

UFMT

Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

2009

**Evolução das perturbações de densidade no Novo Modelo de
Gás de Chaplygin Modificado**

Marceliano Eduardo de Oliveira

Orientador:
Prof. Dr. Sandro Silva e Costa

— Fevereiro 2009 —

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Aos que acreditaram em mim nos momentos em que não fui capaz de fazê-lo.

Há homens que lutam um dia, e são bons; há homens que lutam por um ano, e são melhores; há homens que lutam por vários anos, e são muito bons; há outros que lutam durante toda a vida, esses são imprescindíveis.

Bertolt Brecht, no poema: Os que lutam.

Agradecimentos

- Aos meus pais, irmãos e todos os demais familiares;
- Em especial, a minha esposa Ione por todo o amor compreensão e também pelo fomento financeiro complementar, a minha filha Ingrid por aceitar minha ausência durante a confecção deste trabalho;
- Aos meus professores, por me ajudarem a conhecer meus limites e principalmente por mostrar o caminho pelo qual eu pudesse superá-los ;
- Aos meus amigos e colegas, por me suportarem nos momentos difíceis tornando minha vida mais prazerosa, e principalmente por vibrarem comigo nos momentos de vitória;
- Não poderia deixar de agradecer em especial: ao professor Sandro Silva e Costa, que desde o início caminhou ao meu lado em pacientes passos, para que hoje eu pudesse enveredar sem medo pelos difíceis caminhos da Física teórica, ao professor Alberto Sebastião de Arruda, pelos sábios e valorosos conselhos, bem como por todo seu entusiasmo contagiante que me fez rever algumas posições sobre o papel do Físico na sociedade, ao professor Romildo Jerônimo Ramos, por toda a dedicação em nos tornar profissionais sérios e competentes, ao professor Max por me ajudar a ver de maneira simples os problemas que as vezes eu imaginava sem solução, ao professor Harold Sócrates Blas Achic por toda sua dedicação e apoio ao longo deste curso, ao professor Jorge Luiz Brito de Faria (HULK) pela atuante participação nas mais calorosas discussões sobre os fundamentos da Física, ao professor Ricardo Rodrigues de França Bento por ter me motivado a escolher a Física como minha profissão e ao professor Teldo Anderson Pereira da Silva pela constante motivação;
- Em especial, aos amigos e colegas: George Chaves Da Silva Valadares e Luís Fernando dos Santos, pela dedicada e extensa discussão sobre as idéias

que norteiam este trabalho;

- Finalmente: gostaria de agradecer a CAPES e a FAPEMAT pelo apoio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho vemos que um universo em expansão acelerada pode ser bem representado por uma equação de estado não linear; este caso, inclui modelos como o Novo Modelo de Gás de Chaplygin Modificado (NMCG). Nós focamos nossos estudos na equação diferencial que envolve as perturbações de densidade no modelo NMCG com objetivo de obter algumas soluções gerais.

Palavras-chave: perturbações de densidade, cosmologia, relatividade geral, gás de Chaplygin.

Áreas do conhecimento: Cosmologia, Física Matemática, Gravitação. 1.04.04.04-0, 1.05.01.01-0, 1.05.01.03-7.

Abstract

In this work we show that the accelerated expanding universe can be well represented by a non-linear equation of state; this case includes models like the new modified Chaplygin gas model (NMCG). We focus in the study of the differential equation obtained for the density perturbations in the NMCG model, in order to obtain some general solutions.

Keywords: Gravitation, Cosmology, Mathematical Methods.

Conteúdo

1	Introdução	4
2	Elementos de cálculo tensorial	6
2.1	Introdução	6
2.2	Tensores	6
2.3	Derivada absoluta	7
2.4	Derivada de Lie	11
2.5	Tensor de Riemann	14
3	Equações de Einstein	16
3.1	Introdução	16
3.2	Movimento de satélites e corpos	16
3.3	Geodésicas	18
3.4	As equações de Einstein	20
4	Equação de Friedmann	24
4.1	Introdução	24
4.2	Lei de Hubble	24
4.3	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)	25
4.4	Tensor energia-momento	26
4.5	A equação de Friedmann	29
5	Modelos cosmológicos	32
5.1	Introdução	32

5.2	Modelo com equação não-linear	32
5.3	A equação de um oscilador amortecido	33
5.4	O fator de escala e o oscilador amortecido	34
5.5	Soluções para o fator de escala	35
5.6	O gás de Chaplygin	37
5.7	O novo modelo de gás de Chaplygin modificado (NMCG)	38
5.8	Comparação com outros modelos	39
6	Formação de estruturas	41
6.1	Introdução	41
6.2	Perturbações de densidade	41
6.3	Perturbações de densidade no NMCG	47
6.4	Casos particulares	50
6.5	Exemplos com soluções analíticas	53
7	Conclusão	57
	Referências Bibliográficas	58

Capítulo 1

Introdução

Os dados acerca do universo em que vivemos mostram-nos que este está em processo contínuo de expansão, pois as demais galáxias estão afastando-se da nossa continuamente [1], [2]. Descobertas recentes permitiram inferir que esta expansão ocorre com velocidade de afastamento não constante, ou seja, a expansão pode ser dita acelerada. Tal aceleração deve ser ocasionada por uma energia favorável à expansão, e esta energia é denominada “energia escura”, geralmente representada por uma constante cosmológica [3].

Um tratamento bastante completo pode ser dado para o fenômeno da expansão cósmica associando-se a equação de Friedmann, que rege o comportamento do universo, a uma outra equação vinda da termodinâmica, denominada equação de estado, que relaciona pressão e densidade de energia.

O objetivo central deste trabalho é tratar da expansão cósmica acelerada, provocada por uma energia escura, de origem desconhecida, mas que modifica a velocidade com as quais as galáxias se afastam da nossa.

A teoria usada como base para explicar o universo como um todo é a cosmologia moderna, fundamentada na teoria da Relatividade Geral, elaborada pelo físico alemão Albert Einstein no início do século XX [4]. Assim, em primeiro lugar apresenta-se aqui uma visão geral da Relatividade Geral, incluindo algo sobre tensores e as equações de Einstein. Considerações cosmológicas incluídas na métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, quando aplicadas nas equações de Ein-

stein, levam a duas equações conhecidas como equações de Friedmann, que relacionam a dinâmica do universo com seu conteúdo de matéria e energia, além da pressão do(s) fluido(s) constituinte(s) do universo [5]. Tais informações, em geral, fazem parte de um modelo cosmológico por meio do uso de uma equação de estado.

Como primeiro modelo, usando uma equação de estado do tipo não-linear, juntamente com a equação de Friedmann, mostramos a semelhança matemática da equação da expansão acelerada do universo com a equação de um oscilador amortecido. Entretanto, o oscilador em questão possui um termo favorável ao aumento de suas oscilações, que pode denominar-se anti-atrito, e cuja função mostra-se ao menos análoga à da energia escura [6].

Depois partimos para modelos com equação de estado não-linear conhecidos na literatura como modelos de gás de Chaplygin, onde analisamos por fim o comportamento de perturbações de densidade.

Capítulo 2

Elementos de cálculo tensorial

2.1 Introdução

A teoria da Relatividade Geral de Einstein foi criteriosamente elaborada com uso de tensores [5]. Por ser esta a teoria atualmente empregada no estudo das interações gravitacionais, torna-se indispensável um breve ensaio com tais objetos matemáticos. Nesta seção o desenvolvimento bastante sintético objetiva principalmente construir um “palco” para o desenvolvimento da teoria de Einstein, assim como a álgebra de operadores no espaço de Hilbert constitui um “palco” para o desenvolvimento da mecânica quântica.

2.2 Tensores

Os tensores são em geral uma extensão do conceito de vetor, sem dúvida alguma, sua característica mais importante enquanto objeto matemático, é a invariância sob transformação de coordenadas [5].

Os sistemas de coordenadas generalizadas evidenciam que há mais de uma forma de representar um vetor (veja Figura 2.1)¹. que sugere dois casos distintos.

¹Figura disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/Covariance_and_contravariance_of_vectors

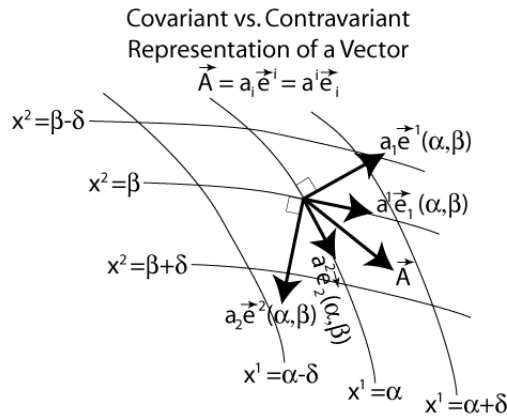


Figura 2.1: diferentes formas de representação de um mesmo vetor.

As componentes a^i e a_i são denominadas contravariantes e covariantes respectivamente. Ao considerar tal objeto é possível descrevê-lo completamente segundo as seguintes relações [7]:

$$a^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right) a'^j, \quad (2.1)$$

$$a_i = \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \right) a'_j. \quad (2.2)$$

2.3 Derivada absoluta

Sendo um espaço cujo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ está definido, e também o seu inverso $g^{\mu\nu}$, ambos possuindo entre si a seguinte relação $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 1$, será então possível “levantar” e “baixar” os índices de um tensor, tal que

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu, \quad (2.3)$$

ou

$$X^\mu = g^{\mu\nu} X_\nu. \quad (2.4)$$

Através de uma diferenciação ordinária de um tensor covariante,

$$d(X_\mu) = d(g_{\mu\nu} X^\nu) = d(g_{\mu\nu}) X^\nu + g_{\mu\nu} d(X^\nu), \quad (2.5)$$

é possível notar que a derivada de um tensor não é um tensor², pois em geral $d(g_{\mu\nu}) \neq 0$.

Ficou claro que a derivação destrói o caráter tensorial do elemento em questão [7]. Neste sentido surge a proposta de derivada absoluta, uma derivada que preserva o caráter tensorial. De forma simples a derivada absoluta pode ser escrita como:

$$D(X_\mu) = D(g_{\mu\nu}X^\nu) = \underline{D(g_{\mu\nu})}X^\nu + g_{\mu\nu}D(X^\nu). \quad (2.6)$$

Notadamente, o termo sublinhado sendo nulo é o que determina a transformação de (2.6) como predominantemente tensorial.

Usando o conceito de invariância do produto escalar, é possível construir a derivada absoluta partindo da já conhecida derivada ordinária, então

$$d(X_\mu X^\mu) = D(X_\mu X^\mu), \quad (2.7)$$

ou

$$d(X_\mu) X^\mu + X_\mu d(X^\mu) = D(X_\mu) X^\mu + X_\mu D(X^\mu). \quad (2.8)$$

Reagrupando os termos em (2.8) percebe-se que

$$0 = X_\mu [DX^\mu - dX^\mu] + [DX_\mu - dX_\mu] X^\mu, \quad (2.9)$$

então se torna interessante a seguinte proposta

$$DX^\mu - dX^\mu \equiv \Gamma_{\alpha\nu}^\mu X^\alpha dx^\nu, \quad (2.10)$$

$$DX_\mu - dX_\mu \equiv -\Gamma_{\nu\mu}^\alpha X_\alpha dx^\nu. \quad (2.11)$$

Deste modo as equações (2.11) e (2.10) satisfazem a equação (2.9).

Assim, as equações que representam a derivada absoluta de um tensor covariante e de um tensor contravariante podem ser escritas como

$$DX_\mu = dX_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha X_\alpha dx^\nu, \quad (2.12)$$

²Um tensor é um elemento que obedece a seguinte lei de transformação: $X'^\mu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) X^\nu$, ou também conforme citado em (2.3).

$$DX^\mu = dX^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu X^\alpha dx^\nu. \quad (2.13)$$

Agora, com uso da relação de derivação ordinária

$$dX_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (X_\mu) dx^\lambda \equiv \partial_\lambda X_\mu dx^\lambda, \quad (2.14)$$

substituída em (2.12) e (2.13) geram-se finalmente as relações de derivação absoluta para tensores covariantes e contravariantes, respectivamente,

$$DX_\mu = (\partial_\nu X_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha X_\alpha) dx^\nu, \quad (2.15)$$

$$DX^\mu = (\partial_\nu X^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu X^\alpha) dx^\nu. \quad (2.16)$$

Derivação Covariante

Uma outra operação, denominada derivação covariante [5], [7], [8], pode ser definida partindo de (2.15) e (2.16), tal que

$$\frac{DX_\mu}{dx^\nu} \equiv \nabla_\nu X_\mu = \partial_\nu X_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha X_\alpha, \quad (2.17)$$

$$\frac{DX^\mu}{dx^\nu} \equiv \nabla_\nu X^\mu = \partial_\nu X^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu X^\alpha. \quad (2.18)$$

Considerando o fato de que $\frac{dx^\nu}{du} = X^\nu$ (conforme poderá ser visto na seção Derivada de Lie), e as definições em (2.17) e (2.18), torna-se fácil notar que

$$\frac{DX_\mu}{du} \equiv X^\nu \nabla_\nu X_\mu, \quad (2.19)$$

$$\frac{DX^\mu}{du} \equiv X^\nu \nabla_\nu X^\mu, \quad (2.20)$$

não possuem distinção quanto ao operador que está atuando, mas apenas no tipo de tensor. Deste modo é conveniente separar o operador na seguinte forma,

$$\frac{D}{du} \equiv \frac{D}{Du} \equiv X^\nu \nabla_\nu, \quad (2.21)$$

ou para o caso de atuação consecutiva,

$$\frac{D^2}{Du^2} = X^\alpha \nabla_\alpha (X^\beta \nabla_\beta). \quad (2.22)$$

Conexão

Neste estágio o símbolo de conexão Γ_{bc}^a , pode ter suas propriedades associadas ao tensor métrico, e então ser escrito em função deste tensor [5], [7].

