UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

CONTROLE PREDITIVO NÃO LINEAR BASEADO NO MODELO DE HAMMERSTEIN COM PROVA DE ESTABILIDADE

DANIELLE SIMONE DA SILVA CASILLO

Natal, março de 2009.

DANIELLE SIMONE DA SILVA CASILLO

CONTROLE PREDITIVO NÃO LINEAR BASEADO NO MODELO DE HAMMERSTEIN COM PROVA DE ESTABILIDADE

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito final à obtenção do título de Doutor em Engenharia

Orientador: Prof. Dr. André Laurindo Maitelli
Co-orientador: Prof. Dr. Adhemar de Barros Fontes

Natal, março de 2009.

Danielle Simone da Silva Casillo

Controle Preditivo Não Linear baseado no Modelo de *Hammerstein* com Prova de Estabilidade

Tese julgada para obtenção do título de **Doutor em Engenharia Elétrica**, área de concentração **Automação e Sistemas** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Laurindo Maitelli
Orientador - UFRN

Prof. Dr. Adhemar de Barros Fontes
Co-orientador – UFBA

Prof. Dr. Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo - UFRN

Prof. Dr. Otacílio da Mota Almeida - UFC

Prof. Dr. Oscar Gabriel Filho - UnP

Natal/RN
Março de 2009.

“O futuro pertence àqueles que acreditam na beleza de seus sonhos.”

Eleanor Roosevelt

Este trabalho é dedicado aos meus pais Danilo e Cícera pela dedicação e orgulho incontido frente a um sonho de uma filha doutoranda.
Ao meu marido que sempre esteve ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado tudo de bom nessa vida.

Ao meu orientador André Maitelli pela dedicação, ajuda e amizade.

Ao prof. Adhemar Fontes, pela grandiosa ajuda e orientação muito importante para a conclusão deste trabalho.

Aos meus pais Danilo e Cícera pelo amor incondicional, por terem sabido compreender o valor da educação e por terem feito de suas vidas a realização de seus filhos.

Ao meu marido Leonardo por todo amor, dedicação e compreensão nestes lindos anos que estamos juntos.

À minha irmã Danise e cunhado Emanuel pelo apoio e carinho.

Os colegas do projeto REDICONT (UFRN e UFBA) pela ajuda e apoio.

A todos os demais colegas, professores e funcionários da UFRN com quem tive a satisfação de conviver neste tempo.

A CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

O Controle Preditivo tem recebido muita atenção nas últimas décadas, visto que a necessidade de compreender, analisar, predizer e controlar sistemas reais tem crescido rapidamente com o avanço tecnológico e industrial.

O objetivo desta tese é apresentar uma contribuição para o desenvolvimento e implementação de Controladores Preditivos Não lineares baseado no modelo de *Hammerstein*, bem como fazer uma avaliação de suas propriedades. Neste caso, no desenvolvimento do Controlador Preditivo Não Linear utiliza-se o método de linearização por degrau de tempo e é introduzido um termo de compensação a fim de melhorar o desempenho do mesmo.

A principal motivação desta tese é o estudo e a prova da estabilidade para o Controlador Preditivo Não Linear baseado no modelo de *Hammerstein*. Para isso utilizou-se os conceitos de setores e Critério de Popov. Testes de simulação com modelos da literatura mostram que as abordagens propostas são capazes de controlar com um bom desempenho e garantir a estabilidade dos sistemas.

Palavras-chaves: Controle Preditivo Generalizado Não linear, Modelo de *Hammerstein*, Critério de Popov, Prova de Estabilidade.

ABSTRACT

The Predictive Controller has been receiving plenty attention in the last decades, because the need to understand, to analyze, to predict and to control real systems has been quickly growing with the technological and industrial progress.

The objective of this thesis is to present a contribution for the development and implementation of Nonlinear Predictive Controllers based on Hammerstein model, as well as to its make properties evaluation. In this case, in the Nonlinear Predictive Controller development the time-step linearization method is used and a compensation term is introduced in order to improve the controller performance.

The main motivation of this thesis is the study and stability guarantee for the Nonlinear Predictive Controller based on Hammerstein model. In this case, was used the concepts of sections and Popov Theorem. Simulation results with literature models shows that the proposed approaches are able to control with good performance and to guarantee the systems stability.

Keywords: Nonlinear Generalized Predictive Controller, Hammerstein Model, Popov Criteria, Stability Guarantee.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$u(t)$	Sinal de entrada de um sistema contínuo no tempo
$y(t)$	Sinal de saída de um sistema contínuo no tempo
t	Tempo
$\Re^+$	Conjuntos dos números reais positivos
k	Representa o instante de tempo discreto
$y(k)$	Variável de saída do sistema (processo)
$u(k)$	Variável de entrada do sistema (processo)
$m_n(m_1,\cdots,m_n)$	Representa o Kernel de *Volterra*
M	Representa a ordem do modelo de *Volterra*
$F^l(\cdot)$ ou $N^l(\cdot)$	Representam a função não linear
l	Grau de não linearidade
$e(k)$	Função do ruído
d	Representa o atraso no sistema (tempo morto)
$x(k)$	Sinal intermediário (saída do bloco não linear)
n_y	Representa o atraso máximo da saída do modelo ARX
n_u	Representa o atraso máximo da entrada do modelo ARX
θ_j	Parâmetro relacionado a cada regressor de saída do modelo ARX
σ_i	Parâmetro relacionado a cada regressor de entrada do modelo ARX
$\gamma_i (i = 1,\cdots,l)$	Coeficientes do polinômio da não linearidade
$w(k)$	Sinal de referência
$\varepsilon(k)$	Representa o erro do sistema (ruído branco)
q^{-1}	Operador de atraso

$A(q^{-1})$	Polinômio de saída do GPC
$B(q^{-1})$	Polinômio de entrada do GPC
$C(q^{-1})$	Polinômio (caso com ruído colorido) do GPC
n_a	Grau do polinômio $A(q^{-1})$
n_b	Grau do polinômio $B(q^{-1})$
n_c	Grau do polinômio $C(q^{-1})$
$G(s)$	Função de transferência para o caso contínuo
$\phi(\cdot)$	Não linearidade
$[k_1, k_2]$	Escalares não negativos que delimitam a função não linear nos setores do plano, restritos ao primeiro e terceiro quadrantes
Δ	Representa o operador de ação integral
$\Delta u(k)$	Representa a variação futura no sinal de controle
J	Representa a Função Custo (Objetivo)
$\hat{y}(k+i)$	Predição de saída do sistema $i-$passos à frente
$N1$	Representa o horizonte mínimo de predição
NY	Representa o horizonte máximo de predição
NU	Representa o horizonte de controle
$w(k+i)$	Representa as referências para as saídas preditas
$\delta(i)$	Constante de ponderação sobre o sinal de erro
$\lambda(i)$	Constante de ponderação sobre o sinal de controle
$E_i(q^{-1})$	Representa o polinômio da equação diofantina com grau $i-1$
$F_i(q^{-1})$	Representa o polinômio da equação diofantina com grau n_a
y_l	Vetor de Resposta Livre
y_f	Vetor de Resposta Forçada
$y^f(k)$	Representa o sinal de saída filtrado para o caso de ruído colorido
$u^f(k)$	Representa o sinal de entrada filtrado para o caso de ruído colorido
$\tilde{A}(q^{-1})$	Polinômio resultante da múltiplcação do polinômio $A(q^{-1})$ e Δ

$\overline{B}(q^{-1},u)$	Polinômio resultante da linearização, este polinômio depende dos valores passados de $u(k)$
$L_i(q^{-1})$	Polinômio referente ao termo de compensação
$\overline{B}_C(q^{-1},u)$	Polinômio $\overline{B}(q^{-1},u)$ com a adição do termo de compensação $L_i(q^{-1})$
Δu_k	Vetor de incrementos de ações de controle futura
(CP)	Condição de Parada
$\hat{y}(k)_{real}$	Preditor k passos á frente
$\hat{y}(k)_{quasilinear}$	Preditor quasilinear k passo à frente
σ^2	Variância
$\mathrm{E}\left\{e^2\right\}$	Esperança do erro médio quadrático
$\mathrm{E}\left\{e\right\}$	Esperança do erro
f_0	Não linearidade estática do modelo
Δ^*	Representa o operador de ação integral para o caso discreto
$G_p(z)$	Função de transferência da planta em z
$\Phi(\theta)$	Representação da não linearidade estática para o caso discreto
pH	Símbolo para a grandeza físico química "potencial hidrogeniônico"
H^+	Íon de Hidrogênio
OH^-	Íon de Hidroxila
H_2O	Nomenclatura do composto químico da água
W_a	Representa a diferença entre as concentrações molares dos átomos de nitrogênio e sódio
W_b	Representa a concentração molar de átomos de carbono
pk_1 e pk_2	Representam a primeira e a segunda constantes de dissociação do ácido fraco

LISTA DE ABREVIATURAS

CAD/CAM - *Computer Aided Design e Computer Aided Manufaturing*

PID – Proporcional, Integral, Derivativo.

MBPC - *Model Based Predictive Controller*.

NMPC – *Nonlinear Model Predictive Controller*.

CARIMA – *Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average*

GPC – *Generalized Predictive Controller*

SISO – S*ingle input single output*

MISO – M*ultiple input single output*

SIMO – S*ingle input multiple output*

MIMO – *Multiple Input Multiple Output*

NARX – *Nonlinear Auto-Regressive model with eXogenous inputs*

NARMAX – *Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs*

ARX – *Auto-Regressive with eXogenous inputs*

ARMAX – *Auto-Regressive Moving Average model with eXogenous inputs*

DMC – *Dymanic Matrix Control*

ARMA – *Auto-Regressive Moving Average*

RNA – Rede Neural Artificial

MAC – *Model Algorithmic Control*

LP – *Linear Programming*

QP – *Quadratic Programming*

CARMA - *Controlled Auto-Regressive Moving Average*

ARIMAX – *Auto-Regressive Integrated Moving Average model with eXogenous inputs*

NARIMAX - *Nonlinear AutoRegressive Integrated Moving Average model with eXogenous inputs*

1. INTRODUÇÃO

O crescente avanço tecnológico nas mais diversas áreas do conhecimento humano tem se mostrado, nos últimos anos, surpreendente. A competição entre indústrias, o mercado cada vez mais exigente e fatores ambientais fazem com que se busque por qualidade nos processos de automação. Portanto, a utilização da automação aumenta a eficiência, tornando as empresas competitivas no mercado. Um dos fatores principais para essas exigências é a globalização do mercado, que envolve diversas áreas de conhecimento como telecomunicações, transporte, automação, entre outras. Para se fazer frente à concorrência procura-se aumentar a produtividade (razão entre o volume produzido e os recursos empregados), reduzir custos de produção e aumentar a qualidade dos produtos oferecidos. Ao mesmo tempo, para atender às exigências de diversidade do mercado consumidor e a gradativa redução da vida útil dos produtos, procura-se ampliar a flexibilidade na utilização dos sistemas produtivos.

Diversas técnicas para automação industrial podem ser destacadas: o Comando Numérico, os Controladores Lógicos Programáveis, o Controle de Processo, os Sistemas CAD/CAM (*Computer Aided Design e Computer Aided Manufaturing*) e a Robótica.

Existem, basicamente, dois segmentos da automação industrial, segundo a manipulação das variáveis a serem controladas. Quando tais variáveis são, em sua grande maioria, do tipo analógicas, ou de tempo contínuo, tem-se um controle de processo, controle regulatório. Caso as variáveis sejam do tipo discreta, ou digital, tem-se um controle do tipo discreto.

O controle do tipo discreto, voltado aos processos digitais, teve seu início marcado pela utilização de dispositivos eletromecânicos do tipo a relés. Contactores, temporizadores e dispositivos de proteção constituem a base de projetos de intertravamentos elaborados em diagrama a relés capazes de efetuar o controle discreto. Chaves e contatos simulam os níveis lógicos baseados na lógica binária e promovem um controle utilizado na indústria até os dias de hoje. Já o controle do tipo analógico desenvolveu-se, inicialmente, com o surgimento dos amplificadores operacionais, por meio das malhas específicas de ação de controle. Controladores de processos contínuos evoluíram juntamente com a microeletrônica e passaram a utilizar circuitos mais complexos, microprocessados, de forma a poderem utilizar poderosos recursos e efetuarem técnicas de ação de controle dos mais diversos tipos, tais
como: O Controlador PID (Proporcional + Integral + Derivativo), PID adaptativo), Lógica Fuzzy (lógica nebulosa), Controle Preditivo linear e não linear, entre outros.

Na prática, todos os processos industriais possuem certos graus de não linearidade. No entanto, existem poucos métodos efetivos de controle não linear. O controlador PID não linear tem sido uma alternativa para o controle de sistemas não lineares, mas em alguns casos, devido à complexidade do problema, pode não apresentar um resultado favorável, exigindo algoritmos de alta complexidade para trabalhar em modo *on-line* (Zou et al., 1994).

Com o avanço da indústria, os controladores preditivos passaram a ser utilizados em aplicações que envolvam alto grau de complexidade, como por exemplo, em processos não lineares. O MBPC (*Model Based Predictive Controller*) foi desenvolvido pela necessidade de se obter o controle especializado de sistemas elétricos e refinarias de petróleo. A tecnologia MBPC refere-se a uma classe de algoritmos que calculam uma sequência de variáveis manipuladas a fim de otimizar o comportamento futuro de uma planta, e pode ser encontrada em muitas áreas de aplicação, incluindo indústrias químicas, processamento de alimentos, automotiva, aeroespacial, metalúrgica e papel (Qin & Badgwell, 1997; Al-Duwaish & Naeem, 2000).

Nos últimos anos houve um grande crescimento nas aplicações industriais de controle preditivo não linear NMPC – *Nonlinear Model Predictive Controller*, que se apresenta como uma estratégia de controle bastante promissora para diversas áreas da engenharia (Qin & Badgwell, 1997).

1.1. Motivação

O controle preditivo é apontado na literatura como uma ferramenta de grande potencial para aplicações em processos não lineares e que são submetidos a grandes variações (interferências internas e externas, oscilações) durante a sua operação (Zou et al., 1994; Qin & Badgwell, 1997; Al-Duwaish & Naeem, 2000; Santos, 2007; Scheffer-Dutra et al., 2002). Esta técnica utiliza um modelo interno, com o qual serão estimados os estados do processo num intervalo futuro, pré-definido, denominado horizonte de predição. Estas estimativas serão utilizadas para o cálculo das ações de controle.

O termo não linear refere-se a todas as estruturas que não apresentam um único sentido. Estrutura que apresenta múltiplos caminhos e destinos, desencadeando em múltiplos finais.

Pode-se definir a não linearidade fraca como aquelas que sofrem o mínimo de variações, saltos, antecipações e, portanto, possui um grau não linear menor, já as não linearidades fortes são aquelas que apresentam altas variações e descontinuidades no processo. Por exemplo, um processo de neutralização do pH é considerado altamente não linear, por possuir variações significativas em seu ganho estático. Quando o processo não linear atua numa faixa de operação muito ampla, ou a não linearidade do processo é forte o bastante, pode tornar o desempenho do controlador linear inadequado. Neste caso, a utilização de um modelo não linear deve ser considerada, a fim de atender os requisitos estabelecidos (Casillo et al., 2008a).

Embora a maioria dos processos industriais seja inerentemente não linear, a grande maioria das aplicações de controle preditivo é baseada em modelos dinâmicos lineares paramétricos, por exemplo, o modelo CARIMA (*Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average*), e lineares não paramétricos, tais como os modelos de resposta ao impulso ou ao degrau. Existem alguns motivos para isso: modelos empíricos lineares podem ser identificados de forma direta por meio de dados de saída do processo. Em adição, uma grande parte das aplicações tem se realizado em refinarias, em que o objetivo é principalmente manter o processo em um estado estacionário desejado, denominado "controle regulatório" ao invés de mudar rapidamente o processo de uma condição operacional para outra, conhecido como "controle servo". Por estas razões, em muitos casos um modelo linear proverá a maioria dos benefícios possíveis com a estratégia de controle preditivo.

Contudo, existem casos em que os efeitos das não linearidades são significativos o suficiente para justificar o uso de técnicas de controle preditivo não linear. Estes incluem pelo menos duas grandes categorias de aplicações:

- Problemas de controle regulatório em que o processo é altamente não linear e sujeito a perturbações significativas e freqüentes;
- Problemas de controle servo, em que os pontos de operação mudam freqüentemente e estendem-se sobre uma larga faixa das dinâmicas de processo não linear.

As razões acima mencionadas fizeram com que o controle de sistemas não lineares recebesse considerável atenção tanto no meio acadêmico como no industrial. Este interesse na análise e projeto de sistemas de controle não lineares gerou um grande desenvolvimento de estratégias de controle baseado em modelo para sistemas não lineares (Henson & Seborg, 1997; Hapoglu et al., 2001; Camacho & Bordons, 2004; Santos, 2007).

O controle preditivo baseado em modelo apresenta-se atualmente como uma das mais eficientes estratégias de controle na indústria de processos. Isto ocorre porque muitos dos aspectos fundamentais num projeto de controle industrial prático podem ser contemplados em controle preditivo baseado em modelo. Por exemplo, a trajetória de referência futura, a predição de perturbações e a inclusão de restrições. Isto evidencia a flexibilidade de projeto desta técnica de controle (Ogunnaike & Ray, 1994; Scheffer-Dutra et al., 2002; Santos, 2007).

Em meados da década de 1980, foram apresentados os modelos NARMAX (*Nonlinear Auto-Regressive Moving Average model with eXogenous inputs*) polinomiais (Leontaritis & Billings, 1985a,b), capazes de mapear não linearidades das entradas e saídas passadas para a saída atual. Dentre as principais características destas representações, pode-se citar a relativa facilidade com que a informação analítica sobre a dinâmica do modelo pode ser obtida (Coelho, 2002).

A modelagem de um processo dinâmico consiste na obtenção de um modelo matemático capaz de representar adequadamente as características de interesse da planta em estudo. A necessidade de representar um sistema de forma eficiente, empregando um modelo que não exija um aumento significativo no esforço computacional estabelece um compromisso entre a qualidade do modelo e a sua simplicidade de representação. Neste aspecto, o modelo de *Hammerstein* apresenta características interessantes, pois, alia uma boa capacidade de representação de algumas não linearidades com uma inerente simplicidade de representação. O modelo de *Hammerstein* possibilita a representação adequada de vários processos da indústria química como reatores, colunas de destilação, trocadores de calor, dentre outros (Fruzzetti et al., 1997; Menold et al., 1997; Pearson & Pottman, 2000; Fink & Nelles, 2001; Aguirre et al., 2005; Santos, 2007).

Os modelos de *Hammerstein* são utilizados na representação de sistemas que contém uma não linearidade estática em série com um sistema dinâmico linear. A não linearidade estática se dá quando não se quantifica a dependência temporal entre as variáveis do sistema. O modelo tem caráter estático, (ou seja, o estado do sistema em instantes anteriores não é relevante), sendo representado por equações algébricas e não por equações diferenciais. Os modelos de *Hammerstein* e *Wiener* que serão apresentados no capítulo 2 têm sua forma de representação por blocos interconectados.

O desenvolvimento de controladores preditivos baseados no modelo de *Hammerstein* tem motivado uma série de aplicações bem sucedidas ao longo dos últimos anos (Bars & Haber, 1991; Katende & Jutan, 1996; Fruzzetti et al., 1997).

Isto se deve ao fato que este modelo apresenta propriedades que simplificam o projeto do controlador, possibilitando, inclusive, uma solução analítica para o problema de minimização da função custo (caso sem restrições), embora a maioria dos resultados apresentados restrinja-se a casos simulados (Santos et al., 2005).

Um dos principais fatores dos modelos de blocos interconectados terem despertado o interesse de pesquisadores deve-se ao fato destes modelos serem utilizados em técnicas de controle. Além disso, análise de estabilidade de um modelo globalmente não linear, representado por blocos interconectados, pode ser feita por meio do bloco dinâmico não linear.

Para estudo da estabilidade de controladores preditivos não lineares deve ser verificado se a estratégia de controle de horizonte finito conduz a estabilidade em malha-fechada. Idealmente, buscar-se-ia uma estratégia de controle que alcançasse a estabilidade em malha-fechada independentemente da escolha dos parâmetros de desempenho do custo funcional e, se possível, aproximasse ao esquema de horizonte de predição finito tão quanto possível. A busca pela prova de estabilidade tem motivado vários pesquisadores. Findeisen and Allgöwer, 2002, mostram aspectos teóricos sobre o GPC (*Generalized Predictive Controller*) não linear e citam diferentes possibilidades de se encontrar a estabilidade em malha fechada. Chan et al., 2004, propõem um teorema para o controle de processos baseado no modelo de *Hammerstein* utilizando o teorema da passividade.

O critério de Popov é considerado um dos mais apropriados critérios para análise de estabilidade de sistemas não lineares e pode ser comparado com o critério de Nyquist para sistemas lineares. Este critério oferece condições suficientes para estabilidade de sistemas de controle não lineares no domínio da frequência. Porém, as condições para este critério devem ser bem especificadas.

1.2. Objetivos

Esta tese consiste do estudo de técnicas e teorias com vistas à construção da proposta de um Controlador Preditivo Não Linear baseado no Modelo de

Hammerstein, bem como faz uma análise e prova da estabilidade para o controlador proposto.

Os principais objetivos desta tese são:

- Fazer uma análise comparativa dentre as principais representações de modelos não lineares em especial analisar as propriedades do modelo de *Hammerstein* e de controladores preditivos baseados neste modelo.
- Propor um novo algoritmo para o GPC baseado no modelo de *Hammerstein*, por meio da aproximação quasilinear por degrau de tempo, monovariável, considerando o problema de controle não linear de horizonte de predição finito.
- Implementar e avaliar o algoritmo de controle preditivo proposto.
- Comparar algumas formas de compensar o erro de predição do algoritmo proposto, a fim de que o resultado da predição seja mais próximo do desejado.
- Analisar as propriedades de estabilidade, bem como provar a estabilidade do controlador preditivo proposto.
- Implementar os algoritmos de prova de estabilidade do controlador proposto.

1.3. Organização da tese

Os capítulos foram dispostos da seguinte forma:

Capítulo 1: este primeiro capítulo introduziu o assunto, abordou a motivação para a realização do presente trabalho bem como os objetivos deste estudo e apresentou a organização do texto.

Capítulo 2: neste capítulo é realizada uma revisão da literatura em que se apresentam as principais classificações de modelos e um breve estudo das principais representações de modelos não lineares, como também o modelo escolhido para o aprofundamento no estudo de controladores preditivos não lineares (modelo de *Hammerstein*). Por fim, é apresentada uma introdução à estabilidade de sistemas não lineares.

Capítulo 3: descrevem-se neste capítulo os fundamentos teóricos do Controle Preditivo, suas vantagens e desvantagens, com enfoque dado ao Controle Preditivo Generalizado Monovariável e sem restrições, o qual foi empregado no desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 4: apresenta-se o Controle Preditivo Não Linear utilizando o modelo de *Hammerstein*, a solução para o controle não linear, e a técnica de linearização por aproximação quasilinear por degrau de tempo. Um exemplo de aplicação deste método é apresentado.

Capítulo 5: este capítulo traz o desenvolvimento e implementação do controlador preditivo não linear aplicado ao modelo de *Hammerstein* utilizando o método de linearização quasilinear por degrau de tempo. Devido ao erro de predição gerado por meio da linearização são utilizados métodos de compensação, que têm como objetivo reduzir este erro e melhorar o desempenho do controlador em questão. Os métodos de compensação são: o Termo de Compensação (Fontes, 2002) e a Compensação Iterativa (Ângelo, 2005) que visam melhorar o desempenho dos controladores preditivos.

Capítulo 6: apresenta-se o desenvolvimento do controlador preditivo não linear com prova de estabilidade que é a principal contribuição deste trabalho. Neste capítulo desenvolve-se a prova de estabilidade para o controlador preditivo baseado no modelo de *Hammerstein* e mostra-se que a estratégia de controle de horizonte finito conduz a estabilidade em malha fechada. Para isso foi estudado e utilizado o Critério de Popov, que oferece condições suficientes para estabilidade de sistemas de controle não linear no domínio da freqüência. Por fim, apresenta-se o algoritmo avaliação de estabilidade e os resultados de simulação.

Capítulo 7: apresentam os resultados de aplicação, o algoritmo do GPC baseado no modelo de *Hammerstein* com compensação do erro de predição foi aplicado, através de simulação computacional a uma planta de neutralização de pH.

Capítulo 8: neste capítulo apresentam-se as conclusões finais da tese e descrevem-se as etapas sugeridas para a continuidade da pesquisa.

O texto é encerrado com uma lista das referências bibliográficas que foram citadas.

2. MODELOS NÃO LINEARES

2.1. Introdução

O modelo de um sistema pode ser obtido de duas formas: a partir das equações básicas do sistema - modelagem fenomenológica ou a partir de uma estrutura pré-definida – identificação de sistemas. A identificação de sistemas é o principal método para a obtenção de modelos matemáticos. Na modelagem fenomenológica, devido à complexidade dos sistemas reais, a obtenção de modelos é mais difícil (Santos, J. E. S. 2007).

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos de modelagem não lineares para sistemas dinâmicos, como também apresentar algumas representações de modelos não lineares. Por fim, é feito um estudo da estabilidade de sistemas não lineares.

2.2. Classificação de Modelos

São diversas as possíveis representações matemáticas de modelos. A seguir, serão mencionadas algumas classificações de modelos de acordo com a nomenclatura comumente usada na Teoria de Sistemas Dinâmicos (Aguirre, 2000).

Modelos Estáticos ou Dinâmicos: modelos dinâmicos são modelos em que o estado de um sistema num dado instante de tempo depende do estado do sistema em instantes anteriores. Tais modelos são normalmente descritos por equações diferenciais ou a diferenças. Já modelos estáticos (ou estacionários) são aqueles em que, para se calcular o estado do sistema num dado instante de tempo, o estado do sistema em instantes anteriores não é relevante. Em outras palavras, modelos estáticos não têm memória, sendo normalmente representados por equações algébricas. Na prática, os sistemas reais são todos dinâmicos, mas para uma dada análise a dinâmica do sistema pode ser desprezível por ser muito rápida ou muito lenta comparada com a escala de tempo utilizada.

Modelos Variantes ou Invariantes no tempo: a variância no tempo de um sistema está associada à alteração ou não das suas características dinâmicas com o tempo. Um sistema invariante no tempo é aquele que para um sinal de entrada $u(t)$, em $t = t_0$, o sinal de saída $y(t)$, em $t > t_0$, não depende de t_0 mas de $t - t_0$, isto é, não importa quando é aplicada esta entrada. Assim, as condições dinâmicas do sistema não mudam com o tempo. Na realidade nenhum sistema é invariante no tempo, mas na prática considera-se como invariantes no tempo muitos sistemas cuja variação no tempo é muito lenta.

Modelos de Tempo Contínuo, de Tempo Discreto ou Híbrido: um modelo é de tempo contínuo quando a variável que representa o tempo t é um número real positivo. Ou seja, pode-se encontrar o valor de uma dada variável do sistema em qualquer instante de tempo $t \in \Re^+$. Estes modelos são em geral representados por equações diferenciais, como por exemplo, a temperatura de uma sala varia continuamente e para qualquer instante de tempo, pode-se encontrar um valor de temperatura correspondente. Modelos de tempo discreto são aqueles em que o valor que define um instante de tempo k é um número inteiro positivo, sendo normalmente representados por equações a diferenças. Como exemplo, o preço de fechamento de uma ação na bolsa de valores é bem representado num modelo a tempo discreto, já que este dado só é obtido uma vez por dia. Sistemas amostrados também são bem representados por modelos a tempo discreto, sendo este tipo de sistema muito utilizado na identificação de sistemas. Modelos híbridos têm uma parte descrita na forma contínua e outra parte descrita na forma discreta, ou seja, combina sinais temporais com seqüências de eventos, sendo úteis em aplicações de Controle Digital e para Tratamento Digital de Sinais.

Modelos Lineares ou Não Lineares: um modelo é dito linear se o princípio da superposição se aplica. Caso contrário é chamado de não linear. De forma prática, um modelo é dito linear se as variáveis que o definem não aparecem na equação sob a forma de funções não lineares.

Modelos Causais ou Antecipativos: um modelo é dito causal (ou não antecipativo) quando a saída do sistema no instante t não depende das entradas aplicadas ao sistema após o instante de tempo t, dependendo, portanto, apenas da entrada aplicada antes de t e no próprio instante t. Um modelo é dito antecipativo (ou não causal) quando a saída do sistema no instante t depende do valor da entrada após o instante de tempo t. Ainda que seja possível representar matematicamente um modelo antecipativo, nenhum sistema físico possui esta característica.

Modelos Monovariáveis ou Multivariáveis: são chamados de monovariáveis os modelos que representam a relação entre uma entrada e uma saída. Na literatura são conhecidos também por modelos SISO (*single input single output*). Caso haja mais de uma entrada ou mais de uma saída os modelos passam a ser chamados de multivariáveis. Dentre estes, é comum classificá-los em: MISO (*multiple input single output*) quando há várias entradas e somente uma saída; SIMO (*single input multiple output*) para o caso em que há uma única entrada e mais de uma saída; e finalmente MIMO (*multiple input multiple output*) quando há várias entradas e várias saídas.

Modelos Determinísticos ou Estocásticos: Um sistema determinístico é aquele que não sofre a influência de nenhuma perturbação aleatória, ou seja, não tem incertezas. O sinal de saída $y(t)$ para um sinal de entrada $u(t)$ pode ser calculado (ou "determinado") com exatidão quando se conhece o modelo do sistema. Na realidade, nenhum sistema é determinístico. Todos os sistemas têm algum tipo de incerteza ou caráter aleatório e, portanto são chamados de Estocásticos. Na prática, consideram-se como determinísticos sistemas cujas perturbações aleatórias são pequenas ou desprezíveis.

Modelos Fenomenológicos: As leis fundamentais da física e da química, como conservação de massa, energia e de quantidade de movimento, são as bases para construção de modelos fenomenológicos. O processo de definição das equações que descrevem o modelo exige do especialista (responsável pelo modelo), muita prática, habilidade, engenhosidade, criatividade e inovação (Luyben, 1996). Outro fato importante, que deve ser ressaltado na modelagem, é a consistência matemática do modelo, por exemplo, garantir que o número de equações se iguale ao número de variáveis, e verificar se as unidades usadas em todos os termos das equações são consistentes (Campos, 2007).

Encontram-se na literatura duas abordagens diferentes para modelagem fenomenológica da dinâmica do pH. A primeira é baseada na modelagem físico-química clássica que foi apresentada inicialmente por McAvoy et al. (1972); a segunda é a formulação físico-química de invariantes de reação que foi apresentada inicialmente por (Gustafsson & Waller, 1983). Ambas as abordagens têm como base separar a reação química (equilíbrio) da dinâmica de invariantes de reação. Apesar dos modelos resultantes serem idênticos, a formulação do problema é diferente. No capítulo 7 que trata dos resultados de aplicação, um processo de neutralização de pH será aplicado, o modelo fenomenológico desenvolvido é baseado na aproximação físico-química de invariantes de reação (Campo, 2007).

2.3. Representações de Modelos Não Lineares

Com o avanço tecnológico e industrial, o interesse pela modelagem não linear e o desenvolvimento de ferramentas matemáticas para entender melhor o comportamento dos fenômenos não lineares cresceram significativamente, uma vez que as técnicas existentes para modelos lineares não conseguem reproduzir toda a gama de comportamentos dinâmicos dos sistemas reais (Coelho et al., 2002). Os sistemas dinâmicos encontrados na prática são, em última análise, não lineares. É bem verdade que em alguns casos aproximações lineares são suficientes para aplicações práticas. Entretanto, em muitas aplicações industriais, modelos lineares não são satisfatórios e representações não lineares deverão ser usadas. A escolha de modelos não lineares traz consigo um inevitável aumento na complexidade dos algoritmos a serem utilizados. Melhorar a exatidão dos modelos não é a principal motivação para se usar modelos não lineares. Existem razões mais fortes para, em uma dada aplicação, optar por modelos não lineares como, por exemplo, o fato de os modelos não lineares produzirem certos regimes dinâmicos que os modelos lineares não conseguem representar (Aguirre, 2000).

Há um grande número de representações não lineares e a escolha de qual e em que circunstância aplicar, parecem questões que estão longe de serem resolvidas. A escolha do tipo de representação depende principalmente da finalidade do modelo e das informações disponíveis sobre o sistema. O uso de modelos está presente em diversas áreas tais como: predição, análise, simulação, controle de processos, detecção de falhas, entre outras.

Dentre os modelos não lineares podem-se destacar o Modelo de *Volterra*, NARX e NARMAX, Modelo Bilinear, Redes Neurais, Modelo de *Wiener*, Modelo de *Hammerstein*, entre outros.

2.3.1. Modelo de *Volterra*

A representação de sistemas não lineares teve início por volta da década de 1930, quando *Volterra* mostrou que para um sistema não linear invariante no tempo, que tem uma saída contínua e limitada, $y(k)$, quando excitado por uma entrada também contínua e limitada, $u(k)$, a relação entre a entrada e a saída pode ser expressa como:

$$y[k] = h_0 + \sum_{m_1=1}^{M} h_1[m_1]u(k-m_1) + \sum_{m_1=1}^{M}\sum_{m_2=1}^{M} h_2[m_1,m_2]u(k-m_1)u(k-m_2) + \cdots$$

$$+\sum_{m_1=1}^{M}\cdots\sum_{m_n=1}^{M} h_n[m_1,\cdots,m_n]u(k-m_1)\cdots u(k-m_n) \tag{2.1}$$

A equação (2.1) é denominada série de *Volterra*, e a função $h_n(m_1,...,m_n)$ é chamada de *kernel* de *Volterra*, sendo n, o grau de não linearidade do sistema e M é a ordem do modelo.

