

**O ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA UTILIZADO  
EM TESTES DE VIDA SEQÜENCIAIS COM TRUNCAGEM:  
uma aplicação com um modelo Weibull de três parâmetros**

**DANIELE DA ROCHA FONSECA**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE – UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ  
SETEMBRO/2008**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**O ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA UTILIZADO  
EM TESTES DE VIDA SEQÜENCIAIS COM TRUNCAGEM:  
uma aplicação com um modelo Weibull de três parâmetros**

**DANIELE DA ROCHA FONSECA**

Dissertação apresentada ao Centro de  
Ciência e Tecnologia da Universidade  
Estadual do Norte Fluminense como parte  
dos requisitos necessários para a obtenção  
do título de Mestre em Engenharia de  
Produção.

**ORIENTADOR: PROF. DANIEL IGNÁCIO DE SOUZA JÚNIOR**

**CO-ORIENTADOR: ASSED NAKED HADDAD**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ**

**SETEMBRO/2008**



**O ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA UTILIZADO  
EM TESTES DE VIDA SEQÜENCIAIS COM TRUNCAGEM:  
uma aplicação com um modelo Weibull de três parâmetros**

**DANIELE DA ROCHA FONSECA**

Dissertação apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção.

Aprovada em 29 de setembro de 2008.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Alcimar das Chagas Ribeiro, Dsc. – UENF

---

Prof. Jacqueline Magalhães Rangel Cortes, D.Sc. – UENF

---

Prof. Assed Naked Haddad, D.Sc. – UFRJ  
CO-ORIENTADOR

---

Prof. Daniel Ignácio de Souza Júnior, Ph.D.. – UENF  
ORIENTADOR

Dedico este trabalho à minha família, que sempre me apoiou.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e meus irmãos pelo incentivo em todos os momentos da minha vida;

Ao meu orientador e amigo, Prof. Daniel Ignácio De Souza Júnior, que me mostrou os caminhos a serem seguidos;

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.



## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	ix
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	x
<b>RESUMO</b> .....	xi
<b>ABSTRACT</b> .....	xii
<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 Objetivo .....	2
1.2 Justificativa .....	3
1.3 Estrutura do Trabalho .....	4
<b>CAPÍTULO 2 – CONCEITOS IMPORTANTES RELACIONADOS COM TESTES DE VIDA</b> .....	5
2.1 Confiabilidade Industrial .....	5
2.2 Distribuições Utilizadas em Teste de Vida .....	9
<b>CAPÍTULO 3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE TESTES DE VIDA SEQÜENCIAIS COM TRUNCAGEM</b> .....	13
3.1 Comentário sobre o artigo “New Practical Bayes Estimation for the 2-Parameter Weibull Distribution” .....	14
3.2 Comentário sobre o artigo “Bayesian Weibull Reliability Estimation”..	19
3.3 Comentário sobre o artigo “Further thoughts on a sequential life testing approach using a Weibull model” .....	26
3.4 Comentário sobre o artigo “Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism Using an Underlying Weibull” .....	32
3.5 Comentário sobre o artigo “ Application of a Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism for an Underling Three-Parameter Weibull Model” .....	36
3.6 Comentário sobre o artigo “A Truncation Mechanism in a Sequential Life Testing Approach with an Underlying Two-Parameter Inverse Weibull Model” .....	47
<b>CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA DESENVOLVIDA NESTE ESTUDO</b> .....	53
4.1 Teste de Vida Seqüencial com a utilização de um estimador de Máxima Verossimilhança .....	53
4.2 Teste de Hipóteses .....	54
4.3 Desenvolvimento do Teste Seqüencial .....	54
4.4 Mecanismo de Truncagem .....	56
4.5 O Método da Máxima Verossimilhança para o modelo de Weibull de três parâmetros em uma situação de teste truncado por números de falhas (Teste de Tipo II) .....	58

<b>CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO DO MECANISMO DE TESTE DE VIDA DESENVOLVIDO NESTE ESTUDO .....</b>	<b>62</b>
<b>CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>65</b>
<b>6.1 Proposta de Trabalho Futuro .....</b>	<b>66</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>69</b>
<b>ANEXO .....</b>	<b>71</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.3.1 – Teste de Vida Seqüencial para o componente mecânico analisado ....	30
Figura 3.4.1 – Procedimento para se realizar a truncagem de um Teste de Vida Seqüencial .....	35
Figura 3.5.1 – Resultado do Teste de Vida Seqüencial para exemplo proposto .....	45
Figura3.5.2 – Processo de tuncagem para o Teste de Vida Seqüencial para um modelo Weibull de três parâmetros .....	46
Figura 3.6.1 – Gráfico do Teste de Vida Seqüencial para modelo Weibull Invertido...	50
Figura 3.6.2 – Procedimento para se realizar a tuncagem de um Teste de Vida Seqüencial .....	52
Figura 5.1.0 – Resultados do Teste de Vida Seqüencial para o modelo Weibull de três parâmetros .....	63
Figura 5.2.0 – Procedimento para se aplicar o mecanismo de truncagem .....	64

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1.1 – Resultado da simulação Monte Carlo empregada por Erto .....	18
Tabela 3.3.1 – Resultados de Teste Seqüencial para a distribuição Weibull ....	31
Tabela 3.3.2 – Resultados de Teste Seqüencial para o modelo Weibull .....	31
Tabela 3.5.1 – Tempos de falhas (ciclos) para os oito itens testados .....	43
Tabela 3.5.2 – Teste Vida Seqüencial para modelo Weibull de três parâmetros	44
Tabela 3.6.1 – Resultados do Teste para o modelo Weibull Invertido .....	51
Tabela 5.1.0 – Tempos de falhas (ciclos) para o Teste de Vida preliminar .....	62

## RESUMO

FONSECA, Daniele da Rocha. **O ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA UTILIZADO EM TESTES DE VIDA SEQÜENCIAIS COM TRUNCAGEM: uma aplicação com um modelo Weibull de três parâmetros.** 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. UENF, Campos dos Goytacazes - RJ.

Um mecanismo de teste de vida seqüencial com uma distribuição Weibull de três parâmetros, no qual existe informações significativas relativas aos valores dos parâmetros de forma e de escala do modelo Weibull representando o produto sendo testado, já foi analisado anteriormente por De Souza (2003), De Souza (2004a, b). Nesse trabalho iremos desenvolver um mecanismo de teste de vida seqüencial no qual a distribuição de amostragem será o modelo Weibull de três parâmetros e o produto sendo analisado é um novo componente metalúrgico. Assumiremos que o valor da vida mínima ou parâmetro de localização será diferente de zero. Para estimarmos os parâmetros de forma, de escala e de vida mínima do modelo Weibull de três parâmetros, utilizaremos o estimador de Máxima Verossimilhança em uma situação de teste de vida truncado por falhas. O emprego do método de Máxima Verossimilhança para se estimar os três parâmetros do modelo Weibull poderá apresentar problemas no que se refere às condições de regularidade ou aderência, veja Murthy et al. (2004), Blischke (1974) e Zanakis and Kyparisis (1986). Para resolvermos o problema de falta de “regularidade” ou “aderência” acima mencionada utilizaremos uma modificação proposta por Cohen, et al. (1984). Um exemplo irá ilustrar a aplicação do método de Máxima Verossimilhança proposto e do mecanismo de truncagem do teste de vida seqüencial utilizado nesse estudo.

**Palavras-Chaves:** Teste de Vida Seqüencial; Teste de Hipóteses; Mecanismo de Truncagem; Estimador de Máxima Verossimilhança.

## ABSTRACT

FONSECA, Daniele da Rocha. **A MAXIMUM LIKELIHOOD APPROACH APPLIED TO A TRUNCATED SEQUENTIAL LIFE TESTING: using a three parameter Weibull Model**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. UENF, Campos dos Goytacazes - RJ.

A sequential life testing approach with a three-parameter Weibull underlying sampling distribution in which there was significant information about the shape and scale parameters of the Weibull model representing the product under analysis was analyzed before by De Souza (2003), De Souza (2004a, b). In this work, we will develop a sequential life testing approach in which the underlying sampling distribution is the three-parameter Weibull model and the product being analyzed is a new metallurgical component. We will be assuming that the location parameter or minimum life is different from zero. To estimate the shape, scale and minimum life of the three-parameter Weibull model we will use a maximum likelihood approach for censored failure data. The standard maximum likelihood method for estimating the parameters of the three parameter Weibull model can have problems since the regularity conditions are not met, see Murthy, et al. (2004), Blischke (1974) and Zanakos and Kyparisis (1986). To overcome the “no regularity” problem, we will apply a modification proposed by Cohen, et al. (1984). We will also develop a truncation mechanism for the three-parameter Weibull distribution. An example will develop the proposed Maximum Likelihood approach and the truncated sequential life testing method applied for the three-parameter Weibull model.

**Key-words:** Sequential Life-Testing; Hypothesis Testing; Truncation Mechanism; Maximum Likelihood Estimator.

## CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

A maioria dos métodos de estimação em confiabilidade assume a existência de dados provenientes de falhas, dados estes obtidos através de um mecanismo denominado Testes de Vida.

Testes de Vida é o nome que damos para uma variedade de métodos de teste, os quais são normalmente usados a fim de se obter os dados estatísticos necessários para o desenvolvimento dos mesmos. Existem vários tipos possíveis de Testes de Vida. De acordo com De Souza (2006), alguns geralmente utilizados são:

a. Uma amostra de  $n$  itens é colocada em teste, sendo que serão registrados os tempos de falhas de cada um dos itens da amostra. Esse teste é chamado de Teste de Vida sem Trucagem.

b. Uma amostra de  $n$  itens é colocada em teste, sendo que o teste terminará após o término de um período de tempo pré-especificado. Os itens que falharem poderão ou não ser substituídos. Se os itens que falharem forem substituídos, o teste será chamado de Teste de Tipo I Truncado por Tempo com Substituição. Se os itens que falharem não forem substituídos, o teste será chamado de Teste de Tipo I Truncado por Tempo sem Substituição.

c. Uma amostra de  $n$  itens é colocada em teste, sendo que o teste terminará após a ocorrência de um número pré-especificado de falhas. Se os itens que falharem forem substituídos, o teste será chamado de Teste de Tipo II Truncado por Item com Substituição. Se os itens que falharem não forem substituídos, o teste será chamado de Teste de Tipo II Truncado por Item sem Substituição.

d. Um item proveniente de uma população é colocado em teste, e dependendo do resultado desse teste, a população poderá ser aceita ou rejeitada, ou então, caso não se tenha informação suficiente para se rejeitar ou aceitar a referida população, um novo item será colocado em teste. Esse procedimento deverá ser repetido até que exista informação suficiente para se tomar uma decisão, acerca da aceitação ou rejeição da população de amostragem. Esse teste é conhecido como Teste de Vida Seqüencial.

Apesar de o Teste de Vida Seqüencial apresentar vantagens em relação à redução de tempo de teste, quando comparado com um teste de vida com um tamanho de amostra pré-especificado, algumas vezes o número de itens necessário para se ter uma decisão a respeito de se aceitar ou rejeitar uma população sendo

analisada poderá ser muito elevado. Desse modo, torna-se desejável ou ainda conveniente a truncagem do Teste Seqüencial após a ocorrência de um número de falhas estatisticamente pré-determinado. O objetivo de um mecanismo de truncagem é o de manter o tamanho da amostra pequeno, com a conseqüente redução dos custos de teste. Esse tipo de teste é conhecido como um Teste de Vida Seqüencial com Truncagem.

Nesse Trabalho iremos desenvolver um mecanismo de teste de vida seqüencial no qual a distribuição de amostragem será o modelo Weibull de três parâmetros e o produto sendo analisado é um novo componente metalúrgico. Assumiremos que o valor da vida mínima ou parâmetro de localização será diferente de zero. Para estimarmos os parâmetros de forma, de escala e de vida mínima do modelo Weibull de três parâmetros, utilizaremos o estimador de Máxima Verossimilhança em uma situação de teste de vida truncado por falhas. O emprego do método de Máxima Verossimilhança para se estimar os parâmetros do modelo Weibull de três parâmetros poderá apresentar problemas no que se refere às condições de regularidade ou aderência, veja Murthy et al., (2004), Blischke, (1974) e Zanakis and Kyparisis, (1986). Para resolvermos o problema de falta de “regularidade” ou “aderência” acima mencionada utilizaremos uma modificação proposta por Cohen, et al. (1984).

## **1.1 Objetivo**

O principal objetivo de um teste de vida é o de se obter informações relacionadas com falhas apresentadas por um produto ou sistema. Essas informações serão então utilizadas para quantificar a confiabilidade desse produto ou sistema, determinando-se em seguida se os padrões ou níveis propostos de confiabilidade e de segurança estão sendo alcançados. Finalmente, o que fazer para melhorar a confiabilidade e a segurança do produto ou sistema sendo analisado? Evidentemente, o tempo necessário para se realizar um teste de vida poderá ser muito elevado, com isso acarretando elevados custos de utilização de equipamentos, facilidades e pessoal, ou mesmo inviabilizando o emprego de práticas tradicionais de teste de vida, como a de se obter um número pré-determinado de falhas antes do término do mesmo. Uma alternativa para a solução



desse problema é a de se utilizar testes de vida seqüenciais.

O objetivo desse estudo é o de propor inicialmente o desenvolvimento de uma metodologia que incorpore um mecanismo de truncagem para a aplicação dos modelos Weibull de três parâmetros em testes de vida seqüenciais. Geralmente existe muito pouca informação relativa aos valores que esses parâmetros da distribuição de amostragem Weibull possam ter. Para estimarmos os valores dos parâmetros de forma, de escala e de vida mínima desse modelo, vamos utilizar estimadores de máxima verossimilhança (Maximum Likelihood) em uma situação de truncagem por número de falhas. A seguir, iremos aplicar essa metodologia em dados obtidos de amostras oriundas de processos industriais realizado em uma Companhia Siderúrgica Brasileira de grande porte.

## **1.2 Justificativa**

A principal justificativa para esse estudo reside na existência de uma necessidade crescente no mundo industrial, a qual se torna cada vez mais importante; a de se obter com um menor custo de teste e no mais reduzido espaço de tempo, indicações bem fundamentadas estatisticamente e de elevada confiabilidade sobre o comportamento de produtos e componentes quando em situações de uso normal.

Essa necessidade atualmente se constitui em motivo de inúmeras conferências internacionais anuais sobre o assunto, com destaque para as do COMADEM (Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management), especificamente dedicada ao desenvolvimento e aplicação de testes de vida, e as da ESRA (European Safety and Reliability Association), ambas na Europa, e a da IIE (Institute of Industrial Engineers) nos Estados Unidos.

Várias companhias brasileiras estão realizando cursos fechados sobre testes de vida em suas instalações (Embraer, Petrobrás, CSN; etc., apenas para citar algumas das mais importantes organizações industriais a realizarem esses cursos).

O produto sendo considerado nesse estudo é um novo componente metalúrgico utilizado na fabricação de pontes de viadutos, onde existe muito pouca informação a respeito dos valores que os parâmetros da distribuição de amostragem Weibull poderiam ter.

### **1.3 Estrutura do Trabalho**

Este trabalho foi organizado em cinco capítulos, distribuídos conforme descrição que segue.

No Capítulo 1 tem-se uma introdução do trabalho, onde são apresentados os motivos da realização deste, e os objetivos pretendidos.

No Capítulo 2 é apresentado alguns conceitos importantes relacionado com Teste de Vida.

No Capítulo 3 tem-se a revisão bibliográfica, onde é apresentado um resumo das principais publicações sobre testes de vida, mostrando a evolução do desenvolvimento dessa linha de pesquisa e suas contribuições.

No Capítulo 4 apresenta a metodologia desenvolvida nesse estudo.

No Capítulo 5 tem-se a aplicação que irá ilustrar o modelo de teste de vida seqüencial proposto.

As considerações finais são apresentadas no Capítulo 6, bem como algumas conclusões e recomendações sobre a aplicabilidade desse trabalho.

E ao final desta pesquisa se encontram as referências e o anexo.

## CAPÍTULO 2 – CONCEITOS IMPORTANTES RELACIONADOS COM TESTES DE VIDA

### 2.1 Confiabilidade Industrial

Confiabilidade de um sistema "é a probabilidade de que esse sistema, quando trabalhando sob condições operacionais estabelecidas, e sob condições ambientais "mais ou menos" determinadas irá desempenhar suas funções especificadas de uma maneira adequada durante um intervalo de tempo pré-determinado (ou período de tempo desejado)".(De Souza, 2004).

Como podemos observar, existem problemas óbvios a serem considerados com essa definição de confiabilidade apresentada acima, como por exemplo, a noção de probabilidade da confiabilidade, o que irá admitir também a probabilidade de falha. Aqui, temos de definir o que será considerado como uma falha para o nosso sistema sob análise. O desempenho de um sistema poderá deteriorar gradualmente com o tempo, fazendo com que em algumas ocasiões seja muito difícil se diferenciar entre o sucesso do sistema e a falha do sistema. Uma falha completa será facilmente reconhecida, porém variação de desempenho com a passagem de tempo poderá ser difícil de ser reconhecida como sendo uma falha. Outro problema relacionado com essa definição de confiabilidade está relacionado com o julgamento necessário para se determinar as condições ambientais reais ou corretas a serem encontradas pelo sistema.

As condições ambientais poderão variar com a passagem do tempo, sendo que em algumas ocasiões será muito difícil ou mesmo impossível se determinar as condições ambientais reais que um sistema irá enfrentar durante sua vida útil, principalmente em ambientes industriais.

Um outro conceito importante em confiabilidade está relacionado com a taxa de falha característica. Como sabemos, a taxa na qual as falhas ocorrem em um determinado intervalo de tempo  $(t_i, t_{i+1})$  é chamada de a taxa de falhas durante aquele intervalo, ou seja, a taxa de falhas é a probabilidade de que uma falha por unidade de tempo ocorra em um determinado intervalo de tempo  $(t_i, t_{i+1})$ , dado que não ocorreu uma falha anterior ao  $t_i$ , o início do intervalo. Se representarmos as confiabilidades dos tempos  $t_i$  e  $t_{i+1}$  por, respectivamente,  $R(t_i)$  e  $R(t_{i+1})$ , a taxa

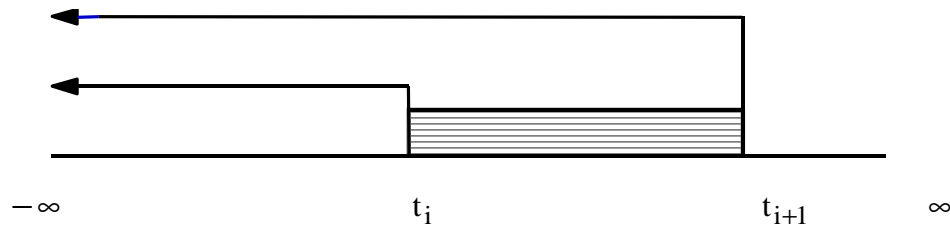
de falhas será então dada por:

$$f_r(t_i, t_{i+1}) = f_r(t) = \frac{R(t_i) - R(t_{i+1})}{R(t_i)(t_{i+1} - t_i)},$$

Porque a probabilidade de falha de um sistema em um determinado intervalo de tempo  $(t_i, t_{i+1})$  será dada por:

$$F(t_i, t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt = \int_{-\infty}^{t_{i+1}} f(t) dt - \int_{-\infty}^{t_i} f(t) dt. \quad \text{Então:}$$

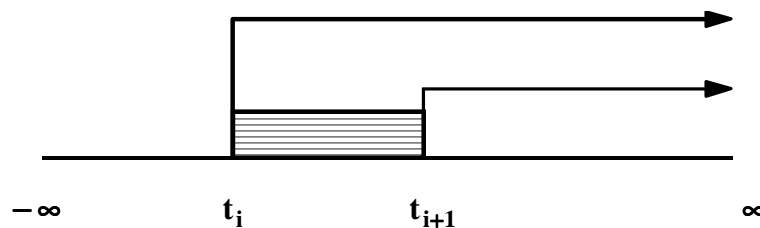
$$F(t_i, t_{i+1}) = F(t_{i+1}) - F(t_i) \quad (2.1.1)$$



Se definirmos a probabilidade de falha de um sistema em termos da função confiabilidade, teremos:

$$R(t_i, t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt = \int_{t_i}^{\infty} f(t) dt - \int_{t_{i+1}}^{\infty} f(t) dt. \quad \text{Logo:}$$

$$R(t_i, t_{i+1}) = R(t_i) - R(t_{i+1}) \quad (2.1.2)$$



Como podemos observar, a taxa de falhas é uma função do tempo. A função falha instantânea ou taxa de falha instantânea é definida como sendo o limite da taxa de falhas à medida que a amplitude do intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  se aproximar de zero. Logo, se fizermos o intervalo  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ , a função falha instantânea  $h(t)$  será dada por:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)\Delta t} = \frac{1}{R(t)} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{R(t)} \left[ -\frac{d}{dt}R(t) \right]$$

Se recordarmos que a derivada da função confiabilidade é igual à negativa da função densidade, ou seja,  $\frac{d}{dt}[R(t)] = -f(t)$ , teremos  $h(t) = \frac{1}{R(t)} [(-) (-)f(t)]$ , ou ainda:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.1.3)$$

$h(t) dt$  representa a probabilidade de que um sistema, o qual sobreviveu até o tempo  $t_i$ , venha a falhar no pequeno intervalo de tempo dado por  $(t_i, t_i + dt)$ . Logo,  $h(t)$  representa a taxa de mudança da probabilidade condicional de falhas dado que o sistema sobreviveu até o tempo  $t_i$ .  $f(t)$  representa a taxa de mudança da probabilidade incondicional (comum) de falhas. A função falha instantânea indica a mudança ocorrida na taxa de falhas durante o tempo de vida dos componentes de uma população.  $f(t)$  é dita ser uma distribuição de taxa de falhas crescente se sua função falha instantânea  $h(t)$  estiver aumentando.  $f(t)$  é dita ser uma distribuição de taxa de falhas decrescente se sua função falha instantânea  $h(t)$  estiver diminuindo.

