico os professores-estudantes de um curso de formação continuada em Educação Matemática explicitam ao resolverem problemas envolvendo a Álgebra.**

A seguir, apresentamos as idéias dos autores em que nos apoiamos para desenvolver nosso trabalho.

### 1.3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nessa investigação, adotamos como base teórica os seguintes autores: Nacarato e Paiva (2006) relativos à pesquisa sobre professores em formação

continuada e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) relativos ao tema do pensamento algébrico.

Sobre o modo de conceber a formação, Nacarato e Paiva (2006, p. 14) destacam que “[...] é preciso não dicotomizá-la – classificando-a em ‘inicial’ e ‘continuada’ –, e sim considerá-la como um *continuum* (GARCIA, 1999) ou como permanente (IMBERNÓN, 2004)”. Assim, essas autoras situam as pesquisas sobre professores em formação continuada dentre aquelas relacionadas à formação docente, tendo em vista essa concepção de desenvolvimento contínuo do professor.

Segundo Nacarato e Paiva (2006), o GT 7<sup>5</sup> - que tem como um dos objetivos *incentivar, discutir, analisar e divulgar/socializar pesquisas e estudos de experiências inovadoras, com ênfase em processo de formação inicial e continuada* –, categorizou os trabalhos apresentados no II SIPEM<sup>6</sup> em diversas linhas temáticas. Dentre elas, acreditamos que nossa pesquisa se aproxima da seguinte: *Pesquisas realizadas com participantes de cursos e/ou projeto*, que abarca pesquisas com professores participantes de cursos de formação continuada.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), no artigo intitulado *Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar*, apresentam alguns elementos que possibilitam repensá-la a partir de uma análise comparativa entre as concepções de Educação Algébrica identificadas durante a história do ensino da Matemática e as concepções de Álgebra relativas a algumas leituras do seu desenvolvimento histórico.

A comparação entre as concepções de Educação Algébrica revelou que em todas ocorre uma redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. Partindo de uma linguagem simbólica já constituída, essas concepções reduzem o ensino-aprendizagem da Álgebra ao transformismo algébrico<sup>7</sup>. A ênfase recai sobre o caráter sintático (estrutural) da Álgebra e não sobre o caráter semântico

<sup>5</sup> Grupo de Trabalho “Formação do professor que ensina Matemática”, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)

<sup>6</sup> II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática

<sup>7</sup> O termo transformismo algébrico é usado por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) para “[...] designar o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas.” (p. 83)

(significação). Da mesma forma, a análise das relações entre as concepções de Álgebra e de Educação Algébrica mostra que há uma consonância entre elas no sentido de privilegiar a linguagem sobre o pensamento algébrico.

A partir dessas constatações, esses autores sugerem que para repensar a Educação Algébrica deve-se repensar a relação entre pensamento e linguagem. E ressaltam que há uma tendência no ensino da Álgebra tradicional a acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta através da linguagem algébrica, mas, por outro lado, afirmam que a linguagem, em princípio, é a expressão de um pensamento. Assim, defendem que existe uma relação não de subordinação, mas dialética, entre pensamento e linguagem algébrica, na qual o pensamento pode se desenvolver independente da linguagem e vice-versa, porém um ajuda no desenvolvimento do outro.

Os autores indicam alguns elementos caracterizadores desse tipo de pensamento: “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 87).

Após caracterizar o pensamento algébrico, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) o definem como “[...] um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento”. (p.88)

Ao analisar sete situações que possibilitam a manifestação do pensamento algébrico, constatam que nos seus enunciados e/ou resoluções, esses elementos revelam-se em diferentes linguagens. Baseados nisso, sustentam que o pensamento algébrico pode ser expresso de outras formas além da linguagem algébrica, tais como: linguagem natural, aritmética e geométrica.

Dada a importância de desenvolver o pensamento algébrico tanto para a Matemática quanto para outros campos do conhecimento, os autores levantam a questão de qual seria o melhor momento para a iniciação ao pensamento algébrico

no currículo escolar. E afirmam que, como não é necessário dominar a linguagem algébrica para expressar o pensamento algébrico, seu desenvolvimento deve ser incentivado desde o início da vida escolar.

Com essas reflexões, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) concluem que é preciso focar a relação entre pensamento e linguagem, pois o ensino da Álgebra não pode se restringir à existência de uma linguagem algébrica já constituída e ao domínio de regras e técnicas de manipulação.

Porém esses autores ressaltam a importância de se desenvolver gradativamente uma linguagem que seja mais apropriada à expressão do pensamento algébrico para uma aprendizagem significativa da Álgebra, quando afirmam que:

[...] se a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra, o menosprezo ao modo de expressão simbólico-formal constitui-se também em impedimento para o seu pleno desenvolvimento. (1993, p. 89)

Ressaltam que, a partir de um determinado momento, a linguagem algébrica simbólica desempenha um papel fundamental na formação do pensamento algébrico abstrato. Isto porque ela permite: abreviar resoluções devido ao simbolismo conciso; facilitar a simplificação de cálculos pela possibilidade das transformações de expressões simbólicas em outras equivalentes e simplificadas; operar com quantidades variáveis, possibilitando a compreensão de situações que envolvam variação.

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) retomam a relação dialética entre pensamento algébrico e linguagem, afirmando, com base em Vygotsky (1993)<sup>8</sup>, que se de um lado a linguagem é expressão de idéias algébricas na resolução de problemas, de outro, à medida que o aluno desenvolve uma linguagem apropriada para sua expressão, o pensamento algébrico ganha força.

Para Vygotsky (1993), pensamento e linguagem são interdependentes, um promovendo o desenvolvimento do outro e vice-versa. Ou seja, no processo ensino-aprendizagem, a linguagem não antecede necessariamente o

---

<sup>8</sup> VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

pensamento, embora a apropriação da linguagem possa potencializar e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico. (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 4-5)

Baseados em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), tendo em vista desenvolver a interdependência entre linguagem e pensamento algébrico, Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), apresentam uma quarta concepção de Educação Algébrica. Nela, o ensino da Álgebra deve iniciar a partir de tarefas exploratório-investigativas<sup>9</sup> que problematizem “fatos tidos como aritméticos ou geométricos”<sup>10</sup> (p. 7) que busquem garantir a manifestação dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, tais como: fazer generalizações numéricas, representar grandezas, incógnitas e variáveis. Além disso, deve-se incentivar o aluno a fazer o caminho inverso, buscando produzir vários significados e sentidos para expressões algébricas e trabalhar com as transformações das expressões algébricas em outras equivalentes, enfatizando nesse momento o transformismo algébrico.

Segundo Ponte (2003), as tarefas podem ser de quatro tipos diferentes: exercícios, problemas, explorações e investigações. Os exercícios são tarefas mais fáceis e de estrutura fechada; os problemas, também, são de estrutura fechada, porém com maior grau de dificuldade; as explorações são mais livres e menos sistemáticas, geralmente utilizadas para introdução de um tema novo ou problematização e produção de significado para conceitos matemáticos; as investigações são situações-problema<sup>11</sup> abertas e desafiadoras que dão liberdade aos alunos de fazer inúmeras tentativas de exploração e investigação.

Para referir-se ao tipo de tarefa sugerida para a introdução da Álgebra, sem fazer distinção entre exploração e investigação, Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), baseados em Ponte (2003), cunham o termo tarefas exploratório-investigativas.

A respeito do termo problema, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM 2006), baseados no desenvolvimento dos novos paradigmas

---

<sup>9</sup> Sentido do termo no próximo parágrafo.

<sup>10</sup> No nosso entender, ao citarem “fatos tidos como aritméticos”, os autores queiram se referir a relações numéricas e propriedades das operações, ou seja, proposições/sentenças aritméticas válidas matematicamente. Analogamente para “fatos geométricos”.

<sup>11</sup> Sentido do termo explicado em seguida.

educacionais construtivistas e perante as limitações dos problemas fechados, propõem o trabalho com “problemas abertos” e “situações-problemas”. Ressaltam que o aluno diante desses dois tipos de problemas deve fazer tentativas, formular hipóteses, testá-las e validar seus resultados, atuando como o matemático no exercício de sua profissão, guardando-se as devidas proporções. Afirmam, ainda, que:

O problema do tipo “aberto” procura levar o aluno à aquisição de procedimentos para a resolução de problemas. [...] O conhecimento passa a ser entendido como uma importante ferramenta para a resolução de problemas, e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em momentos de “provas escritas”.

[...] a situação problema [...] leva o aluno à construção do novo conhecimento matemático. De maneira bastante sintética, podemos caracterizar uma situação-problema como uma situação geradora de um problema cujo conceito, necessário à sua resolução, é aquele que queremos que o aluno construa. (BRASIL, 2006, p. 84).

Ressaltando que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradativamente, Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) ampliam os aspectos caracterizadores do pensamento algébrico presentes em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), apresentando-os como compilamos no Quadro 1.

**Quadro 1.** Aspectos caracterizadores do pensamento algébrico

| Aspectos caracterizadores do pensamento algébrico                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos;                  |
| Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema;                      |
| Produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema;                              |
| Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica;                                      |
| Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; |
| Transformar uma expressão aritmética em outra mais simples;                                          |
| Desenvolver algum tipo de processo de generalização;                                                 |
| Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias;                                           |
| Desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.           |

Fonte: (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 5)

Esses aspectos caracterizadores do pensamento algébrico são empregados na análise dos dados dessa pesquisa.

Com base no referencial teórico, pretendemos perseguir o nosso objetivo, que é de analisar que aspectos do pensamento algébrico os professores-estudantes de um curso de pós-graduação stricto sensu em Educação Matemática apresentam ao resolverem problemas envolvendo a Álgebra. Esse objetivo se desdobra nas seguintes questões de pesquisa:

1. Que aspectos do pensamento algébrico são explicitados nas resoluções dos professores-estudantes?
2. Que aspectos da linguagem algébrica são explicitados em suas justificativas às resoluções?
3. O uso de um recurso tecnológico pela professora da disciplina contribui para a resolução pelos professores-estudantes de um dos problemas propostos? Em que sentido?

## CAPÍTULO II

### METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Esta pesquisa é diagnóstica, pois busca analisar aspectos do pensamento algébrico revelados nos procedimentos de resolução de problemas por parte dos professores-estudantes de um curso de formação continuada em Educação Matemática.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2007), uma pesquisa é diagnóstica “[...] quando o pesquisador, diante de uma problemática ainda pouco definida e conhecida, resolve realizar um estudo com o intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre ela” (p.69). Como já foi exposto na problemática, não encontramos pesquisas que focalizem aspectos do pensamento algébrico revelados por professores dentro do subprojeto *Expressões, equações e inequações* e do projeto *O que se entende por Álgebra?*<sup>12</sup> que demanda pesquisas sobre modos de pensar do professor. Sendo assim, o projeto carece de informações esclarecedoras sobre esse assunto.

Por essa razão em particular, o referido projeto demanda a realização de pesquisas diagnósticas. Desta maneira, o tipo de pesquisa escolhido está em consonância com o interesse desse projeto.

Maranhão, Camejo e Machado (2008) atestam a eficiência do uso de instrumentos de análise desse tipo de pesquisa quando, ao diagnosticarem como alunas de um curso de formação de professores analisam produções de alunos do 2º ano do ensino fundamental, afirmam que não só o instrumento atingiu o objetivo a que se propunha como trouxe à tona outras idéias dessas alunas. E concluem: “Ousamos afirmar que essa percepção foi até mais importante do que o objetivo estabelecido para essas análises, pois fez emergir idéias recônditas dessas professoras-alunas [...]” (p. 167).

---

<sup>12</sup> O subprojeto e o projeto citados pertencem ao Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica da PUC-SP do qual fazemos parte.

## 2.1 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Os dados da pesquisa foram coletados em uma universidade, durante a resolução de cinco problemas por parte dos estudantes de um curso de pós-graduação *stricto sensu* em Educação Matemática. Escolhemos uma das disciplinas deste curso em conjunto com a orientadora, pelo fato de ela abordar problemas comprometidos com a manifestação de aspectos do pensamento algébrico pelos estudantes, através de justificativas dos seus procedimentos nas resoluções dos problemas.

Gostaríamos de ressaltar que por investigarmos o pensamento algébrico de professores em um curso de pós-graduação *stricto sensu* de uma instituição de ensino superior devemos considerar variáveis importantes na pesquisa, tais como: o fato de ter se realizado em aulas regulares semanais, envolvendo notas na disciplina selecionada. Por isso, apelamos ao contrato didático (no sentido de Brousseau<sup>13</sup>) estabelecido, o que diferencia este grupo de professores dos outros cursos de formação continuada em que essas variáveis não se apresentam. A relação entre professor, aluno e saber se estabelece pautada em trabalhos e atividades avaliadas.

Participaram desta investigação, estudantes, todos professores de matemática, os quais denominamos, por essa razão, professores-estudantes. A escolha dos sujeitos se deu pela necessidade de pesquisas que contemplem os modos de pensar do professor nos diversos níveis de formação conforme sugere o projeto *O que se entende por Álgebra?* do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica da PUC-SP. Quinze professores-estudantes participaram da pesquisa. Ao longo dessa investigação, usamos letras para designar esses professores buscando preservar sua privacidade.

Os professores-estudantes receberam um termo de consentimento que constava da aceitação da participação voluntária nesse estudo, esclarecendo sobre seus objetivos e intenções e dando garantias de sigilo quanto aos seus nomes, cujo

---

<sup>13</sup>Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (BROUSSEAU, 1986 apud SILVA, 2008, p. 50)

modelo consta no Anexo A. Além disso, ficou acordada também a possibilidade de entrevista pessoal caso necessitássemos de maiores esclarecimentos sobre os protocolos coletados.

Por acreditarmos que a formação e atuação profissional dos professores-estudantes participantes da pesquisa podem influenciar nos resultados de nossas análises, fizemos um levantamento dessas informações e apresentamos nos Quadros 2 e 3 a seguir. Destacamos no Quadro 2, a linha referente a graduação de cada professor-estudante e no Quadro 3, a linha referente a atuação na época da coleta dos dados (2º semestre de 2008), de cada um deles.

**Quadro 2:** Formação dos professores-estudantes participantes da pesquisa

| <b>Profes-<br/>sor</b> | <b>Formação</b>                                                                                            | <b>Instituição</b>                                                  | <b>Ano de<br/>formação</b>               |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| A                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b><br><b>Graduação: Bacharelado em Matemática</b>                | <b>PUC/SP</b><br><b>PUC/SP</b>                                      | <b>1987 – 1990</b><br><b>2006 – 2007</b> |
| B                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b><br>Especialização: Educação Matemática                        | <b>USP</b><br>Centro Un. Fund. Santo André                          | <b>1985 – 1990</b><br>2003 – 2005        |
| C                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b><br>Especialização: Educação Matemática                        | <b>Centro Un. Fund. Santo André</b><br>PUC/SP                       | <b>1992 – 1996</b><br>2006 – 2006        |
| D                      | <b>Graduação: Matemática</b>                                                                               | <b>Un. Estadual de Londrina</b>                                     | <b>2004 – 2007</b>                       |
| E                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b>                                                               | <b>Un. Federal de Rondônia</b>                                      | <b>2001 – 2005</b>                       |
| F                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b><br>Especialização: Educação Matemática                        | <b>Centro Un. Fund. Santo André</b><br>Faculdades Oswaldo Cruz      | <b>2002 – 2005</b><br>2006 – 2007        |
| G                      | <b>Graduação: Matemática</b>                                                                               | <b>Mackenzie</b>                                                    | <b>2000 – 2003</b>                       |
| H                      | <b>Graduação: Licenciatura em Física</b>                                                                   | <b>USP</b>                                                          | <b>1999 – 2004</b>                       |
| I                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b>                                                               | <b>Centro Un. Fund. Santo André</b>                                 | <b>1992 – 1995</b>                       |
| J                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b><br>Especialização: Educação Matemática                        | <b>Universidade de Guarulhos</b><br>Universidade de Guarulhos       | <b>1999 – 2002</b><br>2002 – 2003        |
| K                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b><br>Especialização: Educação Matemática                        | <b>Centro Un. Fund. Santo André</b><br>Centro Un. Fund. Santo André | <b>2001 – 2004</b><br>2005 – 2006        |
| L                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b>                                                               | <b>USP</b>                                                          | <b>1996 – 2002</b>                       |
| M                      | <b>Graduação: Licenciatura em Ciências</b>                                                                 | <b>Faculdades Integradas de Ourinhos</b>                            | <b>1987 – 1990</b>                       |
|                        | <b>Graduação: Habilitação Matemática</b>                                                                   | <b>Fac. Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de Jacarezinho</b> | <b>1993 – 1994</b>                       |
|                        | <b>Graduação: Pedagogia com Habilitação em Administração Escolar</b><br>Especialização: Gestão Educacional | <b>Fac. de Filosofia, Ciências e Letras de Piraju</b><br>Unicamp    | <b>2000 – 2001</b><br>2005 – 2007        |
| N                      | <b>Graduação: Licenciatura em Ciências</b><br><b>Habilitação em Matemática</b>                             | <b>Fac. Paulistana de Ensino</b>                                    | <b>1987 – 1990</b>                       |
|                        | Especialização: Formação de Formadores em Educação de Jovens e Adultos                                     | Universidade de Brasília                                            | 2004 – 2004                              |
|                        | Especialização: Educação Matemática                                                                        | PUC/SP                                                              | 2006 – 2006                              |
| O                      | <b>Graduação: Licenciatura em Matemática</b><br>Especialização: Matemática                                 | <b>Universidade de Taubaté</b><br>Fac. de Eng. Química de Lorena    | <b>1995 – 1998</b><br>1999 – 2000        |
|                        | Especialização: Gestão escolar                                                                             | Universidade de Taubaté                                             | 2006 – 2008                              |

Quanto ao curso de graduação, o Quadro 2 mostra que dos 15 professores-estudantes participantes da pesquisa, 10 possuem Licenciatura em Matemática, 2 possuem Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática, 2 são

graduados em Matemática e 1 em Física. Podemos observar também que das 10 instituições em que ocorreram as graduações 6 são instituições públicas, sendo: 2 federais, 2 estaduais e 2 municipais.