A série de *Volterra*, apesar de sua ampla aplicabilidade na representação de sistemas não lineares, possui algumas limitações, tais como o grande número de parâmetros requerido para explicar um sistema não linear simples, o que acarreta em um maior esforço computacional. Este fato é uma conseqüência da série de *Volterra* mapear as entradas passadas para a saída atual $y(k)$. Uma forma de reduzir o número de parâmetros é utilizar valores da saída e da entrada para determinar $y(k)$, ou seja, utilizar recorrência ou auto-regressão da saída (Aguirre, 2000).

Os modelos de *Volterra* são uma generalização do modelo de resposta ao impulso para a descrição de sistemas não lineares.

2.3.2. Modelos NARX e NARMAX

Os modelos NARX (*Nonlinear Auto-Regressive model with eXogenous variables*) e NARMAX (*Nonlinear Auto-Regressive Moving Average model with eXogenous variables*) são extensões de seus lineares equivalentes ARX (*Auto-Regressive with eXogenous inputs*) e ARMAX (*Auto-Regressive Moving Average with eXogenous inputs*). Estes modelos são capazes de representar uma gama de sistemas não lineares.

Os modelos NARX são modelos discretos no tempo que descrevem a saída do sistema como uma função não linear dos termos passados da entrada e da saída, ou seja:

$$y(k) = F^l[y(k-1),\cdots,y(k-n_a),u(k-1),\cdots,u(k-n_b)] \tag{2.2}$$

Os modelos NARMAX incluem os termos da dinâmica da perturbação, a fim de se evitar polarização de parâmetros. Assim tem-se:

$$y(k) = F^l[y(k-1),\cdots,y(k-n_a),u(k-1),\cdots,u(k-n_b),e(k),e(k-1),\cdots,e(k-n_c)] \tag{2.3}$$

Nas duas equações, n_a, n_b e n_c representam os maiores atraso da saída, da entrada e do ruído, respectivamente, e F^l é função não linear com grau de não linearidade l. A parte determinística da equação (2.3) pode ser expandida como o somatório de termos com graus de não linearidade variando na faixa $1 \le m \le l$. Assim, cada termo de grau m poderá conter um fator de grau p do tipo $y(k-i)$ e um fator de grau $(m-p)$ do tipo $u(k-i)$ sendo multiplicado por um parâmetro representado por $c_{p,m-p}(n_1,\cdots,n_m)$. Matematicamente, tem-se:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{l} \sum_{p=0}^{m} \sum_{n_1,n_m}^{n_y,n_u} c_{p,m-p}(n_1,\cdots,n_m) \prod_{i=1}^{p} y(k-n_i) \prod_{i=p+1}^{m} u(k-n_i) \tag{2.4}$$

sendo, $$\sum_{n_1,n_m}^{n_y,n_u} \equiv \sum_{n_1=1}^{n_y} \cdots \sum_{n_m=1}^{n_u}$$

Este exemplo mostra a função $F^l(\cdot)$ expandida como um polinômio de grau dois, então tomando-se $l = 2$ em (2.4) tem-se (Aguirre, 2000):

$$y(k) = C_{0,0} + \sum_{n_1=1}^{n_y} c_{1,0}(n_1)y(k-n_1) + \sum_{n_1=1}^{n_u} c_{0,1}(n_1)u(k-n_1) +$$

$$+\sum_{n_1}^{n_y} \sum_{n_2}^{n_y} c_{2,0}(n_1,n_2)y(k-n_1)y(k-n_2) +$$

$$+\sum_{n_1}^{n_y} \sum_{n_2}^{n_u} c_{1,1}(n_1,n_2)y(k-n_1)u(k-n_2) +$$

$$+\sum_{n_1}^{n_u} \sum_{n_2}^{n_u} c_{0,2}(n_1,n_2)u(k-n_1)u(k-n_2) \qquad (2.5)$$

Uma das mais importantes vantagens do modelo NARMAX polinomial é que este é linear nos parâmetros, possibilitando, assim, o uso do método dos mínimos quadrados na estimação dos mesmos.

Os modelos NARX e NARMAX podem ser representados através de uma função polinomial ou racional, sendo a representação polinomial a mais comumente usada na academia (Gomes et al., 2000; Aguirre, 2000).

2.3.3. Modelo Bilinear

Os modelos bilineares, têm despertado no meio acadêmico grande interesse, esses sistemas são mais simples que outros modelos não lineares e mais representativos que os modelos lineares. A representação do modelo bilinear é dada quando todos os termos não lineares da equação são dados exclusivamente por produtos simples na forma:

$$y(k-i)u(k-i-d), \text{ com } i \geq 1 \text{ e } d \geq 1 \qquad (2.6)$$

O modelo Bilinear é baseado em um modelo linear do tipo ARMAX (*Auto-Regressive Moving Average with eXogenous variables*) mais termos não lineares constituídos pelos produtos entre entradas e saídas. Sua representação polinomial tem a seguinte forma:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + \sum_{i=1}^{n_a}\sum_{j=1}^{m} d_{(i-d),j}u(k-j-i+1)y(k-i) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta}e(k) \quad (2.7)$$

em que, os polinômios e $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$ são definidos como:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_{na}q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots + b_{nb}q^{-nb} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \cdots + c_{nc}q^{-nc} \end{aligned} \quad (2.8)$$

os termos do coeficiente $d_{(i-d),j}$ são coeficientes não lineares n_a e m representam o grau de não linearidade, $y(k)$, $u(k)$ e $e(k)$ são respectivamente as seqüências das entradas, saídas e ruído, d é o atraso de sistema e $\Delta = 1 - q^{-1}$ introduz uma ação integral no controlador e, assim, cancela o efeito de distúrbios do tipo degrau.

As aplicações de modelos bilineares na representação de um processo industrial estão associadas às plantas cujas características são inerentemente bilineares como processos de fermentação, colunas de destilação, reatores nucleares e químicos (Santos, 2007). Como a estrutura do modelo bilinear é linear em relação aos parâmetros, é possível aplicar as mesmas técnicas de identificação empregadas nos modelos lineares (Fontes, 2002).

2.3.4. Redes Neurais

As primeiras informações mencionadas sobre a neuro computação datam de 1943, em artigos de *McCulloch* e *Pitts*, em que sugeriam a construção de uma máquina baseada ou inspirada no cérebro humano. O primeiro neuro computador a obter sucesso (*Mark I Perceptron*) surgiu em 1957 e 1958, criado por *Frank Rosenblatt*, *Charles Wightman* e outros. Devido à profundidade de seus estudos, suas contribuições técnicas e de sua maneira moderna de pensar, muitos o vêem como o fundador da neuro-computação na forma em que a temos hoje. Seu interesse inicial para a criação do *Perceptron* era o reconhecimento de padrões (Tatibana & Kaetsu, 2008).

As Redes Neurais Artificiais (RNA's) são outro tipo de representação não linear, constituindo-se de sistemas paralelos inspirados na estrutura física do cérebro humano. O primeiro modelo de neurônio artificial foi proposto por (McCulloch & Pitts, 1943), cujo trabalho fazia uma analogia entre células vivas e o processo eletrônico, simulando o comportamento do neurônio natural, onde o neurônio possuía apenas uma saída, que era uma função de entrada (*threshold*) da soma de suas diversas entradas. Trata-se de uma simplificação do que se sabia a respeito do neurônio biológico naquela época. A sua descrição matemática resultou em um modelo com n terminais de entrada, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e apenas um terminal de saída y. A saída y é uma função do somatório das entradas ponderadas pelos pesos correspondentes, como mostra a Figura 2.1 (Medeiros, 2006).

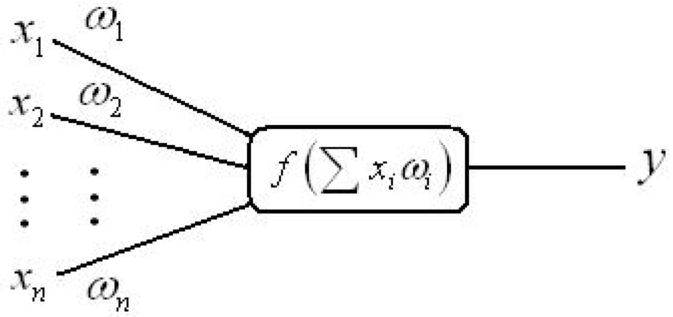

Figura 2.1 – Modelo do Neurônio de *McCulloch* e *Pitts*

A saída de um único neurônio com n entradas é do tipo:

$$x = f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + b\right) \tag{2.9}$$

sendo que b (bias) e w_i são constantes e f é chamada de função de ativação que pode ser linear ou não linear.

As redes de uma camada resolvem apenas problemas linearmente separáveis. Para problemas não linearmente separáveis devem-se utilizar redes com uma ou mais camadas intermediárias conhecida como redes *perceptron*, como é mostrado na Figura 2.2 (Medeiros, 2006).

Como apontado por (Braga et al. 2000) uma Rede Neural é, portanto, formada por elementos processadores simples. Cada elemento processador executa uma função simples, mas a RNA como um todo tem capacidade computacional para resolução de problemas complexos. A estrutura apresentada na Figura 2.2 possui quatro entradas (x_1, x_2, x_3, x_4), duas saídas (y_1, y_2) e quatro neurônios na camada intermediária (w_1, w_2, w_3, w_4), sendo capaz de resolver problemas de regressão, classificação ou predição no espaço R4. É também um exemplo de rede neural do tipo *feedforward*.

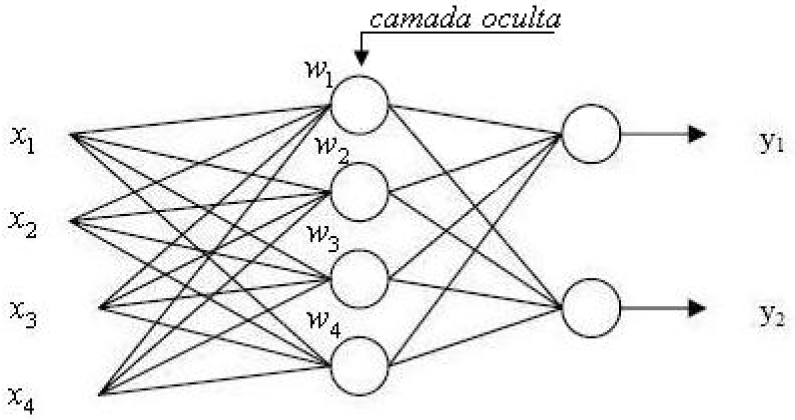

Figura 2.2 – Exemplo de arquitetura de uma rede *perceptron* multicamadas

A saída de uma função multicamadas é uma função não linear do tipo:

$$y(k) = f_s \left\{ \sum_{j=1}^{m} w_j f_j \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + b \right) + b_s \right\} \tag{2.10}$$

sendo que f_s é a função de ativação do neurônio da camada de saída. Tal função não precisa ser igual a f_i, $i = 1, \cdots, m$, que , por sua vez, não precisam ser iguais entre si. b_s é o termo de polarização do neurônio da camada de saída, w_j são os pesos da saída de cada neurônio da camada oculta e w_{ji} são os pesos da entrada i, vista pelo i-ésimo neurônio da camada oculta.

Esta classe de rede consiste de múltiplas camadas de unidades computacionais, geralmente interconectadas em uma forma *feedforward*. Isso quer dizer que cada neurôniom em uma camada tem conexões diretas a neurônios da próxima camada. Em muitas aplicações, as unidades dessas redes utilizam uma função sigmóide (em forma de S) como a função de ativação. As redes multicamadas podem usar um grande número de técnicas treinamento de seus pesos, sendo a mais popular denominada propagação retroativa do erro.

Nesse caso, os valores de saída são comparados com a resposta correta para calcular o valor de alguma função de erro pré-definida.

Como uma rede neural geralmente não é linear em seus parâmetros, algoritmos especiais de treinamento devem ser usados (Braga at al. 2000).

2.3.5. Modelo de *Wiener*

O Modelo de *Wiener* surge como uma das representações de modelos não lineares baseados em modelos de blocos interconectados, os quais representam a dinâmica do sistema através de um modelo dinâmico linear e uma não linearidade, representada por uma função estática não linear. Historicamente, tais modelos surgiram como representação de "transição" entre a teoria linear, já bem desenvolvida, e a teoria envolvendo modelos não lineares, que ainda estava iniciando.

Os modelos de blocos interconectados foram muito utilizados até meados da década de oitenta (Billings, 1980; Schetzen, 1980; Rugh, 1981; Leontaritis e Billings, 1985a,b;) e ressurgiram em meados da década de noventa e anos dois mil (Boutayeb e Darouach, 1995; Gómez e Baeyens, 2000; Goethals et al. 2005; Pearson e Pottmann, 2000; Aguirre et al. 2005). Um dos principais fatores dos modelos de blocos interconectados terem despertado o interesse de pesquisadores deve-se ao fato destes modelos serem utilizados em técnicas de controle. Além disso, análise da estabilidade de um modelo globalmente não linear pode ser feita através do bloco dinâmico não linear.

Os Modelos de *Wiener* e *Hammerstein* (que serão descritos a seguir) são representações de modelos de blocos interconectados, e a maneira com que estes blocos estão dispostos é o que diferencia um modelo do outro. Esta diferença na disposição dos blocos acarreta em comportamento dinâmico diferente de um modelo para o outro. Nos modelos de *Wiener*, o bloco dinâmico linear precede o bloco estático não linear, como mostra a Figura 2.3.

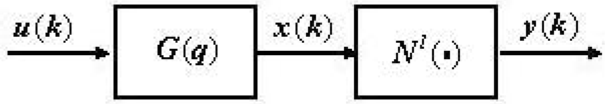

Figura 2.3 – Modelo de *Wiener*

O sinal de saída do modelo de *Wiener* é obtido pelo mapeamento do sinal intermediário, $x(k)$, através da função $N^l(\cdot)$, tal que:

$$y(k) = N^l(x(k)) \tag{2.11}$$

Como o sinal intermediário $x(k)$ não está disponível, pode-se estimá-lo através da inversa da função $N^l(\cdot)$. Portanto, esta função terá que ser inversível[1] para que o modelo de *Wiener* possa ser estimado. Denota-se $(N^l)^{-1}$ por (N^{l_1}), logo,

$$x(k) = (N^{l_1})(y(k)) \tag{2.12}$$

sendo l_1 o grau de não linearidade da função inversa $N^l(\cdot)$.

O bloco dinâmico linear é representado por um modelo ARX, o qual é determinado para o par de entrada e saída $u(k)$ e $x(k)$, respectivamente, como mostra a equação (2.13)

$$x(k) = \sum_{j=1}^{n_x} \theta_j x(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i) \tag{2.13}$$

substituindo a equação (2.13) em (2.11), tem-se que:

$$y(k) = N^l\left(\sum_{j=1}^{n_x} \theta_j x(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i)\right) \tag{2.14}$$

considerando um atraso j, tal que $j = 1, \cdots, n_y$, a equação (2.12) pode ser escrita como:

$$x(k-j) = N^{l_1}(y(k-j)) \tag{2.15}$$

e substituindo a equação (2.12) em (2.11), a forma polinomial do modelo de *Wiener* é obtida com relação aos sinais de entrada $u(k)$ e saída $y(k)$ do sistema:

$$y(k) = \left(\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j N^{l_1}(y(k-j)) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i)\right) \tag{2.16}$$

O modelo de *Wiener* conta com diversas aplicações registradas na literatura de controle de processos. Pearson e Pottmann (2000) descrevem uma abordagem de identificação caixa-cinza para três classes de modelos de blocos interconectados: modelos de *Hammerstein*, modelos de *Wiener* e modelos de

---

[1] Para que uma função $f : A \to B$ admita a inversa f^{-1}, é necessário que esta função f seja bijetora. Sendo assim, tem-se $f^{-1} : B \to A$.

blocos orientados por realimentação introduzida por modelagem de processos com multiplicidades na saída.

Gómes et al. (2004) apresentam a identificação do modelo de *Wiener* e o controle preditivo de um processo de neutralização de pH. O modelo de *Wiener* identificado é usado como um modelo interno em um controlador preditivo (MBPC) que é usado para controlar o modelo de simulação caixa-branca.

Shahraeini et al. (2006) fazem um estudo de um método de controle preditivo não linear modificado com problema de otimização simplificado. O modelo de *Wiener* é incorporado dentro do MBPC de forma que a não linearidade é removida do problema de controle. Esse método é baseado na identificação da parte não linear inversa do modelo de *Wiener*.

2.4. Modelo de *Hammerstein* e Propriedades

O Modelo de *Hammerstein,* como mencionado na sessão anterior, faz parte dos modelos de blocos interconectados, em que a não linearidade estática precede o bloco que contém a dinâmica linear do sistema, como ilustrado na Figura 2.4.

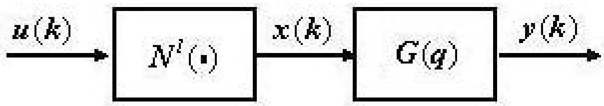

Figura 2.4 – Modelo de *Hammerstein*

O modelo de *Hammerstein* pode ser representado na forma polinomial, ou seja, um modelo NARX polinomial equivalente à representação de *Hammerstein* (Casillo et al., 2008a,b).

Sabendo que o sinal intermediário, $x(k)$, é obtido pelo mapeamento do sinal de entrada, $u(k)$, através da função N^l, tem-se que:

$$x(k) = N^l(u(k)) \tag{2.17}$$

então, $$x(k-i) = N^l(u(k-i)), \text{ para } i = 1, \cdots, n_u \tag{2.18}$$

O modelo ARX é obtido utilizando a entrada e saída, $x(k)$ e $y(k)$, respectivamente, do bloco dinâmico linear, tal que:

$$y(k)=\sum_{j=1}^{n_y}\theta_j y(k-j)+\sum_{i=1}^{n_u}\sigma_i x(k-i) \quad (2.19)$$

em que,

n_y é o atraso máximo da saída do modelo ARX;

n_u é o atraso máximo da entrada do modelo ARX;

θ_j são os parâmetros relacionados a cada regressor de saída do modelo ARX;

σ_i são os parâmetros relacionados a cada regressor de entrada do modelo ARX.

Na prática o sinal intermediário $x(k)$, não está disponível. Logo, é desejável expressar o modelo *Hammerstein* na forma polinomial com relação aos dados de entrada e saída do sistema, $u(k)$ e $y(k)$, respectivamente. Então, substituindo a equação (2.18) em (2.19), tem-se

$$y(k)=\sum_{j=1}^{n_y}\theta_j y(k-j)+\sum_{i=1}^{n_u}\sigma_i N^l(u(k-i)) \quad (2.20)$$

A equação (2.20) revela que o modelo *Hammerstein* é um caso particular do modelo NARX polinomial com grau de não linearidade l. Cada termo do modelo ARX de ordem m, tal que $0 \le m \le l$, contém um fator de ordem 1 em $y(k-j)$ e um fator de ordem m em $u(k-i)$. Em suma, a representação NARX polinomial é equivalente a um modelo de *Hammerstein* quando:

- A não linearidade atuar somente nos regressores da entrada;
- Não houver a presença de termos do tipo $u(k-i)u(k-j)$, para $i \neq j$ (Coelho et al., 2002).

A representação da não linearidade estática por um polinômio dá-se quando não se dispõe de informações a respeito da natureza da não linearidade. A representação é obtida aproximando-a por uma expansão polinomial finita do tipo

$$x(k)=\gamma_1 u(k)+\gamma_2 u^2(k)+\cdots+\gamma_l u^l(k) \quad (2.21)$$

em que k é o instante de tempo, $x(k)$ é a pseudo-saída do bloco não linear, $u(k)$ é a variável de entrada e $\gamma_i (i=1,\cdots,l)$ representam os coeficientes do polinômio e l é o grau de não linearidade do modelo de *Hammerstein*.

O modelo de *Hammerstein* na sua forma paramétrica pode ser escrito como:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\sum_{i=1}^{l}\gamma_i u^i(k-d) + \varepsilon(k) \tag{2.22}$$

em que d é o atraso de transporte (tempo morto). Substituindo a equação (2.21) na equação (2.22), obtemos:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})x(k) + \varepsilon(k) \tag{2.23}$$

A popularidade do modelo de *Hammerstein* deve-se ao fato da sua maior simplicidade em relação às representações de *Volterra* e Bilinear, aliada a uma capacidade de representação da não linearidade da maioria dos processos práticos, sendo capaz de representar processos com atuadores não lineares e ganhos variáveis (Santos, 2007).

Processos com dinâmicas aproximadamente lineares, mas com forte não linearidade em seus atuadores (ex. válvulas não lineares), por exemplo, podem ser representados por modelos de *Hammerstein*.

A literatura de controle e identificação de sistemas conta com várias aplicações do modelo de *Hammerstein* na representação de colunas de destilação (Pearson e Pottmann, 2000), trocadores de calor (Al-Duwaish e Naeem, 2001), Processos de Nível (Coelho et al., 2002), Controle de pH (Casillo et al, 2008b), entre outros.

O Modelo de *Hammerstein* foi escolhido por representar bem a não linearidade de um processo com a simplicidade do projeto, por ser constituído de um bloco estático não linear, seguido por um bloco dinâmico linear. Esta forma de representação apresenta propriedades que simplificam o projeto de controladores preditivos não lineares, possibilitando, uma solução analítica para o problema de minimização da função custo (caso sem restrições), embora a maioria dos resultados restrinja-se ao nível de simulação.

2.5. Estabilidade de Sistemas Não Lineares

Em um sistema de controle, a estabilidade é uma propriedade fundamental a ser garantida. O termo “sistema” significa combinar, ajustar, formar um conjunto. Todo sistema de controle, linear ou não linear, envolve um problema de estabilidade que deve ser cuidadosamente estudado. Portanto, a teoria da estabilidade apresenta um papel central na teoria de sistemas e engenharia e existem diferentes tipos de problemas de estabilidade que surgem no estudo de sistemas dinâmicos.

Um sistema dinâmico equivale, portanto, a uma estrutura multivariável (ou monovariável, caso se considere apenas um aspecto dessa estrutura) que se desenvolve no decorrer do tempo. Os sistemas dinâmicos são usualmente representados por meio de equações diferenciais. O emprego de equações diferenciais ou a diferenças se dá, respectivamente, conforme a evolução do fenômeno por elas descrito considerado em tempo contínuo ou discreto (Grinits, 2002). Os sistemas estudados neste trabalho restringir-se-ão ao caso discreto.

Para se realizar a análise de estabilidade, é necessário dispor do modelo do sistema (planta) a controlar. Nos capítulos seguintes será mostrado que o Controlador Preditivo, que é objeto desta Tese, é baseado no modelo de *Hammerstein*, portanto, sua característica é não linear. Conseqüentemente, faz-se necessário lançar mão de métodos para análise de estabilidade para sistemas não lineares, como Critério de Popov, que neste capítulo é apresentado.

No final do século XIX, o matemático *Aleksandr Mikhailovich Lyapunov* propôs uma abordagem geral para a análise de estabilidade na área de controle (Hsu, 2002). O primeiro método de *Lyapunov*, também conhecido como Método da Linearização, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear através do seu modelo linearizado. O segundo método de *Lyapunov* (ou Método Direto de *Lyapunov*) é uma extensão matemática de uma observação física fundamental. Se a energia de um sistema físico é continuamente dissipada, então o sistema, linear ou não linear, deve normalmente voltar ao ponto de equilíbrio. Pode-se dizer que a função de *Lyapunov* é uma extensão matemática do conceito de energia do sistema. Estudando a energia associada ao sistema, é possível avaliar o seu comportamento e em particular a sua estabilidade.

2.5.1. Estabilidade Absoluta

Muitos sistemas físicos podem ser representados como uma conexão de realimentação de um sistema dinâmico linear e um elemento não linear, como mostra a Figura 2.5 (Khalil, 2002).

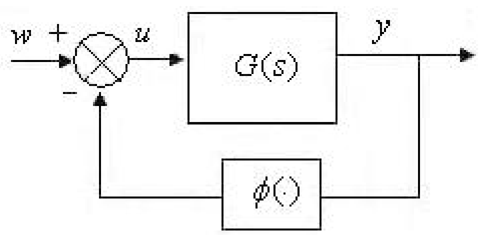

Figura 2.5 – Sistema de Controle com realimentação

O processo que representa um sistema de controle como mostrado na Figura 2.5, depende em particular do sistema envolvido. Por exemplo, no caso em que um sistema de controle possui somente uma não linearidade na forma de um relé ou atuador, por exemplo, não há dificuldades em representar o sistema na forma da Figura 2.5, em outros casos, a representação pode ser menos óbvia (Khalil, 2002).

O problema da Estabilidade Absoluta foi formulado pela primeira vez por Lur'e & Postnikov, 1945 (Gapisk, 1994). Neste artigo, os autores tratam o seguinte problema: considere um sistema linear realimentado por um bloco não linear conforme a Figura 2.5, cujo sistema dinâmico, descrito pelas equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \\ u &= -\phi(y) + w \end{aligned} \tag{2.24}$$

em que: $x \in R^n$, $y \in R$, A é uma matriz quadrada nxn, b é um vetor coluna c^T um vetor linha, y um número real e $\phi(\cdot)$ é uma não linearidade restrita ao primeiro e terceiro quadrantes do plano (y, ϕ).

O problema da estabilidade absoluta de sistemas de controle consiste em determinar condições para que o a origem do sistema seja globalmente assintoticamente estável para qualquer função $\phi(y)$ tal que

$$0 \le \phi(y)y \le Ky^2,\ K > 0 \tag{2.25}$$

Isto é, a função $\phi(y)$ situa-se no setor $[0, K]$, é necessário que a função $\phi(y)$ seja tal que a existência e unicidade da solução do sistema da Figura (2.5) estejam garantidas.

Em função do exposto, podemos ter a seguinte questão: Quais restrições devem ser impostas à planta da parte linear de (2.24) para garantir que o sistema realimentado seja estável para qualquer não linearidade que tenha seu gráfico no primeiro e terceiro quadrantes? Ou seja, o problema da estabilidade era levantado não para um sistema específico, mas para uma classe de sistemas. Na verdade, Lur'e e Postnikov não tratam um conjunto de equações como (2.24), mas sim um conjunto de equações que pode ser colocado na forma da equação (2.21) (Gapisk, 1994).

A estabilidade Absoluta será estudada de forma geral através de sistemas do tipo Lur'e e do Critério de Popov. O sistema a ser estudado apresenta dinâmica linear e uma não linearidade estática do tipo setor. Para isto são considerados processos físicos não lineares representados por um sistema linear seguido de um elemento estático não linear. O problema da estabilidade absoluta consiste em obter condições para estabilidade do sistema em malha fechada para uma classe de não linearidade restrita a um setor do plano. Assume-se que a referência é zero $w = 0$. Para o estudo da estabilidade absoluta são definidos inicialmente alguns conceitos:

Definição 6.1 *Sistema do Tipo Lur'e (condição de setor)*

Quando a função f é linear, $f(y) = -Ky$, podem existir dois escalares não negativos $[k_1, k_2]$ de modo que para $K \in [k_1, k_2]$ o sistema é estável.

Com esta definição, existem condições de que a estabilidade seja garantida para funções f não lineares restritas ao primeiro e terceiro quadrantes do plano $(f(y), y)$ pertencentes ao setor $[k_1, k_2]$.

A função $f(\cdot)$ implica que o gráfico da função não linear, esta localizado entre duas retas com declive k_1 e k_2, como mostra a Figura 2.6.

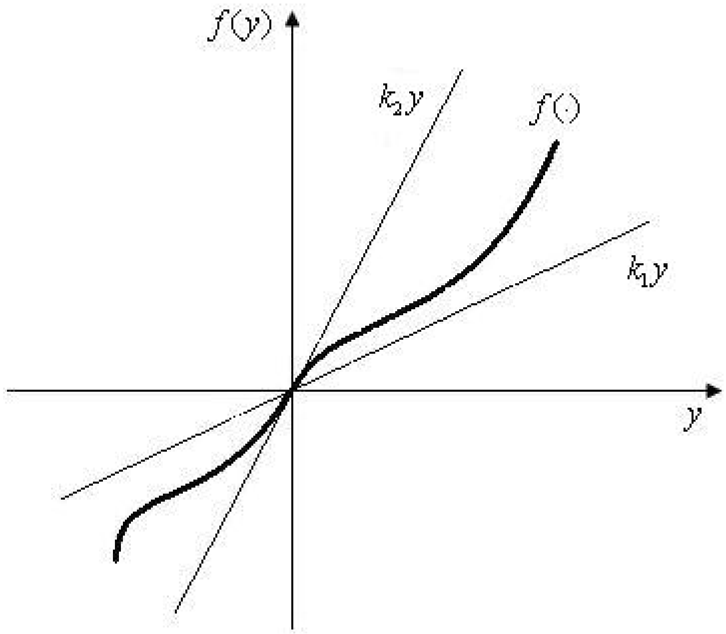

Figura 2.6 – Não Linearidade pertencente ao setor $[k_1, k_2]$

As seguintes condições dever ser aceitas: $f(\cdot)$

1. A função não linear está sempre contida entre duas retas $f_1(y) = k_1 y$ e $f_2(y) = k_2 y$;
2. $f(0) = 0$;
3. A não linearidade pertence ao primeiro e terceiro quadrantes.

A condição 2 afirma que $f(0) = 0$ e que o gráfico de $f(\cdot)$ está localizado no 1º e 3º quadrantes, uma vez que k_1 e k_2 são não negativos.

Diante da definição acima, verifica-se que a função estática não linear deve ser de grau impar. O sistema (2.24) é absolutamente estável se a origem é globalmente assintoticamente estável para qualquer não linearidade contida no setor dado.

Na prática, um dispositivo físico, por exemplo, um atuador, raramente tem uma característica bem conhecida e inclusive, tal característica pode variar de um atuador para outro. É importante assegurar que o sistema permaneça estável dentro de uma faixa de incerteza do tal dispositivo. Uma maneira de formular a incerteza é através de uma condição de setor como mostra a Figura 2.6. Quanto maior a incerteza, maior o intervalo $[k_1, k_2]$.

Esse problema tem atraído a atenção de inúmeros cientistas e engenheiros de diferentes países ao longo dos anos, não somente pelo interesse teórico, mas também pela grande importância de suas aplicações na indústria, Engenharias, tecnologia, fundamentos da ciência, entre outras (Liberzon, 2002). Dentre as abordagens que tratam desse problema pode-se destacar o método de Lyapunov proposto pelo próprio Lur'e (Lure & Postnikov, 1945), o Critério de Popov (Popov, 1961), o critério quadrático de Yakubovich (Yakubovich, 1967), a abordagem variacional introduzida por Pyatnitsky em (Pyatnitsky, 1970), dentre outras (Oliveira, 2003).

2.5.2. Critério de Popov

Em 1961, o pesquisador V. M. Popov apresentou uma linha de pesquisa até então inexplorada, baseando-se na característica em freqüência da parte linear (2.24), Popov propôs um critério, conhecido na literatura como o **Critério de Popov**.

O critério de Popov é um dos mais apropriados critérios para sistemas não lineares e pode ser comparado com o critério de Nyquist para sistemas lineares (Gapski, 1994). O critério de Popov oferece condições suficientes para estabilidade de sistemas de controle não linear no domínio da freqüência, porém, as condições para a aplicação deste critério devem ser bem especificadas.

Principais características do Critério de *Popov*:

- Só se aplica para sistemas autônomos;
- É restrito a não linearidades estáticas, sem memória e invariantes no tempo;
- A estabilidade absoluta pode ser determinada examinando a resposta em freqüência de um subsistema linear, sem necessidade de uma função explícita de *Lyapunov*.

Lema 2.1 Critério de *Popov*

O sistema (2.24) é absolutamente estável no setor $\left[0, K\right]$ se $G(s) = c(sI - A)^{-1}b$ for *Hurwitz* e existir $q \geq 0$ tal que

$$\Re\left\{\left(1 + j\omega q\right)G(s)\right\} + \frac{1}{K} > 0 \tag{2.26}$$

Este teorema foi o primeiro resultado no que diz respeito aos multiplicadores de estabilidade, que estão intrinsecamente ligados à teoria de estabilidade absoluta, e é um resultado importante por várias razões (Gapski, 1994):

- Leva em conta apenas a relação entrada-saída da planta, sendo, portanto, de simples aplicação e independente da ordem do sistema;
- Pode ser interpretado graficamente de uma maneira muito semelhante ao Critério de *Nyquist* para sistemas lineares, apesar de ser uma condição apenas suficiente;
- Não faz especificações sobre a não linearidade.

O problema da estabilidade absoluta foi formulado tendo em vista o maior grau de generalidade possível, ou seja, o mínimo de hipóteses foi feito sobre a característica da não linearidade.

2.6. Conclusões

Este capítulo apresentou as principais representações de modelos não lineares utilizadas nas indústrias e na academia. Foi apresentada a representação não linear escolhida (modelo de *Hammerstein*) para o aprofundamento nos estudos sobre Controladores Preditivos Não Lineares. O modelo de *Hammerstein* foi escolhido por representar bem não linearidades de processos e pela facilidade de implementação em controladores preditivos. Por fim, apresentado um estudo sobre o conceito de estabilidade para sistemas não lineares, estabilidade absoluta e o Critério de Popov.

