IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.015/05

Aspectos Geométricos dos Modelos de Toda.

Fernando David Marmolejo Schmidt

Orientador

Prof. Dr. José Francisco Gomes.

Agosto de 2005

Agradecimentos

Primeiro gostaria de agradecer a este abençoado país por ter me recebido com os braços abertos desde o primeiro dia.

Agradeço enormemente ao Prof. José Francisco Gomes, por todo seu apoio, colaboração e sobre tudo, pela liberdade na escolhia dos tópicos acadêmicos do meu interesse.

Ao professor Zimerman pela sua agudeza na hora de enxergar os problemas do trabalho, assim como por seu fino e excelente senso de humor.

Ao Oscar, Juan Pablo e Boris pela agradável companhia que são, mesmo tendo nos visto tão pouco. Também agradeço ao German, pelas boas conversas sobre *todas as coisas* e ao julio, pelas correções do português.

Agradeço *infinitamente* a Mariza por ter ficado do outro braço da balança desde o comecinho, tornando-se minha paz e equilíbrio.

Agradeço e dedico este trabalho a minha mãe que em silencio e imperceptivelmente, soube me colocar nos lugares certos e nos momentos certos.

Ao IFT por estes dois anos de crescimento pessoal e intelectual.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos as estruturas geométricas e algébricas subjacentes aos modelos de Toda. Primeiramente, vemos como as equações de Toda são consequência da condição de curvatura nula de um certo fibrado principal holomórfico e posteriormente, introduzimos a formulação Lagrangiana dos mesmos, como perturbações integráveis de um modelo de WZW calibrado num espaço quociente. Terminamos com um estudo da dualidade própria destas teorias.

Palavras Chaves:

Física Matemática, Modelos de Toda, Sistemas Integráveis, Geometria Diferencial.

Áreas do conhecimento:

Sistemas Integráveis, Teoría de Campos.

Abstract

In this work we study the differential geometry formulation of Toda models. Firstly showing how the Toda equations are consequence of the zero curvature condition of a given holomorfic principal bundle and later introducing the Lagrangian formulation of the Toda models as integrable perturbations of a gauged WZW model in a special coset. We end up with a study of the duality properties of such class of theories.

Keywords:

Mathematical Physics, Toda Models, Integrable Systems, Differential Geometry.

Knowledge areas :

Integrable Systems, Field Theory.

Conteúdo

Capítulo 1

◎ Introdução.

As teorias de campos ou modelos em *duas* dimensões estão aparentemente longe da realidade física segundo os olhos mais tradicionais, mas existem varias razões que justificam o seu estudo, seja desde o ponto de vista físico ou desde o ponto de vista puramente matemático. O exemplo histórico mais contundente e de maior sucesso até agora tem sido a teoria de cordas, a qual tenta materializar o velho sonho da unificação das forças da natureza num marco só. Nessa procura, a teoria tem sido radical na sua maneira de enxergar a natureza no sentido que ela envolve, no fundo, uma física puramente bidimensional assim como uma matemática bastante sofisticada. Por outro lado, a complexidade de algumas teorias de campos se simplifica em dimensões menores sem perder seu conteúdo físico mais relevante e é por isso, que os modelos bidimensionais tem sido excelentes laboratórios para testar novas idéias e desenvolver novos métodos para construir soluções exatas. Por exemplo, na quantização não perturbativa de teorias de gauge, gravitação e a própria teoria de cordas.

O interesse na área dos modelos exatamente solúveis, leva naturalmente à teoria dos sistemas integráveis a qual foi introduzida inicialmente por Liouville na mecânica clássica. A condição de *integrabilidade*, pelo menos em teorias de campos em duas dimensões, é aparentemente tão restritiva que os sistemas que a apresentam não são suscetíveis de ter uma aplicação física real e não passam de ter um interesse matemático e estético. Porém, a presença das estruturas integráveis na física teórica de ponta é cada vez maior a medida que se analisam os regimes de energia mais altos de algumas destas teorias, e a justificação do seu estudo é por razões cada vez mais físicas. Por exemplo, em teorias de super Yang-Mills, teoria de cordas não perturbativa e correspondências entre teorias de gauge e gravitação [30],[31],[32].

Em duas dimensões, os modelos de Toda apresentam varias características interessantes. Por exemplo, são modelos relativísticos, com invariância conforme, exatamente solúveis e interagentes. Além de possuir essas características, elas apresentam dualidade, o qual leva a resultados interessantes como o intercâmbio entre as cargas topológicas e de Noether dos sólitons de alguns dos seus modelos. Além disso, servem como um marco unificador para diferentes teorias integráveis conhecidas e que aparentemente não tinham nada em comum. Por exemplo, os modelos de sine-gordon, liouville, sinh-gordon, Lund-Regge etc. são todos modelos de Toda associados a alguma estrutura algébrica subjacente. Uma das vantagens na construção geral e sistemática dos modelos de Toda, são as generalizações dos modelos anteriormente mencionados assim como as possíveis modificações que podem ser efetuadas e exploradas com o objetivo de obter novas aplicações. Por exemplo, uma generalização do modelo de sinh-Gordon dada pelo modelo de Lund-Regge serve para descrever a propagação de uma corda em presença de um buraco negro [13] quando se elimina o potencial, ou serve também para descrever vórtices em superfluidos [29] quando se recupera a contribuição do potencial, é dizer, a versatilidade nas aplicações é bastante grande e promissora.

Nessa dissertação, não pretendemos enfatizar nas aplicações dos modelos de Toda mas se na sua estrutura geométrica e algébrica [1],[2] subjacente e o *principal* objetivo é o desenvolvimento sistemático de um mecanismo geral que permita a construção dos modelos de Toda. Primeiramente, introduzindo o *principio dinâmico da curvatura nula* junto com as denominadas *condições de grau* nos potenciais de gauge da curvatura associada ao problema, com o objetivo de deduzir as equações de Toda e posteriormente, nos centraremos na sua formulação Lagrangiana em termos de um *modelo de WZW calibrado*, fechando com um par de exemplos ilustrativos e deixando varias perguntas e problemas em aberto. A exposição pretende ser o mais autocontida possível com o objetivo de deixar a sensação de que o começo e o final estão ligados por uma linha coerente de pensamento.

Mais especificamente, o trabalho está estruturado como segue:

No segundo capitulo, damos os preliminares geométricos necessários para a formulação do problema, começando com as definições dos grupos de Lie reais e complexos vistos e sua relação com a geometria diferencial e introduzindo a forma de Maurer-Cartan que tem um papel fundamental em todo o trabalho. Posteriormente, a atenção se centra na estrutura algébrica das álgebras de Lie onde se definem os sistemas de raízes e as decomposições de álgebras em termos de auto-espaços de algum operador de gradação, assim como a introdução das álgebras de Borel e parabólicas. Finalmente, se fundem os conceitos de variedade complexa (o espaço-tempo) e de grupo de Lie complexo (estrutura algébrica subjacente) num fibrado principal holomórfico e se introduzem as variedades Flag como um espaço coset entre um grupo de Lie complexo e um grupo parabólico, isto é feito com o objetivo de que a dedução das equações não lineares de Toda seja mais natural e geometricamente mais clara. Uma vez feito isso, nos movemos ao próprio problema. No terceiro capitulo, introduzimos a formulação da curvatura nula dos modelos de Toda em termos de um fibrado principal holomórfico trivial com curvatura nula, e as condições de grau em termos de distribuições holomórficas sobre variedades Flag associados com os subgrupos parabólicos de um grupo de Lie complexo. Posteriormente derivamos o par de Lax e um grupo de equações matriciais não lineares como conseqüência da trivialidade da curvatura, e que são identificadas como as equações de Toda de grau superior. Após isso, nos restringimos às equações de Leznov Saveliev que correspondem ao menor grau (grau um) e vemos que no caso mais simples, isto é as equações de Toda Abelianas, aparte da integrabilidade das equações elas possuem invariância conforme, e deduzimos a equação de Toda mais simples que resulta ser a equação de Liouville. Uma vez que temos as equações movimento, nos perguntamos pela sua Lagrangiana. Uma pista de que os modelos de Toda correspondem a algum modelo WZW é dada pelas proprias equações de movimento, as quais na ausência de potencial se reduzem a simples leis de conservação de correntes quirais. No capitulo quatro, construímos o modelo WZW que é o modelo padrão na descrição de correntes quirais bosônicas, posteriormente calibramos o modelo para efetuar uma redução ao subgrupo de grau zero que é onde se definem e se parametrizam os campos de Toda, e introduzimos o potencial que da origem à Lagrangiana de Toda com o qual reproduzimos as equações de Leznov-Saveliev. Concluímos que os modelos de toda são perturbações integráveis de modelos de WZW os quais não quebram a invariância conforme própria do modelo dada a especial forma do potencial e que, equivalentemente, correspondem a perturbações de modelos sigma não lineares em presença de métrica e torçao. Posteriormente, introduzimos vínculos adicionais nas equações de movimento como conseqüência da existência de uma simetria do potencial. Ao calibrar essa simetria, com o objetivo de implementar os vínculos na Lagrangiana, reduzimos o modelo de Toda de um grupo a um coset e vemos que este procedimento introduz singularidades na Lagrangiana as quais geram singularidades no espaço de fundo do modelo sigma. Porém, a inclusão dos vínculos pode ser feita de duas maneiras equivalentes, axial ou vetorialmente. Uma vez enxergamos os modelos de Toda como modelos sigma, nos perguntamos sobre a natureza das duas formas de calibração e em que sentido elas são equivalentes. No ultimo capitulo, capitulo cinco, abordamos a questão da dualidade T clássica no contexto dos modelos sigma onde vemos que uma simples transformação canônica, gera mudanças altamente não triviais na geometria do espaço de fundo mantendo o potencial invariante. Posteriormente, verificamos que no caso dos modelos de toda con singularidades, os calibres axial e vetorial são equivalentes, no sentido que existe uma transformação canônica entre as ações correspondentes e vemos que a dualidade axial-vetorial é uma manifestação da dualidade T de um par de modelos sigma singulares. Finalmente, vem o primeiro exemplo, a construção do modelo de Toda singular mais simples; o modelo de Lund-Regge onde se evidenciam as propriedades mais relevantes como a dualidade, com a notável característica de que a singularidade de uma teoria desaparece na outra. No segundo exemplo, consideramos a construção com uma superalgebra de Lie, a qual visa dar uma extensão natural com férmions do modelo puramente bosônico de Lund-Regge. Porém, chegamos a abertura de uma serie de perguntas as quais deixamos em aberto para serem respondidas posteriormente.

Capítulo 2

◎ Preliminares Geométricos.

Nesse capítulo, lembraremos rapidamente alguns fatos e resultados sobre grupos de Lie, álgebras de Lie, fibrados principais, cosets e variedades Flag que serão vitais sobre tudo no capitulo seguinte. O objetivo é introduzir definições, conceitos e fixar a notação que será usada exaustivamente na dedução do par de Lax dos modelos de Toda no capítulo dois e somente enfatizaremos as idéias chaves requeridas para manter uma linha lógica. A exposição é mais informativa do que autosustentada e não pretende ir além dos formalmente rigorosos, completos e belos artigos e livros existentes sobre os temas nos quais esse capitulo está baseado [1],[2],[3],[4].

2.1 Geometria dos Grupos de Lie.

2.1.1 Grupos, Álgebras de Lie e a forma de Maurer-Cartan .

Como é sabido, os elementos num grupo de Lie são multiplicados para gerar outros elementos no mesmo grupo. Porém, um grupo de Lie pode ser visto inteiramente como uma variedade diferenciável onde seus elementos podem ser multiplicados. Vamos então introduzir a definição de grupo de Lie desse esse ponto de vista.

Definição 1 *Um grupo de Lie real é uma variedade diferenciável real dotada de uma estrutura de grupo onde as seguintes operações de grupo são diferenciáveis:*

$$\begin{aligned} &i) \quad \cdot : G \rightarrow G \quad , \quad (a,b) \rightarrow a \cdot b \equiv ab; \\ &ii) \ ^{-1} : G \rightarrow G \quad , \quad a \rightarrow a^{-1} \ . \end{aligned}$$

O grupo G possui dois tipos de transformações $G \rightarrow G$ geradas pelo produto. A translação *esquerda* L_a e a translação *direita* R_a de g são dadas pelos mapeamentos:

$$L_a : G \rightarrow G \quad , \ L_a g \equiv ag, \tag{2.1}$$

$$R_a : G \rightarrow G \quad , \ R_a g \equiv ga, \tag{2.2}$$

com as propiedades:

$$L_a \circ L_b = L_{ab}, \ R_a \circ R_b = R_{ba}, \ L_a \circ R_b = R_b \circ L_a, \ (L_a)^{-1} = L_{a^{-1}} \ , \ (R_a) = R_{a^{-1}}. \tag{2.3}$$

Por construção, as translações L_a e R_a são difeomorfismos $G \to G$ do grupo nele mesmo e os mapeamentos (2.1) e (2.2) induzem os *pull-forward* $L_{a*} : T_g(G) \to T_{ag}(G)$ e $R_{a*} : T_g(G) \to T_{ga}(G)$, que são isomorfismos entre os espaços tangentes envolvidos.

A família dos campos vetoriais definidos em G é denotada por $\mathfrak{X}(G)$ similarmente como no caso das variedades ordinárias. Porém, a estrutura de grupo *permite* a existência de uma classe especial de campos vetoriais caracterizados por uma invariância sob a ação do grupo.

Um campo vetorial *invariante esquerdo* $X \in \mathfrak{X}(G)$ satisfaz a condição:

$$L_{a*}X_g = X_{ag} \text{ onde } X_g \equiv X(g), \tag{2.4}$$

o que significa que o vetor transformado $X' \in T_{ag}(G)$ sob as translações esquerdas $L_a : g \to ag$ coincide com o valor do campo vetorial X no ponto ag. Se o conjunto de vetores base de $T_e(G)$ ($\dim T_e(G) = n$) é conhecido, sempre é possível encontrar n campos vetoriais linearmente independentes em todo ponto do grupo G, ou seja, um grupo de Lie e uma variedade *paralelisável*. Um vetor $X_e \in T_e(G)$ define um único campo vetorial invariante esquerdo em G. De fato, uma vez que as translações L e R são difeomorfismos, a seguinte relação é válida:

$$L_{a*}\left[X,Y\right]_g = \left[L_{a*}X_g, L_{a*}Y_g\right] = \left[X,Y\right]_{ag}, \tag{2.5}$$

e o mapeamento $T_e(G) \to T_g(G)$ dado por $X_e \to X_g$ é um isomorfismo $T_e(G) \cong T_g(G) \cong \mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g}$ denota o conjunto dos campos invariantes esquerdo definidos em G. Isto se deve ao fato de que todos os vetores nos espaços $T_e(G)$ e $T_g(G)$ satisfazem a condição (2.4). Além disso, (2.5) implica que os campos vetoriais em $\mathfrak{g}$ formam uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie dos campos vetoriais em $\mathfrak{X}(G)$; isto é, se $X, Y \in \mathfrak{g}$ então $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ e só precisamos conhecer o espaço $T_e(G)$ na identidade do grupo.

Uma base para $T_e(G)$ dada por (X_i) $(i = 1, ..., \dim G)$ satisfaz:

$$\left[X_i, X_j\right]_g = C_{ij}^k(e)X_{gk} \quad g \neq e, \tag{2.6}$$

como conseqüência de (2.5), o que significa que as funções C_{ij}^k só dependem do seu valor na identidade do grupo. Elas são as *constantes de estrutura* do grupo de Lie e caracterizam o grupo completamente. Devido ao isomorfismo $T_e(G) \cong T_g(G) \cong \mathfrak{g}$, definimos sem ambigüidade $\mathfrak{g} \equiv T_e(G)$ e damos a $\mathfrak{g}$ um nome mais apropriado.

Definição 2 *O conjunto de campos vetoriais invariantes esquerdos $\mathfrak{g} = T_e(G)$ com o colchete de Lie $[\,,]$: $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ se denomina álgebra de Lie*[1] *real do grupo de Lie real G .*

A conexão entre álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e grupo de Lie G é dada pelas *curvas integrais* geradas pelos campos vetoriais invariantes esquerdo. Cada $X \in \mathfrak{g}$ gera uma única curva ou *subgrupo abeliano*

[1] Das propriedades do colchete de Lie para campos vetoriais segue-se que $[\,,]$: $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é bilinear, antissimétrico ($[X,Y] = -[Y,X]$) e satisfaz a identidade de Jacobi ($[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$). Em geral, uma álgebra de Lie se define como um espaço vetorial sobre um campo $\mathbb{k}$ junto com uma operação (colchete) que satisfaz as três propriedades.

denotado por $\Phi^X(t) \subset G$ onde o *mapeamento exponencial* definido por $\exp_G : \mathbb{R} \times \mathfrak{g} \to g(X,t) \in \Phi^X(t)$ com $g(X,t) = \exp(tX)$ faz explicita a conexão mencionada. Por exemplo, a curva $g\exp(tX) \in G$ é uma curva integral de X através de $g \in G$; isto se verifica ao notar que:

$$\frac{d}{dt} g\exp(tX) \mid_{t=0} = L_{g*} X_e = X_g. \tag{2.7}$$

é o mapeamento diferencial associado à translação L_g.

As translações (2.1) e (2.2) não deixam pontos invariantes em G. Porém, a *conjugação* $j_g : G \to G$ definida como $j_g(h) \equiv (L_g \circ R_{g^{-1}})h = ghg^{-1}$ tem à identidade do grupo como único elemento invariante e além disso, é um homomorfismo no proprio grupo. Com esse homomorfismo se constrói uma representação do grupo na própria álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e é portanto a representação mais *confiável* que pode ser construída.

Definição 3 *A representação adjunta $Ad : g \in G \to Ad(g) \in GL(\mathfrak{g})$ do grupo de Lie G no espaço vetorial $\mathfrak{g}$ e a representação adjunta $ad : Y \in \mathfrak{g} \to ad(Y) \in GL(\mathfrak{g})$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no espaço vetorial $\mathfrak{g}$ são definidas respectivamente por:*

$$Ad(g)X \equiv (L_g \circ R_{g^{-1}})_* X \quad , \quad X \in \mathfrak{g}; \tag{2.8}$$

$$ad(Y)X \equiv [Y, X] \quad , \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{2.9}$$

A conexão entre as representações adjuntas de G e $\mathfrak{g}$ é fornecida de novo pelo mapeamento exponencial, ao tomar $g = \exp Y \in G$, temos a relação:

$$Ad(g)X = gXg^{-1} = [\exp(ad(Y))]\, X, \tag{2.10}$$

onde $ad(Y) \equiv [Y,\ ]$, e dado que uma base de $\mathfrak{g}$ satisfaz $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$, o elemento de $GL(\mathfrak{g})$ que representa a $X_i \in \mathfrak{g}$ é a matriz $(\dim G) \times (\dim G)$-dimensional $(M_i)_j^k = C_{ij}^k$ dada pelas constantes de estrutura.

A *forma de Killing* K da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a forma simétrica bilinear $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ na representação adjunta definida por:

$$K(X,Y) \equiv Tr(ad(X)ad(Y)). \tag{2.11}$$

$$\rho_{ij} = Tr(ad(X_i)ad(X_j)) = cons \tag{2.12}$$

K é invariante sob conjugações, ou seja, com $g = \exp Z \in G$, a forma de Killing satisfaz a relação de invariância $K(Ad(g)X, Ad(g)Y) = K(X,Y)$, ou equivalentemente:

$$K(ad(Z)X, Y) + K(X, ad(Z)Y) = 0. \tag{2.13}$$

A forma de Killing define um isomorfismo $\nu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ dado por:

$$\langle \nu(X), Y \rangle = K(X,Y), \tag{2.14}$$

se ela é *não degenerada*, ou seja, quando det $[K(X_i,Y_j)] \neq 0$ para qualquer X_i, Y_j na base de $\mathfrak{g}$. Quando a representação é arbitrária, a forma simétrica bilinear $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida simplesmente pelo traço das matrizes $M(X)$, $M(Y)$ que representam os elementos de $\mathfrak{g}$:

$$B(X,Y) \equiv Tr\,(M(X)M(Y)) = \Upsilon K(X,Y), \tag{2.15}$$

onde Y é o *indice de Dynkin* da representação. Assumiremos sempre que B é não degenerada.

Usando as translações direitas e esquerdas pode-se definir uma 1-forma que liga os espaços tangentes $T_g(G)$ e $\mathfrak{g}$.

Definição 4 *A forma de Maurer-Cartan θ de um grupo de Lie real G é uma 1-forma com valores na álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, $\theta \in \mathfrak{g} \otimes T^*(G) : T(G) \rightarrow \mathfrak{g}$ definida por*

$$\theta : X_g \in T_g(G) \rightarrow \theta(X_g) \equiv (L_{g^{-1}})_* X_g = (L_g)_*^{-1} X_g = X_e \in \mathfrak{g}. \tag{2.16}$$

Como uma definição alternativa pode-se tomar qualquer forma com valores em $\mathfrak{g}$ que satisfaça $\theta(X_g) = X_e$.

A forma θ é invariante sob translações esquerdas e se transforma com $Ad(g^{-1})$ sob translações direitas, ou seja:

$$(L_g^*\theta) = \theta, \tag{2.17}$$
$$(R_g^*\theta) = Ad(g^{-1}) \circ \theta, \tag{2.18}$$

onde L_g^* e R_g^* são os *pull-back* que atuam sobre formas.

A forma θ realmente toma valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se θ^i é a base do espaço dual $T^*(G)$ satisfazendo a relação $\langle \theta^i, X_i \rangle = \delta^i_j \; \forall \; g \in G$ temos que:

$$\theta \equiv X_{ei} \otimes \theta^i_g, \tag{2.19}$$

onde θ^i_g é a base de $T^*_g(G)$. Por exemplo, ao atuar sobre os vetores base de $T_g(G)$ obtemos:

$$\theta(X_{gj}) = X_{ei}\theta^i_g(X_{gj}) = X_{ej},$$

o que fornece o mapeamento $\theta : T_g(G) \rightarrow \mathfrak{g}$ requerido.

Uma 1-forma arbitraria $\omega : TM \rightarrow \mathbb{R}$ sobre uma variedade M cumpre com a relação:

$$d\omega(X,Y) = X\,[\omega(Y)] - Y\,[\omega(X)] - \omega([X,Y]), \tag{2.20}$$

onde X, Y são campos vetoriais em M e $d\omega : TM \otimes TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma 2-forma. Considerando θ como uma 1-forma somente, a derivada exterior da forma de Maurer-Cartan satisfaz a relação:

$$d\theta(X_g, Y_g) = -\theta([X_g, Y_g]) = -\theta([X,Y]_g) = -\,[X,Y]_e \in \mathfrak{g}.$$

Agora, duas 1-formas arbitrarias ζ e η com valores numa álgebra de Lie geram uma 2-forma com valores na mesma álgebra por meio do comutador $[\zeta, \eta] \equiv \zeta \wedge \eta + \eta \wedge \zeta$. Tomando $\eta = \zeta = \theta$ temos $[\theta, \theta] = 2\theta \wedge \theta$ e, ao usar a avaliação:

$$[\theta,\theta](X_g,Y_g) = 2\,[\theta(X_g),\theta(Y_g)] = 2\,[X,Y]_e \in \mathfrak{g},$$

as propriedades de $d\theta : T(G) \otimes T(G) \to \mathfrak{g}$ como 2-forma e como elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ ficam codificadas na *equação de estrutura de Maurer-Cartan:*

$$\Omega \equiv d\theta + \theta \wedge \theta = 0, \tag{2.21}$$

sendo um mapeamento trivial $\Omega : T(G) \otimes T(G) \to 0$. Essa propriedade será fundamental posteriormente.

O grupo *geral linear real* de dimensão n denotado por $GL(n,\mathbb{R})$ é identificado com $\mathbb{R}^{n^2}$. As coordenadas de $a \in GL(n,\mathbb{R})$ são dadas pelas n^2 *funções coordenadas* g^i_j $i,j = 1,...,n$ definidas por $g^i_j(a) \equiv a^i_j$, $(g^{-1})^i_j(a) \equiv (a^{-1})^i_j$ e o grupo $GL(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie sob a multiplicação usual de matrizes. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é identificada com a álgebra $\mathfrak{gl}(\mathrm{n},\mathbb{R})$ de $GL(n,\mathbb{R})$ onde um vetor tangente arbitrário $X_b \in T_b(GL(n,\mathbb{R}))$ se escreve como $X_b = X^i_j(b)\left(\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right)_b$ e as componentes do vetor satisfazem:

$$X^i_j(b) = \langle dg^i_j, X_b\rangle = dg^i_j(X_b) = X_b(g^i_j),$$

onde as formas dg^i_j são uma base do espaço dual $T^*_b(GL(n,\mathbb{R}))$ que obedece a relação canônica $\left\langle dg^i_j, \frac{\partial}{\partial g^k_l}\right\rangle = \delta^i_k\delta^l_j$ em todo $GL(n,\mathbb{R})$.

A equação (2.7) implica:

$$X_{ab} = (L_{a*}X_b) = aX_b,$$

o que mostra explicitamente o caráter invariante esquerdo do campo vetorial. As componentes do vetor satisfazem:

$$(X_{ab})^i_j = (L_{a*}X_b)^i_j = a^i_k X^k_j(b),$$

e devido ao fato de que $(L_{a*}X_b)(f) = X_b(L^*_a f)$ onde $f \in \mathfrak{F}(G)$ pertence ao conjunto de funções diferenciáveis definidas em G , as funções coordenadas satisfazem a lei de transformação:

$$L^*_a g^i_j = a^i_k g^k_j$$

Isto traz como conseqüência que qualquer campo vetorial $X_a \in T_a(GL(n,\mathbb{R}))$ cumpre com a seguinte cadeia de igualdades:

$$dg^i_j(X_a) = X_a(g^i_j) = (L_{a*}X_e)(g^i_j) = X_e(L^*_a g^i_j) = X_e(a^i_k g^k_j) = a^i_k X_e(g^k_j) = g^i_k(a)X^k_l(e),$$

o que implica que o mapeamento $\theta : T_a(GL(n,\mathbb{R})) \to \mathfrak{gl}(\mathrm{n},\mathbb{R})$ dado por $[\theta(X_a)]^i_j = (X_e)^i_j$ é a versão matricial de (2.16) e:

$$\theta \equiv g^{-1}dg, \tag{2.22}$$

é a forma matricial da 1-forma de Maurer-Cartan. Finalmente, com

$$\begin{aligned} dg^{-1} &= -g^{-1}(dg)g^{-1}, \\ d\theta &= dg^{-1} \wedge dg = -(g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}dg) = -\theta \wedge \theta, \end{aligned}$$

a 1-forma θ satisfaz:

$$\Omega = d\theta + \theta \wedge \theta = 0,$$

que é (2.21), e sob translações esquerdas e direitas transforma-se segundo as relações:

$$(L_a^* \theta) = \theta,$$
$$(R_a^* \theta) = Ad(a^{-1})\theta = a^{-1}\theta a,$$

que são (2.17) e (2.18) respectivamente.

Até agora, as variedades reais consideradas só tinham duas estruturas, uma diferenciável e outra de grupo que tornavam às variedades num grupo de Lie real. Porém, pode-se adicionar consistentemente uma estrutura complexa a uma variedade real com estrutura de grupo para se ter uma variedade complexa com a mesma estrutura de grupo, e elevar o status de grupo de Lie real ao de grupo de Lie complexo. Mas antes de defini-lo é melhor lembrar alguns fatos sobre variedades complexas.

Uma variedade complexa M de dimensão $\dim_{\mathbb{C}} = m$ pode ser vista como uma variedade real denominada a *realificação* $M_{\mathbb{R}}$ de M . Isto se deve ao fato de que localmente numa carta podemos identificar $\mathbb{C}^m$ com $\mathbb{R}^{2m}$ e então $\dim_{\mathbb{R}} M_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} M = 2m$. Localmente, as funções $z^i = x^i + iy^i$, $i = 1, ..., m$ são coordenadas na variedade complexa M e as x^i , y^i são coordenadas na realificação $M_{\mathbb{R}}$. Para qualquer ponto $p \in M_{\mathbb{R}}$ os vetores $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ e $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p$ formam uma base do espaço tangente $T_p(M_{\mathbb{R}})$ de dimensão $2m$.

O mapeamento $\mathbb{R} - linear$ $J_p^M : T_p(M_{\mathbb{R}}) \to T_p(M_{\mathbb{R}})$ definido por:

$$J_p^M\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p\right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p, -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right),$$

satisfaz $\left(J_p^M\right)^2 = -1$, é uma estrutura complexa em $T_p(M_{\mathbb{R}})$ e é independente da escolha de cartas que contém o ponto p.

O espaço $T_p(M_{\mathbb{R}})$ é um espaço vetorial sob o campo $\mathbb{R}$ e ao estendê-lo ao campo $\mathbb{C}$ dos números complexos, construímos a *complexificação* $(T_p(M_{\mathbb{R}}))^{\mathbb{C}} \equiv T_p^{\mathbb{C}}(M)$ do espaço vetorial real $T_p(M_{\mathbb{R}})$ onde a base de $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ é formada por combinações lineares complexas da base real de $T_p(M_{\mathbb{R}})$. Ao estender J_p^M como mapeamento $\mathbb{C} - linear$ atuando na complexificação $T_p^{\mathbb{C}}(M)$, o espaço tangente é dividido numa soma direta de espaços vetoriais complexos e isomorfos dada por:

$$T_p^{\mathbb{C}}(M) = T_p^{(1,0)}(M) \oplus T_p^{(0,1)}(M), \tag{2.23}$$

onde o espaços:

$$T_p^{(1,0)}(M) \equiv \left\{X \in T_p(M_{\mathbb{R}}) \mid J_p^M X = iX\right\}, \tag{2.24}$$
$$T_p^{(0,1)}(M) \equiv \left\{X \in T_p(M_{\mathbb{R}}) \mid J_p^M X = -iX\right\}, \tag{2.25}$$

são gerados pelos vetores *(anti)-holomorficos*

$$\partial_{ip} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_p \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - i\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p, \tag{2.26}$$
$$\overline{\partial}_{ip} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}\right)_p \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + i\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p,$$

de *bigrau* $(1,0)$ e $(0,1)$ respectivamente, e que satisfazem a equação de valores próprios:

$$J_p^M \ (\partial_{ip}) = i \ (\partial_{ip}),$$
$$J_p^M \ (\overline{\partial}_{ip}) = -i \ (\overline{\partial}_{ip}),$$

Ou seja, a decomposição (2.23) é caracterizada pelos autoespaços $T_p^{(1,0)}(M)$ e $T_p^{(0,1)}(M)$ da estrutura complexa J_p^M. Dado que $T_p^{(0,1)}(M) = \overline{T_p^{(1,0)}(M)}$ onde a barra denota conjugação complexa, temos que $\dim_{\mathbb{C}}(T_p^{\mathbb{C}}(M)) = \dim_{\mathbb{R}}(T_p(M_{\mathbb{R}})) = 2m$ e, segundo (2.23), qualquer vetor $X \in T_p^{\mathbb{C}}(M)$ tem uma única decomposição $X = X^{(1,0)} + X^{(0,1)}$ no ponto $p \in M_{\mathbb{R}}$. Esta decomposição é dada pelos operadores lineares de projeção $P_p^M : T_p^{\mathbb{C}}(M) \to T_p^{(1,0)}(M)$ e $\overline{P}_p^M : T_p^{\mathbb{C}}(M) \to T_p^{(0,1)}(M)$ definidos por:

$$P_p^M \equiv \frac{1}{2}\left(I - iJ_p^M\right), \tag{2.27}$$
$$\overline{P}_p^M \equiv \frac{1}{2}\left(I + iJ_p^M\right), \tag{2.28}$$

que cumprem com a relação padrão $P_p^M + \overline{P}_p^M = I$.

A dimensão do espaço $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ é o dobro da dimensão de M e não é clara a relação entre o espaço tangente $T_p(M)$ da variedade complexa e a complexificação do espaço tangente da realificação $M_{\mathbb{R}}$, ou seja $T_p^{\mathbb{C}}(M)$. Esta conexão é dada pelos mapeamentos $\phi_1 : T_p(M) \to T_p^{(1,0)}(M)$ e $\phi_2 : T_p(M) \to T_p^{(0,1)}(M)$ definidos como se segue: consideramos um vetor complexo $X \in T_p(M)$ como um vetor real de $T_p(M_{\mathbb{R}})$ (ou seja, $(a+ib)X \to (a+J_p^M b)X$), depois como um vetor real da complexificação $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ e finalmente projetamos nos subespaços $T_p^{(1,0)}(M)$ e $T_p^{(0,1)}(M)$. Esses mapeamentos, reescritos como:

$$\phi_1 : X \to X_{\mathbb{R}} \in T_p(M_{\mathbb{R}}) \to \widetilde{X}_{\mathbb{R}} \in T_p^{\mathbb{C}}(M) \to P_p^M \widetilde{X}_{\mathbb{R}} \in T_p^{(1,0)}(M),$$
$$\phi_2 : X \to X_{\mathbb{R}} \in T_p(M_{\mathbb{R}}) \to \widetilde{X}_{\mathbb{R}} \in T_p^{\mathbb{C}}(M) \to \overline{P}_p^M \widetilde{X}_{\mathbb{R}} \in T_p^{(0,1)}(M),$$

são isomorfismos *(anti)-lineares* entre $T_p(M)$ e $T_p^{(1,0)}(M)$, $T_p^{(0,1)}(M)$ respectivamente, onde $\phi_2 = \overline{\phi}_1$. Equivalentemente, são os *isomorfismos* $\phi_1 : T_p(M) \to T_p^{(1,0)}(M)$ e $\phi_2 : \overline{T}_p(M) \to T_p^{(0,1)}(M)$ e finalmente, a complexificação $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ tem a seguinte decomposição:

$$T_p^{\mathbb{C}}(M) \cong T_p(M) \oplus \overline{T}_p(M). \tag{2.29}$$

Assim, o espaço tangente $T_p(M)$ à variedade complexa é identificado como o espaço dos vetores holomórficos $T_p^{(1,0)}(M)$ de bigrau $(1,0)$ gerado pelos vetores $\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_p$, onde agora as dimensões satisfazem $\dim_{\mathbb{C}} T_p(M) = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} T_p^{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{C}} T_p^{(1,0)}(M) = \dim_{\mathbb{C}} T_p^{(0,1)}(M) = \dim_{\mathbb{C}} M = m$, que é o esperado para um isomorfismo. Notemos que com a identificação feita, as coordenadas e as derivadas satisfazem agora a relação de consistência $\frac{\partial}{\partial z^j} z^i = \delta^i_j$, que é a versão complexa da identidade $\frac{\partial}{\partial x^j} x^i = \delta^i_j$ válida nas variedade reais.

Para qualquer mapeamento diferenciável arbitrário $\varphi : M \to N$ entre duas variedades complexas M , N temos o mapeamento $\mathbb{R} - linear$ associado $\phi_{*p} : T_p(M_{\mathbb{R}}) \to T_{\varphi(p)}(N_{\mathbb{R}})$ $\forall\ p \in M$ entre os espaços tangentes às realificações $M_{\mathbb{R}}$ e $N_{\mathbb{R}}$. Dizemos que φ é *(anti)-holomórfico* se o mapeamento real associado ϕ_{*p} satisfaz:

$$\varphi_{*p} \circ J_p^M = J_{\varphi(p)}^N \circ \varphi_{*p}, \tag{2.30}$$

$$\varphi_{*p} \circ J_p^M = -J_{\varphi(p)}^N \circ \varphi_{*p}. \tag{2.31}$$

Ao estender φ_* como mapeamento $\mathbb{C} - linear$ (similar à extensão feita para J_p^M) nas respectivas complexificações $\varphi_{*p} : T_p^{\mathbb{C}}(M) \to T_{\varphi(p)}^{\mathbb{C}}(N)$ temos que φ_* satisfaz a condição de realidade:

$$\overline{\varphi}_* = \varphi_*. \tag{2.32}$$

O conjunto de campos vetoriais diferenciáveis complexos definidos numa variedade complexa M é denotado como $\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M)$ e tem a decomposição $\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M) = \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \oplus \mathfrak{X}^{(0,1)}(M)$, onde $\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ e $\mathfrak{X}^{(0,1)}(M)$ denotam os conjuntos de campos vetoriais (anti)-holomórficos respectivamente.

Agora, se M é uma variedade $m-$dimensional complexa e $n \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \leq n < m$, a assinatura $\mathcal{D}$ do subespaço $\mathcal{D}_p \in T_p(M)$ $\forall\, p \in M$ é uma *distribuição* $n-$dimensional em M. A distribuição $\mathcal{D}$ é diferenciável se $\forall\, p \in M$ existe um aberto $U \supset p$ e um conjunto de campos vetoriais $X_i, ...X_n$ em U, tal que $\forall\, q \in U$ o conjunto $\{X_{iq}\}_{i=1,...,n}$ é uma base de $\mathcal{D}_q$. Agora, $\mathcal{D}$ é uma distribuição *complexa* em M se $J^M(\mathcal{D}_p) = i\mathcal{D}_p$ $\forall\, p \in M$. Um mapeamento arbitrário diferenciável $\varphi : M \to N$ entre duas variedade complexas é *tangente à distribuição* $\mathcal{D}$ em N se $\varphi_{*p}(X) \in \mathcal{D}_{\varphi(p)}$ $\forall\, p \in M$ e $\forall\, X \in T_p(M)$. De (2.29) vemos que $T_p(M) \cong T_p^{(1,0)}(M)$, ou seja que se $\mathcal{D}$ é uma distribuição complexa em M ela é um subespaço de $T_p^{(1,0)}(M)$. Uma distribuição é *holomórfica* em M se $\forall\, p \in M$ existe um aberto $U \supset p$ e um conjunto de campos vetoriais holomórficos $X_i, ...X_n$ em U tal que $\forall\, q \in U$ o conjunto $\{X_{iq}\}_{i=1,...,n}$ é uma base de $\mathcal{D}_q$. O conceito de distribuição será muito importante no seguinte capítulo.

Devemos notar que qualquer variedade real de dimensão par, *localmente* admite um tensor J^M que satisfaz $(J^M)^2 = -I$. Porém, J^M pode ser definido em todas as cartas e definido *globalmente* somente se a variedade é complexa. Em geral, o par (M, J) onde M é diferenciável, é conhecido como *variedade quase complexa* e J como a *estrutura quase complexa.* Os conjuntos de campos anti-holomórficos $\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ e $\mathfrak{X}^{(0,1)}(M)$ formam subálgebras de $\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M)$ sob o colchete de Lie e a divisão (2.23) só pode ser mantida globalmente quando (M, J) é uma variedade complexa. Agora, uma variedade é complexa se, e somente se, o *tensor de Nijenhuis* $N : \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M) \times \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M) \to \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M)$ ou $N : \mathfrak{X}(M_{\mathbb{R}}) \times \mathfrak{X}(M_{\mathbb{R}}) \to \mathfrak{X}(M_{\mathbb{R}})$ definido por:

$$N(X,Y) = [X,Y] + J\,[JX,Y] + J\,[X,JY] - [JX,JY] \tag{2.33}$$

é identicamente nulo $N(X,Y) = 0$. Nesse caso, J é denominada como estrutura complexa *integrável* [2].