Outro aspecto relevante observado no Quadro 2 é que dos 8 professores-estudantes que possuem especialização, 6 deles a fizeram na área de Educação Matemática.

A seguir, apresentamos o Quadro 3, que reúne dados sobre a atuação profissional dos professores-estudantes participantes da pesquisa.

**Quadro 3:** Atuação profissional dos professores-estudantes participantes da pesquisa

| Professor | Atuação profissional                                                                       | Nível de Atuação                                                          | Rede de Ensino                                     | Período                                                     |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| A         | Professor de Matemática<br>Professor de Matemática<br>Professor de Matemática              | Fundamental<br>Fundamental<br>Fundamental/Médio                           | Particular<br>Particular<br>Estadual               | 03/2005 - 08/2007<br>09/2002 - 12/2002<br>05/1991 - 02/1992 |
| B         | <b>Professor de Matemática</b><br>Professor de Matemática                                  | <b>Fundamental/Médio</b><br>Pré-vestibular                                | <b>Particular</b><br>Particular                    | <b>1990 – atual</b><br>1989 – 1992                          |
| C         | <b>Professor de Matemática</b>                                                             | <b>Fundamental/Médio</b>                                                  | <b>Estadual</b>                                    | <b>1993 – atual</b>                                         |
| D         | Professor de Matemática<br><b>Aux. de assessoria em Mat.</b>                               | Fundamental/Médio<br><b>Fundamental/Médio</b>                             | Estadual<br><b>Particular</b>                      | 02/2008 - 06/2008<br><b>04/2008 – atual</b>                 |
| E         | <b>Professor de Matemática</b>                                                             | <b>Fundamental/Médio</b>                                                  | <b>Municipal</b>                                   | <b>2006 – atual</b>                                         |
| F         | <b>Professor de Matemática</b>                                                             | <b>Fundamental/Médio</b>                                                  | <b>Estadual</b>                                    | <b>2006 – atual</b>                                         |
| G         | Prof. de Mat. e Lógica<br><b>Professor de Matemática</b><br><b>Professor de Matemática</b> | Superior<br><b>Fundamental/Médio</b><br>Superior                          | Particular<br><b>Estadual</b><br><b>Particular</b> | 2003 – 2005<br><b>2004 – 2008</b><br><b>2008 – atual</b>    |
| H         | Prof. de Mat. e Física<br><b>Prof. de Mat. e Física</b><br><b>Prof. de Mat. e Física</b>   | Fundamental/Médio<br><b>Fundamental/Médio</b><br>Pré-vestibular           | Particular<br><b>Estadual</b><br><b>Particular</b> | 1999 – 2005<br><b>2000 – atual</b><br><b>2003 – atual</b>   |
| I         | <b>Professor de Matemática</b>                                                             | <b>Fundamental/Médio</b>                                                  | <b>Estadual</b>                                    | <b>1996 – atual</b>                                         |
| J         | <b>Professor de Matemática</b><br><b>Professor de Matemática</b>                           | <b>Fundamental/Médio</b><br><b>Fundamental/Médio</b>                      | <b>Estadual</b><br><b>Particular</b>               | <b>2003 – atual</b><br><b>2004 - atual</b>                  |
| K         | Professor de Matemática<br><b>Professor de Matemática</b>                                  | Fundamental/Médio<br><b>Fundamental/Médio</b>                             | Particular<br><b>Estadual</b>                      | 2004 – 2005<br><b>2005 – atual</b>                          |
| L         | <b>Professor de Matemática</b>                                                             | <b>Médio</b>                                                              | <b>Particular</b>                                  | <b>2002 – atual</b>                                         |
| M         | Professor de Matemática<br><b>Coord.Pedagógico</b><br>Professor de Matemática              | Fundamental/Médio<br><b>Fundamental/Médio</b><br>Fundamental              | Estadual<br><b>Estadual</b><br>Estadual            | 1991 – 2000<br><b>2001 – 2008</b><br>2009 - atual           |
| N         | Professor de Matemática<br><b>Professor de Matemática</b><br><b>Analista Pedagógico</b>    | Fundamental/Médio<br><b>EJA</b><br><b>Formação de professores</b>         | Estadual<br><b>Estadual</b><br><b>Particular</b>   | 1989 – 2003<br><b>2003 – atual</b><br><b>1995 – atual</b>   |
| O         | <b>Prof. de Mat. e Física</b><br><b>Prof. de Mat. e Física</b><br>Coordenação Pedagógica   | <b>Fundamental/Médio</b><br><b>Fundamental/Médio</b><br>Fundamental/Médio | <b>Estadual</b><br><b>Municipal</b><br>Municipal   | <b>1995 – atual</b><br><b>2001 – atual</b><br>2003 - 2004   |

No Quadro 3, podemos observar que a maioria dos professores-estudantes atua ou já atuou nos níveis Fundamental e Médio e nas redes pública e particular de ensino. Apenas 4 professores não atuavam lecionando nesses níveis de ensino na época da coleta dos dados (2º semestre de 2008): O professor “A”, que há 1 ano estava afastado das atividades profissionais devido à bolsa do CNPq; o professor

“D” que atuava como Auxiliar de assessoria em Matemática; o professor “M”, que há 10 anos atuava como Coordenador Pedagógico; o professor “N”, que há 5 anos lecionava para o Ensino de Jovens e Adultos (EJA) e há 13 anos atuava como Analista Pedagógico.

Na época da coleta dos dados (2º semestre de 2008), dos 15 professores-estudantes participantes da pesquisa, 10 atuavam na rede estadual de ensino, sendo: 7 professores de Matemática, 2 professores de Matemática e Física e 1 Coordenador Pedagógico de Matemática.

A professora da disciplina que investigamos possui um currículo bastante rico, com uma vasta experiência profissional e diversas publicações importantes. É graduada em Matemática, doutora em Educação Matemática e possui pós-doutorado em Educação. Atua ministrando aulas em curso de pós-graduação em Educação Matemática há treze anos, além de participações em conselhos, comissões e consultorias. Suas publicações se constituem de diversos artigos, livros e trabalhos, nas quais figuram autores como Brousseau e Douady. cremos que por esse motivo, a professora em suas aulas valoriza as descobertas, explicitações e debates entre os estudantes, na resolução de problemas<sup>14</sup> a eles propostos.

Nas aulas, a professora segue uma abordagem em que as produções dos estudantes (resoluções) são elaboradas e entregues sem correção. Depois a classe participa de debates e reelaborações e vai se aproximando de resoluções mais completas e estruturadas. Além disso, nas aulas, são discutidos diversos quadros teóricos com base nos quais os estudantes elaboram análises de suas próprias produções. Essas análises, no entanto, não foram utilizadas nessa pesquisa por não ser o foco do nosso estudo.

Durante os encontros (aulas), a pesquisadora atuou como observadora, tendo participado ao todo de seis encontros de duas horas cada. Os dados foram coletados ao final de cada encontro e são cópias xerografadas das produções dos

---

<sup>14</sup> Cabe aqui responder à banca que durante o exame de qualificação questionou sobre se o uso do termo problema influenciaria os resultados desta pesquisa. Pelo fato de estarmos investigando o pensamento algébrico de professores do Ensino Fundamental e/ou Médio, supomos que sim. Por isso tecemos considerações sobre o sentido atribuído a esse termo veiculado pela professora em classe.

estudantes (resoluções de problemas individuais e em grupo, reelaborações, questionários e análises). Dentre elas, selecionamos as resoluções individuais sem correção de cinco problemas e os respectivos questionários. Durante as aulas, conversávamos com a professora quando surgia algum questionamento. Anotávamos essas conversas e logo após seu término redigíamos seu conteúdo na forma aqui apresentada.

Os protocolos com as resoluções dos problemas selecionados foram coletados para fins de diagnóstico, conservando a denominação dada pela professora da disciplina. Ao perguntá-la sobre o porquê dessa denominação, ela respondeu: “Chamo simplesmente de problemas, os problemas abertos que foram propostos aos meus alunos [...]. Problemas abertos para mim são os que o professor não indica a solução nem o método de resolução. Visam à pesquisa dos alunos e o debate entre eles”. No nosso entender, essa referência a problemas abertos relaciona-se com aquela utilizada nos PCNEM (2006) em que o professor não indica métodos nem técnicas de resolução. Esclarecemos que esse documento também admite orientação teórica francesa.

A professora ressaltou que não considera o Problema 4 aberto por sugerir um método de resolução: o uso da fórmula, porém acha válida a sua aplicação para despertar nos professores-estudantes a percepção das diferenças com relação aos problemas abertos, sobretudo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

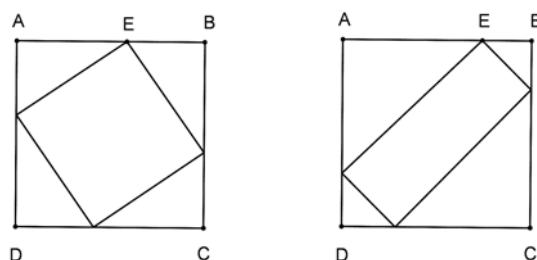
Seguem os enunciados dos cinco problemas, que foram apresentados à classe pela professora que explicitou para os professores-estudantes as fontes das quais eles foram extraídos ou adaptados (os problemas 1 e 2 de obras voltadas à formação continuada de professores das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio).

### Problema 1<sup>15</sup>

Um aluno diz que encontrou 3 números ímpares cuja soma é 20. É dado a você esse problema. Qual é sua solução? Explique sua resposta e conte como a obteve.

### Problema 2<sup>16</sup>

Na figura, ABCD é um quadrado e E é um ponto sobre AB tal que  $AE > EB$ . Em uma das figuras, E é localizado de modo a formar um quadrado e, na outra, um retângulo com a reta BD sendo seu eixo de simetria. Qual figura interna tem maior área, o quadrado ou o retângulo?



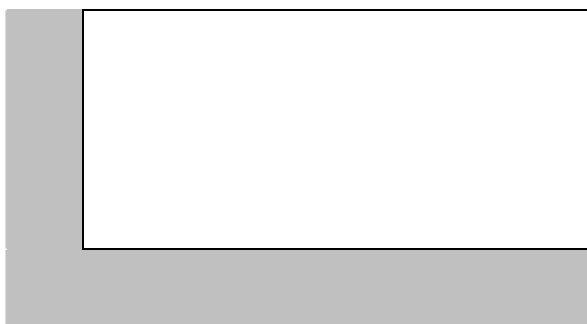
**Figura 1:** Ilustração referente ao Problema 2

<sup>15</sup> Problema extraído de Freitas (2008, p. 117) in: Machado (2008) que foi utilizado em pesquisa que analisa tipos de provas e registros de representação utilizados por alunos franceses com idades entre 14 e 15 anos, cujas séries correspondem no Brasil ao 9º ano do Ensino Fundamental e ao 1º ano do Ensino Médio.

<sup>16</sup> Problema extraído do livro **Developing Thinking in Geometry** de Mason e Johnston-Wilder (2006, p. 14). No livro, os autores apresentam esta e outras situações com o objetivo de estimular o pensamento geométrico, explorando a generalidade do problema.

### Problema 3<sup>17</sup>

O projeto de um jardim retangular de 6m por 15m prevê que seja aumentado com pedras ornamentais formando retângulos, conforme indicado na figura em cinza.



**Figura 2:** Ilustração referente ao Problema 3

Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de  $46\text{m}^2$  e que a largura dos retângulos acrescentados é a mesma, calcule as medidas dos lados desses retângulos.

### Problema 4

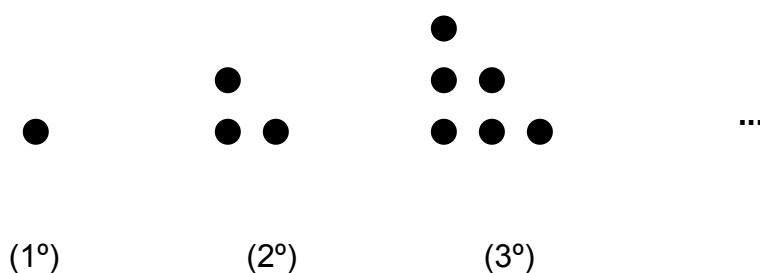
A altura  $h$  (em metros), que uma bola de futebol atinge quando é chutada para cima com certa velocidade, será dada em função do tempo  $t$  (em segundos) pela fórmula:  $h = -4,9 t^2 + 19,6 t$ . Quanto tempo a bola permanece no ar?

---

<sup>17</sup> Os problemas 3 e 4 são adaptações das questões 2 e 3 respectivamente, aula nove, que constam no **Jornal do Aluno**, Programa São Paulo faz Escola da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (2007, p.44). Esse material foi destinado a alunos do 1º ano do Ensino Médio.

### Problema 5<sup>18</sup>

Observe a seqüência abaixo:



**Figura 3:** Ilustração referente ao Problema 5

- a) Você poderia encontrar maneiras de continuar essa seqüência? Quais seriam?
- b) Dê o número de bolinhas de uma seqüência que continue a representada acima, mantendo a forma triangular descrita pelas bolinhas e que tenha **n** bolinhas, em cada um dos catetos do triângulo descrito no **n-ésimo** termo.

Com relação ao problema 2, indagamos à professora da disciplina sobre o porquê da escolha, dado que foi retirado de uma obra sobre Geometria. A professora então justificou afirmando que: “o problema é ideal para a exploração da generalidade na interação entre os domínios algébrico e geométrico visto que trata da comparação de medidas consideradas genericamente”.

<sup>18</sup> O problema 5 foi extraído, com algumas alterações, de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 10-11). O objetivo foi verificar o desenvolvimento do pensamento algébrico de um grupo de alunos da 6ª série (7º ano) do Ensino Fundamental, quando submetidos a situações que visam estimular esse tipo de pensamento.

Após as resoluções dos problemas 1 e 2, os professores-estudantes responderam a um questionário que demandou que explicassem como pensaram em cada passagem<sup>19</sup> e depois que indicassem as justificativas matemáticas de cada uma delas (o modelo encontra-se no Anexo B). Nos problemas 3, 4 e 5, os professores-estudantes fizeram essas explicações e as justificativas matemáticas das passagens durante as resoluções.

Essa técnica de pesquisa se assemelha à utilizada na pesquisa de Fontalva (2006) denominada “thinking aloud”, por meio da qual o sujeito participante da pesquisa, ao resolver uma questão, deve justificar ao lado seu pensamento por escrito a cada passagem da resolução. Na pesquisa de Fontalva (2006) não foi solicitado como deveria ser a justificativa, deixando à escolha do aluno e o objetivo desse procedimento foi analisar se nas justificativas “[...] estudantes do Ensino Médio explicitam ferramentas tais como conceitos e propriedades ou explicitam apenas termos relativos a técnicas de resolução de inequações [...]” (p. 31). Em nossa pesquisa, por se voltar para professores, quando solicitamos as justificativas, a intenção era que elas fossem matemáticas, pois o questionário solicitava: “Indique as justificativas matemáticas que validam essas passagens” (conforme modelo do questionário no Anexo B).

Os problemas 1 e 2 foram aplicados no mesmo dia de aula (13/08/2008), cujo tempo de duração foi de 2 horas. Esses problemas visavam à vivência de aulas, com base nas teorias que norteavam a prática da professora. Seguiram-se análises de procedimentos dos alunos, debates e intervenções da professora. A dinâmica de aplicação foi a seguinte:

a) A professora solicitou aos professores-estudantes que resolvessem os problemas propostos individualmente.

b) A professora apresentou para a turma um recurso tecnológico que permitia a visualização da variação da figura, conforme o enunciado do Problema 2. Esse

---

<sup>19</sup> Designamos por passagem qualquer igualdade, implicação, desigualdade ou relação.

recurso é recomendado por Mason e Johnston-Wilder (2006) no livro do qual o problema foi extraído e o aplicativo consta em CD-ROM que o acompanha<sup>20</sup>.

c) As resoluções foram entregues à professora.

d) Coletamos cópias xerografadas das resoluções referentes aos dois problemas que passaram a constituir parte dos protocolos para nossas análises.

O questionário referente ao Problema 1 (modelo encontra-se no Anexo B) foi requerido dos professores-estudantes após as resoluções, ou seja, eles não foram devolvidos no mesmo dia da resolução do problema, por esse motivo apenas 6 professores-estudantes entregaram os questionários respondidos. Para que esse fato não se repetisse, as respostas ao questionário do problema 2 foram exigidas pela professora como tarefa de aula no dia 30/09/2008 e, todos os que estavam presentes entregaram (14 no total).

Os problemas 3, 4 e 5 foram aplicados no mesmo dia (04/11/2008) e o período de aula também foi de 2 horas. A dinâmica de aplicação ocorreu como detalhamos a seguir:

a) Os problemas foram aplicados como avaliação de conhecimento individual.

b) A professora solicitou que as explicações das passagens e as justificativas matemáticas fossem realizadas durante a resolução dos problemas (havia um espaço destinado às resoluções e outro ao lado para as justificativas).

c) Coletamos cópias xerografadas das resoluções referentes aos dois problemas que passaram a constituir parte dos protocolos para nossas análises.