3. CONTROLE PREDITIVO

Neste capítulo é apresentada uma breve revisão bibliográfica do método de Controle Preditivo, dando ênfase ao Controlador Preditivo Generalizado (GPC).

3.1. Introdução

Diferentemente do controle por realimentação de saída, por exemplo, o clássico controlador PID, em que o controlador utiliza o sinal de erro para calcular as ações de controle, o controle baseado em modelo, além do sinal de erro, utiliza ainda, e de forma direta, o modelo do processo para calcular essas ações. Na indústria, o Controle Preditivo Baseado em Modelo (MBPC) tem tido bastante aceitação por ser este um método geral, especialmente adequado para os problemas difíceis de controle do tipo MIMO, em que existem interações significativas entre as entradas manipuladas e as saídas controladas (Kwong, 2005).

O MBPC baseia-se no comportamento futuro do processo, e a predição é obtida usando um modelo dinâmico e as medidas disponíveis. As saídas do controlador são calculadas de modo a minimizar a diferença entre a resposta predita do processo e a resposta desejada. A cada instante de amostragem, os cálculos de controle são repetidos e as predições são atualizadas com base em medidas atuais.

As primeiras técnicas MBPC foram desenvolvidas na década de 1970 em decorrência dos controladores convencionais serem incapazes de atender às exigências de desempenho cada vez mais restritas. Nos anos 80, surgiu a publicação dos trabalhos pioneiros realizados por dois grupos industriais e a primeira publicação ampla do Controle Preditivo Generalizado – GPC (Clarke et al., 1987a, b). A Shell Oil (Houston, Texas) denominou o seu controle por *"Dynamic Matrix Control"* – (DMC) em 1979, e Cutler e Ramaker, também no mesmo ano, apresentou uma técnica similar, denominada *"Model Algorithmic Control"* – (MAC) comercializada como IDCOM. Esta foi publicada por uma companhia francesa, *Adersa/Gerbios*, em 1978 (Richalet et al., 1978). Desde então, existem inúmeras aplicações dessas técnicas nas refinarias de petróleo, plantas petroquímicas e indústrias de papel e celulose no mundo inteiro (Kwong , 2005; Qin e Badgwell, 2003).

Comparando com o controle clássico, o controle preditivo apresenta algumas vantagens tais como:

- É uma estratégia de controle geral para processos MIMO com restrições de desigualdade nas variáveis de entrada e saída;
- Pode acomodar facilmente comportamentos dinâmicos pouco comuns ou difíceis, tais como respostas com tempo morto e sistemas de fase não-mínima;
- Desde que as ações de controle são calculadas com base no desempenho otimizado de sistemas de controle, o MBPC pode ser prontamente integrado com estratégias de otimização *on-line* para melhorar o desempenho da planta.

Deve-se observar, no entanto que algumas desvantagens o MBPC apresenta, tais como:

- A estratégia MBPC é bastante diferente da estratégia de controle multi-malha convencional e conhecida, de forma que, inicialmente não são familiares aos operadores da planta.
- Os cálculos MBPC podem ser relativamente complexos, pois demandam, por exemplo, a solução de um problema programação linear ou programação quadrática a cada instante de amostragem, necessitando, assim, de uma quantidade significativa de esforço e recursos computacionais.

- O desconhecimento das técnicas de controle por ser sistematicamente mais complexos.

A Figura 3.1 apresenta a idéia básica de um MBPC.

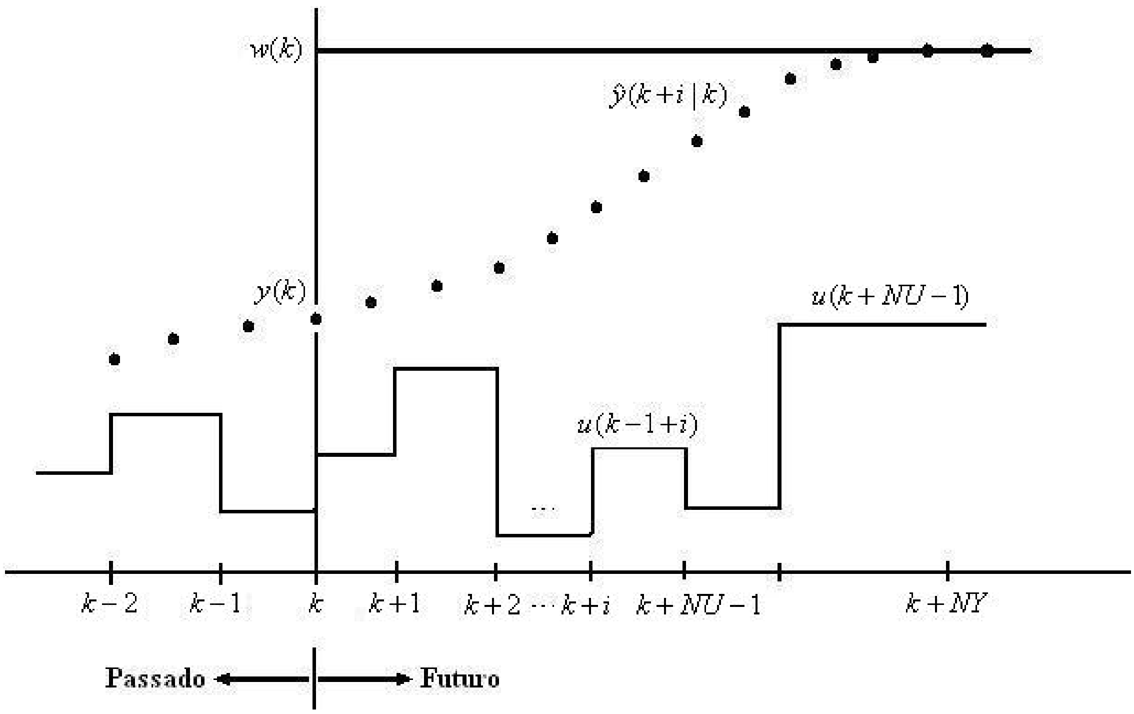

Figura 3.1 – Idéia básica do MBPC

As variáveis $u(k)$, $y(k)$ e $w(k)$ representam os valores no instante k da variável manipulada (entrada do processo ou sinal de controle), da variável controlada (variável de saída) e do sinal de referência, respectivamente. As constantes NU e NY correspondem ao número de passos dos chamados horizonte de controle e predição respectivamente. Vale ressaltar que a variável manipulada permanece constante após o término do horizonte de controle.

As saídas preditas usando o modelo do processo com base nas informações disponíveis até o instante k, são denotadas por $\hat{y}(k+i|k)$ para $i=1,\cdots,NY$ e dependem do sinal de controle $u(k-1+i)$ a ser aplicado para $i=1,\cdots,NU$.

A seqüência de controle é calculada de modo a reduzir o erro entre a saída do processo e a trajetória de referência $w(k)$. Para isso, é usualmente definida uma função custo que leve em conta o erro de rastreamento dentro do horizonte de predição e o esforço de controle associado.

Uma vez que a seqüência ótima $u(k-1+i)$, para $i=1,\cdots,NU$ tenha sido obtida, o primeiro valor desta é aplicado ao processo, e a otimização é repetida no próximo instante de amostragem quando a informação dos dados de entrada e saída forem atualizados. Este procedimento é que garante o fechamento da malha de controle. Vale ressaltar que tal estratégia de horizonte deslizante (móvel) é importante para conferir ao controlador certo grau de robustez com respeito a incertezas ou aproximações feitas no modelo, bem como compensar o efeito de perturbações.

3.2. Controle Preditivo Generalizado

A estratégia GPC foi proposta por (Clarke et al., 1987a,b), tendo se tornado uma das estratégias de controle preditivo mais populares na indústria e no meio acadêmico (Camacho e Bondons, 1999).

O GPC é aplicável a ambos os processos: SISO e MIMO. Admite-se que um modelo linear (ou linearizado) da planta SISO seja expresso como modelo CARMA (*Controlled Auto-Regressive Moving Average*):

$$A(q^{-1})y(k)=q^{-m}B(q^{-1})u(k-1)+C(q^{-1})\varepsilon(k) \tag{3.1}$$

em que $y(k)$ e $u(k)$ são respectivamente a saída e a entrada, $\varepsilon(k)$ é o ruído branco, q^{-1} é o operador de atraso, m representa o atraso natural, em múltiplos do período de amostragem e $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$ são os polinômios definidos como:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+\cdots+a_{na}q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_0+b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+\cdots+b_{nb}q^{-nb} \\ C(q^{-1}) &= 1+c_1q^{-1}+c_2q^{-2}+\cdots+c_{nc}q^{-nc} \end{aligned} \tag{3.2}$$

A Figura 3.2 mostra o diagrama de blocos do modelo do processo.

$$\frac{q^{-m}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

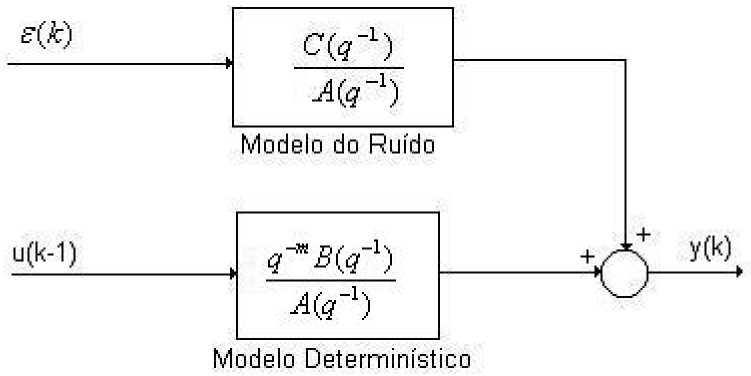

Figura 3.2 – Diagrama de blocos do modelo do processo

Esse modelo também é conhecido como ARMAX. Esse nome vem do fato de que $A(q^{-1})y(k)$ representa uma auto-regressão e $C(q^{-1})\varepsilon(k)$, uma média móvel do ruído, enquanto $B(q^{-1})u(k-1)$ representa uma entrada extra. O caso especial em que $C(q^{-1})=1$, isto é, $nc=0$, é chamado de modelo ARX.

Um modelo com aplicação mais geral é o modelo CARIMA, também conhecido com ARIMAX (*Auto-Regressive Integrated Moving Average model with eXogenous inputs*), expresso por:

$$A(q^{-1})y(k)=q^{-m}B(q^{-1})u(k-1)+C(q^{-1})\frac{\varepsilon(k)}{\Delta} \tag{3.3}$$

em que: $\Delta=1-q^{-1}$

O operador Δ introduz uma ação integral no controlador e, assim, cancela o efeito de distúrbios do tipo degrau.

Por simplicidade, no desenvolvimento do GPC, o polinômio $C(q^{-1})$ foi adotado igual a 1. O modelo resultante é:

$$A(q^{-1})y(k)=q^{-m}B(q^{-1})u(k-1)+\frac{\varepsilon(k)}{\Delta} \tag{3.4}$$

que pode ser representado de forma equivalente como:

$$\Delta A(q^{-1})y(k)=q^{-m}B(q^{-1})\Delta u(k-1)+\varepsilon(k) \tag{3.5}$$

Fazendo-se $\Delta A(q^{-1})=\tilde{A}(q^{-1})$, o modelo resultante é:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k)=q^{-m}B(q^{-1})\Delta u(k-1)+\varepsilon(k) \tag{3.6}$$

Para implementar o Controle Preditivo Generalizado, tendo-se identificado os polinômios $A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$, deve-se então calcular uma seqüência de variações futuras do sinal de controle, $\Delta u(k), \Delta u(k+1), \cdots$, de forma que a saída da planta aproxime-se da referência futura $w(k+i)$ nos instantes dentro do horizonte de interesse (determinado pela escolha de $N1$ e NY). Isto é obtido minimizando a função objetivo:

$$J = \sum_{i=N1}^{NY} \delta(i)\left[\hat{y}(k+i) - w(k+i)\right]^2 + \sum_{i=1}^{NU} \lambda(i)\left[\Delta u(k+i-1)\right]^2 \tag{3.7}$$

em que: $\hat{y}(k+i)$ é a predição da saída do sistema i-passos à frente, com base nas informações até o instante k; $N1$ é o horizonte mínimo de predição; NY é o horizonte máximo de predição; NU é o horizonte de controle; $w(k+i)$ é a referência para as saídas preditas; $\delta(i)$ e $\lambda(i)$ são as constantes de ponderação sobre o sinal de erro e sinal de controle respectivamente.

Portanto a estratégia de controle é constituída das seguintes etapas:

- Cálculo da previsão da saída em um horizonte de tempo à frente, utilizando um modelo do sistema;
- Cálculo da lei de controle minimizando um critério dado por uma função do erro entre a saída prevista e a referência especificada.

Para resolver a minimização da equação (3.7), deve-se calcular um conjunto de predições da saída $y(k+i)$, $i = N1, \cdots, NY$ com base em informações conhecidas no instante k e nos valores futuros dos incrementos de controle, que serão determinadas de modo que o critério J do GPC seja minimizado. Essas predições são realizadas por meio da solução da equação Diofantina:

$$\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_i(q^{-1}) + q^{-i}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \tag{3.8}$$

em que, $E_i(q^{-1}) = e_{i,0} + e_{i,1}q^{-1} + e_{i,2}q^{-2} + \cdots + e_{i,i-1}q^{-(i-1)}$

$$F_i(q^{-1}) = f_{i,0} + f_{i,1}q^{-1} + f_{i,2}q^{-2} + \cdots + f_{i,na}q^{-(na-1)}$$

cada uma das variáveis é um polinômio em q^{-1} e os graus dos polinômios E_i e F_i são, respectivamente: $i-1$ e na. A identidade (3.8) é obtida da divisão longa de $\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})}$ até que o resto seja fatorado em $q^{-i}F_i(q^{-1})$:

Calculando a predição da saída a partir da equação (3.6) tem-se :

$$y(k+i)=\frac{B(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1)+\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})}\varepsilon(k+i) \tag{3.9}$$

Substituindo a equação (3.8) em (3.9), obtém-se:

$$y(k+i)=\frac{B(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1)+\left[E_i(q^{-1})+q^{-i}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\right]\varepsilon(k+i) \tag{3.10}$$

Ou ainda:

$$y(k+i)=B(q^{-1})E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1)+F_i(q^{-1})y(k)+E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i) \tag{3.11}$$

em que, $E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i)$ é o termo referente do ruído no futuro. Portanto, a melhor predição de $y(k+i)$ estando no instante k é expressa por:

$$\hat{y}(k+i)=E_i(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1)+F_i(q^{-1})y(k) \tag{3.12}$$

Definindo, $$G_i(q^{-1})=E_i(q^{-1})B(q^{-1})=\tilde{G}_i(q^{-1})+q^{-(i-1)}H_i(q^{-1}) \tag{3.13}$$

sendo:

$\tilde{G}_i(q^{-1})=g_1+g_2q^{-1}+\cdots+g_iq^{-(i-1)}$, com grau $\left\{\tilde{G}_i(q^{-1})\right\}=i-1$
$H_i(q^{-1})=h_{i,1}q^{-1}+h_{i,2}q^{-2}+\cdots+h_{i,nb-1}q^{-(nb-1)}$, com grau $\left\{H_i(q^{-1})\right\}=nb-1$

a equação (3.12) pode ser escrita como:

$$\hat{y}(k+i)=[\tilde{G}_i(q^{-1})+q^{-(i-1)}H_i(q^{-1})]\underbrace{\Delta u(k+i-m-1)}_{\text{ações de controle futuras}}+F_i(q^{-1})y(k) \tag{3.14}$$

ou ainda,

$$\hat{y}(k+i)=\tilde{G}_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1)+H_i(q^{-1})\Delta u(k)+F_i(q^{-1})y(k) \tag{3.15}$$

Considerando que o sistema possui um tempo morto igual a m períodos de amostragem, a saída só será influenciada pela primeira ação $u(k)$, após decorrer $m+1$ períodos de amostragem. Os valores dos parâmetros da função objetivo podem ser definidos como: $N1=m+1$, $NY=m+N$ e $NU=N$.

O conjunto de saídas futuras obtido é da forma:

$$\begin{array}{llll}
\hat{y}(k+1)= & \tilde{G}_1(q^{-1})\Delta u(k) & +H_1(q^{-1})\Delta u(k) & +F_1(q^{-1})y(k) \\
\hat{y}(k+2)= & \tilde{G}_2(q^{-1})\Delta u(k+1) & +H_2(q^{-1})\Delta u(k) & +F_2(q^{-1})y(k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hat{y}(k+N_2)= & \tilde{G}_{N2}(q^{-1})\Delta u(k+N_2) & +H_{N2}(q^{-1})\Delta u(k) & +F_{N2}(q^{-1})y(k)
\end{array} \tag{3.16}$$

em que:

$$
\begin{array}{llll}
\tilde{G}_1(q^{-1}) = & g_1; & H_1(q^{-1}) = & h_{1,1}q^{-1} + \cdots + h_{1,nb-1}q^{-(nb-1)} \\
\tilde{G}_2(q^{-1}) = & g_1 + g_2q^{-1}; & H_2(q^{-1}) = & h_{2,1}q^{-1} + \cdots + h_{2,nb-1}q^{-(nb-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\tilde{G}_{N2}(q^{-1}) = & g_1 + g_2q^{-1} + \cdots + g_{N2}q^{-(N2-1)}; & H_{N2}(q^{-1}) = & h_{N2,1}q^{-1} + \cdots + h_{N2,nb-1}q^{-(nb-1)}
\end{array}
$$

As ações de controle sobre a predição $\hat{y}(k+i)$ podem ser separadas em duas partes: uma devido às ações passadas e a outra devido às ações futuras.

Após manipulações matriciais, as saídas preditas ótimas serão:

$$
\begin{array}{lclclcl}
\hat{y}(k+1) & = & g_1\Delta u(k) & + & [h_{1,1}q^{-1} + \cdots + h_{1,nb-1}q^{-(nb-1)}]\Delta u(k) & + & F_1(q^{-1})y(k) \\
\hat{y}(k+2) & = & g_1\Delta u(k+1) + g_2\Delta u(k) & + & [h_{2,1}q^{-1} + \cdots + h_{2,nb-1}q^{-(nb-1)}]\Delta u(k) & + & F_2(q^{-1})y(k) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hat{y}(k+N) & = & \underbrace{g_1\Delta u(k+N-1) + \cdots + g_N\Delta u(k)}_{\text{ações de controle futuras}} & + & \underbrace{[h_{N,1}q^{-1} + \cdots + h_{N,nb-1}q^{-(nb-1)}]\Delta u(k)}_{\text{ações de controle passadas}} & + & F_N(q^{-1})y(k)
\end{array}
$$

ou ainda, na forma matricial

$$
\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N & g_{N-1} & \cdots & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{1,1}q^{-1} + \cdots + h_{1,nb-1}q^{-(nb-1)} \\ h_{2,1}q^{-1} + \cdots + h_{2,nb-1}q^{-(nb-1)} \\ \vdots \\ h_{N,1}q^{-1} + \cdots + h_{N,nb-1}q^{-(nb-1)} \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} F_1(q^{-1}) \\ F_2(q^{-1}) \\ \vdots \\ F_N(q^{-1}) \end{bmatrix} y(k)
$$

Na forma matricial compacta tem-se:

$$\hat{y} = Gu + H(q^{-1})\Delta u(k) + F(q^{-1})y(k) \tag{3.17}$$

Dado que o modelo é linear, é considerado o valor predito como uma superposição de uma parcela livre com uma parcela forçada. A parcela referente à resposta livre consiste na resposta natural do sistema, ou seja, considerando-se apenas as condições presentes $(\Delta u(k+i) = 0)$. A parcela forçada é obtida a partir de uma seqüência de ações de controle (não-nulas). Portanto, a resposta livre depende somente de valores passados. Observa-se na equação (3.17), que a resposta livre depende apenas das matrizes $F(q^{-1})$ e H, obtendo-se então a equação:

$$y_l = H\Delta u(k) + F(q^{-1})y(k) \tag{3.18}$$

A resposta forçada é obtida a partir da seqüência futura de ações de controle como mostra a equação (3.19).

$$y_f = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N & g_{N-1} & \cdots & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} = Gu \tag{3.19}$$

Portanto, a resposta completa do sistema é:

$$\hat{y} = Gu + y_l \tag{3.20}$$

Com a função objetivo apresentada na equação (3.7) e as equações dos preditores, a lei de controle pode ser determinada minimizando-se:

$$u = (Gu + y_l - w)^T (Gu + y_l - w) + \lambda u^T u \tag{3.21}$$

A seqüência de referência é expressa por:

$$w = \begin{bmatrix} w(k+1) \\ w(k+2) \\ \vdots \\ w(k+N) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

A equação (3.21) pode ser escrita como: $J = \frac{1}{2} u^T H u + b^T u + f_0$ (3.23)

Em que: $H = 2(G^T G + \lambda I)$

$b^T = 2(y_l - w)^T G$

$f_0 = (y_l - w)^T (y_l - w)$

A minimização de J assume que não há restrições nos controles futuros:

$$u = -H^{-1} b = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - y_l) \tag{3.24}$$

O sinal de controle que é realmente enviado ao processo é o primeiro elemento do vetor u devido a estratégia de controle de horizonte móvel, então tem-se:

$$\Delta u(k) = d^T (w - y_l) \tag{3.25}$$

em que, $d^T = [1, 0, \cdots, 0](G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$ que corresponde à primeira linha da matriz $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$.

Fica claro que o esforço computacional do controlador preditivo é significativamente maior em relação aos controladores clássicos devido a grandes quantidades de cálculos matriciais até o cálculo do sinal de controle.

No âmbito deste trabalho, trata-se o caso de uma entrada e uma saída, com os parâmetros do modelo da planta constantes, enquanto o controlador estiver ativo, isto é, o caso adaptativo não é tratado, e o modelo da planta é dado conforme a equação (3.6).

3.3. Conclusões

Este capítulo apresentou um breve histórico dos controladores preditivos, bem como suas principais vantagens e desvantagens. O controlador preditivo generalizado foi abordado detalhadamente, pois será a base para a aplicação do modelo de *Hammerstein* nesta tese. Portanto, a estrutura do algoritmo proposto baseia-se na do GPC.

4. CONTROLADOR PREDITIVO NÃO LINEAR BASEADO NO MODELO DE *HAMMERSTEIN*

Quando o processo não linear atua numa faixa de operação muito ampla ou a não linearidade do processo é suficientemente forte para tornar o desempenho do controlador inadequado para atender os requisitos estabelecidos, a utilização de um modelo não linear deve ser considerada (Rawlings, 2000).

Nos últimos anos, houve um grande crescimento nas aplicações industriais de controle preditivo não linear NMPC, que se apresenta como uma estratégia de controle bastante promissora para diversas áreas da engenharia (Qin & Badgwell, 2003). O principal motivo deste crescimento é o baixo desempenho de controladores lineares em processos com não linearidades ou em plantas que trabalham numa ampla faixa de operação.

Os algoritmos de controle preditivo usam um modelo do processo, ou seja, dentro do controlador existe um modelo matemático que é usado para predição dos efeitos das variáveis manipuladas e perturbações sobre as variáveis controladas.

O emprego de Controladores Preditivos baseados no Modelo de *Hammerstein* tem motivado inúmeras pesquisas e aplicações, como pode ser visto em (Casillo et al., 2008a,b,c; Zhao et al., 2008; Ding et al., 2007; Smith et al., 2007; Santos, 2003).

Para que se possa obter uma lei de controle que minimize um critério quadrático para o modelo não linear e se obtenha uma solução analítica para o problema, deve ser adotado algum método que possibilite a solução para o controle preditivo não linear. Uma das soluções é utilizar técnicas de linearização.

4.1. Controlador Preditivo SISO sem Restrições baseado no Modelo de *Hammerstein* (Linearização por Aproximação Quasilinear por Degrau de Tempo)

O Modelo de *Hammerstein* pode ser representado na sua forma paramétrica como:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-m}B(q^{-1})x(k-1) + C(q^{-1})\frac{\varepsilon(k)}{\Delta} \quad (4.1)$$

A Figura 4.1 mostra o diagrama de blocos do modelo do processo baseado no modelo de *Hammerstein*.

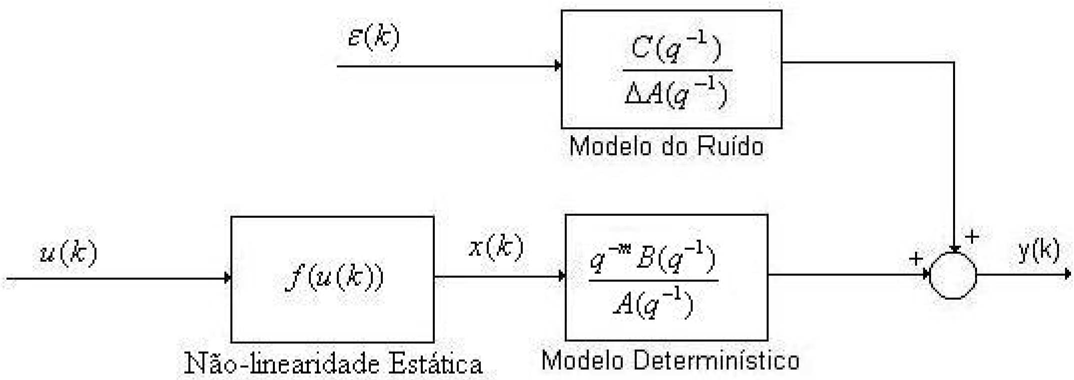

Figura 4.1 – Diagrama de blocos do modelo do processo baseado no Modelo de *Hammerstein*

Quando não se dispõe de maiores informações a respeito da natureza da não linearidade, a saída do bloco estático não linear pode ser aproximada por uma expansão polinomial do tipo:

$$x(k-1) = \gamma_1 u(k-1) + \gamma_2 u^2(k-1) + \gamma_3 u^3(k-1) + \cdots + \gamma_l u^l(k-1) \quad (4.2)$$

que pode ser escrito como

$$x(k-1) = [\gamma_1 + \gamma_2 u(k-1) + \gamma_3 u^2(k-1) + \cdots + \gamma_l u^{l-1}(k-1)]u(k-1) \quad (4.3)$$

que se torna

$$x(k-1) = \left(\sum_{j=1}^{l} \gamma_j u^{j-1}(k-1)\right) u(k-1) \quad (4.4)$$

Substituindo a equação (4.4) na equação (4.1):

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-m}B(q^{-1})\left(\sum_{j=1}^{l}\gamma_j u^{j-1}(k-1)\right)u(k-1) + C(q^{-1})\frac{\varepsilon(k)}{\Delta} \tag{4.5}$$

então

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-m}[b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots + b_{nb}q^{-nb}][\gamma_1 + \gamma_2u(k-1) + \gamma_3u^2(k-1) + \cdots +$$

$$+\gamma_l u^{l-1}(k-1)]u(k-1) + C(q^{-1})\frac{\varepsilon(k)}{\Delta} \tag{4.6}$$

Resolvendo a multiplicação tem-se:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-m}[b_0\gamma_1 + b_0\gamma_2u(k-1) + b_0\gamma_3u^2(k-1) + \cdots + b_0\gamma_l u^{l-1}(k-1) +$$

$$+b_1q^{-1}\gamma_1 + b_1q^{-1}\gamma_2u(k-1) + b_1q^{-1}\gamma_3u^2(k-1) + \cdots + b_1q^{-1}\gamma_l u^{l-1}(k-1) +$$

$$+b_2q^{-2}\gamma_1 + b_2q^{-2}\gamma_2u(k-1) + b_2q^{-2}\gamma_3u^2(k-1) + \cdots + b_2q^{-2}\gamma_l u^{l-1}(k-1) + \cdots +$$

$$+b_{nb}q^{-nb}\gamma_1 + b_{nb}q^{-nb}\gamma_2u(k-1) + b_{nb}q^{-nb}\gamma_3u^2(k-1) + \cdots + b_{nb}q^{-nb}\gamma_l u^{l-1}(k-1)]\cdot$$

$$u(k-1) + C(q^{-1})\frac{\varepsilon(k)}{\Delta} \tag{4.7}$$

Que pode ser reescrito na forma:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-m}\left(\sum_{i=0}^{nb}\sum_{v=-1}^{l-1}\left(\sum_{j=1}^{l} b_i q^{-i}\gamma_j u^{j-i-v}(k-1)\right)\right)u(k-1) + C(q^{-1})\frac{\varepsilon(k)}{\Delta} \tag{4.8}$$

em que:

nb é o grau do polinômio $B(q^{-1})$

l é o grau de não linearidade do sistema

Definindo:

$$\overline{b}_i(q^{-i},u) = \left(\sum_{v=-1}^{l-1}\left(\sum_{j=1}^{l} b_i q^{-i}\gamma_j u^{j-i-v}(k-1)\right)\right) \tag{4.9}$$

obtém-se o seguinte modelo:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-m}\sum_{i=0}^{nb}\overline{b}_i(q^{-i}u)u(k-1) + C(q^{-1})\frac{\varepsilon(k)}{\Delta} \tag{4.10}$$

Fazendo,

$$\overline{B}(q^{-1},u) = \sum_{i=0}^{nb}\overline{b}_i q^{-1}(u) = \overline{b}_0 + \overline{b}_1(q^{-1},u) + \overline{b}_2(q^{-2},u)^2 + \cdots + \overline{b}_{nb}(q^{-nb},u)^{nb} \tag{4.11}$$

Como o modelo mais adequado para garantir erro de regime nulo a mudança em degrau na referência é o ARIMAX não linear, então o modelo torna-se:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-m}\overline{B}(q^{-1},u)u(k-1) + C(q^{-1})\frac{\varepsilon(k)}{\Delta} \tag{4.12}$$

ou ainda

$$\Delta A(q^{-1})y(k) = q^{-m}\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u(k-1) + C(q^{-1})\varepsilon(k) \tag{4.13}$$

Fazendo,

$$\Delta A(q^{-1}) = \tilde{A}(q^{-1}) = (1-q^{-1})A \tag{4.14}$$

tem-se finalmente, o seguinte modelo:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-m}\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u(k-1) + C(q^{-1})\varepsilon(k) \tag{4.15}$$

Esse modelo é denominado NARIMAX (*Nonlinear AutoRegressive Integrated Moving Average model with eXogenous inputs*)quasilinear por degrau de tempo. Neste modelo, os coeficientes do polinômio $\overline{B}(q^{-1},u)$ dependem de valores passados de $u(k)$ que são conhecidos e considerados constantes até o instante seguinte, após a atualização dos seus valores.

4.1.1. GPC baseado do Modelo de *Hammerstein* Quasilinear (caso com ruído branco)

Para $C(q^{-1}) = 1$ tem-se:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-m}\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u(k-1) + \varepsilon(k) \tag{4.16}$$

Para implementar o controle preditivo, tendo-se obtido os polinômios $\tilde{A}(q^{-1})$ e $\overline{B}(q^{-1},u)$, deve-se calcular uma seqüência de variações futuras do sinal de controle, $\Delta u(k), \Delta u(k+1), \cdots$, de forma que a saída da planta fique próxima da referência futura $w(k+i)$ nos instantes dentro do horizonte de interesse, determinado pela escolha de $N1$ e NY. Isto é obtido minimizando a seguinte função custo:

$$J = \sum_{i=N1}^{NY} \delta(i)\left[\hat{y}(k+i) - w(k+i)\right]^2 + \sum_{i=1}^{NU} \lambda(i)\left[\Delta u(k+i-1)\right]^2 \tag{4.17}$$

em que:

$N1$ é o horizonte mínimo de predição;

NY é o horizonte máximo de predição;

NU é o horizonte máximo de controle;

$w(k+i)$ é o sinal de referência futuro;

$\delta(i)$ e $\lambda(i)$ são as constantes de ponderação sobre o sinal de erro e sinal de controle respectivamente;

$\hat{y}(k+i)$ é a predição i-passos à frente.

Fazendo $N1 \leq i \leq NY$ a fim de minimizar a função objetivo acima, a aproximação a ser empregada permite que se use o GPC com os mesmos conceitos de resposta livre e resposta forçada, mesmo sendo uma planta não linear.

Determina-se a saída $y(k)$ para i-passos à frente com o objetivo de separar a dependência de $y(k+i)$ das informações passadas e futuras. Da equação (4.16):

$$y(k+i) = \frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1) + \frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})}\varepsilon(k+i) \tag{4.18}$$

A melhor estimativa de $y(k+i)$ satisfaz a condição:

$$\hat{y}(k+i) = \min \varepsilon\left\{\left[y(k+i) - w\right]^2\right\}$$

cuja solução é: $\hat{y}(k+i) = \varepsilon\left\{y(k+i)\right\}$.