Logo, a importância da função falha instantânea é a de indicar a ocorrência de mudanças na taxa de falha durante a vida da população de componentes. A função

falha instantânea para a distribuição Weibull é dado por:

$$h(t) = \frac{\beta}{\theta} \left( \frac{t}{\theta} \right)^{\beta-1} \quad (2.1.4)$$

A distribuição de Weibull é muito utilizada para dados de tempo de vida, pois seus dois parâmetros  $\theta$  e  $\beta$  lhe dão uma grande flexibilidade, uma vez que permitem modelar diferentes tipos de taxas de falhas. Como caso especial, quando o parâmetro de forma  $\beta$  da distribuição Weibull for igual à 1, a distribuição resultante será a exponencial.

A distribuição exponencial caracteriza-se por apresentar taxa de falha constante, ou seja, o processo de falha não possui memória. A probabilidade de falha para um componente ou sistema será a mesma, não importando o intervalo de tempo que esse componente ou sistema tenha sobrevivido anterior ao tempo presente  $t$ . Utilizando as leis da probabilidade condicional, podemos ver que:

$$P(T > t + \Delta t / T > t) = \frac{R(t + \Delta t) \cap R(t)}{R(t)} = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)} = \frac{e^{-\frac{1}{\theta}(t + \Delta t)}}{e^{-t/\theta}} = e^{-\frac{1}{\theta}(t + \Delta t - t)}$$

$$P(T > t + \Delta t / T > t) = e^{-\Delta t / \theta} \quad (2.1.5)$$

Como podemos observar, torna-se claro que a probabilidade desejada será independente do tempo  $t$  que o sistema ou componente tenha sobrevivido anterior ao intervalo  $\Delta t$ .

Existe uma relação matemática muito importante entre a função falha instantânea e a função confiabilidade. Consideremos então a definição da função falha instantânea dada pela equação (2.1.3), ou seja  $h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$ . Integrando ambos os lados da equação acima, teremos:

$$\int_0^t h(y) dy = \int_0^t \frac{f(y)}{R(y)} dy. \quad \text{Mas, como vimos anteriormente:}$$

$$f(y) = -\frac{d}{dy} [R(y)]; \quad \text{Logo:} \quad \int_0^t h(y) dy = -\int_0^t \frac{\frac{d}{dy}[R(y)]}{R(y)} dy$$

Como lembramos dos cursos de cálculo, a integral da função derivada

$$\int \frac{du}{u} = \ln u. \text{ Logo, com } u = R(y), \text{ e com } du = \frac{d}{dy} R(y), \text{ teremos}$$

$$\int_0^t h(y) dy = - [\ln[R(y)]]_0^t = - [\ln[R(t)] - \ln[R(0)]] = - \ln[R(t)] + \ln[R(0)]$$

$$\int_0^t h(y) dy = - \ln[R(t)], \quad \text{dado que } R(0) = 1, \text{ e } \ln(1) = 0. \text{ Finalmente, teremos:}$$

$$\int_0^t h(y) dy = - \ln[R(t)]; \quad R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(y) dy\right]. \text{ Agora, como } f(t) = h(t) R(t),$$

$$f(t) = h(t) \exp\left[-\int_0^t h(y) dy\right] \quad (2.1.6)$$

Logo, as funções  $f(t)$ ,  $h(t)$  e  $R(t)$  estão todas relacionadas entre si, e qualquer uma delas determina por si só as outras duas.

## 2.2 Distribuições Utilizadas em Teste de Vida

A seguir são apresentadas, resumidamente algumas funções que estão sendo utilizadas em teste de vida, principalmente como informação preliminar ou prior acerca dos parâmetros da distribuição de amostragem Weibull.

Algumas dessas distribuições são:

### a. Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é uma das distribuições mais usualmente utilizada em aplicações de testes de vida, sendo que em vários casos essa distribuição é utilizada por ser de fácil aplicação ao invés de ser uma escolha baseada em um completo entendimento de suas propriedades. A distribuição exponencial é um caso especial da distribuição Weibull de dois parâmetros. Quando o parâmetro de forma  $\beta$  da distribuição Weibull for igual a 1, a distribuição resultante será a exponencial. O pdf da distribuição Weibull é dado por:

$$f(t) = f(t; \theta, \beta) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right] \quad (2.2.1)$$

$\theta, \beta > 0$ ;  $t > 0$ ;  $\theta =$  parâmetro de escala;  $\beta =$  parâmetro de forma.

Logo, se fizermos  $\beta = 1$ , teremos:

$$f(t) = f(t;\theta) \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}; \quad t, \theta > 0 \quad (2.2.2)$$

Esse é o *pdf* ou função densidade da distribuição exponencial. Com a proliferação de microcomputadores na última década, e com o reconhecimento geral de que a distribuição exponencial é um caso especial da distribuição Weibull, o modelo Weibull tornou-se um modelo de testes de vida muito popular.

### b. Distribuição Gamma

A distribuição Gamma, com *pdf* dado por:

$$f(t) = G(t;\lambda,n) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} \quad (2.2.3)$$

$t \geq 0$ ;  $n, \lambda > 0$ ;  $n =$  parâmetro de forma;  $\lambda =$  parâmetro de escala.

Quando o parâmetro de forma  $n$  da distribuição gamma for igual à 1, a distribuição resultante será a exponencial. Logo, a distribuição exponencial é também um caso especial da distribuição gamma.

### c. Distribuição Log-Gamma

A distribuição Log-Gamma Negativa, com *pdf* dado por:

$$f(z) = NLG(z;d,c) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} Z^{d-1} (-\ln Z)^{c-1} \quad (2.2.4)$$

$0 < Z < 1$ ;  $c, d > 0$ ;  $c =$  parâmetro de forma;  $d =$  parâmetro de escala

Em confiabilidade Bayesiana, essa distribuição será geralmente transformada de seus limites (0, 1) em uma distribuição log-gamma negativa definida entre os limites probabilísticos (L, U). O *pdf* resultante será dado por:

$$f(t) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \frac{1}{(U-L)^d} (t-L)^{d-1} [\ln(U-L) - \ln(t-L)]^{c-1}; \quad L < t < U; \quad c, d > 0 \quad (2.2.5)$$



U = limite probabilístico superior; L = limite probabilístico inferior.

#### d. Distribuição Weibull

A função densidade da distribuição Weibull é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left( \frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta} \right]; \quad t \geq 0 \quad (2.2.6)$$

A distribuição Weibull pode ser formulada com dois ou três parâmetros. No caso dos modelos apresentarem apenas dois parâmetros, o parâmetro da vida mínima é considerado como sendo igual à zero.

A distribuição Weibull com dois parâmetros tornou-se muito importante na ciência e na engenharia por se ajustar de um modo altamente positivo ao padrão de variabilidade de muitas coisas. Essa distribuição é rica em forma o que sugere a necessidade de uma amostra relativamente grande para que se possam fazer estimativas com um grau de precisão usando-se algum processo tradicional estatístico. Geralmente, na prática, é muito pequeno o número de componentes industriais disponíveis para se realizar um teste de vida.

#### e. Distribuição Weibull Invertida

A distribuição Weibull invertida foi derivada em 1983 por Pascoal Erto, e poderá ser obtida a partir do *pdf* da distribuição Weibull. Considere a distribuição Weibull dada por:

$$f(x) = \frac{\beta}{\theta} \left( \frac{x}{\theta} \right)^{\beta-1} e^{-(x/\theta)^{\beta}}; \quad x > 0; \quad \theta, \beta > 0$$

Faça  $t = \frac{1}{x}; \quad x = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt$

Também, quando:  $x \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow 0; \quad x \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$

Então, se substituirmos o valor de  $x$  e de  $dx$  na equação acima, teremos

$$f(t) = - \int_{\infty}^0 \frac{\beta}{\theta} \frac{1}{(\theta t)^{\beta-1}} \frac{1}{t^2} e^{-1/(\theta t)^\beta} dt = \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\theta^\beta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta+1} e^{-1/(\theta t)^\beta} dt$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da equação acima por  $\theta$ , obteremos

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\theta\beta}{(\theta t)^{\beta+1}} e^{-1/(\theta t)^\beta} dt = 1.0; \quad t > 0; \quad \theta, \beta > 0$$

Essa integral é igual à 1. Logo, o integrando acima é o *pdf* da distribuição Weibull invertida, ou seja

$$f(t) = \frac{\theta\beta}{(\theta t)^{\beta+1}} e^{-1/(\theta t)^\beta} \quad (2.2.7)$$

$\theta, \beta > 0; \quad t \geq 0; \quad \theta =$  parâmetro de escala;  $\beta =$  parâmetro de forma.

A distribuição Weibull Invertida tem sido utilizada em estimação Bayesiana para representar toda a informação disponível acerca do parâmetro de forma da distribuição de amostragem Weibull Erto (1982); De Souza & Lamberson (1995). Ela possui um parâmetro de localização ou vida mínima, um parâmetro de escala e um parâmetro de forma. A primeira aplicação dessa distribuição Weibull Invertida com três parâmetros em um teste de vida seqüencial foi realizada em 2005 por De Souza (2005) no estudo de componentes eletrônicos.

A recente utilização do modelo Weibull Invertido de três parâmetros reside no fato de que quando o parâmetro de forma da distribuição Weibull é maior do que sete, a curva Weibull se torna muito pontuda (alongada para cima), resultando em dificuldades computacionais para se obter a precisão desejada no cálculo dos valores referentes às características de interesse do componente ou produto sendo analisado. Em situações como essa, o modelo Weibull Invertido parece possuir uma melhor resposta para esse problema de precisão apresentado pela distribuição Weibull.

## **CAPÍTULO 3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE TESTES DE VIDA SEQUENCIAIS COM TRUNCAGEM**

O principal objetivo de um teste de vida é o de se obter informações relacionadas com falhas oriundas de um produto ou sistema, determinando-se em seguida se os padrões ou níveis de confiabilidade que estão sendo alcançados. (De Souza, 2004).

Existem vários tipos possíveis de testes de vida. O tempo necessário para se realizar um teste de vida poderá ser muito longo, com isso acarretando elevados custos de utilização de equipamentos, facilidades e pessoal. Esse tempo elevado poderá até mesmo inviabilizar a obtenção de um número pré-determinado de falhas antes do término do teste. Uma alternativa para a solução desse problema é a de se utilizar testes de vida seqüenciais.

Desde o início da década de 90 iniciou-se um movimento em direção à aplicação de testes de vida seqüenciais na tentativa de se substituir o antigo sistema de testes, o qual utilizava tamanhos de amostras pré-fixados. Esses testes pré-fixados se tornaram obsoletos, devido demandarem amostras com um número relativamente elevado de itens, o que acarretava um maior custo do teste, além de um tempo exageradamente longo para a realização dos mesmos.

O mecanismo de teste de vida seqüencial representa uma situação de teste de hipóteses na qual uma decisão é tomada no sentido de se aceitar ou rejeitar a hipótese nula, ou então a de se continuar amostrando, à medida que observações se tornam disponíveis.

O problema que enfrentamos é o de que mesmo com o uso de testes de vida seqüenciais, em várias situações o número de itens de uma amostra necessário para se aceitar ou rejeitar uma determinada produção industrial, poderá ser muito elevado. Torna-se então necessário o desenvolvimento de um mecanismo de truncagem, objetivando o término do teste no menor tempo possível.

Várias funções matemáticas foram então sugeridas para representar estatisticamente esses testes seqüenciais. Nos últimos cinco anos duas dessas funções, os modelos Weibull e Weibull Invertido, estão sendo estudados como possíveis distribuições de amostragem para esses testes.

A seguir apresentaremos um resumo das principais publicações sobre testes de vida, mostrando a evolução do desenvolvimento dessa linha de pesquisas.

### **3.1 Comentário sobre o artigo “New Practical Bayes Estimation for the 2-Parameter Weibull Distribution”**

Por Pasquale Erto (1982)

Neste trabalho Erto (1982) propôs novos estimadores Bayesianos para uma distribuição Weibull de dois parâmetros, em uma situação na qual o valor desses parâmetros era desconhecido. De acordo com Erto, “em várias situações de teste de vida existe alguma informação anterior ou prior a respeito do produto sendo analisado, informação essa que poderia ser razoavelmente quantificada em termos de: 1) amplitude do parâmetro de forma, e 2) um valor antecipado de um percentil (vida confiável) de uma distribuição de amostragem”.

Erto incorporou esse tipo de informação dentro do processo de estimação utilizando uma nova (isso é, não completamente especificada) distribuição anterior. Nesse trabalho, devido não ter sido possível a utilização de um tratamento analítico, Erto utilizou integração numérica a fim de obter resultados estimados para os dois parâmetros da distribuição Weibull. Uma nova distribuição anterior (prior), chamada por Erto de Weibull Invertida, foi utilizada para formular uma opinião bem fundamentada do valor de um percentil da vida confiável. Em associação com o modelo Weibull Invertida, a distribuição Uniforme foi usada para representar a informação anterior existente sobre o valor do parâmetro de forma da distribuição de amostragem.

Erto utilizou ambas funções densidades (pdf) apenas para representar a informação anterior disponível, “sem necessariamente supor que os valores dos parâmetros correspondentes da distribuição de amostragem variassem de um item para outro da amostra”, isto é, ele supôs que os valores reais e os valores atribuídos aos valores desconhecidos realmente existissem. De acordo com essa hipótese, para se investigar a tendência e a eficiência dos estimadores provenientes de uma simulação Monte Carlo, as amostras pseudo-aleatórias foram geradas do mesmo modelo Weibull de falhas.

Erto investigou também o efeito de más distribuições anteriores, ou seja, não centrada no valor real dos parâmetros desconhecidos correspondentes. Ele incorporou diretamente dentro do processo de estimação o conhecimento existente

(prior) acerca de um percentil da vida confiável, e não especificou explicitamente o valor do parâmetro de forma da distribuição anterior Weibull Invertida.

### O Problema

Considere a função confiabilidade Weibull  $R(t; \theta, \beta)$  dada por:

$$R(t; \theta, \beta) = \exp\left(-t^\beta / \theta\right) \quad (3.1.1)$$

Faça agora;

$R(\chi_R) = R$ , de modo que  $R = \exp\left(-\chi_R^\beta / \theta\right)$ , ou ainda:

$$\ln(R) = -\chi_R^\beta / \theta; \quad \theta = -\chi_R^\beta / \ln(1/R)$$

Se substituirmos o valor de  $\theta$  dado pela equação acima na equação (3.1.1), obteremos:

$$R(t; \chi_R, \beta) = R\left(t / \chi_R\right), \text{ com os valores de } \chi_R \text{ e de } \beta \text{ sendo ambos desconhecidos.}$$

Erto afirmava que; “em engenharia freqüentemente existe algum conhecimento sobre o mecanismo de falha sendo analisado, o qual pode ser convertido em valores quantitativos acerca do parâmetro de forma  $\beta$ . Além disso, um engenheiro provavelmente conhece um pouco mais do que uma simples ordem de grandeza para o valor da vida confiável que um determinado produto sendo analisado poderia ter, ou seja, ele possui um conhecimento bem apurado de um determinado percentil de vida  $\chi_R$ . Então, com o conhecimento desses dois fatores, mecanismo de falha e valor de um determinado percentil  $\chi_R$ , ele poderá formular um intervalo numérico ( $\beta_1, \beta_2$ ) para  $\beta$ , e também obter um valor antecipado de  $\chi_R$ ”.

As distribuições anteriores e a posterior utilizadas por Erto serão agora analisadas.

## Distribuições Anteriores e Posterior

Hipóteses utilizadas por Erto.

a) Para o parâmetro de forma da distribuição de amostragem Weibull, Erto empregou a função densidade anterior (pdf) Uniforme definida no intervalo  $(\beta_1, \beta_2)$ . Essa função densidade e dado por:

$$\text{pdf}(\beta) = f(\beta) = \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)}; \beta_2 > \beta > \beta_1 > 0 \quad (3.1.2)$$

= 0, em qualquer outra região.

b) Para o percentil selecionado  $\chi_R$  a função densidade anterior utilizada é o modelo Weibull Invertido seguinte:

$$\text{pdf}(\chi_R) = ab(a\chi_R)^{-(b+1)} \exp\left[-(a\chi_R)^{-b}\right]; a, b > 0 \quad (3.1.3)$$

Esta distribuição possui um valor esperado, sendo que sua variância diminui à medida que o valor do parâmetro de forma  $\underline{b}$  aumentar.

c) Erto formulou a hipótese de que o parâmetro de forma  $\underline{b}$  da distribuição anterior Weibull Invertida deveria permanecer não especificado na distribuição anterior dada pela equação (3.1.3). Desse modo, ele fez  $b = \beta$ .

d) A informação anterior (prior) para o parâmetro forma  $\beta$  necessita ser convertida em valores para  $\beta_1$  e para  $\beta_2$ , na equação (3.1.2).

e) De acordo com Erto a informação anterior existe para  $\chi_R$  necessita ser convertida em um  $\chi_{\bar{R}}$ , o qual é igual ao valor esperado da equação (3.1.3), a

Weibull invertida. Desse modo Erto decidiu fazer  $\chi_{\bar{R}} = (1/a)\Gamma\left(1 - \frac{1}{b}\right)$ , o valor esperado da equação (3.1.3).

## A Análise de Erto

Utilizando a transformação  $\theta \equiv \chi_R^\beta \ln(R)$  na equação (3.1.3), a densidade (pdf) conjunta é obtida em função de  $\theta$  e de  $\beta$  da seguinte maneira:

$$\text{pdf}(\theta, \beta) = \left[ -(\beta_2 - \beta_1) a^\beta \theta^2 \ln(R) \right]^{-1} \exp \left[ a^\beta \theta \ln(R) \right] \quad (3.1.4)$$

Das hipóteses (c) e (d), obteremos o valor pra o parâmetro de escala  $\underline{a}$ :

$$a = 1 - \Gamma \left( \frac{2}{(\beta_1 + \beta_2)} \right) / \chi_{\bar{R}}$$

Combinando a função densidade dada pela equação (2.1.4) com a função semelhança da amostra completa, a densidade conjunta posterior obtida por Erto foi a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{pdf}(\theta, \beta | \chi) &= (I_1 N!)^{-1} \beta^N a^{-\beta} \prod_i (\chi_i^{\beta-1}) \theta^{-N-2} \times \\ &\times \exp \left[ \left\{ a^\beta \theta \ln(R) \right\}^{-1} - \sum_i (\chi_i^\beta) / \theta \right] \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Os valores esperados posteriores de  $\theta$  e de  $\beta$  seriam:

$$E(\theta | \chi) = I_2 / (N I_1) \quad (3.1.6)$$

$$E(\beta | \chi) = I_3 / I_1 \quad (3.1.7)$$

Aqui;

$$I_j = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \beta^{m_j} a^{-\beta} \prod_i (\chi_i^{\beta-1}) / \left[ a^{-\beta} \ln^{-1}(R) + \prod_i (\chi_i^\beta) \right]^{k_j} d\beta; \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.1.8)$$

e também:

$$m_1 = m_2 \equiv N; \quad m_3 \equiv N + 1; \quad k_1 = k_3 \equiv N + 1; \quad k_2 \equiv N \quad (3.1.9)$$

O método numérico utilizado por Erto para resolver a integral dada pela equação (3.1.8) foi o da Regra Trapezoidal.