Nas aulas que sucederam a entrega das resoluções e dos questionários sobre os problemas 1 e 2 seguiram-se explicitações, debates e reelaborações das resoluções por parte dos professores-estudantes. O mesmo ocorreu nas aulas que se sucederam a entrega das resoluções e dos questionários sobre os problemas 3, 4

---

<sup>20</sup> O recurso tecnológico sugerido pelo autor trata-se de um aplicativo desenvolvido em um programa de geometria dinâmica.

e 5. Acreditamos que essas trocas de idéias e reelaborações possam ter interferido no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico desses professores-estudantes. No entanto, nos ativemos a “fotografias” de momentos deste processo.

Ativemo-nos às produções escritas dos professores-estudantes, dada a técnica privilegiada em nossa pesquisa “thinking aloud” que se adapta à questão desta pesquisa diagnóstica.

Para analisar os dados de nossa investigação nos baseamos na modalidade de análise de conteúdo, que segundo Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 137) é “[...] uma técnica que tem como principal função descobrir o que está por trás de uma mensagem, de uma comunicação, de uma fala, de um texto, de uma prática etc.” No caso de nossa pesquisa diagnóstica, fazemos uma busca dos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico já definidos no quadro teórico, porém, algumas das categorias em que agrupamos os dados foram adaptadas de acordo com as informações que emergiram dos dados.

Quanto a essa forma de organização, Fiorentini e Lorenzato (2007) afirmam que a vantagem é:

[...] que as categorias construídas emergem do material de análise, e não da literatura propriamente dita, embora, nesse processo, o diálogo com a literatura e outras formas de classificação seja conveniente e necessário. (p. 139-140)

[...] que ela permite, independente da opção teórica ou metodológica de cada estudo, comparar, por contraste, os diferentes olhares e resultados produzidos. Isso não significa ecletismo. Significa acima de tudo, respeito à diversidade e às múltiplas formas de produzir conhecimentos dentro de um campo específico, como o da EM. (p. 140).

Após os procedimentos de coleta dos dados, iniciamos uma busca nos protocolos de resolução do Problema 1 dos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), constantes do Quadro 1, que foram usados como indicadores. O mesmo procedimento de busca dos indicadores foi realizado nos protocolos de resolução dos Problemas 2, 3, 4 e 5.

## CAPÍTULO III

### RESULTADOS DAS ANÁLISES DOS DADOS

Nesse capítulo apresentamos nossas descobertas a partir das análises dos protocolos de resolução referentes aos problemas propostos. Os Problemas 1 e 2 que são problemas gerais e, portanto propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico, permitiram uma análise mais profunda devido a riqueza de detalhes que emergiram dos dados.

Os protocolos referentes aos Problemas 3 e 4 apresentaram poucas variações significativas, pela própria natureza dos enunciados, o que nos conduziu a uma análise mais restrita.

Voltamos a encontrar aspectos significativos nos protocolos referentes ao Problema 5, o que possibilitou-nos fazer algumas comparações com os resultados das análises dos demais problemas.

Esclarecemos que as resoluções escolhidas para compor os quadros de resultados das análises referentes aos problemas propostos são as mais típicas de cada grupo (em termos de proximidade em relação às demais de cada categoria) e evidenciam com mais detalhes os indicadores encontrados.

Ressaltamos que não levamos em consideração incorreções encontradas nos protocolos, apesar de eventualmente evidenciarmos algumas delas quando julgamos necessário. Nossa principal intenção foi buscar compreender o pensamento algébrico dos professores-estudantes com base na fundamentação teórica.

### **3.1 RESULTADOS DA ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO PROBLEMA 1**

Apresentamos a seguir os resultados da análise dos protocolos coletados referentes às resoluções do Problema 1. Inicialmente, buscamos em cada um destes protocolos os aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão. (2005), destacados no Quadro 1, que foram usados como indicadores. Alguns deles foram alterados segundo as categorias que emergiram do material analisado. Apresentamos o que encontramos, em quadros seguidos de considerações sobre cada um deles.

Para ser confortável ao leitor, transcrevemos os indicadores constantes do Quadro 1 que têm similaridade com o que encontramos nos protocolos:

1. Desenvolver algum tipo de processo de generalização.
2. Desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.
3. Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias.
4. Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema.
5. Transformar uma expressão aritmética em outra mais simples.
6. Produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema.

**Quadro 4:** Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram e operaram com a forma genérica do número ímpar

| Grau de generalização                                                                    | Exemplo de resolução                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Professor-estudante                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Grau 2</p> <p>Ímpares quaisquer</p>                                                   | <p>Professor "D"</p> <p>Não existe três números ímpares cuja soma seja igual a 20.</p> <p>De fato, <math>x, y, z \in \mathbb{Z}</math> e <math>x, y, z</math> são ímpares. Então:</p> $x = 2n+1$ $y = 2m+1$ $z = 2p+1$ <p>com <math>n, m, p \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p>Logo,</p> $x+y+z = 2n+1 + 2m+1 + 2p+1$ $= 2(n+m+p+1) + 1$ <p>que é um número ímpar.</p> <p>Portanto a soma de três números ímpares não pode resultar em um número par.</p> | <p>Professor "C"</p> <p>Professor "D"</p> <p>Professor "E"</p> <p>Professor "G"</p> <p>Professor "K"</p>                    |
| <p>Grau 1</p> <p>Restrição com relação ao grau anterior:</p> <p>Ímpares consecutivos</p> | <p>Professor "A" (2ª resolução)</p> <p>De considerando <math>a = 2m+1</math>, <math>b = 2m+3</math> e <math>c = 2m+5</math> sendo <math>m \in \mathbb{N}</math></p> $a+b+c = 2m+1 + 2m+3 + 2m+5$ $= 6m+9$ $= 6m+8+1$ $= 2(3m+4)+1$ <p>De <math>3m+4 = k</math> (<math>k \in \mathbb{Z}</math>) então <math>a+b+c = 2k+1</math> e um nº ímpar.</p>                                                                                                    | <p>Professor "A" (1ª e 2ª resolução)</p> <p>Professor "F"</p> <p>Professor "H"</p> <p>Professor "J" (1ª e 2ª resolução)</p> |

### 3.1.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 4

A constatação de modos de resolução similares permitiu-nos um desdobramento em graus de generalização. Consideramos que os professores-estudantes do Grau 2 apresentaram um grau de generalização maior do que os demais, pois partiram de qualquer número ímpar. Aqueles classificados no Grau 1, partiram de ímpares consecutivos.

Um dos questionários respondidos pelos professores-estudantes que partiram de ímpares consecutivos ajuda a reforçar essa consideração, pois revela que a

percepção sobre a generalização para qualquer número ímpar surgiu só após o debate realizado em classe, conforme transcrevemos a seguir:

“Os números serem consecutivos foi apenas por comodidade e costume de utilizar esta idéia. Na discussão em aula, percebi que usar números consecutivos tiraria a generalidade do exercício, provando uma proposição diferente da proposta”. (Professor “F”)

Em outro questionário, um professor-estudante, parece não perceber que utilizou ímpares consecutivos, pois ao justificar as passagens apenas escreve “forma geral de 3 números ímpares diferentes entre si” (professor “A”).

A respeito da linguagem empregada pela maioria dos estudantes, nos reportamos a Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) que afirmam não ser necessário dominar a linguagem algébrica simbólica para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esses autores defendem que um potencializa o desenvolvimento do outro e vice-versa, com o que concordamos.

Um retorno sobre os questionários referentes a essas resoluções não nos forneceu melhor idéia sobre o pensamento desses professores-estudantes.

As duas resoluções do professor “A” e do professor “J” encontram-se no mesmo quadro, pois apesar desses professores-estudantes terem tentado caminhos de resolução diferentes continuaram no mesmo grau de generalização de ímpares consecutivos. Nesses casos, as novas tentativas não apresentaram evolução.

Em seguida, apresentamos o Quadro 5, com os resultados referentes aos protocolos em que os professores-estudantes apenas representaram a forma genérica do número ímpar.

**Quadro 5:** Professores-estudantes que representaram, mas não operaram com a forma genérica do número ímpar

| Exemplo de resolução | Professor-estudante                       |
|----------------------|-------------------------------------------|
| <p>Professor "N"</p> | <p>Professor "I"</p> <p>Professor "N"</p> |

### 3.1.2 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 5

Apesar dos professores-estudantes do Quadro 5 terem expressado a forma genérica do número ímpar, não operaram com ela na resolução do problema. É possível que eles tenham relacionado a forma genérica ao enunciado, mas não tenham conseguido resolver o problema a partir dela, pois não buscaram expressar as estruturas do problema utilizando-a. Valeram-se de outras estratégias, como no caso do Professor "N", que fez tentativas numéricas.

Esses procedimentos revelaram que ter conhecimento da linguagem algébrica simbólica não basta entre estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Mais importante ainda tal conhecimento, se atuarem como professores no Ensino Fundamental e Médio, como ocorre com os participantes desta pesquisa. É preciso relacioná-la ao pensamento algébrico na direção de alcançá-la.

A seguir, apresentamos o Quadro 6, com os resultados referentes aos protocolos em que os professores-estudantes não usaram a forma genérica do número ímpar.

**Quadro 6:** Professores-estudantes que não usaram a forma genérica do número ímpar

| Exemplo de resolução | Professor-estudante |
|----------------------|---------------------|
| Professor "M"        | Professor "B"       |
|                      | Professor "L"       |
|                      | Professor "M"       |
|                      | Professor "O"       |

**3.1.3 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 6**

Os professores-estudantes classificados no Quadro 6 diferem dos demais por terem utilizado apenas a linguagem natural na resolução do problema. Quando solicitado por meio de questionário (o modelo consta no Anexo B) a explicar como pensou em cada passagem e a indicar as justificativas matemáticas, o professor “M” ampliou sua resposta para somas de números ímpares com quantidades indefinidas de parcelas, afirmando que:

“Para a soma de números ímpares temos:  
quando a quantidade de parcelas for par, o resultado da operação será um número par.  
quando a quantidade de parcelas for ímpar, o resultado da operação será um número ímpar.”(Professor “M”)

Nesse caso, o questionário não esclareceu a resolução, pois continuaram sendo feitas afirmações gerais. Se na resolução exibida em nenhum momento esse estudante expressou o número ímpar pela forma genérica, no questionário, continuou utilizando a linguagem natural sem evoluir em sua explicação nem utilizar a forma genérica.

Com essas constatações, temos indícios de que esses professores-estudantes não relacionam diretamente o pensamento algébrico à linguagem algébrica. As análises dos protocolos de resolução dos demais problemas poderão ajudar a esclarecer essa questão.

A seguir, apresentamos o Quadro 7, com os resultados referentes ao indicador: “Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente”, donde seguem considerações sobre ele.

**Quadro 7:** Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente

| Exemplo de resolução                                                        | Professor-estudante                                |
|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Professor “D”                                                               | Professor “A” (1ª e 2ª resolução)<br>Professor “C” |
| Não existe três números ímpares cuja soma seja igual a 20.                  | Professor “D”                                      |
| De fato, $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e $x, y, z$ são ímpares. Isto é           | Professor “E”                                      |
| $x = 2n+1$                                                                  | Professor “F”                                      |
| $y = 2m+1$                                                                  | Professor “G”                                      |
| $z = 2p+1$                                                                  | Professor “H”                                      |
| Com $n, m, p \in \mathbb{Z}$ .                                              | Professor “I”                                      |
| Logo,                                                                       | Professor “J” (1ª e 2ª resolução)<br>Professor “K” |
| $x+y+z = 2n+1+2m+1+2p+1$                                                    | Professor “N”                                      |
| $= 2(n+m+p+1) + 1$                                                          |                                                    |
| que é um número ímpar.                                                      |                                                    |
| Portanto a soma de três números ímpares não pode resultar em um número par. |                                                    |

### 3.1.4 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 7

Verificamos que diversos professores-estudantes utilizaram uma linguagem concisa ou sincopada na resolução do Problema 1. Entendemos que suas resoluções relacionam-se com esse indicador, visto que nenhum deles se expressou por uma linguagem estritamente algébrica.

O desenvolvimento da linguagem simbólica, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) potencializa o desenvolvimento do pensamento algébrico. Pudemos constatar isso na maioria das resoluções dos professores-estudantes relacionados no Quadro 7. No exemplo de resolução do Professor “D”, podemos notar uma mistura entre a linguagem algébrica simbólica e a linguagem natural numa tentativa de demonstração. O uso da linguagem algébrica simbólica possibilitou

transformações abreviando a resolução, com isso verificamos que ele conseguiu expressar seu pensamento de forma clara.

A seguir, apresentamos o Quadro 8, com os resultados referentes ao indicador: “Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias”, seguido das respectivas considerações.

**Quadro 8:** Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias

| Exemplo de resolução                | Professor-estudante                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Professor “J” (2ª resolução)</p> | <p>Professor “A” (1ª e 2ª resolução)</p> <p>Professor “B”</p> <p>Professor “C”</p> <p>Professor “D”</p> <p>Professor “E”</p> <p>Professor “F”</p> <p>Professor “G”</p> <p>Professor “H”</p> <p>Professor “I”</p> <p>Professor “J” (1ª e 2ª resolução)</p> <p>Professor “K”</p> <p>Professor “L”</p> <p>Professor “M”</p> <p>Professor “N”</p> <p>Professor “O”</p> |

### 3.1.5 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 8

A percepção de regularidades ou invariâncias nos pareceu presente em todas as resoluções. Entendemos que aqueles que utilizaram a forma genérica não apenas perceberam a regularidade no conjunto dos ímpares como a expressaram pela forma genérica. Além disso, os professores-estudantes que responderam em linguagem natural, quando utilizaram o termo “soma de três números ímpares”, possivelmente perceberam uma regularidade entre os ímpares que lhes permitiu fazer uma afirmação geral.

A 2ª resolução do Professor “J”, em particular, revelou a possibilidade da generalização a partir da percepção de regularidade no trabalho com exemplos numéricos, o que pode ter levado a dedução da forma genérica do número ímpar. Podemos notar nessa resolução o uso de várias linguagens (natural, aritmética e algébrica) durante a manifestação do pensamento algébrico. Essa constatação mostra que “[...] não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico.” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 88).

Ressaltamos que essas considerações não levaram em conta as incorreções presentes na resolução. Nossa intenção foi buscar compreender o pensamento algébrico dos professores-estudantes com base na fundamentação teórica.

A seguir, apresentamos o Quadro 9 com os resultados referentes ao indicador: “Percepção e expressão das estruturas de um problema”, seguido das respectivas considerações.

**Quadro 9:** Percepção e expressão das estruturas de um problema

| Grau de generalização                          | Exemplo de resolução | Professor-estudante                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Grau 2</p> <p>Uso da forma genérica</p>     | <p>Professor “K”</p> | <p>Professor “A” (1ª e 2ª resolução)</p> <p>Professor “C”</p> <p>Professor “D”</p> <p>Professor “E”</p> <p>Professor “F”</p> <p>Professor “G”</p> <p>Professor “H”</p> <p>Professor “J” (1ª e 2ª resolução)</p> <p>Professor “K”</p> |
| <p>Grau 1</p> <p>Uso de exemplos numéricos</p> | <p>Professor “N”</p> | <p>Professor “J” (1ª e 2ª resolução)</p> <p>Professor “N”</p>                                                                                                                                                                        |

### 3.1.6 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 9

No nosso entender, a expressão “estruturas de um problema” se refere à sentença matemática para resolver o problema. No Quadro 9, nos pareceu haver uma necessidade de confirmação do enunciado por tentativas numéricas entre as resoluções classificadas no Grau 1. Esse procedimento é um dos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico e apresenta um caminho para a generalização, presumindo a observação de regularidade.

Podemos perceber na resolução do Professor “N” o uso de ímpares consecutivos nas duas expressões. Esse fato parece revelar uma tendência de generalização apenas para ímpares consecutivos e não para ímpares quaisquer. É possível que se esse professor-estudante chegasse a generalizar por meio da forma genérica o fizesse para a soma de três ímpares consecutivos.

As resoluções dos professores-estudantes que expressaram a estrutura do problema classificadas no Grau 2, revelaram a soma de ímpares diferentes (quaisquer ou consecutivos) representada pela soma de suas formas genéricas. A comparação entre os procedimentos apresentados pelo Professor “N” (Quadro 9), que parece buscar regularidade nas estruturas aritméticas, e pelo Professor “K”, que expressa genericamente essa regularidade, revela indícios de que o segundo tem o pensamento algébrico mais desenvolvido do que primeiro.

A seguir, apresentamos o Quadro 10 com os resultados referentes ao indicador: “Transformação de uma expressão algébrica em outra mais simples”, seguido das respectivas considerações.

**Quadro 10:** Transformação de uma expressão em outra mais simples

| Exemplo de resolução | Professor-estudante               |
|----------------------|-----------------------------------|
| Professor "C"        | Professor "A" (1ª e 2ª resolução) |
|                      | Professor "C"                     |
|                      | Professor "D"                     |
|                      | Professor "E"                     |
|                      | Professor "F"                     |
|                      | Professor "G"                     |
|                      | Professor "H"                     |
|                      | Professor "J" (1ª e 2ª resolução) |
|                      | Professor "K"                     |

### 3.1.7 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 10

Por meio das transformações, os professores-estudantes encontraram expressões mais simples que possibilitaram a resolução do problema. O trabalho de manipulação algébrica é uma das etapas das tarefas que visam promover a interdependência entre pensamento e linguagem algébrica apresentadas por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

Concordamos com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) sobre o papel fundamental desempenhado pela linguagem simbólica na formação do pensamento algébrico abstrato. Como é revelado nas resoluções desses professores-estudantes, a possibilidade de simplificação dos cálculos por meio das transformações contribui para abreviar a resolução do problema.