Com o objetivo de separar a dependência de $y(k+i)$ das informações passadas e futuras, introduz-se a seguinte identidade polinomial, conhecida como equação diofantina:

$$\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_i(q^{-1}) + q^{-1}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \tag{4.19}$$

com

$$E_i(q^{-1}) = e_{i,0} + e_{i,1}q^{-1} + e_{i,2}q^{-2} + \cdots + e_{i,i-1}q^{-(i-1)}$$

$$F_i(q^{-1}) = f_{i,0} + f_{i,1}q^{-1} + f_{i,2}q^{-2} + \cdots + f_{i,na}q^{-(na-1)}$$

Substituindo a equação (4.19) na equação (4.18), tem-se:

$$y(k+i) = \frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1) + \left[E_i(q^{-1}) + q^{-1}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\right]\varepsilon(k+i) \tag{4.20}$$

que pode ser escrita na forma:

$$y(k+i)=\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1)+E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i)+\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\varepsilon(k) \qquad (4.21)$$

da equação (4.16), GPC baseado no modelo de *Hammerstein*, tem-se que:

$$\varepsilon(k)=\tilde{A}(q^{-1})y(k)-q^{-m}\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u(k-1) \qquad (4.22)$$

substituindo a equação (4.22) na equação (4.21), obtém-se:

$$y(k+i)=\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1)+E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i)+\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}(\tilde{A}(q^{-1})y(k)-$$

$$-q^{-m}\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u(k-1)) \qquad (4.23)$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$y(k+i)=\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u(k+i-m-1)\left[\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})}-q^{-1}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\right]+E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i)+F_i(q^{-1})y(k)$$

tendo em vista que: $\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})}-q^{-1}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}=E_i(q^{-1})$, então:

$$y(k+i)=\overline{B}(q^{-1},u)E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1)+F_i(q^{-1})y(k)+E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i) \qquad (4.24)$$

O grau de $E_i(q^{-1})=i-1$, então o termo referente ao ruído, refere-se ao futuro de forma que a melhor predição de $y(k+i)$ é:

$$\hat{y}(k+i)=G_i(q^{-1},u)\Delta u(k+i-m-1)+F_i(q^{-1})y(k) \qquad (4.25)$$

sendo:

$$G_i(q^{-1},u)=\overline{B}(q^{-1},u)E_i(q^{-1}) \qquad (4.26)$$

Considerando que o sistema tem um tempo morto igual a m períodos de amostragem, a saída do sistema será influenciada pela entrada $u(k)$ após $(m+1)$ períodos. Então os valores da função objetivo $N1$, NY e NU podem ser definidos como: $N1=m+1$, $NY=m+N$ e $NU=N$.

Considerando a equação do preditor, o conjunto sub-ótimo de predição no intervalo acima desejado é da forma:

$$\begin{array}{llll}
\hat{y}(k+m+1)= & G_{m+1} & \Delta u(k)+ & F_{m+1}y(k) \\
\hat{y}(k+m+2)= & G_{m+2} & \Delta u(k+1)+ & F_{m+2}y(k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hat{y}(k+m+N) & G_{m+N} & \Delta u(k+N-1)+ & F_{m+N}y(k)
\end{array} \qquad (4.27)$$

que pode ser escrito na seguinte forma matricial compacta:

$$\hat{y} = G(u)u + H_i(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) + F_i(q^{-1})y(k) \qquad (4.28)$$

Em que:

$$Y = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+m+1) \\ \hat{y}(k+m+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+m+N) \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} \quad G(u) = \begin{bmatrix} g_0(u) & 0 & \cdots & 0 \\ g_1(u) & g_0(u) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1}(u) & g_{N-2}(u) & \cdots & g_0(u) \end{bmatrix}$$

$$F(q^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{m+1}(q^{-1}) \\ F_{m+2}(q^{-1}) \\ \vdots \\ F_{m+N}(q^{-1}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H(q^{-1}, u) = \begin{bmatrix} \left[H_{m+1}(q^{-1}) - h_0\right]q^{-1} \\ \left[H_{m+2}(q^{-1}) - h_0 - h_1 q^{-1}\right]q^{-2} \\ \vdots \\ \left[H_{m+N}(q^{-1}) - h_0 - h_1 q^{-1} - \cdots - h_{N-1}q^{-(N-1)}\right]q^{N} \end{bmatrix}$$

O vetor de resposta livre (y_l) é dado por:

$$y_l = H(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) + F(q^{-1})y(k) \qquad (4.29)$$

O vetor de resposta forçada (y_f) é dado por:

$$y_f = \begin{bmatrix} g_0(u) & 0 & \cdots & 0 \\ g_1(u) & g_0(u) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1}(u) & g_{N-2}(u) & \cdots & g_0(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} = G(u)u \qquad (4.30)$$

de forma que a resposta completa do sistema é dada por:

$$\hat{y} = G(u)u + y_l \qquad (4.31)$$

Considerando a função objetivo, determina-se a lei de controle. Inicialmente, reescrevemos a função objetivo na forma:

$$J = (G(u)u + w - y_l)^T (G(u)u + w - y_l) + \lambda(u)^T u \qquad (4.32)$$

em que:

$$w = \left[w(k+m+1) \quad w(k+m+2) \quad \cdots \quad w(k+m+N) \right]^T \qquad (4.33)$$

a equação (4.32) pode ser escrita na forma:

$$J = \frac{1}{2}u^T H u + b^T u + f_0 \qquad (4.34)$$

em que:

$$H = 2(G(u)^T G(u) + \lambda I)$$

$$b^T = 2(w - y_l)^T G(u)$$

$$f_0 = (w - y_l)^T (w - y_l)$$

A minimização da função objetivo, assumindo que não há restrições no sinal de controle, é obtida através do gradiente de J em relação a u e igualando este a zero, produzindo a seguinte expressão para a lei de controle:

$$u = -H^{-1}b = (G(u)^T G(u) + \lambda I)^{-1} G(u)^T (w - y_l) \tag{4.35}$$

Baseado na estratégia dos controladores preditivos, o sinal de controle que é enviado ao processo é o primeiro elemento do vetor u:

$$\Delta u(k) = d^T (w - y_l) \tag{4.36}$$

em que d^T, é a primeira linha da matriz $d^T = [1, 0, \cdots, 0](G(u)^T G(u) + \lambda I)^{-1} G(u)^T$.

4.1.2. GPC baseado no Modelo de *Hammerstein* Quasilinear (Caso com Ruído Colorido)

Considere agora o GPC não linear com o ruído colorido, e que o polinômio do ruído $C(q^{-1})$ da equação que descreve o modelo do processo, acima mencionado, não é unitário. Considere o modelo do GPC *Hammerstein* anteriormente mencionado:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-m}\overline{B}(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) + C(q^{-1})\varepsilon(k) \tag{4.37}$$

A saída predita $i-$passos à frente com $i \geq m$ é dada por:

$$y(k+i) = \frac{\overline{B}(q^{-1}, u)}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1) + \frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\varepsilon(k+i) \tag{4.38}$$

Considere a seguinte equação Diofantina:

$$\frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_i(q^{-1}) + q^{-1}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \tag{4.39}$$

Com grau $\left\{E_i(q^{-1})\right\} = i - 1$ e grau $\left\{F_i(q^{-1})\right\} =$ grau $\left\{\tilde{A}(q^{-1})\right\} - 1$.

Substituindo a equação (4.39) na equação (4.38), tem-se:

$$y(k+i) = \frac{\overline{B}(q^{-1}, u)}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1) + \left[E_i(q^{-1}) + q^{-1}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\right]\varepsilon(k+i) \tag{4.40}$$

ou ainda:

$$y(k+i) = \frac{\overline{B}(q^{-1}, u)}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1) + E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i) + \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\varepsilon(k) \tag{4.41}$$

da equação (4.37), tem-se que:

$$\varepsilon(k)=\frac{\tilde{A}(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k)-\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}\Delta u(k-m-1) \tag{4.42}$$

substituindo a equação (4.42) na equação (4.41):

$$y(k+i)=\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1)+E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i)+\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\left[\frac{\tilde{A}(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k)-\right.$$

$$\left.\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}\Delta u(k-m-1)\right] \tag{4.43}$$

Após manipulações matemáticas a equação (4.43) resulta em:

$$y(k+i)=\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}\left[\frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}-q^{-i}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\right]\Delta u(k+i-m-1)+\frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k)-E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i)$$

Da identidade polinomial apresentada em (4.39) tem-se que:

$$\frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}-q^{-1}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}=E_i(q^{-1}) \tag{4.44}$$

então,

$$y(k+i)=\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1)+\frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k)+E_i(q^{-1})\varepsilon(k+i) \tag{4.45}$$

Observa-se na equação anterior, que todo o ruído está no futuro. Então o valor esperado para $y(k+i)$ é:

$$\varepsilon\{y(k+i)\}=\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1)+\frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) \tag{4.46}$$

tem-se então, a equação do preditor na forma:

$$\hat{y}(k+i)=\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1})\Delta u(k-m-i-1)+\frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) \tag{4.47}$$

Utilizando agora a seguinte equação diofantina:

$$\frac{1}{C(q^{-1})}=M_i(q^{-1})+q^{-i}\frac{N_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \tag{4.48}$$

com grau $\{M(q^{-1})\}=i-1$ e grau $\{N(q^{-1})\}=n_c-1$, e substituindo na equação (4.47), tem-se:

$$\hat{y}(k+i)=\left[M_i(q^{-1})+q^{-i}\frac{N_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right][\overline{B}(q^{-1},u)E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1)+F_i(q^{-1})y(k) \tag{4.49}$$

a equação (4.49) pode ser reescrita como:

$$\hat{y}(k+i) = M_i(q^{-1})E_i(q^{-1})\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u(k+i-m-1) + M_i(q^{-1})F_i(q^{-1})y(k) + \\ N_i(q^{-1})\left[\frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k-i)\right] \tag{4.50}$$

Da equação (4.47) tem-se que:

$$\hat{y}(k) = q^{-i}\hat{y}(k+i) = \frac{\overline{B}(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1})\Delta u(k-m-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k-i) \tag{4.51}$$

então:

$$\hat{y}(k+i) = M_i(q^{-1})E_i(q^{-1})\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u(k+i-m-1) + \left[M_i(q^{-1})F_i(q^{-1}) + N_i(q^{-1})\right]y(k) \tag{4.52}$$

Definindo:

$$G_i(q^{-1},u) = M_i(q^{-1})E_i(q^{-1})\overline{B}(q^{-1},u) \tag{4.53}$$

$$F_i'(q^{-1}) = M_i(q^{-1})F_i(q^{-1}) + N_i(q^{-1}) \tag{4.54}$$

obtém-se a seguinte equação do preditor:

$$\hat{y}(k+i) = G_i(q^{-1},u)\Delta u(k+i-m-1) + F_i'(q^{-1})y(k) \tag{4.55}$$

Observe que esta equação é similar a equação (4.25), isto é, a equação de predição correspondente ao caso em que $C(q^{-1}) = 1$. Portanto, a partir de então utiliza-se o mesmo procedimento realizado anteriormente.

Quando $C(q^{-1}) = 1$, tem-se que $M_i(q^{-1}) = 1$ e $N_i(q^{-1}) = 0$, de forma que:

$$G_i(q^{-1},u) = E_i(q^{-1})\overline{B}(q^{-1},u) \tag{4.56}$$

$$F_i'(q^{-1}) = F_i(q^{-1}) \tag{4.57}$$

A função objetivo mostrada na equação (4.17) será minimizada por uma seqüência de ações de controle futuras e considerando que o sistema tem um tempo morto igual a m períodos de amostragem, conseqüentemente, a saída do sistema será influenciada pela entrada $u(k)$ após $m+1$ períodos. Portanto, o horizonte mínimo de predição será: $N1 = m+1$, $NY = m+N$ e $NU = N$.

O conjunto de predições sub-ótimas dentro do intervalo de predição é:

$$\begin{array}{rcccc} \hat{y}(k+m+1) = & G_{m+1}\Delta u(k) & + & F'_{m+1}y(k) \\ \hat{y}(k+m+2) = & G_{m+2}\Delta u(k+1) & + & F'_{m+2}y(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{y}(k+m+N) = & G_{m+N}\Delta u(k+N-1) & + & F'_{m+N}y(k) \end{array} \tag{4.58}$$

O conjunto de predições mostrado na equação anterior pode ser escrito na forma matricial como:

$$y = G(u)u + H(q^{-1},u)\Delta u(k-1) + F'(q^{-1})y(k) \qquad (4.59)$$

Em que:

$$Y = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+m+1) \\ \hat{y}(k+m+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+m+N) \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} \quad G(u) = \begin{bmatrix} g_0(u) & 0 & \cdots & 0 \\ g_1(u) & g_0(u) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1}(u) & g_{N-2}(u) & \cdots & g_0(u) \end{bmatrix}$$

$$F'(q^{-1}) = \begin{bmatrix} F'_{m+1}(q^{-1}) \\ F'_{m+2}(q^{-1}) \\ \vdots \\ F'_{m+N}(q^{-1}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H(q^{-1},u) = \begin{bmatrix} \left[H_{m+1}(q^{-1}) - h_0\right]q^{-1} \\ \left[H_{m+2}(q^{-1}) - h_0 - h_1 q^{-1}\right]q^{-2} \\ \vdots \\ \left[H_{m+N}(q^{-1}) - h_0 - h_1 q^{-1} - \cdots - h_{N-1}q^{-(N-1)}\right]q^{N} \end{bmatrix}$$

De forma similar ao caso anterior, o Vetor de Resposta Livre (y_l) e de Resposta Forçada (y_f), respectivamente, é dado por:

$$y_l = F'(q^{-1})y(k) + H(q^{-1},u)\Delta u(k-1) \qquad (4.60)$$

$$y_f = \begin{bmatrix} g_0(u) & 0 & \cdots & 0 \\ g_1(u) & g_0(u) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1}(u) & g_{N-2}(u) & \cdots & g_0(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} = G(u)u \qquad (4.61)$$

Da mesma forma como no caso anterior, pode-se afirmar que a resposta completa do sistema é dada por:

$$\hat{y} = G(u)u + y_l \qquad (4.62)$$

Estas predições quando utilizadas na mesma função objetivo no caso de ruído branco, após minimização produz a mesma lei de controle, isto é:

$$u = -H^{-1}b = (G(u)^T G(u) + \lambda I)^{-1} G(u)^T (w - y_l)$$

O sinal de controle que é enviado ao processo é o primeiro elemento do vetor u:

$$\Delta u(k) = d^T (w - y_l) \qquad (4.63)$$

em que d^T é a primeira linha da matriz $d^T = [1, 0, \cdots, 0](G(u)^T G(u) + \lambda I)^{-1} G(u)^T$.

Supondo a referência w constante em todo o horizonte de predição e utilizando o vetor $M=[1,1,\cdots,1]^T$, então:

$$\Delta u(k)=d^T\left[w-H\Delta u(k)-Fy(k)\right] \tag{4.64}$$

ou ainda,

$$\Delta u(k)=d^TMw-d^TH\Delta u(k)-d^TFy(k) \tag{4.65}$$

Observe que, d^TM corresponde ao somatório dos elementos da primeira linha da matriz $(G^TG+\lambda I)^{-1}G^T$.

A equação (4.65) pode ainda ser escrita como:

$$\left[1+d^TH\right]\Delta u(k)=d^TMw-d^TFy(k) \tag{4.66}$$

tal que, $\Delta u(k)=\left[\dfrac{1}{1+d^TH}\right]\left[d^TMw-d^TFy(k)\right]$.

em que: $d^T=1xN$, $H=Nx1$, $M=Nx1$, $w=1xN$ e $Fy=Nx1$.

Em termos de diagrama de blocos, a equação acima pode ser representada na seguinte forma:

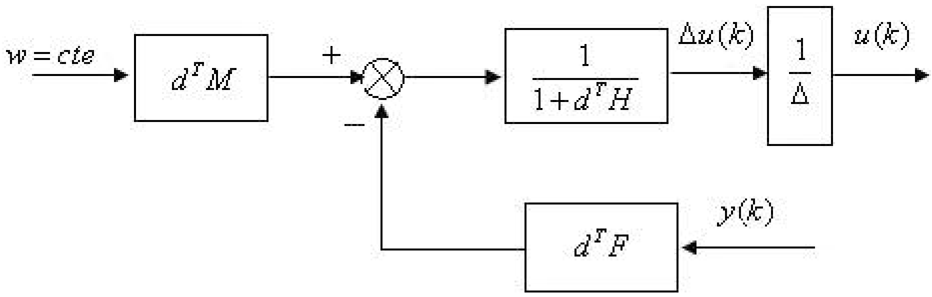

Figura 4.2 - Diagrama de blocos da lei de controle do GPC linear para uma referência constante ao longo do horizonte de predição

Observe que, $\dfrac{1}{\Delta}\Delta u(k)=u(k)$ uma vez que $\dfrac{1}{1-q^{-1}}\Delta u(k)=u(k)$, ou ainda $\Delta u(k)=u(k)-u(k-1)$.

No caso em que o ruído é colorido, uma outra possibilidade para o cálculo da predição, pode ser obtida considerando os sinais de entrada e saída filtrados, isto é:

$$y^f(k)=\frac{1}{C(q^{-1})}y(k) \text{ e } u^f(k)=\frac{1}{C(q^{-1})}u(k) \tag{4.67}$$

tal que o modelo global resultante torne-se:

$$\tilde{A}(q^{-1})y^f(k) = q^{-m}\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u^f(k-1) + \varepsilon(k) \tag{4.68}$$

Pode-se concluir que a utilização desta abordagem permite calcular a predição através do mesmo procedimento usado no caso em que $C(q^{-1}) = 1$. O sinal predito $\hat{y}^f(k+i)$ obtido desta forma deverá que ser filtrado por $C(q^{-1})$ com o objetivo de se recuperar $\hat{y}(k+i)$.

4.1.3. Exemplo do GPC baseado no Modelo de *Hammerstein* Quasilinear por Degrau de Tempo

Considerando a planta de 2ª ordem descrita pelo seguinte modelo:

$$y(k) = \frac{0.207 - 0.1464q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1} + 0.2385q^{-2}}x(k-1)$$

e a não linearidade estática de 3ª ordem: $x(k-1) = 1.3409u(k-1) + 0.0303u^3(k-1)$

A equação do sinal de controle é obtida considerando $m = 0$, horizonte de controle e de predição igual a 10 e $\lambda = 5$.

$A(q^{-1}) = 1 - 0.8q^{-1} + 0.2385q^{-2}$

$B(q^{-1}) = 0.207 - 0.1464q^{-1}$

$x(k-1) = \left[1.3409 + 0.0303u^2(k-1)\right]u(k-1)$

Aplicando ao modelo de *Hammerstein* quasilinear por degrau de tempo:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-m}\overline{B}(q^{-1},u)\Delta u(k-1)$$

tem-se que $\tilde{A}(q^{-1}) = \Delta A(q^{-1})$ e $\Delta = 1 - q^{-1}$, então:

$$\tilde{A}(q^{-1}) = (1 - q^{-1})(1 - 0.8q^{-1} + 0.2385q^{-2})$$

resolvendo a multiplicação:

$$\tilde{A}(q^{-1}) = 1 - 1.8q^{-1} + 1.0385q^{-2} - 0.2385q^{-3}$$

tem-se também que $\overline{B}(q^{-1},u) = B(q^{-1})x(k-1)$ e fazendo a entrada do sistema unitária, ou seja $u(k) = 1$, obtém-se:

$$\overline{B}(q^{-1},u) = [0.207 - 0.1464q^{-1}][1.3409 + 0.0303u^2(k-1)]u(k-1)$$

$$\overline{B}(q^{-1},u) = [\underbrace{0.2775 + 0.0063u^2(k-1)}_{\overline{b}_0(u)} - \underbrace{0.1963q^{-1} - 0.0044q^{-1}u^2(k-1)}_{\overline{b}_1(q^{-1},u)}]u(k-1)$$

então:

$$\overline{B}(q^{-1},u)=[\overline{b}_0(u)-\overline{b}_1(q^{-1},u)]u(k-1)$$

Através da equação diofantina, calcula-se os polinômios $E_i(q^{-1})$ e $F_i(q^{-1})$ a fim de obter as predições $\hat{y}(k+i)$.

$$\tilde{A}(q^{-1})E_i(q^{-1})+q^{-1}F_i(q^{-1})=1$$

$E_1(q^{-1})=1$ $\quad$ $F_1(q^{-1})=1.8-1.0385q^{-1}+0.2385q^{-2}$

$E_2(q^{-1})=1+1.8q^{-1}$ $\quad$ $F_2(q^{-1})=2.2015-1.6308q^{-1}+0.4293q^{-2}$

$E_3(q^{-1})=1+1.8q^{-1}+2.2015q^{-2}$ $\quad$ $F_3(q^{-1})=2.3319-1.8570q^{-1}+0.5251q^{-2}$

Calculam-se os valores da matriz G, sabe-se que:

$$G_i(q^{-1},u)=E_i(q^{-1})\overline{B}(q^{-1},u)$$

$$G_1(q^{-1},u)=\left[\overline{b}_0(u)-\overline{b}_1(q^{-1},u)\right]$$

$$G_2(q^{-1},u)=\overline{b}_0(u)+\left[1.8\overline{b}_0(q^{-1},u)-\overline{b}_1(q^{-1},u)\right]-1.8\overline{b}_1(q^{-2},u)$$

$$G_3(q^{-1},u)=\overline{b}_0(u)+\left[1.8\overline{b}_0(q^{-1},u)-\overline{b}_1(q^{-1},u)\right]+\left[2.2015\overline{b}_0(q^{-2},u)-1.8\overline{b}_1(q^{-2},u)\right]-$$
$$2.2015\overline{b}_1(q^{-3},u)$$

As saídas preditas são dadas por:

$$\hat{y}(k+i)=G_i(q^{-1},u)\Delta u(k+i-m-1)+F_i(q^{-1})y(k)$$

então:

$$\hat{y}(k+1)=\left[\overline{b}_0(u)-\overline{b}_1(q^{-1},u)\right]\Delta u(k)+1.8-1.0385q^{-1}+0.2385q^{-2}$$

$$\hat{y}(k+2)=\left[\overline{b}_0(u)+\left[1.8\overline{b}_0(q^{-1},u)-\overline{b}_1(q^{-1},u)\right]-1.8\overline{b}_1(q^{-2},u)\right]\Delta u(k+1)+2.2015-$$
$$1.6308q^{-1}+0.4293q^{-2}$$

$$\hat{y}(k+3)=\left[\overline{b}_0(u)+\left[1.8\overline{b}_0(q^{-1},u)-\overline{b}_1(q^{-1},u)\right]+\left[2.2015\overline{b}_0(q^{-2},u)-1.8\overline{b}_1(q^{-2},u)\right]-\right.$$
$$\left.2.2015\overline{b}_1(q^{-3},u)\right]\Delta u(k+2)+2.3319-1.8570q^{-1}+0.5251q^{-2}$$

Que pode ser escrita matricialmente como:

$$\begin{bmatrix}\hat{y}(k+1)\\ \hat{y}(k+2)\\ \hat{y}(k+3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{b}_0(u) & 0 & 0\\ \left[1.8\overline{b}_0(q^{-1},u)-\overline{b}_1(q^{-1},u)\right] & \overline{b}_0(u) & 0\\ \left[2.2015\overline{b}_0(q^{-2},u)-1.8\overline{b}_1(q^{-2},u)\right] & \left[1.8\overline{b}_0(q^{-1},u)-\overline{b}_1(q^{-1},u)\right] & \overline{b}_0(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta u(k)\\ \Delta u(k+1)\\ \Delta u(k+2)\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} -\overline{b}_1(q^{-1},u)\Delta u(k-1)+1.8y(k)-1.0385y(k-1)+0.2385y(k-2) \\ -1.8\overline{b}_1(q^{-2},u)\Delta u(k-1)+2.2015y(k)-1.6308y(k-1)+0.4293y(k-2) \\ -2.2015\overline{b}_1(q^{-3},u)\Delta u(k-1)+2.3319y(k)-1.8570y(k-1)+0.5251y(k-2) \end{bmatrix}$$

Considerando $\lambda = 5$, calcula-se $(G(u)^T G(u)+\lambda I)^{-1} G(u)^T$

O sinal de controle que é enviado ao processo é o 1º elemento do vetor u, que é dado por: $\Delta u(k) = d^T(w - y_l)$, em que d^T é a primeira linha da matriz $(G(u)^T G(u)+\lambda I)^{-1} G(u)^T$, sendo aplicado um degrau unitário. Observa-se na Figura 4.3 uma comparação entre o GPC Linear e o GPC baseado no modelo de *Hammerstein* quasilinear, fica claro o melhor desempenho e menor tempo de estabilização do GPC *Hammerstein*, as saídas para as referências variáveis convergem.

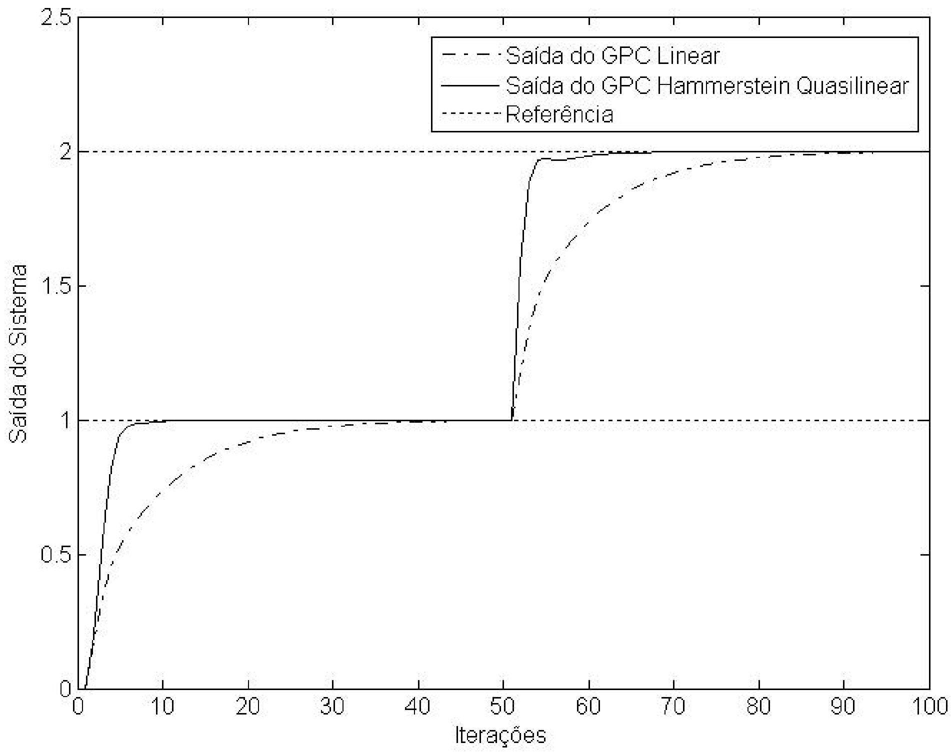

Figura 4.3 - Saída do GPC baseado no modelo de *Hammerstein* com linearização quasilinear por degrau de tempo

A Figura 4.4 mostra a comparação entre os esforços de controle do GPC linear e o GPC baseado no modelo de *Hammerstein* quasilinear observa-se que o esforço do GPC linear é bem maior que o do GPC *Hammerstein*.

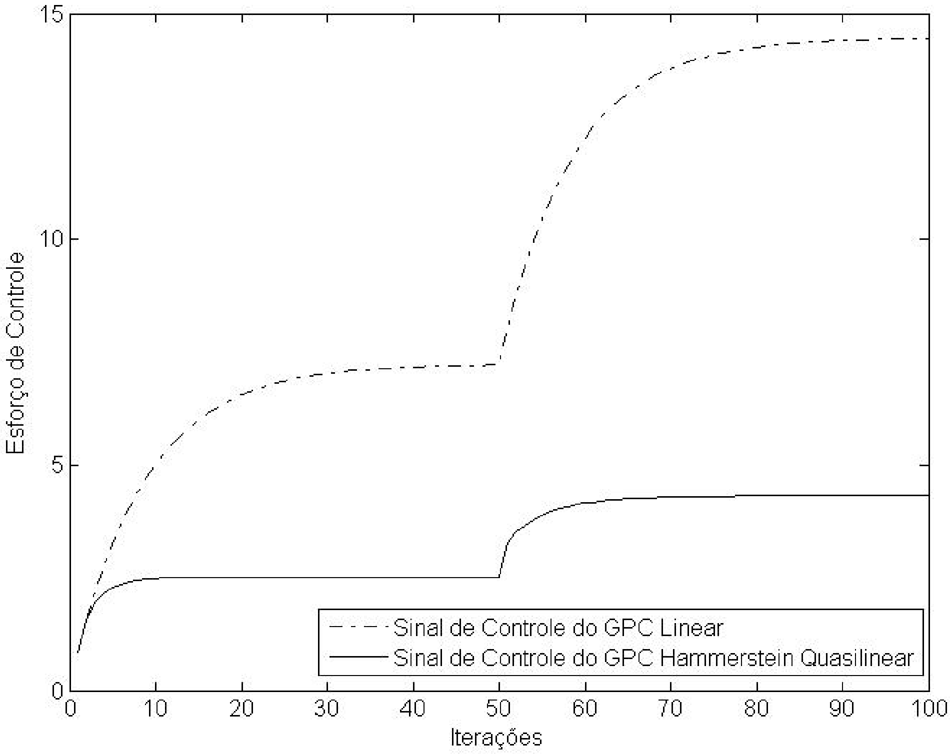

Figura 4.4 - Sinal de controle do GPC *Hammerstein* com linearização quasilinear por degrau de tempo

4.2. Conclusões

Este capítulo apresentou o Controle Preditivo Não Linear baseado no modelo de *Hammerstein*. Devido a não linearidade, fez-se necessário o uso de técnicas de linearização para a obtenção da lei de controle explícita. Foi abordado o método de linearização por aproximação quasilinear por degrau de tempo, que se mostrou bastante eficiente. Apresentou-se um exemplo de aplicação desse método e pode-se concluir que apesar das aproximações serem sub-ótimas, os resultados foram satisfatórios.

Ainda existe um grande horizonte a ser explorado a fim de se obter melhores resultados. No capítulo seguinte são apresentados métodos de compensação do erro de predição, que aparece devido ao fato de calcularmos $\hat{y}(k+i)$ usando $\overline{B}(q^{-1},u)$.

5. GPC HAMMERSTEIN QUASILINEAR COM COMPENSAÇÃO DO ERRO DE PREDIÇÃO

Este capítulo apresenta uma das propostas deste trabalho, que visa dar uma contribuição ao desenvolvimento e implementação de controladores preditivos não lineares baseados no modelo de *Hammerstein*, com o objetivo de apresentar melhorias no desempenho do GPC Não Linear, de forma a minimizar o erro de predição existente, quando se aumenta o horizonte de predição. Serão apresentadas duas abordagens: o Termo de Compensação e suas propriedades que é apresentado por (Fontes, 2002); e a Compensação Iterativa apresentada por (Ângelo, 2005 e Fontes, 2007). Neste caso, estas foram adaptadas para o modelo de *Hammerstein*.

5.1. GPC *Hammerstein* com Termo de Compensação

A presente abordagem utiliza um modelo não linear (modelo de *Hammerstein*) com um termo de compensação, cujo objetivo é corrigir o erro de predição devido à aproximação do modelo quasilinear por degrau de tempo, NARIMAX, utilizado no controlador preditivo apresentado por (Goodhart et al., 1994).

O erro de predição é obtido através do cálculo de predições i-passos à frente do modelo não linear (modelo de *Hammerstein*) e do modelo quasilinear, aplicando-se uma seqüência de sinais aleatórios nas entradas. Com o erro de predição, é possível obter um termo que compense este erro gerado nesta aproximação, quando se aumenta o horizonte de predição. O termo de compensação é adicionado a cada horizonte de predição, melhorando o desempenho do controlador em questão.

Após o processo de linearização do modelo, equação (4.15), existe um erro de predição em que, aumentando-se o horizonte de predição o erro aumenta também, e para compensar este erro, foram aplicadas ao controlador, duas abordagens de compensação a fim de melhorar o desempenho do GPC em questão.

O algoritmo e os resultados obtidos com um sistema de segunda ordem não linear são apresentados neste capítulo. É importante observar que a abordagem apresentada tem seu grau de importância e interesse, devido ao fato que não existe uma solução analítica ótima para o problema. Assim, o esforço de se achar uma melhor solução, embora sub-ótima, é justificado.

5.1.1. Termo de Compensação e Propriedades

O termo de compensação consiste em encontrar um modelo linear, media móvel, tal que a ordem e parâmetros dependam do erro e horizonte de predição.

Considere o termo $L_i(q^{-1})$, que corresponde ao termo de compensação linearizado da relação de não linearidade existente entre $x(\cdot)$ e $\varepsilon_i(\cdot)$, em que, $x(\cdot)$ é a seqüência não linear de entrada e $\varepsilon_i(\cdot)$ é o vetor de erro de predição para o horizonte i.

A Figura 4.3 mostra o diagrama do modelo linearizado $L_i(q^{-1})$.

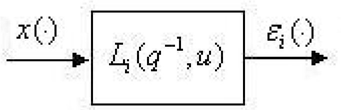

Figura 5.1 - Diagrama de representação do Termo de Compensação

O termo $L_i(q^{-1})$ é um polinômio da forma:

$$L_i(q^{-1}) = l_{0,i} + l_{1,i}q^{-1} + l_{2,i}q^{-2} + \cdots + l_{nl,i}q^{-nl} \tag{5.1}$$

A ordem e os parâmetros do termo de compensação dependem do erro e do horizonte de predição e seus parâmetros são determinados de forma a minimizar a variância do erro de predição. Portanto, usa-se o seguinte modelo linear media móvel:

$$\varepsilon_i(k) = L_i(q^{-1})x(k) \tag{5.2}$$

Os parâmetros $l_{j,i}$ com $j = 1,\cdots,n_l$ são determinados utilizando-se o algoritmo dos mínimos quadrados (Åström & Wittenmak, 1995).

O erro de predição no instante de tempo k, referente ao horizonte i é dado por:

$$\varepsilon_i(k) = y(k+i) - \hat{y}(k+i) \tag{5.3}$$

em que:

$y(k+i)$ é a saída do sistema não linear;

$\hat{y}(k+i)$ é a predição i-passos à frente obtida do modelo quasilinear, com informações até o instante k.