Seja agora um tensor covariante de ordem 2 que possa ser descrito pelo produto $A_\mu B_\nu$, então,

$$D(A_\mu B_\nu) = D(A_\mu) B_\nu + A_\mu D(B_\nu) . \quad (2.23)$$

Mas,

$$DA_\mu = dA_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha A_\alpha dx^\lambda, \quad (2.24)$$

e

$$DB_\nu = dB_\nu - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha B_\alpha dx^\lambda. \quad (2.25)$$

Então de (2.23)...(2.25) nota-se que

$$D(A_\mu B_\nu) = d(A_\mu B_\nu) - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha A_\alpha B_\nu dx^\lambda - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha B_\alpha A_\mu dx^\lambda. \quad (2.26)$$

O uso do tensor métrico na equação (2.26) traz

$$D(g_{\mu\nu}) = d(g_{\mu\nu}) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha g_{\alpha\mu} dx^\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} dx^\lambda, \quad (2.27)$$

e permutando ciclicamente os índices μ , ν e λ obtém-se

$$D(g_{\mu\nu}) = d(g_{\mu\nu}) - (g_{\alpha\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha) dx^\lambda, \quad (2.28)$$

$$D(g_{\nu\lambda}) = d(g_{\nu\lambda}) - (g_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha + g_{\alpha\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) dx^\mu, \quad (2.29)$$

$$D(g_{\lambda\mu}) = d(g_{\lambda\mu}) - (g_{\alpha\lambda}\Gamma_{\nu\mu}^\alpha + g_{\alpha\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha) dx^\nu. \quad (2.30)$$

Lembrando que $D(g_{\mu\nu}) = D(g^{\mu\nu}) = 0, \forall \mu, \nu$, e que

$$dg_{\nu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g_{\nu\lambda}) dx^\mu \equiv \partial_\mu g_{\nu\lambda}, \quad (2.31)$$

é possível escrever a partir de (2.28) ... (2.30) que

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha, \quad (2.32)$$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha + g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha, \quad (2.33)$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + g_{\alpha\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha. \quad (2.34)$$

Ao multiplicar as equações (2.32) ... (2.34) por $g^{\alpha\lambda}$ e resolver este sistema considerando $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$, segue finalmente a conexão escrita em função do tensor métrico,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (2.35)$$

2.4 Derivada de Lie

Considere os vetores tangentes ao conjunto de curvas de congruência $x^a(u)$, que podem ser escritos da seguinte forma:

$$\frac{dx^a(u)}{du} \equiv X^a(x(u)), \quad (2.36)$$

e também um campo tensorial onde os tensores³ $X^a(x(u))$ estão situados. Sejam ainda dois parâmetros distintos P e Q , ficando claro que $X^a(P)$ não será necessariamente igual a $X^a(Q)$.

Seja agora um pequeno incremento

$$\delta x^a = \delta u X^a, \quad (2.37)$$

tal como a distância entre $X^a(P)$ e $X^a(Q)$,

$$\delta x^a = x'^a - x^a. \quad (2.38)$$

Então a posição final pode ser escrita utilizando (2.37) e (2.38), ou seja,

$$x'^a = x^a + \delta u X^a. \quad (2.39)$$

Fica evidente que se P e Q são muito próximos,

$$P \rightarrow Q, \quad (2.40)$$

³Por simplicidade, $X^a(x(u)) \equiv X^a$, ou $X^a(x(u)) \equiv X^a(x)$.

então,

$$x^a \rightarrow x'^a. \quad (2.41)$$

Ou seja,

$$x^a \rightarrow x^a + \delta u X^a. \quad (2.42)$$

A matriz de transformação de coordenadas pode ser obtida, sabendo que

$$x'^a = x^a + \delta u X^a, \quad (2.43)$$

que implica em

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} &= \frac{\partial}{\partial x^b} [x^a + \delta u X^a(x(u))] \\ &= \delta_b^a + \delta u \partial_b X^a. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Supondo um tensor contravariante de ordem 2,

$$T'^{ab}(x') = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} T^{cd}(x), \quad (2.45)$$

ao substituir (2.44) em (2.45) vem que

$$\begin{aligned} T'^{ab}(x') &= (\delta_c^a + \delta u \partial_c X^a) (\delta_d^b + \delta u \partial_d X^b) T^{cd}(x) \\ &= \delta_c^a \delta_d^b T^{cd}(x) + \delta_c^a \delta u \partial_d X^b T^{cd} + \delta_d^b \delta u \partial_c X^a T^{cd} + \delta u^2 f(X^b, X^a). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Considerando $\delta u^2 f(X^b, X^a) = 0$, pois δu é muito pequeno, fica

$$\begin{aligned} T'^{ab}(x') &= \delta_c^a \delta_d^b T^{cd}(x) + \delta_c^a \delta u \partial_d X^b T^{cd} + \delta_d^b \delta u \partial_c X^a T^{cd} \\ &= T^{ab}(x) + \delta u [\partial_c X^a T^{cb} + \partial_d X^b T^{ad}]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Este tensor, que sofre um arrastamento infinitesimal, pode ser expandido em série de Taylor, logo,

$$T'^{ab}(x') = T^{ab}(x) + (x'^c - x^c) \partial_c T^{ab}(x) + \mathcal{O}(2). \quad (2.48)$$

Com uso da relação (2.39), obtém-se

$$T'^{ab}(x') = T^{ab}(x) + \delta u X^c \partial_c T^{ab}(x). \quad (2.49)$$

O tensor $T^{ab}(x')$ é o tensor já em Q (próprio do campo tensorial), enquanto $T'^{ab}(x')$ é o tensor arrastado (de P para Q).

Fazendo agora a diferença entre o tensor já em Q com o tensor arrastado (de P para Q),

$$T^{ab}(x') - T'^{ab}(x') = [T^{ab}(x) + \delta u X^c \partial_c T^{ab}(x)] - [\delta_c^a \delta_d^b T^{cd}(x) + \delta_c^a \delta u \partial_d X^b T^{cd} + \delta_d^b \delta u \partial_c X^a T^{cd}] , \quad (2.50)$$

e efetuando algumas simplificações,

$$T^{ab}(x') - T'^{ab}(x') = \delta u [X^c \partial_c T^{ab}(x) - T^{cb}(x) \partial_c X^a - T^{ac}(x) \partial_c X^b] . \quad (2.51)$$

Finalmente dividindo por δu a equação (2.51) e tomando o limite quando $\delta u \rightarrow 0$, resultará

$$\lim_{\delta u \rightarrow 0} \left[\frac{T^{ab}(x') - T'^{ab}(x')}{\delta u} \right] = X^c \partial_c T^{ab}(x) - T^{cb}(x) \partial_c X^a - T^{ac}(x) \partial_c X^b . \quad (2.52)$$

A operação $L_X T^{ab}$ é a derivada de Lie, [7], [5] que representa simplesmente o seguinte fato

$$L_X T^{ab} \equiv \lim_{\delta u \rightarrow 0} \left[\frac{T^{ab}(x') - T'^{ab}(x')}{\delta u} \right] . \quad (2.53)$$

Supondo $T^a T^b = T^{ab}$ em (2.52) e (2.53), vem que

$$L_X (T^a T^b) = X^c \partial_c (T^a T^b) - (T^c T^b) \partial_c X^a - (T^a T^c) \partial_c X^b . \quad (2.54)$$

Sabendo ainda que

$$L_X (T^a T^b) = (L_X T^a) T^b + T^a (L_X T^b) ,$$

e também que

$$\partial_c (T^a T^b) = (\partial_c T^a) T^b + T^a (\partial_c T^b) ,$$

é fácil notar a partir de (2.54) a forma de uma derivada de Lie para um tensor contravariante de rank 1, sendo esta

$$L_X T^a = X^b \partial_b T^a - T^b \partial_b X^a . \quad (2.55)$$

Tal expressão pode ser escrita também com uso das derivadas covariantes, pois

$$L_X T^a = X^b \nabla_b T^a - T^b \nabla_b X^a \quad (2.56)$$

implica que

$$L_X T^a = X^b \partial_b T^a - T^b \partial_b X^a + [X^b \Gamma_{ca}^b T^c - T^b \Gamma_{ca}^b X^c], \quad (2.57)$$

onde foi usada a definição de derivada covariante como segue⁴

$$\nabla_b T^a \equiv \partial_b T^a + \Gamma_{ca}^b T^c. \quad (2.58)$$

Nota-se também sem dificuldade (para um espaço sem torção)⁵ que

$$[X^b \Gamma_{ca}^b T^c - T^b \Gamma_{ca}^b X^c] = 0, \quad (2.59)$$

Em resumo, a derivada de Lie pode ser escrita em termos da derivada covariante, como segue,

$$L_X T^a = X^b \nabla_b T^a - T^b \nabla_b X^a. \quad (2.60)$$

2.5 Tensor de Riemann

O tensor de Riemann ocupa um lugar especial no desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral, pois este tensor dá uma indicação das propriedades geométricas do espaço [9]. Conforme a definição de derivação covariante,

$$\nabla_b T^a \equiv \partial_b T^a + \Gamma_{ca}^b T^c, \quad (2.61)$$

é possível escrever a seguinte relação⁶:

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a \equiv f(X^a). \quad (2.62)$$

⁴O símbolo Γ_{ca}^b é chamado conexão e não é um tensor.

⁵Onde o tensor de torção é $T_{bc}^a = 0$, lembrando que $T_{bc}^a \equiv \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{cb}^a$

⁶Uma motivação para estudar tal igualdade é a famosa relação $\partial_a \partial_b g - \partial_b \partial_a g = 0$ que expressa a homogeneidade da função g .

Explorando agora as propriedades de $f(X^a)$ com auxílio de (2.61), a seguinte igualdade pode ser obtida

$$f(X^a) = \underline{\partial_c \Gamma_{bd}^a X^b} - \underline{\partial_d \Gamma_{bc}^a X^b} + \underline{\Gamma_{ec}^a \Gamma_{bd}^e X^b} - \underline{\Gamma_{ed}^a \Gamma_{bc}^e X^b} + [\Gamma_{cd}^e - \Gamma_{dc}^e] [\partial_e X^a + \Gamma_{be}^a X^b] + \underbrace{[\Gamma_{ec}^a \partial_d - \Gamma_{ed}^a \partial_c]} X^e. \quad (2.63)$$

O termo destacado por uma chave em (2.63) é facilmente identificado como nulo, e os demais termos sublinhados compõem o denominado tensor de Riemann⁷, assim definido:

$$R_{bcd}^a \equiv \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a. \quad (2.64)$$

Agora a forma final da equação (2.62) será facilmente escrita com uso de (2.63) e (2.64), tal que

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a = R_{bcd}^a X^b + [\Gamma_{cd}^e - \Gamma_{dc}^e] [\partial_e X^a + \Gamma_{be}^a X^b], \quad (2.65)$$

ou então

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a = R_{bcd}^a X^b + [\Gamma_{cd}^e - \Gamma_{dc}^e] \nabla_e X^a. \quad (2.66)$$

Ora, para um espaço sem torção $T_{cd}^e \equiv [\Gamma_{cd}^e - \Gamma_{dc}^e] = 0$, e neste caso a forma final de (2.66) ficará apenas

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a = R_{bcd}^a X^b. \quad (2.67)$$

⁷Em homenagem ao matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Capítulo 3

Equações de Einstein

3.1 Introdução

No nosso cotidiano o uso da geometria euclidiana se mostra eficaz, pois a maioria dos fenômenos com os quais nos deparamos envolvem relações de medida em linha reta: a trena, por exemplo, que é um objeto utilizado para medições de distância nos passa a impressão de que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta; mas será que isto é verdade sempre? Neste capítulo veremos que outras geometrias que não a euclidiana podem se apresentar mais interessantes em determinados contextos. O estudo sistematizado destas geometrias, especificamente associado ao estudo das interações gravitacionais, conduz naturalmente a uma teoria geométrica da gravitação descrita pelas equações de Einstein [9].

3.2 Movimento de satélites e corpos

Quando dois objetos próximos um do outro são abandonados na superfície do nosso planeta, a partir de uma pequena altura, a trajetória destes assemelha-se a duas linhas retas paralelas.

É conhecido o fato dos objetos caírem na superfície terrestre devido ao campo gravitacional proporcionado pela grande diferença entre a massa da Terra e dos

objetos em questão.