Agora a definição de grupo de Lie complexo está pronta.

Definição 5 *Um grupo de Lie complexo é uma variedade complexa onde o produto do grupo* $\cdot : (a,b) \to G \times G \to a \cdot b \equiv ab \in G$ *é um mapeamento holomórfico.*

[2] A seguinte cadeia de duplas implicâncias é valida: Estrutura integrável $\longleftrightarrow$ Tensor de Nijenhuis nulo $\longleftrightarrow$ variedade complexa.

Dado que uma variedade complexa pode ser vista como uma variedade real, um grupo de Lie é simultaneamente um grupo de Lie real com a mesma estrutura de grupo. A realificação de G é denotada por $G_{\mathbb{R}}$ e a correspondente álgebra de Lie por $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \equiv T_e(G_{\mathbb{R}})$. Por definição, o produto do grupo é um mapeamento holomórfico e portanto os seguintes mapeamentos lineares associados às translações (2.1) e (2.2) obedecem:

$$L_{a*} \circ J^G = J^G \circ L_{a*}, \tag{2.34}$$

$$R_{a*} \circ J^G = J^G \circ R_{a*}. \tag{2.35}$$

Por exemplo, se $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ então:

$$L_{a*}(J^G_e X_e) = J^G_a(L_{a*}X_e) = J^G_a(X_a) \tag{2.36}$$

e ao estender J^G como mapeamento $\mathbb{C}-$ *linear* na complexificação $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{(1,0)} \oplus \mathfrak{g}^{(0,1)}$ onde $\mathfrak{g}^{(1,0)} \equiv T^{(1,0)}_e(G)$, $\mathfrak{g}^{(0,1)} \equiv T^{(0,1)}_e(G)$, a equação (2.36) com um vetor $X \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ (anti)-holomórfico, implica que o campo vetorial invariante esquerdo gerado pelo vetor X mantém seu caráter (anti)-holomórfico globalmente no grupo G; isto é, o produto do grupo como mapeamento holomórfico é consistente com a existência de campos vetoriais invariantes esquerdo e viceversa. Além disso, como conseqüência de (2.34), (2.5) e a operação conjugação complexa, o colchete de Lie de campos (anti)-holomórficos são campos (anti)-holomórficos, os subespaço $\mathfrak{g}^{(1,0)}$, $\mathfrak{g}^{(0,1)}$ formam duas subálgebras de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ isomorfas e a divisão (2.23) é *global*. Agora, com (2.29) e $T^{(1,0)}_g(G) \cong \mathfrak{g}^{(1,0)}$ a definição de álgebra de Lie complexa é quase óbvia.

Definição 6 *O conjunto dos campos vetoriais holomórficos invariantes esquerdo* $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g}^{(1,0)} \equiv T^{(1,0)}_e(G)$ *com o colchete de Lie* $[\ ,]: \mathfrak{g}\times\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *se denomina álgebra de Lie complexa do grupo de Lie complexo* G.

Esta definição é conseqüência da existência natural dos isomorfismos $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^{(1,0)}$ e $\overline{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}^{(0,1)}$ os quais permitem escrever:

$$(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g} \oplus \overline{\mathfrak{g}}.$$

Com (2.34) e o mapeamento exponencial definido antes, temos que:

$$Ad(g) \circ J^G = J^G \circ Ad(g) \quad , g \in G_{\mathbb{R}} \text{ ou } g \in G,$$

$$ad(X) \circ J^G = J^G \circ ad(X) \ , Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \text{ ou } X \in \mathfrak{g},$$

onde $J^G \equiv J^G_e$ é a *estrutura complexa de Lie* que satisfaz a relação:

$$[X, J^G Y] = J^G([X,Y]),$$

a qual anula identicamente o tensor de Nijenhuis (2.33).

Considerando a realificação $G_{\mathbb{R}}$, a correspondente forma de Maurer-Cartan $\theta_{\mathbb{R}}$ toma valores na álgebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. A equação (2.34) com $a \in G_{\mathbb{R}}$ implica:

$$\theta_{\mathbb{R}}(J^G(X)) = J^G_e \theta_{\mathbb{R}}(X) \quad , \quad X \in \mathfrak{X}(G_{\mathbb{R}})$$

e ao estender $\theta_{\mathbb{R}}$ como mapeamento $\mathbb{C}-$ *linear* em $\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(G)$, a imagem de $\theta_{\mathbb{R}}$ deverá tomar valores na álgebra $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^{(1,0)}$. Por tanto, devemos combinar a mais da ação de $\theta_{\mathbb{R}}$, o operador de projeção (2.27).

Definição 7 *A forma de Maurer-Cartan θ de um grupo de Lie complexo G é uma $(1,0)$-forma com valores na álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$, $\theta \in \mathfrak{g} \otimes T^{(1,0)*}(G) : T^{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g}^{(1,0)}$ definida por:*

$$\theta : X_g \in T_g^{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \theta(X_g) \equiv (\theta_{\mathbb{R}}(X))^{(1,0)} = \theta_{\mathbb{R}}(X^{(1,0)}) = L_{g^{-1}*}(P_g^G X_g) = X_e \in \mathfrak{g}. \tag{2.37}$$

As relações (2.17),(2.18) e (2.21) seguem sendo válidas e ao seguir os mesmos argumentos feitos para o grupo geral linear real $GL(m,\mathbb{R})$ temos que, para o grupo *geral linear complexo* denotado por $GL(m,\mathbb{C})$, a forma de Maurer Cartan é uma 1-forma matricial dada por $\theta = g^{-1}dg$, onde g são as funções coordenadas definidas por $g_j^i(a) \equiv a_j^i$ e $(g^{-1})_j^i(a) \equiv (a^{-1})_j^i$ com $i,j = 1,...,m$. e $a \in GL(m,\mathbb{C})$.

O mapeamento exponencial, a forma de Killing e as representações adjuntas do grupo e da álgebra, continuam sendo validas.

2.1.2 Sistemas de Raízes, Subálgebras de Borel e $\mathbb{Z}$−Gradações.

Devido à relação entre grupo de Lie e álgebra de Lie providenciada pelo mapeamento exponencial, a informação mais relevante do grupo esta contida na álgebra de Lie e esta por sua vez está codificada nas constantes de estrutura do grupo. Nesta seção abandonaremos a interpretação geométrica dos grupos de Lie para nos aprofundar um pouco mais na estrutura das álgebras de Lie propriamente.

Antes de ver o que é um sistema de raízes para uma álgebra de Lie, é melhor começar pela sua definição abstrata num espaço vetorial. Isto permite ligar mais naturalmente a definição de sistema de raízes com os resultados já conhecidos para álgebras de Lie.

Num espaço vetorial V sob um campo $\mathbb{k}$, uma *reflexão* é um mapeamento linear $s : V^* \longrightarrow V^*$ que satisfaz as propriedades $\dim \mathrm{Im}(I - s) = 1$ e $s^2 = 1$ onde I é a identidade. Ou seja, para $\alpha \neq 0 \in \mathrm{Im}(I - s) \subset V^*$ e $\beta \in V^*$, a reflexão de β se escreve como $\beta - s(\beta) = \varphi(\beta)\alpha$, onde $\varphi : V^* \longrightarrow \mathbb{k}$ é um mapeamento linear. Esse mapeamento linear permite definir $\varphi(\beta) \equiv \langle\beta, \alpha^\vee\rangle$ para algum $\alpha^\vee \in V$ e a condição $s^2 = 1$ implica $\langle\alpha, \alpha^\vee\rangle = 2$. Por outro lado, se $\alpha^\vee \in V$ e $\alpha \in V^*$ satisfazem a condição $\langle\alpha, \alpha^\vee\rangle = 2$, então o operador S dado por:

$$S_\alpha(\beta) = \beta - \langle\beta, \alpha^\vee\rangle\, \alpha, \tag{2.38}$$

é uma reflexão em V^*. Notemos que S_α deixa invariante o hiperplano definido por $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = 0$ e, ao atuar sobre $\beta = \alpha$, inverte seu sinal $(S_\alpha(\alpha) = -\alpha)$, que é o que se esperaria de uma reflexão num espaço vetorial. Estamos assumindo o tempo todo que V e V^* são isomorfos.

Definição 8 *Um subconjunto $\triangle \subset V^*$ onde V é um espaço vetorial sob um campo $\mathbb{k}$, se denomina sistema de raizes em V^*, se satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\triangle$ tem dimensão finita, gera todo V^* e não contém o elemento zero;

ii) $\forall\ \alpha \in \triangle$, $\exists\ \alpha^\vee \in V$ tal que $\langle\alpha, \alpha^\vee\rangle = 2$ e a reflexão S_α deixa $\triangle$ invariante;

iii) $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z}\ \forall\ \alpha, \beta \in \triangle$.

A dimensão de V é chamada o *rank* de $\triangle$ e os elementos de $\triangle$ se denominam *raízes*. Se para todo $\alpha \in \triangle$, o elemento $-\alpha$ é a única raiz proporcional a α , o sistema de raízes é denominado *reduzido*. As reflexões S_α geram o *grupo de Weyl* $W(\triangle)$ do sistema de raízes, o qual está contido no grupo de automorfismos de V^*, denotado por $Aut(\triangle)$, e $W(\triangle) \subset Aut(\triangle)$ devido ao fato de que em geral existem transformações em $\triangle$ que não são reflexões mas são permutações. Similarmente, devido à dualidade entre V e V^*, o conjunto $\triangle^\vee$ formado pelos vetores $\alpha^\vee$ com $\alpha \in \triangle$ constituem um sistema de raízes em V e os grupos $Aut(\triangle) \cong Aut(\triangle^\vee)$ são isomorfos.

Para um sistema de raízes $\triangle$ em V^*, a forma bilinear $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \Bbbk$ em V definida por:

$$(X,Y) \equiv \sum_{\alpha\in\triangle} \langle\alpha, X\rangle \langle\alpha, Y\rangle \ , \quad X, Y \in V, \tag{2.39}$$

é simétrica, não degenerada e invariante sob $Aut(\triangle^\vee)$. A forma $(\cdot,\cdot)$ induz um isomorfismo $\nu : V \to V^*$ entre o espaço vetorial e seu dual definido por:

$$\langle\nu(X), Y\rangle \equiv (X,Y). \tag{2.40}$$

Igualmente, a mesma forma bilinear define a *forma canônica bilinear* $(\cdot,\cdot) : V^* \times V^* \to \Bbbk$ no espaço V^* dada por:

$$(\alpha,\beta) \equiv (\nu^{-1}(\alpha), \nu^{-1}(\beta)) \ \text{ com } \ \alpha,\beta \in V^*, \tag{2.41}$$

a qual é simétrica, não degenerada e invariante sob $Aut(\triangle)$. Isso prova o isomorfismo entre V e V^* assumido antes. Em particular, as reflexões $\in W(\triangle) \subset Aut(\triangle)$ satisfazem a relação de invariância $(S_\alpha(\beta), S_\alpha(\gamma)) = (\beta,\gamma)$ para qualquer par de raízes β e γ , e ao fazer $\gamma = \alpha$, temos a relação $(S_\alpha(\beta), \alpha) = -(\beta,\alpha)$ que liga explicitamente os mapeamentos $\langle\ ,\ \rangle$ e $(\ ,\ )$ segundo $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. Assim, a reflexão (2.38) fica escrita só em termos de elementos de V^* como:

$$S_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \tag{2.42}$$

que é a expressão usual das reflexões de Weyl e da condição *iii*) (def 8) vemos que $2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ é um número inteiro. Além disso, a forma bilinear introduzida em V^* é realmente uma métrica e assina um comprimento às raízes em $\triangle$ que discretiza os possíveis valores dos ângulos entre as raízes[3].

A condição *i*) (def 8) sugere a introdução de uma base para o sistema de raízes $\triangle$.

Definição 9 *O subconjunto* Π *de um sistema de raízes* $\triangle$ *em* V^* *é uma base de* $\triangle$ *se:*

i) Π *é uma base de* V^* *no sentido usual de espaço vetorial;*

ii) $\forall\ \beta \in \triangle$, *os coeficientes* $m_\alpha \in \mathbb{Z}$ *da expansão* $\beta = \sum_{\alpha\in\Pi} m_\alpha \alpha$ *são todos positivos ou são todos negativos;*

iii) $\forall\ \alpha,\beta \in \Pi$ *a diferença* $\alpha - \beta \notin \Pi$.

Os elementos de Π são denominados *raízes simples,* a base de um sistema de raízes é denominado *sistema de raízes simples* e uma raiz α é *positiva* ou *negativa* se os números $\mathbb{Z}$ envolvidos na expansão

[3]Por exemplo, se θ denota o ângulo entre duas raízes $\alpha,\beta \in \triangle$ elas devem satisfazer a relação:

$$\langle\alpha,\beta^\vee\rangle \langle\beta,\alpha^\vee\rangle = 4\cos^2\theta = 1, 2, 3 \text{ ou } 4.$$

ii) (def 9) são $\mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{Z}^-$, respectivamente. Um sistema de raízes é *irredutível* se $\triangle$ não pode ser representado como á soma direta de outros sistemas de raízes, ou seja como $\triangle = \triangle_1 \oplus, ..., \oplus \triangle_n$.

Consideremos agora uma base Π de um sistema de raízes $\triangle$ de rank r dada pelos vetores $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$, escolhendo um ordem dos elementos de Π, a *matriz de Cartan* de $r \times r$ dimensões é definida por:

$$K_{ij} \equiv \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = \alpha_i(h_j) = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \in \mathbb{Z} \; , \; h_i \equiv \alpha_i^\vee . \tag{2.43}$$

A matriz K_{ij} depende da ordem escolhida para as raízes simples e com a condição *iii*) (def 8) as entradas de K_{ij} são todas números inteiros com 2 na diagonal. As matrizes de Cartan com diferentes ordens podem ser levadas uma a outra ao efetuar mudanças simultâneas de filas e colunas. Salvo essa liberdade, a matriz de Cartan é independente da escolha da base Π. Devido a Π ser uma base, a matriz K_{ij} é não degenerada e qualquer sistema de raízes é determinado completamente pela sua matriz de Cartan salvo isomorfismos. Isto traz importantíssimas consequências[4].

Agora veremos a relação existente entre as álgebras de Lie e os sistemas de raízes definidos anteriormente. As constantes de estrutura de cada álgebra de Lie determinam por completo o sistema de raízes correspondente a cada álgebra e, dado que toda a informação esta contida nas constantes de estrutura, a catalogação das álgebras de Lie se reduz a catalogação dos seus sistemas de raízes associados.

Quando a forma de Killing (2.11) é não degenerada, isto é quando $\det(K(X_i, X_j)) \neq 0$, a álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$ é *semi-simples*. Numa álgebra semi-simples, a *subálgebra de Cartan* $\mathfrak{h}$ é definida como a subálgebra maximal comutativa formada inteiramente por elementos *semi-simples*[5]. Nesse caso, a álgebra $\mathfrak{h}$ é abeliana e os operadores lineares $ad(h) = [h, \;]$, $h \in \mathfrak{h}$ que atuam em $\mathfrak{g}$, formam um conjunto de operadores semi-simples em $\mathfrak{g}$ e são simultaneamente diagonalizáveis. Isto significa, que existe uma base do espaço vetorial $\mathfrak{g}$ conformada somente pelos autovetores do operador $ad(h)$. Se X é um dos autovetores, então para qualquer $h \in \mathfrak{h}$ temos que:

$$ad(h)X = [h, X] \equiv \alpha(h)X \equiv \langle \alpha, h \rangle X, \tag{2.44}$$

onde o autovalor $\alpha(h)$ é um número complexo e o mapeamento $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ é um elemento do espaço dual $\mathfrak{h}^*$. Para $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{g}^\alpha$ denota o espaço vetorial definido por:

$$\mathfrak{g}^\alpha \equiv \{X \in \mathfrak{g} \mid [h, X] = \alpha(h)X \;\; \forall \, h \in \mathfrak{h}\} . \tag{2.45}$$

A identidade de Jacobi com $\alpha, \beta \neq 0 \in \mathfrak{h}^*$ implica $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ se $\alpha + \beta \in \mathfrak{h}^*$, $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{h}$ se $\alpha + \beta = 0$ e $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = 0$ para qualquer outra possibilidade. Se a álgebra $\mathfrak{g}$ é semi-simples, a não singularidade da forma de Killing implica que os autovalores do operador $ad(h)$ são não degenerados, sempre vêm em pares $(\alpha(h), -\alpha(h))$, o único autovalor proporcional a $\alpha(h)$ é -$\alpha(h)$, e o espaço $\mathfrak{g}^\alpha$ sempre é perpendicular a $\mathfrak{g}^\beta$ a menos que $\beta = -\alpha$. Como conseqüência disto, temos que $\dim \mathfrak{g}^\alpha = \dim \mathfrak{g}^{-\alpha} = 1$ e $(\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}) \in 2\mathbb{Z}^+$ (número par). As três propriedades que definem um sistema de

[4]Existem quatro séries clássicas de sistemas de raízes reduzidos e cinco séries excepcionais.

[5]Um operador linear num espaço vetorial complexo é semi-simples se, e somente se, ele é diagonalizável.

raízes são cumpridas por todos os elementos $\alpha \in \mathfrak{h}^* : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ de qualquer álgebra de Lie semi-simples e formam um sistema de raízes[6] como já é conhecido.

Qualquer par de elementos $h, h' \in \mathfrak{h}$ junto com (2.44) e (2.11), resulta em que a forma de Killing é dada por (Cf (2.39)):

$$K(h,h') = \sum_{\alpha \in \Delta} \langle \alpha, h \rangle \langle \alpha, h' \rangle \equiv (h,h'),$$

e a restrição da forma de Killing de $\mathfrak{g}$ na subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ induz a forma canônica bilinear (2.41) em $\mathfrak{h}^*$ assim como o isomorfismo (2.14),(2.40). Seguindo a nomenclatura padrão da teoría de álgebras de Lie, o conjunto de raízes $\alpha, \beta, ... \in \mathfrak{h}^*$ é um sistema de raízes Δ da álgebra $\mathfrak{g}$ com respeito à subálgebra $\mathfrak{h}$ e a álgebra de Lie complexa semi-simples $\mathfrak{g}$ fica *decomposta* numa soma de *espaços de raízes* (2.45) de dimensão um, dada pela conhecida *decomposição de Cartan*:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\underset{\alpha \in \Delta}{\oplus} \mathfrak{g}^{\alpha} \right) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \tag{2.46}$$

onde $\mathfrak{n}_+ \equiv \underset{\alpha \in \Delta^+}{\oplus} \mathfrak{g}^{\alpha}$, $\mathfrak{n}_- \equiv \underset{\alpha \in \Delta^+}{\oplus} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ e $\Delta^+ \subset \Delta$ denota o subconjunto das raízes positivas.

As subálgebras $\mathfrak{n}_\pm$ satisfazem $[\mathfrak{n}_\pm, \mathfrak{n}_\pm] \subset \mathfrak{n}_\pm$ e são álgebras de Lie *nilpotentes*[7] devido ao número de raízes positivas-negativas ser finito e as iterações de $k \in \mathbb{Z}^+$ comutadores devem terminar num número finito de passos devido ao número finito de raízes positivas-negativas existentes. Por exemplo, os conjuntos $\mathfrak{n}_\pm(m, \mathbb{k})$ de $m \times m$ matrizes estritamente triangulares superiores-inferiores, respectivamente, formam subálgebras nilpotentes da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{k})$. Os correspondentes subgrupos nilpotentes $N_\pm(m, \mathbb{k})$ são formados pelas matrizes superiores-inferiores unipotentes (um na diagonal).

Se Δ é um sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ com respeito $\mathfrak{h}$, um *subsistema* de raizes $\Gamma \subset \Delta$ é *fechado* se para qualquer par $\alpha, \beta \in \Gamma$ tal que $\alpha + \beta \in \Delta$, a soma $\alpha + \beta \in \Gamma$ e é *simétrico* se $\alpha \in \Gamma$ implica $-\alpha \in \Gamma$. Com um subsistema Γ de Δ simétrico e fechado e uma subálgebra $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ gerada pelos elementos $\alpha^\vee, \alpha \in \Gamma$ $\forall\, \alpha \in \Gamma \cap (-\Gamma)$, o subespaço:

$$\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{t} \underset{\alpha \in \Gamma}{\oplus} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

é uma subálgebra *regular* semisimples $\mathfrak{f}(\mathfrak{t}, \Gamma)$ de $\mathfrak{g}$, isto é que $\mathfrak{f}$ satisfaz $[\mathfrak{h}, \mathfrak{f}] \subset \mathfrak{f}$ e é um ideal em $\mathfrak{h}$. Além disso, a subálgebra $\mathfrak{t}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{f}(\mathfrak{t}, \Gamma)$ e Γ é o sistema de raízes de $\mathfrak{f}(\mathfrak{t}, \Gamma)$ com respeito a $\mathfrak{t}$. A álgebra $\mathfrak{f}(\mathfrak{t}, \Gamma)$ é denotada simplesmente por $\mathfrak{f}(\Gamma)$ dado que o sistema Γ determina completamente a álgebra $\mathfrak{f}$. Considerando as subálgebras regulares semisimples, se Ψ é um subsistema de Δ e $[\Psi]$ denota o conjunto de elementos de Δ que são representados como combinações lineares dos elementos de Ψ com coeficientes inteiros, temos que se Π é uma base de Δ então $[\Pi] = \Delta$. Para qualquer subsistema Ψ de Δ, o conjunto $[\Psi]$ é um subsistema simétrico e fechado de Δ que define uma subálgebra regular semi-simples de $\mathfrak{g}$ denotada por $\mathfrak{f}(\,[\Psi]\,)$.

Existe uma classe de subálgebras regulares *não* semi-simples que serão de grande importância no decorrer do trabalho.

[6]Na verdade, foi na catalogação das álgebras de Lie que nasceu o conceito de sistema de raízes.

[7]Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é *nilpotente* se para algum número inteiro finito k, os elementos de $\mathfrak{g}$ construídos ao tomar k comutadores são zero. Ou seja se:

$$[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, ...]]] = 0 \quad k \text{ vezes}.$$

Definição 10 *Uma subálgebra de Lie* $\mathfrak{b}$ *é uma subálgebra de Borel de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *se* $\mathfrak{b}$ *é uma subálgebra maximal solúvel*[8] *de* $\mathfrak{g}$.

As subálgebras definidas por:

$$\mathfrak{b}_{\pm} \equiv \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pm}, \tag{2.47}$$

satisfazem $\mathfrak{n}_{\pm} \subset \mathfrak{b}_{\pm} \subset \mathfrak{g}$ e são subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$. Com a notação introduzida para as subálgebras regulares podemos escrever $\mathfrak{b} = \mathfrak{f}(\mathfrak{h}, \triangle_{\pm})$. Por exemplo, os conjuntos $\mathfrak{t}_{\pm}(m, \Bbbk)$ de $m \times m$ matrizes triangulares superiores-inferiores respectivamente, formam subálgebras de Borel (solúveis) da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m, \Bbbk)$. Os correspondentes subgrupos de Borel $B_{\pm}(m, \Bbbk)$ são formados pelas matrizes superiores-inferiores.

Existem outras subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ que contém subálgebras de Borel e podem ser construídas ao adicionar a (2.47) espaços de raízes de sinal contrário. Estas são as subálgebra *parabólicas* $\mathfrak{p}_{\pm}$ de $\mathfrak{g}$ e são as subálgebras que satisfazem $\mathfrak{b}_{\pm} \subseteq \mathfrak{p}_{\pm} \subset \mathfrak{g}$. Ou seja:

$$\mathfrak{p}_{\pm} \equiv \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pm} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in s} \mathfrak{g}^{\alpha} \right), \tag{2.48}$$

onde $s \subset \{\triangle^{\mp} \text{ou } \varnothing\}$ ao tomar $\mathfrak{p}_{+}$ ou $\mathfrak{p}_{-}$ respectivamente. Por exemplo, no caso da álgebra $\mathfrak{sl}(m, \Bbbk)$, as subálgebras parabólicas $\mathfrak{p}_{\pm}(m, \Bbbk)$ estão determinadas por um conjunto fixo de números inteiros positivos $\{n_i\}$ $n_i \in \mathbb{Z}^{+}$ tais que $m = \sum_{i=1}^{p} n_i$, $p \in \mathbb{Z}^{+}$ e consistem das matrizes triangulares superiores-inferiores com blocos de dimensão $n_1 \times n_1, ..., n_p \times n_p$ na diagonal. Quando $n_1 = ... = n_p = 1$, $p = m$, o tamanho dos blocos é um e $\mathfrak{p}_{\pm} = \mathfrak{b}_{\pm}$. Os correspondentes subgrupos parabólicos $P_{\pm}(m, \Bbbk)$ de $SL(m, \Bbbk)$ são de forma similar aos elementos da álgebra. Para ilustrar, as matrizes de $\mathfrak{p}_{+}(m, \Bbbk)$ e $P_{+}(m, \Bbbk)$ são da forma:

$$\mathfrak{p}_{+} = \begin{pmatrix} x_1 & * & \cdots & * \\ 0 & x_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(m, \Bbbk) \quad , \quad P_{+} = \begin{pmatrix} X_1 & * & \cdots & * \\ 0 & X_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_p \end{pmatrix} \in SL(m, \Bbbk), \tag{2.49}$$

onde $\sum_{i=1}^{p} Tr(x_i) = 0$ e $\prod_{i=1}^{p} \det(X_i) = 1$.

Para um subsistema Ψ do sistema de raízes simples Π , definimos as subálgebras:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{n}}_{\pm\Psi} &\equiv \mathfrak{f}(0, \triangle^{\pm} - [\Psi]), \\ \widetilde{\mathfrak{h}}_{\Psi} &\equiv \mathfrak{f}(\mathfrak{h}, [\Psi]). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Quando é obvio qual é o subsistema Ψ especificado, escrevemos simplesmente $\widetilde{\mathfrak{n}}_{\pm}$ e $\widetilde{\mathfrak{h}}$. Com esta nova partição, a álgebra $\mathfrak{g}$ tem a decomposição:

$$\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{n}}_{-} \oplus \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_{+}, \tag{2.51}$$

[8] Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é *solúvel* se existe uma seqüencia de inclusões de subálgebras de Lie $\mathfrak{g}_i$ onde:

$$0 \subset ... \subset \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \quad , \quad \mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{g},$$

tal que $\forall\ i$, a subálgebra $\mathfrak{g}_{i+1}$ é um ideal em $\mathfrak{g}_i$.

e quando $\Psi = \varnothing$ temos $\widetilde{\mathfrak{n}}_{\pm\varnothing} = \mathfrak{n}_{\pm}$, $\widetilde{\mathfrak{h}}_{\varnothing} = \mathfrak{h}$ e retornamos a (2.46). Em geral, $\widetilde{\mathfrak{n}}_{\pm} \subset \mathfrak{n}_{\pm}$ e $\widetilde{\mathfrak{h}} \supset \mathfrak{h}$, e é uma redistribuição dos elementos da álgebra $\mathfrak{g}$ especificada por Ψ, onde alguns elementos de $\mathfrak{n}_{\pm}$ são transferidos à subálgebra $\mathfrak{h}$ acrescentando-a. Similar a (2.47) definimos agora:

$$\widetilde{\mathfrak{b}}_{\pm\Psi} \equiv \widetilde{\mathfrak{h}}_{\Psi} \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_{\pm\Psi} = \mathfrak{p}_{\pm\Psi}, \tag{2.52}$$

e os subgrupos de Lie correspondentes às subálgebras $\widetilde{\mathfrak{n}}_{\pm}, \widetilde{\mathfrak{b}}_{\pm}$ e $\widetilde{\mathfrak{h}}$ de $\mathfrak{g}$, são denotados por $\widetilde{N}_{\pm}, \widetilde{B}_{\pm}$ e $\widetilde{H}$ respectivamente. Esses subgrupos introduzidos são bastante úteis para decompor os elementos de G. Se G é um grupo de Lie complexo, qualquer elemento $a \in G$ possui alguma, ou varias das seguintes três formas da *decomposição de Gauss:*

$$a = m_+ n_- h_- \quad , \quad a = m_- n_+ h_+ \quad \text{e} \quad a = k_- h k_+ \tag{2.53}$$

onde $m_{\pm}$, $n_{\pm}$, $k_{\pm} \in \widetilde{N}_{\pm}$ e $h_{\pm}$, $h \in \widetilde{H}$ com $k_- \equiv m_-$, $h \equiv h_+$ e $k_+ = h_+^{-1} n_+ h_+$. Em particular, se $b \in \widetilde{B}_{\pm}$, ele tem a seguinte decomposição:

$$b_{\pm} = n_{\pm} h. \tag{2.54}$$

Se a possui alguma dessas decomposições, ela é única mas não necessariamente é global.

Agora é claro que a decomposição (2.46) corresponde a $\Psi = \varnothing$ e a decomposição (2.51) corresponde a $\Psi \neq \varnothing$. Isto mostra que uma álgebra de Lie complexa semi-simples $\mathfrak{g}$ pode ser quebrada de diversas maneiras ao escolher algum subsistema Ψ de Π. Porém, a decomposição pode ser feita de uma outra maneira que resulta ser mais util na prática.

Definição 11 *Uma $\mathbb{Z}$−gradação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma decomposição de $\mathfrak{g}$ numa soma direta de subespaços $\mathfrak{g}_m$, $m \in \mathbb{Z}$ onde:*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_m, \tag{2.55}$$

e os subespaços $\mathfrak{g}_m$ satisfazem $[\mathfrak{g}_m, \mathfrak{g}_n] \subset \mathfrak{g}_{m+n}$.

Para qualquer álgebra de Lie semi-simples $\mathfrak{g}$, uma *derivação* D é um mapeamento linear $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ definido por $DX \equiv [Q, X]$, $X \in \mathfrak{g}$ onde Q é o *operador de gradação* e a identidade de Jacobi garante que D efetivamente satisfaz a regra de Leibniz. Para qualquer $X_m \in \mathfrak{g}_m$ temos que:

$$[Q, X_m] = mX_m, \tag{2.56}$$

é uma equação de autovalores e Q pode ser considerado como um elemento da subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Por outro lado, introduzindo um conjunto arbitrário de números $\{n_i\}_{i=1}^{r} \in \mathbb{Z}^+$, $r = rank\ \mathfrak{g}$, definimos o seguinte operador de gradação:

$$Q \equiv \sum_{i,j=1}^{r} (K^{-1})_{ij} n_j h_i \in \mathfrak{h},$$

onde K^{-1} é a inversa da matriz de Cartan (2.43) de $\mathfrak{g}$. Lembrando que $\mathfrak{g}$ pode ser decomposta como:

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0 \ , \ i,j = 1,...,r, \\ [X_{+\alpha_i}, X_{-\alpha_j}] &= \delta_{ij} h_i, \\ [h_i, X_{\pm\alpha_j}] &= \pm\alpha_i(h_j) X_{\pm\alpha_j} = \pm K_{ji} X_{\pm\alpha_j}, \end{aligned} \tag{2.57}$$

onde os $h_i \in \mathfrak{h}$ e $X_{\pm\alpha_j} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha_j}$ são geradores de Cartan e Chevalley respectivamente, temos que Q satisfaz:

$$\begin{aligned} [Q, X_{\pm\alpha_i}] &= \pm n_i X_{\pm\alpha_i}, \\ [Q, h_i] &= 0, \end{aligned}$$

ou seja que $\langle \alpha_i, Q \rangle = n_i$, e ao tomar $X = X_{\alpha = \sum_i c_i \alpha_i}$, $c_i \in \mathbb{Z}$ obtemos a relação:

$$[Q, X] = \sum_{1 \leq i \leq r} c_i n_i X \equiv mX,$$

o que quer dizer que o subespaço definido por:

$$\mathfrak{g}_m \equiv \left\{ X = X_{\alpha = \sum c_i \alpha_i} \in \mathfrak{g}^{\alpha} \mid \sum_{1 \leq i \leq r} c_i n_i = m \in \mathbb{Z} \right\}$$

é a suma dos espaços de raízes $\mathfrak{g}^{\alpha}$ correspondentes a todas as raízes $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq r} c_i \alpha_i$ que satisfazem a condição $\sum_{1 \leq i \leq r} c_i n_i = m$. O subespaço $\mathfrak{g}_0$ contém a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ e para qualquer raiz positiva-negativa temos que $\mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{g}_m$ com $m \geq 0$, $\mathfrak{g}^{-\alpha} \subset \mathfrak{g}_m$ com $m \leq 0$ e dim $\mathfrak{g}_m = \dim \mathfrak{g}_{-m}$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Para uma dada $\mathbb{Z}-$gradação de $\mathfrak{g}$ com uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ e uma certa base $\Pi = \{\alpha_1, ...\alpha_r\}$ do sistema de raízes $\triangle$, o subsistema de raízes definido por:

$$\Psi \equiv \{\alpha_i \in \Pi \mid \langle \alpha_i, Q \rangle = 0\},$$

introduz naturalmente as subálgebras $\widetilde{\mathfrak{n}}_{\pm\Psi}, \widetilde{\mathfrak{h}}_{\Psi}$ e , $\mathfrak{b}_{\pm\Psi}$ definidas por (2.50) e (2.52). Assim, as decomposições (2.51) e (2.55) ficam expressadas em termos da $\mathbb{Z}$- gradação como:

$$\widetilde{\mathfrak{n}}_- = \bigoplus_{m<0} \mathfrak{g}_m \quad , \quad \widetilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{m>0} \mathfrak{g}_m, \tag{2.58}$$

$$\widetilde{\mathfrak{b}}_- = \bigoplus_{m \leq 0} \mathfrak{g}_m \quad , \quad \widetilde{\mathfrak{b}}_+ = \bigoplus_{m \geq 0} \mathfrak{g}_m \quad , \quad \widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}_0. \tag{2.59}$$

Quando $n_i = 1 \ \forall \ i$, o operador de grau toma a forma:

$$Q \equiv \sum_{i=1}^{r} k_i h_i \quad , \quad k_i \equiv \sum_{j=1}^{r} (K^{-1})_{ij}, \tag{2.60}$$

e define a gradação *principal* ou *canônica* de $\mathfrak{g}$. Nesse caso $\widetilde{\mathfrak{n}}_{\pm} = \mathfrak{n}_{\pm}$, $\widetilde{\mathfrak{b}}_{\pm} = \mathfrak{b}_{\pm}$, a subálgebra $\widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ é abeliana e os subespaços $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ de grau ± 1, coincidem com os geradores de Chevaley $X_{\pm\alpha_i}$ que junto aos geradores de Cartan h_i reproduzem (2.57). Na mesma gradação principal, definimos os elementos:

$$X_{\pm} \equiv \sum\nolimits_{i=1}^{r} (2k_i)^{\frac{1}{2}} X_{\pm\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\pm 1}, \tag{2.61}$$

$$h \equiv 2 \sum\nolimits_{i=1}^{r} (k_i)^{\frac{1}{2}} h_i \in \mathfrak{g}_0, \tag{2.62}$$

que obedecem à álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

$$[h, X_\pm] = \pm 2X_\pm, \qquad (2.63)$$
$$[X_+, X_-] = h.$$

Dessa maneira, controlando os números inteiros n_i ou definindo um outro operador de grau Q que cumpra com (2.56), é possível quebrar qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de diversas formas. Devemos notar que em geral, a subálgebra $\widetilde{\mathfrak{h}}$ é não abeliana e que o operador de grau Q é um elemento da própria álgebra[9].

Dado que a álgebra $\mathfrak{g}$ define todos os campos vetoriais invariantes do grupo, a divisão (2.51) existe para todo ponto de G.

Agora vamos introduzir uma construção que permite fundir os grupos de Lie com as variedades diferenciáveis ordinárias num corpo só, que será fundamental na formulação do princípio dinâmico da curvatura nula e na dedução das equações de Leznov-Saveliev.

2.2 Fibrados Principais.

2.2.1 Conexões, Curvatura e Lifts Horizontais.

Um fibrado E é um espaço topológico que *localmente* se ve como o produto direto $(M \times F)$ de dois espaços topológicos mas em geral, $E \neq M \times F$ *globalmente*. Vamos definir primeiro o que é um fibrado antes de definir o fibrado principal de nosso interés.

Definição 12 *Um fibrado $E \longrightarrow M$ diferenciável consiste dos seguintes elementos:*

i) Três variedades diferenciáveis E, M e F, denominadas espaço total, espaço base e fibra ou fibra típica respectivamente;

ii) Um mapeamento surjetor $\pi : E \longrightarrow M$ denominado projeção. A pré-imagem $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \cong F$ é a fibra sobre o ponto $p \in M$;

iii) Um grupo de Lie G denominado grupo de estrutura que atua em F pela esquerda;

iv) Um cobrimento aberto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M com um difeomorfismo $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$ denominado trivialização local tal que $\pi \circ \psi_\alpha^{-1}(p, f) = p$;

v) Um difeomorfismo $\psi_{\alpha p} : F_p \longrightarrow F$ dado pelo mapeamento $\psi_{\alpha p} \equiv \mathrm{Pr}_F \circ \psi_\alpha \mid_{\pi^{-1}(p)}, \forall\, p \in U_\alpha$ que define as funções de transição $t_{\alpha\beta} \in G : F \longrightarrow F$,$\forall\, p \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ dadas por $t_{\alpha\beta} \equiv \psi_{\alpha p} \circ\, \psi_{\beta p}^{-1}$ onde $\psi_\beta^{-1}(p, f) = \psi_\alpha^{-1}(p, t_{\alpha\beta}(p) f)$.

O par (U_α, ψ_α) é uma carta de E e o conjunto $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é um atlas de E. A colagem entre diferentas cartas é consistente se as funções $t_{\alpha\beta}$ satisfazem as *condições de consistência* $t_{\alpha\alpha} = Id_F$, $t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}^{-1}$ e $t_{\alpha\beta} = t_{\alpha\gamma} \circ t_{\gamma\beta}$, $\forall\, p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$.

Se todas as funções de transição são fixadas como mapeamentos identidade ou M é coberto com uma carta U_α só, o fibrado é trivial, ou seja que globalmente o fibrado é simplesmente o produto direto do espaço base e da fibra tipica $E = M \times F$.

[9] Isso em geral não acontece com uma álgebra de dimensão infinita ou álgebra Kac-Moody, a qual pode ser graduada com um operador que não pertence a ela.

Junto com a projeção $\pi : E \longrightarrow M$ vêm as *seções*. Uma seção *é* um mapeamento diferenciável $\sigma : M \longrightarrow E$ que satisfaz a condição $\pi \circ \sigma = Id_M$, claramente, $\sigma(p)$ é um elemento da fibra $F_p = \pi^{-1}(p)$. Para um cobrimento aberto do espaço base $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, e as *seções locais* σ_α, $\alpha \in A$ dos fibrados triviais $P\,|_{U_\alpha} = U_\alpha \times F$, o conjunto $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma familia de seções locais que cobrem M. Sempre é possível encontrar uma família de seções locais que cobre o espaço base M, porém, nem todo fibrado admite a existência de seções globais[10].