Na resolução do Professor "C", não podíamos deixar de ressaltar a despreocupação com o uso da terminologia correta, quando utiliza nas passagens os termos "somando 1, 1 e 1" e "colocando 2 em evidência" ao invés de usar o nome das propriedades. Quando perguntamos o porquê do uso desses termos, o professor "C" respondeu: "É como eu costumo ensinar essas passagens em minhas aulas".

A seguir, apresentamos o Quadro 11 com os resultados referentes ao indicador: “Produção de mais de um modelo para um mesmo problema”, seguido das respectivas considerações.

**Quadro 11:** Produção de mais de um modelo para um mesmo problema

| Exemplo de resolução                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Professor-estudante                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| <p>Professor “A”</p> <p>15) Dadas as afirmações ① e ② com suas respectivas demonstrações.</p> <p>① A soma de dois números ímpares é par.<br/>Considerando dois números ímpares <math>a</math> e <math>b</math>, tal que <math>a = 2m+1</math> e <math>b = 2n+1</math> sendo <math>m, n \in \mathbb{N}</math></p> $a+b = 2m+1 + 2n+1$ $= 2m+2n+2$ $= 2(m+n+1)$ <p>② A soma de um número par e um ímpar é ímpar.<br/>Considerando <math>c</math> um número par tal que <math>c = 2m+2</math> (<math>m \in \mathbb{N}</math>) e <math>d</math> é um número ímpar tal que <math>d = 2n+1</math> (<math>n \in \mathbb{N}</math>).<br/>sendo <math>c+d = 2m+2 + 2n+1</math></p> $= 4m+2 + 2n+1$ $= 4m+2n+3$ $= 2(2m+n+1) + 1$ <p>este resultado é ímpar sempre é par</p> <p>De ① e ② posso afirmar que ao somar <math>a+b+c</math> terá sempre um nº ímpar, o que torna impossível a soma de três números ímpares resultar em 20.</p> <p>Que considerando <math>a = 2m+1</math>, <math>b = 2n+3</math> e <math>c = 2m+5</math> sendo <math>m, n \in \mathbb{N}</math></p> $a+b+c = 2m+1 + 2n+3 + 2m+5$ $= 4m+2n+9$ $= 4m+2n+8+1$ $= 2(2m+n+4) + 1$ <p>de <math>2m+4 = k</math> (<math>k \in \mathbb{N}</math>) então <math>a+b+c = 2k+1</math> é um nº ímpar</p> | <p>Professor “A”</p> <p>Professor “J”</p> |

### 3.1.8 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 11

Entendemos que a produção de mais de um modelo para a resolução de problemas mostra-se como um importante caminho para o desenvolvimento do pensamento algébrico quando revela que, não há uma única forma de resolver um determinado problema. Acreditamos que esse procedimento pode levar também ao aperfeiçoamento de modelos anteriores.

Com relação ao Professor “A” a produção do segundo modelo (soma de três ímpares) não apresentou ganho qualitativo em relação ao primeiro (soma de dois ímpares seguida da soma de um par com um ímpar), uma vez que ele não percebeu que se tratava de ímpares quaisquer e continuou limitando sua resposta aos ímpares consecutivos.

A seguir, apresentamos no Quadro 12, uma síntese dos indicadores revelados nas resoluções dos professores-estudantes. Com esse procedimento, temos a intenção de observar possíveis convergências nos dados apresentados que possibilitem outras considerações.

### **3.1.9 Síntese dos indicadores revelados nas resoluções do Problema 1**

O Quadro 12 apresenta uma idéia geral da frequência dos indicadores relacionados aos procedimentos dos professores-estudantes presentes nas resoluções do Problema 1.

**Quadro 12:** Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 1

| Quadro e título do indicador                                                                                           | Professor |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|                                                                                                                        | A         | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
| Q4: Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram e operaram com a forma genérica do número ímpar |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Q5: Professores-estudantes que representaram, mas não operaram com a forma genérica do número ímpar                    |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Q6: Professores-estudantes que não usaram a forma genérica do número ímpar                                             |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Q7: Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente                         |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Q8: Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias                                                             |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Q9: Percepção e expressão das estruturas do problema                                                                   |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|                                                                                                                        |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Q10: Transformação de uma expressão em outra mais simples                                                              |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Q11: Produção de mais de um modelo para um mesmo problema                                                              |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Legenda:

- Representaram e operaram com a forma genérica do número ímpar (Grau 2: ímpares quaisquer)
- Representaram e operaram com a forma genérica do número ímpar (Grau 1: ímpares consecutivos)
- Representaram, mas não operaram com a forma genérica do número ímpar
- Não usaram a forma genérica do número ímpar

Esclarecemos que não separamos no Quadro 12 as resoluções do professor “A” e do professor “J” em 1ª e 2ª resoluções, pois os indicadores encontrados nas duas resoluções de cada um desses professores-estudantes foram os mesmos.

Observando o Quadro 12, percebemos que quanto ao uso da forma genérica, o indicador que apareceu com maior freqüência nas resoluções dos professores-estudantes refere-se à representação e operação com a forma genérica do número ímpar, visto que dos 15 estudantes que participaram da pesquisa, 9 revelaram esse

indicador. Dentre eles, apenas 6 foram classificados no Grau 2 de generalização (ímpares quaisquer).

Podemos notar ainda, que os 9 professores-estudantes cujas resoluções revelaram esse indicador, também revelaram os seguintes:

- Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.
- Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias.
- Percepção e expressão das estruturas de um problema.
- Transformação de uma expressão em outra mais simples.

Creemos que um dos fatores que pode ter contribuído para essas convergências foi o uso da linguagem algébrica simbólica nas resoluções.

Quanto ao uso da linguagem concisa ou sincopada, notamos que 11 entre os 15 professores-estudantes participantes da pesquisa revelaram esse indicador. Somente aqueles que não usaram a forma genérica expressando-se em linguagem natural, como apresentamos no Quadro 6, não o revelaram.

Apresentamos a seguir as adaptações e desdobramentos, que realizamos em função do processo de análise, dos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão(2005) que deram origem aos novos indicadores utilizados nos quadros de resultados apresentados.

1. Tendo por base o indicador “Desenvolver algum tipo de processo de generalização”, identificamos em vários protocolos a representação da forma genérica do número ímpar e em alguns a não representação dela. Um estudo mais minucioso nos conduziu a agrupar esses protocolos em categorias conforme os resultados que apresentamos nos Quadros 4, 5 e 6.

2. Com relação ao indicador: “Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema”, preferimos suprimir o termo “aritméticas”, por entendermos que a expressão “estruturas de um problema” significa a sentença matemática para resolver o problema e, portanto essa supressão daria maior generalidade ao indicador. Analisando os dados segundo esse indicador, encontramos duas categorias de acordo com a generalização conforme os resultados apresentados no Quadro 9.
3. Pelo mesmo motivo do anterior, preferimos suprimir o termo “aritmético” dos indicadores: “Transformar uma expressão aritmética em outra mais simples” e “Produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema”.

Os demais indicadores encontrados não sofreram alterações e foram utilizados nos quadros com as mesmas denominações segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

Sintetizamos essas alterações e adaptações em uma grade que inclui todos os indicadores encontrados na análise dos protocolos referentes ao Problema 1, que descrevemos no Quadro 13:

**Quadro 13:** Grade de análise - indicadores baseados nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão. (2005) referentes ao Problema 1

| Indicadores utilizados na análise                                                                                  |                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram e operaram com a forma genérica do número ímpar | Grau 2: Ímpares quaisquer                                             |
|                                                                                                                    | Grau 1: Restrição com relação ao grau anterior - Ímpares consecutivos |
| Professores-estudantes que representaram, mas não operaram com a forma genérica do número ímpar                    |                                                                       |
| Professores-estudantes que não usaram a forma genérica do número ímpar                                             |                                                                       |
| Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente                         |                                                                       |
| Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias                                                             |                                                                       |
| Percepção e expressão das estruturas de um problema                                                                | Grau 2: Uso da forma genérica                                         |
|                                                                                                                    | Grau 1: Uso de exemplos numéricos                                     |
| Transformação de uma expressão em outra mais simples                                                               |                                                                       |
| Produção de mais de um modelo para um mesmo problema                                                               |                                                                       |

### **3.2 RESULTADOS DA ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO PROBLEMA 2**

Apresentamos a seguir os resultados da análise dos protocolos coletados referentes às resoluções do Problema 2. Analogamente à análise referente ao Problema 1, buscamos em cada um destes protocolos os aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), constantes no Quadro 1, que usamos como indicadores.

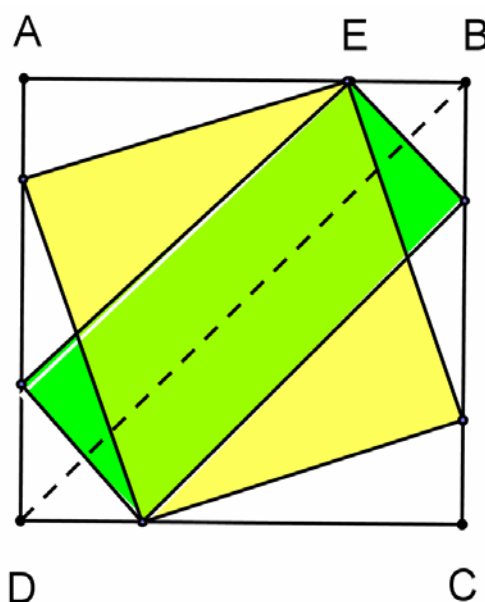
Transcrevemos a seguir os indicadores constantes do Quadro 1, que têm similaridade com o que encontramos nos protocolos:

1. Desenvolver algum tipo de processo de generalização.
2. Desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.
3. Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias.
4. Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema.
5. Transformar uma expressão aritmética em outra mais simples.
6. Produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema.
7. Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos.
8. Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas.

Durante essa busca emergiram do material analisado procedimentos similares aos encontrados na análise dos protocolos referentes ao Problema 1. Portanto, visando evitar repetições, nos ativemos a alguns indicadores que parecem revelar mais detalhes sobre o pensamento algébrico dos professores-estudantes.

Como a aplicação do Problema 2 teve a presença de um recurso tecnológico, temos a intenção de durante a presente análise buscar respostas para as questões: *O uso da tecnologia contribui para a resolução de um dos problemas propostos? Em que sentido?*

Para que o leitor compreenda como é apresentada a figura do Problema 2 no aplicativo, mostramos a seguir um esboço deste (Figura 4) seguido de explicações sobre sua execução.



**Figura 4:** Ilustração do aplicativo apresentado no Problema 2

Durante a execução do aplicativo, é possível variar o ponto E ao longo de todo o segmento AB, inclusive na parte em que  $AE < EB$  para que o aluno visualize o que acontece com as figuras em todas as posições possíveis do ponto E. Por essa razão, alguns professores-estudantes citam em suas resoluções o momento em que o ponto E coincide com o vértice A.

O Professor “G” não apresentou nenhuma resolução para o Problema 2, tendo escrito no espaço reservado para ela: “Estou pensando na resolução”. Por esse motivo não fazemos referência a ele na presente análise.

A seguir apresentamos os pontos relevantes do que encontramos durante o processo de análise, com base nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) já destacados, em quadros seguidos de considerações sobre cada um deles.

**Quadro 14:** Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram e operaram com as formas genéricas das áreas das figuras

| Grau de generalização                                                                                    | Exemplo de resolução                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Professor-estudante                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Grau 2</p> <p>Quadrados e retângulos quaisquer</p>                                                    | <p>Professor "B"</p> <p>De acordo com a simetria temos as medidas indicadas. Então:</p> <p>(1) área do quadrado interno = <math>x^2 \stackrel{\text{Pitágoras}}{=} a^2 + b^2</math></p> <p>(2) Temos também <math>(EH)^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow EH = a\sqrt{2}</math><br/> <math>(EF)^2 = b^2 + b^2 \Leftrightarrow EF = b\sqrt{2}</math></p> <p>(3) Portanto, área (EFH) = <math>a\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2} = 2ab</math></p> <p>(4) Por hipótese, <math>a &gt; b</math>. Logo, isso acarreta;</p> $a - b > 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <p>Professor "B"</p> <p>Professor "D"</p> <p>Professor "E"</p> <p>Professor "I"</p> <p>Professor "J" (1ª e 2ª resolução)</p> |
| <p>Grau 1</p> <p>Restrição com relação ao grau anterior:</p> <p>Quadrados ou retângulos particulares</p> | <p>Professor "A"</p> <p>Se <math>AE &gt; EB</math> então não poderia ser formado um quadrado pois ele é formado quando <math>E</math> é ponto médio, (<math>AE \cong EB</math>)</p> <p>Considerando que é possível a construção do quadrado a partir do ponto <math>E</math></p> <p>Área do retângulo = <math>a \cdot b</math>.<br/> <math>a^2 = 2x^2 \Rightarrow a = x\sqrt{2}</math><br/> <math>b^2 = 2y^2 \Rightarrow b = y\sqrt{2}</math> } <math>a \cdot b = 2xy</math></p> <p>Área do quadrado = <math>l^2</math><br/> <math>l^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2</math><br/> <math>l^2 = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{4}</math><br/> <math>l^2 = 2 \cdot \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2}</math><br/> <math>= \frac{2xy}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2}</math><br/> <math>= 2xy \cdot \frac{1}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2}</math></p> <p><math>2xy &lt; 2xy \cdot \frac{1}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2} \therefore</math> a área do quadrado é maior</p> | <p>Professor "A"</p> <p>Professor "K"</p> <p>Professor "L"</p>                                                               |

### 3.2.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 14

Nos protocolos de resolução referentes ao Problema 2, também encontramos modos de resolução similares que permitiu-nos um desdobramento em graus de generalização conforme mostra o Quadro 14.

Acreditamos que aqueles professores-estudantes cujas resoluções foram classificadas no Grau 2 pensaram e trabalharam as duas figuras simultaneamente, fato que pode ter sido influenciado pela apresentação do aplicativo. Por outro lado, aqueles classificados no Grau 1, mesmo após terem observado a variação do ponto E e das figuras internas no aplicativo, possivelmente continuaram pensando nelas separadamente, o que pode ter levado a generalização parcial para retângulos ou quadrados particulares. Com isso, nos pareceu que aqueles que partiram de retângulos ou quadrados quaisquer apresentam um grau de generalização superior àqueles que partiram de figuras particulares.

Na resolução do professor “A” podemos notar que só é admitida a construção do quadrado no caso particular em que E é ponto médio do segmento AB, apesar do enunciado do problema afirmar a sua existência quando  $AE > EB$ . No questionário, esse professor-estudante admitiu que considerou o caso particular, o que revela sua percepção da interpretação equivocada do Problema 2, conforme transcrito a seguir:

“A 1ª afirmação foi feita utilizando dados do enunciado, porém considerei um caso particular da formação do quadrado, quando E é ponto médio do segmento AB as medidas dos segmentos formados são iguais”. (Professor “A”)

Esse professor-estudante, na resolução do Problema 1, também foi classificado no Grau 1 por ter apresentado generalização apenas para ímpares consecutivos. Ele não registrou no questionário esse equívoco, mesmo após a discussão do problema em classe. Comparando as duas situações temos indícios de que com essa percepção, tenha havido algum avanço no pensamento algébrico desse professor-estudante, o que poderá ser melhor investigado nas análises seguintes.

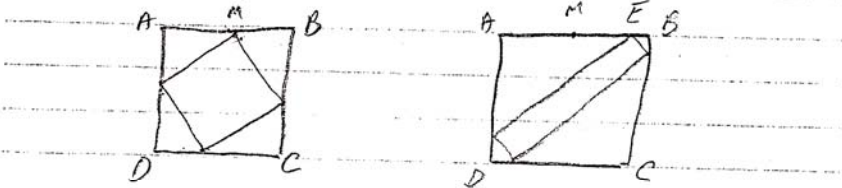
Outro fato a ser considerado foi a classificação no Grau 2 de generalização do Professor “B” e do Professor “I”, que na análise do Problema 1 não operaram com a

forma genérica. Essa constatação vai de encontro a nossa suposição de que os professores-estudantes que se expressaram através da linguagem natural na resolução do Problema 1 não relacionam diretamente o pensamento algébrico com a linguagem algébrica.

Quanto à influência do uso da tecnologia (aplicativo), apenas um professor classificado no Quadro 14 manifestou-se no questionário. Esse afirmou que o recurso levou-o a pensar de forma errada, ao afirmar: “Inicialmente, gostaria de explicar que visualizando a figura no computador, tive um pensamento errado, afirmando que ambas as figuras tinham a mesma área” (professor “K”). Nesse caso, o uso da tecnologia pode ter prejudicado o pensamento algébrico desse professor-estudante, visto que na análise do Problema 1 foi classificado quanto a generalização no Grau 2 (ímpares quaisquer).

Em seguida, apresentamos o Quadro 15, com os resultados referentes aos protocolos em que os professores-estudantes que não usaram as formas genéricas das áreas das figuras.

