PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Francisco de Moura e Silva Júnior

O projeto *São Paulo faz Escola* para o 1º ano do Ensino Médio sob o olhar da Teoria Elementar dos Números

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2009

PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Francisco de Moura e Silva Júnior

O projeto *São Paulo faz Escola* para o 1º ano do Ensino Médio sob o olhar da Teoria Elementar dos Números

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado.***

SÃO PAULO

2009

Banca Examinadora

"A Matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha das matemáticas"

Gauss

Dedico este trabalho aos meus queridos pais, Francisco e Irene. Aos meus amados irmãos: Ismael, Joel, Beatriz e Francirene. Aos meus sobrinhos: Samantha, Rebeca, Matheus, Raquel, Esther, Sabrina, Felipe e Sarah.

Agradecimentos

A Deus, refugio e fortaleza, pela vida, saúde, paz e a família que me tem concedido.

A meus queridos pais, Francisco e Irene, pelo carinho dispensado desde a minha infância, pelo apoio para o prosseguimento dos meus estudos e pela paciência dispensada sempre.

A meus amados irmãos, Ismael, Joel, Beatriz e Francirene, pelo apoio e compreensão.

A Prof. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado, pela excelente orientação, dedicação, paciência e valiosas contribuições para que este trabalho pudesse ser concretizado.

Aos membros da banca examinadora desta dissertação, pela atenção e pelas valiosas contribuições. Meus agradecimentos à:

Doutora Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Doutora Celina Aparecida Almeida Pereira Abar

A Diretora da E. E. Professor João Borges, Professora Claudete Aparecida de Paula, pelo apoio, compreensão, incentivo e carinho.

A Vice-diretora da E.E. Professor João Borges, Professora Vera Lucia Teixeira Gomes Zanardi, pela compreensão, incentivo, paciência e atenção dispensada sempre.

Aos coordenadores da E. E. Professor João Borges, Professora Meres e Professor Niman, pelo incentivo, carinho e atenção dispensada.

Ao corpo docente da E. E. Professor João Borges, pelo incentivo ao prosseguimento dos meus estudos e pelas reflexões sobre nossas práticas de ensino.

A Prof. Dra. Bárbara Lutaif Bianchini pelas inúmeras contribuições dadas no exame de qualificação.

Aos funcionários da E. E. Professor João Borges, pelo apoio e pela atenção dispensada sempre.

Ao Corpo docente do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática, pelo profissionalismo e atenção dispensada sempre.

A Prof. Thereza de Jesus Camporesi, pela revisão ortográfica.

Aos colegas de curso e do grupo GPEA, companheiros de luta, pela amizade.

A Cristiane Ferreira, pelo auxílio sempre pronto nos escaneamentos.

A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, pela concessão da bolsa de estudos.

O Autor

Resumo

Neste trabalho apresento uma pesquisa qualitativa orientada pelo objetivo de investigar quais e como assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números são abordados no material endereçado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede estadual paulista. Para tal intento, realizei uma análise de conteúdo, segundo descrito por Bardin (2009), utilizando como base para tal análise os conteúdos da Teoria Elementar dos Números, listados por Resende (2007) em sua tese. A relevância do estudo de assuntos desta Teoria reside na contribuição que esta pode dar ao desenvolvimento do fazer matemático, como demonstrar, conjecturar, generalizar, testar e validar as conjecturas, bem como diversificar estratégias para resolução de problemas que envolvam números inteiros. Pela análise do material, constatou-se que este apresentou atividades favorecendo o estudo da Teoria Elementar dos Números no 1º bimestre, porém nos demais bimestres e no Jornal do Aluno privilegia-se o trabalho com a Matemática do Contínuo.

Palavras-Chave: Teoria Elementar dos Números, Análise de Conteúdo; Jornal do Aluno; Caderno do Professor.

Abstract

This work presents a qualitative research guided by the objective of investigating which and how issues relating to the Elementary Theory of Numbers are addressed in the material sent to teachers of the 1st year of high school, 2008 São Paulo state network. For this purpose, I performed an analysis of content, as described by Bardin (2009), using as a basis for this analysis the contents of Elementary Theory of Numbers, listed by Resende (2007) in his thesis. The relevance of the study subjects of this theory lies in the contribution it can make to the development mathematical, as shown, conjecture, generalize, test and validate the conjecture and diversify strategies for solving problems involving whole numbers. For the analysis of the material, it was found that it showed some activities promoting the study of the Elementary Theory of Numbers in the 1st term, but in other marking periods and the Official Student's priority is to work with the Mathematics of Continuous.

Keywords: Elementary Theory of Numbers, Content Analysis, Journal of Student, Teacher'sBook.

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Meu interesse em fazer uma pesquisa sobre a “Teoria Elementar dos Números” surgiu após o contato com o projeto “Qual a álgebra a ser ensinada na formação de professores?”. Esse projeto tem sido desenvolvido pelos membros do grupo de pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) da PUC-SP.

O mencionado projeto supõe que sejam feitas pesquisas que visem investigar o que se entende por Álgebra no campo institucional (PCN, programas nacionais e internacionais, livros didáticos...), no campo docente (professores do Ensino Superior, Médio, Fundamental e Infantil) e no campo discente (alunos de todos os segmentos de ensino).

Por meio das reuniões e contato com colegas do GPEA tomei conhecimento dos subprojetos em andamento desse grupo, e assim, me incorporei ao subprojeto “Teoria Elementar dos Números no Ensino Básico e na Licenciatura”. Vale ressaltar ainda que este grupo de pesquisa concebe a referida Teoria como parte integrante da Álgebra do Ensino Básico e que o trabalho com assuntos desta teoria pode contribuir para o desenvolvimento do fazer matemático.

Esta pesquisa foi orientada com o objetivo de investigar quais e como assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números são abordados no material endereçado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede estadual de ensino paulista.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, sendo que:

- No capítulo 1, apresento a problemática e o objetivo que nortearam o desenvolvimento da pesquisa, evidenciando os motivos que levaram à escolha por esse tema e a sua importância.
- No capítulo 2, apresento as escolhas teóricas nas quais fundamentei o desenvolvimento desta pesquisa, bem como alguns resultados de pesquisas realizadas por pesquisadores em Educação Matemática, procurando assim discutir quais foram as maiores contribuições trazidas por elas para a discussão do tema.
- No capítulo 3, apresento a metodologia de pesquisa baseada na Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1977), e dividida em três fases: 1) pré-análise; 2) exploração do material; e 3) tratamento dos resultados obtidos e interpretação.
- O capítulo 4 é destinado à análise do material do 1º ano do Ensino Médio da rede estadual paulista. Este capítulo está dividido em três partes, sendo que:
- Na primeira parte apresento a proposta de ensino para o ano letivo de 2008 para as escolas da rede estadual de São Paulo. Na segunda parte faço a descrição e a análise da *Revista São Paulo faz escola* e do *Jornal do Aluno*. Na terceira parte faço a descrição e a análise da *Proposta Curricular* e dos *Cadernos do Professor* do 1º ano do Ensino Médio.
- As considerações finais são expostas no capítulo 5, destacando alguns resultados obtidos a partir da análise do *Jornal do Aluno* e dos *Cadernos do Professor*, ambos do 1º ano do Ensino Médio. Nesse capítulo, faço minhas considerações e recomendações.

Capítulo 1

PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Há cerca de sete anos leciono Matemática nas redes de ensino pública e privada sediadas na cidade de São Paulo. Nos três primeiros anos, lecionei na rede privada, e nos últimos cinco anos, na rede pública estadual de ensino, onde ingressei através da aprovação no concurso de provas e títulos de 2003.

No decorrer destes anos, percebi a grande dificuldade apresentada pelos alunos em trabalhar com Matemática. Grande parte do que é ensinado no 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e no Ensino Médio é assunto de Álgebra, e os problemas abordados nesses níveis geralmente exigem para sua resolução conhecimentos desse campo da matemática. Considerando esses fatos, senti a necessidade de compreender o porquê das dificuldades dos alunos com a Álgebra, para poder melhor encaminhar minhas aulas e pesquisar estratégias e mecanismos para trabalhar as dificuldades apontadas.

Assim, em 2007, ingressei no curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Nesse Programa, escolhi participar do grupo de pesquisa em Educação Algébrica, GPEA, que tem como projeto maior "What algebra should be taught in preservice teachers'courses?"[1] (MACHADO, S. D. A.; MARANHÂO, M. C. S. A.; COELHO, S. P., 2003).

[1] "Qual a Álgebra a ser ensinada na formação de professores?". O titulo do projeto está em inglês porque foi publicado no CERME que é um Congresso Internacional.

Ao tomar conhecimento dos subprojetos em andamento deste grupo, por meio das reuniões e contato com colegas do GPEA, incorporei-me ao subprojeto "Teoria Elementar dos Números: no Ensino Básico e Licenciatura", pensando em contribuir para as pesquisas que investigavam o assunto no Ensino Médio. Essa decisão ocorreu porque minha prática dava conta do descaso do tratamento de temas da matemática discreta nesse segmento. Essa minha percepção foi reforçada tanto pelos resultados de pesquisas realizadas por colegas, professores de matemática do mesmo subprojeto que através das discussões propiciaram meu aprofundamento na questão, quanto pelas leituras sobre o assunto.

Guzmán (1992), citado por Carneiro (1998), comenta que a matemática do continuo predominou nos séculos XIX e XX, porém o advento dos computadores e suas:

> [...] possibilidades para modelização sem passar pela formulação matemática de feitio clássico, abriu uma multidão de campos diversos, com origem já não mais na Física, como os desenvolvimentos dos séculos anteriores, mas em muitas outras ciências, como a Economia, as ciências da organização. (GUZMÁN, apud CARNEIRO, 1998, p. 28).

Jurkiewicz (2004), mostrando estar de acordo com a visão de Guzmán, acrescenta que:

> [...] o desenvolvimento das máquinas digitais permitiu o uso extensivo de métodos discretos para modelar, simular e otimizar situações sociais que antes se configuravam como prescindíveis: tempo de produção, distribuição eficiente de insumos, aproveitamento ótimo de recursos, são alguns exemplos. (JURKIEWICZ, 2004, p. 4)

O ensino, no entanto, não incorporou a mudança rapidamente e continuou a privilegiar o estudo da matemática do contínuo. Segundo Jurkiewicz (idem), a Matemática Discreta ainda não é parte do currículo de formação de professores, engenheiros e da maior parte dos matemáticos, o que o leva a afirmar ser necessário que esses conteúdos passem a freqüentar os cursos de formação de professores de Matemática.

Matemáticos acadêmicos entrevistados por Resende (2007) apoiam essa visão tentando explicar a ausência de disciplinas relativas à matemática discreta nas licenciaturas de matemática por uma ou outra razão. Por exemplo, um deles aponta para uma questão histórica nos currículos dos cursos de Matemática no Brasil, que dão ênfase ao estudo do contínuo, ficando o discreto restrito, muitas vezes, a uma única disciplina. Outro aponta para resquícios do Movimento da Matemática Moderna, cuja ênfase foi dada ao estudo das estruturas algébricas.

O trabalho com a matemática discreta, porém, não é importante somente no Ensino Superior, mas em toda a formação do individuo. A matemática discreta, segundo Guzmán (1992), apresenta alguns conteúdos suficientemente elementares para poderem figurar com sucesso em um programa inicial de Matemática e sugere que a Teoria Elementar dos Números, que nunca chegou a desaparecer dos programas de alguns países, poderia ser uma delas.

Campbell e Zazkis (2002) corroboram e enfatizam a importância do estudo de Teoria Elementar dos Números, indicando seu potencial para auxiliar o estudante do ensino básico na compreensão da Matemática Fundamental. Os autores especificam que a Teoria Elementar dos Números se constitui num contexto feliz para a introdução do formalismo matemático, uma vez que os objetos examinados são familiares aos estudantes do Ensino Médio. Os autores comentam ainda que a Teoria Elementar dos Números é um lócus privilegiado para explorar o uso da recursão e da indução matemática, oportunizando o desenvolvimento da habilidade de conjecturar, generalizar, testar e validar as conjecturas, bem como para diversificar as estratégias de resolução de problemas que envolvem os números inteiros.

Embora Guzmán (1992) afirme que com o advento da informática e a consequente predominância dos algoritmos discretos houve um deslocamento da ênfase da Matemática atual (*séc. XX e XXI*)[2] na direção da Matemática discreta, isso não quer dizer que se deva enfatizar no Ensino a Matemática Discreta em detrimento da Matemática Contínua, mas sim equilibrá-las, segundo opinião de outros pesquisadores como Brolezzi (1996) e Machado (2008).

Brolezzi (idem) abordou o problema pedagógico que se refere ao par matemática discreta / contínua. O autor aponta a existência do problema gerado

---

2 Esclarecimento meu.

pela tendência de se optar ora pelo discreto, ora pelo contínuo na matemática elementar; e para superar esse problema, ele sugere a seguinte ideia:

> [...] esse problema não se resolve através da simples opção entre essas noções, no sentido de eliminar uma em função da outra, mas sim pela administração da tensão conceitual entre elas. Trata-se de caminhar com ambas as pernas, a da idéia do discreto e a da continuidade, na construção dos conceitos matemáticos, explorando, no ensino, essa interação. Entendemos que a riqueza de uma abordagem que leve em conta ambos os aspectos, ajuda a desenvolver melhor os conceitos matemáticos, pois muitos deles têm origem nessa interação. (BROLEZZI, 1996, p. 2)

Concordando com Brolezzi sobre a necessidade de explorar no ensino a interação entre a matemática discreta e contínua, Machado (2008) alerta que para isso acontecer o professor de matemática deve aprender a gerir essa interação entre a matemática continua e a discreta em todos os cursos do ensino básico.

Não só é necessário trabalhar na Licenciatura com a questão da gestão do professor, quanto envidar pesquisas sobre o assunto. Campbell e Zazkis (2002) chamam a atenção sobre esse ponto ao indicar a necessidade de um esforço sistemático por parte da comunidade de educadores matemáticos e pesquisadores para investigar este potencial, pois afirmam que as pesquisas neste campo têm sido relativamente esparsas e desconexas. Dizem eles que:

> A Teoria dos Números oferece muitas e ricas oportunidades para explorações que são interessantes, prazerosas e úteis. Essas explorações têm desfecho na resolução de problemas, na compreensão e desenvolvimento de outros conceitos matemáticos, na ilustração da beleza da matemática e na compreensão dos aspectos humanos do desenvolvimento histórico do número. (CAMPBELL E ZAZKIS, 2002)

Assim creio que a relevância do tema esteja suficientemente estabelecida e passo a delimitar meu tema de pesquisa.

Conforme indicado anteriormente, o subprojeto de pesquisa do qual participo conta com algumas pesquisas já finalizadas como as de Resende (2007), Rama (2005), Oliveira (2006), Costa (2007), Silva (2007) e Pommer (2008), entre outras. Dessa forma, tive a oportunidade de participar das discussões de muitas dessas pesquisas o que, de alguma forma influenciou o surgimento de várias questões de pesquisa, tais como: Qual o conteúdo de matemática discreta tratado no Ensino Médio? Qual a ênfase dada à Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio? Como ocorre o ensino da matemática discreta no Ensino Médio?

A leitura da tese de Resende (2007), pesquisadora participante do GPEA, deu-me a oportunidade de compreender a abrangência da Teoria Elementar dos Números, enquanto saber a ensinar, e sua resignificação na licenciatura em Matemática. Dessa forma, seu estudo, logo no inicio de meu mestrado, possibilitou-me aprofundar nas questões mais gerais do ensino e aprendizagem de Teoria dos Números. Também a conclusão de Resende, sobre qual o conteúdo da Teoria dos Números é importante trabalhar com os licenciandos em matemática, facilitou refletir o que desse conteúdo seria desejável ensinar aos alunos do Ensino Médio.

Resende (2007) definiu o que consideramos no GPEA como sendo Teoria Elementar dos Números por meio da indicação de seus tópicos:

> Números Inteiros: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais, operações, algoritmos e propriedades, definição por recorrência (potências em N, **seqüências, progressões aritméticas e geométricas) e princípio da indução finita**; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, **o Teorema Fundamental da Aritmética**; **Introdução à congruência módulo m: definições, propriedades e algumas aplicações; Equações diofantinas lineares.** (p. 193)[3]

Embora haja consenso entre vários pesquisadores sobre a importância de se tratar a Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio, Rama (2005) constatou a quase inexistência do tema nos livros didáticos desse nível, e, Oliveira verificou a inexistência de referência a equações diofantinas como instrumento para resolução de problemas da Matemática Discreta no Ensino Médio.

No inicio do ano letivo de 2008, porém, antes de começarem as aulas na rede estadual, durante a semana do planejamento, os professores foram

[3] Na citação, coloquei em negrito o que julgo ser pertinente trabalhar no Ensino Médio.

informados que a Secretária de Educação do Estado de São Paulo – SEE/SP - havia preparado material para implantação da nova proposta curricular do Estado de São Paulo. E, ao entrar em contato com o caderno do professor do Ensino Médio do primeiro bimestre, percebi que no material relativo à nova proposta da SEE/SP poderia haver resposta a uma das minhas questões formuladas: Qual o conteúdo de matemática discreta tratado no Ensino Médio?

Essa questão foi reformulada e mais refinada tornando-se “Quais assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números são abordados, e que abordagem foi dada a esses assuntos, no material endereçado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede estadual de ensino paulista?”.

Assim o objetivo de minha pesquisa foi investigar quais e como assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números são abordados no material endereçado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede estadual de ensino paulista.

Capítulo 2

ESCOLHAS TEÓRICAS

Neste capítulo, apresento ideias, resultados de pesquisa e teorias nas quais me baseei para as análises requeridas por minha pesquisa.

A pesquisadora Resende (2007) estabeleceu como objetivo de sua pesquisa de doutorado compreender a Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar e buscar elementos para resignificá-la na licenciatura em Matemática.

Por meio de entrevistas com pesquisadores matemáticos em Teoria dos Números, com pesquisadores de educação matemática envolvidos com educação algébrica e com professores da graduação que lecionam assuntos relativos à Teoria dos Números, Resende colheu informações sobre a importância desse assunto para o conhecimento geral do cidadão e específico dos estudantes das áreas de Exatas. Os entrevistados apontaram diversas razões para a Teoria dos Números constar dos currículos, principalmente dos de licenciatura em Matemática. Dentre elas, destaco o seguinte:

> [...] justificativa quase consensual, diz respeito ao fato de que a Teoria dos Números, tendo como objeto o estudo dos números inteiros, tem uma importância histórica, pois oportuniza colocar a Matemática no contexto da civilização humana [...]. Embora a Teoria dos Números, como saber científico, seja nova, os números estão na base da civilização humana. Segundo historiadores, na Idade da Pedra, a idéia de contar, considerada prelúdio do pensamento científico, já estava presente. (RESENDE, 2007, p. 182)

Os entrevistados reforçaram que

> (...) os números inteiros estão presentes em diferentes práticas sociais e, em especial, a matemática do discreto. (...) hoje, por exemplo, nós temos problemas relacionados com o uso de cartão de crédito, uso de senhas para abrir o computador, armazenamento de dados dentro do computador, e que todo esse sistema é digital, está baseado na qualidade dos números inteiros. (RESENDE, 2007, p. 183)

Os profissionais entrevistados também comentaram o uso de senhas e códigos na atualidade:

> [...] o sistema mais famoso de criptografia, hoje, chamado de RSA está baseado na fatoração em primos, e qualquer pessoa pode entender, se tiver conhecimento básico de Teoria dos Números. Isto dá significado ao estudo dos números primos no ensino. (RESENDE, 2007, p. 183)

Outra razão mencionada pelos entrevistados para a Teoria dos Números estar presente nos currículos, principalmente no de licenciatura em Matemática é que

> [...] a Teoria dos Números é uma área da Matemática que lida com problemas que são aparentemente simples. São acessíveis, isto é, têm poucos dados, [...] como também envolvem elementos que são familiares aos alunos o que os torna fáceis de serem compreendidos. No entanto, as soluções nem sempre são simples, exigem engenhosidade. Não há modelos ou padrões de resolução, assim, existem conjecturas até hoje não demonstradas. [...] Por esses motivos, a Teoria dos Números é considerada um ramo desafiador e instigante. (RESENDE, 2007, p. 183)

Entre suas conclusões, Resende (2007) afirma que a Teoria dos Números é um campo propício para o desenvolvimento de ideias matemáticas relevantes, como a recorrência e a indução matemática, além de ser um campo propício para a exploração dos diferentes tipos de provas, pois o tratamento dos números inteiros

> [...] oferece ricas oportunidades para a exploração de diferentes tipos de provas, permitindo ao licenciando perceber que a prova no ensino não deve ser compreendida da mesma forma que na pesquisa em Matemática, perceber também que a prova tem diferentes funções não só de validar e convencer, mas principalmente de explicar. (RESENDE, 2007, p. 228)

A autora ainda acrescenta que

> [...] as questões envolvendo a divisibilidade e os números primos sempre estiveram presentes na investigação matemática e podem ser explorados no ensino, oportunizando o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, de generalizar, testar e validar as conjecturas. (Resende, 2007, p. 228)

A afirmação acima é reforçada quando Resende acrescenta que:

> A perspectiva metodológica da investigação matemática na licenciatura e mesmo no ensino médio e o tratamento de tópicos de Teoria Elementar dos Números podem abrir a possibilidade de exploração da indução matemática e a discussão da diferente entre esta e a indução empírica que é realizada pelo estudante ao observar dados e padrões existentes entre eles. É no tratamento de questões envolvendo os números naturais que a indução matemática pode ser explorada. Este é um dos motivos que leva os pesquisadores em educação matemática a reivindicar um espaço próprio para este campo na licenciatura. (RESENDE, 2007, p. 212)

Assim, considero que a Teoria dos Números tem como principal objeto de estudo os números inteiros e oportuniza colocar a Matemática no contexto da civilização humana por sua importância histórica desde tempos remotos até a atualidade. Atualmente os números inteiros estão presentes em diferentes práticas sociais relacionadas ao uso de cartão de crédito, de senhas, de sistemas de criptografia. Concordo também que muitos de seus problemas são acessíveis, familiares aos alunos, o que os torna fáceis de serem compreendidos. No entanto, é importante frisar que as soluções desses problemas nem sempre são simples, exigem engenhosidade, exatamente por isso são considerados desafiadores e instigantes. É interessante ressaltar também que a Teoria dos Números propicia a exploração de diferentes tipos de provas, provas entendidas em suas diferentes funções de validar e convencer, e principalmente de explicar. É importante enfatizar ainda que questões envolvendo a divisibilidade e os números primos sempre estiveram presentes na investigação matemática e podem e devem ser exploradas no ensino, oportunizando o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, de generalizar, testar e validar as conjecturas ao observar dados e padrões existentes.

Resende descreve os tópicos essenciais a serem abordados no estudo de Teoria Elementar dos Números conforme segue:

> Números Inteiros: evolução histórica e epistemológica do conceito dos números naturais, operações, algoritmos e propriedades, definição por recorrência (potências nos números naturais, seqüências, progressões aritméticas e geométricas), princípio da boa ordem e principio da indução finita; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade; Teorema Fundamental da Aritmética; Introdução à congruência de módulo m: definição, propriedades e algumas aplicações; Equações diofantinas lineares. (RESENDE, 2007, p. 228).

No desenrolar desta pesquisa, sempre que me referir à Teoria Elementar dos Números estarei considerando como conteúdo desse assunto os tópicos acima conforme descrição de Resende.