O nosso interesse está particularmente centrado no caso em que a fibra típica F coincide com o grupo de estrutura G e todas as variedades envolvidas são complexas.

Definição 13 *Um G-fibrado principal holomórfico $P \longrightarrow M$ é um fibrado diferenciável que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) O espaço total P, o espaço base M e a fibra típica F, são variedades complexas;

ii) A fibra típica F coincide com o grupo de estrutura G que é um grupo de Lie complexo semi-simples;

iii) G atua sobre $F = G$ (ele mesmo) mediante translações esquerdas $L^P : G \longrightarrow G$;

iv) A projeção $\pi : P \longrightarrow M$ e a trivialização local $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$ são mapeamentos holomórficos.

Quando as variedades e o grupo de Lie são reais temos um G-fibrado principal usual[11].

Da definição 5, a *ação pela esquerda* de G sobre as fibras $G_p = G$ é um mapeamento holomórfico que corresponde à ação das funções de transição correspondentes as translações esquerdas (2.1) e seu papel corresponde a colar consistentemente as diferentes cartas que cobrem o fibrado. Já a *ação pela direita*, como veremos, está profundamente ligada a noção de transformação de gauge que são transformações de cada fibra nela mesma. A ação pela direita *é* implementada pelas translações direitas (2.2) que também são mapeamentos holomórficos e comutam com as ações pela esquerda (Cf (2.3)). Explicitamente, a ação pela direita $R^P : G_p \longrightarrow G_p$ é definida por:

$$R_a^P(u) \equiv \psi_{\alpha p}^{-1} \circ R_a \circ \psi_{\alpha p}(u) = \psi_\alpha^{-1}(p, g_\alpha(u)a) = ua, \tag{2.64}$$

onde $g_\alpha \equiv \mathrm{Pr}_G \circ \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow G$ são as funções coordenadas de P em G com $g_\alpha(ua) = g_\alpha(u)a$. Quando $p \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, a dupla ação de L^P e R^P onde $(L \circ R^P = R^P \circ L)$, satisfaz:

$$ua = \psi_\beta^{-1}(p, g_\beta(u)a) = \psi_\beta^{-1}(p, t_{\beta\alpha} g_\alpha(u)a) = \psi_\alpha^{-1}(p, g_\alpha(u)a) \tag{2.65}$$

e cada fibra G_p de $P \longrightarrow M$ é invariante com respeito as ações de R^P no sentido que:

$$\pi \circ R_g^P = \pi \ , \ \forall \ g \in G.$$

[10]Por exemplo, as seções dum fibrado *tangente* $T(M) \longrightarrow M$ são campos vetoriais em M e são elementos de $\mathfrak{X}(M)$ que pode ou não ter elementos definidos globalmente.

[11]Por simplicidade, a discussão que se segue será feita simplesmente com G-fibrados principais. A estrutura complexa não é relevante por enquanto.

A ação pela direita R^P sobre a fibra G_p é *livre* e *transitiva* e as *órbitas* da sua ação coincidem com a fibra. Em particular, toda a fibra G_p é gerada ao atuar R^P_a , $a \neq e$ sobre o elemento identidade do grupo de Lie G_p. Para ver isso, se introduz-se a *seção local trivial* $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ definida por:

$$s_\alpha(p) \equiv \psi_\alpha^{-1}(p, e), \tag{2.66}$$

onde agora, qualquer elemento $u \in G_p$ na fibra sobre p, é único e vem definido por:

$$u = \psi_\alpha^{-1}(p, a) \equiv s_\alpha(p) \cdot a \quad , \quad a = g_\alpha(u), \tag{2.67}$$

ou seja, o conjunto de seções locais $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ define um atlas em $P \to M$ com a seguinte lei de transformação:

$$s_\alpha(p) = s_\beta(p) t_{\beta\alpha}(p) \ , \ p \in U_\alpha \cap U_\beta \neq 0. \tag{2.68}$$

Por definição, o fibrado $P \to M$ é diferenciável e possui um espaço tangente TP e deve ser cuidadosamente tratado. Para um elemento $u \in P \to M$ e uma fibra G_p sobre $p = \pi(u)$, o *espaço vertical* V_uP é um subespaço de T_uP tangente à fibra G_p no elemento u. Se $X \in \mathfrak{g}$ e um elemento da álgebra de Lie da fibra típica G, a ação pela direita R^P_g: $u \to ug$ dada por $R^P_{\exp tX} u = u \exp tX$ define uma curva na fibra G_p devido a $\pi(u) = \pi(u \exp tX) = p$. O vetor $X^\# \in V_uP$ tangente à fibra G_p no ponto u induzido pelo elemento da álgebra $X \in \mathfrak{g}$ vem dado por:

$$X^\# f(u) = \frac{d}{dt} f(u \exp tX) \mid_{t=0} \ , \ f : P \to \mathbb{R} \in \mathfrak{F}(P). \tag{2.69}$$

Assim, $\forall\ u \in P$, $X^\# \in \mathfrak{X}(P)$ é um campo vetorial no fibrado gerado por X e dado que a ação $R^P_{\exp tX}$ é um *difeomorfismo*, o mapeamento $\# : \mathfrak{g} \to V_uP$ definido por $X \to X^\#$ é um *isomorfismo* entre espaços vetoriais que preserva a estrutura da álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, ou seja que $[X^\#, Y^\#] = [X, Y]^\#$ e $\dim V_uP = \dim \mathfrak{g}$. Além disso, o vetor $X^\#$ satisfaz a propriedade:

$$\pi_*(X^\#) = 0 \tag{2.70}$$

e não tem contrapartida no espaço tangente $T_{\pi(u)}M$. Por outro lado, o *espaço horizontal* H_uP $u \in P$ é definido como o complemento do espaço vertical V_uP no espaço total T_uP.

A existência dos espaços verticais e horizontais sugere uma divisão para TP.

Definição 14 *Uma conexão $\mathcal{H}$ num G-fibrado principal $P \to M$ é uma única divisão do espaço tangente TP nos subespaços vertical VP e horizontal HP tal que:*

i) $T_uP = V_uP \oplus H_uP$, $\forall\ u \in P$;

ii) $H_{ug}P = R^P_{g*} H_uP$, $\forall\ g \in G$.

Dado que o espaço $V_uP = \mathfrak{g}\ \forall\ u \in P$, é natural introduzir uma 1-forma $\omega : TP \to \mathfrak{g}$ com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para materializar a divisão *i)* (def 14).

Definição 15 *Uma 1-forma conexão $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ é uma projeção $\omega : TP \to VP = \mathfrak{g}$ com as seguintes propriedades:*

i) $\omega(X^\#) = X$, $\forall\ X \in \mathfrak{g}$;

ii) $R^{P*}_g \omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(R^P_{g*} X) = Ad(g^{-1}) \circ \omega_u(X)$, $X \in T_uP$.

Qualquer 1-forma com valores em $\mathfrak{g}$ satisfazendo as condições da (def 15) é uma 1-forma conexão. A 1-forma ω, projeta vetores tangentes à fibra na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e se um vetor não é tangente á fibra sua projeção deve ser zero. A 1-forma ω possui um *kernel* invariante sob o pull-back R_g^{P*} segundo Cf *ii*) (def 15) e é então natural definir o espaço horizontal como:

$$H_uP \equiv \{X \in T_uP \mid \omega(X) = 0 \ , \ X \in \ker\omega\} \, .$$

Essa definição implica $H_{ug}P = R^P_{g*}H_uP$, que é a condição *ii*) (def 14) e para algum $X \in H_uP$, existe um único $Y = R^P_{g*}X \in H_uP$ devido que ao mapeamento R^P_{g*} ser bijetor. A 1-forma conexão ω faz explicita a divisão $T_uP = H_uP \oplus V_uP$, $\forall \ u \in P$ e é completamente equivalente à conexão $\mathcal{H}$ em concordância com a definição 14.

A 1-forma ω com valores em $\mathfrak{g}$ definida em P está relacionada com outras 1-formas com valores em $\mathfrak{g}$ definidas no espaço base M e na fibra típica G respectivamente. A fibra típica G é um grupo de Lie e possui naturalmente a forma de Maurer-Cartan $\theta \in \mathfrak{g} \otimes T^*(G)$ definida em (2.16) e o espaço base M possui uma 1-forma com valores em $\mathfrak{g}$ em cada carta $U_\alpha \subset M$ definida pela *conexão local* ou *campo de gauge:*

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv s^*_\alpha(\omega) \ \in \ \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(M) \tag{2.71}$$

onde s_α é a seção trivial (2.66). Dessa maneira, θ e $\mathcal{A}_\alpha$ contribuem para definir a 1-forma conexão: $\omega_\alpha \equiv \omega \mid_{U_\alpha}$:

$$\omega \equiv \omega_\alpha \equiv Ad(g_\alpha^{-1}) \circ \pi^*\mathcal{A}_\alpha + g^*_\alpha\theta, \tag{2.72}$$

que satisfaz as propriedades da (def 15) . Para garantir que a divisão $T_uP = H_uP \oplus V_uP$ seja *globalmente única*, deve-se cumprir a igualdade $\omega_\alpha = \omega_\beta = \omega$ em $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \neq \varnothing$, o que diz que as conexões locais $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ definidas em $(U_\alpha \cap U_\beta) \subset M$, devem satisfazer a *condição de compatibilidade*:

$$\mathcal{A}_\alpha = Ad(t_{\alpha\beta}) \circ \mathcal{A}_\beta + t^*_{\alpha\beta}\theta, \tag{2.73}$$

onde $t_{\alpha\beta} = g_\alpha \circ g_\beta^{-1}$ são as funções de transição do fibrado $P \to M$. O conjunto de conexões locais $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ satisfazendo (2.73), permitem reconstruir uma *única* forma ω em $P \to M$ e carregam a informação global do fibrado. O resto da informação do fibrado contida na 1-forma conexão ω, está na sua derivada exterior $d_P\omega : TP \otimes TP \to \mathfrak{g}$ que é uma 2-forma com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A ação de ω nos subespaços HP e VP já é conhecida e mesmo que $\omega(X) = 0$ para $X \in HP$, temos que em geral $d\omega(X) \neq 0$ para $X, Y \in HP$. A 2-forma $d_P\omega$ mede uma das propriedades geométricas mais importantes de qualquer G-fibrado principal $P \to M$.

Definição 16 *A forma curvatura da conexão $\mathcal{H}$ é a 2-forma $\Omega : TP \otimes TP \to \mathfrak{g}$ com valores na álgebra de Lie definida por:*

$$\Omega \equiv (d_P\omega)^H \ \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^2(P), \tag{2.74}$$

onde $(d_P\omega)^H$ é a componente horizontal *de $d_P\omega$ definida como:*

$$(d_P\omega)^H(X,Y) \equiv (d_P\omega)(X^H, Y^H) \quad , \quad X^H, Y^H \in VP.$$

É útil ligar a forma curvatura Ω com a forma conexão ω de alguma maneira que não dependa da projeção em VP (2.74). Para ver isso, devemos considerar primeiro várias possibilidades. Como 1-forma, ω obedece a relação (2.20) dada por:

$$d_P\omega(X,Y) = X\,[\omega(Y)] - Y\,[\omega(X)] - \omega([X,Y]), \quad \forall\, X,Y \in TP.$$

Agora, se $X,Y \in HP$ então $X^H = X$, $Y^H = Y$ e temos uma identidade $\Omega(X,Y) = d_P\omega(X,Y)$ que pode ou não ser trivial. Para o caso que $X \in HP$ e $Y \in VP$ temos que $Y^H = 0$ e por tanto $\Omega(X,Y) = 0$ da definição (2.74). Por outro lado, devido a $[X,Y] \in HP$ temos que $d_P\omega(X,Y) = X\,[\omega(Y)]$, mas se $Y \in \mathfrak{g}$ então existe um elemento $A \in \mathfrak{g}$ tal que $Y = A^{\#}$ e $\omega(Y) = A = cons \in \mathfrak{g}$, ou seja que $d_P\omega(X,Y) = 0$ e de novo vemos que $\Omega(X,Y) = d_P\omega(X,Y)$. Por último, se $X,Y \in VP$, a definição de curvatura implica $\Omega(X,Y) = 0$ e nesse caso temos que $\omega(X,Y) = -\omega([X,Y]) \neq 0$!. Agora, o subespaço $VP = \mathfrak{g}$ é fechado sob o colchete de Lie e devido ao mapeamento $\#$ ser um isomorfismo, existem três elementos $A,B,C \in \mathfrak{g}$ que satisfazem $A^{\#} = [X,Y] = [B^{\#},C^{\#}] = [B,C]^{\#}$ onde $X = B^{\#}$, $Y = C^{\#}$. Portanto, $\omega([X,Y]) = A \in \mathfrak{g}$ e com ajuda da avaliação $[\omega,\omega]\,(X,Y) = 2\,[\omega(X),\omega(Y)] = 2\,[B,C] = A$, onde $[\omega,\omega] = 2\omega\wedge\omega$, obtemos o resultado $d_P\omega(X,Y) + (\omega\wedge\omega)(X,Y) = 0$. O último termo não modifica os resultados anteriores e dessa maneira vemos que a 2-forma curvatura e a 1-forma conexão satisfazem a equação de estrutura de Maurer-Cartan (2.21) em $P \to M$:

$$\Omega = d_P\omega + \omega\wedge\omega\ , \tag{2.75}$$

que só é diferente de zero quando $X,Y \in HP$ em contraposição ao resultado obtido em (2.21), isto é que para (2.21) a curvatura *sempre* é trivial.

Agora, similar à definição da conexão local, a *curvatura local* ou *field strength* é definida por:

$$\mathcal{F}_\alpha \equiv s^*_\alpha(\Omega)\ \in\ \mathfrak{g}\otimes\Omega^2(M),$$

onde $\mathcal{F}_\alpha$ e Ω estão relacionados por:

$$\Omega \equiv \Omega_\alpha = Ad(g_\alpha)\circ\pi^*\mathcal{F}_\alpha. \tag{2.76}$$

Localmente, após usar as relações $s^*_\alpha(d_P\omega) = d(s^*_\alpha\omega)$ e $s^*_\alpha(\omega\wedge\omega) = (s^*_\alpha\omega)\wedge(s^*_\alpha\omega)$, vemos que em cada carta $U_\alpha \subset M$ do espaço base, a curvatura local e a conexão local estão relacionadas por:

$$\mathcal{F}_\alpha = d\mathcal{A}_\alpha + \mathcal{A}_\alpha\wedge\mathcal{A}_\alpha \tag{2.77}$$

e quando $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$, $\mathcal{F}$ transforma como:

$$\mathcal{F}_\alpha = Ad(t_{\alpha\beta})\circ\mathcal{F}_\beta\ . \tag{2.78}$$

Por motivos práticos, consideremos G-fibrados principais sobre grupos de Lie matriciais, nesse caso a forma de Maurer-Cartan é dada por (2.22) e $g^*_\alpha\theta : TP \to \mathfrak{g}$ é:

$$g^*_\alpha\theta = g^{-1}_\alpha d_P g_\alpha \in \mathfrak{g}\otimes T^*P.$$

Até agora, a definição de curvatura introduzida carece de todo sentido geométrico e seu nome ainda não foi justificado. As curvas definidas em cada fibra pela ação direita $R^P_{\exp tX}u = u\exp tX$ são trivialmente projetadas no espaço base e não faz diferença se são curvas abertas ou loops. A clarificação do sentido geométrico da curvatura começa pela introdução de curvas no fibrado que *não* sejam trivialmente projetadas no espaço base.

Definição 17 *Seja $P \to M$ um G-fibrado principal e $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva em M. A curva $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to P$ é um lift horizontal se $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ e o vetor tangente à curva $\widetilde{\gamma}(t)$ sempre pertence ao espaço horizontal $H_{\widetilde{\gamma}(t)}P$.*

A definição garante que a curva sempre intercepta fibras diferentes se $\gamma \in M$ não é trivial. Se U_α é um aberto que contém a curva γ e s_α é a seção (2.66) em U_α, podemos expressar a curva $\widetilde{\gamma}(t)$ em P como:

$$\widetilde{\gamma}(t) = s_\alpha(\gamma(t))g_\alpha(t) \quad , \quad g_\alpha(t) \equiv g_\alpha(\gamma(t)) \in G,$$

com a condição $g_\alpha(0) = e$, ou seja que $\widetilde{\gamma}(0) = s_\alpha(\gamma(0)) = u_0$. A relação entre os vetores tangente $\widetilde{X} \in T_{\widetilde{\gamma}(t)}P$ e $X \in T_{\gamma(t)}M$ é a seguinte:

$$\widetilde{X} = Ad(g_\alpha^{-1}(t))(s_{\alpha*}X) + \left[g_\alpha^{-1}(t)d_P g_\alpha(t)\right]^{\#}$$

e devido a que, por definição $\widetilde{X} \in H_{\widetilde{\gamma}(t)}P$, o elemento do grupo $g_\alpha(t) \in G$ que define o lift horizontal é a solução da equação diferencial ordinária de grau um $\omega(\widetilde{X}) = 0$ dada por:

$$\frac{dg_\alpha(t)}{dt} = -\omega(s_{\alpha*}X)g_\alpha(t).$$

Da definição (2.71) e do teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias, vemos que localmente a equação:

$$\frac{dg_\alpha(t)}{dt} = -\mathcal{A}_\alpha(X)g_\alpha(t), \tag{2.79}$$

possui uma única solução com a condição inicial $g(t) = e$ que nesse caso é dada pela exponencial ordenada P na trajetória γ[12]:

$$g_\gamma(t) = P\exp\left(-\int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathbb{A}_\mu(\gamma(t))dx^\mu\right), \tag{2.80}$$

lembramos que $\mathcal{A} = \mathbb{A}_\mu dx^\mu \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(M)$. O lift horizontal dado por $\widetilde{\gamma}(t) = s_\alpha(\gamma(t))g_\alpha(t)$ com $\widetilde{\gamma}(0) = u_0$, define um único lift horizontal $\widetilde{\gamma}(t)^a = R^P_a(\widetilde{\gamma}(t)) = \widetilde{\gamma}(t)a$ com $\widetilde{\gamma}(0)^a = \widetilde{\gamma}(0)a = u_0 a$ sob a ação direita R^P_a.

Ao considerar um loop γ definido por $\gamma(0) = \gamma(1) = \pi^{-1}(u) = p \in U_\alpha$, temos que:

$$g_\gamma = P\exp\left(-\oint_\gamma \mathbb{A}_\mu(\gamma(t))dx^\mu\right), \tag{2.81}$$

[12]Suprimimos o subíndice $\alpha \in A$ por simplicidade.

define um mapeamento $\Lambda \to G$ dado por $\gamma \to g_\gamma$ entre o espaço dos loops Λ em U no grupo de Lie G , a informação da trajetória γ é carregada pela conexão local $\mathcal{A}_\alpha(\gamma)$ para formar o elemento $g_\gamma \in G$. De fato, $g_\gamma \in G$ depende de alguma área encerrada pelo loop γ e a dependência é explicitada como se segue:

Uma variação funcional da curva γ parametrizada em U_α por $x^\mu(t)$ tem como resultado que a variação de (2.79) é:

$$\frac{d}{dt}\delta_\gamma g(t) = -\mathbb{A}_\mu \frac{dx^\mu}{dt}\delta_\gamma g(t) - \delta_\gamma\left(\mathbb{A}_\mu \frac{dx^\mu}{dt}\right) g(t), \tag{2.82}$$

onde $\left[\delta_\gamma, \frac{d}{dt}\right] = 0$. Ao multiplicar por $g(t)^{-1}$ pela esquerda de (2.82) e usar a equação análoga de (2.79) para $g(t)^{-1}$ obtemos, após integração em t, a relação:

$$g(t)^{-1}\delta_\gamma g(t) = -\int_0^t dt^{\cdot} g(t^{\cdot})^{-1}\delta_\gamma\left(\mathbb{A}_\mu \frac{dx^\mu}{dt^{\cdot}}\right) g(t^{\cdot})$$

Com ajuda da variação $\delta_\gamma\left(\mathbb{A}_\mu \frac{dx^\mu}{dt}\right) = \partial_\nu \mathbb{A}_\mu \frac{dx^\mu}{dt}\delta_\gamma x^\nu + \mathbb{A}_\mu \frac{d}{dt}\delta_\gamma x^\mu$, integramos por partes na variável $t^{\cdot}$ para eliminar o termo $\mathbb{A}_\mu \frac{d}{dt}\delta_\gamma x^\mu$, obtendo:

$$g(t)^{-1}\delta_\gamma g(t) = g(t)^{-1}\mathbb{A}_\mu g(t)\delta_\gamma x^\mu + \int_0^t dt^{\cdot} g(t^{\cdot})^{-1}\mathbb{F}_{\mu\nu} g(t^{\cdot})\frac{dx^\mu}{dt^{\cdot}}\delta_\gamma x^\nu,$$

onde $\mathbb{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu + [\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu]$ são as componentes da curvatura (2.77) em M dadas por $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathbb{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^2(M)$.

Ao fechar a curva γ num loop, ou seja quando $x^\mu(0) = x^\mu(1) = p$ com $\delta_\gamma x^\mu(0) = \delta_\gamma x^\mu(1) = 0$ (ponto fixo) temos:

$$\delta_\gamma g(1) = g(1)\int_0^1 dt g(t)^{-1}\mathbb{F}_{\mu\nu} g(t)\frac{dx^\mu}{dt}\delta_\gamma x^\nu.$$

O aberto U_α possui um *grupo fundamental* trivial $\pi_1(M) = \{e\}$, então podemos expandir continuamente um loop infinitesimal ao redor do *ponto base* p até coincidir com o loop γ e varrer uma dada área Σ. A deformação é parametrizada por σ e vem dada pela *homotopia* $F(t,s)$ $0 \le t \le 1$, $0 \le t \le 1$ com $F(t,0) = p$ e $F(t,1) = \gamma(t)$. Agora, podemos fazer $\delta_\gamma = \delta\sigma\frac{d}{d\sigma}$ e obter a expressão:

$$\frac{dg(1)}{d\sigma} = g(1)\int_0^1 dt g(t)^{-1}\mathbb{F}_{\mu\nu} g(t)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{d\sigma},$$

que é uma equação da forma $\frac{dg}{d\sigma} = gF$ (Cf. (2.79)) com uma solução exponencial ordenada $\mathcal{P}$ na superfície Σ :

$$g_\Sigma = \mathcal{P}\exp\left(\int_\Sigma g_\gamma^{-1}\mathbb{F}_{\mu\nu}(x) g_\gamma dx^\mu \wedge dx^\nu\right). \tag{2.83}$$

Assim, obtemos a versão *não abeliana* do teorema de Stokes:

$$P\exp\left(-\oint_{\partial\Sigma}\mathcal{A}\right)=\mathcal{P}\exp\left(2\int_{\Sigma}g_{\gamma}^{-1}\mathcal{F}g_{\gamma}\right). \tag{2.84}$$

O mapeamento $\gamma\longrightarrow g_{\gamma}$ fica então expresso em termos da curvatura local $\mathbb{F}$ e da alguma área Σ encerrada pelo loop γ. Se $\Sigma=0$, o mapeamento $\gamma\longrightarrow g_{\gamma}$ é trivial e $g_{\gamma}=Id_{G}$. Se $\Sigma\neq 0$ e $\mathbb{F}\neq 0$, dois loops diferentes γ_1 e γ_2 são mapeados em dois elementos diferentes do grupo G_1 e G_2. Finalmente, se $\Sigma\neq 0$ e $\mathbb{F}=0$ todos os loops γ são mapeados na identidade do grupo G. Essa última possibilidade quando $\dim_{\mathbb{C}}=1$ implica a existência de quantidades conservadas como veremos no comentário do capitulo 3.

Para terminar, consideremos o lift horizontal $\widetilde{\gamma}(t)=s_{\alpha}(\gamma(t))g_{\alpha}(t)$ associado ao loop γ definido por $\gamma(0)=\gamma(1)=p\in U_{\alpha}$. Vamos ter dois elementos $u_0=\widetilde{\gamma}(0)=s_{\alpha}(p)$ e $u_1=\widetilde{\gamma}(1)=s_{\alpha}(p)g_{\alpha}(1)=u_0g_{\alpha}(1)$ onde $g_{\alpha}(1)$ vem dado por (2.83) e $u_1=R^{P}_{g_{\Sigma}}(u_0)$ estão na mesma fibra G_p sobre p. Em geral $u_0\neq u_1$ mas $\pi(u_0)=\pi(u_1)=p\in U_{\alpha}$, o que significa que a imagem do loop γ em P *não* é necessariamente um loop. A medida do *não fechamento* entre o ponto inicial u_0 e o ponto final u_1 na mesma fibra do lift horizontal $\widetilde{\gamma}$ em P associado ao loop γ em U é devida à presença da curvatura F de P definida por (2.74). Se $u_0=u_1$ temos duas possibilidades, o caso trivial $(\Sigma=0,F\neq 0)$ ou o caso $(\Sigma\neq 0,\mathbb{F}=0)$ que é mais interessante.

2.2.2 Transformações de Gauge, Cosets e Variedades Flag.

As translações esquerdas e direitas num G-fibrado principal são implementadas com sentidos e usos diferentes. As ações pela esquerda estão relacionadas com as funções de transição e as ações pela direita junto com um certo difeomorfismo levam à introdução das transformações de gauge.

Definição 18 *Uma transformação de Gauge num G-fibrado principal $P\longrightarrow M$ é um difeomorfismo $\varphi:P\longrightarrow P$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\pi\circ\varphi=\pi$, *preserva as fibras;*

ii) $\varphi\circ R^{P}_{a}=R^{P}_{a}\circ\varphi$.

É dizer que as transformações de gauge atuam nos *espaços internos* definidos pelas fibras sobre cada ponto $p=\pi(u)\in M$. A restrição do mapeamento φ e, U_{α} vem dada por:

$$\varphi\,|_{U_{\alpha}}(u)=\psi_{\alpha}\circ\varphi\circ\psi_{\alpha}^{-1}(p,g_{\alpha}(u))=(p,\varphi_{\alpha}(p)g_{\alpha}(u))=s_{\alpha}(p)\cdot(\varphi_{\alpha}(p)g_{\alpha}(u))\ ,\ \ p\in M,\,u\in P, \tag{2.85}$$

onde o mapeamento $\varphi_{\alpha}:M\longrightarrow G$ é definido por:

$$\varphi_{\alpha}\equiv g_{\alpha}\circ\varphi\circ s_{\alpha}. \tag{2.86}$$

Quando $U_{\alpha}\cap U_{\beta}\neq\varnothing$ temos $\varphi_{\beta}=Ad(t_{\beta\alpha})\varphi_{\alpha}$ e o conjunto $\{\varphi_{\alpha}\}_{\alpha\in A}$ permite recuperar φ via (2.85).

Agora, a *manifestação* do mapeamento φ como transformação de gauge se evidencia na sua ação sobre a conexão de P . Com a 1-forma conexão ω da conexão $\mathcal{H}$ e o mapeamento φ, podemos construir uma outra 1-forma conexão $\varphi^{*}\omega$ com ajuda da relação:

$$(\varphi_{*}X^{\#})_{\varphi(u)}(f)=X^{\#}_{u}(\varphi^{*}f)\ \ ,\ \ f\in\mathfrak{F}(P)\ ,\ \ X\in\mathfrak{g},$$

onde os subíndices clarificam o ponto onde $X^{\#}$ está definido. Da relação (2.69) vemos que $X^{\#}_u(\varphi^* f) = X^{\#}_{\varphi(u)}(f)$ e com a condição $i)$ (def 15) obtemos:

$$(\varphi^*\omega)(X^{\#}) = X \in \mathfrak{g}.$$

Finalmente, as propriedades $ii)$ (def 18) e $ii)$ (def 15) implicam a lei de transformação:

$$R_a^{P*}(\varphi^*\omega) = \varphi^*(R_a^{P*}\omega) = Ad(a^{-1}) \circ (\varphi^*\omega),$$

o que verifica que $(\varphi^*\omega)$ é uma outra 1-forma conexão de $P \to M$ gerada pela transformação de gauge φ.

Similar à (2.71), temos localmente:

$$(\varphi^*\omega)_\alpha = \mathcal{A}_\alpha^\varphi \equiv s_\alpha^*(\varphi^*\omega),$$

e com ajuda de (2.72) obtemos a *lei de transformação de gauge*;

$$\mathcal{A}_\alpha^\varphi = Ad(\varphi_\alpha^{-1}) \circ \mathcal{A}_\alpha + \varphi_\alpha^*\theta. \tag{2.87}$$

Usando $\varphi^*(d_P\omega) = d(\varphi^*\omega)$ e $\varphi^*(\omega \wedge \omega) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\omega)$ temos a expressão análoga da equação de estrutura de Maurer-Cartan (2.75):

$$(\varphi^*\Omega) = d_P(\varphi^*\omega) + (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\omega),$$

que localmente em U_α se reduz a expressão (Cf (2.77)):

$$\mathcal{F}_\alpha^\varphi = d\mathcal{A}_\alpha^\varphi + \mathcal{A}_\alpha^\varphi \wedge \mathcal{A}_\alpha^\varphi,$$

onde $\mathcal{F}_\alpha^\varphi = (\varphi^*\Omega)_\alpha \equiv s_\alpha^*(\varphi^*\Omega)$, e quando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ transforma como:

$$\mathcal{F}_\alpha^\varphi = Ad(\varphi_\alpha^{-1}) \circ \mathcal{F}_\alpha. \tag{2.88}$$

No caso de grupos de Lie matriciais temos:

$$\varphi_\alpha^*\theta = \varphi_\alpha^{-1} d\varphi_\alpha \tag{2.89}$$

e chegamos às conhecidas leis de transformação:

$$\mathcal{A}_\alpha^\varphi = \varphi_\alpha^{-1}\mathcal{A}_\alpha\varphi_\alpha + \varphi_\alpha^{-1}d\varphi_\alpha, \tag{2.90}$$
$$\mathcal{F}_\alpha^\varphi = \varphi_\alpha^{-1}\mathcal{F}_\alpha\varphi_\alpha. \tag{2.91}$$

Para terminar com as definições e resultados necessários, vamos reescrever um grupo de Lie G como um fibrado principal e terminar com a introdução das variedades Flag.

Para um subgrupo *fechado*[13] H de um grupo de Lie G e o espaço *coset esquerdo* G/H formado pela união das classes de equivalência $[g] = gH \equiv \{gh \mid h \in H \,,\, g \in G\}$, o mapeamento $\Psi : G \times G/H \to G/H$ definido por:

$$\Psi(a, bH) = \Psi_a(bH) \equiv abH \tag{2.92}$$

[13] Significa que H como subgrupo de Lie de G é um grupo de Lie.

é uma ação pela esquerda de G em G/H que é transitiva, ou seja que G/H é um espaço *homogêneo* de G. No caso de G ser um grupo de Lie complexo, temos de (2.34) que Ψ é um mapeamento holomórfico. O seguinte teorema [4],[26] enunciado sem demonstração, será de grande utilidade no que se segue.

Teorema 19 *Se $H \subset G$ é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G, então o espaço homogêneo G/H admite uma única estrutura diferenciável e o mapeamento $\pi : G \longrightarrow G/H$ definido por $\pi(g) \equiv [g]$ é uma submerção*[14]. *No caso de G ser um grupo de Lie complexo, o espaço G/H possui uma única estrutura complexa e $\pi : G \longrightarrow G/H$ é um mapeamento holomórfico.*

Consideremos o coset G/H (notemos que $G, H, G/H$ são variedades diferenciáveis e a condição $i)$ (def 12) é satisfeita). O mapeamento $\pi : G \longrightarrow M \equiv G/H$ dado por $\pi : g \longrightarrow [g]$ é surjetor devido a g, $ga \in G$ serem mapeados na mesma classe $[g]$, ou seja $\pi(g) \equiv \pi(ga)$. O teorema 19 diz que $\pi^{-1}([g]) = g \in G$ é uma projeção (Cf $ii)$ (def 12)). O seguinte passo é a introdução de uma trivialização local. Para uma seção arbitrária $\sigma_\alpha : G/H \longrightarrow H$ definida em $U_\alpha \subset G/H$ e o elemento $\pi^{-1}([g]) = g$, introduzimos o mapeamento $\psi_{\alpha[g]} : G \longrightarrow H$ definido por:

$$\psi_{\alpha[g]}(g) \equiv \sigma_\alpha([g])^{-1}g. \tag{2.93}$$

Devido a $\sigma_\alpha([g])$ ser uma seção em $[g]$, ela é um elemento de G da forma ga ($a \in H$, $g \in G$), ou seja que $\sigma_\alpha([g])^{-1}g = a^{-1}g^{-1}g = a^{-1} \in H$. Assim, a trivialização local $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \times H$ é definida por (Cf $iv)$ (def 12)) :

$$\psi_\alpha(g) \equiv ([g]\,, \psi_{\alpha[g]}(g)) = ([g]\,, a) \quad , \quad a \in H. \tag{2.94}$$

No caso de G ser um grupo complexo, a seção $\sigma_\alpha : G/H \longrightarrow H$ é um mapeamento holomórfico. Por outro lado temos $\psi_{\alpha[g]}(ga) = \psi_{\alpha[g]}(g)a$, o que implica:

$$\psi_\alpha(ga) = ([g]\,, \psi_{\alpha[g]}(g)a)$$

que é a ação pela direita (2.65) num H-fibrado principal e (iii) (def 12)) é satisfeita devido a H atuar nele mesmo pela esquerda. Da mesma maneira que em (2.66) obtemos um atlas para G e por outro lado, a ação pela esquerda de G em G/H (2.92) e a projeção π satisfazem:

$$\pi \circ L = \Psi \circ \pi. \tag{2.95}$$

Finalmente, vemos que o grupo de Lie G é um H-fibrado principal $G \longrightarrow G/H$ com espaço base G/H e fibra típica H e localmente:

$$G = G/H \times H \tag{2.96}$$

No caso de G ser um grupo de Lie complexo temos do teorema 19 e (2.35),(2.34) que G é um H-fibrado principal holomórfico.

[14] O mapeamento $\pi : G \longrightarrow G/H$ é *submersivo* no ponto $g \in G$, se o "pull-forward" $\pi_{*g} : T_g(G) \longrightarrow T_{\pi(g)}(G/H)$ é um mapeamento surjetor. Se π é submersivo $\forall\, g \in G$ então π é uma submersão.

Agora consideremos a ação esquerda[15] de um grupo de Lie G numa variedade diferenciável M. O mapeamento $\Phi : G \times M \to M$ definido por:

$$\Phi_p(a) \equiv a \cdot p, \quad a \in G, \quad p \in M$$

é diferenciável e o grupo *estabilizador* de p definido por $G_p \equiv \Phi_p^{-1}(p) = \{a \in G \mid a \cdot p = p\}$ é um subgrupo fechado do grupo de Lie G. O teorema 19 implica que o espaço coset G/G_p é uma variedade diferenciável.

O seguinte teorema [4],[26] enunciado sem demonstração, fornece a relação entre as variedades G/G_p e M.

Teorema 20 *Se a ação $\Phi : G \times M \to M$ do grupo de Lie G na variedade M é transitiva, então o mapeamento $\psi : G/G_p \to M$ definido por $\psi_p(aG_p) \equiv a \cdot p$ é um difeomorfismo. No caso das variedades G e M serem complexas, o difeomorfismo correspondente é um mapeamento holomórfico.*

O teorema é bastante forte, devido a estabelecer que qualquer espaço homogêneo M de um grupo de Lie G é difeomorfo ao coset G/G_p de dois grupos de Lie. O seguinte exemplo, clarificará o teorema.

Seja V um espaço vetorial $n-$dimensional sob um campo $\mathbb{k}$ e seja $\mathbb{G}^k(V)$ o conjunto dos subespaços $k-$dimensionais de V. Para qualquer $A \in GL(V)$ e $W \in \mathbb{G}^k(V)$, o elemento $AW \in \mathbb{G}^k(V)$, ou seja o grupo $GL(V)$ define uma ação pela esquerda em $\mathbb{G}^k(V)$ que é obviamente transitiva. Se $\{e_i\}$ é uma base de V, o subconjunto $\{e_\alpha\}$ $\alpha = 1, ..., k$ é invariante sob o subgrupo $H \subset GL(V)$ formado pelos elementos $A \in GL(V)$ que representados na base $\{e_i\}$ tem a forma de bloco:

$$a = \begin{pmatrix} X_1 & Y \\ 0 & X_2 \end{pmatrix},$$

onde X_1 e X_2 são matrizes não degeneradas de dimensão $k \times k$ e $(n-k)\times$ $(n-k)$ respectivamente e Y é uma matriz arbitrária de dimensão $k \times (n-k)$. Então $\mathbb{G}^k(V) \cong GL(V)/H$. Assim reconhecemos que $\mathbb{G}^k(V)$ é uma variedade de Grassmann de dimensão $k(n-k)$. No caso de $V = \mathbb{k}^n$, denotamos $\mathbb{G}^k(\mathbb{k}^n) = \mathbb{k}\mathbb{G}^{k,n-k}$ e em particular, quando $k = 1$ temos que $\mathbb{k}\mathbb{G}^{1,n-1}$ é o espaço projetivo $\mathbb{k}\mathbb{P}^n$.

Depois da introdução das variedades de Grassmann vem naturalmente a definição de Flag.

Definição 21 *Se V é um espaço vetorial $n-$dimensional e $i_1, ..., i_k \in \mathbb{Z}^+$ são números inteiros tal que $0<i_1 < ... < i_k < n$. A família $\{V_l\}$ de subespaços de V com $\dim V_l = i_l$, $l = 1, ..., k$ é um Flag do tipo $\{i_1, ..., i_k\}$ em V se ela é uma seqüência de espaços $V_1 \subset ... \subset V_k \subset V$.*

O conjunto de Flags do tipo $\{i_1, ..., i_k\}$ em V denotado por $F_{i_1,...,i_k}(V)$ se denomina variedade Flag. Em particular, vemos que a variedade Flag mais simples $F_i(V) = \mathbb{G}^i(V)$ é a variedade de Grassmann do exemplo anterior. Considerando o espaço vetorial complexo V , o grupo $SL(m, \mathbb{C})$ define uma ação esquerda no conjunto $F_{i_1,...,i_k}(V)$ que é transitiva. Se $\{e_i\}$ $i = 1, ..., m$ é uma base de V, o flag formado pelos subespaços:

$$V_l \equiv \bigoplus_{1 \leq i \leq i_l} \mathbb{C}e_i \ , \quad l = 1, ..., k,$$

[15] Qualquer definição ou resultado tem seu equivalente para as ações pela direita [1].

com combinações lineares em $\mathbb{C}$ tem como grupo estabilizador às matrizes $A \in SL(m, \mathbb{C})$ que representadas na base $\{e_i\}$ são da forma de bloco (2.49) que está diretamente ligada à existência da subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_+$. Essa dependência entre subálgebras parabólicas e variedades Flag é o coração da formulação geométrica do principio da curvatura nula e dos modelos de Toda de grau superior, como veremos. Assim, o conjunto $F_{i_1,\dots,i_k}(V)$ é identificado com o espaço homogêneo $SL(m, \mathbb{C})/P$ onde P é um subgrupo parabólico formado pelas matrizes (2.49), e do teorema 19 vemos que $F_{i_1,\dots,i_k}(V)$ é uma variedade complexa. Em resumo, todos os espaços homogêneos ou cosets da forma:

$$F = G/P \; , \tag{2.97}$$

onde P é uma subgrupo parabólico do grupo de Lie complexo G, são variedades Flag e são *complexas* e *compactas*. A forma do Flag está determinada pela partição de p em (2.49) a qual fica expressada em termos de uma $\mathbb{Z}-$gradação, como pode se-ver de (2.59).