Um satélite orbitando em torno da Terra assim como a Lua ou um satélite artificial são exemplos de movimento cujas trajetórias não são linhas retas e sim linhas curvas; notadamente os satélites não saem da órbita terrestre por estarem acoplados gravitacionalmente à mesma, ou seja, existe um campo gravitacional gerado pela massa da Terra.

Os planetas e outros corpos celestes orbitam seguindo trajetórias curvas, conforme indica a figura abaixo, por estarem acoplados gravitacionalmente ao Sol devido à massa deste (veja Figura 3.1)¹.

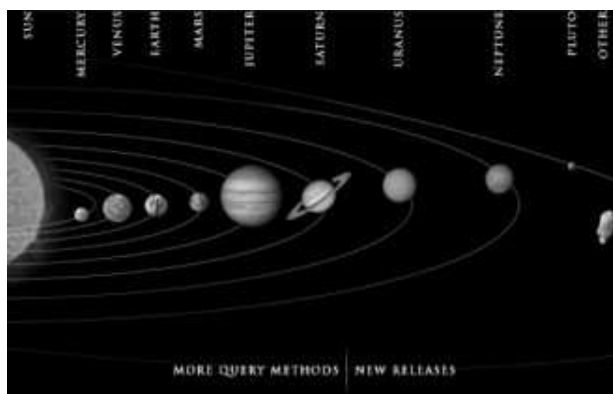


Figura 3.1: Os planetas no sistema solar não se movem em linha reta, então pode-se imaginar que a linha natural na qual o planeta se move poderia ser melhor descrita numa geometria não-euclidiana.

Seguindo este raciocínio: o sistema solar gira em torno do centro da nossa galáxia, que gira em torno do centro de um aglomerado de galáxias, etc. De fato, existem trajetórias que são linhas curvas associadas ao movimento dos corpos acoplados gravitacionalmente devido a presença de um campo gerado pela distribuição de matéria.

Em síntese:

Matéria → Campo Gravitacional → Trajetórias dos corpos acoplados.

¹Figura disponível em <http://www.pgie.ufrgs.br/portalead/oei/solar/solarsys.jpg>

3.3 Geodésicas

A trajetória descrita naturalmente por um corpo assim como a Lua se movendo em torno da Terra, pode ser interpretada, num sentido mais geométrico, como uma linha curva.

É fácil imaginar que escolhendo duas posições distintas da Lua se movendo em torno da Terra a menor distância entre dois pontos não será uma linha reta.

Este tipo de geometria é não-euclidiana². Num espaço curvo assim como a superfície do globo terrestre, onde a menor distância entre dois pontos sobre esta superfície é ligada por uma linha curva denominada geodésica, define-se uma geometria chamada riemanniana (veja Figura 3.2)³.

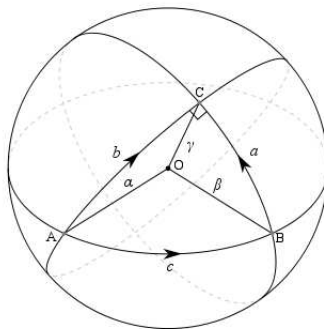


Figura 3.2: As linhas naturais de movimento sobre um globo são curvas; uma formiga por exemplo ao caminhar sobre uma maçã percebe este tipo de trajetória.

Fisicamente as geodésicas são importantes pois tornam possível uma teoria da gravitação bem mais geométrica. Ao assumir que uma grande massa é responsável, por exemplo, por um movimento em uma geodésica [9], a idéia de força mudando o corpo de direção em cada ponto pode ser substituída. Em seu lugar é possível dizer que “massa gera geometria”, ou seja, a presença de matéria

²Na geometria euclidiana a menor distância entre dois pontos é uma reta.

³Figura disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Spherical_triangle.svg

torna o espaço curvo (veja a figura 3.3)⁴. Assim, ao invés de:

Matéria → Campo Gravitacional → Trajetórias dos corpos acoplados,

obtém-se que

Matéria → Geodésicas.

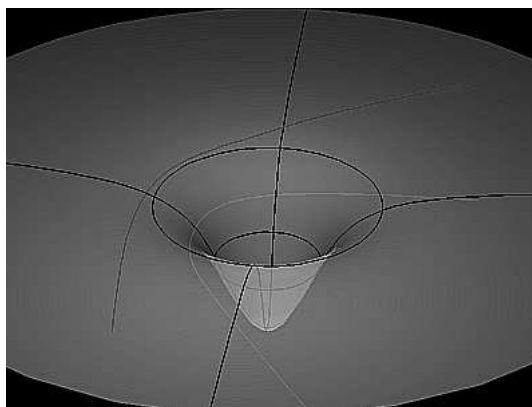


Figura 3.3: As trajetórias possíveis num espaço curvo são dadas pelas linhas curvas naturais dessa região deformada do espaço.

Esta nova visão geométrica, por estar associada ao cálculo tensorial com coordenadas curvilíneas generalizadas, permite descrever as leis da Física de forma invariante sob transformações de coordenadas [5].

Assim como a aceleração pode ser descrita pela relação matemática $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) x \equiv a$, é possível definir uma aceleração relativa entre duas geodésicas como⁵:

$$\left(\frac{D^2}{D\tau^2}\right) \eta^c = X^\alpha \nabla_\alpha (X^\beta \nabla_\beta \eta^c), \quad (3.1)$$

⁴Figura disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Imagem:Geodesiques.png>

⁵Dois corpos muito próximos, abandonados simultaneamente de uma certa altura em relação ao solo, enquanto caem experimentam tal aceleração entre si. Além deste fato as geodésicas muito próximas implicam no anulamento da derivada de Lie [9].

E para geodésicas de dois corpos muito próximos a derivada de Lie fica

$$0 = X^b \nabla_b T^a - T^b \nabla_b X^a, \quad (3.2)$$

ou

$$X^b \nabla_b T^a = T^b \nabla_b X^a. \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.1), segue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{D^2}{D\tau^2} \right) \eta^c &= X^\alpha \nabla_\alpha (\eta^\beta \nabla_\beta X^c) \\ &= X^\alpha (\nabla_\alpha \eta^\beta \nabla_\beta X^c + \eta^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta X^c) \\ &= X^\alpha \nabla_\alpha \eta^\beta \nabla_\beta X^c + X^\alpha \eta^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta X^c. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Lembrando de (2.67) que é possível substituir $\nabla_\alpha \nabla_\beta X^c = \nabla_\beta \nabla_\alpha X^c + R_{b\alpha\beta}^c X^b$ em (3.4), então,

$$\begin{aligned} \left(\frac{D^2}{D\tau^2} \right) \eta^c &= X^\alpha \nabla_\alpha \eta^\beta \nabla_\beta X^c + X^\alpha \eta^\beta (\nabla_\beta \nabla_\alpha X^c + R_{b\alpha\beta}^c X^b) \\ &= X^\alpha \nabla_\alpha \eta^\beta \nabla_\beta X^c + X^\alpha \eta^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha X^c + X^\alpha \eta^\beta R_{b\alpha\beta}^c X^b \\ &= \eta^\alpha \nabla_\alpha (X^\beta \nabla_\beta X^c) + X^\alpha \eta^\beta R_{b\alpha\beta}^c X^b. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Desde que o vetor tangente à geodésica seja

$$X^\beta \nabla_\beta X^c = 0, \quad (3.6)$$

segue finalmente que

$$\left(\frac{D^2}{D\tau^2} \right) \eta^a = R_{bcd}^a X^b X^c \eta^d. \quad (3.7)$$

Esta equação descreve o fato de que o desvio entre as geodésicas é um efeito da curvatura do espaço-tempo.

3.4 As equações de Einstein

A gravidade estudada por Newton pode ser descrita por duas equações, a primeira delas descreve o caminho de uma partícula através do espaço. Se uma partícula

se move através dum campo gravitacional com potencial ϕ , então a segunda lei de Newton traz

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\vec{\nabla}\phi, \quad (3.8)$$

simplificando e escrevendo a aceleração como segunda derivada da posição em relação ao tempo, vem

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (3.9)$$

Esta equação descreve o comportamento de uma partícula em resposta à presença de campo gravitacional e é análoga à equação de desvio das geodésicas

$$\left(\frac{D^2}{D\tau^2}\right)\eta^a = R_{bcd}^a u^b u^c \eta^d. \quad (3.10)$$

Considerando agora a equação de Poisson, que descreve a maneira da massa atuar como uma fonte de campo gravitacional, tal que

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (3.11)$$

O tensor de Riemann R_{bcd}^a dá uma indicação da curvatura do espaço, pois dependendo somente de Γ_{bc}^a e de suas derivadas fica claro que para um espaço plano os componentes de g_{ab} sendo escritos em coordenadas retilíneas implicam no anulamento dos Γ_{bc}^a ; conseqüentemente $R_{bcd}^a = 0$. Com uso das relações

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_d g_{bc} + \partial_b g_{cd} - \partial_c g_{db}), \quad (3.12)$$

e

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a, \quad (3.13)$$

é notável que o tensor de curvatura está associado à derivada segunda da métrica [9]. Podemos considerar a métrica como um análogo ao potencial da teoria newtoniana da gravitação e, assim, termos envolvendo o tensor de curvatura deverão aparecer no lado esquerdo da equação.

Assim como a equação $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ relaciona o traço de $\nabla_i \nabla_j \phi$ com a densidade de matéria, naturalmente, espera-se que o traço do tensor de curvatura

$(\delta_d^c R_{abc}^d)$ denominado tensor de Ricci esteja associado então com o tensor energia-momento⁶. Então

$$R_{ab} \propto T_{ab}, \quad (3.14)$$

e isto também pode ser interpretado como a seguinte afirmação:

[a curvatura do espaço-tempo é gerada pela presença de matéria-energia.]

Uma importante lei de conservação do tensor T^{ab} [5] é dada pela relação

$$\nabla_b T^{ab} = 0, \quad (3.15)$$

associada com a conservação de energia e de momento. Mas considerando (3.15) é possível notar que

$$\nabla_b R^{ab} \neq 0. \quad (3.16)$$

Então para respeitar (3.15) é necessário acrescentar um termo em (3.14), gerando um novo tensor, denominado tensor de Einstein⁷:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R. \quad (3.17)$$

Agora, com todas as exigências satisfeitas, a equação de Einstein toma sua forma final:

$$G_{ab} \propto T_{ab}, \quad (3.18)$$

ou

$$G_{ab} = \kappa T_{ab}. \quad (3.19)$$

A constante κ pode ser definida tal que $\kappa \equiv -8\pi G$ recupera os resultados no limite da teoria de gravitação newtoniana. Finalmente é possível escrever

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = -8\pi G T_{ab}. \quad (3.20)$$

⁶Na teoria da relatividade especial massa e energia são equivalentes; para incorporar esta idéia nesta nova teoria da gravitação é possível propor um tensor que envolva todas as formas de massa-energia, este é o tensor denominado tensor energia-momento.

⁷O termo que foi acrescentado para obter o tensor de Einstein veio da seguinte relação $\nabla_a R_{ab} = \frac{1}{2}g^{ab}\nabla_a R$ que vem das relações de permutação do tensor de Riemann (identidades de Bianchi): $\nabla_a R_{debc} + \nabla_c R_{deab} + \nabla_b R_{deca} = 0$.

Einstein, inicialmente não satisfeito com a dinâmica prevista para o universo proposta por estas equações, adicionou um termo chamado constante cosmológica⁸, cuja função seria manter o universo estático; pela inclusão deste termo obtém-se que

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} - \Lambda g_{ab} = -8\pi GT_{ab},$$

recentemente observações indicam um tipo de energia do vácuo atuando no universo, e esta energia pode, ao menos em princípio, ser associada à constante cosmológica.

⁸O próprio Einstein logo após as observações de Hubble teria considerado esta atitude o maior erro de sua vida.

Capítulo 4

Equação de Friedmann

4.1 Introdução

Usando agora as equações de Einstein associadas com a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), lembrando que tal métrica inclui condições de homogeneidade e isotropia [4], torna-se possível obter as equações de Friedmann.

4.2 Lei de Hubble

Em 1929, o astrônomo norte-americano Edwin Hubble, pioneiro em pesquisas na área da astronomia extragaláctica, notou que quase todas as galáxias por ele observadas se afastavam da nossa galáxia. Isto implica em dizer que o universo está se expandindo (veja a figura 4.1)¹.

¹Figura disponível em: <http://www.answers.com/topic/big-bang-theory>

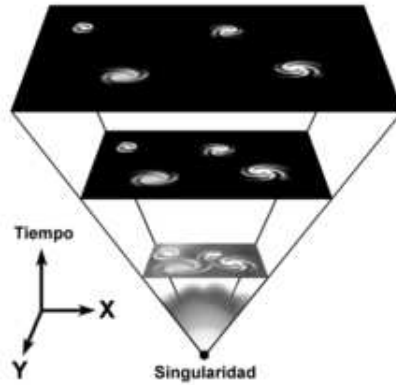


Figura 4.1: Universo em expansão.

Para completar, Hubble observou a seguinte lei: quanto mais distante estiver uma galáxia, mais rapidamente ela se afasta de nós, ou seja, a lei de Hubble,

$$\vec{v} = \underbrace{H}_{\frac{\dot{a}}{a}} \vec{r}, \quad (4.1)$$

é o suporte observacional da cosmologia moderna.