Jurkiewicz (2004), ao comentar os problemas de aprendizagem da matemática, tais como a dificuldade dos alunos em perceber o significado dos conceitos em vez de focar a atenção em saber como responder às questões, sugere que os problemas combinatórios podem favorecer uma atitude diferente dessa, dada sua natureza enumerativa discreta, sem abandonar características analíticas próprias e desejáveis num processo matemático. Além disso, segundo esse autor, os problemas combinatórios são fáceis de compreender e possibilitam uma abordagem por meio de processos algorítmicos. Nos casos exponenciais, embora esses problemas tenham solução, esta não é abordável computacionalmente. Tais problemas são aplicados amplamente em situações de comunicação, transporte e alocação de recursos.

Concordo com a opinião de Jurkiewicz e assim quando me referir à Matemática Discreta a ser trabalhada no Ensino Médio, estarei me referindo não só a Teoria Elementar dos Números como também à Análise Combinatória.

Um dos assuntos de Teoria Elementar dos Números já tratado por membros do GPEA em suas pesquisas é o de equações diofantinas lineares. Tanto Costa (2007) quanto Pommer (2008) investigaram o tema; o primeiro com professores do Ensino Médio, e o segundo com alunos desse segmento de ensino.

Costa (2007) teve como objetivo investigar se e como professores do ensino médio trabalham com seus alunos situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares. Esse autor concluiu que, embora os professores entrevistados afirmassem trabalhar com problemas de Matemática discreta modeláveis via equações diofantinas lineares, nenhum deles deu indício de trabalhar com seus alunos utilizando conhecimentos das propriedades dessas equações para decidir se elas têm ou não solução e quais seriam essas soluções.

Pela pesquisa de Costa (idem), nota-se que os professores entrevistados, ou por desconhecimento do assunto ou por não considerarem o assunto propício para ser trabalhado com alunos do Ensino Médio, não ensinam a seus alunos situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares. Resta verificar como o material, endereçado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede estadual paulista de ensino, aborda problemas que recaem nessas equações.

Pommer (2008), em sua pesquisa de mestrado, visou investigar se, como e em que medida os alunos do Ensino Médio da rede publica de São Paulo explicitavam conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares ao participar de atividades elaboradas no molde de uma sequência didática. O autor concluiu que esses alunos explicitaram alguns conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares, ao perceberem o caráter discreto das grandezas envolvidas e a existência de diversas possibilidades de solução; porém tiveram dificuldade em estabelecer critérios para caracterizar a não existência de solução inteira.

A pesquisa de Pommer (idem) permite concluir que, embora alguns professores do Ensino Médio não deem indícios de conhecer as equações diofantinas lineares, conforme pesquisa de Costa (2007), os alunos do Ensino Médio participantes da pesquisa de Pommer explicitaram alguns conhecimentos acerca destas equações. Isso mostra a possibilidade do trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio. Assim é possível que o assunto equações diofantinas lineares esteja presente no material destinado ao Ensino Médio, da rede estadual de ensino paulista.

Da mesma forma que meus colegas de subprojeto, considero as equações diofantinas lineares como conteúdo próprio e até mesmo indispensável para ser trabalhado no Ensino Médio.

Nery e Possani (2001), ambos professores de matemática do Ensino Médio, no artigo "Os Primos Esquecidos", afirmam que o assunto – números primos – costuma ser apresentado

> [...] ao aluno durante a 5ª série do Ensino Fundamental e daí para frente é praticamente abandonado. Quando o aluno se encontra no Ensino Médio já está mais amadurecido para a Matemática, mas os números primos quase não reaparecem, o que é uma pena. O conhecimento específico de temas do Ensino Médio, aliado ao fascínio que os números primos sempre despertam, poderia ser utilizado tanto para fixar melhor o conteúdo específico, quanto para despertar no aluno o gosto por problemas desafiadores de Teoria dos Números. (NERY, C; POSSANI, C., 2001, p. 16)

Corroborando a denúncia de Nery e Possani, alguns dos pesquisadores entrevistados por Resende (2007) deram como motivo para o abandono dos números primos, a pouca ênfase dada a assuntos da Teoria dos Números no Ensino Básico e a falta de familiaridade dos professores com esses temas.

Machado (2008), no artigo "O estudo dos números inteiros visando uma cabeça bem feita", recorre a Jurkiewicz para justificar que o problema da aprendizagem da noção de número em Matemática é criado pela forma segmentada, compartimentada e linear com que geralmente é trabalhada no Ensino Básico. Nesse mesmo artigo, a autora apresenta resultados que mostram o potencial de outro tipo de ensino, não linear, no qual alunos expressam o uso de números negativos nas primeiras séries do Ensino Fundamental.

Sobre a linearidade e conseqüente sequênciamento dos currículos de Matemática, Machado (2008) afirma que:

> O desenvolvimento da matemática escolar, dessa forma sequenciada, compartimentada e linear, no entanto, não corresponde ao que a criança em seu cotidiano costuma viver. Na vida social, o aluno desde cedo convive, ouve falar, em meia dúzia, 10 por cento, R$ 3,50. Nos elevadores dos prédios a criança marca o -2 para ir ao segundo subsolo. Escuta que em São Joaquim fez -3 graus e ao acompanhar os adultos nas compras ouve falar e enxerga avisos de meia dúzia de laranjas por preços expressos em decimais etc. (MACHADO, 2008, p. 2)

O ensino sequencial dos números acaba, então, segundo Machado (2008), dificultando o aluno a usar todo o seu potencial e a desenvolver seu conhecimento de uma forma mais integrada com o seu cotidiano. Essa autora aponta mais um problema causado pelo sequenciamento e compartimentação do estudo dos números:

> Um outro efeito deletério desse sequenciamento e compartimentação do estudo dos números é que esse tipo de abordagem também leva o ensino a negligenciar as particularidades dos conjuntos de números já estudados, ao trabalhar questões referentes a números reais, muitas vezes se negligencia a análise da parte específica relativa aos números já estudados, como os números inteiros. É como se ao passar da matemática discreta, para o estudo da matemática "contínua", aquela, por ser "inferior", devesse dar lugar à outra. (MACHADO, 2008, p. 3)

Machado (idem) afirma que este fato pode causar o abandono pelos documentos oficiais e institucionais da recomendação do trabalho no Ensino Básico com resultados importantes da Teoria Elementar dos Números já disponíveis aos alunos das últimas séries, principalmente do Ensino Médio. Além disso, a autora apresenta resultados de pesquisas que apontaram problemas enfrentados por alunos no final do Ensino Básico decorrentes de um ensino que carece de conhecimentos mais aprofundados sobre os números inteiros.

A autora se refere à Brolezzi (1996), ao afirmar que o ensino de Matemática elementar tende a optar pelo contínuo ou pelo discreto, sem explorar a interação entre eles, provocando consequências graves para o ensino que perde muito da riqueza da Matemática. Machado (2008) se baseia em Morin para sugerir que a fragmentação, a segmentação do saber, impede de ver o global e o essencial, provocando a ignorância e a cegueira. Com base no apresentado a autora defende que deve haver um trabalho transversal com os números inteiros durante toda a escolaridade básica.

Machado (2008) levanta algumas questões ao refletir sobre a implementação do trabalho com os números inteiros no Ensino Básico:

> Mas, como introduzir um trabalho dessa forma sem o preparo do professor para gerenciar essa tensão e integração necessária entre o discreto e o contínuo?
>
> Essa questão nos remete a outra, que parece a anteceder: o professor de matemática concebe a matemática como o estudo de grandezas discretas e contínuas? O que é necessário trabalhar

> em uma licenciatura de matemática para que o professor torne-se competente na gestão requerida? (MACHADO, 2008, p. 5)

Machado (idem) conclui o artigo afirmando a importância do papel do professor no gerenciamento do currículo e na gestão da tensão entre a matemática discreta e contínua durante toda a escolaridade básica e dizendo que isso só será possível se o professor possuir uma compreensão aprofundada de ambos os lados (discreto e contínuo) e assumir que o conhecimento dos números inteiros é fundamental na vida do cidadão.

As considerações de Machado (2008) reforçam a importância do trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números em toda a escolaridade básica e que este trabalho seja feito de forma transversal, e não sequencial e compartimentado. Dessa forma, como o material proposto aos professores da rede estadual paulista de ensino de 2008 contou em sua equipe de elaboração, com pesquisadores em Educação Matemática, os quais poderiam corroborar a ideia da necessidade da transversalidade do trabalho com o discreto e o contínuo, buscarei verificar como se dá o trabalho sobre a Matemática Discreta, e se este é sustentado de maneira a possibilitar ao professor a gestão da tensão entre o discreto e o continuo.

Outra pesquisadora da Educação Matemática que se debruça sobre o ensino e a aprendizagem da Teoria dos Números é Claudia Groenwald que, em um de seus artigos, Groenwald *et al* (2006), trata do abandono de assuntos da Teoria Elementar dos Números no Ensino Básico. Nesse artigo, as autoras explicam que a causa desse abandono tem ocorrido pelo seguinte:

> [...] com a Teoria dos Números, talvez por não ter se encontrado um meio termo para sua apresentação como simples receituário ou, porque, seu ensino mais profundo apresenta muitas dificuldades de compreensão, tanto para os professores, como para os alunos.[...] Entre os obstáculos encontrados pelos professores de matemática na transposição didática dos conceitos aritméticos está a falta de modelos, pois para cada problema o método utilizado na sua resolução é diferente e alem disso, nos livros existem poucas atividades didáticas aplicáveis no Ensino Básico. (GROENWALD *et al*, 2006, p. 1-2)

Corroboro o que Groenwald *et al*. (2006) afirmam nessa citação, pois em minha prática docente geralmente recorro aos livros didáticos disponíveis nas escolas para elaborar minhas aulas, nos quais, principalmente para o Ensino Médio, tenho encontrado poucas atividades que abordam assuntos da Teoria Elementar dos Números. Além disso, minha observação como aluno, até dez anos atrás, e daí em frente como professor mostra que, em muitos casos os alunos diante de um problema esperam que o professor explique como resolvê-lo, como um receituário, o que pode ser explicado pela prática dos professores em geral. Fato que dificulta ainda mais quando o problema envolve a Teoria Elementar dos Números na qual, segundo Groenwald et al., cada problema é resolvido por uma diferente estratégia, o que torna mais difícil implementar seu estudo. Resta verificar se no material de 2008 da SEE/SP a ser aplicado aos alunos do 1º ano do Ensino Médio, são propostas situações-problema envolvendo assuntos da Teoria Elementar dos Números, bem como a abordagem conferida a esses assuntos.

A influência do Livro Didático na apresentação dos temas pelo professor também é discutida por Lajolo (1996):

> (...) O Brasil, por sua precária situação educacional, faz com que o livro didático "acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina... (LAJOLO, 1996, p. 3)

A afirmação de Lajolo datada de 13 anos atrás continua verdadeira pelo que posso observar em minha experiência docente de oito anos no ambiente escolar. Julgo então necessário destacar os resultados de pesquisas relacionadas à Teoria Elementar dos Números as quais investigaram o tema por meio de análise de livros didáticos do Ensino Básico. Entre elas, destaco a de Oliveira (2006), Rama (2005) e Silva (2007).

Oliveira (2006), membro do GPEA, investigou como a "equação diofantina linear" é tratada nas propostas curriculares oficiais relativas ao Ensino Médio e nas duas coleções de matemática para o Ensino Médio mais adotadas no Estado de São Paulo. Concluiu que os documentos oficiais não fazem referência explicita ao objeto do saber "equação diofantina linear" e que este assunto não era trabalhado nos livros didáticos das coleções analisadas.

A conclusão de Oliveira é mais um alerta sobre o abandono do ensino de equações diofantinas lineares no Ensino Médio, o que vale lembrar, foi constatado também por Costa (2007).

Já em sua pesquisa, Rama (2005) investigou a abordagem conferida aos números inteiros no Ensino Fundamental II (5ª a 8ª série ou 6º ao 9º ano) e no primeiro ano do Ensino Médio. Na parte dedicada ao Ensino Médio, o autor analisou se e como eram abordadas questões de divisibilidade em onze coleções de livros didáticos. O autor concluiu que o assunto é retomado de forma superficial e que o conceito de divisibilidade é exigido "somente em uns poucos exercícios" (RAMA, 2005, p. 6).

As conclusões de Rama (2005) e de Oliveira (2006) indicam que os livros didáticos de matemática do Ensino Médio, analisados, além de não abordarem equações diofantinas lineares dão pouca atenção à divisibilidade, reforçando a ideia de abandono da matemática discreta pelos autores desses livros, que não dão a merecida atenção ao trabalho com a Teoria Elementar dos Números.

Outra pesquisa relacionada à Teoria Elementar dos Números realizada por meio da análise de livros didáticos foi a de SILVA (2007), que investigou a abordagem de função adotada em cinco livros didáticos da Educação Básica. Dentre as questões que o autor se propôs a responder me atenho apenas à seguinte questão: "Na construção de gráficos, os detalhes sobre a passagem do discreto ao contínuo são explicitados satisfatoriamente?" O autor concluiu que, na maioria dos livros analisados, a relação discreto/contínuo não é explicitada satisfatoriamente. Dessa forma, temos mais um "veredicto" sobre a abordagem insatisfatória de temas ligados à Teoria Elementar dos Números nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio.

Nota-se que os autores dos livros didáticos ainda não se sensibilizaram com a importância do trabalho com assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números. E pela importância dada pelos professores ao livro didático, conforme aponta Lajolo (1996), pode-se conjecturar que, se nos livros didáticos esses assuntos não são tratados, dificilmente serão pelos professores em suas aulas.

Refletindo sobre essa assertiva quanto à inexistência de livros didáticos adequados para a exploração de situações propícias para o desenvolvimento da Teoria Elementar dos Números, acredito que meu objetivo de pesquisa, a análise do material endereçado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede estadual paulista de ensino, seja oportuno e necessário para indicar rumos a seguir ou a corrigir.

Capítulo 3

ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Passo agora a tecer considerações sobre a metodologia e os procedimentos metodológicos adotados.

Lembrando que o objetivo desta pesquisa é de investigar quais e como assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números são abordados no material destinado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede estadual de ensino paulista.

Bardin (2009) no item 6 – “A análise de conteúdo e a análise documental” – do segundo capítulo de seu livro “Análise de conteúdo” afirma que:

> O objectivo da análise documental é a representação condensada da informação, para consulta e armazenamento; o da análise de conteúdo é a manipulação de mensagem (conteúdo e expressão desse conteúdo) para evidenciar os indicadores que permitam inferir sobre uma outra realidade que não a da mensagem. (BARDIN 2009, p. 48).

Considero que o material disponibilizado pela Secretaria da Educação que pode conter elementos que permitam responder a minha questão de pesquisa é constituído por diferentes documentos destinados ao ensino de matemática. Pretendo manipular esses documentos de forma a evidenciar os indicadores que me propiciarão inferir uma realidade mais específica que a do material, isto é procuro conhecer a ênfase dada a uma parte da matemática tratada no Ensino Médio. Assim decidi realizar minha pesquisa de cunho qualitativo utilizando a metodologia da Análise de Conteúdo conforme Bardin (2009). A seguir apresento como a autora resume o que se designa por análise de conteúdo:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN 2009, p. 44)

Nesta pesquisa, a análise se dará em apenas um instrumento, o material endereçado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede estadual de ensino paulista, marcado por uma disparidade de formas, que a autora chama de comunicações. As comunicações escritas são em forma de revistas, cadernos do professor e de jornal e as inferências serão feitas com intuito de responder minha questão de pesquisa. No caso desta pesquisa os "indicadores" serão geralmente qualitativos.

Segundo Bardin (2009), as diferentes fases da análise de conteúdo, organizam-se em torno de três pólos cronológicos: a pré-análise; a exploração do material; o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Na pré-análise escolhi os documentos a serem analisados. Em seguida passei a exploração do material procurando descrever e analisar cada um, orientando-me pelas hipóteses e pelo referencial teórico. Na fase final, proponho algumas inferências e interpretações acerca das análises de acordo com o objetivo perseguido.

A seguir descrevo e justifico cada fase.

A pré-análise é a fase de organização propriamente dita. Segundo Bardin (2009) geralmente esta fase possui três missões: a escolha dos documentos, a formulação das hipóteses e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final. A autora frisa que:

> Estes três fatores, não se sucedem, obrigatoriamente, segundo uma ordem cronológica, embora se mantenham estreitamente ligados uns aos outros: a escolha de documentos depende dos objetivos, ou inversamente, o objetivo só é possível em função de documentos disponíveis; os indicadores serão construídos em função das hipóteses, ou, pelo contrário, as hipóteses serão

> criadas na presença de certos índices. A pré-análise tem por objetivo a organização, embora ela própria seja composta por atividades não estruturadas, abertas, por oposição à exploração sistemática dos documentos. (BARDIN, 2009, p. 121-122)

Na pré-análise foram escolhidos os seguintes documentos (comunicações) para serem analisados:

- A revista **São Paulo faz Escola**. Edição especial da Proposta Curricular, Disciplina: Matemática, 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. Doravante citado como **revista São Paulo Faz Escola**.
- **Jornal do Aluno: São Paulo faz escola** específico do 1º ano do Ensino Médio. Doravante citado como **Jornal do Aluno**.
- A revista: **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática**. Doravante citada como **Proposta Curricular**.
- **Caderno do Professor – Matemática do 1º ano do Ensino Médio**. **1º bimestre de 2008**. Doravante citado como **1º caderno**.
- **Caderno do Professor – Matemática do 1º ano do Ensino Médio. 2º bimestre de 2008.** Doravante citado como **2º caderno**.
- **Caderno do Professor – Matemática do 1º ano do Ensino Médio. 3º bimestre de 2008**. Doravante citado como **3º caderno**.
- **Caderno do Professor – Matemática do 1º ano do Ensino Médio. 4º bimestre de 2008**. Doravante citado como **4º caderno**.

A escolha para analisar o material da SEE/SP do nível médio ocorreu por que, segundo o resultado de algumas pesquisas, é principalmente no Ensino Médio que se dá o abandono de assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números. Decidi, então, direcionar a análise aos documentos relativos ao 1º ano do Ensino Médio para perceber principalmente se a nova proposta resgata a Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio. Pretendo também levantar elementos sobre se o material evidencia a preocupação de trabalhar a matemática discreta e contínua de modo equitativo enfatizando a "tensão" entre elas. Assim formulei hipóteses a respeito, a saber:

- A *revista São Paulo* faz escola faz menção à necessidade de criar o equilíbrio entre a matemática discreta e a do contínuo, mostrando a importância do resgate de assuntos referentes a Teoria Elementar dos Números.
- O *Jornal do Aluno*, por propor uma revisão de assuntos do Ensino Fundamental, fornece elementos que evidenciam a importância que os elaboradores dão aos vários assuntos da Teoria Elementar dos Números no Ensino Fundamental.
- A *Proposta Curricular* aborda a questão da necessidade de equilíbrio entre a matemática discreta e a do contínuo e estabelece a importância de se tratar os assuntos da Teoria Elementar dos Números durante todo o Ensino Médio.
- Os *Cadernos do Professor* apresentam assuntos da Teoria Elementar dos Números, e apresenta a matemática discreta e contínua de forma equilibrada.

Como indicadores para justificar a presença de assuntos da Teoria Elementar dos Números no *Jornal do Aluno*, aponto a importância da revisão do estudo dos números inteiros e de suas propriedades, números primos, decomposição em fatores primos, o teorema fundamental da Aritmética, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, divisibilidade.

Da mesma forma, justifico a presença de assuntos da Teoria Elementar dos Números nos *Cadernos do Professor*, na parte que trata do estudo das sequências, progressões aritméticas e geométricas, pois nelas se trabalha com a definição por recorrência, favorecendo o desenvolvimento das habilidades de testar e validar conjecturas, observar regularidades e generalizar padrões; e no estudo da introdução à congruência módulo *m*. No estudo das funções, pode-se trabalhar com funções com domínio e contradomínio em *R*, quanto especificamente com domínio e/ ou contradomínio em *N* ou *Z.*

A segunda fase da análise de conteúdo, segundo Bardin, é a da exploração do material, sendo que a autora afirma sobre esta fase que:

> Se as diferentes operações da pré-análise foram convenientemente concluídas, a fase de análise propriamente dita não é mais do que a administração sistemática das decisões tomadas. Quer se trate de procedimentos aplicados manualmente ou de operações efetuadas pelo ordenador, o decorrer do programa completa-se mecanicamente. Esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas. (BARDIN, 2009, p. 127)

Nesta fase da análise de conteúdo descrevo e analiso as “comunicações” escolhidas na pré-análise. Relato os tópicos a serem trabalhados no *Jornal do Aluno* e nos *Cadernos do Professor* em cada bimestre, bem como algumas sugestões de aplicação das atividades mencionadas nesses cadernos, além de destacar algumas atividades propostas no *Jornal do Aluno* e nos *Cadernos do Professor* que podem favorecer a discussão de assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números.

A terceira fase da análise de conteúdo, segundo Bardin (2009) é a do tratamento dos resultados obtidos e a interpretação destes, sendo que nesta fase

> O analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas.
>
> Por outro lado, os resultados obtidos, a confrontação sistemática com o material e o tipo de inferências alcançadas, podem servir de base a uma outra análise disposta em torno de novas dimensões teóricas, ou praticada graças a técnicas diferentes. (BARDIN, 2009, p. 127-128)

Com base no proposto acima por Bardin, na terceira fase da análise de conteúdo, faço uma interpretação dos dados coletados tendo em vista os objetivos previstos, bem como sugiro algumas idéias que poderiam ser desenvolvidas visando ao trabalho com assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio.

Capítulo 4

DESCRIÇAO E ANÁLISE DO MATERIAL (COMUNICAÇÕES)

Introdução

No ano letivo de 2008, os professores da rede estadual de ensino receberam durante a semana do planejamento, que antecede o início das aulas, a notícia da implantação pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) do projeto “São Paulo faz escola”. Nessa mesma semana foi entregue aos professores, de acordo com a disciplina na qual lecionavam, a revista *São Paulo faz escola* explicando como era previsto o desenvolvimento das atividades do início do ano letivo de 2008. Foi entregue também publicações, no formato de jornal, denominadas *Jornal do Aluno* para serem disponibilizados aos alunos e professores. Ao todo são quatro jornais sendo um deles para 5ª e 6ª séries, um para 7º e 8ª séries, um para a 1ª série do Ensino Médio e outro para as 2ª e 3ª séries do Ensino Médio.

Os professores do Estado foram informados que teriam 42 dias para trabalhar com o *Jornal do Aluno* e que após os 42 dias receberiam outro material.

Após esse tempo, a SEE/SP enviou às escolas da rede estadual exemplares da *Proposta Curricular* para cada disciplina (da 5ª série do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio) e do *Caderno do Professor* do 1º bimestre, os quais foram entregues a cada professor de acordo com a disciplina e a série em que lecionava.

É importante observar ainda que os Cadernos do Professor dos bimestres seguintes foram sendo entregues ao longo do ano, a cada professor, de acordo com a série e a disciplina em que lecionava.

A seguir a descrição e análise das "comunicações" (material da SEE/SP) são apresentadas em dois itens. No primeiro descrevo e analiso a *revista São Paulo faz escola* e o *Jornal do Aluno* do 1º ano do Ensino Médio e no segundo item, a *Proposta Curricular e* os *Cadernos do Professor* de matemática do 1º ano do Ensino Médio dos 4 bimestres.

1. Descrição e Análise da *revista São Paulo faz escola* e do *Jornal do Aluno*.

A ***revista São Paulo faz escola*** entregue a todos os professores do Ensino Básico das escolas da rede estadual, descreve as ações *"a serem implementadas no período de 18 de Fevereiro a 30 de Março de 2008 para os alunos do Ensino Médio (1ª a 3ª séries)*".

Essa revista apresenta os Fundamentos da proposta seguidos de uma parte destinada a Matemática da 1ª série, e outra destinada a Matemática das 2ª e 3ª séries.