### Resultado da simulação Monte Carlo empregada por Erto

Utilizou-se 100 amostras pseudo-aleatórias completas de tamanhos  $N = 3; 5;$  e 7 unidades, as quais foram geradas por Erto de acordo com o modelo de falhas Weibull tendo o parâmetro de escala  $\theta$  o valor de 1 e o parâmetro de forma  $\beta$  o valor correspondente de 3.

A cada simulação, estimou-se valores para  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\chi_{0,98}$  e  $R = S(R_{0,98})$  utilizando-se seis diferentes distribuições anteriores (priors).

A Tabela (3.1.1) seguinte está reproduzida do artigo de Erto e apresenta os seis diferentes grupos de distribuições anteriores utilizados por Erto na simulação.

**Tabela 3.1.1 – Resultado da simulação Monte Carlo empregada por Erto**

$\Theta$	0,1	0,2	0,3
$\beta_1, \beta_2$			
1, 3	V) $\bar{\chi}_{0,98} = 0,13$ (a = 14,02)	IV) $\bar{\chi}_{0,98} = 0,27$ (a = 6,51)	III) $\bar{\chi}_{0,98} = 0,59$ (a = 3,02)
2, 4	VI) $\bar{\chi}_{0,98} = 0,13$ (a = 10,71)	I) $\bar{\chi}_{0,98} = 0,27$ (a = 4,97)	II) $\bar{\chi}_{0,98} = 0,59$ (a = 2,31)

### Observações Finais

Uma boa informação foi obtida quando se considerou os seguintes valores:  $\beta_1 = 2; \beta_2 = 4; \bar{\chi}_{0,98} = [-\ln(0,98)]^{1/3} = 0,27$ , a partir dos quais se obteve um valor para  $a = \left(\bar{\chi}_{0,98}\right)^{-1} = 4,97$ .

Após isso, os valores de entrada (input) indexados por algoritmos romanos na Tabela (3.1.1) foram utilizados para se investigar o efeito de possíveis más (fracas) densidades anteriores.

Os resultados informados por Erto mostram que os estimadores obtidos foram bem razoáveis, mesmo quando se decide pela utilização de más (fracas) funções densidades anteriores para o parâmetro de escala  $\theta$ ; ou seja, dez vezes maiores ou



menores do que o valor real de  $\theta$ ; e/ou um intervalo de valores para o parâmetro de forma  $\beta$ , contendo apenas em um dos extremos o valor real de  $\beta$ .

### 3.2 Comentário sobre o artigo “Bayesian Weibull Reliability Estimation”

Por Daniel I. De Souza Jr e Leonard R. Lamberson (1995)

O mecanismo Bayesiano para um teste de vida seqüencial utiliza uma probabilidade posterior, a qual será continuamente atualizada à medida que novas informações se tornarem disponíveis. Nesse estudo, De Souza e Lamberson utilizaram o modelo Weibull como a distribuição dos tempos de falhas. As distribuições anteriores ou priors para os parâmetros de escala  $\theta$  e de forma  $\beta$  da distribuição de amostragem Weibull foram, respectivamente, os modelos de Valores Extremos do Tipo II e Log-gamma Negativa. A função densidade Weibull é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right]; \quad t \geq 0 \quad (3.2.1)$$

#### Distribuição anterior para o parâmetro de escala $\theta$

A distribuição de Valores Extremos do Tipo II foi utilizada para formular a informação anterior ou prior do parâmetro de escala  $\theta$  do modelo de amostragem Weibull. Essa distribuição possui uma função densidade (pdf) dada por:

$$f(\theta) = \frac{b}{a} \left(\frac{a}{\theta}\right)^{b+1} \exp\left[-\left(\frac{a}{\theta}\right)^b\right]; \quad \theta \geq 0 \quad (3.2.2)$$

Essa função densidade apresenta um valor esperado e uma variância dados respectivamente por:

$$E(\theta) = a\Gamma\left(1 - \frac{1}{b}\right) \quad (3.2.3)$$

$$V(\theta) = a^2 \left[ \Gamma\left(1 - \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{b}\right) \right] \quad (3.2.4)$$

O coeficiente de variação depende apenas do parâmetro de forma  $\underline{b}$  e é dado por:

$$\frac{\sigma_{\theta}}{E(\theta)} = \frac{\left[ \Gamma\left(1 - \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{b}\right) \right]^{1/2}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{b}\right)} \quad (3.2.5)$$

Logo, em uma distribuição Tipo II de valores extremos, para um determinado parâmetro de escala  $\underline{a}$ , o parâmetro de forma  $\underline{b}$  determina a variabilidade da distribuição anterior.

Na determinação dos valores do parâmetro de forma  $\underline{b}$  e do parâmetro de escala  $\underline{a}$ , De Souza e Lamberson assumiram que um técnico ou engenheiro com um bom nível de experiência em testes de vida saberia estimar um valor inicial representativo do início do aparecimento de falhas em testes padronizados. Logo, poderia aplicar esse conhecimento prévio na estimação desses dois parâmetros. O coeficiente de variação será pré-selecionado e baseado nesse tempo inicial de falha. Logo, teremos:

$$\frac{\sigma_{\theta}}{E(\theta)} = \frac{\left[ \Gamma\left(1 - \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{b}\right) \right]^{1/2}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{b}\right)} = 0,10, \quad \text{dando} \quad b = 12$$

O valor pré-selecionado (0,10) para o coeficiente de variação, apesar de ser considerado razoável e comum, é arbitrário e poderá ser modificado em situações específicas.

### **Distribuição anterior para o parâmetro de forma $\beta$**

O modelo Log-Gamma Negativo, definido entre dois limites probabilísticos (L, U), foi utilizado para formular a informação anterior do parâmetro de forma  $\beta$  da distribuição de amostragem Weibull. A função densidade (pdf) Log-Gamma Negativa é dada por:

$$f(\beta) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \frac{1}{(U-L)^d} (\beta-L)^{d-1} [\ln(U-L) - \ln(\beta-L)]^{c-1}, \quad L < \beta < U \quad (3.2.6)$$

O valor esperado e a variância são dados respectivamente por:

$$E(\beta) = (U - L) \left( \frac{d}{d+1} \right)^c + L \quad (3.2.7)$$

$$V(\beta) = (U - L)^2 \left[ \left( \frac{d}{d+2} \right)^c - \left( \frac{d}{d+1} \right)^{2c} \right] \quad (3.2.8)$$

A moda da equação (3.2.6) poderá ser obtida tirando-se a derivada de  $f(\beta)$  em relação a  $\beta$  e fazendo a equação resultante igual a zero. O resultado será a moda  $\beta_m$ , a qual será dada por:

$$\text{Moda} = \beta_m = (U - L) \exp \left[ -\frac{(c-1)}{(d-1)} \right] + L \quad (3.2.9)$$

Utilizando-se a moda  $\beta_m$  como uma estimativa inicial do parâmetro de forma  $\beta$  da distribuição de amostragem Weibull, e resolvendo a equação (2.2.9) em relação à  $\underline{d}$ , obteremos:

$$d = \frac{(c-1) + \ln(U-L) - \ln(\beta_m - L)}{\ln(U-L) - \ln(\beta_m - L)} \quad (3.2.10)$$

$$\text{Agora, faça } \frac{\sigma_\beta}{E(\beta)} = k \quad (3.2.11)$$

Aqui,  $k$ , o coeficiente de variação, representa a percentagem de erro na estimação de  $\beta$ . Logo, teremos:

$$k = (U - L) \times \frac{\left[ \left( \frac{d}{d+2} \right)^c - \left( \frac{d}{d+1} \right)^{2c} \right]^{1/2}}{(U - L) \left( \frac{d}{d+1} \right)^c + L} = 0,10 \quad (3.2.12)$$

Aqui,  $\underline{d}$  é dado pela equação (3.2.10).

## Estimativas Bayesianas

### A Distribuição Posterior

Fazendo  $t$  representar o tempo até a falha, e assumindo-se que  $\beta$  e  $\theta$  sejam variáveis aleatórias independentemente distribuídas, teremos  $h(t, \theta, \beta) = f(\theta) f(\beta) g(t \setminus \theta, \beta)$ , onde  $g(t \setminus \theta, \beta)$  representa a nossa distribuição de amostragem. Agora, com  $f_m(t) = \int_{\theta} \int_{\beta} h(t, \theta, \beta) d\beta d\theta$ , obteremos:

$$f(\theta, \beta \setminus t) = \frac{f(\theta) f(\beta) g(t \setminus \theta, \beta)}{\int_{\theta} \int_{\beta} f(\theta) f(\beta) g(t \setminus \theta, \beta) d\theta d\beta} \quad (3.2.13)$$

Para  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , nosso modelo de amostragem Weibull será dado por:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n \setminus \theta, \beta) = n! \frac{\beta^n}{\theta^{n\beta}} \left( \prod t_i \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \sum t_i^{\beta} / \theta^{\beta} \right] \quad (3.2.14)$$

Agora, se substituirmos as equações (3.2.2), (3.2.6) e (3.2.14) na equação (3.2.13), obteremos:

$$f(\theta, \beta \setminus t) = \frac{e^{-(a/\theta)^b} \exp \left[ - \sum t_i^{\beta} / \theta^{\beta} \right] \beta^n \left( \prod t_i \right)^{\beta-1} (\beta - L)^c (U - \beta)^d}{\theta^{b+1} \theta^{n\beta}} \quad (3.2.15)$$

$$\int_{\beta} \beta^n \left( \prod t_i \right)^{\beta-1} (\beta - L)^c (U - \beta)^d \left[ \int_{\theta} \frac{e^{-(a/\theta)^b} \exp \left[ - \sum t_i^{\beta} / \theta^{\beta} \right]}{\theta^{b+1} \theta^{n\beta}} d\theta \right] d\beta$$

$$\beta_L < \beta < \beta_U; \quad 0 \leq \theta \leq \infty$$

Aqui,  $f_m(t)$  é o denominador da equação (3.2.10). A integral dada por:

$$\int_{\theta} \frac{e^{-(a/\theta)^b} \exp \left[ - \sum t_i^{\beta} / \theta^{\beta} \right]}{\theta^{b+1} \theta^{n\beta}} d\theta$$

é muito similar a uma resolvida no anexo desse trabalho, sendo igual à:

$$L = \frac{1}{b a^{n\beta+b}} \Gamma\left(\frac{n\beta}{b} + 1\right) \quad (3.2.16)$$

Agora se substituirmos a equação (3.2.16) na equação (3.2.15), teremos:

$$f(\theta, \beta \setminus t) = \frac{e^{-(a/\theta)^b} \exp\left[-\sum t_i^\beta / \theta^\beta\right] \beta^n (\prod t_i)^{\beta-1} (\beta-L)^c (U-\beta)^d}{\theta^{b+1} \theta^{n\beta}}$$

$$\int_{\beta} \frac{1}{b a^{n\beta+b}} \beta^n (\prod t_i)^{\beta-1} (\beta-L)^c (U-\beta)^d \Gamma\left(\frac{n\beta}{b} + 1\right) d\beta$$

A integral  $\int_{\beta} \frac{1}{b a^{n\beta+b}} \beta^n (\prod t_i)^{\beta-1} (\beta-L)^c (U-\beta)^d \Gamma\left(\frac{n\beta}{b} + 1\right) d\beta$ , a

distribuição marginal de  $t$ , é a constante de proporcionalidade necessária para garantir que a distribuição posterior integrará à um. Agora, resolvendo essa integral para  $\beta$  através de métodos numéricos, obteremos um valor de, por exemplo,  $M$ . Então, nossa expressão para  $f(\theta, \beta \setminus t)$  ficará:

$$f(\theta, \beta \setminus t) = \frac{e^{-(a/\theta)^b} \exp\left[-\sum t_i^\beta / \theta^\beta\right] \beta^n (\prod t_i)^{\beta-1} (\beta-L)^c (U-\beta)^d}{M \theta^{b+1} \theta^{n\beta}} \quad (3.2.17)$$

### Determinando a função densidade marginal $f(\beta|t)$

A função densidade marginal (*pdf*) para o parâmetro de forma  $\beta$  pode ser obtida através da integração da equação (3.2.12) em relação à  $\theta$ . Então, teremos:

$$f(\beta \setminus t) = \frac{1}{M} \beta^n (\prod t_i)^{\beta-1} (\beta-L)^c (U-\beta)^d \int_{\theta} \frac{e^{-(a/\theta)^b} \exp\left[-\sum t_i^\beta / \theta^\beta\right]}{\theta^{b+1} \theta^{n\beta}} d\theta \quad (3.2.18)$$

A integral dada por  $\int_{\theta} \frac{e^{-(a/\theta)^b} \exp\left[-\sum t_i^\beta / \theta^\beta\right]}{\theta^{b+1} \theta^{n\beta}} d\theta$  foi resolvida

anteriormente nesse trabalho de De Souza e Lamberson (1995), e o resultado foi dado na equação (3.2.16). Logo, se substituirmos a equação (3.2.16) na equação (2.2.18), teremos:

$$f(\beta \setminus t) = \frac{1}{M b a^{n\beta+b}} \beta^n \left( \prod t_i \right)^{\beta-1} (\beta-L)^c (U-\beta)^d \Gamma\left(\frac{n\beta}{b}+1\right) \quad (3.2.19)$$

$$\beta_L < \beta < \beta_U$$

### Determinando a função densidade marginal $f(\theta|t)$

A função densidade marginal (*pdf*) para o parâmetro de escala  $\theta$  poderá ser obtida através da integração da equação (3.2.19) em relação à  $\beta$ . Então, teremos:

$$f(\theta \setminus t) = \frac{e^{-(a/\theta)^b}}{M \theta^{b+1}} \int_{\beta_L}^{\beta_U} \frac{\exp\left[-\sum t_i^\beta / \theta^\beta\right] \beta^n \left(\prod t_i\right)^{\beta-1} (\beta-L)^c (U-\beta)^d}{\theta^{n\beta}} d\beta$$

Utilizando a regra de Simpson para integração numérica, iremos agora resolver a integral dada acima. Nós utilizaremos uma combinação das regras de Simpson 1/3 e 3/8, sendo que consideraremos 10 intervalos entre os limites inferior (L) e superior (U) para  $f(\theta \setminus t)$ . Então, obteremos:

$$f(\theta \setminus t) = \frac{e^{-(a/\theta)^b}}{M b a^{b+1}} \times$$

$$\times$$

$$\frac{h}{3} \left( W_1 \frac{\exp\left[-R_1/\theta^{\beta_1}\right]}{\theta^{n\beta_1}} + W_2 \frac{\exp\left[-R_2/\theta^{\beta_2}\right]}{\theta^{n\beta_2}} + \dots + W_{11} \frac{\exp\left[-R_{11}/\theta^{\beta_{11}}\right]}{\theta^{n\beta_{11}}} \right) \text{-erro}$$

$$\text{Aqui, } R_i = \sum t_p^{\beta_i}; \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad p = 1, 2, \dots, k; \quad \text{erro} = 0$$

$$W_i = \beta_i^n \left( \prod t_p \right)^{\beta_i-1} (\beta_i - L)^c (U - \beta_i)^d \times (1, 2 \text{ ou } 4)$$

A função densidade marginal (*pdf*)  $f(\theta \setminus t)$  será finalmente dada por:

$$f(\theta \setminus t) = \frac{h}{3M} \sum_i W_i \frac{e^{-(a/\theta)^b} \exp\left[-R_i/\theta^{\beta_i}\right]}{\theta^{b+1} \theta^{n\beta_i}} \quad (3.2.20)$$

$$0 \leq \theta \leq \infty$$

### Valor Esperado de $\theta$

$$E(\theta/t) = \frac{h}{3MV} \sum_i W_i \int_0^{\infty} \frac{\exp(-a/\theta)^b \exp\left(R_i/\theta^{\beta_i}\right)}{\theta^{b+1} \theta^{n\beta_i}} d\theta, \quad 0 \geq \theta < \infty$$

Essa integral é muito parecida com uma integral resolvida anteriormente nesse trabalho. Desse modo, teremos:

$$E(\theta/t) = \frac{h}{3MV} \sum_i W_i \frac{1}{b a^{n\beta_i+b-1}} \Gamma\left(\frac{n\beta_i-1}{b} + 1\right); \quad 0 \geq \theta < \infty \quad (3.2.21)$$

### Valor Esperado de $\beta$

O valor esperado de  $\beta$  é dado pela expressão:

$$E(\beta/t) = \int_{\beta} \beta f(\beta/t) d\beta,$$

onde  $f(\beta/t)$  é dada pela equação (2.2.18). Logo:

$$E(\beta \setminus t) = \frac{1}{bMV} \int_L^U \frac{1}{a^{n\beta_i+b}} (\beta_i - L)^c (U - \beta_i)^d \beta_i^{n+1} \left(\prod_j t_j\right)^{\beta_i-1} \Gamma\left(\frac{n\beta_i}{b} + 1\right) d\beta$$

$$L \leq \beta_i \leq U; \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (3.2.22)$$

A integral dada pela equação (3.2.22) será agora resolvida empregando-se a regra de Simpson para integração numérica. Logo, teremos:

$$E(\beta \setminus t) = \frac{h}{3bMV} \left( W_1 \frac{1}{a^{n\beta_1+b}} + W_2 \frac{1}{a^{n\beta_2+b}} + \dots + W_{11} \frac{1}{a^{n\beta_{11}+b}} \right), \text{ onde}$$

$$i = 1, 2, \dots, q$$

$$W_i = (\beta_i - L)^c (U - \beta_i)^d \beta_i^{n+1} \left( \prod t_j \right)^{\beta_i - 1} \Gamma \left( \frac{n\beta_i}{b} + 1 \right) \times (1, 2 \text{ ou } 4), \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Logo:

$$E(\beta \setminus t) = \sum_i W_i \frac{1}{a n \beta_i + b} \quad (3.2.25)$$

Esse é o estimador Bayesiano para o parâmetro de forma  $\beta$  da distribuição de amostragem Weibull.

### Observações Finais

O método Bayesiano para teste de vida seqüencial utiliza uma probabilidade posterior, a qual será continuamente refinada à medida que observações se façam disponíveis. Quando a distribuição de amostragem é o modelo Weibull de dois parâmetros, as equações das funções marginais resultantes irão necessitar da utilização de algum tipo de integração numérica para poderem ser resolvidas. Para não estendermos demasiadamente a revisão desse artigo, não apresentaremos o exemplo incluído no mesmo. Os autores disseram estarem conscientes do fato de que o uso de estatística Bayesiana em um teste de vida seqüencial não ser ainda um processo bem definido, sendo necessário um certo nível de conhecimento acerca da quantificação dos parâmetros das distribuições anteriores, bem como dos parâmetros da distribuição de amostragem Weibull. Entretanto, de acordo com os autores, todos aqueles que desejarem utilizar esse modelo irão achá-lo como sendo uma alternativa razoavelmente bem definida para o uso no processo de tomada de decisões em aplicações industriais.

### 3.3 Comentário sobre o artigo “Further thoughts on a sequential life testing approach using a Weibull model”

Por Daniel I. De Souza Jr. (2000)

De Souza desenvolve com maior profundidade a metodologia de teste de vida seqüencial sem truncagem no qual a distribuição de amostragem será o modelo



Weibull de dois parâmetros. A distribuição de Weibull de dois parâmetros é muito utilizada como modelo de falhas, particularmente para componentes mecânicos e metalúrgicos (De Souza 1999, 1997, De Souza & Lamberson 1995).