**Quadro 15:** Professores-estudantes que não usaram as formas genéricas das áreas das figuras

| Exemplo de resolução                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Professor-estudante                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Professor “C”</p>  <p>Chamando de <math>M</math>, o ponto médio de <math>AB</math>.<br/>         Como no limite central do segmento <math>AB</math>, as áreas tendem a ser iguais a metade do quadrado <math>ABCD</math> e quando o ponto <math>E</math> percorre a metade definida pelo intervalo <math>[MB]</math>, a área do quadrado tende a se igualar à área do quadrado <math>ABCD</math> e a área do retângulo tende a zero, acredito ter o quadrado área maior que o retângulo.</p> | <p>Professor “C”</p> <p>Professor “F”</p> <p>Professor “H”</p> <p>Professor “M”</p> <p>Professor “N”</p> <p>Professor “O”</p> |

### 3.2.2 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 15

Os professores-estudantes classificados no Quadro 15 diferem dos demais por terem se expressado em linguagem natural ou sincopada sem a utilizar as formas genéricas das áreas das figuras. Percebemos que a totalidade dos professores-estudantes dessa categoria buscou resolver o problema baseados na observação do comportamento das figuras nos extremos do segmento EB. Cremos que um dos fatores que pode ter influenciado nesse procedimento foi a visualização do aplicativo, uma vez que os próprios professores-estudantes se manifestaram no questionário afirmando essa influência, conforme transcrevemos a seguir:

“O primeiro pensamento foi fazer uma resolução algébrica, mas influenciada com a visualização do aplicativo, resolvi fazer enunciando cada possíveis posições para o ponto E, observando os extremos”. (Professor “F”).

“Resolvi toda a tarefa tendo em mente a visualização do aplicativo, em que no deslocamento do ponto E, verifiquei a mudança das figuras”. (Professor “H”)

Embora pareçam ter interpretado corretamente a movimentação do ponto E e o comportamento das figuras, esses professores-estudantes fizeram apenas afirmações gerais. Essa constatação veio da análise dos protocolos de resolução, nos quais os professores-estudantes relataram o que visualizaram, porém não apresentaram uma fundamentação matemática que sustentasse suas afirmações.

Nos questionários, é possível que a busca de justificativas tenha levado esses professores-estudantes a enxergarem que a idéia utilizada por eles foi a de função. Entretanto, apenas dois professores-estudantes explicitaram no próprio questionário o uso de função, conforme transcrevemos a seguir:

“[...] pensei nas funções que calculariam as áreas a serem comparadas, especificamente no comportamento da função quanto a crescimento e decrescimento, no intervalo em questão [...]”. (Professor “C”)

“Valor máximo e mínimo de funções.” (Professor “O”)

E esses dois, o fizeram de maneira vazia de significado matemático e de sentido. Os demais citaram em suas justificativas apenas os termos: “variação entre grandezas”, “área máxima e área mínima”, “crescimento e decrescimento”.

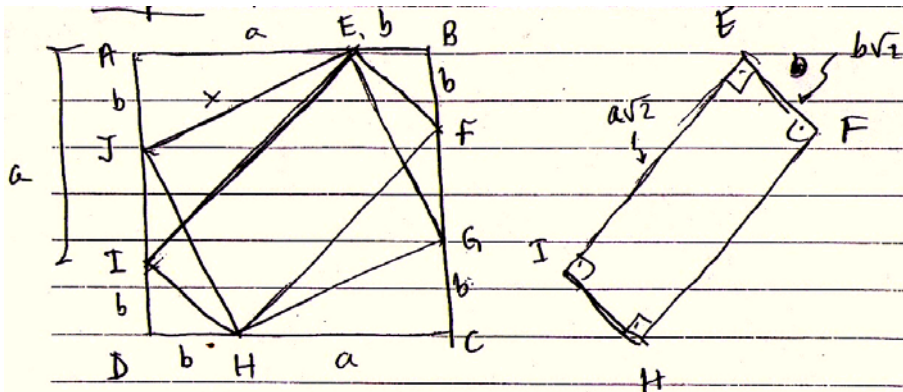
É importante ressaltar que três desses professores-estudantes (Professores “C”, “F” e “H”) citaram em suas resoluções ou questionários a necessidade de uma solução algébrica. Um retorno a análise do Problema 1, levou-nos a constatar que todos os três representaram e operaram com a forma genérica do número ímpar. Por isso, cremos que esses professores-estudantes costumam relacionar e expressar o pensamento algébrico através da linguagem algébrica e talvez não a tenham utilizado porque foram influenciados pelo aplicativo.

Por outro lado, outros três professores-estudantes (Professores “M”, “N” e “O”), que nas resoluções do Problema 1 não haviam operado com a forma genérica, continuaram sem manipulá-la nas resoluções do Problema 2. Isso reafirma nossa suposição feita na análise anterior de que esses professores-estudantes, em particular, parecem não relacionar diretamente o pensamento algébrico à linguagem algébrica. Buscaremos confirmar essa suposição nas próximas análises visto que ela não se aplica a todos os que utilizam linguagem natural em suas resoluções como já constatamos.

Com relação à linguagem utilizada nas resoluções, uma comparação entre os Quadros 14 e 15 permite-nos observar que aqueles professores-estudantes que utilizaram e operaram com as formas genéricas das áreas das figuras (Quadro 14) valeram-se de uma forma sincopada por meio da qual a linguagem natural se alia a linguagem algébrica simbólica para expressar seu pensamento. Esses apresentam resoluções mais concisas e claras do que aqueles que não usaram as formas genéricas das áreas das figuras (Quadro 15).

Em seguida, apresentamos o Quadro 16, com os resultados referentes ao indicador: “Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos” acompanhado de considerações sobre ele.

**Quadro 16:** Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos

| Exemplo de resolução                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Professor-estudante                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Professor "B"</p>  <p>Professor "D"</p> <p>Como por hipótese temos que <math>x &gt; y</math>, então</p> $x - y > 0$ $(x - y)(x - y) > 0 \cdot (x - y)$ $x^2 - 2xy + y^2 > 0$ $x^2 + y^2 > 2xy$ <p>Portanto a área do quadrado é maior do que a área do retângulo.</p> | <p>Professor "A"</p> <p>Professor "B"</p> <p>Professor "C"</p> <p>Professor "D"</p> <p>Professor "E"</p> <p>Professor "F"</p> <p>Professor "H"</p> <p>Professor "I"</p> <p>Professor "J" (1ª e 2ª resolução)</p> <p>Professor "K"</p> <p>Professor "L"</p> <p>Professor "M"</p> <p>Professor "N"</p> <p>Professor "O"</p> |

### 3.2.3 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 16

Nas resoluções do Problema 2, por se tratar de um problema geral que envolve áreas de figuras planas, evidenciaram-se relações entre padrões geométricos e entre grandezas.

O estabelecimento de relações entre expressões ou padrões geométricos representa um importante caminho no processo de generalização e desenvolvimento do pensamento algébrico. Vale e Pimentel (2005) consideram que os padrões são a base do pensamento algébrico e afirmam que a generalização surge com o reconhecimento de padrões e a identificação de relações.

Acreditamos que esse indicador tenha uma forte ligação com o indicador “Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias”, pois a observação e comparação entre padrões precedem a percepção de regularidades ou invariâncias.

Podemos observar que o próprio enunciado do Problema 2 induz ao uso desse indicador quando faz referência a duas figuras e pergunta qual delas tem a maior área, nesse caso uma comparação entre as figuras e suas áreas torna-se imprescindível para a resolução do problema. Por essa razão, entendemos que esse indicador aparece nas resoluções de todos os professores-estudantes.

Como exemplo no Quadro 16, apresentamos partes das resoluções de dois professores-estudantes que evidenciam a presença desse indicador. Na resolução do professor “B”, o desenho das duas figuras simultaneamente no interior do quadrado ABCD revela um caminho para comparar as duas figuras. Um desenho semelhante foi mostrado para a classe através do aplicativo e a variação do ponto E permitiu aos professores-estudantes observarem o padrão que as figuras seguem quando seus vértices mudam de posição sobre os lados do quadrado ABCD.

Na resolução do Professor “D” é encontrada, após transformações, uma desigualdade em que cada membro é formado pela expressão que representa a área de uma das figuras. cremos que a comparação entre essa desigualdade e as expressões de área do quadrado e do retângulo encontradas anteriormente permitiu a esse professor-estudante chegar à conclusão sobre qual delas é maior.

A seguir, apresentamos o Quadro 17 com os resultados referentes ao indicador: “Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões”, seguido das respectivas considerações.

**Quadro 17:** Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões

| Exemplo de resolução                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Professor-estudante                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Professor "J" (2ª resolução)</p> <p>Professor "O"</p> <p> <math>A = \text{área do quadrado } ABCD</math><br/> <math>A_1 = \text{área do quadrado interno}</math><br/> <math>A_2 = \text{área do retângulo}</math> </p> <p>Quando <math>AE &gt; EB</math>, <math>\rightarrow</math> a área <math>A_1 &gt; A_2</math></p> <p>as dimensões do retângulo sofrem variações que vão aumentar o comprimento, porém vão diminuir a largura na mesma proporção de forma que, a área do retângulo irá diminuir até chegar a zero (dimensão da reta BD).</p> | <p>Professor "A"</p> <p>Professor "B"</p> <p>Professor "C"</p> <p>Professor "D"</p> <p>Professor "E"</p> <p>Professor "F"</p> <p>Professor "H"</p> <p>Professor "I"</p> <p>Professor "J" (1ª e 2ª resolução)</p> <p>Professor "K"</p> <p>Professor "L"</p> <p>Professor "M"</p> <p>Professor "N"</p> <p>Professor "O"</p> |

### 3.2.4 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 17

Entendemos que esse indicador se revelou nas resoluções de todos os professores-estudantes. Aqueles que usaram as formas genéricas assegurados pelas expressões das próprias sentenças de áreas e os que não a usaram por provavelmente presumirem uma relação de equivalência que lhes possibilitou fazer afirmações gerais.

Na 2ª resolução do Professor "J", a igualdade revela a equivalência entre duas expressões em que uma grandeza ao quadrado é igual à soma de duas outras grandezas ao quadrado. Nesse caso, relacionam-se: área de uma figura e segmentos.

Pareceu-nos que aqueles professores-estudantes que responderam sem utilizarem as formas genéricas basearam-se numa relação de equivalência entre áreas e segmentos, como pode ser visto no exemplo da resolução do Professor "O".

Nesse caso, uma equivalência entre os lados do retângulo e sua área, em que variações proporcionais no comprimento e largura equivalem a variações na área, como é relatado em sua resolução.

Em função do processo de análise, apenas o indicador: “Desenvolver algum tipo de processo de generalização” sofreu desdobramentos. A identificação em vários protocolos do uso das formas genéricas das áreas das figuras e em algumas a não representação delas nos conduziu a agrupar esses protocolos em categorias conforme os resultados que apresentamos nos Quadros 14 e 15. Os outros dois indicadores apresentados nos Quadros 16 e 17 não sofreram alterações e foram utilizados com as mesmas denominações segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

Os demais indicadores explicitados nos procedimentos dos professores-estudantes foram similares àqueles revelados durante a análise dos protocolos referentes ao Problema 1 que constam no Quadro 13, os quais destacamos a seguir:

- Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.
- Percepção e expressão das estruturas de um problema.
- Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias.
- Transformação de uma expressão em outra mais simples.
- Produção de mais de um modelo para um mesmo problema.

Quanto ao indicador: “Percepção e expressão das estruturas de um problema” ressaltamos que encontramos uma diferença significativa com relação a análise dos protocolos referentes ao Problema 1: a totalidade dos professores-estudantes cujas resoluções revelaram esse indicador expressaram as estruturas do problema através das formas genéricas das áreas das figuras. Nesse aspecto, diferiu dos protocolos referentes ao Problema 1 em que algumas resoluções apresentaram estruturas com exemplos numéricos. É possível que isso tenha

ocorrido ou pela própria generalidade garantida pelo enunciado do Problema 2 ou pelo fato dos professores-estudantes terem percebido na experiência com o Problema 1 a necessidade de generalização para quaisquer ímpares (após discussões em classe).

Por não revelarem maiores detalhes sobre o pensamento algébrico dos professores-estudantes, não apresentamos quadros e nem considerações sobre os demais indicadores.

### **3.2.5 Síntese dos indicadores revelados no Problema 2**

No Quadro 18 a seguir, reunimos os resultados encontrados numa síntese dos indicadores revelados nas resoluções do Problema 2, como fizemos na análise das resoluções do Problema 1. Ressaltamos que não fizemos referência aos quadros, pois não apresentamos um quadro para cada indicador como ocorreu nos resultados da análise referente ao Problema 1.

**Quadro 18:** Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 2

| Título do indicador                                                                                                         | Professor |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|                                                                                                                             | A         | B | C | D | E | F | H | I | J | K | L | M | N | O |
| Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram e operaram com as formas genéricas das áreas das figuras |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Professores-estudantes que não usaram as formas genéricas das áreas das figuras                                             |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente                                  |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias                                                                      |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Percepção e expressão das estruturas do problema                                                                            |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Transformação de uma expressão em outra mais simples                                                                        |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Produção de mais de um modelo para um mesmo problema                                                                        |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos                                             |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões                              |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Legenda:

- Representaram e operaram com as formas genéricas das áreas das figuras (Grau 2: Quadrados e retângulos quaisquer)
- Representaram e operaram com as formas genéricas das áreas das figuras (Grau 1: Quadrados ou retângulos particulares)
- Não usaram a forma genérica das áreas das figuras

O Quadro 18 revela que quanto ao uso da forma genérica, o indicador que apareceu com maior freqüência nas resoluções dos professores-estudantes refere-se à representação e operação com a forma genérica das áreas das figuras, visto que dos 14 estudantes que apresentaram resoluções para o Problema 2, 8 revelaram esse indicador. Dentre eles, apenas 5 foram classificados no Grau 2 de generalização.

Uma comparação entre as freqüências desse indicador nas resoluções do Problema 1 (Quadro 12) e do Problema 2 (Quadro 18) revela que não houve evolução na freqüência desse indicador de uma resolução para a outra.

Podemos notar ainda, que os 8 professores-estudantes cujas resoluções revelaram esse indicador, também revelaram os seguintes:

- Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.
- Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias.
- Percepção e expressão das estruturas de um problema.
- Transformação de uma expressão em outra mais simples.
- Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos.
- Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões.

Essa convergência de indicadores também foi observada na síntese dos indicadores revelados nas resoluções do Problema 1 (Quadro 12), com exceção dos dois últimos por não terem sido explicitados nas resoluções. Isso reforça nossa suposição de que um dos fatores que pode ter contribuído para essas convergências foi o uso da linguagem algébrica simbólica nas resoluções.

Assim como ocorreu na síntese dos indicadores revelados nas resoluções do Problema 1 (Quadro 12), a maioria dos professores-estudantes expressou-se através de uma linguagem concisa ou sincopada, visto que 10 entre os 14 professores-estudantes que apresentaram resolução para o Problema 2 revelaram esse indicador. Somente aqueles que não usaram a forma genérica expressando-se em linguagem natural não o revelaram.

### 3.2.6 Considerações sobre o uso do aplicativo na aplicação do Problema 2

Embora no decorrer da presente análise tenhamos feito referência à influência do aplicativo nas resoluções do Problema 2 buscamos sintetizar em tópicos o que descobrimos a fim de reunir dados que visam responder a seguinte questão: O uso de um recurso tecnológico pela professora da disciplina contribui para a resolução pelos professores-estudantes de um dos problemas propostos? *Em que sentido?*

Nossa análise dos protocolos de resolução e dos questionários dos professores-estudantes permitiu-nos fazer algumas considerações sobre a apresentação do aplicativo. Do nosso ponto de vista, o uso do aplicativo:

- a) Permitiu a visualização da variação das áreas do quadrado e do retângulo internos pela variação do ponto E.
- b) Possibilitou a observação dos padrões que as figuras seguiam quando seus vértices variavam sobre os lados do quadrado ABCD, levando à percepção de regularidades ou invariâncias.
- c) Levou alguns professores-estudantes a pensarem nas duas figuras simultaneamente dentro do quadrado ABCD com o ponto E sendo um de seus vértices.
- d) Induziu alguns professores-estudantes a resolverem o problema baseados na observação do comportamento das figuras nos extremos do segmento EB.
- e) Dificultou uma resolução algébrica dos professores-estudantes que tiveram essa interpretação, pois buscaram enunciar o que visualizaram.
- f) Confundiu alguns professores-estudantes que fizeram uma interpretação equivocada do problema. Dois deles enxergaram ambas as figuras com a mesma área e citaram em seus questionários essa confusão. Os protocolos a seguir confirmam nossa afirmação.

Inicialmente, gostaria de implicar que visualizando a figura no computador, tive um pensamento errado, afirmando que ambas as figuras tinham a mesma área. A partir disso, pensei que independentemente de onde estivesse o ponto E, a figura formada tivesse a mesma área, tentei provar isso algebricamente, mas acabei errando em alguns aspectos.

**Figura 5:** Protocolo do questionário referente à resolução do Problema 2, Professor “K”

Quando observei o aplicativo apresentado pela professora, este me confundiu, porque me pareceu que o ponto E ao ser movimentado, reproduzia igualdade das áreas. Não fiquei preocupada com as figuras, mas com o que se apresentava na minha mente que era a cor amarela, representando as áreas das figuras. Então tive minhas conclusões escrevendo uma resolução que não têm sustentabilidade.

**Figura 6:** Protocolo do questionário referente à resolução do Problema 2, Professor “N”

Essas constatações revelam indícios de que o uso do recurso tecnológico na aplicação do Problema 2 trouxe algumas contribuições, mas também gerou problemas de compreensão, como pudemos observar nos protocolos apresentados. Além disso, é possível que alguns professores-estudantes não tenham utilizado a linguagem algébrica simbólica para expressar o pensamento algébrico, pois ficaram “presos” às imagens que visualizaram.