As ações a serem implantadas no período, segundo os fundamentos da proposta, se referem ao Jornal do Aluno entregue na mesma época aos professores:

> Essa proposta visa oferecer um material didático estruturado para o aluno e subsídios para o professor, para que as escolas possam implementar ações de consolidação das aprendizagens em todas as disciplinas do currículo, tendo por base os resultados do Saresp 2005. (SÃO PAULO, 2008a, p. 6)

É importante notar que o referido material didático estruturado, o *Jornal do Aluno*, foi elaborado levando em conta os resultados da aplicação do Saresp 2005 visando a consolidação da suposta aprendizagem que os alunos tiveram nos anos anteriores.

A respeito da necessidade e dos objetivos da implantação do trabalho neste intervalo de tempo com o referido material a revista traz os seguintes argumentos:

> Os resultados apresentados pelos alunos da rede estadual paulista nos processos realizados nos últimos anos (Saresp, Saeb, Enem, etc.) mostram que, a despeito de todos os esforços dos docentes e da Secretaria, não ocupamos uma posição condizente com a importância de nosso Estado no cenário educacional brasileiro (...).
>
> Consciente da necessidade de uma ação abrangente e efetiva a curto prazo, a Secretaria trabalha intensamente em uma nova Proposta Curricular, a ser implementada em 2008, que inclui um material de apoio ao trabalho cotidiano do professor (...) Tendo por base as análises dos resultados dos processos avaliativos acima referidos, foram levantadas as principais lacunas de nossos alunos em termos de conhecimentos básicos de Português e de Matemática, fundamentais para um desenvolvimento pleno das competências na leitura, na escrita e na expressão matemática, incluindo-se a capacidade de realização de cálculos em diferentes contextos.
>
> O presente projeto foi concebido com o objetivo de recuperar o desempenho em tais competências básicas, ao mesmo tempo em que prepara o terreno para a semeadura do novo currículo. O material para os alunos constitui, como já foi dito, uma tentativa de suprir deficiências apontadas, sobretudo pelo Saresp/2005. Sabemos, no entanto, que somente o professor, em sua circunstância específica, em sua realidade concreta poderá dar vida a tal material. (SÃO PAULO, 2008a, p. 16)

A citação acima reforça que o trabalho com o Jornal do Aluno tem a intenção de **suprir deficiências apontadas nas avaliações**, além de preparar o aluno para a implementação de uma nova proposta curricular. É ressaltada ainda, a importância do professor na implantação deste projeto, considerando que somente o professor poderá dar vida ao material proposto.

Acerca do *Jornal do Aluno*, a *revista São Paulo faz escola* afirma que este

> apresenta atividades (situações-problema com a temática da disciplina e o desenvolvimento das habilidades do Saresp) de acordo com o número de aulas previstas para cada disciplina no período. (SÃO PAULO, 2008a, p. 8)

A parte destinada a Matemática da 1ª série, que é aquela que interessa a esta pesquisa, inicia por uma “apresentação” que dá uma visão geral da proposta para a disciplina, seguida de um “quadro geral” que relaciona o número de aulas com as habilidades que os resultados do Saresp permitiram verificar que deveriam ser consolidadas ou recuperadas pelos alunos e campos de estudo, prosseguindo com “orientações” para a aplicação das atividades. Após o que, é apresentada uma “grade de avaliação” com respostas esperadas às questões propostas, acompanhadas de comentários prevendo possibilidades de respostas e de intervenções do professor, “considerações finais” que explicam que o “Jornal do aluno” *visa preenchimento de certas lacunas detectadas* e *busca preparar o terreno para semear as novas propostas curriculares a serem implantadas* e finalmente uma bibliografia com sugestão de livros e de sites que podem ser consultados pelos professores.

No caso da disciplina de Matemática são indicadas trinta aulas para aplicação das atividades propostas no *Jornal do Aluno*.

Levantei a hipótese de que a *revista São Paulo faz escola* faria menção à necessidade de equilíbrio entre a matemática discreta e a do contínuo, porém pela análise da parte do material endereçada aos professores constatei que não há menção a esta necessidade de equilíbrio. Nas orientações para aplicação das atividades do *Jornal do Aluno*, nenhum comentário é feito a respeito de assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números.

Os tópicos a serem tratados no *Jornal do Aluno*, mencionados na *revista São Paulo faz escola* são:

- Números irracionais e racionais: aplicações e operações.
- Fatoração de expressões algébricas – significado e aplicações.
- Equações do 2º grau – resoluções e problemas.
- Grandezas proporcionais – significado e aplicações.
- Semelhança – ampliações e reduções – aplicações – Teorema de Tales.
- Triângulos retângulos – Pitágoras e relações métricas.
- Quadrados – perímetros, áreas e linguagem algébrica.
- Lendo e interpretando gráficos. (SÃO PAULO, 2008a, p. 17)

Observando esses tópicos conjecturei que assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números seriam abordados nas partes que tratam:

- do estudo dos números irracionais e racionais, por acreditar que nele seja feita uma revisão do conjunto dos números inteiros e de suas propriedades;
- da fatoração de expressões algébricas, pois estas fazem uso do máximo divisor comum (m.d.c.) de números inteiros, além do que poderiam ser revistos critérios de divisibilidade, auxiliando no cálculo do m.d.c.;
- da resolução de problemas envolvendo equações do 2º grau, pois em alguns deles somente soluções que recaem em números inteiros satisfazem a resolução, e isso poderia ser ressaltado nesta parte do material (*Jornal do Aluno*).
- de gráficos, pois neste momento poderiam ser trabalhados com situações em que as variáveis assumem valores discretos.

O ***Jornal do Aluno*** do 1º ano do Ensino Médio é o único endereçado a apenas uma série. O jornal, cuja cópia da capa aparece no anexo 2, consta de 48 páginas, e depois de algumas explicações inicia com os textos das várias disciplinas, 11 ao todo. Para Língua Portuguesa e Literatura e Matemática são dedicadas 7 páginas e para as outras 9 disciplinas coube um número menor de páginas. A Matemática é tratada da página 42 até a 48, inclusive.

A seguir me detenho na parte do jornal dedicada a Matemática. Os assuntos de matemática são previstos para serem tratados em 30 aulas. Para cada aula há um pequeno texto sobre o assunto a ser tratado nos exercícios que seguem. Para conhecer a listagem das 30 aulas com o respectivo assunto ver anexo 3.

As primeiras quatro aulas tratam de números irracionais e racionais e suas aplicações e operações: as duas primeiras são dedicadas aos irracionais e aplicações e irracionais em problemas geométricos e as duas seguintes, terceira e quarta aulas dedicadas aos irracionais e racionais e aplicações. Nessas quatro primeiras aulas discutem-se aproximações de números irracionais por números racionais, bem como aplicações dos números racionais e irracionais em problemas geométricos, além de rever operações com números racionais e irracionais.

As quinta e sexta aulas são dedicadas ao estudo de fatoração de expressões algébricas, em que são exploradas diversas estratégias de fatoração, como dividir a expressão pelos fatores comuns e tratamento de dois casos de fatoração: diferença de quadrados e trinômio quadrado perfeito.

Da sétima a décima aula faz-se o estudo das equações do 2º grau, sendo que, nas sétima e oitava aulas a ênfase é nos procedimentos de resolução de equação quadrática, destacando métodos que envolvem a fatoração e pesquisa das raízes por soma e produto, além do método conhecido usualmente como de Bhaskara; e nas nona e décima aulas é enfatizado o uso de equações do segundo grau na resolução de problemas.

As décima primeira e décima segunda aulas tratam do estudo das grandezas proporcionais, com o objetivo de revisar e consolidar a idéia de proporcionalidade direta.

Da décima terceira a vigésima oitava aulas são retomados tópicos de Geometria, como por exemplo, o Teorema de Tales, o Teorema de Pitágoras, ampliações e reduções, entre outros.

Por fim, nas duas últimas aulas são trabalhadas a análise e interpretação de gráficos. As atividades destas aulas retomam também o cálculo de porcentagens, a interpretação de unidades de medida, a idéia de relação entre grandezas, o conceito de semelhança de triângulos e de contagem.

A tabela que segue resume o número de exercícios de cada aula e quantos deles favorecem o trabalho com assuntos de Teoria Elementar dos Números.

TABELA 1: Análise quantitativa – Jornal do Aluno

Aula	Assunto da aula	Nº exercícios por aula	Exercícios que propiciam o trabalho com a Teoria Elementar dos Números
1ª	Números irracionais e racionais	2	-
2ª		2	-
3ª		1	-
4ª		2	-
5ª	Fatoração de expr.algébricas	4	**3**
6ª		5	**2**
7ª	Equações de 2º grau	3	**1**
8ª		3	**3**
9ª		3	**1**
10ª		4	**2**
11ª	Grandezas proporcionais	3	-
12ª		2	**1**
13ª	Semelhança Teorema de Tales	4	-
14ª		2	-
15ª		3	-
16ª		4	-
17ª		4	-
18ª		2	-
19ª e 20ª	Triângulos retâng. Pitágoras Relações métricas	4	-
21ª		2	-
22ª		3	-
23ª		2	-
24ª e 25ª		4	-
26ª	Quadrados	2	-
27ª		3	-
28ª		3	-
29ª	Gráficos	2	-
30ª		1	**1**
Total		**79**	**14 (~18%)**

Nota-se, pela tabela 1, que embora se trate de uma retomada do conteúdo do Ensino Fundamental, pouca atenção é dada a assuntos da Teoria Elementar dos Números. De um total de setenta e nove exercícios propostos nestas trinta aulas, apenas catorze tratam de assuntos dessa teoria, i.e., menos de 18 % dos exercícios propostos se referem aos assuntos tratados durante boa parte do Ensino Fundamental.

A seguir apresento alguns exercícios que selecionei porque podem favorecer o trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números e também sugiro algumas idéias para um maior aprofundamento dos assuntos trabalhados relacionados à essa teoria.

Na primeira aula, antes dos dois problemas propostos explica-se que número irracional é aquele que:

> [...] <u>não pode ser escrito na forma de uma fração de numerador e denominador inteiros</u>. A representação com vírgula de um número irracional possui sempre infinitas casas não periódicas depois da vírgula. São exemplos de números irracionais a $\sqrt{2}$, que é 1,41421356..., π = 3,14159265...; 0,101001000100001... (SÃO PAULO, 2008b, p. 42) (grifo meu)

Seria de fundamental importância iniciar este estudo pelos números inteiros, pois conforme observamos acima, afirma-se que número irracional não pode ser escrito na forma de uma fração de numerador e denominador inteiros, porém minha experiência mostra que boa parte dos alunos que adentram o Ensino Médio não é capaz de discernir se um número é ou não um número inteiro. Assim, poder-se-ia ter sugerido nos comentários sobre esse problema a importância de se discutir o que é um número inteiro e um número racional.

As 5ª e 6ª aulas tratam da fatoração de expressões algébricas, sendo que na explanação deste tema afirma-se que:

> Um número que não seja primo pode ser escrito na forma de um produto de números primos, como nestes casos:
>
> 10 = 2.5 84 = 2.2.3.7 143 = 11.13
>
> Ao fazermos isso, estamos decompondo o número em seus fatores primos. (SÃO PAULO, 2008b, p. 43)

Conforme observamos acima, são colocados três valores decompostos como exemplo e logo a seguir faz-se uma analogia com a fatoração de expressões algébricas. A referencia a números primos traz uma boa oportunidade para o professor discutir esse conceito, pois segundo algumas pesquisas, como a de Arquilia (2008), é comum o aluno confundir número primo com número impar. Outra referência importante desse enunciado é aquela que se refere ao Teorema Fundamental da Aritmética: *Um número que não seja primo pode ser escrito na forma de um produto de números primos*, esta é uma boa oportunidade para o professor explorar esse assunto tão importante da Teoria Elementar dos Números.

Alguns exercícios propostos nessas aulas favorecem também a retomada da ideia do máximo divisor comum (mdc) entre dois números inteiros. Seguem abaixo dois deles:

> 5ª aula
>
> 1. Determine o fator comum aos monômios de cada expressão e fatore-a
>
>   a) $12a^4 - 8a^3 - 4a^5$
>
>   b) $30x^4b^2 + 10x^3b^3 - 20x^3b^4 + 40x^4b^3$
>
> 2. Fatore o denominador e o numerador de cada fração e simplifique-a.
>
>   a) $\dfrac{8-16x}{2-4x}$ b) $\dfrac{2xy+y}{4y-y^2}$
>
>   c) $\dfrac{-5a^2b+10ab}{-4a+8}$ d) $\dfrac{2x^3-4x^2+6}{2x^2-8}$
>
> (SÃO PAULO, 2008b, p. 43)

O exercício 4 da quinta aula apresenta um problema em seu enunciado:

> 4. Lúcia pensou em um número, multiplicou-o por 4 e depois adicionou o resultado com 12. Em seguida, Lúcia dividiu o resultado anterior pelo número em que pensou somado com 3. O resultado final, independente do número pensado por Lúcia, é 4. Como se explica isso? (SÃO PAULO, 2008b, p. 43)

Deveria ser colocado “Lucia pensou em um número diferente de -3 multiplicou-o...’’, pois, para o número inteiro –3 esta equação não está definida devido ao domínio de validade que exige que o denominador seja diferente de zero.

Da sétima à décima aula é retomado o estudo das equações do 2º grau. Na maioria dos exercícios (28 do total de 34) as equações dadas possuem como coeficientes números inteiros, sendo que boa parte delas também possuem como soluções números inteiros. A seguir apresento alguns exemplos que justificam minha afirmação:

<u>7ª aula, exercício 3</u>

Justifique o fato de as quatro equações a seguir terem as mesmas raízes:

$-x^2 + 2x + 3 = 0$; $-10x^2 + 20x + 30 = 0$;
$-0,5x^2 + x + 1,5 = 0$; $x^2 - 2x + 3 = 0$

(SÃO PAULO, 2008b, p. 43)

<u>8ª aula, exercício 3</u>

Resolva as equações a seguir pelo método que achar mais conveniente. Lembre-se de que, uma equação do 2º grau pode ter duas raízes reais distintas, uma raiz real dupla, ou nenhuma raiz real.

$a) x^2 - 4x + 4 = 0$

$b) y^2 + y + 1 = 0$

$c) x^2 = 8x - 15$

$d) y + 2y^2 = 4$

$e) - x^2 + 11x - 28 = 0$

$f)(3t + 2)(t - 1) = t(t + 2)$

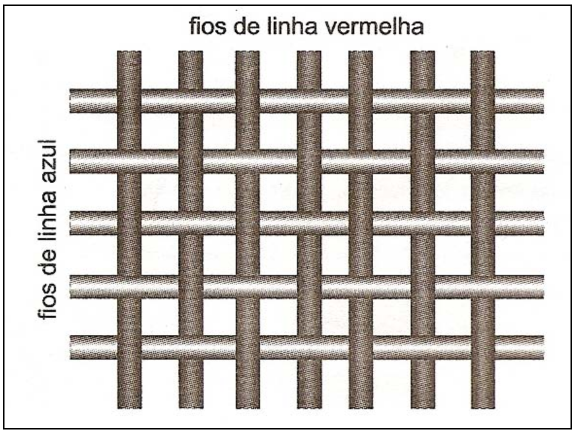
(SÃO PAULO, 2008b, p. 44)

São propostas também, no decorrer destas quatro aulas, certas situações-problema, sendo que algumas delas apresentam números inteiros como soluções, por exemplo, a questão 3 da décima aula procura saber qual o total de partidas disputadas por times de um campeonato.

Seguem algumas situações-problema em que fica claro que só satisfazem ao problema proposto soluções que recaem em números inteiros.

<u>10ª aula, exercício 1</u>

Numa peça retangular de tecido representada parcialmente abaixo, o número de fios de linha vermelha usados na confecção de um tecido retangular excede o de linha azul em 5, sendo que o total de pontos de cruzamento entre as linhas azuis e vermelhas é igual a 6800. Calcule o número de fios de linha azul e de linha vermelha usados na confecção desse tecido.



(SÃO PAULO, 2008b, p. 44)

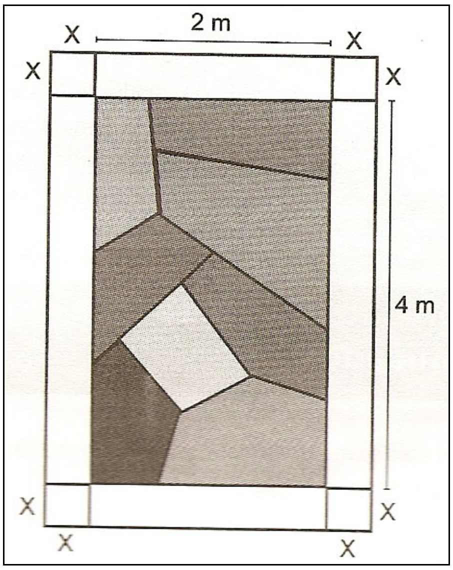
Como o objetivo deste exercício é encontrar o número de fios usado na confecção do tecido, só faz sentido para esta situação um número inteiro como solução. Outro exemplo disso é o já citado exercício 3 dessa mesma aula:

> 10ª aula, exercício 3
>
> Um campeonato de futebol será disputado por *n* times. Cada time deverá jogar duas partidas com cada um dos outros, ma no seu campo e outra na do adversário. Pergunta-se:
>
> a) Se o campeonato for disputado por 6 times, qual será o total de partidas?
>
> b) Quantos times integram esse campeonato, se ele for disputado em um total de 650 partidas?
>
> c) Justifique algebricamente, com a resolução de uma equação do 2º grau, por que o campeonato não pode ser disputado em um total de 610 partidas. (SÃO PAULO, 2008b, p. 44)

Conforme considerações já mencionadas de alguns pesquisadores deve-se trabalhar conjuntamente a Matemática discreta e a contínua. Dessa forma, notei pela análise deste material, que as situações propostas apresentam números inteiros em seus enunciados. Seria interessante então, que fossem inseridos também números não inteiros. Por exemplo, no exercício a seguir, em que se dá as medidas dos lados de um retângulo, poderiam ser trabalhadas medidas cujos números são decimais. A intervenção do professor, portanto, é fundamental para que sejam propostas situações desse tipo, caminhando com “ambas as pernas”, discreto e contínuo, no ensino de Matemática.

10ª aula, exercício 4

Um vitral retangular colorido de dimensões 2 *m* por 4 *m* será emoldurado conforme indica a figura (os quatro cantos da moldura são quadrados idênticos).



Sabendo que a área total da moldura é 7 m^2, calcule a medida *x* do lado dos quadrados nos cantos da moldura. (SÃO PAULO, 2008b, p. 44)

Nas décimas primeira e segunda aulas, é proposto trabalho com grandezas proporcionais, e são apresentadas algumas situações-problema, nas quais dá-se maior ênfase à Matemática do contínuo, a não ser em uma única situação na qual se trabalha com a quantidade de unidades produzidas de um certo produto. Neste caso é importante que o professor aproveite a oportunidade para levantar a questão de ser possível ou não respostas que dêem como resultado um número não pertencente ao conjunto dos números naturais, isto é, há oportunidade para o professor gerir a tensão entre a matemática discreta e contínua. A mencionada situação-problema é descrita a seguir:

12ª aula, exercício 1

Para produzir *x* unidades de um produto *A*, o custo *C* é composto por uma parcela fixa de *R$ 1000,00* e uma parcela variável, que é diretamente proporcional a *x*. O custo total da produção de *x* produtos é, então, $C = 1000 + kx$, sendo *C* em reais; a constante *k* representa o aumento no custo total *C* quando a quantidade produzida aumenta de uma unidade. Sabendo-se que para produzir 100 unidades do produto *A* o custo total é igual a *R$ 1500,00*, responda às questões seguintes:

a) Qual o valor de *k* na expressão $C = 1000 + kx$?

b) De quanto aumentará o custo total se a quantidade produzida aumentar de 579 para 580? E de 2938 para 2939?

c) Para que valor de *x* o custo variável será igual ao custo fixo?

d) O custo total *C* é diretamente proporcional a *x*?

e) A diferença entre o custo total *C* e o custo fixo é diretamente proporcional a *x*?

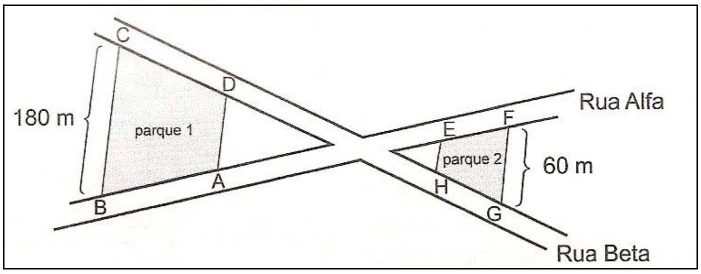
(SÃO PAULO, 2008b, p. 45)

Nas décimas terceira e quarta aulas, trabalha-se com a ideia de semelhança, e é notável que as medidas são todas elas dadas por números inteiros. Acredito que neste caso o professor deve apresentar mais alguma situação semelhante às propostas, porém com medidas dadas utilizando números reais não inteiros, gerindo mais uma vez a tensão entre o discreto e continuo na matemática.

Seguem alguns exemplos de exercícios propostos para estas aulas:

<u>13ª aula, único exercício</u>

A prefeitura da cidade pretende construir dois parques próximos ao cruzamento entre as ruas Alfa e Beta. Observando a planta do lugar, pode-se perceber que os dois parques terão formato de trapézios semelhantes (ABCD e EFGH), isto é, os ângulos internos de um deles são, correspondentes, de mesma medida que os Ângulos internos do outro. Além disso, há uma proporcionalidade entre as medidas correspondentes dos lados das figuras. Acontece, entretanto, que apenas a medida da base maior de cada trapézio foi definida, sendo 180 *m* em um deles e 60 m no outro. As demais medidas dependerão de desapropriações a serem realizadas no local.



1. As medidas de $\overline{CB}$ e de $\overline{FG}$ são fixas (respectivamente, 180*m* e 60 *m*), enquanto as demais medidas podem variar, mantendo-se todavia, a semelhança entre as duas figuras. Com base nisso resolva:

a) Se a medida de $\overline{EH}$ for igual a 25 *m*, qual será a medida de $\overline{DA}$?

b) Se $\overline{DA}$ = 18 *m*, quanto medirá?

c) Se $\overline{EH}$ = *k*, quanto medirá $\overline{DA}$ em função de *k*?

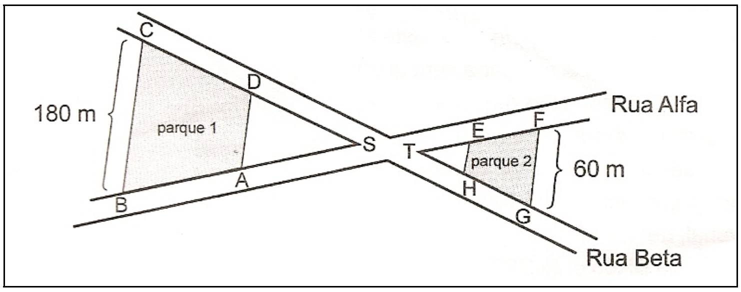
2. Ao final das negociações e desapropriações, chegou-se à conclusão de que as medidas $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$ serão, respectivamente, 15 *m* e 18*m*. Sendo assim, calcule as medidas de:

   a) $\overline{CD}$ b) $\overline{AB}$

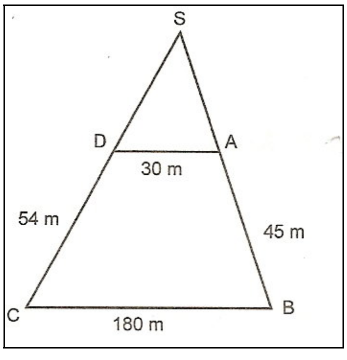
(SÃO PAULO, 2008b, p. 45)

<u>14ª aula, exercício 1</u>

Assinale na figura abaixo as medidas dos lados dos trapézios, obtidas na aula anterior. Observe que foram assinalados na figura dois novos pontos, **S** e **T**, referentes ao cruzamento das ruas.