Dessa maneira terminamos a introdução de definições e resultados, o seguinte passo é aplicá-los a um problema específico.

Capítulo 3

◎ A geometria das equações de Toda.

Nesse capítulo, tentaremos justificar o esforço feito até agora com um resultado nada trivial. A dedução geométrica [1],[2] da conexão de Lax das teorias integráveis relativísticas interagentes com invariância conforme em duas dimensões; Os modelos de Toda. A dedução está completamente baseada no estudo de um fibrado principal *trivial* cuja curvatura associada é *nula* e o objetivo é explorar a estrutura interna da álgebra de Lie para construir uma conexão que mostre explicitamente a dinâmica do campo $\varphi : M \rightarrow G$ que define a conexão ${}^{\varphi}\mathcal{A} \equiv \varphi^{*}\theta$, a qual anula a curvatura.

Além da obtenção do resultado, é um excelente exercício de geometria diferencial e uma boa oportunidade de usar na prática as ferramentas geométricas que até agora só foram introduzidas como *meras* definições. Inicialmente, introduzimos a curvatura nula como principio gerador de equações de movimento de teorias não lineares e posteriormente abordaremos a questão da construção do par de Lax que dará origem às equações de Toda de grau superior.

3.1 Sistemas Integráveis.

3.1.1 Princípio dinâmico da curvatura nula.

Agora, o nosso interesse está centrado no caso em que o G-fibrado principal $P \rightarrow M$ é *trivial* e o mapeamento $\gamma \rightarrow g_{\gamma}$ também é trivial sob a condição $(\Sigma \neq 0, \mathbb{F} = 0)$. A trivialidade do fibrado é devida ao fato de que $P \rightarrow G$ possui *uma carta só* $(U_{\alpha}, \psi_{\alpha})$ onde o grupo de estrutura é formado somente por mapeamentos identidade, ou seja que $P = M \times G \rightarrow G$ globalmente. Sob essa condição, da discussão que levo até a definição (2.71) vemos que existe uma correspondência bijetiva entre as 1-formas conexão ω e os campos de gauge $\mathcal{A}_{\alpha}$ como conseqüência de (2.73), que agora com $t_{\alpha\beta} \equiv e\ \forall$ $t_{\alpha\beta} \in G$ se reduz a $\mathcal{A}_{\alpha} = \mathcal{A}_{\beta}$ em $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \varnothing\ \forall\ \alpha, \beta \in A$. Basta conhecer só o campo gauge $\mathcal{A}_{\alpha}$ num aberto U_{α} para recuperar a 1-forma conexão ω em $M \times G$. Carregando essa correspondência em mente, denominamos sem ambigüidade o campo de gauge $\mathcal{A}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{A}$ como *forma conexão* ou simplesmente como *conexão* e usamos indistintamente ω ou $\mathcal{A}$ ou Ω ou $\mathcal{F}$ na seguinte discussão. As generalidades do mapeamento $\gamma \rightarrow g_{\gamma} = Id_G$ são brevemente mostradas no comentário do final do capítulo, com o objetivo de mostrar a construção de quantidades conservadas em involução.

A 2-forma curvatura Ω da conexão ω em P=$M \times G$, vem dada pela equação de estrutura de

Maurer-Cartan (2.75):

$$\Omega = d_P\omega + \omega \wedge \omega$$

A equação (2.76) implica que a conexão $\mathcal{A}$ é *plana* se $\Omega = 0$, ou seja que (2.77) é trivial:

$$d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0. \tag{3.1}$$

De (2.21) temos que a forma de Maurer-Cartan $\theta \in \mathfrak{g} \otimes T^*(G)$ definida em (2.16) é uma solução da equação $\Omega = 0$, mas o resultado é valido só no grupo de Lie G. A solução equivalente em $M \times G$ é obtida facilmente em virtude de que a equação (3.1) é o "pull-back" φ^* da equação (2.21), graças às seguintes propriedades $\varphi^*(d\theta) = d(\varphi^*\theta)$ e $\varphi^*(\theta \wedge \theta) = (\varphi^*\theta) \wedge (\varphi^*\theta)$, que são conseqüência de $\varphi \equiv \varphi_\alpha : M \to G$ definido por (2.86) ser um difeomorfismo associado à transformação de gauge $\varphi : M \times G \to M \times G$ no fibrado trivial[1]. Vemos imediatamente, que a solução de (3.1) é o pull-back da forma de Maurer-Cartan de G que é exatamente a contribuição do segundo termo do lado direito de (2.87):

$$^{\varphi}\mathcal{A} \equiv \varphi^*\theta, \tag{3.2}$$

o que implica que essa conexão é plana.

A transformação (2.87) implica que se $\mathcal{A} = 0$ é uma solução de (3.1) sua conexão de gauge associada (3.2) também é uma solução e se $^{\varphi}\mathcal{A}$ é solução, sua conexão de gauge associada $^{\varphi}\mathcal{A}^{\psi}$ sob ψ também será etc[2]. No caso de grupos de Lie matriciais, a relação (2.89) implica que:

$$^{\varphi}\mathcal{A} \equiv \varphi^*\theta = \varphi^{-1}d\varphi, \tag{3.3}$$

é uma conexão *puro gauge,* onde φ são agora as funções coordenadas $\varphi : M \to GL(m, \mathbb{k})$.

Para qualquer par de mapeamentos $\varphi, \psi : M \to G$, as conexões $^{\varphi}\mathcal{A}$ e $^{\psi}\mathcal{A}$ estão relacionadas pela transformação (2.87):

$$^{\varphi\psi}\mathcal{A} = Ad(\psi^{-1}) \circ {}^{\varphi}\mathcal{A} + {}^{\psi}\mathcal{A}. \tag{3.4}$$

No caso de grupos matriciais teremos que:

$$^{\varphi\psi}\mathcal{A} = \psi^{-1}\,(^{\varphi}\mathcal{A})\,\psi + \psi^{-1}d\psi = (\varphi\psi)^{-1}d(\varphi\psi) = {}^{\varphi}\mathcal{A}^{\psi},$$

é outra solução de (3.1). Em resumo, (2.88) implica que (3.1) é invariante de gauge e as soluções de (3.1) estão ligadas via (2.87).

O papel do mapeamento $\varphi : M \to G$ é fundamental no que se segue. Com ele é possível definir uma teoría clássica de campos[3] onde o espaço domínio é a variedade M e o espaço imagem ou dos campos, é uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

[1] Denotamos a transformação de gauge φ e sua restrição $\varphi \equiv \varphi_\alpha$ da mesma forma devido a φ_α determinar completamente ao mapeamento φ via (2.85).

[2] Essa é a motivação na introdução das transformações Dressing para construir as soluções solitonicas dos modelos integráveis associados [7].

[3] Por exemplo, o campo de Klein-Gordon ϕ satisfaz a eq. $(\Box + m^2)\phi = 0$ e a 1-forma $\mathcal{A}$ satisfaz a equação de movimento (3.1).

Definição 22 *A relação* $\Omega = d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{g}\otimes\Omega^1(M)$ *se denomina condição de curvatura nula e é uma equação de movimento para o campo* $\mathbb{A} : M \longrightarrow \mathfrak{g}$ *onde* $\mathcal{A} = \mathbb{A}{\cdot}dx$. *A relação* $\Omega = 0$ *é a manifestação do principio dinâmico da curvatura nula.*

De fato, só consideraremos a condição de curvatura nula para o caso em que M é uma variedade complexa com dimensão complexa um $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ ($\dim_{\mathbb{R}} M = 2$) e G é um grupo de Lie complexo semi-simples. Isto é devido ao fato de que nesse caso a teoria é relativamente tratável e onde não precisamos generalizar o teorema de Stokes (2.84), que é o responsável pela existência das cargas conservadas (3.7). O tratamento em dimensões mais altas é introduzido pela primeira vez em [5] com as devidas generalizações .

Por motivos de conveniência, denotamos as coordenadas locais da variedade complexa M por $z^- \equiv z$, $z^+ \equiv \bar{z}$ e as derivadas como $\partial_- \equiv \partial_z$, $\partial_+ \equiv \partial_{\bar{z}}$. A conexão $\mathcal{A}$ é decomposta na base $\{dz^-, dz^+\}$ como:

$$\mathcal{A} = \mathbb{A}_- dz^- + \mathbb{A}_+ dz^+ \tag{3.5}$$

onde $\mathcal{A}^{(1,0)} = \mathbb{A}_- dz^- \in \mathfrak{g}\otimes\Omega^{(1,0)}(M)$ e $\mathcal{A}^{(0,1)} = \mathbb{A}_+ dz^+ \in \mathfrak{g}\otimes\Omega^{(0,1)}(M)$ são as componentes de bigrau $(1,0)$ e $(0,1)$ respectivamente. Em termos do *par de Lax* $\mathbb{A}_\pm : M \rightarrow \mathfrak{g}$ temos $d\mathcal{A} = (\partial_-\mathbb{A}_+ - \partial_+\mathbb{A}_-)dz^-\wedge dz^+$, $\mathcal{A}\wedge\mathcal{A} = ([\mathbb{A}_-, \mathbb{A}_+])dz^-\wedge dz^+$ e a equação de movimento $\Omega = 0$, é simplesmente:

$$\partial_-\mathbb{A}_+ - \partial_+\mathbb{A}_- + [\mathbb{A}_-, \mathbb{A}_+] = 0, \tag{3.6}$$

a qual pode ser escrita em termos das derivadas covariantes $\mathbb{D}_\pm \equiv \partial_\pm + \mathbb{A}_\pm$ da maneira usual como o comutador $[\mathbb{D}_+, \mathbb{D}_-] = 0$. Essa equação trivial é a que vamos manipular.

Se consideramos como *campos* aos coeficientes da expansão do par de Lax $\mathbb{A}_\pm$ numa dada base de $\mathfrak{g}$, a equação (3.6) resulta num sistema de *equações diferenciais parciais não lineares* que, por definição, são as equações de movimento dos campos envolvidos. Agora é evidente que resolver (3.6) não é uma tarefa fácil, mas isso será feito mais a frente, após *impormos* certas condições sob o par $\mathbb{A}_\pm$ dada a liberdade que existe na escolha do campo φ.

Comentário: Infinitas quantidades conservadas.

A condição $\mathbb{F} = 0$ no fibrado trivial $M \times G$ quando $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ resultam nas equações de movimento (3.6). Agora, voltamos ao estudo do mapeamento trivial $\gamma \longrightarrow g_\gamma = Id_G$ sob a condição $\Sigma \neq 0$, $\mathbb{F} = 0$ quando $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$.

Para estudar a dinâmica precisamos duma variável tempo, então consideremos, por simplicidade, a variedade M como o espaço plano 2-dimensional com coordenadas (t, x). O elemento de grupo definido por (2.80) possui as seguintes propriedades:

$$g_{\gamma_1} g_{\gamma_2} = g_{\gamma_1+\gamma_2},$$
$$g_{\gamma^{-1}} = g_\gamma,$$

quando $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ e onde γ^{-1} significa que a curva é percorrida em sentido inverso.

O teorema de Stokes (2.84) com $\mathbb{F} = 0$ implica que (2.81) é a matriz identidade Id_G, então definamos um loop γ como o retângulo $-L \leq x \leq L$ e $0 \leq t \leq \tau$ e usemos as propriedades de g_γ para decompor o elemento:

$$Id_G = P\exp\left(-\oint_\gamma \mathbb{A}_\mu(\gamma(t))dx^\mu\right)$$

nos diferentes trajetos que formam o retângulo. Assumimos as condições de periodicidade $\mathbb{A}_x(-L,t) = \mathbb{A}_x(L,t)$ e definimos as matrizes:

$$T(t \mid \lambda) \equiv P\exp\left(\int_{-L}^{L} \mathbb{A}_x(x,t \mid \lambda)dx\right),$$

$$S(x) \equiv P\exp\left(\int_0^\tau \mathbb{A}_t(x,t \mid \lambda)dt\right),$$

onde λ é um *parâmetro espectral* complexo, então:

$$Id_G = T(0 \mid \lambda)S(L)T(\tau \mid \lambda)^{-1}S(L)^{-1}$$

e como conseqüência disso obtemos:

$$T(\tau \mid \lambda) = S(L)^{-1}T(0 \mid \lambda)S(L);$$

ou seja que o traço é independente do tempo:

$$Tr\,(T(\tau \mid \lambda)) = Tr\,(T(0 \mid \lambda)) \equiv I(\lambda), \tag{3.7}$$

e dado que λ é um parâmetro continuo, obtemos infinitas quantidades conservadas. Na verdade, elas estão em *involução*:

$$\left\{I(\lambda) \underset{,}{\otimes} I(\mu)\right\} = 0$$

e são suficientes para garantir a integrabilidade clássica segundo o criterio de Liouville [6],[7].

3.2 Equações de movimento.

3.2.1 Condições de Grau e as equações de Leznov-Saveliev.

É claro que a solução da equação (3.1) é dada por ${}^{\varphi}\mathcal{A} = {}^{\varphi}\mathbb{A}\cdot dx$ (Cf (3.2)), mas na construção da solução só foi explorada a equação de estrutura de Maurer-Cartan e o mapeamento $\varphi : M \to G$ (Cf(2.86)). É óbvio que solução não exibe nenhum tipo de informação da estrutura subjacente da álgebra $\mathfrak{g}$ envolvida e por tanto é independente dela. O objetivo desta seção é exibir a estrutura da $\mathbb{Z}-$gradação da álgebra de Lie complexa semi-simples $\mathfrak{g}$ (Cf (2.58) e (2.59)) no caso em que $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$, após impor certas condições de *quiralidade* sobre as componentes $\mathcal{A}^{(1,0)}$ e $\mathcal{A}^{(0,1)}$ da conexão de Lax (3.5). Essas condições são as denominadas *condições de grau.*

Tecnicamente, o programa que se segue se reduz a formular os requerimentos que devem ser impostos sobre o campo arbitrário $\varphi : M \to G$, para garantir a validade das condições de grau mantendo a conexão (3.2) como solução da equação de curvatura nula (3.6); isto se deve a que nem todo mapeamento φ tem uma forma funcional que obedeça as restrições *impostas* pelas condições de grau.

A primeira imposição que faremos sobre a conexão (3.5) é:

Condição 23 *Condição de grau geral: A componente* $\mathcal{A}^{(1,0)} = \mathbb{A}_- dz^-$ *e a componente* $\mathcal{A}^{(0,1)} = \mathbb{A}_+ dz^+$ *da conexão de Lax* $\mathcal{A}$ *tomam valores nos subespaços* $\widetilde{\mathfrak{b}}_- = \widetilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \widetilde{\mathfrak{h}}$ *e* $\widetilde{\mathfrak{b}}_+ = \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_+$ *respectivamente:*

$$\mathbb{A}_\pm \; dz^\pm \in \widetilde{\mathfrak{b}}_\pm \otimes \Omega^{\binom{(0,1)}{(1,0)}}(M) \; , \quad \mathbb{A}_\pm : M \to \widetilde{\mathfrak{b}}_\pm \subset \mathfrak{g}$$

onde $\widetilde{\mathfrak{n}}_- = \bigoplus_{m<0} \mathfrak{g}_m$ *e* $\widetilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{m>0} \mathfrak{g}_m$ *são as subálgebras (2.58).*

O interesse agora está nas subálgebras $\widetilde{\mathfrak{b}}_\pm$ que é onde a conexão de Lax toma valores, e nos seus correspondentes subgrupos $\widetilde{B}_\pm$. A melhor maneira de isolar a informação de $\widetilde{B}_\pm$ e tratar G e $\widetilde{B}_\pm$ dentro de um corpo só, é definindo os $B-$fibrados principais holomórficos $G \to G/\widetilde{B}_\pm$. Os subgrupos $\widetilde{B}_\pm$ do grupo de Lie G correspondentes às subálgebras parabólicas $\widetilde{\mathfrak{b}}_\pm$ são subgrupos parabólicos e, por tanto, os espaços homogêneos $F_\pm \equiv G/\widetilde{B}_\mp$ são variedades Flag (Cf(2.97)). Aqui fazemos contato com (2.96) onde identificamos, localmente:

$$G = G/\widetilde{B}_\pm \times \widetilde{B}_\pm. \tag{3.8}$$

Assim, considerando as projeções $\pi_\pm : G \to F_\pm$ (Cf teorema 19), definimos os mapeamentos $\varphi_\pm : M \to F_\pm$ por:

$$\varphi_\pm \equiv \pi_\pm \circ \varphi,$$

que em virtude do teorema 19 são mapeamentos holomórficos e de (2.30) obtemos[4] o seguinte:

$$\pi_{\pm * a} \circ J^G_a = J^{F_\pm}_{\pi_\pm(a)} \circ \pi_{\pm * a} \quad , \quad \forall a \in G. \tag{3.9}$$

Por outro lado, a ação pela esquerda $L^{F_\pm}$ do grupo G no coset $F_\pm$ e a projeção $\pi_\pm$ satisfazem:

$$\pi_\pm \circ L_a = L^{F_\pm}_a \circ \pi_\pm \quad , \quad \forall a \in G, \tag{3.10}$$

(Cf(2.95)) onde $\Psi \to L^{F_\pm}$. Notemos que devido à decomposição $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{n}}_\mp \oplus \widetilde{\mathfrak{b}}_\pm$, as subálgebras $\widetilde{\mathfrak{b}}_\mp$ são os espaços verticais $V(G \to F_\pm)$ em $TP(G \to F_\pm)$ (Cf(2.94)).

O seguinte teorema mostra as condições sob as quais o mapeamento $\varphi : M \to G$ *cumpre* com a condição de grau geral.

Teorema 24 *A conexão* ${}^\varphi\mathcal{A}$ *satisfaz a condição de grau geral se, e somente se, o mapeamento* $\varphi_- \equiv \pi_- \circ \varphi$ *é holomórfico e o mapeamento* $\varphi_+ \equiv \pi_+ \circ \varphi$ *é antiholomórfico.*

[4]Por motivos didáticos escrevemos os elementos de G e F onde atuam os mapas.

Prova. Vamos supor que a 1-forma ${}^{\varphi}\mathcal{A}^{(0,1)}$ toma valores na subálgebra $\widetilde{\mathfrak{b}}_{+}$. Assim, para $X \in T^{\mathbb{C}}(M)$ (Cf(2.23)) e o operador de projeção $\overline{P}_p$ (Cf(2.28)) temos que $\overline{P}_p(X) \in T_p^{(0,1)}(M)$. A suposição implica que ${}^{\varphi}\mathcal{A}(\overline{P}_p(X)) \in \widetilde{\mathfrak{b}}_{+}=V(G \to F_-)$ está no espaço vertical de $G \to F_-$ e ao ser projetado com π_{*-} obtemos (Cf(2.70)) o resultado trivial:

$$\pi_{-*e}\left[{}^{\varphi}\mathcal{A}(\overline{P}_p(X))\right] = 0.$$

Usando (3.2), reescrevemos o resultado anterior como:

$$\pi_{-*e}\left[\theta(\varphi_{*p} \circ \overline{P}_p(X))\right] = 0.$$

Usando (2.37) obtemos:

$$\pi_{*e} \circ L_{\varphi^{-1}(p)*\varphi(p)} \circ P^{G}_{\varphi(p)} \circ \varphi_{*p} \circ \overline{P}^{M}_{p} = 0. \tag{3.11}$$

Agora, (3.10) implica $\pi_{\pm*ab} \circ L_{a*b} = L^{F_\pm}_{a*\pi_\pm(b)} \circ \pi_{\pm*b} \quad \forall\ a, b \in G$ e então:

$$\pi_{-*e} \circ L_{\varphi^{-1}(p)*\varphi(p)} = L^{F_-}_{\varphi^{-1}(p)*\pi_-(\varphi(p))} \circ \pi_{-*\varphi(p)}\,. \tag{3.12}$$

Por outro lado, (3.9) implica $\pi_{\pm*a} \circ P^{G}_{a} = P^{F_\pm}_{\pi_\pm(a)} \circ \pi_{\pm*a} \quad \forall\ a \in G$ e entaõ:

$$\pi_{-*\varphi(p)} \circ P^{G}_{\varphi(p)} = P^{F_-}_{\varphi_-(p)} \circ \pi_{-*\varphi(p)}. \tag{3.13}$$

Usando (3.12) e (3.13) em (3.11) obtemos:

$$L^{F_-}_{\varphi^{-1}(p)*\varphi_-(p)} \circ P^{F_-}_{\varphi_-(p)} \circ \varphi_{-*p} \circ \overline{P}^{M}_{p} = 0.$$

Devido a ação $L^{F_-}_{a}$ ser um difeormorfismo (Cf(2.92)) $\forall\ a \in G$ então:

$$P^{F_-}_{\varphi_-(p)} \circ \varphi_{-*p} \circ \overline{P}^{M}_{p} = 0. \tag{3.14}$$

O mapeamento $\varphi_{-*p} : T^{\mathbb{C}}_p(M) \to T^{\mathbb{C}}_{\varphi_-(p)}(F_-)$ satisfaz a condição de realidade (2.32) e após conjugação complexa obtemos que:

$$\overline{P}^{F_-}_{\varphi_-(p)} \circ \varphi_{-*p} \circ P^{M}_{p} = 0. \tag{3.15}$$

Assim, de (3.14) e (3.15) concluímos que:

$$J^{F_-}_{\varphi_-(p)} \circ \varphi_{-*p} = \varphi_{-*p} \circ J^{M}_{p},$$

o que prova que $\varphi_- : M \to F_-$ é um mapeamento holomórfico (Cf(2.30)).

Supondo que φ_- seja um mapa holomórfico e revertendo os argumentos mostrados concluímos que a 1-forma ${}^{\varphi}\mathcal{A}^{(1,0)}$ toma valores na subálgebra $\widetilde{\mathfrak{b}}_{+}$. O mapeamento φ_+ é tratado de maneira idêntica.

■

A segunda imposição que faremos sobre a conexão (3.5) é a seguinte:

Condição 25 *Condição de grau especifica: A componente* $\mathcal{A}^{(1,0)} = \mathbb{A}_- dz^-$ *e a componente* $\mathcal{A}^{(0,1)} = \mathbb{A}_+ dz^+$ *da conexão de Lax* $\mathcal{A}$ *tomam valores nos subespaços* $\widetilde{\mathfrak{d}}_- \equiv \widetilde{\mathfrak{m}}_- \oplus \widetilde{\mathfrak{h}}$ *e* $\widetilde{\mathfrak{d}}_+ \equiv \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widetilde{\mathfrak{m}}_+$ *respectivamente:*

$$\mathbb{A}_\pm \, dz^\pm \in \widetilde{\mathfrak{d}}_\pm \otimes \Omega^{(0,1)}_{(1,0)}(M) \ , \quad \mathbb{A}_\pm : M \to \widetilde{\mathfrak{d}}_\pm \subset \widetilde{\mathfrak{b}}_\pm,$$

onde $\widetilde{\mathfrak{m}}_- \equiv \bigoplus_{-l_- \leq m \leq -1} \mathfrak{g}_m$, $\widetilde{\mathfrak{m}}_+ \equiv \bigoplus_{1 \leq m \leq l_+} \mathfrak{g}_m$ *e* $l_\pm \in \mathbb{Z}^+$ *são números inteiros positivos.*

Notemos que a condição de grau específica é um truncamento da soma nos espaços de grau da soma envolvida nas expansões de $\widetilde{\mathfrak{n}}_\pm$, ou seja que $\widetilde{\mathfrak{m}}_\pm \subset \widetilde{\mathfrak{n}}_\pm$. Por exemplo:

$$\widetilde{\mathfrak{n}}_+ = \underbrace{\mathfrak{g}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_{l_+}} \oplus ....$$

Agora devemos encontrar as condições sobre o mapeamento $\varphi : M \to G$ para ter a validade da condição de grau específica. Primeiro, para $p \in F_+$ e $a \in G$ tal que $\pi_+(a) = p$, introduzimos a distribuição holomórfica $\mathcal{M}_{+p} \subset T_p^{(1,0)}(F_+)$ definida por:

$$\mathcal{M}_{+p} \equiv \pi_{+*a}\left(\widetilde{\mathfrak{b}}_{-a} \oplus \widetilde{\mathfrak{m}}_{+a}\right) = \pi_{+*a}\left(\widetilde{\mathfrak{m}}_{+a}\right)$$

e denotada $\mathcal{M}_+$, onde $\widetilde{\mathfrak{b}}_{-a} = L_{a*e}\left(\widetilde{\mathfrak{b}}_-\right)$ e $\widetilde{\mathfrak{m}}_{+a} = L_{a*e}\left(\widetilde{\mathfrak{m}}_+\right)$. Da mesma maneira, introduzimos uma distribuição holomórfica $\mathcal{M}_-$ em F_- definida por:

$$\mathcal{M}_{-p} \equiv \pi_{-*a}\left(\widetilde{\mathfrak{m}}_{-a} \oplus \widetilde{\mathfrak{b}}_{+a}\right) = \pi_{-*a}\left(\widetilde{\mathfrak{m}}_{-a}\right).$$

O seguinte teorema mostra as condições sob as quais o mapeamento $\varphi : M \to G$ cumpre com a condição de grau específica.

Teorema 26 *A conexão* ${}^\varphi\mathcal{A}$ *satisfaz a condição de grau específica se, e somente se, o mapeamento* φ_- *é holomórfico e tangente à distribuição* $\mathcal{M}_-$ *e o mapeamento* φ_+ *é antiholomórfico e tangente à distribuição* $\mathcal{M}_+$.

Prova. Seguimos argumentos similares aos da prova do teorema 24. Vamos supor que a 1-forma ${}^\varphi\mathcal{A}^{(0,1)}$ toma valores em $\widetilde{\mathfrak{d}}_+ \equiv \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widetilde{\mathfrak{m}}_+$. Assim, para $X \in T_p^{\mathbb{C}}(M)$ temos que $\overline{P}_p^M(X) \in T_p^{(0,1)}(M)$, a seguinte relação é geral:

$${}^\varphi\mathcal{A}(\overline{P}_p^M(X)) = \varphi^*\theta(\overline{P}_p^M(X)) = \theta(\varphi_{*p} \circ \overline{P}_p^M(X)) = L_{\varphi^{-1}(p)*\varphi(p)}\left(P^G_{\varphi(p)} \circ \varphi_{*p} \circ \overline{P}_p^M(X)\right).$$

A suposição implica que $P^G_{\varphi(p)} \circ \varphi_{*p} \circ \overline{P}_p^M(X) \in \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widetilde{\mathfrak{m}}_{+p}$. Então, ao projetar com $\pi_{+*\varphi(p)}$ obtemos:

$$\pi_{+*\varphi(p)} \circ P^G_{\varphi(p)} \circ \varphi_{*p} \circ \overline{P}_p^M(X) \in \mathcal{M}_{+\varphi_+(p)} \tag{3.16}$$

O mapeamento π_+ é holomórfico (Cf teorema 19) então:

$$\pi_{+*\varphi(p)} \circ P^G_{\varphi(p)} = P^{F_+}_{\varphi_+(p)} \circ \pi_{+*\varphi(p)}. \tag{3.17}$$

O mapeamento φ_+ é antiholomórfico (Cf teorema 24) e (2.31) implica:

$$\varphi_{+*p} \circ \overline{P}_p^M = P_{\varphi_+(p)}^{F_+} \circ \varphi_{+*p}. \tag{3.18}$$

Usando (3.17) e (3.18) em (3.16) obtemos:

$$\pi_{+*\varphi(p)} \circ P_{\varphi(p)}^G \circ \varphi_{*p} \circ \overline{P}_p^M(X) = P_{\varphi_+(p)}^{F_+} \circ \varphi_{+*p} \in \mathcal{M}_{+\varphi_+(p)}$$

o que prova que o mapeamento $\varphi_+ : M \to F_+$ é tangente à distribuição $\mathcal{M}_+$ em F_+. Similarmente, $\varphi_- : M \to F_-$ é tangente à distribuição $\mathcal{M}_-$ em F_-. ■

Antes de continuar, devemos notar que a condição de grau específica *não é invariante* sob as transformações de gauge geradas por elementos arbitrários do grupo G (Cf (2.87)), mas sim é invariante sob as transformações geradas pelo *subgrupo* $\widetilde{H} \subset G$. Devido ao mapeamento $\varphi : M \to G$ ter que satisfazer a condição de grau específica, é melhor isolar a parte de φ que tem como *imagem* o subgrupo $\widetilde{H}$ e reescrever a conexão de Lax em termos desse novo mapeamento, porém, devemos ter claro a presença do resto de φ que toma valores em $\widetilde{N}_\pm$. A decomposição de Gauss (2.53) fornece perfeitamente a divisão que procuramos, mas devido a ela não ser globalmente definida, nem todo elemento arbitrário de um grupo de Lie complexo semi-simples possui uma. Devido ao nosso mapa φ ser geral, temos primeiro que formular uma decomposição de Gauss aplicável a um elemento arbitrário de G. Para construir a decomposição mencionada, devemos construir primeiro os atlas dos B-fibrados principais holomórficos $G \to F_\pm$; a construção começa obviamente, com a introdução das seções locais. Faremos a construção só para o fibrado $G \to F_+$.

Consideremos um elemento arbitrário g de G e a intersecção $\widetilde{N}_\pm \cap g\widetilde{B}_- \neq \varnothing$. Vamos supor que $n_1, n_2 \in \widetilde{N}_\pm \cap g\widetilde{B}_-$, então existem dois elementos $b_1, b_2 \in \widetilde{B}_-$ tais que $n_1 = gb_1$ e $n_2 = gb_2$, ou seja que $n_1^{-1}n_2 = b_1^{-1}b_2$. Usando o fato de que $\widetilde{N}_+ \cap \widetilde{B}_- = \{e\}$, concluímos que a intersecção $\widetilde{N}_\pm \cap g\widetilde{B}_-$ possui um elemento só. Com esse resultado, definimos uma seção local holomórfica σ_+ no fibrado $G \to F_+$ mediante:

$$\sigma_+(p) \equiv \widetilde{N}_+ \cap (\pi_+)^{-1}(p) \quad , \quad p \in \pi_+(\widetilde{N}_+).$$

Uma família de seções locais cobrindo o espaço base F_+ define uma atlas em $G \to F_+$ (Cf(seção 1.2.1)). O seguinte passo é a construção de um atlas.

Consideremos um cobrimento aberto $\{U_{+\alpha}\}$ $\alpha \in A$ do espaço base F_+ e o mapeamento holomórfico $m_{+\alpha} : (\pi_+)^{-1}(U_{+\alpha}) \to G$ definido como:

$$m_{+\alpha}(a) \equiv \sigma_{+\alpha}(\pi_+(a)) \quad , \quad a \in (\pi_+)^{-1}(U_{+\alpha}), \tag{3.19}$$

esse mapeamento permite introduzir outro mapeamento holomórfico $b_{-\alpha}$ definido em $(\pi_+)^{-1}(U_{+\alpha})$ como:

$$b_{-\alpha}(a) \equiv m_{+\alpha}^{-1}(a)a,$$

que não é outra coisa que a construção (2.93)), então qualquer elemento $a \in (\pi_+)^{-1}(U_{+\alpha})$ é expressado como:

$$a = m_{+\alpha}(a)b_{-\alpha}(a). \tag{3.20}$$

Devido a $\sigma_{+\alpha}$ ser uma seção, ela satisfaz a relação $\pi_+ \circ \sigma_{+\alpha} = Id_{U_{+\alpha}}$, ou seja que:

$$\pi_+(m_{+\alpha}(a)) = \pi_+(a),$$

isto implica em (3.20) que o mapeamento $b_{-\alpha}$ toma valores no subgrupo $\widetilde{B}_-$ que é a fibra típica de $G \to F_+$. Notemos que os $m_{+\alpha}$ e $b_{-\alpha}$ obedecem as seguintes relações:

$$m_{+\alpha}(ab) = m_{+\alpha}(a) \quad , \quad b_{-\alpha}(ab) = b_{-\alpha}(a)b. \tag{3.21}$$

É claro que o mapeamento $\psi_{+\alpha} : (\pi_+)^{-1}(U_{+\alpha}) \to U_{+\alpha} \times \widetilde{B}_-$ definido por:

$$\psi_{+\alpha}(a) \equiv (\pi_+(a), b_{-\alpha}(a)),$$

é uma trivialização local, que é exatamente a construção (2.94)). Se consideramos todos os valores para $\alpha \in A$ obtemos um atlas para $G \to F_+$ via as seções (3.19) cobrindo F_+.

Se consideramos um elemento $a \in G$ e $\pi_+(a) \in U_{+\alpha} \cap U_{+\beta}$, usamos (3.21) para obter:

$$b_{-\alpha}(a) = b_{-\alpha\beta}(\pi_+(a))b_{-\beta}(a), \tag{3.22}$$

onde $b_{-\alpha\beta} \equiv b_{-\alpha} \circ \sigma_{+\beta}$ são as funções de transição do atlas introduzido. De (3.20) temos que:

$$a = m_{+\alpha}(a)b_{-\alpha}(a) = m_{+\beta}(a)b_{-\beta}(a)$$

e ao usar (3.22) vemos que:

$$m_{+\beta}(a) = m_{+\alpha}b_{-\alpha\beta}(\pi_+(a)),$$

que é a lei de transformação (2.68). Usando a decomposição (2.54), temos:

$$b_{-\alpha}(a) = n_{-\alpha}(a)h_{-\alpha}(a),$$

onde $n_{-\alpha}$ e $h_{-\alpha}$ são mapeamentos holomórficos de $(\pi_+)^{-1}(U_{+\alpha})$ nos subgrupos $\widetilde{N}_-$ e $\widetilde{H}$ respectivamente e:

$$b_{-\alpha\beta}(a) = n_{-\alpha\beta}(a)h_{-\alpha\beta}(a),$$

obedece à decomposição (2.54), onde $n_{-\alpha\beta}$ e $h_{-\alpha\beta}$ são mapeamentos holomórficos de $U_{+\alpha} \cap U_{+\beta}$ em $\widetilde{N}_-$ e $\widetilde{H}$ respectivamente. Assim, o elemento:

$$a = m_{+\alpha}(a)n_{-\alpha}(a)h_{-\alpha}(a) \ \in G,$$

fica escrito na primeira forma da decomposição de Gauss (2.53).

Em resumo, no fibrado $G \to F_+$ ao fazer $m_+ = m_{+\alpha}(a) \in \widetilde{N}_{+\alpha}$, $n_- = n_-(a) \in \widetilde{N}_-$ e $h_- = h_{-\alpha}(a) \in \widetilde{H}$ temos a decomposição:

$$a = m_+n_-h_-, \tag{3.23}$$

para o elemento $a \in (\pi_+)^{-1}(U_{+\alpha}) = \widetilde{N}_{+\alpha}\widetilde{B}_-$. Similarmente, no fibrado $G \to F_-$ com $m_- = m_{-\alpha}(a) \in \widetilde{N}_{-\alpha}$, $n_+ = n_+(a) \in \widetilde{N}_+$ e $h_+ = h_{+\alpha}(a) \in \widetilde{H}$ temos a decomposição:

$$a = m_-n_+h_+, \tag{3.24}$$

para o elemento $a \in (\pi_-)^{-1}(U_{-\alpha}) = \widetilde{N}_{-\alpha}\widetilde{B}_+$. As expressões (3.23) e (3.24) se denominam *decomposições de Gauss modificadas.* Agora podemos usar (3.23) e (3.24) para dividir o mapeamento $\varphi : M \to G$ em três mapeamentos com diferentes imagens. Lembremos que o nosso interesse está em reescrever o par de Lax em termos do mapeamento que toma valores no subgrupo $\widetilde{H} \subset G$. As seguintes duas proposições contém os resultados que precisamos e que relacionam a decomposição de Gauss modificada com a variedade$M$, que é o nosso espaço-tempo.

Proposição 27 *Sejam $\varphi : M \to G$ e $p \in M$ um mapeamento e um ponto arbitrário. Então:*

i) Existe uma vizinhança aberta V_+ do ponto p tal que o mapeamento φ restrito em V_+ tem uma única decomposição:

$$\varphi = \mu_+\nu_-\eta_-, \tag{3.25}$$

onde $\mu_+ : M \to \widetilde{N}_{+\alpha}$ para algum $\alpha \in A$, $\nu_- : M \to \widetilde{N}_-$ e $\eta_- : M \to \widetilde{H}$.

ii) Existe uma vizinhança aberta V_- do ponto p tal que o mapeamento φ restrito em V_- tem uma única decomposição:

$$\varphi = \mu_-\nu_+\eta_+, \tag{3.26}$$

onde $\mu_- : M \to \widetilde{N}_{-\alpha}$ para algum $\alpha \in A$, $\nu_+ : M \to \widetilde{N}_+$ e $\eta_+ : M \to \widetilde{H}$.

Prova. A prova é baseada na decomposição de Gauss modificada. Se A é uma partição dos abertos cobrindo o espaço base F_+, então podemos encontrar um $\alpha \in A$ tal que $\varphi(p) \in (\pi_+)^{-1}(U_{+\alpha})$ e definir o mapeamento μ_+ (Cf(3.19)) por:

$$\mu_+ \equiv m_{+\alpha} \circ \varphi = \sigma_{+\alpha} \circ \pi_+ \circ \varphi = \sigma_{+\alpha} \circ \varphi_+.$$

O domínio do mapeamento μ_+ é claramente o aberto $V_+ \equiv \varphi_+^{-1}(U_{+\alpha})$. Agora introduzimos os mapeamentos:

$$\nu_- \equiv n_{-\alpha} \circ \varphi,$$

$$\eta_- \equiv h_{-\alpha} \circ \varphi,$$

com o mesmo domínio $V_+ \equiv \varphi_+^{-1}(U_{+\alpha})$. Assim obtemos a decomposição (3.25). A segunda parte da proposição é provada de maneira similar. ■

Da prova obtemos o seguinte corolário.

Corolário 28 *Para qualquer $p \in M$, existe uma aberto V tal que $p \in V$ e o mapeamento $\varphi : M \to G$ restrito em V possui as decomposições (3.25) e (3.26) simultaneamente.*

Esse corolário pode ser visto como uma conseqüência da construção simultânea (3.8).

A seguinte proposição fornece a conexão entre um mapeamento que satisfaz a condição de grau específica e as decomposições de Gauss modificadas em $G \to F_\pm$.