A lei de Hubble, que é uma lei empírica, pode ser deduzida levando em conta a seguinte função para o raio,

$$r(t) = a(t)r_0, \quad (4.2)$$

onde $a(t)$ é denominado fator de escala [10].

4.3 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

A teoria da relatividade geral de Einstein deve ser utilizada para explicar a expansão do universo. O elemento de linha para um universo homogêneo e isotrópico em

expansão é dado pela seguinte relação [4], [11],

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (4.3)$$

e tal relação também recebe o nome de métrica de FLRW.

4.4 Tensor energia-momento

Um fluido perfeito é caracterizado por três quantidades, uma 4-velocidade $u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$, um campo de densidades $\rho_0 = \rho_0(x)$ e um campo de pressão $p = p(x)$. No limite quando p se anula, um fluido perfeito se reduz para poeira. Isto sugere que o tensor energia-momento para um fluido perfeito seja da forma [4], [5], [8], [9], [11]

$$T^{ab} = \rho_0 u^a u^b + p S^{ab}, \quad (4.4)$$

para um tensor simétrico S^{ab} . Os únicos tensores de ordem 2 associados com fluido são $u^a u^b$ e a métrica g^{ab} , e então a proposta mais natural é uma combinação linear destes, logo

$$S^{ab} = \lambda u^a u^b + \mu g^{ab}. \quad (4.5)$$

Com uso de (4.5) e (4.4) decorre que

$$T^{ab} = (\rho_0 + p) u^a u^b + p g^{ab}, \quad (4.6)$$

para $\mu = 1$ e $\lambda = 1$.

De forma análoga define-se a forma covariante do tensor energia-momento

$$T_{ab} = (\rho + p) u_a u_b + p g_{ab}, \quad (4.7)$$

onde $u_0 u_0 = 1$, $u_1 u_1 = u_2 u_2 = u_3 u_3 = 0$

Com uso da métrica FLRW é possível escrever o tensor métrico g_{ab} , partindo da relação

$$ds^2 = g_{ab}(x) [dx^a dx^b], \quad a, b = \{0...3\}, \quad (4.8)$$

A representação matricial se torna conveniente para o tensor métrico tal que

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Para que a equação (4.8) represente a equação (4.3) é necessário que $a = b$, ou seja

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2, \quad (4.10)$$

e isto equivale a dizer que somente os componentes da diagonal principal serão não-nulos. Deste modo a matriz (4.9) ficará sendo apenas

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Por comparação entre (4.10) e (4.3) segue finalmente que

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 (1 - kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Conhecendo o tensor métrico é possível determinar a conexão Γ_{bc}^a usando (2.35), por conseguinte obter os tensores R_{bcd}^a (tensor de Riemann) e R_{ab} (tensor de Ricci). É possível obter também o escalar de curvatura R , pois² $R \equiv g^{ab} R_{ab}$.

Assim sendo a representação matricial ajuda a organizar estes vários resultados:

$$\Gamma_{bc}^a = \{ \Gamma_{bc}^0, \Gamma_{bc}^1, \Gamma_{bc}^2, \Gamma_{bc}^3 \}, \quad (4.13)$$

²Veja o exercício (6.31) da referência [5].

$$\Gamma_{bc}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}(1 - kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\dot{a}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\Gamma_{bc}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \dot{a}a^{-1} & 0 & 0 \\ \dot{a}a^{-1} & kf(r, k)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(r, k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(r, k) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

onde $f(r, k) \equiv -r(1 - kr^2)$,

$$\Gamma_{bc}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{a}a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ \dot{a}a^{-1} & r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\Gamma_{bc}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{a}a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1} \\ 0 & 0 & r^{-2} & \cot \theta \\ \dot{a}a^{-1} & r^{-1} & \cot \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

O escalar de Ricci será dado pelo produto matricial

$$R = \begin{pmatrix} g^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

logo,

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}, \quad (4.19)$$

e fica então evidente que os componentes do tensor de Ricci necessários para obter

o escalar de Ricci são apenas aqueles cujos valores a e b sejam idênticos. Então:

$$\begin{aligned} \delta_a^b R_{ab} &= \begin{pmatrix} R_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\ddot{a}a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)}{(1-k\tau^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(a, \ddot{a}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(a, \ddot{a}) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $f(a, \ddot{a}) \equiv r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$. Finalmente, usando o tensor de Ricci de (4.20), o tensor métrico de (4.12), e lembrando que $g^{ab} = \frac{1}{g_{ab}}$, o escalar de Ricci fica

$$R = \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \quad (4.21)$$

4.5 A equação de Friedmann

Calculando os tensores G_{ab} e T_{ab} obtém-se que

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} -3(\dot{a}^2 + k)a^{-2} + \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(\ddot{a}, \dot{a}, a)g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(\ddot{a}, \dot{a}, a)g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\ddot{a}, \dot{a}, a)g_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

sendo $f(\ddot{a}, \dot{a}, a) \equiv [2\ddot{a}a^{-1} + (\dot{a}^2 + k)a^{-2} - \Lambda]$, e

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pg_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pg_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pg_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Relembrando que

$$G_{ab} = -8\pi GT_{ab}, \quad (4.24)$$

é possível então reconhecer apenas 2 soluções distintas com uso de (4.22)...(4.24). A primeira destas soluções recebe o nome equação de Friedmann, obtida para o caso $a = b = 0$, logo,

$$G_{00} = -8\pi GT_{00}, \quad (4.25)$$

ou seja,

$$-3(\dot{a}^2 + k)a^{-2} + \Lambda = -8\pi G\rho, \quad (4.26)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}. \quad (4.27)$$

A outra solução distinta será para $a = b = i$, sendo $i = \{1, 2, 3\}$, e segue que

$$G_{ii} = -8\pi GT_{ii}, \quad (4.28)$$

então,

$$f(\ddot{a}, \dot{a}, a)g_{ii} = -8\pi Gpg_{ii}, \quad (4.29)$$

e finalmente obtém-se que

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = -8\pi Gp + \Lambda. \quad (4.30)$$

Combinando as equações (4.27) e (4.30) o seguinte resultado é encontrado:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p). \quad (4.31)$$

As equações (4.27) e (4.31) são as famosas equações de Friedmann que descrevem a evolução temporal do fator de escala devido à expansão espacial do universo.

A constante k que aparece na equação (4.27) está diretamente ligada à curvatura do espaço-tempo. O parâmetro de curvatura, k , é um número que pode assumir três valores discretos: $k = 0$ se o universo é espacialmente plano, $k = -1$ se o universo tem curvatura espacial negativa e $k = +1$ se a curvatura do universo for positiva [4], [12].

De acordo com a curvatura do universo, podemos ter três formas geométricas diferentes para o universo (veja a figura 4.2)³.

³Figura disponível em <http://map.gsfc.nasa.gov/m-uni-101shape.html>

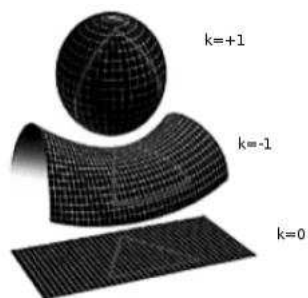


Figura 4.2: Universo esférico (com curvatura positiva), universo hiperbólico (com curvatura negativa) ou ainda um universo plano (com curvatura nula).

Capítulo 5

Modelos cosmológicos

5.1 Introdução

Uma maneira bastante geral de descrever o universo consiste em acoplar uma equação de estado (que relaciona pressão e densidade de energia), juntamente com a equação de Friedmann [12], [13].

Atualmente existe a necessidade de considerar um componente exótico extra no universo: a energia escura [3], que geralmente é representada pela constante cosmológica [14], [15], [16], mas que pode estar ligada a outros modelos cosmológicos [17], [18], [19], [20], [21], [22].

Como motivação para o uso de uma equação de estado não-linear, mostramos que a equação de um oscilador amortecido possuidor de um termo de antiatrito (favorável ao aumento da velocidade de expansão) e uma equação de estado não linear descrevem um cenário de expansão acelerada, no qual a energia escura e o antiatrito possuem funções equivalentes [6].

5.2 Modelo com equação não-linear

- Equação de conservação de energia:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0; \tag{5.1}$$

- Equação de estado não-linear:

$$p = (\gamma - 1)\rho + f(\rho); \quad (5.2)$$

- Equação de Friedmann:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (5.3)$$

onde

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \quad (5.4)$$

Aplicando a derivada temporal na equação de Friedmann e manipulando algebricamente através das equações (5.1) a (5.4) obtem-se [23]

$$\dot{H} + \frac{3\gamma}{2}H^2 + \frac{k}{a^2} \left(\frac{3\gamma}{2} - 1\right) = -4\pi f(\rho). \quad (5.5)$$

Substituindo os valores da equação (5.4) na equação (5.5), vem que

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3\gamma}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \left(\frac{3\gamma}{2} - 1\right) = -4\pi f(\rho). \quad (5.6)$$

Agora, para $\gamma \neq 0$ essa equação pode ser escrita como

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(a^{\frac{3\gamma}{2}}\right) + k \frac{3\gamma}{2} \left(\frac{3\gamma}{2} - 1\right) a^{\frac{3\gamma}{2}-2} = -6\pi\gamma a^{\frac{3\gamma}{2}} f(\rho), \quad (5.7)$$

enquanto que para $\gamma = 0$ a equação é

$$\frac{d^2}{dt^2} (\ln a) - \frac{k}{a^2} = -4\pi f(\rho). \quad (5.8)$$

5.3 A equação de um oscilador amortecido

Pode-se escrever a equação de um oscilador amortecido, além da forma costumeira, com uma constante adicional ligada à velocidade. Assim tanto forças dissipativas serão descritas quanto forças ligadas com o aumento das oscilações.

Para um oscilador harmônico amortecido comum tem-se a ação de uma força restauradora do tipo $F_r = -mDx$, junto com a força de atrito, amortecedora, dependente da velocidade, $F_{at} = -mC\dot{x}$. Então, usando a segunda lei de Newton, pode-se escrever

$$\ddot{x} + C\dot{x} + Dx = 0. \quad (5.9)$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$\ddot{x} + (C_1 - C_2)\dot{x} + Dx = 0. \quad (5.10)$$

As forças de anti-atrito serão dominantes em relação às forças dissipativas sempre que $C < 0$, ou seja, $C_1 < C_2$.

A solução da equação para o oscilador amortecido é sempre do tipo

$$x(t) = e^{-\frac{C}{2}t} \left[Ae^{t\sqrt{\frac{C^2}{4}-D}} + Be^{-t\sqrt{\frac{C^2}{4}-D}} \right], \quad (5.11)$$

ou, no caso de $\frac{C^2}{4} - D = 0$,

$$x(t) = e^{-\frac{C}{2}t} [At + B], \quad (5.12)$$

onde A e B são constantes. Na mecânica clássica, usualmente a quantidade $\frac{C^2}{4} - D$ é negativa, de modo que as exponenciais que aparecem na solução acima podem ser convertidas em funções seno e cosseno. Entretanto, pode-se imaginar casos em que $\frac{C^2}{4} - D$ é uma quantidade absolutamente positiva, ou seja, nesses casos não há oscilação e o sistema cresce indefinidamente.

5.4 O fator de escala e o oscilador amortecido

Para que as equações que governam a evolução do fator de escala sejam semelhantes à de um oscilador harmônico amortecido é necessário que se tenha, para $\gamma \neq 0$,

$$f(\rho) = \alpha H + \beta, \quad (5.13)$$

ou, para $\gamma = 0$,

$$f(\rho) = \alpha H + \beta \ln a, \quad (5.14)$$

onde α e β são constantes de proporcionalidade. Assim, tem-se, para $\gamma \neq 0$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(a^{\frac{3\gamma}{2}} \right) + 4\pi\alpha \frac{d}{dt} \left(a^{\frac{3\gamma}{2}} \right) + 6\pi\beta\gamma a^{\frac{3\gamma}{2}} = -k \frac{3\gamma}{2} \left(\frac{3\gamma}{2} - 1 \right) a^{\frac{3\gamma}{2}-2}, \quad (5.15)$$

ou, no caso de $\gamma = 0$,

$$\frac{d^2}{dt^2} (\ln a) + 4\pi\alpha \frac{d}{dt} (\ln a) + 4\pi\beta (\ln a) = \frac{k}{a^2}. \quad (5.16)$$

Se a curvatura for nula ($k = 0$) essas equações são as mesmas de um oscilador harmônico amortecido.

Pode-se então esperar que para um universo onde o anti-atrito (que na ocasião representa a energia escura) seja dominante $\alpha < 0$.

Usando as equações (5.2), (5.3) e (5.13) pode-se escrever que, para $\gamma \neq 0$,

$$p = \frac{3}{8\pi} (\gamma - 1) \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) + \alpha H + \beta, \quad (5.17)$$

enquanto que, usando as equações (5.2), (5.3) e (5.14), pode-se notar que para $\gamma = 0$ vale

$$p = -\frac{3}{8\pi} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) + \alpha H + \beta \ln a. \quad (5.18)$$

Se $\alpha < 0$ isso significa que a pressão do fluido cosmológico tem ao menos um termo negativo, que pode ser dominante sob certas condições. Pressão negativa é algo incomum na física clássica, Newtoniana, mas é uma propriedade esperada para a ‘energia escura’.