1. Os triângulos SAD e SBC são semelhantes, isto é, têm ângulos internos correspondentes de mesma medida, e as medidas de lados correspondentes obedecem a uma proporcionalidade. Observe-os desenhados separadamente da figura inicial. O lado $\overline{DA}$ do triângulo SAD é correspondente do lado $\overline{BC}$ do triângulo SBC.



a) Quais são os outros lados correspondentes nos dois triângulos?
b) Qual é a proporção que podemos escrever entre as medidas dos lados dos triângulos SAD e SBC?
c) Calcule as medidas dos lados de cada triângulo e escreva-as na tabela.

Triângulo SAD	$\overline{SA}$		$\overline{DA}$		$\overline{SD}$	
Triângulo SBC	$\overline{SB}$		$\overline{BC}$		$\overline{SC}$	

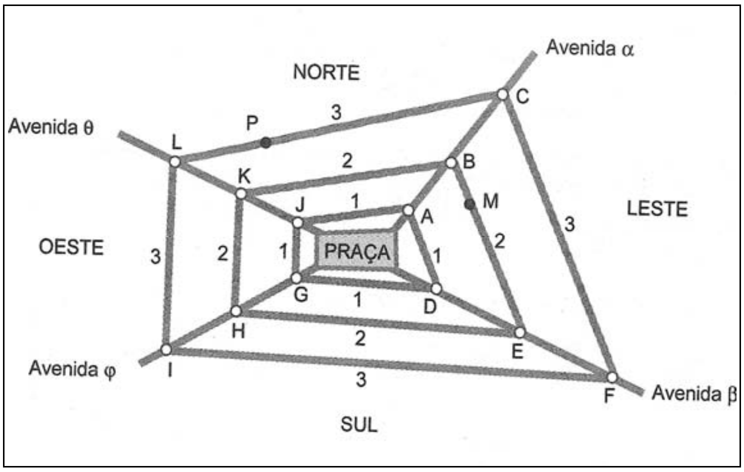
(SÃO PAULO, 2008b, p. 45)

Dessa forma, só foram propostas medidas envolvendo números inteiros, o que faz com que o aluno, ao se deparar com problemas do cotidiano que não apresentam medidas cujos números são inteiros, tenha dificuldade em resolver e/ou pense que os resultados estejam errados, pois escapam de sua experiência escolar. Além disso, perde-se a oportunidade de fazer os alunos trabalharem com os números não inteiros.

Na décima quinta aula trabalha-se com a mediatriz de um segmento, sendo que algumas situações envolvem números inteiros, assim como na décima sexta aula que trata do estudo da bissetriz de um ângulo.

As décimas sétima e oitava aulas se destinam ao Teorema de Tales, e notei que em todos os exercícios predominam os números inteiros, tanto nas medidas dos segmentos dados como na maioria das soluções encontradas.

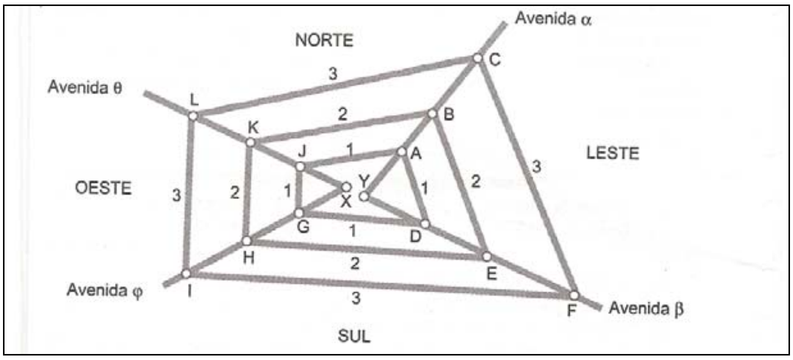
> 17ª aula, exercício 1
>
> De uma praça em formato retangular saem quatro avenidas, α, β, φ e θ, uma de cada vértice do retângulo. Ligando cada par de avenidas há três ruas, 1, 2 e 3, sempre paralelas em cada caso. Os pontos de encontro entre cada par de ruas são nomeados pelas letras do alfabeto, A, B, C, D, etc. Observe na figura os pontos M e P. O ponto M está na rua "2 Leste", enquanto o ponto P está na rua "3 Norte".



> Considere apenas a parte Sul e as seguintes distâncias entre pontos, dadas abaixo, e verifique que é válida a proporção $\frac{GH}{HI}=\frac{DE}{FE}$
>
> GH = 50 m   HI = 40 m   DE = 60 m   FE = 48 m
>
> (SÃO PAULO, 2008b, p. 46)

18ª aula, exercício 1

Se a praça da figura da aula anterior for retirada do mapa, observa-se que as avenidas θ e φ encontram-se no ponto X, enquanto as avenidas α e β encontram-se no ponto Y.



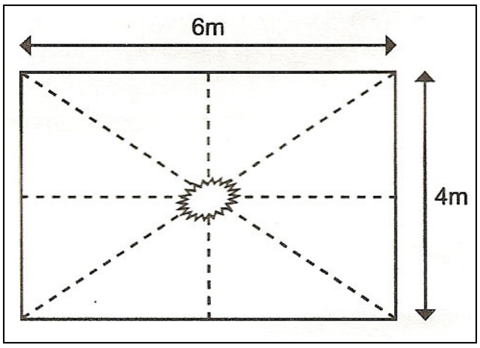
Adotando as medidas fornecidas ou calculadas na aula anterior, e dado que JX = 10 m e AY = 8 m, calcule:
a) GX b) DY

(SÃO PAULO, 2008b, p. 46)

Da décima nona a vigésima primeira aula é trabalhado o significado e contextos do Teorema de Pitágoras. Algumas das situações-problema apresentadas utilizam como medida números inteiros, conforme pode ser atestado a seguir:

19ª e 20ª aulas, exercício 2

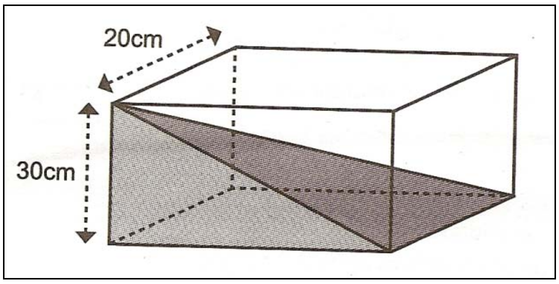
Do centro de uma sala retangular de lados 4m e 6m serão feitas canalizações independentes em linha reta até os quatro cantos da sala e também até o ponto médio de cada um dos lados da sala, usando sempre o mesmo tipo de conduíte (cano plástico flexível). Quantos metros de conduíte serão necessários?



(SÃO PAULO, 2008b, p. 46)

21ª aula, exercício 1

Uma caixa tem a forma de um paralelepípedo com todas as faces retangulares. Suas dimensões são 20 cm, 30 cm e 40 cm. Calcule os comprimentos:



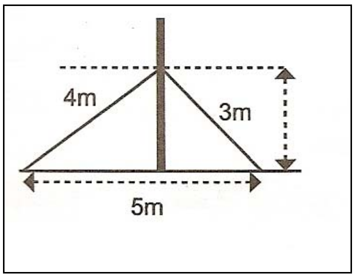
a) da maior das diagonais das faces;
b) da diagonal da caixa.

(SÃO PAULO, 2008b, p. 47)

Nas vigésimas segunda e terceira aulas, trabalha-se com as relações métricas no triângulo retângulo, nas quais também poucas situações envolvendo números inteiros foram abordadas, a não ser nas medidas dos lados das figuras que geralmente são números inteiros:

22ª aula, exercício 3

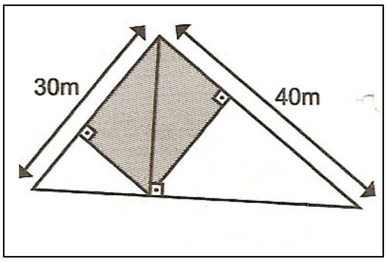
Um painel deve ser mantido na vertical com a ajuda de dois cabos de aço, perfeitamente esticados, de 3 m e 4 m, um de cada lado, como mostra a figura. Os cabos estão situados em um plano vertical e a distância entre os pontos de fixação dos dois cabos de aço no solo é de 5 m. A que altura do solo os cabos devem ser fixados no painel?



(SÃO PAULO, 2008b, p. 47)

23ª aula, exercício 2

Um terreno tem a forma de um triângulo retângulo de catetos 30 m e 40 m. Seu proprietário deseja construir uma casa na região retangular apresentada na figura ao lado, deixando livre o restante da área. Pergunta-se:



a) Qual a área total do terreno?
b) Qual a área da região retangular da construção?

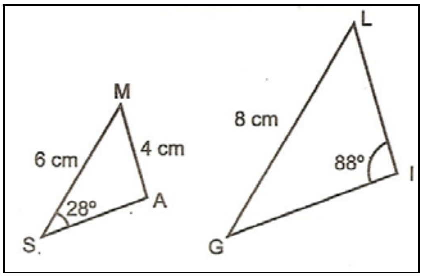
(SÃO PAULO, 2008b, p. 47)

Nas vigésimas quarta e quinta aulas, trabalha-se com ampliação e redução de figuras, isto é, com homotetias, nas quais encontramos referencias aos números inteiros somente nas medidas dos lados das figuras dadas.

<u>24ª e 25ª aulas, exercício 3</u>

O triângulo GIL é uma ampliação do triângulo SAM. Sendo assim, quanto mede:

a) LI
b) SAM
c) SMA
d) LGI
e) GLI

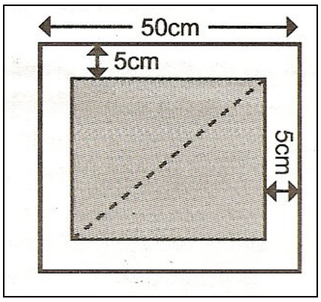


(SÃO PAULO, 2008b, p. 47)

Das 26ª a 28ª aulas, é feito um estudo do perímetro, diagonal e área de um quadrado, que apresenta alguns enunciados com números inteiros, fazendo também uma ponte entre a Geometria e a Álgebra. Seguem duas situações a esse respeito tratadas no material analisado:

<u>26ª aula, exercício 1</u>

Um quadro tem uma moldura quadrada de lado igual a 50 cm em sua parte externa. A largura da moldura é de 5 cm, como mostra a figura abaixo.

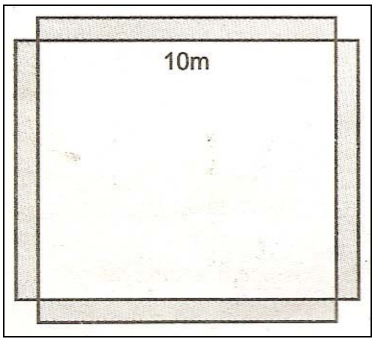


a) Qual o comprimento do lado do quadrado interno que delimita a figura?
b) Qual a diagonal da região ocupada pela pintura?

(SÃO PAULO, 2008b, p. 48)

27ª aula, exercício 1

Um canteiro quadrado tem 10 m de lado. Ele é totalmente gramado e cercado por flores, dispostas em floreiras estreitas, ao longo dos lados do quadrado, como mostra a figura.



Para cuidar do canteiro, um jardineiro cobrou R$ 50,00, sendo R$ 30,00 para aparar a grama e R$ 20,00 para cuidar das floreiras. Quanto ele cobrou para:
a) aparar cada metro quadrado da grama?
b) cuidar de cada metro linear da floreira?

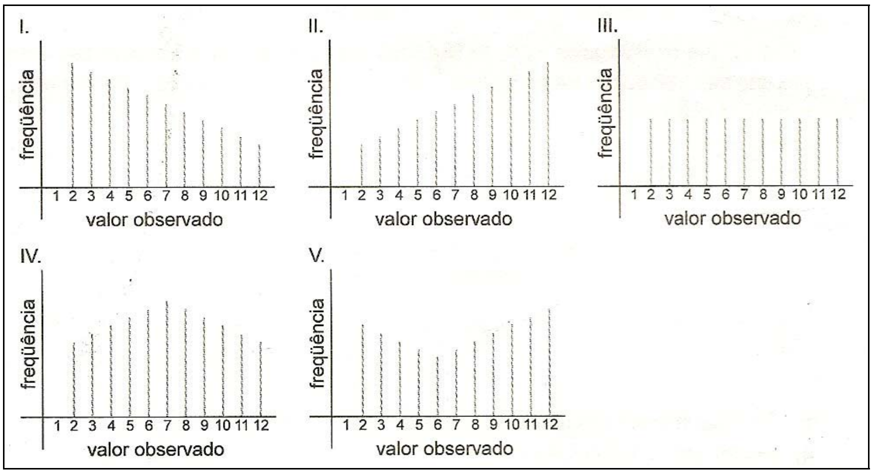
(SÃO PAULO, 2008b, p. 48)

Conforme é possível observar, nas 26ª e 27ª aulas, trabalhou-se praticamente só com medidas envolvendo números inteiros, o que pode ocasionar dificuldade para o aluno ao enfrentar situações do cotidiano que envolvem medidas, na maioria das vezes, não expressas por números inteiros. Dessa forma seria aconselhável que fossem propostas situações de aprendizagem com números reais não inteiros.

As 29ª e 30ª aulas são dedicadas a interpretação de gráficos, sendo que parte das informações contidas neles contem números inteiros.

Na 30ª aula é colocada uma situação interessante: dois dados e sua soma. Como nas faces dos dados encontramos somente valores inteiros, a soma deles também será um número inteiro, sendo este um momento oportuno para retomar as propriedades dos números inteiros. Segue a referida situação-problema:

> <u>30ª aula, exercício 1</u>
>
> A soma obtida no lançamento de dois dados pode ser igual a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ou 12. Lançando-se muitas vezes dois dados e anotando-se o valor da soma, o gráfico de freqüência que representa a distribuição dos valores observados será semelhante aos cinco descritos abaixo. Determine qual desses gráficos pode representar a situação analisada e justifique sua resposta com a construção de uma tabela:



(SÃO PAULO, 2008b, p. 48)

Após a análise dessa parte do material, tenho condições de verificar algumas das hipóteses formuladas na página 42. Acerca do Jornal do Aluno, conjecturei que, este, por propor uma revisão de assuntos do Ensino Fundamental, abordaria vários temas da Teoria Elementar dos Números. Porém, ao analisar os tópicos a serem trabalhados no Jornal do Aluno, verifiquei que nenhum tópico da Teoria Elementar dos Números era citado explicitamente.

Mesmo não aparecendo explicitamente nos tópicos a serem trabalhados no Jornal do Aluno assuntos da Teoria Elementar dos Números, conjecturei que esses seriam abordados em alguns momentos. Dessas conjecturas surgiram três questões, que procuro responder agora, iniciando pelas duas primeiras, por elas estarem imbricadas.

- Os conteúdos do *Jornal do Aluno* que conjecturei favorecerem uma abordagem de assuntos da Teoria Elementar dos Números, realmente abordam esse tema?
- Como são abordados os assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números nos conteúdos que previ serem estes abordados?

Vale retomar aqui as conjecturas feitas a página 42 sobre quais os tópicos do Jornal do Aluno por favorecerem o trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números abordavam esses assuntos: estudo dos números irracionais, fatoração de expressões algébricas, resolução de situações-problema envolvendo equações do 2º grau e na interpretação de gráficos.

O primeiro tópico do Jornal do Aluno, sugerido para ser trabalhado nas 4 primeiras aulas, é o estudo dos números irracionais. Conjecturei que poderia ser feita neste momento uma revisão dos números inteiros e de suas propriedades, para assim iniciar o estudo dos números racionais e irracionais, porém a única menção feita aos números inteiros, é que um número irracional não pode ser escrito na forma de uma fração com numerador e denominador inteiros. No demais são privilegiadas situações envolvendo o trabalho com os números irracionais, em que se trabalha com aproximações de números irracionais por números racionais e aplicações dos números irracionais em problemas geométricos.

Também apresentei a hipótese de que assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números seriam tratados quando do estudo da fatoração de expressões algébricas, pois estas fazem uso do máximo divisor comum (m.d.c.) de números inteiros, e que seria oportuno rever critérios de divisibilidade que auxiliam no cálculo do m.d.c. Pela análise realizada no Jornal do Aluno a respeito deste tópico observei uma menção indireta ao Teorema Fundamental da Aritmética, porém não se trabalhou exercícios sobre este assunto. Observei também que nenhuma menção concernente ao trabalho com o mdc ou com critérios de divisibilidade foi feita.

Conjecturei também encontrar assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números na resolução de problemas envolvendo equações do 2º grau, pois em alguns deles, somente soluções que recaem em números inteiros satisfazem a resolução, e isso poderia ser ressaltado nesta parte do material. Notei realmente, que os coeficientes e a solução das equações e das situações-problema dadas são em sua maioria números inteiros. Acredito ser importante frisar essa questão e propor que sejam apresentadas equações nas quais os coeficientes não sejam números inteiros, equilibrando o trabalho entre a Matemática discreta e a do contínuo.

No trabalho com a interpretação de gráficos constatei que, embora não mencionado no Jornal do Aluno, trabalhou-se implicitamente com grandezas discretas no exercício proposto na aula 30, que trata da soma obtida no lançamento de dois dados, em que se observa que o gráfico é contínuo. Seria um momento fundamental para se trabalhar com as propriedades dos números inteiros e mostrar porque o gráfico não é representado por uma linha contínua e mostrar mais situações do cotidiano em que se trabalha com grandezas discretas.

Passo agora a responder a terceira questão levantada:

- Será que nos conteúdos previstos como não propícios ao trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números estes são abordados?

Não considerei como conteúdos propícios ao trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números no Jornal do Aluno aqueles relacionados à Geometria. As análises realizadas evidenciaram que as medidas das figuras dadas são em sua maioria números inteiros, porém, a abordagem conferida nos exercícios, não valoriza o trabalho com propriedades desses números. Por outro lado as medidas das figuras que em sua maioria são números inteiros, faz com que o aluno, ao se deparar com problemas do cotidiano que apresentam medidas cujos números não são inteiros, tenha dificuldade em resolver e/ou pense que os resultados estejam errados, pois escapam de sua experiência escolar. Além disso, perde-se a oportunidade de fazer os alunos trabalharem com os números não inteiros.

Tenho condições então de responder á questão principal em relação ao material já analisado: **“Quais assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números são abordados, e que abordagem foi dada a esses assuntos, no**

material endereçado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede estadual de ensino paulista?”.

Nenhum assunto dos listados por Resende (2007) foi explorado no material já analisado. No decorrer das atividades propostas nas trinta aulas apresentadas no Jornal do Aluno, as únicas menções explícitas à assuntos da Teoria Elementar dos Números, ocorreram nas 1ª, 3ª e 5ª aulas.

Na 1ª aula há referência a números inteiros na definição de número irracional: “aquele que não pode ser escrito na forma de uma fração de numerador e denominador inteiros”. Na 3ª aula a referencia aparece ao tratar de raiz enésima de um número no trecho que explica “Você sabe que nem toda raiz é um número irracional (raiz cúbica de 8 é o número inteiro 2)...”. Na 5ª aula aparece a afirmação de que “Um número que não seja primo pode ser escrito na forma de um produto de números primos, como nestes casos: 10 = 2.5, 84 = 2.2.3.7, 143 = 11.13. Ao fazermos isso, estamos decompondo o número em seus fatores primos”. Essa última afirmação se refere implicitamente ao Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Convém frisar, porém que nenhum trabalho foi realizado com este teorema, nenhum exercício proposto, somente a afirmação, três exemplos e já se passou para a fatoração de expressões algébricas. Considero que uma maior atenção deveria ser dada a este assunto devido sua importância na Matemática e no tratamento de problemas da matemática discreta, sendo que conceitos importantes da Teoria Elementar dos Números estão relacionados a ele como múltiplos e divisores, critérios de divisibilidade, diferenciação entre números primos e compostos e decomposição em fatores primos.

Implicitamente, nota-se por essa análise, a presença dos seguintes assuntos da Teoria Elementar dos Números: Mínimo Múltiplo Comum (mmc), Máximo Divisor Comum (mdc) e os coeficientes e soluções da maioria das equações do 2º grau, que são números inteiros, bem como as medidas dadas nos tópicos de Geometria, que também são, em sua maioria, números inteiros.

Seria fundamental que um trabalho menos segmentado fosse desenvolvido no decorrer das atividades propostas em um material para o aluno, um trabalho no qual se procurasse facilitar a gestão do professor da tensão entre o discreto e o contínuo.

2. Descrição e Análise da *Proposta Curricular* e dos *Cadernos do Professor*

O exemplar da ***Proposta Curricular*** do Estado de São Paulo para Matemática está organizado em duas partes: A primeira parte traz uma apresentação e um resumo sobre as áreas de Ciências Humanas, Ciências da Natureza, e Linguagem e Códigos e relações com suas Tecnologias, seguidas da relação da Matemática com as áreas do conhecimento. A cópia do sumário se encontra no anexo 4.

Na apresentação da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, é explicado que:

> Este documento básico apresenta os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. O documento aborda algumas das principais características da **sociedade do conhecimento** e das pressões que a contemporaneidade exerce sobre os jovens cidadãos, propondo princípios orientadores para a prática educativa, a fim de que as escolas possam se tornar aptas a preparar seus alunos para esse novo tempo. Priorizando a compreensão da leitura e escrita, esta proposta define a escola como espaço de cultura e articulação de competências e conteúdos disciplinares. (SÃO PAULO, 2008c, p. 8)

É possível afirmar de acordo com essa citação, que a Secretaria da Educação indica sua preocupação de que a escola prepare os alunos para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo e as pressões desse novo tempo, articulando competências e conteúdos disciplinares. A esse respeito considero que o trabalho com a Matemática Discreta no Ensino Médio pode contribuir para que a escola cumpra esse papel, pois, conforme pesquisadores já citados, o desenvolvimento das máquinas digitais, cujo sistema é baseado na qualidade dos números inteiros, permitiu o uso de métodos discretos para modelar, simular e otimizar tempo de produção, distribuição eficiente de insumos entre outras coisas.

A Proposta cita outro documento "**Orientações para a Gestão do Currículo na Escola**"[4], destinado especialmente às unidades escolares e aos dirigentes e gestores que as lideram e apóiam, como supervisores, diretores, professores coordenadores e assistentes técnico-pedagógicos. Sobre este documento é relatado na Proposta Curricular que:

> (...) propõe que a aprendizagem resulte também da coordenação da ação entre as disciplinas, do estímulo à vida cultural das escolas e do fortalecimento de suas relações com a comunidade. Para isso, reforça e propõe orientações e estratégias para a formação continuada dos professores. (SÃO PAULO, 2008c, p. 9)

Como se percebe, neste documento são propostas orientações e estratégias para a formação continuada dos professores, o que me remeteu a Machado (2008), quando essa autora argumenta que o professor só assumirá a importância de gerenciar a tensão entre a matemática contínua e a discreta, se ele próprio perceber e compreender a importância desta última, sendo para isso necessário atuar não só na formação inicial como na formação continuada do professor.