A distribuição Weibull possui um parâmetro de forma, um de escala e um de localização. Neste estudo o parâmetro localização é conhecido, e o seu valor é igual à zero. Isso significa que uma falha poderá ocorrer no momento em que o produto for colocado em uso, ou seja, a qualquer intervalo de tempo após zero ( $t > 0$ ). A distribuição de Weibull de dois parâmetros é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right]; \quad t \geq 0$$

O parâmetro de escala  $\theta$  (a vida característica) é positivo e representa o ponto percentual 63,21 da distribuição de T. O parâmetro de forma  $\beta$ , o qual é também positivo, especifica a forma da distribuição. À medida que  $\beta$  aumenta, a moda da distribuição se aproxima de  $\theta$ . As situações de teste de hipótese serão dadas por:

$$1. \text{ Para } \theta: H_0: \theta \geq \theta_0; \quad H_1: \theta < \theta_0$$

A probabilidade de se aceitar  $H_0$  será dada por  $(1 - \alpha)$  no caso de  $\theta = \theta_0$ . Agora, se  $\theta = \theta_1$  onde  $\theta_1 < \theta_0$ , a probabilidade de se aceitar  $H_0$  será fixada em um nível pequeno  $\gamma$ .

$$2. \text{ Para } \beta: H_0: \beta \geq \beta_0; \quad H_1: \beta < \beta_0$$

A probabilidade de se aceitar  $H_0$  será dada por  $(1 - \alpha)$  no caso de  $\beta = \beta_0$ . Agora, se  $\beta = \beta_1$  onde  $\beta_1 < \beta_0$ , a probabilidade de se aceitar  $H_0$  será também fixada em um nível pequeno  $\gamma$ .

Quando se definir os valores das quantidades  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$ , o teste seqüencial estará totalmente desenvolvido.

O desenvolvimento do teste de vida seqüencial utiliza a seguinte relação de verossimilhança dada por (Kapur & Lamberson, 1977):

$$L_{1;n} / L_{0;n}$$

Antes de se obter uma amostra, a função  $L_{j,m;n} = L(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n | \theta_j, \beta_m)$  representa a função densidade (pdf) para as variáveis aleatórias  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, k$ ), ou ainda:

$$L_{j,m;n} = \prod_{k=1}^n f(t_k | \theta_j, \beta_m) \quad (3.3.1)$$

Aqui,  $f(t_k | \theta_j, \beta_m)$  representa a função densidade (pdf) das variáveis aleatórias  $t_k$ ;  $\theta_j$  e  $\beta_m$  são os valores verdadeiros para os parâmetros de interesse. Após uma amostra for obtida,  $L_{j,m;n}$  não é mais uma função densidade, mas sim é considerado como sendo uma função dos parâmetros desconhecidos  $\theta_j$  e  $\beta_m$ .  $L_{j,m;n}$  é agora chamado de função verossimilhança. Se os valores obtidos para  $\theta_j$  e  $\beta_m$  forem realmente iguais aos valores reais dos parâmetros de interesse, então  $L_{j,m;n}$  deverá atingir o seu valor máximo e os valores de  $\theta_j$  e  $\beta_m$  serão chamados de estimadores de máxima verossimilhança para  $\theta_j$  e para  $\beta_m$ . A relação seqüencial probabilística será dada por:

$$SPR = L_{1,1,n} / L_{0,0,n}$$

Para o modelo Weibull de dois parâmetros, teremos:

$$SPR = \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\beta_1}{\theta_1}\right) \left(\frac{t_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1 - 1} \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right]}{\left(\frac{\beta_0}{\theta_0}\right) \left(\frac{t_i}{\theta_0}\right)^{\beta_0 - 1} \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\theta_0}\right)^{\beta_0}\right]}, \text{ ou ainda,}$$

$$SPR = \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0}\right)^n \prod_{i=1}^n (t_i)^{\beta_1 - \beta_0} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{t_i^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}}\right)\right] \quad (3.3.2)$$

Logo, a região contínua será dada por  $A < SPR < B$ , onde  $A = \gamma / (1 - \alpha)$  e  $B = (1 - \gamma) / \alpha$ . Iremos aceitar a hipótese nula  $H_0$  se  $SPR \geq B$  e iremos rejeitar  $H_0$  se  $SPR \leq A$ .

Agora, se  $A \leq \text{SPR} \leq B$ , obteremos outro item para nossa amostra. Então, teremos:

$$\frac{\gamma}{(1-\alpha)} < \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right)^n \prod_{i=1}^n (t_i)^{\beta_1 - \beta_0} \times \exp \left[ - \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{t_i^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right) \right] < \frac{(1-\gamma)}{\alpha} \quad (3.3.3)$$

Tirando-se o logaritmo natural de cada termo da inequação anterior e após alguma manipulação, teremos:

$$n \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) - \ln \left[ \frac{(1-\gamma)}{\alpha} \right] < X < n \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) + \ln \left[ \frac{(1-\alpha)}{\gamma} \right] \quad (3.3.4)$$

$$X = \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{t_i^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right) + (\beta_0 - \beta_1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) \quad (3.3.5)$$

No exemplo apresentado nesse artigo, De Souza fornece regras para trabalharmos com a hipótese nula.

### Exemplo

Um componente mecânico deverá ser submetido a um teste de vida para se determinar se o mesmo poderia ser representado por uma distribuição de amostragem Weibull. Como esse é um produto bem conhecido, acredita-se que o mesmo possa ser representado por um modelo Weibull de dois parâmetros possuindo um parâmetro de escala  $\theta$  de 2500.000 ciclos e um parâmetro de forma  $\beta$  de 2.5. Foi decidido que  $\alpha = 0.05$  e  $\gamma = 0.10$ , e escolheu-se os valores para os parâmetros da hipótese alternativa  $\theta_1$  e  $\beta_1$  como sendo  $\theta_1 = 2.000.000$  ciclos e  $\beta_1 = 1.5$ . Então, utilizando-se as equações (2.3.4) e (2.3.5), obteremos:

$$n \ln \left( \frac{1.5}{2,000,000^{1.5}} \times \frac{2,500,000^{2.5}}{2.5} \right) - \ln \left[ \frac{(1-0.10)}{0.05} \right] = n \times 14.55569 - 2.89037$$

$$n \ln \left( \frac{1.5}{2,000,000^{1.5}} \times \frac{2,500,000^{2.5}}{2.5} \right) + \ln \left[ \frac{(1-0.05)}{0.10} \right] = n \times 14.55569 + 2.25129$$

$$X = \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i^{1.5}}{2,000,000^{1.5}} - \frac{t_i^{2.5}}{2,500,000^{2.5}} \right) + 1.0 \times \sum_{i=1}^n \ln(t_i); \text{ Logo teremos :}$$

$$n \times 14.55569 - 2.89037 < X < n \times 14.55569 + 2.25129$$

Um gráfico para esse teste de vida seqüencial foi então desenvolvido, utilizando –se a equação acima. A Figura (3.3.1) apresenta as áreas de decisão para esse teste de vida.

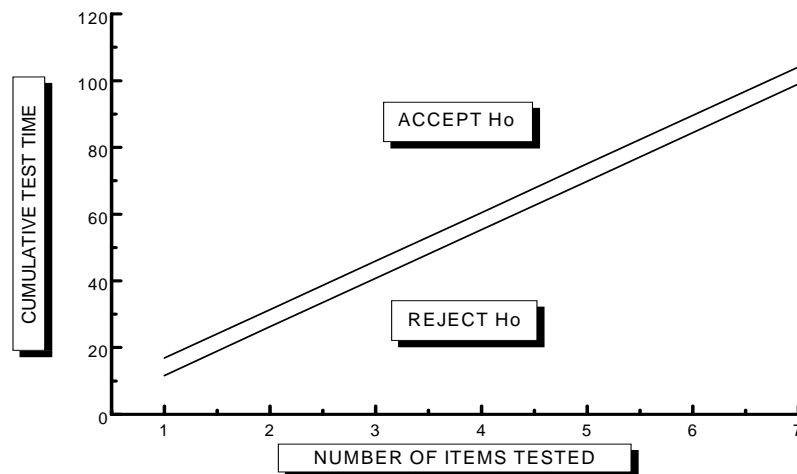


Figura 3.3.1 – Teste de Vida Seqüencial para o componente mecânico sendo analisado

Após esse gráfico ter sido desenvolvido, obtém–se uma amostra. O procedimento é então definido de acordo com as seguintes regras:

1. Se  $X \geq n \times 14.55569 + 2.25129$  aceitaremos a hipótese nula  $H_0$ .
2. Se  $X \leq n \times 14.55569 - 2.89037$ , rejeitaremos a hipótese nula  $H_0$ .
3. Se  $n \times 14.55569 - 2.89037 < X < n \times 14.55569 + 2.25129$ , obteremos mais uma observação.

Neste exemplo, tornou-se necessário testar sete unidades ou observações para obter a decisão de aceitar a hipótese nula  $H_0$ . Os valores correspondentes aos sete tempos de falhas (número de ciclos) foram os seguintes: 2.467.263.2; 1.574.362.1; 2.010.281.3; 2.361.826.1; 1.016.274.8; 2.605.312.2; 2.663.115,0 ciclos.

A Tabela (3.3.1) e a Figura (3.3.2) apresentam os resultados desse teste.

**Tabela 3.3.1 – Resultados de Teste Seqüencial para a distribuição Weibull**

$$\beta_1 = 1.5; \theta_1 = 2.000.000 \quad \beta_0 = 2.5; \theta_0 = 2.500.000$$

Item	Limite inferior	Limite superior	Valor de X
1	11.66532	16.80698	15.12122
2	26.22101	31.36267	29.77428
3	40.77670	45.91837	44.71597
4	55.33239	60.47406	59.80671
5	69.88808	75.02975	73.89523
6	84.44377	89.58543	89.04640
7	98.99946	104.14110	104.2067

No segundo caso escolheu-se os valores de  $\beta_1 = 2.0$  para o parâmetro de forma da hipótese alternativa;  $\theta_1 = 2,000,000$  ciclos para  $H_1$ ;  $\beta_0 = 2.5$  e  $\theta_0 = 2.500,000$  ciclos, respectivamente, para os parâmetros de forma e de escala da hipótese nula. Neste caso, só após a análise de 12 unidades ou observações foi possível se chegar a uma decisão de se aceitar a hipótese nula.

**Tabela 3.3.2 – Resultado do Teste Seqüencial para o modelo Weibull**

$$\beta_1 = 2.0; \theta_1 = 2,000,000 \quad \beta_0 = 2.5; \theta_0 = 2.500,000$$

Item	Limite inferior	Limite superior	Valor de X
1	4.698672	9.840336	7.913573
2	12.28772	17.42938	15.35320
3	19.87676	25.01842	23.04058
4	27.46581	32.60747	30.90511
5	35.05485	40.19651	37.97378
6	42.64389	47.78556	45.94856
7	50.23294	55.37460	53.94793
8	57.82198	62.96365	61.72543
9	65.41103	70.55269	69.74948
10	73.00007	78.14173	77.82352
11	80.58911	85.73077	85.65101
12	88.17815	93.31982	93.91177

Já no terceiro caso, 12 unidades tiveram de ser testadas para ser possível se obter a decisão de se rejeitar a hipótese nula  $H_0$ . Uma má escolha para o valor do parâmetro de forma da hipótese nula ( $\beta_0 = 3.5$ ), pode ter causado essa rejeição.

No quarto caso foi apresentado, com  $\beta_1 = 2.0$ ;  $\theta_1 = 2.500.000$  ciclos;  $\beta_0 = 2.5$ ;  $\theta_0 = 2.000.000$  ciclos, mesmo após testarmos 20 unidades do produto sob análise, não foi possível se obter alguma conclusão sobre a aceitação ou rejeição da hipótese nula  $H_0$ .

As conclusões obtidas a partir dos dados analisados tornaram possível se tomar uma das três decisões seguintes: 1. Aceitar a hipótese nula  $H_0$ ; 2. Rejeitar a hipótese nula  $H_0$ ; 3. Obter mais uma observação. No quarto caso, podemos observar que mesmo após testarmos 20 unidades do produto sob análise, não foi possível obter-se alguma conclusão sobre a aceitação ou rejeição da hipótese nula  $H_0$ . Uma escolha relativamente errônea ou má do parâmetro de escala da hipótese  $H_0$  ( $\theta_0 = 2.000.000$  ciclos), poderia ter causado essa situação. Em casos como esse, ao invés de tentar-se obter informações adicionais, torna-se necessário o desenvolvimento de um mecanismo de truncagem para esse caso analisado. De Souza (2001) desenvolve um mecanismo de truncagem para a distribuição Weibull de dois parâmetros.

### **3.4 Comentário sobre o artigo “Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism Using an Underlying Weibull”**

Por Daniel I. De Souza Jr., (2001)

Nesse artigo, De Souza desenvolveu um mecanismo de truncagem para um teste de vida seqüencial no qual a distribuição de amostragem é o modelo Weibull de dois parâmetros. Apresentaram-se regras que permitiram a tomada de uma decisão sobre a aceitação ou rejeição da hipótese nula  $H_0$  no momento da truncagem. Para a determinação do valor esperado para o tamanho da amostra  $E(n)$  do teste de vida seqüencial no momento da truncagem, tornou-se necessário a utilização de algum tipo de integração numérica (nesse estudo, foi utilizado a regra de Simpson 1/3). Um exemplo ilustrou o desenvolvimento desse mecanismo proposto do teste de vida seqüencial. Na determinação de uma equação que represente o valor esperado desse tamanho de amostra  $E(n)$ , foi aplicado ao modelo Weibull um mecanismo desenvolvido por Mood (Mood e Graybill (1963) para

a distribuição normal.

De acordo com Mood e Graybill (1963), uma expressão aproximada para o valor esperado  $E(n)$  de uma amostra em um teste de vida seqüencial será dado por:

$$E(n) = \frac{E(W_n^*)}{E(w)}; \quad (3.4.1)$$

onde o valor esperado da variável  $w_n^*$  depende dos valores aleatórios de  $\underline{w}$  e da variável aleatória  $\underline{n}$ . Aqui,  $\underline{w}$  é dado por:

$$w = \ln \frac{f(t; \theta_1, \beta_1)}{f(t; \theta_0, \beta_0)} \quad (3.4.2)$$

A variável  $w_n^*$  apenas recebe valores que correspondam a situações nas quais  $w_n^*$  exceda o valor de  $\ln(A)$  ou seja menor do que o  $\ln(B)$ ; ( $A = \gamma / (1 - \alpha)$  e  $B = (1 - \gamma) / \alpha$ ). Se quisermos ignorar as quantidades pelas quais  $w_n^*$  exceda o  $\ln(A)$  ou seja menor do que o  $\ln(B)$ , poderemos então dizer que  $w_n^*$  recebe essencialmente apenas dois valores,  $\ln(A)$  e  $\ln(B)$ . Quando a distribuição verdadeira for  $f(t; \theta, \beta)$ , a probabilidade de que  $w_n^*$  receba o valor  $\ln(A)$  será dada por  $P(\theta, \beta)$ , ao passo que a probabilidade de que  $w_n^*$  receba o valor  $\ln(B)$  será dada por  $1 - P(\theta, \beta)$ . Então, de acordo com Mood e Graybill (1963), a expressão para o valor esperado da variável  $w_n^*$  será dado por:

$$E(W_n^*) \cong P(\theta, \beta) \ln A + [1 - P(\theta, \beta)] \ln B \quad (3.4.3)$$

Logo, a equação (3.4.1) será dada por:

$$E(n) \cong \frac{P(\theta, \beta) \ln A + [1 - P(\theta, \beta)] \ln B}{E(w)} \quad (3.4.4)$$

A equação (3.4.4) permite que se compare testes de vida seqüenciais com testes de vida com tamanho de amostras fixados. As provas da existência das equações (3.4.1) até (3.4.4) podem ser encontradas em Mood (Mood e Graybill, 1963, p. 391-392).

Para uma distribuição de amostragem Weibull, a equação (3.4.2) será transformada para:

$$w = \ln \left\{ \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) t^{(\beta_1 - \beta_0)} \exp \left[ -\frac{t^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} + \frac{t^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right] \right\},$$

ou ainda;

$$w = \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) + (\beta_1 - \beta_0) \ln(t) - \frac{t^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} + \frac{t^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}}$$

O valor esperado de  $w$ ,  $E(w)$ , será então dado por:

$$E(w) = \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) + (\beta_1 - \beta_0) E[\ln(t)] - \frac{1}{\theta_1^{\beta_1}} E \left( t^{\beta_1} \right) + \frac{1}{\theta_0^{\beta_0}} E \left( t^{\beta_0} \right) \quad (3.4.5)$$

Aqui, teremos:

$$E \left( t^{\beta_1} \right) = \theta_1^{\beta_1} \Gamma \left( 1 + \frac{\beta_1}{\beta} \right) \quad (3.4.6)$$

$$E \left( t^{\beta_0} \right) = \theta_0^{\beta_0} \Gamma \left( 1 + \frac{\beta_0}{\beta} \right) \quad (3.4.7)$$

$$E[\ln(t)] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \ln(U_i) e^{-U_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (3.4.8)$$

Neste estudo, o Apêndice (1.0) apresenta as soluções para  $E(t^{\beta_1})$  e  $E(t^{\beta_0})$ . O Apêndice (2.0) mostra a computação para  $E[\ln(t)]$ . Os interessados no desenvolvimento dessas computações poderão encontrá-las nos acima mencionados apêndices nesse trabalho de De Souza (2001). Quando se decidir em relação aos valores dessas quantidades  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$ , e após o cálculo do  $E(n)$  ter sido feito, o teste de vida seqüencial estará totalmente definido.



Utilizando-se agora as equações (3.4.1) até (3.4.8), foi apresentado um exemplo que ajudou no desenvolvimento do mecanismo de teste de vida seqüencial com truncagem proposto.

### Exemplo

O exemplo apresentado neste artigo é um produto feito de um aço de alta resistência e baixa liga submetida a um teste de vida seqüencial. No quarto caso analisado, o mecanismo de teste de vida seqüencial sem truncagem não foi capaz de chegar a uma decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese nula  $H_0$  mesmo após a análise de 20 itens. Então, utilizando-se as equações (3.4.1) até (3.4.8), aplicou-se para o quarto caso analisado no artigo de De Souza (2000), o mecanismo de truncagem desenvolvido nesse estudo. Desse modo, o valor esperado do tamanho da amostra  $E(n)$  será dado por:

$$E(n) \cong \frac{P(\theta, \beta) \ln A + [1 - P(\theta, \beta)] \ln B}{E(w)} \cong \frac{2,8390}{0,3155} = 8,998 \cong 9 \text{ itens.}$$

De acordo com Kapur & Lamberson (1977), quando o ponto de truncagem for alcançado, traça-se uma linha dividindo o gráfico seqüencial de acordo com a Figura (3.4.1) seguinte:

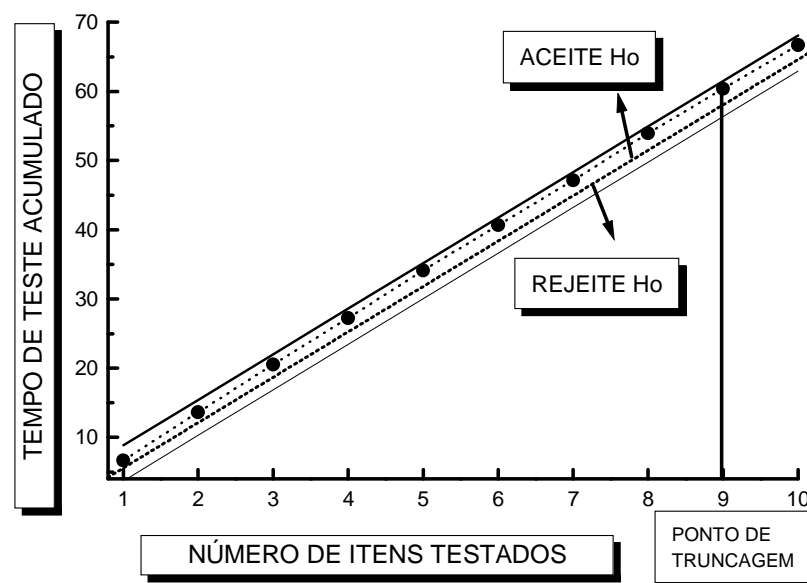


Figura 3.4.1 – Procedimento para se realizar a truncagem de um teste de Vida Seqüencial

Esta linha é traçada através da origem do gráfico, sendo paralela às linhas de aceitação e de rejeição. A decisão de se aceitar ou rejeitar a hipótese nula  $H_0$  depende simplesmente de qual lado da linha o item final testado se encontra. Obviamente esse procedimento irá alterar os níveis de  $\alpha$  e de  $\gamma$  do teste original; entretanto, a mudança será mínima se o ponto de truncagem não for muito pequeno. Como podemos ver na Figura (3.4.1), a hipótese nula  $H_0$  deverá ser aceita, pois a observação final (observação número 9) se encontra no lado da linha relacionado com a aceitação de  $H_0$ .