Proposição 29 *Se o mapeamento $\varphi : M \to G$ satisfaz a condição de grau específica, então o mapeamento $\mu_- : M \to \widetilde{N}_{-\alpha}$ é holomórfico e a 1-forma holomórfica ${}^{\mu_-}\mathcal{A}$ toma valores em $\widetilde{\mathfrak{m}}_-$; o mapeamento $\mu_+ : M \to \widetilde{N}_{+\alpha}$ é antiholomórfico e a 1-forma antiholomórfica ${}^{\mu_+}\mathcal{A}$ toma valores em $\widetilde{\mathfrak{m}}_+$.*

Prova. Os mapeamentos $\sigma_{-\alpha}$ e φ_- são holomórficos, então da definição:

$$\mu_- \equiv \sigma_{-\alpha} \circ \varphi_-, \tag{3.27}$$

vemos que μ_- é um mapeamento holomórfico também. Da definição (3.27) vemos que μ_- é tangente à distribuição $\mathcal{N}_-$, então $\forall\ X \in T_p^{\mathbb{C}}(M)$ temos $P^G_{\mu_-(p)} \circ \mu_{-*}(X) \in \widetilde{\mathfrak{n}}_{-\mu_-(p)}$. Por outro lado, usando $\pi_- \circ \sigma_{-\alpha} = Id_{U_{-\alpha}}$ em (3.27) obtemos que $\pi_- \circ \mu_- = \varphi_-$ e devido a φ_- ser tangente à distribuição $\mathcal{M}_-$ (Cf Teorema 26) então:

$$P^G_{\mu_-(p)} \circ \mu_{-*p}(X) \in \widetilde{\mathfrak{m}}_{-\mu_-(p)},$$

usando (3.2) com $\varphi \longrightarrow \mu_-$ escrevemos a igualdade:

$$^{\mu_-}\mathcal{A}(X) = L_{\mu_-^{-1}(p)*\mu_-(p)} \circ P^G_{\mu_-(p)} \circ \mu_{-*p}(X)$$

e concluímos que a 1-forma $^{\mu_-}\mathcal{A}$ toma valores em $\widetilde{\mathfrak{m}}_{-e}$. Para o mapeamento μ_+ a prova é similar.
■

Consideremos agora dois elementos *constantes* diferentes de zero $\epsilon_\pm \in \mathfrak{g}_{\pm l_\pm}$, e definamos os seguintes elementos:

$$\lambda_{\pm l_\pm} \equiv Ad(\gamma_\pm)\epsilon_\pm, \tag{3.28}$$

onde $\gamma_\pm : M \longrightarrow \widetilde{H}$. Agora expandimos em diferentes graus às conexões (anti)-holomórficas (Proposição 29):

$$^{\mu_\pm}\mathcal{A} = i\lambda_\pm dz^\pm = i\sum_{m=1}^{l_\pm} \lambda_{\pm m} dz^\pm, \tag{3.29}$$

associadas aos mapeamentos $\mu_\pm$: $M \longrightarrow \widetilde{N}_{\pm\alpha}$ envolvidos nas decomposições (3.25) e (3.26). Os mapeamentos $\lambda_{\pm m}$ $1 \leq m \leq l_\pm - 1$ tomam valores em $\mathfrak{g}_{m\pm}$ e vamos definir os mapeamentos $\lambda_{\pm l_\pm}$ como os (3.28) os quais tomam valores em $\mathfrak{g}_{\pm l_\pm}$. Além disso, os λ_{-m} são holomórficos e os λ_{+m} são antiholomórficos como conseqüência da (Proposição 29). Essa é a última restrição a impor no campo $\varphi : M \longrightarrow G$ que satisfaz a condição de grau específica, nesse caso denominamos a φ como mapeamento *admissível*. Denotamos por $\widetilde{\mathfrak{m}}'_\pm$ o subconjunto de $\widetilde{\mathfrak{m}}_\pm$ onde $\mathfrak{g}_{\pm l_\pm} = \epsilon_\pm$.

Finalmente, o seguinte teorema permite isolar as contribuições de $\varphi : M \longrightarrow G$ nos três subgrupos imagem $\widetilde{N}_\pm$ e $\widetilde{H}$.

Teorema 30 *Seja $\varphi : M \longrightarrow G$ um mapeamento admissível. Então existe uma transformação de gauge local gerada pelo subgrupo $\widetilde{H}$ que transforma a conexão de Lax $^\varphi\mathcal{A}$ numa outra dada por:*

$$\mathcal{A} = i\left(\epsilon_- + \sum_{m=1}^{l_- -1} \Xi_{-m} - i\left(^\gamma\mathbb{A}\right)_-\right) dz^- + iAd(\gamma^{-1})\left(\epsilon_+ + \sum_{m=1}^{l_+ -1} \Xi_{+m}\right) dz^+, \tag{3.30}$$

onde $\gamma : M \longrightarrow \widetilde{H}$ e $\Xi_{\pm m} : M \longrightarrow \mathfrak{g}_{\pm m}$, $m \neq 0$.

Prova. Usamos as representações (3.26) (3.25) e a equação (3.4) para escrever simultaneamente:

$$^\varphi\mathcal{A} = {}^{\mu_-\nu_+\eta_+}\mathcal{A} = Ad(\eta_+^{-1}\nu_+^{-1})(^{\mu_-}\mathcal{A}) + Ad(\eta_+^{-1})(^{\nu_+}\mathcal{A}) + {}^{\eta_+}\mathcal{A}, \tag{3.31}$$

$$^\varphi\mathcal{A} = {}^{\mu_+\nu_-\eta_-}\mathcal{A} = Ad(\eta_-^{-1}\nu_-^{-1})(^{\mu_+}\mathcal{A}) + Ad(\eta_-^{-1})(^{\nu_-}\mathcal{A}) + {}^{\eta_-}\mathcal{A}. \tag{3.32}$$

Da proposição 29 temos que a 1- forma ${}^{\mu_-}\mathcal{A}$ é holomórfica e a 1-forma ${}^{\mu_+}\mathcal{A}$ é antiholomórfica, ou seja:

$$^{\mu_\mp}\mathbb{A}_\pm = 0.$$

Com esses resultados temos ao projetar (3.31) e (3.32) nas componentes positiva e negativa, respectivamente, as seguintes expressões:

$$^{\varphi}\mathbb{A}_\pm = Ad(\eta_\pm^{-1})(^{\nu_\pm}\mathbb{A}_\pm) + ^{\eta_\pm}\mathbb{A}_\pm. \tag{3.33}$$

Consideremos agora o seguinte mapeamento:

$$\rho \equiv \mu_+^{-1}\mu_-,$$

novamente (3.4) fornece a relação:

$$^{\rho}\mathcal{A} = (^{\mu_-}\mathcal{A}) - Ad(\rho^{-1})(^{\mu_+}\mathcal{A}).$$

Agora usamos (3.29) para obter as componentes:

$$^{\rho}\mathbb{A}_+ = -iAd(\rho^{-1})\lambda_+, \tag{3.34}$$

$$^{\rho}\mathbb{A}_- = -i\lambda_-. \tag{3.35}$$

Usando as decomposições (3.25) e (3.26) concluímos que o mapeamento ρ pode ser representado de uma outra maneira dada por:

$$\rho = \nu_-\eta\nu_+^{-1} \quad , \quad \eta \equiv \eta_-\eta_+^{-1},$$

o que leva à seguinte expressão:

$$^{\rho}\mathcal{A} = Ad(\nu_+\eta^{-1})\left[(^{\nu_-}\mathcal{A}) - \left(^{\eta^{-1}}\mathcal{A}\right) - Ad(\eta)(^{\nu_+}\mathcal{A})\right], \tag{3.36}$$

que junto com (3.35) implica:

$$iAd(\eta\nu_+^{-1})\lambda_- = (^{\nu_-}\mathbb{A}_-) - \left(^{\eta^{-1}}\mathbb{A}_-\right) - Ad(\eta)(^{\nu_+}\mathbb{A}_-). \tag{3.37}$$

Projetando (3.37) no subespaço $\tilde{\mathfrak{n}}_-$, obtemos a componente:

$$^{\nu_-}\mathbb{A}_- = i\left[Ad(\eta\nu_+^{-1})\lambda_-\right] \mid \tilde{\mathfrak{n}}_-.$$

Porém, o mapeamento $^{\nu_-}\mathbb{A}_-$ toma valores em $\tilde{\mathfrak{m}}'_-$ (mapeamento admissível) e podemos escrever, após algumas manipulações:

$$Ad((\eta\gamma_-)^{-1})\,(^{\nu_-}\mathbb{A}_-) = i\sum\nolimits_{m=1}^{l_-}\Xi_{-m}, \tag{3.38}$$

onde $\Xi_{-m} \in \mathfrak{g}_{-m}$ e $\Xi_{-l_-} = \epsilon_-$. Usando (3.38) em (3.33) chegamos a:

$$^{\varphi}\mathbb{A}_- = iAd(\eta_+^{-1}\gamma_-)\left[\sum\nolimits_{m=1}^{l_-}\Xi_{-m}\right] + ^{\eta_-}\mathbb{A}_-. \tag{3.39}$$

Agora, após projetar (3.36) na componente positiva, usar (3.34) e projetar no subespaço $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ obtemos o seguinte resultado:

$$^{\nu_+}\mathbb{A}_+ = i\left[Ad(\eta\nu_-^{-1})\lambda_+\right] \mid \widetilde{\mathfrak{n}}_+.$$

Similarmente à componente $^{\nu_-}\mathbb{A}_-$, temos que $^{\nu_+}\mathbb{A}_+$ toma valores em $\widetilde{\mathfrak{m}}'_+$. Assim, podemos escrever:

$$Ad(\gamma_+^{-1}\eta)\,(^{\nu_+}\mathbb{A}_+) = i\sum\nolimits_{m=1}^{l_+} \Xi_{+m},$$

onde $\Xi_{+l_+} = \epsilon_+$. De maneira análoga, temos que:

$$^{\varphi}\mathbb{A}_+ = iAd(\eta_-^{-1}\gamma_+)\left[\sum\nolimits_{m=1}^{l_+} \Xi_{+m}\right] + (^{\eta_+}\mathbb{A}_+)\,. \tag{3.40}$$

Para terminar, basta eliminar o fator $Ad(\eta_+^{-1}\gamma_-)$ na equação (3.39) efetuando uma transformação de gauge gerada por $\psi = \eta_+^{-1}\gamma_- \in \widetilde{H}$ na transformação (3.4) para obter, após um pouco de álgebra, as componentes $^{\varphi}\mathbb{A}_-$ e $^{\varphi}\mathbb{A}_+$ em:

$$\mathbb{A}_- = i\sum\nolimits_{m=1}^{l_-} \Xi_{-m} + (^{\gamma}\mathbb{A}_-\ )\,,$$
$$\mathbb{A}_+ = iAd(\gamma^{-1})\left[\sum\nolimits_{m=1}^{l_+} \Xi_{+m}\right],$$

onde $\gamma \equiv \gamma_+^{-1}\eta\gamma_- : M \longrightarrow \widetilde{H}$. A nova conexão e dada por (3.30). ∎

De aqui para frente, consideraremos somente conexões da forma (3.30) e transformações de gauge geradas pelo subgrupo $\widetilde{H} \subset G$ que são as transformações que deixam invariante as restrições impostas pela condição de grau específica. Notemos que para o mapeamento admissível temos:

$$\mathbb{A}_\pm \in \widetilde{\mathfrak{d}}'_\pm = \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widetilde{\mathfrak{m}}'_\pm, \tag{3.41}$$

em consistencia com a condição 25 a qual exibe explicitamente a decomposição (3.41), agora em termos dos *campos* $\Xi_{\pm m} \in \widetilde{\mathfrak{m}}'_\pm$ e $^{\gamma}\mathbb{A}_- \in \widetilde{\mathfrak{h}}$.

Na prática, para extrair algum resultado útil utilizamos grupos de Lie matriciais. Nesse caso teremos as conexões:

$$\mathbb{A}_- = i\sum\nolimits_{m=1}^{l_-} \Xi_{-m} + \gamma^{-1}\partial_-\gamma, \tag{3.42}$$
$$\mathbb{A}_+ = i\sum\nolimits_{m=1}^{l_+} \gamma^{-1}\Xi_{+m}\gamma. \tag{3.43}$$

Agora só resta escrever a condição de curvatura nula (3.6) em termos da nova conexão de Lax. Por simplicidade escolhemos o caso simétrico $l_\pm = l$, usando (3.42) (3.43) temos:

$$\partial_-\mathbb{A}_+ - \partial_+\mathbb{A}_- = i\sum\nolimits_{m=1}^{l} \partial_-\left(\gamma^{-1}\Xi_{+m}\gamma\right) - i\sum\nolimits_{m=1}^{l} \partial_+\left(\Xi_{-m}\right) + \partial_+\left(\gamma^{-1}\partial_-\gamma\right), \tag{3.44}$$
$$[\mathbb{A}_-, \mathbb{A}_+] = -\sum\nolimits_{m,n=1}^{l} \left[\Xi_{-m}, \gamma^{-1}\Xi_{+n}\gamma\right] + i\sum\nolimits_{m=1}^{l} \left[\gamma^{-1}\partial_-\gamma, \gamma^{-1}\Xi_{+m}\gamma\right];$$

utilizando a identidade $\partial_-(\gamma^{-1})\gamma = -\gamma^{-1}\partial_-\gamma$ obtemos a relação:

$$\left[\gamma^{-1}\partial_-\gamma, \gamma^{-1}\Xi_{+m}\gamma\right] = -\partial_-(\gamma^{-1}\Xi_{+m}\gamma) + \gamma^{-1}\left(\partial_-\Xi_{+m}\right)\gamma,$$

então:

$$[\mathbb{A}_-,\mathbb{A}_+] = -\sum_{m,n=1}^{l}\left[\Xi_{-m},\gamma^{-1}\Xi_{+n}\gamma\right] - i\sum_{m=1}^{l}\partial_-(\gamma^{-1}\Xi_{+m}\gamma) + i\sum_{m=1}^{l}\gamma^{-1}\left(\partial_-\Xi_{+m}\right)\gamma. \quad (3.45)$$

As equações (3.44) (3.45) resultam num sistema de *equações diferenciais matriciais* quebradas em diferentes graus segundo o operador de gradação Q, as quais vem dadas pelas *equações de Toda de Grau superior* [1],[8]:

$$\begin{aligned} i\partial_+\Xi_{-m} &= \sum_{n=1}^{l-m}\left[\gamma^{-1}\Xi_{+n}\gamma,\Xi_{-(m+n)}\right] &&, \text{ grau } Q \leq -1 \\ \partial_+(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) &= \left[\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma,\epsilon_-\right] + \sum_{m=2}^{l}\left[\gamma^{-1}\Xi_{+m}\gamma,\Xi_{-m}\right] &&, \text{ grau } Q = 0 \\ i\partial_-\Xi_{+m} &= \sum_{n=1}^{l-m}\left[\gamma\Xi_{-n}\gamma^{-1},\Xi_{+(m+n)}\right] &&, \text{ grau } Q \geq +1, \end{aligned}$$

onde $\Xi_{\pm l_\pm} = \epsilon_\pm$. As equações obtidas estão globalmente definidas em M e são as mesmas como conseqüência da trivialidade das funções de transição $t_{\alpha\beta} = Id_M \;\forall\; U_\alpha \cap U_\beta$ e da lei de transformação para a curvatura (2.78). O campo $\gamma : M \longrightarrow \widetilde{H}$ se denomina *campo de Toda* e os campos $\Xi_{\pm m} : M \longrightarrow \mathfrak{g}_{\pm m}$, $m > 1$ se denominam *campos de matéria* por obedecer equações de movimento de primeiro grau nas derivadas. As aplicações físicas de este tipo de modelos se dão, principalmente, no estudo de teorias conformes exatamente solúveis em presença de buracos negros [9], mas sobra dizer que por enquanto nos limitaremos às simples generalidades sobre a estrutura dos modelos.

Agora vamos nos restringir única e exclusivamente ao caso mais simples que já é suficientemente rico em estrutura e resultados, como veremos. Fixando $l = 1$, somente as equações de grau zero ficam junto com o primeiro comutador e finalmente obtemos as famosas *equações de Leznov-Saveliev*[5]*:*

$$\partial_+(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) = \left[\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma,\epsilon_-\right], \quad (3.46)$$

com o par de Lax associado:

$$\mathbb{A}_- = i\epsilon_- + \gamma^{-1}\partial_-\gamma, \quad (3.47)$$

$$\mathbb{A}_+ = i\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma, \quad (3.48)$$

onde $[Q,\epsilon_\pm] = \pm\epsilon_\pm \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$. Se efetuamos uma transformação gauge (2.91) com $\varphi_\alpha = \gamma^{-1}$ chegamos a uma representação equivalente de (3.46):

$$\partial_-(\partial_+\gamma\gamma^{-1}) = \left[\epsilon_+,\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\right]. \quad (3.49)$$

As equações de movimento para os parâmetros envolvidos na expansão de γ no subgrupo $\widetilde{H}$ são as *equações de Toda.* No caso em que Q é a gradação principal (2.60), a subálgebra $\mathfrak{g}_0 = \widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$ é abeliana e coincide com a subálgebra de Cartan; nesse caso $\gamma : M \longrightarrow H$ e as correspondentes equações são as *equações de Toda abelianas.* Quando a gradação Q define um subgrupo de grau zero não abeliano $\mathfrak{g}_0 = \widetilde{\mathfrak{h}} \neq \mathfrak{h}$ temos as *equações de Toda não abelianas.*

[5]Nas equações de grau superior, os campos γ e Ξ se acoplam de uma maneira naõ trivial em contraposição as equações de Leznov-Saveliev que são puramente autointaragentes em γ.

Definamos agora a subálgebra centralizadora $\mathfrak{g}_0^0$ simultânea de $\epsilon_\pm \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$:

$$\mathfrak{g}_0^0 \equiv \left\{ X \in \mathfrak{g}_0 = \widetilde{\mathfrak{h}} \mid [X, \epsilon_\pm] = 0 \right\} \quad , \quad \dim \mathfrak{g}_0^0 \leq \dim \mathfrak{g}_0, \tag{3.50}$$

projetando (3.46) e (3.49) no subespaço $\mathfrak{g}_0^0$ e definindo

$$J_- \equiv \gamma^{-1} \partial_- \gamma,$$
$$J_+ \equiv \partial_+ \gamma \gamma^{-1},$$

derivamos a conservação de $\dim \mathfrak{g}_0^0$ *correntes quirais* associadas à subálgebra $\mathfrak{g}_0^0 \subset \mathfrak{g}_0$:

$$\begin{aligned} \partial_+ \left[J_-(X_i) \right] = 0 \quad &, \quad J_-(X_i) = Tr(X_i J_-), \\ \partial_- \left[J_+(X_i) \right] = 0 \quad &, \quad J_+(X_i) = Tr(X_i J_+), \end{aligned} \tag{3.51}$$

com $i = 1, ..., \dim \mathfrak{g}_0^0$ sobre as quais vamos impor os seguintes *vínculos adicionais*:

$$J_-(X_i) = J_+(X_i) = 0 \quad \forall\, i. \tag{3.52}$$

Na verdade, o objetivo do seguinte capítulo é a construção de uma formulação Lagrangiana que *incorpore* naturalmente os vínculos (3.52) na própria ação e não simplesmente como condições subsidiárias nas equações de movimento. Esses vínculos reduzem o modelo do grupo G_0 ao coset G_0/G_0^0 no qual definiremos os modelos de Toda.

Agora vamo-nos desligar completamente da estrutura geométrica que nos levou às equações de Leznov Saveliev (3.46) e o par de Lax (3.47) e (3.48). Efetuamos a transformação $i\epsilon_\pm \longrightarrow \epsilon_\pm$ e $\mathbb{A}_\pm \longrightarrow \pm \mathbb{A}_\pm$ e escrevemos de novo as equações de interesse:

$$\begin{aligned} \partial_+(\gamma^{-1} \partial_- \gamma) &= \left[\gamma^{-1} \epsilon_+ \gamma, \epsilon_- \right], \\ \partial_-(\partial_+ \gamma \gamma^{-1}) &= \left[\epsilon_+, \gamma \epsilon_- \gamma^{-1} \right], \\ J_-(X_i) &= J_+(X_i) = 0 \quad \forall\, X_i \in \mathfrak{g}_0^0, \\ \mathbb{A}_- &= -\epsilon_- - \gamma^{-1} \partial_- \gamma, \\ \mathbb{A}_+ &= \gamma^{-1} \epsilon_+ \gamma. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Se observamos com cuidado essas equações, podemos ver que os modelos integráveis associados estão *classificados* completamente em termos dos seguintes dados meramente algébricos:

$$\left(Q, \epsilon_\pm, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0^0 \right). \tag{3.54}$$

Um operador de Grau Q que define $\mathfrak{g}_0$ e que especifica o espaço dos *campos físicos* que parametrizam $\gamma : M \longrightarrow \widetilde{H}$ via o mapeamento exponencial, dois elementos constantes $\epsilon_\pm$ que definem o *potencial* da teoria como podemos ver do lado direito de (3.53) e uma subálgebra $\mathfrak{g}_0^0$ formada pelos elementos centralizadores de $\epsilon_\pm$ (Cf (3.50)) que definem as correntes quirais (3.52) como vínculos e introduzem *singularidades* nas equações de movimento, como veremos mais na frente.

É possível relaxar a condição de $\mathfrak{g}$ ser uma álgebra de Lie clássica e estender a construção de modelos integráveis a outras estruturas algébricas que admitam as mesmas quantidades e o mesmo tipo de informação fornecida por (3.54). Dessa maneira, estendemos a construção a *superálgebras* de Lie $\mathfrak{g}^s$ e *álgebras de Kac-Moody* de dimensão infinita $\widehat{\mathfrak{g}}$. Os *modelos Toda Afins* associados às álgebras de Kac-Moody estão classificados por:

$$\left(\widehat{Q}, \widehat{\epsilon}_{\pm}, \widehat{\mathfrak{g}}_0, \widehat{\mathfrak{g}}_0^0\right), \tag{3.55}$$

com a diferença que o operador da grau $\widehat{Q}$ não é necessariamente um elemento da própria álgebra[6] $\widehat{\mathfrak{g}}$ e que a subálgebra de grau zero $\mathfrak{g}_0$ é uma propria álgebra de Lie clássica $\mathfrak{g}$ e não uma subálgebra dela como temos em (3.54).

Nesse ponto é mais que natural se fazer a pergunta sobre qual é a *Lagrangiana* que tem como equações de movimento as equações (3.53)[7]. Esse é objetivo do Capitulo 3, mas antes de abordar essa questão formalmente, vamos indagar um pouco mais os modelos Toda abelianos só para ver com que estamos tratando.

3.2.2 Modelos de Toda Abelianos e Invariância Conforme.

Em toda a discussão feita até agora consideramos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como semisimples, mais para ter claro a não singularidade da forma de Killing que a própria estrutura do seu espaço de raízes. Na construção de modelos, a estrutura do sistema de raízes é relevante e por isso consideraremos álgebras de Lie *simples,* que também são semisimples mas com sistemas de raízes irredutíveis.

Consideremos uma álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$ simples no caso abeliano $\mathfrak{g}_0 = \widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$, e na gradação principal dada pelo operador de grau (Cf (2.60)):

$$Q \equiv \sum_{i=1}^{r} k_i h_i \quad , \quad k_i \equiv \sum_{j=1}^{r} (K^{-1})_{ij}.$$

Escolhemos os elementos $\epsilon_{\pm} = X_{\pm} = \sum_{i=1}^{r} (2k_i)^{\frac{1}{2}} X_{\pm\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$ e $h \equiv 2\sum_{i=1}^{r} (k_i)^{\frac{1}{2}} h_i \in \mathfrak{g}_0$ (Cf(2.61)) e (Cf(2.62)) que obedecem a álgebra (Cf(2.63)):

$$\begin{aligned} [h, \epsilon_{\pm}] &= \pm 2\epsilon_{\pm}, \\ [\epsilon_+, \epsilon_-] &= h, \\ [Q, \epsilon_{\pm}] &= \pm \epsilon_{\pm}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Uma parametrização local de γ é dada em termos do *campo de Toda* $\Phi : M \longrightarrow \mathfrak{h}$:

$$\gamma = \exp \Phi \quad , \quad \Phi = \sum\nolimits_{1=1}^{r} \phi_i h_i,$$

onde $\phi_i : M \longrightarrow \mathbb{C}$ são campos escalares complexos e h_i são os geradores de Cartan associados às raízes simples $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$. Explicitamente, obtemos:

$$\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma = \sum\nolimits_{i=1}^{r} (2k_i)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-(k\phi_i)\right] X_{+\alpha_i} \quad , \quad (k\phi_i) \equiv \sum\nolimits_{j=1}^{r} (K_{ij})\phi_j,$$

[6] Por exemplo, $\widehat{Q}$ pode ser elemento da sua *álgebra de Virasoro* associada.

[7] A lagrangiana que reproduz as equações de Toda de grau superior foi construida em [8].

que após usar as relações de comutação (3.56) resulta em:

$$\left[\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma, \epsilon_-\right] = \sum\nolimits_{i=1}^{r}(2k_i)\exp\left[-\left(k\phi_i\right)\right]h_i,$$

por outro lado, é claro que:

$$\partial_+(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) = -\sum\nolimits_{i=1}^{r}\left(\partial_+\partial_-\phi_i\right)h_i,$$

juntando os resultados e fazendo $\phi_i \to -\phi_i$, vemos que a equação $\partial_+(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) = \left[\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma, \epsilon_-\right]$ se reduz às equações de Toda abelianas para r campos escalares complexos:

$$\partial_+\partial_-\phi_i - (2k_i)\exp\left[\sum\nolimits_{j=1}^{r}(K_{ij})\phi_j\right] = 0. \tag{3.57a}$$

Nesse caso a subálgebra $\mathfrak{g}_0^0$ é trivial e portanto os modelos (3.57a) não possuem vínculos adicionais do tipo (3.52). Devido à unicidade da matriz de Cartan K_{ij} (Cf(2.43)) vemos que cada modelo Toda tem uma álgebra de Lie simples associada e vice versa, eles estão intimamente ligados às suas correspondentes álgebras e oferecem algum tipo de catalogação para elas em função das suas equações de Toda associadas.

Consideremos o modelo Toda abeliano mais simples, esse modelo está associado à álgebra complexa A_1^1 que só possui uma raíz simples; com $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ temos que $K_{ij} = K = 2$, $k_i = k = 1/2$ e obtemos a *equação de Liouville:*

$$\partial_+\partial_-\phi - \exp 2\phi = 0 \quad , \quad \phi : M \to \mathbb{C}, \tag{3.58}$$

que como sabemos é integrável, ou seja, os modelos Toda Abelianos são *generalizações* da onipresente equação de Liouville[8].

Assumiremos que as versões reais de (3.57a) ou (3.53) são obtidas ao considerar a variedade real $M = M_\mathbb{R}$ e as *formas reais* $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ de $\mathfrak{g}$, isto é, ao usar $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ e efetuar continuação analítica nas coordenadas locais complexas $z^\pm \to x^\pm$ com $x \to t$ e $y \to -ix$, ou seja (Cf(2.26)):

$$z^\pm = x \pm iy \to t \pm x \equiv x^\pm,$$
$$\partial_\pm = \frac{1}{2}\left(\partial_x \mp i\partial_y\right) \to \partial_\pm = \frac{1}{2}\left(\partial_t \pm \partial_x\right),$$

onde denotamos as derivadas da mesma forma. Nessas variáveis, (3.58) é:

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\phi = 4\exp 2\phi \quad , \quad \phi : M \to \mathbb{R}.$$

A equação (3.58) é *invariante conforme*, por isso é natural a pergunta de se suas generalizações também são. Para abordar a questão, consideremos uma ação genérica, onde M e ϕ_i são reais e têm métrica η plana:

$$S = \int d^2x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi^i - V(\phi)\right) \quad , \quad x^\mu = (t,x).$$

O traço do tensor energia-momento dessa teoría é obtido da expressão geral:

$$\eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\partial^\nu\phi_i - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right) = 2V, \tag{3.59}$$

[8] No caso $\phi \in \mathbb{R}$, a teoría de Liouville é usada para formular gravitação quântica em duas dimensões [27].

que não é nulo. Devido ao traço nulo do tensor energia-momento ser um requisito para que uma teoria de campos seja invariante conforme, aparentemente deveríamos ter $V = 0$. Porém, existe uma ambigüidade na definição de $T^{\mu\nu}$; sempre é possível acrescentar um termo ser violar à lei de conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, que é uma propriedade mais fundamental que ter um traço nulo. Consideremos o tensor *acrescentado:*

$$\theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \left(\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial^2\right)\rho(\phi) \quad , \quad \partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0,$$

o traço é agora $\theta^\mu_\mu = 2V(\phi) - \partial^2\rho(\phi)$. Se o termo com as derivadas vai cancelar o potencial, podemos eliminar as derivadas usando as equações de movimento dado que a lei de conservação de $T_{\mu\nu}$ é para configurações de campos na camada de massa. A solução mais geral para ρ é $\rho(\phi) = \sum_i \rho_i \phi_i$ com $\rho_i \in \mathbb{R}$. Usando as equações de movimento $\partial^2\phi_i = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_i}$, a condição de traço nulo é agora:

$$\theta^\mu_\mu = 2V(\phi) - \partial^2\rho(\phi) = 2V - \sum_i \rho_i \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0, \tag{3.60}$$

a qual é fácil de resolver dado que é da forma $\frac{d}{dx}f(x) = af(x)$. A solução de (3.60) é:

$$V(\phi) = \sum_i q_i \exp\left(\sum_j M_{ij}\phi_j\right), \tag{3.61}$$

com a condição $\sum_i M_{ji}\rho_i = +2$, $\forall\, j$. Essa forma do potencial garante a invariância conforme da teoría no sentido que é possível construir um tensor acrescentado que satisfaz a condição (3.60) e se escolhemos $M_{ij} = K_{ij}$ como a matriz de Cartan, temos que a teoria é integrável também. Os modelos Toda são, essencialmente, a única classe de teorias *integráveis, interagentes, relativísticas e conformes* em duas dimensões, isso já faz delas suficientemente interessantes para serem estudadas.

Agora, ajustamos as unidades envolvidas nas equações (3.57a) e obtemos para os campos escalares reais $\phi_i \in \mathbb{R}$, as seguintes equações :

$$\beta\partial_+\partial_-\phi_i - m^2(2k_i)\exp\left[\beta\sum_{j=1}^r (K_{ij})\phi_j\right] = 0, \tag{3.62}$$

onde β, m^2 são constantes. A *ação* correspondente é:

$$S_{Toda} = \int d^2x \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{2}\partial_+\phi^i\partial_-\phi^i - \frac{m^2}{\beta^2}(q_i)\exp\left(\beta\sum_{j=1}^r K_{ij}\phi_j\right)\right)$$

onde $q_i = 2\sum_l \sum_m (K^{-1})_{lm}(K^{-1})_{li}$.

Após essa breve divagação sobre a natureza dos modelos Abelianos vamos introduzir a formulação Lagrangiana dos modelos Toda de uma maneira geral.

Capítulo 4

◎ Formulação Lagrangiana dos modelos de Toda.

Devido à natureza *quiral* das equações de Leznov-Saveliev (Cf(3.53)) na ausência do termo de interação, é dizer do comutador, é natural pensar que a ação que governa a dinâmica do campo g, é algum tipo de modificação do modelo WZW. O modelo WZW foi construído com o objetivo de encontrar uma teoria com correntes puramente *bosônicas* que obedecerem uma álgebra de correntes ou de Kac-Moody com o fim de generalizar as regras de bosonização de férmions ao caso não abeliano[13]. Por outro lado, o modelo descreve a propagação de uma corda bosônica na variedade de um grupo de lie G e leva a construção de modelos sigma não lineares em função do grupo G escolhido. Como conseqüência disso, os modelos correspondentes às equações de Leznov-Saveliev serão perturbações *integráveis* do modelo WZW que correspondem a perturbações de algum modelo sigma não linear dado. Porém, isso só é possível após uma própria *redução* do modelo WZW do grupo G ao subgrupo de grau zero G_0 onde definimos os modelos de Toda. Para isso, acopla-se o campo g a um potencial de gauge A (não dinâmico) e posteriormente se calibra[24] a ação no subgrupo desejado. Vamos começar pela construção do modelo WZW para posteriormente efetuar a redução mencionada[1] que da origem aos modelos integráveis relativistas com invariância conforme.

4.1 O modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW)

4.1.1 Termo Cinético e Topológico.

Notemos das equações (3.53) que se não tivéssemos a contribuição do comutador, as equações seriam simplesmente a conservação das *correntes quirais* associadas à álgebra $\mathfrak{g}_0$ de grau zero:

$$\partial_+(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) = 0, \tag{4.1}$$

$$\partial_-(\partial_+\gamma\gamma^{-1}) = 0. \tag{4.2}$$

É claro que primeiro devemos encontrar uma Lagrangiana que governe equações de movimento desse tipo antes se considerar a contribuição de um potencial e de restringir a teoría à subálgebra $\mathfrak{g}_0$.

[1]A construção da ação que governa as equações de Toda de grau superior encontra-se em [8].

Para começar, consideremos um campo arbitrário $g : M \longrightarrow G$, de uma variedade 2−dimensional M na variedade de um grupo de Lie simples G. Assumiremos que M e G são variedades reais.

Introduzimos uma forma simétrica bilinear, invariante sob a ação do grupo (Cf(2.10)) e invariante na representação escolhida para G , o *produto* com que introduziremos a noção de distancia na teoria, vem definido pelo traço $Tr \longrightarrow \langle ... \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} :\longrightarrow \mathbb{R}$ (Cf(2.15)) normalizado de forma tal que seja independente da representação. A primeira proposta para descrever a dinâmica de g, é a ação do *modelo sigma* no grupo G definida por:

$$S_\sigma [g] \equiv -\frac{\alpha}{2} \int_M d^2x \sqrt{\eta} \eta^{\mu\nu} \langle g^{-1}\partial_\mu g, g^{-1}\partial_\nu g \rangle, \tag{4.3}$$

onde $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ e $\{x^\mu\}$ são respectivamente, a métrica e as coordenadas locais em M e α é uma constante de acoplamento arbitrária. O modelo clássico é invariante conforme e podemos fixar o *gauge conforme* quando for necessário. Notemos que a simetria conforme já está presente aqui e é um bom indicio se pensamos na construção feita na seção 3.2.2.

A variação funcional do campo $g \longrightarrow g + \delta g$ resulta numa variação da ação dada por:

$$\delta S_\sigma [g] = \alpha \int_M d^2x \sqrt{\eta} \left\langle g^{-1}\delta g, \frac{1}{\sqrt{\eta}} \partial_\mu \left(\sqrt{\eta} \eta^{\mu\nu} g^{-1} \partial_\nu g \right) \right\rangle, \tag{4.4}$$

onde eliminamos divergências totais. A não singularidade do traço, implica as seguintes equações de movimento:

$$\frac{1}{\sqrt{\eta}} \partial_\mu \left(\sqrt{\eta} \eta^{\mu\nu} g^{-1} \partial_\nu g \right) = 0. \tag{4.5}$$

No gauge conforme, as equações (4.5) se reduzem a:

$$\partial_\mu (J^\mu) = 0 \quad , \quad J_\mu \equiv g^{-1}\partial_\mu g, \tag{4.6}$$

e são simplesmente a conservação da corrente $J = J_\mu dx^\mu \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(M)$. Se consideramos $J_\mu \equiv g^{-1}\partial_\mu g$ como alguma "conexão" de alguma teoria de gauge, vemos que ela é puro gauge e, como conseqüência disso, sua curvatura associada é nula (Cf(3.6)):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu + [J_\mu, J_\nu] = 0. \tag{4.7}$$

Consideremos agora a corrente *dual* de J dada por:

$$*J \equiv \widetilde{J} = J_\mu \epsilon^\mu_\nu dx^\nu \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(M), \tag{4.8}$$

então $\widetilde{J}^\nu = \varepsilon^{\mu\nu} J_\mu$. Multiplicando (4.7) por $\varepsilon^{\mu\nu}$ temos da relação $\varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$, que a corrente dual:

$$\partial_\mu \left(\widetilde{J}^\mu \right) = \frac{1}{2} \left[\widetilde{J}^\mu, J_\mu \right] \neq 0 \quad , \quad \widetilde{J}^\nu = \varepsilon^{\mu\nu} J_\mu$$

não é conservada. Por outro lado, *supondo* que a corrente dual seja conservada e usando coordenadas do cone de luz com $\varepsilon^{\mu\nu}$ normalizado tal que $\varepsilon^{-+} = -\epsilon^{+-} = 1$, vemos que J e $\widetilde{J}$ estão relacionadas por $\widetilde{J}^+ = J_-$ e $\widetilde{J}^- = -J_+$. Dessa maneira obtemos:

$$\partial_\mu \left(\widetilde{J}^\mu \right) = \partial_+ J_- - \partial_- J_+ = 0, \tag{4.9}$$

e nas mesmas coordenadas, a equação (4.6) é simplesmente:

$$\partial_\mu (J^\mu) = \partial_+ J_- + \partial_- J_+ = 0. \tag{4.10}$$

Agora, combinando as equações (4.9) e (4.10) podemos provar que a equação (4.6) é da forma (4.1):

$$\partial_+ J_- = 0 \quad , \quad J_- \equiv g^{-1}\partial_- g,$$

e multiplicando o resultado anterior por $g...g^{-1}$, obtemos uma equação da forma (4.2):

$$\partial_- J_+ = 0 \quad , \quad J_+ \equiv \partial_+ g g^{-1},$$

mas isso *somente* acontece quando a corrente dual é *conservada*, isto é, se a equação de movimento fosse:

$$\partial_\mu (J^\mu - \varepsilon^{\mu\nu} J_\nu) = 0, \tag{4.11}$$

no cone de luz teríamos as equações de movimento quirais desejadas $\partial_+ J_- = \partial_- J_+ = 0$.

A primeira conclusão. é que devemos modificar a ação (4.3) com um novo termo tal que a corrente dual seja conservada e reproduza as equações (4.11), mas esse novo termo é, como veremos, de natureza puramente *topológica*.