Nesse aspecto concordamos com Maranhão, Machado e Coelho (2004) quando afirma que o uso das novas tecnologias no ensino e aprendizagem de matemática com a intenção de auxiliá-los, pode gerar “[...] por si só novos problemas de compreensão e raciocínio.” (p.3)

### 3.3 RESULTADOS DA ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO PROBLEMA 3

Apresentamos a seguir os resultados da análise dos protocolos coletados referentes às resoluções do Problema 3.

Ressaltamos inicialmente que o contato com os protocolos de resolução dos professores-estudantes referentes ao Problema 3 revelou uma similaridade entre eles, uma vez que na totalidade das resoluções, os professores-estudantes representaram e operaram com a forma genérica da área dos retângulos.

Teria sido o contato prévio com o *Jornal do Aluno*<sup>21</sup> visto que dentre os 15 professores-estudantes participantes da pesquisa, 11 atuavam na rede estadual de ensino no 1º semestre de 2008, sendo que 9 destes lecionavam no Ensino Médio? Ou a sua formação superior? Ou talvez o contato com o Problema 4, cujo enunciado já traz a fórmula, tendo em vista que os dois problemas foram aplicados no mesmo dia?

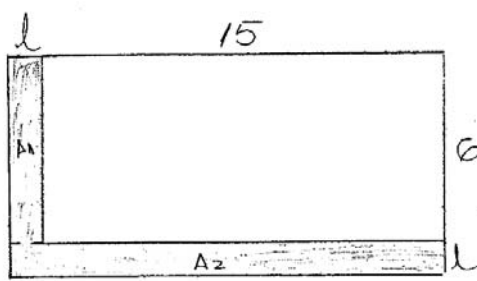
Essa similaridade entre os protocolos levou-nos a apresentar um único quadro, cuja resolução que o compõe representa todas as demais. Quanto aos indicadores baseados nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) que emergiram do material analisado, estes foram semelhantes aos encontrados nas análises dos protocolos referentes aos Problemas 1 e 2. Por não terem fornecido mais detalhes sobre o pensamento algébrico dos professores-estudantes, fazemos um breve comentário sobre eles.

A seguir apresentamos o Quadro 19 com os resultados referentes aos indicadores revelados nas resoluções do Problema 3 acompanhado de considerações sobre ele.

---

<sup>21</sup> O *Jornal do Aluno* do Programa São Paulo faz Escola da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo foi distribuído para todos os alunos do Ensino Fundamental e Médio da rede estadual no 1º semestre de 2008. O que utilizamos nesse estudo foi destinado a alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Quadro19 Resolução representativa dos professores-estudantes referente ao Problema 3

| Exemplo de resolução                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Professor-estudante                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Professor "I"</p>  <p>Denotando:</p> <p><math>A_j</math> por Área do jardim</p> <p><math>A_{JR}</math> por Área do jardim reformado</p> <p><math>A_p</math> por Área ocupada pelas pedras</p> <p><math>A_{JR} = A_j + A_p</math></p> <p><math>A_{JR} = 90 + 46 \Rightarrow A_{JR} = 136 \text{ m}^2</math></p> <p><math>A_p = 6 \cdot l + (15 + l) \cdot l</math></p> <p><math>46 = 6l + 15l + l^2</math></p> <p><math>46 = 21l + l^2</math></p> <p><math>l^2 + 21l - 46 = 0 - 46</math></p> <p><math>l^2 + 21l - 46 = 0</math></p> <p><math>\Delta = 625 \Rightarrow \Delta &gt; 0 \therefore l_1 \neq l_2</math></p> <p><math>l_1 = \frac{-21 + 25}{2}</math></p> <p><math>l_1 = 2 \text{ m}</math></p> <p><math>l_2 = \frac{-21 - 25}{2}</math></p> <p><math>l_2 = -23 \text{ m}</math> não se aplica a essa situação</p> <p>Resp: Teremos um retângulo de medidas <math>6 \text{ m} \times 2 \text{ m}</math> e outro de <math>17 \text{ m} \times 2 \text{ m}</math></p> | <p>Professor "A"</p> <p>Professor "B"</p> <p>Professor "C"</p> <p>Professor "D"</p> <p>Professor "E"</p> <p>Professor "F"</p> <p>Professor "G"</p> <p>Professor "H"</p> <p>Professor "I"</p> <p>Professor "J"</p> <p>Professor "K"</p> <p>Professor "L"</p> <p>Professor "M"</p> <p>Professor "N"</p> <p>Professor "O"</p> |

### 3.3.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 19

Os indicadores baseados nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico aqui tratados foram revelados na totalidade das resoluções dos professores-estudantes devido a similaridade presente entre elas. Faremos breves comentários sobre cada indicador tomando como exemplo a resolução que consta no Quadro 19.

Consideramos que a presença da variável nas resoluções, representada pela letra “l” no exemplo do Quadro 19, revelou a presença dos indicadores: “Desenvolvimento de algum tipo de processo de generalização” e “Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias”. Essa variável assumiu o papel de incógnita, cujo valor foi encontrado durante a resolução do problema.

O indicador: “Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada para expressar-se matematicamente” foi encontrado em todas as resoluções, pois apesar dos professores-estudantes terem apresentado uma resolução algébrica, consideramos que nenhuma delas foi estritamente algébrica. Na tentativa de explicar como pensaram, as resoluções incluem algumas passagens em linguagem natural.

Identificamos o indicador: “Percepção e expressão das estruturas de um problema”, na sentença matemática elaborada a partir do enunciado, representada no exemplo por  $A_p = 6.l + (15 + l).l$ . Como o enunciado do problema forneceu valores de lados dos retângulos e área, essa elaboração dependeu de como esses dados deveriam ser organizados.

O indicador: “Transformação de uma expressão em outra mais simples” se fez presente nos cálculos efetuados para se encontrar a solução do problema. Esse indicador revela a importância do transformismo algébrico, que em determinado momento é necessário, pois “[...] fornece um simbolismo conciso por meio do qual é possível abreviar o plano de resolução de uma situação-problema, o que possibilita dar conta da totalidade e da estrutura da resolução”. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 2003, p. 89)

Com relação ao indicador: “Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões”, cremos que os professores-estudantes tenham interpretado que a sentença formada a partir do enunciado (estruturas do problema) era uma igualdade que relacionava o valor da área da figura e seus lados, evidenciando uma relação de equivalência entre grandezas.

Reunimos os indicadores revelados nas resoluções do Problema 3 a título de síntese no Quadro 20, a seguir.

**Quadro 20:** Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 3

| Título do indicador                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Desenvolvimento de algum tipo de processo de generalização                                     |
| Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente     |
| Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias                                         |
| Percepção e expressão das estruturas do problema                                               |
| Transformação de uma expressão em outra mais simples                                           |
| Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões |

### 3.3.2 Outras considerações sobre os resultados da análise das resoluções do Problema 3

Durante a análise dos protocolos chamou-nos a atenção o fato de 6 dos 15 professores-estudantes participantes da pesquisa não terem dado a resposta completa solicitada no enunciado através da sentença: “calcule as medidas dos lados desses retângulos”. Suas respostas só fazem referência à largura desses retângulos, ou seja, 2m.

Um retorno à fonte original do Problema 3 revela que a resposta dada por esses professores-estudantes corresponde à solicitada no enunciado original do problema, antes de nossas adaptações: “Sabendo-se que a área ocupada pelas

pedras é de  $46\text{m}^2$  e que a largura dos retângulos acrescentados é a mesma, calcule essa largura em metros”.(SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2007. p. 44). Nesse caso, é possível que o contato prévio com o material original tenha influenciado na resposta desses professores-estudantes.

Quanto aos aspectos da linguagem algébrica, uma busca nos questionários revelou que o conhecimento das propriedades é precário entre os professores-estudantes. Percebemos nas justificativas o predomínio da descrição de procedimentos e do enunciado de tópicos matemáticos sobre o conhecimento das propriedades e regras válidas. Consideramos a possibilidade de essas limitações estarem relacionadas com a própria formação desses professores-estudantes que durante a graduação podem ter tido pouco contato com o aspecto semântico da Álgebra. Essa suposição se apóia na pesquisa de Figueiredo (2007) que constatou que alunos de graduação sentem necessidade de serem capazes de justificar os porquês das atividades que realizam e não apenas saber resolvê-las.

Durante as análises dos protocolos encontramos um equívoco grave cometido pelo Professor “M” que julgamos ser válido comentá-lo. Durante a resolução da equação do 2º grau, o professor-estudante provavelmente considerou negativo o produto entre dois números inteiros negativos e um número inteiro positivo, visto que a expressão  $\sqrt{21^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-46)}$  resultou em  $\sqrt{257}$  como mostra a Figura 7. Ressaltamos que esse problema foi resolvido duas vezes (na frente e no verso da folha) e que o mesmo erro foi cometido em ambas.

$l^2 + 21l - 46 = 0 \rightarrow \text{eq. 2}^\circ \text{ grau}$   
 $l = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-46)}}{2 \cdot 1} \rightarrow \text{Fórmula de Bhaskara}$   
 $l = \frac{-21 \pm \sqrt{257}}{2}$   
 $\sqrt{257}$  é aproximadamente 16, então  
 impossível essas medidas para os  
 lados dos retângulos.  
 $l = \frac{-21 \pm 16}{2} \left\{ \begin{array}{l} l_1 = \frac{-21-16}{2} = -\frac{37}{2} \\ l_2 = \frac{-21+16}{2} = -\frac{5}{2} \end{array} \right.$   
 duas medidas  
 negativas não  
 valem para os lados  
 do retângulo

**Figura 7:** Protocolo de resolução do Problema 3, Professor “M”

Um retorno aos resultados das análises dos Problemas 1 e 2, revelou que nas resoluções desses dois problemas, o Professor “M” não apresentou uma solução algébrica, expressando-se apenas através da linguagem natural. Será que o fato de estar há 10 anos ocupando um cargo administrativo e, portanto afastado da sala de aula poderia ter influenciado esse professor-estudante no domínio da linguagem algébrica simbólica?

### 3.4 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO PROBLEMA 4

Apresentamos a seguir a análise dos protocolos coletados referentes às resoluções do Problema 4.

A presente análise também revelou uma similaridade entre as resoluções, visto que todos os professores-estudantes que responderam ao problema apresentaram uma solução algébrica. Além disso, dentre os 14 professores-estudantes que responderam ao problema, 11 apresentaram o mesmo modo de resolução.

Consideramos que essas constatações podem estar relacionadas ao fato de que o enunciado, por já trazer fórmula, induza fortemente o seu uso. Ou, retomando a questão anterior referente ao Problema 3, podem ter ligação com o contato prévio do professores-estudantes com o **Jornal do Aluno** visto que o Problema 4 também foi retirado desse material.

Os indicadores baseados nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) que emergiram do material analisado foram semelhantes aos encontrados nos resultados das análises referentes aos problemas anteriores. A similaridade entre as resoluções levou-nos a apresentar um único quadro, cuja resolução que o compõe representa todas as demais.

Ressaltamos que o Professor “N” não apresentou nenhuma resolução para o Problema 4, tendo escrito no espaço reservado para ela: “h=altura” e “t=tempo=?”. Por esse motivo não foi classificado no quadro.

A seguir apresentamos o Quadro 21 com os resultados referentes aos indicadores revelados nas resoluções do Problema 4 acompanhado de considerações sobre ele.

**Quadro 21:** Resolução representativa dos professores-estudantes referente ao Problema 4

| Exemplo de resolução                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Professor-estudante                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Professor "K"</p> <p>Quando a bola atingir o chão novamente, após <math>t</math> segundos, a altura será zero (<math>h=0</math>) novamente, portanto:</p> $h = -4,9t^2 + 19,6t$ $0 = -4,9t^2 + 19,6t$ $-4,9t^2 + 19,6t = 0$ $t \cdot (-4,9t + 19,6) = 0$ $\boxed{t=0} \text{ ou } -4,9t + 19,6 = 0 *$ $* -4,9t + 19,6 - 19,6 = 0 - 19,6$ $-4,9t = -19,6$ $\frac{-4,9t}{-4,9} = \frac{-19,6}{-4,9}$ $\boxed{t = 4 \text{ segundos}}$ <p>Como <math>t=0</math> era antes do chute, a bola ficou no ar por 4 segundos.</p> | <p>Professor "A"</p> <p>Professor "B"</p> <p>Professor "C"</p> <p>Professor "D"</p> <p>Professor "E"</p> <p>Professor "F"</p> <p>Professor "G"</p> <p>Professor "H"</p> <p>Professor "I"</p> <p>Professor "J"</p> <p>Professor "K"</p> <p>Professor "L"</p> <p>Professor "M"</p> <p>Professor "O"</p> |

### 3.4.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 21

Enumeramos a seguir os indicadores baseados nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico revelados na totalidade das resoluções dos professores-estudantes ao resolverem o Problema 4:

- Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada para expressar-se matematicamente.
- Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias.
- Percepção e expressão das estruturas de um problema.

- Transformação de uma expressão em outra mais simples.
- Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões.

Por não terem fornecido mais detalhes sobre o pensamento algébrico dos professores-estudantes e visando evitar repetições não apresentamos comentários individuais sobre cada um dos indicadores enumerados acima.

Gostaríamos de ressaltar que o Problema 4 difere dos demais problemas propostos nesse estudo, por ser de estrutura fechada. Nele evidenciam-se as questões apontadas nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006) sobre as limitações que esse tipo de problema apresenta. Esse documento ressalta que

[...] é preciso estar atento a problemas “fechados”, porque esses pouco incentivam o desenvolvimento de habilidades. Nesse tipo de problema, já de antemão o aluno identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático. O uso exclusivo desse tipo de problema consegue mascarar a efetiva aprendizagem, pois o aluno, ao antecipar o conteúdo que está sendo trabalhado, procede de forma um tanto mecânica na resolução do problema. Isso provoca a cristalização de certo contrato didático, que tem como uma das regras implícitas que o aluno não deve se preocupar com o enunciado do problema, basta operar com os números que estão presentes, sem que haja qualquer reflexão sobre o resultado final, mesmo que eventualmente absurdo. (BRASIL, 2006, p. 83-84).

Com base nessa definição e retomando a resolução do Quadro 20, podemos notar que bastou operar com a sentença representada pela função  $h = -4,9t^2 + 19,6t$  que já foi fornecida diretamente no enunciado. Após a constatação de que o retorno ao solo significa uma ausência de altura ( $h=0$ ), a forma mecânica de resolução da equação do 2º grau deu conta da totalidade da solução do problema.

Quanto ao incentivo ao desenvolvimento do pensamento algébrico, consideramos que o Problema 4 apresenta limitações, visto que já traz a forma genérica no seu enunciado. cremos que os indicadores baseados nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico identificados nas resoluções relacionam-se com a interpretação e manipulação dessa forma genérica.

É possível que a presença da forma genérica no enunciado do problema tenha levado à ausência nas resoluções do indicador “Desenvolver algum tipo de processo de generalização”, que a nosso ver é um dos mais importantes aspectos caracterizadores do pensamento algébrico. Segundo Mason, Graham e Johnston-Wilder (2007, tradução nossa), a generalização é fundamental para a matemática, pois faz parte de todos os tópicos matemáticos e afirmam que “uma lição sem que os alunos tenham a oportunidade de expressar a generalidade não é uma lição matemática.”<sup>22</sup>

Por esses motivos, parece-nos que o Problema 4 relaciona-se com as concepções de Educação Algébrica que, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), reduzem o pensamento algébrico à linguagem algébrica, pois partem da existência de uma linguagem simbólica já constituída e acabam por reduzir o ensino-aprendizagem da Álgebra ao transformismo algébrico.

Essas considerações nos permitem concluir que problemas como o Problema 4 não são adequados para trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes.

Reunimos os indicadores revelados nas resoluções do Problema 3, a título de síntese, no Quadro 22 a seguir.

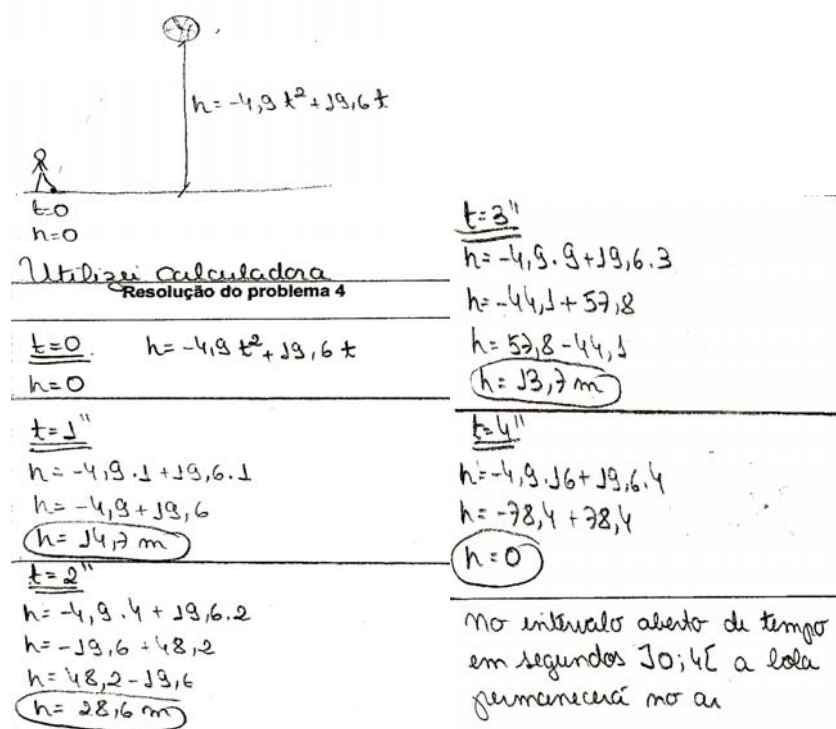
**Quadro 22:** Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 4

| Título do indicador                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias                                         |
| Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente     |
| Percepção e expressão das estruturas do problema                                               |
| Transformação de uma expressão em outra mais simples                                           |
| Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões |

<sup>22</sup> A lesson without learners having the opportunity to express a generality is not a mathematic lesson. (MASON, GRAHAM e JOHNSTON-WILDER, 2007, p.ix)

### 3.4.2 Outras considerações sobre os resultados da análise das resoluções do Problema 4

Durante a análise dos procedimentos dos professores-estudantes, encontramos uma resolução que acreditamos ser atípica entre estudantes de pós-graduação stricto sensu em Educação Matemática, conforme mostra a Figura 8.