Na apresentação da Proposta Curricular, *afirma-se que ela se completará com um conjunto de documentos dirigidos especialmente aos professores* (p. 9) em referencia aos *Cadernos do Professor*. O texto segue explicando que esses cadernos estão organizados por bimestre e por disciplina, sendo que

> (...) Neles, são apresentadas situações de aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos. Esses conteúdos, habilidades e competências são organizados por série e acompanhados de orientações para a gestão da sala de aula, para a avaliação e a recuperação, bem como de sugestões de métodos e estratégias de trabalho nas aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares. (SÃO PAULO, 2008c, p. 9)

Pode-se afirmar de acordo com essa descrição que os *Cadernos do Professor* têm função de um livro didático, apresentando situações de aprendizagem, conteúdos, habilidades e competências específicas. Assim, de acordo com o que afirma Lajolo (1996) sobre o livro didático, considero que esses

---

[4] Esse documento não será analisado neste trabalho.

cadernos terão forte influência na prática docente dos professores da rede estadual de ensino paulista.

Para melhor compreender o projeto São Paulo Faz Escola é importante apresentar os princípios centrais que orientaram a *Proposta Curricular*:

> [...] a escola que aprende, o currículo como espaço de cultura, as competências como eixo de aprendizagem, a prioridade da competência de leitura e escrita, a articulação das competências para aprender e a contextualização no mundo do trabalho. (SÃO PAULO, 2008c, p. 9)

Não me deterei mais nessa primeira parte da *Proposta Curricular,* pois o que interessa principalmente ao objetivo de minha pesquisa são as comunicações mais específicas sobre a Matemática a ser trabalhada no 1º ano do Ensino Médio.

A respeito da Matemática, na segunda parte da *Proposta Curricular* é explicado que:

> Nesta proposta, a Matemática é apresentada como um sistema simbólico que se articula diretamente com a língua materna, nas formas oral e escrita, bem como, com outras linguagens e recursos de representação da realidade.
>
> [...] a disciplina Matemática é considerada, um meio para o desenvolvimento de competências tais como a capacidade de expressão pessoal, de compreensão de fenômenos, de argumentação consistente, de tomada de decisões conscientes e refletidas, de problematização e enraizamento dos conteúdos estudados em diferentes contextos e de imaginação de situações novas. (SÃO PAULO, 2008c, p. 44)

Assim sugere-se que a disciplina Matemática pode e deve contribuir no desenvolvimento de algumas competências importantes para a cidadania em geral. Considero que a Teoria Elementar dos Números é um lócus privilegiado para o desenvolvimento das competências de compreensão de fenômenos, de argumentação consistente, de tomada de decisões conscientes, de problematização e enraizamento dos conteúdos estudados em diferentes contextos e de imaginação de situações novas.

No final da *Proposta Curricular* é apresentado um quadro de conteúdos por série e por bimestre tanto para as quatro séries finais do Ensino Fundamental quanto para as três séries do Ensino Médio.

É oportuno lembrar que levantei a hipótese de que a *Proposta Curricular* abordaria a questão da necessidade de equilíbrio entre a Matemática discreta e a do contínuo, porém concluo pela descrição e análise desta parte do material que não é feita menção explicita à administração da tensão entre o discreto e o contínuo.

A seguir apresento uma tabela construída com base nos quadros apresentados nas páginas 56 a 59 do exemplar da *Proposta Curricular,* que indica os assuntos a serem tratados nos quatro bimestres de 2008 na 1ª série do Ensino Médio.

TABELA 2: Conteúdos dos Cadernos do Professor do 1º ano.

1ª serie do Ensino Médio	
Bimestre	**Conteúdos**
1º	Números e Sequencias • Conjuntos numéricos. • Regularidades numéricas: seqüências. • Progressões aritméticas e Progressões geométricas.
2º	Funções • Relação entre duas grandezas. • Proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado. • Função de 1º grau. • Função de 2º grau.
3º	Função exponencial e Logarítmica • Crescimento exponencial. • Função exponencial: equações e logarítmicas. • Logaritmo: definição e propriedades. • Função Logarítmica: equações e inequações.
4º	Geometria – Trigonometria • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. • Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos co-senos.

Os conteúdos propostos a serem trabalhados no 1º ano do Ensino Médio me permitiram conjecturar que nos três primeiros bimestres poderiam ser abordados assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números, enquanto que no 4º bimestre, dificilmente haveria possibilidade do trabalho com essa teoria.

No primeiro bimestre imaginei que certamente tratariam dos conjuntos numéricos a partir dos Naturais, Inteiros, Racionais e reais. A abordagem das seqüências obrigatoriamente passa pelos números inteiros para no mínimo estabelecer os enésimos termos das sequências, das progressões aritmética e geométrica. Dessa forma imaginei que logo de início se enfatizaria a importância dos conhecimentos sobre números inteiros.

Nos 2º e 3º bimestres conjecturei que os assuntos da Teoria Elementar dos Números teriam ainda um papel importante no tratamento da tensão entre a Matemática discreta e a do contínuo. Por exemplo, observando os diferentes domínios das funções.

Estas conjecturas serão validadas ou não pelas análises que seguem dos *Cadernos do professor*.

Cadernos do Professor do 1º ano do Ensino Médio

Os cadernos dos quatro bimestres são organizados geralmente da mesma maneira:

- Nas páginas 3 de todos há a mesma carta ao professor assinada pela Secretária da Educação de 2008.
- Nas páginas 4 de todos há um Sumário.
- Nas páginas 5 e 6 todos apresentam o mesmo texto sobre a Proposta Curricular assinado pela Coordenadora Geral da Proposta Curricular.
- Nas páginas 7 de todos é descrita a Ficha do Caderno onde entre outras, constam informações sobre:
  - o número de aulas semanais: 5
  - o número de semanas previstas: 8
  - número de aulas por bimestre: 40 (as mesmas para os 4 bimestres)

- Nas páginas 8 dos 2º, 3º e 4º bimestres aparece o mesmo texto com orientações sobre os cadernos.
- Nas páginas 9 a 10 dos 2º, 3º e 4º bimestres e páginas 8 a 10 do 1º bimestre são dadas orientações sobre os conteúdos do respectivo bimestre.
- A partir da página 11 de cada bimestre são apresentadas as Situações de aprendizagem.
- Entre o tópico anterior e os dois finais que seguem, há diferenças marcantes entre os cadernos, que serão descritas em momento oportuno.
- Em todos os cadernos é apresentado uma tabela com os conteúdos de Matemática por série/bimestre do Ensino Médio, ver anexo 1.
- É interessante notar que em todos os cadernos menos no do 3º bimestre há paginas pautadas em branco para anotações dos professores.

Caderno do Professor do 1º bimestre

Na ficha do 1º caderno consta que o autor foi o pesquisador, doutor em Educação Matemática pela PUC SP: Ruy César PietroPaolo.

Sobre o conteúdo a ser tratado no bimestre constante da parte dedicada as orientações é dada uma importância não usual em livros didáticos para o Ensino Médio, ao tema de seqüências numéricas colocando as progressões aritmética e geométrica como caso particular das sequências:

> O conteúdo básico que servirá como objeto de estudo durante o primeiro bimestre da primeira série é referente ao eixo Números e está subdividido em conjuntos numéricos e sequências numéricas, em particular a progressão aritmética e a geométrica. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 8).

A importância do trabalho com as sequências é ainda mais realçada no seguinte trecho das orientações:

> O estudo das sequências é importante, pois, além da larga aplicação em problemas (em contextos matemáticos e de outras áreas do conhecimento), pode favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que ao identificar regularidades o aluno pode generalizá-las e expressá-las por meio de sentenças algébricas. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 8)

As orientações organizam os conteúdos do bimestre em 8 unidades e comentam cada uma delas.

A seguir comento essas unidades juntamente com as situações de aprendizagem correspondentes. A primeira <u>Situação de Aprendizagem</u>, indicada como A, trata de Sequências: padrões e regularidades e corresponde ás três primeiras unidades.

A unidade 1 segundo as orientações está destinada aos conjuntos numéricos e tem por objetivo

> Retomar as operações e destacar as relações de inclusão entre os conjuntos estudados em séries anteriores, acrescentando-se a este estudo as representações de intervalos de números reais. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 8)

Sobre esse estudo dos conjuntos numéricos, é explicado que:

> Deverá avançar ao longo do bimestre, permeando todo o trabalho com sequências, quando os alunos terão oportunidade de discutir sobre as possibilidades de estabelecer a correspondência biunívoca entre os números naturais não nulos e o conjunto dos números naturais ímpares, ou ainda entre os naturais não nulos e os inteiros (positivos ou negativos). Finalmente, dependendo do interesse e do desenvolvimento da classe, o professor poderá iniciar uma discussão a respeito da correspondência biunívoca entre os números naturais não nulos e os números racionais, auxiliando os alunos na construção de uma idéia inicial da enumerabilidade do conjunto dos números racionais. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 8)

Acerca do trabalho com os conjuntos numéricos, acredito ser esse um momento para propor ao professor explorar a tensão entre o discreto e o contínuo. Esse estudo dos conjuntos numéricos não deve ser feito de forma segmentada, compartimentada, mas procurando articular os diferentes conjuntos numéricos, buscando correspondências possíveis entre eles, ao mesmo tempo respeitando as particularidades de cada conjunto.

A respeito da unidade 2, afirma-se que:

> [...] é dedicada à exploração de situações que envolvem sequências, numéricas ou não, em que se solicita do estudante a identificação de regularidades e a generalização de padrões. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 8)

Conforme Resende (2007) essas idéias de abstrair regularidades e de explorar a generalização de padrões e de relações numéricas citadas nesse trecho têm como campo natural a Teoria Elementar dos Números. Essa pesquisadora afirma que esse tipo de atividade propicia a investigação matemática, oportunizando o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, generalizar, testar e validar suas conjecturas.

Segundo Almeida (2006) os professores entrevistados por ela trabalham com generalização de padrões de maneira esporádica e não incentivam seus alunos a uma formalização algébrica para as generalizações. Por outro lado Perez (2006) mostrou que os alunos, sem nunca ter trabalhado atividades envolvendo a observação de regularidades e a generalização de padrões antes, não só as resolveram como também empregaram várias estratégias de resolução. Esses fatos me permitem dizer que o professor em geral subestima a capacidade do aluno e que esta é a oportunidade desse professor perceber que é possível trabalhar com esse conteúdo e obter bons resultados dos alunos.

Sobre a unidade 3, é descrito que

> [...] há propostas de situações que apresentam sequências definidas por recorrência, ou seja, define-se o primeiro termo a_1 juntamente com uma lei que permite determinar qualquer termo a_{k+1} a partir do termo precedente a_k para $k \geq 1$ e enfatiza-se a obtenção da expressão do termo geral da seqüência. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 9)

Resende (2007) aponta as sequências definidas por recorrência, como tópico integrante da Teoria Elementar dos Números. Espera-se então que neste momento, sejam proporcionadas situações de aprendizagem para que o aluno desenvolva habilidades, como, dado um determinado termo, encontrar o próximo, e assim determinar um termo qualquer da seqüência por meio da recorrência.

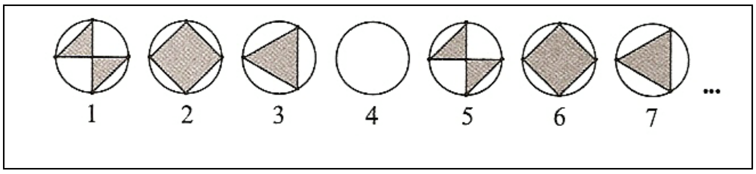
O item da situação de aprendizagem A, inicia com comentários sobre as abordagens de sequências após o que segue com a proposta de 8 questões a serem trabalhadas com os alunos acompanhadas das respostas adequadas.

Os comentários iniciam pela lembrança de que a sequência dos números naturais é construída pelo acréscimo de uma unidade ao termo conhecido, e terminam pela seguinte explicação de que:

> A exploração de seqüências repetitivas, numéricas ou não, favorece a discussão sobre algumas noções trabalhadas anteriormente, como múltiplos, divisores e regras de divisibilidade, e permite uma aproximação da noção de congruência, uma vez que se trabalha com números que divididos por um determinado numero inteiro, apresentam o mesmo resto. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 12)

Dessa forma há referencia explícita aos assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números.

A seguir apresento e analiso as questões referentes à situação de aprendizagem A:

> A1. Observe a seqüência de figuras.
>
> 
>
>
> Supondo que a lei de formação continue a mesma, desenhe as figuras que deverão ocupar as posições 38ª e 149ª nessa seqüência. Justifique.
>
> *A figura que ocupa a posição 38 será a mesma figura da posição 2, pois a divisão de 38 por 4 deixa resto 2; e a figura que ocupa a posição 149 será a mesma da posição 1, visto que a divisão de 149 por 4 deixa resto 1.* (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 12)

Do mesmo modo, as figuras 2, 6, 10, 14 etc., são todas iguais à figura 2, pois os números 2, 6, 10, 14 etc., quando divididos por 4 deixam resto 2, e assim por diante.

Esta questão favorece o trabalho com o algoritmo da divisão, bem como com a observação de regularidades e a generalização de padrões, apontada por

Resende (2007) como de fundamental importância para a investigação matemática.

> A2. Observe a seqüência (1,1,2,3,3,1,1,2,3,3,1,1,2,3,3,1,1,...). Supondo que permaneça a lei de formação dessa seqüência determine o 38º e o 149º termos dessa seqüência.
>
> *O período é de cinco números. Assim, a_{38} = 2, pois a divisão de 38 por 5 deixa resto 3 e o terceiro termo da seqüência é o número 2; a_{140} = 3, pois a divisão de 149 por 5 deixa resto 4 e o quarto termo da seqüência é o número 3*. SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 12)

Esta questão favorece também o trabalho com o algoritmo da divisão e a discussão sobre a importância do resto na determinação dos termos da seqüência permitindo uma aproximação com a idéia de congruência.

> A3. Hoje é quarta-feira. Devo pagar uma dívida exatamente daqui a 90 dias. Em que dia da semana cairá o 90º dia?
>
> *O período é de sete dias. A divisão de 90 por 7 deixa resto 6, portanto o 90º dia será o sexto elemento da seqüência dos dias da semana iniciada na quinta-feira. Logo o 90º dia será terça-feira.* (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 12)

Esta questão, conforme a sugestão de resolução traz implícita a idéia de que todos os meses do ano possuem o mesmo número de dias, o que indica um vício na contextualização, pois essa é irreal. Embora julgue pertinente essa crítica, da forma em que está proposta a questão favorece, além do trabalho com o algoritmo da divisão, a discussão dos múltiplos de 7, e com isso o professor poderia aproveitar para retomar a ideia dos múltiplos de um número e critérios de divisibilidade.

Conforme já relatado neste trabalho, Rama (2005), concluiu que a retomada do conceito de divisibilidade nos livros didáticos do Ensino Médio, é feita em poucos exercícios. O que é possível constatar pelos exercícios apresentados.

Em relação à generalização de sequências e formula do termo geral é dito que o trabalho deve ser ampliado pela proposta de situações que envolvem seqüências, com a solicitação de que:

> [...] os estudantes classifiquem como finitas ou infinitas, construam uma fórmula que represente um elemento qualquer em função de sua posição (n) na seqüência ou uma formula que permita calcular um determinado termo, em função do termo anterior. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 13)

Sugere-se também que se organizem os dados dos problemas em tabelas. Além disso, dão exemplo da seqüência dos números primos como uma sequência cujas características não permitem a elaboração de uma fórmula para o termo geral. Este parece ser mais um momento propício para que o professor retorne ao conceito de números primos, relembrando os alunos do Crivo de Eratóstenes, além de como a partir do algoritmo da divisão, verificar se um determinado número é ou não um número primo.

Retomando o conceito de números primos, o professor contribuiria para atenuar o problema relatado por Nery e Possani (2001) de que após a 5ª série do Ensino Fundamental, esse conceito é praticamente abandonado. O fascínio que os números primos despertam poderia ser utilizado, segundo Nery e Possani, tanto para fixar melhor o conteúdo específico, quanto para despertar no aluno o gosto por problemas desafiadores da Teoria dos Números.

Seguem mais 5 questões:

> A4. Considere as sequências (I), (II) e (III), para responder as questões propostas:
> (I) (0, 3, 6, 9, 12, ...)
> (II) (1, 4, 7, 10, 13, ...)
> (III) (2, 5, 8, 11, 14, ...)
>
> a) Escreva os três termos seguintes de cada uma dessas seqüências.
> *Seqüência I: 15,18 e 21; seqüência II:16, 19 e 22; seqüência III: 17, 20 e 23.*
>
> b) É verdade que o algarismo 8 não aparece em nenhum número da seqüência (II)? Justifique.
> *Não, pois o algarismo 8 aparece no termo 28, que é o 10º termo da seqüência.*
>
> c) É possível que um mesmo número natural apareça em duas dessas sequências? Justifique.
> *Não, pois a 1ª seqüência é formada apenas por números que divididos por 3 deixam resto zero, a 2ª seqüência é formada apenas por números que divididos por 3 deixam resto 1 e a 3ª seqüência é formada apenas por números que divididos por 3 deixam resto 2. Como a divisão por um número natural*

diferente de zero (divisão euclidiana) não pode apresentar dois restos distintos, não é possível que um mesmo número apareça em duas dessas seqüências.

d) O número 1 087 é um termo de qual (is) seqüência (s)?
O número 1 087 é um termo da seqüência II, pois a divisão de 1087 por 3 deixa resto 1.

e) Mostre que o número 137 não pertence à seqüências (II).
A seqüência II é formada apenas por números que divididos por 3 deixam resto 1. Logo o 137 não é termo da seqüência II, pois a divisão de 137 por 3 deixa resto 2.

f) Escreva uma fórmula que determine o termo geral de cada uma dessas seqüências.
I: 3n, para qualquer n natural; II: 3n+1, para qualquer n natural; III: 3n+2, para qualquer n natural.

g) Qualquer que seja o número natural *n*, esse número pertence, necessariamente, a uma dessas seqüências? Justifique.
Sim, pois para qualquer natural dividido por 3 pode haver apenas 3 restos possíveis: 0,1 ou 2. Então qualquer número natural é, necessariamente, elemento de uma (apenas uma) dessas seqüências.

(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 14)

Essa questão confirma a importância dada nesse caderno a um dos assuntos da Teoria Elementar dos Números, a divisibilidade.

A5. Escreva os cinco primeiros termos das seguintes seqüências:

a) $a_1=-3$ e $a_n = (-1)^5 a_{n-1}$ sendo n em N, n≥ 2
-3, 3, -3, 3,-3

b) $a_1= 3$ e $a_n = 3.a_{n-1}$ sendo n em N, n≥ 2
3, 9, 27, 81, 243

(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 15)

A questão acima introduz a notação própria da matemática para a generalização de padrões de forma natural.

A6. Sabe-se que as Olimpíadas, a Copa do Mundo e os Jogos Pan-Americanos ocorrem de quatro em quatro anos. Sabendo que essas competições ocorreram nos anos de 2004, 2006 e 2007, respectivamente, e considerando que continuem a acontecer segundo essa regra por muito tempo, responda:

a) Qual a competição ocorrerá em 2118? E em 2079 e 2017?

As Olimpíadas acontecem em ano em que sua divisão por 4 deixa resto zero, já a Copa acontece em ano em que sua divisão por 4 deixa resto 2 e os Jogos Pan-Americanos acontecem em ano em que sua divisão por 4 deixa resto 3. Assim em 2118 aconteceria a Copa do Mundo (resto 2), em 2079 aconteceriam os Jogos Pan-Americanos (resto 3) e em 2017 não aconteceria nenhuma dessas três competições (resto 1).

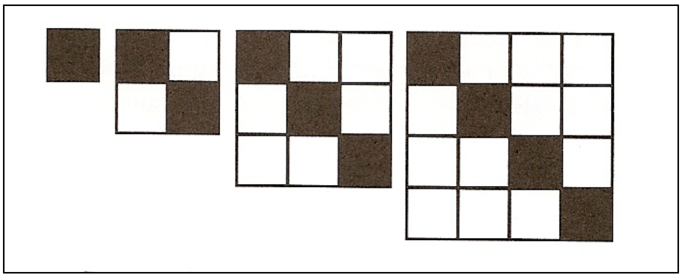
b) Haverá algum ano em que ocorrerá mais de uma dessas três competições? Explique.

Não é possível, pois qualquer número dividido por 4 deixa um, e apenas um, desses restos: zero, 1, 2 ou 3.

(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 15)

Os itens *a* e b deste exercício favorecem o trabalho com o algoritmo da divisão, regras de divisibilidade, bem como ao uso de conjecturas na busca da solução do problema proposto.

A7. Observe a seqüência de figuras:



Responda:

a) Quantos quadradinhos brancos deverá ter a 6ª figura dessa seqüência?

30 quadradinhos brancos pois 6x6 – 6 = 30

b) Escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de quadradinhos brancos, em função da posição n da figura na seqüência. (Sugestão: você pode organizar os dados em uma tabela como a que segue.)

posição da figura na seqüência	número de quadradinhos pretos	número de quadradinhos brancos
1	*1*	*1*
2	*2*	$2^2 - 2$
3	*3*	$3^2 - 3$
4	*4*	$4^2 - 4$
n	n	$n^2 - n = n(n-1)$

c) Quantos quadradinhos brancos deverá ter a 39ª figura dessa seqüência?
$39^2 - 39 = 1482 = 39 \times 38$

(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 15)

A atividade proposta acima favorece também que o aluno faça conjecturas, teste suas conjecturas e as valide.

É sugerido ainda neste caderno do professor que o trabalho com seqüências seja ampliado por meio da proposição de situações que envolvam os números figurados, afirmando serem estes uma rica oportunidade para discussão a respeito das regularidades e da generalização de padrões que segundo Resende (2007) pode contribuir para o desenvolvimento da investigação matemática, além de recair no estudo de funções.

Segue mais uma atividade com números quadrangulares, reiterando perguntas sobre a expressão do termo geral e generalização sobre soma de termos.

Pela análise das atividades propostas nas três primeiras unidades observa-se que tais atividades favorecem a discussão de noções como múltiplos e divisores, regras de divisibilidade, números primos e a aproximação da noção de congruência.

O trabalho com estes tópicos, portanto, pode contribuir para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, bem como do raciocínio e da prova de alguns teoremas sobre números inteiros, formulação de conjecturas e provas por indução.

As unidades 4 e 5 são dedicadas ao estudo das progressões aritméticas: termo geral, interpolação e soma de termos.

Nas orientações sobre os conteúdos do bimestre é explicado que a unidade 4:

> Destina-se ao desenvolvimento de noções relacionadas às Progressões Aritméticas (PA): sua identificação, obtenção de um termo a partir de um termo conhecido, determinação de um termo qualquer por meio de uma fórmula de recorrência, e construção da fórmula do termo geral. Procura-se enfatizar, nas situações de aprendizagem apresentadas, o aspecto funcional da PA, colocando em destaque a associação de todo número inteiro positivo (índice de algum termo da progressão considerada) a um único número real. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 9)

Nota-se, acima descritos, tópicos mencionados por Resende (2007) como integrantes da Teoria Elementar dos Números, entre eles a definição por recorrência (sequências, progressões aritméticas), além de se enfatizar o aspecto funcional da PA, associando um número inteiro positivo a um único número real, favorecendo assim ao trabalho com propriedades e especificidades dos números inteiros.

O tópico mencionado na citação "construção da fórmula do termo geral", remete a pesquisa realizada por Carvalho (2008), membro também do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), cujo título foi "O aluno do Ensino Médio e a criação de uma fórmula para o temo geral de uma Progressão Aritmética". Nas considerações finais, Carvalho aponta que o trabalho com progressões deve compreender a observação desse tipo de sequência e valorizada a descoberta por parte dos alunos de mecanismos ou expressões algébricas que generalizem seus termos, observa-se que o caderno do professor deste 1º bimestre vai ao encontro com o apontado por Carvalho (2008).