Os casos mais simples de se analisar são sempre aqueles em que não há curvatura ($k = 0$). Além disso deve-se sempre lembrar que o universo está expandindo de forma acelerada, ou seja, as soluções obtidas para o fator de escala devem ser funções que crescem de forma acelerada.

5.5 Soluções para o fator de escala

Usando a solução da equação para o oscilador amortecido, tem-se que o fator de escala obedece as equações

$$a^{\frac{3\gamma}{2}}(t) = e^{-2\pi\alpha t} \left[A e^{t\sqrt{4\pi^2\alpha^2 - 6\pi\beta\gamma}} + B e^{-t\sqrt{4\pi^2\alpha^2 - 6\pi\beta\gamma}} \right], \quad (5.19)$$

ou, no caso de $4\pi^2\alpha^2 - 6\pi\beta\gamma = 0$,

$$a^{\frac{3\gamma}{2}}(t) = e^{-2\pi\alpha t} [At + B], \quad (5.20)$$

para $\gamma \neq 0$, e

$$a(t) = \exp \left\{ e^{-2\pi\alpha t} \left[Ae^{t\sqrt{4\pi^2\alpha^2 - 4\pi\beta}} + Be^{-t\sqrt{4\pi^2\alpha^2 - 4\pi\beta}} \right] \right\}, \quad (5.21)$$

ou, no caso de $4\pi^2\alpha^2 - 4\pi\beta = 0$,

$$a(t) = \exp \left\{ e^{-2\pi\alpha t} [At + B] \right\}. \quad (5.22)$$

Um exemplo de um caso particular de equação de estado que fornece tal tipo de solução é

$$p = (\gamma - 1)\rho - M\rho^{1/2}, \quad (5.23)$$

onde $M > 0$ é uma constante. Nesse caso, quando $k = 0$ tem-se, usando a equação de Friedmann, que

$$f(\rho) = -H\sqrt{\frac{3M^2}{8\pi}}, \quad (5.24)$$

e, assim,

$$\alpha = -\sqrt{\frac{3M^2}{8\pi}}, \quad \beta = 0, \quad (5.25)$$

de modo que, se $\gamma \neq 0$,

$$a^{\frac{3\gamma}{2}}(t) = A + Be^{t\sqrt{6\pi M^2}}, \quad (5.26)$$

e, se $\gamma = 0$,

$$a(t) = \exp \left\{ A + Be^{t\sqrt{6\pi M^2}} \right\}. \quad (5.27)$$

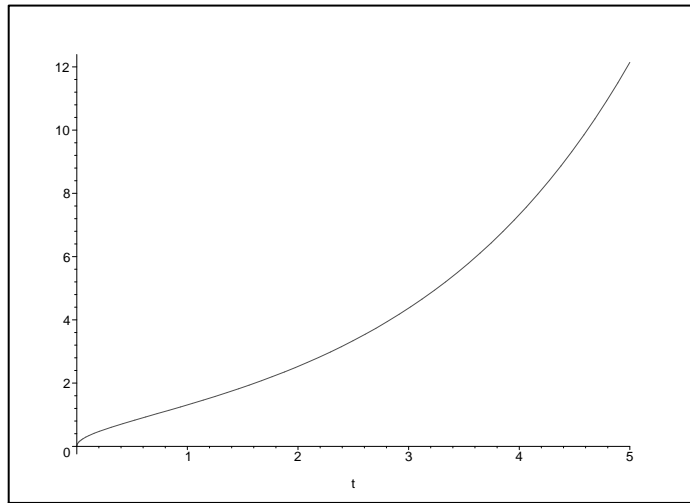


Figura 5.1: Gráfico mostrando o comportamento do fator de escala a em função do tempo t para a equação (5.26), com $\gamma = 4/3$, e $B = -A = 1$.

5.6 O gás de Chaplygin

Um modelo bastante encontrado na literatura como tentativa de descrever um fluido cosmológico com equação de estado não-linear é o do gás de Chaplygin, que pode ser encontrado em uma série de variações [24]–[33], seja com dois, três ou quatro parâmetros livres. Tal gás poderia, ao menos em princípio, representar um universo que passou por uma fase com predominância de matéria para depois chegar a uma fase com predominância de uma energia escura.

Modelo	Equação básica
Gás de Chaplygin original	$p = -A/\rho$
Gás de Chaplygin generalizado	$p = -A\rho^{-\mu}$
Gás de Chaplygin modificado	$p = (\gamma - 1)\rho - M\rho^{-\mu}$
Novo modelo de gás de Chaplygin modificado	$p = (\gamma - 1)\rho - M\rho^{-\mu}a^{-\nu}$

5.7 O novo modelo de gás de Chaplygin modificado (NMCG)

O novo modelo de gás de Chaplygin modificado (NMCG) é representado pela seguinte equação de estado não-linear [34]:

$$p = (\gamma - 1) \rho - M a^{-\nu} \rho^{-\mu}, \quad (5.28)$$

que quando associada com conservação de energia produz o seguinte resultado

$$d \left[(\rho a^{3\gamma})^{1+\mu} \right] = 3M (1 + \mu) a^{3\gamma(1+\mu)-\nu-1} da, \quad (5.29)$$

ou, de maneira equivalente, para¹ $3\gamma(1 + \mu) \neq \nu$ e $\mu \neq -1$,

$$\rho = \left[A a^{-\nu} + (B - A) a^{-3\gamma(1+\mu)} \right]^{\frac{1}{1+\mu}}, \quad (5.30)$$

onde $A \equiv 3M(1 + \mu) [3\gamma(1 + \mu) - \nu]^{-1}$ e $B \equiv \rho_0^{1+\mu}$. Entretanto, neste caso, temos que

$$w = \frac{p}{\rho} = \gamma - 1 - M a^{-\nu} \rho^{-(1+\mu)} = \gamma - 1 - \frac{\frac{M}{A}}{1 + \left(\frac{B-A}{A}\right) a^{\nu-3\gamma(1+\mu)}} \quad (5.31)$$

e

$$v^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = (\gamma - 1)(1 + \mu) - \mu w + \frac{\nu}{3} \left(1 - \frac{\gamma}{1 + w} \right). \quad (5.32)$$

A equação de Friedmann, neste caso, será

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} \left[A a^{-\nu} + (B - A) a^{-3\gamma(1+\mu)} \right]^{\frac{1}{1+\mu}}. \quad (5.33)$$

¹Para $3\gamma(1 + \mu) = \nu$ temos

$$\rho = a^{-\frac{\nu}{1+\mu}} \left[\rho_0^{1+\mu} + 3M(1 + \mu) \ln a \right]^{\frac{1}{1+\mu}}.$$

5.8 Comparação com outros modelos

É bastante interessante neste estágio comparar o NMCG com o modelo de um universo oscilante apresentado por Martin Bojowald [35], assim como fizemos anteriormente, comparando um modelo de equação de estado não-linear com o modelo de um oscilador possuidor de termo antiatrito.

A equação de Friedmann aparece como

$$H^2 = A_{osc} a^{-6} (1 - B_{osc} a^{4x_{osc}-4}), \quad (5.34)$$

onde A_{osc} , B_{osc} e x_{osc} são constantes. Tal resultado pode ser reproduzido pelo NMCG em um espaço plano com uso de $\mu = 0$, $\gamma = 2$ e $\nu = 10 - 4x_{osc}$. Então temos

$$\rho = \left(\rho_0 + \frac{M}{\gamma_x - 2} \right) a^{-6} \left[1 - \frac{M a^{-3(\gamma_x - 2)}}{\rho_0 (\gamma_x - 2) + M} \right], \quad (5.35)$$

e

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\rho_0 + \frac{M}{\gamma_x - 2} \right) a^{-6} \left[1 - \frac{M a^{-3(\gamma_x - 2)}}{\rho_0 (\gamma_x - 2) + M} \right], \quad (5.36)$$

com $A_{osc} = \frac{8\pi}{3} \left(\rho_0 + \frac{M}{\gamma_x - 2} \right)$ e $B_{osc} = \frac{M}{\rho_0 (\gamma_x - 2) + M}$. Para alguns valores do parâmetro γ_x (definido na relação $\nu \equiv 3\gamma_x (\mu + 1)$) essa equação possui resultados exatos. Por exemplo, se escolhermos $\gamma_x = 2/3$, teremos

$$H^2 = 2\pi \left(\frac{4\rho_0}{3} - M \right) a^{-6} \left[1 - \frac{M a^4}{M - \frac{4\rho_0}{3}} \right], \quad (5.37)$$

cujas soluções são dadas pelas equações paramétricas

$$a = \left(\frac{4\rho_0}{3M} - 1 \right)^{\frac{1}{4}} \sinh^{\frac{1}{2}} \left[(8\pi M)^{\frac{1}{2}} \eta \right], \quad (5.38)$$

e

$$t = \left(\frac{4\rho_0}{3M} - 1 \right)^{\frac{1}{4}} (8\pi M)^{-\frac{1}{2}} \left[F \left(\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 2E \left(\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] + (2\pi M)^{-\frac{1}{2}} \sinh^{\frac{1}{2}} \left[(8\pi M)^{\frac{1}{2}} \eta \right] \frac{\cosh \left[(8\pi M)^{\frac{1}{2}} \eta \right]}{1 + \sinh \left[(8\pi M)^{\frac{1}{2}} \eta \right]}, \quad (5.39)$$

onde $\cos \alpha = \frac{1 - \sinh\left[(8\pi M)^{\frac{1}{2}}\eta\right]}{1 + \sinh\left[(8\pi M)^{\frac{1}{2}}\eta\right]}$, e $F(\alpha, k)$ e $E(\alpha, k)$ são as integrais elípticas de primeira e de segunda espécie respectivamente².

Outro resultado interessante é obtido através da escolha $\gamma = 4/3$, $\gamma_x = 1$, $\mu = -2$ and $\nu = -3$. Então teremos

$$\rho = \frac{1}{Aa^3 + (B - A)a^4}, \quad (5.40)$$

e, por conseguinte, num universo plano a solução da equação de Friedmann é³

$$\left[\frac{a}{2} + \frac{A}{4(B - A)}\right] [Aa + (B - A)a^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{A^2}{8(B - A)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \arcsin \left[\frac{2a(B - A)}{A} + 1 \right] - \frac{\pi}{2} \right\} = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} t, \quad (5.41)$$

onde foi utilizado que $B < A$ a fim de obter $w < 0$ para valores de $a < (1 - B/A)^{-1}$.

²Veja a equação 2.465.5 da referência [36].

³Veja as equações 2.262.1 e 2.261 (com $c < 0$ e $\Delta < 0$) da referência [36].

Capítulo 6

Formação de estruturas

6.1 Introdução

A formação de estruturas pode ser modelada a partir de pequenas flutuações de densidade; deste modo a evolução das perturbações de densidade estaria associada com o surgimento de estruturas cósmicas. Uma maneira simples de observar tal fato segue a abordagem encontrada na referência [13], conforme detalhamos na seção seguinte.

6.2 Perturbações de densidade

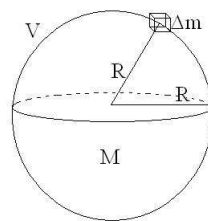


Figura 6.1: Figura ilustrativa de uma esfera com pequena perturbação de densidade

A densidade total da esfera, ρ , pode ser escrita como uma densidade média $\bar{\rho}$ associada a uma pequena perturbação δ desta densidade média, de forma que δ será um número muito pequeno,

$$|\delta| \ll 1, \quad (6.1)$$

ou seja,

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta). \quad (6.2)$$

Podemos então calcular a força

$$F = \frac{-GM\Delta m}{R^2}, \quad (6.3)$$

que segue a definição

$$F \equiv \frac{dp}{dt} = v \frac{dM}{dt} + M \frac{dv}{dt} = v \frac{dM}{dt} + M \frac{dv}{dt}. \quad (6.4)$$

Considerando que a variação da massa da esfera seja muito pequena,

$$\lim_{dM \rightarrow 0} v \frac{dM}{dt} = 0, \quad (6.5)$$

então a aceleração fica sendo

$$\ddot{R} = \frac{-G\Delta m}{R^2}, \quad (6.6)$$

ou, de maneira análoga,

$$\ddot{R} = \frac{-GM}{R^2}. \quad (6.7)$$

A relação (6.2) traz

$$\frac{M}{V} = \frac{\bar{m}}{V} + \frac{\bar{m}}{V}\delta, \quad (6.8)$$

de onde podemos destacar o segundo termo,

$$\bar{\rho}\delta = \frac{\bar{m}\delta}{V} = \frac{\Delta m}{V}, \quad (6.9)$$

isolando Δm para substituir em (6.6), de modo que tem-se

$$\Delta m = \bar{\rho}\delta \frac{4}{3}\pi R^3, \quad (6.10)$$

e, logo,

$$\ddot{R} = -\frac{G}{R^2} \left(\bar{\rho} \delta \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_V \right). \quad (6.11)$$