Com a utilização do mecanismo de truncagem desenvolvido nesse estudo, a decisão de se aceitar a hipótese nula  $H_0$  foi alcançada com a análise de apenas nove itens. Esse fato realça a vantagem de se utilizar um mecanismo de truncagem em testes de vida seqüencial.

### **3.5 Comentário sobre o artigo “ Application of a Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism for an Underling Three-Parameter Weibull Model”**

Por Daniel De Souza Jr., (2004)

Nesse estudo, De Souza desenvolve uma abordagem de teste de vida seqüencial com truncagem na qual fornece regras para se trabalhar com uma hipótese nula  $H_0$  em situações nas quais a distribuição de amostragem é o modelo Weibull de três parâmetros. Nesse modelo o parâmetro de localização ou vida mínima será diferente de zero.

A distribuição Weibull de três parâmetros possui um parâmetro de localização  $\phi$ , o qual representa a vida mínima de uma característica sendo analisada; um de forma  $\beta$ , o qual especifica a forma da distribuição; e um de escala  $\theta$ , o qual representa a vida característica da distribuição. Todos os três parâmetros são positivos. A função densidade da distribuição Weibull de três parâmetros é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left( \frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta} \right]; \quad t \geq 0$$

As situações de teste de hipótese foram dadas por De Souza (2003):

1. Para o parâmetro de escala  $\theta$ :

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

A probabilidade de se aceitar a hipótese nula  $H_0$  será dada por  $(1-\alpha)$  no caso de  $\theta = \theta_0$ . Agora, se  $\theta = \theta_1$  onde  $\theta_1 < \theta_0$ , então a probabilidade de se aceitar  $H_0$  será fixada em um nível inferior  $\gamma$ .

2. Para o parâmetro de forma  $\beta$ :

$$H_0 : \beta \geq \beta_0$$

$$H_1 : \beta < \beta_0$$

A probabilidade de se aceitar a hipótese nula  $H_0$  será também dada por  $(1-\alpha)$  caso de  $\beta = \beta_0$ . Agora, se  $\beta = \beta_1$  onde  $\beta_1 < \beta_0$ , então a probabilidade de aceitarmos  $H_0$  será também fixada em um nível inferior  $\gamma$ .

3. Para o parâmetro de localização  $\varphi$ :

$$H_0 : \varphi \geq \varphi_0$$

$$H_1 : \varphi < \varphi_0$$

Uma vez mais, a probabilidade de se aceitar a hipótese nula  $H_0$  será dada por  $(1-\alpha)$  no caso de  $\varphi = \varphi_0$ . Agora, no caso de  $\varphi = \varphi_1$  onde  $\varphi < \varphi_0$ , então a probabilidade de aceitarmos  $H_0$  será também fixada em um nível inferior  $\gamma$ .

Novamente, de acordo com Kapur & Lamberson (1977) e De Souza (2000), o desenvolvimento de um teste de vida seqüencial utiliza a relação de verossimilhança dada por:

$$L_{1;n} / L_{0;n}$$

No caso do modelo Weibull de três parâmetros, a relação probabilística seqüencial (RPS) será dada por:

$$RPS = L_{1,1,1,n} / L_{0,0,0,n}$$

ou ainda, para o modelo Weibull de três parâmetros, teremos:

$$RPS = \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\beta_1}{\theta_1}\right) \left(\frac{t_i - \phi_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1 - 1} \exp\left[-\left(\frac{t_i - \phi_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right]}{\left(\frac{\beta_0}{\theta_0}\right) \left(\frac{t_i - \phi_0}{\theta_0}\right)^{\beta_0 - 1} \exp\left[-\left(\frac{t_i - \phi_0}{\theta_0}\right)^{\beta_0}\right]}$$

$$RPS = \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0}\right)^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1 - 1}}{(t_i - \phi_0)^{\beta_0 - 1}}\right] \times$$

$$\exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}}\right)\right]$$

A região continua será dada por  $A < RPS < B$ , sendo que  $A = \gamma/(1-\alpha)$  e  $B = (1-\gamma)/\alpha$ . Aceitaremos a hipótese nula  $H_0$  se  $RPS \geq B$  e rejeitaremos  $H_0$  no caso de  $RPS \leq A$ . Agora, se  $A < RPS < B$ , faremos mais uma observação. Então, teremos:

$$\frac{\gamma}{(1-\alpha)} < \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0}\right)^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1 - 1}}{(t_i - \phi_0)^{\beta_0 - 1}}\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}}\right)\right] < \frac{(1-\gamma)}{\alpha}$$

Obtendo o logaritmo natural de cada termo da equação acima e rearrumando-a, teremos:

$$n \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) - \ln \left[ \frac{(1-\gamma)}{\alpha} \right] < X < n \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) + \ln \left[ \frac{(1-\alpha)}{\gamma} \right] \quad (3.5.1)$$

$$X = \sum_{i=1}^n \left( \frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right) - (\beta_1 - 1) \times \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \phi_1) + (\beta_0 - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \phi_0) \quad (3.5.2)$$

### Tamanho esperado da amostra de um Teste de Vida Seqüencial

Novamente, de acordo com Mood e Graybill (1963), uma expressão aproximada para o tamanho esperado da amostra de um Teste de Vida Seqüencial  $E(n)$  será dado por:

$$E(n) = \frac{E(W_n^*)}{E(w)}, \quad (3.5.3)$$

onde o valor esperado da variável  $W_n^*$  dependerá dos valores aleatórios  $\underline{w}$  e da variável  $\underline{n}$ . Aqui,  $\underline{w}$  será dado por:

$$w = \ln \frac{f(t; \theta_1, \beta_1, \phi_1)}{f(t; \theta_0, \beta_0, \phi_0)} \quad (3.5.4)$$

Quando a distribuição verdadeira for  $f(t; \theta, \beta, \phi)$ , a probabilidade de que o valor de  $W_n^*$  seja  $\ln(A)$  será igual à  $P(\theta, \beta, \phi)$ , ao passo de que a probabilidade de que essa variável tenha o valor de  $\ln(B)$  será de  $1 - P(\theta, \beta, \phi)$ . Então, de acordo com Mood e Graybill (1963), a expressão para o valor esperado da variável  $W_n^*$  será dado por:

$$E(W_n^*) \approx P(\theta, \beta, \phi) \ln(A) + [1 - P(\theta, \beta, \phi)] \ln(B) \quad (3.5.5)$$

Logo, com  $A = \gamma/(1-\alpha)$  e com  $B = (1-\gamma)/\alpha$ , a Equação (2.5.3) será dada por:

$$E(n) \approx \frac{P(\theta, \beta, \phi) \ln(A) + [1 - P(\theta, \beta, \phi)] \ln(B)}{E(w)} \quad (3.5.6)$$

A Equação (3.5.6) nos permite comparar testes de vida seqüencial com testes com tamanhos de amostras fixos. As provas para a existência das Equações (3.5.3) à (3.5.6) podem ser encontradas em Mood e Graybill (1963), pp. 391-392. Para uma distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros, a Equação (3.5.4) será transformada em:

$$w = \ln \left\{ \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) \frac{(t - \phi_1)^{\beta_1 - 1}}{(t - \phi_0)^{\beta_0 - 1}} \exp \left[ - \frac{(t - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right] \right\}$$

$$w = \ln(C) + (\beta_1 - 1) \ln(t - \phi_1) - (\beta_0 - 1) \ln(t - \phi_0) - \frac{(t - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} + \frac{(t - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}},$$

$$\text{onde } C = \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0}$$

O valor esperado de  $w$ ,  $E(w)$ , será então dado por:

$$E(w) = \ln(C) + (\beta_1 - 1) E \left[ \ln(t - \phi_1) \right] - (\beta_0 - 1) E \left[ \ln(t - \phi_0) \right] - \frac{1}{\theta_1^{\beta_1}} E \left[ (t - \phi_1)^{\beta_1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\theta_0^{\beta_0}} E \left[ (t - \phi_0)^{\beta_0} \right] \quad (3.5.7)$$

$$E \left[ (t - \phi_1)^{\beta_1} \right] = \theta_1^{\beta_1} \Gamma \left( 1 + \frac{\beta_1}{\beta} \right) \quad (3.5.8)$$

$$E \left[ (t - \phi_0)^{\beta_0} \right] = \theta_0^{\beta_0} \Gamma \left( 1 + \frac{\beta_0}{\beta} \right) \quad (3.5.9)$$

$$E \left[ \ln(t - \phi_1) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \ln(U_i) e^{-U_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\}; U = \left( \frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^\beta \quad (3.5.10)$$

$$E \left[ \ln(t - \phi_0) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \ln(Y_i) e^{-Y_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\}; Y = \left( \frac{t - \phi_0}{\theta} \right)^\beta \quad (3.5.11)$$

Neste artigo, o Apêndice (1.0) apresenta as soluções para as Equações (3.5.8) e (3.5.9). O Apêndice (2.0) apresenta as soluções para as Equações (3.5.10) e (3.5.11).

### Determinando um estimador inicial para a Vida Mínima $\varphi$

A função densidade ou *pdf* de  $x_1$  será dada por:

$$f(x_1) = n [1 - F(x_1)]^{n-1} f(x_1), \text{ ou como ainda } F(x_1) = 1 - R(x_1), \text{ obteremos:}$$

$$f(x_1) = n [R(x_1)]^{n-1} f(x_1)$$

Para uma distribuição Weibull de três parâmetros, teremos:

$$f(x_1) = \frac{n\beta}{\theta} \left( \frac{t - \varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} \left\{ \exp - \left[ \left( \frac{t - \varphi}{\theta} \right)^\beta \right] \right\}^n$$

O valor esperado de  $x_1$  será dado por:

$$E(x_1) = \int_{\varphi}^{\infty} \frac{n\beta}{\theta} t \left( \frac{t - \varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} \left\{ \exp - \left[ \left( \frac{t - \varphi}{\theta} \right)^\beta \right] \right\}^n dt$$

$$\text{Fazendo } U = \left( \frac{t - \varphi}{\theta} \right)^\beta; du = \frac{\beta}{\theta} \left( \frac{t - \varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} dt; dt = \frac{du}{\frac{\beta}{\theta} \left( \frac{t - \varphi}{\theta} \right)^{\beta-1}}; t = \theta U^{1/\beta} + \varphi$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ ;  $U \rightarrow \infty$ ; Agora, quando  $t \rightarrow \varphi$ ;  $U \rightarrow 0$ . Logo, teremos:

$$E(x_1) = \int_0^{\infty} n(\theta U^{1/\beta} + \varphi) e^{-nU} du = \theta \int_0^{\infty} n U^{1/\beta} e^{-nU} du + \varphi \int_0^{\infty} n e^{-nU} du; \text{ onde}$$

$$\varphi \int_0^{\infty} n e^{-nU} du = -\varphi [e^{-nU}]_0^{\infty} = -\varphi[0-1] = \varphi$$

Na solução da integral  $\theta \int_0^{\infty} n U^{1/\beta} e^{-nU} du$ , faça  $Z = nU$ ;  $du = \frac{dz}{n}$ ;  $U = \frac{Z}{n}$

Quando  $U \rightarrow \infty$ ;  $Z \rightarrow \infty$ ; Agora, quando  $U \rightarrow 0$ ;  $Z \rightarrow 0$ . Então, teremos:

$$E(x_1) = \theta \int_0^{\infty} \left(\frac{Z}{n}\right)^{1/\beta} e^{-Z} dz + \varphi = \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \int_0^{\infty} Z^{1/\beta} e^{-Z} dz + \varphi$$

$$\text{Finalmente, obteremos: } E(x_1) = \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + \varphi$$

O valor esperado de  $x_1$  é dado pela equação acima, o que indica que a vida mínima  $\varphi$  poderá ser estimada por:

$$E(\varphi) = \varphi_0 = x_1 - \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (3.5.12)$$

Quando as decisões relativas a essas quantidades  $\theta_0, \theta_1, \beta_0, \beta_1, \varphi_0, \varphi_1, \alpha, \gamma, P(\theta, \beta)$  forem tomadas, e depois do  $E(n)$  ter sido calculado, o teste de vida seqüencial estará totalmente definido. Utilizando-se as equações de (3.5.1) até (3.5.12), um exemplo irá ilustrar a aplicação do mecanismo de teste de vida seqüencial proposto.

### Exemplo

O exemplo apresentado foi adaptado do trabalho publicado por De Souza (2003). Ele está relacionado com um produto de aço do tipo de alta resistência e baixa liga sendo submetido a um teste de vida. Como esse é um produto bem conhecido, existe o consenso que o mesmo possa ser representado por uma



distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros, possuindo um parâmetro de escala  $\theta$  de 2.000.000 ciclos e um parâmetro de escala  $\beta$  de 2,5. Acredita-se que esses são os valores reais desses parâmetros. Para se estimar o valor esperado do parâmetro de localização  $\varphi$  da distribuição de amostragem, tornou-se necessário a realização de algum teste de vida preliminar. Nesse teste preliminar, um grupo de oito itens desse produto foi submetido a um teste de fadiga até que todos viessem a falhar. A Tabela (3.5.1) seguinte apresenta os tempos de falhas (ciclos) para esse teste de vida preliminar.

**Tabela 3.5.1 – Tempos de falhas (ciclos) para os oito itens testados**

2.894.403	3.287.092	2.441.809	1.772.408
3.009.172	1.978.230	4.210.511	2.209.775

O menor tempo de falhas obtido (1.772.408 ciclos) foi considerado como o estimador do valor de  $x_1$ . Logo, utilizando-se a Equação (2.5.12), teremos:

$$E(\varphi) = \varphi_0 = x_1 - \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = 1,772,407.65 - \frac{2,000,000.}{(8)^{1/2.5}} \Gamma\left(\frac{1}{2.5} + 1\right)$$

$$E(\varphi) = \varphi_0 = 1,772,408. - 772,407.65 = \varphi_0 \approx 1,000,000. \text{ ciclos}$$

Escolheu-se para  $\alpha$  um valor de 0,5 e para  $\gamma$  o valor de 0,10. Neste exemplo, os valores alocados para os parâmetros das hipóteses nula e alternativa foram os seguintes: parâmetro de escala alternativo  $\theta_1 = 2.500.000$  ciclos; parâmetro de forma alternativo  $\beta_1 = 2,0$ ; parâmetro de localização alternativo  $\varphi_1 = 800.000$  ciclos; parâmetro de escala da hipótese nula  $\theta_0 = 2.000.000$  ciclos; parâmetro de forma da hipótese nula  $\beta_0 = 2,5$  e parâmetro de localização da hipótese nula  $\varphi_0 = 1.000.000$  ciclos. Nesse caso, mesmo após a observação de 20 tempos de falhas, não foi possível se tomar a decisão de se aceitar ou de se rejeitar a hipótese nula  $H_0$ .

Os tempos de falhas (ciclos) obtidos nesse exemplo foram os seguintes: 3.358.581; 2.244.502; 2.705.247; 3.187.634; 1.790.827; 3.605.029; 3.716.727;

2.928.499; 3.837.785; 4.115.048; 3.071.191; 4.906.894; 3.138.968; 1.907.641; 2.675.526; 4.040.664; 2.117.752; 1.652.901; 2.797.409 e 2.425.281 ciclos.

Os resultados obtidos para esse teste de vida seqüencial utilizando-se uma distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros, foram os seguintes:

**Tabela 3.5.2 – Teste Vida Seqüencial para modelo Weibull de três parâmetros**  $\varphi_1 = 800.000$ ;  $\theta_1 = 2.500.000$ ;  $\beta_1 = 2,0$ ;  $\theta_0 = 2.000.000$ ;  $\varphi_0 = 1.000.000$ ;  $\beta_0 = 2,5$ .

Item	Limite inferior	Limite superior	Valor de X
1	3,694526	8,836189	6,792547
2	10,27942	15,42109	13,689060
3	16,86432	22,00599	20,662300
4	23,44922	28,59088	27,534810
5	30,03412	35,17579	34,158530
6	36,61901	41,76068	40,793720
7	43,20391	48,34558	47,340820
8	49,78810	54,93048	54,290150
9	56,37371	61,51538	60,729680
10	62,95861	68,10027	66,874130
11	69,54350	74,68517	73,787720
12	76,12840	81,27007	78,692180
13	82,71330	87,85497	85,583160
14	89,29819	94,43986	92,300880
15	95,88309	101,0248	99,274350
16	102,4680	107,6097	105,50470
17	109,0529	114,1946	112,34790
18	115,6378	120,7795	118,83070
19	122,2227	127,3643	125,79880
20	128,8076	133,9493	132,74640

Para este exemplo, o gráfico do teste seqüencial será dado por:

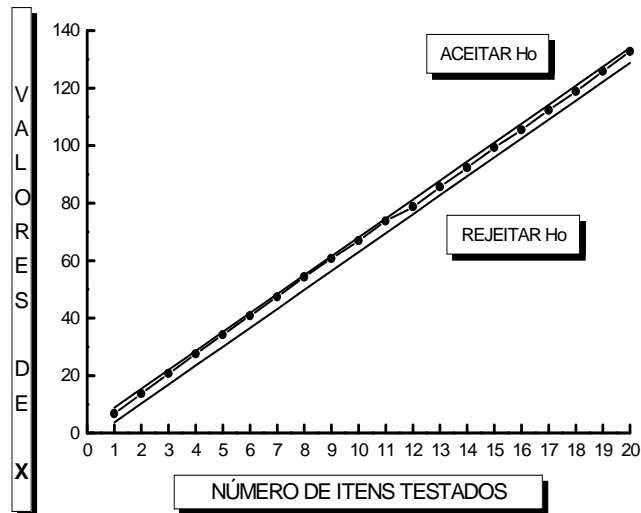


Figura 3.5.1 – Resultado do Teste de Vida Seqüencial para esse exemplo

Utilizando-se agora as Equações (3.5.6) à (3.5.11), com os valores de  $\varphi_1 = 800.000$  ciclos;  $\theta_1 = 2.500.000$  ciclos;  $\beta_1 = 2,0$ ;  $\theta_0 = 2.000.000$  ciclos;  $\varphi_0 = 1.000.000$  ciclos;  $\beta_0 = 2,5$ ;  $\alpha = 0,05$ ;  $\gamma = 0,10$  e fazendo-se a  $P(\theta, \beta, \varphi)$  ser igual à 0,01, poderemos então calcular o valor esperado do tamanho da amostra  $E(n)$  desse teste de vida seqüencial sendo analisado. Então, o valor esperado do tamanho da amostra  $E(n)$  será dado por:

$$E(n) \approx \frac{P(\theta, \beta) \ln A + [1 - P(\theta, \beta)] \ln B}{E(w)} \approx \frac{2,8390}{0,42163} \approx 6,73339 \approx 7 \text{ itens.}$$

### Um mecanismo para a truncagem da amostra

De acordo com Kapur e Lamberson (1977), quando o ponto de truncagem é alcançado, traça-se uma linha dividindo o gráfico seqüencial, conforme apresentado na Figura (3.5.2) seguinte:

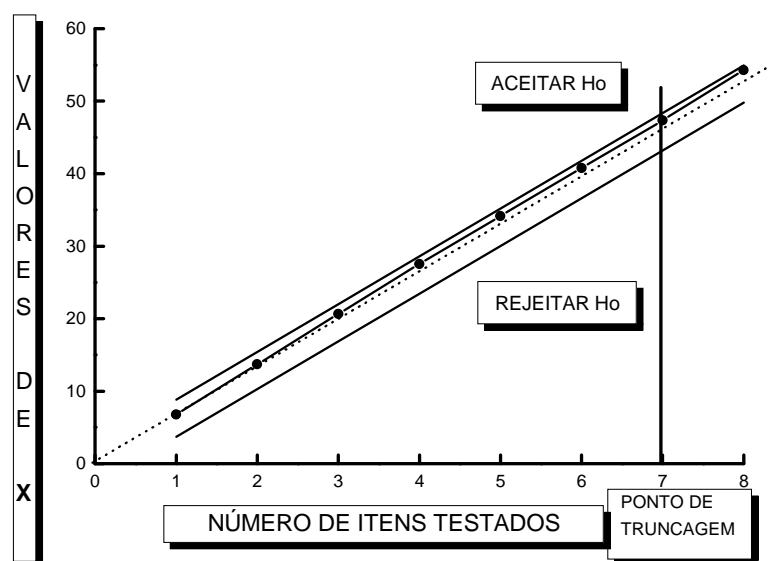


Figura 3.5.2 – Processo de troncagem para o Teste de Vida Seqüencial utilizando-se um modelo Weibull de três parâmetros

Essa linha será traçada passando pela origem do gráfico e paralela às linhas de aceitação e de rejeição. A decisão de se aceitar ou de se rejeitar a hipótese nula  $H_0$  dependerá apenas do lado dessa linha no qual a última observação se encontra. Obviamente esse procedimento irá alterar os níveis  $\alpha$  e  $\gamma$  do teste de vida original; entretanto, como vimos anteriormente em um outro artigo, de acordo com Kapur e Lamberson (1977), essa mudança será insignificante se o ponto de troncagem não for muito pequeno ( $< 4$  observações). Como podemos notar na Figura (3.5.2), a hipótese nula  $H_0$  deverá ser aceita, pois a última observação (observação número 7) se encontra no lado da linha divisória relacionada com a aceitação de  $H_0$ .