**Figura 8:** Protocolo de resolução do Problema 4, Professor "A".

Nessa resolução, chamou-nos a atenção inicialmente o desenho apresentado. Do nosso ponto de vista, ele revela a necessidade de enxergar a situação concreta que é proposta no enunciado e talvez tenha influenciado na escolha do modo de resolução, uma vez que as igualdades  $t=0$  e  $h=0$  que revelam o momento inicial do chute aparecem tanto na resolução quanto no desenho.

Podemos notar que os valores da variável dependente  $h$  foram descobertos dando-se valores para a variável independente  $t$ , até se encontrar novamente  $h=0$ . Esse método, apesar de já se apresentar trabalhoso, visto que até a calculadora foi usada para acelerar os cálculos, se tornaria inviável para outras situações, por exemplo, quando o valor da variável independente não fosse um número inteiro.

Ressaltamos que no momento  $t=2$ , houve um equívoco no cálculo, pois o valor correto de  $h$  deveria ser 19,6 m, que representa a altura máxima que a bola atingiu.

Um retorno aos resultados das análises anteriores mostrou que as resoluções do Professor “A” referentes aos Problemas 1 e 2 foram classificadas no Grau 1 de generalização que se refere a generalização para casos particulares. Outro fato a ser considerado é que esse professor-estudante lecionou apenas 8 meses no Ensino Médio e essa experiência ocorreu há mais de 15 anos. Talvez a maior e mais recente experiência no Ensino Fundamental possa ter influenciado em suas respostas.

Quanto ao Professor “N” que não apresentou resposta para o Problema 4, um retrospecto das análises anteriores revelou que em suas resoluções referentes aos Problemas 1 e 2 esse professor-estudante não operou com a forma genérica e houve o predomínio da linguagem natural. Embora tenha apresentado uma solução algébrica para o Problema 3. cremos que um dos fatores que pode ter influenciado esses resultados é o seu afastamento do Ensino Médio há mais de 5 anos aliado à sua atividade na época da coleta dos dados como analista pedagógico e professor do EJA.

### 3.5 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS REFERENTES AO PROBLEMA 5

Apresentamos a seguir a análise dos protocolos coletados referentes às resoluções do Problema 5.

Nosso primeiro contato com os protocolos de resolução dos professores-estudantes referentes ao Problema 5 revelou uma convergência entre eles quanto ao uso de uma forma genérica, visto que todos os professores-estudantes que apresentaram solução para o item *b* do problema executaram esse procedimento.

Nesse caso, é possível que a presença da variável  $n$  no enunciado do problema tenha induzido os professores-estudantes a buscarem representar a forma genérica do número de bolinhas. Outra possibilidade é de os professores-estudantes já terem tido algum contato com esse tipo de problema visto que exemplos de problemas similares constam nos PCN (1998), ao sugerirem o trabalho com a generalização de padrões, o que pode ter influenciado nessas convergências.

A busca dos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) nos protocolos de resolução revelou a presença de indicadores semelhantes aos encontrados nos resultados das análises referentes aos problemas anteriores. Portanto, visando evitar repetições, nos ativemos a alguns indicadores que parecem revelar mais detalhes sobre o pensamento algébrico dos professores-estudantes.

A seguir apresentamos os pontos relevantes do que encontramos durante o processo de análise, com base nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), em quadros seguidos de considerações sobre cada um deles.

**Quadro 23:** Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram a forma genérica do número de bolinhas do  $n$ -ésimo termo

| Grau de generalização                                                                                                                                         | Exemplo de resolução                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Professor-estudante                                                                                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Grau 2</p> <p>Número de bolinhas do <math>n</math>-ésimo termo</p>                                                                                         | <p>Professor "B"</p> <p>Observando-se as linhas das seqüências vemos que, em cada uma, o total de bolinhas é dado pela soma <math>1+2+3+\dots+n</math>.</p> <p>Portanto, isso representa a soma dos <math>n</math> primeiros números naturais, que é a soma de uma P.A cujo 1º termo é 1 e cuja razão é 1.</p> $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$ | <p>Professor "B"</p> <p>Professor "C"</p> <p>Professor "D"</p> <p>Professor "E"</p> <p>Professor "G"</p> <p>Professor "H"</p> <p>Professor "J"</p> <p>Professor "K"</p> <p>Professor "L"</p> <p>Professor "M"</p> <p>Professor "N"</p> |
| <p>Grau 1</p> <p>Restrição com relação ao grau anterior:</p> <p>Número de bolinhas do <math>n</math>-ésimo termo com base no termo imediatamente anterior</p> | <p>Professor "F"</p> <p>b) Considerando <math>a_1 = 1</math>, o primeiro termo temos:</p> $a_2 = 2 + 1 = 3 = 2 + a_1$ $a_3 = 3 + 3 = 6 = 3 + a_2$ $a_4 = 4 + 6 = 10 = 4 + a_3$ $a_5 = 5 + 10 = 15 = 5 + a_4$ <p><math>\vdots</math></p> $a_n = n + a_{n-1}$                                                                             | <p>Professor "F"</p> <p>Professor "I"</p>                                                                                                                                                                                              |

### 3.5.1 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 23

As resoluções apresentadas no Quadro 23 referem-se ao item *b* do Problema 5, em que é solicitado o número de bolinhas da seqüência para o  $n$ -ésimo termo. A constatação de modos de resolução similares permitiu-nos um desdobramento em graus de generalização.

Consideramos que os professores-estudantes classificados no Grau 2 apresentaram um grau de generalização maior do que os demais, pois encontraram o número de bolinhas do  $n$ -ésimo termo para qualquer valor de  $n$ . Aqueles classificados no Grau 1, apresentaram uma forma genérica para qualquer valor de  $n$

desde que se conheça o número de bolinhas correspondente ao termo imediatamente anterior. Ou seja, apresentam uma limitação com relação àqueles classificados no Grau 2.

Os Professores “A” e “O” não resolveram o item *b*. Um retrospecto dos resultados das análises anteriores mostra algumas limitações do Professor “A” quanto ao uso da linguagem algébrica simbólica. Um fato a ser considerado é a breve experiência docente desse professor-estudante já citada em análise anterior, visto que lecionou apenas 8 meses no Ensino Médio e essa experiência ocorreu há mais de 15 anos e sua maior e mais recente experiência no Ensino Fundamental não ultrapassou 3 anos.

Quanto ao Professor “O”, este também apresentou limitações quanto ao uso da linguagem algébrica simbólica visto que não usou a forma genérica nas resoluções dos Problemas 1 e 2, tendo havido o predomínio da linguagem natural. Retomamos aqui nossa suposição feita na análise desses dois problemas de que alguns professores-estudantes parecem não relacionar diretamente o pensamento algébrico à linguagem algébrica simbólica, que é reforçada pela terceira vez para o Professor “O”, em particular. Nesse caso, o fator experiência profissional não parece influenciar nos resultados visto que esse professor-estudante leciona no ensino Fundamental e Médio há mais de 13 anos.

A seguir, apresentamos o Quadro 24 com os resultados referentes ao indicador: “Produção de mais de um modelo para um mesmo problema”, seguido das respectivas considerações.

**Quadro 24:** Produção de mais de um modelo para um mesmo problema

| Exemplo de resolução                                                                                                                                              | Professor-estudante |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Professor "A"                                                                                                                                                     | Professor "A"       |
| a) <u>1ª maneira</u> : acrescentar uma linha na horizontal, com número de bolinhas superior em uma unidade a quantidade existente na linha imediata/e acima dela. | Professor "B"       |
| <u>2ª maneira</u> : acrescentar na diagonal ("hipotenusa") número de bolinhas igual ao número de bolinhas da diagonal anterior mais uma unidade.                  | Professor "C"       |
| <u>3ª maneira</u> : desenhar uma malha quadriculada <sup>1x4, 5x5, etc</sup> e desenhá-las só na "diagonal principal" e nos quadradinhos abaixo dela.             | Professor "F"       |
|                                                                                                                                                                   | Professor "J"       |
|                                                                                                                                                                   | Professor "L"       |
|                                                                                                                                                                   | Professor "O"       |

### 3.5.2 Considerações sobre os resultados apresentados no Quadro 24

A resolução apresentada no Quadro 24 refere-se ao item *a* do Problema 5, em que são requeridas *maneiras de continuar a seqüência*. Podemos notar que o enunciado sugere o uso desse indicador ao solicitar mais de uma maneira. Entretanto encontramos apenas modos diferentes de formar uma mesma seqüência nas resoluções de 7 professores-estudantes.

Ressaltamos que do nosso ponto de vista, uma seqüência sem uma lei explícita pode ser continuada de qualquer maneira. A ausência da lei permite a discussão de uma variedade de resoluções. Apesar de isso estar expresso no enunciado, que pergunta: *Você poderia encontrar maneiras de continuar essa seqüência? Quais seriam?*, não enxergamos tal variedade.

É possível que, o enunciado do item *b* que solicita o *n-ésimo* termo de uma seqüência específica tenha influenciado nas respostas do item *a*. Ou teria sido o contato prévio com esse tipo de problema?

Entendemos que essa solicitação no enunciado do item *a* vise levar o aluno a enxergar o padrão existente em cada termo da seqüência e então descobrir uma regra para encontrar qualquer outro termo, ou seja, generalizar, o que foi requerido

no item *b* do enunciado. Entretanto, apenas 4 professores-estudantes que apresentaram esse indicador foram classificados no Grau 2 de generalização.

Podemos notar no Quadro 24 que o Professor “B” respondeu o item *a* em linguagem natural, assim como todos os demais professores-estudantes. Cremos que esse fato esteja relacionado com a palavra “descreva” no enunciado.

Os demais indicadores explicitados nos procedimentos dos professores-estudantes foram similares àqueles revelados durante a análise dos protocolos referentes aos problemas anteriores, os quais destacamos a seguir:

- Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.
- Percepção e expressão das estruturas de um problema.
- Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias.
- Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos.

### **3.5.3 Síntese dos indicadores revelados no Problema 5**

No Quadro 25 a seguir, reunimos os resultados encontrados numa síntese dos indicadores revelados nas resoluções do Problema 5, como fizemos na análise das resoluções dos Problemas 1 e 2.

**Quadro 25:** Síntese dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções do Problema 5

| Título do indicador                                                                                                        | Professor |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|                                                                                                                            | A         | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
| Grau de generalização dos professores-estudantes que representaram a forma genérica do número de bolinhas do n-ésimo termo |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente                                 |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias                                                                     |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Percepção e expressão das estruturas do problema                                                                           |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Transformação de uma expressão em outra mais simples                                                                       |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Produção de mais de um modelo para um mesmo problema                                                                       |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos                                            |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Legenda:

- Representaram a forma genérica do número de bolinhas do n-ésimo termo (Grau 2: Número de bolinhas do n-ésimo termo)
- Representaram a forma genérica do número de bolinhas do n-ésimo termo (Grau 1: Número de bolinhas do n-ésimo termo com base no termo imediatamente anterior)
- Não representaram a forma genérica do número de bolinhas do n-ésimo termo

O Quadro 25 revela que dentre os 13 professores-estudantes que representaram a forma genérica do número de bolinhas do n-ésimo termo, 11 foram classificados no Grau 2 de generalização. Uma comparação deste indicador com indicadores semelhantes revelados nos Problemas 1 e 2 revela que houve um aumento da frequência deste nas resoluções do Problema 5. Se considerarmos apenas o ponto de vista quantitativo, podemos supor que houve um avanço no desenvolvimento algébrico desses professores-estudantes, porém outros fatores de origem qualitativa não nos permitem fazer tal suposição.

Podemos notar ainda, que os 13 professores-estudantes cujas resoluções revelaram esse indicador, também revelaram os seguintes:

- Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.
- Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias.
- Percepção e expressão das estruturas de um problema.
- Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos.

Convergências semelhantes a essa foram observadas nas sínteses dos indicadores revelados nas resoluções dos Problemas 1 e 2 (Quadros 12 e 18 respectivamente). Isso reforça ainda mais nossa suposição de que um dos fatores que pode ter contribuído para essas convergências foi o uso da linguagem algébrica simbólica nas resoluções.

#### **3.5.4 Outras considerações sobre os resultados da análise das resoluções do Problema 5**

A exemplo do ocorrido na resolução do Professor “M” referente ao Problema 3, encontramos no protocolo de resolução referente ao Problema 5 mais um equivoco, como mostra a “forma genérica” da Figura 9, a seguir.

$$N = \sum_{i=1}^n$$

Eu pensei que a quantidade de bolinhas devia ser calculada somando-se os  $n$  números naturais até a nª da posição desejada.

**Figura 9:** Protocolo de resolução do Problema 5, Professor “M”

Num primeiro momento relutamos em classificar esse professor-estudante no Quadro 23, pois não reconhecemos o símbolo utilizado por ele como válido, porém após lermos sua explicação nos pareceu que ele quis representar o símbolo de somatório  $\sum$ . Assim mesmo reconhecendo que houve um equívoco grave quanto ao desconhecimento do símbolo, cremos que esse professor-estudante conseguiu expressar seu pensamento algébrico ao aliar à “forma genérica” à linguagem natural.

Retomamos aqui a questão apresentada ao relatarmos o equívoco apresentado por esse mesmo professor-estudante durante a apresentação dos resultados da análise referente ao Problema 3: Será que o fato de estar há 10 anos ocupando um cargo administrativo e, portanto estar afastado da sala de aula poderia ter influenciado esse professor-estudante no domínio da linguagem algébrica simbólica?

### 3.6 SÍNTESE DOS INDICADORES REVELADOS NAS RESOLUÇÕES DOS 5 PROBLEMAS

O Quadro 26 a seguir, apresenta uma idéia geral da freqüência dos indicadores revelados pelos professores-estudantes nas resoluções de cada um dos 5 problemas propostos.

Ressaltamos que não incluímos os desdobramentos do indicador “Desenvolvimento de algum tipo de processo de generalização” presentes nos resultados da análise dos Problemas 1, 2 e 5, nem do indicador “Percepção e expressão das estruturas do problema” presente nos resultados da análise do Problema 1, para que houvesse uma uniformização nos títulos dos indicadores e assim pudéssemos comparar sua freqüência em cada problema.

**Quadro 26:** Síntese dos indicadores revelados nas resoluções dos 5 problemas

| Título do indicador                                                                            | Problema |   |   |   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|
|                                                                                                | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Desenvolvimento de algum tipo de processo de generalização                                     |          |   |   |   |   |
| Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada para expressar-se matematicamente   |          |   |   |   |   |
| Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias                                         |          |   |   |   |   |
| Percepção e expressão das estruturas do problema                                               |          |   |   |   |   |
| Transformação de uma expressão em outra mais simples                                           |          |   |   |   |   |
| Produção de mais de um modelo para um mesmo problema                                           |          |   |   |   |   |
| Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos                |          |   |   |   |   |
| Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões |          |   |   |   |   |

Observando o Quadro 26, podemos notar que as resoluções do Problema 2 foram as que revelaram o maior número de indicadores baseados nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico. Cremos que isso tenha ocorrido por ser esse um problema geral que envolve interação entre os domínios algébrico e geométrico e, portanto ideal para a exploração da generalidade como afirmou a professora da disciplina em entrevista.

Somente as resoluções do Problema 4 não apresentaram o indicador “Desenvolvimento de algum tipo de processo de generalização”, que é um dos mais importantes aspectos para o desenvolvimento do pensamento algébrico como defendem autores como Mason, Graham e Johnston-Wilder (2007). Acreditamos que isso ocorreu pelo fato de esse problema já ter trazido a forma genérica no seu enunciado e, portanto não ser necessário fazer nenhum tipo de generalização. Além disso, podemos notar que suas resoluções são as que apresentam o menor número de indicadores dentre os 5 problemas propostos. Considerando ainda o fato do Problema 4 ser de estrutura fechada como já mencionamos anteriormente, presumimos que problemas desse tipo não são adequados para trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes.

Outro aspecto que chama atenção no Quadro 26 é a presença nas resoluções de todos os problemas, dos indicadores: “Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada para expressar-se matematicamente”; “Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias”; “Percepção e expressão das estruturas do problema”; “Transformação de uma expressão em outra mais simples”. Acreditamos que um dos fatores que pode ter contribuído para essas convergências foi o uso da linguagem algébrica simbólica nas resoluções.