O polinômio $L_i(q^{-1})$ corresponde a um termo de compensação dinâmico, desse modo, tem-se que $L_i(1) = 0$, o que não modificará o ganho estático do modelo compensado. Com isso, é possível concluir que:

$$\sum_{j=0}^{nl} l_{j,i} = 0 \,, \forall i \in N \tag{5.4}$$

Deve ser escolhida uma ordem para o termo de compensação que satisfaça o critério de Akaike[2] (Akaike, 1974). Levando em conta o fato do grau do polinômio $\tilde{A}(q^{-1})$ ser $(na+1)$, tem-se, de acordo com (Fontes, 2002), a seguinte estrutura do termo de compensação:

$$L_i(q^{-1}) = l_{0,i} + l_{1,i}q^{-i} + l_{2,i}q^{-(i+1)} + \cdots + l_{(na-1+i),i}q^{-(na-1+i)} \tag{5.5}$$

Considerando então o modelo apresentado em (4.15) cuja representação dinâmica $i-$passos à frente para $i \geq 1$, baseada no modelo quasilinear por degrau de tempo compensado:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k+i) = q^{-m}\left[\overline{B}(q^{-1},u) + L_i(q^{-1})\right]\Delta u(k+i-1) + C(q^{-1})\varepsilon(k+i) \tag{5.6}$$

O polinômio $L_i(q^{-1})$ corresponde a um termo de compensação dinâmico, que compensa o erro de predição, e o grau deste polinômio depende do horizonte de predição.

---

[2] O critério de *Akaike* é uma das melhores técnicas conhecidas para escolha da melhor ordem, em que o modelo é testado para um determinado conjunto de dados em um processo de identificação de um sistema dinâmico (Akaike, 1974).

5.1.2. GPC *Hammerstein* Monovariável e sem Restrições baseado no Modelo Quasilinear por Degrau de Tempo Compensado

Igualmente ao algoritmo GPC, o Controlador Preditivo Generalizado Não linear Compensado (GPCNC), calcula uma seqüência de ações de controle de forma a minimizar uma função objetivo, multi-passo, definida sobre um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle. Considerando a função objetivo mostrada em (4.17):

$$J = \sum_{i=N1}^{NY} \delta(i)\left[\hat{y}(k+i) - w(k+i)\right]^2 + \sum_{i=1}^{NU} \lambda(i)\left[\Delta u(k+i-1)\right]^2$$

É importante observar que a predição da saída $i-$passos à frente, $\hat{y}(k+i)$ obtida pelo processo de predição quasilinear compensado, continua sendo uma predição sub-ótima uma vez que esta predição é uma aproximação da predição exata que seria obtida pelo modelo de *Hammerstein*. Entretanto, a predição quasilinear com termo de compensação, apresenta um menor erro em comparação com o GPC *Hammerstein*. Da mesma forma como mostrado anteriormente, para minimizar a função objetivo acima mencionada, deve ser obtido a predição sub-ótima da saída, $i-$passos à frente, no intervalo $N1 \le i \le NY$. Embora o modelo da planta seja não linear, a aproximação utilizada permite que seja usado o mesmo procedimento empregado pelo GPC. Com isto, o conceito de Resposta Livre e de Resposta Forçada é também utilizado para este caso.

A partir do exposto, podemos determinar a saída predita $i-$passos à frente:

$$y(k+i) = \frac{\left[\overline{B}(q^{-1},u) + L_i(q^{-1})\right]}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1) + \frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\varepsilon(k+i) \qquad (5.7)$$

Definindo:

$$\overline{B}_C(q^{-1},u) = \overline{B}(q^{-1},u) + L_i(q^{-1}) \qquad (5.8)$$

e substituindo a equação (5.8) em (5.7):

$$y(k+i) = \frac{\overline{B}_C(q^{-1},u)}{\tilde{A}(q^{-1})}\Delta u(k+i-m-1) + \frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}\varepsilon(k+i) \qquad (5.9)$$

Com o objetivo de separar a dependência de $y(k+i)$ das informações passadas e futuras, introduz-se a seguinte equação Diofantina:

$$\frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_i(q^{-1}) + q^{-i}\frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \tag{5.10}$$

Após as devidas manipulações matemáticas, como já foi apresentado na sessão anterior, obtém-se a seguinte equação do equação do preditor:

$$\hat{y}(k+i) = \frac{\overline{B}_C(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) \tag{5.11}$$

Utilizando agora a seguinte equação diofantina:

$$\frac{1}{C(q^{-1})} = M_i(q^{-1}) + q^{-i}\frac{N_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \tag{5.12}$$

e substituindo na equação (5.11), tem-se:

$$\hat{y}(k+i) = \left[M_i(q^{-1}) + q^{-i}\frac{N_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right]\left[\overline{B}_C(q^{-1},u)E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1) + F_i(q^{-1})y(k)\right] \tag{5.13}$$

a equação (5.13) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+i) = {} & M_i(q^{-1})E_i(q^{-1})\overline{B}_C(q^{-1},u)\Delta u(k+i-m-1) + M_i(q^{-1})F_i(q^{-1})y(k) + \\ & N_i(q^{-1})\left[\frac{\overline{B}_C(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-m-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k-i)\right]\end{aligned} \tag{5.14}$$

Da equação (5.11) tem-se que:

$$\hat{y}(k) = q^{-i}\hat{y}(k+i) = \frac{\overline{B}_C(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1})\Delta u(k-m-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k-i) \tag{5.15}$$

então:

$$\hat{y}(k+i) = M_i(q^{-1})E_i(q^{-1})\overline{B}_C(q^{-1},u)\Delta u(k+i-m-1) + \left[M_i(q^{-1})F_i(q^{-1}) + N_i(q^{-1})\right]y(k) \tag{5.16}$$

Definindo:

$$G_i(q^{-1},u) = M_i(q^{-1})E_i(q^{-1})\overline{B}_C(q^{-1},u) \tag{5.17}$$

$$F_i'(q^{-1}) = M_i(q^{-1})F_i(q^{-1}) + N_i(q^{-1}) \tag{5.18}$$

obtém-se a seguinte equação do preditor:

$$\hat{y}(k+i) = G_i(q^{-1},u)\Delta u(k+i-m-1) + F_i'(q^{-1})y(k) \tag{5.19}$$

quando $C(q^{-1}) = 1$, tem-se que $M_i(q^{-1}) = 1$ e $N_i(q^{-1}) = 0$ de forma que:

$$G_i(q^{-1},u) = E_i(q^{-1})\overline{B}_C(q^{-1},u) \tag{5.20}$$

$$F_i'(q^{-1}) = F_i(q^{-1}) \tag{5.21}$$

A função objetivo mostrada na equação (4.17) será minimizada por uma seqüência de ações de controle futuras e considerando que o sistema tem um tempo morto igual a m períodos de amostragem, conseqüentemente, a saída do sistema será influenciada pela entrada $u(k)$ após $m+1$ períodos. Portanto, o horizonte mínimo de predição será: $N1 = m+1$, $NY = m+N$ e $NU = N$.

O conjunto de predições sub-ótimas dentro do intervalo de predição é:

$$\begin{array}{rccc}
\hat{y}(k+m+1) = & G_{m+1}\Delta u(k) & + & F'_{m+1}y(k) \\
\hat{y}(k+m+2) = & G_{m+2}\Delta u(k+1) & + & F'_{m+2}y(k) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\hat{y}(k+m+N) = & G_{m+N}\Delta u(k+N-1) & + & F'_{m+N}y(k)
\end{array} \tag{5.22}$$

O conjunto de predições mostrado na equação anterior pode ser escrito na forma matricial como:

$$y = G(u)u + H(q^{-1},u)\Delta u(k-1) + F'(q^{-1})y(k) \tag{5.23}$$

De forma similar ao caso anterior, o vetor de resposta livre (y_l) é dado por:

$$y_l = F'(q^{-1})y(k) + H(q^{-1},u)\Delta u(k-1) \tag{5.24}$$

E o Vetor de Resposta Forçada (y_f) é dado por:

$$y_f = \begin{bmatrix} g_0(u) & 0 & \cdots & 0 \\ g_1(u) & g_0(u) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1}(u) & g_{N-2}(u) & \cdots & g_0(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} = G(u)u \tag{5.25}$$

Deste modo, pode-se afirmar que a resposta completa do sistema é dada por:

$$y = G(u)u + y_l \tag{5.26}$$

A lei de controle é obtida semelhantemente ao GPC. Deve-se observar que esta é uma solução sub-ótima, na medida em que o preditor é sub-ótimo. Assim, a lei de controle é dada por:

$$u = \left(G(u)^T G(u) + \lambda I\right)^{-1} G(u)^T (w - y_l) \tag{5.27}$$

Como mencionado anteriormente, o sinal de controle que é realmente enviado ao processo é o primeiro elemento do vetor u, devido à estratégia de controle de horizonte móvel, então:

$$\Delta u(k) = d^T (w - y_l) \qquad (5.28)$$

sendo d^T, a primeira linha da matriz $d^T = [1, 0, \cdots, 0](G(u)^T G(u) + \lambda I)^{-1} G(u)^T$.

5.1.3. Exemplo do Controlador Preditivo Generalizado baseado no Modelo de *Hammerstein* Compensado

Considerando a mesma planta de 2º ordem descrita pelo exemplo anterior:

$$y(k) = \frac{0.207 - 0.1464q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1} + 0.2385q^{-2}} x(k-1)$$

e a não linearidade estática de 3ª ordem: $x(k-1) = 1.3409u(k-1) + 0.0303u^3(k-1)$

O controlador preditivo baseado no modelo de *Hammerstein* com o termo de compensação é dado por:

$$y(k) = \frac{\overline{B}_C(q^{-1}, u)}{\tilde{A}(q^{-1})} \Delta u(k - d - 1) + \frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} e(k)$$

tem-se então que:

O polinômio $\tilde{A}(q^{-1}) \longrightarrow \tilde{A}(q^{-1}) = 1 - 1.8q^{-1} + 1.0385q^{-2} - 0.2385q^{-3}$

O polinômio $\overline{B}(q^{-1}, u) \longrightarrow$

$$\overline{B}(q^{-1}, u) = [0.207 - 0.1464q^{-1}][1.3409 + 0.0303u^2(k-1)]u(k-1)$$

$$\overline{B}(q^{-1}, u) = [\underbrace{0.2775 + 0.0063u(k-1)}_{\overline{b}_0(u)} - \underbrace{0.1963q^{-1} - 0.0044q^{-1}u(k-1)}_{\overline{b}_1(q^{-1}, u)}]u(k-1)$$

então:

$$\overline{B}(q^{-1}, u) = [\overline{b}_0(u) - \overline{b}_1(q^{-1}, u)]u(k-1)$$

Foram considerados os seguintes parâmetros de sintonia para o controlador preditivo: $N1 = 1$, $NY = NU = 10$ e $\lambda = 5$, utilizando estes parâmetros e a estrutura do termo de compensação apresentada em (5.5) tem-se que, os termos adicionais de compensação estimados, para $i = 1, 2, \cdots, 10$ obtidos através da minimização da variância do erro de predição pelo método dos mínimos quadrados são:

$$L_1(q^{-1}) = 0.0930 - 0.0930q^{-1}$$

$$L_2(q^{-1}) = 0.0837 - 0.0837q^{-2}$$

$$L_3(q^{-1}) = 0.0682 - 0.0682q^{-3}$$

$$L_4(q^{-1}) = 0.0542 - 0.0542q^{-4}$$

$$L_5(q^{-1}) = 0.0435 - 0.0435q^{-5}$$

$$L_6(q^{-1}) = 0.0364 - 0.0364q^{-6}$$

$$L_7(q^{-1}) = 0.0308 - 0.0308q^{-7}$$

$$L_8(q^{-1}) = 0.0267 - 0.0267q^{-8}$$

$$L_9(q^{-1}) = 0.0235 - 0.0235q^{-9}$$

$$L_{10}(q^{-1}) = 0.0214 - 0.0214q^{-10}$$

Utilizando estes resultados, como também os resultados da simulação do capítulo 4.1.3, para os mesmos parâmetros de ajustes, verifica-se através da Figura 5.2 que o controlador GPC baseado no modelo de *Hammerstein* com o termo de compensação apresenta um melhor desempenho em relação ao GPC baseado no modelo de *Hammerstein* sem o termo de compensação.

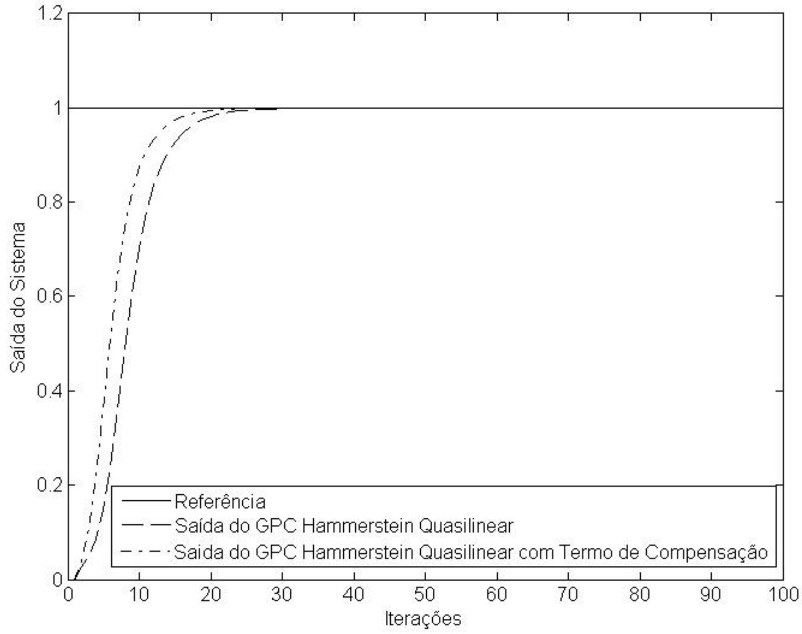

Figura 5.2 - Comparação entre a saída do GPC *Hammerstein* e a saída do GPC *Hammerstein* Compensado

São mostrados também na Figura 5.3 os sinais de controle gerados pelo controlador baseado no modelo quasilinear e pelo controlador baseado no modelo quasilinear compensado.

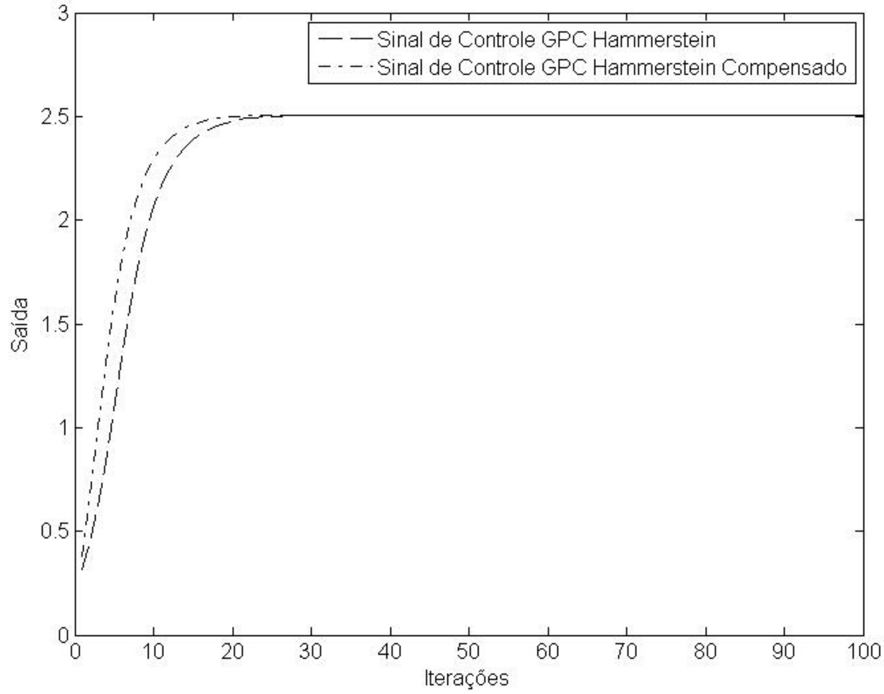

Figura 5.3 - Gráfico comparativo entre o sinal de controle gerado pelo GPC *Hammerstein* e o GPC *Hammerstein* Compensado

5.2. GPC *Hammerstein* com Compensação Iterativa

Esta abordagem utiliza um modelo não linear (modelo de *Hammerstein*) com compensação iterativa (a abordagem utilizada é a apresentada por Ângelo, 2005; Fontes, 2007), cujo objetivo é reduzir o erro de predição devido à aproximação do modelo quasilinear por degrau de tempo, NARIMAX, utilizado no controlador preditivo apresentado por (Goodhart et. al. 1994).

A compensação do erro de predição acima mencionada é realizada de forma iterativa, utilizando-se inicialmente, a seqüência de ações de controle futuras, dentro do horizonte de controle, calculada pelo algoritmo de controle preditivo quasilinear. Com esta seqüência, corrigi-se os coeficientes do modelo do preditor i-passos à frente. No processo de compensação iterativa, novas seqüências são calculadas utilizando-se os parâmetros corrigidos do preditor, em cada horizonte de predição, de forma a reduzir o erro de predição (Ângelo, 2005; Fontes, 2007).

Analogamente ao algoritmo GPC, o Controlador Preditivo Generalizado Não linear com Compensação Iterativa, calcula uma seqüência de ações de controle de forma a minimizar uma função objetivo multi-passos, definida sobre um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle. Todo o procedimento utilizado no GPC *Hammerstein* monovariável baseado no modelo Quasilinear por Degrau de Tempo é utilizado para a implementação deste algoritmo.

5.2.1. Compensação Iterativa

No algoritmo apresentado por (Goodhart, 1994) o modelo utilizado é o NARIMAX quasilinear por degrau de tempo, válido para o instante k. Em seu artigo, a predição da saída i-passos à frente, procedimento necessário e característico do controlador preditivo, é realizada utilizando-se o modelo quasilinear o qual considera os coeficientes $\tilde{a}_i(u)$, $i = 1,\cdots, grau(A(q^{-1}))$, dependendo somente dos valores conhecidos de u, isto é, até o instante $k-1$. Nesta abordagem, o modelo quasilinear considera os coeficientes $\overline{b}_i(u)$, $i = 1,\cdots, grau(B(q^{-1},u))$, sendo $B(q^{-1},u)$ dependente também dos valores conhecidos de u até o instante $k-1$. Conforme mencionado, a aproximação quasilinear, gera um erro de predição, que aumenta com o horizonte, degradando o desempenho do controlador. Este erro, no instante k, para uma predição i-passos à frente depende de $u(\cdot)$ e do horizonte. Observe que, na predição, a ação de controle conhecida até o instante $k-1$ é usada para o cálculo de $\overline{B}(q^{-1},u)$ e considerada constante (Casillo, et al. 2008c).

A solução analítica para o preditor nas bases utilizadas pelo algoritmo de controle preditivo não existe. É proposto então, o cálculo de forma iterativa de uma nova seqüência de ações futuras de controle, que reduz o erro de predição. No cálculo desta nova seqüência quasilinear, efetua-se, em cada iteração, a correção dos coeficientes $\overline{b}_i(u)$.

INPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO

Objetivando esclarecer o algoritmo anteriormente proposto, apresenta-se a sua implementação. Como mencionado, o referido algoritmo utiliza as ações de controle futuras para corrigir os parâmetros $\overline{b}_i(u)$ do polinômio $\overline{B}(q^{-1},u)$. Seja então Δu_k, o vetor de incrementos de ações de controle futuras para um dado instante k, inicialmente fornecido pelo controlador preditivo que se baseia no modelo quasilinear por degrau de tempo:

$$\Delta u_k = \left[\Delta u(k) \quad \Delta u(k+1) \quad \cdots \quad \Delta u(k+i) \quad \cdots \quad \Delta u(k+N)\right]^T \tag{5.29}$$

em que N é o horizonte de predição (Fontes, 2007).

Utilizando esta seqüência de incrementos, calcula-se as ações de controle futuras que irão corrigir os parâmetros de $\overline{B}(q^{-1},u)$ para o instante k, somando-se os referidos incrementos à ação de controle calculada no instante $(k-1)$. Seja então, a ação de controle para o instante $(k-1)$ definido por u_{k-1}. Assim, o vetor de ações de controle futuras para o instante k, u_k, é determinado como mostrado a seguir:

$$u_k = \left[u_{k-1}+\Delta u(k) \quad u_{k-1}+\Delta u(k)+\Delta u(k+1) \quad \cdots \quad u_{k-1}+\Delta u(k)+\Delta u(k+1)+\cdots+\Delta u(k+N)\right] \tag{5.30}$$

De forma semelhante, pode-se escrever que:

$$u_k = \left[u_k(k) \quad u_k(k+1) \quad \cdots \quad u_k(k+i) \quad u_k(k+N)\right] \tag{5.31}$$

em que:

$$u_k(k+i) = u_{k-1} + \Delta u(k) + \Delta u(k+1) + \cdots + \Delta u(k+i) \tag{5.32}$$

Com este vetor de controle, atualiza-se os coeficientes do polinômio $\overline{B}(q^{-1},u)$ e utiliza-se o algoritmo de controle preditivo não linear (modelo de *Hammerstein*) com compensação iterativa descrito na seção anterior para calcular um novo vetor de incrementos Δu_k (Casillo et al., 2009).

É interessante observar que o GPC *Hammerstein* com Compensação Iterativa calcula, de forma iterativa, utilizando a equação Diofantina, para cada nova predição, os polinômios $E_i(q^{-1},u)$ e $F_i(q^{-1},u)$. Com os novos valores de $E_i(q^{-1},u)$ e $F_i(q^{-1},u)$ determina-se a matriz $H_j(u)$ e, de forma semelhante ao algoritmo de controle quasilinear por degrau de tempo, calcula-se o novo vetor de incrementos de controle (Ângelo, 2005).

O processo iterativo repete-se até que sejam atingidas as condições de convergência descritas na seção a seguir. Lembrando que o princípio do horizonte móvel é utilizado e, portanto, depois que o algoritmo converge para um determinado instante k, somente o sinal de controle neste instante é enviado ao processo. Para o instante $k+1$, todo o procedimento citado nesta seção se repete (Fontes, 2007).

CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA E PARADA

O critério de convergência, apresentado em (Fontes, 2007), utilizado no algoritmo em questão é baseado na norma da variação do vetor Δu_k. O procedimento iterativo deverá continuar até que a variação entre a norma calculada na iteração $(r-1)$-ésima e aquela calculada na iteração r-ésima seja menor que um valor previamente estabelecido (CP). Desta forma, o critério de parada será representado da seguinte maneira:

$$\sqrt{\left(\Delta u_r - \Delta u_{r-1}\right)^T \cdot \left(\Delta u_r - \Delta u_{r-1}\right)} < CP \tag{5.33}$$

Dependendo da sintonia pretendida para o controlador preditivo, a taxa de convergência do algoritmo pode tornar-se pequena ou, até mesmo, o algoritmo não convergir. Objetivando dar garantia e viabilidade ao algoritmo de controle, adotou-se os seguintes critérios de parada, evitando assim que o algoritmo apresente falhas e que os resultados sejam os desejados:

- Caso a convergência se dê muito lentamente, um contador forçará a saída do resultado quando um determinado número de iterações for atingido. O valor a ser estabelecido para o contador dependerá do grau de melhoria desejado do algoritmo de controle preditivo não linear iterativo em face do quasilinear;
- Caso o algoritmo não convirja, numa dada iteração, de forma a não fornecer uma dada ação de controle, utiliza-se para este instante a ação

determinada do controle preditivo quasilinear por degrau de tempo (Fontes, 2007).

A cada instante *k*, o algoritmo de controle preditivo generalizado baseado no modelo de *Hammerstein* com compensação iterativa executa os seguintes passos:

1. Calcula os incrementos de controle da mesma maneira que o algoritmo de controle preditivo baseado no modelo de *Hammerstein* quasilinear por degrau de tempo;
2. Com os incrementos de controle, calcula as ações de controle futuras e atualiza os parâmetros de $\overline{B}(q^{-1},u)$, os quais variam de acordo com o horizonte de predição;
3. Com os novos parâmetros, efetua os cálculos dos novos $E_i(q^{-1},u)$ e $F_i(q^{-1},u)$ através da solução da equação Diofantina para se obter as novas predições da saída. Com essas predições obtém-se os novos incrementos de controle;
4. Repete-se o procedimento até que o critério de parada seja atingido de acordo com a equação 5.33.

5.2.2. Exemplo do Controlador Preditivo Generalizado baseado no Modelo de *Hammerstein* com Compensação Iterativa

Para este exemplo foi considerada a mesma planta de 2º ordem descrita no exemplo do GPC baseado no modelo de *Hammerstein* Quasilinear com Termo de Compensação:

$$y(k) = \frac{0.207 - 0.1464q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1} + 0.2385q^{-2}} x(k-1)$$

e a não linearidade estática de 3ª ordem: $x(k-1) = 1.3409u(k-1) + 0.0303u^3(k-1)$

Considera-se que o sistema não apresente tempo morto e os parâmetros de sintonia do controlador são: $NY = NU = 10$, $\lambda = 5$ e $CP = 10^{-10}$.

Considerou-se ainda o valor limite para cada instante k, de 50 iterações e o valor de referência unitário. Assim, tem-se que:

$$A(q^{-1}) = \left(1 - 0.8q^{-1} + 0.2385q^{-2}\right)$$

$$B(q^{-1}) = 0.207 - 0.1464q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1$$

Assim, faz-se inicialmente a seguinte aproximação:

$$\overline{B}(q^{-1},u) = \left[0.207 - 0.1464q^{-1}\right]\cdot\left[1.3409 + 0.0303u^2\right]u(k-1)$$

$$\overline{B}(q^{-1},u) = [\underbrace{0.2775 + 0.0063u^2(k-1)}_{\overline{b}_0(u)} - \underbrace{0.1963q^{-1} - 0.0044q^{-1}u^2(k-1)}_{\overline{b}_1(q^{-1},u)}]u(k-1)$$

então, $\overline{B}(q^{-1},u) = [\overline{b}_0(u) - \overline{b}_1(q^{-1},u)]u(k-1)$

Através da equação diofantina, calcula-se os polinômios $E_i(q^{-1})$ e $F_i(q^{-1})$ a fim de obter as predições $\hat{y}(k+i)$.

As saídas preditas são dadas por:

$$\hat{y}(k+i) = \tilde{G}_i(u)u + H(q^{-1},u)\Delta u(k) + F(q^{-1})y(k)$$

Conhecendo-se a matriz $G(u)$, obtém-se o vetor de incrementos de controle, que é dado por:

$$\Delta u = \left(G(u)^T G(u) + \lambda I\right)^{-1} G(u)^T (r - y_l)$$

Os gráficos das Figuras 5.4 e 5.5 a seguir, mostram a comparação da saída e do esforço de controle entre os algoritmos do controlador preditivo quasilinear e quasilinear com compensação iterativa respectivamente, quando um degrau unitário é aplicado. Observe que o GPC quasilinear com compensação iterativa apresenta melhor desempenho em comparação com o GPC sem compensação do erro de predição.

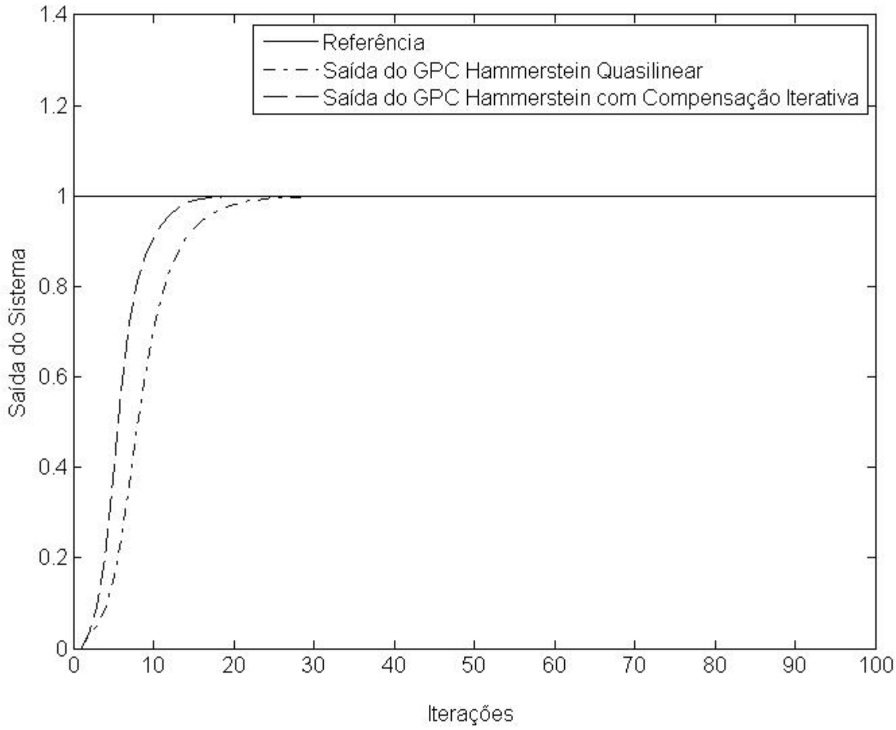

Figura 5.4 – Comparação entre as saídas de controle

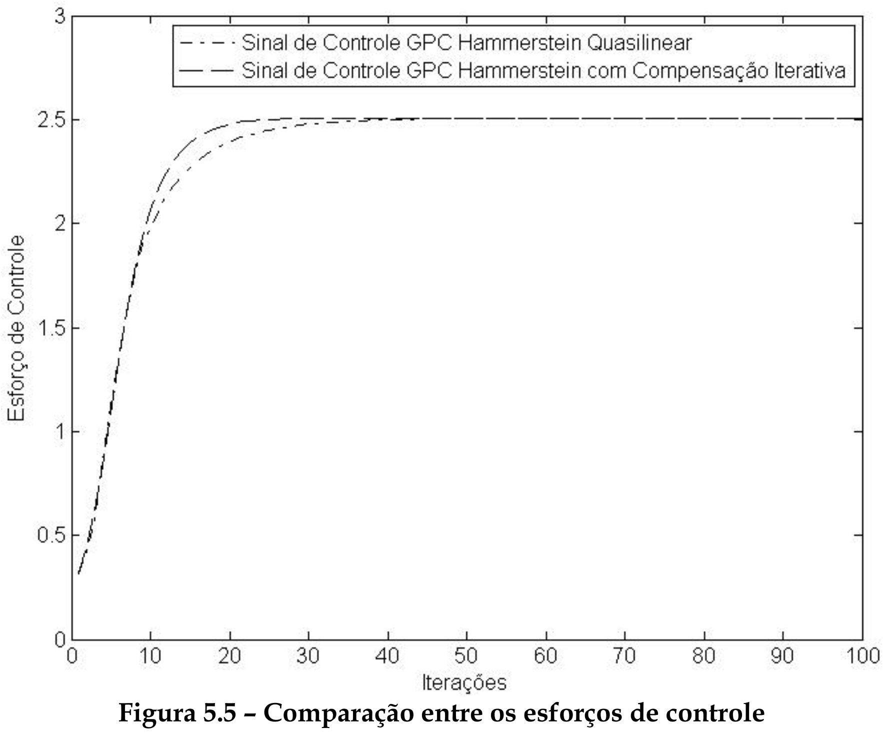

Figura 5.5 – Comparação entre os esforços de controle

Agora fez-se uma comparação entre os métodos de compensação do erro de predição (Termo de Compensação e Compensação Iterativa). A comparação foi realizada com a mesma planta, não linearidade estática e os mesmos parâmetros de sintonia do controlador.

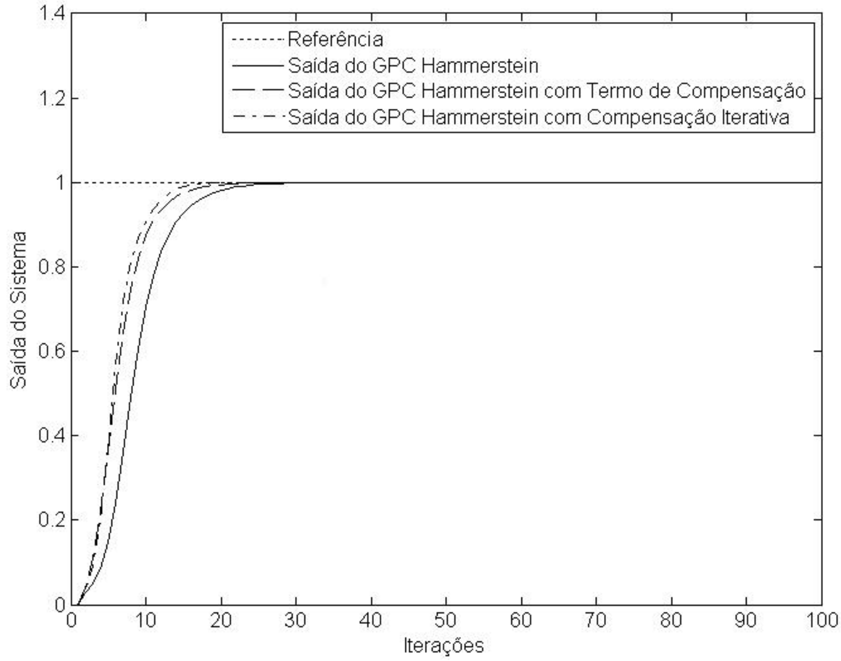

Figura 5.6 – Comparação entre as saídas de controle entre os métodos de compensação do erro de predição

Os gráficos das Figuras 5.6 e 5.7 mostram essas comparações, a saída do controlador GPC baseado no modelo de *Hammerstein* Quasilinear como também do esforço de controle dos dois métodos de compensação do erro de predição em questão.