A maior vantagem de se utilizar uma abordagem de teste de vida seqüencial em relação ao de uma amostra de tamanho fixo é o de reduzir o número de observações ou itens a ser analisado, com uma conseqüente redução nos custos de teste. Acontece que mesmo com o uso de uma abordagem de teste de vida seqüencial, algumas vezes o número de itens necessário para se obter uma decisão de se aceitar ou rejeitar uma hipótese nula poderá ser muito grande, como mostrado por De Souza (2000). Logo, o teste deverá ser truncado após um determinado tempo fixo ou após um certo número de observações. O mecanismo de troncagem para um teste de vida seqüencial desenvolvido nesse trabalho fornece regras para se trabalhar com uma hipótese nula  $H_0$  em situações nas quais a distribuição de amostragem é o modelo Weibull de três parâmetros. Para se calcular o valor

esperado do tamanho da amostra  $E(n)$  de nosso teste de vida seqüencial, tem-se que utilizar algum método de integração numérica (no nosso trabalho utilizamos a regra de Simpson's 1/3). Os Apêndices (1.0) e (2.0) desse artigo apresentam o desenvolvimento das equações necessárias para se calcular o  $E(n)$ . Um teste de vida preliminar foi desenvolvido a fim de se estimar um valor estimado para o parâmetro de localização  $\varphi$  da distribuição de amostragem Weibull. O menor tempo de falhas observado nesse teste preliminar (1.772.408 ciclos) foi considerado como o estimador do primeiro tempo de falhas  $x_1$ .

Em um trabalho anterior, utilizando o exemplo apresentado nesse estudo, empregando um teste de vida seqüencial sem truncagem e trabalhando com uma distribuição de amostragem Weibull de dois parâmetros, De Souza (2000) não foi capaz de obter uma decisão para se aceitar ou para se rejeitar uma hipótese nula  $H_0$ , mesmo após a obtenção de 20 observações. Com o mecanismo de truncagem desenvolvido nesse artigo e trabalhando com uma distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros, a decisão de se aceitar a hipótese nula  $H_0$  foi alcançada com a análise de apenas sete observações ou itens. Esse fato mostra a vantagem de se utilizar um mecanismo de truncagem em uma situação de teste de vida seqüencial.

### **3.6 Comentário sobre o artigo “A Truncation Mechanism in a Sequential Life Testing Approach with an Underlying Two-Parameter Inverse Weibull Model”**

Por Daniel I. De Souza Jr., (2001b.)

A distribuição Weibull Invertida de dois parâmetros foi derivada por Pascoal Erto (1982) e tem sido utilizada em estimação Bayesiana para representar a informação disponível acerca do parâmetro de escala de um modelo de amostragem Weibull (Erto, 1982) e (De Souza and Lamberson, 1995). Possui dois parâmetros, um de escala ( $\theta$ ) e um de forma ( $\beta$ ). Essa distribuição é rica em forma, o que a torna apta a representar de uma maneira adequada o padrão de variedade de muitas situações encontradas na indústria. A distribuição Weibull Invertida de dois parâmetros é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{\theta}{t}\right)^{\beta+1} \exp\left[-\left(\frac{\theta}{t}\right)^{\beta}\right]; \quad t \geq 0$$

As situações de teste de hipótese foram dadas por (Kapur and Lamberson, 1977) e (De Souza, 2000) e não serão novamente apresentadas nessa revisão.

### Teste de Vida Seqüencial

O desenvolvimento de um Teste de Vida Seqüencial utiliza a razão de verossimilhança (De Souza 1999) e (Kapur and Lamberson, 1977) apresentada anteriormente nesse capítulo de revisão bibliográfica.

Para a distribuição Weibull Invertida de dois parâmetros, a razão probabilística seqüencial (SPR) será então dado por:

$$SPR = \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\beta_1}{\theta_1}\right)\left(\frac{\theta_1}{t_i}\right)^{\beta_1+1} \exp\left[-\left(\frac{\theta_1}{t_i}\right)^{\beta_1}\right]}{\left(\frac{\beta_0}{\theta_0}\right)\left(\frac{\theta_0}{t_i}\right)^{\beta_0+1} \exp\left[-\left(\frac{\theta_0}{t_i}\right)^{\beta_0}\right]}, \text{ ou ainda}$$

$$SPR = \left(\frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0}\right)^n \prod_{i=1}^n (t_i)^{\beta_0-\beta_1} \times \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta_1^{\beta_1}}{t_i^{\beta_1}} - \frac{\theta_0^{\beta_0}}{t_i^{\beta_0}}\right)\right]$$

$$n \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0} \right) - \ln \left[ \frac{(1-\gamma)}{\alpha} \right] < X < n \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0} \right) + \ln \left[ \frac{(1-\alpha)}{\gamma} \right] \quad (3.6.1)$$

Aqui;

$$X = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\theta_1^{\beta_1}}{t_i^{\beta_1}} - \frac{\theta_0^{\beta_0}}{t_i^{\beta_0}} \right) + (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) \quad (3.6.2)$$

### Valor esperado de um Teste Seqüencial

Nesse capítulo de revisão bibliográfica apresentamos anteriormente uma expressão aproximada para o valor esperado  $E(n)$  de uma amostra em um teste de vida seqüencial, expressão essa desenvolvida por (Mood e Graybill, 1963).

Para uma distribuição de amostragem Weibull Invertida de dois parâmetros, a expressão para a variável  $w$  será dada por:

$$w = \ln \frac{f(t; \theta_1, \beta_1)}{f(t; \theta_0, \beta_0)} = \ln \left\{ \left( \frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0} \right) t^{(\beta_0 - \beta_1)} \exp \left[ -\frac{\theta_1^{\beta_1}}{t^{\beta_1}} + \frac{\theta_0^{\beta_0}}{t^{\beta_0}} \right] \right\}, \text{ ou ainda}$$

$$w = \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0} \right) + (\beta_0 - \beta_1) \ln(t) - \frac{\theta_1^{\beta_1}}{t^{\beta_1}} + \frac{\theta_0^{\beta_0}}{t^{\beta_0}}$$

O valor esperado de  $w$ ,  $E(w)$ , será então dado por:

$$E(w) = \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0} \right) + (\beta_0 - \beta_1) E[\ln(t)] - \theta_1^{\beta_1} E \left( \frac{1}{t^{\beta_1}} \right) + \theta_0^{\beta_0} E \left( \frac{1}{t^{\beta_0}} \right) \quad (3.6.3)$$

Aqui, teremos:

$$E \left( \frac{1}{t^{\beta_1}} \right) = \frac{1}{\theta^{\beta_1} \Gamma \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta} \right)} \quad (3.6.4)$$

$$E \left( \frac{1}{t^{\beta_0}} \right) = \frac{1}{\theta^{\beta_0} \Gamma \left( 1 - \frac{\beta_0}{\beta} \right)} \quad (3.6.5)$$

$$E[\ln(t)] = \ln(\theta) - \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \ln(U_i) e^{-U_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (3.6.6)$$

O Apêndice (1.0) deste artigo apresenta as soluções para o  $E[1/(t^{\beta_1})]$  e  $E[1/(t^{\beta_0})]$ . O Apêndice (2.0) mostra a computação para o  $E[\ln(t)]$ . Quando se decidir em relação aos valores dessas quantidades  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$ , e após o cálculo do  $E(n)$  ter sido feito, o Teste de Vida Seqüencial estará totalmente definido. Usando as equações (3.6.1) até (3.6.6), apresentaremos um exemplo que irá desenvolver o mecanismo proposto de um teste de vida seqüencial com truncagem.

## Exemplo

Um certo produto metalúrgico feito de um aço de alta resistência e baixa liga será submetido a um teste de vida seqüencial. Como esse é um produto bem conhecido, existe um conhecimento de que o mesmo poderia ser representado por uma distribuição de amostragem Weibull Invertida de dois parâmetros, possuindo um parâmetro de escala  $\theta$  de 2.000.000 de ciclos e um parâmetro de forma  $\beta$  de 2,5, valores esses que acredita-se serem os valores reais desses dois parâmetros. Foi decidido se utilizar um  $\alpha$  de 0,05 e um  $\gamma$  de 0,10. No caso apresentado nesse exemplo, escolheu-se os seguintes valores para os parâmetros das hipóteses alternativa e nula: parâmetro de escala da hipótese alternativa  $\theta_1 = 2.500.000$  ciclos e parâmetro de forma da hipótese alternativa  $\beta_1 = 2,0$ ; parâmetro de escala da hipótese nula  $\theta_0 = 2.000.000$  ciclos e parâmetro de forma da hipótese nula  $\beta_0 = 2,5$ . Nesse caso, mesmo após o teste de 20 itens, não foi possível se tomar uma decisão de se aceitar a hipótese nula  $H_0$  ou de se rejeitar a hipótese nula  $H_0$ . Os valores correspondentes aos tempos de falhas (ciclos) desses 20 itens amostrados foram os seguintes:

3.358.581.; 2.244.502.; 2.705.247.; 3.187.634.; 1.790.827.; 3.605.029.; 3.716.727.; 2.928.499.; 3.837.785.; 4.115.048.; 3.071.191.; 5.906.894.; 7.138.968.; 1.907.641.; 2.675.526.; 4.040.664.; 2.117.752.; 1.652.901.; 2.797.409.; 2.425.281.

Os resultados apresentados pelo teste de vida seqüencial para o modelo Weibull Invertido de dois parâmetros foram:

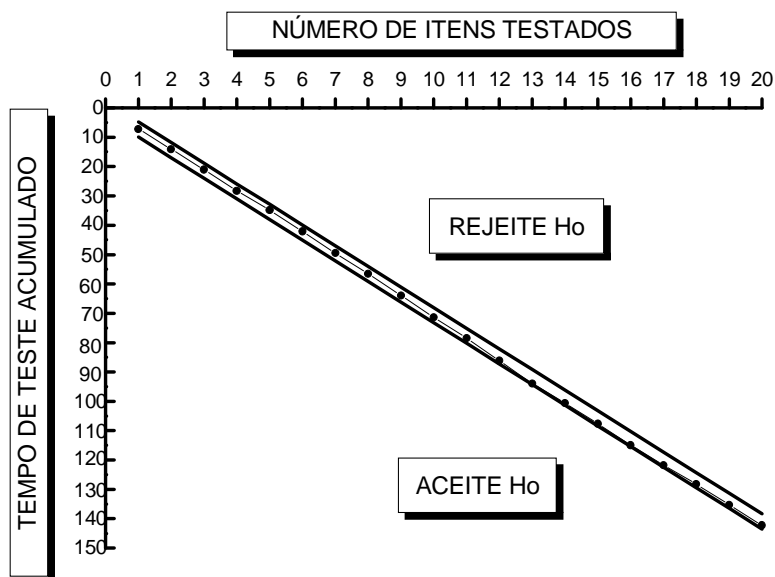


Figura 3.6.1 – Gráfico do Teste de Vida Seqüencial para modelo Weibull Invertido



**Tabela 3.6.1 – Resultados do Teste para o modelo Weibull Invertido**

$$\beta_1 = 2,0; \quad \theta_1 = 2.500.000; \quad \beta_0 = 2,5; \quad \theta_0 = 2.000.000$$

Item	Limite inferior	Limite Superior	Valor de X
1	3,694526	8,836189	6,642992
2	10,27942	15,42109	13,62447
3	16,86432	22,00599	20,51506
4	23,44922	28,59088	27,22959
5	30,03412	35,17579	34,12661
6	36,61901	41,76068	40,66241
7	43,20391	48,34558	47,14869
8	49,78810	54,93048	53,96407
9	56,37371	61,51538	60,39636
10	62,95861	68,10027	66,70446
11	69,54350	74,68517	73,46568
12	76,12840	81,27007	79,01801
13	82,71330	87,85497	84,12077
14	89,29819	94,43986	91,06505
15	95,88309	101,0248	97,96452
16	102,4680	107,6097	104,3059
17	109,0529	114,1946	111,2875
18	115,6378	120,7795	117,6909
19	122,2227	127,3643	124,5001
20	128,8076	133,9493	131,3394

Utilizando-se agora as equações (3.6.1) até (3.6.6) e com  $\theta_1 = 2.500.000$  ciclos;  $\theta = \theta_0 = 2.000.000$  ciclos;  $\beta_1 = 2,0$ ;  $\beta = \beta_0 = 2,5$ ,  $\alpha = 0,05$ ;  $\gamma = 0,10$  e elegendo  $P(\theta, \beta)$  ser igual à 0,01, poderemos então calcular o valor esperado do tamanho da amostra  $E(n)$  desse teste de vida seqüencial sendo analisado. Logo, teremos:

$$E(n) \cong \frac{P(\theta, \beta) \ln A + [1 - P(\theta, \beta)] \ln B}{E(w)}, \text{ onde:}$$

$$E(w) = \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta^{\beta_1}}{\beta_0} \right) + (\beta_0 - \beta_1) E[\ln(t)] - \theta_1^{\beta_1} E \left( \frac{1}{t^{\beta_1}} \right) + \theta_0^{\beta_0} E \left( \frac{1}{t^{\beta_0}} \right)$$

Nesse artigo, De Souza apresenta uma solução detalhada de cada um dos fatores da equação acima. Então, teremos:

$$E(w) = -7,0312 + 0,5 \times 15,3825 - 0,3404 + 0,0 = 0,3197$$

$$E(W_n^*) \cong -0,01 \times 2,2513 + 0,99 \times 2,8904 \cong 2,8390$$

Finalmente, o valor esperado do tamanho da amostra  $E(n)$  será dado por:

$$E(n) \cong \frac{P(\theta, \beta) \ln A + [1 - P(\theta, \beta)] \ln B}{E(w)} \cong \frac{2,8390}{0,197} \cong 8,8802 \cong 9 \text{ itens}$$

Logo, poderemos tomar a decisão acerca de aceitar ou rejeitar a hipótese nula  $H_0$  depois de analisarmos o item número nove.

Como vimos anteriormente, de acordo com Kapur (Kapur & Lamberson 1977), quando o ponto de truncagem for alcançado, traça-se uma linha dividindo o gráfico seqüencial de acordo com a Figura (3.6.2) seguinte:

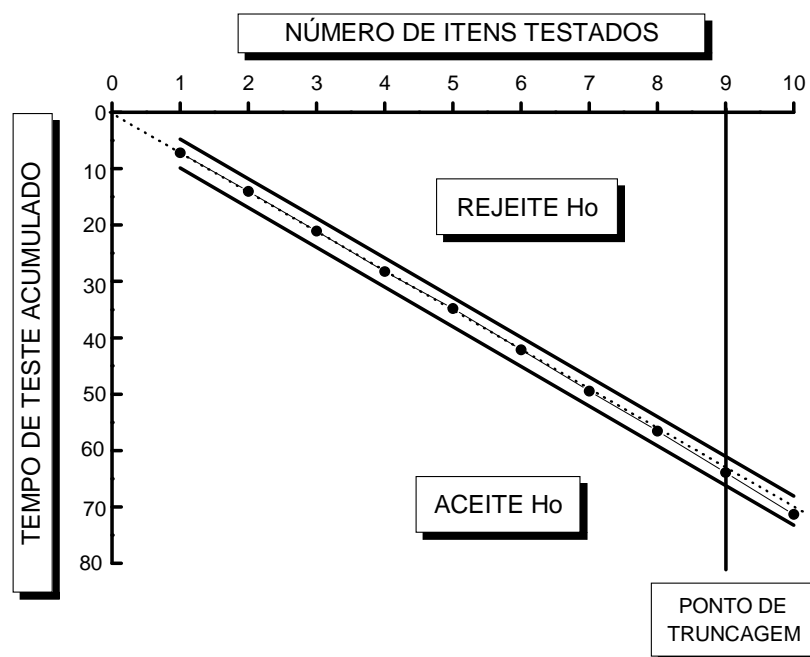


Figura 3.6.2 – Procedimento para se realizar a truncagem de um Teste de Vida Seqüencial

Como podemos ver na Figura (3.6.2), a hipótese nula  $H_0$  deverá ser aceita, pois a observação final (observação número 9) se encontra no lado da linha relacionado com a aceitação de  $H_0$ .

## CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA DESENVOLVIDA NESTE ESTUDO

### 4.1 Teste de Vida Seqüencial com a utilização de um estimador de Máxima Verossimilhança

O método de Teste de Vida Seqüencial, desenvolvido inicialmente por Wald (Wald, 1947), representa uma situação de teste de hipóteses na qual obtêm-se uma decisão de se aceitar uma amostra, rejeitar uma amostra, ou continuar a amostragem à medida que as observações se tornam disponíveis. O teste estará terminado no momento em que se obtiver informação suficiente que permita se aceitar ou se rejeitar a hipótese nula  $H_0$ . O tamanho da amostra não será pré-fixado, mas irá depender da análise das observações ou itens da amostra à medida que ficarem disponíveis.

Como podemos esperar, para a realização de um teste de vida seqüencial necessitaremos de um número menor de itens ou observações do que para se executar um teste de vida com tamanhos de amostras pré-fixados. Desse modo, a utilização de um teste de vida seqüencial constitui-se em uma alternativa interessante ao uso de um teste de hipóteses no qual o tamanho da amostra é fixado antes do início do teste de vida. A vantagem do teste seqüencial é a de se utilizar apenas alguns itens ou observações na sua aplicação, especialmente quando as distribuições de amostragem são os modelos Weibull e Weibull Invertido.

A distribuição Weibull é largamente utilizada como um modelo de falhas, particularmente para componentes mecânicos e metalúrgicos. Essa distribuição é rica em forma, o que a torna apta a representar de uma maneira adequada o padrão de variedade de muitas situações encontradas na indústria. O modelo Weibull possui um parâmetro de localização ou vida mínima, um de escala e um de forma. A função densidade da distribuição Weibull é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left( \frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta} \right]; \quad t \geq 0$$

O parâmetro de escala  $\theta$  (a vida característica) é positivo, e representa o ponto percentual 63,21 da distribuição de  $T$ . O parâmetro de forma  $\beta$ , o qual é também positivo, especifica a forma da distribuição. O parâmetro de vida mínima  $\phi$  é também positivo e será sempre menor do que o primeiro tempo de falhas  $t_1$ .

## 4.2 Teste de Hipóteses

As situações de teste de hipótese serão dadas por:

Para o parâmetro de escala  $\theta$ :  $H_0: \theta \geq \theta_0$ ;  $H_1: \theta < \theta_0$ . A probabilidade de se aceitar  $H_0$  será de  $(1-\alpha)$  no caso de  $\theta = \theta_0$ . Agora, se  $\theta = \theta_1$  onde  $\theta_1 < \theta_0$ , então a probabilidade de se aceitar  $H_0$  será fixada em um nível pequeno  $\gamma$ .

Para o parâmetro de forma  $\beta$ :  $H_0: \beta \geq \beta_0$ ;  $H_1: \beta < \beta_0$ . A probabilidade de se aceitar  $H_0$  será dada por  $(1-\alpha)$  no caso de  $\beta = \beta_0$ . Agora, se  $\beta = \beta_1$  onde  $\beta_1 < \beta_0$ , então a probabilidade de se aceitar  $H_0$  será mais uma vez fixada em um nível pequeno  $\gamma$ .