Percebemos que a incidência do indicador “Produção de mais de um modelo para um mesmo problema” foi baixa nas resoluções dos problemas. Uma comparação entre os quadros de síntese dos Problemas 1, 2 e 5, revela que apenas 2, 1 e 6 professores-estudantes respectivamente explicitaram esse indicador. A maior frequência nas resoluções do Problema 5 pode ser explicada pelo fato desse indicador ter sido requerido no enunciado do problema, embora nem todos os professores-estudantes o tenham explicitado.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES

Com esse estudo, concluímos que diversos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) empregados nessa pesquisa se apresentaram entre professores-estudantes de um curso de pós-graduação stricto sensu em Educação Matemática ao resolverem os problemas propostos. Vimos nos resultados das análises das resoluções que, emergiram dos dados diversos procedimentos que levaram a desdobramentos e adaptações dos indicadores baseados nesses aspectos do pensamento algébrico.

**Os aspectos caracterizadores do pensamento algébrico explicitados nas resoluções dos professores-estudantes**, após desdobramento e adaptações foram: “Desenvolvimento de algum tipo de processo de generalização”; “Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente”; “Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias”; “Percepção e expressão das estruturas de um problema”; “Transformação de uma expressão em outra mais simples”; “Produção de mais de um modelo para um mesmo problema”; “Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos”; “Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões”.

O aspecto “Desenvolvimento de algum tipo de processo de generalização” foi revelado nos Problemas 1, 2, 3 e 5. Nos resultados da análise do Problema 2, em particular, os 14 professores-estudantes que apresentaram uma solução para o problema o explicitaram. Desses, 8 professores-estudantes “representaram e operaram com as formas genéricas das áreas das figuras” (indicador criado após análise), sendo que, 5 deles foram classificados no Grau 2 de generalização (“Quadrados e retângulos quaisquer”) e 3 no Grau 1 de generalização (“Quadrados ou retângulos particulares”). Os outros 6 professores-estudantes “não usaram as formas genéricas das áreas das figuras” (indicador criado após análise).

Os aspectos “Desenvolvimento de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente”, “Percepção e expressão de regularidades ou invariâncias”, “Percepção e expressão das estruturas de um problema”, “Transformação de uma expressão em outra mais simples” foram revelado em todos os 5 problemas. No Problema 2, foram explicitados por 10, 14, 8 e 8 professores-estudantes respectivamente. Nesse mesmo problema, os 8 professores-estudantes que explicitaram o indicador “representaram e operaram com a forma genérica das áreas das figuras” também apresentaram esses 4 indicadores.

O aspecto “Produção de mais de um modelo para um mesmo problema” foi revelado nos Problemas 1, 2, e 5. No problema 2, apenas 1 professor-estudante apresentou esse indicador.

O aspecto “Estabelecimento de relações/comparações entre expressões ou padrões geométricos” revelou-se nos Problemas 2 e 5. Foi explicitado por todos os 14 professores–estudantes que apresentaram resoluções para o Problema 2.

O aspecto “Interpretação de uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões” foi revelado nos Problemas 2, 3 e 4. Esse indicador também foi explicitado por todos os 14 professores–estudantes que apresentaram resoluções para o Problema 2.

A síntese dos indicadores revelados nas resoluções dos 5 problemas permitiu-nos concluir que as resoluções do Problema 2 foram as que apresentaram maior número de indicadores baseados nos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico e as resoluções do Problema 4 foram as que apresentaram menor número de indicadores. Um retorno aos enunciados e análises das resoluções desses problemas nos conduziu a conclusão de que o primeiro apresenta-se bastante propício ao desenvolvimento do pensamento algébrico enquanto o segundo, não é adequado para esse fim.

Observamos também na síntese que houve a incidência de alguns indicadores em todos os 5 problemas e supomos que um fator que pode ter

contribuído para essa convergência foi o uso da linguagem algébrica simbólica nas resoluções.

Cremos que os aspectos caracterizadores do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) apresentam-se como um importante caminho para observar o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes. Porém é necessário adequá-los conforme o nível de ensino que se deseja pesquisar, o que permite um maior aprofundamento desses aspectos. Em nosso estudo, como pesquisamos o pensamento algébrico de professores-estudantes de pós-graduação *stricto sensu* em Educação Matemática, adaptamos esses aspectos de acordo com o que emergiu de suas resoluções. Os desdobramentos foram referentes ao uso da forma genérica ou não, que se apresentou de modos variados nos procedimentos presentes nas resoluções. As adaptações permitiram dar maior generalidade aos indicadores, tendo em vista essa necessidade a partir da análise das resoluções.

Essas adaptações e desdobramentos permitiram-nos concluir que estudantes de Pós-Graduação *stricto sensu* em Educação Matemática nem sempre utilizam a linguagem algébrica simbólica ao resolverem problemas envolvendo a Álgebra. Além disso, dentre aqueles que a utilizam podem existir graus diferentes de generalização como pudemos perceber na presente pesquisa.

Constatamos, a partir da análise das resoluções dos professores-estudantes referentes ao Problema 1 que alguns deles conhecem a forma genérica, a explicitam mas não operam com ela. Nesses casos, cremos que ter o conhecimento da linguagem algébrica simbólica não basta entre estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Mais importante ainda tal conhecimento, sendo esses estudantes, professores no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, como os participantes dessa pesquisa. É preciso relacioná-la ao pensamento algébrico na direção de alcançá-la.

Com relação à linguagem empregada nas resoluções, percebemos que aqueles estudantes que se valem de uma forma sincopada por meio da qual a

linguagem natural se alia a linguagem algébrica simbólica para expressar seu pensamento, geralmente apresentam resoluções mais concisas e claras.

Quanto aos **aspectos da linguagem algébrica explicitados nas justificativas às resoluções**, uma busca nos questionários revelou que o conhecimento das propriedades é precário entre os professores-estudantes. Observamos nas justificativas o predomínio da descrição de procedimentos e do enunciado de tópicos matemáticos sobre o conhecimento das propriedades e regras válidas.

Percebemos também que as dificuldades de explicar os porquês das resoluções, evidenciadas nos questionários respondidos pelos estudantes, talvez se relacionem com a própria formação desses estudantes que durante a graduação podem ter tido pouco contato com o aspecto semântico da Álgebra. Essa suposição se apóia na pesquisa de Figueiredo (2007) que constatou que alunos de graduação sentem necessidade de serem capazes de justificar os porquês das atividades que realizam e não apenas saber resolvê-las. A pesquisadora acredita que os alunos estejam se referindo a “[...] um trabalho que articule os aspectos sintático e semântico da Álgebra elementar [...]”. Nesse caso, percebemos que os próprios alunos têm consciência da necessidade de desenvolver o pensamento algébrico (“os porquês”) aliado ao trabalho de manipulação algébrica.

Em resposta à questão de pesquisa: **O uso de um recurso tecnológico pela professora da disciplina contribui para a resolução pelos professores-estudantes de um dos problemas propostos? Em que sentido?**, concluímos que o uso do recurso, que ocorreu durante a aplicação do Problema 2 com a intenção de auxiliar na sua compreensão, contribuiu em alguns aspectos mas também prejudicou em outros. Chegamos a essa conclusão com base na análise dos procedimentos e nos questionários respondidos pelos professores-estudantes em que alguns deles declaram que foram confundidos pela visualização do aplicativo.

Do nosso ponto de vista, as contribuições foram no sentido da visualização da variação das figuras conforme o enunciado e da observação dos padrões que as figuras seguiam levando à percepção de regularidades ou invariâncias. Por outro

lado, os prejuízos relacionam-se com uma interpretação equivocada do problema e com a indução da observação do comportamento das figuras nos extremos do segmento EB. Isso pode ter dificultado uma resolução algébrica dos professores-estudantes que tiveram essa interpretação, pois buscaram enunciar o que visualizaram. Nesse aspecto concordamos com Maranhão, Machado e Coelho (2004, p.3) quando afirmam que o uso das novas tecnologias no ensino e aprendizagem de matemática com a intenção de auxiliá-los, pode gerar “[...] por si só novos problemas de compreensão e raciocínio.”

Constatamos nesse estudo o quanto os problemas do tipo aberto que admitem respostas genéricas utilizados pela professora da disciplina se apresentam propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, as discussões desses problemas em classe aliada à técnica de pesquisa “thinking aloud” privilegiada em nossa pesquisa revelam um caminho para que os estudantes, não só de formação continuada, mas de diversos níveis de ensino, repensem suas resoluções e busquem evoluir no seu pensamento algébrico.

As tabelas de formação e atuação permitiram um levantamento do perfil dos 15 professores-estudantes participantes da pesquisa quanto a esses dois aspectos. Quanto à formação, descobrimos que 10 possuem Licenciatura em Matemática, 2 possuem Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática, 2 são graduados em Matemática e 1 em Física. Além disso, das 10 instituições em que ocorreram as graduações, 6 são instituições públicas, sendo: 2 federais, 2 estaduais e 2 municipais. Outro aspecto relevante é que dos 8 professores-estudantes que possuem especialização, 6 deles a fizeram na área de Educação Matemática. Quanto à atuação, identificamos que a maioria dos professores-estudantes atua ou já atuou nos níveis Fundamental e Médio e nas redes pública e particular de ensino e que apenas 4 professores-estudantes não atuavam lecionando nesses níveis de ensino na época da coleta dos dados (2º semestre de 2008). Nesse período, dos 15 professores-estudantes participantes da pesquisa, 10 atuavam na rede estadual, sendo: 7 professores de Matemática, 2 professores de Matemática e Física e 1 Coordenador Pedagógico.

Com base nesse levantamento, identificamos que aqueles professores-estudantes que estavam afastados da sala de aula exercendo outros cargos ou lecionando apenas para o Ensino Fundamental apresentaram limitações quanto à expressão do pensamento algébrico através da linguagem algébrica simbólica. Além disso, constatamos que a maioria dos professores-estudantes apresentou resoluções algébricas e similares ao resolver os Problemas 3 e 4, que foram adaptados do **Jornal do Aluno** (distribuído para todos os alunos do 1º ano do Ensino Médio da rede estadual no 1º semestre de 2008). O que pôde ter alguma relação com o grande número de professores-estudantes que atuava na rede estadual no período que ocorreu a pesquisa.

Terminamos com a certeza de que muito ainda se tem para explorar sobre as reflexões apresentadas nessa pesquisa, dada a importância de se aliar os aspectos sintático e semântico da Álgebra elementar para o seu ensino e aprendizagem efetivos, como sugerem Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) ao nos “convidar” a *repensar a Educação Algébrica Elementar*.

Esperamos que essa pesquisa contribua para o Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GEPEA) do Programa de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo bem como para o debate acadêmico no tema e para cursos de formação de professores.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Maria Margarida Massignan de. **Estratégias de generalização de padrões de alunos do ensino fundamental do ponto de vista de seus professores**. 2006. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

AQUINO, Lucimeire Omoti de. **Os alunos da 5ª série/6º ano frente a atividades sobre observação e generalização de padrões**. 2008. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Terceiro e quarto ciclo. Brasília: MEC: SEF, 1998. 148 p.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC: SEB, 2006. 135 p. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book\\_volume\\_02\\_internet.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf)>. Acesso em: 31 maio 2008.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC: SEB, 1998. 58 p. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book\\_volume\\_02\\_internet.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf)>. Acesso em: 2 jun. 2008.

FIGUEIREDO, Auriluce de Carvalho. **Saberes e concepções de educação algébrica em um curso de licenciatura em matemática**. 2007. 288 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. **Pro-posições**, Campinas: Cortez Editora, v. 4 n. 1(10), p. 78-91, mar. 1993.

\_\_\_\_\_, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2007. 228 p.

\_\_\_\_\_, Dario; FERNANDES, Fernando Luís Pereira; CRISTÓVÃO, Eliane Matesco. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte>>. Acesso em: 30 jun. 2008.

FONTALVA, Gerson Martins. **Um estudo sobre inequações entre alunos do Ensino Médio**. 2006. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

FREIRE, Raquel Santiago. **Objetos de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental**. 2007. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, 2007.

FREITAS, José Luís Magalhães de. Registros de representação na produção de provas na passagem da Aritmética para a Álgebra. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara.(Org.). **Aprendizagem matemática: registros de representação semiótica**. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008. p. 113-124.

LEE, Lesley. Early Algebra – but which algebra? The future of the teaching and learning of algebra. In: ICMI STUDY CONFERENCE, 12., 2001, Melbourne. **Proceedings...** Melbourne: ICMI, 2001, v. 2. p. 392-399.

MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque; MACHADO, Silvia Dias Alcântara; COELHO, Sônia Pitta. Projeto: O que se entende por álgebra? In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...**São Paulo: SBEM, 2004. p. 1-16.

\_\_\_\_\_, Maria Cristina Souza de Albuquerque; CAMEJO, Adriana; MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Relatos em torno do cálculo de um aluno do 2º ano do Ensino Fundamental. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 29, p. 156-169, jan/jun. 2008.

\_\_\_\_\_, Maria Cristina Souza de Albuquerque. Projeto de pesquisa: expressões, equações e inequações. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 12ª., 2007, Santiago de Querétaro. **Anais...** Santiago de Querétaro: COMITÉ INTERAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2007. 1 CD-ROM.

MASON, John; JOHNSTON-WILDER, Sue. **Developing Thinking in Geometry**. London: The Open University in association with Paul Chapman Publishing, 2006. 261 p.

\_\_\_\_\_, John; GRAHAM, Alan; JOHNSTON-WILDER, Sue. **Developing Thinking in Algebra**. London: The Open University in association with Paul Chapman Publishing, 2007. 320 p.

MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario; MIORIM Maria Ângela. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? Revista **Pro-Posições**, Campinas: Cortez Editora, v.3 n. 1(7), p. 39-54, mar. 1992.

MIRANDA, Ivanete Rocha de. **Educação Matemática**: dificuldades ou obstáculos no processo ensino-aprendizagem da álgebra. 2003. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2003.

MONDANEZ, Leila. **Das seqüências de padrões Geométricos à introdução ao pensamento Algébrico**. 2003. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela. A formação do professor que ensina matemática: estudos e perspectivas a partir das investigações realizadas pelos pesquisadores do GT 7 da SBEM. In: NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org.). **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 7-26.

NAKAMURA, Olga Yayoi. **Generalização de padrões geométricos**: caminho para construção de expressões algébricas no Ensino Fundamental. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PEREZ, Elisangela Parra Zigart. **Alunos do Ensino Médio e a generalização de padrão**. 2006. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PONTE, João Pedro da. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 149 p.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Equação e seus multisignificados no Ensino de Matemática**: contribuições de um estudo epistemológico. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007

SANTOLIN, Emily Cassiana. **O uso de padrões e seqüências**: uma proposta de abordagem para introdução à álgebra para alunos de sétimo ano do Ensino Fundamental. 2008. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SANTOS, Leila Muniz. **Concepções do professor de Matemática sobre o ensino de Álgebra**. 2005. 121 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, Leandra Gonçalves dos. **Introdução do pensamento algébrico**: um olhar sobre os professores e livros didáticos de matemática. 2007. 231f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2007.

SANTOS, Juliana Grassmann dos. **Observação de padrões**: um tema para a investigação de professores sobre sua própria prática. 2008. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SCARLASSARI, Nathalia Tornisiello. **Um estudo das dificuldades ao aprender Álgebra em situações diferenciais de ensino em alunos de 6ª série do Ensino Fundamental**. 2007. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

SCHWANTES, Vilson. **Uma Reflexão sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico discente no Ensino Fundamental**. 2003. 203 f. Mestrado (Educação nas Ciências) - Departamento de Pedagogia, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2003.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **São Paulo Faz Escola - Jornal do Aluno**. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2007. p. 42-48.

SILVA, Edgar Alves da. **Introdução do Pensamento Algébrico para alunos do EJA**: uma proposta de ensino. 2007. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, Benedito Antônio da. Contrato didático. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Educação Matemática**: uma nova introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. p. 49-75.

TRENTIN, Paulo Henrique. **Expressões algébricas**: um estudo sobre sua contribuição para a formação do pensamento algébrico no ensino fundamental. 2005. 113 f. Dissertação (Mestrado em Semiótica, Tecnologias da Informação e Educação), Universidade Braz Cubas, Mogi das Cruzes, 2005.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Tereza. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa: Associação de Professores de Matemática, v. 85, p. 14-20, nov/dez. 2005.

## ANEXO A – Termo de consentimento

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Eu, \_\_\_\_\_, residente à rua \_\_\_\_\_, cidade: \_\_\_\_\_, declaro ter sido informado e estar devidamente esclarecido sobre os objetivos e intenções deste estudo, sobre os dados que fornecerei e sobre possível entrevista pessoal ou por meio eletrônico caso o pesquisador necessite de maiores esclarecimentos. Recebi garantia de total sigilo e de obter esclarecimento sempre que desejar. Concordo em participar deste estudo voluntariamente.

Eu, Taís Freitas de Carvalho Castro, responsável pelo projeto: “Aspectos do pensamento algébrico”, declaro que obtive espontaneamente o consentimento deste sujeito de pesquisa para realizar este estudo.

São Paulo, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2008.

\_\_\_\_\_  
Assinatura

\_\_\_\_\_  
Taís Freitas de C. Castro  
Pesquisadora

## **ANEXO B – Questionário referente ao Problema 1**

Nome: \_\_\_\_\_

### **Questionário sobre o Problema 1 (problema sobre números ímpares)**

O presente questionário é parte dos protocolos dos alunos que serão utilizados como instrumentos de análise do estudo cujo tema é “Aspectos do pensamento algébrico”, de responsabilidade da mestranda Taís Freitas de Carvalho Castro.

1. Explique como você pensou em cada passagem (igualdade, implicação, desigualdade ou relação) durante a resolução da tarefa.
2. Indique as justificativas matemáticas que validam essas passagens.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)