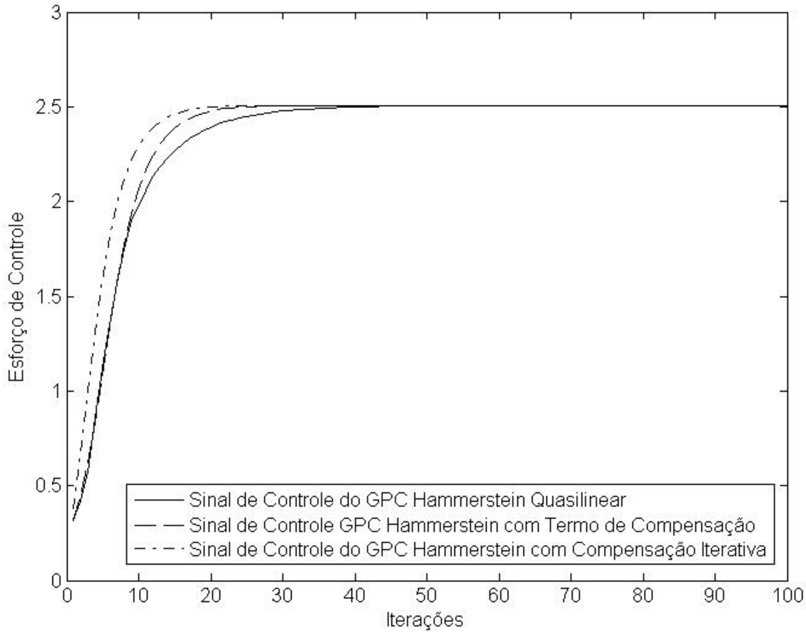

Figura 5.7 - Comparação dos esforços de controle entre os métodos de compensação do erro de predição

Fica claro no gráfico de comparação entre os esforços de controle, que o tempo de estabilização do esforço de controle do GPC *Hammerstein* com Compensação Iterativa é menor que o do GPC *Hammerstein* com Termo de Compensação, que por sinal também é menor que o do GPC *Hammerstein* sem compensação do erro de predição.

5.3. Análise do Erro de Predição

Uma forma de analisar a capacidade preditiva dos modelos preditores, é utilizando a relação que compara o desempenho do preditor real k-passos à frente $\hat{y}(k)_{real}$, com o desempenho do preditor quasilinear k-passos à frente $\hat{y}(k)_{quasilinear}$, isto é, calculando os erros de predição com os dados medidos até o instante k.

$$e(k) = \hat{y}(k)_{real} - \hat{y}(k)_{quasilinear} \tag{5.34}$$

Tomando o exemplo anterior, dado o modelo:

$$y(k) = \frac{0.207 - 0.1464q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1} + 0.2385q^{-2}} x(k-1)$$

e a não linearidade estática de ordem 3: $x(k-1) = 1.3409u(k-1) + 0.0303u^3(k-1)$

O modelo de saída resulta em:

$$y(k) = 0.8y(k-1) - 0.2385y(k-2) + \overline{b}_0 u(k-1) + \overline{b}_1 u^2(k-1)$$

foi implementada a predição com uma entrada $u = 0.5$ variando 5%, como mostra a Figura 5.8.

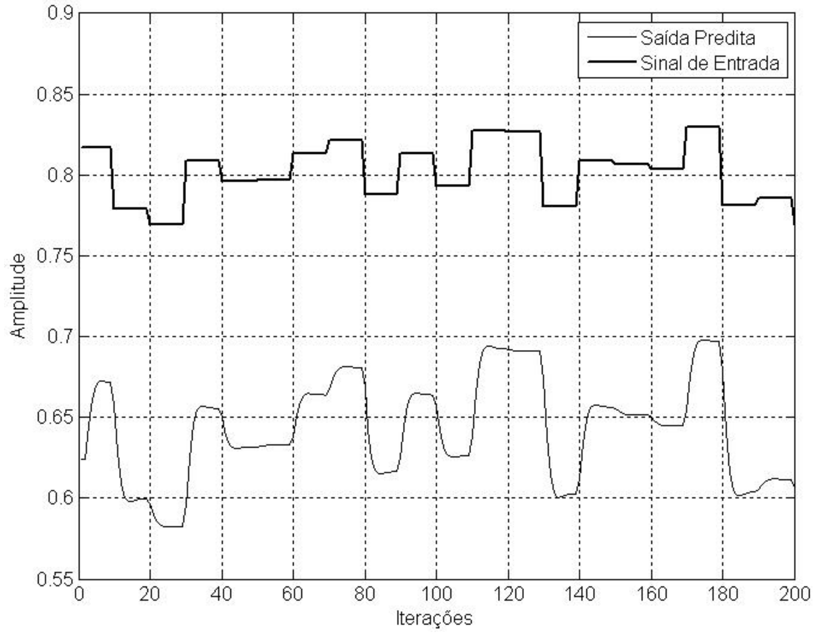

Figura 5.8 - Comparação entre o sinal de entrada e a saída predita para um horizonte de 200 iterações

Pode-se também fazer uma análise do erro de predição, através da variância, que é dada por:

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\left\{e^2\right\} - \mathrm{E}^2\left\{e\right\} \tag{5.35}$$

em que, $\mathrm{E}\left\{e^2\right\}$ é a esperança do erro médio quadrático, então:

$$\mathrm{E}\left\{e^2\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i^{\,2} \tag{5.36}$$

e

$$\mathrm{E}\left\{e\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i \tag{5.37}$$

para uma predição com $N = 30$ iterações, o erro médio entre o GPC *Hammerstein* e o GPC *Hammerstein* quasilinear é dado por:

$$\mathrm{E}_{quasi}\left\{e^2\right\} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} e_i^{\,2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}_{quasi}\left\{e^2\right\} = 0.0364$$

$$\mathrm{E}_{quasi}\left\{e\right\} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} e_i \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}_{quasi}\left\{e\right\} = 0.0951$$

$$\sigma^2{}_{quasilinear} = 0.0273$$

em relação ao erro médio entre o GPC *Hammerstein* e o GPC *Hammerstein* quasilinear com termo de compensação, tem-se:

$$\mathrm{E}_{termocomp}\left\{e^2\right\} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} e_i^{\,2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}_{termocomp}\left\{e^2\right\} = 0.0230$$

$$\mathrm{E}_{termocomp}\left\{e\right\} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} e_i \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}_{termocomp}\left\{e\right\} = 0.0059$$

$$\sigma^2{}_{compensado} = 0.0229$$

já em relação ao erro médio entre o GPC *Hammerstein* e o GPC *Hammerstein* quasilinear com compensação iterativa, obtém-se:

$$\mathrm{E}_{compiterativa}\left\{e^2\right\} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} e_i^{\,2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}_{compiterativa}\left\{e^2\right\} = 0.0214$$

$$\mathrm{E}_{compiterativa}\left\{e\right\} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} e_i \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}_{compiterativa}\left\{e\right\} = 0.0046$$

$$\sigma^2{}_{compensacaoiterativa} = 0.0214$$

Observa-se que a variância diminuiu, mostrando que a predição quasilinear com compensação iterativa apresenta melhores resultados do que a predição sem compensação do erro de predição, a variância do erro de predição com relação à predição quasilinear com o termo de compensação também mostrou-se satisfatória com relação à predição sem o referente termo. Conclui-se que tanto o termo de compensação como a compensação iterativa resultam em um melhor desempenho ao controlador.

5.4. Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas duas técnicas de compensação do erro de predição para o caso SISO e sem restrições. Estas técnicas, como apresentado anteriormente, consistem em minimizar o erro de predição gerado pela quasilinearização do modelo não linear.

Para a compensação do erro de predição, por meio do método da inserção do termo de compensação, foi necessária a obtenção de tal termo. Este termo é determinado, por meio de simulação, obtendo-se as predições i-passos à frente do modelo de *Hammerstein* e do modelo quasilinear, aplicando-se uma seqüência de sinais aleatórios nas entradas. Assim com o erro de predição, foi possível obter um termo que compense o erro gerado nesta aproximação quando se aumenta o horizonte de predição. Adiciona-se o termo de compensação a cada horizonte de predição, e como resultado obtém-se uma melhora no desempenho do controlador em questão. Já na compensação do erro de predição por meio do método da compensação iterativa, o referido algoritmo utiliza as ações de controle futuras para corrigir os parâmetros $\overline{b}_i(u)$ do polinômio $\overline{B}(q^{-1},u)$. Com a seqüência do vetor de incrementos de ações de controle futuras, corrigem-se os parâmetros de $\overline{B}(q^{-1},u)$ para o instante k, somando-se os referidos incrementos à ação de controle calculada no instante $(k-1)$. O processo iterativo se repete até que sejam atingidas as condições de convergência já mencionada.

No final deste capítulo foi realizada, através de um exemplo, uma comparação entre os dois métodos de compensação do erro de predição em comparação com o GPC Hammerstein sem compensação do erro de predição. Pode-se concluir que ambos os métodos são eficazes no que diz respeito a tempo de respostas e a diminuição do erro gerado pela aproximação quasilinear por degrau de tempo. A compensação iterativa mostrou-se mais eficiente, principalmente com relação ao tempo de respostas gerado pelo sistema.

6. PROVA DE ESTABILIDADE

A estabilidade, ou seja, a propriedade que assegura a um sistema sujeito à perturbações o retorno a seu estado de equilíbrio em tempo finito após cessada estas perturbações, é fundamental para a operação segura e eficiente de sistemas dinâmicos dentre os quais são destacados os sistemas industriais.

Por isso, assegurar a estabilidade de um sistema em malha fechada, mesmo na presença de um conjunto possível de incertezas, tornou-se um importante campo de estudo da teoria de controle. Além disso, garantir certas características de desempenho para o sistema sujeito a incertezas e em malha fechada tem implicações imediatas nos aspectos de segurança, qualidade do sinal de saída e economia do processo. Nesse sentido, em sistemas lineares, uma especificação bastante comum é a da localização dos pólos de malha fechada do sistema incerto em determinadas regiões do plano complexo.

6.1. Análise da Estabilidade do GPC baseado no Modelo de *Hammerstein* com Termo de Compensação: Caso SISO e sem Restrições.

Para a prova da estabilidade considerou-se o sistema realimentado mostrado na Figura 2.5 cujo modelo dinâmico é descrito pela equação 2.24. O objetivo desta prova é estudar a estabilidade, não para uma determinada não linearidade, mas sim para uma classe de não linearidades que satisfaz uma determinada condição de setor. Se obtiver sucesso mostrando que aquela origem é uniformemente assintoticamente estável para toda a não linearidade no setor, pode-se concluir que o sistema é absolutamente estável.

Teorema 6.1

Considere que a parte linear da planta (modelo de *Hammerstein*) é conhecida e representa todos os comportamentos dinâmicos desta e que existem duas constantes positivas k_1 e k_2. Assim, para garantir estabilidade do sistema em malha fechada deve-se assegurar que:

i. $0 \le (f_0(\theta) - 1 - k_1)\theta \le K\theta^2$;

ii. As raízes da equação característica $a(1 + d^T H)\Delta + (1 + k_1)z^{-1}d^T Fb = 0$ devem estar alocadas no interior do circulo de raio unitário;

iii. A condição $\dfrac{1}{k_2 - k_1} + \mathrm{Re}\left\{\dfrac{z^{-1}d^T Fb}{a(1 + d^T H)\Delta + (1 + k_1)z^{-1}d^T Fb}\right\} > 0$ para todo $|z| = 1$.

Prova do Teorema 6.1:

Para o estudo da estabilidade absoluta, baseada no modelo nominal de um sistema com dinâmica linear e uma não linearidade, foi aplicado o método do setor (Kalil, 2002) utilizando o Critério de *Popov* para o caso discreto (Ding, et al. 2003) e a definição de condição de setor apresentados no Capítulo 2.

Assim, suponha que $G(z)$ na Figura 6.1 é estável e que:

$$0 \le \Phi(\theta)\theta \le K\theta^2 \tag{6.1}$$

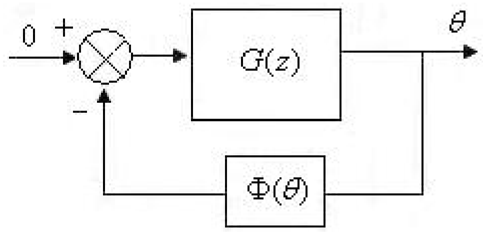

Figura 6.1 – Diagrama de blocos de uma malha com uma não linearidade estática

Supondo $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$, com $k_2 > k_1$ tal que $K = k_2 - k_1 > 0$, tem-se que, a condição *i.* pode ser reescrita como:

$$0 \le (f_0(\theta) - 1 - k_1)\theta \le (k_2 - k_1)\theta^2 \tag{6.2}$$

ou ainda

$$k_1\theta \le (f_0(\theta)-1)\theta \le k_2\theta^2 - k_1\theta^2 + k_1\theta \tag{6.3}$$

Então o sistema em malha fechada é estável se a não linearidade satisfaz a condição de desigualdade:

$$k_1\theta \le (f_0(\theta)-1)\theta \le K\theta^2 + k_1\theta \tag{6.4}$$

Para a prova de estabilidade e o estabelecimento das condições *i* e *ii*, será feita uma análise do GPC baseado no modelo de Hammerstein com termo de compensação.

Tendo em vista que a aproximação utilizada no GPC baseado no modelo *Hammerstein* (*NHGPC – Nonlinear Hammerstein Generalized Predictive Controller*) é quasilinear com a adição de um termo de compensação $L_i(q^{-1})$ no polinômio $B(q^{-1})$, em que i é horizonte de predição, conforme descrito anteriormente, permanecendo constante o polinômio $\tilde{A}(q^{-1})$, então $E_i(q^{-1})$ e $F_i(q^{-1})$, com $i = 1, \cdots, NY$, independem de $L_i(q^{-1})$, sendo estes determinados para um dado horizonte de predição. Assim, para um dado NY, $G_i(q^{-1})$ depende de $L_i(q^{-1})$ e conseqüentemente $\tilde{G}_i(q^{-1})$ e $H_i(q^{-1})$, descritos na seção anterior também dependem. Em decorrência deste fato, os elementos $d^T M$ e $d^T H$ explicitados na lei de controle apresentado no Capítulo 4 por meio da equação 4.66, dependem de $L_i(q^{-1})$ enquanto que $d^T F$ independe. No entanto, para um NY definido, os polinômios $d^T M$ e $d^T H$ têm estrutura e parâmetros conhecidos, tal que $1/(1+d^T H)$ pode ser representado por uma função de transferência em Z. Convém observar que o elemento $d^T M$, por estar fora da malha de controle, não influencia na análise de estabilidade.

O diagrama a ser utilizado na análise em questão do sistema de controle é conforme apresentado a seguir:

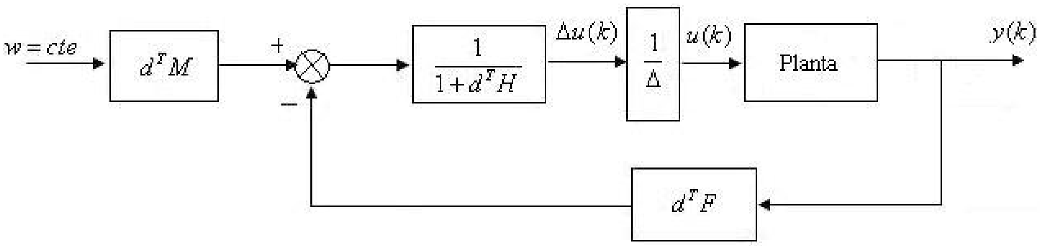

Figura 6.2 – Diagrama de blocos do sistema de controle

Como se pretende estabelecer as condições de estabilidade para o sistema de controle da Figura 6.2, na hipótese do modelo da planta ser o nominal, então, estas condições são referidas como condições de estabilidade nominal. Assim, o diagrama acima resulta em:

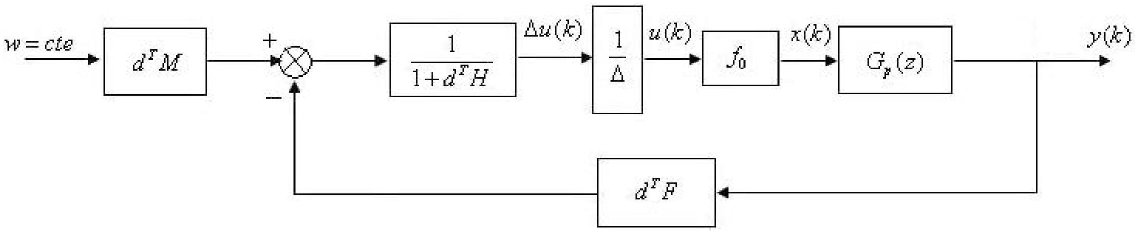

Figura 6.3 – Diagrama de blocos do sistema de controle com o modelo nominal da planta

Em que, f_0 é a não linearidade estática do modelo.
Definindo:

$$C(z) = \frac{1}{1 + d^T H} \tag{6.5}$$

$$P(z) = d^T M \tag{6.6}$$

$$Q(z) = d^T F \tag{6.7}$$

$$\Delta^* = (1 - z^{-1}) \tag{6.8}$$

O diagrama da Figura 6.3 resulta em:

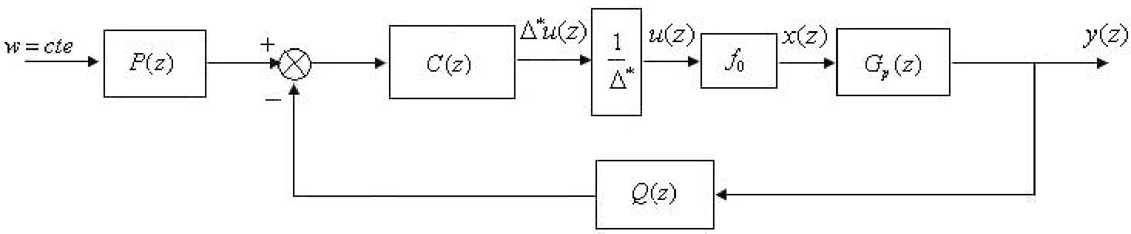

Figura 6.4 – Diagrama de blocos do sistema de controle em Z, para o controlador NHGPC

O diagrama acima pode ainda ser representado da seguinte forma:

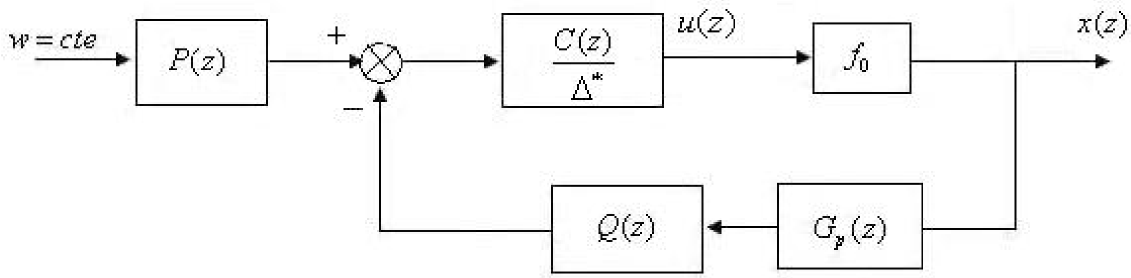

Figura 6.5 – Diagrama de blocos com $x(z)$ como Saída

Utilizando uma das propriedades de manipulação de diagrama de blocos, obtém-se o seguinte diagrama equivalente:

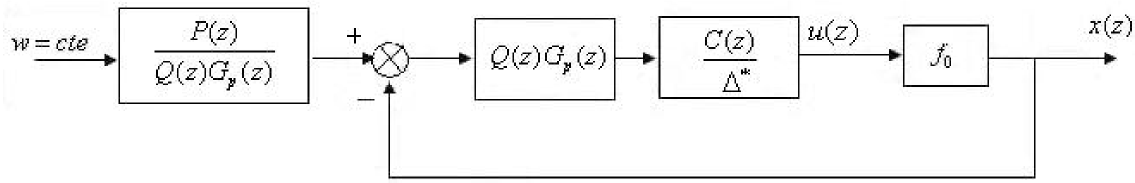

Figura 6.6 – Diagrama de blocos equivalente com $x(z)$ como Saída

Este diagrama pode ainda ser escrito na forma:

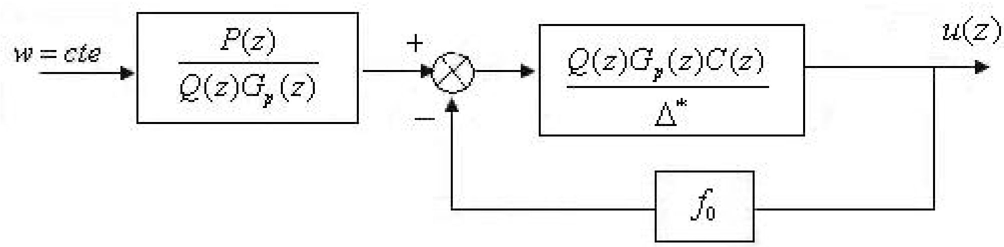

Figura 6.7 – Diagrama de Blocos com $u(z)$ como Saída

Definindo:

$$\frac{Q(z)G_p(z)C(z)}{\Delta^*} = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{6.9}$$

O diagrama da Figura 6.7 resulta em:

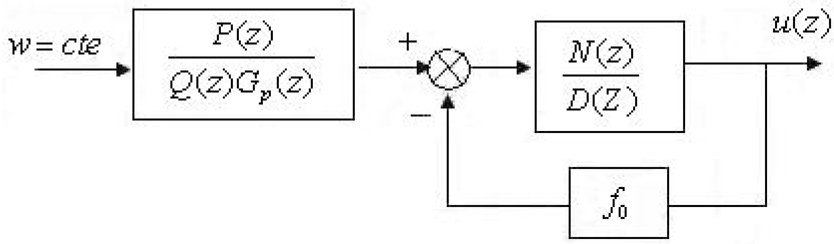

Figura 6.8 – Diagrama de blocos equivalente com $u(z)$ como Saída

Como a estabilidade depende das características da malha fechada do diagrama da Figura 6.8 e sem perda de generalidade, considera-se a referência $w = 0$ e o diagrama anterior pode ser reduzido à forma:

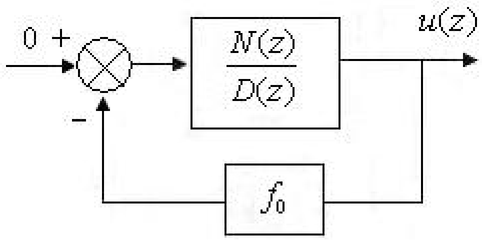

Figura 6.9 – Diagrama de blocos equivalente para efeito de Estabilidade

A equivalência entre o diagrama de blocos acima e o a seguir apresentado é verificada observando-se que as funções de transferência, dos diagramas são as mesmas, dada por:

$$G''(z) = \frac{N(z)}{D(z) + N(z) f_0} \tag{6.10}$$

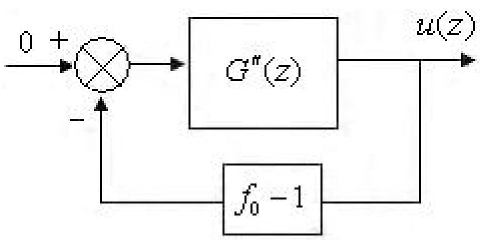

Figura 6.10 – Diagrama de blocos adaptado para efeito de estudo da Estabilidade

Substituindo as expressões definidas anteriormente, obtém-se finalmente o seguinte diagrama de blocos.

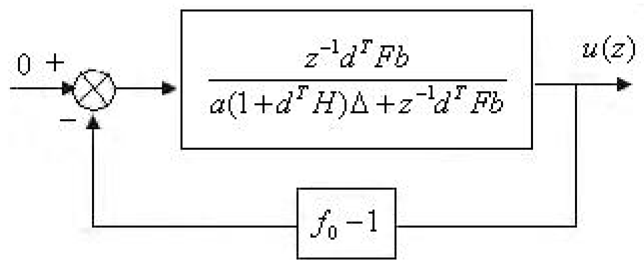

Figura 6.11 – Diagrama de blocos final equivalente para efeito de prova da estabilidade

Da equação (4.15), fazendo $C(q^{-1}) = 1$ e $x(k) = \Delta u(k-1)$. Tem-se:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d}\overline{B}(q^{-1},u)x(k) \tag{6.11}$$

que torna-se,

$$\tilde{A}(z)y(z) = z^{-1}\overline{B}(z)x(z)$$

então,

$$G_p(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{\overline{B}(z)}{\tilde{A}(z)}z^{-1} = \frac{b}{a}z^{-1} \tag{6.12}$$

Objetivando compatibilizar as condições do Critério de *Popov*, o diagrama da Figura 6.11 é modificado como segue:

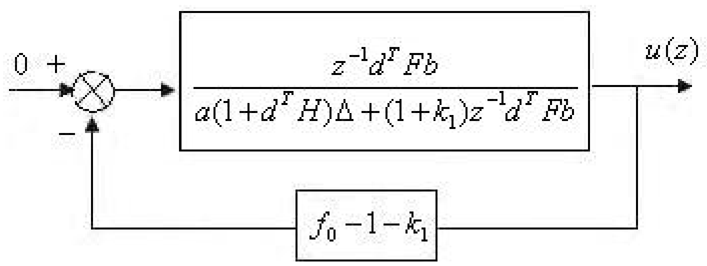

Figura 6.12 – Diagrama de blocos da malha de estabilidade com não linearidade estática em sua forma final

Sendo k_1 uma constante qualquer positiva. Este diagrama e o apresentado na Figura 6.11 apresentam a mesma função de transferência, tendo em conseqüência, a mesma equação característica.

Definindo

$$\theta = u \tag{6.13}$$

$$\Phi(\theta) = f_0(\theta) - 1 - k_1 \tag{6.14}$$

$$G(z) = \frac{z^{-1}d^T Fb}{a(1+d^T H)\Delta + (1+k_1)z^{-1}d^T Fb} \tag{6.15}$$

Observa-se que o digrama da Figura 6.12 corresponde ao diagrama usado no Critério de Popov como mostrado a Figura 6.1. Isto permite estabelecer as condições *i* e *ii* do teorema proposto.

A condição *iii* do Teorema 6.1 pode ser estabelecida utilizando o Lemma 1 apresentado em (Ding, et al. 2003) que assegura que o sistema em malha fechada é estável se:

$$(1/K) + \mathrm{Re}\{G(z)\} > 0 \text{, para todo } |z| = 1. \tag{6.16}$$

Sendo K e $G(z)$ conforme definidos anteriormente.

Deve-se observar que, em sendo definido o horizonte de predição, as condições *ii* e *iii* podem ser verificadas variando o fator de ponderação "lambda".

6.1.1. Exemplo de uma condição de setor para o Critério de *Popov*

Tomando o mesmo exemplo do Capítulo anterior, considerando a mesma planta de 2º ordem descrita no exemplo do GPC baseado no modelo de *Hammerstein* Quasilinear com Termo de Compensação:

$$y(k) = \frac{0.207 - 0.1464q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1} + 0.2385q^{-2}} x(k-1)$$

a mesma não linearidade estática de 3ª ordem $x(k-1) = 1.3409u(k-1) + 0.0303u^3(k-1)$.

Os parâmetros de sintonia do controlador são os mesmos, horizonte de predição e controle $NY = NU = 10$. Definindo $k_1 = 0.2$ e $k_2 = 2$, obtém-se o seguinte gráfico:

Avaliação da 1ª condição do Teorema 6.1: $0 \le (f_0(\theta) - 1 - k_1)\theta \le K\theta^2$.

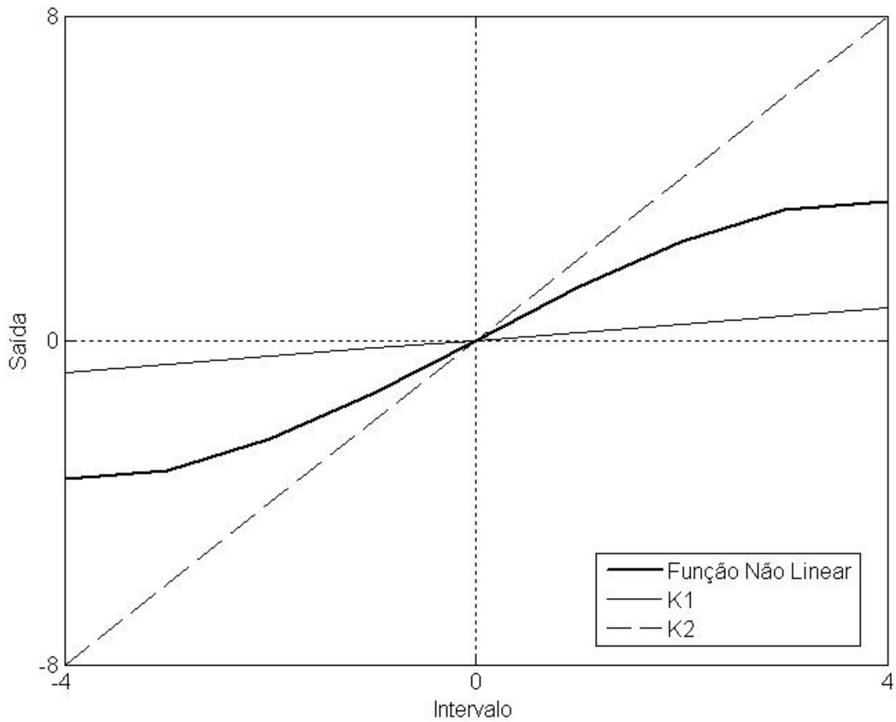

Figura 6.13 - Condição de Setor

Na Figura 6.13, observa-se a curva da função não linear pertencendo aos 1° e 3° quadrantes e as retas k_1 e k_2 delimitando o setor onde se enquadra a não linearidade.

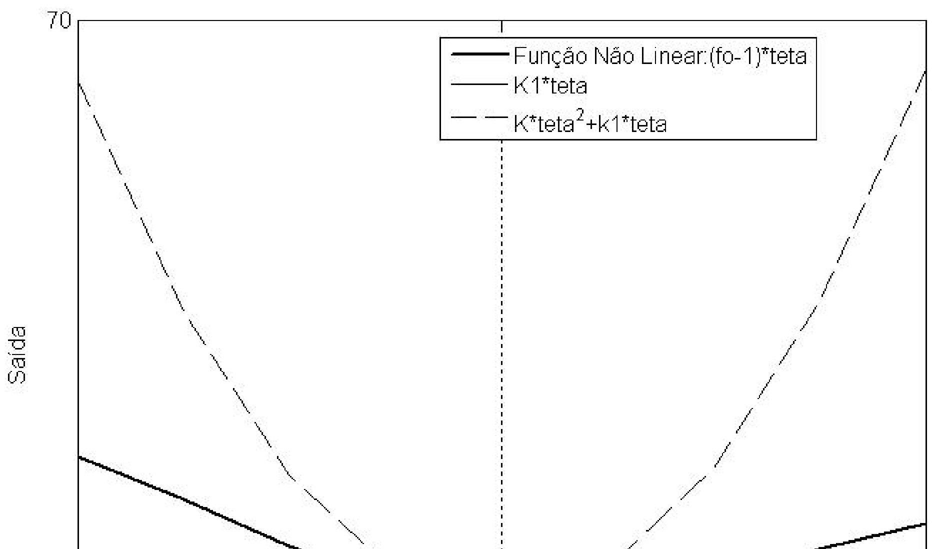

Figura 6.14 - Condição k_1 e k_2 para o Critério de *Popov*

Aplicando as condições do **Teorema 6.1**, como mostra a equação (6.16), verifica-se na Figura 6.14 que as condições citadas, atende a condição do Critério de *Popov*, ou seja, a curva da não linearidade se enquadra entre os setores $k_1\theta$ e $K\theta^2 + k_1\theta$.

De acordo com a 2ª condição do **Teorema 6.1**, as raízes da equação característica $a(1+d^T H)\Delta + (1+k_1)z^{-1}d^T Fb = 0$ devem estar alocadas no interior do circulo unitário.

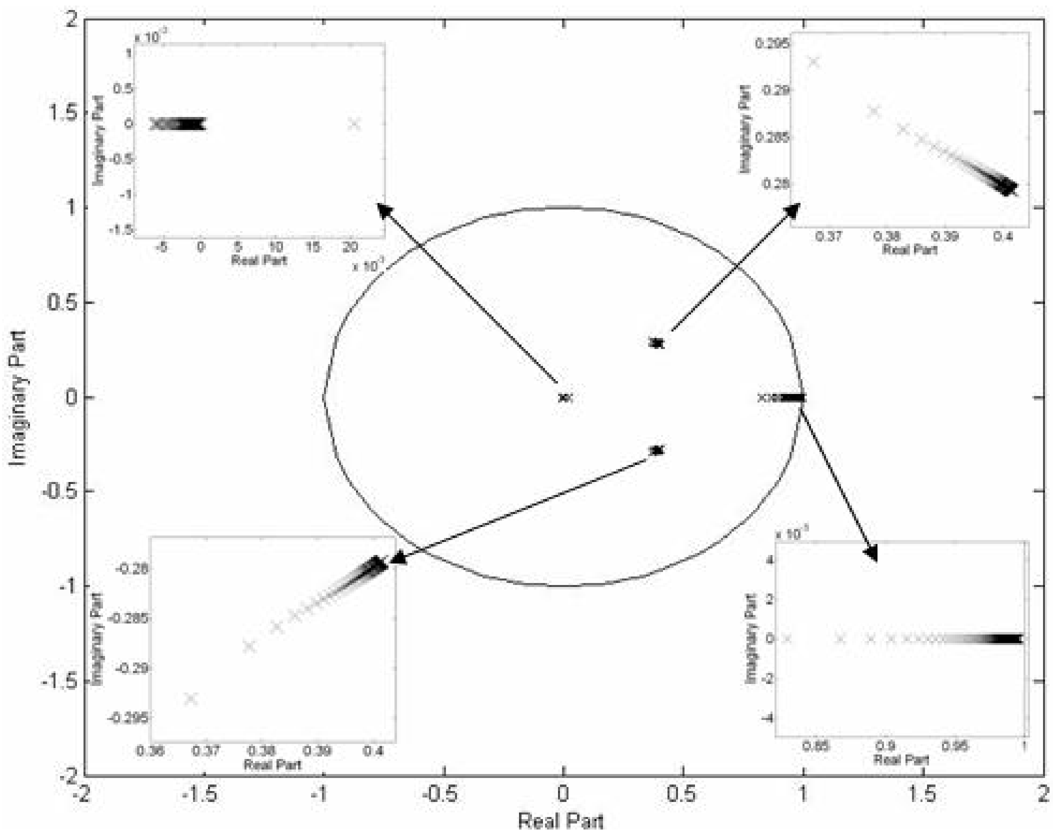

Figura 6.15 – Raízes da equação característica

As quatro raízes desta equação como mostra a Figura 6.15, estão alocadas no interior do circulo unitário quando λ varia no intervalo [1, 1.000].