Para o parâmetro de vida mínima (ou localização)  $\varphi$ :  $H_0: \varphi \geq \varphi_0$ ;  $H_1: \varphi < \varphi_0$ . Novamente, a probabilidade de se aceitar  $H_0$  será dada por  $(1-\alpha)$  no caso de  $\varphi = \varphi_0$ . No caso de termos  $\varphi = \varphi_1$  onde  $\varphi_1 < \varphi_0$ , então a probabilidade de se aceitar  $H_0$  será novamente fixada em um nível pequeno  $\gamma$ .

## 4.3 Desenvolvimento do Teste Seqüencial

O desenvolvimento de um Teste de Vida Seqüencial utiliza a razão de verossimilhança dado pela relação seguinte  $SPR = L_{1,1,1,n} / L_{0,0,0,n}$ . Antes de se obter uma amostra, a função dada pela equação

$L_{j,m,k;n} = L(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n | \theta_j, \beta_m, \varphi_k)$ , representa a função densidade (pdf) para as variáveis aleatórias  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), ou ainda,

$$L_{j,m,k;n} = \prod_{k=1}^n f(t_k | \theta_j, \beta_m, \varphi_k)$$

Aqui,  $f(t_i | \theta_j, \beta_m, \varphi_k)$  representa a função densidade para as variáveis aleatórias  $t_i$ , ao passo que as variáveis  $\theta_j$ ,  $\beta_m$ , e  $\varphi_k$  representam os valores reais dos parâmetros de interesse. Após a obtenção de uma amostra,  $L_{j,m,k;n}$  já não é mais uma função densidade (pdf), mas é agora considerado uma função dos parâmetros desconhecidos ( $\theta = \theta_j$ ,  $\beta = \beta_m$ , e  $\varphi = \varphi_k$ ).  $L_{j,m,k;n}$  é agora chamado de uma função de verossimilhança. Se os valores obtidos para  $\theta_j$ ,  $\beta_m$ , e  $\varphi_k$  forem iguais aos valores reais dos parâmetros de interesse  $\theta$ ,  $\beta$  e  $\varphi$ , então  $L_{j,m,k;n}$  deverá atingir o seu valor máximo e os valores  $\theta_j$ ,  $\beta_m$ , e  $\varphi_k$  serão então chamados de estimadores de máxima

verossimilhança de  $\theta$ ,  $\beta$  e  $\varphi$ . A razão probabilística seqüencial (SPR) será então dado por  $SPR = L_{1,1,1,n} / L_{0,0,0,n}$ , ou ainda, de acordo com De Souza, 2003, para o modelo Weibull de três parâmetros, teremos:

$$SPR = \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\beta_1}{\theta_1}\right) \left(\frac{t_i - \varphi_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1 - 1} \exp\left[-\left(\frac{t_i - \varphi_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right]}{\left(\frac{\beta_0}{\theta_0}\right) \left(\frac{t_i - \varphi_0}{\theta_0}\right)^{\beta_0 - 1} \exp\left[-\left(\frac{t_i - \varphi_0}{\theta_0}\right)^{\beta_0}\right]}$$

Logo, a região contínua será dada por  $A < SPR < B$ , onde  $A = \gamma / (1 - \alpha)$  e  $B = (1 - \gamma) / \alpha$ . Iremos aceitar a hipótese nula  $H_0$  se  $SPR \geq B$  e iremos rejeitar  $H_0$  se  $SPR \leq A$ . Agora, se  $A \leq SPR \leq B$ , obteremos outro item para nossa amostra.

Tirando-se o logaritmo natural de cada termo da equação anterior e após alguma manipulação, com a região contínua dada por  $A < SPR < B$ , teremos:

$$\ln \left[ \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right] - \ln \left[ \frac{(1 - \gamma)}{\alpha} \right] < X_i < \ln \left[ \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right] + \ln \left[ \frac{(1 - \alpha)}{\gamma} \right] \quad (4.1)$$

$$X_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{(t_i - \varphi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t_i - \varphi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right) - (\beta_1 - 1) \times \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \varphi_1) + (\beta_0 - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \varphi_0) \quad (4.2)$$

Quando se decidir em relação aos valores dessas quantidades  $\varphi_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$ , o teste de vida seqüencial estará totalmente definido.

#### 4.4 Mecanismo de Truncagem

Como já sabemos, a utilização de um Teste de Vida Seqüencial constitui-se em uma alternativa interessante ao uso de um teste de hipóteses no qual o tamanho da amostra é fixado antes do início do teste de vida. Algumas vezes, entretanto, torna-se desejável ou ainda conveniente a truncagem do teste seqüencial após a ocorrência de alguns números de falhas estatisticamente pré-determinadas. O objetivo dessa truncagem é o de se manter o tamanho da amostra relativamente pequeno, obtendo-se assim uma óbvia redução nos custos do teste. Essa é a maior vantagem apresentada por um teste de vida seqüencial em relação a um teste com tamanho de amostra fixo. Na determinação de uma equação que represente o valor esperado do tamanho da amostra  $E(n)$  de um teste de vida seqüencial para efeito de truncagem, aplicaremos ao modelo Weibull um mecanismo desenvolvido por Mood (Mood e Graybill, 1963). Para a determinação do valor do tamanho da amostra  $E(n)$  do teste de vida seqüencial, teremos de utilizar algum tipo de integração numérica.

De acordo com Mood e Graybill (1963), uma expressão aproximada para o valor esperado  $E(n)$  de uma amostra em um teste de vida seqüencial será dado por:

$$E(n) = \frac{P(\theta, \beta, \varphi) \ln A + [1 - P(\theta, \beta, \varphi)] \ln B}{E(w)} \quad (4.3)$$

Aqui,  $w$  será dado por  $w = \ln \frac{f(t; \theta_1, \beta_1, \varphi_1)}{f(t; \theta_0, \beta_0, \varphi_0)}$ . De acordo com De Souza,

(2003), para o modelo Weibull de três parâmetros, teremos:

$$E(w) = \ln \left( \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) + (\beta_1 - 1) E \left[ \ln(t - \varphi_1) \right] - (\beta_0 - 1) E \left[ \ln(t - \varphi_0) \right] - \frac{1}{\theta_1^{\beta_1}} E \left[ (t - \varphi_1)^{\beta_1} \right] + \frac{1}{\theta_0^{\beta_0}} E \left[ (t - \varphi_0)^{\beta_0} \right] \quad (4.4)$$

Após o cálculo do  $E(n)$  ter sido feito, o mecanismo de truncagem estará totalmente definido.

Nesse momento torna-se importante o esclarecimento de dois pontos fundamentais relacionado com testes de vida, em situações nas quais assumimos uma distribuição de amostragem.

O primeiro desses pontos esclarece a rotina para se realizar um Teste de Vida Seqüencial com truncagem. Inicialmente, antes da análise de qualquer observação ou item da população amostrada, calcula-se estatisticamente o valor do ponto de truncagem. Após esse cálculo, inicia-se a análise da primeira observação. Dependendo do resultado dessa análise, a população poderá ser aceita ou rejeitada, ou então, caso não se tenha informação suficiente para se rejeitar ou aceitar a referida população, um novo item será colocado em teste. Esse procedimento deverá ser repetido até que exista informação suficiente para se tomar uma decisão acerca da aceitação ou rejeição da população de amostragem, ou então até se atingir o número de itens correspondentes ao ponto de truncagem. Nesse momento, através de um procedimento para se realizar a truncagem de um teste seqüencial, o qual será apresentado na aplicação desse estudo, toma-se uma decisão sobre a aceitação ou rejeição da hipótese nula.

O segundo desses pontos diz respeito à estimação dos valores mais prováveis para os parâmetros da distribuição utilizada para representar o mecanismo de falhas presente. Em boa parte das situações encontradas na prática, as informações existentes ou disponíveis sobre determinado produto ou componente industrial não são suficientes para que possamos assumir valores com elevada confiabilidade para os referidos parâmetros. Nesse caso, necessitaremos estimar estatisticamente esses parâmetros. O método mais confiável estatisticamente que é normalmente aplicado em situações como essa é o da Máxima Verossimilhança, ou como é internacionalmente conhecido, o método do "Maximum Likelihood". Iremos agora apresentar o desenvolvimento desse método para o caso de termos uma distribuição de amostragem representada pelo modelo Weibull de três parâmetros.

#### 4.5 O Método da Máxima Verossimilhança para o modelo de Weibull de três parâmetros em uma situação de teste truncado por números de falhas (Teste de Tipo II)

O estimador de Máxima Verossimilhança para os parâmetros de forma, escala e de vida mínima de uma distribuição de amostragem Weibull em uma situação de teste truncado por número de falhas (teste de vida do Tipo II), será dado por:

$$L(\beta; \theta; \varphi) = k! \left[ \prod_{i=1}^r f(t_i) \right] [1 - F(t_r)]^{n-r} = k! \left[ \prod_{i=1}^r f(t_i) \right] [R(t_r)]^{n-r}; t > 0 \quad (4.5)$$

Com  $f(t_i) = \frac{\beta}{\theta^\beta} (t_i - \varphi)^{\beta-1} e^{-(t_i - \varphi/\theta)^\beta}$  e com  $R(t_r) = e^{-(t_r - \varphi/\theta)^\beta}$ , teremos:

$$L(\beta; \theta; \varphi) = k! \frac{\beta^r}{\theta^{\beta r}} \left[ \prod_{i=1}^r (t_i - \varphi) \right]^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi/\theta)^\beta} \left[ e^{-(t_r - \varphi/\theta)^\beta} \right]^{n-r}$$

A função log-verossimilhança  $L = \ln[L(\beta; \theta; \varphi)]$  será dada por:

$$L = \ln(k) + r \ln(\beta) - r\beta \ln(\theta) + (\beta-1) \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \varphi) - \sum_{i=1}^r \left( \frac{t_i - \varphi}{\theta} \right)^\beta - (n-r) \left( \frac{t_r - \varphi}{\theta} \right)^\beta$$

Para encontrarmos os valores de  $\theta$ ,  $\beta$  e de  $\varphi$  que maximizem a função log-verossimilhança, obteremos as derivadas em relação a  $\theta$ ,  $\beta$  e  $\varphi$  e as igualaremos a zero. Então, aplicando alguma álgebra, teremos:

Para o parâmetro de escala  $\theta$ :

$$\frac{dL}{d\theta} = -\frac{r\beta}{\theta} + \frac{\beta \times \sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta}{\theta^{\beta+1}} + \frac{\beta(n-r)(t_r - \varphi)^\beta}{\theta^{\beta+1}} = 0 \quad (4.6)$$



Para o parâmetro de forma  $\beta$ :

$$\frac{dL}{d\beta} = \frac{r}{\beta} - r \ln(\theta) + \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \varphi) - \sum_{i=1}^r \left( \frac{t_i - \varphi}{\theta} \right)^\beta \ln \left( \frac{t_i - \varphi}{\theta} \right) - (n-r) \left( \frac{t_r - \varphi}{\theta} \right)^\beta \ln \left( \frac{t_r - \varphi}{\theta} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Para o parâmetro de vida mínima  $\varphi$ :

$$\frac{dL}{d\varphi} = -(\beta-1) \sum_{i=1}^r \frac{1}{(t_i - \varphi)} + \frac{\beta \times \left[ \sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^{\beta-1} + (n-r)(t_r - \varphi)^{\beta-1} \right]}{\theta^\beta} = 0 \quad (4.8)$$

Da equação (4.6), obteremos:

$$\theta = \left( \frac{\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta + (n-r)(t_r - \varphi)^\beta}{r} \right)^{1/\beta} \quad (4.9)$$

Note que quando  $\beta = 1$ , a equação (4.9) se reduzirá à equação do estimador de Máxima Verossimilhança do modelo exponencial de dois parâmetros. Substituindo-se agora a equação (4.9) para  $\theta$  nas equações (4.6) e (4.7) e aplicando alguma álgebra, as equações (4.6) e (4.7) se transformarão em:

$$\frac{r}{\beta} + \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \varphi) - \frac{r \times \left[ \sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta \ln(t_i - \varphi) + (n-r)(t_r - \varphi)^\beta \ln(t_r - \varphi) \right]}{\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta + (n-r)(t_r - \varphi)^\beta} = 0 \quad (4.10)$$

$$- \left[ \frac{\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta + (n-r)(t_r - \varphi)^\beta}{r} \right] (\beta-1) \sum_{i=1}^r \frac{1}{(t_i - \varphi)} + \beta \times$$

$$\times \left[ \sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^{\beta-1} + (n-r)(t_r - \varphi)^{\beta-1} \right] = 0 \quad (4.11)$$

O problema foi agora reduzido ao de se resolver simultaneamente as duas equações iterativas (4.10) e (4.11). A solução simultânea dessas duas equações pode parecer relativamente simples quando comparado ao árduo trabalho de se resolver simultaneamente as três equações iterativas (4.6), (4.7) e (4.8), como descrito por Harter et. al (1965). Em uma situação como essa, uma possível simplificação para se obter estimadores quando os valores de todos os três parâmetros são desconhecidos seria através do mecanismo proposto por Bain (1978). Por exemplo, utilizando-se o mecanismo proposto por Bain, vamos supor que  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\theta}$  representem bons estimadores lineares sem tendências (sigla internacional representada por GLUEs) do parâmetro de forma  $\beta$  e do parâmetro de escala  $\theta$  relativos a um determinado valor fixo da vida mínima  $\varphi$ . Seria possível se escolher um valor inicial para  $\varphi$  visando obter-se os estimadores  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\theta}$ , utilizando-se a seguir esses dois valores na equação (4.11), ou seja, a equação do estimador de Máxima Verossimilhança para o parâmetro de vida mínima  $\varphi$ . Pode-se então se obter da equação (4.11) um estimador  $\check{\varphi}$ , em seguida pode-se recalculer os estimadores GLUEs de  $\beta$  e de  $\theta$  relativos a esse novo estimador  $\check{\varphi}$ , e empregando-se esses novos valores de  $\beta$  e de  $\theta$  na equação (4.11), obter-se um novo estimador para a vida mínima  $\varphi$ . Continuando-se com essa interação, chegar-se-ia a valores aproximados para os estimadores do maximum likelihood. Como podemos observar, a vantagem de se utilizar os estimadores GLUEs é a de se ter de resolver implicitamente apenas uma equação. A existência de soluções para o grupo acima de equações (4.10) e (4.11) tem sido freqüentemente estudada por pesquisadores, pois se pode obter mais de uma solução para esse problema, ou mesmo ainda não se obter nenhuma solução; veja o artigo publicado por Zanakis and Kyparisis (1986).

O método de estimação padrão de Máxima Verossimilhança quando utilizado na estimação dos parâmetros do modelo Weibull de três parâmetros poderá apresentar problemas, devido ao fato de que as condições de regularidade não serem obtidas: (veja Murthy, et al. 2004, Blischke 1974 e Zanakis & Kyparisis 1986). Para se resolver esse problema de falta de regularidade, uma das modificações proposta por Cohen, et al. (1984) é a de se substituir a equação (4.11) pela equação

$$E(\varphi) = \varphi_n = t_1 - \frac{\theta_n}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (4.12)$$

Aqui,  $t_1$  representa a primeira ordem estatística de uma amostra de tamanho  $n$ . Na resolução das equações resultantes da aplicação do método Maximum Likelihood, iremos utilizar esse método proposto por Cohen et. al (1984). A derivação da equação (4.12) poderá ser encontrada em De Souza (2005), e está também apresentada no Anexo (1.0).

## CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO DO MECANISMO DE TESTE DE VIDA DESENVOLVIDO NESTE ESTUDO

Esse exemplo está relacionado com um novo componente metalúrgico sendo submetido a um teste de vida. Como esse é um novo produto, um novo tipo de aço de alta resistência e baixa liga, no qual o componente vanádio foi substituído pelo nióbio, existe muito pouca informação disponível acerca dos possíveis valores que os três parâmetros da distribuição de amostragem Weibull possam ter.

Um teste de vida preliminar é realizado para se determinar um valor estimado para os parâmetros da distribuição de amostragem. Nesse teste preliminar, um grupo de doze vigas foi submetido a um teste de vida, com todas as vigas testadas (cicladas) até a ocorrência da nona falha. A Tabela (5.1) seguinte apresenta os tempos de falhas (ciclos) para esse teste de vida preliminar.

**Tabela 5.1 – Tempos de falhas (ciclos) para o Teste de Vida preliminar**

3.322.329	4.023.048	2.934.330
3.781.710	2.780.470	2.251.930.
4.517.904	3.154.093	3.568.961

A distribuição de amostragem é o modelo Weibull de três Parâmetros. Utilizando-se o estimador “Maximum Likelihood” para o parâmetro de forma  $\beta$ , para o parâmetro de escala  $\theta$  e para o parâmetro de vida mínima  $\varphi$  do modelo Weibull em um teste de vida truncado por falhas, aplicando-se as equações (4.10) e (4.12), obteremos os seguintes valores para esses três parâmetros:

$$\beta = 3,24; \theta = 3.592.409 \text{ ciclos}; \varphi = 555,600 \text{ ciclos.}$$

Um teste de vida seqüencial foi então desenvolvido para se avaliar os valores estimados obtidos para esses parâmetros do modelo Weibull de amostragem. Foi decidido que o valor de  $\alpha$  seria de 0,05 e o valor de  $\gamma$  seria de 0,10. Escolheram-se os seguintes valores para os parâmetros da hipótese nula  $H_0$  e da hipótese alternativa  $H_1$ : parâmetro de escala alternativo  $\theta_1 = 3.000.000$  ciclos, parâmetro de forma alternativo  $\beta_1 = 3,0$ , parâmetro de vida mínima alternativo  $\varphi_1 = 500.000$  ciclos, parâmetro de escala nulo  $\theta_0 = 3.592.409$  ciclos, parâmetro de forma nulo  $\beta_0 = 3,24$ , parâmetro de vida mínima nulo  $\varphi_0 = 555.600$  ciclos. Nesse exemplo, mesmo após a

análise de 15 itens ou observações, não foi possível obter-se uma decisão de se aceitar ou de se rejeitar a hipótese nula  $H_0$ . Os tempos de falhas (ciclos) obtidos foram os seguintes:

2.495.133; 3.937.873; 2.169.998; 2.643.848; 4.056.386; 3.178.130; 2.615.244; 4.867.873; 5.093.244; 3.081.700; 4.969.168; 2.430.828; 2.029.255; 2.556.433; 4.023.048.

Os resultados do teste de vida seqüencial para o modelo Weibull de três parâmetros foram os seguintes:

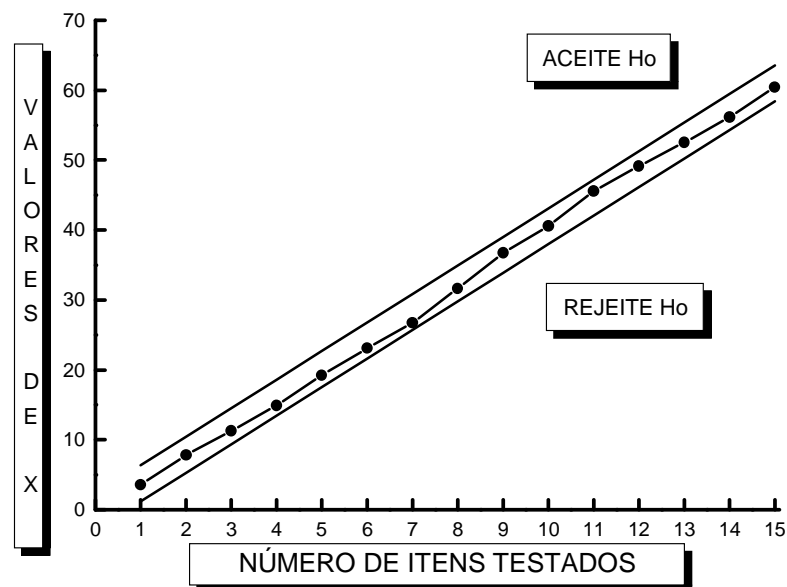


Figura 5.1.0 – Resultados do Teste de Vida Seqüencial para o modelo Weibull de três parâmetros

Como, mesmo após a análise de 15 itens ou observações, não foi possível obter-se uma decisão de se aceitar ou de se rejeitar a hipótese nula  $H_0$ , torna-se necessário a aplicação de um mecanismo de truncagem para esse teste de vida.