A massa total da esfera pode ser escrita como função da densidade, e, supondo o volume aproximadamente constante, segue:

$$M = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \bar{\rho}. \quad (6.12)$$

ou seja,

$$R_0 = \left(\frac{3M}{4\pi\bar{\rho}} \right)^{1/3} = cte. \quad (6.13)$$

Conforme pode ser notado de (6.8),

$$M = \bar{m} + \bar{m}\delta, \quad (6.14)$$

e deste modo,

$$M = \bar{\rho}V + \bar{\rho}V\delta, \quad (6.15)$$

ou ainda,

$$M = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}(1 + \delta)R^3. \quad (6.16)$$

Então segue que

$$\left(\frac{3M}{4\pi\bar{\rho}} \right)^{1/3} = (1 + \delta)^{1/3}R. \quad (6.17)$$

Finalmente, com o uso de (6.13), vem que

$$R_0 = (1 + \delta)^{1/3}R. \quad (6.18)$$

Isolando R ,

$$R = R_0(1 + \delta)^{-1/3}, \quad (6.19)$$

e expandindo $(1 + \delta)^{-1/3}$ em série de Taylor segue que

$$(1 + \delta)^{-1/3} = \left(1 - \frac{\delta}{3} + \mathcal{O}(2) \right), \quad (6.20)$$

e então

$$R = R_0(1 + \delta)^{-1/3} \approx R_0 \left(1 - \frac{\delta}{3} \right). \quad (6.21)$$

Finalmente,

$$\ddot{R} \approx -R_0 \frac{\ddot{\delta}}{3}, \quad (6.22)$$

e usando a aproximação $R_0 \approx R$

$$\frac{\ddot{R}}{R} \approx \left(-\frac{\ddot{\delta}}{3} \right). \quad (6.23)$$

Usando então a expressão (6.11) em (6.22) verificamos que

$$\ddot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} \delta. \quad (6.24)$$

Considerando agora um caso um pouco mais geral

$$M = \underbrace{\frac{4\pi}{3} R^3(t)}_V \underbrace{\bar{\rho}(t)}_\rho (1 + \delta(t)), \quad (6.25)$$

ficando com a proporcionalidade e isolando R segue que

$$R(t) \propto \rho^{-1/3} (1 + \delta)^{-1/3}. \quad (6.26)$$

Considerando também que a densidade é inversamente proporcional ao cubo do fator de escala,

$$\rho(t) \propto [a(t)]^{-3}, \quad (6.27)$$

então, de (6.26) e (6.27) segue que

$$R(t) \propto a(1 + \delta)^{-1/3}. \quad (6.28)$$

Expandindo em série de Taylor o termo $(1 + \delta)^{-1/3}$,

$$(1 + \delta)^{-1/3} = 1 - \frac{\delta}{3} + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (6.29)$$

e truncando a série vem

$$(1 + \delta)^{-1/3} \approx 1 - \frac{\delta}{3}. \quad (6.30)$$

Substituindo (6.30) em (6.28) obtém-se imediatamente as três relações seguintes:

$$R(t) \propto a \left(1 - \frac{\delta}{3}\right), \quad (6.31)$$

$$\dot{R}(t) \propto \dot{a} \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) - a \frac{\dot{\delta}}{3}, \quad (6.32)$$

e

$$\ddot{R}(t) \propto \ddot{a} \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) - \dot{a} \frac{\dot{\delta}}{3} - a \frac{\ddot{\delta}}{3} - \dot{a} \frac{\dot{\delta}}{3}. \quad (6.33)$$

Dividindo então (6.33) por (6.31) ficamos com

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} \propto \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{3} \frac{\dot{\delta}\dot{a}}{a \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)} - \frac{\ddot{\delta}}{3 \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)}. \quad (6.34)$$

Levando agora em conta a seguinte expansão,

$$\left(1 - \frac{\delta}{3}\right)^{-1} = 1 + \frac{\delta}{3} + \mathcal{O}(2), \quad (6.35)$$

que ao ser truncada traz

$$\left(1 - \frac{\delta}{3}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{\delta}{3} \quad (6.36)$$

pode-se substituir em (6.34) para se obter

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} \propto \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{3} \frac{\dot{\delta}\dot{a}}{a} \left(1 + \frac{\delta}{3}\right) - \frac{\ddot{\delta}}{3} \left(1 + \frac{\delta}{3}\right), \quad (6.37)$$

ou ainda,

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} \propto \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{3} \frac{\dot{\delta}\dot{a}}{a} - \frac{2}{9} \frac{\dot{\delta}\dot{\delta}\dot{a}}{a} - \frac{\ddot{\delta}}{3} - \frac{\delta\ddot{\delta}}{9}. \quad (6.38)$$

Neste momento é possível notar que os termos $\delta\dot{\delta}$ e $\delta\ddot{\delta}$ podem ser conhecidos devido ao fato de δ ter sido definido previamente como uma quantidade muito pequena. Assim,

$$|\delta| \ll 1 \rightarrow \delta^2 \approx 0, \quad (6.39)$$

e, logo,

$$\frac{d}{dt}(\delta^2) \approx \frac{d}{dt}(0) = 0, \quad (6.40)$$

ou seja,

$$2\delta\dot{\delta} \approx 0 \rightarrow \delta\dot{\delta} \approx 0. \quad (6.41)$$

Agora possuímos dois fatos,

$$\delta^2 \approx 0, \quad \delta\dot{\delta} \approx 0, \quad (6.42)$$

que utilizaremos de maneira análoga,

$$\frac{d^2}{dt^2} (\delta^2) \approx 0 \approx \dot{\delta}^2 + \delta\ddot{\delta} \rightarrow -\dot{\delta}^2 \approx \delta\ddot{\delta}. \quad (6.43)$$

Multiplicando por δ ,

$$\delta (-\dot{\delta}^2) \approx \delta (\delta\ddot{\delta}) \approx (-\delta\dot{\delta}) (\dot{\delta}) \approx 0, \quad (6.44)$$

de onde nota-se facilmente que

$$\delta (\delta\ddot{\delta}) \approx 0 \quad (6.45)$$

então ou $\delta \approx 0$ ou $\delta\ddot{\delta} \approx 0$. Como sabemos, δ é pequeno, mas não nulo, e então segue que

$$\delta\ddot{\delta} \approx 0, \quad (6.46)$$

Finalmente, com uso de (6.41) e (6.46) em (6.38), sai que

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} \propto \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{3} \frac{\dot{\delta}\dot{a}}{a} - \frac{\ddot{\delta}}{3}. \quad (6.47)$$

Utilizando (6.7) é possível notar que

$$\ddot{R} = -G \frac{M}{R^2} = -\frac{G}{R^2} (\rho V) = -\frac{4}{3} \pi G \bar{\rho} (1 + \delta) R, \quad (6.48)$$

de onde segue que

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3} \pi G \bar{\rho} - \frac{4}{3} \pi G \bar{\rho} \delta. \quad (6.49)$$

Com o uso de (6.47) e (6.49) vem

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{3} \frac{\dot{\delta}\dot{a}}{a} - \frac{\ddot{\delta}}{3} = -\frac{4}{3} \pi G \bar{\rho} - \frac{4}{3} \pi G \bar{\rho} \delta, \quad (6.50)$$

e para o caso limite $\delta \approx 0$,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}, \quad (6.51)$$

e, assim, de (6.51) e (6.50), encontramos

$$-\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho} - \frac{2}{3}\frac{\delta\dot{a}}{a} - \frac{\ddot{\delta}}{3} = -\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho} - \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}\delta, \quad (6.52)$$

ou simplesmente,

$$-\frac{2}{3}\frac{\delta\dot{a}}{a} - \frac{\ddot{\delta}}{3} = -\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}\delta, \quad (6.53)$$

que pode ser reescrita como

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}\delta. \quad (6.54)$$

6.3 Perturbações de densidade no NMCG

O estudo da evolução das perturbações de densidade no NMCG, que é o tema central deste trabalho, é motivado principalmente devido ao fato destas perturbações estarem diretamente associadas com a formação de estruturas no universo.

Na seção anterior, partindo de conjecturas simples e com uso do formalismo newtoniano obtivemos equações para a evolução das perturbações no universo. Porém as conhecidas limitações da teoria newtoniana implicam diretamente na necessidade de uma equação mais geral, vinda da relatividade geral. Para tanto, um resumo pode ser encontrado na referência [37], para um universo definido pela métrica de FLRW, com curvatura nula (universo plano), e nesse caso a equação para a evolução das perturbações de densidade é dada por

$$\frac{d^2\delta}{da^2} + \frac{3}{2a}(1 - 5w + 2v^2)\frac{d\delta}{da} - \frac{3\delta}{2a^2}(1 - 6v^2 - 3w^2 + 8w) = -\frac{k^2v^2}{H^2a^4}\delta. \quad (6.55)$$

Para o NMCG temos que

$$\begin{aligned} 1 - 5w + 2v^2 &= 1 - 5w + 2\left[(\gamma - 1)(1 + \mu) - \mu w + \frac{\nu}{3}\left(1 - \frac{\gamma}{1 + w}\right)\right] \\ &= 1 + 2(\gamma - 1)(1 + \mu) + \frac{2\nu}{3} - (5 + 2\mu)w - \frac{2\nu}{3}\frac{\gamma}{1 + w}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$1 - 6v^2 - 3w^2 + 8w = 1 - 6(\gamma - 1)(1 + \mu) - 2\nu + (8 + 6\mu)w - 3w^2 + \frac{2\nu\gamma}{1+w}, \quad (6.57)$$

e

$$1 + w = \gamma - \frac{C}{1-z}, \quad (6.58)$$

onde $C \equiv M/A = \gamma - \nu/[3(1 + \mu)]$ e $z \equiv -\left(\frac{B-A}{A}\right) a^{\nu-3\gamma(1+\mu)}$. Então,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\delta}{da^2} + \frac{k^2}{H^2 a^4} \left[(\gamma - 1)(1 + \mu) - \mu w + \frac{\nu}{3} \left(1 - \frac{\gamma}{1+w} \right) \right] \delta \\ & + \frac{3}{2a} \left[1 + 2(\gamma - 1)(1 + \mu) + \frac{2\nu}{3} - (5 + 2\mu)w - \frac{2\nu}{3} \frac{\gamma}{1+w} \right] \frac{d\delta}{da} \\ & = \frac{3\delta}{2a^2} \left[1 - 6(\gamma - 1)(1 + \mu) - 2\nu + (8 + 6\mu)w - 3w^2 + \frac{2\nu\gamma}{1+w} \right], \end{aligned} \quad (6.59)$$

ou, notando que $a = yz^{-n}$, com $y \equiv \left[-\frac{B-A}{A}\right]^n$ e $n \equiv 1/[3\gamma(1 + \mu) - \nu]$,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\delta}{dz^2} + \frac{3k^2 n^2 z^{2n-2nx\nu-2}}{8\pi A^{2x} y^{2-2x\nu} (1-z)^{2x}} \left[\gamma - 1 + \frac{C\mu}{1-z} + \frac{\nu}{3} \frac{1 - \frac{2x\nu}{3\gamma}}{z - \frac{2x\nu}{3\gamma}} \right] \delta \\ & - \frac{3n}{2z} \left[4 - 3\gamma - \frac{2}{3} \frac{1+n}{n} + \frac{5+2\mu}{1-z} C + \frac{2\nu}{3} \frac{1 - \frac{2x\nu}{3\gamma}}{z - \frac{2x\nu}{3\gamma}} \right] \frac{d\delta}{dz} \\ & = \frac{9n^2\delta}{2z^2} \left[(2 - \gamma) \left(\gamma - \frac{2}{3} \right) - \frac{\frac{14}{3} + 2\mu - 2\gamma}{1-z} C - \frac{C^2}{(1-z)^2} - \frac{2\nu}{3} \frac{1 - \frac{2x\nu}{3\gamma}}{z - \frac{2x\nu}{3\gamma}} \right], \end{aligned} \quad (6.60)$$

onde $x \equiv 1/[2(1 + \mu)]$. Reescrevendo ν em termos de μ e um outro parâmetro,

γ_x , tal que $\nu \equiv 3\gamma_x(1 + \mu) = \frac{3\gamma_x}{2x}$, $C = \gamma - \gamma_x$ e $n \equiv \frac{2x}{3(\gamma - \gamma_x)}$, obtemos então

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\delta}{dz^2} + \frac{k^2 x z^{\frac{2x}{3} \left(\frac{2-3\gamma_x}{\gamma-\gamma_x} \right) - 2}}{6\pi A^{2x} y^{2-3\gamma_x} (\gamma - \gamma_x) (1-z)^{2x}} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma-\gamma_x} x + \frac{\frac{1}{2}-x}{1-z} + \frac{\frac{\gamma_x}{2\gamma}}{z-\frac{\gamma_x}{\gamma}} \right] \delta \\ & - \frac{1}{z} \left[\frac{\frac{10}{3}-3\gamma}{\gamma-\gamma_x} x - 1 + \frac{3x+1}{1-z} + \frac{\frac{\gamma_x}{\gamma}}{z-\frac{\gamma_x}{\gamma}} \right] \frac{d\delta}{dz} \\ & = \frac{2x\delta}{(\gamma-\gamma_x)z^2} \left[\frac{(2-\gamma)(\gamma-\frac{2}{3})}{(\gamma-\gamma_x)} x - \frac{\frac{8x}{3}+1-2x\gamma}{1-z} - \frac{\gamma-\gamma_x}{(1-z)^2} x - \frac{\frac{\gamma_x}{\gamma}}{z-\frac{\gamma_x}{\gamma}} \right]. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Uma outra maneira de escrever este resultado é

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\delta}{dz^2} - \left[\frac{\frac{10x}{3} - \gamma + \gamma_x(1-3x)}{(\gamma-\gamma_x)z} + \frac{3x+1}{1-z} + \frac{1}{z-\frac{\gamma_x}{\gamma}} \right] \frac{d\delta}{dz} \\ & + \frac{k^2 x}{6\pi A^{2x} y^{2-3\gamma_x}} \frac{[A_{0k}(x, \gamma, \gamma_x) + A_{1k}(x, \gamma, \gamma_x)z + A_{2k}(x, \gamma, \gamma_x)z^2]}{z^{2-\frac{2x}{3} \left(\frac{2-3\gamma_x}{\gamma-\gamma_x} \right)} (1-z)^{2x+1} \left(z - \frac{\gamma_x}{\gamma} \right)} \delta \\ & = 2x \frac{[A_0(x, \gamma, \gamma_x) + A_1(x, \gamma, \gamma_x)z + A_2(x, \gamma, \gamma_x)z^2 + A_3(x, \gamma, \gamma_x)z^3]}{(\gamma-\gamma_x)z^2(1-z)^2 \left(z - \frac{\gamma_x}{\gamma} \right)} \delta, \end{aligned} \quad (6.62)$$

onde o grupo de coeficientes $A_{jk}(x, \gamma, \gamma_x)$, com $j = 0, 1, 2$, e $A_i(x, \gamma, \gamma_x)$, com $i = 0, 1, 2, 3$, pode ser obtido explicitamente por comparação direta entre (6.61) e (6.62). Esta última forma é especialmente importante por ser a que mais se aproxima da equação diferencial de Riemann [36].