Ainda em relação a unidade 4, as orientações afirmam que:

> [...] os termos da seqüência (a_1, a_2,..., a_n) são os elementos do conjunto imagem[5]. Ao se encarar a seqüências como uma função, convém destacar que os únicos pontos do gráfico cartesiano que a representam são (1, a_1), (2, a_2),..., (n, a_n),... (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 9)

Essa observação sobre o gráfico de tal função é oportuna e segue recomendações de diversas pesquisas sobre o tratamento adequado sobre o gráfico de uma função discreta. Este é também um momento privilegiado para o professor tratar da tensão entre o discreto e o continuo.

---

[5] Conjunto imagem da perspectiva do aspecto funcional referido no trecho anterior.

Sobre a unidade 5, é relatado que

> [...] trata do desenvolvimento da fórmula da soma dos termos de uma PA e do trabalho de interpolação de meios aritméticos entre dois números reais dados. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 9)

Essas duas unidades são exploradas na Situação de Aprendizagem B. Antes da apresentação das questões relativas a essa situação de aprendizagem, tece-se considerações sobre a forma que o professor deve agir:

> O professor pode, em principio, definir progressão aritmética e solicitar que os alunos identifiquem, dentre as seqüências já estudadas, aquelas que atendem a definição dada. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 18)

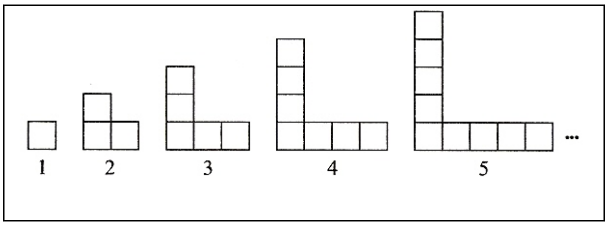
A primeira questão B1. Apresenta a definição de progressão aritmética, PA, seguida do que é razão de uma PA e solicita que:

> [...] indique quais das seqüências que se seguem são progressões aritméticas. Em caso afirmativo determine a razão.
> (I) (2, 5, 8,11, ...)
> (II) (2, 3, 5, 8, ...)
> (III) (7, 3, -1, -5, ...)
> (IV) (2/3, 2/3, 2/3, 2/3, ...)
> (V) (-3/2, -1, -1/2, 0, ...)
> (VI) (6, 2, 2/3, 2/9, ...)
>
> *São PA as seguintes seqüências I (razão: 3), III (razão:-4), IV(razão:0) e V (razão ½)*
>
> (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 18)

É preciso observar que os exemplos de PA foram bem escolhidos, com razões inteiras positivas e negativas e razão não inteira 1/2, e principalmente com razão zero que é um caso no qual geralmente o estudante não considera como PA, porque os termos as sequência não mudam.

A questão B2 dá 4 sequências e solicita a mesma coisa que a B1. Ela parece ter sido incluída mais para que os alunos interpretem seqüências dadas pelo termo geral e outras dadas pelo primeiro termo e pela razão.

> B3) Na figura cada quadradinho é formado por quatro palitos de comprimentos iguais.



a) A seqüência formada pelas quantidades de palitos necessários para a construção das figuras forma uma PA? Justifique.
A seqüência formada pelas quantidades de palitos é sim uma PA, pois cada figura tem seis palitos a mais que a precedente: 4, 10, 16, 22, 28, ...

b) Quantos palitos serão necessários para a construção da 6ª figura? E da 7ª?
28+6 = 34 e 34 + 6 = 40

c) Quantos palitos serão necessários para construir a 78ª figura?
4 + 77 x 6 = 466

d) Escreva uma fórmula que expresse a quantidade de palitos da figura que ocupa a posição n nessa sequência.
$a_n = 4 + (n-1) \times 6 = 6n - 2$

(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 19)

É preciso observar que a sugestão de resolução para o quesito c carece de parênteses, devendo constar: 4+ (77 x 6) = 466. Um professor inadvertido pode copiar a solução sem perceber a falta dos necessários parênteses. Apesar disso, é importante notar que esse tipo de questão favorece o uso da recorrência própria da Teoria Elementar dos Números.

As próximas questões B4, B5, B6 dão a possibilidade para o professor propor e discutir diferentes estratégias utilizando os conhecimentos sobre PA tratados anteriormente.

B4. Sabe-se que o 9º termo de uma PA de razão 4 é 29. Qual é o 20º termo dessa PA?

$a_{20} = 73$.[...]

No comentário que segue para o professor, explica-se que não é necessário encontrar o primeiro termo para se obter o vigésimo, bastando fazer:

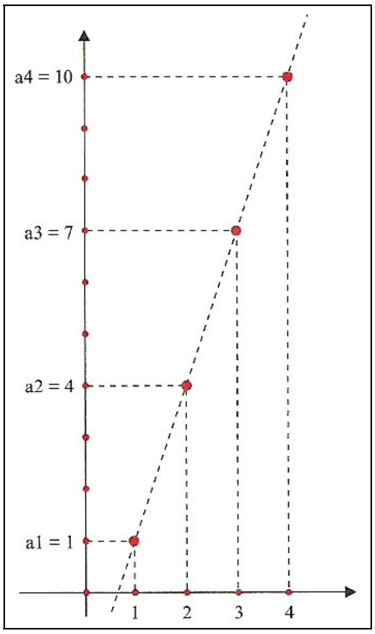
$a_{20} = a_9 + 11 \times 4$. Penso ser oportuna essa recomendação pois alerta o professor para a possibilidade de outras estratégias.

> B5. Sabe-se que a seqüência (8, x, -4, y) é uma progressão aritmética. Determine os valores de x e y.
>
> *Em toda PA, temos a_3-a_2=a_2-a_1 → -4-x =x-8 → x=2 Com o mesmo raciocínio [...] y= -10. Nesse caso, temos (8,2,-4,-10).*
>
> B6. Invente uma progressão aritmética. Separe apenas os termos cuja posição (n) é indicada por um número múltiplo de 6 e forme outra seqüência de números. Essa nova seqüência também é uma progressão aritmética? Em caso afirmativo, determine a razão da PA. Justifique.
>
> *A nova seqüência será uma PA, cuja razão é igual ao produto do número 6 pela razão da PA inventada.*

Sobre o tratamento da progressão aritmética sob o ponto de vista funcional é dito que:

> Ao se obter os termos de uma PA, por meio da lei de formação, utilizando a fórmula do termo geral ou de recorrência, o aluno trabalha intuitivamente, com a noção de função, pois associa cada índice ao termo correspondente. Ou seja, todo número natural que é índice na seqüência está associado a um único número real. A formula relativa à lei de formação da PA é a expressão algébrica que representa a função. Nesse caso, temos uma função $S \rightarrow \mathcal{R}$ $S \subset$ N*.
>
> [...]
> A representação gráfica da função que corresponde a uma PA é um conjunto de pontos que pertencem a uma reta. Todavia o gráfico não é a reta que contém esses pontos. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 20)

Como exemplo disso foi colocada a PA (1, 4, 7, 10, 13,...) e sua representação gráfica:



(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 20)

Assim, o autor do caderno reitera e esclarece o que é tratamento funcional, discriminando o que seria o domínio e o contradomínio da função “PA” e sua representação gráfica enfatizando que a imagem é constituída por pontos do gráfico. O autor ainda esclarece sobre a terminologia adotada na explicação anterior que:

> Essa terminologia somente deverá ser destacada, para o aluno, quando esse assunto for retomado posteriormente nesta série, no momento do estudo da função polinomial do 1º grau. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 20)

O único senão que noto no comentário para o professor é a indicação de que se trata de uma função: $S \rightarrow \mathcal{R}$ $S \subset$ N* . Até que ponto o professor domina essa notação? Qual o significado do símbolo N* para o professor e do símbolo $S \rightarrow \mathcal{R}$?

Passa-se então a parte da situação de aprendizagem voltada para introdução da soma dos termos de uma PA. Os comentários que antecedem as questões relativas a essa parte dão conta da importância de que o professor inicie propondo a soma de um número par de termos de uma PA, seguida da soma de um número impar de termos de uma PA, destacando fatos particulares de cada uma das somas para incentivar a discussão com a classe que:

> [...] permita a compreensão da demonstração da formula da soma dos termos de uma progressão aritmética para qualquer número de termos. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 21)

É pena que não se tenha pensado em deixar o aluno encontrar uma fórmula, as sugestões dadas são muito diretivas, passo a passo. Penso que se tolhe a criatividade do alunos ao se fazer esse caminhar diretamente ao resultado. Talvez o autor do caderno tenha feito isso pensando ser pouco o tempo para essa exploração.

As três primeiras questões dessa parte propõem encontrar a soma de progressões aritméticas:

> B7. Calcule a soma dos termos da progressão (10, 16, 22,..., 70)
> *440* (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 21)
>
> B8. Calcule a soma dos termos da progressão (13, 20, 27,...)

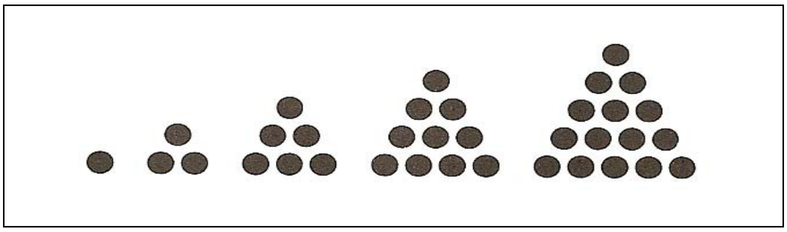
Desde o 21º até o 51º, inclusive.
7998 (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 21)
B9) Calcule a soma dos números inteiros, divisíveis por 23, existentes entre 103 e 850.

Os números inteiros divisíveis por 23, entre 103 e 850, formam a PA de razão 23: (115, 138,..., 828). Utilizando a fórmula do termo geral, obtemos n = 32 e aplicando a fórmula da soma dos termos da PA, obtemos o resultado 15088. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 21)

Com esta atividade, o professor pode aproveitar para retomar o conjunto dos números inteiros, bem como algumas de suas propriedades. Além dos números inteiros, esta atividade favorece a retomada da discussão sobre a divisibilidade.

Outro exemplo de atividade que favorece o uso da recorrência é:

B10) Esta figura apresenta os primeiros elementos de uma sequência de números, chamados de números triangulares:



a) Escreva a seqüência numérica correspondente a esta figura, considerando o número de bolinhas que formam cada triângulo: 1, 3, _, _, _.

b) Que regularidade você observou na construção desses números triangulares?

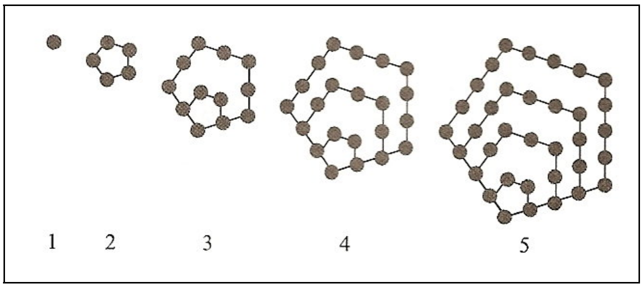
c) Escreva uma fórmula que permita calcular um termo qualquer dessa sequência, utilizando a recorrência, ou seja, definindo um termo a partir de seu precedente.

d) Construa uma fórmula que calcule um termo qualquer dessa sequência, sem necessariamente recorrer ao termo anterior. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 20-21)

Dentre as sugestões para a abordagem desse exercício, explica-se que os alunos podem perceber que um termo qualquer pode ser expresso por uma fórmula de recorrência, também podem organizar os dados em tabela, o termo geral pode ser obtido pela fórmula da soma dos termos da sequência de números reais... Sugere-se inclusive que o professor incentive os alunos a descobrir outras propriedades interessantes dos números triangulares. Isto incentivaria certamente a criatividade do aluno, comprovando que a Teoria Elementar dos Números é um lócus privilegiado para o desenvolvimento da criatividade, do fazer conjecturas, etc.

A última questão dessa situação de aprendizagem B é a B11, que segue:

> B11. A seguir, estão os primeiros elementos de uma seqüência de figuras que representam os chamados números pentagonais.



> a) Quantas bolinhas deve ter a 6ª figura dessa seqüência? E a 7ª?
> *51 e 70*
>
> b) Observe as regularidades que existem no processo de construção da figura 2 a partir da figura 1, no processo de construção da figura 3 a partir da figura 2, e assim por diante. Organize os dados na tabela abaixo e em seguida procure construir uma fórmula que permita determinar a quantidade de bolinhas da figura n nessa seqüência

posição da figura na seqüência	cálculo	número de bolinhas
1		
2		
3		

Entre as sugestões de como o professor abordar essa pergunta b, está a valorização da tabela para auxiliar a compreensão e respectiva resolução da questão além de sugestões sobre como visualizar o problema, como notar o que interessa para a resolução do problema.

Já as unidades 6, 7 tratam do estudo das progressões geométricas (PG) e são exploradas nas questões da Situação de Aprendizagem C. Na unidade 6 enfoca-se a fórmula do termo geral de uma PG:

> São discutidas situações que envolvem progressões geométricas (PG): sua identificação, cálculo de um termo da PG a partir de um termo dado, determinação de um termo qualquer da PG por meio da fórmula de recorrência e construção da fórmula do termo geral. Enfatiza-se também o aspecto funcional da PG, dando destaque à associação de todo número inteiro positivo (índice de algum termo da progressão considerada) a um único número real (termo da PG) (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 9)

Nos comentários iniciais da Situação de Aprendizagem C, observa-se que o estudo das progressões geométricas, PG, deveria seguir os mesmos passos: definição de PG e razão de uma PG, levando o aluno à construção da fórmula do termo geral dada por $a_n = a_1q^{n-1}$. É preciso observar que infelizmente na explanação anterior não se tomou o devido cuidado com a digitação e aparece: $a_3=a_1q_1$ e $a_4= a_1q_3$ ao invés de $a_3=a_1q^2$ e $a_4= a_1q^3$.

Alerta-se o professor para que:

> [...] explore o seguinte fato: cada termo de uma PG, a partir do segundo, é a média geométrica entre seu antecessor e seu sucessor. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 25)

Além disso, explica-se de maneira análoga a explicada quando das PA, que a formula que indica a lei de formação de uma PG tem um aspecto funcional, não se aconselhando no entanto que nesse momento haja a introdução dos nomes adequados à função, que deverá ser explorada quando do estudo da função exponencial.

Seguem 7 questões relativas a unidade 6 :

> C1. Considere que: uma progressão geométrica é uma seqüência a_1, a_2,a_3,... em que cada a_n , a partir do segundo , é obtido pela multiplicação de seu antecedente a^{n-1} por uma constante diferente de zero. De acordo com essa definição, quais destas seqüências são progressões geométricas? Justifique.
> (I) (1, 3, 9, 27,...);
> (II) (1, 2, 6, 24,...);
> (III) (36,12, 4/3,...;
> (IV) (1, -2, 4, -8,...);
> (IV) (3, 8/3, 7/3, 2,...)
> (V) $(\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2}, 4\ ...)$

São PG: (I) de razão 3; (III) de 1/3 (IV) de razão -2;(VI) de $(\sqrt{2},$
(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 25,26)

Esta questão apresenta algumas incorreções como: a de apresentar a terceira sequência sem o ultimo parênteses, a de indicar duas PG com o mesmo número de item, o IV, e a sexta PG como item V. Além disso, nas respostas sugeridas aos professores coloca-se que a terceira sequência é também uma PG de razão 1/3, no entanto, o que não se verifica, pois do 1º termo para o segundo multiplicou-se por 1/3, porém do 2º para o 3º termo multiplicou-se por 1/9.

A seleção das sequências é interessante fazendo o aluno perceber que a razão nem sempre é um número inteiro ou racional podendo ser um real não racional. Neste último caso propiciando ao professor ocasião de gerir a tensão entre a Matemática discreta e a do contínuo.

C2. Considere as seqüências:

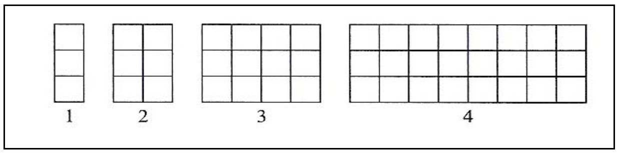
(I) $a_n = 3n+1 \quad n \in N, n \geq 1$
(II) $a_n = 3n^2-1 \quad n \in N, n \geq 1$
(III) $a_n = 3n$
(IV) $a_1 = 3 \quad n \in N, n \geq 2$
(V) $a_1 = 3 \quad n \in N, n \geq 2$

Analise cada uma dessas seqüências e diga se se trata, ou não, de uma PG. Em caso afirmativo, determine a razão. Alguma delas é PA? Qual(is)?

(IV) é PG de razão 2. São PA: (I) de razão 3, (III) de razão 3 e (V) de razão 2.

Esta é mais uma questão que apresenta problema tanto no enunciado quanto nas sugestões aos professores. As sequências IV e V são iguais e o que deveria ser a_n aparece como a_1 e faz com que os itens iguais não tenham sentido. Nas respostas dadas, dever-se-ia ter colocado que para dizer que a seqüência II não é PG basta verificar que o primeiro termo da sequência é 2 e o segundo é 11 e o terceiro é 26, e como $a_2 = a_1 \times q$, q = 5,5 e então a_3 deveria ser $a_3 = 11 \times 5{,}5 = 60{,}5$ e não 26...

C3) Observe a sequência de figuras e responda às questões propostas.



a) Quantos quadradinhos terá a 5ª figura dessa seqüência? E a 6ª figura?
5ª figura: 48 quadradinhos e 6ª figura: 96 quadradinhos.

b) Associe a essa sequência uma outra seqüência que indique o número de quadradinhos de cada figura. Essa seqüência é uma PG? Justifique.

c) Construa uma fórmula que possa ser utilizada para determinar um termo qualquer dessa sequência.
(3, 6, 12, 24,...) é PG, pois cada termo na obtido a partir da multiplicação do termo anterior a_{n-1} *por 2,* $a_n=3.2^{n-1}$ (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 26)

Segue uma sugestão de tratar os dados desse problema pela construção da seguinte tabela:

posição de um termo da seqüência	cálculo	número de bolinhas
1	*3*	*3*
2	$3.2=3.2^1$	*6*
3		
...		
n	$(a_n-1).2 = 3.2^{n-1}$	$a_n=(a_n-1).2 = 3.2^{n-1}$

No caso desta questão, que trata de uma sequência de figuras compostas por bolinhas, no contexto da Matemática discreta, o aluno a associará a uma sequência de números inteiros, decompondo esses números em números adequados para se perceber a fórmula do termo geral. Mais uma vez conhecimentos da Teoria Elementar dos Números se fazem presentes.

C4. Determine o oitavo termo de cada uma das progressões geométricas:
(I) (1,3,9,27,...) $a_8= 2187$
(II) (8, 4, 2, 1/2 ... $a_8= 1/(16)$

(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 276)

C5. Determinar o 12º termo de uma PG de razão 2, sabendo que o quinto termo dessa sequencia é 4. $a_{12}= 512$
(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 26)

C7. Dada uma PG (½, x, 32, y) determine os valores de x e y.

Em toda PG, cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica do antecessor e do sucessor. Neste caso $x = \sqrt{\frac{1}{2}.32} = 4$. *Por outro lado, pela definição de PG,* $\frac{y}{32} = \frac{32}{x} \Rightarrow \frac{y}{32} = \frac{32}{4} \Rightarrow y = 256$.

Embora as três questões C4, C5 e C7 sejam descontextualizadas cada uma aborda a determinação de termos de forma diferente o que é interessante. Há um erro de digitação na C4, pois é omitido o último parênteses da sequência.

C6. Uma bola é lançada de uma altura de 18 metros e seu impacto com o solo provoca saltos sucessivos, de tal forma que, em cada salto, a altura que ela atinge é igual a 80% da altura alcançada no salto anterior. Que altura será alcançada pela bola quando ocorrer o quinto salto? E o décimo salto? (Use a calculadora).

5º salto: altura ≅ 5,898 m e 10º salto: altura ≅ 1,933m

(SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 26)

Esta questão é muito interessante, pois além de contextualizar uma PG, obriga o aluno a refletir para perceber que o 1º salto não é 18, mas sim 80% de 18 = 14,4. Sugere ainda o uso da calculadora que é em geral ignorada por professores conforme algumas pesquisas. É uma questão que propõe um tratamento conjunto de números inteiros, $a_1 = 1$ (1º salto), $a_2 = 2$ (2º salto) e assim por diante, de porcentagem que poderá ser transformada em uma fração 8/10 ou 4/5 ou em número decimal 0.8 que é a razão e os resultados na calculadora aparecerão arredondados. É uma questão propícia para que o professor explicite e recorde vários assuntos que já devem ter sido tratados em anos anteriores do Ensino Fundamental e na qual há oportunidade para que ele gerencie a tensão entre o discreto e o contínuo pois pode levantar a questão se há alguma metragem que seja um número real não racional, etc.

As próximas duas questões se referem à soma dos termos de uma PG. A sugestão para a abordagem do professor é de que ele proponha uma situação que envolva a soma dos termos de uma sequência para discussão dos alunos e depois discuta a demonstração da fórmula dos termos de uma PG.

> C8. Considere a PG (1, 2, 4, 8,...). Calcule a soma dos 20 primeiros termos dessa PG, deixando indicada a potencia.
>
> $S_{20} = 1.\dfrac{(2^{20}-1)}{2-1} \rightarrow S_{20} = 2^{20} - 1$ (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 28)
>
> C9)Resolva a equação 2+4+8+...+x=510, sabendo que as parcelas do 1º membro da equação estão em PG.
>
> *A razão da PG é 2. Portanto,*
>
> $2\dfrac{(2^n-1)}{2-1} = 510 \Leftrightarrow 2^n - 1 = 510 \div 2 \Leftrightarrow 2^n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$
>
> *Logo* $x = a_8 = 2.2^{8-1} \rightarrow x = 256$. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 28)

Esta atividade favorece a retomada sobre a decomposição de um dado número em fatores primos, e consequentemente o trabalho com números primos. Além disso, beneficia também a retomada das propriedades da potenciação, além da interligação com o estudo de funções com domínio no conjunto dos números inteiros.

A unidade 8 é dedicada a proposição de novos problemas sobre PG, voltados ao limite da soma de uma PG infinita. A Situação de aprendizagem D é toda dedicada a essa unidade.

De inicio é dito que o trabalho com PG infinita propicia entre outras coisas tratar com o problema da obtenção da geratriz de uma dízima.

São propostas 5 questões.

> D1. O triângulo ABC da figura é eqüilátero de lado 1. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos o segundo triângulo PQR. Unindo os pontos médios do triângulo PQR, obtemos o terceiro triângulo STU, e assim sucessivamente. Determine a soma dos perímetros dos infinitos triângulos construídos por esse processo. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 29)

Segue no 1º caderno o desenho dos 3 primeiros triângulos e sugestão de abordagem para o professor. Dentre as sugestões é dito para o professor solicitar que os alunos façam conjecturas sobre o que acontece com a soma, e terminam dizendo:

> [...] quando temos uma PG infinita cuja razão é um número q tal que $-1<q<1$, podemos utilizar a $S_n = a_1/(1-q)$ visto que na fórmula $S_n = (1-q^n)/(1-q)$ o valor de q_n tende a zero quando n tende ao infinito.
>
> D2. Resolva a equação a seguir em que o primeiro termo da igualdade é o limite da soma dos termos de uma PG: $\frac{x}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x}{32}+...=18$
>
> $\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{1}{4}}=18 \rightarrow x=27$ (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 31)

Segue quadro com os dizeres:

> O desenvolvimento das situações de aprendizagem anteriores (A, B e C) possibilita aos alunos retomar algumas propriedades relativas aos conjuntos numéricos e, em especial, aos números naturais. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 31)

O que confirma as possibilidades para os professores explorarem assuntos da Teoria Elementar dos Números. O quadro prossegue reiterando que:

> Para o desenvolvimento desta situação de aprendizagem, utiliza-se o limite da soma dos termos de uma PG infinita para a obtenção da geratriz de uma dizima periódica. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 31)

Segue a questão D3 que solicita a determinação da geratriz de uma dízima (1,777...). A D4 e a D5 tratam de problemas contextualizados.