Resolvendo-se agora as equações (4.3) e (4.4), com os valores de  $\theta_1 = 3.000.000$  ciclos;  $\theta = \theta_0 = 3.592.409$  ciclos;  $\varphi = \varphi_0 = 555.600$  ciclos;  $\varphi_1 = 500.000$  ciclos;  $\beta_1 = 3,0$ ;  $\beta = \beta_0 = 3,24$ ;  $\alpha = 0,05$ ;  $\gamma = 0,10$  e fazendo  $P(\theta, \beta, \varphi)$  ser igual a 0,01, poderemos então calcular o tamanho esperado da amostra para efeito de truncagem  $E(n)$  desse teste de vida seqüencial sendo analisado. Desse modo, teremos:

$$E(n) \approx \frac{P(\theta, \beta) \ln A + [1 - P(\theta, \beta)] \ln B}{E(w)}$$

$$E(n) \approx \frac{2,8840}{0,2911}; E(n) \approx 9,907 \approx 10 \text{ itens}$$

Logo, poderemos tomar uma decisão a respeito de se aceitar ou se rejeitar a hipótese nula  $H_0$  após a análise da observação de número 10.

### Procedimento para se aplicar o mecanismo de truncagem

Como vimos anteriormente, de acordo com Kapur e Lamberson (1977), quando o ponto de truncagem é alcançado, é traçada uma linha dividindo ao meio o gráfico seqüencial, como mostrado na Figura (5.2) seguinte. Essa linha é traçada iniciando-se na origem do gráfico, paralela às linhas de aceitação e de rejeição. A decisão de se aceitar ou se rejeitar a hipótese nula  $H_0$  irá depender simplesmente de que lado a observação final se encontra.

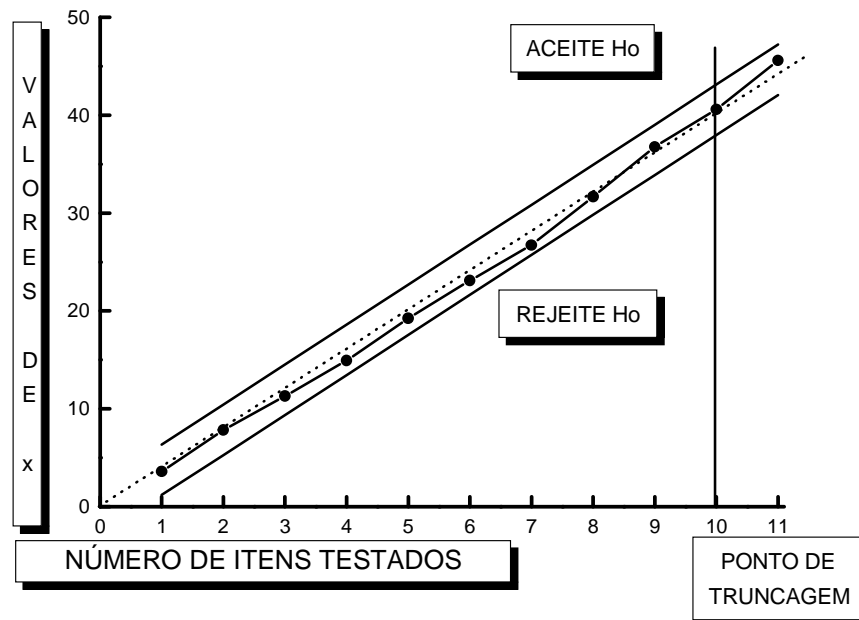


Figura 5.2 – Procedimento para se aplicar o mecanismo de truncagem

Obviamente já vimos que esse procedimento de truncagem altera os níveis ou valores de  $\alpha$  e de  $\gamma$  do teste de vida original. Uma vez mais, de acordo com Kapur e Lamberson (1977), essa mudança será muito pequena se o ponto de truncagem não for muito pequeno (menor do que três unidades). Como podemos observar na Figura (5.2), a hipótese nula  $H_0$  deverá ser aceita, pois a observação final (observação de número 10), se encontra no lado da linha relacionado com a aceitação de  $H_0$ .

## CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, desenvolvemos um Teste de Vida Seqüencial no qual a distribuição de amostragem é o modelo Weibull de três parâmetros, e o produto sendo analisado é um componente metalúrgico que foi recentemente modificado. Desse modo, existe muito pouca informação disponível sobre os valores que os três parâmetros desse modelo Weibull poderiam ter. O parâmetro de localização ou de vida mínima foi considerado ser diferente de zero. Para estimarmos os parâmetros de forma, escala e de vida mínima do modelo de amostragem empregado nesse estudo, desenvolvemos um estimador de Máxima Verossimilhança para a distribuição Weibull de três parâmetros em uma situação de teste de vida truncado por falhas. Como vimos durante esse desenvolvimento, esse método de estimação padrão de Máxima Verossimilhança quando utilizado na estimação dos três parâmetros do modelo Weibull poderá apresentar problemas, devido ao fato de que as condições de regularidade não serem obtidas, veja Murthy et al. (2004), Blischke (1974) e Zanakis and Kyparisis (1986). Para resolvermos esse problema de falta de “regularidade” ou “aderência”, utilizamos uma modificação proposta por Cohen, et al. (1984). Essa modificação consistiu em se substituir a equação do parâmetro de vida mínima obtida através do estimador de Máxima Verossimilhança por uma equação envolvendo o parâmetro de vida mínima e também o primeiro tempo de falhas obtido no teste de vida realizado. Como sabemos, o máximo valor que o parâmetro de vida mínima poderá ter será sempre menor ou, no máximo, igual ao primeiro tempo de falhas computado. Utilizamos também nessa análise do teste de vida desenvolvido um mecanismo de truncagem para a distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros. Na determinação de uma expressão para o tamanho esperado da amostra  $E(n)$  para efeito de truncagem de um Teste de Vida Seqüencial, aplicamos ao modelo Weibull de três parâmetros um mecanismo desenvolvido por Mood and Graybill (1963) para a distribuição normal. Para determinarmos o tamanho esperado da amostra  $E(n)$  do teste de vida seqüencial para efeito de truncagem, tivemos de utilizar um processo de integração numérica (empregamos nesse trabalho a regra de Simpson 1/3). Utilizamos as regras sugeridas por Kapur e Lamberson (1977) para tomarmos uma das duas decisões possíveis no momento da truncagem, ou seja; a de aceitarmos a hipótese nula  $H_0$  ou a de rejeitarmos a hipótese nula  $H_0$ .

Sem a utilização do mecanismo de truncagem empregado nesse trabalho,

não fomos capazes de obter uma decisão acerca de aceitarmos ou rejeitarmos a hipótese nula  $H_0$ , mesmo após termos analisado 15 observações. Com a aplicação desse mecanismo de truncagem, a decisão de aceitarmos a hipótese nula foi alcançada com a análise de apenas 10 observações ou itens. Esse fato mostra a vantagem de se utilizar esse tipo de mecanismo de truncagem em um teste de vida seqüencial, bem como o de se estimar os parâmetros de escala, forma e vida mínima de um modelo Weibull através do método de Máxima Verossimilhança utilizando-se a sugestão proposta por Cohen et. al (1984), ou seja, substituir a equação do parâmetro de vida mínima obtida através do estimador de Máxima Verossimilhança por uma equação envolvendo o parâmetro de vida mínima e também o primeiro tempo de falhas obtido de um teste de vida analisado.

### **6.1 Proposta de Trabalho Futuro**

O mecanismo de Teste de Vida Seqüencial com truncagem é uma alternativa plausível ao de um teste com tamanho de amostra pré-fixado devido utilizar um número pequeno de observações, especialmente quando a distribuição de amostragem é o modelo Weibull de três parâmetros. Acontece que mesmo com o uso desse mecanismo seqüencial com truncagem, algumas vezes o tempo disponível para a realização do teste poderá ser consideravelmente menor do que a vida esperada do componente. Para a solução desse problema existe a alternativa de um teste de vida acelerado direcionado a forçar os componentes a falharem, submetendo-os a condições de teste muito mais severas do que as encontradas em condições normais de uso.

Basicamente, um teste de vida acelerado utiliza técnicas diversas com o objetivo de reduzir o tempo de um teste de vida; através da aceleração das falhas de produtos ou sistemas de elevada confiabilidade. Esses produtos ou sistemas quando submetidos a um teste de vida comum deverão apresentar um número muito reduzido de falhas durante um período razoável de tempo. Poderão até não apresentar nenhuma falha nesse período de testes, devido possuírem elevada confiabilidade. Os modelos que pretendem resolver esse tipo de problema são chamados de modelos de aceleração.

O principal problema que enfrentamos quando utilizamos testes de vida acelerados é o de como relacionarmos a taxa de falha obtida no teste acelerado, no



qual o produto ou sistema é submetido a um nível aumentado (elevado) de tensão, com a verdadeira taxa de falhas que o mesmo virá a apresentar quando em uso sob condições normais de tensão.

O conceito de aceleração é aquele no qual um produto ou componente, o qual está sendo submetido a um nível aumentado (elevado) de tensão, irá apresentar mecanismos de falha iguais aos apresentados quando submetido a um nível normal de tensão. A única diferença é a de que as falhas deverão ocorrer mais rapidamente. Por exemplo, seria como se o nosso processo de falha estivesse sendo filmado, e, após o seu término, o mesmo filme fosse passado novamente, mas com uma velocidade maior do que a originalmente filmada. Como exemplo ainda, podemos citar o caso de pontes ou viadutos metálicos, os quais estão submetidos às condições ambientais reinantes no local aonde se encontram. As falhas devidas ao efeito da corrosão metálica deverão ocorrer a uma velocidade relacionada com a agressividade do meio ambiente reinante, ou seja, nível de elementos químicos presentes na atmosfera, como o cloro, enxofre, hidrogênio e oxigênio, por exemplo. Em condições laboratoriais, poderíamos aumentar a concentração desses elementos, com isso tornando o ambiente mais agressivo, resultando na ocorrência mais rápida de falhas por corrosão metálica.

O mecanismo de falhas permanece o mesmo, ou seja, falhas por corrosão metálica. Apenas a velocidade de ocorrência das falhas foi aumentada, devido ao aumento da agressividade do meio ambiente.

Quando conseguimos obter um faixa de valores para a tensão aplicada, na qual (faixa) a hipótese de se manter o mesmo mecanismo de falhas é verdadeira, temos uma condição conhecida como sendo a de uma aceleração real. Desse modo, uma aceleração real nada mais é do que uma simples transformação da escala de tempo, ou seja, uma diminuição do tempo de teste. Logo, se conhecermos a distribuição de vida de produtos ou sistemas submetidos em condição laboratorial a um elevado nível de tensão, e conhecendo ainda a transformação da escala de tempo relacionada com a condição de operação em nível normal de tensão, poderemos então derivar matematicamente, para essa condição normal de tensão, tanto a distribuição de vida, bem como a respectiva taxa de falhas.

Existem várias opções para se acelerar um teste de vida, ou seja, obter-se falhas em um menor período de tempo. Entre essas opções, por exemplo, para produtos ou sistemas sujeitos a uma ação de desgaste, como no caso da corrosão

atmosférica, poderemos aumentar o nível de tensão aplicado a esse produto ou sistema através do aumento da temperatura e da umidade. Outros tipos de sistemas ou modelos poderão ter seus níveis de tensão aumentados através do aumento da voltagem ou correntes a eles aplicados, ou mesmo pelo aumento do nível de radiação presente. No caso do tempo de teste ser medido por número de ciclos, a redução desse tempo poderá ser obtida simplesmente pelo aumento do número de ciclos por unidade de tempo. Um interruptor poderá ser submetido a um teste de vida acelerado apenas pelo aumento da frequência de uso do mesmo durante um determinado espaço de tempo.

Para melhor entendermos a necessidade da interação de um teste de vida seqüencial com truncagem com um teste de vida acelerado, no desenvolvimento da dissertação do doutorado, iremos apresentar alguns dos principais modelos que estão sendo utilizados ou em fase de desenvolvimento analisando algumas de suas potencialidades e fraquezas, bem como sugerir possíveis caminhos que possam levar ao desenvolvimento de novos modelos acelerados. Citamos várias referências sobre testes de vida acelerados, as quais serviram de base para o planejamento da futura proposta de trabalho que pretendemos desenvolver nos próximos anos.

## REFERÊNCIAS

Bain, Lee J. (1978) *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models. Theory and Methods*. Marcel Dekker, Inc., New York.

Blischke, W. R. (1974). On nonregular estimation. II. Estimation of the Location Parameter of the Gamma and Weibull Distributions. *Communications in Statistics*. Vol. 3, pp. 1109-1129.

Cohen, A. C.; Whitten, B. J. and Ding, Y. (1984). Modified Moment Estimation for the Three-Parameter Weibull Distribution. *Journal of Quality Technology*, 1984, Number 16, pp.159-167.

De Souza, Daniel I. and Lamberson, Leonard R. (1995). *Bayesian Weibull Reliability Estimation. IIE Transactions*. Volume 27, Number 3, pp.311 – 320. USA.

De Souza, Daniel I. (1999). Sequential life testing with an underlying Weibull sampling distribution. In: Safety and Reliability, Schuëller & Kafka eds., *Proceedings of the ESREL '99 International Conference on Safety and Reliability, Garching, Germany, 13-17 1999*, 2:869-874, Rotterdam,: Balkema.

\_\_\_\_\_. (2000). Further Thoughts on a Sequential Life Testing Approach Using a Weibull Model, *Foresight and Precaution, ESREL 2000 Congress*, Cottam, Harvey, Pape & Tait (eds), Edinburgh; Scotland; 14–17 May 2000; 2: 1641 – 1647, Rotterdam,: Balkema.

\_\_\_\_\_. (2001a). Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism for an Underlying Weibull Model. Towards a Safer World, ESREL 2001 Conference, Zio, Demichela & Piccinini (eds), 3: 1539 – 1546, Politecnico Di Torino. 16-20 September. Torino, Italy.

\_\_\_\_\_. (2001b). *A Truncation Mechanism in a Sequential Life Testing Approach with an Underlying Two-Parameter Inverse Weibull Model*. COMADEM 2001 Conference, Andrew G. Starr and Raj B. K. Rao (eds), 4 – 6 September. Manchester, UK.

\_\_\_\_\_. (2002). Sequential Life Testing with Underlying Weibull and Inverse Weibull Sampling Distributions, *COMADEM 2002 Conference*, Raj B. K. Rao and Asoke K. Nandi (eds), Birmingham, U.K., 2 – 4 September 2002, 120 – 128, Comadem International.

\_\_\_\_\_. (2003). *Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism for an Underlying Three-Parameter Weibull Model*. ICHEAP-6, Chemical Engineering Transactions, 2003, Vol 3, pp. 557-562, Sauro Pierucci (ed), Pisa, Italy.

\_\_\_\_\_. (2004a). Application of a Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism for an Underlying Three-Parameter Weibull Model. *ESREL 2004-PSAM 7 Conference*. edited by Spitzer, Schmoker and Dang, Springer-Verlag, Germany, Berlin, 2004a, Vol. 3, pp. 1674-1680.

\_\_\_\_\_. (2004b). Sequential Life Testing Approach Applied to Metallurgical Products when the Weibull Model Minimum Life is Different from Zero. (2004b.)

CONAMET/SAM 2004. edited and published by the University of La Serena, Chile, La Serena, 2004b, pp. 445-450.

\_\_\_\_\_. (2005) *A Maximum Likelihood Approach Applied to an Accelerated Life Testing with an Underlying Three-Parameter Inverse Weibull Model*. COMADEM 2005 Conference, Mba and Rao (eds.), Vol 1, pp. 63-72, Cranfield University Press publisher. August 31-September 07, 2005. Cranfield, UK.

\_\_\_\_\_. (2006). *Application of a Sequential Life Testing to an Accelerated Life Testing with an Underlying Three-Parameter Inverse Weibull Model. A Maximum Likelihood Approach*. SINTEF 2006, 30<sup>th</sup> ESREDA Seminar: Reliability of Safety-Critical Systems, Langseth, Eid (eds.), SINTEF Publisher, June 7-8, 2006, Trondheim, Norway, 13 pp.

\_\_\_\_\_. (2006). *Atmosphere Corrosion of Steel Parts Life-Tested in Brazil*. SINTEF 2006, 30<sup>th</sup> ESREDA Seminar: Reliability of Safety-Critical Systems, Langseth, Eid (eds.), SINTEF Publisher, June 7-8, 2006, Trondheim, Norway, 12 pp.

De Souza, Daniel I. & Addad, Assed N. (2007). Sequential Life-Testing with an Underlying Three-Parameter Inverse Weibull Model - A Maximum Likelihood Approach. In: *IIE Annual Conference and Exposition. Nashville, TN: The Institute of Industrial Engineering, 2007. V.01. pp. 907- 912. USA.*

Ebeling, Charles E. (1997). *Reliability and Maintainability Engineering*. The McGraw-Hill Companies, Inc. New York.

Edge, M.; Allen, N. S.; Williams, D. A. R.; Thompson, F.; e Horie, V. (1992). *Methods for predictive stability testing of archival polymers: A Preliminary Assessment of Cellulose Triacetate Based Motion Picture Film*. *Polymer Degradation and Stability*. No. 35. pp. 147-155.

Erto, Pasquale. (1982). *New Practical Bayes estimators for the 2-Parameter Weibull Distribution*. IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-31, No. 2, June, pp. 194-197. USA.

Kapur, Kailash and Lamberson, Leonard R. (1977). *Reliability in Engineering Design*. John Willey & Sons, Inc., New York.

Meeker, W.Q. and Hahn, G.J. (1985). Volume 10: *How to Plan an Accelerated Life Test-Some Practical Guidelines*. The ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques. J. A. Cornell; S. S Shapiro (eds.), MilWaukee, Wisconsin.

Mood, A. M. and Graybill, F. A. (1963). *Introduction to the Theory of Statistics*. Second Edition, McGraw-Hill, New York.

Murthy, D. N. P; Xie, M. and Hang, R. (2004). *Weibull Models*. Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Wald, A. (1947). *Sequential Analysis*. New York: John Willey & Sons, Inc., USA.

Zanakis, S. H. and Kyparisis, J. A. (1986). Review of De Máxima Verossimilhança Estimation Methods for the Three Parameter Weibull Distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 1986, Number 25, pp. 53-73.

## ANEXO

### Determinando-se um estimador Inicial para a Vida Mínima $\varphi$

A função densidade (*pdf*) de  $t_1$  será dada por:  $f(t_1) = n[1 - F(t_1)]^{n-1} f(t_1)$ .

Agora, como  $F(t_1) = 1 - R(t_1)$ , obteremos:  $f(t_1) = n[R(t_1)]^{n-1} f(t_1)$

Para a distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros, teremos:

$$f(t_1) = \frac{n\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^{\beta-1} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^\beta\right] \right\}^n$$

O valor esperado de  $t_1$  será dado por:

$$E(t_1) = \int_{\varphi}^{\infty} \frac{n\beta}{\theta} t \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^{\beta-1} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^\beta\right] \right\}^n dt$$

Fazendo-se  $U = \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^\beta$ ;  $du = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^{\beta-1} dt$ ;  $dt = \frac{du}{\frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^{\beta-1}}$ ;

$$t = \theta U^{1/\beta} + \varphi$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ ;  $U \rightarrow \infty$ ; Agora, quando  $t \rightarrow \varphi$ ;  $U \rightarrow 0$ . Logo:

$$E(t_1) = \int_0^{\infty} n(\theta U^{1/\beta} + \varphi) e^{-nU} du = \theta \int_0^{\infty} n U^{1/\beta} e^{-nU} du + \varphi \int_0^{\infty} n e^{-nU} du, \text{ onde}$$

$$\int_0^{\infty} n e^{-nU} du = -\varphi \left[ e^{-nU} \right]_0^{\infty} = -\varphi[0-1] = \varphi$$

Na solução da integral  $\theta \int_0^{\infty} nU^{1/\beta} e^{-nU} du$ , faça  $Z = nU$ ;  $du = \frac{dz}{n}$ ;  $U = \frac{Z}{n}$ .

Quando  $U \rightarrow \infty$ ;  $Z \rightarrow \infty$ ; Quando  $U \rightarrow 0$ ;  $Z \rightarrow 0$ . Então:

$$E(t_1) = \theta \int_0^{\infty} \left(\frac{Z}{n}\right)^{1/\beta} e^{-z} dz + \varphi = \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \int_0^{\infty} Z^{1/\beta} e^{-z} dz + \varphi.$$

Resolvendo-se essa integral, obteremos:  $E(t_1) = t_1 = \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + \varphi$ . Vemos

finalmente então que  $\varphi$  poderá ser então estimada por:

$$E(\varphi) = \varphi = t_1 - \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (4.12)$$

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)