6.4 Casos particulares

Soluções para $k = 0$

O caso mais simples de todos é obtido para $k = 0$, para o qual a equação (6.61) se torna

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\delta}{dz^2} - \frac{1}{z} \left[\frac{\frac{10}{3} - 3\gamma}{\gamma - \gamma_x} x - 1 + \frac{3x + 1}{1 - z} + \frac{\frac{\gamma_x}{\gamma}}{z - \frac{\gamma_x}{\gamma}} \right] \frac{d\delta}{dz} \\ &= \frac{2x\delta}{(\gamma - \gamma_x) z^2} \left[\frac{(2 - \gamma) \left(\gamma - \frac{2}{3}\right)}{(\gamma - \gamma_x)} x - \frac{\frac{8x}{3} + 1 - 2x\gamma}{1 - z} - \frac{\gamma - \gamma_x}{(1 - z)^2} x - \frac{\frac{\gamma_x}{\gamma}}{z - \frac{\gamma_x}{\gamma}} \right], \end{aligned} \quad (6.63)$$

sendo que esse caso apresenta como solução analítica uma combinação das funções de Heun. Tal solução geral, no entanto, é demasiadamente extensa se escrita com a escolha de um só parâmetro.

As funções de Heun,

$$HeunG(\Theta_I, \Theta_{II}, \Theta_{III}, \Theta_{IV}, \Theta_V, \Theta_{VI}, z) = f(z), \quad (6.64)$$

são em geral, soluções da equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} f(z) + & \frac{[(-\Theta_{III} - \Theta_{IV} - 1) z^2 \frac{d}{dz} f(z) - \Theta_{IV} \Theta_I \frac{d}{dz} f(z) - (\Theta_{III} \Theta_{IV} - \Theta_{II}) f(z)]}{z(z-1)(-z+\Theta_I)} \\ + & \frac{[(\Theta_{VI} + \Theta_V) \Theta_I - \Theta_{VI} + \Theta_{III} + \Theta_{IV} + 1] z \frac{d}{dz} f(z)}{z(z-1)(-z+\Theta_I)} = 0. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Escolhendo agora o conjunto de parâmetros

$$\{\gamma, \gamma_x, x, A, B\} = \left\{ 1, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}, 5, 3 \right\} \quad (6.66)$$

uma solução geral é

$$\begin{aligned} \delta(z) = & \frac{(3z - 4)^2 C_1 HeunG\left(-\frac{1}{3}, 0, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -4, 1 - z\right)}{z^2 (z - 1)} \\ + & \frac{(3z - 4)^2 C_2 HeunG\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{6}, -\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}, -4, 1 - z\right)}{z^2 \sqrt{z - 1}} \end{aligned} \quad (6.67)$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, e para este caso podemos expressar graficamente a solução (ver Figura 6.4).

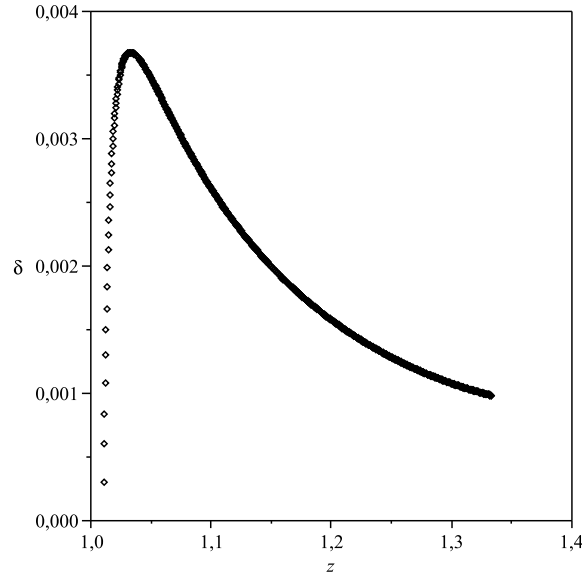


Figura 6.2: Gráfico obtido numericamente para a solução (6.67), com $C_1 = -\frac{1}{7000}$ e $C_2 = \frac{1}{700}$.

Modelos com $\mu = 0$

Para $\mu = 0$ teremos $x = 1/2$, e o resultado dado pela equação (6.61) fica reduzido a

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2\delta}{dz^2} + \frac{k^2 z^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2-3\gamma_x}{\gamma-\gamma_x}\right)^{-2}}{24\pi A y^{2-3\gamma_x} (\gamma-\gamma_x) (1-z)} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma-\gamma_x} + \frac{\frac{\gamma_x}{\gamma}}{z-\frac{\gamma_x}{\gamma}} \right] \delta \\
 & - \frac{1}{z} \left[\frac{\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\gamma}{\gamma-\gamma_x} - 1 + \frac{\frac{5}{2}}{1-z} + \frac{\frac{\gamma_x}{\gamma}}{z-\frac{\gamma_x}{\gamma}} \right] \frac{d\delta}{dz} \\
 & = \frac{\delta}{(\gamma-\gamma_x) z^2} \left[\frac{(2-\gamma) \left(\gamma - \frac{2}{3}\right)}{(\gamma-\gamma_x)} \frac{1}{2} - \frac{\frac{7}{3} - \gamma}{1-z} - \frac{\gamma-\gamma_x}{(1-z)^2} \frac{1}{2} - \frac{\frac{\gamma_x}{\gamma}}{z-\frac{\gamma_x}{\gamma}} \right].
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

Neste caso não obtivemos uma solução analítica.

Um outro caso aparentemente simples é quando se tem simultaneamente $\mu = 0$ e $\gamma_x = 2/3$. Então

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\delta}{dz^2} + \frac{k^2}{24\pi A \left(\gamma - \frac{2}{3}\right) z^2 (1-z)} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma - \frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3\gamma}}{z - \frac{2}{3\gamma}} \right] \delta \\ & - \frac{1}{z} \left[\frac{\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\gamma}{\gamma - \frac{2}{3}} - 1 + \frac{\frac{5}{2}}{1-z} + \frac{\frac{2}{3\gamma}}{z - \frac{2}{3\gamma}} \right] \frac{d\delta}{dz} \\ & = \frac{\delta}{\left(\gamma - \frac{2}{3}\right) z^2} \left[\frac{2-\gamma}{2} - \frac{\frac{7}{3} - \gamma}{1-z} - \frac{\gamma - \frac{2}{3}}{(1-z)^2} \frac{1}{2} - \frac{\frac{2}{3\gamma}}{z - \frac{2}{3\gamma}} \right]. \end{aligned} \quad (6.69)$$

As soluções deste caso foram encontradas e são também extensas combinações das funções de Heun.

Como um exemplo específico, podemos escolher $\mu = 0$, $\gamma = 2/3$ e $\gamma_x = -2/3$. Então obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\delta}{dz^2} + \frac{1}{2z} \left[1 - \frac{5}{1-z} + \frac{2}{1+z} \right] \frac{d\delta}{dz} + \frac{\delta}{4z^2} \left[\frac{5}{1-z} + \frac{2}{(1-z)^2} - \frac{3}{1+z} \right] \\ & = \frac{k^2}{32\pi A y^4 z (1-z)} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{1+z} \right] \delta, \end{aligned} \quad (6.70)$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\delta}{dz^2} + \left[\frac{1}{z} - \frac{\frac{5}{2}}{1-z} - \frac{1}{1+z} \right] \frac{d\delta}{dz} + \frac{\delta (1+2z-2z^2)}{z^2 (1-z)^2 (1+z)} \\ & = \frac{k^2 (z+5)}{128\pi A y^4 z (1-z) (1+z)} \delta, \end{aligned} \quad (6.71)$$

que, pelo uso da hipótese $\delta = z^{\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{1}{2}} \Gamma$, vem

$$z (1-z^2) \frac{d^2\Gamma}{dz^2} - \frac{z(z+5)}{2} \frac{d\Gamma}{dz} + \frac{(3z+1)}{4z} \Gamma = \frac{k^2 (z+5)}{128\pi A y^4} \Gamma, \quad (6.72)$$

que também teve sua solução encontrada como combinações das funções de Heun.

6.5 Exemplos com soluções analíticas

Para algumas escolhas específicas dos parâmetros μ , ν e γ da equação que define o novo gás de Chaplygin modificado algumas podem ter soluções analíticas mais tradicionais (sem envolver funções de Heun) para o contraste de densidade δ .

Obviamente, um destes casos, é obtido através da escolha ν e consequentemente γ_x igual a zero. Similarmente, podemos encontrar soluções analíticas, soluções com a escolha $\gamma = 0$, onde a equação a ser resolvida fica sendo

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dz^2} - \frac{k^2 x z^{\frac{2x}{\gamma_x}} (\gamma_x - \frac{2}{3})^{-2}}{6\pi A^{2x} y^{2-3\gamma_x} \gamma_x (1-z)^{2x}} \left[\frac{x}{\gamma_x} + \frac{\frac{1}{2} - x}{1-z} - \frac{1}{2} \right] \delta \\ - \frac{1}{z} \left[-\frac{10x}{3\gamma_x} - 2 + \frac{3x+1}{1-z} \right] \frac{d\delta}{dz} = -\frac{2x\delta}{\gamma_x z^2} \left[\frac{4x}{3\gamma_x} - \frac{\frac{8x}{3} + 1}{1-z} + \frac{x\gamma_x}{(1-z)^2} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Um primeiro passo no sentido de obter soluções analíticas é usar a hipótese

$$\delta = z^p (1-z)^q \Gamma, \quad (6.74)$$

que traz

$$\frac{d\delta}{dz} = \left[\left(\frac{p}{z} - \frac{q}{1-z} \right) \Gamma + \frac{d\Gamma}{dz} \right] z^p (1-z)^q \quad (6.75)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dz^2} = \left\{ \left[\frac{p^2 - p}{z^2} - \frac{2pq}{z(1-z)} + \frac{q^2 - q}{(1-z)^2} \right] \Gamma + \left(\frac{2p}{z} - \frac{2q}{1-z} \right) \frac{d\Gamma}{dz} \right. \\ \left. + \frac{d^2\Gamma}{dz^2} \right\} z^p (1-z)^q. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Então,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Gamma}{dz^2} + \left(\frac{2p + \frac{10x}{3\gamma_x} + 1 - 3x}{z} - \frac{2q + 3x + 1}{1-z} \right) \frac{d\Gamma}{dz} \\ & - \frac{k^2 x z^{\frac{2x}{\gamma_x} (\gamma_x - \frac{2}{3}) - 2}}{6\pi A^{2x} y^{2-3\gamma_x} \gamma_x (1-z)^{2x}} \left[\frac{x}{\gamma_x} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} - x}{1-z} \right] \Gamma \\ & + \left[\frac{p^2 + \left(\frac{10x}{3\gamma_x} - 3x \right) p + \frac{8x^2}{3\gamma_x^2} - \frac{16x^2}{3\gamma_x} + 2x^2}{z^2} + \frac{q^2 + 3xq + 2x^2}{(1-z)^2} \right] \Gamma \\ & - \frac{(2q + 3x + 1)p + \left(\frac{10x}{3\gamma_x} - 3x + 1 \right) q + \frac{16x^2}{3\gamma_x} + \frac{2x}{\gamma_x} - 4x^2}{z(1-z)} \Gamma = 0. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Escolhendo agora $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$, $x = -1$ and $\gamma_x = 2/3$ obtemos

$$\frac{d^2\Gamma}{dz^2} + \left[\frac{k^2 A^2}{4\pi} \left(-2 + \frac{5}{2z} \right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{k^2 A^2}{8\pi} \right) \frac{1}{z^2} \right] \Gamma = 0. \quad (6.78)$$