> D4. Suponha que a população de umaq cidade tenha uma taxa de crescimento constante e igual a 20% ao ano. No fim do ano de 2007 a população era de 50000 habitantes.
> a) Calcule a população de cada um dos próximos quatro anos e escreva os resultados obtidos em forma de seqüência.
> b) A seqüência obtida é uma PG? Em caso afirmativo, qual é a razão?
> c) Encontrar uma formula que permita calcular a população dessa cidade daqui a n anos contados a parti de 2007.
>
> D5. Suponha que o valor de um automóvel diminua a uma taxa constante de 10% ao ano. Hoje o valor desse automóvel é R$ 20000,00.
> a) Calcule o valor desse automóvel daqui a quatro anos

> b) Encontre uma formula que permita calcular o preço desse automóvel daqui a n anos.
> (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 31)

O caderno finaliza com Considerações sobre a Avaliação após o que há uma informação sobre dois materiais disponíveis sobre o trabalho com sequências em sala de aula.

As Considerações sobre a avaliação trazem a expectativa de aprendizagem do aluno nesse 1º bimestre:

> [...] espera-se que o aluno, ao final do bimestre obtenha termos de uma seqüência a partir da expressão de seu termo geral e determine essa expressão a partir de seus termos. Além disso, o aluno deverá classificar uma progressão (aritmética ou geométrica), utilizar a fórmula do termo geral e calcular a soma dos termos de uma progressão em situações diversas. Em relação às progressões geométricas espera-se também que o aluno calcule o limite da soma de uma PG infinita. [...] Os instrumentos de avaliação devem também contemplar as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não foram explícitos nas avaliações escritas. (SÃO PAULO, 2008d, 1º bim., p. 33)

Embora as expectativas descritas sejam possíveis de ser avaliadas na forma tradicional escrita, a observação final para que sejam levadas em conta as explicações, justificativas e argumentações orais do aluno, indica a importância dada pelo autor á forma de pensar, raciocinar em Matemática, valorizando o que é propiciado principalmente pelo estudo da Teoria Elementar dos Números.

Considerações sobre o 1º caderno

No capítulo 3 conjecturei que os conteúdos propostos para o 1º bimestre abordariam assuntos da Teoria Elementar dos Números, o que se confirmou pela análise realizada. Foram utilizados conhecimentos sobre os Números Inteiros e suas operações, o uso de recorrência, a divisibilidade, algoritmo da divisão, máximo divisor comum, número primo, múltiplos e divisores de um determinado número, decomposição em fatores primos critérios de divisibilidade. Os assuntos desenvolvidos como sequências, e progressões aritmética e geométrica são próprios da área de Teoria Elementar dos Números embora hajam interseções com outros domínios da Matemática.

Os conteúdos foram tratados tanto por exercícios de aplicação como por meio de problemas contextualizados. As questões propostas favorecem o trabalho com a observação de regularidades e a generalização de padrões, o uso de conjecturas, do teste e validação dessas conjecturas e do uso da recorrência, contribuindo assim no desenvolvimento do fazer matemático.

Vale ressaltar que as sugestões para avaliação favorecem a valorização de conjecturas e da criatividade, propiciadas principalmente por se tratar de assuntos relativos a Teoria Elementar dos Números.

Caderno do Professor do 2º Bimestre

Na ficha do caderno consta que este foi elaborado pela equipe de Matemática coordenada pelo pesquisador, doutor em Educação pela USP: Nilson José Machado.

Sobre o conteúdo a ser tratado neste bimestre constante da parte dedicada as orientações é enfatizado que:

> Os temas centrais que serão estudados neste bimestre são as funções polinomiais de 1º e 2º graus. Os conteúdos elementares que deverão ser abordados são: relação entre duas grandezas; proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado; função de 1º e 2º graus. Apresentaremos neste texto algumas sugestões para uma abordagem significativa dessas funções. (SÃO PAULO, 2008d, 2º bim., p. 9)

A equipe de Matemática elaboradora do 2º caderno espera acerca do trabalho com os temas a serem tratados neste bimestre que:

> (...) os alunos compreendam algumas propriedades das funções, como reconhecer o gráfico de uma função do 1º grau como uma reta e o coeficiente angular como uma taxa de variação e como a inclinação da reta; reconhecer e diferenciar as proporcionalidades de grandezas direta e inversamente proporcionais e suas respectivas constantes de proporcionalidade; saber que a representação gráfica de uma função de 2º grau é uma parábola e compreender as translações que ocorrem nos gráficos dessas funções quando se variam os coeficientes na representação algébrica; saber calcular máximos e mínimos dessas funções e

> resolver situações-problema que envolvam funções polinomiais de 1º e 2º graus. Essas são algumas habilidades específicas que deverão ser contempladas ao final deste bimestre. (SÃO PAULO, 2008d, 2º bim., p. 10)

Os conteúdos a serem trabalhados neste bimestre estão organizados em oito unidades, segue uma tabela relatando os conteúdos a serem trabalhados em cada unidade:

TABELA 3: Conteúdos do 2º caderno

1ª serie do Ensino Médio	
Unidades	**Conteúdos**
1	• Relação entre duas grandezas.
2	• Proporcionalidades: direta e inversa.
3	• Função polinomial de 1º grau: representação gráfica.
4	• Coeficiente angular: crescimento, decrescimento e taxa de variação.
5	• Função polinomial de 2º grau: representação gráfica.
6	• Proporcionalidade direta com o quadrado.
7	• Estudo de máximos e mínimos.
8	• Problemas de modelagem envolvendo funções de 1º e 2º graus.

O trabalho com as oito unidades é dividido em quatro situações de aprendizagem, sendo que no início de cada uma, é colocado o tempo previsto para aplicação, conteúdos e temas a serem abordados, competências e habilidades a serem desenvolvidas e estratégias.

Seguem algumas atividades propostas neste caderno:

> Atividade 2 – Compreendendo a representação gráfica de uma função polinomial do 1º grau.
>
> a) Observe as tabelas abaixo e represente os pontos de cada uma delas em um plano cartesiano. Em seguida indique quais as

tabelas onde os quatro pontos estão alinhados. (Ligar os pontos no plano cartesiano).

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

tabela 1

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16

tabela 2

x	y
1	2
2	5
3	9
4	10

tabela 3

x	y
1	10
2	7
3	4
4	1

tabela 4

Tabelas 1 e 4.

c) Observe a tabela abaixo. Se representarmos esses pontos em um gráfico e os ligarmos por meio de segmentos de retas, em que parte do gráfico a inclinação será maior (responder sem construir o gráfico)? Justifique sua resposta. (SÃO PAULO, 2008d, 2º bim., p. 13)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	16	20	24

Espera-se que os alunos calculem as taxas de variação nos diversos intervalos, notando que a taxa é constante entre 1 e 3, valendo 2 nesse intervalo; a taxa é igual a 10 no intervalo entre 3 e 4; e a taxa é igual a 4 no intervalo de 4 a 6. Logo a maior taxa ocorre no intervalo de 3 a 4.

d) Considere as tabelas propostas no item (a) e encontre uma expressão matemática que represente cada uma delas. Por exemplo, se a tabela fosse composta da seguinte forma:

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

A expressão matemática $y=2x$ pode representar os pontos desta tabela, já que, para cada valor de *x*, temos como correspondente em *y* o dobro de *x*.

Tabela 1: y = 2x+1; Tabela 2: y = x²; Tabela 3: não é possível representar com uma única sentença; Tabela 4: y = -3x+13.

e) Considere as seguintes funções definidas de *R* em *R*, preencha as tabelas abaixo e construa a representação de cada uma em um mesmo plano cartesiano, em seguida compare a Tabela 1 com a 2 e a tabela 3 com a 4 e verifique se há alteração na taxa de variação e na representação gráfica, justificando sua resposta. (SÃO PAULO, 2008d, 2º bim., p. 14)

x	y = 5x
1	
2	
3	
4	

tabela 1

x	y = 5x + 2
1	
2	
3	
4	

tabela 2

x	y = 2x
1	
2	
3	
4	

tabela 3

x	y = 2x + 3
1	
2	
3	
4	

tabela 4

A taxa de variação é a mesma nas tabelas 1 e 2 e os gráficos dessas funções são retas paralelas não coincidentes que cortam os eixos das ordenadas em pontos distintos de coordenadas. O mesmo ocorre com as Tabelas 3 e 4, que correspondem a retas com a mesma inclinação, o número 2. Pode-se afirmar também que a inclinação das retas das Tabelas 1 e 2 é maior que os das tabelas 3 e 4. Tabelas 3 e 4.

Atividade 2 – Construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos das seguintes funções:

$a)\ f(x) = x^2$

$b)\ f(x)=2x^2$

$c)\ f(x)=10x^2$

$d)\ f(x) = \frac{1}{10}x^2$

(SÃO PAULO, 2008d, 2º bim., p. 21)

Atividade 4 – Construa o gráfico das seguintes funções e indique as coordenadas do vértice de cada uma delas. Em seguida, compare a representação gráfica dessas funções com o gráfico da função $f(x) = x^2$ e responda quais são as transformações ocorridas quando somamos uma constante a essa função.

$a)\ f(x)=x^2+1$

$b)\ f(x)=x^2+3$

$c)\ f(x)=x^2-1$

$d)\ f(x)=x^2-3$

(SÃO PAULO, 2008d, 2º bim., p. 23)

Atividade 6 – Em determinado país ocorreu uma infecção causada por certo tipo de vírus. Após várias pesquisas desenvolvidas por

> médicos especialistas em diferentes laboratórios, chegou-se a uma conclusão preliminar de que a disseminação de tal vírus podia ser modelada pela função $N(t) = -20t^2 + 400t$, para $0 \leq t \leq 10$, onde *N* é o número máximo de pessoas infectadas (em milhares) e *t* é o tempo em semanas.
>
> Em que momento haverá um número máximo de pessoas infectadas? Qual é o número máximo de pessoas infectadas? (SÃO PAULO, 2008d, 2º bim., p. 28)

Após as quatro situações de aprendizagem propostas apresenta-se algumas sugestões de materiais sobre os conteúdos do bimestre que poderão ser consultados pelo professor para complementar as Situações de aprendizagem sugeridas no presente Caderno. E por fim são tecidas as considerações sobre a avaliação final.

Segue agora uma tabela com a quantidade de atividades propostas e quantas destas favorecem o trabalho com assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números.

TABELA 4: Análise quantitativa – 2º Caderno

Situação de Aprendizagem	Quantidade de exercícios	Exerc. que propiciam o trabalho com TEN
1	8	-
2	7	-
3	6	-
4	4	-
Total	**25**	-

Considerações sobre o 2º Caderno

Pela observação dos tópicos a serem trabalhados no 2º bimestre levantei a hipótese destes favorecerem ao trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números, porém pela análise das atividades propostas no caderno do professor deste bimestre verifica-se que os coeficientes das funções dadas são, em sua maioria, números inteiros, mas o enfoque dado a esse estudo privilegia a Matemática do contínuo.

Enfocar apenas à Matemática do Contínuo no estudo de funções pode ocasionar sérios problemas no processo de aprendizagem, como o observado por

Lopes Junior (2005). Em sua dissertação de mestrado, esse autor investigou a compreensão do conceito de função de 1º grau, aplicando uma sequência didática a alunos do Ensino Médio. O autor constatou que os alunos do Ensino Médio pesquisados não distinguem e não compreendem quando a variável assume valor discreto ou contínuo, em questões envolvendo soluções com números inteiros.

Outra pesquisa neste mesmo sentido foi a de Silva (2007) que analisou em cinco livros didáticos qual a relação feita nestes na passagem do discreto para o contínuo. A pesquisa mostrou que, na maioria dos livros analisados, a relação discreto/contínuo não é explicitada satisfatoriamente.

O professor, ao trabalhar com os esboços dos gráficos propostos neste caderno, poderia refletir com os alunos o que aconteceria com o gráfico se as funções dadas nas atividades do caderno desse bimestre com domínio e contradomínio real, fossem, por exemplo, de domínio e contradomínio inteiro. Poderia propor também algumas situações-problema e perguntar aos alunos o sugerido por Silva (2007): “Faz sentido unir os pontos desse gráfico?” E assim contribuir para um ensino em que o discreto e o contínuo caminham juntos, conforme sugeriu Machado (2008).

É fundamental também que o professor destaque que, embora se trabalhe com o conjunto dos números reais no decorrer deste caderno, existem situações em que as soluções para as situações–problema propostas não fazem sentido dentro deste conjunto numérico, como, por exemplo, a atividade 6 da página 28, onde procura-se determinar dada uma função, quantas pessoas infectadas após certo período de tempo. Nota-se que não faz sentido respostas como: 20,3 pessoas serão infectadas por exemplo.

Caderno do Professor do 3º bimestre

Na ficha do caderno consta que este foi elaborado pela equipe de Matemática coordenada pelo pesquisador, doutor em Educação pela USP: Nilson José Machado.

Os conteúdos a serem trabalhados neste bimestre estão organizados em oito unidades, sendo estes:

TABELA 5: Conteúdos do 3º Caderno.

1ª serie do Ensino Médio	
Unidades	**Conteúdos**
1	• Consolidação da idéia de potência – significado e operações com expoentes inteiros, racionais e reais.
2	• A função exponencial – crescimento, decrescimento e gráficos.
3	• A idéia de logaritmo – uma idéia brilhante do século XVII cada vez mais importante no século XXI.
4	• Propriedades dos logaritmos – logaritmos em diferentes bases.
5	• Logaritmos em diferentes contextos: acidez, escala Richter e decibéis.
6	• As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica.
7	• Problemas envolvendo expoentes e logaritmos em diferentes contextos – equações e inequações.
8	• Uma aplicação importante: o uso de gráficos com escala logarítmica.

As atividades no 3º Caderno foram distribuídas em quatro situações de aprendizagem. No início de cada situação de aprendizagem é relatado o objetivo da aplicação da situação, o tempo previsto para esta aplicação, os conteúdos a serem trabalhados, as competências e habilidades a serem desenvolvidas e as estratégias.

O caderno do professor deste bimestre é dedicado ao estudo das funções exponencial e logarítmica, e são citadas algumas aplicações deste estudo, como no crescimento de uma cultura de bactérias, na acidez de uma substância, nos terremotos, no pH de uma substância, entre outras.

Sugere-se, neste caderno do professor, que seja feita uma revisão dos conhecimentos sobre potências, já apresentados no Ensino Fundamental. Partindo-se de potências com expoente natural até potências com expoente real vai se retomando o estudo de potências. Lembrando que o tópico, **potência em N**, faz parte dos mencionados por Resende (2007) como tópico da Teoria Elementar dos Números.

É de fundamental importância que a retomada do estudo da potenciação seja bem estruturada e significativa, pois pela prática docente percebe-se que muitos alunos tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio cometem erros ao calcularem potências, o que interfere também no estudo da função exponencial e logarítmica, além de outros tópicos da Matemática.

Esta observação está de acordo com o que Feltes (2007) tratou em sua dissertação. A autora teve por objetivo em sua dissertação, analisar erros cometidos por alunos do Ensino Fundamental e Médio, ao resolverem testes sobre potenciação, radiciação e equações exponenciais. A investigação foi desenvolvida em sétimas e oitavas séries do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio. Pela análise qualitativa das respostas, Feltes (2007) concluiu que as maiores dificuldades estão relacionadas às operações numéricas e propriedades da potenciação.

No 3º Caderno é colocada inicialmente uma situação-problema, e, a partir dela, estudam-se as propriedades da potenciação, contribuindo para a compreensão da natureza da função exponencial. Acredito ser esta uma forma bastante interessante para introduzir este assunto.

Restringi a análise apenas à parte que trata da potenciação em *N*, conteúdo este mencionado por Resende (2007) em sua tese como assunto da Teoria Elementar dos Números.

Segue, então, a parte inicial da situação de aprendizagem I.

> Suponhamos que, no país X, a produção de determinado alimento foi igual a 1 tonelada no final do ano 2000 e, em razão de

incentivos econômicos, passou a triplicar anualmente a partir daí. Conforme ilustra a tabela a seguir:

Ano	Produção P em toneladas	Potência correspondente
2000	1	3^0
2001	3	3^1
2002	9	3^2
2003	27	3^3
2004	81	3^4
2005	243	3^5
2006	729	3^6
2007	2 187	3^7
2008	6 561	3^8
2009	19 683	3^9
...	...	...
2015	14 348 907	3^{15}
2000 +n		3^n

(SÃO PAULO, 2008d, 3º bim., p. 12)

Segundo consta no 3º Caderno, a regularidade da multiplicação pelo fator 3 a cada ano conduz naturalmente à representação da produção correspondente de modo simplificado por uma potência de 3: *n*. Sendo assim, *n* anos após o ano 2000, o valor da produção *P* será 3^n toneladas.

A partir, então, da observação acima, são citadas duas propriedades da potenciação: a multiplicação de potências de mesma base e a divisão de potências de mesma base; porém não se desenvolve nenhum estudo sobre estas propriedades e as demais. Acredito, portanto, ser importante que o professor trabalhe um pouco mais com estas propriedades, visto que, como apontou Feltes (2007), alunos apresentam bastante dificuldade no trabalho com elas.

Ainda no estudo da função exponencial apresentado neste caderno do professor, nota-se algumas situações-problema cuja solução só faz sentido no conjunto dos números inteiros, sendo então fundamental que o aluno perceba isso. Porém, segundo afirmam alguns pesquisadores, como Machado (2008), o estudo dos números vem sendo tratado de forma sequencial e compartimentado, não atendendo às necessidades da vida cotidiana. A esse respeito Machado (2008) afirma que:

> (...) ao trabalhar questões referentes a números reais, muitas vezes se negligencia a análise da parte específica relativa aos números já estudados, como os números inteiros. É como se ao passar da matemática discreta, para o estudo da matemática “contínua”, aquela, por ser “inferior”, devesse dar lugar à outra. (Machado, 2008, p. 3)

Seguem dois exemplos de situações-problema dadas no 3º Caderno, cuja solução só faz sentido no conjunto dos números inteiros.

> Exercício 1
>
> Uma população *N* de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão *N* = 5000.3^t (*t* em horas).
>
> a) Indique o valor de *N* para os seguintes valores de *t*:
>
> a1) $t=2h$; a2) $t=0,5h$;
>
> a3) $t=\left(\frac{2}{3}\right)h$; a4) $t=1,25h$. (p.15)
>
> Exercício 2
>
> Em determinado país X, a produção de automóveis cresce em progressão geométrica, ano após ano, a partir do início do ano 2000, tendo aumentado 50% ao ano, desde então. Sabendo-se que em 2004 foram produzidos 162000 automóveis, pergunta-se:
>
> a) Qual a quantidade produzida no ano 2000?
> b) Qual a produção estimada para o ano de 2010? (SÃO PAULO, 2008d, 3º bim., p. 16)
>
> Exercício 4
>
> A população *N* de determinado município cresce exponencialmente, desde a sua fundação, há 20 anos, de acordo com a expressão $N=3000.10^{0,1t}$, sendo *t* em anos. Calcule:
>
> a) o valor de *N* quando o município foi fundado (*t* = 0).
> b) o valor de *N* dez anos após a fundação.
> c) o valor de *N* nos dias atuais.
> (SÃO PAULO, 2008d, 3º bim., p. 18)

Como podemos perceber, nos exercícios 1 e 4, busca-se determinar certa população em um certo tempo, e não faz sentido dizer que a população é 3000,5 (três mil pessoas e meia) ou 6000, 25 (seis mil pessoas e um quarto), por exemplo, só satisfazendo, então, para o conjunto solução destas situações-problema números inteiros.

Da mesma forma, no exercício 2 que trata da produção de automóveis, não faz sentido dizer que foram produzidos, em um certo tempo, dez mil carros e meio, por exemplo. Somente satisfazem números inteiros como solução desta situação-problema.

O 3º Caderno apresenta após as quatro situações de aprendizagem, algumas orientações para recuperação, algumas referências de recursos para auxiliar o trabalho do professor e as considerações finais.

Segue agora uma tabela com a quantidade de atividades propostas e quantas dessas favorecem o trabalho com assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números.

TABELA 6: Análise quantitativa – 3º Caderno

Situação de Aprendizagem	Quantidade de exercícios	Exerc. que propiciam o trabalho com TEN
1	4	**3**
2	11	**-**
3	3	**-**
4	8	**-**
Total	**26**	**3**

Pela tabela acima, observamos que dos vinte e seis exercícios propostos no material do 1º ano para o 3º bimestre apenas três trabalham explicitamente com assuntos da Teoria Elementar dos Números. Nos demais não foi feita nenhuma menção ao trabalho com propriedades dos números inteiros.

Considerações sobre o 3º Caderno

Pela análise dos tópicos a serem trabalhados no caderno do professor desse bimestre levantei a hipótese que estes favoreceriam ao trabalho com a Teoria Elementar dos Números. Essa hipótese foi confirmada apenas no estudo das potências, pois no estudo das funções exponencial e logarítmica, embora os coeficientes das funções dadas são em sua maioria números inteiros, e que a solução de algumas situações-problema só fazem sentido no conjunto dos números inteiros, o enfoque dado ao estudo de funções privilegiou a Matemática do Contínuo.

Explicitamente observei apenas o estudo das potências no 3º Caderno, porém, considero, visto às dificuldades apresentadas pelos alunos, que uma maior atenção deveria ser dada ao trabalho com a potenciação e suas propriedades.

No material para o 3º bimestre observei implicitamente alguns assuntos da Teoria Elementar dos Números, como por exemplo, a decomposição em fatores primos, números primos e propriedades da potenciação.

O trabalho com a potenciação parte de uma situação-problema, e com base nela, estuda-se as propriedades da potenciação. O estudo das funções exponencial e logarítmica desenvolveu-se através de situações-problema, cálculo de logaritmos em diferentes bases, nos quais trabalhou-se com a decomposição em fatores primos, sendo importante retomar nesse momento o estudo de números primos e o de critérios de divisibilidade.

Caderno do Professor do 4º Bimestre

Na ficha do caderno consta que este foi elaborado pela equipe de Matemática coordenada pelo pesquisador, doutor em Educação pela USP: Nilson José Machado.

O conteúdo básico do quarto bimestre é a relação entre a Geometria e a Trigonometria, expressa no estudo das razões trigonométricas, sendo dito sobre estas que:

> Tais razões, como o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo, já foram apresentadas aos alunos na oitava série do Ensino Fundamental (terceiro bimestre). Trata-se, agora, de uma consolidação de tais idéias, com sua contextualização em diferentes situações práticas e a extensão de seu significado para ângulos maiores do que 90º. As razões trigonométricas voltarão a ser estudadas na segunda série do Ensino Médio (primeiro bimestre), quando será dada ênfase à periodicidade das funções trigonométricas, e serão novamente exploradas na terceira série,

> inseridas no estudo geral das funções. (SÃO PAULO, 2008d, 4º bim., p. 9)

Os conteúdos a serem trabalhados neste bimestre estão organizados em oito unidades, descritas a seguir:

TABELA 7: Conteúdos do 4º Caderno

1ª serie do Ensino Médio	
Unidades	**Conteúdos**
1	• Tangente, seno, secante: origem, significado, contextos.
2	• Razões complementares: co-seno, co-tangente, co-secante. Relações simples entre as razões trigonométricas.
3	• Extensões do significado das razões para ângulos maiores que 90º.
4	• Como reduzir ângulos maiores do que 90º a menores do que 90º.
5	• Polígonos regulares: ângulos internos e externos.
6	• Inscrição e circunscrição de polígonos regulares.
7	• A proporcionalidade lado/seno: Lei dos Senos.
8	• Uma generalização do Teorema de Pitágoras: Lei dos Cossenos.

As atividades no 4º Caderno foram distribuídas em quatro situações de aprendizagem. No início de cada situação de aprendizagem é relatado o objetivo da aplicação da situação, o tempo previsto para esta aplicação, os conteúdos a serem trabalhados, as competências e habilidades a serem desenvolvidas e as estratégias.

Ao analisar as atividades propostas, percebemos que nestas não se trabalha com assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números. Valoriza-se o trabalho com a Matemática do Contínuo no decorrer das atividades propostas neste bimestre.

Segue agora uma tabela com a quantidade de atividades propostas nesse bimestre e quantas destas favorecem ao trabalho com assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números.

TABELA 8: Análise quantitativa – 4º Caderno

Situação de Aprendizagem	Quantidade de exercícios	Exerc. que propiciam o trabalho com TEN
1	6	-
2	6	-
3	6	-
4	7	-
Total	**25**	-

Observa-se, pela tabela, que dos vinte e cinco exercícios propostos no caderno do professor para o 1º ano referente ao 4º bimestre, nenhum trabalha com assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números, conforme conjecturei no início desta pesquisa.

Considerações sobre o 4º Caderno

Previ que não seriam abordados assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números no caderno do professor do 4º bimestre, o que pela análise desse foi confirmado.

A única menção a números inteiros foi feita na parte que trata da quantidade de lados dos polígonos e na medida dos ângulos, porém o tratamento dado em todo o decorrer das atividades propostas no caderno do professor para o 4º bimestre privilegia à Matemática do Contínuo em detrimento à Matemática Discreta.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa investigou quais e como assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números são abordados no material endereçado aos professores do 1º ano do Ensino Médio de 2008 da rede pública estadual paulista.

A escolha para analisar o material do nível médio ocorreu por que, segundo o resultado de algumas pesquisas, é principalmente no Ensino Médio que se dá o abandono de assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números. Decidi, então, direcionar a análise aos documentos relativos ao 1º ano do Ensino Médio para entender se já no primeiro ano desse curso os assuntos da Teoria Elementar dos Números são esquecidos.

Passo agora a tecer as considerações finais sobre a pesquisa realizada. Inicio descrevendo as conclusões sobre cada documento do material da SEE/SP analisado com base nas hipóteses e questões levantadas. E em seguida teço as conclusões gerais, reflexões e levanto algumas questões para pesquisas futuras.

Revista São Paulo faz escola

Levantei a hipótese de que nesse documento seria feita menção a necessidade de equilíbrio entre a matemática discreta e a do contínuo, porém pela análise dessa parte do material endereçada aos professores de 2008 da rede estadual de ensino paulista, constatei que nela não se faz menção a esta necessidade de equilíbrio. Nas orientações para aplicação das atividades do *Jornal do Aluno* que se encontra nesta revista, nenhum comentário é traçado a respeito de assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números.

Proposta Curricular

Sobre esse documento levantei a hipótese de que abordaria a questão da necessidade de equilíbrio entre a Matemática discreta e a do contínuo, porém concluo pela análise desta parte do material que não é feita menção explícita à administração da tensão entre o discreto /contínuo. O único trecho que faz uma menção ao trabalho com a Matemática Discreta, embora implicitamente, é na parte em que se relata as competências que o trabalho com a Matemática pode desenvolver nos alunos. Dentre elas, podemos citar, a capacidade de expressão pessoal, a compreensão de fenômenos, argumentação consistente, tomada de decisões, problematização dos conteúdos estudados em diferentes contextos e imaginação de situações novas. Considero que o trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio seja o lócus ideal para o desenvolvimento dessas competências.

Jornal do Aluno

Por propor uma revisão de assuntos do Ensino Fundamental, conjecturei que o *Jornal do Aluno* abordaria vários temas da Teoria Elementar dos Números. Analisando porém os tópicos que constavam na *Revista São Paulo faz escola* para serem trabalhados no *Jornal do Aluno*, notei que, nenhum assunto da Teoria Elementar dos Números apareceu explicitamente no Jornal do Aluno.

Mesmo não aparecendo explicitamente no *Jornal do Aluno* assuntos da TEN conjecturei favorecerem o trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números os seguintes tópicos do *Jornal do Aluno*: estudo dos números irracionais, fatoração de expressões algébricas, resolução de situações-problema envolvendo equações do 2º grau e na interpretação de gráficos.

Pela análise realizada no *Jornal do Aluno*, constatei, porém, que no estudo dos números irracionais, a única menção feita aos números inteiros, é quando se afirma que um número irracional não pode ser escrito na forma de uma fração com numerador e denominador inteiros, no demais são privilegiadas situações envolvendo o trabalho com os números irracionais, buscando aproximações de números irracionais por números racionais, aplicações dos números irracionais em problemas geométricos, bem como revendo operações nesse conjunto numérico.

Na fatoração de expressões algébricas, observei uma menção ao Teorema Fundamental da Aritmética, porém não se trabalhou exercícios sobre este assunto. Observei também que nenhuma menção foi feita concernente ao trabalho com o MDC ou com critérios de divisibilidade, embora o aluno necessite desses conceitos para auxilia-lo no trabalho com a fatoração.

Na resolução de situações-problema envolvendo equações do 2º grau, notei realmente, que os coeficientes e a solução das equações e das situações-problema dadas são em sua maioria números inteiros. Acredito ser importante um trabalho que frise bem que para algumas situações-problema não faz sentido soluções que não sejam números inteiros. Por outro lado, deveria se propor mais equações onde os coeficientes não são números inteiros, equilibrando o trabalho com o discreto e o contínuo.

No trabalho com a interpretação de gráficos constatei que, embora não mencionado no *Jornal do Aluno*, trabalhou-se implicitamente com grandezas discretas no exercício proposto na aula 30, que trata da soma obtida no lançamento de dois dados, onde observa-se que o gráfico não é contínuo. Seria um momento fundamental para se trabalhar com as propriedades dos números inteiros e mostrar porque o gráfico não é contínuo e mostrar mais situações do cotidiano em que se trabalha com grandezas discretas.

Considerei como conteúdos não previstos como propícios ao trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números no *Jornal do Aluno*, os relacionados à Geometria. Pela análise realizada constatei que as medidas das figuras dadas são em sua maioria números inteiros, porém, a abordagem conferida nos exercícios propostos no Jornal do Aluno, não valoriza o trabalho com propriedades desses números, o enfoque dado privilegia à Matemática do Contínuo.

Outro problema observado é que, como as medidas das figuras dadas no *Jornal do Aluno*, são em sua maioria números inteiros, o que faz com que o aluno, ao se deparar com problemas do cotidiano que não apresentam medidas cujos números são inteiros, tenha dificuldade em resolver e/ou pense que os resultados estejam errados, pois escapam de sua experiência escolar. Além disso, perde-se a oportunidade de fazer os alunos trabalharem com os números não inteiros.

Cadernos do Professor

A hipótese levantada para os *Cadernos do Professor* do 1º ano foi que estes apresentariam assuntos da Teoria Elementar dos Números, isto é, assuntos relativos à matemática discreta de forma equilibrada com os da Matemática do contínuo nos três primeiros bimestres e que no 4º bimestre não seriam abordados assuntos da Teoria Elementar dos Números.

A análise do 1º Caderno confirmou a hipótese de que este abordaria assuntos da Teoria Elementar dos Números. Foram utilizados conhecimentos sobre os Números Inteiros e suas operações, o uso de recorrência, a divisibilidade, algoritmo da divisão, máximo divisor comum, número primo, múltiplos e divisores, decomposição em fatores primos e critérios de divisibilidade. Os assuntos desenvolvidos como sequências, progressões aritmética e geométrica são próprios da área de Teoria dos Números embora haja intersecções com outros domínios da Matemática.

Já para o 2º Caderno no qual levantei a hipótese de que os conteúdos propostos favoreceriam o trabalho com assuntos da Teoria Elementar dos Números, a análise das atividades propostas no caderno do professor deste bimestre revelou que os coeficientes das funções dadas são, em sua maioria, números inteiros, mas o enfoque dado a esse estudo privilegia a Matemática do contínuo. Sendo que das vinte e cinco atividades propostas neste caderno nenhuma aborda assuntos da Teoria Elementar dos Números.

Pela análise dos tópicos a serem trabalhados no 3º Caderno levantei a hipótese que estes favoreceriam ao trabalho com a Teoria Elementar dos Números. Essa hipótese foi confirmada apenas no estudo das potências, pois no estudo das funções exponencial e logarítmica, embora os coeficientes das funções dadas são em sua maioria números inteiros, e que a solução de algumas situações-problema só fazem sentido no conjunto dos números inteiros, o enfoque dado ao estudo de funções privilegiou a Matemática do Contínuo. No 3º Caderno observei implicitamente alguns assuntos da Teoria Elementar dos Números, como por exemplo, a decomposição em fatores primos, números primos e propriedades da potenciação.

Para o 4º Caderno previ que não seriam abordados assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números, o que pela análise desse foi confirmado. A única menção a números inteiros foi feita na parte que trata da quantidade de lados dos polígonos e na medida dos ângulos, porém o tratamento dado em todo o decorrer das atividades propostas no caderno do professor para o 4º bimestre privilegia à Matemática do Contínuo em detrimento à Matemática Discreta.

Destaco agora as conclusões gerais com base nos resultados obtidos pela análise de cada documento pertencente ao material da SEE/SP de 2008.

Concluo pela pesquisa realizada que embora o material proposto pela SEE/SP contou em sua equipe de elaboração com pesquisadores em Educação Matemática, os quais poderiam corroborar a ideia da necessidade da transversalidade do trabalho com o discreto e o contínuo, o trabalho desenvolvido não é sustentado de maneira a possibilitar ao professor a gestão da tensão entre o discreto e o contínuo.

Poucos exercícios envolvendo assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números foram desenvolvidos no material analisado. O Caderno do Professor do 1º bimestre foi o único em que encontrei uma atenção maior à Teoria Elementar dos Números, nos demais cadernos e no jornal do aluno, predominou a Matemática do Contínuo.

Segue uma tabela mostrando a quantidade de exercícios constantes no Jornal do Aluno e nos Cadernos do Professor do 1º ano e a quantidade desses que propiciam o trabalho com assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números.

TABELA 9: Análise quantitativa global do material analisado

	Qtde. Exerc.	Exerc.trabalham com TEN
JORNAL DO ALUNO	79	**14**
1º CADERNO	33	**33**
2º CADERNO	25	**-**
3º CADERNO	26	**3**
4º CADERNO	25	**-**
TOTAL	**188**	**50 (~ 27%)**

Nota-se que dos cento e oitenta e oito exercícios (somando os exercícios do *Jornal do Aluno* e dos *Cadernos do Professor*), apenas cinquenta abordam assuntos referentes à Teoria Elementar dos Números, isto é, menos que 27% abordam assuntos dessa Teoria.

De modo geral os assuntos da Teoria Elementar dos Números encontrados de forma explícita ou implícita no material analisado foram: Números inteiros e operações, uso da recorrência (potências em N, sequências, progressões aritmética e geométrica), divisibilidade, algoritmo da divisão, mdc, números primos, decomposição em fatores primos, critérios de divisibilidade, teorema fundamental da aritmética e a introdução à congruência módulo m.

Acredito que, no *Jornal do aluno*, por ser uma revisão do conteúdo do Ensino Fundamental II com intenção de ajudar o aluno no prosseguimento dos seus estudos, uma maior atenção deveria ser dada a assuntos da Teoria Elementar dos Números.

Para os três primeiros cadernos do 1º ano esperava uma abordagem mais aprofundada sobre assuntos da Teoria Elementar dos Números, além de um trabalho não tão segmentado com os assuntos discutidos.

Vale ressaltar que não estou requerendo uma abordagem que privilegie a Matemática do Discreto em relação à Matemática do Contínuo, mas um ensino que, segundo apontam alguns pesquisadores, trabalhe as duas noções conjuntamente e que desenvolva um trabalho com os números inteiros em toda a escolaridade básica.

Propor cursos de formação continuada em que se discutissem formas de se trabalhar com o discreto e o contínuo, seria fundamental para alcançar um ensino de Matemática no qual se administre a tensão entre essas duas tendências da Matemática.

Pela observação dos resultados dessa pesquisa surgiram algumas questões para pesquisas futuras:

- Como promover um ensino que equilibre a tensão entre a Matemática Contínua e a Matemática Discreta?
- Como sensibilizar professores da importância de assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio?
- Como o material de 2008 da rede estadual paulista proposto para o Ensino Fundamental aborda assuntos da Teoria Elementar dos Números?
- Dada a influência que o livro didático exerce na prática docente, como sensibilizar os elaboradores desse material (livro didático) a desenvolver um trabalho transversal com os números inteiros?
- Como a equipe que elaborou o material da SEE/SP para 2008 entende o trabalho com o discreto e o contínuo?

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, M. M. M. **Estratégias de generalização de padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista dos seus professores**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

ARCHILIA, S. **Construção do termo geral da Progressão Aritmética pela Observação e Generalização de Padrões**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2009.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o discreto e o contínuo na História da Matemática e no ensino de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: Universidade de São Paulo, 1996.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. **Learning and teaching number theory*****:*** **Research in cognition and instruction**. Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport,CT: Ablex Publishing, 2002.

CARNEIRO, J. P. Q. **Dispositivo Prático para Expressar o MDC de dois números como combinação linear deles**. In Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n. 37, p. 27-33, 1998.

CARVALHO, C. A. S. **O aluno do Ensino Médio a criação de uma fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

COSTA, E. S. **As equações diofantinas lineares e o professor de Matemática do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

FELTES, R. Z. **Análise de erros em potenciação e radiciação: Um estudo com alunos do Ensino Fundamental e Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação). Rio Grande do Sul: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2007.

GROENWALD, C. L. O *et al*. **Teoria dos Números e suas aplicações no processo de ensino e aprendizagem.** In: Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006, Caxias do Sul. Anais do IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Caxias do Sul: Ed: UCS, 2006.

JURKIEWICZ, S. **Matemática Discreta e Ensino Médio**. Programa de Engenharia de Produção da UFRJ, 2004. Disponível em: <http:// ensino.univates.br/ ~chat/materiais/ matdiscreta_médio.pdf > Acesso em: 12 dez. 2008.

LAJOLO, M. **Livro Didático: Um "quase" manual de usuário**. Em Aberto. Brasília, v. 16, n. 69, p. 3-7, jan. /mar, 1996.

MACHADO, S.D.A. **O estudo dos números inteiros visando uma cabeça bem feita**. In: XIV ENDIPE – Encontro de Didática e Prática de Ensino, Porto Alegre, 2008.

MACHADO, S. D. A.; MARANHÂO, M. C. S. A.; COELHO, S. P. **What algebra should be taught in preservice teachers'courses?** In: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, 2003, Bellaria. Proceedings of CERME3, 2003.

NERY, C.; POSSANI, C. **Os Primos Esquecidos**. In Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n.47, p. 16-20, 2001.

OLIVEIRA, S. B. **As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

PEREZ, E. P. Z. **Alunos do Ensino Médio e a generalização de padrão**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

RAMA, A. J., **Números inteiros nos ensinos fundamental e médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

RESENDE, M. R., **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Revista São Paulo faz escola**. Edição especial da proposta curricular, Disciplina: Matemática, 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: FDE, 2008a. 80p.

_________________. Secretaria de Estado da Educação. **Jornal do Aluno: São Paulo faz escola (Ensino Médio 1º ano)**. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, fev/2008b. 48p.

________________. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática**. São Paulo: SEE, 2008c. 64p.

_________________. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do Professor - Matemática do 1º ano do Ensino Médio**. **1º bimestre de 2008**. São Paulo: SEE, 2008d. 40p.

________________. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do Professor – Matemática do 1º ano do Ensino Médio**. **2º bimestre de 2008**. São Paulo: SEE, 2008d. 40p.

________________. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do Professor – Matemática do 1º ano do Ensino Médio**. **3º bimestre de 2008**. São Paulo: SEE, 2008d. 56p.

________________. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do Professor – Matemática do 1º ano do Ensino Médio**. **4º bimestre de 2008**. São Paulo: SEE, 2008d. 56p.

SILVA, U. A. **Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de Matemática da Educação Básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

Anexos

Anexo 1

CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POR SÉRIE/BIMESTRE DO ENSINO MÉDIO

	1ª série	2ª série	3ª série
1º Bimestre	NÚMEROS E SEQÜÊNCIAS - Conjuntos numéricos. - Regularidades numéricas: seqüências. - Progressões aritméticas e progressões geométricas.	TRIGONOMETRIA - Fenômenos periódicos. - Funções trigonométricas. - Equações e inequações. - Adição de arcos.	GEOMETRIA ANALÍTICA - Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. - Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares - Ponto e reta: distância. - Circunferência: equação. - Reta e circunferência: posições relativas. - Cônicas: noções e aplicações
2º Bimestre	FUNÇÕES - Relação entre duas grandezas. - Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. - Função de 1º grau. - Função de 2º grau.	MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES - Matrizes: significado como tabelas, características e operações. - A noção de determinante de uma matriz quadrada. - Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento.	EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E NÚMEROS COMPLEXOS - Equações polinomiais. - Números complexos: operações e representação geométrica. - Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial. - Relações de Girard.
3º Bimestre	FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA - Crescimento exponencial. - Função exponencial: equações e inequações. - Logaritmos: definição e propriedades. - Função logarítmica: equações e inequações.	ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE - Raciocínio combinatório: princípios multiplicativo e aditivo. - Probabilidade simples. - Casos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações. - Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos. - Probabilidade condicional. - Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.	ESTUDO DAS FUNÇÕES - Qualidades das funções. - Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais. - Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação. - Composição: translações e reflexões. - Inversão.
4º Bimestre	GEOMETRIA – TRIGONOMETRIA - Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. - Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. - Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos cossenos.	GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL - Elementos de geometria de posição. - Poliedros, prismas e pirâmides. - Cilindros, cones e esferas.	ESTATÍSTICA - Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos. - Medidas de tendência central: média, mediana e moda. - Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. - Elementos de amostragem.

O sombreado assinala os conteúdos relacionados aos trabalhados neste bimestre.

Anexo 2

Cópia da capa do Jornal do Aluno do 1º ano

JORNAL DO ALUNO

São Paulo faz escola

EDIÇÃO ESPECIAL DA PROPOSTA CURRICULAR

fev/2008 – ensino médio

1ª série

Nome do aluno:

Série:

Escola:

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo Governador: José Serra Secretária da Educação: Maria Helena Guimarães de Castro

Pontapé inicial

Caros alunos,

Iniciamos agora mais uma jornada: 2008 será, com certeza, um ano que fará a diferença. Preparamos diversos projetos para que você possa aprender sempre mais.

Nestes primeiros 42 dias de aula, até o fim de março, daremos o pontapé inicial para um importante projeto. Será um período essencial para sua formação escolar e que certamente fará diferença ao longo do ano.

Espero que você aproveite este material, elaborado especialmente para este período, desfrutando-o e aproveitando-o o máximo possível.

Um grande abraço!

Maria Helena Guimarães de Castro

SECRETÁRIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO

E aí, galera?

Vamos nos preparar para a grande largada de 2008? A ordem é esquentar os motores da inteligência para conquistar uma colocação especial.

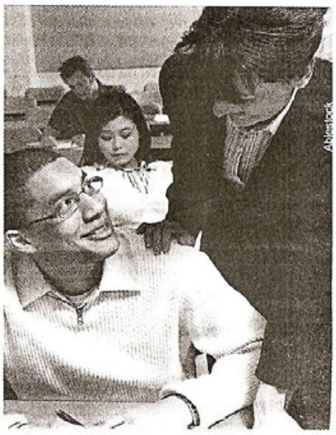
Este jornal foi preparado para acompanhar a maratona de todos os alunos e professores do Estado de São Paulo, rumo à vitória, neste ano letivo. Ele traz notícias, curiosidades e sugestões de atividades bem interessantes para serem desenvolvidas com o apoio e a firmeza de nossos professores.

E o melhor desta grande corrida é que todos podem chegar em 1º lugar, pois cada um só vai disputar consigo mesmo, percorrendo o caminho que leva do conhecimento que já possui àquele necessário para alcançar ótimos resultados escolares.

Então, vamos nessa?

Maria Inês Fini

COORDENADORA – SÃO PAULO FAZ ESCOLA



Ablestock

Língua Portuguesa e Literatura p. 3

A nave-mãe – língua pede passagem

Melhorando a familiaridade com a língua materna, aprimoramos nossa comunicação.

Língua Estrangeira Moderna p. 9

Hello, student!

Experimente as atividades propostas e torne-se um leitor fluente. Então, "roll up your sleeves and let's get down to work"! (arregace as mangas e mãos à obra!)

Arte

Acabou o carnaval... sniff... sniff...

Nas aulas de Arte vamos dançar, desenhar, escrever, sorrir e interpretar.

Ablestock

História p. 19

Diversidade, trabalho, cultura e sociedade

A História é uma das mais importantes expressões culturais da humanidade. Ela representa a própria memória das civilizações ao longo do tempo.

Matemática p. 42

Todos podem aprender Matemática!

A Matemática está presente no nosso dia-a-dia e nos ajuda a interpretar dados, solucionando diversos problemas.

Física p. 30

Unindo o passado ao presente

A Física não está só no cosmos, mas também no nosso cotidiano. Torne-se um amante da Física.

Geografia p. 22

Conhecer e reconhecer o planeta Terra

Viva o desafio de localizar um ponto na crosta terrestre, usando as coordenadas geográficas.

Ajay Singh / SXC Indy

Química p. 34

Nem toda a substância se mistura, mas conhecimento sim!

Descubra elementos sem os quais o homem não sobrevive. Conhecê-los garante a manutenção da vida.

ÍNDICE

Esta edição tem 48 páginas – 880.000 exemplares

Anexo 3

Jornal do aluno: aulas de matemática e assunto correspondente:

Aula 01- Irracionais e aplicações
Aula 02- Números irracionais em problemas geométricos
Aula 03- Números irracionais e racionais: aplicações
Aula 04- Números irracionais e racionais: aplicações
Aula 05- Fatoração de expressões algébricas: significado
Aula 06- Fatoração de expressões algébricas: aplicações
Aula 07- Alguns métodos para resolver equações do 2º grau
Aula 08- Resolvendo equações do 2º grau
Aula 09- Equações do 2º grau na resolução de problemas
Aula 10- Mais problemas com equações do 2º grau
Aula 11- Grandezas proporcionais: significado, contexto
Aula 12- Grandezas proporcionais: variação linear, aplicações
Aula 13- Semelhança: contexto e aplicações
Aula 14- Semelhança: contexto e aplicações
Aula 15- Divisão de segmentos: mediatriz
Aula 16- Divisão de ângulos: bissetriz
Aula 17- Teorema de Tales: aplicações
Aula 18: Teorema de Tales: aplicações
Aulas 19 e 20- Pitágoras: significado, contextos
Aula 21- Pitágoras: do plano para o espaço
Aula 22- Relações métricas em triângulos retângulos: noções
Aula 23: Relações métricas em triângulos retângulos: contextos
Aulas 24 e 25: Ampliações e reduções: o que se altera e o que não se altera
Aula 26- O quadrado, a diagonal e o lado: uma relação fundamental
Aula 27- Quadrados: perímetros e áreas
Aula 28- Quadrados: linguagem algébrica
Aula 29- Lendo e interpretando gráficos
Aula 30- Lendo e interpretando gráficos (complementos)

Anexo 4.

Sumário do exemplar da Proposta Curricular: Matemática

Sumário