Sejam M, N duas variedades diferenciáveis tais que $\dim M = 2$ e $\dim N \geq 2$ e seja $\varphi : M \to N$ um *mergulho* de M em N. A métrica de M é denotada por η. Definamos um termo topológico (independente de η) da seguinte maneira:

$$\Gamma(\varphi) \equiv \beta \int_M \varphi^* \lambda = \beta \int_M d^2 x \epsilon^{\mu\nu} \lambda_{ij}(\varphi) \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j, \tag{4.12}$$

onde $\lambda = \lambda_{ij} dy^i \wedge dy^j \in \Omega^2(N)$ é uma 2-forma em N, $\{x^\mu\}_{\mu=1,2}$ e $\{y^i\}_{i=1,...,\dim N}$ são coordenadas locais em M e N respectivamente, $\varphi^* \lambda$ é o "pull-back" de λ em M e β é uma constante de acoplamento arbitrária. Agora, definamos um *disco* Ω tal que $M = \partial\Omega$ seja a fronteira de Ω. Usando o teorema de Stokes, obtemos:

$$\Gamma(\varphi) \equiv \beta \int_{M=\partial\Omega} \varphi^* \lambda = \beta \int_\Omega \varphi^* d\lambda = \beta \int_\Omega \varphi^* \omega = 3\beta \int_\Omega d^3 x \varepsilon^{IJK} \omega_{[ijk]} \partial_I \varphi^i \partial_J \varphi^j \partial_K \varphi^k, \tag{4.13}$$

onde $\omega = d\lambda = \omega_{ijk} dy^i \wedge dy^j \wedge dy^k \in \Omega^3(N)$ é uma 3−forma com $\omega_{[ijk]} = \frac{1}{3}(\partial_i \lambda_{jk} + \partial_k \lambda_{ij} + \partial_j \lambda_{ki})$ e $\{x^I\}_{I=1,2,3}$ são coordenadas locais em Ω. De (4.13) vemos imediatamente que o mapeamento $\varphi : M \to N$, só esta definido na fronteira $\partial\Omega$ e não no interior de Ω; então, em principio, devemos estender φ para um outro mapeamento $\widetilde{\varphi} : \Omega \to N$ bem definido em Ω. Para isso, fixamos a variedade $M = S^2$ como a 2−esfera, que não é outra coisa que explorar a invariância conforme da ação (4.3) . A extensão $\varphi \to \widetilde{\varphi}$ da fronteira $S^2 = \partial\Omega$ no interior do disco Ω é possível, se e somente se, o segundo grupo de homotopia de N é trivial, ou seja se $\pi_2(N) = 0$. Caso contrário, teríamos fronteiras no interior de N que impediriam a extensão. Assumiremos então que $\pi_2(N) = 0$, isto é, N não possui fronteiras 2−dimensionais internas.

A expressão correta para (4.13) é agora dada por:

$$\Gamma_\Omega(\widetilde{\varphi}) = \beta \int_\Omega \widetilde{\varphi}^* \omega = \beta \int_\Omega \widetilde{\varphi}^* d\lambda = \beta \int_{M=\partial\Omega} \varphi^* \lambda = \Gamma_{S^2}(\varphi), \tag{4.14}$$

mas isso se $\omega = d\lambda$ é uma 3−forma exata, coisa que em geral não acontece. A definição (4.12) é independente da escolha do disco Ω, então podemos definir outro disco Ω' tal que sua fronteira também seja $M = \partial\Omega'$ e tal que Ω e Ω' sejam os hemisférios norte e sul de uma 3-esfera S^3, o que equivale a dizer que $\Omega \cup \Omega' = S^3$ e $\Omega \cap \Omega' = S^2$.

Uma condição de quantização surge ao demandar a unicidade da exponencial $\exp iS$ na função de partição quântica associada ao problema clássico, ou seja que se escolhemos a orientação de Ω' e Ω tal que $\exp i\Gamma_\Omega = \exp -i\Gamma_{\Omega'}$, teremos a seguinte condição [12]:

$$\begin{aligned} \exp i\left(\Gamma_\Omega + \Gamma_{\Omega'}\right) = \exp i\Gamma_{S^3} = 1, \\ \Gamma_{S^3}(\widetilde{\varphi}) = 2\pi m \quad , \quad m \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

e da segunda integral de (4.15) temos:

$$\beta \int_\Omega \widetilde{\varphi}^*\omega + \beta \int_{\Omega'} \widetilde{\varphi}^*\omega = 2\pi m,$$

vemos então que a definição (4.12) é *ambígua* e a integral está definida salvo o fator $2\pi m$.

Notemos que a integral $\Gamma_{S^3}(\widetilde{\varphi})$ é feita sobre a esfera S^3 e varre ela uma vez só. Agora com $\widetilde{\varphi} : S^3 \to N$, temos que os mapeamentos topologicamente inequivalentes entre S^3 e N estão classificados por $\pi_3(N)$. Então se consideramos um mapeamento $\widetilde{\varphi} : S^3 \to N$ na n−esima classe de equivalência de $\pi_3(N)$, teremos o seguinte resultado:

$$\beta \int_{nS^3} \widetilde{\varphi}^*\omega = n\beta \int_{S^3} \widetilde{\varphi}^*\omega = n\alpha\Gamma(\widetilde{\varphi}, S^3),$$

dada a linearidade da integral, onde definimos $\Gamma(\widetilde{\varphi}, S^3) \equiv \int_{S^3} \widetilde{\varphi}^*\omega$. Em (4.15), o mapeamento $\widetilde{\varphi}$ pertencia à primeira classe, agora estendendo $\widetilde{\varphi}$ à n−esima classe, obtemos uma condição de quantização mais geral:

$$n\beta\Gamma(\widetilde{\varphi}, S^3) = 2\pi m.$$

isto diz que em geral, a constante de acoplamento deve ser, em principio, da forma:

$$\beta = \frac{2\pi}{\Gamma(\widetilde{\varphi}, S^3)} k \tag{4.16}$$

para *algum* número inteiro $k \in \mathbb{Z}$.

Dessa maneira, chegamos à definição do termo de *Wess-Zumino* em duas dimensões:

$$S_{WZ}(\widetilde{\varphi}) \equiv \beta \int_\Omega \widetilde{\varphi}^*\Theta = \beta \int_\Omega d^3x \varepsilon^{IJK} \Theta_{ijk} \partial_I \widetilde{\varphi}^i \partial_J \widetilde{\varphi}^j \partial_K \widetilde{\varphi}^k, \tag{4.17}$$

onde agora, $\Theta = \Theta_{ijk} dy^i \wedge dy^j \wedge dy^k \in \Omega^3(N)$ é uma 3-forma em N fechada que não é necessariamente exata e é tal que a integral (4.17), esteja definida salvo o fator $2\pi m$ quando integrar-mos sobre S^3. Localmente, Θ é exata e recuperamos (4.14).

Voltando ao caso de interesse em que a variedade N é um grupo de Lie G com o mapeamento $g : M \to G$, fixamos novamente $M = S^2$. A extensão $g \to \widetilde{g}$ ao interior do disco tridimensional $\Omega = D^3$

com coordenadas $x^I = \{x^\mu, x^3 \equiv \sigma\}$ é tal que a extensão $\widetilde{g}$, é uma homotopia entre a identidade do grupo e o mapeamento g na fronteira, é dizer que definimos sem ambigüidade:

$$\widetilde{g} = \widetilde{g}(x^\mu, \sigma) \text{ com } \widetilde{g}(x^\mu, 0) = Id_G \ , \ \widetilde{g}(x^\mu, 1) = g(x).$$

Explicitamente, parametrizamos a extensão como $\widetilde{g}(x^\mu, \sigma) = \exp(f_a X^a \sigma)$, onde X^a são geradores da álgebra $\mathfrak{g}$. Seguindo (4.17), definimos agora uma 3-forma Θ fechada [10], dada por:

$$\Theta \equiv \langle \theta \wedge \theta \wedge \theta \rangle \in \Omega^3(G) \ ,$$

onde tomamos a $\theta = h^{-1}dh$ como a forma matricial de Maurer-Cartan (Cf(2.22)). Notemos aqui a diferença entre $h \in G$ e $g : M \to G$. Dessa maneira, obtemos na variedade M, uma 3-forma própria do grupo G dada pelo "pull-back":

$$\widetilde{g}^* \Theta = \langle \widetilde{g}^{-1} d\widetilde{g} \wedge \widetilde{g}^{-1} d\widetilde{g} \wedge \widetilde{g}^{-1} d\widetilde{g} \rangle \in \Omega^3(M) \ .$$

Notemos que o traço, elimina o caráter matricial de $\theta \wedge \theta \wedge \theta$ em favor de um escalar e obtemos o termo de Wess-Zumino (4.17) do modelo sigma no grupo G:

$$S_{WZ}(\widetilde{g}) = \beta \int_{D^3} \langle \widetilde{g}^{-1} d\widetilde{g} \wedge \widetilde{g}^{-1} d\widetilde{g} \wedge \widetilde{g}^{-1} d\widetilde{g} \rangle = \beta \int_{D^3} d^3x \epsilon^{IJK} \langle g^{-1}\partial_I g g^{-1} \partial_J g g^{-1} \partial_K g \rangle . \qquad (4.18)$$

Notemos a independência de $\widetilde{g}$ na última integral. Isto se deve ao fato de que a informação contida na variação $\delta S_{WZ}(\widetilde{g})$, como veremos, só depende do mapeamento g na fronteira do disco D^3 e não na sua extensão $\widetilde{g}$. O termo no traço parece trilinear em g, mas a antissimetría do colchete de Lie garante a bilinearidade requerida:

$$\epsilon^{IJK} \langle g^{-1}\partial_I g, g^{-1}\partial_J g g^{-1} \partial_K g \rangle = \frac{1}{2} \epsilon^{IJK} \langle g^{-1} \partial_I g \left[g^{-1} \partial_J g, g^{-1} \partial_K g \right] \rangle , \qquad (4.19)$$

e é um termo perfeitamente bem definido que fornece informação do grupo, via as constantes de estrutura envolvidas no comutador.

A variação funcional do campo $g \to g + \delta g$ resulta numa variação do termo de Wess-Zumino dada por:

$$\delta S_{WZ}(g) = -3\beta \int_{D^3} d^3x \epsilon^{IJK} \partial_I \langle g^{-1}\delta g, \partial_J \left(g^{-1} \partial_K g \right) \rangle = -3\beta \int_{D^3} d^2x d\sigma \partial_I V^I ,$$

onde $V^I \equiv \epsilon^{IJK} \langle g^{-1}\delta g, \partial_J \left(g^{-1}\partial_K g \right) \rangle$. Usando o teorema da divergência chegamos à seguinte expressão:

$$\delta S_{WZ}(g) = -3\beta \int_M d^2x V^I \widehat{n}_I = -3\beta \int_M d^2x \sqrt{\eta} \left\langle g^{-1}\delta g, \frac{1}{\sqrt{\eta}} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \left(g^{-1} \partial_\nu g \right) \right\rangle ,$$

que é efetivamente o termo que garante a conservação da corrente dual (4.8).

A ação do modelo sigma no grupo G modificado pelo termo de Wess Zumino define o *modelo de Wess-Zumino-Witten* [11] e vêm dado pela ação:

$$S_{WZW}[g] \equiv -\frac{\alpha}{2} \int_{S^2 = \partial D^3} d^2x \sqrt{\eta} \eta^{\mu\nu} \langle g^{-1}\partial_\mu g, g^{-1} \partial_\nu g \rangle + \frac{k}{24\pi} \int_{D^3} d^3x \epsilon^{IJK} \langle g^{-1} \partial_I g g^{-1} \partial_J g g^{-1} \partial_K g \rangle , \qquad (4.20)$$

onde fixamos $\beta = \frac{k}{24\pi}$. A variação de (4.20) sob a mudança $g \longrightarrow g + \delta g$ é:

$$\delta S_{WZW}[g] = \int_M d^2x\sqrt{\eta}\left\langle g^{-1}\delta g, \frac{\alpha}{\sqrt{\eta}}\partial_\mu\left(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}g^{-1}\partial_\nu g\right) - \frac{k}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{\eta}}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\left(g^{-1}\partial_\nu g\right)\right\rangle,$$

e a não singularidade do traço leva até as equações de movimento:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\eta}}\partial_\mu\left(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}g^{-1}\partial_\nu g\right) - \frac{k}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{\eta}}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\left(g^{-1}\partial_\nu g\right) = 0,$$

que no gauge conforme são:

$$\partial_\mu\left[\left(g^{-1}\partial^\mu g\right) - \frac{k}{8\pi\alpha}\epsilon^{\mu\nu}\left(g^{-1}\partial_\nu g\right)\right] = 0.$$

Ao fixarmos[2] $\alpha = \frac{k}{8\pi}$, $k > 0$, chegamos às equações de movimento requeridas (Cf(4.11)):

$$\partial_\mu\left[\left(g^{-1}\partial^\mu g\right) - \epsilon^{\mu\nu}\left(g^{-1}\partial_\nu g\right)\right] = 0.$$

Nas coordenadas do cone de luz $\frac{x^0 \pm x^1}{2} \equiv x^\pm$ com $\partial_\pm = (\partial_0 \pm \partial_1)$, a ação[3] que governa a dinâmica do campo $g : M \longrightarrow G$ é:

$$S_{WZW}[g] = -\frac{k}{4\pi}\int_M dx^+dx^-\left\langle g^{-1}\partial_+ g, g^{-1}\partial_- g\right\rangle + \frac{k}{24\pi}\int_{D^3} d^3x\epsilon^{IJK}\left\langle g^{-1}\partial_I g, g^{-1}\partial_J g g^{-1}\partial_K g\right\rangle. \quad (4.21)$$

Notemos que a ação somente envolve o pull-back $g^*\theta = g^{-1}dg \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(M)$ da forma de Maurer-Cartan do grupo G (Cf(3.3)) que aqui é interpretada como uma corrente, de certa maneira podemos dizer que a ação (4.21) descreve a dinâmica de $g^*\theta$.

Após a construção da ação (4.21) que reproduz equações da forma (4.1) e (4.2), os seguintes passos são a restrição da ação ao subgrupo de grau zero $G_0 \equiv \widetilde{H}$ que é parametrizado por $\gamma : M \longrightarrow G_0$, a construção do termo potencial na ação e a inclusão dos vínculos (3.52) na Lagrangiana.

4.2 A Lagrangiana de Toda.

4.2.1 O potencial Perturbador e o modelo no coset G_0/G_0^0.

A primeira coisa que podemos explorar em favor de uma redução $G \longrightarrow G_0$, é a terceira forma da decomposição de Gauss de $g : M \longrightarrow G$ (Cf(2.53)). Agora, usando as decomposições de Gauss modificadas

[2]Em geral, a escolha pode ser $\alpha = \pm\frac{k}{8\pi}$. Com a escolha do sinal, as correntes estão relacionadas por uma transformação de paridade $x \longrightarrow -x$ que implica $J_- \longrightarrow J_+$. Escolhemos o sinal positivo para termos as correntes na forma (4.1) e (4.2).

[3]A quantização de k, em geral, é por razões geométricas (Cf(4.16)). No caso de N ser um grupo de Lie G, as correntes $J_+ = k\partial_+ g g^{-1}$ e $J_- = kg^{-1}\partial_- g$ definem um par de álgebras de Kac-Moody de *nível* k mutuamente comutantes (Cf(7.5)). O nível k é quantizado nesse caso por razões algébricas ao considerar representações irredutíveis, unitárias de peso maximo[25]. Isso acontece no caso de G ser um grupo compacto; quando o grupo G envolvido não é compacto, o nível k é simplesmente um número real.

(3.24) e (3.23) e definindo $k_- \equiv m_-$, $\gamma \equiv h_+$ e $k_+ = h_+^{-1} n_+ h_+$, podemos decompor o mapeamento g como:

$$g = k_- \gamma k_+, \tag{4.22}$$

onde $k_\pm : M \to\in \widetilde{N}_\pm$ e $\gamma : M \to \widetilde{H}$. Denotamos de maneira geral a decomposição (4.22) por:

$$G = \widetilde{N}_- \ \widetilde{H} \ \widetilde{N}_+. \tag{4.23}$$

Para eliminar os graus de liberdade correspondentes ao espaço $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 = \widetilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_+$ onde $\widetilde{N}_\pm$ são parametrizados, procuramos calibrar a ação (4.21) no coset $G_0 = \widetilde{N}_- \backslash G / \widetilde{N}_+ \equiv G/N$. É dizer, procuramos uma ação invariante sob a transformação:

$$g' = \alpha_-(x^+, x^-) g \alpha_+(x^+, x^-) \quad , \quad \alpha_\pm : M \to \widetilde{N}_\pm,$$

para eliminar os subgrupos nilpotentes $\widetilde{N}_\pm$ na decomposição (4.23). Para isso, precisamos introduzir dois campos compensadores $A_\pm \in \widetilde{N}_\pm$ sem dinâmica. A ação procurada é a ação de WZNW calibrada dada por ($dx^+ dx^- \equiv d^2x$):

$$S_{G/N}[g, A_+, A_-] = S_{WZW}[g] - \frac{k}{2\pi} \int_M d^2x \left\langle A_-(\partial_+ g g^{-1} - \epsilon_+) + A_+(g^{-1}\partial_- g - \epsilon_-) + A_- g A_+ g^{-1} \right\rangle,$$

que é invariante sob as transformações de gauge:

$$\begin{aligned} g &\to g' = \alpha_- g \alpha_+, \\ A_- &\to A'_- = \alpha_- \ A_- \ \alpha_-^{-1} + \ \alpha_- \partial_- \alpha_-^{-1}, \\ A_+ &\to A'_+ = \alpha_+^{-1} \ A_+ \ \alpha_+ + \ \partial_+ \alpha_+^{-1} \alpha_+. \end{aligned} \tag{4.24}$$

A adição do termo:

$$S_\epsilon = \frac{k}{2\pi} \int_M d^2x \left\langle A_- \epsilon_+ + A_+ \epsilon_- \right\rangle,$$

não é necessária para garantir a invariância mas pode ser feita porque devido à forma dos potenciais nilpotentes $A_\pm \in \widetilde{N}_\pm$ e dos elementos $\epsilon_\pm \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$; tal termo se transforma como uma derivada total sob (4.24). As relações úteis para provar a invariância são, a identidade de *Polyakov-Wiegman*[4] para decompor ações da forma (4.24) e a ortogonalidade dos espaços graduados[5].

Agora, escolhemos $\alpha_- = k_-^{-1}$ e $\alpha_+ = k_+^{-1}$ (Cf(4.22)) e usamos a ortogonalidade dos espaços graduados para obter a ação calibrada $S_{G/N}[g, A_+, A_-] = S_{G/N}[\gamma, A'_+, A'_-]$ dada por:

$$S_{G/N}[\gamma, A'_+, A'_-] = S_{WZW}[\gamma] - \frac{k}{2\pi} \int_M d^2x \left\langle -A'_- \epsilon_+ - A'_+ \epsilon_- + A'_- \gamma A'_+ \gamma^{-1} \right\rangle,$$

[4] $S[fgh] = S[f] + S[g] + S[h] - \frac{k}{2\pi} \int_M d^2x \left\langle f^{-1}\partial_- f \partial_+ g g^{-1} + g^{-1}\partial_- g \partial_+ h h^{-1} + f^{-1}\partial_- f g \partial_+ h h^{-1} g^{-1} \right\rangle$.

[5] Por exemplo, em (2.13) tomando $K \to \langle ... \rangle$, $Z = Q$, $X \in \mathfrak{g}_m$ e $Y \in \mathfrak{g}_n$ obtemos:

$$(m+n) \langle X, Y \rangle = 0.$$

Com $\langle ... \rangle$ não degenerado, se $\langle X, Y \rangle \neq 0$ devemos ter $(m+n) = 0$.

onde $\gamma : M \longrightarrow G_0$. Reescrevendo o termo:

$$-A_-\epsilon_+ - A_+\epsilon_- + A_-\gamma A_+\gamma^{-1} = (A_- - \gamma\epsilon_-\gamma^{-1})\gamma(A_+ - \gamma^{-1}\epsilon_+\gamma)\gamma^{-1} - (\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\epsilon_+),$$

é possível resolver os campos compensadores ao integrá-los no funcional:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_+\mathcal{D}A_- \exp S_\pm(A_\pm)\ ,$$

onde:

$$S_\pm(A_\pm) = -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle (A_- - \gamma\epsilon_-\gamma^{-1})\gamma(A_+ - \gamma^{-1}\epsilon_+\gamma)\gamma^{-1}\right\rangle + \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle (\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\epsilon_+)\right\rangle.$$

Dessa maneira chegamos à ação para o campo γ no subgrupo G_0 com um *potencial perturbador*:

$$S_{G_0}[\gamma] = S_{WZW}[\gamma] + \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle \epsilon_+\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\right\rangle. \tag{4.25}$$

Após a variação do campo $\gamma \longrightarrow \gamma + \delta\gamma$,temos:

$$\delta S^{eff}_{G_0}[\gamma] = \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle \gamma^{-1}\delta\gamma, \partial_+(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) - \left[\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma, \epsilon_-\right]\right\rangle,$$

e recuperamos de novo, às equações de Leznov-Saveliev (Cf(3.53)):

$$\begin{aligned} \partial_+(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) &= \left[\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma, \epsilon_-\right], \\ \partial_-(\partial_+\gamma\gamma^{-1}) &= \left[\epsilon_+, \gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\right]. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ou seja a ação (4.25) descreve *perturbações integráveis* dos modelo $S_{WZW}[\gamma]$ associados ao subgrupo G_0. Por outro lado, a ação (4.25) ainda possui uma *simetria quiral* associada às transformações $G_0^0 \otimes G_0^0$ dadas por:

$$\gamma \longrightarrow \gamma' = \Omega^+(x^+)\gamma\Omega^-(x^-)\ \ ,\ \ \Omega^\pm(x^\pm) \in G_0^0, \tag{4.27}$$

onde G_0^0 é o subgrupo gerado pela subálgebra (3.50) $\mathfrak{g}_0^0 \subset \mathfrak{g}_0$ que centraliza os elementos $\epsilon_\pm \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$ no potencial.

As correntes conservadas associadas a esta simetria são:

$$\begin{aligned} \partial_+\left[J_-(X_i)\right] = 0\ \ &,\ \ J_-(X_i) = \left\langle X_i\ \gamma^{-1}\partial_-\gamma\right\rangle, \\ \partial_-\left[J_+(X_i)\right] = 0\ \ &,\ \ J_+(X_i) = \left\langle X_i\ \partial_+\gamma\gamma^{-1}\right\rangle, \end{aligned}$$

e coincidem exatamente com as correntes (3.51), onde $i = 1, ..., \dim \mathfrak{g}_0^0$.

Agora vamos impor os seguintes vínculos (3.52):

$$\left\langle X_i\ \gamma^{-1}\partial_-\gamma\right\rangle = \left\langle X_i\ \partial_+\gamma\gamma^{-1}\right\rangle = 0. \tag{4.28}$$

Notemos que se parametrizamos o mapeamento $\gamma : M \longrightarrow G_0$ somente com elementos que não estão no subgrupo G_0^0, isto é, com elementos no coset G_0/G_0^0, obtemos automaticamente a solução de (4.28). Assim, para eliminar os graus de liberdade correspondentes à subálgebra $\mathfrak{g}_0^0$ repetimos o procedimento anterior e calibramos a ação (4.25) no coset G_0/G_0^0. Para uma subálgebra $\mathfrak{g}_0^0$ não abeliana, definimos um segundo operador de grau Q' para colocar o elemento γ numa decomposição de Gauss similar a (4.22) com a subálgebra $\mathfrak{g}_0^0 \equiv \mathfrak{g}_0^{0,-} \oplus \mathfrak{g}_0^{0,0} \oplus \mathfrak{g}_0^{0,+}$ e procuramos uma ação invariante sob a transformação:

$$\gamma' = \Gamma_-(x^+, x^-)\gamma\Gamma_+(x^+, x^-),$$

onde $\Gamma_- = \gamma_0\gamma_-$, $\Gamma_+ = \gamma_+\gamma_0'$ com $\gamma_0, \gamma_0' : M \to G_0^{0,0}$ e $\gamma_\pm : M \to G_0^{0,\pm}$. Novamente, precisamos introduzir dois campos compensadores $A_0 = A_0^0 + A_-^0 \in \mathfrak{g}_0^{0,0} \oplus \mathfrak{g}_0^{0,-}$ e $\overline{A}_0 = \overline{A}_0^0 + \overline{A}_+^0 \in \mathfrak{g}_0^{0,0} \oplus \mathfrak{g}_0^{0,+}$ sem dinâmica. A ação procurada é a ação de WZNW calibrada [20]:

$$\begin{aligned} S_{G_0/G_0^0}\left[\gamma, A_0, \overline{A}_0\right] &= S_{WZW}\left[\gamma\right] + \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle \epsilon_+\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\right\rangle \\ &- \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle \eta A_0(\partial_+\gamma\gamma^{-1}) + \overline{A}_0(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) + \eta A_0\gamma\overline{A}_0\gamma^{-1} + A_0^0\overline{A}_0^0\right\rangle, \end{aligned} \tag{4.29}$$

que é invariante sob as transformações de gauge:

$$\begin{aligned} \gamma &\to \gamma' = \Gamma_-\gamma\Gamma_+, \\ A_0^0 &\to A_0'^0 = A_0^0 - \eta\gamma_0^{-1}\partial_-\gamma_0, \\ \overline{A}_0^0 &\to \overline{A}_0'^0 = \overline{A}_0^0 - \gamma_0'^{-1}\partial_+\gamma_0', \\ A_0 &\to A_0' = \Gamma_-\, A_0\, \Gamma_-^{-1} - \eta\, \partial_-\Gamma_-\Gamma_-^{-1}, \\ \overline{A}_0 &\to \overline{A}_0' = \Gamma_+^{-1}\, \overline{A}_0\, \Gamma_+ -\ \Gamma_+^{-1}\partial_+\Gamma_+, \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde $\eta = 1$ quando fixamos[6] o *calibre axial* $\gamma_0' = \gamma_0$ ou $\eta = -1$ quando fixamos o *calibre vetorial* $\gamma_0' = \gamma_0^{-1}$. De maneira similar a como foi feito antes, escolhemos $\Gamma_\pm$ para eliminar os elementos de γ que pertencem ao subgrupo G_0^0 e obter a ação calibrada $S_{G_0/G_0^0}\left[\gamma, A_0, \overline{A}_0\right] = S_{G_0/G_0^0}\left[\Psi, A_0', A_0'\right]$ dos *modelos Toda singulares* dada por:

$$\begin{aligned} S_{G_0/G_0^0}\left[\Psi, A_0, \overline{A}_0\right] &= S_{WZW}\left[\Psi\right] + \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle \epsilon_+\Psi\epsilon_-\Psi^{-1}\right\rangle \\ &- \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle \eta A_0(\partial_+\Psi\Psi^{-1}) + \overline{A}_0(\Psi^{-1}\partial_-\Psi) + \eta A_0\Psi\overline{A}_0\Psi^{-1} + A_0^0\overline{A}_0^0\right\rangle, \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde $\Phi = \ln\Psi : M \to \mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}_0^0$ é o campo de Toda do modelo.

Para resumir, a ação (4.25) define os modelos de *Toda Conformes* no caso de $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_0$ ser uma álgebra de Lie clássica $\mathfrak{g}$, e define os modelos de *Toda Conformes Afins* no caso de $\widehat{\mathfrak{g}} \supset \mathfrak{g}_0$ ser uma álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{g}}$. Quando $\mathfrak{g}_0^0 \subset \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ existe e $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie clássica $\mathfrak{g}$, a ação (4.31) define os modelos de *Toda Conformes Singulares* e quando $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{g}}$, define os modelos de *Toda Conformes Singulares Afins* catalogados respectivamente, como vimos, pelos dados puramente algébricos (3.54) e (3.55).

Como conseqüência da inclusão dos vínculos (4.28) em (4.31), o potencial $V = \left\langle \epsilon_+\Psi\epsilon_-\Psi^{-1}\right\rangle$ está definido *univocamente* no coset G_0/G_0^0 e é independente do valor de η. Duas coisas devem ser mencionadas nesse ponto: A primeira é que precisamos de uma parametrização explícita do campo Ψ

[6] Essa liberdade na escolha dos calibres é a origem da dualidade Axial-Vetorial que é uma manifestação da Dualidade T nos modelos integráveis correspondentes [18],[19].

e dos campos compensadores A_0 e $\overline{A}_0$ para acharmos a ação efetiva que governa o modelo de Toda correspondente em G_0/G_0^0 e, a segunda, é que uma vez temos a ação efetiva, ela ainda possui uma *simetria global* residual que é remanescente das transformações (4.27). Esta simetria global fornece cargas de Noether para os sôlitons associados ao modelo integrável em questão, ver por exemplo [28].

Consideremos de novo a ação (4.25) em coordenadas $\{x^\mu\}$ com o elemento de volume geral $d^2x\sqrt{\eta}$:

$$S_{G_0}[\gamma] = S_\sigma[\gamma] + S_{WZ}[\gamma] + S_T[\gamma], \tag{4.32}$$

$$S_\sigma[\gamma] = -\frac{k}{16\pi}\int_M d^2x\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}\left\langle\gamma^{-1}\partial_\mu\gamma\gamma^{-1}\partial_\nu\gamma\right\rangle, \tag{4.33}$$

$$S_{WZ}[\gamma] = \frac{k}{24\pi}\int_{D^3} d^3x\epsilon^{IJK}\left\langle\gamma^{-1}\partial_I\gamma\gamma^{-1}\partial_J\gamma\gamma^{-1}\partial_K\gamma\right\rangle, \tag{4.34}$$

$$S_T[\gamma] = \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\sqrt{\eta}\left\langle\epsilon_+\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\right\rangle. \tag{4.35}$$

As correspondentes equações de movimento são:

$$\frac{1}{\sqrt{\eta}}\partial_\mu\left(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}\gamma^{-1}\partial_\nu\gamma - \epsilon^{\mu\nu}\gamma^{-1}\partial_\nu\gamma\right) + \left[\epsilon_-,\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma\right] = 0. \tag{4.36}$$

De (2.6) e (2.12) podemos considerar aos geradores $\{X_a\}$ da álgebra $\mathfrak{g}_0$ como uma base *não* coordenada:

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c$$
$$\rho_{ab} = \langle X_a X_b\rangle \ = cons,$$

e introduzimos uma tetrada Ω_i^a, Ω_a^i que liga a base não coordenada com a base coordenada $X_i = \gamma^{-1}\partial_i\gamma$, dy^i segundo:

$$X_i = \Omega_i^a X_a \quad , \quad dy^i = \Omega_a^i\theta^a,$$

Assim, o "pull-back"$\gamma^*\theta \in \mathfrak{g}_0 \otimes \Omega^1(N)$ da forma de Maurer-Cartan (2.22) é escrito como:

$$\gamma^*\theta = X_{ea}\Omega_i^a(\phi)\partial_\mu\phi^i dx^\mu = X_i\partial_\mu\phi^i dx^\mu \quad \phi^i : M \to \mathbb{R},$$

e no caso matricial identificamos:

$$\gamma^{-1}\partial_\mu\gamma = X_{ea}\Omega_i^a(\phi)\partial_\mu\phi^i$$

Com essa expressão, absorvemos convenientemente alguns fatores e reescrevemos a densidade Lagrangiana do modelo sigma (4.33) como:

$$\mathcal{L}_\sigma[\gamma] = -\frac{k}{4\pi}\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j G_{ij}(\phi),$$

onde definimos a métrica em N como $G_{ij}(\phi) \equiv \rho_{ab}\Omega_i^a(\phi)\Omega_j^b(\phi)$ onde $\rho_{ab} = \langle X_a X_b\rangle \neq 0$.

Por outro lado, se consideramos uma representação *local* de (4.17) em G onde agora Θ é uma 3-forma exata, ou seja $\Theta = dB$ para algum $B \in \mathfrak{g}_0 \otimes \Omega^2(G_0)$, o teorema de Stokes em (4.17) implica:

$$S_{WZ}[\gamma] = \frac{k}{24\pi}\int_{D^3}\tilde{\gamma}^*\Theta = \frac{k}{24\pi}\int_{D^3}\tilde{\gamma}^* dB = \frac{k}{24\pi}\int_M \gamma^* B.$$

Assim, reescrevemos a densidade Lagrangiana do termo de Wess-Zumino (4.34) como:

$$\mathcal{L}_{WZ}\left[\gamma\right] = -\frac{k}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j B_{ij}(\phi) \tag{4.37}$$

onde $\gamma^* B \in \mathfrak{g}_0 \otimes \Omega^2(N)$. É possível que na transição entre cartas em N, o tensor antissimetrico B transforme como $B \to B + d\lambda$ onde $B_{ij} \to B_{ij} + \partial_i\lambda_j - \partial_j\lambda_i$, coisa que não acontece com $\Theta(\phi) \equiv dB(\phi)$, isto enfatiza o caráter local de (4.37).

Finalmente, introduzimos o potencial:

$$\mathcal{L}_T\left[\gamma\right] = \frac{k}{4\pi}\sqrt{\eta}\left\langle\epsilon_+\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\right\rangle \equiv \frac{k}{4\pi}\sqrt{\eta}V(\phi),$$

e coletamos os termos para obter a Lagrangiana dos modelos de Toda[7]:

$$\mathcal{L}_{Toda}\left[\phi,\gamma\right] = -\frac{k}{4\pi}\left(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j G_{ij}(\phi) + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j B_{ij}(\phi) - \sqrt{\eta}V(\phi)\right), \tag{4.38}$$

que não é outra coisa que a densidade Lagrangiana de um *modelo sigma não linear* perturbado pelo potencial integrável $V(\phi)$. As equações de movimento são:

$$\frac{1}{\sqrt{\eta}}\partial_\mu\left(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^i\right) + \left(\Gamma^i_{jk}\right)\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^j\partial_\nu\phi^k = -\frac{1}{2}\sqrt{\eta}G^{ij}\partial_j V(\phi),$$

onde $\Gamma^i_{jk} = \left\{{i \atop jk}\right\} + H^i_{jk}$ é uma conexão geral com $\left\{{i \atop jk}\right\}$ como os símbolos de Christoffel usuais, $H^i_{jk} = \frac{3}{2}\Theta^i_{jk}$ é a *torçamo* de N com $\Theta_{ijk} = \frac{1}{3}\left(\partial_i B_{jk} + \partial_k B_{ij} + \partial_j B_{ki}\right)$ antissimetrico nos três índices com *potencial torçamo* B e onde $\theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu}$. O termo de Wess-Zumino é o responsável pela presença da *torçamo* H do espaço N e as equações de movimento são validas em todo N dado que estão dadas em termos de H e não do potencial B que esta localmente definido. Notemos que a existencia de H esta ligada à natureza não abeliana do grupo como pode se evidencir no comutador envolvido em (4.19).

4.2.2 Modelos de Toda não Abelianos e Invariância Conforme.

Em geral, o subgrupo de grau zero G_0 é não abeliano e a ação correspondente (4.32) envolve termos não triviais e a métrica η. Por essa razão, verificar que os modelos Toda não abelianos são invariantes conformes é um pouco mais delicado que no caso abeliano.

Comecemos considerando a Lagrangiana (4.38) e a definição do tensor energia momento canônico (3.59), onde agora $T \to \sqrt{\eta}T$. Após organizar alguns termos, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{-4\pi}{k}T^{\mu\nu} &= 2\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}\partial_\rho\phi^i\partial_\lambda\phi^j G(\phi)_{ij} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}\partial_\rho\phi^i\partial_\lambda\phi^j G(\phi)_{ij} + \eta^{\mu\nu}V(\phi)\\ &- \frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(\eta^{\mu\nu}\epsilon^{\rho\lambda} + \eta^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\lambda} + \eta^{\lambda\mu}\epsilon^{\nu\rho}\right)\partial_\rho\phi^i\partial_\lambda\phi^j B(\phi)_{ij}.\end{aligned}$$

[7] A validade dessa construção local é justificada pelo fato de que as equações hamiltonianas de movimento construídas a partir de (4.38) realmente implicam as equações lagrangianas (4.26) obtidas com (4.25). Isto após de escrever o Hamiltoniano na forma de Sugawara[10].

A soma $\eta^{\mu\nu}\epsilon^{\rho\lambda}+\eta^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\lambda}+\eta^{\lambda\mu}\epsilon^{\nu\rho}$ é totalmente antissimétrica em $\mu\rho\lambda$ e se cancela em duas dimensões. Isto é, o tensor energia impulso canônico $T^{\mu\nu}$ não recebe contribuição do termo de Wess-Zumino, o que é verificado ao calcular o tensor energia momento simétrico definido como a variação funcional da ação com respeito à métrica η ,dado que é um termo topológico. O tensor canônico é então:

$$\frac{-4\pi}{k}T^{\mu\nu} = 2\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}\partial_\rho\phi^i\partial_\lambda\phi^j G(\phi)_{ij} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}\partial_\rho\phi^i\partial_\lambda\phi^j G(\phi)_{ij} + \eta^{\mu\nu}V(\phi),$$

e coincide com o tensor simétrico que é covariantemente conservado $\nabla_\mu T_s^{\mu\nu} = 0$. Em termos do campo γ, temos que o tensor energia-momento:

$$\frac{-4\pi}{k}T^{\mu\nu} = 2\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}\left\langle\gamma^{-1}\partial_\mu\gamma\gamma^{-1}\partial_\nu\gamma\right\rangle - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}\left\langle\gamma^{-1}\partial_\mu\gamma,\gamma^{-1}\partial_\nu\gamma\right\rangle + \eta^{\mu\nu}\left\langle\epsilon_+\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\right\rangle,$$

possui um traço não nulo:

$$\frac{-4\pi}{k}T^\mu_\mu = 2\left\langle\epsilon_+\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\right\rangle = 2\left\langle\epsilon_-\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma\right\rangle.$$

A expressão não tem derivadas envolvidas e a idéia agora é usar as equações de movimento para achar uma divergência que possa ser cancelada num tensor acrescentado. Lembrando que $[Q,\epsilon_-] = -\epsilon_-$, podemos escrever:

$$\left\langle\epsilon_-\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma\right\rangle = -\left\langle[Q,\epsilon_-]\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma\right\rangle = -\left\langle Q\left[\epsilon_-,\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma\right]\right\rangle,$$

e usar as equações de movimento (4.36) para obter:

$$\left\langle\epsilon_-\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\left\langle Q\partial_\mu\left(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}\gamma^{-1}\partial_\nu - \epsilon^{\mu\nu}\gamma^{-1}\partial_\nu\gamma\right)\right\rangle.$$

Usando a antissimetria de $\epsilon^{\mu\nu}$ e o fato que $[Q,\gamma] = 0$, $\gamma \in G_0$ temos:

$$\left\langle\epsilon_-\gamma^{-1}\epsilon_+\gamma\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\partial_\mu\left\langle Q\left(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}\gamma^{-1}\partial_\nu\right)\right\rangle.$$

Em duas dimensões a derivada covariante satisfaz $\nabla_\rho(\eta^{\mu\nu}V_\nu) = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\partial_\rho(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}V_\nu)$, então o traço vem dado por:

$$\frac{-4\pi}{k}T^\mu_\mu = 2\nabla_\mu\left\langle Q\left(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}\gamma^{-1}\partial_\nu\right)\right\rangle = 2\nabla_\mu V^\mu,$$

onde $V^\mu \equiv \left\langle Q\left(\sqrt{\eta}\eta^{\mu\nu}\gamma^{-1}\partial_\nu\right)\right\rangle$. Aproveitando a ambigüidade na definição do tensor energia impulso, definimos o tensor *acrescentado*:

$$\theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \nabla_\lambda A^{\mu\lambda\nu} \quad , \quad A^{\mu\lambda\nu} = -A^{\lambda\mu\nu},$$

onde $A^{\mu\lambda\nu} \equiv -2\eta^{\mu\nu}V^\lambda + 2\eta^{\lambda\nu}V^\mu$. Esse novo tensor satisfaz:

$$\frac{-4\pi}{k}\theta^\mu_\mu = 0$$

É dizer que os modelos de Toda não abelianos também apresentam invariância conforme e podemos sempre fixar o gauge conforme nas ações. Isto justifica a métrica envolvida na ação (4.31). Para terminar, salientamos que é justamente a forma especial do potencial que permite a construção do tensor energia-momento acrescentado sem traço e que no caso abeliano é, como vimos, da forma (3.61).