Mudando a variável de z to $u = z/\alpha$, onde α é uma constante, obtemos então que

$$\frac{d^2\Gamma}{du^2} + \left[\frac{k^2 A^2 \alpha^2}{4\pi} \left(-2 + \frac{5}{2\alpha u} \right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{k^2 A^2}{8\pi} \right) \frac{1}{u^2} \right] \Gamma = 0. \quad (6.79)$$

A escolha

$$\alpha^2 = \frac{\pi}{2k^2 A^2} \quad (6.80)$$

transforma esta última equação em

$$\frac{d^2\Gamma}{du^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{u} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{u^2} \right] \Gamma = 0, \quad (6.81)$$

onde $\lambda \equiv \frac{5kA}{8\sqrt{2\pi}}$ e $\mu^2 = 1 + \frac{k^2 A^2}{8\pi}$. Este último resultado é na forma da equação diferencial resolvida pelas funções de Whittaker [36], ou seja,

$$\Gamma(u) = c_1 M_{\lambda, \mu}(u) + c_2 M_{\lambda, -\mu}(u), \quad (6.82)$$

onde

$$M_{\lambda, \mu}(u) = u^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}} \Phi \left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu - 1; u \right), \quad (6.83)$$

com

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots, \quad (6.84)$$

sendo a função confluyente hipergeométrica. Todavia, temos, finalmente, para o NMCG com $\gamma = 0$, $\mu = -3/2$ e $\nu = -1$,

$$\delta(a) = \left(\frac{1}{a^{1/2}} - \frac{\beta}{a^{3/2}} \right) \left[c_1 M_{-\frac{5\tilde{k}}{16}, \sqrt{1-\frac{\tilde{k}^2}{16}}} \left(-\frac{\tilde{k}\beta}{a} \right) + c_2 M_{-\frac{5\tilde{k}}{16}, -\sqrt{1-\frac{\tilde{k}^2}{16}}} \left(-\frac{\tilde{k}\beta}{a} \right) \right], \quad (6.85)$$

onde $\beta \equiv 1 + \frac{2}{3M\rho_0^{1/2}}$ e $\tilde{k} \equiv \frac{3Mk}{\sqrt{2\pi}}$. Tais soluções podem ser representadas graficamente (ver Figuras 6.5 e 6.5).

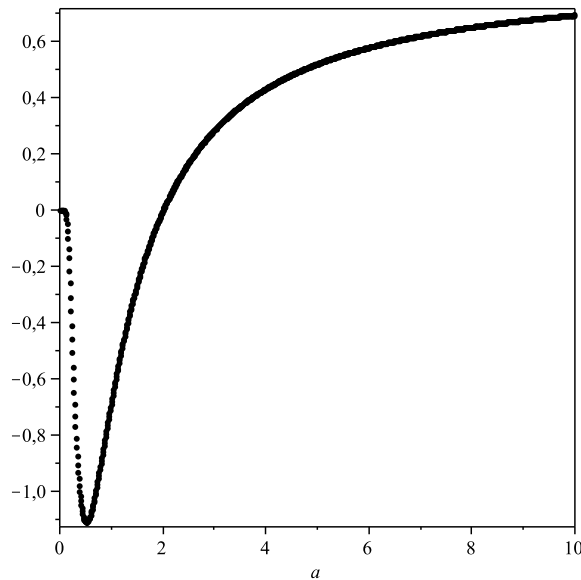


Figura 6.3: Representação gráfica de uma das soluções dadas pela equação (6.85).

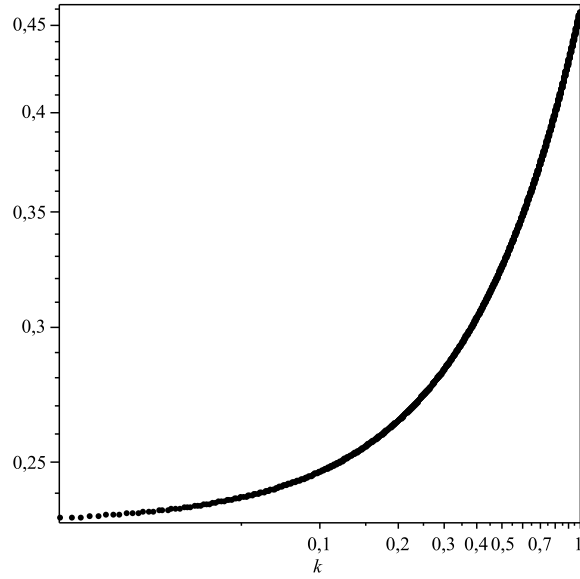


Figura 6.4: Representação gráfica da segunda das soluções dadas pela equação (6.85).

Uma outra escolha interessante é $\gamma = 0$, $\gamma_x = 2/3$, e $x = 1/2$. Então, obtemos

$$\frac{d^2\Gamma}{dz^2} + \left[\frac{2p+2}{z} - \frac{2q+\frac{5}{2}}{1-z} \right] \frac{d\Gamma}{dz} + \left[\frac{p^2 - p - \frac{k^2}{32\pi A}}{z^2} + \frac{(q+1)(q+\frac{1}{2})}{(1-z)^2} - \frac{(p+1)(2q+\frac{5}{2}) + \frac{k^2}{32\pi A}}{z(1-z)} \right] \Gamma = 0. \quad (6.86)$$

Colocando $q = -1$ ou $q = -\frac{1}{2}$ e $p = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{k^2}{8\pi A}} \right)$ obtemos uma equação hipergeométrica em Γ [36], [38].

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho a busca por soluções analíticas para a equação que rege as perturbações de densidade no novo modelo de gás de Chaplygin modificado retornou resultados numéricos e analíticos, sempre que escolhidos no mínimo um dos parâmetros da equação diferencial em questão.

Nosso *ansatz* inicial foi ajustar a forma da equação diferencial para que esta fosse semelhante a uma equação de Riemann. Porém escolhendo algumas soluções particulares conseguimos perceber, usando computação de alta performance, que uma classe de funções denominadas funções de Heun atende boa parte dos casos que nos propusemos a estudar. Assim, podemos demonstrar que é possível obter funções especiais que representam as perturbações de densidade ao menos em alguns casos.

Em especial, obtivemos soluções para um caso representado pelas funções de Whittaker com $\gamma = 0$ e $\gamma_x = \frac{2}{3}$. Seria interessante para trabalhos futuros uma análise mais detalhada das propriedades termodinâmicas dos fluídos no NMCG com objetivo de obter soluções específicas que representem os componentes do universo de maior interesse, bem como comparar as funções gerais deste modelo com dados experimentais, como por exemplo os obtidos para o espectro de potência P , que é simplesmente dado por $P \propto \delta^2$.

Bibliografia

- [1] WAGA, Ioav. Cem anos de descobertas em cosmologia e novos desafios para o século XXI. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Rio de Janeiro, v.27, n.1, p.157-173, mar. 2005.
- [2] NETO, Thyrso Villela. A aventura espetacular da descoberta do universo. *Ciência Hoje*, Rio de Janeiro, v.36, n.216, p.20-28, jun. 2005.
- [3] RIESS, Adam G. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201v1>>.
- [4] RICH, James. *Fundamentals of Cosmology*. 1.ed. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [5] D'INVERNO, Ray. *Introducing Einstein's relativity*. 1.ed. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [6] OLIVEIRA, Marceliano Eduardo de; COSTA, Sandro Silva e. *Energia Escura e Antiátrito: Semelhanças na Expansão Cósmica Acelerada*. Disponível em: <http://www.sbpcnet.org.br/livro/58ra/SENIOR/RESUMOS/resumo_3273.html>.
- [7] CATTANI, M. *Revista Brasileira de Ensino de Física. Deduções das Equações da teoria de gravitação de Einstein em um curso de graduação*, v.20, n.1.

- [8] HUGHSTON, L.P.; TOD, K.P. *An Introduction to General Relativity*. 1.ed. New York: Cambridge University Press, 1990.
- [9] McMAHON, David. *Relativity Demystified*. 1.ed. New York: Mackgraw-Hill, 2006.
- [10] COSTA, Sandro Silva e. *Cosmologia para pedestres*. Cuiabá, 1º semestre de 2004. Disponível em: <<http://br.geocities.com/sancosta00/termo2.pdf>>.
- [11] WEINBERG, Steven. *Gravitation and Cosmology*. 1.ed. USA: John Wiley & Sons, 1972.
- [12] MUKHANOV, Viatcheslav. *Physical Foundations of Cosmology*. 1.ed. New York: Cambridge University Press, 2005.
- [13] RYDEN, Barbara. *Introduction to Cosmology*. 1.ed. Boston: Addison-Wesley, 2003.
- [14] PADMANABHAN, T.. Cosmological constant - the weight of the vacuum. *Physics Reports*, v.380, p.235-320, jul. 2003.
- [15] CARROLL, Sean M.. The cosmological constant. *Living Reviews in Relativity*, Germany, v.4, p.1-78, fev. 2001.
- [16] PEEBLES, Philip James Edwin; RATRA, Bharat. The cosmological constant and dark energy. *Review of Modern Physics*, v.75, p.559-606, abr. 2003.
- [17] LIMA, José Ademir Sales de. Alternative dark energy models: An overview. *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v.35, n.1A, p.194-200, mar. 2004.
- [18] WAGA, Ioav. Dark energy and the accelerated expansion of the universe. *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v.30, n.2, p.370-379, jun. 2000.
- [19] QUERCELLINI, Claudia et al. The nature of dark energy. *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v.32, n.4, p.823-831, dez. 2002.

- [20] LIMA, José Ademir Sales de. Cosmologia, Quintessência e Aceleração do Universo. *Revista USP*, São Paulo, n.62, p.134-146, ago. 2004.
- [21] BORGES, H. A.; CARNEIRO, S.. Friedmann cosmology with decaying vacuum density. *General Relativity and Gravitation*, v.37, p.1385-1934, set. 2005.
- [22] BEESHAM, Aroonkumar. Cosmological models with a variable cosmological term and bulk viscous models. *Physical Review D*, v.48, p.3539-3543, out. 1993.
- [23] COSTA, Sandro S. e; MAKLER, Martin. Connections among three roads to cosmic acceleration: decaying vacuum, bulk viscosity, and nonlinear fluids. New York, 15 fev. 2007. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0702418>>.
- [24] KAMENSHCHIK, Alexander; MOSCHELLA, Ugo; PASQUIER, Vincent. An Alternative to quintessence. *Physics Letters B*, v.511, p.265-268, jul. 2001.
- [25] PINTO, P. et al. Alternatives to quintessence model building. New York, 21 nov. 2002. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/astro-ph0208528>> Acesso em: 26 abr. 2006.
- [26] MAKLER, Martín; OLIVEIRA, Sérgio Quinet de; WAGA, Ioav. Constraints on the generalized Chaplygin gas from supernovae observations. *Physics Letters B*, v.555, p.1-6, fev. 2003.
- [27] MAKLER, Martín; OLIVEIRA, Sérgio Quinet de; WAGA, Ioav. Observational constraints on Chaplygin quartessence: Background results. *Physical Review D*, v.68, p.123521, dez. 2003.
- [28] BENTO, M. C.; BERTOLAMI, O.; SEN, A. A.. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Physical Review D*, v.66, p.043507, ago. 2002.

- [29] DEV, Abha; ALCANIZ, J. S.; JAIM, Deepak. Cosmological consequences of a Chaplygin gas dark energy. *Physical Review D*, v.67, p.023515, jan. 2003.
- [30] SANDVIK, Havard B.; WAGA, Ioav; TEGMARK, Max; ZALDARRIAGA, Matias. The end of unified dark matter. *Physical Review D*, v.69, p.123524, jun. 2004.
- [31] COSTA, Sandro Silva e. Toy models unifying dark energy and dark matter. *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v.35, n.4B, p.1046-1047, dez. 2005.
- [32] GORINI, V. et al. The Chaplygin gas as a model for dark energy. New York, 23 abr. 2004. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0403062>> Acesso em: 9 mai. 2006.
- [33] BEDRAN, Maria Luiza; SANTOS, F. C.; SOARES, V.. On the thermodynamic stability of the generalized Chaplygin gas. *Physics Letters B*, v.636, p.86-90, mai. 2006.
- [34] CHATTOPADHYAY, S.; Debnath, U. *Density Evolution in the New Modified Chaplygin Gas Model*. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0805.0070v1>>.
- [35] BOJOWALD, M. *Quantum nature of cosmological bounces*. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0801.4001v1>>.
- [36] GRADSHTEYN, Izrail Solomonovich; RYZHIK, I. M.. Table of integral, series and products. 6.ed. California: Academic Press, 2000.
- [37] PADMANABHAN, T.. *Structure formation in the Universe*. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [38] ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J.. *Essential Mathematical Methods for Physicists*. 1.ed. California: Academic Press, 2004.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)