A avaliação da 3ª condição do referido Teorema, exige que $\dfrac{1}{k_2 - k_1} + \mathrm{Re}\left\{\dfrac{z^{-1}d^T Fb}{a(1+d^T H)\Delta + (1+k_1)z^{-1}d^T Fb}\right\} > 0$ para todo $|z| = 1$, quando λ varia. Isto porque, semelhantemente a 2ª condição, a condição acima depende também do fator de ponderação λ, uma vez que os outros parâmetros de sintonia foram definidos.

A faixa de lambda que atende, simultaneamente, a 2ª e a 3ª condição do **Teorema 6.1** será a região de estabilidade em função de λ. Para o exemplo em questão, observou-se que λ variando no intervalo já citado, isto é, de 1 a 1.000, o sistema é estável.

Comprova-se por meio da Figura 6.16 que a 3ª condição do **Teorema 6.1**, ainda para o mesmo horizonte de predição é atendida quando o fator de ponderação (λ) varia no intervalo pré-definido.

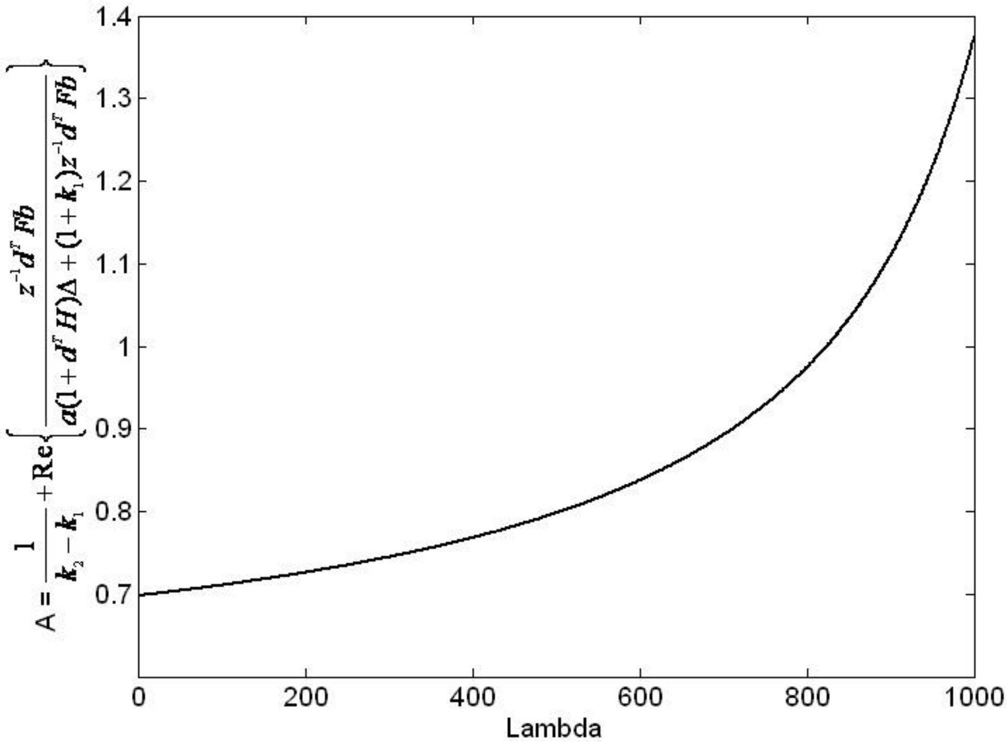

Figura 6.16 – Terceira condição do Teorema 6.1

Resultados de simulação, para a saída do GPC *Hammerstein* quasilinear como mostram as Figuras 6.17, 6.18 e 6.19, para lambdas iguais a 1, 100 e 1.000 respectivamente, comprovam os resultados teóricos obtidos.

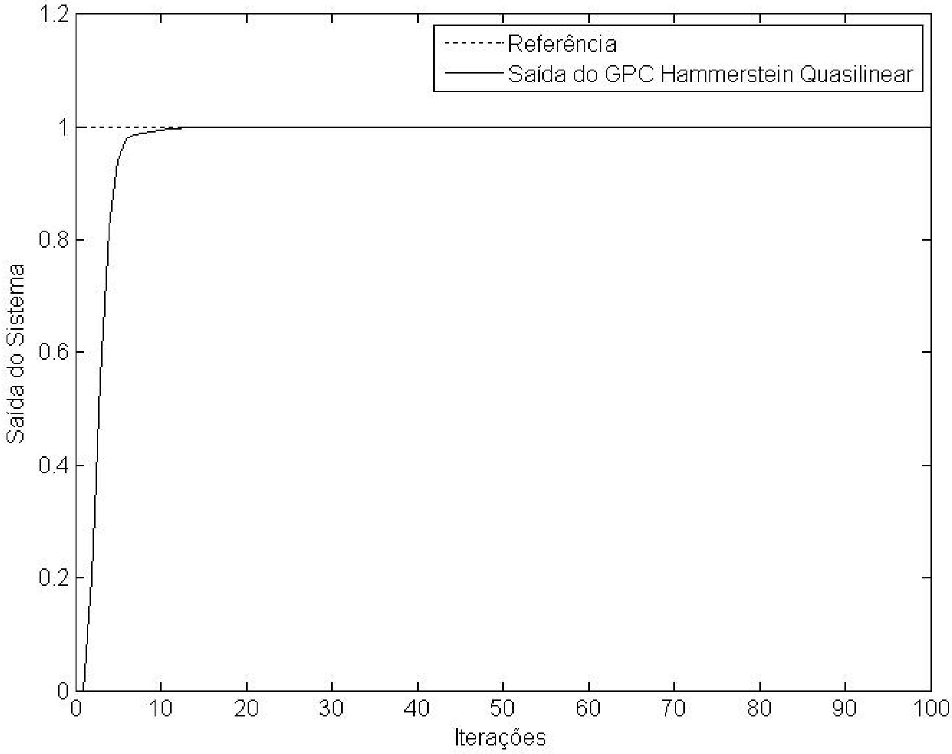

Figura 6.17 – Saída do GPC Hammerstein quasilinear para um lambda igual a 1.

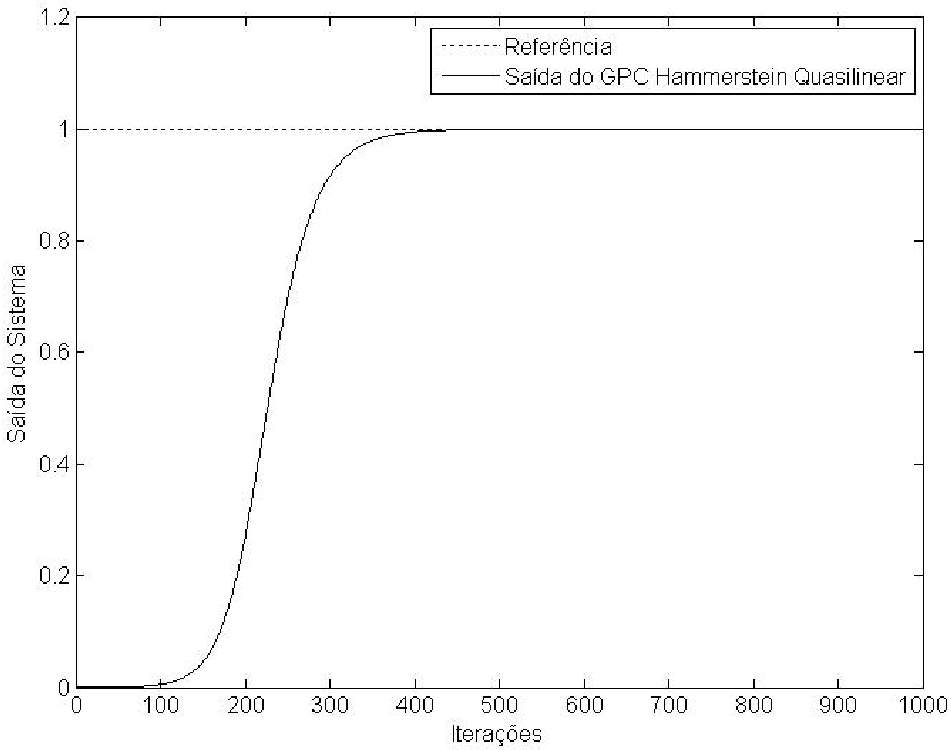

Figura 6.18 – Saída do GPC Hammerstein quasilinear para um lambda igual a 100.

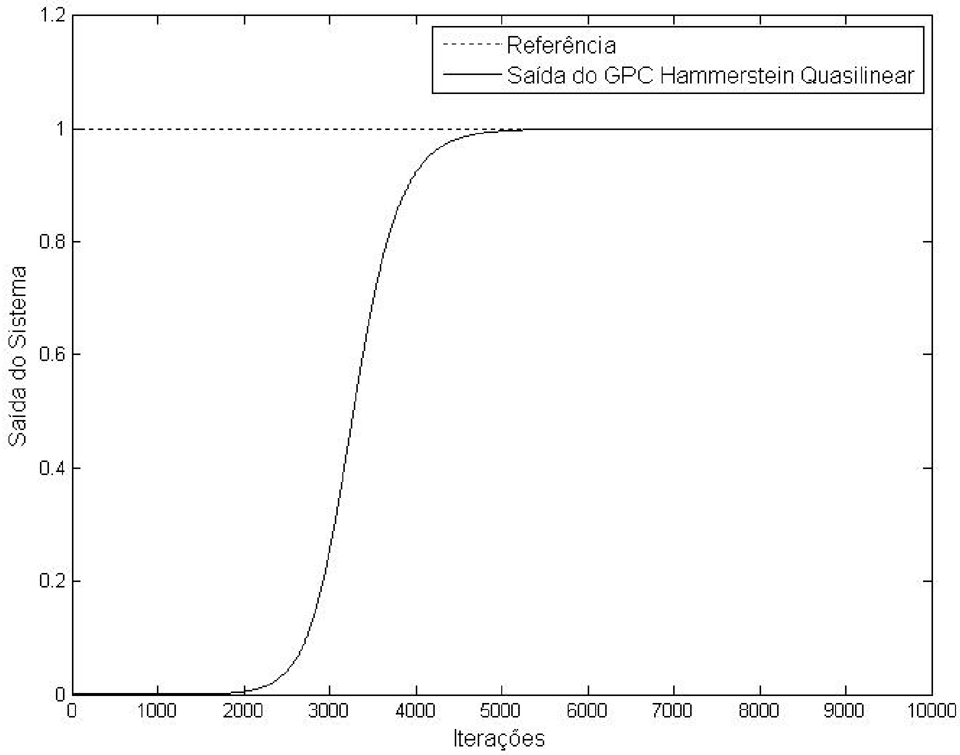

Figura 6.19 – Saída do GPC Hammerstein quasilinear para um lambda igual a 1000.

Com isso, pode-se concluir que ao atender as condições teorema proposto garante-se a estabilidade nominal de malha fechada utilizando o algoritmo de controle preditivo proposto e o modelo de *Hammerstein* proposto para a planta.

6.2. Conclusões

Este capítulo abordou a solução para a estabilidade de um Controlador Preditivo Generalizado baseado no modelo de *Hammerstein*. Inicialmente uma breve introdução sobre estabilidade absoluta para sistemas não lineares foi apresentada. Foi detalhada a prova de estabilidade do GPC baseado no modelo de *Hammerstein* com compensação do erro de predição, através do Termo de Compensação para o caso SISO e sem restrições.

O critério de *Popov* foi apresentado e baseado neste, foi proposto um novo teorema que atende ao critério de *Popov* como também garante a estabilidade em malha fechada do GPC baseado no modelo de *Hammerstein*.

7. RESULTADOS DE APLICAÇÃO

Para demonstrar o desempenho do GPC baseado no modelo de *Hammerstein* com compensação do erro de predição, aplicamos o algoritmo a uma planta de neutralização de pH que possui uma forte não linearidade. A planta piloto de neutralização de pH é um importante instrumento para o ensino e pesquisa de identificação e controle de sistemas não lineares.

7.1. Conceitos básicos sobre um Processo de Neutralização de pH

Uma das principais bases para o conhecimento científico e tecnológico é a construção de modelos. Segundo Ljung e Torkel (1994), o modelo é uma ferramenta usada para a obtenção de informações sobre um sistema sem a necessidade de realização de experimento. Da mesma forma que existem diferentes tipos de sistemas, existem diferentes tipos de modelos, a saber: modelos físicos, como protótipos e plantas pilotos, modelos mentais usados para executar tarefas do cotidiano das pessoas, modelos gráficos, que são usados para descrever o comportamento do sistema por tabelas numéricas ou curvas de desempenho, e finalmente os modelos matemáticos que, pode ser definido como uma representação abstrata da realidade por equações (Campos, 2007).

A obtenção de modelos para sistemas de neutralização e, especificamente, para o controle de pH tem-se tornado mais relevante na biotecnologia, devido à necessidade de melhorar a qualidade do produto ou de aperfeiçoar o processo de produção. Muito embora os fundamentos físico-químicos e a natureza eletroquímica tenham sido bem estabelecidos, o controle de tais processos ainda não está bem resolvido do ponto de vista industrial. (Manzi, J. T., 1999).

7.1.1. Processo de Neutralização

O processo de neutralização consiste em por meio de uma mistura de soluções químicas, tornar uma solução neutra.

Como exemplo de neutralização, pode-se citar a água. A interação dos íons H_3O^+ (íon de hidrogênio H^+) providos da ionização de uma solução ácida, com os íons de hidroxila (OH^-) provenientes da dissociação iônica de uma solução básica produzem água (H_2O), o que caracteriza a chamada neutralização da solução.

$$H_3O^+ + OH^- \Leftrightarrow 2H_2O \tag{7.1}$$

7.1.2. Definição de pH

As concentrações hidrogeniônica $[H^+]$ e hidroxiliônica $[OH^-]$ são, em uma solução, correlacionadas, ou seja, o aumento de uma acarreta a diminuição da outra e vice-versa. Em uma solução ácida há mais íons de H^+ do que íons de OH^- e o inverso para soluções alcalinas. Em uma solução neutra, as concentrações dos íons de H^+ e OH^- são iguais. A classificação dos líquidos quanto à acidez, à alcalinidade e à neutralidade são (Campos, 2007):

$$\left\{H^+\right\} > \left\{OH^-\right\} \Rightarrow ácido$$

$$\left\{H^+\right\} = \left\{OH^-\right\} \Rightarrow neutro$$

$$\left\{H^+\right\} < \left\{OH^-\right\} \Rightarrow alcalino$$

Para medição do nível de acidez de uma solução usa-se a escala do pH (potencial hidrogeniônico), que, por razões de convenção, tem sua variação entre 0 a 14 e sua classificação é dada como:

$$pH < 7 \Rightarrow ácido$$

$$pH = 7 \Rightarrow neutro$$

$$pH > 7 \Rightarrow alcalino$$

7.1.3. Solução Tampão

Em muitas situações práticas, o valor do pH deve ser mantido perto de um valor ótimo (Ylén, 2001). Isso ocorre principalmente em processos bioquímicos, que devem ser insensíveis às pequenas adições de ácidos ou de bases. A solução aplicada nestes processos é chamada de solução tampão. Uma solução tampão é caracterizada por sofrer pequena variação de pH quando a ela são adicionados íons de H^+ ou OH^-, isso devido ao fato da mesma conter ácido e base conjugados. A solução tampão pode ser considerada como um reservatório dos íons que são liberados quando necessitados na reação (Ylén, 2001), ou seja, caso seja adicionado um ácido a solução tampão reage de forma a neutralizar o íons H^+, contrariamente, se for adicionado uma base a reação neutraliza os íons OH^- (Campos, 2007).

7.2. Aplicação em um Processo de Neutralização de pH

Toda vez que a experimentação num processo real apresenta restrições de ordem operacional, econômico-financeira ou de segurança, a realização de estudos de simulação a partir de um modelo do processo é fundamental, seja com o objetivo de treinamento, projeto ou predição de resultados (Brosilow e Joseph, 2002; Santos, 2007).

Com o objetivo de destacar as principais características das técnicas de controle preditivo apresentadas nos capítulos anteriores, foi realizado um exemplo de simulação utilizando o ambiente de programação MatLab®/Simulink®.

O controle de um processo de Neutralização de pH é bastante complexo, tendo em vista as não linearidades presentes no sistema. A Figura 7.1 mostra a planta piloto de um processo de neutralização de pH, apresenta três fluxos de entrada, sendo um ácido forte $u(3)$, um reagente tampão $u(2)$ e uma base forte $u(1)$. Na saída tem-se o ponto de medição de pH. O nível do líquido no tanque reator pode variar segundo as vazões de entrada, uma vez que a vazão de saída depende apenas do nível atual do mesmo. Existe a presença de um agitador dentro do reator para acelerar a reação da mistura. Para modelagem do processo, algumas considerações iniciais foram feitas:

- Não existem distúrbios;
- Mistura perfeita;
- Densidade constante;
- Reações rápidas;
- Completa solubilidade dos íons envolvidos;
- Não foi considerado o controle de nível;
- Não existem outras substâncias entrando ou restos no tanque, exceto aquelas provenientes de $u(1)$, $u(2)$ e $u(3)$;

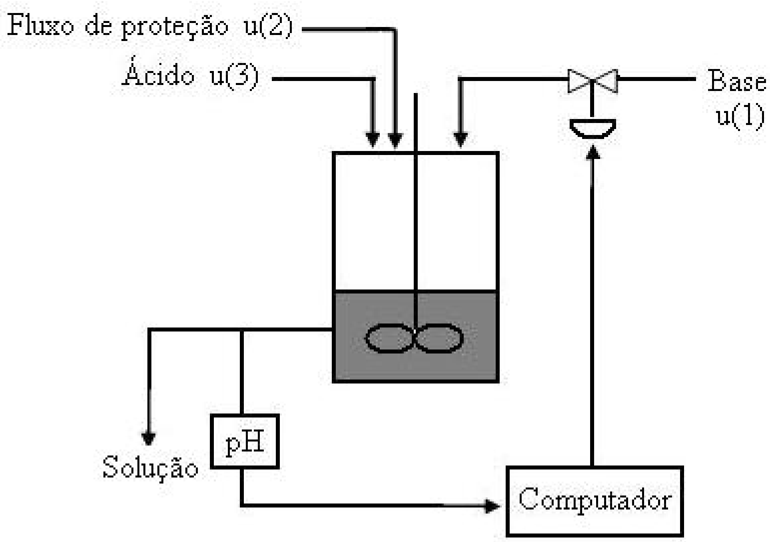

Figura 7.1 – Sistema de Controle de um Processo de Neutralização de pH

O principal objetivo do sistema é controlar o pH da solução, na presença de variações não mensuráveis do fluxo de proteção, que pode ser considerado como uma perturbação. O modelo de simulação foi baseado em Henson & Seborg (1994), e foram introduzidas duas invariantes de reação (W_a representa a diferença entre as concentrações molares dos átomos de nitrogênio e sódio e W_b corresponde a concentração molar de átomos de carbono), para cada vazão de entrada e saída. Estas reações serão denotadas como: (W_{a1}, W_{b1}) para a vazão da base, (W_{a2}, W_{b2}) para a vazão de proteção, (W_{a3}, W_{b3}) para a vazão de ácido e (W_a, W_b) para a solução de pH.

A dinâmica do modelo para a invariante de reação da solução de pH (W_a, W_b), em espaço de estados é dada por:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(1) + p(x)u(2) \tag{7.2}$$

$$h(x,y) = 0 \tag{7.3}$$

em que:

$$x \cong [x_1, x_2]^T = [w_a, w_b] \tag{7.4}$$

e

$$f(x) = \left[\frac{u(3)}{v}(w_{a3} - x_1), \frac{u(3)}{v}(w_{b3} - x_2) \right]^T \tag{7.5}$$

$$g(x) = \left[\frac{1}{v}(w_{a1} - x_1), \frac{1}{v}(w_{b1} - x_2) \right]^T \tag{7.6}$$

$$p(x) = \left[\frac{1}{v}(w_{a2} - x_1), \frac{1}{v}(w_{b2} - x_2) \right]^T \tag{7.7}$$

$$h(x,y) = x_1 + 10^{y-14} - 10^{-y} + x_2 \frac{1 + 2*10^{y-pk_2}}{1 + 10^{pk_1 - y} + 10^{y-pk_2}} \tag{7.8}$$

Os parâmetros pk_1 e pk_2 são a primeira e segunda constantes de dissociação do ácido fraco. As condições de operação nominal para o sistema foram baseadas em Henson & Seborg (1994) e Shahraeini, Z. et. al, (2006), e são reproduzidas na Tabela 7.1.

Tabela 7-1 – Condições de operação nominal para o processo de neutralização de pH

$u(3) = 16.60 ml/s$	$u(2) = 0.55 ml/s$
$u(1) = 15.55 ml/s$	$z = 2900 ml$
$w_{a1} = -3.05*10 ml/s$	$w_{a2} = -32*10^{-2} mol$
$w_{a3} = 3*10^{-3} mol$	$w_a = -4.32*10^{-4} mol$
$w_{b1} = 5*10^{-5} mol$	$w_{b2} = 3*10^{-2} mol$
$w_{b3} = 0 mol$	$w_b = 5.28*10^{-4} mol$
$pk_1 = 6.35$	$pk_2 = 10.25$
$y = 7.0$	

Foram contempladas no ambiente de desenvolvimento, a dinâmica do atuador e a dinâmica do sensor. Deste modo, a introdução desses fatores na simulação, aproxima este sistema de um real. As funções de transferências que descrevem o comportamento da válvula e do sensor são respectivamente:

$$G_V(s) = \frac{1}{30s+1} \tag{7.9}$$

$$G_S(s) = \frac{1}{10s+1} \tag{7.10}$$

Para o projeto do GPC utilizou-se como modelo contínuo do sistema, as funções de transferências do atuador, planta e sensor em cascata. Assim, foi encontrado um modelo discreto equação (7.11) com período de amostragem igual a 40s. O modelo final do processo é representado por um modelo de terceira ordem, com função de transferência:

$$G(q^{-1}) = \frac{0.00706 + 0.01872q^{-1} + 0.002973q^{-2}}{1 - 1.8467q^{-1} + 1.0522q^{-2} - 0.1767q^{-3}} \tag{7.11}$$

e a não linearidade estática estimada é dada por:

$$x(k) = 0.18 + 9u(k) + 17u^2(k) - 46u^3(k) - 120u^4(k) + 200u^5(k) + 190u^6(k) - 290u^7(k)$$

O horizonte de predição NY utilizado foi igual a 10. A constante de tempo do sistema foi ajustada em $\lambda = 28$ e tempo morto igual a zero.

A Figura 7.2 mostra a curva do modelo fenomenológico estimado de 7ª ordem e a aproximação polinomial da não linearidade estática.

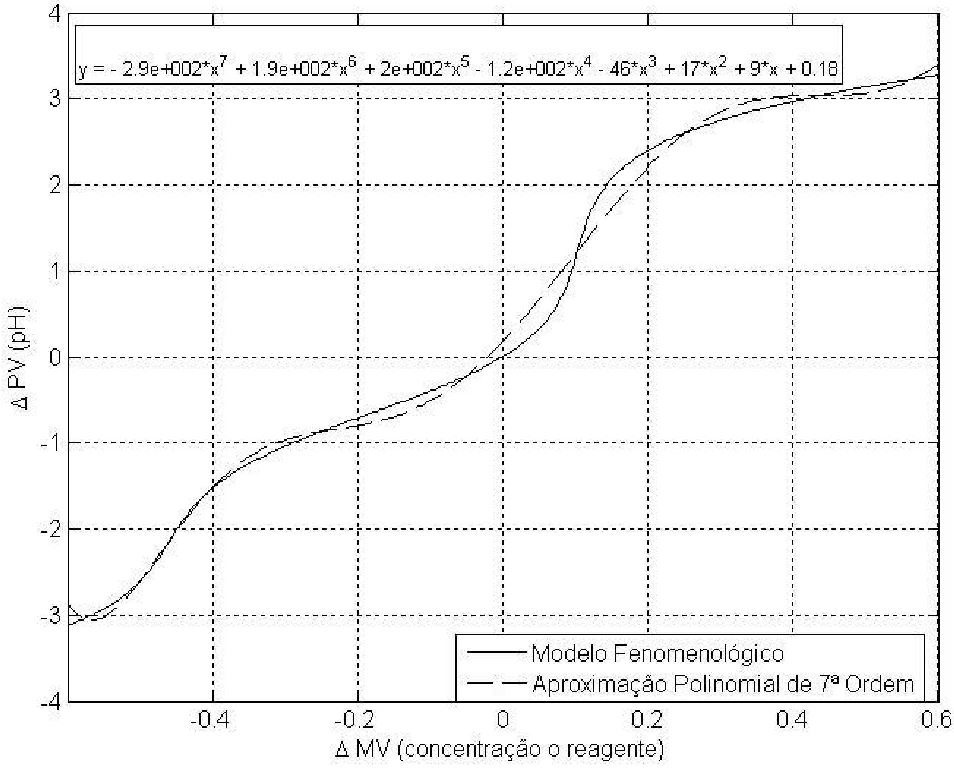

Figura 7.2 – Ganho da Planta de pH pelo Modelo Fenomenológico

A Tabela 7.2 mostra os pontos obtidos para a construção da curva de não linearidade estática, que representa variação do ganho estático do processo, aqui representado pelo modelo fenomenológico. Observa-se na tabela 7.2 que os pontos para a construção da Figura 7.2 são obtidos de forma simétrica, em torno do ponto (0,0), correspondendo a MV e a PV nominais. A PV nominal refere-se ao Ph neutro que tem valor sete (7). Após a obtenção dos vários pontos da curva obtêm-se os coeficientes de uma aproximação polinomial de 7ª ordem.

Tabela 7-2 – Pontos para a curva do modelo fenomenológico

ΔMV	-0.59	-0.56	-0.52	-0.49	-0.45	-0.42	-0.38	-0.35	-0.31	-0.28
	-0.24	-0.21	-0.17	-0.14	-0.10	-0.07	-0.03	0.0	0.03	0.06
	0.10	0.13	0.17	0.20	0.24	0.27	0.31	0.34	0.38	0.41
	0.45	0.48	0.52	0.55	0.59					
ΔPV	-3.11	-2.98	-2.80	-2.53	-2.09	-1.70	-1.44	-1.25	-1.10	-0.97
	-0.85	-0.74	-0.64	-0.53	-0.42	-0.30	-0.17	0.0	0.18	0.50
	1.19	1.92	2.24	2.43	2.57	2.68	2.77	2.86	2.93	3.00
	3.06	3.12	3.17	3.22	3.26					

Na Figura 7.3 é apresentado o diagrama de blocos da malha de Controle do Processo de Neutralização de pH, a referência é 7 e foi aplicado um desvio no modelo de 0.5.

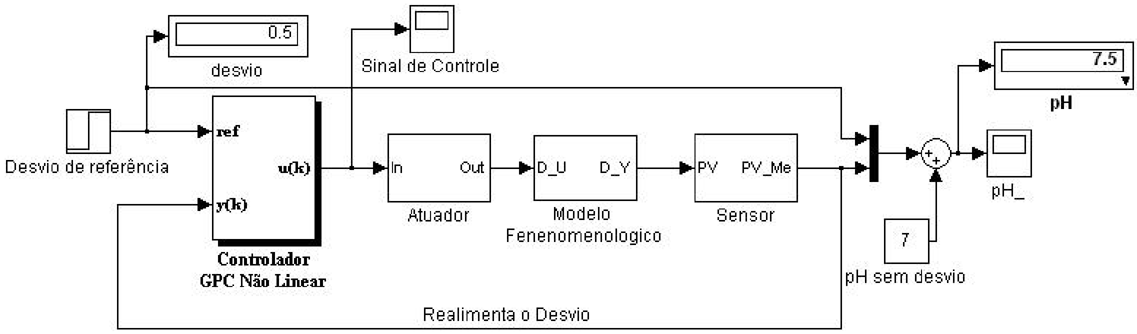

Figura 7.3 – Diagrama de blocos da malha de controle de uma planta de neutralização de pH

O Resultado da simulação da malha de controle do diagrama acima é apresentado na Figura 7.4, no primeiro gráfico tem-se a saída do controlador, inicialmente com saída seguindo a referência e após 200 iterações aplica-se um desvio de 0.5. O segundo gráfico mostra o esforço do controlador ao aplicar o desvio.

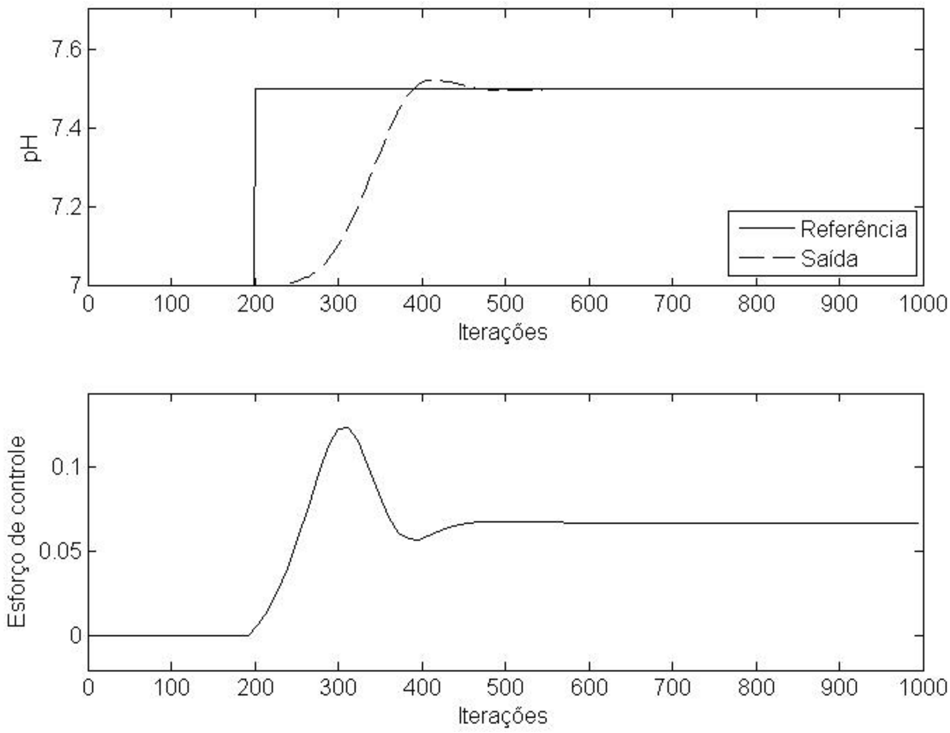

Figura 7.4 – Saída e esforço de controle do GPC Hammerstein Quasilinear

Com o objetivo de comparar o desempenho do GPC não linear baseado no modelo de *Hammerstein*, foi implementado um controlador PI com os mesmos parâmetros de ajuste do controlador GPC.

O projeto de sintonia do controlador PI foi realizado em torno do ponto de equilíbrio $pH = 7$. Através da análise pelo lugar das raízes e sobre sinal $\leq 5\%$, os parâmetros do controlador obtidos são: ganho estático $K_C = 0,7$ e o zero em $s = 0,0120$. Portanto, a função de transferência do controlador PI é dada por:

$$G(s) = 0,7\frac{(s + 0.0120)}{s}$$

Verifica-se através da Figura 7.5 que o desempenho do controlador GPC *Hammerstein* apresenta melhor tempo de resposta (mais rápido) em comparação com o do GPC linear e do Controlador PI, considerando as mesmas condições e parâmetros de sintonia aqui apresentadas.

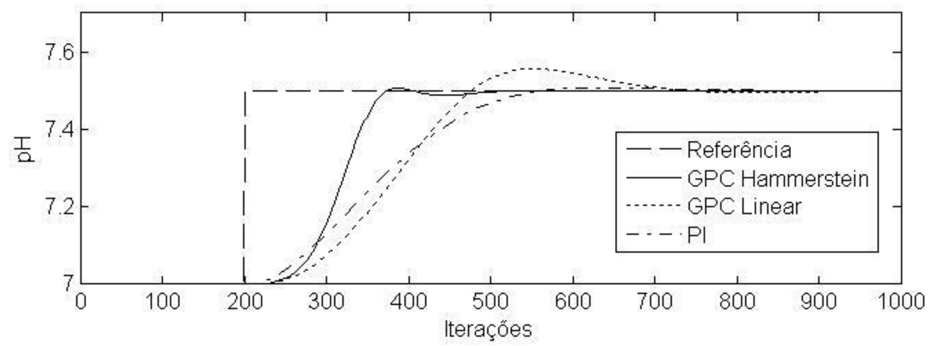

Figura 7.5 - Comparação entre as saídas do GPC *Hammerstein*, Linear e do controlador PI para uma Planta de Neutralização de pH

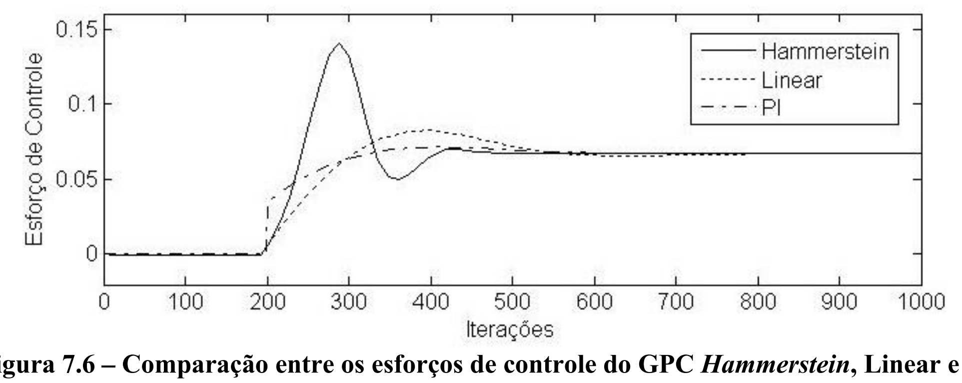

Figura 7.6 – Comparação entre os esforços de controle do GPC *Hammerstein*, Linear e do Controlador PI.

Na Figura 7.6 percebe-se que o maior esforço de controle é do GPC *Hammerstein*, este maior esforço é recompensado pelo melhor desempenho do mesmo.

Agora, foi feita uma comparação entre o GPC quasilinear *Hammerstein,* GPC quasilinear *Hammerstein* com Termo de Compensação e o GPC quasilinear *Hammerstein* com Compensação Iterativa, percebe-se na Figura 7.7 que o tempo de estabilização e menor "*overshoot*" do GPC *Hammerstein* com compensação iterativa é melhor em relação aos outros controladores comparados.

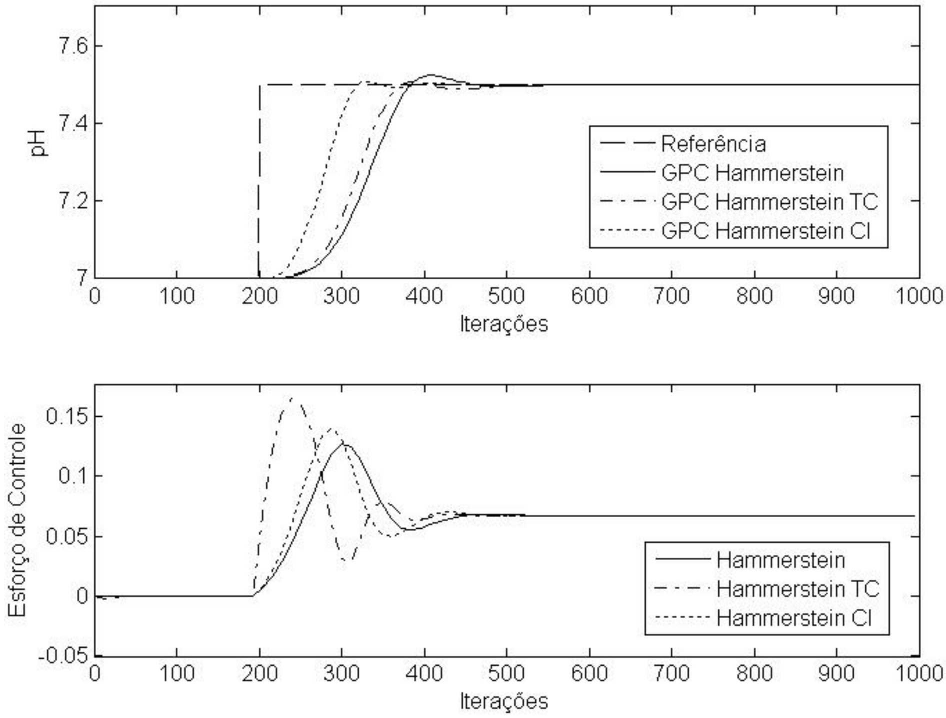

Figura 7.7 - Gráfico comparativo entre as saídas de controle do controlador PI, GPC *Hammerstein* e GPC *Hammerstein* com Compensação Iterativa para uma Planta de Neutralização de pH.

Agora, é avaliada a estabilidade do referido sistema através do Critério de *Popov*, com as mesmas condições inicias e parâmetros de sintonia. $k_1 = 0.2$ e $k_2 = 2$ foram definidos. As condições do Teorema 6.2, propostas nesta tese, foram avaliadas.

As raízes da equação característica $a(1+d^T H)\Delta + (1+k_1)z^{-1}d^T Fb = 0$ devem estar alocadas no interior do circulo unitário, o gráfico da Figura 7.8 mostra as raízes da equação característica, todas dentro do circulo unitário.

$$R_1 = 0.9969$$

$$R_2 = 0.8774$$

$$R_3 = 0.6704$$

$$R_4 = 0.3011$$

$$R_5 = 0.0001$$

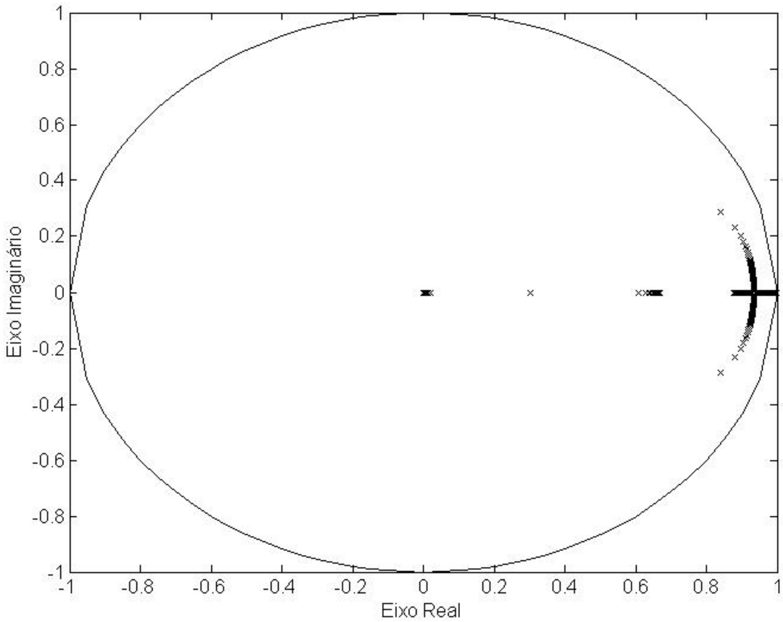

Figura 7.8 – Raízes da equação característica

As raízes da equação característica como mostra a Figura 7.8, estão alocadas no interior do circulo unitário, estas dependem do fator de ponderação λ. O lambda foi variado entre 0.1 e 1.000.

A interseção da 2ª condição do Teorema 6.2 com λ, gera a região em que o sistema é estável.

Finalmente, a condição $\dfrac{1}{k_2 - k_1} + \mathrm{Re}\left\{ \dfrac{z^{-1} d^T F b}{a(1 + d^T H)\Delta + (1 + k_1) z^{-1} d^T F b} \right\} > 0$ para todo $|z| = 1$. Comprova-se por meio da Figura 7.9 que a 3ª condição do Teorema 6.1, ainda para o mesmo horizonte de predição é atendida quando o fator de ponderação (λ) varia no intervalo pré-definido. Portanto, pode-se garantir a estabilidade para esta aplicação.

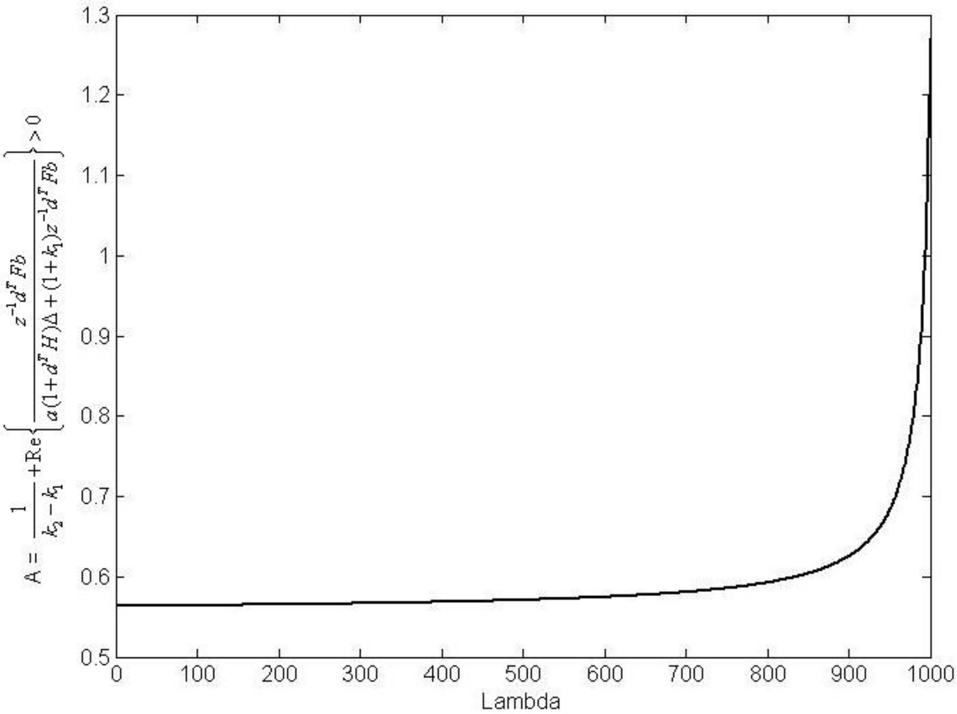

Figura 7.9 – Condição 3 do Teorema 6.1

7.3. Conclusões

Neste capítulo, apresentou-se uma avaliação da principal contribuição desta Tese. Aplicou-se o algoritmo de GPC baseado no modelo de *Hammerstein* com Termo de Compensação e Compensação Iterativa a uma planta de neutralização de pH. Foram feitas comparações entre o controlador proposto e um controlador PI e os resultados obtidos foram bastante satisfatórios. Ainda nesta aplicação, foi aplicado o teorema de prova de estabilidade proposto neste trabalho, garantindo a estabilidade do referido sistema para as condições definidas.

8. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Após toda a pesquisa e observações realizadas no desenvolvimento deste trabalho, é possível apresentar algumas conclusões, perspectivas e propostas de continuação de pesquisa sobre o tema.

8.1. Conclusões

Apesar de o MBPC ser a estratégia de controle avançado mais empregada na indústria de processos, continuam a existir desafios relacionados à obtenção de soluções mais abrangentes para a situação real. A obtenção de controladores preditivos não lineares com garantia de estabilidade, é sem dúvida, um aspecto relevante no contexto de processos químicos, indústria aeronáutica, automobilística, entre outras. Algumas propostas para a solução deste problema têm sido reportadas na literatura. Nesta Tese, pretendeu-se dar uma contribuição aprofundada para a solução do problema de controle não linear com estabilidade garantida. As abordagens propostas ao longo deste trabalho visam um projeto de um controlador preditivo não linear com prova de estabilidade e a aplicabilidade desta técnica de controle.

Enumeram-se a seguir, as contribuições e conclusões obtidas a partir do trabalho apresentado nesta Tese.

- Realizou-se um estudo dos principais modelos não lineares como também descreveu-se resumidamente, as principais classificações de modelos. Foi feito também um estudo das principais e mais utilizadas representações de modelos não lineares, sendo o modelo de *Hammerstein* detalhado e suas propriedades apresentadas. Por fim, foi apresentada uma breve introdução sobre estabilidade de modelos não lineares.

- Foi mostrado um breve estudo da teoria dos controladores preditivos e detalhado o Controlador Preditivo Generalizado na sua forma monovariável que foi a base para todo o desenvolvimento deste trabalho.
- Foi desenvolvida detalhadamente a formulação do algoritmo do controlador preditivo baseado no modelo de *Hammerstein* para o caso SISO e irrestrito, uma linearização do modelo não linear foi feita através da aproximação quasilinear por degrau de tempo para a obtenção da lei de controle. Foi formulado o caso do GPC baseado no modelo de *Hammerstein* quasilinear para o caso com ruído branco e colorido. Foi apresentado um exemplo de simulação para o controlador proposto em que os resultados apresentaram-se satisfatórios.
- Foram aplicadas no algoritmo proposto duas abordagens de métodos de compensação do erro de predição gerado pelo controlador, devido ao aumento no horizonte predição, Termo de Compensação e Compensação Iterativa. Foram detalhadas e apresentadas suas propriedades, ambas foram adaptadas ao algoritmo de controle não linear proposto. Foram apresentados dois exemplos de simulação com as abordagens, e os resultados mostraram-se bastante satisfatórios, diminuindo o erro de predição e o esforço de controle. Foi feita ainda uma análise do erro de predição com o objetivo de analisar a capacidade preditiva dos preditores e conclui-se que com a adição da compensação do erro, o tempo de resposta e o esforço do controlador diminuíram.
- A última linha de pesquisa explorada nesta tese tratou da prova de estabilidade para o GPC baseado no modelo de *Hammerstein*, sendo esta a principal contribuição deste trabalho. Objetivou-se assegurar a estabilidade para o sistema de controle preditivo não linear em malha fechada. Para a prova da estabilidade, foi utilizado o método dos setores e o Critério de *Popov,* sendo então apresentado um teorema que se apresentou bastante eficiente e garante a estabilidade de um sistema de controle não linear para um horizonte definido.

- Para comprovar o desempenho do algoritmo de controle proposto e a prova de estabilidade, o mesmo foi aplicado a uma planta de neutralização de pH que possui uma forte não linearidade. Abordou-se de uma maneira geral alguns conceitos sobre um processo de neutralização de pH, o modelo matemático utilizado nesta aplicação foi do tipo caixa-branca (fenomenológico). Com o objetivo de controlar o pH de uma solução dentro de um tanque foi projetado um controlador preditivo, encontrado um modelo discreto e uma não linearidade de sétima ordem estimada para o sistema. Os resultados desta aplicação mostraram-se satisfatórios, foram realizadas comparações com um controlador PI com os mesmos parâmetros de ajuste do GPC projetado, em que se pôde comprovar o melhor desempenho do GPC projetado, outra comparação com a compensação do erro de predição confirma o desempenho do GPC baseado no modelo de *Hammerstein* quasilinear proposto. Por fim foi avaliada e comprovada a estabilidade do referido sistema.

Finalmente, pode-se comentar que a estrutura do controle preditivo proposta nesta Tese é valida para qualquer sistema não linear que possa ser representados através de modelos de blocos interconectados com uma não linearidade estática, definidos os horizontes de predição e fator de ponderação (λ).

Estabeleceu-se a prova de estabilidade, principal contribuição desta Tese e os resultados finais foram bastante promissores, pois foi possível implementar uma metodologia de controle preditivo não linear com garantia de estabilidade em malha fechada. É importante observar que, nem sempre é possível garantir a estabilidade de sistemas não lineares através do Critério de *Popov*, visto que este é um método desenvolvido a partir do Critério de *Lyapunov*, em que só é possível garantir a estabilidade e não a instabilidade de um sistema. Muitas vezes, ocorrem casos em que o sistema é estável, mas o critério aplicado não é capaz de garantir esta estabilidade.

A implantação desta técnica de controle é viável na indústria, pois pode levá-lo a um melhor desempenho, contribuindo significativamente para um ganho técnico e financeiro.

8.2. Perspectivas

São propostos alguns tópicos, os quais podem ser estudados com o objetivo de dar continuidade a este trabalho.

- Recomenda-se uma análise comparativa do desempenho do controlador proposto com outras representações de modelos não lineares como o modelo de *Volterra*, Redes Neurais, *Wiener*, entre outros.
- Outra sugestão para trabalhos futuros é a utilização de modelos multivariáveis não lineares para aplicações em ambientes industriais, em que o caso multivariável é mais frequente.
- Implementar o GPC não linear com restrições.
- No sistema de controle aqui tratado, as não linearidades foram supostas todas conhecidas. Uma perspectiva de desenvolvimento futuro do GPC não linear reside no controle de sistemas com não linearidades parcialmente conhecidas, incorporando técnicas de controle robusto.
- Desenvolver o GPC não linear com garantia de estabilidade robusta.
- Aplicar o algoritmo de controle proposto, em diferentes processos químicos, compreende-se que esta etapa de aplicação foi pouco explorada ao longo deste trabalho.

A literatura de controladores preditivos não lineares é um campo extremamente amplo e do qual se pôde conhecer apenas uma fração modesta. Portanto, esta é uma área que requer muitos estudos aprofundados. A experiência obtida ao longo desta Tese indica que ainda há muito a ser obtido nesta linha para a solução do problema de estabilidade de sistemas de controle não linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abonyi, J., Babuska, R., Botto, M. A., Szeifert, F. & Nagy, L. (2001). Identification and Control of Nonlinear Systems Using Fuzzy Hammerstein Models. *Delft University of Technology. Department of Inormation Technology and Systems* – Netherlands.

Aguirre, L. A. (2000). Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais. *Ed. UFMG, Belo Horizonte.*

Aguirre, L.A., Coelho, M.C.S. & Corrêa, M.V. (2005). On the interpretation and practice of dynamical differences between Hammerstein and Wiener models. *IEE Proceedings - Control Theory Applications*, vol. 152, n. 4, p. 349-356.

Akaike, H. (1974). A new look at statistical model identification. *IEEE Trans. On Automatic Control*, v. 19, n. 6, p. 716-723.

Al-Duwaish, H., & Naeem, W. (2000). Nonlinear Model Predicitive Control of Hammerstein and Wiener Models Using Genetic Algorithm. *IEEE Conference on Control Applications*, México.

Ângelo, E. (2005). Desenvolvimento e aplicação do controlador preditivo bilinear com compensação iterativa a uma coluna de fracionamento de butadieno 1,3. *Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica. Universidade Federal da Bahia*. p. 47-68.

Antonie, A. L. & Parker R. S. (2006). An Analytical Solution Multivariable Nonlinear MPC for Second-order Laguerre Systems. *Internatinal Symposium on Advanced Control of Chemical Processes. Gramado, Brasil.*

Åström K. J. & Wittenmak B. (1995). Adaptive Control. *Addison-Wesley Publishing Company.*

Bars, R. & Haber, R. (1991). Weighted One-Step- Ahead Adaptive Predictive Control of Nonlinear Processes. *IMACS Symposium Modelling and Control of Technological Processes*, Lille, France, Vol. 1, pp. 16-21.

Billings, S. A. (1980). Identification of nonlinear systems – a survey.

Braga, A. P., Carvalho, A. C. P. L. F. & Ludemir, T. B. (2003). Redes neurais artificiais, *in S. O. Rezende (ed.), Sistemas Inteligentes: Fundamentos e Aplicações, Editora Manole Ltda*.

Brosilow, C. & Joseph, B. (2002). Techniques of Model-Based Control. *Prenticel-Hall, Upper Saddle River, NJ.*

Boutayeb, M. & Darouach, M. (1995). Recursive Identification Method for MISO Wiener-Hammerstein Model. *IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 40 Nº 2.*

Camacho, E.F. & Bordons, C. (1999). Model Predictive Control. *Springer-Verlag*, Londres.

Camacho, E. F. & Bordons, C. (2004). Control Predictivo: Pasado, Presente y Futuro. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 1, n. 3, p. 5-28.

Campello, R. J. G. B.; Favier, G. & Amaral, W. C. (2004). Optimal Expansions of Discrete-time Volterra Models using Laguerre Functions. *Automática 40: 815-822.*

Campos, R. C. C. (2007). Projeto e Construção de Planta Piloto de Neutralização de pH e Proposta de Metodologia para Incorporação de Informações Auxiliares na Identificação NARX Racional. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Engenharia do Centro Universitário do Leste de Minas Gerais – UnilesteMG.

Cannon, R. H. (1967). Dynamic of phisical systems. *McGraw-Hill, Volume 1. New York. USA*.

Casillo, D. S. S, Maitelli, A. L & Fontes, A. B (2009). Controle Preditivo Não Linear com Compensação Iterativa aplicado a um Processo de Neutralização de pH. *V Congresso Rio Automação. IBP121_09*.

Casillo, D. S. S, Fontes, A. B & Maitelli, A. L. (2008). Generalized Predictive Control based on Hammerstein Model with Stability Guarantee. Asian Journal of Control. Submetido em: 28 de novembro de 2008.

Casillo, D. S. S., Maitelli, A. L & Fontes, A. B (2008a). A New Nonlinear Predictive Control Approach Using Hammerstein Models with Compensation Term. *Proceedings of the 17th World Congress. The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea*.

Casillo, D. S. S., Maitelli, A. L. & Fontes, A. B. (2008b). Controle Preditivo Não Linear baseado no Modelo de *Hammerstein* aplicado a um Processo de Neutralização de pH. *Congresso Brasileiro de Automática – Juiz de Fora – MG.*

Casillo, D. S. S., Maitelli, A. L. & Fontes, A. B. (2008c). Controle Preditivo Baseado no Modelo de *Hammerstein* com Compensação Iterativa. *XIII CLCA/VI CAC ISBN 978-980-11-1224-2 Mérida - Venezuela*.

Chan, K. H., Bao, J. & Whiten, W. J. (2004). Control of Discrete-Time Hammerstein System Based on the Passivity Theorem. *5Th Control Conference*. Vol. 2 pp. 997-982. Asian.

Clarke, D. W., Mohtadi, C. & Tuffs, P.S. (1987a). Generalized Predictive Control – Part I. The basic algorithm. *Automática, v.23, p. 137-148*.

Clarke, D. W., Mohtadi, C. & Tuffs, P.S. (1987b). Generalized Predictive Control – Part II. Extensions and interpretations. *Automática, v.23, p. 149-160*.

Coelho, M. C. S. (2002). Modelos de Hammerstein e de Wiener: conexões com modelos NARX e sua aplicação em identificação de sistemas não lineares. *Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais*.

Coelho, M. C. S., Aguirre, L. A. & Corrêa, M. V. (2002). Metodologia para Representação de Modelos NARX Polinomiais na Forma de Hammerstein e Wiener. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 3, No. 1 p. 71-80*.

Cutler, C. R. & Ramaker, B. L. (1979). Dymanic matrix control: a computer control algorithm. *AIChE Meeting, Houston, TX*.

Da Rosa, A. (2005). Desenvolvimento de Modelos Discretos de Volterra, usando Funções de Kautz. *Master's Thesis, DCA/FEEC/UNICAMP, Campinas/SP, Brasil*.

Ding B., Li, S. & Xi, Y. (2003). Stability Analysis of Generalized Predictive Control with Input Nonlinearity Based-on Popov's Theorem. *Acta Automatica Sinica Vol. 29, Nº 4*.

Ding, F., Shi, Y & Chen, T. (2007). Auxiliary model-based least-squares identification methods for Hammerstein output-error systems. *Systems & Control Letters 56, p. 373 – 380*.

Dunoyer, A., Burnham, K. J. & McAlpine T. S. (1997). Self-tuning control of an industrial pilot-scale reheating furnance: Design principles and application of a bilinear approach. *IEEE Proc. Control Theory*.

Findeisen, R. & Allgöwer, F. (2002). An Introduction to Nonlinear Model Predictive Control. *21st Benelux Meeting on Systems and Control*, Veldhoven.

Fink, A. & Nelles, O. (2001). Nonlinear Internal Model Control Based on Local Linear Neural Network. *Proc. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Tucson*, EUA, vol. 1, p. 117-122.

Faleiros, A. C & Yoneyama, T. (2002). Teoria Matemática de Sistemas. Ed. Arte & Ciência Ed. 1. ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

Fontes, A. B; Ângelo, E. & Maitelli, A. L. (2007). Bilinear Generalized Predictive Controller with Iterative Compensation. *17th IFAC World Congress*.

Fontes, A. B. (2002). Desenvolvimento e Avaliação de Controladores Preditivos Baseados em Modelos Bilineares. *Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal do Rio Grande do Norte*. Natal/RN

Fruzzeti, K.P., Palazoglu, A. & Mcdonald, K.A. (1997). Nonlinear Model Predictive Control Using Hammerstein Models. *Journal of Process Control*, vol. 7, n. 1, p. 31-41.

Gapski, P. B. (1994). Análise Convexa do Problema da Estabilidade Absoluta de Sistemas tipo Lur'e. *Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Elétrica. Universidade Estadual de Campinas*.

Garcia, C. (2005). Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos. *Editora USP, São Paulo*.

Goethals, I.; Pelckmans, K.; Hoegaerts, L.; Suykens, J. & De Moor, B. (2005). Subspace Intersection Identification of Hammerstein-Wiener Systems. *Kastellpark Arenberg, Leuven, Belgiunm*.

Gomes M. E. D.; Souza A. V. P.; Guimarães H. N. & Aguirre L. A. (2000). Investigation of Determinism in Heart Rate Variability. *CHAOS vol. 10 Nº 2.*

Gómez, J. C. & Baeyens, E. (2000). Hammerstein and Wiener Model Identification Using Rational Orthonormal Bases. *Universidad Nacional de Rosario Riobamba. Argentina*.

Gómes, J. C.; Jutan, A. & Baeyens E. (2004). Wiener model identification and predictive control of a pH neutralization process. *IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 151, No. 3*.

Goodhart S. G.; Burnham K. J. & James D. J. G. (1994). Bilinear Self-tuning Control of a high temperature Heat Treatment Plant. *IEEE Control Theory Appl. : Vol. 141, nº. 1*.

Grinits E. V. (2002). Proposta de Projeto de Controle de Sistemas Não Lineares Usando Backstepping Flexibilizado e Computação Evolutiva. *Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas.*

Gustafsson, T. K. & Waller, K. V. (1983). Dynamic modeling and reaction invariant control of pH. *Chemical Engineering Science, 38(3):389–398.*

Hapoglu, H., Karacan, S., Erten Koca, Z. S. & Alpbaz, M. (2001). Parametric and Nonparametric Model Based Control of a Packed Distillation Column. *Chemical Engineering and Processing*, vol. 40, n. 6, p. 537-544.

Henson, M. A. & Seborg, D. E. (1997). Nonlinear Process Control. *Prentice-Hall*, Upper Saddle River, NJ.

Henson, M. & Seborg, D. (1994). Adaptive nonlinear control of a ph neutralization process. *IEEE Trans, Control Syst. Technol., pp. 169-182.*

Hsu, L. (2002). Análise e Controle de Sistemas Dinâmicos II. Notas de aula. Programa de Engenharia Elétrica COPPE/UFRJ.

Katende, E. & Jutan, A. (1996). Nonlinear Predictive Control of Complex Processes. *Industrial Engineering Chemical Research*, Vol. 35, pp. 3539-3546.

Katende, E., Jutan, A. & Corless, R. (1998). Quadratic Nonlinear Predictive Control. *Ind. Eng. Chem. Res. Vol. 37, nº 7.*

Khalil, H. K. (2002). Nonlinear Systems. *Prentice Hall. 3th ed.*

Kwong & Wu Hong. (2005). Introdução ao Controle Preditivo com MATLAB. *Universidade Federal do São Carlos. EdUFSCar.*

Leontarits, I. J. & Billings, S. A. (1985a). Input-output parametric models for nonlinear systems – Part I: deterministic nonlinear systems.

Leontarits, I. J. & Billings, S. A. (1985b). Input-output parametric models for nonlinear systems – Part II: sthocastic nonlinear systems.

Liberzon, M. R. (2002). Absolute stability of dynamical systems (survey). *In 15th IFAC Triennial World Congress, volume 1, pages 2928{2933, Barcelona, Spain*.

Luyben, W. L. (1996). Process Modeling and Control Center. *McGraw-Hill Publishing*
Company, 2nd edition.

Lure, A. I. & Postnikov, V. N. (1945). On the Theory of stability of control systems. *Prikl. Mat. i Mehk., IX (5).*

Ljung, L. & Torkel, G. (1994). Modeling of dynamic systems. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersay 07632, 1st edition*.

Manzi, J. T. (1999). Modelagem e identificação de sistemas de neutralização. *Núcleo de Pesquisas em Ciências Ambientais. UNICAMP*.

McAvoy, T., Hsu, E. & Lowenthal, S. (1972). Dynamic of ph in controlled stirred tank reator. *Ind. Engineer Chemical Process, 1(11):67–70.*

McCulloch, W. S. & Pitts, W. H. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics, Vol. 5, 115-133.*

Medeiros, A. V. (2006). Modelagem de sistemas dinâmicos não lineares utilizando Sistemas Fuzzy, Algoritmos Genéticos e Funções de Base

Ortonormal. *Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas – SP*.

Menold, P. H., Allgöwer, F. & Pearson, R. K. (1997). Nonlinear Structure Identification of Chemical Process. *Computers Chemical Engineering*, vol. 21, sup. 1, p. S137- S142.

Muniz, L. A. R. (2004). Controle Preditivo Adaptativo Aplicado a um Reator de Pirólise Operando em Regime de Semi-Batelada. *Tese de Doutorado*. *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química. Universidade Federal de Santa Catarina*. Florianópolis. (p. 02).

Ogunnaike, B.A. & Ray, W.H. (1994). Process Dynamic, Modeling and Control. *Oxford University Press*, New York.

Oliveira, R. C. L. F. (2003). Caracterizações de Conjuntos de Matrizes Estáveis via Desigualdades Matriciais Lineares. *Dissertação. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. Universidade Estadual de Campinas*.

Pearson, R. K. & Pottmann, M. (2000). Gray-Box Identification of Block-Oriented Nonlinear Models. *Journal of Process Control*, vol. 10, n. 4, p. 301-315.

Popov, V. M. (1961). On the absolute stability of nonlinear controlled systems. *Automatika i Telemekhanika, 8: 961-970*.

Pyatnitsky, E. S. (1970). Absolute stability of non-stationary nonlinear systems. *Automatika i Telemekhanika, 1: 5-15*.

Qin, S. J., & Badgwell, T. A. (1997). An overview of industrial model predictive control technology. In J. C. Kantor, C. E. Garcia, & B. Carnahan (Eds.), *Chemical process control – V, Fifth international conference on chemical process control CACHE and AICHE*, (pp. 232–256).

Qin, S. J. & Badgwell, T. A. (2003). A Survey of Industrial Model Predictive Control Technology. *Control Engineering Pratice, v.11, p. 733-764*.

Rawlings, J.B. (2000). Tutorial Overview of Model Predictive Control. *IEEE Control Systems Magazine, vol. 20, p. 38-52*.

Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L & Papon, J. (1978). Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes. *Automática, v.14, p.413-428*.

Rugh, W. J. (1981). Nonlinear System Theory – The Volterra / Wiener Approach. *Originally published by The Johns Hopkins University Press.*

Santos, J. E. S., Sumar, R. R. & Coelho, A. A. R. (2005). Uma Solução para a Multiplicidade da Lei de Controle Preditivo para o Modelo de Hammerstein. *Departamento de Automação e Sistemas - Universidade Federal de Santa Catarina* Florianópolis, SC, Brasil.

Santos, J. E. S. (2007). Controle Preditivo Não linear para Sistemas de Hammerstein. Tese de Doutorado. *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal do Santa Catarina*. (p. 01).

Scheffer-Dutra, C.B., Núñez-Reyes, A. & Bordons, C. (2002). Controle Preditivo com Restrições Aplicado a Uma Planta Solar de Climatização. *XIV Congresso Brasileiro de Automática,* Natal, RN, p. 2798-2803.

Schetzen, M. (1980). The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems. *John Wiley & Sons*.

Shahraeini, Z.; Daneshpour, N.; Jahed Motlagh, M. R. & Poshtan, J. (2006). A Nonlinear Model Predictive Control System Based on Wiener Model. *ICARCV IEEE.*

Smith J. G.; Kamat, S. & Madhavan, K. P. (2007). Modeling of pH process using wavenet based Hammerstein model. *Journal of Process Control 17, p.551–561.*

Soni, A. S. (2006). Control-Relevant System Identification Using Nonlinear Volterra and Volterra-Laguerre Models. *Thesis. B. S. Chemical Enginnering, University Institute of Chemical Tecnologi, Mumbai, India.*

Tatibana, C. Y. & Kaetsu, D. Y. (2008). Uma introdução às Redes Neurais. *Home Page: http://www.din.uem.br/ia/neurais.*

Yakubovich, V. A. (1967). Frequency conditions of absolute stability of the control systems with some nonlinear and linear non-stationary blocks. *Automatika i Telemekhanika, 6: 5-30.*

Ylén, J. P. (2001). Measuring, modelling and controlling the pH value and the dynamic chemical state. *Tese. Helsinki: University of Technology, Control Engineering Laboratory, http://lib.hut.fi/Diss/.*

Zhao, Y.; Liu, G. & Rees, D. (2008). Networked Predictive Control Systems Based on the Hammerstein Model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – II: Express Briefs, Vol. 55, Nº. 5.*

Zou, Z.Y., Liu, G.P. & Guo, N. (1994). Predictive Control of Nonlinear Hammerstein Systems and Aplication to pH Process. *School of Mechanical, Materials, Manufacturing Engineering and Management, University of Nottingham*, U.K.