Capítulo 5

◎ Dualidade nos modelos de Toda.

Como temos visto até agora, os modelos de Toda representam perturbações integráveis do modelo WZW, onde as perturbações respeitam as simetrias iniciais do modelo WZW e introduzem termos de interação não triviais na teoria os quais podem, ou não, dar origem a soluções solitónicas do modelo integrável associado. Em geral, as únicas[18] formas possíveis de calibrar um subgrupo $H \supset G$ na ação de WZW para reduzir a teoria do grupo G ao coset G/H sem dar origem a anomalias quânticas, são exatamente as calibrações *Axial* e *Vetorial* introduzidas em (4.29). Essas duas calibrações geram teorias duais que são quânticamente equivalentes como conseqüência de uma trivialização da medida na função de partição correspondente. O reflexo dessa equivalência é a origem da dualidade T entre os modelos sigma associados.

Nesse capitulo, construiremos no nível clássico as transformações de dualidade dos modelos de Toda não singulares, primeiramente considerando a teoria como um modelo sigma perturbado para ver explicitamente a mudança na geometria da variedade alvo N em termos dos tensores G e B. O resultado, é uma extensão natural das transformações de dualidade introduzidas inicialmente sem a presença de um potencial, ver [15],[16],[17]. Posteriormente, consideraremos a dualidade Axial-Vetorial no caso da inclusão dos vínculos (3.52) na ação (4.29) a qual da origem aos modelos de Toda singulares.

5.1 Dualidade T Clássica (Target-Space duality).

Consideremos a ação do modelo sigma perturbado por um potencial integrável no gauge conforme:

$$S_{Toda}(\phi, G, B, V) = -\frac{k}{4\pi}\int_M d^2x\,(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j G_{ij}(\phi) + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j B_{ij}(\phi) - V(\phi)) \tag{5.1}$$

nesse caso, $G = G_{ij}dy^i \otimes dy^i \in T^*N \otimes T^*N$ e $B = B_{ij}dy^i \wedge dy^i \in \Omega^2(N)$ são a métrica e um tensor antissimetrico na variedade N de dimensão $\dim N = \dim G_0 \equiv D$ onde M esta mergulhada ou onde M se *propaga*. O espaço domínio nessa teoría de campos é o espaço 2−dimensional M , o que significa que a ação (5.1) não descreve a *dinâmica* da métrica G ou do tensor antissimetrico B e só descreve a dinâmica dos campos $\phi : M \rightarrow N$ do mergulho $M \hookrightarrow N$. Nesse sentido G e B são arbitrários e a informação geométrica de N carregada por eles é suscetível de ser mudada por algum tipo de transformação efetuada na ação (5.1). O tipo mais natural de transformação que não modifica a *física* da teoría nem o caráter geométrico assinado a G e B, é uma *transformação canônica* do mesmo tipo $(\phi, \Pi_\phi) \to \left(\widetilde{\phi}, \Pi_{\widetilde{\phi}}\right)$. Para implementar uma transformação canônica desse tipo, reescrevemos a ação (5.1) no cone de luz como:

$$S_{Toda}(\phi, Q) = -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left(\partial_+\phi^i\partial_-\phi^j Q_{ij}(\phi)\ - V(\phi)\right) \tag{5.2}$$

onde $Q_{ij}(\phi) \equiv G_{ij}(\phi) + B_{ij}(\phi)$ e $x^\pm = \frac{1}{2}(t \pm x)$. O seguinte passo, é supor que a variedade N possui $d < D$ isometrias comutantes (Abelianas) $U(1)^{\otimes d}$, geradas por d vetores de Killing $[K_i, K_j] = 0$ $i = 1, ..., d$ de forma tal que o potencial V seja isométrico nessas direções também, isto implica que teremos dois modelos sigma com duas geometrias diferentes perturbados pelo mesmo potencial. Não consideraremos mudanças no potencial nessa discussão.

Agora isolamos as direções isométricas Θ^α , $\alpha = 1, ..., d$, das outras direções φ^m $m = d+1, ..., D$ ao escrever $\phi^i = (\Theta^\alpha, \varphi^m)$. Dessa maneira, salvo o fator $-\frac{k}{2\pi}$, obtemos a densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\Theta, Q) = \partial_+\Theta^\alpha Q_{\alpha\beta}\partial_-\Theta^\beta + \partial_+\Theta^\alpha N^-_\alpha + N^+_\alpha\partial_-\Theta^\alpha + \mathcal{L}(\varphi) \tag{5.3}$$

onde $N^-_\alpha = Q_{\alpha m}\partial_-\varphi^m$, $N^+_\alpha = \partial_+\varphi^m Q_{m\alpha}$ e $\mathcal{L}(\varphi) \equiv Q_{mn}\partial_+\varphi^m\partial_-\varphi^n - V(\varphi)$. Assim, as $U(1)^{\otimes d}$ isometrias correspondem às translações $\Theta^\alpha \to \Theta^\alpha + \rho^\alpha$ com ρ^α constante e que obviamente, comutam entre se.

A lagrangiana depende do campo Θ^α só através das suas derivadas e podemos escreve-la em termos das variaveis $V^\alpha_\pm \equiv \partial_\pm\Theta^\alpha$, da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}(V, \widetilde{\Theta}, Q) = V^\alpha_+ Q_{\alpha\beta}V^\beta_- + V^\alpha_+ N^-_\alpha + N^+_\alpha V^\alpha_- + \widetilde{\Theta}_\alpha\left(\partial_- V^\alpha_+ - \partial_+ V^\alpha_-\right) + \mathcal{L}(\varphi) \tag{5.4}$$

onde claramente $\widetilde{\Theta}_\alpha\left(\partial_- V^\alpha_+ - \partial_+ V^\alpha_-\right) = 0$. Se consideramos a Lagrangiana (5.4) como uma *outra* onde as variáveis $V^\alpha_\pm$ são arbitrarias, os parâmetros $\widetilde{\Theta}^\alpha$ serão multiplicadores de Lagrange que ao ser resolvidos dão a equação de movimento:

$$\partial_- V^\alpha_+ = \partial_+ V^\alpha_-,$$

com solução $V^\alpha_\pm \equiv \partial_\pm\Theta^\alpha$, e a Lagrangiana (5.4) se reduz á Lagrangiana original (5.3). Por outro lado, a Lagrangiana (5.4) é quadrática em V e podemos resolver essas variáveis em favor da variável $\widetilde{\Theta}$ ao integra-las na funcional:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}V_+\mathcal{D}V_- \exp S(V, \widetilde{\Theta}, Q), \tag{5.5}$$

onde $S(V, \widetilde{\Theta}, Q) = \int_M d^2x\mathcal{L}(V, \widetilde{\Theta}, Q)$. Para efetuar a integração, reescrevemos a Lagrangiana e eliminamos as derivadas do campo V para obter:

$$\mathcal{L}(V, \widetilde{\Theta}, Q) = V^\alpha_+ Q_{\alpha\beta}V^\beta_- + V^\alpha_+\left(N^-_\alpha - \partial_-\widetilde{\Theta}_\alpha\right) + \left(N^+_\alpha + \partial_+\widetilde{\Theta}_\alpha\right)V^\alpha_- + \mathcal{L}(\varphi) + \mathcal{F}(\widetilde{\Theta}, V)$$

onde $\mathcal{F}(\widetilde{\Theta}, V) = \partial_-(\widetilde{\Theta}_\alpha V^\alpha_+) - \partial_+(\widetilde{\Theta}_\alpha V^\alpha_-)$ é uma divergência total. Reescrevendo mais uma vez, esse tipo de expressões quadráticas como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(V, \widetilde{\Theta}, Q) = &\left[V^\alpha_+ + (N^+_\rho + \partial_+\widetilde{\Theta}_\rho)Q^{\rho\alpha}\right]Q_{\alpha\beta}\left[V^\beta_- - Q^{\beta\lambda}(N^-_\lambda - \partial_-\widetilde{\Theta}_\lambda)\right]\\ &- (N^+_\alpha + \partial_+\widetilde{\Theta}_\alpha)Q^{\alpha\beta}(N^-_\beta - \partial_-\widetilde{\Theta}_\beta) + \mathcal{L}(\varphi),\end{aligned}$$

e integrar os campos V no funcional (5.5), obtemos:

$$\mathcal{L}(\widetilde{\Theta}, Q) = -(N_\alpha^+ + \partial_+\widetilde{\Theta}_\alpha)Q^{\alpha\beta}(N_\beta^- - \partial_-\widetilde{\Theta}_\beta) + \mathcal{L}(\varphi) \tag{5.6}$$

e chegamos à ação a *ação T-dual* de (5.2) na variedade *dual* $\widetilde{N}$:

$$S_{Toda}^{T-dual}(\phi, \widetilde{Q}) = -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\left(\partial_+\phi^i\partial_-\phi^j\widetilde{Q}_{ij}(\phi)\ - V(\phi)\right) \tag{5.7}$$

com uma nova geometria em $\widetilde{N}$ definida por [14]:

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_{\alpha\beta} &= Q_{\alpha\beta}^{-1} \quad , \quad \widetilde{Q}_{mn} = Q_{mn} -\ Q_{m\alpha}\ Q_{\alpha\beta}^{-1}Q_{\beta n} \\ \widetilde{Q}_{m\alpha} &= Q_{m\beta}Q_{\beta\alpha}^{-1} \quad , \quad \widetilde{Q}_{\alpha m} = -Q_{\alpha\beta}^{-1}Q_{\beta m}\end{aligned} \tag{5.8}$$

É dizer que a dualidade T se manifesta como transformações matriciais na geometria da variedade de fundo $N \to \widetilde{N}$ onde M se propaga.

Consideremos o caso de uma isometria[1] $U(1)$ só, com $\alpha = \beta = 1$ numa variedade N *sem* tensor antissimetrico B. Nesse caso obtemos:

$$\begin{aligned}&\widetilde{G}_{11} = \frac{1}{G_{11}} \quad , \quad \widetilde{G}_{mn} = G_{mn} - \frac{G_{1m}G_{1n}}{G_{11}} \quad , \quad \widetilde{G}_{1m} = \widetilde{G}_{m1} = 0 \\ &\widetilde{B}_{1m} = -\widetilde{B}_{m1} = \frac{G_{1m}}{G_{11}} \ , \quad \widetilde{B}_{mn} = 0,\end{aligned} \tag{5.9}$$

e dizer que o modelo dual esta definido numa variedade $\widetilde{N}$ que possui um tensor antissimetrico $\widetilde{B}$ *diferente* de zero!.

Até aqui ainda não é claro que a ação dual (5.7) e a ação original (5.2) descrevam a mesma física clássicamente. A ação dual é funcionalmente similar à ação inicial e o caráter geométrico de G e B é foi preservado, ou seja que pelo menos a transformação é do mesmo tipo $(\phi, \Pi_\phi) \to \left(\widetilde{\phi}, \Pi_{\widetilde{\phi}}\right)$. Agora só resta provar que os espaços de fase das duas teorias diferem de uma *transformação canônica* para verificar que os graus de liberdade são exatamente os *mesmos*.

Aproveitemos o termo de fronteira anteriormente desconsiderado e tomemos $V_\nu^\alpha = \partial_\nu\Theta^\alpha$, a integral dessa divergência total pode ser reescrita como uma derivada temporal total :

$$\int dx^+dx^-\mathcal{F}(\widetilde{\Theta}, \Theta) = \int d^2x\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(\widetilde{\Theta}_\alpha\partial_\nu\Theta^\alpha) = \frac{d}{dt}(\mathcal{F}_1)$$

onde:

$$\mathcal{F}_1(\widetilde{\Theta}, \Theta) \equiv -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\left[\Theta^\alpha\partial_x\widetilde{\Theta}_\alpha - \widetilde{\Theta}_\alpha\partial_x\Theta^\alpha\right], \tag{5.10}$$

é uma *função geratriz* que pode ser adicionada na Lagrangiana $L = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\mathcal{L}$ dual para ter:

$$L(\Theta, Q) = L(\widetilde{\Theta}, \widetilde{Q}) + \frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(\Theta, \widetilde{\Theta}),$$

[1] Se consideramos um campo Gaussiano ϕ num circulo de raio R, teríamos:

$$S = \int d^2x\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi R^2 \to \widetilde{S} = \int d^2x\frac{1}{2}\partial_\mu\widetilde{\phi}\partial^\mu\widetilde{\phi}\frac{1}{R^2}$$

e sob dualidade T, as teorias definidas em circunferências de raio R e $1/R$ seriam equivalentes.

mas a transformação gerada por (5.10) é canônica se, e somente se:

$$\Pi_{\Theta^\alpha} = \frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta \Theta^\alpha} = -2\partial_x \widetilde{\Theta}^\alpha \quad , \quad \Pi_{\widetilde{\Theta}^\alpha} = -\frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta \widetilde{\Theta}^\alpha} = -2\partial_x \Theta^\alpha \tag{5.11}$$

Os campos Θ e $\widetilde{\Theta}$ aparecem como variáveis cíclicas nas ações (5.3) e (5.6) e então usamos a função de Routh para efetuar a transformação de Legendre só na variável Θ. Os momentos relevantes aqui são [20]:

$$\Pi_{\Theta^\alpha} = 2Q_{\alpha\beta}\partial_t\Theta^\beta + \left(N_\alpha^+ + N_\alpha^-\right)$$
$$\Pi_{\widetilde{\Theta}^\alpha} = \left(Q^{-1}\right)_{\alpha\beta}\left[2\partial_t\widetilde{\Theta}^\beta + \left(N_\beta^+ - N_\beta^-\right)\right].$$

Expressando as velocidades $\partial_t\Theta^\beta$ e $\partial_t\widetilde{\Theta}^\beta$ em termos dos momentos Π_{Θ^α} e $\Pi_{\widetilde{\Theta}^\alpha}$, temos após um pouco de álgebra, que as funções de Routh $\mathcal{R}(\Theta, \Pi_\Theta) = \partial_t\Theta^\alpha \Pi_{\Theta^\alpha} - \mathcal{L}(\Theta, \varphi, Q)$ são dadas por:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\Theta, \Pi_\Theta) = & \frac{1}{4}\Pi_{\Theta^\alpha} Q^{\alpha\beta}\Pi_{\Theta^\beta} - \frac{1}{2}\Pi_{\Theta^\alpha} Q^{\alpha\beta}\left(N_\beta^+ + N_\beta^-\right) + \partial_x\Theta^\alpha Q_{\alpha\beta}\partial_x\Theta^\beta \\ & + \partial_x\Theta^\alpha\left(N_\alpha^+ - N_\alpha^-\right) + \frac{1}{4}\left(N_\alpha^+ + N_\alpha^-\right)Q^{\alpha\beta}\left(N_\beta^+ + N_\beta^-\right) - \mathcal{L}(\varphi)\end{aligned} \tag{5.12}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\widetilde{\Theta}, \Pi_{\widetilde{\Theta}}) = & \frac{1}{4}\Pi_{\widetilde{\Theta}^\alpha}\left(Q^{-1}\right)^{\alpha\beta}\Pi_{\widetilde{\Theta}^\beta} - \frac{1}{2}\Pi_{\widetilde{\Theta}_\alpha}\left(N_\alpha^+ - N_\alpha^-\right) + \partial_x\widetilde{\Theta}^\alpha\left(Q^{-1}\right)_{\alpha\beta}\partial_x\widetilde{\Theta}^\beta \\ & + \partial_x\widetilde{\Theta}_\alpha Q^{\alpha\beta}\left(N_\beta^+ + N_\beta^-\right) + \frac{1}{4}\left(N_\alpha^+ + N_\alpha^-\right)Q^{\alpha\beta}\left(N_\beta^+ + N_\beta^-\right) - \mathcal{L}(\varphi),\end{aligned} \tag{5.13}$$

as quais coincidem precisamente sob a transformação (5.11) que preserva as Hamiltonianas. É dizer que a dualidade T é gerada pela função (5.10) e portanto as Lagrangianas (5.3) e (5.6) são *fisicamente equivalentes*.

Agora vejamos o efeito da dualidade nas cargas conservadas à simetria global $U(1)^{\otimes d}$ em N e $\widetilde{N}$. As d correntes conservadas segundo o teorema de Noether são $J_\alpha^\mu = -\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Theta^\alpha)}\right]$ onde $\frac{\delta\Theta^\beta}{\delta\rho^\alpha} = \delta_\alpha^\beta$, e de (5.1) recuperando o fator -$\frac{k}{4\pi}$, obtemos:

$$[J_\alpha^\mu]_{Noe} = \frac{k}{4\pi}\left[\left(\theta^{\mu\nu}Q_{\alpha\beta} + \theta^{\nu\mu}Q_{\beta\alpha}\right)\partial_\nu\Theta^\beta + \left(\theta^{\mu\nu}Q_{\alpha m} + \theta^{\nu\mu}Q_{m\alpha}\right)\partial_\nu\varphi^m\right]$$
$$\left[\widetilde{J}_\alpha^\mu\right]_{Noe} = \frac{k}{4\pi}\left[\left(\theta^{\mu\nu}\widetilde{Q}_{\alpha\beta} + \theta^{\nu\mu}\widetilde{Q}_{\beta\alpha}\right)\partial_\nu\widetilde{\Theta}^\beta + \left(\theta^{\mu\nu}\widetilde{Q}_{\alpha m} + \theta^{\nu\mu}\widetilde{Q}_{m\alpha}\right)\partial_\nu\varphi^m\right]$$

onde $\theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu}$. As correntes topológicas dos campos Θ e $\widetilde{\Theta}$ são respectivamente definidas por:

$$[J_\alpha^\mu]_{Top} \equiv \frac{k}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\Theta_\alpha$$
$$\left[\widetilde{J}_\alpha^\mu\right]_{Top} \equiv \frac{k}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\widetilde{\Theta}_\alpha$$

e levando em conta que $\left[J_\alpha^0\right]_{Noe} = \Pi_{\Theta^\alpha} = \frac{k}{2\pi}\epsilon^{01}\partial_1\widetilde{\Theta}_\alpha = \left[\widetilde{J}_\alpha^0\right]_{Top}$, vemos que o efeito da dualidade nos sistemas integráveis definidos pelos modelos Toda, e o *intercâmbio* das correntes de Noether e Topológicas de (5.2) e (5.7):

$$T : \left([J_\alpha^\mu]_{Noe}, [J_\alpha^\mu]_{Top}\right) \rightarrow \left(\left[\widetilde{J}_\alpha^\mu\right]_{Top}, \left[\widetilde{J}_\alpha^\mu\right]_{Noe}\right)$$

Finalmente, o efeito sobre as cargas de Noether e topológicas $Q_\alpha^N = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[J_\alpha^0\right]_{Noe}$, $Q_\alpha^T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\partial_x\Theta_\alpha$ se reduz ao simples *intercâmbio* entre elas:

$$T: \ (Q_\alpha^N, Q_\alpha^T) \rightarrow (\widetilde{Q}_\alpha^T, \widetilde{Q}_\alpha^N) \tag{5.14}$$

A dualidade introduzida é valida para os modelos Toda no subgrupo G_0 definidos pela ação (4.25). Porém, é interessante ver se o mesmo tipo de dualidade T é valida nos modelos Toda singulares definidos no coset G_0/G_0^0 pela ação (4.31). Esse é o objetivo da seguinte seção.

5.2 Dualidade Axial-Vetorial.

Para começar, consideremos a ação (4.29):

$$\begin{aligned} S_{G_0/G_0^0}\left[\gamma, A_0, \overline{A}_0\right] &= S_{WZW}\left[\gamma\right] + \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle \epsilon_+\gamma\epsilon_-\gamma^{-1}\right\rangle \\ &- \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle \eta A_0(\partial_+\gamma\gamma^{-1}) + \overline{A}_0(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) + \eta A_0\gamma\overline{A}_0\gamma^{-1} + A_0^0\overline{A}_0^0\right\rangle, \end{aligned} \tag{5.15}$$

que é a ação que surge ao demandar invariância sob a transformação $\gamma \rightarrow \gamma_0\left(\gamma_-\gamma\gamma_+\right)\gamma_0^{\pm 1}$. Vamos assumir que o subgrupo G_0^0 possui pelo menos um fator $U(1)$, que em geral pertence ao subgrupo $G_0^{0,0}$, mas vamos decompor a álgebra $\mathfrak{g}_0^0$ como $\mathfrak{g}_0^0 = \widehat{\mathfrak{g}}_0^0 \oplus \mathfrak{u}(1)$, simplesmente para isolar a sua contribuição. Nesse caso, os campos compensadores $A_0 \in \mathfrak{g}_0^{0,0} \oplus \mathfrak{g}_0^{0,-}$ e $\overline{A}_0 \in \mathfrak{g}_0^{0,0} \oplus \mathfrak{g}_0^{0,+}$ são escritos como:

$$\begin{aligned} A_0 &= \widehat{A}_- + aT_0 \\ \overline{A}_0 &= \widehat{A}_+ + \overline{a}T_0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

onde T_0 é o gerador associado a $\mathfrak{u}(1)$ com a normalização $\langle T_0T_0\rangle = 1$, $\left\langle T_0\widehat{\mathfrak{g}}_0^0\right\rangle = 0$ e a , $\overline{a}$ são funções arbitrarias. Vamos escrever o elemento $\gamma \in G_0$ de uma maneira geral como:

$$\gamma = \gamma(\beta)\widehat{\gamma}\gamma(\lambda),$$

onde $\gamma(\beta) \equiv \exp(\beta T_0)$ e $\gamma(\lambda) \equiv \exp(\lambda T_0)$ são os fatores $U(1)$ que em principio serão calibrados axial ou vetorialmente. A transformação de gauge $\gamma \rightarrow \exp(\rho T_0)\gamma\exp(\eta\rho T_0)$, implica as seguintes leis de transformação para os campos β, λ, a e $\overline{a}$ (Cf(4.30)):

$$\begin{aligned} \beta' &= \beta + \rho \\ \lambda' &= \lambda + \eta\rho \\ a' &= a - \eta\partial_-\rho \\ \overline{a}' &= \overline{a} - \eta\partial_+\rho. \end{aligned}$$

Definamos agora, os seguintes campos invariantes de gauge:

$$\phi_\eta \equiv \beta - \eta\lambda \tag{5.17}$$

$$\widetilde{a}_\eta \equiv a + \eta\partial_-\beta \tag{5.18}$$

$$\widetilde{\overline{a}} \equiv \overline{a} + \partial_+\lambda, \tag{5.19}$$

usando a identidade de Polyakov-Wiegman e os traços $\langle T_0 T_0\rangle = 1$ e $\langle T_0 \widehat{\mathfrak{g}}_0^0\rangle = 0$, obtemos após um pouco de algebra[2], a seguinte expressão para a ação (5.15):

$$S_{G_0/G_0^0}\left[\gamma(\beta)\widehat{\gamma}\gamma(\lambda), A_0, \overline{A}_0\right] = \frac{k}{4\pi}\int_M d^2x \left\{\partial_+\phi_\eta\partial_-\phi_\eta - 2\eta\widetilde{a}_\eta\partial_+\phi_\eta + 2\eta\widetilde{\overline{a}}\partial_-\phi_\eta\right\} + \Delta S(\widetilde{a}, \widetilde{\overline{a}}, \widehat{\gamma}, \widehat{A}_\pm)_\eta, \tag{5.20}$$

onde:

$$\Delta S(\widetilde{a}, \widetilde{\overline{a}}, \widehat{\gamma}, \widehat{A}_\pm)_\eta = S(\widehat{\gamma}, \widehat{A}_\pm)_\eta - \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{\overline{a}}\widetilde{a}_\eta(1 + \eta R(\widehat{\gamma})) + \widetilde{\overline{a}}\left(J_-(\widehat{\gamma}) + \eta\left\langle \widehat{A}_-\widehat{\gamma}T_0\widehat{\gamma}^{-1}\right\rangle\right) + \\ +\eta\widetilde{a}_\eta\left(J_+(\widehat{\gamma}) + \left\langle \widehat{A}_+\widehat{\gamma}^{-1}T_0\widehat{\gamma}\right\rangle\right) \end{array} \right\},$$

com:

$$S(\widehat{\gamma}, \widehat{A}_\pm)_\eta = S_{WZNW}\left[\widehat{\gamma}\right] - \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\{\eta\left\langle \widehat{A}_-\partial_+\widehat{\gamma}\widehat{\gamma}^{-1}\right\rangle + \left\langle \widehat{A}_+\widehat{\gamma}^{-1}\partial_-\widehat{\gamma}\right\rangle + \eta\left\langle \widehat{A}_-\widehat{\gamma}\widehat{A}_+\widehat{\gamma}^{-1}\right\rangle\right\} +$$
$$+ \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle \epsilon_+\widehat{\gamma}\epsilon_-\widehat{\gamma}^{-1}\right\rangle,$$

e as projeções:

$$J_-(\widehat{\gamma}) \equiv \left\langle T_0\widehat{\gamma}^{-1}\partial_-\widehat{\gamma}\right\rangle$$
$$J_+(\widehat{\gamma}) \equiv \left\langle T_0\partial_+\widehat{\gamma}\widehat{\gamma}^{-1}\right\rangle$$
$$R(\widehat{\gamma}) \equiv \left\langle T_0\widehat{\gamma}T_0\widehat{\gamma}^{-1}\right\rangle.$$

A razão dessa decomposição é a seguinte: Notemos que a ação (5.15) é invariante sob a transformação $U(1)$ global:

$$\gamma \to \gamma' = \exp(\alpha T_0)\gamma\exp(-\eta\alpha T_0), \tag{5.21}$$

com $\alpha = cons$, o que implica que (5.18) e (5.19) são invariantes mas o campo (5.17) transforma como:

$$\phi_\eta \to \phi'_\eta = \phi_\eta + 2\alpha,$$

e é, portanto, uma variável *adaptada* para a transformação (5.21) que agora resulta ser uma *isometria* da ação (5.20). Similar a como foi feito na seção (5.1), vamos calcular a função de Routh para a variável cíclica ϕ. Comecemos com a calibração *Axial*. Fixando $\eta = 1$, o momento relevante aqui é:

$$\Pi_\phi = \frac{k}{2\pi}\left[\partial_t\phi + (\widetilde{\overline{a}} - \widetilde{a}_{+1})\right],$$

e a função de Routh (Cf(5.12)) vem dada por:

$$\mathcal{R}(\phi, \Pi_\phi) = \frac{\pi}{k}\Pi_\phi^2 + \frac{k}{4\pi}\left(\partial_x\phi\right)^2 - \Pi_\phi(\widetilde{\overline{a}} - \widetilde{a}_{+1}) + \frac{k}{2\pi}(\partial_x\phi)(\widetilde{\overline{a}} + \widetilde{a}_{+1}) + \frac{k}{4\pi}(\widetilde{\overline{a}} - \widetilde{a}_{+1})^2 - \Delta\mathcal{L},$$

[2]Durante o calculo, temos desconsiderado o termo de fronteira:

$$BT = -\eta\frac{k}{4\pi}\int_M d^2x\left\{\partial_-\beta\partial_+\lambda - \partial_+\beta\partial_-\lambda\right\},$$

dado que sempre assumimos que a variedade M possui uma topologia trivial.

onde temos definido $\Delta S \equiv \int_M d^2x \Delta\mathcal{L}$. Considerando a função geratriz (Cf(5.10)):

$$\mathcal{F} = \frac{k}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\phi^D \partial_x \phi - \phi \partial_x \phi^D\right),$$

obtemos as seguintes transformações canônicas:

$$\Pi_\phi = -\frac{k}{2\pi}\partial_x \phi^D \quad , \quad \Pi_{\phi^D} = -\frac{k}{2\pi}\partial_x \phi,$$

e a função de Routh dual:

$$\mathcal{R}^D(\phi^D, \Pi_{\phi^D}) = \frac{\pi}{k}\Pi^2_{\phi^D} + \frac{k}{4\pi}\left(\partial_x \phi^D\right)^2 - \Pi_{\phi^D}(\widetilde{\overline{a}} + \widetilde{a}_{+1}) + \frac{k}{2\pi}(\partial_x\phi^D)(\widetilde{\overline{a}} - \widetilde{a}_{+1}) + \frac{k}{4\pi}(\widetilde{\overline{a}} - \widetilde{a}_{+1})^2 - \Delta\mathcal{L},$$

da qual obtemos a ação[3]:

$$S^D_{G_0/G_0^0}\left[\phi^D, A_0, \overline{A}_0\right] = \frac{k}{4\pi}\int_M d^2x \left\{\partial_+\phi^D\partial_-\phi^D - 2\widetilde{a}_{+1}\partial_+\phi^D - 2\widetilde{\overline{a}}\partial_-\phi^D + 4\widetilde{a}_{+1}\widetilde{\overline{a}}\right\} + \Delta S(\widetilde{a}, \widetilde{\overline{a}}, \widehat{\gamma}, \widehat{A}_\pm)_{+1}. \tag{5.22}$$

A idéia agora é ligar a ação calibrada Axialmente com a ação calibrada Vetorialmente mediante uma transformação canônica. Para isso basta provar que a ação dual (5.22) se reduz a ação (5.20) com $\eta = -1$ após a escolha do campo dual ϕ^D e sob alguma mudança nos campos auxiliares. Então, se fazemos $A_0 \longrightarrow -A_0$, que equivale a fixar $\eta = -1$ em (5.15), ou equivalentemente:

$$\left(\widehat{A}_-, a\right) \rightarrow \left(-\widehat{A}_-, -a\right),$$

vemos de (5.18), a lei de transformação:

$$\widetilde{a}_{+1} \longrightarrow -\widetilde{a}_{-1}.$$

Agora tomamos $\eta = -1$ em (5.17) e fazemos $\phi^D = \phi_{-1}$. Dessa maneira obtemos:

$$S^D_{G_0/G_0^0}\left[\phi_{-1}, -A_0, \overline{A}_0\right] = \frac{k}{4\pi}\int_M d^2x \left\{\partial_+\phi_{-1}\partial_-\phi_{-1} + 2\widetilde{a}_{-1}\partial_+\phi_{-1} - 2\widetilde{\overline{a}}\partial_-\phi_{-1}\right\} + \Delta S(\widetilde{a}, \widetilde{\overline{a}}, \widehat{\gamma}, \widehat{A}_\pm)_{-1},$$

que é exatamente (5.20) com $\eta = -1$ e como conseqüência, obtemos:

$$S^D_{G_0/G_0^0}\left[\phi_{-1}, -A_0, \overline{A}_0\right] = S_{G_0/G_0^0}\left[\gamma(\beta)\widehat{\gamma}\gamma(-\lambda), -A_0, \overline{A}_0\right],$$

o que prova que a ação dual da ação axial é a ação vetorial [18],[22]:

$$S^{Ax}_{G_0/G_0^0}\left[\gamma(\beta)\widehat{\gamma}\gamma(\lambda), A_0, \overline{A}_0\right] \overset{Dual}{\longrightarrow} S^{Ax}_{G_0/G_0^0}\left[\gamma(\beta)\widehat{\gamma}\gamma(-\lambda), -A_0, \overline{A}_0\right] = S^{Vec}_{G_0/G_0^0}\left[\gamma(\beta)\widehat{\gamma}\gamma(\lambda), A_0, \overline{A}_0\right].$$

Podemos enxergar a origem da dualidade Axial-Vetorial como o efeito da reflexão de Weyl W : $\mathfrak{g}_0^{0,0} \longrightarrow \mathfrak{g}_0^{0,0}$ quando $\mathfrak{g}_0^{0,0}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_0$:

$$W_{T^0}(u) = u - 2\frac{\langle uT^0\rangle}{\langle T^0T^0\rangle}T^0 \quad , \quad u \in \mathfrak{g}_0^{0,0}, \tag{5.23}$$

que no caso $A_0^0 \in \mathfrak{g}_0^{0,0}$ implica a reflexão $A_0^0 \longrightarrow -A_0^0$ que da origem á dualidade das ações (5.15) para $\eta = 1\pm$. É dizer que em principio, cada reflexão do grupo de Weyl W produz uma transformação de dualidade na sua ação correspondente [22].

[3] Na ultima passagem temos efetuado uma mudança trivial na normalização do campo dual $\phi^D \longrightarrow -\phi^D$.

5.3 Construção explicita de Modelos.

5.3.1 Lund-Regge: Modelo Bosônico no coset SL(2,$\mathbb{R}$)/U(1).

O modelo de Lund-Regge [29] é particularmente interessante por ser o modelo mais simples que exibe varias das características não triviais dos modelos de Toda. Esse modelo é um *modelo de Toda singular Afim* onde a invariância conforme tem sido *quebrada* ao eliminar um dos geradores da álgebra de Virasoro associada à álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{g}}$ que é responsável pela invariância conforme do modelo. Para ser mais explícitos, vamos escolher $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}$ e consideremos a seguinte serie de dados algébricos (Cf(3.55)) que definirão o modelo:

$$\left(\widehat{Q}, \widehat{\epsilon}_{\pm}, \widehat{\mathfrak{g}}_0, \widehat{\mathfrak{g}}_0^0\right),$$

a saber: $\widehat{Q} \equiv \widehat{Q}_{HOM} = d$ (Cf(7.7)) é a gradação homogênea, $\widehat{\epsilon}_{\pm} \equiv \mu_{\pm} h_{\pm 1} = \mu_{\pm}\lambda^{\pm 1} h$ define o tipo da interação do modelo onde $\mu_{\pm}$ são constantes arbitrarias e $\lambda^{\pm 1}$ são os parâmetros complexos da álgebra loop $\widehat{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}$, $\widehat{\mathfrak{g}}_0 = \{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}), k, d\}$ é o subespaço de grau zero respeito $\widehat{Q}$ e $\mathfrak{g}_0^0 = \mathfrak{u}(1) \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{h\}$ é o grupo centralizador simultâneo de $\widehat{\epsilon}_{\pm}$ (Cf(7.6)) e (Cf(3.50)) que define os vínculos a serem implementados na ação. O campo de Toda $\Phi = M \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_0/\mathfrak{g}_0^0$ toma valores em $\widehat{\mathfrak{g}}_0/\mathfrak{g}_0^0 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})/\mathfrak{u}(1) +$ $k + d$ e portanto o modelo (4.31) esta definido no coset SL(2,$\mathbb{R}$)/U(1)$\cdot$ $K \cdot D$. Esse modelo tem uma simetria de Noether $U(1)$ global e os sólitons são elétricamente carregados [21]. A álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ é gerada pelos elementos $\{h, E_+, E_-\}$, satisfaz as relações de comutação (Cf(2.63)):

$$[h, E_{\pm}] = \pm 2E_{\pm}$$
$$[E_+, E_-] = h,$$

somente possui uma raiz simples $\alpha^2 = 1$ com $K = 2$ e portanto o diagrama de dynkin mais simples:

$$\underset{\alpha}{\bigcirc}$$

Vamos parametrizar $\gamma : M \rightarrow SL(2,\mathbb{R}) \cdot K \cdot D$ usando a terceira forma da decomposição de Gauss (2.53) da seguinte maneira:

$$\gamma = \exp(\widetilde{\chi} E_-) \exp(\phi h + \eta d + \zeta k) \exp(\widetilde{\psi} E_+)$$

Nos não estamos interessados na invariância conforme do modelo e vamos fixar $\eta \rightarrow 0$. O único campo que se acopla com η é ζ e podem ser desconsiderado também, porém devemos notar que ζ não é nulo. Na verdade, ele é o responsável pela existência de sólitons. Assim teremos $\gamma : M \rightarrow SL(2,\mathbb{R})$ com:

$$\gamma = \exp(\widetilde{\chi} E_-) \exp(\phi h) \exp(\widetilde{\psi} E_+) \in SL(2,\mathbb{R}).$$

Devemos manipular este elemento de forma tal que possamos fatorar o subgrupo $U(1)$ correspondente ao campo ϕ e implementar as transformações de Gauge (4.30) para efetuar a redução $SL(2,\mathbb{R}) \rightarrow SL(2,\mathbb{R})/U(1)$. Porém, a fatorização de γ pode ser de maneira axial ou vetorial. Vamos começar pela calibração *Axial* que é da forma $\gamma \rightarrow (\gamma_0)\, \Psi\, (\gamma_0)$. Eliminamos o campo ϕ de γ fazendo

$\exp(\phi h) = \exp(\frac{\phi}{2}h)\exp(\frac{\phi}{2}h)$ e inserindo os mesmo exponenciais com sinal contrario para usar a relação de Baker-Hausdorff $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + ...$ e as relações de comutação para obter:

$$\gamma = \exp(\frac{\phi}{2}h)\left[\exp(\chi E_-)\exp(\psi E_+)\right]\exp(\frac{\phi}{2}h)$$

onde definimos os campos dinâmicos:

$$\chi \equiv \widetilde{\chi}\exp\frac{\phi}{2}\ ,\ \ \psi \equiv \widetilde{\psi}\exp\frac{\phi}{2},$$

e vemos claramente que $\gamma_0 = \exp(\frac{\phi}{2}h)$. O campo físico Ψ é dado por:

$$\Psi = \exp(\chi E_-)\exp(\psi E_+) \in SL(2, \mathbb{R})/U(1),$$

e efetivamente temos que $\dim\left[SL(2, \mathbb{R})/U(1)\right] = 2$. Os campos compensadores A_0^0, $\overline{A}_0^0 \in u(1)$ são abelianos e vem parametrizados por $A_0^0 = ah$ e $\overline{A}_0^0 = \overline{a}h$, onde a e $\overline{a}$ são funções. Tomando $\eta = 1$ e substituindo A_0^0, $\overline{A}_0^0$ em (4.31), obtemos a ação:

$$\begin{aligned} S_{SL(2,\mathbb{R})/U(1)}\left[\Psi, a, \overline{a}\right] &= S_{WZW}\left[\Psi\right] + \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\left\langle\epsilon_+\Psi\epsilon_-\Psi^{-1}\right\rangle \\ &- \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\left\langle ah(\partial_+\Psi\Psi^{-1}) + \overline{a}h(\Psi^{-1}\partial_-\Psi) + \overline{a}ah\Psi h\Psi^{-1} + \overline{a}ahh\right\rangle, \end{aligned} \tag{5.24}$$

As expressões das correntes $J_- = \Psi^{-1}\partial_-\Psi$ e $J_+ = \partial_+\Psi\Psi^{-1}$ são:

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}\partial_-\Psi &= \partial_-\chi E_- - \psi\partial_-\chi h + \left(\partial_-\psi - \psi^2\partial_-\chi\right)E_+ \\ \partial_+\Psi\Psi^{-1} &= \left(\partial_+\chi - \chi^2\partial_+\psi\right)E_- - \chi\partial_+\psi h + \partial_+\psi E_+, \end{aligned}$$

e o traço satisfaz $\langle E_+E_-\rangle = 1$, $\langle E_\pm h\rangle = 0$, onde normalizamos $\langle hh\rangle = 1$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \left\langle ah(\partial_+\Psi\Psi^{-1})\right\rangle &= (-\chi\partial_+\psi)\,a \\ \left\langle\overline{a}h(\Psi^{-1}\partial_-\Psi)\right\rangle &= \overline{a}\,(-\psi\partial_-\chi) \\ \left\langle\overline{a}ah\Psi h\Psi^{-1}\right\rangle &= \overline{a}\,(1 + 2\chi\psi)\,a \\ \left\langle\epsilon_+\Psi\epsilon_-\Psi^{-1}\right\rangle &= \mu_+\mu_-\,(1 + 2\chi\psi) \to \mu_+\mu_-\ \chi\psi\ . \end{aligned} \tag{5.25}$$

Por outro lado, a identidade de Polyakov-Wiegman:

$$S_{WZW}\left[fg\right] = S_{WZW}\left[f\right] + S_{WZW}\left[g\right] + -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\left\langle f^{-1}\partial_- f\partial_+ g g^{-1}\right\rangle,$$

com $f = \exp(\chi E_-)$ e $g = \exp(\psi E_+)$ é simplesmente:

$$S_{WZW}\left[\Psi\right] = -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\partial_-\chi\partial_+\psi, \tag{5.26}$$

e não temos contribuição alguma do termo de Wess-Zumino (4.34) e portanto nenhuma torçamo será associada à variedade N. Consideremos o segundo termo de (5.24):

$$S(\overline{a},a) = -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle ah(\partial_+\Psi\Psi^{-1}) + \overline{a}h(\Psi^{-1}\partial_-\Psi) + \overline{a}ah\Psi h\Psi^{-1} + \overline{a}ahh\right\rangle,$$

usando os traços encontrados anteriormente, temos que:

$$S(\overline{a},a) = -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\overline{a}\Delta a + \overline{a}N + \overline{N}a,$$

onde $\Delta = (1+\chi\psi)$, $N = (-\psi\partial_-\chi)$ e $\overline{N} = (-\chi\partial_+\psi)$. Escrevendo:

$$\overline{a}Ma + \overline{a}N + \overline{N}a = \left(\overline{a} + \overline{N}M^{-1}\right) M \left(a + M^{-1}N\right) - \overline{N}M^{-1}N,$$

e integrando os campos auxiliares a e $\overline{a}$ no funcional:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\overline{a}\mathcal{D}a \exp S(\overline{a},a)$$

obtemos:

$$S = \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \frac{\partial_-\chi\,(\chi\psi)\,\partial_+\psi}{\Delta}. \tag{5.27}$$

Notemos que é exatamente na integração dos campos auxiliares que os vínculos associados ao subgrupo $U(1)$ são implementados na ação e é aqui onde aparecem as singularidades na Lagrangiana que nesse caso estão materializadas no termo:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{1+\chi\psi},$$

essa é a razão do nome Toda singular. Somando (5.26), (5.27) e (5.25) obtemos a ação do modelo *Lund-Regge:*

$$S^{Toda}_{SL(2,\mathbb{R})/U(1)}[\chi,\psi] = -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\left\{\frac{\partial_-\chi\partial_+\psi}{\Delta} - V\right\}, \tag{5.28}$$

onde $V = \mu^2\chi\psi$ com $\mu_+ = \mu_- = \mu$. A densidade *Lagrangiana Axial* do modelo integrável é:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Ax} &= \frac{\partial_-\chi\partial_+\psi}{(1+\chi\psi)} - \mu^2\chi\psi \\ &= \eta^{\mu\nu}\frac{\partial_\mu\chi\partial_\nu\psi}{(1+\chi\psi)} - \mu^2\chi\psi,\end{aligned}$$

salvo derivadas totais, e possui uma simetria $U(1)$ global dada por $\chi \to e^{\alpha}\chi$ e $\psi \to e^{-\alpha}\psi$ que leva à conservação da corrente e da carga elétrica de Noether:

$$\begin{aligned}J^N_\mu &= \frac{1}{\Delta}\left(\psi\partial_\mu\chi - \chi\partial_\mu\psi\right) \\ Q^N &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{1}{\Delta}\left(\psi\partial_t\chi - \chi\partial_t\psi\right).\end{aligned} \tag{5.29}$$

Os campos χ e ψ são arbitrarios mas reais, então se efetuamos a seguinte transformação de variáveis:

$$\begin{aligned}\chi &= e^{\Theta}\sinh\varphi \\ \psi &= e^{-\Theta}\sinh\varphi,\end{aligned}$$

obtemos uma representação mais conhecida:

$$\mathcal{L}_{Ax} = \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \tanh^2\varphi\partial_\mu\Theta\partial_\nu\Theta\right) - \mu^2\sinh^2\varphi, \tag{5.30}$$

no sentido que se consideramos $\Theta = cons$, recuperamos o modelo de Sinh-Gordon $\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \mu^2\sinh^2\varphi$, ou a ação para uma corda bosônica propagandose na métrica de um buraco negro em duas dimensões [13] quando $\mu \to 0$. Por outro lado, o campo Θ é uma variável *adaptada* à transformação global $U(1)$ e agora é uma *isometria* $\Theta \to \Theta + \alpha$, $\alpha = cons$ da Lagrangiana (5.30).

Comparando (5.30) com (5.1) e (5.3), temos:

$$S^{Ax}_{SL(2,\mathbb{R})/U(1)}(\Theta,\varphi,G,V) = -\frac{k}{4\pi}\int_M d^2x\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j G_{ij}(\phi) \text{ -}V(\phi)\right),$$

onde:

$$[G] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\tanh^2\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad V(\varphi) = \mu^2\sinh^2\varphi, \tag{5.31}$$

com intervalo em N dado por $ds^2 = (d\varphi)^2 - \tanh^2\varphi\,(d\Theta)^2$. De (5.7) e (5.9) obtemos, imediatamente, a ação T-dual:

$$S^{Dual}_{SL(2,\mathbb{R})/U(1)}(\widetilde{\Theta},\varphi,\widetilde{G},V) = -\frac{k}{4\pi}\int_M d^2x\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j\widetilde{G}_{ij}(\phi) \text{ -}V(\phi)\right)$$

onde:

$$\left[\widetilde{G}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\coth^2\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad V(\varphi) = \mu^2\sinh^2\varphi, \tag{5.32}$$

com intervalo em $\widetilde{N}$ dado por $ds^2 = (d\varphi)^2 - \coth^2\varphi\,(d\Theta)^2$. Notemos que a singularidade numa das ações desaparece na dual. As duas ações estão canônicamente relacionadas como conseqüência de (5.11).

Consideremos agora a calibração *Vetorial* que é da forma $\gamma \to (\gamma_0)\,\Psi\left(\gamma_0^{-1}\right)$. Eliminamos o campo $\widetilde{\chi}$ e $\widetilde{\psi}$ em favor de um campo só (t), ao inserir a identidade $Id_G = \exp(\frac{u}{2}h)\exp(\frac{u}{2}h)$ com u arbitrário. De maneira similar a como foi feito antes obtemos:

$$\gamma = \exp(\frac{u}{2}h)\left[\exp(-tE_-)\exp(\phi h)\exp(tE_+)\right]\exp(-\frac{u}{2}h)$$

onde definimos o campo dinâmico t:

$$-t \equiv \widetilde{\chi}\exp\left(-\frac{u}{2}\right) \quad , \quad t \equiv \widetilde{\psi}\exp\left(\frac{u}{2}\right),$$

e vemos claramente que $\gamma_0 = \exp(\frac{u}{2}h)$. O campo físico Ψ é dado por:

$$\Psi = \exp(-tE_-)\exp(\phi h)\exp(tE_+) \in SL(2,\mathbb{R})/U(1),$$

e repetindo o análise anterior onde agora $\eta = -1$ em (4.31), chegamos à densidade *Lagrangiana Vetorial* do modelo integrável:

$$\mathcal{L}_{Vec} = \partial_+\phi\partial_-\phi\left(1 + \frac{\exp(-2\phi)}{t^2}\right) + \partial_+\phi\partial_-\ln t + \partial_-\phi\partial_+\ln t - \mu^2\left(-t^2\exp 2\phi\right).$$

Se efetuamos as transformações de coordenadas $A = \exp\phi$ e $B = A^{-1}(1 - t^2 \exp 2\phi)$ obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Vec} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial_- A\partial_+ B + \partial_+ A\partial_- B}{(1-AB)} - \mu^2 (AB-1) \\ &= -\eta^{\mu\nu}\frac{\partial_\mu A\partial_\nu B}{(1-AB)} - \mu^2 (AB-1)\end{aligned} \tag{5.33}$$

e se identificamos $A = e^{\widetilde{\Theta}} \cosh\varphi$ e $B = e^{-\widetilde{\Theta}} \cosh\varphi$, obtemos:

$$\mathcal{L}_{Vec} = \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \coth^2\varphi\partial_\mu\widetilde{\Theta}\partial_\nu\widetilde{\Theta}\right) - \mu^2\sinh^2\varphi,$$

que é a Lagrangiana T-dual de (5.30) e portanto:

$$S^{Dual}_{SL(2,\mathbb{R})/U(1)}(\widetilde{\Theta},\varphi,\widetilde{G},V) = S^{Vec}_{SL(2,\mathbb{R})/U(1)}(\widetilde{\Theta},\varphi,\widetilde{G},V).$$

Nesse exemplo podemos ver como a *única* reflexão de Weyl da álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ no espaço de raízes (Cf(2.42)):

$$S_\alpha(\alpha) = \alpha - 2\frac{(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = -\alpha$$

$$\longrightarrow \alpha \quad \overset{Weyl}{\longrightarrow} \quad \text{-}\alpha \longleftarrow$$

implica, dado o isomorfismo fornecido por (2.40) entre a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0^0 = \{h\}$ e o espaço de raízes $\mathfrak{h}^* = \{\alpha\}$, a correspondente reflexão (5.23) em $\mathfrak{h}$:

$$W_h(h) = h - 2\frac{\langle hh\rangle}{\langle hh\rangle}h = -h,$$

que gera a reflexão no campo compensador $A_0^0 = ah \to -ah = -A_0^0$, que é a origem da dualidade axial-vetorial na ação (5.24), e portanto entre as geometrias (5.31) e (5.32) do modelo sigma não linear associado ao modelo integrável de Lund-Regge.

Para terminar, e possível provar [21] após uso do metodo Dressing, que os sólitons associados ao modelo de Lung-Regge não possuim carga topológica e portanto, o efeito da dualidade nas cargas, se reduz a ter (Cf(5.14)):

$$T:\ (Q^N,0)^{Ax} \to (0,\widetilde{Q}^N)^{Vec},$$

onde Q^N vem dada por (5.29) e $\widetilde{Q}^N$ pela carga construida com a Lagragiana (5.33).

5.3.2 Extensão com Férmions no coset $\mathrm{Sl}(2|1)/\mathfrak{g}_0^0$.

A extensão com férmions do modelo de Lund-Regge passa pela escolha de uma superálgebra cuja parte bosônica possua geradores que reproduzam a álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ quando tomamos o espaço de grau zero na gradação homogênea. A álgebra que vamos escolher é a superálgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{sl}(2\mid 1)}$.

Similar ao caso bosônico, temos os seguintes dados algébricos:

$$\left(\widehat{Q},\widehat{\epsilon}_\pm,\widehat{\mathfrak{g}}_0,\widehat{\mathfrak{g}}_0^0\right). \tag{5.34}$$

Primeiro, definimos $\widehat{Q} \equiv \widehat{Q}_{HOM} = d$ como a gradação homogênea de onde encontramos o subespaço de grau zero $\widehat{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}^s = \mathfrak{sl}(2 \mid 1)$ que é uma superálgebra de Lie a qual possui um sistema de raízes com uma raiz fermiônica e uma bosônica:

$$\otimes - - - - \bigcirc \ .$$

As regras de comutação estão dadas no apêndice.

A partir do subespaço de grau zero $\widehat{\mathfrak{g}}_0 = (\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{u}(1)) \oplus \mathfrak{g}_F$ onde temos:

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \left\{ E_{\pm 2\rho}, \frac{(\rho+\epsilon)}{2} \cdot H \right\}, \quad \mathfrak{u}(1) = \left\{ \frac{(\rho-\epsilon)}{2} \cdot H \right\}$$

escolhemos os elementos de grau um que definiram a interação como:

$$\widehat{\epsilon}_\pm \equiv \mu_\pm h_{\pm 1} = \mu_\pm \lambda^{\pm 1} \frac{(\rho+\epsilon)}{2} \cdot H,$$

dado que no limite $\epsilon = 0$, reproduzem a forma da interação do modelo de Lund-Regge. Das regras de comutação do apêndice, temos que os geradores que comutam com $\widehat{\epsilon}_\pm$ são:

$$\mathfrak{g}_0^0 = \left\{ E_{\pm(\rho+\epsilon)}, \frac{(\rho \pm \epsilon)}{2} \cdot H \right\},$$

e formam uma àlgebra. O segundo operador de gradação é $Q' = \frac{(\rho-\epsilon)}{2} \cdot H$ e portanto temos:

$$\mathfrak{g}_0^{0,-} = \left\{ E_{-(\rho+\epsilon)} \right\}, \mathfrak{g}_0^{0,0} = \left\{ \frac{(\rho \pm \epsilon)}{2} \cdot H \right\} \text{ e } \mathfrak{g}_0^{0,+} = \left\{ E_{(\rho+\epsilon)} \right\}.$$

O campo $\gamma : M \to SL(2 \mid 1)$ fica então parametrizado como segue:

$$\gamma = e^{(\widetilde{\chi} E_{-2\rho})} e^{(\widetilde{f}_1 E_{-(\rho+\epsilon)})} e^{(\widetilde{f}_2 E_{(-\rho+\epsilon)})} e^{(\phi_1 \frac{(\rho+\epsilon)}{2} H + \phi_2 \frac{(\rho-\epsilon)}{2} H)} e^{(\widetilde{g}_2 E_{(\rho-\epsilon)})} e^{(\widetilde{g}_1 E_{(\rho+\epsilon)})} e^{(\widetilde{\psi} E_+)},$$

e de maneira similar a como se fez para o caso bosônico, temos o elemento Ψ na parametrização *axial*:

$$\Psi = \exp(\chi E_{-2\rho}) \exp(f_2) \exp(g_2) \exp(\psi E_{+2\rho}) \in SL(2 \mid 1)/G_0^0, \tag{5.35}$$

onde temos definido os campos:

$$\begin{aligned} \chi &= \widetilde{\chi} \exp\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) &&, \ \psi = \widetilde{\psi} \exp\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) \\ f_2 &= \widetilde{f}_2 \exp \frac{\phi_1}{2} &&, \ g_2 = \widetilde{g}_2 \exp \frac{\phi_1}{2} \\ f_1 &= \widetilde{f}_1 \exp \frac{\phi_2}{2} &&, \ g_1 = \widetilde{g}_1 \exp \frac{\phi_2}{2}, \end{aligned}$$

e identificado $\gamma_0 = \exp\left(\phi_1 \frac{(\rho+\epsilon)}{2} H + \phi_2 \frac{(\rho-\epsilon)}{2} H\right)$ e $\gamma_\pm = \exp(E_{\pm(\rho+\epsilon)})$ na decomposição $\gamma = (\gamma_0 \gamma_-) \, \Psi \, (\gamma_+ \gamma_0)$.

O resto do calculo é idêntico ao caso bosônico, com a diferença de que o traço $\langle ... \rangle$ é substituindo pelo supertraço $\langle\langle ... \rangle\rangle$.

Os campos compensadores $A_0 = A_0^0 + A_-^0 \in \mathfrak{g}_0^{0,0} \oplus \mathfrak{g}_0^{0,-}$ e $\overline{A}_0 = \overline{A}_0^0 + \overline{A}_+^0 \in \mathfrak{g}_0^{0,0} \oplus \mathfrak{g}_0^{0,+}$ estão parametrizados como segue:

$$A_0 = a_1 \frac{(\rho+\epsilon)}{2} H + a_2 \frac{(\rho-\epsilon)}{2} H + bE_{-(\rho+\epsilon)} \tag{5.36}$$

$$\overline{A}_0 = \overline{a}_1 \frac{(\rho+\epsilon)}{2} H + \overline{a}_2 \frac{(\rho-\epsilon)}{2} H + \overline{b}E_{-(\rho+\epsilon)}, \tag{5.37}$$

onde $a_1, \overline{a}_1 : M \to \mathbb{R}$ são campos *bosônicos* e $b, \overline{b}$ são campos de *grassmann*.

Agora devemos inserir Ψ , A_0 e $\overline{A}_0$ parametrizados por (5.35),(5.36) e (5.37) na ação:

$$\begin{aligned} S^{Ax}_{SL(2|2)/G_0^0}\left[\Psi, A_0, \overline{A}_0\right] &= S_{WZW}\left[\Psi\right] + \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle\left\langle \widehat{\epsilon}_+ \Psi \widehat{\epsilon}_- \Psi^{-1} \right\rangle\right\rangle \\ &- \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x \left\langle\left\langle A_0(\partial_+\Psi\Psi^{-1}) + \overline{A}_0(\Psi^{-1}\partial_-\Psi) + A_0\Psi\overline{A}_0\Psi^{-1} + A_0^0\overline{A}_0^0 \right\rangle\right\rangle, \end{aligned}$$

e integrar $a_1, \overline{a}_1, b$ e$\overline{b}$. Com essas parametrizações obtemos, após um pouco de álgebra:

$$L = \left\langle\left\langle A_0(\partial_+\Psi\Psi^{-1}) + \overline{A}_0(\Psi^{-1}\partial_-\Psi) + A_0\Psi\overline{A}_0\Psi^{-1} + A_0^0\overline{A}_0^0 \right\rangle\right\rangle = \overline{a}M_1 a + \overline{N}a + \overline{a}N + \overline{b}M_2 b + \overline{b}R + \overline{R}b,$$

onde:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} \chi\psi - g_2 f_2 & 2+\chi\psi \\ 2+\chi\psi & \chi\psi \end{pmatrix} \quad , \quad M_2 = -\left(1 + g_2 f_2\right) \\ \overline{N} &= \begin{pmatrix} \overline{b}_1 g_2 \chi - \chi\partial_+\psi + \partial_+ g_2 f_2 & \overline{b}_1 g_2\chi - \chi\partial_+\psi \end{pmatrix} \\ N &= \begin{pmatrix} -b_1 f_2 \psi - \psi\partial_-\chi + g_2\partial_- f_2 \\ -b_1 f_2\psi - \psi\partial_-\chi \end{pmatrix} \\ R &= -g_2\partial_-\chi \quad , \quad \overline{R} = -f_2\partial_+\psi. \end{aligned}$$

com:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{a} = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 \end{pmatrix}.$$

A integração sobre os campos a e $\overline{a}$ resulta em:

$$L = -\overline{N}M^{-1}N + \overline{b}M_2 b + \overline{b}R + \overline{R}b,$$

e juntando os campos b e $\overline{b}$ obtemos, de novo, após um pouco de álgebra:

$$-\overline{N}M^{-1}N = \frac{1}{\widetilde{\Delta}}\left\{ \begin{array}{c} \frac{\chi}{2}\partial_+\psi g_2\partial_- f_2 + \frac{\psi}{2}\partial_-\chi\partial_+ g_2 f_2 - \frac{1}{4}\chi\psi\partial_+ g_2\partial_- f_2 g_2 f_2 - \chi\psi\partial_-\chi\partial_+\psi\left(1 + \frac{1}{4}g_2 f_2\right) + \\ \overline{b}\left(\frac{1}{4}\chi\psi g_2 f_2\right) b + \overline{b}(\chi\psi\partial_-\chi g_2) + (\chi\psi\partial_+\psi f_2) b \end{array} \right\},$$

onde $\widetilde{\Delta} = \left(1 + \chi\psi\left[1 + \frac{1}{4}g_2 f_2\right]\right)$. Juntando ao resultado anterior a quantidade restante $\overline{b}M_2 b + \overline{b}R + \overline{R}b$ e simplificando, chegamos a:

$$L = P + \left\{\overline{b}Qb + \overline{b}S + Tb\right\},$$

onde:

$$P = \frac{\chi}{2}\partial_+\psi g_2\partial_- f_2 + \frac{\psi}{2}\partial_-\chi\partial_+ g_2 f_2 - \frac{1}{4}\chi\psi\partial_+ g_2\partial_- f_2 g_2 f_2 - \chi\psi\partial_-\chi\partial_+\psi\left(1+\frac{1}{4}g_2 f_2\right)$$
$$Q = \frac{1}{\widetilde{\Delta}}\left[1+\chi\psi\right]\left[1+g_2 f_2\right] \quad , \quad S = \frac{1}{\widetilde{\Delta}}\partial_-\chi g_2\left[\chi\psi - \widetilde{\Delta}\right] \quad , \quad T = \frac{1}{\widetilde{\Delta}}\partial_+\psi f_2\left[\chi\psi - \widetilde{\Delta}\right].$$

Agora integramos sobre os campos b e $\bar{b}$ para finalmente obter:

$$L = P + \frac{\partial_-\chi\partial_+\psi g_2 f_2}{(1+\chi\psi)\widetilde{\Delta}}.$$

Por outro lado temos que:

$$S_{WZW}[\Psi] + \frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\,\langle\langle\widehat{\epsilon}_+\Psi\widehat{\epsilon}_-\Psi^{-1}\rangle\rangle = -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\left(\partial_-\chi\partial_+\psi + \partial_- f_2\partial_+ g_2 - \mu^2(\chi\psi - g_2 f_2)\right),$$

e mais uma vez, juntando ao resultado anterior e simplificando obtemos finalmente a ação:

$$S^{Ax}[\chi,\psi,f_2,g_2] = -\frac{k}{2\pi}\int_M d^2x\left\{\frac{\left(\partial_-\chi - \frac{1}{2}\chi\partial_- f_2 g_2\right)\left(\partial_+\psi - \frac{1}{2}\psi f_2\partial_+ g_2\right)}{\Delta(1-g_2 f_2)} + \partial_- f_2\partial_+ g_2 - V\right\}, \quad (5.38)$$

onde agora $\Delta = \left(1+\chi\psi\left[1+\frac{5}{4}g_2 f_2\right]\right)$ e $V = \mu^2(\chi\psi - g_2 f_2)$. Notemos que no limite $g_2, f_2 \to 0$ recuperamos a ação (5.28).

Varias coisas devem ser mencionadas nesse ponto: O procedimento desenvolvido ao longo desses capítulos para a construção das ações dos modelos de Toda ou ações de modelos sigma não lineares perturbados é bastante geral. A técnica sempre funciona se a serie de dados algébricos (5.34) é conhecida, mas com um resultado final como a ação (5.38), varias perguntas surgem imediatamente. Por exemplo:

- Qual é a interpretação geométrica da quantidade G que aparece nesse modelo sigma não linear?
- Qual é a ação dual dado que a ação (5.38) ainda possui a simetria global $U(1)$ nos campos χ e ψ assim como em f_2 e g_2?
- O que significam as simetrias internas e as cargas de Noether associadas à simetria global de $\mathfrak{g}_0^0$?
- Qual é a interpretação para os sólitons carregados nessa teoria?
- Qual é o papel dos campos fermiônicos envolvidos e sua relação como os outros?
- Que tipo de supersimetria apresenta a ação e como se generaliza a construção ao formalismo de supercampos?

Por enquanto deixaremos essas perguntas em aberto para um trabalho posterior.

Capítulo 6

◎ Conclusões e Perspectivas.

Como conclusões imediatas temos:

• O resultado mais relevante tem a ver, obviamente, com a natureza das equações de Toda. As equações são uma manifestação de um principio dinâmico que não está relacionado com nenhum problema físico especifico. Porém, diversos sistemas em diferentes contextos possuem a estrutura integrável própria dos modelos de Toda.

• Na construção dos modelos, os únicos requerimentos feitos são; integrabilidade e invariância relativística os quais são conseqüência do uso de potenciais puro gauge e as condições de grau respectivamente. Porém, esses dois requerimentos trazem como conseqüência à existência da invariância conforme a qual permite ver os modelos de Toda como perturbações integráveis de teorias conformes.

• Os modelos de Toda permitem a unificação de diversos modelos integráveis conhecidos e a construção de muitos outros, em termos de uma dada estrutura puramente Lie algébrica a qual os caracteriza.

• A sua relação com o modelo de WZW, permite explorar a formulação Lagrangiana e dar uma interpretação geométrica aos modelos como perturbações de modelos sigma não lineares.

• A introdução de vínculos traz como conseqüência a existência de simetrias globais que dão origem a diversas cargas dos sólitons do modelo. Além disso, a noção de dualidade própria dos modelos sigma tem um efeito não trivial que dualiza as cargas topológicas e de Noether dos sólitons do modelo de Toda.

Como possíveis perspectivas temos:

• Estudar as versões supersimmétricas do modelo WZW e sua relação com os modelos de Toda assim como com superálgebras de Lie e superálgebras Afins.

• Estudar as simetrias internas dos sólitons associados a supergrupos de Lie dos modelos definidos em supercosets.

• Estudar a relação com a geometria dos modelos sigma.

• Implementar métodos de solução.

• Estudo da quantização dos modelos.

• Implementação de vínculos e construção de modelos de Toda supersimétricos duais e estudar a relação da dualidade com as reflexões de Weyl no espaço da raízes.

• Estudar a quantização desses modelos e sua relação com aspectos não perturbativos em teoria de campos.

Capítulo 7

◎ Apêndices.

Álgebras de Kac-Moody e de Virasoro.

Antes de introduzir as álgebras de Kac-Moody vamos começar pelas *álgebras loop.*

Uma álgebra loop é uma álgebra de Lie de dimensão infinita definida por:

$$\widetilde{\mathfrak{g}} \equiv \mathcal{L}(z, z^{-1}) \otimes \mathfrak{g} \ ,$$

onde $\mathcal{L}(z, z^{-1})$ denota o conjunto das funções que podem ser expandidas em series de Laurent com $z \in \mathbb{C}$ complexo. O correspondente grupo está formado pelos mapeamentos do circulo $S^1 = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z| = 1\}$ no grupo de Lie G :

$$z \in S^1 \to \gamma(z) \in G,$$

e o produto do grupo é feito no mesmo ponto $\gamma_1 \cdot \gamma_2(z) = \gamma_1(z) \cdot \gamma_2(z)$. A álgebra $\mathfrak{g}$ é gerada pelos elementos $\{X_i\}$, $i = 1, ..., \dim G$ que satisfazem (Cf(3.45)) $[X^i, X^j] = C_k^{ij} X^k$. Um elemento $\gamma : S^1 \to G$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ é da forma:

$$\gamma(z) = \exp(\theta^i(z) X^i),$$

onde $\theta^i(z)$ são parâmetros que ao ser expandidos em series de Laurent:

$$\theta^i(z) = \sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} \theta^i_{-n} z^n,$$

permitem definir os geradores de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ como:

$$X_n^i \equiv X^i z^n \quad , \ n \in \mathbb{Z} \ ,$$

onde agora é explicito o caráter infinito dimensional da álgebra. Os geradores X_n^i satisfazem a obvia relação:

$$[X_m^i, X_n^j] = C_k^{ij} X_{m+n}^k \tag{7.1}$$

Por outro lado, consideremos o grupo não abeliano dos mapeamentos $V_{ir} : S^1 \to S^1$ não triviais definidos por:

$$\xi(z) \equiv z \exp(i\varepsilon(z)).$$

Para $\varepsilon(z) \ll 1$, uma expansão infinitesimal da função $f(\xi(z))$:

$$f(\xi(z)) = f(z) + i\varepsilon(z)\frac{d}{dz}f(z),$$

junto com uma expansão em series de Laurent de $\varepsilon(z)$:

$$\varepsilon(z) = \sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{-n} z^n,$$

permite definir os geradores de Virasoro:

$$L_n \equiv -z^{n+1}\frac{d}{dz} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{7.2}$$

que satisfazem a *álgebra de Virasoro* de dimensão infinita:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \tag{7.3}$$

A álgebra de virasoro Vir_0 é a álgebra dos mapeamentos de S^1 em S^1 e a álgebra Loop é álgebra dos mapeamentos de S^1em G e as álgebras (7.1) e (7.3) se misturam entre se. De fato, os infinitos geradores $\{X_i^n, L_m\}$, obedecem as seguintes relações do produto semidireto $V_{ir} \ltimes \widetilde{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned} \left[X_m^i, X_n^j\right] &= C_k^{ij} X_{m+n}^k \\ \left[L_m, X_n^i\right] &= -nX_{m+n}^i \\ [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} \end{aligned} \tag{7.4}$$

Se incluímos *extensões centrais* para Vir_0 e $\widetilde{\mathfrak{g}}$, elas devem ser consistentes com a identidade de Jacobi e por definição, não podem ser absorvidas numa simples redefinição dos geradores. É possível mostrar que as únicas extensões centrais das álgebras (7.1) e (7.3) são $km\delta^{ij}\delta_{m+n,0}$ e $\frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$ e definem, respectivamente, às álgebras de *Kac-Moody* e *Virasoro*:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}} &\equiv \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus k \\ Vir &\equiv Vir_0 \oplus c \, , \end{aligned}$$

que satisfazem as seguintes relações :

$$\begin{aligned} \left[X_m^i, X_n^j\right] &= C_k^{ij} X_{m+n}^k + km\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \\ \left[L_m, X_n^i\right] &= -nX_{m+n}^i \quad , \quad [L_m, k] = 0 \\ [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \, , \end{aligned} \tag{7.5}$$

A álgebra (7.5) possui uma decomposição similar a (2.57) e vem dada por:

$$\begin{aligned} \left[h_m^i, h_n^j\right] &= km\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \\ \left[h_m^i, X_n^{\pm\alpha_j}\right] &= \pm K_{ji} X_{m+n}^{\pm\alpha_j} \\ \left[X_m^{+\alpha_i}, X_n^{+\alpha_j}\right] &= \delta^{ij} h_{m+n}^i + km\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \quad , \quad \alpha_i + \alpha_j = 0 \\ &= \epsilon(\alpha_i, \alpha_j) X_{m+n}^{\alpha_i+\alpha_j} \quad , \quad \alpha_i + \alpha_j \in \Delta \end{aligned} \tag{7.6}$$

Se definimos um operador $\widehat{Q}$ para a álgebra de Kac-Moody como:

$$\widehat{Q}_{HOM} \equiv -L_0, \tag{7.7}$$

vemos de (7.4) que:

$$\left[\widehat{Q}_{HOM}, X_m^i\right] = mX_m^i,$$

e por tanto, Q é um operador de gradação dado que obedece a relação (2.56). Essa gradação se denomina *homogênea*. Devemos notar que a gradação homogênea não quebra a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ mas quebra a álgebra de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{g}}$. Nessa gradação, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é identificada dentro do subespaço de grau zero:

$$\widehat{\mathfrak{g}}_0 = \{\mathfrak{g}, k, d\} \tag{7.8}$$

onde $d = \widehat{Q}_{HOM}$, dado que $\{X_0^i\}$ e $\{X^i\}$ geram álgebras isomorfas. No caso da álgebra loop, vemos de (7.2) que o operador de gradação $Q = z\frac{d}{dz}$, conta a potência n de $X_n^i \equiv X^i z^n$. Esse é um caso onde a álgebra é quebrada por um operador de gradação que não pertence a ela.

Tabela da Superálgebra SL(2|1).

A superálgebra $\mathfrak{g}^s = \mathfrak{osp}(2 \mid 2) = \mathfrak{g}_B \oplus \mathfrak{g}_F$ possui oito geradores, a metade dela são bosônicos e a outra metade são fermiônicos. Os quatro geradores bosônicos são $\mathfrak{g}_B = \left\{\left(E_{\pm 2\rho}, \frac{(\rho+\epsilon)}{2} \cdot H\right), \frac{(\rho-\epsilon)}{2} \cdot H\right\}$ formam a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_B = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{u}(1)$ e os outros quatro geradores fermiônicos são $\mathfrak{g}_F = \left\{E_{\pm(\rho+\epsilon)}, E_{\pm(\rho-\epsilon)}\right\}$ onde as raízes ρ e ϵ satisfazem $\rho^2 = 1$, $\epsilon^2 = -1$ com $\rho \cdot \epsilon = 0$. A álgebra $\mathfrak{sl}(2 \mid 1)$ obedece as seguintes regras de comutação:

$$\left[\frac{(\rho+\epsilon)}{2} \cdot H, E_{\pm 2\rho}\right] = \pm E_{\pm 2\rho} \qquad \left[\frac{(\rho-\epsilon)}{2} \cdot H, E_{\pm 2\rho}\right] = \pm E_{\pm 2\rho} \qquad \left[E_{\pm 2\rho}, E_{\mp 2\rho}\right] = \pm \rho . H$$

$$\left[\frac{(\rho+\epsilon)}{2} \cdot H, E_{\pm(\rho-\epsilon)}\right] = \pm E_{\pm(\rho-\epsilon)} \qquad \left[\frac{(\rho-\epsilon)}{2} \cdot H, E_{\pm(\rho-\epsilon)}\right] = 0$$

$$\left[\frac{(\rho+\epsilon)}{2} \cdot H, E_{\pm(\rho+\epsilon)}\right] = 0 \qquad \left[\frac{(\rho-\epsilon)}{2} \cdot H, E_{\pm(\rho+\epsilon)}\right] = \pm E_{\pm(\rho+\epsilon)}$$

$$\left[E_{\pm 2\rho}, E_{\pm(\rho+\epsilon)}\right] = 0 \qquad \left[E_{\pm 2\rho}, E_{\pm(\rho-\epsilon)}\right] = 0$$

$$\left\{E_{(\rho+\epsilon)}, E_{-(\rho+\epsilon)}\right\} = \frac{(\rho+\epsilon)}{2} \cdot H \qquad \left\{E_{(\rho-\epsilon)}, E_{(-\rho+\epsilon)}\right\} = -\frac{(\rho-\epsilon)}{2} \cdot H$$

$$\left[E_{\pm 2\rho}, E_{\mp(\rho+\epsilon)}\right] = \mp E_{\pm(\rho-\epsilon)} \qquad \left[E_{\pm 2\rho}, E_{\mp(\rho-\epsilon)}\right] = \pm E_{\pm(\rho+\epsilon)}$$

$$\left\{E_{\pm(\rho+\epsilon)}, E_{\pm(\rho+\epsilon)}\right\} = 0 \qquad \left\{E_{\pm(\rho-\epsilon)}, E_{\pm(\rho-\epsilon)}\right\} = 0$$

$$\left\{E_{\pm(\rho+\epsilon)}, E_{\pm(\rho-\epsilon)}\right\} = E_{\pm 2\rho} \qquad \left\{E_{\pm(\rho-\epsilon)}, E_{\mp(\rho+\epsilon)}\right\} = 0,$$

e a representação irredutível mais simples é dada pelas seguintes matrizes:

$$E_{-2\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{+2\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \epsilon \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{-(\rho+\epsilon)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{(\rho+\epsilon)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{(-\rho+\epsilon)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{(\rho-\epsilon)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bibliografia

[1] A.V. Razumov, M.V. Saveliev. Lie algebras, Geometry and Toda-type Systems. Cambridge Lectures Notes in Physics (1997).

[2] A.V. Razumov, M.V. Saveliev. Differential Geometry of Toda Systems. Commun. Anal. Geom. 2: 461-511, (1994).

[3] M. Nakahara. Geometry, Topology and Physics. Graduate Student Series In Physics (1990).

[4] S. Helgason. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Academic Press (1978).

[5] O. Alvarez, L.A Ferreira, J. Sánchez Guillén. A new Approach to Integrable Theories in any Dimension. Nucl. Phys. B 529: 689-736 (1998).

[6] L.D Fadeev, L.A Takhtajan. Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons. Springer-Verlag 1980.

[7] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon. Introduction to Classical Integrable Systems. Cambridge University Press 2003.

[8] J-.L Gervais, M. V. Saveliev. Higher Grading Generalizations of the Toda Systems. Nucl. Phys. B 453: 449-476, (1995).

[9] J-.L Gervais, M. V. Saveliev. Black Holes from Non-Abelian Toda Theories. Phys Lett. B 286, 271-278 (1992).

[10] Kh Nirov, A.V. Razumov. W-Algebras for Non-Abelian Toda Models. J. Geom. Phys. 48:505-545, (2003).

[11] E. Witten. Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions. Com. Math. Phys. 92, 433-472 (1984).

[12] E. Witten. Global Aspects of Current Algebra. Nucl. Phys. B223, 422 (1983).

[13] E. Witten. String Theory and Black Holes. Phys. Rev. D 44, 2, 314-324 (1991).

[14] P. Ginsparg, F. Quevedo. Strings on Curved Space-Times: Black-holes, Torsion and Duality. Nucl.Phys B385, 527-557 (1992).

[15] T.H. Buscher. A Symmetry of the String Background Field Equations. Phys. Lett. B194, 1, 59-62 (1987).

[16] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaumé, Y. Lozano. A Canonical Approach to Duality Transformations. Phys. Lett. B336, 183-189 (1994).

[17] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaumé, Y. Lozano. An Introduction to T-duality in String Theory. Nucl. Phys, Proc Suppl. 41, 1-20 (1995).

[18] E. Kiritsis. Duality in Gauged WZW Models. Mod. Phys. Lett. A Vol 6, No 31, 2871-2879 (1991).

[19] J.F Gomes, G. M. Sotkov, A. H. Zimerman. Axial-Vector Duality in Affine NA Toda Models. JHEP Proc. hep-th/0212046 v2.

[20] J.F Gomes, G. M. Sotkov, A. H. Zimerman. T-duality in 2-D Integrable Models. J. Phys A: Math. Gen. 37, 4629-4640 (2004).

[21] E.P Gueuvoghlanian. Tése Doutorado. Solitons em teorias de Toda não Abelianas Singulares. IFT-D.004/00.

[22] J. L. Miramontes. T-duality in Massive Integrable Field Theories: The Homogeneous and Complex Sine-Gordon Theories. Nucl. Phys. B 702:419-447, (2004).

[23] H. Aratyn, J.F Gomes, A.H. Zimerman. Algebraic Construction of Integrable and Super-Integrable Hierarchies. hep-th/0408231 v1.

[24] J. Balog, L. Feher, L.O´Raifertaight, P. Forgács, A. Wipf. Toda Theory and W-Algebra from Gauged WZNW Point of View. Ann. of Phys. 203, 1, 76-136 (1990).

[25] P. Goddard, D. Olive. Kac-Moody and Virasoro Algebras in Relation to Quantum Physics.

[26] Lie Groups and Homogeneous Spaces. http://www.mat.univie.ac.at/~cap/files/LieGroups.1.pdf

[27] P. Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin. 2-D Gravity and Random matrices. hep-th/9306153 v2.

[28] J.F Gomes, G.M. Sotkov, A.H Zimerman. Solitons with Isospin. Nucl. Phys. B714, 179-216 (2005).

[29] F. Lund, T. Regge. Unified Approach to Strings and Vortices with Soliton Solutions. Phys. Rev D . Vol 14, N. 6, 1524-1535 (1976).

[30] J. Plefka. Spinning Strings and Integrable Spin Chains in the AdS/CFT Correspondence. hep-th/0507136 v1.

[31] D.E Diaconescu, R. Dijkgraaf, R. Donagi, C. Hofman and T. Pantev. Geometric Transitions and Integrable Systems. hep-th/0506196 v2.

[32] E. D´Hoker and D.H Phong. Lectures on Supersymmetric Yang-Mills and Integrable Systems. hep-th/9912271 v1.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo