IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–T.011/09

Caos e termalização na teoria de Yang-Mills-Higgs em uma rede espacial

Ricardo Francisco Fariello

Orientador

Prof. Dr. Gastão Krein

Novembro de 2009

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

Esta tese deve sua existência a algumas pessoas. A primeira destas é meu supervisor Gastão Krein, que mostrou confiança em mim – nem sempre justificada, e é a ele que qualquer reclamação deve ser encaminhada. Muito obrigado, Gastão, por sua orientação e incentivo.

Menção particular deve ir a Hilmar Forkel, da Universidade Humboldt de Berlim. Sua ajuda foi de grande contribuição para o andamento deste trabalho.

Agradeço também a atenção e os comentários de Juliano Troiano na leitura do manuscrito em sua versão em inglês.

Uma referência especial vai para Roberta Fariello, pelos momentos ímpares de correção e de melhoria de expectativas.

Estes últimos dois anos teriam pesado sobre mim mais rapidamente do que de outra forma se não fosse pela minha bela Ingrid, que não mediu esforços para me acompanhar durante meu doutoramento.

Por último, e não menos importante, devo agradecer aos meus pais Reynaldo e Maria Cecília, por seu encorajamento e apoio. Se eu não tenho sempre feito como eles desejariam, eles nunca criticaram.

Cabe ainda uma lembrança a Lilly que foi embora, e que agradeço pela alegria que me proporcionou nesses anos de estudo.

O apoio da FAPESP, contrato 04/13405-0, é especialmente reconhecido.

Resumo

Nesta tese, dedicamo-nos a estudar a evolução temporal gerada pela hamiltoniana de uma teoria de Yang-Mills-Higgs clássica com simetria de calibre SU(2) em uma rede espacial. Em particular, estudamos transferência de energia e processos de equilibração entre os setores de calibre e de Higgs, calculamos os expoentes de Liapunov máximos referentes a condições randômicas iniciais no regime de fraco acoplamento, onde espera-se que eles estejam relacionados à taxa de amortecimento estático do plasmon a alta temperatura, e investigamos sua dependência com a energia e o parâmetro de auto-acoplamento de Higgs. Examinamos ainda erros de tamanho finito e de tempo finito, avaliamos o impacto dos campos de Higgs na instabilidade de campos magnéticos não-abelianos constantes e comentamos as implicações dos nossos resultados obtidos para as propriedades de termalização de campos de calibre a temperatura finita na presença de matéria.

Palavras chave: Teorias de calibre na rede; Aplicações do caos; Modelo Higgs não-abeliano; Expoentes de Liapunov.

Áreas do conhecimento: 10503005; 10503021; 10507043.

Abstract

In this thesis, we are dedicated to study the time evolution generated by the hamiltonian of a classical Yang-Mills-Higgs theory with gauge symmetry SU(2) on a spatial lattice. In particular, we study energy transfer and equilibration processes among the gauge and Higgs sectors, calculate the maximal Liapunov exponents regarding to random initial conditions in the regime of weak coupling, where one expects them to be related to the high-temperature static plasmon damping rate, and investigate their energy and Higgs self-coupling parameter dependence. We further examine finite-time and finite-size errors, value the impact of the Higgs fields on the instabilty of constant non-abelian magnetic fields and comment on the implications of our obtained results for the thermalization properties of gauge fields at finite temperature in the presence of matter.

Key words: Lattice gauge theories; Applications of chaos; Non-abelian Higgs model; Liapunov exponents.

Índice

1 Introdução **1**

2 Dinâmica caótica em teorias clássicas de calibre **5**

2.1 Caos nas equações clássicas de Yang-Mills para campos espacialmente constantes 6

2.1.1 Determinação do expoente de Liapunov máximo 10

2.2 Caos na dinâmica de Yang-Mills clássica e sua eliminação pelos escalares de Higgs 14

2.2.1 Análise de seção de Poincaré clássica 16

2.3 Caos na teoria de calibre pura na rede 19

2.3.1 Divergência de trajetórias vizinhas e maior expoente de Liapunov 23

3 Dinâmica de Yang-Mills-Higgs em uma rede espacial **38**

3.1 Formulação hamiltoniana na rede e medidas de distância 39

3.2 Condições iniciais, arranjo da energia e divergência de trajetórias . . . 44

3.3 Expoentes de Liapunov máximos e suas particularidades dinâmicas . 51

4 Abordagem via integrais de Feynman para o modelo de Caldeira e Leggett: um estudo preparativo **77**

5 Conclusões e perspectivas futuras **89**

Referências **94**

Capítulo 1

Introdução

Uma variedade de processos físicos complexos, estendendo-se de colisões de íons pesados ultrarelativísticos [1] a períodos de reaquecimento e transições de fase no universo primitivo [2], procede, ao menos inicialmente, longe do equilíbrio termodinâmico e envolve numerosos graus de liberdade não-perturbativos. O tratamento teórico baseado em primeiros princípios de tais fenômenos, os quais exigem uma descrição da teoria quântica de campos, contudo inacessíveis a simulações em redes euclideanas, é como uma regra além das capacidades presentes. Exceções importantes a esta regra surgem, entretanto, se as amplitudes subjacentes recebem contribuições dominantes de campos clássicos, podendo estas serem proporcionadas, em particular, por modos (bosônicos) de baixo momento a altas temperaturas T e com energias $E \ll T$. Nas teorias de calibre não-abelianas, observáveis governados por tais modos clássicos são tipicamente da ordem g^2T em regime de acoplamento fraco [onde g é o acoplamento de calibre e g^2T define uma escala inversa de comprimento] e têm um limite clássico finito. Exemplos proeminentes incluem os coeficientes de transporte que controlam blindagem magnética [3] e difusão de carga [4], e, em particular, a taxa de amortecimento estático do plasmon [5]. A última tem impacto direto nos processos de equilibração de energia e momento entre os quanta de campos de calibre, os quais descobriu-se que ocorrem ao longo de tempos surpreendentemente curtos de menos de 1 fm/c na matéria excitada criada por colisões nucleares ultrarelativísticas no RHIC [1, 6].

Observáveis essencialmente clássicos do tipo acima podem ser, em princípio, calculados relacionando-os com propriedades em tempo real de campos clássicos de calibre de comprimento de onda longo (baixa energia), e pela simulação desses campos não-perturbativamente em uma rede espacial [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Ao longo destas linhas, a taxa de amortecimento estático do plasmon calculada analiticamente foi argumentada como sendo proporcional, ao menos em acoplamento fraco, ao expoente de Liapunov máximo positivo (quando relacionado a temperatura final de equilíbrio) que mede a rapidez com que configurações de campos de calibre vizi-

nhas se afastam umas das outras [10, 12, 14, 15]. A argumentação que se faz neste sentido é baseada na esperada ergodicidade das trajetórias clássicas e na relação entre crescimento exponencial e taxa de amortecimento provida pela análise espectral dessas trajetórias. Na região de fraco acoplamento, além disso, tal relação pode ser testada quantitativamente por comparação com resultados da teoria de perturbação ressomada [5] ou, alternativamente, da teoria cinética [16].

Dando sequência aos argumentos acima, o presente trabalho tratará da evolução em tempo real da teoria clássica de Yang-Mills-Higgs associada ao SU(2) em redes espaciais de vários tamanhos. (Esta provou ser uma importante teoria para explorar a dinâmica da transição de fase eletrofraca e de efeitos não-perturbativos relacionados, por exemplo, à taxa de amortecimento do plasmon [17].) Um foco particular estará no papel dos campos escalares, fornecidos pelo dubleto escalar de Higgs, na dinâmica caótica. A porção central da nossa análise é um levantamento sistemático sobre a dependência de energia e acoplamento de um conjunto de expoentes de Liapunov máximos a tempo-finito específicos para cobrir partes representativas do espaço de fases fracamente acoplado de Yang-Mills-Higgs. Já que nossa teoria corresponde ao setor eletrofraco do modelo padrão com ângulo de Weinberg nulo, os expoentes resultantes contêm informação que pode ser útil na compreensão de processos cosmológicos em não-equilíbrio ocorridos em fases evolutivas semiclássicas do universo primitivo, incluindo formação de estruturas topológicas, bariogênesis [18], e potencialmente a evolução de cordas cósmicas [19]. Em nosso contexto, a bariogênesis é particularmente interessante, já que pode prosseguir de forma eficiente apenas longe do equilíbrio. E, como já mencionado, a simulação na rede da dinâmica de campos clássicos constitui um método de escolha para a análise de tais processos. De fato, ela revelou-se útil ao lançar luz sobre aspectos relativos à fase de pré-aquecimento [20], que se presume que tenha ocorrido após a inflação [21]. (Para algumas observações de advertência sobre a confiabilidade dos resultados clássicos obtidos em redes nesse cenário de pré-aquecimento para bariogênesis ver Ref. [22].) No mesmo quadro dinâmico e focando mais na questão da geração da assimetria bariônica do universo, examinou-se um modelo Higgs [23] que leva em conta considerações sobre violação de carga-paridade, o que resultou que as equações de movimento para os campos de calibre e de Higgs acabaram expressadas implicitamente.

Além disso, nossos resultados serão relevantes para a análise de processos locais de equilibração na matéria altamente excitada produzida no RHIC [1, 6] e, em breve, no colisor LHC do CERN [24]. De fato, a caoticidade da dinâmica de calibre fornece um mecanismo natural para a produção de entropia por campos de baixo momento, e seus modos mais instáveis contribuem dominantemente para processos de equilibração. Em particular, nossos resultados darão origem a novas estimativas para a dependência de energia e acoplamento da taxa de amortecimento

de campo de calibre na presença de matéria. Ademais, os expoentes de Liapunov deveriam receber contribuições das instabilidades de plasma não-abelianas que se alega serem responsáveis por acelerar os processos de isotropização e termalização no resultado de colisões nucleares de alta energia [25] (ver também [26] para um recente estudo numérico da dinâmica de não-equilíbrio destas instabilidades na teoria clássica de calibre SU(3) (em 3+1 dimensões) na rede, e para uma aplicação da teoria do condensado de vidros de cor em questões relacionadas ao comportamento da instabilidade de Weibel num glasma, ver [27]). Os modos instáveis subjacentes poderiam, em princípio, ser isolados por técnicas numéricas similares às nossas. Como em cenários de inflação caótica, além disso, tais instabilidades tipicamente geram, não-perturbativamente, grandes números de ocupação, o que pode assim estender a confiabilidade de nosso tratamento clássico a acoplamentos maiores e temperaturas mais baixas. Alguns de nossos resultados qualitativos podem ainda ser robustos o suficiente para fornecer orientação sobre o impacto de campos de quark elementares.

Apesar de que nosso foco principal será a evolução de campos randômicos, que em muito diferem daqueles requeridos para descrever situações extremas como as produzidas em colisões nucleares ou durante a fase de reaquecimento do universo primitivo, também estudaremos o impacto dos campos de Higgs na instabilidade de um campo magnético constante. As técnicas empregadas podem mais tarde ser aplicadas a campos coerentes mais complexos, incluindo soluções clássicas da teoria de Yang-Mills-Higgs [28] e outras que não apresentam contrapartes óbvias em teorias de calibre [29]. Estudos deste tipo podem fornecer novos pontos de vista sobre as teorias quânticas correspondentes. Aplicados a configurações de multi-monopólos da teoria de Yang-Mills-Higgs com um campo de Higgs na representação adjunta, cujas interações caóticas estudamos recentemente [30], eles podem, por exemplo, ajudar a clarificar o papel de ensembles de monopólos caóticos no desordenamento do vácuo da teoria em presença do referido campo.

A apresentação da tese é organizada da seguinte maneira. No segundo capítulo e a título introdutório, nos dedicamos, inicialmente, ao estudo do caos dos campos de Yang-Mills no limite de comprimento de onda longo, tendo como campo de provas sistemas com dois e três graus de liberdade. Na seção final, entretanto, introduzimos a formulação na rede da teoria que gerará a base para a simulação numérica da dinâmica modelada pelo acoplamento a um campo de Higgs a ser discutida no capítulo seguinte. Um recurso especialmente importante aqui nesta tese para se caracterizar o caos, a noção de expoente de Liapunov clássico, é exposto no capítulo 2 de maneira formal a partir da aproximação do espaço tangente, e no capítulo 3, em sua específica aplicação a teorias de calibre na rede, dando ênfase apenas a determinação do primeiro expoente. No terceiro capítulo, abordamos a questão da dependência dos expoentes de Liapunov máximos em relação à variação dos

parâmetros que descrevem o comportamento, em regime de acoplamento fraco, do modelo Higgs não-abeliano utilizado, e a dos erros provenientes do tamanho finito das redes empregadas e da limitação do tempo de simulação. Destacamos ainda no capítulo 3 nossos resultados relativos ao limite do tempo assintótico dos maiores expoentes de Liapunov e que foram calculados por extrapolação dos dados obtidos para tempos mais curtos. Em seguida, no quarto capítulo, vamos fazer um rápido estudo preparatório de um modelo que procura fazer a mímica da dinâmica de um sistema que interage com seu meio, o que no nosso contexto se configuraria numa forma, ao menos em princípio, de obter uma ação efetiva para os campos de Yang-Mills ao se eliminar o campo de Higgs. Finalmente, apresentamos nossas conclusões no capítulo cinco, onde, ainda, futuras pesquisas são sugeridas.

Capítulo 2

Dinâmica caótica em teorias clássicas de calibre

A maioria dos sistemas que provêm de teorias clássicas de calibre não-abelianas apresenta comportamento caótico em alguma região do seu espaço de fases [13]. Por si só isso não é inesperado dado que o caos é muito mais a regra do que a exceção nos sistemas dinâmicos não-lineares. Talvez ainda mais surpreendente, contudo, é a crescente evidência para este comportamento caótico – que, em sentido estrito, é um fenômeno clássico – ser de relevância também para teorias quânticas de calibre.

Boa parte das indicações existentes acerca da caoticidade das teorias de calibre não-abelianas originam-se da aproximação homogênea que negligencia todas as variações espaciais dos campos. Embora esta redução drástica da dinâmica acesse apenas uma pequena fração do espaço de fases, os poucos graus de liberdade remanescentes se revelaram suficientes para estabelecer regimes caóticos, primeiro em teorias de Yang-Mills ordinárias [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39] e, posteriormente, em teorias de Yang-Mills-Higgs [40, 41] e em teorias não-abelianas com termo topológico de Chern-Simons [42]. Cálculos extensos em redes da evolução no tempo subordinada às equações hiperbólicas completas de Yang-mills subsequentemente mostraram que os campos de calibre espacialmente inomogêneos não somente também evoluem caoticamente como revelam ainda fenômenos mais complexos e qualitativamente novos [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 43, 44, 45], os quais são de interesse físico direto, por exemplo, em processos de não-equilíbrio [46].

Esse capítulo está organizado da seguinte maneira: primeiro, conceitos básicos da dinâmica não-linear e suas aplicações em dois modelos simples de interações não-abelianas são estudados no contexto da aproximação homogênea. Logo depois, a dinâmica hamiltoniana clássica de uma teoria de calibre não-abeliana definida numa rede espacial é discutida: definições, vínculos e principais detalhes algorítmicos. Finalmente, resultados numéricos sobre a divergência caótica de configurações de campo inicialmente próximas na rede e sua dependência na energia são apresentados. A idéia central deste capítulo é o de preparar para o estudo clássico de uma teoria de Yang-Mills-Higgs com um dubleto de Higgs na representação fundamental de SU(2)

em uma rede espacial, o qual será realizado no próximo capítulo desta tese.

2.1 Caos nas equações clássicas de Yang-Mills para campos espacialmente constantes

Nesta seção vamos considerar o caso de uma teoria de Yang-Mills, invariante frente ao grupo de calibre local SU(2), constituído por transformações da forma $U[\lambda] = \exp(i\lambda^a(x)\tau^a)$, em que os τ^a, $a = 1, 2, 3$ formam um conjunto gerador do grupo de simetria subjacente e os λ^a indicam os parâmetros (reais) da transformação U, dependentes do ponto x no espaço-tempo. Em particular, a teoria de campos a ser considerada envolve um tripleto de campos vetoriais A^a_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3 =$ índice de Lorentz) que assumem valores na álgebra de Lie do grupo SU(2).* A ação integral da teoria, responsável pela dinâmica do campo A_μ, é dada por

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big), \tag{2.1}$$

que é a ação clássica da teoria de Yang-Mills ordinária em quatro dimensões espaço-temporais. Nessa expressão foi introduzido o tensor $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\tau^a$, chamado de tensor intensidade de campo, cujos campos componentes são

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \tag{2.2}$$

onde g responde pela constante de acoplamento de calibre. Um aspecto importante aqui é que o traço que aparece no integrando da expressão (2.1) é imprescindível para assegurar que a ação seja localmente invariante por SU(2), pois, para dado A_μ, $F_{\mu\nu}$ se transforma segundo a regra $F_{\mu\nu} \to UF_{\mu\nu}U^{-1}$; consequentemente, $\mathrm{tr}F^2$ é invariante, justamente devido à propriedade cíclica do traço.

Da condição de estacionaridade de S resulta o sistema de equações para as componentes de A_μ:**

$$\big(\delta^{ac}\partial_\mu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu\big)F^{\mu\nu c} = 0. \tag{2.3}$$

*Noutras palavras, o campo básico A_μ pode ser decomposto em termos da base de SU(2), ou seja, $A_\mu = A^a_\mu\tau^a$. Aproveitamos o momento para lembrar que, sendo $\{\tau^a\}$ base de SU(2), os τ's obedecem por definição as relações de comutação (características das álgebras de Lie não-abelianas) $\big[\tau^a, \tau^b\big] = i\epsilon^{abc}\tau^c$, onde ϵ^{abc} são as constantes estruturais do grupo. Para grupos compactos, entre os quais inclui-se o grupo de calibre SU(2), as constantes de estrutura podem ser tomadas como anti-simétricas em todos os três índices.

**A estacionaridade da ação requer que $\delta S = 0$ com respeito a variações arbitrárias de A_μ, o que é usualmente expresso escrevendo simplesmente a substituição $A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu$. Essa substituição leva por sua vez a

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} + D_\mu\delta A_\nu - D_\nu\delta A_\mu,$$

em que $D_\mu\cdot \equiv \partial_\mu \cdot -ig\,[A_\mu, \cdot]$ é a derivada covariante de calibre. Vemos daí que a variação de

Essas, por serem fortemente acopladas, são extremamente complicadas para serem solúveis analiticamente.[‡] No que se segue, tal como grande parte da literatura [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39] sobre o assunto, iremos fazer o exame da equação acima para o caso bastante restritivo em que os campos a serem considerados serão tratados como sendo dependentes do tempo apenas. Embora não seja necessário, trabalharemos no chamado calibre de Weyl, definido pela condição $A_0^a = 0$.

Nessas circunstâncias, as equações de campo (2.3) tornam-se

$$\ddot{A}_i^a - g^2 A_j^a A_j^b A_i^b + g^2 A_j^b A_j^b A_i^a = 0 \tag{2.4}$$

no caso particular em que $\nu = i$. Essa equação é para ser suplementada pelo vínculo (facilmente obtenível a partir de (2.3) fazendo-se $\nu = 0$)

$$\epsilon^{abc} A_i^b \dot{A}_i^c = 0 \qquad \text{ou equivalentemente} \qquad A_i^b \dot{A}_i^c - A_i^c \dot{A}_i^b = 0. \tag{2.5}$$

O vínculo obtido nada mais é que a lei de Gauss. Ela é de particular relevância no contexto de teorias do tipo Yang-Mills, especialmente no que concerne a quantização dessas teorias. Tradicionalmente, a quantização tem recorrido sobretudo ao formalismo canônico. Sabe-se, contudo, que essa abordagem enfrenta problemas antes mesmo de considerar a quantização. Isto se deve ao fato de que o procedimento padrão para obter a hamiltoniana a partir da lagrangeana falha para teorias de

---

primeira ordem δS torna-se igual a

$$\delta S = -2 \int d^4x \, \mathrm{tr}\big(F^{\mu\nu} D_\mu \delta A_\nu\big).$$

Ao determinar o resultado dado acima, exploramos a anti-simetria de $F_{\mu\nu}$ nos índices μ e ν. Agora, a identidade

$$D_\mu \mathrm{tr}\big(F^{\mu\nu}\delta A_\nu\big) = \mathrm{tr}\big[\big(D_\mu F^{\mu\nu}\big)\delta A_\nu\big] + \mathrm{tr}\big(F^{\mu\nu} D_\mu \delta A_\nu\big)$$

tem o efeito imediato de permitir que a variação de S seja escrita, a menos de um termo de superfície, sob a forma

$$\delta S = 2 \int d^4x \, \mathrm{tr}\big[\big(D_\mu F^{\mu\nu}\big)\delta A_\nu\big].$$

Como os δA_μ são de fato arbitrários, a imposição da condição $\delta S = 0$ implica as equações de movimento $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$, e daí a equação (2.3) segue imediatamente.

[‡]Muitos autores não somente se dedicaram a busca de soluções exatas destas equações como também estudaram vários aspectos da teoria de campos a que se refere a expressão (2.1) e suas extensões, incluindo modelos acoplados a escalares. Como resultados, foram descobertas soluções especiais que representam configurações de monopólos magnéticos [47], vórtices [48], dyons [49] e instantons [50] (pode-se consultar também [51] para uma revisão detalhada sobre tais soluções). Em particular, os monopólos advindos dos modelos auto-duais de super-Yang-Mills são objetos de interesse físico, por estarem associados a diversos fenômenos, nomeadamente a liberdade assintótica, a quebra de simetria quiral e a condensação, que parece ser essencial para um melhor entendimento do mecanismo de confinamento dos quarks [52] (ver também [53]).

calibre. Ignorando o problema, a princípio, pode-se construir uma hamiltoniana que reproduz as equações de Yang-Mills, estando a lei de Gauss, ausente em tal sistema – em seguida, desenvolve-se os cálculos que nos permitem concluir que isto acontece de fato com o caso aqui estudado (ver, por exemplo, [54] para uma discussão mais recente sobre o assunto).

O procedimento para uma lagrangeana da forma

$$L = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{L}[\{A_\mu\}\,; x]\,, \tag{2.6}$$

sendo $\mathcal{L}$ a densidade de lagrangeana do sistema, inicia-se com a definição do momento conjugado ao quadrivetor potencial A_μ através da fórmula

$$\Pi^{\mu a}(\mathbf{x}) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^a_\mu(\mathbf{x})}. \tag{2.7}$$

As equações daí resultantes são então resolvidas para as velocidades generalizadas e em seguida uma hamiltoniana é construída por meio da transformação de Legendre

$$H = \int d^3\mathbf{x}\, \Pi^{\mu a} \dot{A}^a_\mu - L. \tag{2.8}$$

Com a ação (2.1) esse procedimento falha, pois os momentos resultam ser

$$\Pi^{\mu a}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{y}\, F^{\rho\nu b} \frac{\delta F^b_{\rho\nu}}{\delta \dot{A}^a_\mu(\mathbf{x})} = -F^{0\mu a}(\mathbf{x})\,, \tag{2.9}$$

de onde podemos tirar a equação $\Pi^{0a} = 0$, que não pode ser resolvida para $\dot{A}_0$. [A este ponto, cabe-nos fazer uma observação: o desaparecimento de Π^0 resultaria na necessidade da não-comutatividade de zero com A_0, o que seria demasiado estranho considerar mesmo na mecânica quântica.] Ao derivar a expressão acima para os momentos, escolhemos a normalização dos campos A de modo que a densidade de lagrangeana passou a ser igual a $-\frac{1}{4}F^2$. Agora, ao se servir de Π^μ, a hamiltoniana é reduzida a

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2}\Pi^a_k \Pi^{ka} + \frac{1}{4}F^a_{kl}F^{kla} - G_a A^a_0\right), \tag{2.10}$$

onde $G_a := \partial^k \Pi_{ka} + g\epsilon_b{}^c{}_a A^{kb}\Pi_{kc}$. Feito isto, podemos calcular as equações canônicas do movimento. Em particular, para o caso da hamiltoniana no calibre de Weyl, chega-se à conclusão de que as equações de Hamilton (poderíamos ter usado algum princípio variacional, a conclusão não seria modificada)

$$\dot{A}^a_k(\mathbf{x}) = \frac{\delta H}{\delta \Pi^{ka}(\mathbf{x})}, \qquad \dot{\Pi}^a_k(\mathbf{x}) = -\frac{\delta H}{\delta A^{ka}(\mathbf{x})} \tag{2.11}$$

reproduzem corretamente a parte dinâmica das equações de Yang-Mills, i.e.,

$$\ddot{A}^a_k(\mathbf{x}) - \left[\delta^{ac}\partial^l + g\epsilon_{bc}{}^a A^{lb}(\mathbf{x})\right] F^c_{kl}(\mathbf{x}) = 0, \tag{2.12}$$

mas não a lei de Gauss $G_a(\mathbf{x}) = 0$; e assim, mostramos o que havíamos afirmado. Cabe notar aqui que a expressão acima recai em (2.4) no limite quando as variações espaciais dos campos A são pouco apreciáveis.

Retomamos agora nosso estudo acerca da homogeneidade de campos de calibre de Yang-Mills. As equações dinâmicas para os campos espacialmente homogêneos, como se apresentam em (2.4), ainda são difíceis de serem resolvidas. Porém, conforme mostrado em [31], podemos ter nosso trabalho facilitado se, na análise das soluções do sistema (2.4), considerarmos as funções simples

$$A_{ia} = (1/g)\, O_{ia}\, q_a(t) \quad \text{(sem soma implícita sobre o índice repetido } a\text{)}, \tag{2.13}$$

em que os O's são constantes quaisquer, sujeitas às condições de ortonormalidade $O_{ia}O_{ib} = \delta_{ab}$. Com efeito, satisfaz-se prontamente a equação de vínculo e as equações de campo dão lugar a (observe que ficamos então com três equações)

$$\ddot{q}_a + \left(q^2 - q_a q_a\right) q_a = 0 \tag{2.14}$$

com a definição $q^2 \equiv \sum_a q_a q_a$. Ademais, a função hamiltoniana do sistema (que obviamente reproduz as equações de movimento acima) assume a seguinte forma:

$$g^2 H = \frac{1}{2}\sum_a \dot{q}_a \dot{q}_a + \frac{1}{4}\sum_a \sum_{b\neq a} q_a q_a q_b q_b. \tag{2.15}$$

[Para maior clareza, daqui em diante usaremos as letras x, y e z para denotar, respectivamente, q_1, q_2 e q_3.] Vemos então que o sistema hamiltoniano assim obtido possui três graus de liberdade e uma constante de movimento conhecida, a energia; isso ocorre porque o sistema em questão é autônomo.

Nosso problema resume-se agora a resolver o sistema de equações acopladas que restou, o que – em princípio – só pode ser realizado através do uso direto de métodos numéricos, visto que nesse caso não se conhece solução em termos de funções elementares. Tal dificuldade em se achar uma solução exata para esse problema está relacionada ao fato de que não há nenhuma constante de movimento à exceção de H (ver [55] para uma discussão mais detalhada). Naturalmente isso sinaliza para a possibilidade de o sistema em estudo possuir o potencial para o caos. A fim de investigar com mais cuidado esta questão, teremos que recorrer às chamadas técnicas de sistemas dinâmicos. Para o caso em mãos, favorecemos[§] o emprego dos expoentes de Liapunov para quantificar o caos. Após uma breve e informal introdução aos conceitos subjacentes, calcularemos o maior destes expoentes para diferentes soluções das equações acopladas que restaram.

[§]Talvez a ferramenta de uso mais frequente na análise de sistemas dinâmicos seja a seção de Poincaré. Essa técnica reduz o espaço de fases por uma dimensão, considerando-se a interseção da trajetória de fase com alguma superfície fixa, tipicamente tomada como sendo um plano. As seções são especialmente úteis quando a dinâmica do sistema se desenvolve num espaço com dimensão não superior a três, visto que nesse caso os pontos de interseção caem sobre uma curva unidimensional

2.1.1 Determinação do expoente de Liapunov máximo

Lembramos que o expoente de Liapunov constitui uma quantidade para caracterizar a taxa de divergência ou convergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas e, portanto, pode ser usado para diferenciar entre comportamento caótico e periódico. Informalmente, vamos considerar neste primeiro momento duas trajetórias diferentes, iniciadas por pontos próximos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$ (próximos o bastante, de tal forma que dentro de algum erro experimental eles possam ser considerados como sendo o mesmo ponto, i.e., $\|\delta\mathbf{x}_0\| = \epsilon$ para algum $\epsilon \ll 1$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma com respeito a uma métrica riemanianna). A suposição de crescimento ou decaimento exponencial da separação entre duas condições implica em $\|\delta\mathbf{x}_\tau\| \approx e^{\lambda\tau}\|\delta\mathbf{x}_0\|$, após o transcurso de um tempo τ, onde λ é chamado de expoente (característico) de Liapunov. Para valores suficientemente grandes de τ, isto fornece uma aproximação para o máximo expoente de Liapunov $\lambda_{\max}$, de modo que

$$\lambda_{\max} \approx \lim_{\tau\to\infty} \lim_{\|\delta\mathbf{x}_0\|\to 0} \frac{1}{\tau} \log \frac{\|\delta\mathbf{x}_\tau\|}{\|\delta\mathbf{x}_0\|}. \tag{2.16}$$

Um valor positivo para $\lambda_{\max}$ significa que as trajetórias iniciadas em $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$ passam a praticamente não ter correlação alguma entre elas – no vocabulário da matemática, diz-se que elas se separam em média exponencialmente – e, assim, $\mathbf{x}_0$ tem uma dependência sensível às condições iniciais, um sinal de caos. Consequentemente, o maior expoente de Liapunov positivo se mostra particularmente útil na caracterização do grau de caoticidade de um sistema. [O leitor pode referir-se a [57] para uma revisão mais aprofundada do tema.]

Embora a fórmula derivada acima seja conceitualmente transparente, ela não se presta à implementação numérica direta, uma vez que num sistema caótico, qualquer desvio inicial $\delta\mathbf{x}_0$, não importa quão pequeno, eventualmente vai resultar num número grande demais para ser representado por um número ordinário num computador. Devido a esse fato, faz-se necessária uma abordagem numérica mais indireta. Daqui em diante, vamos nos concentrar no estudo e na aplicação do método da matriz Jacobiana, que faz uso do espaço tangente a uma trajetória observada.

para trajetórias não caóticas, mas encontram-se espalhados por toda a seção para trajetórias caóticas. Infelizmente, o sistema que consideramos tem graus de liberdade demais para que as seções sejam vantajosas. Outros indicadores qualitativos incluem espectro de potências e atrator estranho (ou caótico). Os espectros de potências para trajetórias regulares contêm um número finito de frequências discretas, ao passo que seus contrapartes caóticos são contínuos. O grande inconveniente desta técnica é o fato da mesma não poder discriminar de maneira inambígua entre comportamento caótico e randômico; e por isso evitamos seu uso. Já os atratores estranhos, os quais envolvem, tipicamente, trajetórias atraídas assintoticamente a uma estrutura fractal, são ferramentas poderosas para explorar o caos, mas têm aplicação limitada aos sistemas dissipativos [56].

Uma generalização deste método para o cálculo do espectro completo dos expoentes de Liapunov foi desenvolvida nas Refs. [58, 59]. Nossa discussão segue em especial o exposto na Ref. [60]; outras referências úteis incluem [56, 61, 62].

O método geral procede como se segue: primeiramente fixamos uma trajetória $\mathbf{x}(t)$, que pode ser entendida como sendo uma solução de um certo sistema dinâmico autônomo não-linear:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\,, \tag{2.17}$$

definido num espaço de fases n-dimensional ($\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}$ são vetores coluna n-dimensionais). Sob as condições iniciais $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$, a Eq. (2.17) leva a uma curva solução $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}_0)$ (a qual satisfaz $\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}(0, \mathbf{x}_0)$). [Referimo-nos a $\mathbf{\Phi}$ como o conjunto de todas as possíveis curvas soluções de (2.17).] Em seguida, consideramos a segunda trajetória como uma perturbação em relação a primeira, escrevendo-a na forma $\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$, com $\delta\mathbf{x}(t)$ pequeno. Essa segunda trajetória é, então, determinada pelo deslocamento inicial $\delta\mathbf{x}(0)$. Se agora substituirmos $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ dentro das equações (2.17) e desenvolvermos $\delta\mathbf{x}$ em série, obtemos a distância entre as duas trajetórias:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{D_x f} \cdot \delta\mathbf{x} + \mathcal{O}\big(\|\delta\mathbf{x}\|^2\big), \tag{2.18}$$

que contém a matriz Jacobiana $n \times n$ de $\mathbf{f}$, $(\mathbf{D_x f})_{ik} = \partial f_i / \partial x_k$. Cabe salientar aqui que os argumentos desta matriz devem ser avaliados ao longo da trajetória de referência. A fim de tornar mais clara a equação acima, introduzimos $\boldsymbol{\xi}$ como um elemento do espaço tangente a $\mathbf{x}$ [i.e., $\boldsymbol{\xi}(t) = \lim_{\|\delta\mathbf{x}(0)\| \to 0} \delta\mathbf{x}(t)/\|\delta\mathbf{x}(0)\|$], e definimos $J(t) = \mathbf{D_x f}(\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}_0))$ para ser a matriz de derivadas parciais de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{\Phi}$. Note que a função $J(t)$ pode ser computada explicitamente a partir do conhecimento das equações originais. Então, reescrevemos (2.18) como (desde que $\delta\mathbf{x}$ seja pequeno o suficiente para a contribuição de $\mathcal{O}(\delta\mathbf{x}^2)$ ser insignificante)

$$\dot{\xi}_i = J_{ik}\xi_k, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.19}$$

em que se subentende a soma sobre o índice repetido k. Este conjunto de equações lineares não-autônomas é referido como o sistema variacional correspondente à solução da Eq. (2.17) sob dados iniciais $\mathbf{x}_0$; ele propaga pequenas variações tangentes à trajetória no tempo 0 a pequenas variações tangentes à trajetória no tempo t. Ele também é nossa equação de fluxo para determinar o máximo expoente de Liapunov (denotado por ora por $\lambda_{\max}$). Em termos do vetor $\boldsymbol{\xi}$, a Eq. (2.16) para $\lambda_{\max}$ toma a forma transparente

$$\lambda_{\max}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}_0) \approx \lim_{t\to\infty} \chi(t) \qquad \text{onde} \qquad \chi(t) := \frac{1}{t} \log \|\boldsymbol{\xi}(t)\|. \tag{2.20}$$

Em geral, o vetor inicial $\boldsymbol{\xi}_0$ é escolhido aleatoriamente, de maneira que não terá uma orientação pré-definida no espaço tangente. Espera-se, portanto, que para um

vetor $\boldsymbol{\xi}_0$ escolhido aleatoriamente, a Eq. (2.20) leve ao maior expoente [61]. Se este expoente for apto a ser positivo, então temos uma forte indicação de dinâmica caótica.

O cálculo numérico do expoente de Liapunov de maior valor, com base na Eq. (2.20), requer, entretanto, alguma precaução adicional, visto que a norma $\|\boldsymbol{\xi}(t)\|$ crescerá muito rapidamente com o tempo, produzindo erros numéricos que inviabilizarão o cálculo pretendido. Uma maneira direta de contornar a dificuldade em questão é reescrever o logaritmo requerido após n passos de tempo como uma soma

$$\log \|\boldsymbol{\xi}(t_n)\| = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{\|\boldsymbol{\xi}(t_i)\|}{\|\boldsymbol{\xi}(t_{i-1})\|}. \tag{2.21}$$

Se utilizarmos passos uniformes ($t_n = n\Delta t$) para avançar o vetor $\boldsymbol{\xi}$ (através de (2.19)) e fizermos a escolha de normalizar este vetor (para que tenha comprimento unitário) depois de cada passo, bem como de normalizar o vetor inicial $\boldsymbol{\xi}_0$, então, por conta da Eq. (2.21), trazemos a expressão (2.20) à forma

$$\lambda_{\max}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}_0) \approx \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\log \alpha_i)/\Delta t, \quad \alpha_i = \|\boldsymbol{\xi}(t_i)\|. \tag{2.22}$$

Com isto encerra-se a discussão acerca de como estimar o maior expoente de Liapunov a partir de equações diferenciais. A seguir, passamos à descrição de nossos resultados numéricos.

Nosso objetivo era investigar caos no sistema com função hamiltoniana (2.15) através do uso da análise numérica do máximo expoente de Liapunov. Para tanto, é preciso resolver numericamente o sistema (2.14) conjuntamente com o correspondente sistema variacional (obtenível substituindo-se $x+\kappa$, $y+\eta$ e $z+\zeta$ para dentro de (2.14))

$$\begin{gathered}\ddot{\kappa} = -(y^2+z^2)\kappa - 2x(y\eta + z\zeta), \quad \ddot{\eta} = -(x^2+z^2)\eta - 2y(x\kappa + z\zeta), \\ \ddot{\zeta} = -(x^2+y^2)\zeta - 2z(x\kappa + y\eta).\end{gathered} \tag{2.23}$$

Nas simulações aqui apresentadas, optou-se por utilizar como algoritmo de integração o Runge-Kutta de quarta ordem com passo constante (uma introdução curta do algoritmo usado neste relatório é dada na Ref. [63]). Como forma de minimizar os erros de arredondamento, utilizamos a precisão dupla na implementação dos cálculos envolvidos na resolução das equações (2.14) e (2.23). Estas equações e a metodologia acima descrita para obter o expoente dominante foram codificadas em computador, em linguagem Fortran. Para as condições iniciais que vão em companhia de (2.14), seguimos [39] e pusemos $x = y = z = 0$, $\dot{x}^2 = 2E_1$, $\dot{y}^2 = 2E_2$ e $\dot{z}^2 = 2E_3$ para dados valores dos E's, enquanto que, para aquelas que acompanham a (2.23), tomamos

$\xi(0) = 1$, onde assumimos a medida de proximidade como sendo a distância euclideana, de forma que $\xi^2 = \kappa^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \dot{\kappa}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2$. [A este ponto, cabe-nos mencionar que embora a magnitude do expoente dependa da métrica particular usada, os sinais dos expoentes são uma propriedade do sistema dinâmico e não estão sob a influência de nenhuma estrutura métrica subjacente.] Como uma verificação da validez do código, a energia total foi conservada dentro da tolerância de 1%.

Os resultados por nós obtidos para χ como uma função de t numa escala logarítmica dupla são relatados na Fig. 2.1 para sete condições iniciais típicas. Nossos cálculos foram feitos na superfície de energia $E = E_1 + E_2 + E_3 = 0.15$. Naquela figura, todas as curvas dão valores limítrofes positivos para o máximo expoente (fato que evidencia a presença de caos no sistema em discussão), os quais consideramos, no entanto, não serem todos exatamente iguais, dentro dos limites da exatidão numérica. Esse quadro geral corrobora a proposição que se expõe para sistemas contendo mais do que dois graus de liberdade, na qual se institui a possibilidade de se encontrar mais de duas regiões na superfície de energia com um grau diferente de estocasticidade (ver, por exemplo, as Refs. [64, 65]). Também investigamos o caso particular em que $x(0) = y(0) = z(0) = 0.05$ e encontramos que χ decai com $1/t$, apontando para um valor consistente com zero para $\lambda_{\max}$. Este resultado condiz com o esperado, pois neste caso o problema torna-se unidimensional, a saber $\ddot{x} + 2x^3 = 0$, que possui solução na forma de funções elípticas de Jacobi. Gostaríamos de acrescentar que os resultados até agora encontrados comparam-se favoravelmente com aqueles publicados na Ref. [39], que foram obtidos através do uso de um método de integração bem diferente do empregado por nós.

Julgamos de interesse verificar a estabilidade dos resultados com respeito a mudanças no passo de integração. Para esse fim, selecionamos, dentre os sete casos relatados previamente na Fig. 2.1, o relacionado à curva 5. Na Fig. 2.2, quatro curvas para χ são apresentadas, correspondendo a quatro passos diferentes e às mesmas condições iniciais da curva 5; os passos são 5×10^{-6}, 2.5×10^{-5}, 5×10^{-5} (curva 5) e 10^{-4}. Conforme se observa nessa figura, até o tempo 10^5, o acordo entre as curvas é bastante bom, isto é, todas as quatro curvas parecem tender a um único valor.

Finalizamos nosso breve estudo numérico examinando a dependência em $\xi(0)$. Realizamos simulações numéricas para diversos valores de $\xi(0)$ (com $\xi^2 = 1$), concentrando-nos mais uma vez no particular caso da curva 5. Os resultados que obtivemos destas simulações mostram claramente que, para todas as situações consideradas, χ atinge aproximadamente o valor 0.23 logo que t alcança 10^5 (ver Fig. 2.3), indicando que o expoente $\lambda_{\max}$ que daí resulta é um invariante, isto é, é independente da escolha do deslocamento inicial $\xi(0)$; em outras palavras, o número $\lambda_{\max}$ caracteriza a trajetória de referência – no sentido de que todas as trajetórias próximas separam-se dela como $e^{\lambda_{\max} t}$.

Em síntese, nesta primeira seção do presente capítulo pretendeu-se discutir sobretudo o comportamento caótico das equações clássicas de Yang-Mills no âmbito da aproximação homogênea, através da análise do máximo expoente de Liapunov. Pensamos que o estudo aqui exposto terá alguma utilidade direta na próxima seção, onde vamos investigar o mesmo caso mas acrescido do termo de Higgs.

2.2 Caos na dinâmica de Yang-Mills clássica e sua eliminação pelos escalares de Higgs

Estudos da estrutura de fase em teorias de calibre com campos escalares e em regime de acoplamento fraco indicam que as fases de Higgs e confinante são estritamente distintas [66]. O raciocínio geral é de que a fase confinante é uma fase desordenada e a fase de Higgs é ordenada. Esse é um fenômeno importante e que ocupa um lugar central em teorias de calibre. Conformemente, a distinção entre sistemas dinâmicos contendo e não contendo um número suficiente de constantes de movimento independentes é de interesse primário, tanto do ponto de vista físico como matemático-numérico. Até este ponto discutimos um exemplo de caos determinista no regime da aproximação homogênea para a teoria de Yang-Mills pura no calibre temporal. Vamos agora considerar um modelo não-abeliano que tem em conta a presença de um campo escalar complexo acoplado aos campos de calibre vetoriais. Este, por sua vez, constitui um exemplo útil para ilustrar os mecanismos de quebra de simetria eletrofraca e geração de massa. Suporta também configurações topológicas tipo monopólo magnético. O ponto-chave aqui é que ao inserir o novo campo verifica-se que existe um valor crítico da energia acima do qual o sistema experimenta uma transição ordem-caos. Começamos introduzindo um dubleto complexo de campos escalares $\phi = (\phi_1, \phi_2)^{\mathrm{T}}$ e adicionando ao problema prévio termos para interação e propagação destes campos, de forma que a densidade da hamiltoniana no calibre $A_0^a = 0$ (que é a fixação de calibre anteriormente usada) pode ser escrita como

$$H = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{E}^a + \frac{1}{2}\,\mathbf{B}^a \cdot \mathbf{B}^a + \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + (D_i\phi)^\dagger (D_i\phi) + \lambda\big(\phi^\dagger\phi - \upsilon^2\big)^2, \tag{2.24}$$

com as intensidades dos campos elétrico e magnético

$$E^{ka} = F^{k0a}, \qquad B^{ka} = -\tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{ija}, \tag{2.25}$$

e se lê a derivada covariante na representação fundamental como

$$D_i\phi = \big(\nabla_i - ig\tfrac{1}{2}\vec{A}_i \cdot \vec{\sigma}\big)\phi. \tag{2.26}$$

Aqui λ é o parâmetro de auto-interação e υ está relacionado ao valor esperado no vácuo do campo escalar complexo. Da expressão (2.24), vemos que qualquer

configuração de campo que tenha os valores dos potenciais A_i colocados a zero e ϕ constante e de comprimento igual a υ minimizará a energia e, por conseguinte, pode ser tomada como sendo o vácuo. Daí se segue que o vácuo pode vir a ser dado por $A_i^{\rm vac} = 0$ e $\phi^{\rm vac} = (0, \upsilon)^{\rm T}$, sem perda de generalidade.

Para nossa análise, consideram-se os seguintes valores de componentes [40]:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iJ_1 + J_2 \\ \sqrt{2}\upsilon + \chi - iJ_3 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Ao se fazer a redução advinda da hipótese de homogeneidade espacial dos potenciais e das componentes do campo escalar, a Eq. (2.24) é reduzida a

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2}\dot{A}_i^a \dot{A}_i^a + \frac{1}{2}\left(\dot{J}_a^2 + \dot{\chi}^2\right) + \frac{1}{4} g^2 \left[(A_i^a A_i^a)^2 - (A_i^a A_k^a)^2\right] \\ & + \frac{1}{8} g^2 (A_i^a A_i^a)\left[J_a^2 + (\sqrt{2}\upsilon + \chi)^2\right] + \frac{1}{2}\lambda\left[J_a^2 + (\sqrt{2}\upsilon + \chi)^2 - 2\upsilon^2\right]^2 \end{aligned} \tag{2.28}$$

e as três equações de vínculo escrevem-se:

$$\epsilon^{abc} A_i^b \dot{A}_i^c - \frac{\upsilon}{\sqrt{2}}\dot{J}_a - \frac{1}{2}\left(\chi \dot{J}_a - J_a \dot{\chi} - \epsilon^{abc} J_b \dot{J}_c\right) = 0. \tag{2.29}$$

Esta é simplesmente a generalização correspondente da equação (2.5). Cabe aqui uma observação técnica: o primeiro e o terceiro termos da equação (2.28) correspondem à função hamiltoniana (2.15), fazendo uso da Eq. (2.13).

Pretende-se agora, por simplicidade, fazer um exame do caso bidimensional em que o campo escalar coincide com o seu valor esperado no vácuo (i.e., exigindo que $\chi = J_a = 0$). Com isto, e fazendo-se uso do ansatz já mencionado na equação (2.13), cumpre-se a restrição dada em (2.29) e se obtém a seguinte função hamiltoniana autônoma a duas componentes:

$$g^2 H = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}x^2 y^2 + \frac{1}{4} g^2 \upsilon^2 \left(x^2 + y^2\right). \tag{2.30}$$

Neste caso, tal qual no modelo da seção anterior, adotou-se as variáveis x e y como variáveis de estado. As propriedades dinâmicas dessa (nova) hamiltoniana são controladas por um único parâmetro $\pi = g^2\upsilon^4/H$, fato este que pode ser verificado por meio de uma transformação de escala das amplitudes $x \to \alpha^{-1}x$, $y \to \alpha^{-1}y$ e da variável tempo $t \to \alpha t$ com $\alpha = g\upsilon$. Para $\pi = 0$ temos o caso da versão mecânica da teoria de Yang-Mills – que é praticamente dominado pelo caos. Poderíamos então conjecturar que o caos poderia vir a ser significativamente diminuído ou até mesmo anulado, caso o parâmetro π assuma valores positivos elevados. Mas para confirmar isto, deve-se recorrer aos métodos da dinâmica não-linear. Um método explícito para estudar caos em sistemas dinâmicos de poucos graus de liberdade é o de determinar seu mapa de Poincaré. A esse respeito, há, na sequência, uma visão geral do método e se apresentam alguns resultados numéricos computacionais obtidos através da aplicação do referido método ao sistema hamiltoniano (2.30).

2.2.1 Análise de seção de Poincaré clássica

A partir do dito acima é portanto de nosso interesse estabelecer se um determinado sistema dinâmico é integrável ou não. Para um sistema conservativo com dois graus de liberdade, caracterizado por uma hamiltoniana independente do tempo, podemos efetuar uma verificação numérica, construindo uma superfície de seção de Poincaré. Esse sistema é autônomo e a hamiltoniana é, então, uma integral primeira para o sistema. Sob as hipóteses dadas, pode-se escrever a função hamiltoniana da seguinte forma

$$H(p_x, p_y, x, y) = E, \tag{2.31}$$

onde a energia total do sistema, E, é uma constante, e p_x e p_y são os momentos lineares associados às coordenadas x e y. Em consequência desse condicionante, se restringirmos as condições iniciais a um valor da energia, haverá então somente três coordenadas independentes restantes. Segue-se que as trajetórias acham-se confinadas a uma superfície de energia tridimensional no espaço de fases. Indo mais além, se a Eq. (2.31) pode ser solucionada para p_y, pode ser escrita da forma $p_y = p_y(p_x, x, y, E)$. Agora, além da energia total, vamos dar uma segunda integral de movimento

$$I_2(p_x, p_y, x, y) = c_2, \tag{2.32}$$

com c_2 constante. Assim, podemos dizer que aí se produz também uma superfície tridimensional no espaço de fases quadridimensional. Além disso, se nos forem dadas as condições iniciais, E e c_2 serão fixos e a órbita correspondente ficará restrita à interseção das superfícies definidas pelas Eqs. (2.31) e (2.32), isto é, a uma superfície bidimensional no espaço de fases. Por exemplo: se combinarmos as Eqs. (2.31) e (2.32), poderemos então escrever o momentum p_y como uma função das duas coordenadas x e y: $p_y = p_y(x, y, E, c_2)$. Escolhendo, por exemplo, $x = 0$, a órbita coloca-se sobre uma curva unidimensional no plano (y, p_y); nesse caso, diz-se que o movimento é ordenado e que o sistema descrito pela hamiltoniana H é integrável na energia E. [Por definição, um sistema dinâmico de dimensão 2n é dito integrável quando existem n funções dinâmicas independentes que são constantes do movimento.]

De modo geral, não poderemos identificar uma segunda integral de movimento como I_2. Pensaríamos então em trajetórias como curvas em movimento ao longo do espaço tridimensional. Uma vez que o espaço tridimensional ainda é difícil de ser visualizado, surge a tentação de se encontrar uma forma melhor para se representarem as soluções. Aqui usamos o conceito de seção de Poincaré para contornar essa situação. A idéia básica é a seguinte: em vez de observarmos trajetórias contínuas complicadas em três dimensões, nos concentraremos num subespaço bidimensional da superfície de energia constante, denominada superfície de seção, escolhida de

maneira tal que a interseção das trajetórias se dê transversalmente. Depois de se escolher a seção, marcaremos os sucessivos pontos de interseção das trajetórias com essa superfície, visualizando o movimento como uma mapa ponto a ponto na própria seção. Uma abordagem simplista ao cálculo numérico de um mapa de Poincaré envolveria a integração passo a passo das equações de conservação,

$$\ddot{x} = -\partial U/\partial x, \qquad \ddot{y} = -\partial U/\partial y, \tag{2.33}$$

onde U é a função energia potencial, e um teste das mudanças de sinal de um determinado componente, digamos x, quando o plano $x = 0$ é utilizado como seção de Poincaré. Entretanto, para se localizarem os pontos de interseção da órbita com o plano citado, é preciso usar um esquema de interpolação, que funciona ajustando-se curvas polinomiais aos dados da órbita com sinais opostos de x. Vale ressaltar que para que o método da seção de Poincaré possa ser confiável é necessário que as trajetórias iniciadas na seção retornem infinitamente muitas vezes à ela, de modo a assegurar que o domínio e a imagem do mapa são a seção completa. Mais geralmente, exige-se que toda trajetória intercepte a seção, o que garante que toda trajetória do fluxo será representada como uma trajetória do mapa.

Para ilustrar essa idéia de observar em certos instantes de tempo trajetórias de um sistema dinâmico desenvolvemos um programa computacional para integrar as equações de Hamilton da teoria,[¶] via método de Runge-Kutta de ordem quatro, para um valor especificado de energia total e precisar os pontos de interseção da trajetória no espaço de estados com o plano $(y, \dot{y})$ para $x = 0$ e $\dot{x} > 0$ – em outras palavras, nós só consideramos interseções com $x = 0$ na direção positiva. Seguimos aqui o procedimento usual, a saber: primeiro reduzimos a ordem do sistema com a escolha de um valor particular para E e o usamos para eliminar a coordenada $\dot{x}$, e depois definimos a superfície de seção por: $x = 0$, $\dot{x} > 0$. As coordenadas na seção serão y e $\dot{y}$; e esses dois números definem um ponto inicial para uma trajetória: x é dado pela relação da superfície de seção e $\dot{x}$ pela integral da energia: $\dot{x} = (2E - \dot{y}^2 - \frac{1}{2}y^2)^{1/2}$, onde escolhemos a raiz positiva. Uma vez conhecidas as condições prévias do movimento pode-se obter trajetórias numéricas para o sistema de equações dado e os resultados desses cálculos são usados para se construir uma seção de Poincaré correspondente a uma energia bem definida. Vista através da seção, uma trajetória que se inicia na região de movimento regular, corresponde a um número finito de pontos ou um ciclo, enquanto que se se partir da região de dinâmica caótica, obter-se-á uma nuvem de pontos sem nenhuma estrutura. Neste

[¶]Estas equações resultam num sistema de primeira ordem que se escreve

$$\dot{x} = p_x, \quad \dot{y} = p_y, \quad \dot{p}_x = -\tfrac{1}{2}\,x\,(1 + 2y^2), \quad \dot{p}_y = -\tfrac{1}{2}\,y\,(1 + 2x^2).$$

último caso, presume-se, normalmente, que o sistema é não-integrável, e não há mais uma quantidade conservada c_2.

Vamos então aos resultados na Fig. 2.4 que contém seções de Poincaré correspondentes a várias condições iniciais do sistema sob análise. Para o menor valor de energia por nós considerado, $E = 0.0517$, o sistema (2.30) exibe um espaço de fases bastante regular, organizado em toros bidimensionais, configurando uma situação que sugere fortemente a existência de outra integral de movimento além da própria hamiltoniana. Mudando agora o valor de E para um valor mais alto – como, por exemplo: $E = 0.521$ – temos uma situação intermediária em que regiões regulares são circundadas por uma região caótica. Este achado desfaz a nossa primeira impressão de que o sistema poderia ser integrável. Já ao considerar-se um valor ainda mais alto para a energia $\big(E = 8.93\big)$, a região acessível toda é tomada por trajetórias caóticas (aqui, os pontos são interseções de apenas uma trajetória). Esses resultados indicam que, possivelmente, o sistema passa por uma transição ordem-caos; assume-se que o limiar dessa mudança de fase será atingido quando $E = 1.67$ [40] – condição que não coloca em risco a nossa presente análise. Além disso, de uma maneira geral, o comportamento deste sistema a priori se amolda ao tipo descrito no teorema KAM [61].

Ainda consideramos interessante avaliar a caoticidade do sistema pelo cálculo do expoente de Liapunov positivo máximo conforme a técnica anteriormente apresentada na Sec. 2.1.1. No caso em que as condições iniciais escolhidas correspondiam a energia igual a $E = 0.0517$ o expoente de Liapunov se anula, como é de se esperar para regiões regulares. Para o caso em que as condições iniciais escolhidas correspondiam a energia igual a $E = 0.521$ o espaço de fases é dividido em duas regiões: uma região caótica apresentando um expoente de Liapunov pequeno mas positivo, com valor aproximado de 0.0757 e a outra, um expoente nulo. Por fim, obtivemos para o expoente de Liapunov dominante, aproximadamente, o valor de 0.604, e corresponde a condição inicial $E = 8.93$. Vale a pena ressaltar aqui um ponto: o valor do maior expoente positivo por nós obtido na energia $E = 1000$ foi de 2.11, que é um pouco inferior em relação ao citado na literatura [67] para soluções de monopólo da teoria, o qual fica em torno de 2.67; e ademais: nosso valor calculado é maior que o valor de 1.37 do sistema de Lorenz [59], que pode ser considerado como um sistema caótico típico; supõe-se então que o sistema aqui estudado (ou similar) apresente comportamento fortemente não-linear.

Resumidamente, nesta seção observou-se uma transição ordem-caos num sistema espacialmente uniforme de dois graus de liberdade com campos escalares e de Yang-Mills. Fizemos uso de soluções numéricas para a análise do problema, possibilitando assim o emprego de seções de Poincaré e o cálculo do maior expoente de Liapunov. Alguns dos resultados que obtivemos já são conhecidos da literatura: em

tais casos, há concordância com nossas observações. De forma geral, tiramos como consequência lógica que o caráter caótico torna-se maior à medida que aumentamos a energia total do sistema. Mostramos também que a introdução do campo escalar estabiliza a dinâmica caótica dos campos de calibre e conduz ao aparecimento da transição ordem-caos. Deve-se observar que o tipo de transição que aqui se determinou ocorre em outras situações em que se leva em conta os graus de liberdade espaciais (ver, por exemplo, as Refs. [68, 69]). Embora sejam relevantes, por exemplo, para o entendimento da estabilidade de configurações de monopólos, essas situações mostram-se, ainda, limitadas por exigirem a imposição de vínculos de simetria; por isto, um estudo mais abrangente foi realizado por vários autores, valendo-se das teorias de campos formuladas em redes. Uma revisão de estudos de caos em teorias de calibre na rede pode ser encontrada em [13]. Faremos, em seguida, uma análise pormenorizada do exemplo mais simples de teoria de calibre na rede: o campo eletromagnético não-abeliano.

2.3 Caos na teoria de calibre pura na rede

Na presente seção, vamos reunir o corpo de conhecimento necessário para iniciar o estudo em teorias de calibre do tipo Yang-Mills, com simetria de calibre local SU(2), em redes a 3+1 dimensões, o que permite que a etapa subsequente, a simulação, possa considerar as possibilidades de ocorrência de caos determinístico. Para nossos propósitos aqui, introduzimos a hamiltoniana com grupo de calibre SU(2) numa rede cúbica como [70, 71] (no calibre em que $A_0^a = 0$)

$$H = a^3 \sum_{x,i} \tfrac{1}{2} E_{x,i}^a E_{x,i}^a + \frac{4}{g^2 a} \sum_x \sum_{1 \le i < j \le 3} \left(1 - \tfrac{1}{2} \mathrm{tr} U_{x,ij}\right). \tag{2.34}$$

Nessa expressão, g é a constante de acoplamento e a denota o espaçamento de rede. $U_{x,ij}$ são os elementos fundamentais, normalmente referidos como os operadores de plaqueta, das teorias de calibre em redes, construídos a partir das variáveis $U_{x,i}$,

$$U_{x,i} = \exp\left(-iga A_{x,i}^a \tau^a\right), \tag{2.35}$$

definidas nas ligações entre os vértices da rede, com o entendimento de que x, i corresponde a uma ligação ao longo de uma direção positiva i partindo do vértice x. Os objetos $\tau^a = \sigma^a/2$, $a = 1, 2, 3$, em que σ^a são as matrizes de Pauli, são os geradores hermiteanos do grupo de transformações e $A_{x,i}^a$ são os potenciais que descrevem o campo calibrante. $E_{x,i}^a$ denotam os campos elétricos. Para completar a cena dada é preciso ainda explicitar a natureza dos operadores de plaqueta $U_{x,ij}$. Ocorre que um tal operador é definido formalmente como um circuito ordenado de

U's do tipo:

$$U_{x,ij} \equiv U_{x,i}\, U_{x+i,j}\, U^{-1}_{x+j,i}\, U^{-1}_{x,j} \tag{2.36}$$

com $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$. Combinando as exponenciais que aí aparecem por meio do uso da relação de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\exp(gA)\exp(gB) = \exp\big\{g\,(A+B) + \tfrac{1}{2}g^2[A,B] + \cdots\big\}, \tag{2.37}$$

o resultado que se obtém é

$$U_{x,ij} = \exp\big(-iga^2 F_{x,ij} + \cdots\big), \tag{2.38}$$

em que $F_{x,ij}$ é o tensor intensidade de campo

$$F_{x,ij} = \frac{1}{a}\left(A_{x+i,j} - A_{x,j} - A_{x+j,i} + A_{x,i}\right) - ig\left[A_{x,i}, A_{x,j}\right], \quad A_{x,i} = A^a_{x,i}\tau^a. \tag{2.39}$$

Tomando agora o limite em que $a \to 0$, é imediato obter, a partir de (2.38), que

$$\mathrm{tr}U_{x,ij} = \mathrm{tr}1_2 - \tfrac{1}{2}g^2a^4\mathrm{tr}F^2_{x,ij} + \mathcal{O}(a^6), \tag{2.40}$$

sendo 1_2 a matriz identidade de dimensão 2. Ao determinar este resultado, usamos o fato de que $\mathrm{tr}F_{x,ij} = 0$. Com a equação (2.40) em mãos, a soma sobre plaquetas que aparece em (2.34) pode por sua vez ser expressa como

$$\Sigma_p \equiv \sum_x \sum_{1\leq i<j\leq 3} \big(1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}U_{x,ij}\big) \approx g^2a^4 \sum_{x,i,j} \tfrac{1}{8}\mathrm{tr}F^2_{x,ij}\,, \tag{2.41}$$

em virtude da anti-simetria de $F_{x,ij}$. Isto conduz finalmente a

$$\frac{4}{g^2a}\,\Sigma_p \approx a^3 \sum_{x,i,j} \tfrac{1}{4}F^a_{x,ij}F^a_{x,ij}, \tag{2.42}$$

quando se dá conta do fato de que $\mathrm{tr}(\tau^a\tau^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$. Esse último resultado evidencia que o que acabamos de expor recupera a contribuição do termo clássico de energia potencial no limite do contínuo, como esperado.

Para assistir o desenvolvimento da teoria mais adiante, é conveniente representarmos cada elemento de SU(2) por um quarténion $u^\mu = (u^0, \vec{u})$,

$$U = u^0 - i\vec{\sigma}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix} u^0 - iu^3, & -u^2 - iu^1 \\ u^2 - iu^1, & u^0 + iu^3 \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

em que os u^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ são números reais para os quais deve valer a relação $\det U = u^0u^0 + u^au^a = 1$ (esta corresponde à superfície de uma esfera unitária tetradimensional, que é compacta; assim, o grupo SU(2) é compacto), e identificarmos o produto de duas matrizes SU(2) como multiplicação de dois quarténions:

$$U(u)\,U(v) = u^0v^0 - u^av^a - i\sigma^a\big(u^0v^a + v^0u^a + \epsilon^{abc}u^bv^c\big)\,, \tag{2.44}$$

em que foi usado o fato de que $\sigma^a\sigma^b = \delta^{ab} + i\epsilon^{abc}\sigma^c$, sendo ϵ^{abc} o símbolo completamente anti-simétrico em três dimensões. Nessa representação, a operação de traço $\mathrm{tr}(i\sigma^a Q)$, para qualquer quarténion $Q = (q^0, \vec{q})$, leva ao valor $2q^a$, e é desnecessário determinar a parte real q^0, o que é claramente um resultado de importância prática considerável para cálculos. Ainda dentro desse mesmo contexto, além da representação que acaba de ser mencionada, cabe citar aqui outra parametrização de SU(2), e que é também de uso frequente, especificada em termos de uma rotação de um ângulo ω_G em torno de uma direção $\hat{n}$ como

$$U = \exp\left(-i\tfrac{1}{2}A^a\sigma^a\right) = \cos\left(\tfrac{1}{2}\omega_G\right) - i\sin\left(\tfrac{1}{2}\omega_G\right)\vec{\sigma}\cdot\hat{n}, \tag{2.45}$$

com $A^a = \omega_G\hat{n}^a$, $\omega_G^2 = A^aA^a$, $\hat{n}^a = (\sin\vartheta_G\cos\varphi_G, \sin\vartheta_G\sin\varphi_G, \cos\vartheta_G)$, $0 \leq \omega_G \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta_G \leq \pi$ e $0 \leq \varphi_G \leq 2\pi$. Nesta última expressão, o índice x, i foi omitido de forma a evitar complicações técnicas desnecessárias. [Cabe-nos, aqui, fazer um comentário: vê-se, do exposto acima, que o quarténion está relacionado com A^a pelas relações $u^0 = \cos(\omega_G/2)$ e $u^a = \hat{n}^a\sin(\omega_G/2)$, para as quais é imediato verificar a validade da relação $\det U = 1$, por causa de $|\hat{n}| = 1$.]

Neste ponto de nossa discussão, vale a pena observar que a hamiltoniana dada em (2.34) tem a propriedade de ser invariante de escala. Para nos convencermos disto basta fazer uso das variáveis adimensionais $\bar{H} = g^2Ha$ e $\bar{E}^a_{x,i} = gE^a_{x,i}a^2$, em termos das quais a hamiltoniana de interesse pode portanto ser levada para a forma

$$\bar{H} = \sum_{x,i}\tfrac{1}{2}\bar{E}^a_{x,i}\bar{E}^a_{x,i} + 4\sum_{x}\sum_{1\leq i<j\leq 3}\left(1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}U_{x,ij}\right), \tag{2.46}$$

que revela o fato de que a hamiltoniana do sistema físico considerado tem como único parâmetro a energia $\bar{H}$, enquanto o espaçamento da rede e a constante de acoplamento não são exibidas explicitamente.

Agora nos voltamos ao cálculo das equações de movimento clássicas para a teoria em questão. Para isso será considerado o formalismo canônico da física clássica, segundo o qual a dependência temporal relativa a uma quantidade genérica X corresponde à que é prescrita pela equação de movimento de primeira ordem (particularizando para $\bar{H}$)

$$\dot{X} = \frac{1}{g^2}\left[X, \bar{H}\right]_{\mathrm{cl.}}, \tag{2.47}$$

em que $\bar{t} = t/a$ é entendido como sendo a variável independente apropriada no cálculo da derivada. Na expressão acima, o comutador $\left[X, \bar{H}\right]_{\mathrm{cl.}}$ designa o parêntese de Poisson clássico de X e $\bar{H}$, definido da forma usual como

$$\left[X, \bar{H}\right]_{\mathrm{cl.}} \equiv \frac{\partial X}{\partial q_s}\frac{\partial \bar{H}}{\partial p_s} - \frac{\partial X}{\partial p_s}\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_s} \quad \text{(com soma sobre o índice } s\text{)}, \tag{2.48}$$

sendo que $\{q_s, p_s\}$ correspondem a pares de variáveis canonicamente conjugadas. Aplicando-se, agora, a prescrição geral (2.47) ao caso da variável de ligação, vem que

$$\dot{U}_l = i\bar{E}_l U_l\,, \quad \bar{E}_l = \bar{E}_l^a \tau^a. \tag{2.49}$$

Nesta última forma foi usada a abreviatura $l \equiv \{x, i\}$. A sua obtenção pode ser verificada imediatamente notando que o cálculo do comutador de $\bar{E}_l^a$ com U_l resulta em (lembrando que o momento canonicamente conjugado a A_i^a é E^{ia})

$$\left[\bar{E}_l^a, U_m\right]_{\text{cl.}} = -ig^2\delta_{lm}\tau^a U_m. \tag{2.50}$$

A equação de movimento (2.49) para U_l pode por sua vez ser convenientemente particularizada para a representação (2.43). Nesse caso, encontramos que as equações resultantes para as componentes do quarténion U devem satisfazer

$$\dot{u}_l^0 = \frac{1}{2}\bar{E}_l^a u_l^a, \quad \dot{u}_l^a = -\frac{1}{2}\left(\bar{E}_l^a u_l^0 + \epsilon^{abc}\bar{E}_l^b u_l^c\right), \tag{2.51}$$

as quais permitem escrever

$$\dot{u}_l^0 u_l^0 + \dot{u}_l^a u_l^a = 0, \tag{2.52}$$

que exprime a conservação do módulo quadrado do quarténion U, $|U|^2 = \det U$.

No que se refere ao cômputo das equações que determinam a evolução temporal dos campos elétricos, um cálculo direto fornece

$$\dot{\bar{E}}_l^a = i\sum_p \operatorname{tr}\left(\sigma^a U_p\right), \tag{2.53}$$

onde a soma sobre p leva em conta as quatro plaquetas que estão em contato com o link l (ver Fig. 2.5a) e U_p é a plaqueta elementar, ordenada em sequência, começando por U_l, conforme a representação esquemática mostrada na Fig. 2.5b. Notemos aqui que a validade das soluções obtidas através das equações (2.51) e (2.53) depende de estar satisfeita a lei de Gauss [71] (optou-se por uma notação diferente da habitual, para uma maior clareza na interpretação da equação)

$$\sum_{j=1}^{3}\left[E_{Lj}^a(\mathbf{n}) - E_{Rj}^a(\mathbf{n}-\mathbf{e}_j)\right] = 0, \tag{2.54}$$

na qual foram introduzidos dois conjuntos distintos de variáveis de link, E_{Ll}^a e E_{Rl}^a. Estes não são independentes um do outro, mas estão relacionados através da equação $E_{Ll}^a\sigma^a = E_{Rl}^b U_l \sigma^b U_l^{-1}$. [$E_L^a$ e E_R^a realizam uma representação da álgebra de Lie de SU(2) e correspondem aos geradores de esquerda e de direita desse grupo, respectivamente.] Também foram introduzidos na equação acima, um vetor posição $\mathbf{n}$ cujos elementos identificam um vértice na rede e, ainda, um vetor unitário $\mathbf{e}_j$, que está associado à j-ésima direção espacial positiva. Na presente discussão, escolhemos como momentos conjugados as variáveis de link E_{Ll}^a.

2.3.1 Divergência de trajetórias vizinhas e maior expoente de Liapunov

Agora chegamos a um ponto no nosso estudo no qual seria natural averiguar se o sistema hamiltoniano dado em (2.34) é (ou não) caótico. Para fazer isso, necessita-se somente verificar se sua evolução no tempo depende sensivelmente das condições iniciais, que se traduz em descobrir se duas trajetórias inicialmente próximas divergem exponencialmente, conforme esperamos que tenha ficado claro ao longo do texto apresentado na seção anterior. Para observar a possível divergência exponencial no tempo de duas trajetórias (U_l, E_l^a) e $(U_l', E_l'^a)$ (as variáveis sem linhas superescritas correspondem à trajetória de referência, enquanto que as variáveis com linhas correspondem à trajetória vizinha) no espaço de fases das configurações clássicas de campos de calibre, uma distância será agora definida neste espaço. Em conformidade com o trabalho original [8] sobre o tema aqui discutido, definimos a seguinte medida de proximidade invariante de calibre:

$$d_G[U_l, U_l'] := \frac{1}{2N_p} \sum_p |\mathrm{tr}U_p - \mathrm{tr}U_p'|, \tag{2.55}$$

onde N_p é o número total de plaquetas elementares: $N_p = 3N^3$, sendo N o tamanho da rede. No limite do contínuo, em que o espaçamento da rede vai a zero, d_G é proporcional à diferença local absoluta na energia magnética de dois campos de calibre diferentes. A nossa primeira tarefa numérica, que vamos a seguir discutir, consistirá, assim, em evoluir pares de configurações iniciais próximas por intermédio da integração temporal das equações de movimento de Hamilton e monitorar as distâncias entre as duas configurações de acordo com a definição acima.

Uma vez que planejamos resolver as equações de movimento numericamente, precisamos fornecer condições prévias apropriadas. Inicialmente, fixamos todos os campos elétricos em zero de modo a cumprir mais facilmente a lei de Gauss. Para inicializar as matrizes de link U_l, seguimos o procedimento delineado em [8]. Neste procedimento, partimos de uma configuração randômica obtida selecionando-se arbitrariamente para cada link l um potencial $A_l^a = \omega_{G,l}\hat{n}_l^a(\vartheta_G, \varphi_G)$. Uma segunda configuração é então escolhida na vizinhança próxima da primeira ($d_G(t = 0)$ é pequeno). Isso é feito escolhendo-se aleatoriamente ângulos ligeiramente diferentes (controlados por um parâmetro ϵ, $|\epsilon| \ll 1$) para cada link correspondente da segunda configuração com respeito àquele na primeira. Para a configuração inicial de referência, escolhemos $\omega_{G,l} \in [0, 2\pi\delta]$ (com $\delta \leq 1$). O valor de δ controla a energia média por plaqueta, $E_p = \bar{H}/N_p$, das configurações iniciais de campos de calibre. Para δ pequeno, a energia gerada dessa maneira cresce segundo δ^2 enquanto que, no limite $\delta \to 1$, atinge o valor de saturação $E_p = 4$ (ver Fig. 2.6). Essa saturação ocorre porque o termo magnético na hamiltoniana (2.46) é uniformemente limitado, $0 \leq 1 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}U_p \leq 2$, devido à compactificação de SU(2).

Antes de relatarmos os resultados da tarefa a qual nos propomos a realizar, vamos nos ater por um momento às tecnicalidades inerentes a estes resultados. Conforme adiantamos anteriormente, nosso objetivo é determinar numericamente a distância d_G associada a duas soluções das equações (2.51) e (2.53). Para o cálculo das soluções, empregou-se novamente o integrador numérico Runge-Kutta de passo fixo de quarta ordem. O passo de integração no tempo usado foi pequeno o bastante para assegurar a conservação da energia até um mínimo de seis dígitos significativos corretos. Também testamos a acuidade do nosso código de simulação (em Fortran) no que diz respeito à preservação do comprimento de cada variável quarteniônica. Devido, principalmente, ao acúmulo de arredondamentos ao longo das operações, a precisão das medidas do determinante de U_l deteriora-se progressivamente com o tempo. Para contornar esse problema, optamos por reescalar os quarténions a cada passo de tempo, de modo a manterem-se permanentemente ajustados à propriedade de determinante igual a 1 (e, consequentemente, à equação (2.52)). No que concerne à equação de vínculo, Eq. (2.54), detectamos em nossas simulações quantidades insignificantes de violação da mesma, sendo no máximo da ordem de 10^{-6} por vértice, o que se deve inteiramente à falta de maior precisão nos cálculos efetuados.

Agora pode-se dar início à apresentação e análise dos resultados obtidos até então. A Fig. 2.7 mostra a evolução no tempo de $\log d_G$ para pares de configurações adjacentes (cada um tendo uma energia diferente) numa rede cúbica com vinte vértices de lado. Para valores de δ maiores que 0.3, a distância d_G começa a crescer de modo exponencial quase imediatamente e, em seguida, satura para valores elevados de $\bar{t}$ (ver Fig. 2.7a), devido à natureza compacta do grupo SU(2), enquanto observa-se que quanto menor o parâmetro δ, partindo-se do valor $\delta = 0.3$ e decrescendo até 0.05, maior será o período de latência durante o qual a distância d_G oscilará na fase anterior ao seu crescimento exponencial (ver Fig. 2.7b) e, portanto, maior será a incerteza associada à determinação do expoente de Liapunov dominante para essas situações (o qual identificamos como sendo a inclinação de $\log d_G$ na região linear). O comportamento oscilante inicial, característico da distância entre duas configurações de calibre próximas ao estado de menor energia do sistema (veja curvas para $\delta = 0.1$ e 0.05 na Fig. 2.7b), está particularmente bem retratado na curva para $\delta = 0.03$ e $N = 10$ na Fig. 2.8. O motivo de tal comportamento é atribuído à influência crescente daqueles expoentes perto de zero [8, 12]. [Em uma rede com N^3 vértices, o espectro de Liapunov do sistema de Yang-Mills consiste de um número grande de expoentes λ_i ($i = 1, \ldots, 18N^3$), pois a cada vértice da rede, associam-se três direções espaciais e três estados de cor, para campos elétricos e magnéticos.] Em [9] se observou um comportamento similar de divergência exponencial para a distância d_G no caso do grupo SU(3) ao reportado aqui para SU(2).

Passemos agora aos resultados por nós obtidos acerca da dependência do maior

expoente de Liapunov positivo com relação a variações da energia das configurações iniciais e variações do tamanho da rede. Conforme adiantamos no parágrafo precedente, uma aproximação para d_G por uma função exponencial fornece o máximo expoente de Liapunov $\lambda_{\max}$. Medições realizadas em [8, 10] sugeriram que $\lambda_{\max}$ depende linearmente da energia, $\lambda_{\max} a \approx \frac{1}{6} g^2 H a$; i.e., $\lambda_{\max}$ não depende do parâmetro de rede a. (Uma investigação mais orientada para a melhoria da qualidade dos cálculos apresentados por esses autores pode ser encontrada em [43].) O melhor ajuste linear através da origem para os dados da Fig. 2.9 é de fato muito próximo de 1/6. Entretanto, a qualidade do ajuste fica muito comprometida no limite de pequenas energias – resultado da substancial modulação a que se sujeita a evolução de d_G nas situações em que $\delta \ll 1$ – e por isso causa incerteza no cálculo do maior expoente. De uma forma geral, os resultados da Fig. 2.9 exibem desvios sistemáticos em relação à reta ajustada; erros desse tipo foram reportados por Krasnitz [72]. Em particular, os resultados correspondentes a densidades de energia altas tendem a serem mais contaminados pelos artefatos da rede devidos à compacidade do espaço de fases [73].

Além da análise de susceptibilidade a variações de energia, a dependência do maior expoente também foi estudada com respeito à variabilidade de N. Enquanto as flutuações em $\log d_G$ aumentam ligeiramente com a diminuição do tamanho da rede, não observamos dentro dos limites da aproximação envolvida no cálculo numérico uma dependência sistemática de $\lambda_{\max}$ com relação a N para $N \geq 6$ e $\delta > 0.15$. Os resultados da evolução no tempo de $\log d_G$ referentes às simulações realizadas em redes de tamanho $N = 6$, 10, 20 e 28 na energia intermediária $g^2 E_p a \approx 2.69$ são mostrados na Fig. 2.10. A primeira impressão deixada por aquela figura, e mais óbvia, é a rápida convergência; com a exceção de pequenas flutuações (visualmente pouco apreciáveis), as curvas dificilmente desviam-se umas das outras. Já no regime de pequenas energias, faz-se necessário remeter-nos a outro método, pois as flutuações da distância substituem a divergência exponencial em energias baixas. Um método mais eficaz para calcular o maior expoente de Liapunov positivo utiliza o algoritmo de reescalamento [10, 11, 12]. Em linhas bastante gerais, seu foco está em acompanhar duas configurações vizinhas durante um período arbitrariamente longo de tempo, reescalando-se periodicamente a distância a um pequeno valor. A exatidão do valor obtido, dessa forma, para o maior expoente fica limitada somente pelo tempo que se dispõe para gastar nos cálculos. Nas Figs. 2.11a e 2.11b apresentamos os resultados que obtivemos com a utilização desse método juntamente com um esquema de extrapolação linear na variável $\bar{t}^{-1/2}$. Esses resultados dizem respeito à dependência temporal de $\lambda_{\max}$ para redes de tamanho $N = 4$, 6, 10 e 20 em duas diferentes energias, 0.126 e 1.794. O valor extrapolado de $\lambda_{\max}$ cai aproximadamente por um fator três de $N = 4$ (≈ 0.0532) para $N = 20$ (≈ 0.0184), como

determina a Fig. 2.11a. A Fig. 2.11b, que por sua vez mostra o valor extrapolado do máximo expoente versus $N^{-3/2}$, demonstra que a dependência no tamanho da rede se torna muito mais fraca para valores maiores de energia, tal como $g^2 E_p a \approx 1.794$; em outros termos, os efeitos de volume finito crescem quando $g^2 E_p a$ decresce. Face aos resultados obtidos, sublinha-se a necessidade de acompanhamento da evolução de trajetórias próximas por tempos muito longos sobre redes maiores a fim de se obterem melhores resultados no limite de baixa energia. O conhecimento daí resultante é essencial para testar a relação entre o maior expoente de Liapunov positivo e a taxa de amortecimento do plasmon, como sugerido na Ref. [15].

A conclusão geral que extraímos do estudo realizado nesta terceira (e última) seção pode ser resumida no seguinte. Os resultados apresentados fornecem evidências numéricas de que a dinâmica hamiltoniana em tempo real da teoria de calibre SU(2) pura numa rede exibe caos determinístico. Para chegar a essa conclusão, observamos o fenômeno de divergência exponencial de trajetórias inicialmente próximas. Vimos que essa divergência, tal como medida pelo maior expoente de Liapunov positivo, aumenta com o crescimento da energia de excitação. Adicionalmente à verificação da ocorrência de caos, a metodologia empregada para estimar o maior expoente, com base naquela desenvolvida nas Refs. [10, 11, 12], indicou um significante efeito de volume finito para energias pequenas, tal como antecipado em [10]. Por fim, cabe ainda colocar que o estudo aqui realizado permite que estabeleçamos agora contato com outras teorias, como a teoria de Yang-Mills-Higgs com grupo de estrutura SU(2), que já se faz presente [46] no que se refere ao estudo de caos dinâmico nas teorias com quebra espontânea de simetria – e este será tema do capítulo que segue.

Encerra-se este capítulo no qual foram apresentados estudos preliminares sobre a presença de caos nas teorias de campos de calibre. Usou-se para avaliar com rigor o caos, o conceito de expoente de Liapunov associado a fluxos sem vínculos. Também se fez uso do método das seções de Poincaré para permitir a caracterização qualitativa de efeitos não-lineares da dinâmica de um sistema com dois graus de liberdade.

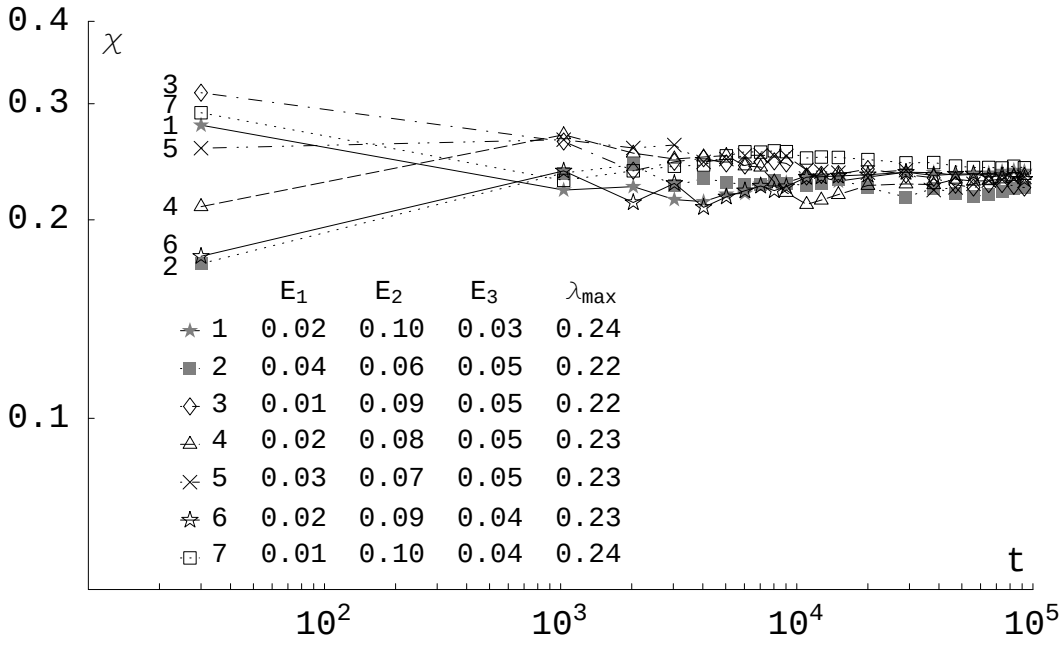

Figura 2.1: Curvas para $\chi(t) = (1/t)\log\|\boldsymbol{\xi}(t)\|$ como uma função de t numa escala log-log para sete diferentes condições iniciais, com $E = 0.15$. Por definição, $\lambda_{\max} = \lim_{t\to\infty}\chi(t)$.

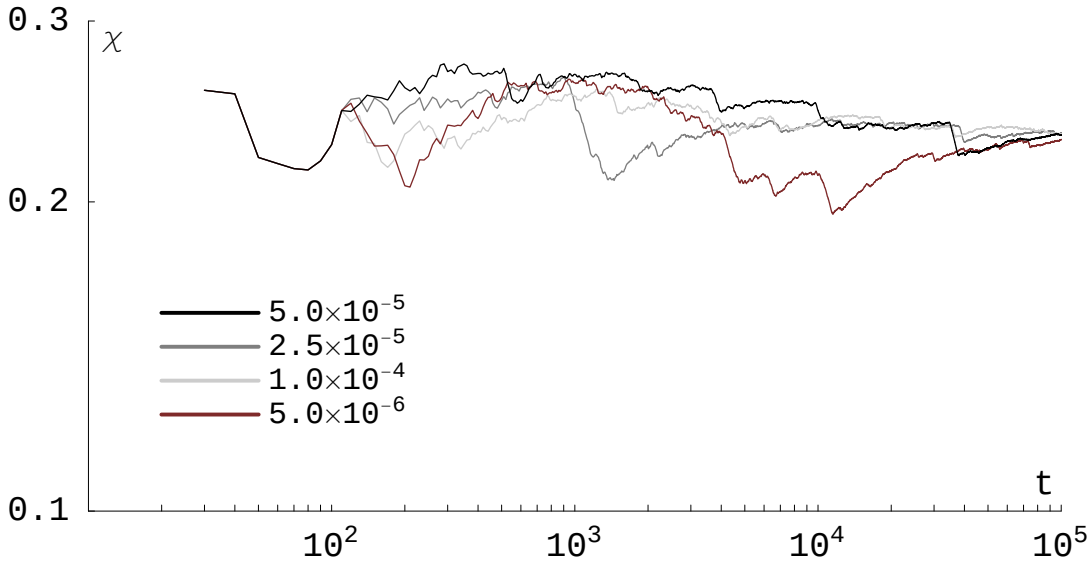

Figura 2.2: Verificação da estabilidade dos resultados para $\lambda_{\max} = \lim_{t\to\infty} \chi(t)$ com respeito a mudanças no passo de integração. As condições iniciais são aquelas da curva 5 e os passos de integração variam de 5×10^{-6} a 10^{-4}.

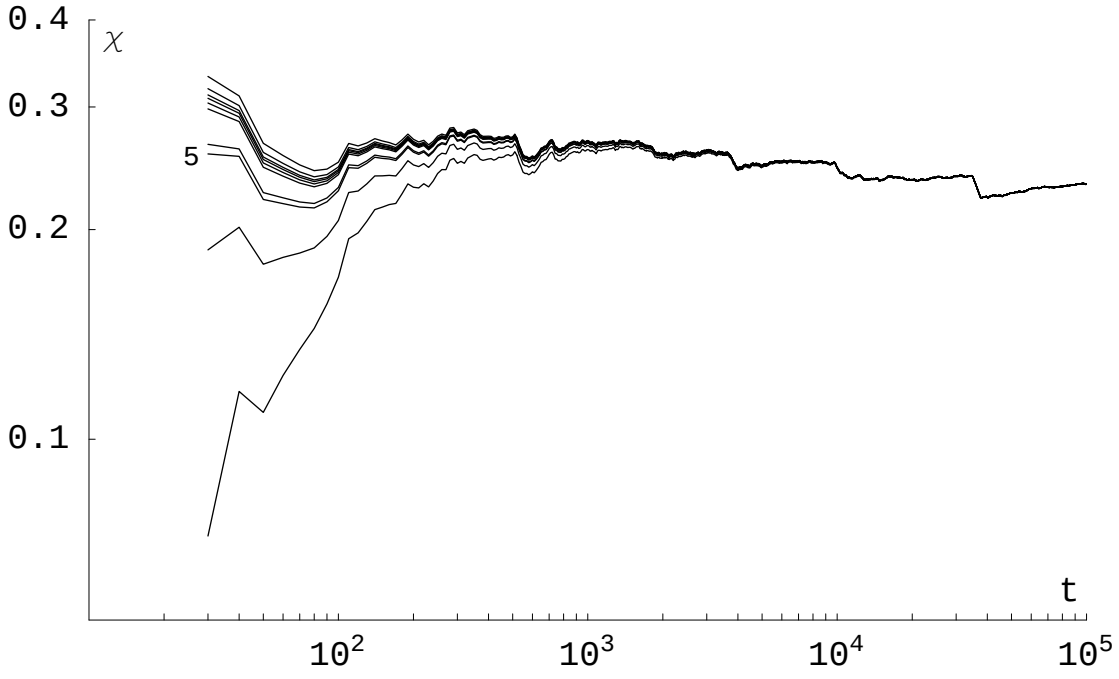

Figura 2.3: Comportamento de χ na energia $E = 0.15$, para vários valores de $\xi(0)$. Para efeito de comparação, a curva 5 foi incluída.

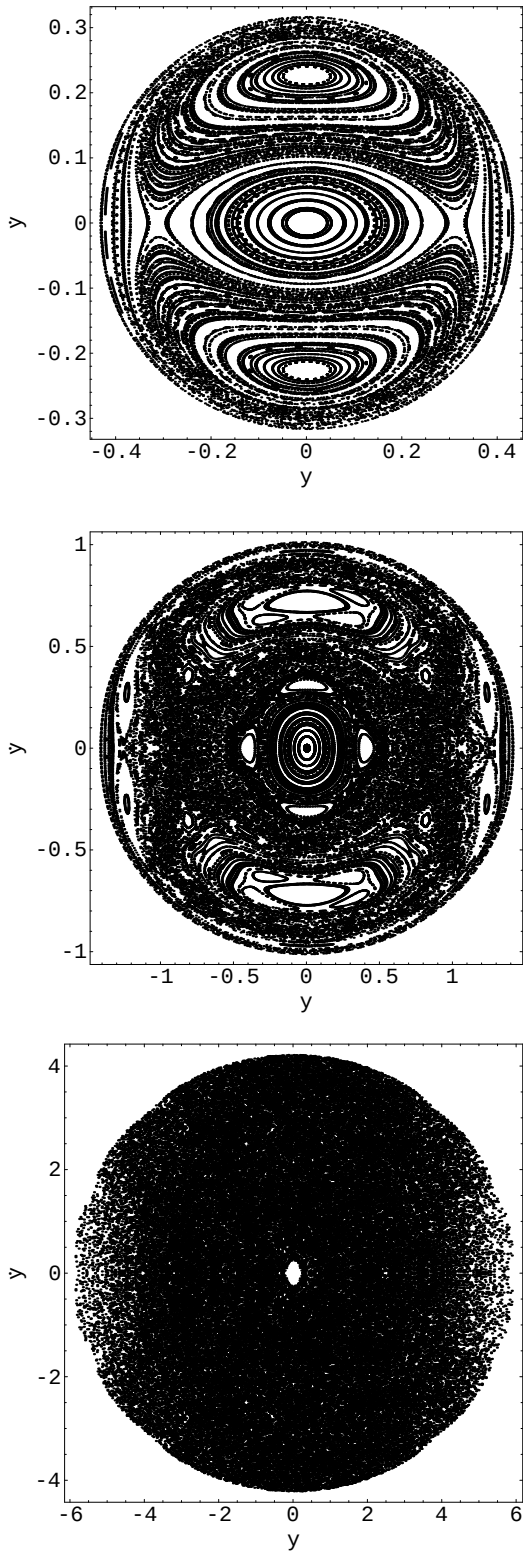

Figura 2.4: Superfícies de seção de Poincaré para a hamiltoniana (2.30). A energia em cada seção é: $E = 0.0517$ (painel superior), $E = 0.521$ (painel central), e $E = 8.93$ (painel inferior).

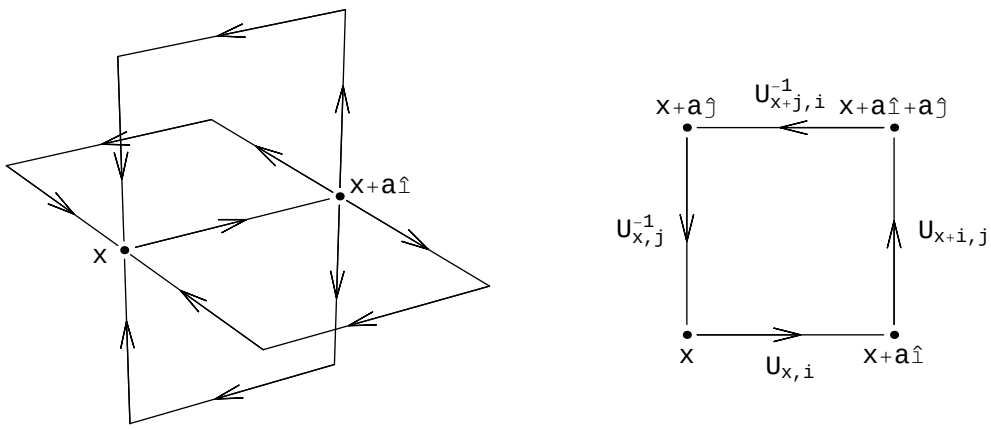

Figura 2.5: À esquerda da figura está exemplificado o diagrama contendo as plaquetas que contribuem para o cálculo da Eq. (2.53), e à direita o circuito de U's correspondente a uma plaqueta elementar numa rede cúbica.

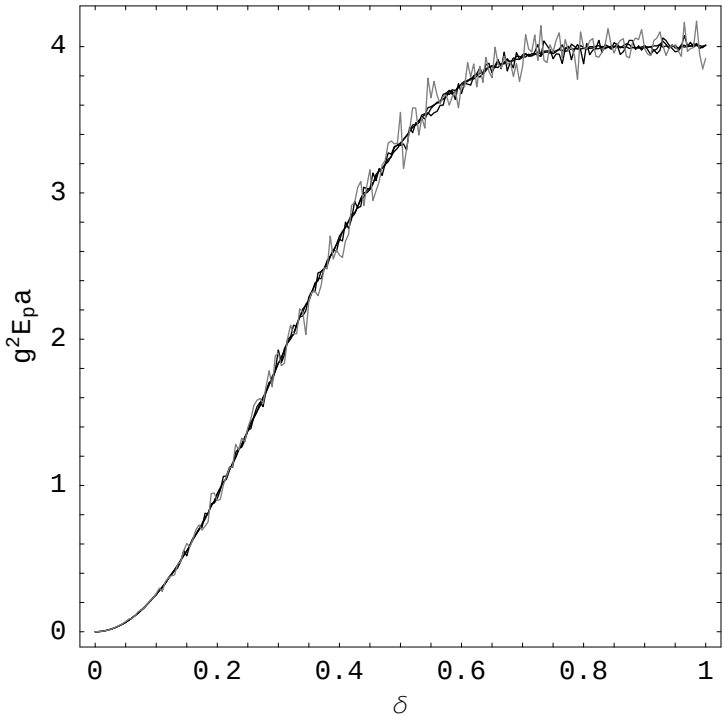

Figura 2.6: Gráfico relacionando a energia g^2E_pa versus o parâmetro δ para redes de tamanho $N = 6$, 10, 20 e 28. Uma vez que os cálculos numéricos são realizados em redes finitas, eles estão sujeitos a erros devido ao volume finito das redes. Isto pode ser verificado calculando-se a mesma quantidade física em redes com tamanhos diferentes. Para a energia g^2E_pa, percebe-se pelo gráfico que o efeito do erro de volume finito já é pequeno o suficiente para uma rede cúbica 6^3, que corresponde à curva de cor cinza. Todas as demais situações consideradas dão resultados praticamente equivalentes.

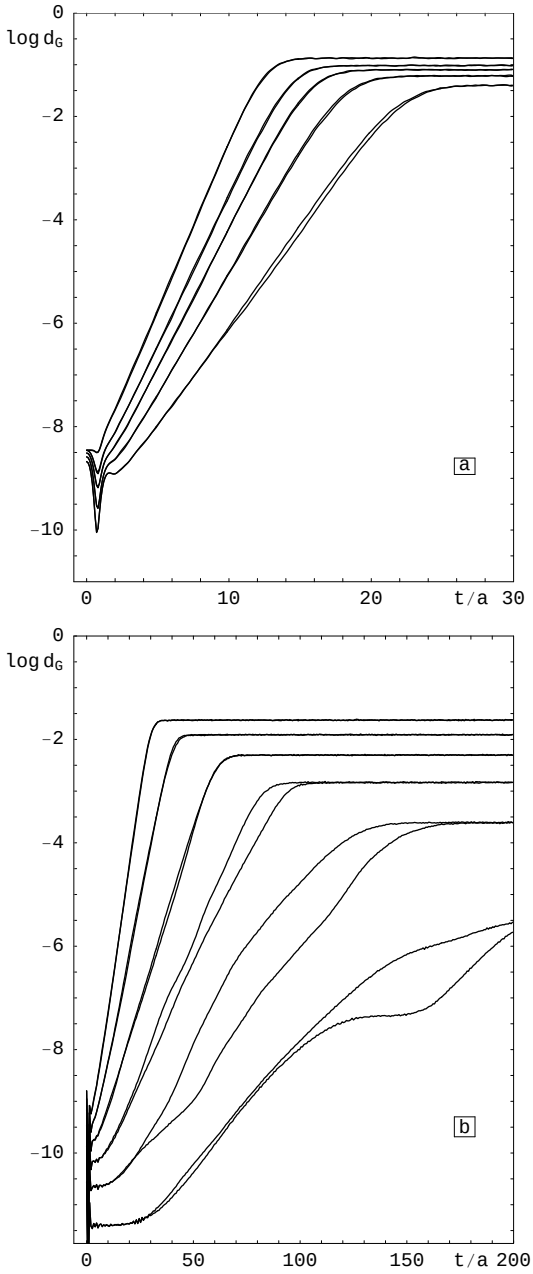

Figura 2.7: Evolução no tempo do logaritmo da distância entre duas configurações randômicas iniciais para diversas energias médias numa rede de 20^3 vértices com condições de fronteira periódicas em todas as três direções espaciais. As curvas correspondem, de cima para baixo, aos parâmetros (a) $\delta = 1, 0.5, 0.45, 0.4, 0.35$ e (b) $\delta = 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05$. Para cada valor de δ, duas curvas são mostradas, que são indistinguíveis quando $\delta > 0.15$.

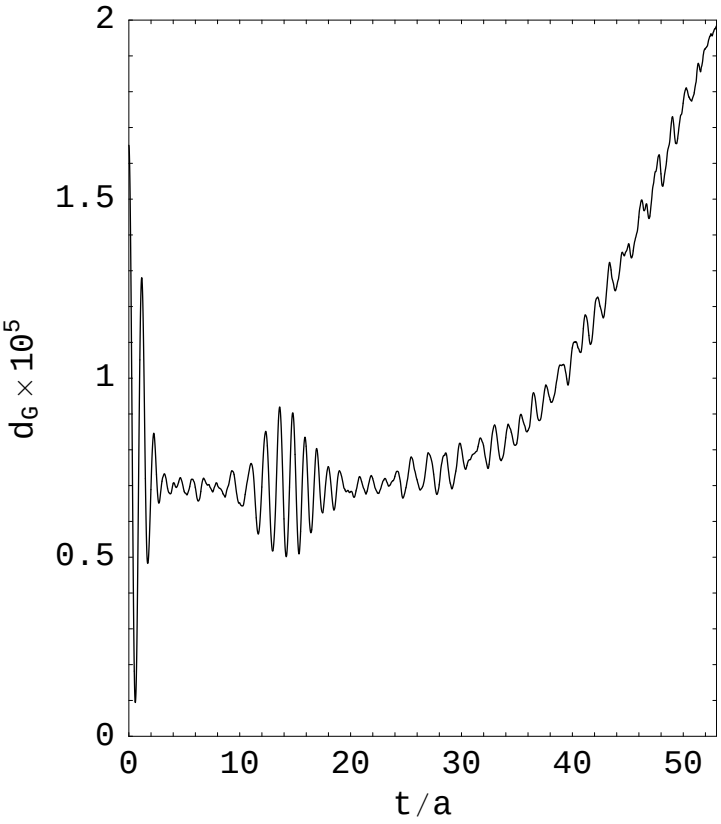

Figura 2.8: Oscilações iniciais da distância entre duas configurações de calibre próximas ao estado de vácuo ($\delta = 0.03$ e $N = 10$).

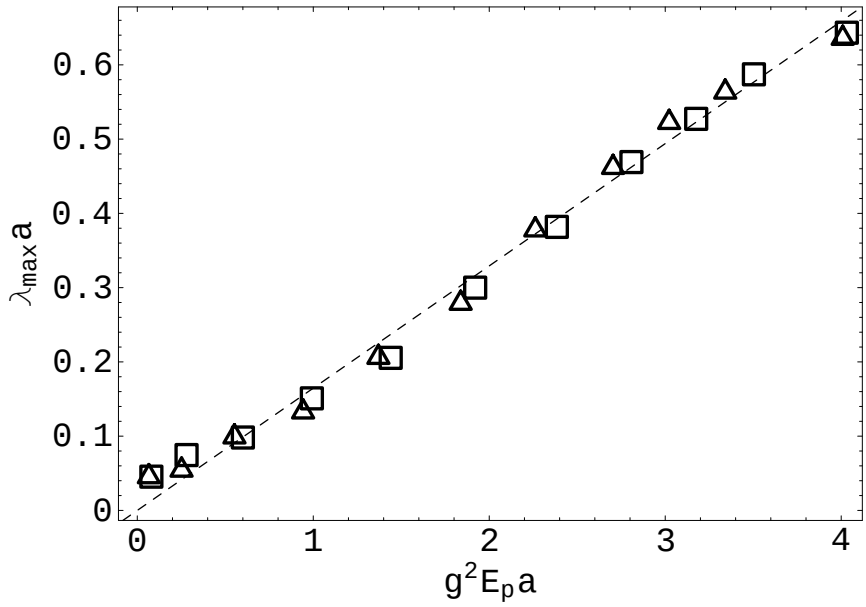

Figura 2.9: Dependência da taxa de crescimento exponencial com a energia média por plaqueta de uma configuração escolhida randomicamente. Os triângulos indicam nossos resultados, enquanto que os quadrados referem-se aos resultados da Ref. [8]. A linha tracejada que passa pela origem é uma aproximação linear e tem inclinação aproximadamente igual a 0.165.

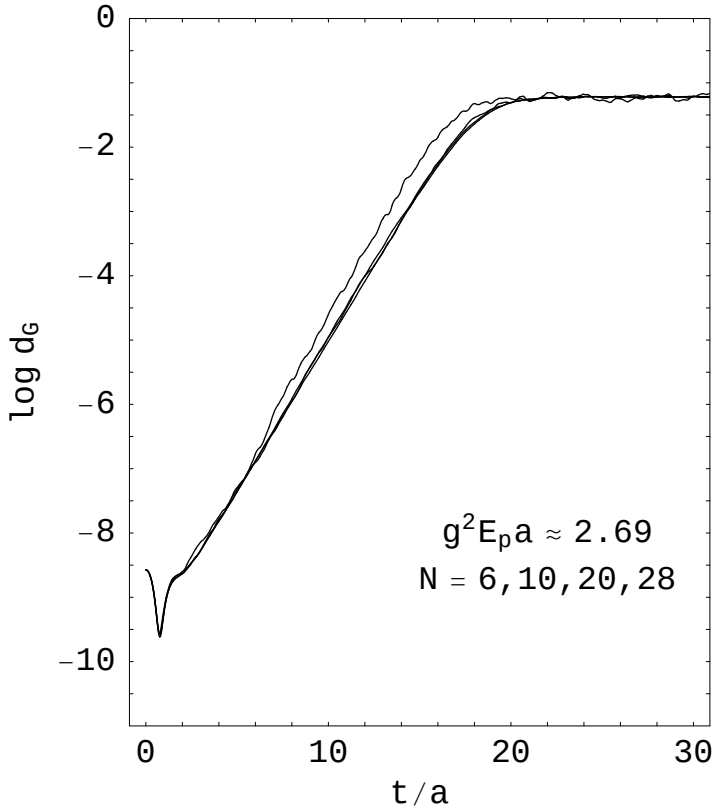

Figura 2.10: Divergência exponencial de configurações adjacentes em uma energia intermediária para redes de diferentes tamanhos como uma função do tempo t/a. Todas as curvas correspondem a $\delta = 0.4$.

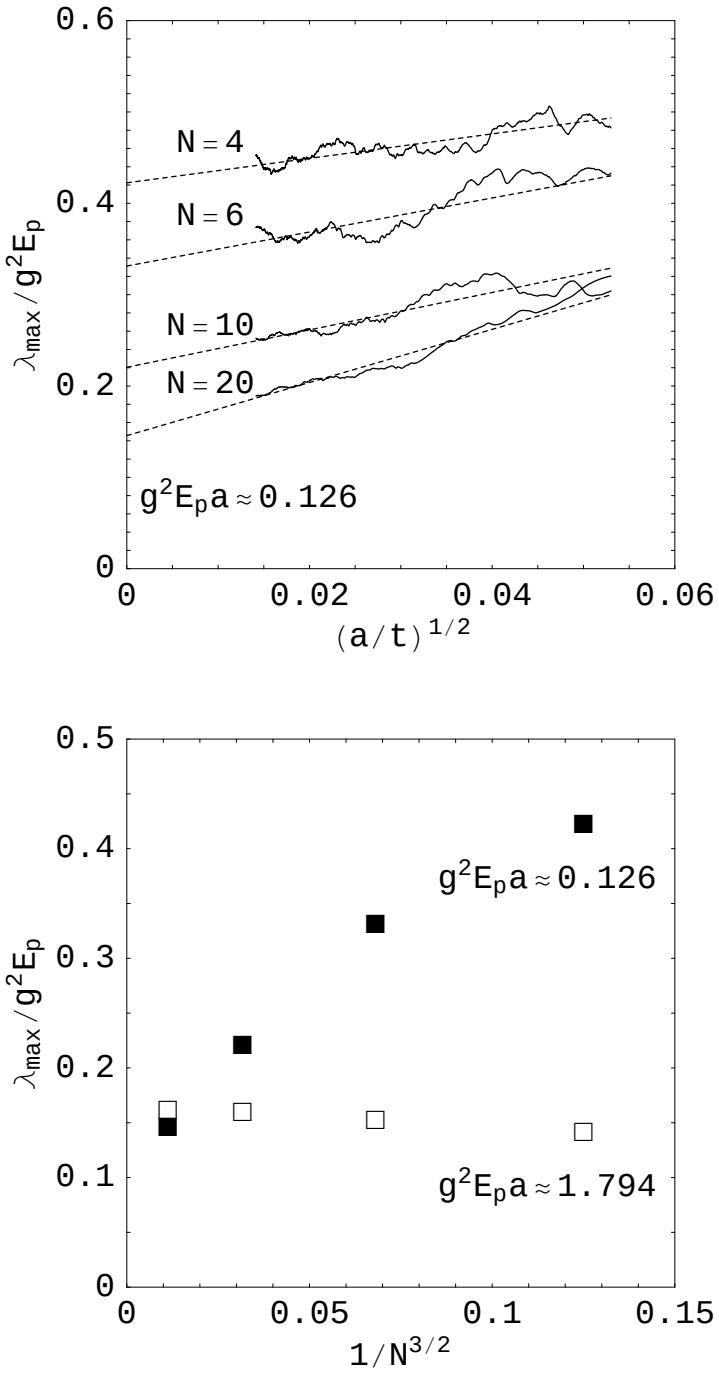

Figura 2.11: Análise de escala de tamanho finito para os expoentes de Liapunov. A parte superior da figura mostra a evolução dos expoentes de Liapunov obtida via procedimento de reescalamento bem como a extrapolação linear para redes de tamanho $N = 4$, 6, 10 e 20 no valor da energia $g^2E_pa \approx 0.126$ e a parte inferior mostra a dependência dos expoentes extrapolados para dois valores de energia: $g^2E_pa \approx 0.126$ e $g^2E_pa \approx 1.794$.

Capítulo 3

Dinâmica de Yang-Mills-Higgs em uma rede espacial

A fim de identificar e mensurar propriedades caóticas de um sistema dinâmico, tem-se de acompanhar a evolução de suas variáveis dinâmicas durante períodos de tempo suficientemente longos. Um tratamento numérico de teorias de campos ainda exige que se aproxime espaço por uma rede discreta. A análoga manipulação da variável de tempo (como tipicamente implementado no espaço-tempo euclideano sujeito a condições de fronteira periódicas) é inadequada para investigações de caos, todavia, já que ela iria não aceitadamente restringir os tempos de evolução acessíveis. Por conseguinte, recorremos à formulação hamiltoniana da teoria de campos na rede [70] no espaço de Minkowski, onde campos de calibre são restritos ao calibre temporal e o tempo permanece uma variável ilimitada e (em princípio) contínua. Um benefício a mais desta formulação é que simetrias residuais de calibre impostas pela lei de Gauss, podem ser corretamente preservadas ao longo da evolução do tempo. Propomo-nos agora a estudar sob este enfoque a dinâmica, em tempo real, de campos de calibre tendo em vista suas interações com os campos de Higgs. (Maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, nas Refs. [70, 71].)

Este capítulo é organizado como segue: na primeira seção, vamos traçar brevemente as linhas gerais sobre a teoria de Yang-Mills-Higgs na rede para o grupo de calibre SU(2), derivar as equações do movimento correspondentes e discutir medidas de distância adequadas no espaço de configurações de campos de calibre e de Higgs. A seção seguinte discorre sobre os ingredientes principais de nossa análise numérica, examina efeitos de tamanho e de tempo finitos, discute a evolução temporal da transferência de energia entre os diversos setores de campo, e avalia a taxa de divergência entre configurações randômicas inicialmente próximas, em tempos intermediários. E com base nisto, geramos, na última seção desse capítulo, um conjunto representativo de expoentes de Liapunov máximos, discutimos sua dependência energética e relação com a taxa de amortecimento do plasmon, para então estender a análise

através do cálculo de um grupo de longas séries temporais dos expoentes de Liapunov; e finalmente avaliamos o impacto dos campos de Higgs na instabilidade de Savvidi de campos magnéticos constantes.

3.1 Formulação hamiltoniana na rede e medidas de distância

Nesta primeira parte da presente seção, passaremos a resumir aspectos pertinentes da formulação hamiltoniana da teoria de Yang-Mills-Higgs SU(2) (3+1)-dimensional em uma rede cúbica espacial sujeita a condições de fronteira periódicas; e, mais à frente, na segunda parte estabeleceremos as medidas de distância necessárias para determinar os expoentes de Liapunov partindo-se dos valores numéricos das soluções do sistema de equações diferenciais que modelarão a interação dinâmica entre os campos de calibre e escalar ao longo do tempo.

Como o campo de Higgs ϕ é escolhido para se transformar na representação fundamental do grupo de calibre, esta teoria é equivalente ao setor eletrofraco do modelo padrão no limite de ângulo de Weinberg nulo. O calibre é fixado para $A_0^a = 0$, isto é, para o calibre de Weyl. A fase não-quebrada correspondente a um plasma gauge-Higgs é selecionada através da massa positiva de Higgs e termos de interação, o que permite a comparação dos resultados numéricos obtidos na presente tese com resultados calculados teoricamente por um método de ressoma de loops em temperatura alta (ver abaixo). A hamiltoniana de Yang-Mills-Higgs correspondente pode, desse modo, ser escrita como*

$$H = a^3 \sum_{x,i} \tfrac{1}{2} E^a_{x,i} E^a_{x,i} + \frac{4}{g^2 a} \sum_x \sum_{1 \le i < j \le 3} \left(1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr} U_{x,ij}\right)$$
$$+ a^3 \sum_x \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\dot{\phi}^\dagger_x \dot{\phi}_x) - a \sum_{x,i} \mathrm{tr}\left(\phi^\dagger_x U_{x,i} \phi_{x+i}\right) + a \sum_x \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\phi^\dagger_x \phi_x)\left[6 + a^2 \kappa \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\phi^\dagger_x \phi_x)\right], \quad (3.1)$$

*Para obter esta expressão, partimos da hamiltoniana (2.24) particularizando-a para o caso em que o vácuo da teoria corresponde a uma configuração com todos os campos iguais a zero, e para o campo de Higgs $\phi = (\phi^0 - i\phi^1, \phi^2 - i\phi^3)^{\mathrm{T}}$ – que pode ser representado por um quarténion como:

$$\phi = \phi^0 - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\phi} = R\left[\cos\left(\tfrac{1}{2}\omega_H\right) - i \sin\left(\tfrac{1}{2}\omega_H\right)\vec{\sigma} \cdot \hat{n}\right],$$

onde a decomposição polar se torna novamente mais adequada para se declarar as condições iniciais (cf. Sec. 3.2). Em contraste com as variáveis unitárias de ligação U (que são quarténions numericamente fixados para terem comprimento um), no entanto, o módulo quadrado do campo de Higgs ($R^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\phi^\dagger \phi)$) se mantém não restringido. Empregamos também a seguinte aproximação na rede para a derivada covariante do campo de Higgs:

$$D_i \phi_x = \tfrac{1}{a}\left(U_{x,i}\phi_{x+i} - \phi_x\right).$$

onde g é a constante de acoplamento de calibre, κ o auto-acoplamento de Higgs, a o espaçamento de rede e os pontos denotam derivadas com relação ao tempo. O primeiro termo da hamiltoniana acima, portanto, descreve a energia residindo nos campos elétricos, ao passo que o segundo termo, se aproxima da energia potencial magnética do campo de calibre no limite contínuo simples. Os três termos restantes de (3.1) representam as energias cinética do campo de Higgs, de interação gauge-Higgs e de auto-interação do campo de Higgs, respectivamente.

Tirando partido de suas propriedades escalares clássicas, a hamiltoniana (3.1) pode ser re-expressada em termos das variáveis adimensionais $\bar{H} = g^2 H a$, $\bar{E}^a_{x,i} = gE^a_{x,i}a^2$, $\bar{\phi}_x = ag\phi_x$, $\bar{\kappa} = \kappa/g^2$ e $\bar{t} = t/a$ como

$$\bar{H} = \sum_x \left[\varepsilon_{G,\mathrm{el}}(x) + \varepsilon_{G,\mathrm{mag}}(x) + \varepsilon_{H,\mathrm{kin}}(x) + \varepsilon_{H,\mathrm{pot}}(x) + \varepsilon_{G\text{–}H,\mathrm{pot}}(x)\right], \tag{3.2}$$

com as densidades de energia adimensionais

$$\varepsilon_{G,\mathrm{el}}(x) = \sum_i \tfrac{1}{2}\bar{E}^a_{x,i}\bar{E}^a_{x,i}, \qquad \varepsilon_{G,\mathrm{mag}}(x) = 4\sum_{1\le i<j\le 3}\big(1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}U_{x,ij}\big), \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_{H,\mathrm{kin}}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\dot{\bar{\phi}}^\dagger_x\dot{\bar{\phi}}_x), \qquad \varepsilon_{G\text{–}H,\mathrm{pot}}(x) = -\sum_i \mathrm{tr}\big(\bar{\phi}^\dagger_x U_{x,i}\bar{\phi}_{x+i}\big), \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_{H,\mathrm{pot}}(x) = 3\mathrm{tr}(\bar{\phi}^\dagger_x\bar{\phi}_x) + \frac{\bar{\kappa}}{4}\big[\mathrm{tr}\big(\bar{\phi}^\dagger_x\bar{\phi}_x\big)\big]^2, \tag{3.5}$$

onde os campos são agora funções de $\bar{t}$ e pontos representam $d/d\bar{t}$. A forma acima da hamiltoniana manifesta a dependência formal na energia total $\bar{H}$ e no parâmetro de auto-acoplamento $\bar{\kappa}$, isto é, os dois parâmetros físicos do sistema Yang-Mills-Higgs (enquanto que o espaçamento de rede a e a constante de calibre g são absorvidos para dentro das variáveis e dos campos adimensionais).

O conhecimento da função hamiltoniana permite obter a evolução clássica de campos elétricos, magnéticos e de Higgs. Isto se torna explícito nas equações de Hamilton de primeira ordem correspondentes, as quais obtemos com a ajuda dos parênteses de Poisson para coordenadas canônicas, conforme Eq. (2.47). Especializando-se esta equação para a variável de ligação $U_{x,i}$, e abreviando $l \equiv \{x, i\}$, leva as equações de movimento já derivadas anteriormente em termos da representação quarteniônica nas Eqs. (2.51). A equação governante do movimento para as intensidades de campo elétrico $\bar{E}^a_{x,i}$, que são os momentos canonicamente conjugados das variáveis de ligação, similarmente se torna

$$\dot{\bar{E}}^a_{x,i} = \frac{1}{g^2}\left[\bar{E}^a_{x,i}, \bar{H}\right]_{\mathrm{cl.}} = i\frac{1}{2}\sum_j \mathrm{tr}\big[\sigma^a\big(U_{x,ij} - U^{-1}_{x,ij}\big)\big] + i\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\bar{\phi}^\dagger_x\sigma^a U_{x,i}\bar{\phi}_{x+i}\big), \tag{3.6}$$

onde a soma se estende a todas as quatro plaquetas que têm x, i como link comum; e as equações para o campo de Higgs, seu momento canônico π e seus conjugados

hermiteanos serão as seguintes:

$$\dot{\bar{\phi}}_x = \frac{1}{g^2}\big[\bar{\phi}_x, \bar{H}\big]_{\text{cl.}} = \frac{g}{a}\pi_x^\dagger = \tfrac{1}{2}\,\text{tr}\,\dot{\bar{\phi}}_x, \qquad \dot{\bar{\phi}}_x^\dagger = \frac{1}{g^2}\big[\bar{\phi}_x^\dagger, \bar{H}\big]_{\text{cl.}} = \frac{g}{a}\pi_x, \tag{3.7}$$

e

$$\dot{\pi}_x = \frac{1}{g^2}\big[\pi_x, \bar{H}\big]_{\text{cl.}} = -\frac{1}{2}\frac{a}{g}\,\text{tr}\big\{\big[6 + \bar{\lambda}\,\text{tr}\big(\bar{\phi}_x^\dagger\bar{\phi}_x\big)\big]\bar{\phi}_x^\dagger - 2\sum_i \bar{\phi}_{x-i}^\dagger U_{x-i,i}\big\}, \tag{3.8}$$

$$\dot{\pi}_x^\dagger = \frac{1}{g^2}\big[\pi_x^\dagger, \bar{H}\big]_{\text{cl.}} = -\frac{1}{2}\frac{a}{g}\,\text{tr}\big\{\big[6 + \bar{\lambda}\,\text{tr}\big(\bar{\phi}_x^\dagger\bar{\phi}_x\big)\big]\bar{\phi}_x - 2\sum_i U_{x,i}\,\bar{\phi}_{x+i}\big\}. \tag{3.9}$$

Com o intuito de preparar para uma solução numérica eficiente deste sistema, nós o reescrevemos em termos de duas equações de segunda ordem,

$$\ddot{\bar{\phi}}_x = -\bar{\kappa}\,\text{tr}\big(\bar{\phi}_x^\dagger\bar{\phi}_x\big)\bar{\phi}_x - 6\,\bar{\phi}_x + 2\sum_i U_{x,i}\bar{\phi}_{x+i}, \tag{3.10}$$

$$\ddot{\bar{\phi}}_x^\dagger = -\bar{\kappa}\,\text{tr}\big(\bar{\phi}_x^\dagger\bar{\phi}_x\big)\bar{\phi}_x^\dagger - 6\,\bar{\phi}_x^\dagger + 2\sum_i \bar{\phi}_{x-i}^\dagger U_{x-i,i}, \tag{3.11}$$

e então combinamos essas, adicionando o conjugado hermiteano da segunda equação acima com a primeira, em

$$\ddot{\bar{\phi}}_x = -\bar{\kappa}\,\text{tr}\big(\bar{\phi}_x^\dagger\bar{\phi}_x\big)\bar{\phi}_x - 6\,\bar{\phi}_x + \sum_i \big(U_{x,i}\bar{\phi}_{x+i} + U_{x-i,i}^\dagger\bar{\phi}_{x-i}\big). \tag{3.12}$$

Finalmente, relembramos que a dinâmica completa do modelo Higgs não-abeliano no calibre temporal é recuperada apenas após suplementar as equações de Hamilton (2.51), (3.6) e (3.12) com a lei de Gauss

$$\sum_{i=1}^{3}\big[\bar{E}_{x,i}^a - \tfrac{1}{2}\text{tr}\big(U_{x,-i}^{-1}\sigma^a U_{x,-i}\sigma^b\big)\bar{E}_{x-i,i}^b\big] = \rho_x^a, \tag{3.13}$$

a qual age como uma restrição. Já que o seu parêntese de Poisson com a hamiltoniana (3.2) se anula, a lei de Gauss é preservada sob a evolução no tempo. Para satisfazê-la, precisamos somente nos certificar de que as nossas condições iniciais obedecem a equação acima. Nesta equação, definimos

$$\rho_x^a = \frac{1}{2}\,\text{tr}\big[\text{Im}\big(\dot{\bar{\phi}}_x^\dagger\bar{\phi}_x\sigma^{4-a}\big)\big] \tag{3.14}$$

como a densidade de carga não-abeliana carregada pelo campo de Higgs.

Determinadas as equações básicas da teoria, parte-se para a tarefa de investigar a dinâmica dos campos escalares e de Yang-Mills em interação; qualquer configuração inicial pode ser avançada no tempo mediante integração numérica. Importantes propriedades dinâmicas tais como tempos de termalização podem então ser estudadas num contexto não-perturbativo. Mais adiante nesta tese, veremos que o comportamento dos expoentes de Liapunov está um tanto sujeito às etapas do processo de termalização. Aqui nos concentraremos em estimar o maior expoente de Liapunov

do sistema. A princípio, pode-se definir, através de duas diferentes medidas de distância, dois tais expoentes: um para os campos de calibre e outro para os campos de Higgs. Em seguida, definem-se as medidas de distância utilizadas no nosso estudo.

Como já é sabido, o comportamento caótico de sistemas dinâmicos clássicos se revela numa sensibilidade exponencial de suas evoluções no tempo a pequenas mudanças nas condições iniciais. A caracterização quantitativa desta sensibilidade exige uma medida de distância no espaço de configurações de campos. Mais especificamente, no sistema Yang-Mills-Higgs tem-se de monitorar a separação entre uma configuração de referência (U_l, ϕ) e sua vizinha $(U_l', \phi') = (U_l + \delta U_l, \phi + \delta\phi)$. Utilizaremos medidas de distância individuais nos setores de calibre e de Higgs, justamente com esta finalidade de determinar a taxa de crescimento de distância entre duas configurações de campos de calibre e de Higgs inicialmente próximas, individualmente.

No setor de calibre, adotamos a métrica que foi apresentada anteriormente na Eq. (2.55), e no setor de Higgs, aplicamos a métrica [10]

$$d_H[\phi, \phi'] := \frac{1}{N^3} \sum_x |R_x^2 - R_x'^2|, \tag{3.15}$$

a qual é também invariante de calibre.

Já que o grupo de calibre na rede, e consequentemente o espaço $3\,(N_c^2 - 1)\,N^3$-dimensional de configurações de campos de calibre magnéticos $\mathrm{SU}(N_c)$ em uma rede com N vértices por dimensão, é compacto e de topologia não-trivial, cada vez mais configurações de campos se aproximam da mesma distância d_G quando N aumenta. E, pela mesma razão, esta distância é limitada por cima, e para energia total fixa, um limite análogo se aplica a todo o espaço de fases. Tais limites levam a uma eventual saturação do crescimento da distância entre configurações iniciais próximas. Apesar de isto não limitar a principal propriedade das medidas $d_{G,H}$ para a determinação dos expoentes de Liapunov (ver abaixo), adiciona às típicas incertezas de tempo finito encontradas em suas análises numéricas. Outras fontes de erros de tempo finito surgem a partir da necessidade de extrapolar os resultados numéricos para o limite $t \to \infty$ em que os expoentes de Liapunov máximos são formalmente definidos, e para o limite em que N tende a infinito, o qual certamente excederá a capacidade de representação em ponto flutuante de qualquer computador.

A maneira padrão de se manter erros de tempo finito (relacionados ao cálculo do expoente de Liapunov) sob controle é reescalando periodicamente as distâncias, após intervalos de tempo τ, e extrapolando os resultados numéricos para $(1/t)\log\left[d_{G,H}(t)\right]$ a tempos infinitos. Este método foi utilizado para o cálculo de expoentes de Liapunov em teorias de calibre não-abelianas [10, 11, 12, 43, 46] e para determinar todo

o espectro de Liapunov em pequenas redes [11, 12]. (Para simulações mais recentes em redes um pouco maiores ver Ref. [45] para o espectro real de Liapunov e Ref. [74] para o espectro complexo de Liapunov e a entropia de Kolmogorov-Sinai, obtidos a partir dos autovalores da matriz de monodromia.) Adotamos a mesma técnica para o cálculo de várias trajetórias a tempos longos, a serem discutidas nas Secs. 3.2 e 3.3. Nestes casos, consideramos vantajoso aplicar as medidas de distância alternativas

$$d_G^{(\mathrm{alt})}\big[U_l, \bar{E}_l; U_l', \bar{E}_l'\big] := \Big\{\sum_l \big[\big(U_l - U_l'\big)^2 + \sum_a \big(\bar{E}_l^a - \bar{E}_l^{a\prime}\big)^2\big]\Big\}^{1/2} \tag{3.16}$$

no espaço de fases dos campos de calibre, que é uma variação da medida usada na Ref. [46], e

$$d_H^{(\mathrm{alt})}\big[\bar{\phi}, \bar{\phi}'\big] := \Big\{\sum_x \sum_\alpha \big[\big(\bar{\phi}_x^\alpha - \bar{\phi}_x^{\alpha\prime}\big)^2 + \big(\dot{\bar{\phi}}_x^\alpha - \dot{\bar{\phi}}_x^{\alpha\prime}\big)^2\big]\Big\}^{1/2}, \tag{3.17}$$

adotada da Ref. [46], no setor de Higgs. Obviamente, os expoentes de Liapunov resultantes não deveriam depender da escolha da medida de distância. Conferimos isto por diversos exemplos e confirmamos que as variações entre os valores dos maiores expoentes de Liapunov obtidos das métricas (2.55), (3.15) e (3.16), (3.17) realmente permanecem consideravelmente abaixo do nível de um por cento.

Todavia, mesmo com o reescalamento, os tempos de simulação alcançáveis na prática permanecem limitados pelos recursos computacionais disponíveis. De fato, mesmo em uma teoria de Yang-Mills pura com grupo SU(2) [43], sistemáticos erros de extrapolação tornaram-se desprezíveis apenas após tempos de simulação da ordem de 10^5 unidades de rede. Para dificultar a situação, descobriremos abaixo que a equilibração entre os campos de calibre e de Higgs procede em passo bem mais lento do que entre os campos de calibre sozinhos (cf. Sec. 3.2), e que, como consequência, tempos de simulação substancialmente mais longos são necessários para suprimir tais erros de extrapolação na teoria de Yang-Mills-Higgs. A adesão a um de nossos principais objetivos, a saber, calcular um conjunto um tanto exaustivo de expoentes de Liapunov máximos no espaço de fases e de parâmetros em regime de acoplamento fraco, demandará assim um comprometimento. Na verdade, cobrir o espaço relevante de parâmetros iniciais (em redes de vários tamanhos diferentes) exige o cálculo de um número elevado de trajetórias e, dessa forma, nos força a limitar os tempos totais de simulação.

Felizmente, erros devido ao tamanho da rede e ao tempo finito de simulação podem ser estimados com base no balanço das energias envolvidas (cf. Sec. 3.2) e em algumas órbitas para tempos longos (cf. Sec. 3.3). Como estamos principalmente interessados na dependência dos expoentes de Liapunov com a energia, tamanho da rede e acoplamento, e não em seus valores numéricos propriamente ditos, os objetivos competitivos de supressão de erros e calculabilidade podem ser razoavelmente bem

apaziguados. Nosso comprometimento será seguir a maioria de nossas realizações temporais das distâncias apenas até a saturação das mesmas (e sem reescalamento), o que produz estimativas dos expoentes de Liapunov suficientemente precisas para a maior parte de nossas propostas. Reescalamento das variáveis de estado será utilizado, por outro lado, para as trajetórias longas, nas quais precisamos examinar a transferência de energia e processos de equilibração entre setores de campo de calibre e de Higgs, na Sec. 3.2, e para a análise dos erros de tempo finito dos expoentes de Liapunov de maior valor e propriedades de saturação, na Sec. 3.3.

Na seção seguinte, discutimos, por sua vez, a inicialização de configurações vizinhas, a distribuição da energia total pelos diferentes setores de campos e a evolução temporal da distância entre configurações de campos inicialmente adjacentes.

3.2 Condições iniciais, arranjo da energia e divergência de trajetórias

Nossa primeira tarefa será gerar um conjunto representativo de trajetórias de fase para pares de campos de referência especificamente inicializados (U_l, ϕ) e suas configurações vizinhas $(U_l', \phi') = (U_l + \delta U_l, \phi + \delta\phi)$, a distâncias suficientemente pequenas $d_G[U_l, U_l']$ e $d_H[\phi, \phi']$. As realizações no tempo resultantes para estas duas distâncias fornecerão uma das bases para nossa análise subsequente dos expoentes de Liapunov máximos. Na presente seção, selecionamos um grupo de 77 condições iniciais para as trajetórias referenciais, tais que a região de fraco acoplamento do espaço de fases de Yang-Mills-Higgs é coberta com suficiente resolução. A fim de preparar para uma comparação direta com um expoente de Liapunov positivo médio previamente calculado, seguimos o procedimento de inicialização da Ref. [46]. A amostra resultante de pares de trajetórias inicialmente próximas será consideravelmente maior do que aquela de cálculos precedentes de expoentes de Liapunov em teorias de calibre, e inclui resultados para redes com tamanhos de volume substancialmente maiores (com até 30^3 vértices).

Para satisfazer a lei de Gauss (3.13) inicialmente (e, consequentemente, por toda a evolução temporal), fixamos em zero o campo elétrico e a derivada no tempo do campo de Higgs, i.e. $E_l^a = 0 = \dot{\phi}$, o que implica $\rho_x^a(0) = 0$ (cf. Eq. (3.14)). Por conseguinte, as energias cinéticas iniciais de todos os campos se anulam, enquanto as energias potenciais são finitas e garantem que o sistema se inicie longe do equilíbrio. As variáveis de ligação U são inicializadas através da escolha randômica das direções de isospin ϑ_G, φ_G do potencial vetor A a partir de seus domínios completos; e o valor inicial da amplitude ω_G é escolhido randomicamente sobre o domínio restrito $\omega_G \in [0, 2\pi\delta]$ com $\delta \leq 1$. Fizemos um gráfico da dependência da energia média

por plaqueta com o parâmetro δ, que é mostrada na Fig. 3.1. O campo de Higgs, finalmente, é inicializado escolhendo-se randomicamente suas variáveis angulares ω_H, ϑ_H e φ_H dentro de seus alcances individuais, enquanto mantém-se a amplitude adimensional $\bar{R}_x \equiv agR_x$ fixada no mesmo valor para todos x. Como consequência, a energia potencial inicial do campo de Higgs é determinada pela amplitude $\bar{R}$ e o acoplamento $\bar{\kappa}$.

O esquema de inicialização acima caracteriza qualquer trajetória de fase em uma dada rede por três parâmetros: δ, $\bar{R}$ e $\bar{\kappa}$, os quais determinam a energia inicial média de ambos os campos de calibre e de Higgs. Adicionalmente, variaremos o tamanho de rede, especificado pelo número N de vértices por dimensão, de modo que cada um de nossos pares de configurações possa ser unicamente identificado por um quádruplo de valores para δ, $\bar{R}$, $\bar{\kappa}$ e N. Nosso tamanho máximo de rede com $N = 30$ é escolhido para reduzir substancialmente potenciais efeitos de tamanho finito de estudos anteriores [10, 46, 75] sobre redes consideravelmente menores. O principal benefício da inicialização por ângulos randômicos é que ela fornece as configurações iniciais com uma densidade de energia média específica, ou de maneira equivalente com uma temperatura T, a qual os campos alcançarão após a equilibração. Em nosso contexto, isto é importante pois a dependência dos expoentes de Liapunov com a temperatura é usada para relacioná-los à taxa de amortecimento estático do plasmon. Ainda mais, valores resultantes dos expoentes de Liapunov tornaram-se (dentro de erros aceitáveis) independentes da parte randômica de uma dada configuração inicial, o que indica que as funções de autocorrelação dos campos decaem fortemente antes de os expoentes serem medidos [15].

A fim de ficar seguramente dentro da região de validade da aproximação semiclássica, e para que consigamos relacionar nossos resultados com os de estudos perturbativos, restringiremos nossas simulações ao regime de fraco acoplamento. Como apontado na Ref. [46], isto exige que a energia provida pelo termo de massa de Higgs domine sobre a energia de auto-interação de Higgs, ou seja,

$$\bar{\kappa}\bar{R}^2 < 1, \tag{3.18}$$

e que a contribuição da energia magnética de campos de calibre seja maior comparada com a energia de interação gauge-Higgs (o que implica um acoplamento fraco entre os campos de calibre e de Higgs), ou

$$\bar{R}^2 < \delta \tag{3.19}$$

(para amplitudes máximas dos campos). Ambas as condições também favorecem a eventual equipartição das energias elétrica, magnética e de Higgs, porque elas previnem a energia total de exceder em muito a energia magnética delimitada. A

condição acima em δ limita adicionalmente efeitos de tamanho finito (cf. Eq. (3.22)). Ademais, valores de δ próximos demais de um devem ser evitados, a fim de se manter artefatos devido ao espaçamento de rede sob controle e para que se permaneça suficientemente perto do limite do contínuo (cf. Eq. (3.21)).

Para cada uma das configurações de referência iniciais criadas segundo o procedimento acima, também geramos uma configuração vizinha, separada da primeira por distâncias $d_G(t=0) \lesssim 5 \times 10^{-7}$ e $d_H(t=0) \lesssim 10^{-17}$. Isto é alcançado ao se escolher randomicamente ligeiras variações de todos os ângulos da configuração referencial no intervalo $\delta\omega_G$, $\delta\vartheta_G$, $\delta\varphi_G$, $\delta\omega_H$, $\delta\vartheta_H$, $\delta\varphi_H \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, onde $\varepsilon = 10^{-6}$. Integramos então as equações de campo da seção anterior para cada um destes pares de configurações,** por meio de um algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem e determinamos a evolução temporal das distâncias d_G e d_H. O passo de integração no tempo deve ser bem mais curto do que o espaçamento de rede a, e é adicionalmente escolhido pequeno o suficiente para assegurar conservação de energia com uma exatidão de mais de oito dígitos significativos (após cada passo). A máxima violação das restrições $\det U_l = 1$, após um único passo de tempo de comprimento $\Delta t = 10^{-4}a$, é de aproximadamente 10^{-12}, em cada ligação da rede. Com o intuito de evitar o acúmulo de erros de arredondamento, nós reescalamos ainda as variáveis de ligação, após cada passo, de maneira que seus determinantes permanecem exatamente iguais a um. Convencemo-nos de que a lei de Gauss (3.13), desse modo, mantém-se satisfeita para mais de cinco dígitos significativos, após cada passo de integração.

Tendo preparado a maquinaria necessária para simulação numérica na rede das equações do movimento, nós nos voltamos agora para os processos de transferência de energia entre os campos elétrico, magnético e de Higgs, os quais contêm informação crucial sobre a dinâmica de não-equilíbrio e propriedades quantitativas de termalização do sistema Yang-Mills-Higgs. Em nosso contexto, esta informação será particularmente útil para a compreensão, estimativa qualitativa e redução dos erros de tempo finito que atribulam o cálculo dos expoentes de Liapunov máximos, e para firmar a relação entre os expoentes de Liapunov calculados e a taxa de amortecimento do plasmon em uma base mais sólida. Para diversas trajetórias obtidas em tempos longos, registramos, por esse motivo, a evolução das energias por grau de liberdade armazenado no campo elétrico, $E_{\rm el} = \sum_x \varepsilon_{G,\rm el}/(6N^3)$, no campo magnético, $E_{\rm mag} = \sum_x \varepsilon_{G,\rm mag}/(6N^3)$, e no campo de Higgs, $E_H = \sum_x (\varepsilon_{H,\rm kin} + \varepsilon_{H,\rm pot} + \varepsilon_{G\text{–}H,\rm pot})/(4N^3)$, durante períodos de tempo mais longos do que os empregados até o momento na literatura ($0 \leq t \leq 20000a$).

**Isto envolve a evolução temporal de (12 (campo de ligação) + 9 (campo elétrico) + 8 (campo de Higgs)) $\times$ N^3 variáveis, isto é, ao todo de 7.83×10^5 variáveis acopladas para nossas maiores redes com $N = 30$.

Frequentemente expressaremos a seguir a energia total (por grau de liberdade), E_G, do campo de calibre em termos da energia média por plaqueta E_p, como $E_G = E_{\rm el} + E_{\rm mag} = \frac{1}{2}E_p$; e também encontraremos a energia total por grau de liberdade em todo o sistema: $E = (6E_G + 4E_H)/10$.

Resultados típicos para a evolução temporal das diferentes energias estão traçados na Fig. 3.4, com $\delta = 0.2$, $\bar{R} = 0.2$, $\bar{\kappa} = 1$, $N = 10$, e na Fig. 3.5, com $\delta = 1$ e valores idênticos nos demais parâmetros. Eles confirmam e ampliam a observação da Ref. [46], de que a equilibração de energia entre os setores de campo elétrico, magnético e de Higgs da teoria procede por duas escalas de tempo drasticamente diferentes (ao menos no regime de fraco acoplamento). Realmente, mesmo quando inicializados em configurações altamente fora do equilíbrio, como propusemos antes, os setores elétrico e magnético podem ser vistos equilibrarem-se muito rapidamente, após apenas algumas unidades de tempo de rede. As energias potencial e cinética do campo de Higgs, que não estão apresentadas separadamente nestas figuras, equilibram-se depois de um tempo de relaxamento aproximadamente igual. (Geralmente, os setores de calibre e de Higgs atingem diferentes temperaturas, no entanto, de acordo com a quantidade de energia neles armazenada por conta das condições iniciais.) Em contraste, a mútua termalização entre os setores de calibre e de Higgs requer tipicamente um tempo, pelo menos, quatro a cinco ordens de magnitude superior. De fato, a transferência de energia entre os dois setores se torna apreciável apenas depois de algumas centenas de unidades de tempo, e leva mais vários milhares destas para necessariamente se completar para $\delta = 1$, e muitos mais para $\delta = 0.2$. Além disso, para $\delta = 1$, desvios moderados da completa equipartição da energia permanecem visíveis na Fig. 3.5 mesmo após terem sido decorridas cerca de 10000 unidades de tempo. Isto pode ser uma consequência de artefatos de espaçamento de rede que são máximos em $\delta = 1$. A enorme discrepância entre as duas escalas características de relaxamento pode ser largamente atribuída às condições iniciais antes mencionadas, as quais mantêm o sistema próximo dos limites do contínuo e de fraco acoplamento.

A energia do campo de calibre E_G pode ser diretamente relacionada à temperatura T, que os campos de calibre atingem após tempos $t \gg \lambda^{-1}$ (onde λ é o maior expoente de Liapunov positivo). Em acoplamentos suficientemente fracos (entre os campos envolvidos), tem-se [28]

$$T = \frac{3E_p}{2\left(-1 + N_c^2\right)} \qquad (g^2 E_p a \ll 1) \tag{3.20}$$

para o grupo de calibre SU(N_c) e, assim, $E_G = T$ para $N_c = 2$. Esta relação será relevante para a avaliação e interpretação dos expoentes de Liapunov que serão calculados na seção seguinte, com base nas curvas de distância, depois de os campos de

calibre tornarem-se membros de um ensemble em quasi-equilíbrio térmico. Como foi mencionado na introdução da tese, $l_{\text{cl.}} = (g^2T)^{-1} = (g^2E_G)^{-1}$ age como uma escala clássica de comprimento associada a amplitudes vindas da teoria quântica de campos em temperaturas finitas, as quais dependem (em primeira ordem em teoria de perturbações) de g e T, exclusivamente, na combinação g^2T. Esta observação sugere condições adicionais para manter artefatos de simulação em redes, em tais amplitudes, sob controle [43]. Mais especificamente, a fim de permanecer suficientemente próximo ao limite do contínuo, o espaçamento de rede deveria ser bem menor do que $l_{\text{cl.}}$, o que significa

$$\bar{E}_G = g^2 E_G a \ll 1, \tag{3.21}$$

e a fim de evitar efeitos de tamanho finito, a extensão Na da rede cúbica tem de ser bem maior do que $l_{\text{cl.}}$, isto é,

$$N\bar{E}_G \gg 1. \tag{3.22}$$

Como esperado, estas condições solicitam $N \gg 1$, e o limite superior (3.21) em $\bar{E}_G$, além disso, pressupõe um limite inferior para o comprimento de onda médio dos campos de calibre.

Prosseguiremos agora a parte final desta seção, onde faremos a análise da evolução no tempo das distâncias d_G e d_H entre pares de configurações de campos randômicos inicialmente adjacentes e com, praticamente, a mesma energia inicial, que foram geradas segundo procedimento já explicado no início desta seção e observadas até atingirem ou estarem muito próximas da saturação. Os expoentes de Liapunov máximos e sua dependência com os parâmetros do sistema e, em particular, com a energia serão então extraídos a partir destas duas distâncias na próxima seção. Para fins de cobrir o espaço de fases relevante, selecionamos um conjunto representativo de valores para os parâmetros δ, $\bar{R}$, $\bar{\kappa}$ e N, os quais caracterizam qualquer configuração inicial. A amplitude inicial, homogênea do campo de Higgs é fixada em $\bar{R} = 0.2$, para todos os pares de trajetórias, o que permite uma comparação quantitativa com uma configuração estudada na Ref. [46]. Permanecer suficientemente próximo aos limites do contínuo e de fraco acoplamento, demanda então, de acordo com a Eq. (3.18), que o auto-acoplamento de Higgs esteja delimitado por $\bar{\kappa} < 25$, e, como uma consequência da Eq. (3.19), que a energia magnética (e total) inicial no setor de calibre esteja restringida por $\delta > 0.04$. Como mencionado acima, o limite em δ também ajuda a evitar significativos efeitos de tamanho finito sobre o sistema (cf. Eq. (3.22)) e possibilita a obtenção dos valores aproximados dos expoentes de Liapunov com razoável exatidão, mesmo após tempos bastante reduzidos quando comparados com os tempos envolvidos nas simulações realizadas e descritas na próxima seção (ver abaixo).

Guiados pelos argumentos acima, geramos pares de trajetórias para onze valores de $\delta \in [0.05, 1]$. Para cada um deles, graficamos os resultados obtidos para $\log d_G$ (linhas pretas) e $\log d_H$ (linhas cinzas) na Fig. 3.2, no valor fixo do auto-acoplamento de Higgs de $\bar{\kappa} = 1$, em redes de quatro tamanhos diferentes correspondendo a $N = 6$, 10, 20 e 30, e, na Fig. 3.3, em uma rede de tamanho $N = 20$ para os valores de acoplamento de Higgs $\bar{\kappa} = 1$, 8, 16 e 24. (O par de configurações estudado na Ref. [46], em uma rede relativamente pequena com $\delta = 0.2$, $\bar{R} = 0.2$, $\bar{\kappa} = 1$ e $N = 10$ está, portanto, incluído em nossa amostra.) As distâncias logarítmicas correspondentes $\log d_{G,H}$ para os onze valores de δ, estão agrupadas em três conjuntos, os quais estão graficados separadamente nos três painéis das Figs. 3.2 e 3.3: no painel (a), apresentamos $\log d_{G,H}$, para os cinco maiores valores: $\delta = 1.0$, 0.5, 0.45, 0.4, 0.35; no painel (b), para os valores $\delta = 0.3$, 0.25, 0.2, 0.15; e, no painel (c), para os dois menores valores: $\delta = 0.1$, 0.05. Todos os valores de δ, exceto pelo menor (isto é, $\delta = 0.05$, que é mais fortemente afetado por artefatos de tamanho finito), armazenam mais energia no setor de calibre do que no setor de Higgs.

A característica essencial que todas as realizações de distância logarítmica das Figs. 3.2 e 3.3 compartilham, é que, após um período de latência de comprimento variado, elas começam a ascender de maneira ao menos aproximadamente linear com $\bar{t}$, antes de atingir um platô de saturação independente do tempo (o qual se encontra um tanto fora do domínio considerado de $\bar{t}$ para $\delta = 0.05$) na distância máxima no espaço de fases. Saturação de distância em valores altos de $\bar{t}$ é uma consequência da compacidade do grupo de calibre de rede e poderia ser evitada por reescalamento em intervalos regulares (cf. Sec. 3.1). As regiões lineares traduzem-se num crescimento exponencial das configurações de campos inicialmente quase idênticas, implicando numa alta sensibilidade das evoluções no tempo das distâncias às condições iniciais; isto é, a assinatura padrão do caos temporal. Não surpreendentemente, os campos se separam a um passo mais rápido quando sua energia aumenta, ou seja, as inclinações nas Figs. 3.2 e 3.3 crescem com δ. Para cada par de trajetórias, ademais, as regiões lineares de ambos $\log d_G$ e $\log d_H$ têm as mesmas inclinações médias. Este resultado difere de uma estimativa anterior para uma trajetória [75] e será discutido mais à frente na Sec. 3.3. Além do mais, para $\delta \lesssim 0.2$, o período de latência, o qual é dificilmente perceptível para maiores valores de δ, expande-se e o aumento linear se torna crescentemente modulado por oscilações cuja frequência progride com δ. Tal comportamento foi observado também na teoria de Yang-Mills pura na rede, conforme estudo feito na Sec. 2.3. Obviamente, estas oscilações reduzem a precisão com que o expoente de Liapunov principal pode ser determinado das inclinações de $\log d_{G,H}$, nas regiões lineares (ver abaixo).

As figuras 3.2 e 3.3 mostram ainda que para todas as trajetórias de campos (exceto aquela com $\delta = 0.05$), $\log d_H$ fica abaixo de $\log d_G$. Isto reflete a quanti-

dade menor de energia inicialmente armazenada no setor de Higgs para $\delta > 0.05$ e mudará ao longo da evolução para tempos mais longos, a ser discutida na Sec. 3.3. Adicionalmente, a altura dos platôs de saturação de $\log d_G$ diminui ligeiramente com δ, enquanto aquela de $\log d_H$ se mantém constante. Isto pode indicar que a máxima distância entre campos magnéticos (2.55) é alcançada apenas quando suficiente energia no setor de calibre está disponível. À parte a estas diferenças no comportamento de saturação, contudo, até os padrões de modulação de $\log d_G$ e $\log d_H$ são muito similares. Isto sugere que, apesar do fraco acoplamento gauge-Higgs assegurado pela Eq. (3.19), a dependência temporal das componentes dos campos de calibre e de Higgs, ao menos do modo mais instável, já se sincronizou após algumas unidades de tempo de rede.

A dependência qualitativa dos resultados em relação ao tamanho de rede, isto é, em $N \in \{6, 10, 20, 30\}$, com o corte ultravioleta a^{-1} mantido fixo, pode ser julgada pela comparação das evoluções de distância na Fig. 3.2. A figura 3.2a contém os resultados para $1 \geq \delta \geq 0.35$. Embora os campos sejam aleatoriamente inicializados, as curvas com δ idêntico porém N diferente claramente aglomeram-se, ou seja, em acordo com o limite (3.22), essencialmente nenhum efeito de tamanho finito pode ser observado nas regiões abrangidas por N e δ (enquanto efeitos de espaçamento de rede devem passar a ser perceptíveis para δ próximo da unidade, cf. Eq. (3.21)). Indicações para uma independência similar em N foram encontradas por nós na teoria de Yang-Mills pura (ver Sec. 2.3). Isto pode sugerir que os modos mais instáveis, isto é, aqueles que dominantemente guiam a evolução temporal caótica de configurações inicialmente adjacentes, têm, para energia magnética inicial suficientemente grande (correspondendo a $\delta \geq 0.35$), comprimentos de onda pequenos o suficiente para serem acomodados por até mesmo o maior corte infravermelho $1/(Na)$ considerado (correspondendo a $N = 6$), ou, em outras palavras, que estes modos mais caóticos se encaixam essencialmente dentro de uma rede periódica de volume $(6a)^3$. Como apresentado nas Figs. 3.2b e 3.2c, todavia, para menores valores de δ ($\lesssim 0.2$), correções de tamanho finito tornam-se visíveis nas inclinações médias das (crescentemente moduladas) regiões lineares de $\log d_{G,H}$, e fazem com que elas difiram mais fortemente. Uma tendência sistemática na dependência em N destas inclinações não pode ser discernida em nossos dados, ao passo que em teorias de Yang-Mills, entretanto, a inclinação foi encontrada a aumentar em redes menores [43].

A figura 3.3 revela a dependência qualitativa das evoluções de distância com o auto-acoplamento de Higgs. Baseando-se nos valores de $\bar{\kappa}$ adotados especificamente para este estudo: $\bar{\kappa} \in \{1, 8, 16, 24\}$ (para $N = 20$), observa-se desta figura que há diversas similaridades qualitativas com a dependência em N da Fig. 3.2. Para começar, uma dependência em $\bar{\kappa}$ é dificilmente notável para δ grande, ao passo que a in-

clinação das regiões lineares se torna crescentemente dependente de $\bar{\kappa}$ com respeito a valores de δ menores, embora novamente sem uma perceptível tendência sistemática. De modo geral, a apenas ligeira sensibilidade das inclinações a $\bar{\kappa}$ é provavelmente uma consequência do fato de que mesmo $\log d_H$ é fundamentalmente determinado pelas flutuações mais instáveis dos campos de calibre e, portanto, relativamente insensível às auto-interações do campo de Higgs. Depois que a pré-equilibração entre o setor de calibre e de Higgs ocorreu, a dependência das inclinações com $\bar{\kappa}$ pode, portanto, ser sistematicamente acentuada (caso a saturação de distância seja evitada através de reescalamento periódico), tal como encontraremos de fato na Sec. 3.3. Como um setor de Higgs mais fortemente auto-acoplado absorveria energia do setor de calibre (em que, para $\delta \geq 0.1$, mais energia inicial é armazenada) mais rapidamente, ele deveria similarmente aumentar a dependência das inclinações em relação a $\bar{\kappa}$.

Para resumir, todos os membros do conjunto representativo de evoluções de distância (na fracamente acoplada, fase simétrica de SU(2)-Higgs) discutidos acima, aumentam exponencialmente e, por meio disso, exibem comportamento caótico. Para $\delta \gtrsim 0.3$, os logaritmos de $\log d_{G,H}$ tornam-se praticamente independentes do acoplamento de Higgs $\bar{\kappa}$ e (para $N \geq 6$) do volume de rede.

Na seção seguinte, procedemos à avaliação quantitativa dos expoentes de Liapunov máximos para condições iniciais aleatórias e coerentes, e discutimos sua dependência energética e relação com a taxa de amortecimento do plasmon.

3.3 Expoentes de Liapunov máximos e suas particularidades dinâmicas

A análise da última seção mostrou que todos os nossos 77 pares de campos aleatoriamente inicializados pertencem à porção caótica do espaço de fases de Yang-Mills-Higgs. Isto sugere que na fase não-quebrada da teoria, comportamento caótico é universal (isto é, existe para todas as energias) ou, pelo menos, predominante na maior parte do espaço de fases fracamente acoplado.[‡] A fim de quantificar este comportamento, avaliaremos agora a medida clássica para a caoticidade de um sistema dinâmico, ou seja, o máximo expoente de Liapunov λ ou, equivalentemente, a taxa de crescimento exponencial da distância entre variáveis dinâmicas inicialmente vizinhas. Vamos extrair os expoentes de Liapunov máximos a tempo-finito dos resultados numéricos da Sec. 3.2 através do cálculo da média das evoluções no tempo

[‡]Caos rigidamente universal é quase impossível de estabelecer numericamente. No limite extremo de comprimento de onda longo, o espaço de fases clássico de Yang-Mills (sem campo de Higgs), por exemplo, contém pequeninas regiões em que trajetórias estáveis existem [77, 76].

das medidas de distância de campos de calibre e de Higgs, durante o intervalo de tempo Δ, em que elas permanecem no regime linear, o que significa

$$\lambda_{G,H}\big(\bar{E},\bar{\kappa},N\big) = \left\langle \frac{d}{d\bar{t}} \log \frac{d_{G,H}\big(\bar{E},\bar{\kappa},N;\bar{t}\big)}{d_{G,H}\big(\bar{E},\bar{\kappa},N;0\big)} \right\rangle_{\Delta} . \tag{3.23}$$

Note-se que substituímos a dependência do parâmetro de inicialização δ por aquela na energia total $\bar{E}$ do sistema Yang-Mills-Higgs, e que suprimimos a dependência do parâmetro de inicialização remanescente, a amplitude de Higgs $\bar{R}$, a qual é mantida no mesmo valor para todas as nossas trajetórias (cf. Sec. 3.2). Lembramos ainda que o método acima, para a obtenção dos expoentes de Liapunov, torna-se crescentemente propenso a erro com respeito a energias mais baixas, onde a equilibração procede mais lentamente, enquanto o impacto dos expoentes quase máximos cresce e gera modulações de $\log d_{G,H}$ com frequência decrescente. Problemas similares foram encontrados na Ref. [8] e serão subjugados abaixo através do reescalamento das medidas de distância.

Nossos resultados numéricos para os expoentes adimensionais $\bar{\lambda}_{G,H}\big(\bar{E},\bar{\kappa},N\big) := a\lambda_{G,H}\big(\bar{E},\bar{\kappa},N\big)$, com base nas 77 evoluções temporais de pares de campos da Sec. 3.2, estão coletados na Tabela 1. Um primeiro olhar na tabela confirma as tendências qualitativas que notamos em nossa discussão sobre as Figs. 3.2 e 3.3, na Sec. 3.2. Além do esperado aumento de $\bar{\lambda}_{G,H}$ com $\bar{E}$ (ou δ), o qual mais adiante analisaremos quantitativamente, os dados mostram flutuações no limite estatisticamente esperado de aproximadamente 10% para diferentes auto-acoplamentos de Higgs e tamanhos de rede, porém, exceto pelo menor $\bar{E}$, nenhuma dependência sistemática óbvia ou em $\bar{\kappa}$ ou N. Nos tempos intermediários considerados (isto é, após pré-equilibração separada dos setores de calibre e de Higgs, no entanto antes de sua mútua termalização estar completa) e ao menos em energias intermediárias $\bar{E}$ ou $\bar{E}_p$, efeitos sistemáticos de tamanho finito e espaçamento de rede são portanto pequenos. Ademais, os resultados acima indicam que o setor de Higgs desempenha um papel menor na caoticidade do completo sistema Yang-Mills-Higgs, ao menos nos fracos acoplamentos, os quais as condições iniciais da Sec. 3.2 implementam. O modo mais instável, que em grande parte guia o comportamento caótico, deveria assim ser controlado principalmente pela dinâmica dos campos de calibre. Como consequência, estimativas razoáveis para os expoentes de Liapunov podem ser extraídas no estágio de pré-equilibração, e os valores dos expoentes do sistema Yang-Mills-Higgs SU(2) deveriam ser similares àqueles da teoria de Yang-Mills SU(2) pura [8, 43], o que é confirmado pelos resultados na Tabela 1.

Enquanto vemos que o setor de Higgs tem impacto apenas limitado na dinâmica caótica de Yang-Mills-Higgs na fase simétrica fracamente acoplada, pode ser útil relembrar os resultados da Ref. [41] no limite homogêneo, isto é, para comprimen-

	$N=6$ $\bar{\kappa}=1$	$N=10$ $\bar{\kappa}=1$	$N=20$ $\bar{\kappa}=1$	$N=30$ $\bar{\kappa}=1$	$N=20$ $\bar{\kappa}=8$	$N=20$ $\bar{\kappa}=16$	$N=20$ $\bar{\kappa}=24$
$\bar{E}=0.04374$	0.06507	0.07445	0.06179	0.04563	0.06276	0.02922	0.04862
	0.07521	0.07900	0.06799	0.04713	0.06422	0.02517	0.04712
$\bar{E}=0.10076$	0.07394	0.05838	0.05052	0.05617	0.05246	0.05981	0.03972
	0.07343	0.05820	0.05004	0.05633	0.05270	0.06028	0.03997
$\bar{E}=0.19028$	0.09117	0.07269	0.09783	0.09281	0.08522	0.09264	0.08767
	0.09156	0.07320	0.09833	0.09336	0.08561	0.09330	0.08849
$\bar{E}=0.30482$	0.13357	0.13348	0.13017	0.13751	0.13876	0.13665	0.13435
	0.13349	0.13410	0.13075	0.13803	0.13888	0.13655	0.13394
$\bar{E}=0.43527$	0.19660	0.20009	0.20985	0.20906	0.22112	0.20315	0.20032
	0.19844	0.20126	0.21099	0.21011	0.22164	0.20313	0.19922
$\bar{E}=0.57202$	0.28580	0.25783	0.29550	0.29339	0.28875	0.28975	0.29050
	0.28877	0.25994	0.29795	0.29540	0.29021	0.29024	0.28895
$\bar{E}=0.70604$	0.36801	0.39740	0.39422	0.39359	0.39232	0.37328	0.38446
	0.37857	0.39802	0.39841	0.39638	0.39354	0.37355	0.38460
$\bar{E}=0.82974$	0.46159	0.46709	0.48083	0.46971	0.47193	0.47730	0.48521
	0.46487	0.47145	0.48596	0.47334	0.47344	0.47800	0.48630
$\bar{E}=0.93767$	0.50948	0.53934	0.53530	0.54047	0.52785	0.53862	0.54295
	0.51818	0.53885	0.53656	0.54306	0.52760	0.53854	0.54123
$\bar{E}=1.02672$	0.56526	0.56621	0.58570	0.58284	0.57729	0.58613	0.57540
	0.56125	0.56722	0.58918	0.58643	0.57799	0.58700	0.57636
$\bar{E}=1.22634$	0.63279	0.65405	0.65635	0.65077	0.64431	0.65041	0.64915
	0.64082	0.65811	0.65997	0.65550	0.64588	0.65104	0.65008

Tabela 1: Expoentes de Liapunov máximos $\bar{\lambda}_G = a\lambda_G$ (registros superiores) e $\bar{\lambda}_H = a\lambda_H$ (registros inferiores) como uma função da energia total $\bar{E} = g^2Ea$, do auto-acoplamento de Higgs $\bar{\kappa}$ e do número N de vértices da rede por dimensão.

tos de onda muito maiores do que as amplitudes inversas $|A|^{-1}$, $|\phi|^{-1}$, o que revela um papel mais dramático do campo de Higgs na fase quebrada (mesmo em ângulo não nulo de Weinberg). Isto é uma consequência da massa de campo de calibre gerada dinamicamente na fase quebrada, a qual é conhecida por amortecer (e, além de um valor crítico, suprimir completamente) comportamento caótico [10]. (Notamos de passagem que o caos não é somente amortecido por massas de campos de calibre geradas via quebra dinâmica de simetria, mas também por aquelas devido a correções quânticas ao potencial clássico [78] e cargas estáticas [14].) Na Ref. [41], comportamento caótico foi observado (na presença adicional de um campo de calibre abeliano, o qual provavelmente não afeta significativamente as propriedades caóticas) apenas além da energia limiar $\bar{E}_{\rm th} \approx 0.3$ (mostrando que caos não é universal na fase quebrada), e para a energia $\bar{E} = 5.07 \gg \bar{E}_{\rm th}$, o maior expoente de Liapunov encontrado foi aproximadamente igual a $\bar{\lambda} \approx 0.25$, ou seja, uma ordem de magnitude menor do que nosso valor $\bar{\lambda} \approx 2.75$ na fase não-quebrada [que nós extrapolamos linearmente dos valores na Tabela 1 até $\bar{E} = 5.07$]. Já que campos constantes com seus poucos graus de liberdade podem exibir caoticidade mais forte e, desse modo, produzir expoentes de Liapunov maiores do que nossas configurações iniciais randômicas, esta comparação dá uma idéia quantitativa do quanto a instabilidade caótica de Yang-Mills-Higgs é amortecida pelo mecanismo de Higgs, na fase quebrada.

Outra questão que pode ser abordada quantitativamente com base nos dados na Tabela 1 é a relação entre os expoentes de Liapunov máximos $\bar{\lambda}_G$ e $\bar{\lambda}_H$, os quais são obtidos a partir das medidas de distância de campos de calibre e de Higgs (2.55) e (3.15), respectivamente. Esta relação foi objeto de algum debate, em particular em acoplamento forte [75, 46]. Depois de um estudo exploratório na Ref. [10], a Ref. [75] forneceu uma primeira estimativa na rede para a teoria de Yang-Mills-Higgs. O expoente $\bar{\lambda}_H$ extraído da medida de distância do campo de Higgs foi encontrado ser menor cerca de 15% em relação a $\bar{\lambda}_G$, quando o auto-acoplamento de Higgs aumenta. Comparação com a taxa de amortecimento estático do bóson de calibre e de Higgs em teoria de perturbação ressomada, lançou então dúvida sobre a relação deles com o mesmo $\bar{\lambda}_G$ e levou à especulação de que a taxa de amortecimento de Higgs pode, ao contrário, estar relacionada a $\bar{\lambda}_H$ [75]. Tais idéias foram mais tarde questionadas na Ref. [46], cujo cálculo melhorado descobriu que $\bar{\lambda}_G$ e $\bar{\lambda}_H$ estão em acordo, apesar de que apenas para um par de trajetórias no valor da energia total $\bar{E} \approx 0.31$ e com parâmetros $\delta = 0.2$, $\bar{\kappa} = 1$, $\bar{R} = 0.2$ e $N = 10$.

No nosso caso, os valores de $\bar{\lambda}_G$ e $\bar{\lambda}_H$, na Tabela 1, concordam dentro de erros (ao nível de um por cento) em todo o espaço de fases de Yang-Mills-Higgs coberto, com os desvios diminuindo levemente para valores crescentes de $\bar{E}$ e $\bar{\kappa}$. Nossos resultados, portanto, mostram que a descoberta da Ref. [46] não foi o efeito acidental de uma

específica escolha de inicialização, porém que, de fato,

$$\bar{\lambda}_G\big(\bar{E}, \bar{\kappa}, N\big) \sim \bar{\lambda}_H\big(\bar{E}, \bar{\kappa}, N\big)\,. \tag{3.24}$$

Como os tempos de relaxamento individuais τ dos setores de calibre e de Higgs são determinados pelos expoentes de Liapunov inversos, isto é, $\tau_{G,H} \approx \lambda_{G,H}^{-1}$, a Eq. (3.24) naturalmente explica a observação de que $\tau_G \sim \tau_H$ na Sec. 3.2, ou seja, o fato de que ambos os setores de calibre e de Higgs (separadamente) se auto-termalizam aproximadamente no mesmo tempo de relaxamento. A equação (3.24) se ajusta ainda com a expectativa geral de que o modo de campo maximamente instável de um sistema dinâmico, isto é, o modo associado ao maior expoente de Liapunov, domina o crescimento exponencial da distância entre trajetórias próximas. Por conseguinte, os expoentes de Liapunov deveriam ser independentes da métrica utilizada para extraí-los. Uma possível exceção a esta regra pode surgir, contudo, se a medida de distância for indiferente com relação ao modo mais instável. Na Ref. [46], argumentou-se que tal situação ocorre em teoria de Yang-Mills-Higgs em grande acoplamento, onde a auto-interação quártica de Higgs domina a energia potencial de Higgs (3.5): a amplitude R_x permanece então praticamente imutada durante a evolução do tempo e se desacopla do modo de campo de calibre mais instável, ao qual a medida de distância de Higgs (3.15) consequentemente se torna insensível. No ainda relativamente fraco acoplamento $\bar{\kappa} = 24$, e na energia $\bar{E} \approx 0.8$ da Ref. [75], onde $\log d_H$ é um tanto fortemente independente do tempo (cf. Fig. 3.3a), entretanto, nossos resultados para $\bar{\lambda}_G$ e $\bar{\lambda}_H$ diferem por apenas aproximadamente um por cento. Isto sugere que o desvio de 15% encontrado na Ref. [75] deveria ser principalmente atribuído a incertezas numéricas.

Como mencionado anteriormente, a dependência dos expoentes de Liapunov máximos em relação a energia de campo de calibre por grau de liberdade e em relação a energia total do sistema Yang-Mills-Higgs é uma questão particularmente importante. Nas teorias puras de Yang-Mills com os grupos SU(2) [8, 10] e SU(3) [9, 10] (cujas propriedades de escala implicam que o expoente de Liapunov adimensional $\bar{\lambda} = \lambda a$ pode apenas depender de $\bar{E}_p = g^2 E_p a$), a relação aproximadamente linear

$$\lambda_{N_c} \approx c_{N_c} g^2 E_p \tag{3.25}$$

com $c_2 \approx 0.17$ e $c_3 \approx 0.10$ foi estabelecida numericamente no regime de fraco acoplamento. (Uma análise melhorada no caso da teoria de calibre baseada no grupo SU(2) e uma discussão cuidadosa dos erros envolvidos [43], desencadeadas por questões levantadas na Ref. [73], mais tarde confirmaram os resultados das Refs. [8, 10].) A relação empírica (3.25) ajuda a clarificar o papel físico dos expoentes de Liapunov na teoria quântica de calibre a temperatura finita. Como os expoentes de Liapunov foram extraídos nos tempos $t \gg \tau_G \approx \lambda^{-1}$, isto é, após o setor de calibre

se pré-equilibrar, o ensemble térmico de campos de calibre atingiu, de acordo com a Eq. (3.20), a temperatura $T_{\mathrm{SU}(2,3)} \approx \left\{ {}^{0.50}_{0.19} \right. E_p$. Juntamente com a Eq. (3.25), isto implica a relação linear $\lambda_{2,3} \approx \left\{ {}^{0.34}_{0.53} \right. g^2 T$, e a comparação com a taxa de amortecimento estático do plasmon γ_{0,N_c} da teoria quântica de Yang-Mills SU(N_c), tal como calculado em primeira ordem na teoria de perturbação ressomada [5], então revelou a, de início, um tanto inesperada relação [8, 9, 10]

$$\lambda_{N_c} \approx 2\,\gamma_{0,N_c} \approx 0.176\, N_c\, g^2 T \tag{3.26}$$

para $N_c = 2, 3$. (O fator de dois surge porque a taxa de crescimento da distância (2.55) é o dobro daquela da distância entre os campos de calibre.) Subsequentemente, a Eq. (3.26) foi derivada sob algumas suposições heurísticas na Ref. [15].

Com base nos dados um tanto exaustivos estabelecidos na Tabela 1, encontramo-nos agora aptos a abordar a questão análoga, de como os expoentes de Liapunov estão relacionados às energias total e média por plaqueta no regime de acoplamento fraco da teoria de Yang-Mills-Higgs. Na Fig. 3.6, graficamos os expoentes de Liapunov para $\bar{\kappa} = 1$ em redes com $N \in \{6, 10, 20, 30\}$ (correspondendo às quatro primeiras colunas da Tabela 1), em toda a gama de energias médias por plaqueta $0 \lesssim g^2 E_p a \equiv \bar{E}_p \lesssim 4$. A figura 3.7 contém todos os expoentes de Liapunov remanescentes da Tabela 1, ou seja, aqueles para $\bar{\kappa} = \{1, 8, 16, 24\}$ em $N = 20$. As linhas retas também desenhadas nas Figs. 3.6 e 3.7 são os melhores ajustes lineares aos dados:

$$\bar{\lambda}_{G,H}(E_p) \approx 0.17\, g^2 E_p a \approx \frac{1}{6} \bar{E}_p. \tag{3.27}$$

As figuras mostram que os expoentes de Liapunov realmente dependem linearmente, dentro de erros, da energia média por plaqueta, como na teoria de Yang-Mills. De fato, a linearidade de $\bar{\lambda}(\bar{E}_p)$ parece ser uma consequência não-trivial da natureza não-abeliana do grupo de calibre. (Os expoentes de Liapunov da teoria escalar ϕ^4 e da teoria de calibre abeliana com grupo U(1), em contraste, vão a zero no limite do contínuo $a \to 0$ [10].) Notavelmente, até a inclinação da relação linear (3.27) é quase idêntica àquela na teoria de Yang-Mills SU(2) [8, 10, 43]. (Ela é também consistente com o valor da razão $\bar{\lambda}/\bar{E}_p$, que foi extraído da trajetória com $\delta = 0.2$, $\bar{\kappa} = 1$, $\bar{R} = 0.2$ e $N = 10$, na Ref. [46].)

A equação (3.27) implica que para idêntica energia de campo de calibre, os expoentes de Liapunov máximos da teoria de Yang-Mills e Yang-Mills-Higgs são aproximadamente iguais. Isto fornece nossa principal evidência para o modo de Yang-Mills-Higgs maximamente instável de pertencer principalmente ao setor de calibre, e sugere que a caoticidade e as propriedades de equilibração do setor de Higgs são mediadas também por este modo de campo de calibre (ao menos em fraco acoplamento e se a maior parte da energia inicial estiver armazenada no setor de calibre). Isto também faz com que seja mais plausível que os expoentes de Liapunov

da teoria de Yang-Mills-Higgs estejam relacionados à taxa de amortecimento do campo de calibre [10, 46]. Ademais, é consistente com os tempos de relaxamento aproximadamente iguais $\tau_G \sim \tau_H$ (cf. Sec. 3.2) e as taxas de crescimento exponencial das distâncias, conforme Eq. (3.24), nos setores de calibre e de Higgs.

Apesar disso, a dependência dos expoentes de Liapunov quanto a energia por plaqueta nas Figs. 3.6 e 3.7 também mostra pequenos desvios sistemáticos com relação à linearidade desse comportamento, os quais se tornam mais notáveis na direção dos valores mais baixos de $\bar{E}_p$. O mesmo efeito foi observado na teoria de Yang-Mills pura [43], e um rápido olhar sobre o critério (3.22) indica que erros de tamanho finito são responsáveis pela tendência sistemática para cima dos expoentes de Liapunov no menor $\bar{E}_p$. De fato, isto é o que se esperaria intuitivamente, já que modos de campo com comprimentos de onda longos são mais fortemente deformados pelas condições de fronteira periódicas. As inclinações das curvas logarítmicas de distância versus $\bar{t}$ se tornam mais intensamente moduladas na direção de menores $\bar{E}_p$ (cf. Sec. 3.2), além disso, o que introduz erros sistemáticos adicionais. Juntamente com os erros de tempo finito a serem discutidos nesta seção, eles podem vir a causar desvios da relação de dependência linear do valor médio do expoente de Liapunov máximo com a energia por plaqueta. Em direção ao valor máximo $\bar{E}_p = 4$, por outro lado, espaçamento de rede (cf. Eq. (3.21)) e artefatos do espaço compacto são prováveis de afetar os resultados [72, 73].

Como o sistema Yang-Mills-Higgs possui uma segunda escala de energia característica além de $\bar{E}_p$, isto é, a energia total $\bar{E}$, a qual inclui adicionalmente ambas as energias armazenadas no campo de Higgs e nas interações de gauge-Higgs (cf. Sec. 3.2) e é rigidamente conservada em todo o tempo, é natural perguntar de que modo os expoentes de Liapunov dependem de $\bar{E}$. Para responder esta questão, plotamos nossos resultados para os expoentes de Liapunov, nas Figs. 3.8 e 3.9, como uma função de $\bar{E}$ (para os mesmos valores de $\bar{\kappa}$ e N, tal como nas Figs. 3.6 e 3.7), e descobrimos que a dependência na energia total do sistema é aproximadamente linear também:

$$\bar{\lambda}_{G,H}\big(\bar{E}\big) \approx 0.55\,\bar{E}. \tag{3.28}$$

O comportamento de escala acima pode ser compreendido lembrando que nossos expoentes de Liapunov foram extraídos a tempos relativamente curtos ($\bar{t} \leq 400$), ao longo dos quais as distâncias geralmente saturam, porém antes de os campos de calibre e de Higgs terem começado a trocar quantidades apreciáveis de energia. Um rápido olhar na Fig. 3.4 mostra que, após os setores de calibre e de Higgs terem se pré-equilibrado separadamente (ou seja, para $\bar{t} \gg \bar{\lambda}^{-1}$), $\bar{E}_G = \bar{E}_p/2$ e $\bar{E}_H$ são praticamente independentes do tempo nesta fase. Além disso, como mencionado na Sec. 3.2, permanecer no regime de fraco acoplamento exige condições iniciais que (exceto pelo caso em que $\delta = 0.05$) armazenam consideravelmente mais energia no

setor de calibre do que no de Higgs (cf., por exemplo, Fig. 3.4, que corresponde a $\delta = 0.2$). Nesta situação, deriva-se da definição de $\bar{E}$ na Sec. 3.2 (que implica $\bar{E}_p = -4\bar{E}_H/3 + 10\bar{E}/3$) e da Eq. (3.27) que

$$\bar{\lambda}_{G,H}\big(\bar{E}, \bar{E}_H\big) \approx -\frac{2}{9}\,\bar{E}_H + \frac{5}{9}\,\bar{E} \xrightarrow{\bar{E}_H \ll \bar{E}} \frac{5}{9}\,\bar{E}, \tag{3.29}$$

o que explica o comportamento linear e a inclinação numérica da Eq. (3.28). (Ela também explica a relação de escala $\bar{\lambda}_G\big(\bar{E}\big) \approx 0.53\bar{E}$ [74] para teoria de Yang-Mills SU(2) em que $\bar{E}_H \equiv 0$.) Reenfatizamos que estes resultados vigoram para expoentes de Liapunov extraídos na janela de tempo $\bar{\lambda}^{-1} \ll \bar{t} \leq 400$, durante a qual $\bar{E}_G$ e $\bar{E}_H \ll \bar{E}_G$ permanecem praticamente constantes.

A tempos mais longos, o setor de Higgs absorverá energia do setor de calibre, isto é, $\bar{E}_p$ cairá (para $\delta > 0.05$), enquanto $\bar{E}$ permanece constante (cf. Figs. 3.4 e 3.5). No limite $t \to \infty$, os expoentes de Liapunov devem alcançar um valor constante, como implicado em sua definição formal, e assim alcançará também $\bar{E}_p$. Esta saturação é fortemente atrasada, contudo, pelos tempos excepcionalmente longos de relaxamento que governam a equilibração entre os campos de calibre e de Higgs. Na sequência desta seção, analisaremos o impacto quantitativo deste comportamento de saturação nos valores dos expoentes de Liapunov extraídos. Para este fim, monitoramos mediante simulação computacional a evolução temporal do maior expoente de Liapunov

$$\bar{\lambda}_{G,H}\big(\bar{E}, \bar{\kappa}, N; t\big) = \frac{a}{t}\sum_{k=1}^{t/\tau} \log s_k \xrightarrow{t\to\infty} \bar{\lambda}_{G,H}\big(\bar{E}, \bar{\kappa}, N\big) \tag{3.30}$$

(onde $s_k = d^{(\mathrm{alt})}_{G,H}(k\tau)/d^{(\mathrm{alt})}_{G,H}(0)$ é o fator de reescala obtido no k-ésimo reescalamento e τ denota o intervalo regular de tempo entre dois valores consecutivos de $d^{(\mathrm{alt})}_{G,H}(k\tau)$), que se aproxima do valor assintótico exato, por oito pares de trajetórias de campos inicialmente próximas a tempos longos, mais precisamente no intervalo $t/a \in [0, 20000]$, em uma rede de tamanho $N = 10$. Em nossas simulações reescalamos os campos na forma $z'(k\tau) = z_0(k\tau) + [z(k\tau) - z_0(k\tau)]/s_k$, onde usamos a notação compacta $z = (E, U, \phi, \dot{\phi})$ para indicar as variáveis de estado do sistema. Desta forma, em cada vértice da rede, a trajetória vizinha retorna novamente as distâncias $d^{(\mathrm{alt})}_{G,H}(0)$ da trajetória de referência z_0 após o reescalamento. A fim de melhorar a eficiência numérica, aumentamos o período de reescalamento τ com o aumento do tempo de saturação, ou seja, com δ decrescente, tal como detalhado nas legendas das figuras.

Na Fig. 3.10, mostramos as evoluções de $\bar{\lambda}_G$ (linhas pretas) e $\bar{\lambda}_H$ (linhas cinzas), normalizadas pela energia total, para quatro pares de trajetórias inicialmente próximas para tempos grandes com $\bar{\kappa} = 1$ e energias magnéticas iniciais especificadas

por $\delta = 0.2$, 0.3, 0.45 e 0.6. (Isto corresponde a valores aproximadamente igualmente espaçados de $\bar{E}_p$, cf. Fig. 3.1.) Uma primeira importante característica de todas as evoluções no tempo dos expoentes estimados é sua diminuição monotônica com o tempo. Mais ainda, a saturação de $\bar{\lambda}_G$ para t/a grande pode ser vista proceder muito lentamente: especialmente para o menor δ, ela não está inteiramente completa mesmo em $t = 2 \times 10^4 a$. Em todos os quatro casos, ademais, $\bar{\lambda}_G$ começa relativamente maior do que $\bar{\lambda}_H$, todavia torna-se menor quando os setores de calibre e de Higgs passam a trocar quantidades substanciais de energia. Os desvios entre $\bar{\lambda}_G$ e $\bar{\lambda}_H$ mantêm-se no nível de um por cento, durante a evolução inicial (tal como refletido nas estimativas da Tabela 1) e aumentam sistematicamente a até 5% em $t = 20000a$. Portanto, $\bar{\lambda}_G$ e $\bar{\lambda}_H$ permanecem aproximadamente iguais ao longo de toda a evolução temporal até atingirem seus valores assintóticos (estes vindo a ser os valores procurados de fato).

Na Fig. 3.11, por sua vez, ilustramos o comportamento individual de cada um dos expoentes $\bar{\lambda}_{G,H}/\bar{E}$ ao longo do tempo para um valor intermediário da energia média por plaqueta ($\delta = 0.3$), e para os demais três valores propostos para o auto-acoplamento de Higgs: $\bar{\kappa} = 8, 16, 24$. As principais tendências observadas na Fig. 3.10 permanecem intactas para maiores $\bar{\kappa}$, apesar de que o aumento de tal parâmetro atrasa ainda mais a saturação das evoluções dos expoentes de Liapunov. De fato, já para $\bar{\kappa} = 8$, é mais difícil extrapolar confiavelmente $\bar{\lambda}_{G,H}$ ao valor do expoente em $t/a \in [0, 20000]$. Por outro lado, valores maiores de $\bar{\kappa}$ reduzem mais os desvios entre $\bar{\lambda}_G$ e $\bar{\lambda}_H$ (o que sugere que a tendência oposta, observada na Ref. [75], deveu-se a um artefato numérico), e também as variações em tempo longo de $\bar{\lambda}_{G,H}/\bar{E}$ e, desse modo, os erros de tempo finito dos expoentes de Liapunov.

Com fins de verificar se o passo de tempo de integração utilizado $\Delta t = 10^{-3} a$ é pequeno o suficiente, realizamos também uma simulação com metade de seu valor para $\bar{\kappa} = 24$. A curva correspondente, também desenhada na Fig. 3.11, é essencialmente idêntica àquela com o passo de tempo maior, o que demonstra que a última não possui nenhum erro relevante de discretização temporal. Finalmente, notamos que, quando as evoluções de Liapunov diminuem durante a equilibração, pode-se esperar que sua sensibilidade ao setor de Higgs se torne maior. A Fig. 3.11 mostra que sua dependência com relação ao auto-acoplamento $\bar{\kappa}$ é insignificante em tempos muito curtos ($t \lesssim 2000a$), como evidente na Tabela 1, mas de fato se torna mais pronunciada para t/a maiores.

Voltamo-nos agora para o exame das razões $\bar{\lambda}_G/\bar{E}_p$ e $\bar{\lambda}_H/\bar{E}_p$ que plotamos nas Figs. 3.12 e 3.13 para os mesmos valores de parâmetros como nas Figs. 3.10 e 3.11. O movimento rigorosamente paralelo de $\bar{\lambda}_G$ e $\bar{\lambda}_H$, e a sistemática de seus (pequenos) desvios, permanecem visíveis aqui também. A queda inicial em $\bar{\lambda}_{G,H}/\bar{E}_p$ (em particular, para $\delta = 0.2$) cai dentro do período de tempo durante o qual $\bar{E}_p$ é praticamente

constante, isto é, ela é causada pela diminuição de $\bar{\lambda}_{G,H}$. Mais adiante, a energia de campo de calibre começa a cair (cf. Fig. 3.4) e contrabalanceia a contínua diminuição de $\bar{\lambda}_{G,H}$. Isto faz com que as razões $\bar{\lambda}_{G,H}/\bar{E}_p$ subam. Para $\delta = 0.2$, presume-se, além disso, a partir da Fig. 3.4, que $\bar{E}_p = 2\bar{E}_G \to 2\bar{E}$ para $t \gtrsim 13000a$, de maneira que a contínua, leve diminuição de

$$\frac{\bar{\lambda}_{G,H}}{\bar{E}_p} \xrightarrow{t/a \gtrsim 13000, \delta=0.2} \frac{1}{2}\frac{\bar{\lambda}_{G,H}}{\bar{E}} \tag{3.31}$$

tem novamente de ser atribuída unicamente ao comportamento de $\bar{\lambda}_{G,H}$. Um resultado importante, visível, em ambas as Figs. 3.12 e 3.13, é que as razões $\bar{\lambda}_{G,H}/\bar{E}_p$ saturam significativamente mais cedo que $\bar{\lambda}_{G,H}/\bar{E}$, mesmo em valores maiores de $\bar{\kappa}$. (Flutuações de tempo curto da energia média por plaqueta fazem com que a evolução temporal de $\bar{\lambda}_{G,H}/\bar{E}_p$ pareça mais irregular.) Isto indica que para t grande, isto é, na aproximação ao equilíbrio térmico, a energia média de calibre $\bar{E}_p/2$ diminui na mesma taxa que $\bar{\lambda}_{G,H}$.

Como referido anteriormente, nossos resultados para a evolução dos expoentes de Liapunov associada a tempos longos permitem uma avaliação quantitativa dos erros de tempo finito nas estimativas dos expoentes da Tabela 1, os quais foram extraídos em tempos de evolução significativamente curtos. A Fig. 3.10 indica que, para $\bar{\kappa} = 1$, as variações temporais de $\bar{\lambda}_G$ alcançam cerca de 25% para $\delta = 0.2$ e aproximadamente 32% para $(\delta, \bar{E}) = (0.6, 1.14038)$, enquanto elas permanecem cerca de 5% menores para o $\bar{\lambda}_H$ correspondente. Estas variações podem ser consideradas como um limite superior do impacto dos erros sistemáticos de tempo finito, em particular para maiores valores de δ e menores de $\bar{\kappa}$, e também para as correspondentes superestimativas de $\bar{\lambda}_{G,H}$ na Tabela 1. (A tendência de superestimar os expoentes de Liapunov quando estes são obtidos em tempos de evolução mais curtos foi também notada nas Refs. [10, 43].)

Finalmente, nossa análise baseada em trajetórias a tempos longos nos permite clarificar o que acontece às duas leis de escala (3.27) e (3.28) quando $\bar{t}$ vai a infinito, limite este que consiste em requisito para obtenção do exato expoente de Liapunov. Na verdade, uma extrapolação bastante confiável para este limite pode ser alcançada aproveitando a evidência empírica de que o máximo expoente de Liapunov varia aproximadamente linearmente na variável $\bar{t}^{-1/2}$ [43]. (Em um particular estudo [45] sobre as propriedades de flutuação do espectro de Liapunov numa teoria de Yang-Mills na rede, verificou-se que o perfil da distribuição dos expoentes positivos é do tipo gaussiano com largura que decresce como $\bar{t}^{-1/2}$.) Em consequência, as novas funções $\bar{\lambda}_{G,H}(\bar{t}^{-1/2})$ podem ser aproximadamente ajustadas por retas (com um potencial erro sistemático) e os expoentes de Liapunov podem ser determinados a partir das interseções das retas com o eixo zero da variável $\bar{t}^{-1/2}$ [43]. Dessa

forma, extrapolando-se os gráficos das Figs. 3.10 e 3.12, pudemos obter estimativas melhores dos expoentes de Liapunov que estão plotadas na Fig. 3.14 como uma função de $\bar{E}_p$ (painel superior) e de $\bar{E}$ (painel inferior). Estas figuras mostram que ambas as dependências se mantêm lineares com boa precisão. Explicitamente, os melhores ajustes lineares (também mostrados nas figuras) calculados a partir dos valores extrapolados são

$$\bar{\lambda}_G(\bar{E}_p) \approx 0.149\bar{E}_p, \qquad \bar{\lambda}_H(\bar{E}_p) \approx 0.163\bar{E}_p, \tag{3.32}$$

e

$$\bar{\lambda}_G(\bar{E}) \approx 0.308\bar{E}, \qquad \bar{\lambda}_H(\bar{E}) \approx 0.338\bar{E}. \tag{3.33}$$

As equações (3.32) demonstram que a uma precisão de, pelo menos, cerca de 10%, a lei de escala (3.27), encontrada antes do completo equilíbrio dos setores de calibre e de Higgs, com o mesmo coeficiente obtido na teoria de Yang-Mills pura, realmente permanece intacta assintoticamente. (As primeiras indicações para este comportamento foram observadas na Ref. [46], com base numa trajetória para $t \leq 12000a$.) Qualitativamente, isto é também refletido na Fig. 3.12, onde as razões $\bar{\lambda}_{G,H}/\bar{E}_p$ iniciam em torno de 1/6 e, assintoticamente, retornam a isso para t/a muito grande (enquanto, no meio tempo, diferindo por, no máximo (ou seja, para o maior δ), cerca de 20%, principalmente quando a maior parte da energia é trocada entre os campos de calibre e de Higgs).

As Eqs. (3.32) também explicam a dependência em $\bar{E}$ do comportamento assintótico dos expoentes exibido pelos ajustes lineares obtidos em (3.33). De fato, após a completa equilibração em $t \to \infty$, com $\bar{E}_G = \bar{E}_p/2 = \bar{E}_H = \bar{E}$, espera-se de $\bar{\lambda}_{G,H}(\bar{E}_p) = \alpha_{G,H}\bar{E}_p \approx \bar{E}_p/6$ que

$$\bar{\lambda}_{G,H}(\bar{E}) = 2\alpha_{G,H}\bar{E} \approx \frac{1}{3}\bar{E}, \tag{3.34}$$

que é idêntica as equações que se apresentam em (3.33), dentro de erros toleráveis. Portanto, em equilíbrio, a dependência linear dos expoentes de Liapunov com a energia média de calibre implica uma dependência linear em relação a energia total do sistema, com o dobro da inclinação (como verificado, com boa precisão, nos ajustes (3.32) e (3.33)). Este fato provavelmente passou despercebido na Ref. [46], onde indicações foram mencionadas contra a correspondência entre $\bar{\lambda}_{G,H}$ e $\bar{E}$, com base em trajetórias calculadas em milhares de unidades de tempo de rede, o que provavelmente não trouxe o sistema próximo o suficiente do equilíbrio. (Em adição, nossa observação acima sustenta o ponto de vista da Ref. [74], em que se atribui a dependência logarítmica entre a energia e o expoente de Liapunov, estabelecida numericamente via método da matriz de monodromia, a efeitos de tamanho finito.) De maneira mais geral, a correspondência linear de $\bar{\lambda}_{G,H}$ com $\bar{E}_p$ implica uma dependência linear em $\bar{E}$ em qualquer janela de tempo durante a qual $\bar{E}_p \propto \bar{E}$. Esta

condição, no entanto, parece ser satisfeita apenas quando os setores de calibre e de Higgs não trocam quantidades relevantes de energia, isto é, apenas na fase de pré-equilibração e após a mútua equilibração ser essencialmente atingida. Todavia, as inclinações da dependência sobre $\bar{E}$ nestes dois intervalos de tempo diferem: 5/9 e 1/3, respectivamente.

As evidências estabelecidas acima nas equações (3.32), as quais alegam que a dependência linear dos expoentes de Liapunov com a energia média por plaqueta há de prevalecer para $t \to \infty$, parecem consistentes com nossas indicações anteriores de que o modo mais caótico reside principalmente no setor de calibre, com nossa descoberta de que o comportamento de escala (3.27) se inicia antes de os campos de calibre terem completo acesso à energia armazenada no setor de Higgs, e com o resultado de que as razões $\bar{\lambda}_{G,H}/\bar{E}_p$ saturam, de maneira significativa, mais rapidamente do que os próprios $\bar{\lambda}_{G,H}$.

No restante desta última seção, afastamo-nos de nosso assunto principal e aplicamos algumas das técnicas numéricas desenvolvidas acima para analisar a evolução temporal de campos magnéticos não-abelianos, espacialmente constantes. Nos anos pioneiros da QCD, tais campos magnéticos homogêneos foram determinados serem instáveis em teoria de Yang-Mills pura [79]. Esta assim chamada instabilidade de Savvidi foi mais tarde explorada no domínio não-perturbativo por métodos numéricos similares aos nossos [7, 8]. Ela forneceu indicações antecipadas para a complexidade do vácuo de Yang-Mills e desencadeou o desenvolvimento de conceitos referentes à estocasticidade e ao caos determinista como ferramentas para estudos da estrutura de vácuo das teorias de calibre não-abelianas e confinamento de quarks [13]. A seguir, vamos estudar o impacto dos campos de Higgs na instabilidade de Savvidi.

Como referência para comparação com o caso de Yang-Mills-Higgs, em primeiro lugar reproduzimos a evolução temporal da distância (2.55) entre campos magnéticos homogêneos inicialmente adjacentes numa teoria de Yang-Mills para uma rede de tamanho $N = 10$. O campo magnético é definido como $B_p = \arccos \mathrm{tr} U_p$, e suas componentes são inicializadas com os valores $B_{x,12} = 0.899$, $B_{x,13} = 0.791$ e $B_{x,23} = 1.453$, para todo vértice x, originando uma configuração referencial com energia total $\bar{E} \approx 0.57$ (admite-se campo elétrico nulo). Na Fig. 3.15, comparamos sua evolução de distância logarítmica àquela de um campo de calibre inicialmente randômico (cf. Sec. 3.2), com a mesma energia. O par de campos magnéticos constantes passa a ter cerca de o dobro da inclinação média de $\log d_G$ na região linear, ou seja, o campo magnético homogêneo é substancialmente menos estável que o campo randômico. Este resultado corrobora outros similares, encontrados na Ref. [8].

Voltamo-nos agora para a análoga evolução temporal de campos magnéticos inicialmente constantes na teoria de Yang-Mills-Higgs, novamente em uma rede com $N = 10$ vértices por dimensão. Como na seção anterior, o campo de Higgs é inicia-

lizado no valor espacialmente constante $\bar{R}_x = 0.2$, e os valores iniciais $E_l^a = 0 = \dot{\phi}$ são impostos, a fim de satisfazer a lei de Gauss (3.13). O campo B é inicializado nos valores $B_{x,12} = 2.319$, $B_{x,13} = 2.152$ e $B_{x,23} = 1.428$, para todos os x. Escolhemos ainda $\delta = 0.3$ e $\bar{\kappa} = 1$, a fim de injetar a mesma energia total $\bar{E} \approx 0.57$, tal como no caso de Yang-Mills acima. A evolução da distância logarítmica, sob estas condições, é mostrada na Fig. 3.16, para as métricas de calibre e de Higgs (2.55) e (3.15), de novo juntamente com sua contraparte para um correspondente campo randômico. Como no caso de Yang-Mills, o campo magnético homogêneo produz cerca do dobro da inclinação na região linear. Portanto, a presença dos campos de Higgs parece não amortecer nem acentuar a maior instabilidade das configurações de campo magnético homogêneo, relativas a uma configuração randômica de mesma energia total. Isto parece ser consistente com nossa evidência acima de que a caoticidade da teoria de Yang-Mills-Higgs é dominada pelo setor de calibre.

As inclinações de $\log d_G$ para ambos os campos magnéticos constantes e randômicos, contudo, são (na região linear) em torno de duas vezes maiores, no exemplo de Yang-Mills-Higgs da Fig. 3.16, do que na teoria de Yang-Mills (Fig. 3.15). Provavelmente, este resultado depende muito fortemente das condições iniciais, e especialmente de como distribuem a energia inicial sobre os setores de campo de calibre e de Higgs. Nossas condições iniciais acima foram escolhidas para fornecer um exemplo que demonstra que a presença de campos de Higgs pode aumentar em muito a instabilidade de Savvidi. Este impacto grande da inclusão do campo de Higgs levanta a possibilidade de que resultados de simulação para modelos de gauge estendidos que incorporem quarks podem produzir efeitos semelhantes sobre as instabilidades induzidas por campos de calibre.

Encerra-se aqui o capítulo principal desta tese, onde se explorou a presença de caos em teorias de Yang-Mills-Higgs na rede. Utilizou-se o formalismo hamiltoniano para a obtenção das equações governantes do movimento, e fez-se a análise das propriedades de escala da energia do sistema através da integração direta das equações de Hamilton pelo método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem e estimativa numérica dos expoentes de Liapunov máximos. Executou-se diversas simulações numéricas computacionais, envolvendo os campos escalar e de calibre, para (principalmente) configurações randômicas iniciais e para diferentes valores dos parâmetros que definem o sistema, a saber: $\bar{E}$, $\bar{\kappa}$ e N. Durante a exposição de nossas considerações finais, os pontos mais relevantes tratados neste capítulo serão retomados, com um caráter menos expositor e mais reativo às implicações de nossos resultados aqui explicitados.

Uma extensão natural do modelo aqui analisado é a de incluir efeitos quânticos na ação a ele relativa. A abordagem mais usual da mecânica quântica neste sentido baseia-se na formulação de Feynman-Vernon para partícula acoplada a banho

de osciladores, na qual o interesse recai numa descrição reduzida do sistema que nos permite estudar apenas a evolução temporal da partícula sob a influência do banho. Uma situação tratada atualmente na literatura é aquela em que sistemas caóticos fazem o papel de ambientes. Procuraremos, no próximo capítulo dessa tese, explicitar detalhadamente a metodologia convencional dentro do formalismo de integrais de caminho, considerando o acoplamento bilinear mais geral possível. Daremos também uma sugestão para futuro estudos no contexto das interações mediadas por caos.

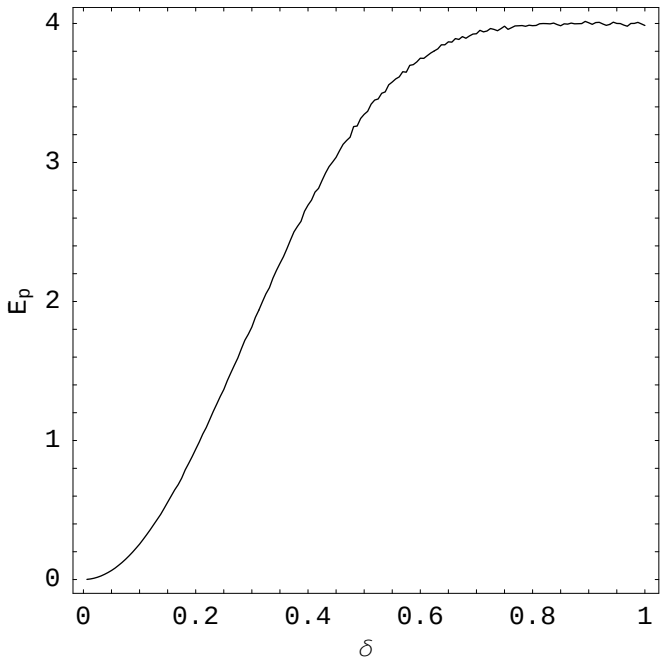

Figura 3.1: A energia média por plaqueta $\bar{E}_p$ como uma função do parâmetro de inicialização δ.

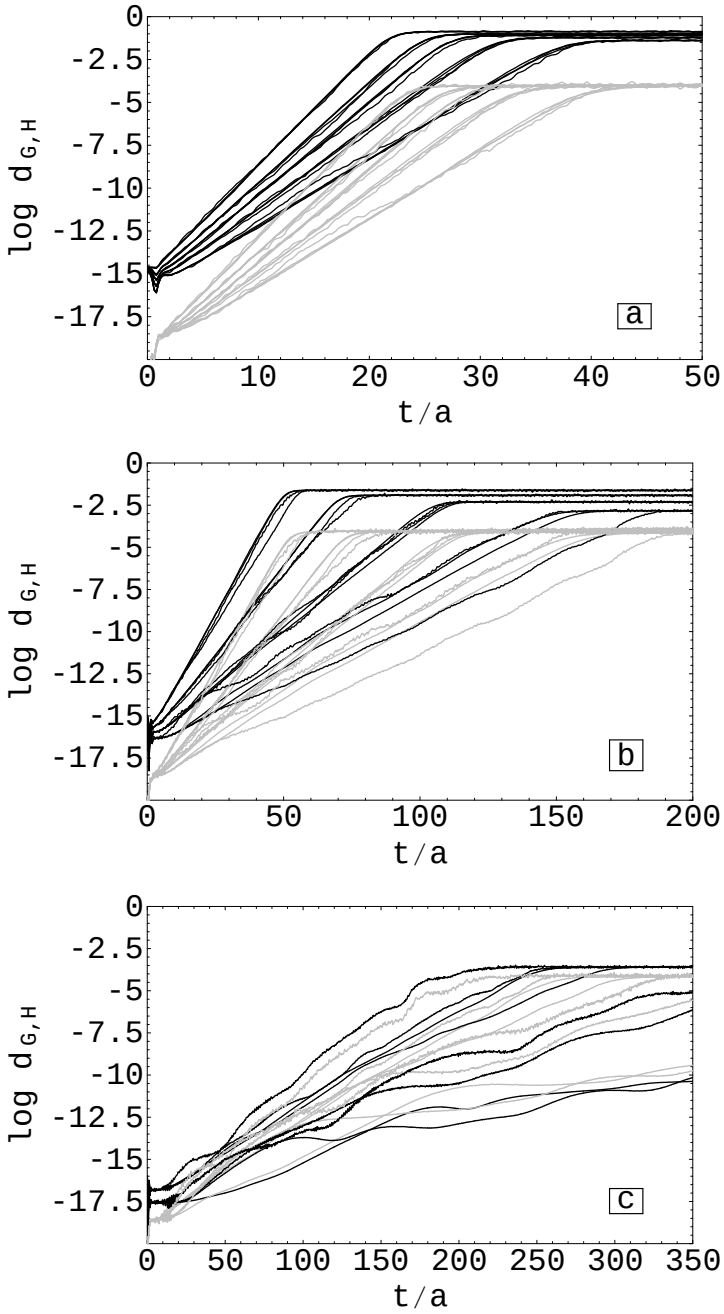

Figura 3.2: Evolução logarítmica da distância nos setores de calibre (curvas pretas) e de Higgs (curvas cinzas), no valor fixo do auto-acoplamento de Higgs $\bar{\kappa} = 1$, para quatro volumes de rede correspondendo a $N = 6$, 10, 20 e 30. A energia magnética inicial é parametrizada por δ. O painel (a) corresponde a $\delta = 1.0$, 0.5, 0.45, 0.4, 0.35, ao passo que o painel (b) corresponde a $\delta = 0.3$, 0.25, 0.2, 0.15 e o painel (c), aos dois menores valores, $\delta = 0.1$, 0.05.

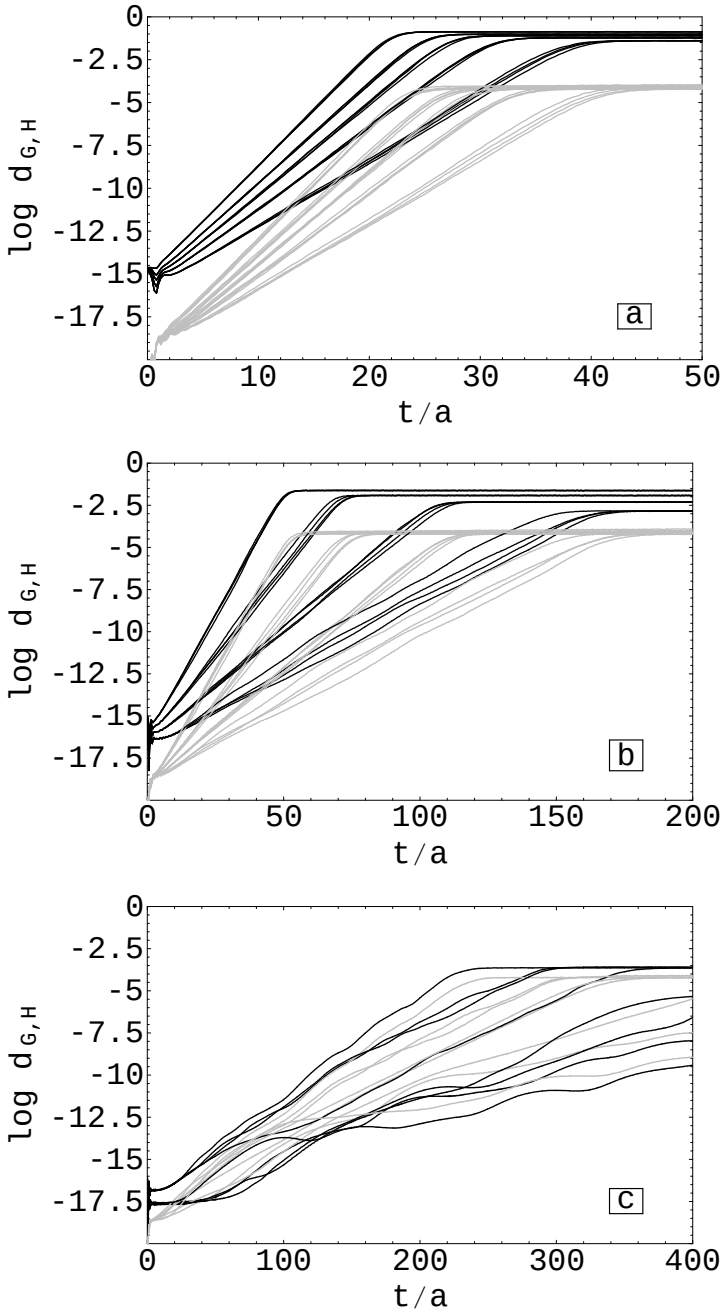

Figura 3.3: Evolução logarítmica da distância nos setores de calibre (curvas pretas) e de Higgs (curvas cinzas), em uma rede de tamanho $N = 20$, para quatro diferentes auto-acoplamentos de Higgs $\bar{\kappa} = 1$, 8, 16 e 24. As trajetórias de distância estão agrupadas como na Fig. 3.2, segundo sua energia magnética média inicial (parametrizada por δ): o painel (a) contêm as curvas correspondentes a $\delta = 1.0$, 0.5, 0.45, 0.4, 0.35; o painel (b), as que correspondem a $\delta = 0.3$, 0.25, 0.2, 0.15; e o painel (c), aos dois menores valores, $\delta = 0.1$, 0.05.

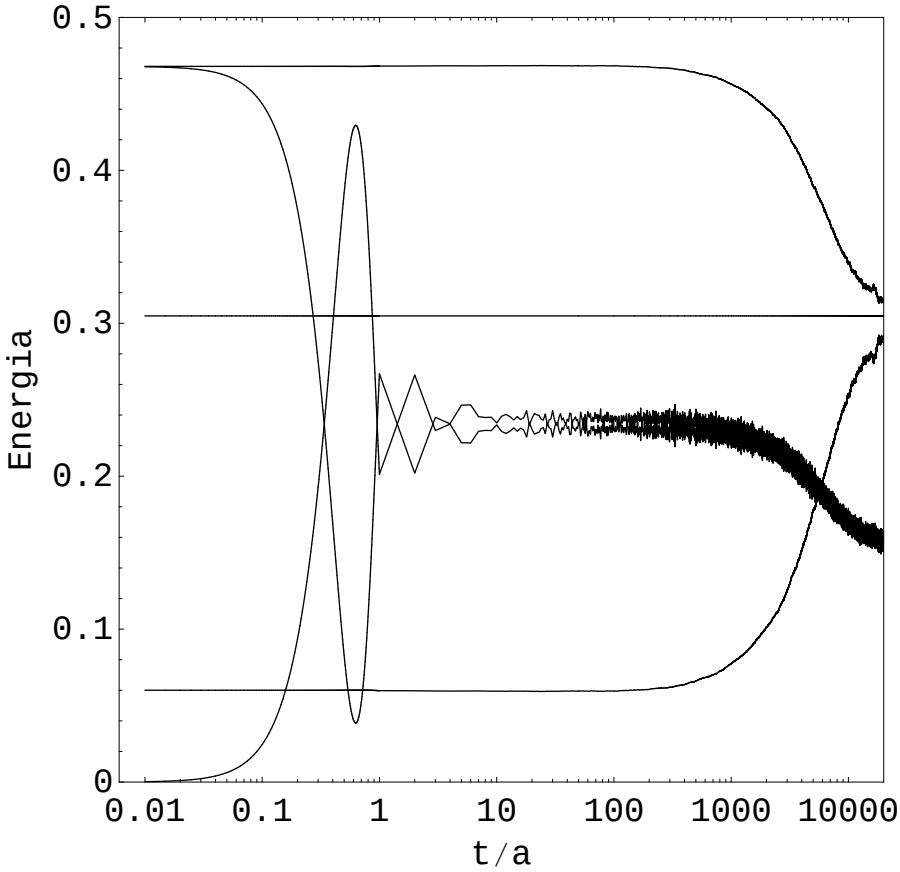

Figura 3.4: Evolução temporal da energia (por grau de liberdade) armazenada no setor de calibre E_G (linha inicialmente horizontal mais acima) e no setor de Higgs E_H (linha inicialmente horizontal mais abaixo) e sua soma, isto é, a energia total conservada E (linha horizontal). A linha inicialmente oscilante começando em zero é a energia de campo elétrico $E_{\rm el}$; e a que começa no valor inicial da energia total no setor de calibre é a energia de campo magnético $E_{\rm mag}$. (As condições iniciais para a trajetória subjacente foram $\delta = 0.2$, $\bar{R} = 0.2$, $\bar{\kappa} = 1$, $N = 10$ e $\Delta t = 10^{-4}a$.)

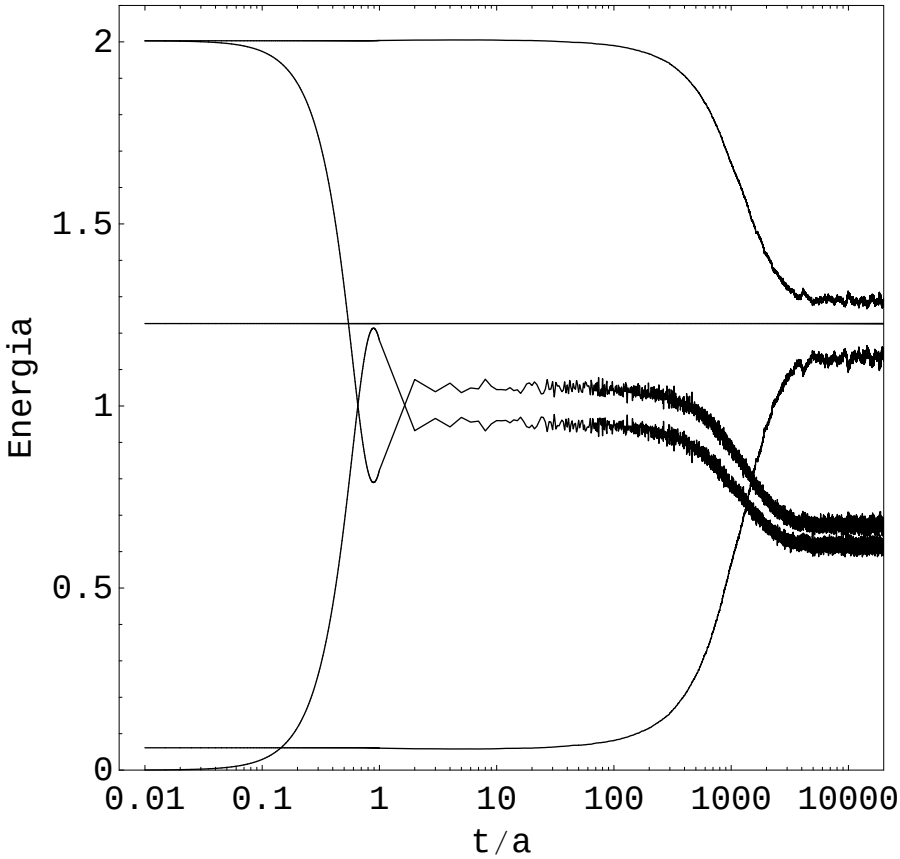

Figura 3.5: Tal como na Fig. 3.4, mas para a trajetória sujeita às condições iniciais $\delta = 1$, $\bar{R} = 0.2$, $\bar{\kappa} = 1$ e $N = 10$.

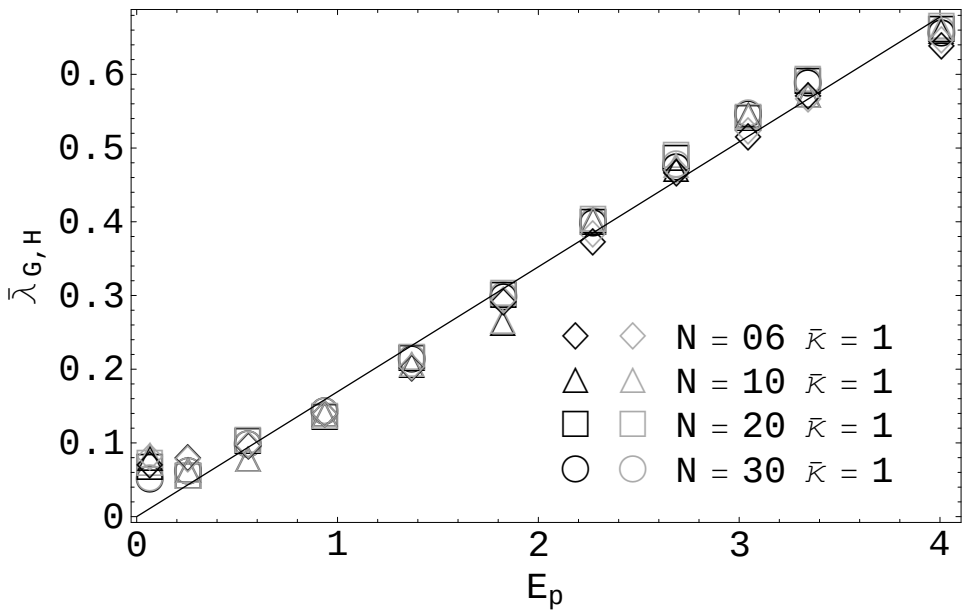

Figura 3.6: Valores dos expoentes de Liapunov máximos $\bar{\lambda}_G$ (símbolos pretos) e $\bar{\lambda}_H$ (símbolos cinzas) como uma função da energia média por plaqueta $\bar{E}_p$ para $\bar{\kappa} = 1$ e $N = 6$, 10, 20, 30.

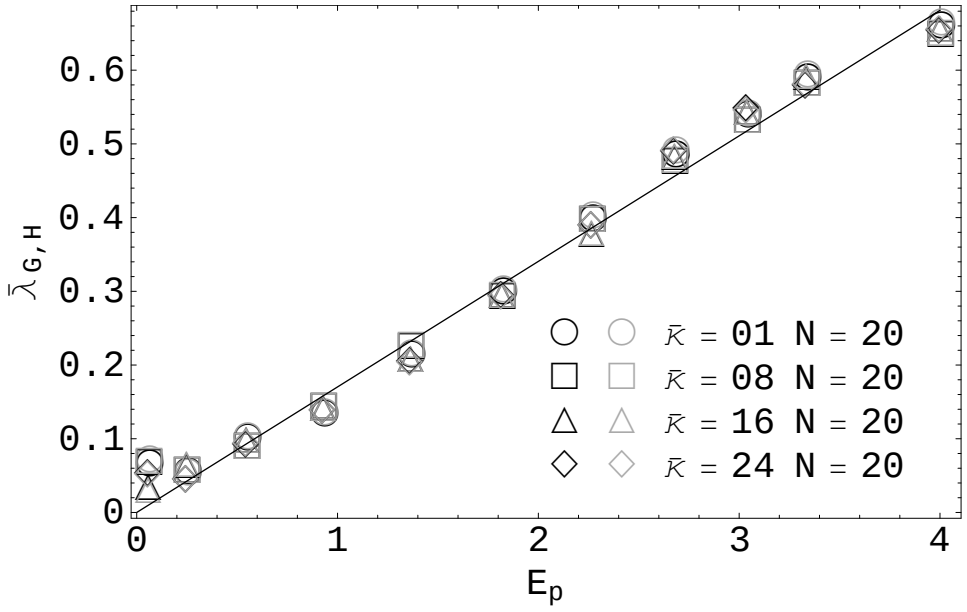

Figura 3.7: Valores dos expoentes de Liapunov máximos $\bar{\lambda}_G$ (símbolos pretos) e $\bar{\lambda}_H$ (símbolos cinzas) como uma função da energia média por plaqueta $\bar{E}_p$ para $N = 20$ e $\bar{\kappa} = 1$, 8, 16, 24.

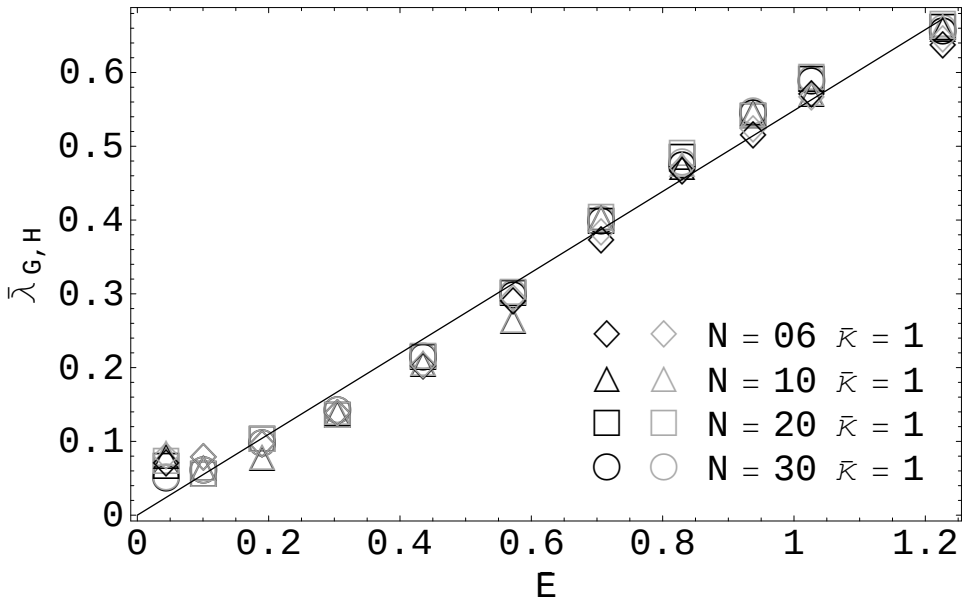

Figura 3.8: Valores dos expoentes de Liapunov máximos $\bar{\lambda}_G$ (símbolos pretos) e $\bar{\lambda}_H$ (símbolos cinzas) como uma função da energia total $\bar{E}$ para $\bar{\kappa} = 1$ e $N = 6$, 10, 20, 30.

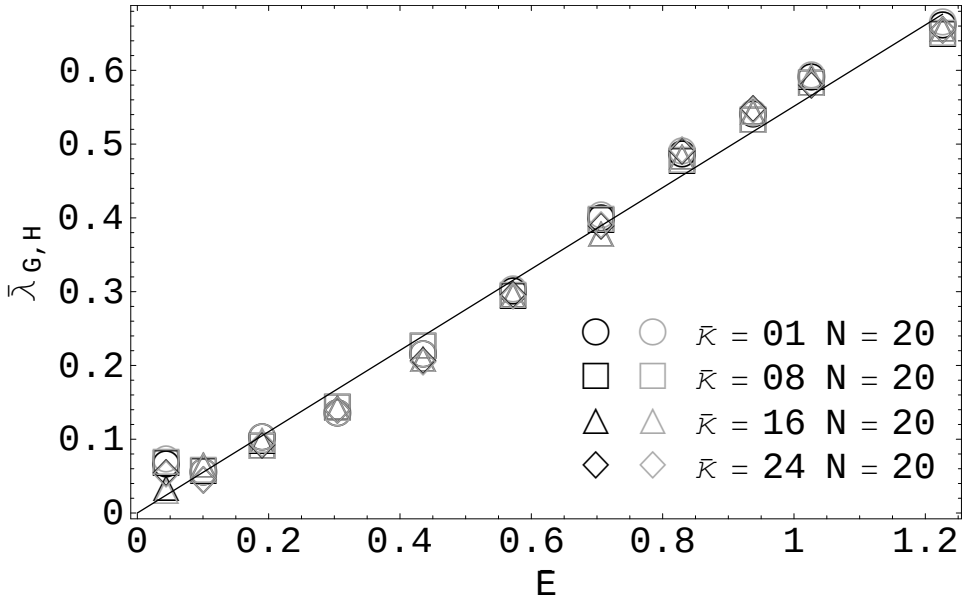

Figura 3.9: Valores dos expoentes de Liapunov máximos $\bar{\lambda}_G$ (símbolos pretos) e $\bar{\lambda}_H$ (símbolos cinzas) como uma função da energia total $\bar{E}$ para $N = 20$ e $\bar{\kappa} = 1$, 8, 16, 24.

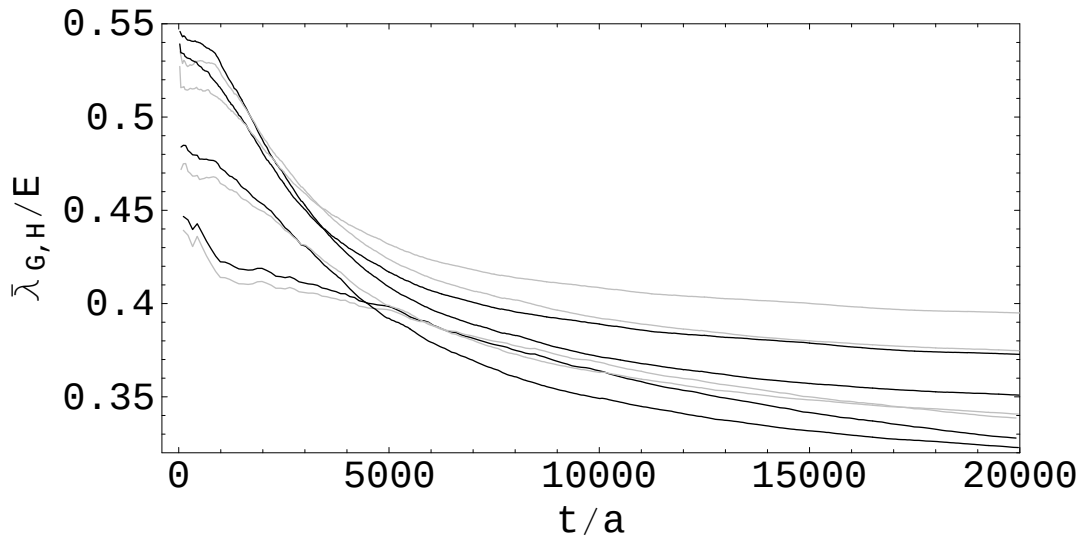

Figura 3.10: Evolução de tempo longo das funções de Liapunov $\bar{\lambda}_G/\bar{E}$ (curvas pretas) e $\bar{\lambda}_H/\bar{E}$ (curvas cinzas) para $(\delta, \tau) = (0.6, 25)$ (segundos maiores valores iniciais), $(0.45, 30)$ (maiores valores iniciais), $(0.3, 55)$ (segundos menores valores iniciais) e $(0.2, 110)$ (menores valores iniciais) (com $\Delta t = 5 \times 10^{-4} a$, $\bar{\kappa} = 1$, $\bar{R} = 0.2$ e $N = 10$).

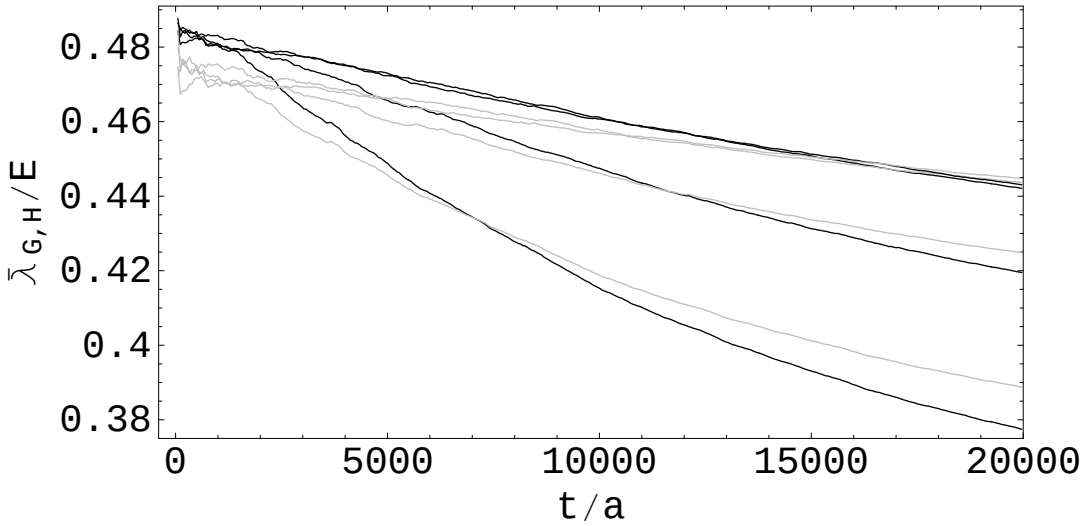

Figura 3.11: Evolução de tempo longo das funções de Liapunov $\bar{\lambda}_G/\bar{E}$ (curvas pretas) e $\bar{\lambda}_H/\bar{E}$ (curvas cinzas) para $\bar{\kappa} = 8$, 16, 24 (de baixo para cima) com $\Delta t = 10^{-3} a$. A curva mais acima, sobreposta com sua contraparte correspondente ao maior passo de tempo, é para $\bar{\kappa} = 24$ com $\Delta t = 5 \times 10^{-4} a$. (Todas as curvas correspondem a $\delta = 0.3$, $\tau = 55$, $\bar{R} = 0.2$ e $N = 10$).

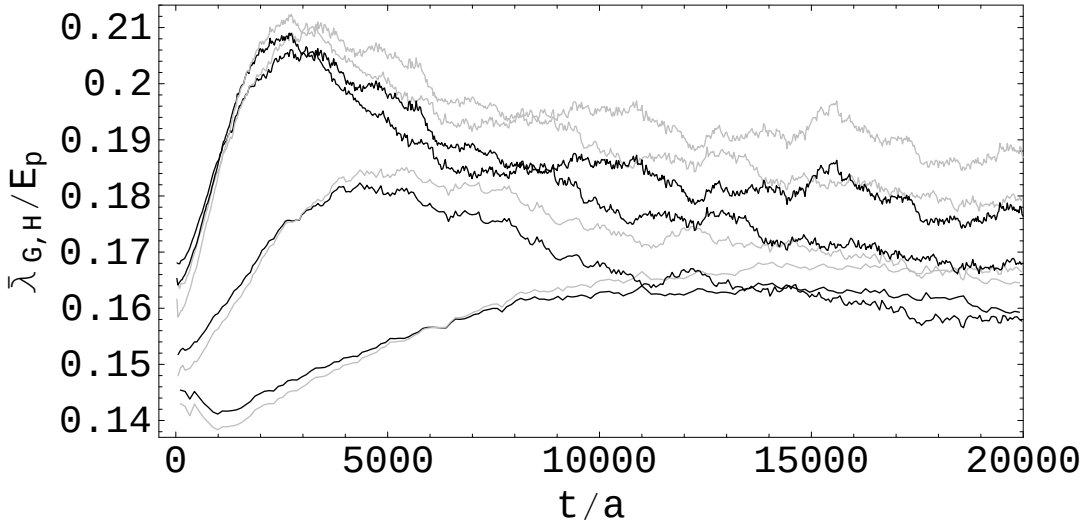

Figura 3.12: Evolução de tempo longo das funções de Liapunov $\bar{\lambda}_G/\bar{E}_p$ (curvas pretas) e $\bar{\lambda}_H/\bar{E}_p$ (curvas cinzas) para $\delta = 0.6$ (maiores valores iniciais), 0.45, 0.3 e 0.2 (menores valores iniciais) (com $\bar{\kappa} = 1$ e $N = 10$).

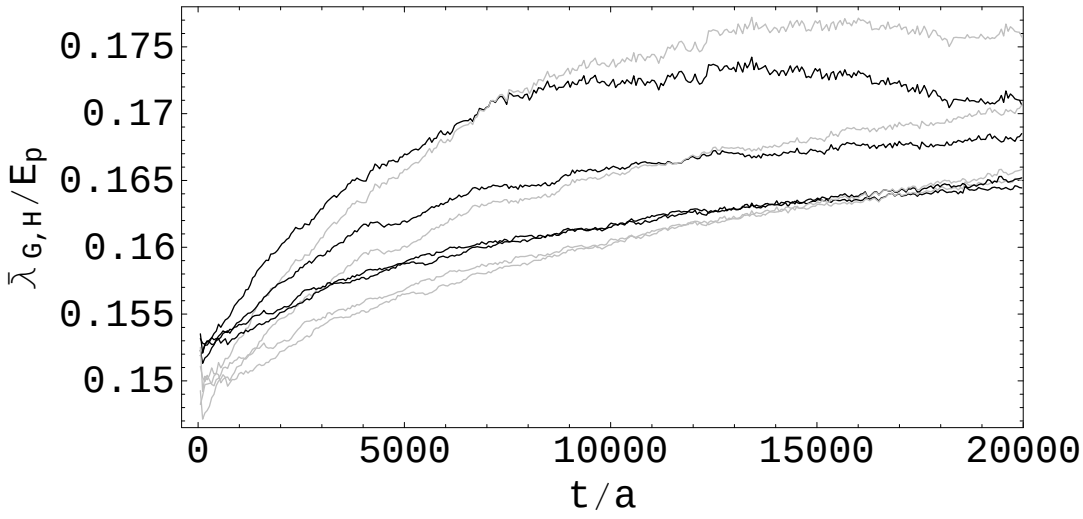

Figura 3.13: Evolução de tempo longo das funções de Liapunov $\bar{\lambda}_G/\bar{E}_p$ (curvas pretas) e $\bar{\lambda}_H/\bar{E}_p$ (curvas cinzas) para $\bar{\kappa} = 8$, 16, 24 e $\Delta t = 10^{-3}a$ (de cima para baixo) e $\bar{\kappa} = 24$ com $\Delta t = 5 \times 10^{-4}a$ ($\delta = 0.3$, $\tau = 55$, $\bar{R} = 0.2$ e $N = 10$).

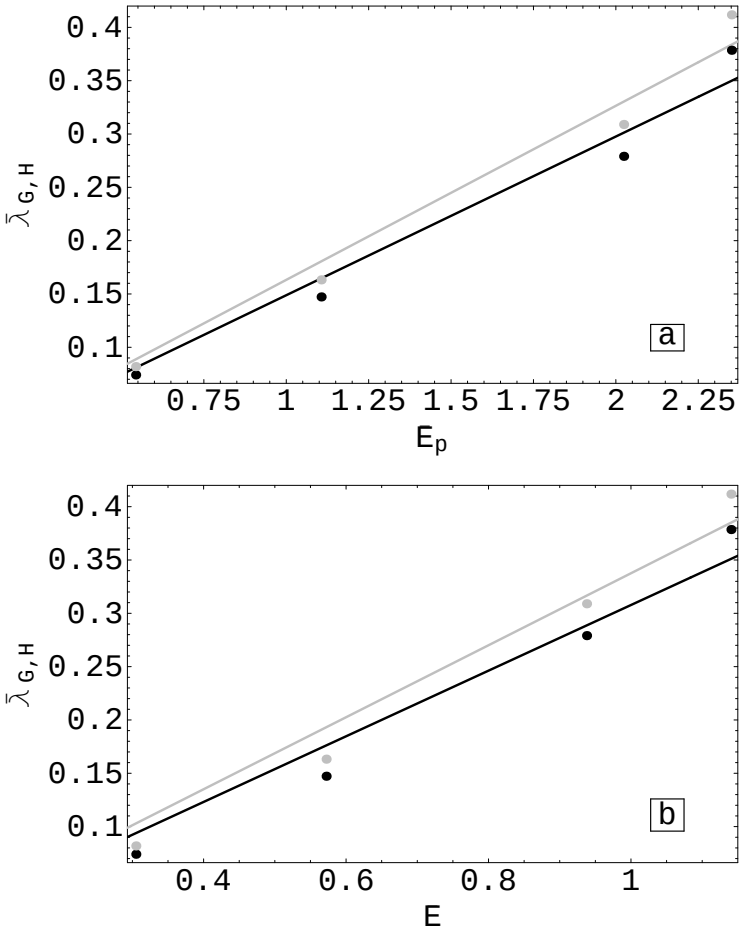

Figura 3.14: Valores extrapolados dos expoentes de Liapunov $\bar{\lambda}_G$ (pontos pretos) e $\bar{\lambda}_H$ (pontos cinzas) como uma função de $\bar{E}_p$ [painel a] e $\bar{E}$ [painel b]. As linhas retas indicam os melhores ajustes lineares obtidos pelo método dos mínimos quadrados. (Para $\delta = 0.6$, 0.45, 0.3 e 0.2, com $\bar{\kappa} = 1$ e $N = 10$.)

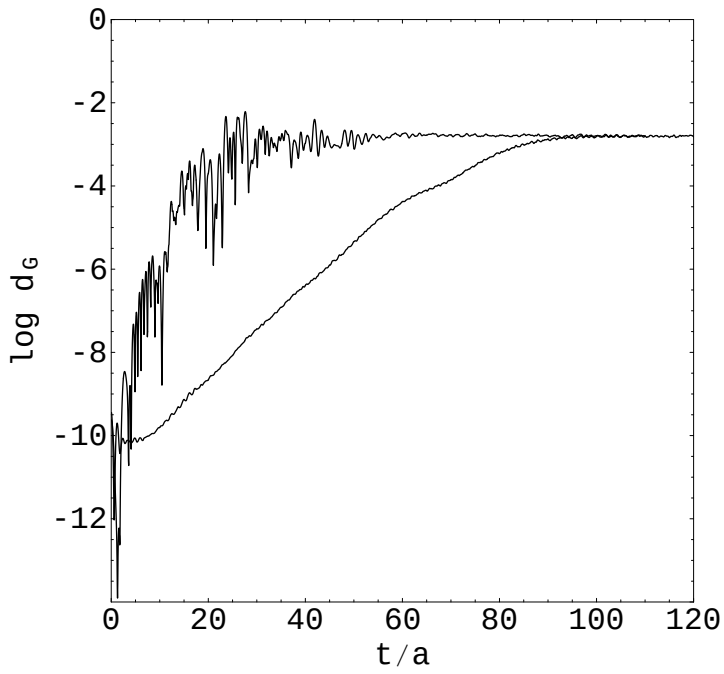

Figura 3.15: Evolução logarítmica da distância para campos magnéticos homogêneos inicialmente vizinhos (curva irregular) e para configurações randômicas inicialmente vizinhas (curva suave), em teoria de Yang-Mills (com $N = 10$ e $\bar{E} = 0.572023$).

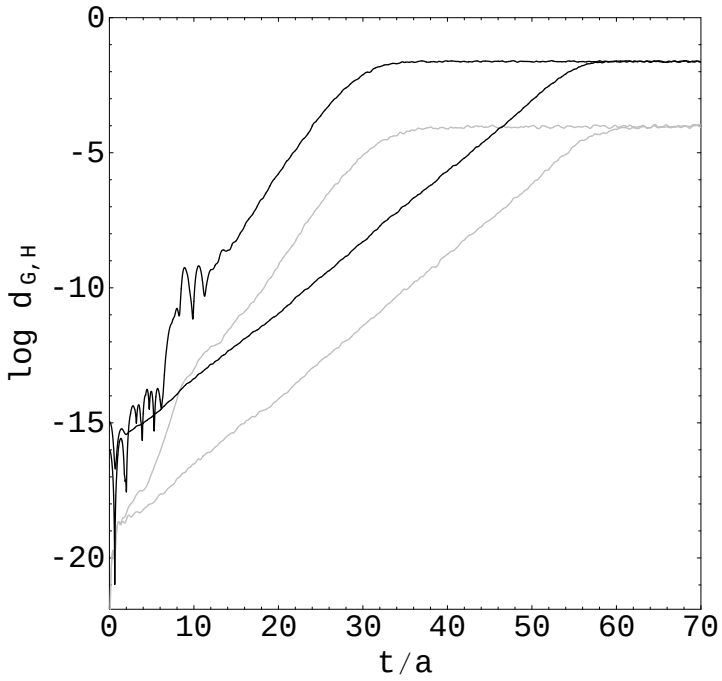

Figura 3.16: Evolução logarítmica das distâncias (2.55) (curvas pretas) e (3.15) (curvas cinzas) para dois campos magnéticos homogêneos inicialmente vizinhos (curvas irregulares com inclinações maiores na região linear) e para duas configurações randômicas inicialmente vizinhas, em teoria de Yang-Mills-Higgs (com $\delta = 0.3$, $\bar{R} = 0.2$, $\bar{\kappa} = 1$, $N = 10$ e $\bar{E} = 0.572023$).

Capítulo 4

Abordagem via integrais de Feynman para o modelo de Caldeira e Leggett: um estudo preparativo

O estudo da interação entre um sistema e seu meio é um tema central em mecânica clássica e quântica, e sobre o qual muito se tem trabalhado nos últimos anos. Dois são os efeitos principais que se associam com esta interação: a dissipação e o ruído. A dissipação é devido ao sistema ser afetado por seu ambiente, e o ruído é devido ao movimento difuso das partículas deste último. Em curtas escalas de tempo o efeito mais notável é a decoerência devido ao ruído. Em longas escalas de tempo a atuação recíproca da dissipação e do ruído conduz a um estado de equilíbrio térmico.

Uma abordagem bastante comum para modelar o meio é representá-lo como uma coleção de osciladores harmônicos independentes [80, 81, 82]. Outra abordagem é o uso de matrizes aleatórias [83]. Entretanto, de interesse especial é a possibilidade de substituir-se o meio de osciladores por um sistema caótico de baixa dimensionalidade [84]. O pressuposto básico é que a dinâmica do reservatório caótico é rápida em relação ao resto do sistema, sobre o qual se faz observações. Explora-se também a hipótese de que o reservatório seja fracamente perturbado em seu movimento, de maneira que se possa usar um acoplamento linear com o subsistema lento. Embora se eliminem os graus de liberdade do reservatório, os efeitos do acoplamento sobre ele podem ser considerados consistentemente no âmbito da teoria de Feynman-Vernon. Porém, enquanto que a abordagem de Caldeira e Leggett é fenomenológica no sentido de que as propriedades do reservatório não resultam de sua hamiltoniana, o caso do ambiente caótico tem de ser tratado dinamicamente. No contexto específico do modelo Higgs não-abeliano, A_i poderia considerar-se como um campo cujas componentes contém os modos de comprimento de onda longo, que teriam uma dinâmica mais lenta, enquanto ϕ conteria os modos de comprimento de onda curto, funcionando efetivamente como um banho térmico. Levada à prática, essa situação pode ser implementada por meio de uma análise fora do equilíbrio que usa teoria de per-

turbações para obter contribuições para uma ação efetiva, que podem ser associadas à dissipação e ao ruído. Estudos nesta linha foram realizados para modelos com campos escalares auto-interagentes nas Refs. [85, 86]. Em [87] utilizou-se a técnica do funcional de influência com o objetivo de estudar a dinâmica efetiva dos modos de comprimento de onda longo em teorias de Yang-Mills puras, e mostrou-se que a equação governante é da forma da equação de Langevin.

Neste quarto capítulo, que pode servir de ponto de partida para um estudo destinado a investigar efeitos de acoplamento a sistemas caóticos, leva-se a cabo uma revisão do modelo do banho de osciladores segundo o formalismo das integrais funcionais de Feynman. Partindo-se de um esquema de acoplamento sistema–mais–reservatório linear, o primeiro objetivo do presente capítulo será obter a forma explícita do funcional de influência de Feynman-Vernon para o caso de apenas um grau de liberdade, o que nos permitirá chegar a uma equação de Langevin generalizada que leva em consideração efeitos de memória. Para isso se começa por fazer uma descrição de parte do sistema, provida pelo operador densidade reduzido $\tilde{\rho}(t) = \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}\rho(t)$, em que tr_{B} denota o traço com respeito às variáveis do banho e com $\rho(t)$ sendo o operador densidade total. Em termos do operador densidade no tempo inicial $\rho(t_0)$ e do operador de evolução temporal unitário $U(t,t_0) = T_c \exp -i\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u\, H/\hbar$, no qual T_c representa o operador de ordenamento cronológico e H a hamiltoniana do sistema composto – função que será explicitada mais adiante, na representação de Heisenberg, ele se escreve como $\rho(t) = U(t_0,t)\rho(t_0)U(t,t_0)$. Será conveniente, no que se segue, considerar uma condição inicial em $\rho(t)$ do tipo Feynman-Vernon [88], isto é, supor que, no tempo inicial $t = t_0$, o operador densidade total pode ser dividido em um produto de operadores do sistema relevante e do banho. Adicionalmente, o banho é suposto estar em equilíbrio térmico a uma determinada temperatura. Daí, $\rho(t_0)$ tem a forma $\rho(t_0) = \rho_{\mathrm{S}}(t_0)\rho_{\mathrm{B}}(t_0)$, onde $\rho_{\mathrm{B}} = \exp(-\beta H_{\mathrm{B}})/\mathrm{tr}_{\mathrm{B}}\exp(-\beta H_{\mathrm{B}})$ é o operador densidade canônico do banho térmico não-perturbado, à temperatura inversa $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$, e ρ_{S} aquele do sistema isolado, usualmente não-linear. A inclusão de estados iniciais mais realistas ultrapassa o âmbito desta revisão. Para o leitor interessado nós o remetemos à literatura [89], onde essa generalização é implementada para sistemas abertos, sem forças externas.

Conforme proposto primeiramente por Feynman e Vernon [88], para realizar a redução é útil expressar o operador densidade total na representação de coordenadas. Valendo-se disso e objetivando discutir o comportamento dinâmico de um sistema quântico, cuja coordenada designaremos por x, em interação com outro sistema cuja coordenada chamaremos de X, chega-se a

$$\begin{aligned}&\langle xX|\rho(t)|yY\rangle \\ &= \int \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}X'\mathrm{d}Y'\langle xX|\exp -\tfrac{i}{\hbar}Ht|x'X'\rangle\langle x'X'|\rho(0)|y'Y'\rangle\langle y'Y'|\exp \tfrac{i}{\hbar}Ht|yY\rangle\,, \quad (4.1)\end{aligned}$$

no caso em que H não comuta com ρ e H seja independente do tempo. Por simplicidade, adotou-se o tempo inicial igual a zero. Os termos contendo H em (4.1) são facilmente reconhecidos como integrais funcionais [90]

$$\langle xX|\exp -\tfrac{i}{\hbar}Ht|x'X'\rangle \equiv K(x,X,t;x',X',0) = \int_{x'}^{x} \mathrm{D}x \int_{X'}^{X} \mathrm{D}X \exp \tfrac{i}{\hbar}S[x,X] \quad (4.2)$$

e

$$\langle y'Y'|\exp \tfrac{i}{\hbar}Ht|yY\rangle \equiv K^*(y,Y,t;y',Y',0) = \int_{y'}^{y} \mathrm{D}y \int_{Y'}^{Y} \mathrm{D}Y \exp -\tfrac{i}{\hbar}S[y,Y]\,, \quad (4.3)$$

onde K é a função de Green temporal do sistema composto e o fator de fase é a ação, que é o integral da lagrangeana em relação ao tempo. Estamos aqui interessados numa particular ação, a saber, $S = S_{\mathrm{S}}+S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{B}} = \int_0^t \mathrm{d}u\, L$, em que $L = L_{\mathrm{S}}+L_{\mathrm{I}}+L_{\mathrm{B}}$; L_{S}, L_{I} e L_{B} são, respectivamente, a lagrangeana do sistema de interesse, de interação e do reservatório. Dessa maneira, podemos reescrever a equação (4.1) como

$$\begin{aligned}&\langle xX|\rho(t)|yY\rangle \\ &= \int \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}X'\mathrm{d}Y' K(x,X,t;x',X',0)K^*(y,Y,t;y',Y',0)\langle x'X'|\rho(0)|y'Y'\rangle\,. \quad (4.4)\end{aligned}$$

Esta expressão para o operador densidade total descreve o comportamento do sistema–mais–reservatório como um todo. No entanto, não queremos ter toda essa informação nas mãos. Queremos ter acesso às propriedades do sistema, independentemente do comportamento específico do reservatório. Tudo que necessitamos é a sua influência sobre o sistema. Então, a quantidade que estamos realmente procurando não é o operador densidade total, mas o denominado operador densidade reduzido [91]. Este é obtido de maneira usual, tomando-se o traço sobre as variáveis do banho, o que significa colocar $Y = X$ e integrar sobre a variável que restou. Assim,

$$\begin{aligned}&\tilde{\rho}(x,y,t) \equiv \int \mathrm{d}X \langle xX|\rho(t)|yX\rangle \\ &= \int \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}X'\mathrm{d}Y'\mathrm{d}X K(x,X,t;x',X',0)K^*(y,X,t;y',Y',0)\langle x'X'|\rho(0)|y'Y'\rangle\,. \quad (4.5)\end{aligned}$$

A escolha, feita por Feynman e Vernon, foi a de que o operador densidade inicial deveria decompor-se como $\rho(0) = \rho_{\mathrm{S}}(0)\rho_{\mathrm{B}}(0)$, onde ρ_{S} refere-se apenas ao sistema relevante, enquanto ρ_{B} refere-se ao banho, quando não estão a interagir um com o outro. Após $t = 0$, ρ_{S} e ρ_{B} podem ambos mudar ao longo do tempo. Substituindo-se isto para dentro da Eq. (4.5) e utilizando-se as expressões (4.2) e (4.3), produz-se

$$\tilde{\rho}(x,y,t) = \int \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' J(x,y,t;x',y',0)\rho_{\mathrm{S}}(x',y',0)\,, \quad (4.6)$$

em que

$$J(x,y,t;x',y',0) = \int_{x'}^{x} \mathrm{D}x \int_{y'}^{y} \mathrm{D}y \exp \tfrac{i}{\hbar}S_{\mathrm{S}}[x] \exp -\tfrac{i}{\hbar}S_{\mathrm{S}}[y]\, F[x,y]\,, \quad (4.7)$$

com

$$F[x,y] = \int \mathrm{d}X'\mathrm{d}Y'\mathrm{d}X\rho_{\mathrm{B}}(X',Y',0)$$
$$\times \int_{X'}^{X} \mathrm{D}X \int_{Y'}^{Y} \mathrm{D}Y \exp\tfrac{i}{\hbar}(S_{\mathrm{I}}[x,X] - S_{\mathrm{I}}[y,Y] + S_{\mathrm{B}}[X] - S_{\mathrm{B}}[Y])\,. \quad (4.8)$$

Este último é normalmente referido como o funcional de influência de Feynman-Vernon [88, 90]. Não havendo interação entre o sistema de interesse e o banho térmico, o funcional de influência é igual a um. Então, a nossa expressão se reduz a um produto de dois propagadores, um avançado e outro retardado no tempo. Isso acontece porque, para um sistema fechado, o operador densidade pode ser expresso como o produto de uma função de onda com o seu conjugado complexo. Ao levar em conta a interação, não temos estes dois propagadores ocorrendo livremente. Ao invés disso, o funcional de influência lhes acopla. A expressão acima é a fórmula central no estudo que se seguirá.

O que temos de fazer agora é empregar um modelo específico, a partir do qual, esperamos extrair algumas conclusões gerais que, acreditamos, podem ser estendidas a vários outros sistemas. Vamos assumir que nosso reservatório é composto de um grande número de partículas não-interagentes, oscilando com desvios pequenos em relação aos seus estados de equilíbrio. Agora, acoplemos a ele um sistema descrito pela hamiltoniana geral $H_{\mathrm{S}} = p^2/2M + v(x)$, onde nos restringimos ao caso unidimensional, e suponhamos que o acoplamento seja débil no sentido que temos de considerar apenas a resposta linear do reservatório ao sistema. Esta restrição à linearidade pressupõe que qualquer grau de liberdade do banho é suficientemente pouco perturbado pelo sistema [80, 81, 82, 92, 93]. É importante notar que isto não implica, necessariamente, que a influência dissipativa do meio no sistema é fraca, pois o número de graus de liberdade do banho que se acoplam ao sistema é muito grande. Dado que qualquer sistema – cuja resposta é linear – pode ser representado por um conjunto de osciladores harmônicos, assim como nos modelos do tipo Caldeira-Leggett [80, 81, 82], e uma vez que, por hipótese, a interação entre os dois sistemas é linear, podemos, sem perda de generalidade, escrever a hamiltoniana do sistema total na forma

$$H = H_{\mathrm{S}} + H_{\mathrm{I}} + H_{\mathrm{B}} + H_{\mathrm{CT}}$$
$$= \frac{p^2}{2M} + v(x) - x\sum_k c_k X_k + \sum_k \frac{p_k^2}{2m_k} + \sum_k \tfrac{1}{2} m_k \omega_k^2 X_k^2 + x^2 \sum_k \frac{c_k^2}{2m_k\omega_k^2}\,, \quad (4.9)$$

onde os c_k são as constantes de acoplamento das partículas do reservatório ao sistema e os ω_k são as freqüências naturais de vibração das partículas do reservatório. O último termo do lado direito da expressão acima é um contratermo cuja função será eliminar os efeitos induzidos pelo acoplamento no potencial externo v. A ação que

aparece em (4.8) pode agora ser escrita como

$$S_{\mathrm{B}}[\boldsymbol{X}]+S_{\mathrm{I}}[x,\boldsymbol{X}]=\sum_k\int_0^t \mathrm{d}u\,G(u);\quad G(u)=\tfrac{1}{2}m_k\dot{X}_k^2-\tfrac{1}{2}m_k\omega_k^2X_k^2+c_kxX_k\,, \tag{4.10}$$

onde o símbolo $\boldsymbol{X}$ agora representa várias coordenadas em vez de apenas uma. Agora, como resultado do fato de que apenas potências lineares e quadráticas de X_k e $\dot{X}_k$ ocorrem na hamiltoniana, as integrações funcionais sobre os caminhos podem ser calculadas em forma fechada. O procedimento, embora um pouco tedioso, é certamente inteiramente direto e incluímos a seguir uma demonstração de como ocorre tal cômputo.

Primeiro, admitamos a existência de um caminho $\bar{X}_k$, que extremiza o funcional com relação aos diversos caminhos alternativos possíveis X_k. Agora façamos uso desta premissa e deixemos $X_k-\bar{X}_k=\xi_k$ ser a nova variável de integração. Visto que $\bar{X}_k$ satisfaz as condições de contorno, as flutuações ξ_k têm de ser nulas nos tempos 0 e t. Além disso, qualquer variação no caminho alternativo X_k é equivalente à variação associada da diferença ξ_k; isto dá-se pois o caminho $\bar{X}_k$ é completamente fixo. Por conseguinte, numa integral de trajetória, a diferencial $\mathrm{D}X_k$ pode ser substituída por $\mathrm{D}\xi_k$, e o caminho X_k por $\bar{X}_k+\xi_k$. Efetuada esta substituição, tem-se uma integral de trajetória independente das posições dos extremos. Isto pode ser comprovado ao se realizar a integração sobre u em (4.10). Explicitamente

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{d}u\big(\tfrac{1}{2}m_k\dot{X}_k^2-\tfrac{1}{2}m_k\omega_k^2X_k^2+c_kxX_k\big)&=\int_0^t \mathrm{d}u\big[\tfrac{1}{2}m_k\big(\dot{\bar{X}}_k^2-\omega_k^2\bar{X}_k^2\big)+c_kx\bar{X}_k\big]\\&+\int_0^t \mathrm{d}u\big(m_k\dot{\bar{X}}_k\dot{\xi}_k-m_k\omega_k^2\bar{X}_k\xi_k+c_kx\xi_k\big)+\int_0^t \mathrm{d}u\tfrac{1}{2}m_k\big(\dot{\xi}_k^2-\omega_k^2\xi_k^2\big)\,.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora usamos

$$\int_0^t \mathrm{d}u\,\dot{\bar{X}}_k\dot{\xi}_k=\xi_k\dot{\bar{X}}_k\Big|_0^t-\int_0^t \mathrm{d}u\,\ddot{\bar{X}}_k\xi_k\,, \tag{4.12}$$

que, com as condições de contorno já impostas sobre ξ_k, fornece

$$\int_0^t \mathrm{d}u\big(m_k\dot{\bar{X}}_k\dot{\xi}_k-m_k\omega_k^2\bar{X}_k\xi_k+c_kx\xi_k\big)=\int_0^t \mathrm{d}u\,\xi_k\big(-m_k\ddot{\bar{X}}_k-m_k\omega_k^2\bar{X}_k+c_kx\big)=0\,, \tag{4.13}$$

devido ao fato de que o comportamento da coordenada $\bar{X}_k$ com o tempo é dado pela equação de movimento clássica

$$m_k\ddot{\bar{X}}_k+m_k\omega_k^2\bar{X}_k=c_kx\,, \tag{4.14}$$

que é encontrada através do uso da equação de Euler satisfeita por G. Assim, eliminamos o integrando linear no desvio. Tudo o que resta são os termos de segunda

ordem em ξ_k. Estes podem ser facilmente apanhados, de maneira que podemos escrever

$$\int_{X_{k_a}}^{X_{k_b}} \mathrm{D}X_k \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}u G(u)\right] = \exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}u\left[\tfrac{1}{2}m_k\left(\dot{\bar{X}}_k^2 - \omega_k^2\bar{X}_k^2\right) + c_k x\bar{X}_k\right]\right\}$$
$$\times \int_0^0 \mathrm{D}\xi_k \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}u\tfrac{1}{2}m_k\left(\dot{\xi}_k^2 - \omega_k^2\xi_k^2\right)\right]. \tag{4.15}$$

Uma vez que todos os caminhos ξ_k partem e retornam ao ponto $\xi_k = 0$, a integral sobre trajetórias pode ser uma função apenas dos tempos nos extremos. A importante dependência em X_{k_a} e X_{k_b} pode ser encontrada simplesmente resolvendo-se a equação diferencial minimizante (Eq. (4.14)) sujeita às condições nos extremos $X_k(0) = X_{k_a}$ e $X_k(t) = X_{k_b}$ e calculando-se a integral que aparece no expoente da primeira exponencial em (4.15). Na realidade podemos simplificar consideravelmente esta integral integrando por partes a energia cinética e usando a equação de movimento, produzindo, assim, o seguinte resultado:

$$\int_0^t \mathrm{d}u\left[\tfrac{1}{2}m_k\left(\dot{\bar{X}}_k^2 - \omega_k^2\bar{X}_k^2\right) + c_k x\bar{X}_k\right] = \tfrac{1}{2}m_k\bar{X}_k\dot{\bar{X}}_k\Big|_0^t + \tfrac{1}{2}c_k\int_0^t \mathrm{d}u x\bar{X}_k\,. \tag{4.16}$$

Assumindo-se $x(u)$ como dado, (4.14) é formalmente resolvida por

$$\bar{X}_k(u) = X_{k_a}\frac{\sin\omega_k(t-u)}{\sin\omega_k t} + X_{k_b}\frac{\sin\omega_k u}{\sin\omega_k t}$$
$$+ \frac{c_k}{m_k\omega_k}\int_0^u \mathrm{d}s x(s)\sin\omega_k(u-s) - \frac{c_k}{m_k\omega_k}\frac{\sin\omega_k u}{\sin\omega_k t}\int_0^t \mathrm{d}s x(s)\sin\omega_k(t-s)\,. \tag{4.17}$$

Ao se inserir esta solução na expressão (4.16), obtém-se

$$\tfrac{1}{2}m_k\bar{X}_k\dot{\bar{X}}_k\Big|_0^t + \tfrac{1}{2}c_k\int_0^t \mathrm{d}u x\bar{X}_k = \frac{m_k\omega_k}{2\sin\omega_k t}\left[\left(X_{k_a}^2 + X_{k_b}^2\right)\cos\omega_k t - 2X_{k_a}X_{k_b}\right]$$
$$+ \frac{X_{k_a}c_k}{\sin\omega_k t}\int_0^t \mathrm{d}s x(s)\sin\omega_k(t-s) + \frac{X_{k_b}c_k}{\sin\omega_k t}\int_0^t \mathrm{d}s x(s)\sin\omega_k s$$
$$- \frac{c_k^2}{2m_k\omega_k\sin\omega_k t}\int_0^t \mathrm{d}s x(s)\sin\omega_k(t-s)\int_0^t \mathrm{d}u x(u)\sin\omega_k u$$
$$+ \frac{c_k^2}{2m_k\omega_k}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{d}s\sin\omega_k(u-s)x(u)x(s) - \frac{c_k^2}{2m_k\omega_k^2}\int_0^t \mathrm{d}u x^2(u)\,. \tag{4.18}$$

Ainda temos de calcular a integral de trajetória do lado direito da equação (4.15). Isto será alcançado transformando as variáveis originais em um conjunto mais útil de variáveis. Uma vez que todos os caminhos ξ_k vão de 0 em $u = 0$ a 0 em $u = t$, tais caminhos podem ser escritos como uma série de Fourier em senos. Por conseguinte:

$$\xi_k(u) = \sum_n \xi_k^n \sin\nu_n u\,; \qquad \nu_n = \pi n/t\,. \tag{4.19}$$

Os ξ_k^n constituem novas variáveis de integração e (4.19) deve ser vista como a definição de uma mudança de variáveis, a qual deve ser acompanhada de um fator na medida de integração correspondente ao jacobiano da transformação. Embora se possa determinar este jacobiano de forma direta, é muito mais fácil tomar a partícula livre como uma espécie de sistema de referência. O propagador da partícula livre

$$P(b,a) = \left[\frac{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}{m}\right]^{-1/2} \exp\frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)} \tag{4.20}$$

pode ser derivado de várias formas diferentes. O fator pré-exponencial que aí aparece dá-nos o que precisamos para recuperar o fator correto no final.

Devido à ortogonalidade das funções seno, imediatamente obtemos

$$\tfrac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}u \tfrac{1}{2} m_k\big(\dot{\xi}_k^2 - \omega_k^2\xi_k^2\big) = \tfrac{1}{2} t \sum_n \tfrac{1}{2}\tfrac{i}{\hbar} m_k\big(\nu_n^2 - \omega_k^2\big)\xi_k^n\xi_k^n\,. \tag{4.21}$$

Com base no pressuposto de que o tempo t é dividido em passos discretos de comprimento ϵ de modo que só há um número finito N de coeficientes, a integral funcional sobre todas as flutuações pode agora ser reescrita em termos de uma integral convencional sobre os coeficientes da expansão de Fourier

$$\begin{aligned}&\int_0^0 \mathrm{D}\xi_k \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}u \tfrac{1}{2} m_k\big(\dot{\xi}_k^2 - \omega_k^2\xi_k^2\big)\right]\\ &\quad = \frac{J}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi_k^1}{A}\frac{\mathrm{d}\xi_k^2}{A}\cdots\frac{\mathrm{d}\xi_k^N}{A}\exp\left[\tfrac{1}{2}t\sum_{n=1}^{N}\tfrac{1}{2}\tfrac{i}{\hbar}m_k\big(\nu_n^2 - \omega_k^2\big)\xi_k^n\xi_k^n\right],\end{aligned} \tag{4.22}$$

com $A = (2\pi i\hbar\epsilon/m)^{1/2}$ e em que o fator J é o jacobiano da transformação. Visto que o expoente pode ser separado em fatores, a integral sobre cada coeficiente pode ser feita separadamente. O resultado de uma tal integração é

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi_k^n}{A}\exp\big[\tfrac{1}{4}\tfrac{i}{\hbar}m_k t\big(\nu_n^2 - \omega_k^2\big)\xi_k^n\xi_k^n\big] = (2/\epsilon t)^{1/2}\big(\nu_n^2 - \omega_k^2\big)^{-1/2}\,. \tag{4.23}$$

Acha-se, assim, que a integral de trajetória desejada é proporcional a

$$\prod_{n=1}^{N}\big(\nu_n^2 - \omega_k^2\big)^{-1/2} = C\prod_{n=1}^{N}\big(1 - \omega_k^2/\nu_n^2\big)^{-1/2}\,, \tag{4.24}$$

onde a constante C recolhe todos os fatores independentes de ω_k. No limite em que N vai a infinito (isto é, $\epsilon \to 0$), este resultado é simplificado pelo uso da identidade

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big) = \frac{\sin z}{z}\,. \tag{4.25}$$

A constante C pode ser determinada comparando a Eq. (4.24) com o já conhecido resultado de uma partícula livre (Eq. (4.20)); daí segue que $C = (m_k/2\pi i\hbar t)^{1/2}$.

Portanto vemos que o pré-fator que procuramos é dado por: $(m_k\omega_k/2\pi i\hbar\sin\omega_k t)^{1/2}$. Assim, combinando este resultado com o obtido em (4.18) para dentro da equação (4.15) tem-se a expressão final para a integral funcional sobre a coordenada X_k – e com isso encerramos a nossa demonstração.

Interessar-nos-emos, naquilo que se segue, pela obtenção de uma expressão particularmente conveniente para o funcional de influência, que será útil mais adiante, no cálculo das equações de movimento. O primeiro passo para isso é efetuar as integrações remanescentes em (4.8). Para tanto, no nosso problema particular, assumiremos a hipótese de que o banho está, inicialmente, em equilíbrio térmico a uma temperatura T e, por esse motivo, seu operador densidade pode ser escrito como

$$\rho_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{Y}',0)=\prod_k\left(\frac{m_k\omega_k}{\pi\hbar\coth\frac{\hbar\omega_k}{2k_{\mathrm{B}}T}}\right)^{1/2}\times\exp-\left\{\frac{m_k\omega_k}{2\hbar\sinh\frac{\hbar\omega_k}{k_{\mathrm{B}}T}}\left[\left(X_k'^2+Y_k'^2\right)\cosh\frac{\hbar\omega_k}{k_{\mathrm{B}}T}-2X_k'Y_k'\right]\right\}. \quad (4.26)$$

Uma vez que todas as integrais que aparecem no cálculo do funcional de influência são integrais funcionais gaussianas, podemos calculá-las de forma direta. Após um pouco de álgebra pode ser mostrado que:

$$F[x,y]=\exp-\tfrac{1}{\hbar}\left\{\int_0^t\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{d}s\big[x(u)-y(u)\big]\big[\alpha(u-s)x(s)-\alpha^*(u-s)y(s)\big]\right\}\times\exp-\tfrac{i}{\hbar}\left\{\int_0^t\mathrm{d}u\tfrac{1}{2}\,\mu\big[x^2(u)-y^2(u)\big]\right\}, \quad (4.27)$$

com o kernel de influência (ou função de correlação do banho)

$$\alpha(u-s)=\sum_k\frac{c_k^2}{2m_k\omega_k}\left[\cos\omega_k(u-s)\coth\frac{\hbar\omega_k}{2k_{\mathrm{B}}T}-i\sin\omega_k(u-s)\right], \quad (4.28)$$

e onde foi introduzido o parâmetro $\mu=\sum_k\frac{c_k^2}{m_k\omega_k^2}$. Uma forma muito mais vantajosa para escrever o funcional de influência é em termos das partes real e imaginária da função α. De fato, podemos escrever o propagador para o operador densidade que seria:

$$J(x,y,t;x',y',0)=\int_{x'}^x\mathrm{D}x\int_{y'}^y\mathrm{D}y\,\exp\tfrac{i}{\hbar}\left\{S_{\mathrm{S}}[x]-S_{\mathrm{S}}[y]-\int_0^t\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{d}s\big[x(u)-y(u)\big]\alpha_{\mathrm{I}}(u-s)\big[x(s)+y(s)\big]\right\}$$
$$\times\exp-\tfrac{1}{\hbar}\left\{\int_0^t\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{d}s\big[x(u)-y(u)\big]\alpha_{\mathrm{R}}(u-s)\big[x(s)-y(s)\big]+i\int_0^t\mathrm{d}u\tfrac{1}{2}\,\mu\big[x^2(u)-y^2(u)\big]\right\}, \quad (4.29)$$

em que $\alpha_{\rm R}$ e $\alpha_{\rm I}$ são dados por

$$\alpha_{\rm R}(u-s) = \sum_k \frac{c_k^2}{2m_k\omega_k} \coth\frac{\hbar\omega_k}{2k_{\rm B}T} \cos\omega_k(u-s)\,, \quad \alpha_{\rm I}(u-s) = -\sum_k \frac{c_k^2}{2m_k\omega_k} \sin\omega_k(u-s)\,. \tag{4.30}$$

Agora, uma vez que temos o operador densidade reduzido do sistema em $t = 0$, as expressões (4.6) e (4.29) nos fornecerão o seu desenvolvimento no tempo. Não há mais dependência em relação às coordenadas do reservatório. No que diz respeito ao modelo hamiltoniano, teremos resolvido o problema exatamente. Efetivamente, o sistema não é obrigatoriamente associado a uma partícula movendo-se em um potencial unidimensional independente do tempo – tal como foi assumido em (4.9). A principal pressuposição é de que a hamiltoniana de interação é uma função linear das variáveis do banho, e somente neste caso somos capazes de eliminar precisamente o meio enquanto o acoplamento na variável da partícula pode ser não-linear, inclusive.

É conveniente, neste momento, introduzir a função espectral

$$I(\omega) = \pi \sum_k \frac{c_k^2}{2m_k\omega_k}\, \delta(\omega - \omega_k)\,. \tag{4.31}$$

Esta quantidade contém informação sobre as frequências dos modos do banho e seus acoplamentos ao sistema de interesse, e é dada pela parte imaginária da transformada de Fourier da susceptibilidade dinâmica do banho. Em consequência, a somatória em (4.28) pode ser substituída por uma integral. Feito isto, as partes real e imaginária do kernel aparecerão como

$$\alpha_{\rm R}(u) = \int_0^\infty \frac{{\rm d}\omega}{\pi} I(\omega) \coth\tfrac{1}{2}\beta\hbar\omega \cos\omega u \quad \text{e} \quad \alpha_{\rm I}(u) = -\int_0^\infty \frac{{\rm d}\omega}{\pi} I(\omega) \sin\omega u\,. \tag{4.32}$$

Agora, a parte imaginária do kernel pode ser escrita na seguinte forma alternativa

$$\alpha_{\rm I}(u) = \frac{1}{2}{\rm d}\eta(u)/{\rm d}u \quad \text{com} \quad \eta(u) = 2\int_0^\infty \frac{{\rm d}\omega}{\pi} \frac{I(\omega)}{\omega} \cos\omega u\,. \tag{4.33}$$

Por conta da equação dada acima, a expressão em (4.29) pode ser mais simplificada, notando-se que se integrarmos o termo contendo $\alpha_{\rm I}$ por partes podemos obter

$$\begin{aligned} & i\int_0^t {\rm d}u \int_0^u {\rm d}s \big[x(u) - y(u)\big]\alpha_{\rm I}(u-s)\big[x(s) + y(s)\big] \\ & = -\frac{i}{2}\int_0^t {\rm d}u\,\eta(0)\big[x^2(u) - y^2(u)\big] + \frac{i}{2}\big[x(0) + y(0)\big]\int_0^t {\rm d}u\,\eta(u)\big[x(u) - y(u)\big] \\ & \qquad + \frac{i}{2}\int_0^t {\rm d}u \int_0^u {\rm d}s\,\eta(u-s)\big[\dot{x}(s) + \dot{y}(s)\big]\big[x(u) - y(u)\big]\,. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Por causa do fato de que $\eta(0) = \mu$ o primeiro termo na Eq. (4.34) cancela exatamente o último termo do expoente na terceira linha da equação (4.29). Convém notar que

para o caso de um modelo sem contratermo na forma definida em (4.9), o primeiro termo acima conduziria a uma renormalização do potencial original.

O resultado obtido desta maneira para o propagador sugere-nos a introdução de coordenadas relativa e de centro de massa, também conhecidas como coordenadas de Wigner, as quais designamos respectivamente por $\zeta = x - y$ e $r = (x+y)/2$, com valores iniciais e finais definidos conformemente. Essas novas variáveis podem ser vistas de tal forma que a primeira variável represente flutuações quânticas em torno da trajetória do centro de massa. Em termos destes novos caminhos a integral funcional da Eq. (4.29) é escrita como $J = \int_{r'}^{r}\int_{\zeta'}^{\zeta} \mathrm{D}r\mathrm{D}\zeta \exp(i\Sigma[r,\zeta]/\hbar)$, com

$$\begin{aligned}\Sigma[r,\zeta] = &\int_0^t \mathrm{d}u\big[M\dot{r}\dot{\zeta} - v(r+\zeta/2) + v(r-\zeta/2) - r'\eta(u)\zeta(u)\big] \\ &- \int_0^t \mathrm{d}u\left[\int_0^u \mathrm{d}s\,\eta(u-s)\dot{r}(s)\zeta(u) - \frac{i}{2}\int_0^t \mathrm{d}s\,\alpha_{\mathrm{R}}(u-s)\zeta(u)\zeta(s)\right]. \end{aligned} \tag{4.35}$$

As equações de movimento podem agora ser derivadas de maneira usual variando a ação de influência Σ em (4.35). Imediatamente antes disto, no entanto, faz-se necessário tratar o termo do funcional J referente à parte imaginária de Σ. Uma forma bastante comum de proceder é reescrevê-lo em termos de uma integral funcional sobre um campo auxiliar real Ξ [94]:

$$\exp\left[-\tfrac{1}{2\hbar}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^t \mathrm{d}s\,\alpha_{\mathrm{R}}(u-s)\zeta(u)\zeta(s)\right] = \int \mathrm{D}\Xi\, P(\Xi)\exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}u\,\Xi(u)\zeta(u)\right], \tag{4.36}$$

onde a função peso é definida por:

$$P(\Xi) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^t \mathrm{d}s\left[\hbar\alpha_{\mathrm{R}}(u-s)\right]^{-1}\Xi(u)\Xi(s)\right\}}{\int \mathrm{D}\Xi\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^t \mathrm{d}s\left[\hbar\alpha_{\mathrm{R}}(u-s)\right]^{-1}\Xi(u)\Xi(s)\right\}}. \tag{4.37}$$

Podemos interpretar Ξ como sendo um campo randômico gaussiano de espectro colorido. Realmente, se definirmos a média estatística como $\langle\cdots\rangle_\Xi = \int \mathrm{D}\Xi\cdots P(\Xi)$, teremos as seguintes funções de correlação para Ξ:

$$\begin{aligned}&\langle\Xi(u_1)\Xi(u_2)\cdots\Xi(u_{2n+1})\rangle_\Xi = 0 \text{ para todo } n\in\mathbb{Z}, \quad \langle\Xi(u_1)\Xi(u_2)\rangle_\Xi = \hbar\alpha_{\mathrm{R}}(u_1-u_2), \\ &\langle\Xi(u_1)\Xi(u_2)\Xi(u_3)\Xi(u_4)\rangle_\Xi = \hbar^2\big[\alpha_{\mathrm{R}}(u_1-u_2)\alpha_{\mathrm{R}}(u_3-u_4) \\ &\qquad + \alpha_{\mathrm{R}}(u_1-u_3)\alpha_{\mathrm{R}}(u_2-u_4) + \alpha_{\mathrm{R}}(u_1-u_4)\alpha_{\mathrm{R}}(u_2-u_3)\big], \end{aligned} \tag{4.38}$$

e demais correlações expressas por somas de produtos da função α_{R}. Essas propriedades revelam a diferença entre o presente campo randômico e um ruído branco que é delta-correlacionado no tempo. Para determinar as expressões das correlações considerou-se o funcional abaixo:

$$Z[k] = \int \mathrm{D}\Xi\, e^{-\frac{1}{2}i\int \mathrm{d}u\int \mathrm{d}s A(u,s)\Xi(u)\Xi(s)}\, e^{i\int \mathrm{d}u\Xi(u)k(u)}, \tag{4.39}$$

o qual pode ser reescrito na forma (a menos de um fator numérico irrelevante):

$$Z[k] = e^{\frac{1}{2} i \int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}s B(u,s) k(u) k(s)}, \tag{4.40}$$

onde $B(u,s)$ é o inverso de $A(u,s)$, isto é, $\int \mathrm{d}\tau A(u,\tau) B(\tau,s) = \delta(u,s)$. Pode-se agora obter as funções de correlação de n-pontos via diferenciação funcional com relação a k e fazendo $k = 0$:

$$\langle \Xi(u_1) \cdots \Xi(u_n) \rangle_\Xi = \left\{ \frac{1}{Z[k]} \frac{\delta^n Z[k]}{i\delta k(u_1) \cdots i\delta k(u_n)} \right\} \Bigg|_{k=0}. \tag{4.41}$$

Isto posto, ao termo real da ação Σ insere-se a integral do produto entre Ξ e ζ para finalmente se obter a forma fechada da equação governante sob o requisito de que $\delta(\mathrm{Re}\Sigma + \int \Xi\, \zeta) = 0$ para variações $\delta\zeta$ arbitrárias, do que resulta:

$$M\ddot{r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} + \int_0^u \mathrm{d}s \eta(u-s) \dot{r}(s) = -r' \eta(u) + \Xi(u)\,, \tag{4.42}$$

obtida considerando-se apenas termos de primeira ordem na flutuação ζ para $-v(r+\zeta/2) + v(r-\zeta/2)$, sendo $-v'(r)\,\zeta$ o termo que contribui mais significantemente na expansão. Essa última equação é uma equação do tipo Langevin com um termo de memória não-markoviana e um ruído colorido que tem bi-correlação determinada pela função $\alpha_{\mathrm{R}}(u-s)$, explicitada em (4.30). No entanto, não é a única equação evolutiva no limite semiclássico discutido neste estudo, outras equações são obtidas realizando-se derivadas variacionais com respeito ao ruído e a r, mas não têm maior relevância no âmbito de nossa análise e por isso serão omitidas. Naturalmente, a natureza randômica da força $\Xi(u)$ faz com que r e $\dot{r}$ sejam variáveis aleatórias, devendo suas propriedades serem tratadas sob o ponto de vista estatístico. Incorpora-se também à equação acima a inomogeneidade $-r'\eta(u)$, podendo essa ser suprimida por integração parcial sob pena de se substituir o termo da integral pela derivada dele em relação a u. Vale lembrar que a equação de Langevin usual (com um termo dissipativo proporcional a $\dot{r}$ e ruído branco) corresponde a um caso particular da Eq. (4.42), que poderia ser obtida através de uma aproximação isotrópica à função distribuição de frequências $I(\omega)$ [80, 81, 82]. Por fim, em virtude da relação que a equação (4.33) estabelece, pode-se argumentar a favor de uma conexão entre a memória dissipativa η e o espectro de potência de Fourier para a função de correlação de dois pontos do campo randômico Ξ através de

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \langle \Xi(\tau) \Xi(0) \rangle_\Xi \exp -i\omega\tau = \hbar I(\omega) \coth \tfrac{1}{2}\beta\hbar\omega, \tag{4.43}$$

que é a versão quântica do teorema de flutuação-dissipação [95].

Em conclusão, a formulação em termos de integrais de caminho de Feynman foi bastante adequada para explicitar a influência do banho térmico sobre a dinâmica de

um sistema de uma partícula a ele acoplado, sendo esta regida por uma equação de movimento semelhante à de Langevin. Nessa equação, além do termo integral, tem-se um ruído correlacionado no tempo ligado à função kernel η desse termo através da forma assumida para a densidade espectral de ω dada pela expressão (4.31). É importante observar que o modelo estudado neste capítulo pode ser também aplicado a sistemas mais elaborados contendo duas ou mais partículas interagentes apenas via reservatório de osciladores. Com respeito a isso, em um trabalho recente [96], Duarte e Caldeira consideraram a possibilidade da existência de uma interação efetiva mediada pelo reservatório quando se introduz uma segunda partícula no meio dissipativo. (A análise quântica do problema [97] revelou ainda outras propriedades como o emaranhamento bipartite.) Tendo este resultado em mente, seria, do nosso ponto de vista, interessante indagar se um fenômeno análogo poderia acontecer em sistemas de partículas que interagem por meio de acoplamento caótico. A hamiltoniana total que proporíamos para estudar essa questão seria a seguinte: $H = H_{\rm osc} + U_{\rm int} + H_{\rm caos} + V_{\rm int} + \bar{H}_{\rm osc}$, na qual o oscilador $H_{\rm osc}$ está acoplado através do potencial $U_{\rm int}$ ao sistema caótico, $H_{\rm caos}$, que faz o papel de reservatório e se acopla a outro oscilador, $\bar{H}_{\rm osc}$, por $V_{\rm int}$. Uma escolha oportuna de $H_{\rm caos}$ é a hamiltoniana do modelo mecânico de Yang-Mills, a qual, conforme visto na Sec. 2.2, apresenta caos, caracterizado pela positividade do expoente de Liapunov superior. Em [84] Bonança e de Aguiar estudaram um problema mais simples do que o por nós proposto e obtiveram resultados que apontam algumas similitudes com a descrição em termos de reservatórios de muitos graus de liberdade.

Com isso, encerramos este capítulo e partimos para as conclusões da tese, onde constam os resultados alcançados bem como algumas sugestões para trabalhos futuros que possam complementar o presente estudo.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas futuras

Investigamos neste trabalho de tese a caoticidade e propriedades de termalização de campos de calibre e de Higgs clássicos na fase não-quebrada da teoria de Yang-Mills-Higgs SU(2) em uma rede espacial. Já que a equilibração procede principalmente através dos mais instáveis modos de campo, focamo-nos em um levantamento quantitativo dos padrões de evolução temporal mais caóticos, em termos de expoentes de Liapunov máximos, os quais medem as taxas de crescimento de distância logarítmica entre campos de calibre e de Higgs inicialmente vizinhos.

Um objetivo central de nossa investigação foi explorar o impacto do dubleto de campos escalares complexos (campos de Higgs) no comportamento caótico da dinâmica de calibre. Para este fim, primeiro confirmamos e estendemos evidências prévias para a equilibração do sistema Yang-Mills-Higgs ao longo de duas escalas de tempo drasticamente diferentes: individualmente, os setores um tanto fracamente acoplados de calibre e de Higgs atingem uma fase de pré-equilíbrio após apenas algumas unidades de tempo de rede, enquanto que a sua mútua equilibração é substancialmente atrasada pelos campos de Higgs e leva muito mais do que 10^4 unidades para se completar. Conformemente, geramos dois conjuntos de expoentes de Liapunov máximos para campos inicialmente randômicos: um maior, extraído das taxas de separação de campos no estágio de pré-equilibração; e um menor, obtido a partir de trajetórias de tempo longo extrapoladas a tempo de evolução infinito e, assim, ao equilíbrio completo.

O primeiro conjunto foi desenvolvido para cobrir uma parte representativa do espaço de fases fracamente acoplado e contém em torno de 80 expoentes de Liapunov. Em vista de seus não-desprezíveis erros de tempo finito, este conjunto foi principalmente usado para estudar características gerais dos expoentes, incluindo sua dependência em relação à energia, ao parâmetro de acoplamento e ao tamanho de rede. Descobrimos que os sinais de todo o conjunto são positivos (em contraste com resultados na fase quebrada), o que implica que o caos é, ao menos aproximadamente, universal na fase simétrica. (Possíveis exceções podem ser pequenas

"ilhas" do tipo KAM como anteriormente encontrado no espaço de fases de Yang-Mills.) Teorias de Yang-Mills-Higgs com grupos de calibre contendo SU(2) como um subgrupo são portanto caóticas também. Nas regiões de energia e acoplamento estudadas, onde ambos os erros de tamanho finito e espaçamento de rede deveriam estar sob controle, nossos expoentes de Liapunov em redes com vértices entre 10^3 e 30^3 mostraram-se realmente idênticos dentro de incertezas estatísticas. Além disso, vimos que os expoentes de Liapunov máximos, extraídos durante a fase de pré-equilíbrio, são quase independentes do auto-acoplamento de Higgs. Isto indica que as interações não-lineares no setor de Higgs fornecem uma contribuição relativamente pequena à caoticidade do sistema.

A fim de fazer um levantamento das importantes e anteriormente inexploradas regiões assintóticas do espaço de fases de Yang-Mills-Higgs, acompanhamos adicionalmente diversas trajetórias de evolução de campos ao longo dos períodos excepcionalmente longos exigidos para a aproximação do equilíbrio total. Em particular, investigamos o comportamento de longo tempo de oito evoluções de Liapunov (i.e., taxas de separação logarítmica entre campos inicialmente vizinhos) ao longo de 20000 unidades de rede. Após extrapolação para tempos de evolução infinitos, elas fornecem nossas melhores estimativas para os expoentes de Liapunov máximos. Todas as evoluções de Liapunov passam a diminuir monotonicamente com o tempo e saturam de forma relativamente lenta, mesmo após a energia haver atingido quase completa equipartição. Em valores maiores do auto-acoplamento de Higgs, as evoluções de Liapunov variam menos fortemente durante o tempo enquanto sua saturação é (mais) postergada. Além do mais, as evoluções divididas pela energia média por plaqueta saturam mais rapidamente do que elas próprias. Isto prenuncia um início prematuro de sua relação de escala linear no sistema equilibrado (ver abaixo). O comportamento de longo tempo das evoluções de Liapunov fornece, ademais, estimativas confiáveis para os erros de tempo finito dos expoentes, e quantifica, em particular, o quanto eles estão superestimados na fase de pré-equilíbrio.

O interesse físico em expoentes de Liapunov de campos de calibre se origina parcialmente da evidência de sua relação linear com a taxa de amortecimento estático do plasmon em regime de fraco acoplamento. Esta relação conta com a dependência linear, identificada empiricamente, dos expoentes de Liapunov máximos na energia potencial magnética média do campo de calibre. Examinamos, portanto, minuciosa e sistematicamente as regiões de precisão e validade desta relação de escala, com base em nosso completo conjunto de dados. Tanto durante o significativamente longo período de pré-equilíbrio, ou seja, antes de os setores de calibre e de Higgs terem trocado quantidades substanciais de energia, como após a completa termalização, pudemos de fato ver que as evoluções de Liapunov apresentam, dentro de erros, relação linear de escala com a energia média de campo de calibre. Mais es-

pecificamente, tanto durante o pré-equilíbrio quanto após a completa equilibração, nossos resultados estabelecem a relação $\bar{\lambda}_{G,H} \approx \frac{1}{6}\bar{E}_p$ entre os expoentes de Liapunov máximos e a energia por plaqueta. Esta relação foi anteriormente encontrada na teoria de Yang-Mills pura e parece ser uma propriedade bastante exclusiva de teorias de calibre não-abelianas. Ela implica que os expoentes de Liapunov, para qualquer energia de campo de calibre, extraídos quer da taxa de separação de calibre quer da taxa de Higgs permanecem, dentro de erros, independentes da presença do campo de Higgs. Isto dá credibilidade adicional à sugerida igualdade entre os expoentes de Liapunov e o dobro da taxa de amortecimento estático do plasmon da teoria quântica de Yang-Mills-Higgs em altas temperaturas e fraco acoplamento. Adicionalmente, estabelecemos que, tanto durante o estágio de pré-equilíbrio como depois da completa termalização, os maiores expoentes de Liapunov também escalam linearmente em relação à energia total. Isto está em contraste com expectativas anteriores e se torna uma consequência da proporcionalidade entre energia de calibre e total durante ambas as fases.

Estudamos, além disso, de que modo interações com o campo de Higgs afetam a instabilidade de Savvidi de campos magnéticos constantes. Como uma referência, em primeiro lugar obtivemos o expoente de Liapunov máximo positivo para um campo magnético inicialmente constante na teoria de Yang-Mills pura; e o descobrimos cerca de duas vezes maior que aquele de um campo randomicamente inicializado. Computamos então o expoente de Liapunov análogo na teoria de Yang-Mills-Higgs para campos magnéticos e de Higgs inicialmente homogêneos, na mesma energia total, e o encontramos ainda sendo em torno de duas vezes maior do que para campos randômicos. Dessa maneira, os campos de Higgs adicionais parecem não refrear nem aumentar a instabilidade de Savvidi, relativa àquela de campos randômicos da mesma energia. Dependendo da distribuição de energia inicial entre campos de calibre e de Higgs, entretanto, a presença de campos de matéria pode ter um forte impacto na magnitude absoluta da instabilidade do campo magnético. A fim de demonstrar isso, fornecemos um exemplo em que os campos de matéria aproximadamente dobram o expoente de Liapunov máximo do campo de calibre.

Em todas as simulações descritas acima, vimos as evoluções de Liapunov estarem, dentro de erros, quando muito, alguns por cento independentes da medida de distância subjacente e de terem sido obtidos no espaço de fases de campos de calibre ou de Higgs. Esta independência passa a se sustentar tanto durante a fase de pré-equilibração como em direção ao equilíbrio completo, e tanto para campos inicialmente homogêneos como randômicos. Portanto, isso confirma a expectativa geral de que as taxas de divergência dos modos mais instáveis deveriam ser igualmente mensuráveis por qualquer métrica (aceitável) no espaço de campos. O comportamento das evoluções temporais dos expoentes de Liapunov depende um tanto,

todavia, do estágio do processo de termalização. Antes de campos de calibre e de Higgs terem trocado quantidades substanciais de energia, a taxa de divergência no setor de calibre se torna levemente maior do que no setor de Higgs, enquanto ela fica marginalmente menor durante fases mais avançadas de equilibração. Uma estimativa anterior de uma taxa de separação logarítmica de campos de Higgs cerca de 15% menor, baseada em uma única trajetória, foi, desse modo, provavelmente contaminada por incertezas numéricas.

Nossos resultados supracitados reforçam a evidência de que a dinâmica de calibre fornece a fonte principal de instabilidade caótica no sistema Yang-Mills-Higgs. Os campos de matéria, por outro lado, parecem ter um papel subordinado. A evidência inclui a rápida pré-equilibração do setor de calibre, a observação de que o setor de Higgs parece ter pequeno impacto na razão entre os expoentes de Liapunov de campos magnéticos constantes e randômicos, a dependência linear dos expoentes de Liapunov máximos sobre a energia média de campo de calibre apenas, a descoberta de que este comportamento de escala se inicia antes de os campos de calibre terem acesso completo à energia armazenada no setor de Higgs, e, em particular, o fato de que os valores dos expoentes de Liapunov máximos para uma dada energia por plaqueta tornam-se, dentro de erros, idênticos àqueles em teoria de Yang-Mills pura. Ademais, a dinâmica não-linear de Higgs parece não contribuir substancialmente para o modo de campo maximamente instável, ao menos não no regime de acoplamento relativamente fraco, onde artefatos de rede estão sob controle. De fato, no estágio de pré-equilibração, as evoluções de Liapunov tornam-se praticamente independentes do auto-acoplamento de Higgs, e mesmo subsequentemente a dependência sobre $\bar{\kappa}$ permanece moderada.

Não obstante, descobrimos que os campos escalares têm um grande impacto na termalização do sistema de calibre. Como mostramos, sua presença pode fortemente aumentar a taxa de divergência entre campos de calibre vizinhos, tanto homogêneos como randômicos. Além disso, o modo mais caótico tem um efeito quase imediato no setor de Higgs, tal como testemunhado pelo fato de que sua taxa de separação pode ser monitorada igualmente bem, acompanhando-se a evolução de distância entre campos de Higgs vizinhos. Finalmente, a presença dos campos de Higgs prolonga massivamente a equilibração do sistema como um todo, ao menos em fraco acoplamento. Este efeito qualitativo pode ser influente o suficiente para prevalecer no caso de matéria fermiônica, e, portanto, ser relevante para o entendimento das propriedades de equilibração da matéria de quark-glúon altamente excitada, formada em colisões nucleares ultrarelativísticas.

Nosso principal objetivo na presente tese foi estudar propriedades de termalização das soluções caóticas clássicas da teoria de Yang-Mills-Higgs com base em condições iniciais randômicas. A esse respeito, nosso trabalho difere das simulações

mais especializadas que se desenvolvem no campo da cosmologia e das colisões nucleares. Embora isso impeça uma comparação quantitativa dos resultados, acreditamos que os processos de termalização caótica que analisamos devem ser também relevantes para a maioria dos processos que se dizem ligados à teoria de reaquecimento do universo após a inflação e a transições de fase em colisões nucleares. Ao adaptar as condições iniciais, em particular a situações cosmológicas, pode-se investigar diretamente as contribuições do caos determinístico (medidas, por exemplo, pelos expoentes de Liapunov) a processos de não-equilíbrio específicos. Seria, por exemplo, interessante acompanhar as taxas de produção de campo magnético e de transição do sphaleron durante os diferentes estágios de termalização caótica. Seria também útil estudar o impacto do espaçamento de rede nas taxas de termalização [22] e incluir, por exemplo, na análise um campo de inflaton.

Referências

[1] U. W. Heinz, arXiv:hep-ph/0407360v1; P. Jacobs e X.-N. Wang, Prog. Part. Nucl. Phys. 54, 443 (2005).

[2] B. A. Bassett, S. Tsujikawa e D. Wands, Rev. Mod. Phys. 78, 537 (2006).

[3] A. D. Linde, Phys. Lett. B96, 289 (1980).

[4] A. V. Selikhov e M. Gyulassy, Phys. Lett. B316, 373 (1993).

[5] E. Braaten e R. D. Pisarski, Phys. Rev. D42, 2156 (1990).

[6] R. D. Pisarski, arXiv:hep-ph/0810.4585v2.

[7] A. Trayanov e B. Müller, AIP Conf. Proc. 260, 280 (1992).

[8] B. Müller e A. Trayanov, Phys. Rev. Lett. 68, 3387 (1992).

[9] C. Gong, Phys. Lett. B298, 257 (1993).

[10] T. S. Biró, C. Gong, B. Müller e A. Trayanov, Int. J. Mod. Phys. C5, 113 (1994).

[11] C. Gong, Phys. Rev. D49, 2642 (1994).

[12] C. Gong, *Hamiltonian Dynamics and Chaotic Behavior of Yang-Mills Fields on a Lattice*, Tese de Doutorado, Universidade Duke (1994).

[13] T. S. Biró, S. G. Matinyan e B. Müller, *Chaos and Gauge Field Theory* (World Scientific, Cingapura, 1994).

[14] T. S. Biró, Á. Fülöp, C. Gong, S. Matinyan, B. Müller e A. Trayanov, Lect. Notes Phys. 494, 164 (1997).

[15] T. S. Biró, C. Gong e B. Müller, Phys. Rev. D52, 1260 (1995).

[16] J.-P. Blaizot e E. Iancu, Phys. Rep. 359, 355 (2002).

[17] G. D. Moore e N. Turok, Phys. Rev. D55, 6538 (1997); W. H. Tang e J. Smit, Nucl. Phys. B510, 401 (1998); G. D. Moore e K. Rummukainen, Phys. Rev. D63, 045002 (2001); M. Hindmarsh e A. Rajantie, Phys. Rev. D64, 065016 (2001).

[18] M. Dine e A. Kusenko, Rev. Mod. Phys. 76, 1 (2003).

[19] M. B. Hindmarsh e T. W. B. Kibble, Rep. Prog. Phys. 58, 477 (1995); I. Tkachev, S. Khlebnikov, L. Kofman e A. Linde, Phys. Lett. B440, 262 (1998).

[20] A. Rajantie, P. M. Saffin e E. J. Copeland, Phys. Rev. D63, 123512 (2001); J. García-Bellido, M. G. Pérez e A. González-Arroyo, Phys. Rev. D69, 023504 (2004); A. Tranberg e J. Smit, JHEP 08, 012 (2006); A. Tranberg, J. Smit e M. Hindmarsh, JHEP 01, 034 (2007).

[21] Y. Shtanov, J. Traschen e R. Brandenberger, Phys. Rev. D51, 5438 (1995); L. Kofman, A. Linde e A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D56, 3258 (1997); G. Felder, J. García-Bellido, P. B. Greene, L. Kofman, A. Linde e I. Tkachev, Phys. Rev. Lett. 87, 011601 (2001).

[22] G. D. Moore, JHEP 11, 021 (2001).

[23] A. Tranberg e J. Smit, JHEP 11, 016 (2003).

[24] N. Armesto et al., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 35, 054001 (2008).

[25] S. Mrówczyński, Phys. Lett. B393, 26 (1997).

[26] J. Berges, D. Gelfand, S. Scheffler e D. Sexty, Phys. Lett. B677, 210 (2009).

[27] P. Romatschke e R. Venugopalan, Phys. Rev. D74, 045011 (2006).

[28] J. Ambjørn, T. Askgaard, H. Porter e M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B353, 346 (1991).

[29] H. Forkel, Phys. Rev. D73, 105002 (2006); Int. J. Mod. Phys. E16, 2789 (2007).

[30] R. Fariello, H. Forkel e G. Krein, Phys. Rev. D72, 105015 (2005); H. Forkel, arXiv:hep-th/0810.2098v1.

[31] G. Z. Baseyan, S. G. Matinyan e G. K. Savvidi, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 29, 641 (1979) [JETP Lett. 29, 587 (1979)].

[32] S. G. Matinyan, G. K. Savvidi e N. G. Ter-Arutyunyan-Savvidi, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 80, 830 (1981) [Sov. Phys. JETP 53, 421 (1981)].

[33] B. V. Chirikov e D. L. Shepelyanskiĭ, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 34, 171 (1981) [JETP Lett. 34, 163 (1981)].

[34] A. R. Avakyan, S. G. Arutyunyan e G. Z. Baseyan, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 36, 372 (1982) [JETP Lett. 36, 451 (1982)].

[35] E. S. Nikolaevskiĭ e L. N. Shchur, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 36, 176 (1982) [JETP Lett. 36, 218 (1982)].

[36] J. Frøyland, Phys. Rev. D27, 943 (1983).

[37] G. K. Savvidi, Nucl. Phys. B246, 302 (1984).

[38] S.-J. Chang, Phys. Rev. D29, 259 (1984).

[39] W.-H. Steeb, J. A. Louw e C. M. Villet, Phys. Rev. D33, 1174 (1986).

[40] S. G. Matinyan, G. K. Savvidi e N. G. Ter-Arutyunyan-Savvidi, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 34, 613 (1981) [JETP Lett. 34, 590 (1981)].

[41] G. P. Berman, Yu. I. Man'kov e A. F. Sadreev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 88, 705 (1985) [Sov. Phys. JETP 61, 415 (1985)].

[42] A. Giansanti e P. D. Simic, Phys. Rev. D38, 1352 (1988).

[43] B. Müller, arXiv:chao-dyn/9607001v2.

[44] M. A. Halasz e J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. 74, 3920 (1995); R. Pullirsch, K. Rabitsch, T. Wettig e H. Markum, Phys. Lett. B427, 119 (1998).

[45] J. Bolte, B. Müller e A. Schäfer, Phys. Rev. D61, 054506 (2000).

[46] U. Heinz, C. R. Hu, S. Leupold, S. G. Matinyan e B. Müller, Phys. Rev. D55, 2464 (1997).

[47] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B79, 276 (1974); A. M. Polyakov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 430 (1974) [JETP Lett. 20, 194 (1974)].

[48] H. B. Nielsen e P. Olesen, Nucl. Phys. B61, 45 (1973); Y. Nambu, Phys. Rev. D10, 4262 (1974).

[49] B. Julia e A. Zee, Phys. Rev. D11, 2227 (1975).

[50] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz e Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B59, 85 (1975); G. 't Hooft, Phys. Rev. D14, 3432 (1976); E. Witten, Phys. Rev. Lett. 38, 121 (1977).

[51] A. Actor, Rev. Mod. Phys. 51, 461 (1979).

[52] N. Seiberg e E. Witten, Nucl. Phys. B426, 19 (1994); erratum, B430, 485 (1994); B431, 484 (1994).

[53] S. Mandelstam, Phys. Lett. B53, 476 (1975); G. 't Hooft, Nucl. Phys. B190, 455 (1981); F. Brandstaeter, G. Schierholz e U.-J. Wiese, Phys. Lett. B272, 319 (1991).

[54] A. Salmela, J. Math. Phys. 46, 102302 (2005).

[55] M. Lakshmanan e R. Sahadevan, Phys. Rev. A31, 861 (1985).

[56] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* (Springer, Nova York, 1996).

[57] J.-P. Eckmann e D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. 57, 617 (1985).

[58] G. Benettin, L. Galgani e J.-M. Strelcyn, Phys. Rev. A14, 2338 (1976).

[59] I. Shimada e T. Nagashima, Prog. Theor. Phys. 61, 1605 (1979).

[60] M. D. Hartl, Phys. Rev. D67, 024005 (2003).

[61] M. Hénon, *Numerical Exploration of Hamiltonian Systems*, em *Chaotic Behaviour of Deterministic Systems* (Les Houches, Sessão XXXVI), eds. G. Iooss, R. H. G. Helleman e R. Stora (North-Holland, Amsterdã, 1983).

[62] S. N. Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems* (Wiley, Nova York, 1990).

[63] G. Birkhoff e G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4ª ed. (Wiley, Nova York, 1989).

[64] G. Contopoulos, L. Galgani e A. Giorgilli, Phys. Rev. A18, 1183 (1978).

[65] M. Pettini e A. Vulpiani, Phys. Lett. A106, 207 (1984).

[66] K. Osterwalder e E. Seiler, Ann. Phys. 110, 440 (1978); E. Fradkin e S. H. Shenker, Phys. Rev. D19, 3682 (1979); P. H. Damgaard e U. M. Heller, Phys. Lett. B164, 121 (1985).

[67] T. Kawabe, Phys. Lett. B274, 399 (1992).

[68] M. P. Joy e M. Sabir, J. Phys. A: Math. Gen. 25, 3721 (1992).

[69] T. Kawabe e S. Ohta, Phys. Lett. B334, 127 (1994).

[70] J. Kogut e L. Susskind, Phys. Rev. D11, 395 (1975).

[71] S. A. Chin, O. S. van Roosmalen, E. A. Umland e S. E. Koonin, Phys. Rev. D31, 3201 (1985).

[72] A. Krasnitz, Nucl. Phys. B455, 320 (1995).

[73] H. B. Nielsen, H. H. Rugh e S. E. Rugh, arXiv:chao-dyn/9605013v1; arXiv:hep-th/9611128v1.

[74] Á. Fülöp e T. S. Biró, Phys. Rev. C64, 064902 (2001).

[75] T. S. Biró e M. H. Thoma, Phys. Rev. D54, 3465 (1996).

[76] P. Dahlqvist e G. Russberg, Phys. Rev. Lett. 65, 2837 (1990).

[77] R. Marcinek, E. Pollak e J. Zakrzewski, Phys. Lett. B327, 67 (1994).

[78] S. G. Matinyan e B. Müller, Phys. Rev. Lett. 78, 2515 (1997).

[79] G. K. Savvidi, Phys. Lett. B71, 133 (1977).

[80] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. 46, 211 (1981).

[81] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, Ann. Phys. 149, 374 (1983); erratum, 153, 445 (1984).

[82] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, Physica A121, 587 (1983); erratum, A130, 374 (1985).

[83] M. Esposito e P. Gaspard, Phys. Rev. E68, 066112 (2003).

[84] M. V. S. Bonança e M. A. M. de Aguiar, Physica A365, 333 (2006); Phys. Rev. A74, 012105 (2006).

[85] M. Gleiser e R. O. Ramos, Phys. Rev. D50, 2441 (1994).

[86] A. Berera, M. Gleiser e R. O. Ramos, Phys. Rev. D58, 123508 (1998).

[87] P. Huet e D. T. Son, Phys. Lett. B393, 94 (1997).

[88] R. P. Feynman e F. L. Vernon, Jr., Ann. Phys. 24, 118 (1963).

[89] H. Grabert, P. Schramm e G.-L. Ingold, Phys. Rep. 168, 115 (1988).

[90] Entre os livros-texto que tratam mais pormenorizadamente as integrais de trajetória encontram-se:

R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, Nova York, 1965); L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, Nova York, 1981); M. S. Swanson, *Path Integrals and Quantum Processes* (Academic Press, Boston, 1992).

[91] H. Haken, Rev. Mod. Phys. 47, 67 (1975).

[92] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg e W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. 59, 1 (1987); erratum, 67, 725 (1995).

[93] P. Hänggi, P. Talkner e M. Borkovec, Rev. Mod. Phys. 62, 251 (1990).

[94] M. Morikawa, Phys. Rev. D33, 3607 (1986).

[95] H. B. Callen e T. A. Welton, Phys. Rev. 83, 34 (1951); R. Kubo, Rep. Prog. Phys. 29, 255 (1966).

[96] O. S. Duarte e A. O. Caldeira, Phys. Rev. Lett. 97, 250601 (2006).

[97] O. S. Duarte e A. O. Caldeira, arXiv:quant-ph/0906.0098v1.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo