



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.008/08

Aplicações do formalismo *Chern-Simons* para Gravidade em $d = 3$

Caio Cícero Gomes

Orientador

Prof. Dr. Nathan J. Berkovits

23 de novembro de 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

Diversas pessoas são responsáveis direta, ou indiretamente, pela conclusão deste trabalho. Em primeiro lugar, gostaria de agradecer meu orientador, Nathan, pela orientação ao longo destes dois anos, mas principalmente, pelo exemplo de como é feita pesquisa em alto nível. Também é claro, pela escolha do tema desta dissertação, que resultou de uma conversa quae um ano atrás.

Agradeço à FAPESP pelo financiamento deste projeto número 06/52824-3.

Também gostaria de agradecer meus companheiros da sala oito (Ana, Alexis, Otavio, Thiago, Wu), que deixaram esses dois anos muito mais divertidos. Também a todos os outros que viviam na sala oito, mesmo não fazendo parte oficialmente dele (Landulfo, Fran, Pamplona, Adriano). E é claro ao meu amigo Manu, que me acompanha desde o início da graduação e por coincidência além de continuarmos no mesmo instituto, acabamos também felizmente (ou infelizmente) dividindo sala.

Aos membros do grupo de Cordas do IFT, que aprendi muito ouvindo falar sobre seus temas de pesquisa, e que as discussões e conversas após cada seminário me fizeram aprender mais sobre cada tema. Em especial gostaria de agradecer ao Rafael, Gustavo e Chadra por esses momentos.

Aos meus amigos do IF-USP, que mesmo após o fim da graduação sempre se mantiveram juntos, cada um em sua área de pesquisa.

Meus amigos da *USP*, onde mesmo cada um estando em áreas completamente diferentes, a presença e a visão de cada um pela ciência sempre alegraram discussões em finais de semana: Bisson, Ise, Hik, Déa, Ê e Maicon, obrigado.

Aos editores do *Ars Physica*, que além de dividirem comigo o gosto da divulgação científica, dividimos há anos a responsabilidade de moderar um grande fórum de Física em português.

Aos três professores (mesmo não alguns não terem sido meus professores diretamente) que, cada um em seu momento, me ajudaram a seguir no caminho e me incentivaram a fazer ciência: Prof. Dr. Henrique Fleming, Prof. Dr. Aírton Borges e Fábio Skilnik.

Minha família, pelo apoio em todos esse anos, suportando mesmo nos momentos mais complicados do mestrado.

A minha namorada Camila, que além de me suportar ao longo de todo o mestrado, sempre me dando força no momento necessário, teve também o incrivelmente chato trabalho de revisar toda esta dissertação.

Gostaria também de agradecer, por último, ao grande compositor barroco Johann Gambolputty de von Ausfern Schplenden Schlitter Crasscrenbonfried Digger Dangledungle Bursstein von Knackerthrasher Applebanger Horowitz Ticolensic Granderknottyspellinkle Grandlich Grumblemeyer Spelterwasser Kürstlich Himbleeisen Bahnwagen Gutenabend Bitteeinenürnburger Bratwustle Gerspurten Mitzweimache Luberrhundsput Gumberaber Schönendanker Kalbsfleisch Mittler Aucher von Hautkopft of Ulm que através de suas músicas me trouxe calma de espírito necessária para a elaboração desta dissertação.

“Lisa, in this house, we obey the laws of thermodynamics!”

Homer J. Simpson

Resumo

Nesta dissertação apresentamos a gravidade em $d = 3$ e sua relação com a teoria de Chern-Simons, bem como as consequências dessa relação. Essa teoria é utilizado para se apresentar diversas propriedades da gravidade quântica em $d = 3$ e resultados modernos neste tema.

Palavras Chaves: Teoria de Supercordas, Gravitação em $d = 3$, Supersimetria, Teoria de Chern-Simons, Gravidade Quântica

Áreas do conhecimento: Física

Abstract

In this dissertation we present gravity in $d = 3$ and its relationship with the Chern-Simons theory, as well as the consequences of this relationship. This theory is used to present properties of the quantum gravity in $d = 3$ and modern results within this field.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Organização da dissertação	4
2	Relatividade Geral em $d = 3$	5
2.1	O Tensor de Riemann	5
2.1.1	Outros graus de liberdade	7
2.2	O Limite Newtoniano	8
2.3	Formalismo de Primeira Ordem	9
3	Formalismo de <i>Chern-Simons</i> para Gravidade $d = 3$	11
3.1	Uma revisão da teoria de <i>Chern-Simons</i>	11
3.2	Gravidade e Chern-Simons	12
3.2.1	Difeomorfismos e equações de movimento	16
3.3	O Caso exótico	17
4	Supergravidade e <i>Chern-Simons</i>	20
4.1	Supersimetria	20
4.2	Supergravidade $AdS(p, q)$ em $d = 3$	21
4.3	Propriedades da teoria	23
4.4	Supergravidade de Poincaré $\mathcal{N} = 1$	25
5	Tentativas originais de quantização	26
5.1	Algumas questões conceituais da gravidade quântica	26
5.2	Quantização Reduzida no espaço de fases ADM	27
5.3	Quantização na representação de conexões	27

5.4	Quantização Covariante canônica	28
5.5	Outros métodos de quantização	28
5.6	Comentários	29
6	Buracos Negros <i>BTZ</i>	30
6.1	A métrica <i>BTZ</i>	30
6.2	Propriedades termodinâmicas	32
6.3	Carga Central e Entropia	33
7	Fatorização Holomórfica	36
7.1	O valor da carga central	36
7.2	Classe de Chern	37
7.3	Recobrimentos	38
7.4	Escolha da constante de acomplamento	40
7.5	Fatorização Holomórfica	41
8	Monster Group e Monstrous Moonshine	43
8.1	O Monster Group \mathbb{M}	43
8.2	Montrous Moonshine	44
8.2.1	Função invariante j de Klein	44
8.2.2	Operadores de Hecke	45
8.2.3	Monstrous Moonshine	46
9	Funções de Partição, Buracos Negros <i>BTZ</i> e Entropia de Buracos Negros	48
9.1	Função de Partição bosônica	48
9.1.1	Formulação Alternativa	50
9.2	Entropia de Buracos Negros <i>BTZ</i> revisitada	51
9.2.1	Entropia para o caso $k \gg 1$	52
9.3	Comentários Gerais	53
9.3.1	Estados	53

10 Conclusão	55
10.1 Discussões e comentários	56
A Dreibeins e Conexões de Spin	58
A.1 Fibrado Tangente	58
A.2 Fibrados Vetoriais	58
A.3 Vierbein	59
A.3.1 Conexões de Spin	59
B Uma revisão de álgebra	61
B.1 Álgebras de Lie	61
B.2 Subálgebra de Cartan	62
B.2.1 Subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2, 1)$ e $\mathfrak{so}(3, 1)$	63
B.3 Forma de Killing	64
B.4 Contração de $SO(2, 1)$	64
C Simetria Conforme	65
C.1 Simetria Conforme	65
C.2 Grupo conforme em $d = 2$	66
C.3 Teorema de Zamolodchikov	67
D Cargas globais na teoria de <i>Chern-Simons</i>	68
D.1 Uma rápida introdução ao formalismo de Dirac	68
D.2 Cargas globais	69
D.3 Álgebra de Virasoro	71

Capítulo 1

Introdução

Um dos maiores, senão o maior, progresso da física de altas energias ao longo do século XX foi a compreensão do funcionamento do mundo microscópico. Através dele nosso entendimento do universo físico se aprofundou de maneira jamais vista, a partir do momento que percebemos que nessas escalas o universo se apresentaria de uma nova maneira: em um comportamento quântico.

Através deste formalismo conseguimos explicar três das quatro forças fundamentais do nosso universo, e que possibilitaram compreender relações entre essas forças que nunca foram imaginadas antes [10, 11].

No entanto, ao longo desse trabalho todo, a gravidade sempre se manteve distante. Todas as tentativas iniciais de escrever a gravidade como uma teoria quântica falharam em seu propósito. Dentre os diversos motivos, podemos destacar que a diferença de escalas de energia onde a teoria quântica é necessária para gravidade e para as forças eletrofraca e forte, já que ela só seria realmente necessária em energias ordens de grandezas maiores que as últimas. Mas além de tudo, o alto grau de não linearidade da teoria da gravitação impediam que técnicas tradicionais fossem aplicadas. Dada a dificuldade deste processo, esse problema ficou conhecido na mídia como *o maior desafio da física*.

Na metade final do século, muitos resultados no limite entre a física clássica e a quântica surgiram, formando o que é conhecido hoje como teoria semiclássica da gravitação. Esses resultados, como estão formulados sobre um arcabouço já muito bem conhecido, nos permitem estabelecer regras gerais que as candidatas a gravitação quântica terão que obedecer. Destes resultados podemos destacar, em especial, a radiação Hawking[16], no ano de 1974 e o efeito Unruh[31], em

1976, que mostraram que esses resultados podem alterar de maneira drástica conceitos que eram considerados bem compreendidos na física, e que a teoria de gravitação quântica teria que lidar um grau de generalidade muito maior que as outras teorias já formuladas.

Um *approach* mais ousado também ganhou forças nesta época: de buscar teorias completas que fossem naturalmente quânticas, e que em baixas energias obtivessem os resultados semiclássicos obtidos por teorias mais bem estabelecidas. Deste modo, o que se buscava eram teorias com um alto grau simetrias e que fosse bem formulada matematicamente.

Podemos destacar deste período o surgimento da teoria de cordas, que para muitos é considerada a mais forte candidata em se obter uma teoria de gravitação quântica coerente.

Apesar disto, a teoria de cordas originalmente não surgiu como o objetivo de gerar uma teoria de gravitação quântica. Ela surgiu como uma tentativa de explicar os modelos de física nuclear, através da função beta de Euler, já que as excitações neste tipo de modelo são semelhantes a de um modelo explicado por cordas vibrantes. Isto deu o nome de *Teoria de Cordas*.

No entanto, dada a diversidade de opções, se tornou difícil identificar o que eram efeitos da teoria e quais efeitos seriam inerentes a qualquer teoria de gravidade quântica. Como uma tentativa de resolver esse dilema, a gravidade em três dimensões foi escolhida como fonte de estudo. Sua estrutura mais simples permite que levemos os programas clássicos de quantização mais longe, e assim compreender seus efeitos a essa teoria quântica.

Após isso, em 1974, percebeu-se que essa teoria continha padrões de vibrações de corda que se assemelhavam a uma partícula de spin 2 e sem massa, que seria, portanto, o *graviton*. Este fato que levou a teoria de cordas a um grande destaque, já que este fato dava a esperança de *naturalmente* se extrair efeitos gravitacionais da teoria. Nasceu portanto a teoria de cordas bosônicas.

Apesar do sucesso da teoria, os fermions não eram descritos por essa teoria. Para resolver esta questão surgiu a teoria de supercordas, em que uma nova simetria é introduzida na teoria: a supersimetria. Esta simetria permite transformações entre bosons e fermions, e portanto os fermions passam a fazer parte da teoria de maneira natural.

Na década de 90, alguns resultados que surgiram na teoria de cordas que mudaram de maneira

bastante significativa a pesquisa no tema. Resultados não perturbativos nos deram uma nova visão sobre a teoria de cordas, mostrando que sua formulação é bem além do modo perturbativo. No fim da década, Juan Maldacena apresentou dois trabalhos que foram de grande relevância para a gravidade em $d = 3$: O trabalho onde ele introduz a dualidade AdS/CFT [21] e onde é feito o primeiro cálculo explícito sobre a entropia de buracos negros [20].

Apesar de todo este sucesso, uma formulação da gravidade quântica em baixa dimensionalidade permitiria estudar de maneira mais clara o processo de quantização, e com isso, compreender melhor características gerais da teoria quântica da gravitação, e se algumas dessas características surgem, por exemplo, na teoria de cordas.

Os trabalhos originais em gravitação em $d = 3$ surgiram na década de 60, sendo seguidos por artigos ocasionais ao longo dos vinte anos seguintes. Mas no fim da década de 80, dois grandes grupos de pesquisa em gravidade em $d = 3$ surgiram: os que estudavam a dinâmica das partículas pontuais neste framework, e os que estudavam a representação de Chern-Simons[33] da teoria da gravidade em $d = 3$.

Na mesma época extensões destas idéias a teorias supersimétricas foram tentadas, mostrando que a teoria supersimétrica da gravitação em $d = 3$ é também bem definida.

No entanto, foi com grande surpresa que em 1992, Bañados, Teitelboim e Zanelli demonstraram que, mesmo sendo uma teoria extremamente simples e sem graus de liberdade locais, a teoria da gravidade em $d = 3$ continha buracos negros em sua formação. Isso mostrou que a teoria continha espaço para uma estrutura mais complexa, e que isso permitiria compreender melhor sua estrutura quântica. Esse fato deixou a gravitação em $d = 3$ em grande destaque, já que agora testes muito mais complexos, ligando a estrutura de Buracos Negros BTZ com buracos negros em $d = 4$ estudando a entropia de cada um, seriam possíveis por exemplo.

Por esse motivo, a gravitação 2+1 permitiu que diversos testes fossem realizados, buscando nesse tipo de sistemas características próximas gravitação em $d = 4$. Diversos resultados semi-clássicos foram reencontrados e confirmados com o que já havia sido encontrado em $d = 4$.

De maneira muito mais interessante, um tipo de correspondência entre Teorias Conformes e a teoria de gravidade em $d = 3$ foi encontrada, mostrando que os resultados holográficos são

muito mais gerais do que se esperava, e mostrando que, talvez, os resultados encontrados por Juan Maldacena também fossem muito mais gerais.

1.1 Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: No capítulo 2 mostraremos alguns resultados diretos sobre a gravitação em $d = 3$, e como sua estrutura peculiar trás diversas características únicas a esta teoria. No capítulo 3 mostraremos que é possível dar uma interpretação de Chern-Simons para a ação de primeira ordem da relatividade geral em $d = 3$. Já no capítulo 4 mostraremos que esse fato se estende também a supergravidade em $d = 3$.

Após este ponto, entraremos em considerações sobre a estrutura quântica da gravitação em $d = 3$. No capítulo cinco mostraremos algumas tentativas originais de se formular uma teoria quântica em $d = 3$, com formalismos aplicados a outras áreas da física de altas energias. No capítulo seis mostraremos que, de maneira contrária a todas as expectativas, a gravitação em $d = 3$ contém soluções de buraco-negro. Este fato permitiu que a gravitação em $d = 3$ fosse estudada como uma teoria muito mais real, o que trouxe a esperança de compreender de maneira única resultados que seriam obtidos em $d = 4$.

No sétimo capítulo mostraremos como a estrutura obtida no capítulo seis pode ser generalizada para um caso que não seja somente semi-clássico, o que permitiria identificar a estrutura conforme da teoria da fronteira, e assim realizar computações mais reais na gravitação em $d = 3$.

No oitavo capítulo mostraremos qual é essa teoria conforme associada e algumas de suas propriedades gerais. Como está CFT esteve presente em um dos grandes resultados da matemática do século XX, existe uma grande quantidade de resultados associados a ela. No capítulo nove utilizaremos algumas destas propriedades para construir funções de partição para a teoria, e com isso calcular de maneira exata a entropia de buracos negros no caso quântico.

Capítulo 2

Relatividade Geral em $d = 3$

O que chamaremos de gravitação em $d = 3$ é a teoria obtida a partir da ação de Einstein-Hilbert em três dimensões,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^3x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (2.1)$$

Essa ação, muito conhecida, gera como equações de movimento as famosas equações de campo de Einstein

2.1 O Tensor de Riemann

O Tensor de Riemann é um tensor de quarta ordem, e portanto em d dimensões ele contém d^4 componentes. Destes, muitos são eliminados devido às diversas simetrias contidas nesse tensor. Um bom caminho então é contar a quantidade de componentes independentes que existem. Usualmente esse tensor é decomposto em algumas quantidades, da seguinte maneira:

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{d-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) - \frac{2}{(d-1)(d-2)} R g_{a[c} g_{d]b}$$

onde $R_{ab} = R_{ac}^c$ e é chamado *Tensor de Ricci*, $R = R_a^a$ se chama *Escalar de Curvatura* e C_{abcd} é chamado *Tensor de Weyl*.

Vamos agora contar o número de componentes independentes do tensor de Riemann. As

simetrias dele são:

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} \quad (2.2a)$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (2.2b)$$

$$R_{a[bcd]} = 0 \quad (2.2c)$$

Cada uma dessas simetrias irá diminuir o número de componentes independentes do tensor. Da (2.2a) podemos nos concentrar na anti-simetria dos índices ab , de onde concluimos que são $n = d \frac{d-1}{2}$ componentes. Podemos denotar esses componentes independentes como I . Repetindo o processo para cd , também teremos n componentes independentes, que chamaremos de J . O Tensor de Riemann pode ser escrito então como R_{IJ} . E de (2.2b) vemos que $R_{IJ} = R_{JI}$, ou seja, temos $\frac{1}{2}n(n+1)$ componentes, que são

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{8}d(d-1)[d(d-1)+2]$$

Agora precisamos só nos preocupar com (2.2c), que vai diminuir o número de componentes encontrados acima. Utilizando (2.2a,2.2b) podemos ver que

$$8R_{abcd} = R_{abcd} - R_{abdc} + R_{badc} - R_{bacd} + R_{cdab} - R_{dcab} + R_{dcba} - R_{cdba}$$

Podemos fazer o mesmo para R_{acdb} e $R_{adb c}$. Vemos então que, introduzindo isso em (2.2c), chegamos a $R_{[abcd]} = 0$. Agora a contagem de componentes é trivial. A última simetria do tensor de Riemann subtrairá $\binom{d}{4}$ componentes do tensor*. Logo, o tensor de Riemann em uma espaço d -dimensional tem

$$N(d) = \frac{1}{8}d(d-1)[d(d-1)+2] - \binom{d}{4} \quad (2.3)$$

componentes. Vemos então que $N(4) = 20$, que é um resultado já conhecido da literatura. O passo importante é vermos que $N(3) = 6$. Como o tensor de de Ricci é simétrico, ele contém $\frac{1}{2}d(d+1)$ componentes independentes, que em $d = 3$ é igual a 6. Isso significa que todos os

*Se $d < 4$ esse termo não contribuirá na contagem de componentes

componentes independentes de R_{abcd} estão contidos no tensor de Ricci, e logo o tensor de Weyl não contribui para a dinâmica do tensor de Riemann. Isso nos leva a um resultado incrível, já que conhecendo o tensor de Ricci podemos determinar o Tensor de Riemann. Além disso, se utilizamos as equações de Einstein na ausência de matéria, vemos que

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + g_{ab}\Lambda = 0 \quad (2.4)$$

Se tiramos o traço da equação acima, chegamos em $R - \frac{3}{2}R + 3\Lambda = 0$, ou seja, $R = 6\Lambda$ e, portanto, $R_{ab} = 2g_{ab}\Lambda$. Com isso determinamos o tensor de Riemann, que será

$$R_{abcd} = \Lambda(g_{ac}g_{bd} - g_{ab}g_{cd})$$

Isso nos mostra que, se não temos constante cosmológica, o espaço é plano. Em uma leitura rápida, este resultado pode levar diretamente a um erro, já que pode-se interpretar que o espaço-tempo M seria Minkowski. É bom frisar que isso somente indica que *localmente* M é isométrico a Minkowski (ou seja, $\forall x \in M$ existe uma vizinhança que é isométrica a Minkowski).

Para verificar se essa extensão é possível, teremos que verificar efeitos globais do espaço tempo, o seja, precisamos observar a topologia do nosso espaço tempo. Se M tem topologia trivial a extensão do sistema de coordenadas para toda a variedade pode ser feito. Se não, essa extensão *pode* não acontecer.

2.1.1 Outros graus de liberdade

Outro modo de ver que a teoria de gravitação em $d = 3$ é uma teoria em que os graus de liberdade *locais* não são relevantes é: se nos restringirmos a uma hipersuperfície de tempo constante, os componentes espaciais da independentes métrica serão $\frac{1}{2}d(d-1)$, e outros $\frac{1}{2}d(d-1)$ considerando as derivadas temporais dessa métrica. Podemos excluir também d graus de liberdade por escolhas do sistema de coordenadas e d graus de liberdade em condições iniciais. Logo teremos somente $d(d-3)$ graus de liberdade locais. Em $d = 4$, temos 4 graus de liberdade locais, que são correspondentes as duas polarizações de uma onda gravitacional e seus momentos conjugados. Em $d = 3$ não temos graus de liberdade locais.

Percebemos então outra característica interessantíssima da gravidade em $d = 3$: Como vemos que o número de graus de liberdade locais da teoria é nulo, então não existem ondas gravitacionais. Os vínculos determinam toda a geometria.

Isso mostra a importância dos efeitos globais (topológicos) na teoria, já que serão esses graus de liberdade *globais* que serão relevantes para a teoria clássica.

2.2 O Limite Newtoniano

O resultado obtido na seção anterior pode ser um pouco indigesto para alguns. Para olharmos outro ponto desse resultado, vamos ver como seriam as forças entre pontos estáticos no espaço-tempo. Para isso primeiro façamos uma pequena perturbação em torno da métrica usual para o espaço plano:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} \quad (2.5)$$

Agora, seguindo o procedimento usual, as d equações de movimento seriam

$$-\eta^{ab}\partial_a\partial_b\bar{h}_{cd} = 8\pi GT_{cd} \quad (2.6)$$

escolhendo as coordenadas de modo que

$$\eta^{ab}\partial_a\bar{h}_{bc} = 0 \quad (2.7)$$

onde definimos $\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\eta^{cd}h_{cd}$, e sua inversa é

$$h_{ab} = \bar{h}_{ab} - \frac{1}{d-2}\eta_{ab}\eta^{cd}\bar{h}_{cd} \quad (2.8)$$

No limite newtoniano nos restringimos ao componente 00 do tensor energia-momento, dizendo que $T_{00} \approx \rho$ e ignorando os termos da ordem v/c . Logo, de (2.6), chegamos a

$$\nabla^2\bar{h}_{00} = -16\pi G\rho \Rightarrow \bar{h}_{00} = -4\Phi$$

com $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. As equações de geodésica se restringirão somente a $\frac{d^2x^i}{dt^2} - \frac{1}{2}\partial_i h_{00} = 0^\dagger$, e

[†]Onde $i = 1, \dots, d$

utilizando (2.8), chegamos a

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2\frac{d-3}{d-2}\partial^i \Phi = 0 \quad (2.9)$$

Vemos então que se $d = 3$ não existe força Newtoniana entre as partículas de teste *estáticas*.

2.3 Formalismo de Primeira Ordem

Partindo do que foi apresentado nas seções anteriores, percebemos que a gravitação em $d = 3$ apresenta características bem especiais. Pela falta de graus de liberdade locais, muitas de suas características serão exclusivas, permitindo que novas formulações, não existentes para $d \neq 3$, sejam aplicadas.

Na literatura, três delas são bastante utilizadas: O formalismo *ADM* [23], o formalismo de *estruturas geométricas*[7], e o formalismo de *primeira ordem*. Estaremos mais interessados neste último.

O formalismo de primeira ordem (veja o Apêndice A) tem como variáveis fundamentais uma tríada (ou dreibein[‡]) e_μ^a e uma conexão de spin ω_μ^{ab} . A ação escrita em função dessas variáveis é chamada a ação de Palatini. Nessa ação os campos e e ω são tratados como variáveis independentes e, portanto, variados de maneira separada na ação.

No que segue, escreveremos os dois campos como formas, ou seja $e^a = e_\mu^a dx^\mu$ e $\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab} dx^\mu$, e aproveitando que estamos em $d = 3$, podemos rescrever a conexão de spin como uma 1-forma, já que podemos rescreve-lo como $\omega^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega_{bc} dx^\mu$.

Podemos então escrever a ação em termos dessas variáveis. Essa ação será

$$S = \int_M \left\{ e^a \wedge \left(d\omega_a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^b \wedge \omega^c \right) + \frac{\Lambda}{6}\epsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c \right\} \quad (2.10)$$

Para verificar a equivalência da ação de Palatini com a ação de Einstein-Hilbert, vamos extrair as suas equações de movimento e ver que são iguais as obtidas acima (Seção 2.1).

As equações de movimento podem ser extraídas de (2.10) de maneira direta. Variando e , chegamos a

[‡]A partir deste ponto as letras romanas do início do alfabeto indicarão variáveis locais indo de 0, 1, 2

$$d\omega_a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^b \wedge \omega^c = -\frac{\Lambda}{2}\epsilon_{abc}e^b \wedge e^c$$

e variando ω chegamos a

$$\begin{aligned} -de_a + \frac{1}{2}\epsilon_{cba}e^c \wedge \omega^b - \frac{1}{2}\epsilon_{bac}e^b \wedge \omega^c &= 0 \\ de_a + \epsilon_{abc}\omega^b \wedge e^c &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando as equações de estrutura de Cartan, podemos rescrever as equações acima, já que

$$R_a = d\omega_a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^b \wedge \omega^c = -\frac{\Lambda}{2}\epsilon_{abc}e^b \wedge e^c \quad (2.11)$$

ou seja, a curvatura é a mesma encontrada via a ação Einstein e também que

$$T_a = de_a + \epsilon_{abc}\omega^b \wedge e^c = 0 \quad (2.12)$$

então o espaço-tempo é sem torção, que é uma condição usual, já que está também indicando que a conexão de spin é compatível com o dreiben e .

Se o dreibein é inversível, podemos utilizar a equação (2.12) e escrever as conexões de spin em função dos dreibeins. Fazendo isso, encontramos a seguinte relação:

$$\omega_\mu^a = \epsilon^{abc}e_c^\nu(\partial_\mu e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\mu}) - \frac{1}{2}\epsilon^{bcd}(e_b^\nu e_c^\rho \partial_\rho e_{\nu d})e_\mu^a \quad (2.13)$$

Por ultimo, vamos observar alguns detalhes: O formalismo que construímos é equivalente ao formalismo de segunda-ordem, de Einstein-Hilbert, graças a inversibilidade de e . Isso não gera nenhum problema em uma teoria clássica, mas essa condição pode ser muito forte caso desejemos quantizar a teoria.

No próximo capítulo mostraremos que podemos chegar a esses mesmos resultados construindo a ação diretamente da álgebra de grupos de Lie. Esse é um programa que foi tentado por muito tempo para a gravitação em $d = 3$, mas sem sucesso.

Capítulo 3

Formalismo de *Chern-Simons* para Gravidade $d = 3$

Neste momento, já compreendemos algumas características que a gravitação em $d = 3$ tem de especial. Mas uma das características mais surpreendentes está ligada com a teoria de *Chern-Simons*.

Podemos ver que a ação de primeira ordem, obtida no Capítulo 2, admite uma interpretação de grupos e é, nesse caso, uma ação de Chern-Simons, ou seja, a teoria no formalismo de primeira ordem é uma teoria de Chern-Simons. Essa propriedade foi descoberta originalmente por A. Achúcarro e P. Townsend[1], e redescoberta de modo independente por E. Witten[33] alguns anos depois.

Neste capítulo começaremos revisando alguns fatos importantes da teoria de Chern-Simons e depois passaremos para a construção da teoria em si.

3.1 Uma revisão da teoria de *Chern-Simons*

Uma teoria de Chern-Simons é uma teoria de *gauge* definida em uma variedade M 3-dimensional. Denotamos por G o grupo de simetria dessa teoria e por \mathfrak{g} a álgebra de Lie de G . A teoria de *Chern-Simons* é uma teoria descrita por um fibrado principal $G[24]$ em M .

O potencial vetor A é uma 1-forma, que é a conexão nesse fibrado principal G , e tem valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} do grupo G . Podemos escrever $A = A_\mu^a T_a dx^\mu$, onde T_a são os geradores da álgebra \mathfrak{g} .

A teoria de Chern-Simons é escrita com uma ação

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr} \left\{ A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right\} \quad (3.1)$$

O integrando é chamado de *3-forma de Chern-Simons*. Podemos extrair as equações de movimento da ação acima, e chegamos que elas são $dA + A \wedge A = 0$. Chamaremos essa 2-forma de F . Portanto as equações de movimento da teoria de Chern-Simons são

$$F = dA + A \wedge A = 0 \quad (3.2)$$

Como A é a conexão no fibrado principal G , podemos ver que o termo F é uma das equações de Cartan, e portanto F é a curvatura desse mesmo fibrado principal.

Dada a conexão A , podemos também escrever a derivada covariante relativa a essa conexão. Essa derivada covariante se transformará na representação adjunta de G . Para isso

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + [A_\mu, \Phi] \quad (3.3)$$

Podemos ter uma visão melhor dessa teoria lembrando que $A = A^a T_a$. Assim o primeiro termo da ação pode ser reescrito como

$$\int_M \text{Tr} \{ A \wedge dA \} = \text{Tr} \{ T_a T_b \} \cdot \int_M A^a \wedge dA^b \quad (3.4)$$

Como esse termo é o termo cinético da teoria, vamos exigir que ele seja não degenerado, assim a energia cinética das componentes dos campos de gauge nunca será nula. Denotaremos esse termo, que será uma forma bilinear não degenerada*, por

$$\kappa_{ab} = \text{Tr}(T_a T_b) \quad (3.5)$$

3.2 Gravidade e Chern-Simons

Para $\Lambda = 0$, temos que o grupo de simetrias da teoria é $ISO(2, 1)$. Já para $\Lambda \neq 0$, os grupos de simetria serão $SO(2, 2)$ para o espaço-tempo AdS e $SO(3, 1)$ para dS . Vamos primeiramente

*Por não degenerada queremos dizer que $\nexists y \in \mathfrak{g}$ tal que $\kappa(x, y) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$.

estudar as álgebras associadas a esses grupos.

Cada uma dessas álgebras tem 6 geradores, e portanto denominaremos seus geradores de P_a e J_{ab} . Podemos utilizar o fato de estarmos em três dimensões para escrever $J_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}J^{bc}$. Logo, as álgebras são

$$\begin{cases} [J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J^c \\ [J_a, P_b] = \epsilon_{abc}P^c \\ [P_a, P_b] = \Lambda\epsilon_{abc}J^c \end{cases} \quad (3.6)$$

Se $\Lambda = 0$ temos $\mathfrak{iso}(2, 1)$, se $\Lambda < 0$ temos $\mathfrak{so}(2, 2)$ e se $\Lambda > 0$ temos $\mathfrak{so}(3, 1)$. Como podemos ver no Apêndice B, a *subálgebra de Cartan*[12] de $\mathfrak{iso}(2, 1)$ é de dimensão 1, e as de $\mathfrak{so}(2, 2)$ e $\mathfrak{so}(3, 1)$ são de dimensão 2. Assim, existem dois operadores de *Casimir* para os últimos e somente um para o primeiro. Isso é importante, pois a escolha do operador de Casimir corresponde a escolha da forma bilinear (3.5). Essa forma bilinear não degenerada é chamada na literatura de *Forma de Killing*[12]. A existência dessa forma de Killing não degenerada também como consequência que os grupos em questão são *semisimples*.

Isso acontece pois, dada uma forma de Killing κ^{IJ} e os geradores T_I de uma dada álgebra, podemos gerar um operador de Casimir $C = \kappa^{IJ}T_I T_J$. Logo, escolhendo operadores de Casimir diferentes, estamos também escolhendo formas de Killing diferentes.

Como desejamos escolher uma forma de Killing que seja comum as três álgebras, a escolha direta é $C_1 = P^2 + J^2$. Vamos verificar se esse operador é um Casimir para essas álgebras.

$$\begin{aligned} [C_1, P_b] &= [P^2, P_b] + [J^2, P_b] = [P_a, P_b]P^a + P^a[P_a, P_b] + [J_a, P_b]J^a + J^a[J_a, P_b] \\ &= (\Lambda - 1)\epsilon_{abc}(J^c P^a + P^a J^c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C_1, J_b] &= [P^2, J_b] + [J^2, J_b] = [P_a, J_b]P^a + P^a[P_a, J_b] + [J_a, J_b]J^a + J^a[J_a, J_b] \\ &= \epsilon_{abc}(P^c P^a + P^a P^c) + \epsilon_{abc}(J^c J^a + J^a J^c) = 0 \end{aligned}$$

Isso mostra que esse operador não é um Casimir para nenhuma das álgebras envolvidas. No entanto, se substituirmos C_1 por $\bar{C}_1 = P^2 + \Lambda J^2$, então ele será um operador de Casimir para $\mathfrak{so}(2, 2)$ e $\mathfrak{so}(3, 1)$. Como ele não é único para as três álgebras, vamos verificar o outro Casimir

possível. Em $d = 4$, a álgebra $\mathfrak{so}(3, 1)$ tem como operador de Casimir o vetor de Pauli-Lubanski $W^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abcd}P_b J_{cd}$ (com $a, \dots, d = 1, 2, 3, 4$). Se aplicamos a mesma idéia em $d = 3$, teremos o operador $C_2 = J_a P^a$, e podemos ver que

$$[C_2, P_b] = P^a [J_a, P_b] + [P_a, P_b] J^a = \epsilon_{abc} (P^a P^c + \Lambda J^c J^a) = 0$$

e

$$[C_2, J_b] = [P_a, J_b] J^a + P^a [J_a, J_b] = \epsilon_{abc} (P_c J^a + P^a J^c) = \epsilon_{abc} (P_c J^a - P^c J^a) = 0$$

C_2 é portanto um operador de Casimir da álgebra e gera uma forma de Killing não degenerada para as álgebras em questão.

O Casimir \bar{C}_1 também pode ser utilizado, desde que $\Lambda \neq 0$. Ele gerará uma ação que difere da ação usual, e por isso será chamada exótica. Na teoria clássica sua importância é reduzida, no entanto, na teoria quântica é importante considerar também esse termo. Voltaremos a ele mais tarde.

Tendo escolhido a forma de Casimir correta, podemos começar a construir uma teoria de gauge para esses grupos. O campo de gauge será

$$A_\mu = e_\mu^a P_a + \omega_\mu^a J_a \tag{3.7}$$

Se o parâmetro de gauge é $u = \rho^a P_a + \tau^a J_a$, e como o campo se transforma na representação adjunta, a transformação de gauge com parâmetro u é

$$\delta_u A_\mu = -D_\mu u \tag{3.8}$$

Com isso podemos agora calcular qual é a variação infinitesimal em função de u . Sabemos que

$$[A_\mu, u] = [e_\mu^a P_a + \omega_\mu^a J_a, \rho^b P_b + \tau^b J_b] = (\epsilon^{abc} e_{b\mu} \tau_c + \epsilon^{abc} \omega_\mu^b \rho_c) P_a + (\epsilon^{abc} \omega_{b\mu} \tau_c + \Lambda \epsilon^{abc} e_{\mu b} \rho_c) J_a$$

e portanto

$$\delta_u e_\mu^a = -\partial_{\mu\rho} e^a - \epsilon^{abc} e_{\mu b} \tau_c - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \rho_c \quad (3.9a)$$

$$\delta_u \omega_\mu^a = -\partial_\mu \tau^a - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \tau_c - \Lambda \epsilon^{abc} e_{\mu b} \rho_c \quad (3.9b)$$

Portanto uma transformações com esses parâmetros deixa a teoria invariante.

Também podemos calcular qual a curvatura F , que em componentes será $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ e, repetindo o procedimento acima, chegamos que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = & P_a [\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \epsilon^{abc} (\omega_{b\mu} e_{c\nu} + \omega_{c\nu} e_{b\mu})] \\ & + J_a [\partial_\mu \omega_\nu^a - \partial_\nu \omega_\mu^a + \epsilon^{abc} (\omega_{\mu b} \omega_{\nu c} + \Lambda e_{\mu b} e_{\nu c})] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Agora que a curvatura é conhecida, utilizando a forma de Killing encontrada anteriormente podemos determinar a ação da teoria. A ação será

$$S = \int_Y d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b \kappa_{ab}$$

e logo, vemos que

$$S = \int_Y d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \epsilon^{abc} (\omega_{b\mu} e_{c\nu} + \omega_{c\nu} e_{b\mu})] \times [\partial_\rho \omega_\sigma^e - \partial_\sigma \omega_\rho^e + \epsilon_{ade} (\omega_\rho^d \omega_\sigma^e + \Lambda e_\rho^d e_\sigma^e)]$$

Observando que o primeiro termo é uma derivada total, a integral acima se resume a uma integral em três dimensões, logo

$$S = \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} (e_{\mu a} [\partial_\mu \omega_\nu^a - \partial_\nu \omega_\mu^a + \epsilon^{abc} (\omega_{\mu b} \omega_{\nu c} + \Lambda e_{\mu b} e_{\nu c})]) \quad (3.11)$$

Essa ação é a ação de uma teoria de Chern-Simons, então, como já vimos na seção 3.1, a solução das equações de movimento de uma teoria de Chern-Simons é $F_{\mu\nu} = 0$. A equação (3.10) terá, para cada um dos geradores, as seguintes equações de movimento:

$$R_a = d\omega_a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega^b \wedge \omega^c = -\frac{\Lambda}{2} \epsilon_{abc} e^b \wedge e^c$$

e

$$T_a = de_a + \epsilon_{abc}\omega^b \wedge e^c = 0$$

que são precisamente as equações (2.11,2.12) derivadas no capítulo anterior. Ou seja, por esse processo chegamos precisamente no resultado encontrado de maneira usual, mas construindo de maneira completamente diferente.

Com isso mostramos que em $d = 3$ a teoria da gravidade admite uma interpretação de teoria de Chern-Simons.

3.2.1 Difeomorfismos e equações de movimento

Um último detalhe deve ser analisado, já que (3.9) não se assemelham às transformações usuais de difeomorfismos, que são as transformações padrão da relatividade geral: queremos verificar qual a relação entre as transformações de difeomorfismos e as transformações obtidas em (3.9).

Uma transformação de difeomorfismo gerado por um campo vetorial v é

$$\mathcal{L}_v \sigma = -d(\sigma \cdot v) - v \cdot d\sigma.$$

Se calcularmos o efeito de uma transformação de difeomorfismos em $\mathcal{L}_v A_\mu = -\partial_\mu(v^\nu A_\nu) - v^\nu(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)$, vamos ver que

$$\begin{cases} \bar{\delta} e_\mu^a = \mathcal{L}_v e_\mu^a = -\partial_\mu(v^\nu e_\nu^a) - v^\nu(\partial_\nu e_\mu^a - \partial_\mu e_\nu^a) \\ \bar{\delta} \omega_\mu^a = \mathcal{L}_v \omega_\mu^a = -\partial_\mu(v^\nu \omega_\nu^a) - v^\nu(\partial_\nu \omega_\mu^a - \partial_\mu \omega_\nu^a) \end{cases} \quad (3.12)$$

Observando as transformações (3.9), com $\tau = 0$, teremos então

$$\begin{cases} \delta_u e_\mu^a = -\partial_\mu \rho^a - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \rho_c \\ \delta_u \omega_\mu^a = -\Lambda \epsilon^{abc} e_{\mu b} \rho_c \end{cases} \quad (3.13)$$

Subtraindo (3.13) de (3.12), e escolhendo $\rho^a = v^\mu e_\mu^a$ e chamando $v^\mu \omega_\mu^a = \tau^a$

$$\begin{cases} \bar{\delta} e_\mu^a - \delta_u e_\mu^a = -\partial_\mu(v^\nu e_\nu^a) - v^\nu(\partial_\nu e_\mu^a - \partial_\mu e_\nu^a) + \partial_\mu(v^\nu e_\nu^a) + \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} v^\nu e_{\nu c} \\ \bar{\delta} \omega_\mu^a - \delta_u \omega_\mu^a = -\partial_\mu(\tau^a) - v^\nu(\partial_\nu \omega_\mu^a - \partial_\mu \omega_\nu^a) + \Lambda \epsilon^{abc} e_{\mu b} v^\nu e_{\nu c} \end{cases}$$

e lembrando da forma da derivada covariante (3.3), junto com $v^\mu \omega_\mu^a = \tau^a$

$$\begin{cases} \bar{\delta} e_\mu^a - \delta_u e_\mu^a = -v^\nu(D_\nu e_\mu^a - D_\mu e_\nu^a) + \epsilon^{abc} \omega_{\nu b} v^\nu e_{\mu c} = -v^\nu(D_\nu e_\mu^a - D_\mu e_\nu^a) + \epsilon^{abc} \tau_b e_{\mu c} \\ \bar{\delta} \omega_\mu^a - \delta_u \omega_\mu^a = -\partial_\mu(\tau^a) - v^\nu(D_\nu \omega_\mu^a - D_\mu \omega_\nu^a) - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \tau_c. \end{cases}$$

Agora, se consideramos nossa teoria *on-shell*, as equações de movimento nos garantem que

$$\begin{cases} \bar{\delta} e_\mu^a - \delta_u e_\mu^a = \epsilon^{abc} \tau_b e_{\mu c} \\ \bar{\delta} \omega_\mu^a - \delta_u \omega_\mu^a = -\partial_\mu(\tau^a) - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \tau_c \end{cases}$$

e, via uma transformação de gauge, podemos levar a diferença entre as duas transformações a zero. Isso significa que, em $d = 3$, *respeitando as equações de movimento*, os difeomorfismos são equivalentes às transformações de gauge dos grupos citados. Esta é outra grande simplicidade da teoria da gravidade em $d = 3$.

No formalismo canônico, grandes dificuldades surgem quando se estuda a teoria em $d = 4$, pois os difeomorfismos movem as hipersuperfícies de valores iniciais pelo espaço-tempo. Como em $d = 3$ os difeomorfismos são equivalentes às transformações (3.9), não precisamos pensar nesses vínculos geradores de movimento da superfície de valores iniciais.

3.3 O Caso exótico

Para $\Lambda \neq 0$, podemos utilizar a outra forma de Killing encontrada para construir uma nova lagrangeana. Podemos assim ver quais diferenças que surgem na teoria, dependendo da escolha do Casimir.

O operador de Casimir associado a essa forma de Killing é

$$C_2 = J_a J^a + \frac{1}{\Lambda} P^a P_a \quad (3.14)$$

Utilizando esse Casimir acima, e saindo de (3.10), a nova lagrangeana será portanto

$$\tilde{S} = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(\omega_\mu^a (\partial_\nu \omega_\rho^a - \partial_\rho \omega_\nu^a + \frac{2}{3} \epsilon_{abc} \omega_\nu^b \omega_\rho^c) + \Lambda e_\mu^a (\partial_\nu e_\rho^a - \partial_\rho e_\nu^a) + 2\Lambda \epsilon_{abc} \omega_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c \right) \quad (3.15)$$

Essa é a chamada *ação do caso exótico* [33]. Por construção, essa lagrangeana, por admitir uma interpretação de Chern-Simons, gera as mesmas equações de movimento que o caso *não-exótico*. Isso implica que, classicamente, a teoria gerada pelas duas será a mesma, resultado que pode não se manter quando quantizarmos a teoria.

Podemos incluir, para $\Lambda \neq 0$ os dois casos em uma maneira unificada. Definamos

$$J_a^\pm = \frac{1}{2} \left(J_a \pm \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} P_a \right) \quad (3.16)$$

e teremos uma nova álgebra, que será

$$\begin{cases} [J_a^+, J_b^+] = \epsilon_{abc} J^{c+} \\ [J_a^-, P_b^-] = \epsilon_{abc} P^{c-} \\ [J_a^+, J_b^-] = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Isso nos mostra que, a partir dos geradores das álgebras $\mathfrak{so}(2, 2)$ e $\mathfrak{so}(3, 1)$, podemos decompor as álgebras em fatores irredutíveis, o que justifica a afirmação feita na seção 3.2, já que se $\Lambda > 0$, a álgebra acima é $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Definimos os seguintes operadores de Casimir

$$C_\pm = \frac{1}{2} \left(\pm P_a J^a + \left(\frac{1}{\Lambda} P_a P^a + J_a J^a \right) \right) \quad (3.18)$$

As conexões nessa nova base da álgebra serão $A_\mu^{a\pm} = \omega_\mu^a \pm \sqrt{\Lambda} e_\mu^a$, e portanto, as derivadas covariantes serão $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu^{a+} J_a^+ + A_\mu^{a-} J_a^-$. Escrevendo a teoria dessa forma, podemos reescrever de maneira muito direta a ação derivada na seção 3.2 e a ação exótica derivada nessa seção.

A ação usual será dada por

$$S = \frac{S_+ - S_-}{4\sqrt{\Lambda}}$$

3.3. O CASO EXÓTICO

com o operador de Casimir $C = C_+ - C_-$. A ação exótica será dada por

$$\tilde{S} = \frac{S_+ + S_-}{2}$$

com o operador de Casimir $\tilde{C} = C_+ + C_-$.

Capítulo 4

Supergravidade e *Chern-Simons*

Como já vimos que a gravidade usual em $d = 3$ admite uma interpretação de *Chern-Simons*, podemos tentar aplicar esse tipo de técnica para construir teorias de Supergravidade em $d = 3$ que também admitam uma interpretação de Chern-Simons.

O trabalho de A. Achúcarro e P. Townsend[1] já demonstrava essa característica, construindo uma teoria de supergravidade em $d = 3$ que era invariante pelo supergrupo $AdS(p, q)$.

A construção dessa teoria nos terá diversas características diferentes e, dependendo da construção, admitirá um limite para $\Lambda = 0$ ou não.

4.1 Supersimetria

Para estendermos os resultados obtidos no capítulo anterior para supergravidade em $d = 3$, devemos substituir os grupos citados no capítulo anterior por supergrupos. Se pudermos encontrar operadores de Casimir para as superálgebras correspondentes, poderemos então utilizar as técnicas do capítulo anterior para criar uma teoria de Supergravidade que admitirá uma interpretação de teoria de Chern-Simons.

Como já dito, a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2, 1)$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$. Se observarmos somente a parte bosônica, veremos que ela corresponde a álgebra $\mathfrak{OSp}(2|1)$. Essa superálgebra tem como geradores bosônicos os J^a , e como operadores fermiônicos os Q_α .

Do mesmo modo, podemos encontrar as superálgebras correspondentes a $\mathfrak{so}(2, 2)$, já que ela é isomorfa a $\mathfrak{so}(2, 1) \times \mathfrak{so}(2, 1)$ e portanto isomorfo a $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$. A teoria com supersimetria

$N = 1$ será portanto $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \times \mathfrak{D}\mathfrak{Sp}(2|1)$.

Podemos a partir desse tipo de argumento construir teorias com supersimetria estendida N . Denotaremos por supersimetria do tipo (p, q) a teoria que é gerada pelo grupo $\mathfrak{D}\mathfrak{Sp}(p|1) \times \mathfrak{D}\mathfrak{Sp}(q|1)$.

4.2 Supergravidade $AdS(p, q)$ em $d = 3$

Nesta seção estaremos interessados em construir a teoria de Supergravidade para o supergrupo $AdS(p, q) = OSp(p|2) \times OSp(q|2)$. É bom observar algumas sutilezas que surgem nesse caso: diferentemente do caso bosônico, existem duas superálgebras para $\mathfrak{D}\mathfrak{Sp}(p|2)$. Cada uma dessas superálgebras será diferente no anticomutador $QQ[2]$. Denotaremos cada uma dessas possibilidades como $\mathfrak{D}\mathfrak{Sp}_+(p|2)$ ou $\mathfrak{D}\mathfrak{Sp}_-(p|2)[2]$.

A teoria de supergravidade que construiremos será invariante pelo grupo gerado pela seguinte álgebra:

$$\left\{ \begin{array}{l} [J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J^c \\ [J_a, P_b] = \epsilon_{abc} P^c \\ [P_a, P_b] = \lambda^2 \epsilon_{abc} J^c \end{array} \right. \quad (4.1)$$

que já é a parte conhecida álgebra*, acrescida de[†]:

$$\left\{ \begin{array}{l} [P_a, Q_{\pm\alpha}^i] = \mp \frac{1}{2} \lambda (\gamma^a Q_{\pm\alpha}^i)_{\alpha} \\ [J^a, Q_{\pm\alpha}^i] = -\frac{1}{2} (\gamma^a)_{\alpha}^{\beta} Q_{\pm\beta}^i \\ [T_{\pm}^{ij}, Q_{\pm\alpha}^k] = \mu (\delta^{jk} Q_{\pm\alpha}^i - \delta^{ik} Q_{\pm\alpha}^j) \\ [T_{\pm}^{ij}, T_{\pm}^{kl}] = \mu (\delta^{jk} T_{\pm}^{il} - \delta^{ik} T_{\pm}^{jl} - \delta^{jl} T_{\pm}^{ik} + \delta^{il} T_{\pm}^{jk}) \\ \{Q_{\pm\alpha}^i, Q_{\pm\beta}^j\} = \delta^{ij} (\gamma_a)_{\alpha\beta} (P^a \pm \lambda J^a) \pm \frac{\lambda}{\mu} \epsilon_{\alpha\beta} T_{\pm}^{ij} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Denotaremos os índices dos geradores da primeira superálgebra sem linha e os da segunda superálgebra com linha. Os geradores T_{\pm}^{ij} , com $i, j = 1, \dots, n$, são os geradores do grupo bosônico $O(p)$, junto com os geradores J^a e P^a de $SO(2, 1)$. Os Q_{α}^i são os geradores n espinoriais, de

* $\lambda^2 = \Lambda$

[†]Uma modificação da álgebra usual é feita. Faremos as seguintes decomposições $Q \rightarrow \frac{Q}{\sqrt{\Lambda}}$ e $T \rightarrow \frac{T}{\mu}$

$SO(2, 1)$, reais.

Como no capítulo anterior, denotaremos os possíveis operadores de Casimir como C_{\pm}

$$C_{\pm} = \frac{1}{\lambda^2} P^a P_a \pm \frac{1}{2\lambda} \left(P^a J_a - \bar{Q}_{\pm}^i Q_{\pm}^i \right) + J^a J_a + \frac{1}{2\mu^2} T_{\pm}^{ij} T_{\pm}^{ij} \quad (4.3)$$

Como fizemos uma modificação nos geradores, o operador de Casimir da teoria será agora

$$C = \lambda(C_+ - C_-)$$

no caso $OSp_+(p|2) \times OSp_-(q|2)$ e

$$C = \lambda(C_+ + C_-) \quad (4.4)$$

no caso $OSp_+(p|2) \times OSp_+(q|2)$. Vemos então que o caso $OSp_+(p|2) \times OSp_+(q|2)$ não admite o limite onde $\lambda \rightarrow 0$. Portanto nos concentraremos no caso $OSp_+(p|2) \times OSp_-(q|2)$.

A conexão A nesse caso será

$$A_{\mu} = e_{\mu}^a P_a + \omega_{\mu}^a J_a + A_{\mu}^{ij} T_+^{ij} + A_{\mu}^{i'j'} T_-^{i'j'} + \bar{\psi}_{\mu}^{\alpha i} Q_{\alpha}^i + \bar{\psi}_{\mu}^{\alpha i'} Q_{\alpha}^{i'} \quad (4.5)$$

e utilizando a equação (3.2) podemos então escrever a curvatura, que é:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = & J_a \left(\partial_{\mu} \omega_{\nu}^a - \partial_{\nu} \omega_{\mu}^a + \lambda^2 \epsilon^{abc} e_{b\mu} e_{c\nu} - i \lambda \bar{\psi}_{\mu}^i \gamma^a \psi_{\nu}^i + i \lambda \bar{\psi}_{\mu}^{i'} \gamma^a \psi_{\nu}^{i'} \right) + \\ & + P_a \left(\partial_{\mu} e_{\nu}^a - \partial_{\nu} e_{\mu}^a + \epsilon^{abc} (e_{b\mu} \omega_{c\nu} - e_{b\nu} \omega_{c\mu} - i \bar{\psi}^i \gamma^a \psi^i - i \bar{\psi}^{i'} \gamma^a \psi^{i'}) \right) + \\ & + T_+^{ij} \left(\partial_{\mu} A_{\nu}^{ij} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{ij} + 4\mu A^{il} A^{lj} - i \frac{\lambda}{\mu} \bar{\psi}^i \psi^j \right) + \\ & + T_-^{i'j'} \left(\partial_{\mu} A_{\nu}^{i'j'} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{i'j'} + 4\mu A^{i'l'} A^{l'j'} + i \frac{\lambda}{\mu} \bar{\psi}^{i'} \psi^{j'} \right) + \\ & + \bar{Q}^i \left(\partial_{\mu} \psi_{\nu}^i - \partial_{\nu} \psi_{\mu}^i + i \frac{\lambda}{2} (e_{\mu}^a \gamma_a \psi_{\nu}^i - e_{\nu}^a \gamma_a \psi_{\mu}^i) + 2\mu (A_{\mu}^{ij} \psi_{\nu}^j - A_{\nu}^{ij} \psi_{\mu}^j) + \frac{\lambda}{2} (\omega_{\mu}^{ab} \gamma_{ab} \psi_{\nu}^i - \omega_{\nu}^{ab} \gamma_{ab} \psi_{\mu}^i) \right) + \\ & + \bar{Q}^{i'} \left(\partial_{\mu} \psi_{\nu}^{i'} - \partial_{\nu} \psi_{\mu}^{i'} + i \frac{\lambda}{2} (e_{\mu}^a \gamma_a \psi_{\nu}^{i'} - e_{\nu}^a \gamma_a \psi_{\mu}^{i'}) + 2\mu (A_{\mu}^{i'j'} \psi_{\nu}^{j'} - A_{\nu}^{i'j'} \psi_{\mu}^{j'}) + \frac{\lambda}{2} (\omega_{\mu}^{ab} \gamma_{ab} \psi_{\nu}^{i'} - \omega_{\nu}^{ab} \gamma_{ab} \psi_{\mu}^{i'}) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Conhecendo a forma do operador de Casimir, discutido na equação (4.4), podemos então

escrever a ação para Supergravidade $AdS(p, q)$. O operador de Casimir será portanto

$$C = P^a J_a + \frac{\lambda}{2\mu^2} \left(T_+^{ij} T_+^{ij} - T_-^{i'j'} T_-^{i'j'} \right) - \bar{Q}_+^i Q_+^i - \bar{Q}_-^{i'} Q_-^{i'} \quad (4.7)$$

Conhecendo o operador de Casimir, podemos então construir a ação da teoria, que será dada por

$$S = \int_Y d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^I F_{\rho\sigma}^J \kappa_{IJ}$$

E isso nos dá a ação da teoria,

$$\begin{aligned} S = \int_M d^3x \left\{ -\frac{1}{2} eR + \epsilon^{\mu\nu\rho} \bar{\psi}_\mu^i (\mathcal{D}_\nu \psi_\rho)^i + \epsilon^{\mu\nu\rho} \bar{\psi}'_{\mu'} (\mathcal{D}_\nu \psi_\rho)^{i'} - \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(A^{ij} \partial_\nu A_\rho^{ji} + \frac{2}{3} (2\mu) A_\mu^{ij} A_\nu^{jk} A_\rho^{kl} \right) + \right. \\ \left. + \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(A^{i'j'} \partial_\nu A_\rho^{j'i'} + \frac{2}{3} (2\mu) A_\mu^{i'j'} A_\nu^{j'k'} A_\rho^{k'l'} \right) - i\epsilon^{\mu\nu\rho} \frac{\lambda}{2} e \bar{\psi}_\mu^i \gamma_\nu \psi_\rho^i + i\epsilon^{\mu\nu\rho} \frac{\lambda}{2} e \bar{\psi}'_{\mu'} \gamma_\nu \psi_\rho^{i'} + \right. \\ \left. + \lambda^2 \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon_{abc} e_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c \right\} \quad (4.8) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D}_\mu^{ij} = \partial_\mu \delta^{ij} + \frac{\lambda}{2} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} \delta^{ij} + 2\mu A_\mu^{ij} - \frac{\lambda}{\mu} A_\mu^{ij}$.

Como já foi mostrado, essa ação é por construção uma ação que admite interpretação de teoria de Chern-Simons.

Vemos que os gravitinos ψ têm um termo de massa que é associado a constante cosmológica λ , o que nos permite interpretar que a massa dos gravitinos está ligada ao valor da constante cosmológica. Podemos perceber também que a matriz de massa desses gravitinos tem assinatura $p - q$.

4.3 Propriedades da teoria

Algumas coisas podem ser ditas neste momento. O processo do limite $\lambda \rightarrow 0$ tem que ser dividido em dois casos, aquele em que $\frac{\lambda}{\mu^2} = C$, e aquele em que $\frac{\lambda}{\mu} = C$.

Podemos assim observar como a álgebra (4.2) se comportaria em cada um desses limites. No

caso $\mu^2 = \lambda$, a álgebra em questão fica sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} [P_a, Q_{\pm\alpha}^i] = \mp \frac{1}{2} \lambda (\gamma^a Q_{\pm}^i)_\alpha \\ [J^a, Q_{\pm\alpha}^i] = -\frac{1}{2} (\gamma^a)_\alpha^\beta Q_{\pm\beta}^i \\ [T_{\pm}^{ij}, Q_{\pm\alpha}^k] = 0 \\ [T_{\pm}^{ij}, T_{\pm}^{kl}] = 0 \\ \{Q_{\pm\alpha}^i, Q_{\pm\beta}^j\} = \delta^{ij} (\gamma_a)_{\alpha\beta} (P^a \pm \lambda J^a) \\ [J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J^c \\ [J_a, P_b] = \epsilon_{abc} P^c \\ [P_a, P_b] = 0 \end{array} \right.$$

Isso nos mostra que a teoria limite é a supergravidade de Poincaré $\mathcal{N} = p + q$ (ou seja, supergravidade com $\Lambda = 0$) em conjunto com um grupo abeliano gerado pelos geradores T_+ e T_- .

Temos também o caso $\lambda = \mu$. Nesse caso, quando efetuamos o limite $\lambda \rightarrow 0$, os geradores T sobrevivem na álgebra da teoria como uma carga central[‡]. No entanto, podemos ver em (4.7) que os termos que dependem de T não sobreviveriam ao limite, o que faria com que a forma de Killing fosse degenerada. Por isso, um cuidado extra deve ser tomado aqui: primeiro devemos truncar a álgebra para uma sem cargas centrais, já que, se o limite é tirado na ação (4.8), o resultado é uma ação de Chern-Simons para a teoria de Super-Poincaré, e uma ação para a teoria de Chern-Simons para a ação abeliana gerada por T . Agora podemos escrever a ação para a supergravidade estendida $\mathcal{N} = p + q$. Esse é o caso que foi mostrado no paper original de Achúcarro e Townsend[1].

Quando o limite de $\lambda \rightarrow 0$ é tomado, as distinções entre p e q são perdidas, e somente importa o valor da soma dos dois \mathcal{N} .

[‡]Já que $\{Q_{\pm\alpha}^i, Q_{\pm\beta}^j\} = \delta^{ij} (\gamma_a)_{\alpha\beta} (P^a \pm \lambda J^a) \pm \epsilon_{\alpha\beta} T_{\pm}^{ij}$

4.4 Supergravidade de Poincaré $\mathcal{N} = 1$

Como exemplo do mecanismo anterior, vamos escrever a supergravidade de Poincaré para $\mathcal{N} = 1$. Nesse caso os campos dos geradores T não aparecem, por causa da anti-simetria dos mesmos. Reescrevendo a equação (4.8) para esse caso, teremos então a seguinte ação:

$$S = \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} (-e_\mu^a R_{\nu\rho a} + \bar{\psi}_\mu D_\nu \psi_\rho)$$

e podemos calcular quais transformações infinitesimais que deixam a teoria invariante. Se o parametro de gauge é $u = \rho^a P_a + \tau^a J_a + \bar{\epsilon} Q$, então

$$\begin{cases} \delta_u \omega_\mu^a = -\partial_\mu \tau^a + \epsilon^{abc} \tau_b \omega_{\mu c} \\ \delta_u e_\mu^a = -\partial_\mu \rho^a + \epsilon^{abc} (\tau_b e_{\mu c} + \rho_b \omega_{\mu c}) + \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu \\ \delta_u \psi_\mu^\alpha = -\partial_\mu \epsilon^\alpha - \frac{1}{2} \{ \tau^a (\gamma_a \psi_\mu)^\alpha - \omega_\mu^a (\gamma_a \epsilon)^\alpha \} \end{cases} \quad (4.9)$$

o que nos mostra que o formalismo apresentado no capítulo 3 também é valido para a supergravidade, construindo uma teoria que é consistente.

Capítulo 5

Tentativas originais de quantização

Até esse momento, tratamos a teoria de maneira puramente clássica. Nosso objetivo neste capítulo é discutir algumas das tentativas originais de se gerar uma teoria quântica para a gravidade em $d = 3$ e, estudando esses processos, podemos tentar encontrar algumas características gerais que a teoria de gravitação em $d = 3$ terá.

A compreensão de algumas dessas características podem melhorar nossa compreensão da gravitação em $d = 4$, que é um dos grandes objetivos de se estudar a gravidade em $d = 3$. Foi com esse objetivo que se aplicaram diversos métodos já conhecidos em $d = 4$ para gravidade em $d = 3$, na esperança de que pudéssemos compreender de maneira clara as implicações destes métodos.

5.1 Algumas questões conceituais da gravidade quântica

Na maioria dos processos de quantização, é normal o escolhermos de modo que o *background* seja fixo. No entanto, na relatividade geral, estamos quantizando a própria estrutura do espaço-tempo, que somada a dinâmica do espaço tempo, pode gerar problemas nesse processo.

Um dos problemas que podem surgir é que no processo de quantização canônica usual é que precisamos quebrar a covariância da teoria, escolhendo explicitamente um *tempo físico*, que nos permitirá folhear o espaço. Uma escolha usual é o *tempo extrínseco de York*, onde cada hipersuperfície de tempo constante tem a mesma curvatura exterior média, no entanto não se sabe se a teoria resultante depende do tipo de folheamento escolhido. Esta escolha do

folheamento temporal pode parecer arbitrária, no entanto, qualquer tentativa de se criar relógios a partir de matéria terá o problema que, qualquer relógio construído a partir de campo em que a hamiltoneana é não-negativa tem uma probabilidade não nula de rodar para trás no tempo [32]. Esse é outro grande problema da gravidade quântica e é conhecido como *problema do tempo*.

Esses resultados indicam que não existe uma maneira direta de se construir uma teoria quântica da gravidade sem que se caia em diversos problemas conceituais.

5.2 Quantização Reduzida no espaço de fases ADM

O método de quantização mais imediato da gravitação em $d = 3$ é a quantização no espaço de fase ADM. Por ADM queremos dizer a formulação hamiltoneana da teoria. De maneira direta, isso significa escolher uma variável tempo (que é usualmente o tempo de York, definido anteriormente), e quebrar a covariância da teoria separando as variáveis em momentos e coordenadas.

Algumas sutilezas surgem neste método, já que é bastante difícil tratar o que é feito pelos difeomorfismos não conexos a identidade. Esse procedimento, apesar de bastante direto, tem a desvantagem de quebrar a covariância da teoria.

5.3 Quantização na representação de conexões

Outro método direto é utilizar a interpretação de Chern-Simons, explorada no capítulo 3. Nesta técnica começamos com as variáveis de primeira ordem e e ω e impomos relações de comutação a tempos iguais em

$$[\omega_{ai}(x), e_j^b(x')] = -\frac{i}{2} \delta_a^b \epsilon_{ij} \delta^2(x - x')$$

Analisando as transformações infinitesimais da teoria, também apresentadas no capítulo 3, observamos que as conexões de spin terão uma dinâmica de *coordenadas*. Este motivo leva ao nome de *conexões* a esta seção.

Aqui seguimos a técnica usual de quantização de uma teoria de Chern-Simons. É importante notar que nesta representação, como Chern-Simons é uma teoria topológica, a hamiltoneana é

nula. Então esse método de quantização constrói uma teoria que é, aparentemente, sem tempo.

Essa representação não existe em $d = 4$ mas pode ser pensada, em algum nível, como a representação equivalente à das variáveis de Ashtekar. A diferença é que lá não é possível construir uma teoria “sem tempo”, como foi feito neste caso.

É importante lembrar, como já dito no capítulo 2, para que a gravidade seja bem definida é necessário que o *vierbein* seja inversível, e para isso, $A \neq 0$. Na teoria de Chern-Simons esta condição não é necessária, mas para que a teoria da gravidade seja bem definida classicamente não podemos incluir esses setor na teoria.

5.4 Quantização Covariante canônica

Até este momento, mostramos que é possível utilizar técnicas tradicionais para quantizar a gravidade em $2 + 1$, mas sempre fazendo uma separação de variáveis espaciais e temporais. Assim, a covariância da teoria foi sempre quebrada.

Como a quantização canônica é o método de quantização mais bem desenvolvido na física, encontrar uma configuração *covariante* em que a quantização canônica possa ser aplicada seria essencial. Para isso, observemos o espaço de soluções das equações de campo: para cada uma destas soluções, existe um ponto no espaço de fase que corresponde a suas condições iniciais. Como esta correspondência é em duas mãos, os dois espaços são isomórficos.

Se escolhermos este espaço (de soluções) como o que vamos utilizar para fazer a quantização, podemos ver que ele será naturalmente covariante e, como é isomórfico ao espaço de fases, ele carrega uma estrutura simplética.

5.5 Outros métodos de quantização

Além destes métodos citados, foram desenvolvidos diversos outros métodos de quantização para a gravitação em $d = 3$. A maior questão entre estudar todos estes métodos é tentar encontrar qual a relação entre as teorias quânticas geradas por eles, já que a primeira vista são todas diferentes entre si: podemos comparar a teoria sem tempo da quantização de Chern-Simons, com a teoria gerada pela quantização ADM.

Outros métodos de quantização que não foram citados incluem quantização com integrais de trajetória, variáveis de *Loop*, entre outros. O ponto chave é que na gravidade quântica em $d = 3$, cada uma destas teorias gerará uma teoria quântica que é, ao menos de maneira aparente, não equivalente à outra.

Isto é frustrante: não temos motivos para escolher uma ou outra teoria e, portanto, de definir qual o método de quantização “correto”, o que parece apontar que alguns elementos ainda não estão claros, de modo que a escolha de um método para gerar a teoria quântica ainda falta.

5.6 Comentários

Apesar do relativo sucesso das aplicações dos métodos tradicionais de quantização para a gravidade em $d = 3$, não foi possível *resolver* a teoria quântica, e assim estudar suas implicações de maneira clássica.

Capítulo 6

Buracos Negros *BTZ*

Como mostrado nos capítulos anteriores, a gravitação em $d = 3$ é uma teoria com poucos graus de liberdade, o que gera uma teoria simples, que nos permite estudar com maior profundidade algumas características em comum com a gravidade em $d = 4$. Não havia, contudo, a esperança de que existisse um modo de estudar modelos “realísticos” nesse *framework*.

No entanto, com grande surpresa, em 1992 foi descoberto por Bañados, Teitelboim e Zanelli [3] que, em soluções com constante cosmológica negativa, a teoria permitia a existência de buracos negros. A existência desses buracos negros torna a teoria muito mais interessante, já que poderemos estudar características quânticas de buracos negros, principalmente de uma maneira não semi-clássica[8].

Apesar de conter muitas semelhanças com buracos negros em $3 + 1$, algumas diferenças acontecem. A principal delas é que em $2 + 1$ não existem buracos negros para o $\Lambda \geq 0$ [18], ou seja, eles podem existir somente no caso do espaço tempo *AdS*.

6.1 A métrica *BTZ*

Considere um espaço-tempo em $d = 3$, com constante cosmológica negativa $\Lambda = -\frac{1}{\ell^2}$. Nessa situação, a métrica

$$ds^2 = -f^2 dt^2 + \frac{1}{f^2} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{4GJ}{2r^2} dt \right)^2 \quad (6.1)$$

onde

$$f = \left(-8GM + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{16G^2 J^2}{4r^2} \right).$$

é a métrica do buraco negro *BTZ*[3]. Analisando as características assintóticas desta solução, ou seja, após a divisão *ADM**, os parâmetros *M* e *J* podem ser identificados como a massa e o momento angular do buraco negro, respectivamente. Vamos começar analisando algumas propriedades dessa métrica.

Podemos ver que esse sistema de coordenadas se torna singular em $f = 0$. O seja

$$4r^4 - 32GM\ell^2 r^2 + 16G^2 J^2 \ell^2 = 0$$

para $r \neq 0$. Para $r = 0$ temos outra singularidade.

Essa equação tem como solução

$$r_{\pm}^2 = 4GM\ell^2 \left\{ 1 \pm \left[1 - \left(\frac{J}{M\ell} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (6.2)$$

com $|J| < M\ell$.

Como no caso de *Kerr*, se essa condição é violada, a singularidade em $r = 0$ seria uma singularidade nua.

Apesar da diferença no número de dimensões, esta solução compartilha muitas características em comum com a solução de Kerr da gravitação em $3 + 1$. Por exemplo, se $J \neq 0$, existe uma região de ergosfera (onde qualquer corpo é obrigado a rotacionar em torno do buraco negro). Em especial, os diagramas de Penrose são muito semelhantes àqueles da solução de Kerr, como podemos ver abaixo:

*Para mais detalhes aconselhamos a referência [6, 9].

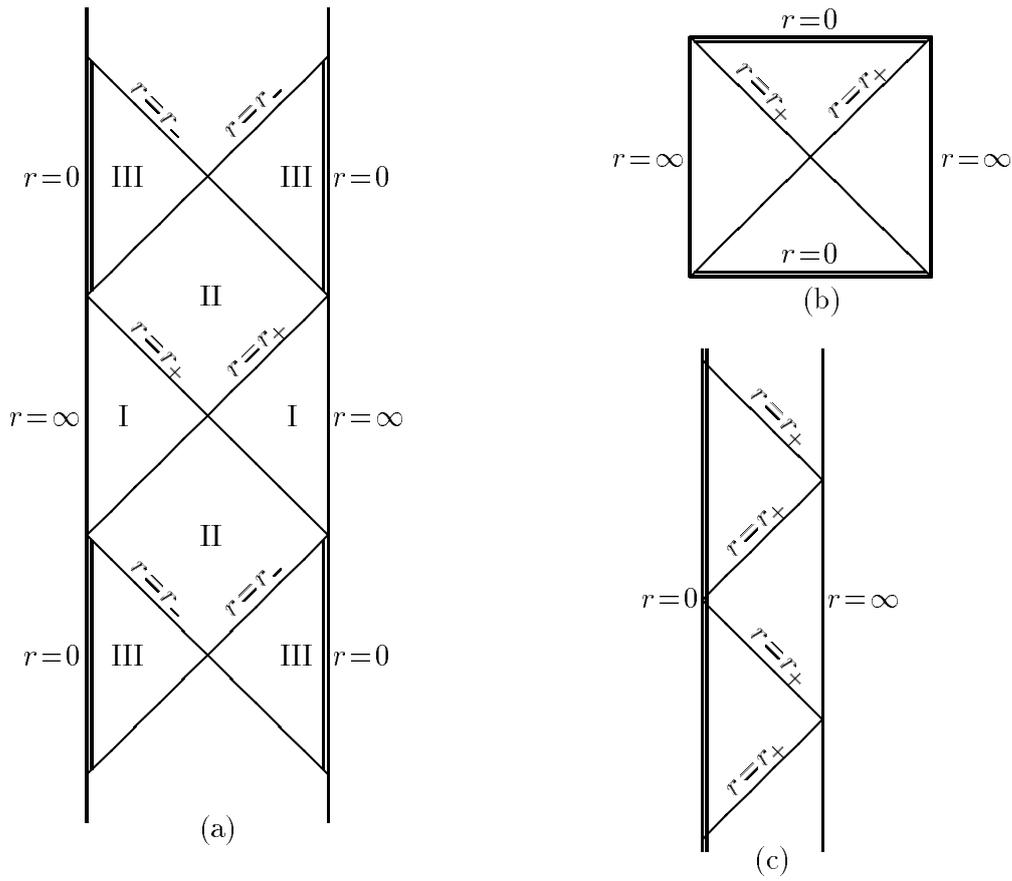


Figura 6.1.1: (a) Caso com $M, J \neq 0$, (b) o caso com $J = 0$, (c) caso extremo $J = \pm M\ell$

6.2 Propriedades termodinâmicas

Conhecendo agora algumas características dos buracos negros *BTZ* e percebendo que apesar da diferença na dimensionalidade, eles se comportam, de maneira geral, como buracos negros em $d = 4$, podemos estudar algumas propriedades termodinâmicas para o caso semi-clássico, já que é o caso conhecido para $d = 4$.

A entropia de Hawking-Bekenstein [4, 16] é diretamente proporcional a área do buraco negro, ou seja

$$S = \frac{Area}{4\hbar G}$$

que para um buraco negro *BTZ* com horizonte externo r_+ , podemos ver a partir de (6.2) e de

(6.1) é igual a

$$S = \frac{2\pi r_+}{4\hbar G} = \frac{2\pi \sqrt{4GM\ell^2 \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{J}{M\ell} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}}}{4\hbar G} = \frac{\pi \sqrt{M\ell^2 \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{J}{M\ell} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}}}{\hbar \sqrt{G}} \quad (6.3)$$

Aqui, como no caso quadridimensional, não há qualquer menção aos estados microscópicos deste sistema. É neste ponto que a simplicidade da gravitação em $d = 3$ leva vantagem.

Na próxima seção, vamos verificar que o buraco negro *BTZ* admite uma estrutura conforme no infinito, o que nos permite, no caso semi-clássico, explicar de maneira microscópica a entropia do buraco negro. Essa é a primeira indicação que uma explicação holográfica do tipo *AdS/CFT* ocorre na gravitação $2 + 1$ com $\Lambda < 0$. Este fato será esclarecido no capítulo 7, onde levaremos mais a fundo esse tipo de explicação.

6.3 Carga Central e Entropia

Como pode ser visto no apêndice D, a gravitação em $2 + 1$ admite uma estrutura conforme com carga central c

$$c = \frac{3\ell}{2G} \quad (6.4)$$

Em outras palavras, isso significa que a *gravidade quântica em AdS₃* é uma teoria de campos conforme com carga central c , já que os estados físicos desta teoria são representações da álgebra de Virasoro associada.

Essa estrutura conforme nos permitirá contar os microestados do buraco negro, em um regime semiclássico, computando assim sua entropia e assim comparar com o resultado de Hawking-Bekenstein[30]. Para tanto, estaremos interessados somente no comportamento do sistema no regime semiclássico, ou seja, naquele em que $c \gg 1$.

Primeiro vamos definir L_0 e \bar{L}_0 de maneira que eles se anulem no caso do buraco negro com $M = J = 0$, ou seja

$$M = \frac{1}{\ell}(L_0 + \bar{L}_0) \quad (6.5)$$

e

$$J = L_0 - \bar{L}_0. \quad (6.6)$$

Invertendo as equações acima, chegamos a

$$L_0 = \frac{1}{2}(M\ell + J) = \frac{(r_+ + r_-)^2}{16G\ell}$$

e

$$\bar{L}_0 = \frac{1}{2}(M\ell - J) = \frac{(r_+ - r_-)^2}{16G\ell}$$

Feito isso, essa teoria de campos conforme associada nos permite contar os microestados do buraco negro *BTZ* (ou seja, os estados no cilindro (t, ϕ) no infinito espacial) e assim determinar sua entropia.

Os autovalores de L_0 e \bar{L}_0 serão escritos como n_R e n_L . Nas teorias conformes de campos, esses autoestados são chamados de *pesos conformes* e estão ligados ao comportamento dos campos da teoria em transformações conformes.

O operador $\mathcal{A}(z, \bar{z})$ se transforma por rotações rígidas em z da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}(z', \bar{z}') = \zeta^{n_R} \bar{\zeta}^{n_L} \mathcal{A}(z, \bar{z})$$

onde os n_R e n_L são os pesos conformes ditos anteriormente. Outra propriedade, que está relacionada com os operadores L_0 e \bar{L}_0 é que

$$L_0 \mathcal{A} = n_R \mathcal{A} \quad (6.7)$$

e

$$\bar{L}_0 \mathcal{A} = n_L \mathcal{A} \quad (6.8)$$

o que justifica a nomenclatura de autovalores para os pesos conformes.

A condição de regime semiclássico pode ser traduzida também em dizer que $n_R + n_L$ é muito grande ou, de maneira mais física, que o buraco negro em questão tem massa muito grande.

Em uma teoria conforme em duas dimensões, que é o caso que estamos trabalhando, com uma álgebra de Virasoro de carga central c , a densidade de estados associada ao autoestado de

autovalor $n_R \gg 1$ de L_0 é

$$\rho(n_R) \approx e^{2\pi\sqrt{\frac{c_{\text{eff}}n_R}{6}}} \rho(n_{R0}) \quad (6.9)$$

onde $c_{\text{eff}} = c - 24n_{R0}$. A equação (6.9) é chamada *Fórmula de Cardy*.

Como estamos interessados no caso em que $n_R + n_L$ é muito grande, podemos considerar $c_{\text{eff}} \approx c$, já que o primeiro autovalor de L_0 (ou \bar{L}_0) é pequeno em relação a eles, e portanto a entropia do buraco negro *BTZ* será

$$S = \log \rho(n_R) + \log \rho(n_L) = 2\pi \left(\sqrt{\frac{cL_0}{6}} + \sqrt{\frac{c\bar{L}_0}{6}} \right) = 2\pi \left(\sqrt{\frac{3\ell L_0}{24G}} + \sqrt{\frac{3\ell\bar{L}_0}{24G}} \right) = \pi \frac{r_+}{2G} \quad (6.10)$$

que é precisamente o resultado semi-clássico de Hawking-Bekenstein, mostrando que nesse caso a formulação conforme da teoria nos dá maiores detalhes sobre o sistema.

Além disso, esse resultado nos permite ver que a dinâmica importante ocorre no cilindro (t, ϕ) , localizado no infinito espacial. Isso não é surpreendente, já que, como foi visto no capítulo 2, a gravidade $2 + 1$ é uma teoria sem graus locais de liberdade, sobrando apenas os graus de liberdade globais, associados aos termos de borda.

Em especial, essa discussão nos permite lançar uma luz sobre o problema da informação em buracos negros *BTZ*. Como toda a informação está contida na fronteira, que está localizada no infinito espacial (onde a dinâmica importante ocorre) e, portanto, não está eclipsada pelo horizonte de eventos do buraco negro. As informações podem ser acessadas, não ocorrendo perda de informação, mostrando que a solução desse problema em $d = 3$ é bastante simples.

Neste momento, a fórmula de Cardy nos permitiu calcular a densidade de estados para o sistema no estado semiclássico. Para calcularmos a entropia para um sistema verdadeiramente quântico, precisaremos melhorar o nosso conhecimento do sistema, começando pela identificação exata da CFT contida na fronteira da teoria, de modo que esse cálculo seja possível.

Uma possível identificação dessa CFT foi feita por E. Witten[34] em 2007, com base em algumas hipóteses razoáveis. Nos próximos capítulos, começaremos a abordar essas hipóteses e como elas nos levam a essa CFT.

Capítulo 7

Fatorização Holomórfica

Até este momento, trabalhamos com sistemas que são *semi-clássicos*, ou seja, sistemas que não incluem diretamente efeitos quânticos. Descrevendo o sistema via sua *CFT* da borda, isso significa que os pesos conformes n_R e n_L são muito grandes. Entre outros motivos, escolhemos fazer isso até agora pois para calcularmos os efeitos para pesos conformes pequenos, precisaríamos identificar a teoria conforme exata da fronteira.

No ano de 2007, E. Witten [34] através de algumas hipóteses “*gerais*”, conseguiu identificar uma *CFT* com as características desejadas e que, em especial, levam a resultados semi-clássicos corretos.

Nosso trabalho a partir deste momento será estudar essas hipóteses e como elas nos levam a escolha da *CFT* correta. Em especial, em [34] Witten escolhe trabalhar com teorias conformes que admitem uma *fatorização holomórfica*. Esse será o objetivo deste capítulo.

7.1 O valor da carga central

Até este momento, não foi feita nenhuma restrição aos valores da constante cosmológica na teoria. Observando a ação clássica, ela parece ser consistente com qualquer valor, o que aparentemente está de acordo com a intuição clássica que temos.

Mas, como pode ser visto no Apêndice D e já foi utilizado no capítulo 6, existe uma relação entre a carga central da teoria e a constante cosmológica, dada por (6.4)

$$c = \frac{3\ell}{2G}.$$

À primeira vista, a existência dessa relação não parece mudar em nada a condição dos valores da constante cosmológica. No entanto, como pode ser visto no apêndice C, o teorema de Zamolodchikov impede que essa carga central possa variar livremente. Portanto, a existência dessa conexão entre a carga central da teoria conforme na fronteira e a constante cosmológica nos leva a perceber que a constante cosmológica não pode assumir quaisquer valores. Para isso, vamos utilizar a relação entre gravidade 2+1 e teoria de Chern-Simons, explicitada no capítulo 3.

Como visto anteriormente, o grupo de simetria para a teoria *AdS* é $SO(2, 2)$. Podemos ver também, estudando suas respectivas álgebras, que ele é isomórfico, ao menos localmente, a $SO(2, 1) \times SO(2, 1)$ (apêndice B). Se agora escrevemos a teoria de gauge para esse grupo, a ação será

$$S = \frac{k_L}{4\pi} \int tr \left(A_L \wedge dA_L + \frac{2}{3} A_L \wedge A_L \wedge A_L \right) - \frac{k_R}{4\pi} \int tr \left(A_R \wedge dA_R + \frac{2}{3} A_R \wedge A_R \wedge A_R \right) \quad (7.1)$$

onde A_L e A_R são os campos de gauge, combinações de ω e e , que já foram estudados no capítulo 3. Utilizaremos, portanto, para nossas próximas etapas, o grupo $SO(2, 1) \times SO(2, 1)$ como ponto de partida. Nosso próximo passo é estudar como poderemos escolher valores específicos para k_L e para k_R , que está ligado a escolha de valores para c .

7.2 Classe de Chern

Considere a ação de Chern-Simons para o grupo $SO(2, 1)$, escrita em uma variedade W . Nós podemos, também, escolher uma variedade 4-dimensional M , que tenha como borda a variedade W , e estendermos nossa lagrangeana sob essa variedade (de modo similar ao que foi feito no capítulo 3). Essa ação será

$$I_M = \frac{k}{4\pi} \int_M F \wedge F.$$

Se escrevemos esta ação em uma variedade M' que também tenha borda em W , podemos escrever a ação sobre a variedade X , fechada, ou seja

$$I_M - I_{M'} = \frac{k}{4\pi} \int_X F \wedge F.$$

Como pode ser visto no apêndice B, $SO(2, 1)$ é contractível em $SO(2)$, que é isomorfo a $U(1)$.

Para $U(1)$, $\frac{\int_X F \wedge F}{2\pi}$ é igual a $2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), já que a integral está ligada à primeira classe de Chern. Isso significa, portanto, que a ação é um múltiplo de $2\pi \times k$. Para que a ação seja um múltiplo de 2π , nos resta definir que k é quantizado e pertence aos inteiros. Esse valor de k que deixa a teoria consistente quanticamente, já que o termo e^{iI} na integral de trajetória deve ser univalente.

Podemos estender este resultado para $SO(2)$, que também será válido para $SO(2, 1)$. A única diferença virá de um fator de 2, advindo do traço. Com isso, vemos que a teoria para $SO(2, 1)$ também terá quantização do termo k e, principalmente, vemos que isso está de acordo com o teorema de Zamolodchikov, pois a carga central não poderá variar mais de maneira contínua (lembrando da ligação entre k e a carga central). Também acarretará na existência de somente valores discretos para a constante cosmológica.

Nosso interesse é em uma teoria gerada pelo grupo $SO(2, 1) \times SO(2, 1)$, o que implica que existem duas constantes de acoplamento k e, portanto, teremos $k_R, k_L \in \mathbb{Z}$. A existência de algum vínculo entre os dois termos será verificada na seqüência.

7.3 Recobrimentos

Após os resultados obtidos na sessão anterior, onde determinamos que existem somente alguns valores de k que permitem a teoria ser bem definida quanticamente, devemos observar um novo fato: já que $SO(2, 1)$ não é simplesmente conexo (e seu grupo fundamental é \mathbb{Z}), podemos sempre substituir, para cada n , $SO(2, 1)$ pelo seu n -recobrimento. Quando fazemos isso, percebemos que agora $\frac{\int_X F \wedge F}{2\pi} \in 2\pi n^2 \mathbb{Z}$ e portanto $k \in n^{-2} \mathbb{Z}$. No caso do recobrimento universal, o valor de k poderia variar livremente, e como já dito, não é permitido.

No caso da gravitação, o grupo que trabalhamos é $SO(2, 1) \times SO(2, 1)$, que é portanto

contractível a $SO(2) \times SO(2)$ que é isomorfo a $U(1) \times U(1)$. Como já analisado, essa ação será portanto bem comportada quanticamente se a ação S_U (para a teoria de Chern-Simons sobre o grupo $U(1) \times U(1)$)

$$S_U = \frac{k_L}{2\pi} \int_X F_A \wedge F_A - \frac{k_R}{2\pi} \int_X F_B \wedge F_B \quad (7.2)$$

for múltiplo de 2π para todo campo de gauge $U(1) \times U(1)$ sobre uma variedade 4-dimensional fechada, que chamaremos de X . Como já foi dito, nós podemos trocar cada grupo por um dos seus recobrimentos, não existindo nenhuma obrigação do n -recobrimento do grupo *left* ser o mesmo do *right*. No entanto, neste trabalho vamos considerar só o caso onde os dois grupos estão sempre no mesmo n -recobrimento, já que não queremos que o setor *left* tenha um grupo de simetria diferente do setor *right*. Isto é chamado o *recobrimento diagonal*.

Dado um determinado n recobrimento diagonal, podemos determinar como isso afetará os valores de k . Chamemos $x = F_A/2\pi$ e $y = F_B/2\pi$, e façamos a troca $x = y + nz$, e portanto

$$S_U = 2\pi(k_L - k_R) \int_X y^2 + 2\pi k_L \int_X (n^2 z^2 + 2nyz)$$

e para que essa ação seja múltiplo de 2π , temos que

$$k_L \in \begin{cases} n^{-1}\mathbb{Z} & \text{para } n \text{ impar} \\ \frac{1}{2n}\mathbb{Z} & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \\ k_L - k_R \in \mathbb{Z}$$

Essas restrições se aplicam aos recobrimentos do grupo $SO(2,1) \times SO(2,1)$. Por exemplo, para $n = 2$, o grupo de recobrimento é $SO(2,2)$. Isso mostra que, para esse caso, k_L e $k_R \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ para que a teoria possa ser bem definida quanticamente.

Poderíamos também considerar o recobrimento universal da teoria, onde estaríamos no limite $n \rightarrow \infty$. Isso nos deixaria com as constantes k variando livremente mas, como já dito, o teorema de Zamolodchikov nos mostra que essa teoria não seria bem definida quanticamente.

7.4 Escolha da constante de acomplamento

Para decidirmos em qual dos recobrimentos a teoria em questão será bem definida, vamos observar o que a relação com a teoria clássica da gravitação em $d = 3$ pode nos dizer.

A ação mais geral que temos escrita é

$$S = k_L I_L + k_R I_R$$

ou seja, levamos em conta os fatores dos dois setores da teoria.

Como visto no capítulo 3 podemos reescrever a ação em função da ação usual e da ação exótica, ou seja

$$S = \frac{k_R + k_L}{2}(I_L - I_R) + \frac{k_L - k_R}{2}(I_L + I_R)$$

A primeira parte é referente a ação usual e a segunda parte é a ação exótica. Como a constante de acomplamento da parte usual está relacionada com o valor da constante cosmológica, já que corresponde a ação de Einstein-Hilbert, vemos então

$$k_L + k_R = \frac{\ell}{8G}. \quad (7.3)$$

Como dito anteriormente e demonstrado no apêndice D, Brown e Henneaux [5] demonstraram que existe, no caso $k_R = k_L$, uma relação entre a carga central e a constante de acomplamento. Nesse caso nós chegamos que $k_L = \frac{\ell}{16G}$, e de 6.4 $c_L = 24k_L$.

No entanto, podemos assumir que isso é válido também para teorias onde a ação exótica é não nula, ou seja, podemos estender esse resultado para admitir teorias conformes que não sejam simétricas entre o setor *left* e *right*, e portanto admitam $k_R - k_L \neq 0$. Para isso, vamos generalizar o resultado acima, onde $(c_L, c_R) = (24k, 24k)$, $k \in \frac{\mathbb{Z}}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) para o seguinte

$$(c_L, c_R) = (24k_L, 24k_R) \quad (7.4)$$

ou seja, os valores das cargas centrais para a parte esquerda e direita não são necessariamente iguais.

7.5 Fatorização Holomórfica

Agora que já determinamos a relação entre as cargas centrais da teoria e as constantes de acoplamento de *Chern-Simons*, podemos utilizar esse fato para restringir o recobrimento diagonal desta teoria.

Um fato bem conhecido é que, em teorias conformes bidimensionais, o estado fundamental de energia é $-\frac{c}{24}$ [26]. Como no caso que estamos trabalhando existem duas CFT's, e se os estados *right* e *left* são separados, o estado fundamental será então $(-\frac{c_L}{24}, -\frac{c_R}{24})$.

Vamos *supor* neste ponto que a CFT em questão é holomorficamente fatorizável, ou seja, o estado fundamental da energia é inteiro (ou também que a teoria contém invariância modular). Isso implica que $c_R = 24N$ e $c_L = 24N'$, com $N, N' \in \mathbb{N}$.

Em especial, escolhendo uma CFT que seja holomorficamente fatorizável, ou seja, impondo que $c = 24N$, podemos excluir todos os recobrimentos de $SO(2, 1) \times SO(2, 1)$, já que a utilização de qualquer um destes recobrimentos levaria a valores da carga central que não permitem uma teoria conforme holomorficamente fatorizável.

Nosso trabalho é buscar CFT's que sejam holomorficamente fatorizáveis, ou seja, possuam invariância modular e seus dois setores sejam holomórficos. Essa é uma condição bastante especial e é suficiente para determinar qual teoria conforme estamos procurando.

Para o caso em que $k = 1$, as teorias conformes bidimensionais holomorficamente fatorizáveis foram completamente classificadas por A. N. Schellekens[28]. Ou seja, para o estado fundamental o nosso problema agora se resume a decidir qual dessas CFT's é a correta. Na classificação feita nesse trabalho, são encontradas 71 teorias conformes e, em especial, uma propriedade muito importante acaba aparecendo: setenta destas contém simetrias de gauge e somente uma não.

E é aqui que faremos nossa escolha: foi demonstrado em capítulos anteriores que a gravidade em $d = 3$ é equivalente a uma teoria de gauge, mas isso não implica que ela *seja* uma teoria de gauge. Com isso, escolheremos aquela *CFT* que não contém simetrias de gauge.

Antes de prosseguirmos, vamos reparar em um ponto: não-perturbativamente a teoria de Chern-Simons não é equivalente a teoria da gravidade. Essa é uma equivalência válida somente em regimes não perturbativos. Para repararmos isso, podemos perceber que essa equivalência

depende da inversibilidade do dreinbein, e isso é uma característica perturbativa.

Esse ponto é um pouco assustador, já que, apesar de estarmos buscando fatos na teoria que mostrem que ela não é uma teoria de gauge, ainda assim utilizamos a teoria de Chern-Simons para encontrar quais valores da constante cosmológica são consistentes. E. Witten reconhece esse ponto, como podemos ver em [34]: “*We used the gauge theory approach to get some hints about the right values of the cosmological constant (or equivalently of the central charge) simply because it was the only tool available*”.

Essa teoria de conforme que não contém a simetria de gauge é uma teoria especialmente famosa: é a teoria conforme com o Monster Group * como grupo de simetria. Esse grupo é especialmente famoso, já que é o maior grupo simples, esporádico e finito, e é de especial importância em uma área da matemática conhecida como *Monstrous Moonshine*. No próximo capítulo falaremos um pouco sobre *Monstrous Moonshine* e sobre o MG.

*Denotado a partir de agora como MG

Capítulo 8

Monster Group e Monstrous Moonshine

Neste capítulo interromperemos brevemente o estudo da gravitação em três dimensões e estudaremos um famoso grupo, o *Monster Group*, e como ele participa de uma ligação entre formas modulares (as funções j de Klein) e o Monster Group (mais especificamente as representações irredutíveis desse grupo). Essa ligação foi descoberta por John McKay e demonstrada por John Horton Conway e Simon P. Norton, em 1979.

Este assunto é de grande interesse na matemática e uma apresentação completa mereceria diversos capítulos. Portanto, para uma visão geral desse tema, aconselhamos a leitura da seguinte referencia: *Moonshine beyond the Monster*, de T. Gannon[15].

8.1 O Monster Group \mathbb{M}

O Monster Group é um grupo finito de ordem aproximada de $8 \cdot 10^{53}$. É um grupo simples:

Definição 1 (Grupo Simples). *Um grupo simples é um grupo G que não possui nenhum subgrupo não-trivial normal. Ou seja, não existe subgrupo $N \subset G$ de maneira que, $\forall g \in G, \forall n \in N, gng^{-1} \in N$*

Os grupos simples são de grande interesse na matemática pois foram completamente classificados em um grande esforço feito entre 1955 e 1985. A partir daí se percebeu que eles podem ser divididos 18 famílias com infinitos (mas contáveis) elementos e 26 grupos que não se encaixam nessas famílias. Esses 26 grupos são chamados grupos esporádicos. O maior dos grupos esporádicos é o Monster Group, 19 outros grupos são subgrupos do Monster Group. Somente seis não estão relacionados a ele.

O Monster Group contém 194 representações irredutíveis, sendo que sua representação irredutível mais baixa não trivial tem 196 883 elementos.

8.2 Montrous Moonshine

8.2.1 Função invariante j de Klein

Uma função de grande importância para *Montrous Moonshine* é a função j de Klein. Essa função apareceu originalmente em teoria clássica dos números, e já era conhecida no século XVII. Ela também é de grande importância na teoria das funções modulares. Para definirmos a função J , começaremos com algumas outras definições:

Definição 2 (Função Modular). *Uma função modular é uma função f que é invariante modular, ou seja,*

$$\forall \tau, \quad \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \text{com } ad - cb = 1, \quad f(\tau) = f(\tau')$$

Definição 3 (Forma Modular). *Uma forma modular é uma função f que*

$$\forall \tau, \quad \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \text{com } ad - cb = 1, \quad (c\tau + d)^k f(\tau) = f(\tau')$$

A constante k é chamada de peso da forma modular.

Considere a função $G_k(\tau)$

$$G_k(\tau) = \sum_{m,n \in \{\mathbb{Z} \setminus (0,0)\}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$$

Podemos ver que para todo τ' da definição 2, temos que

$$G_k(\tau') = (c\tau + d)^k G_k(\tau)$$

e portanto, da definição 3, vemos que G_k são formas modulares de peso k . No entanto, a partir das funções G_k podemos construir funções modulares, como por exemplo $\frac{G_{10}(\tau)}{G_5(\tau)^2}$.

Um grande passo nessa construção é verificar quais funções são meromórficas * na esfera de Riemann. Um resultado bem conhecido da análise complexa [19] é que são somente funções

*Ou seja, uma função holomórfica em um abert oD , a menos de pontos isolados

racionais [†].

Considere o conjunto Σ de todas as funções f que vão de $\overline{\mathbb{H}} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$, e que sejam invariantes modulares. Esse espaço é isomorfo a esfera de Riemann, e portanto escolhendo uma função J como um “*novo sistema de coordenadas*”, podemos escrever então qualquer função f como uma razão de polinômios em J . Tradicionalmente se escolhe a função J como:

$$j(\tau) = 1728 \frac{20G_4(\tau)^3}{20G_4(\tau)^3 - 49G_6(\tau)^6}$$

Outra escolha que é padrão, e aparece principalmente em *Monstrous Moonshine* é a seguinte

$$J(\tau) = j(\tau) - 744$$

As funções j são de grande importância histórica na matemática. Aqui foi abordado somente o básico do assunto. Uma revisão mais completa do assunto pode ser vista no capítulo 2 da referência [15].

8.2.2 Operadores de Hecke

Considere uma família de operadores, para $n \in \mathbb{Z}^+$ fixo, $T_n : M_k \rightarrow M_k$, com M_k sendo o espaço de formas modulares de peso k .

Definição 4 (Operador de Hecke). *O operador $T_n : M_k \rightarrow M_k$ é definido como*

$$T_n(f(\tau)) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n\tau + bd}{d^2}\right)$$

No caso em que n é um número primo p , vemos que $d|p = \{1, p\}$, e portanto para esse caso o operador de Hecke é da forma

$$T_p(f(\tau)) = p^{k-1} f(p\tau) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau + b}{p}\right)$$

No caso em que f tem uma expansão em série de Fourier, ou seja $f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m)e^{2i\pi m\tau}$, e

[†]Ou seja, funções do tipo $\frac{f(z)}{g(z)}$ onde f, g são polinômios

portanto

$$T_n(f(\tau)) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) e^{2i\pi m\tau} \quad (8.1)$$

onde

$$\gamma_n(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right) \quad (8.2)$$

Vamos denotar $e^{2i\pi\tau} = q$, e portanto $T_n(f(\tau)) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) q^m$.

Se calcularmos a ação do operador de Hecke, com $k = 1$, para uma função $F(q) = \frac{1}{q}$. Para isso

$$T_n(F(q)) = \frac{1}{q^n} + \sum_{d|n \setminus \{1\}} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} e^{-i2\pi \frac{\tau+b}{n}} = \frac{1}{q^n}$$

Como a parte em potências positivas continua tendo somente potencias positivas após a aplicação do operador de Hecke, vemos então que

$$T_n\left(\frac{1}{q} + \mathcal{O}(q)\right) = \frac{1}{q^n} + \mathcal{O}(q) \quad (8.3)$$

Nós utilizaremos esses operadores no próximo capítulo para encontrar uma maneira mais compacta para escrever as funções de partição $Z_k(q)$ da teoria de gravitação em $d = 3$. Voltaremos a isso mais a diante. Para uma revisão mais completa do assunto, recomendamos as notas de aula do curso de pós-graduação de Berkeley[29].

8.2.3 Monstrous Moonshine

Considere o seguinte espaço vetorial graduado

$$V = V_{-1} \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \quad (8.4)$$

onde $V_{-1} = \rho_0$, $V_1 = \rho_0 \oplus \rho_1$ e assim por diante, com ρ sendo as representações irredutíveis do *Monster Group* \mathbb{M} . Dado um elemento $g \in \mathbb{M}$, podemos construir as seguintes funções

$$T_g(q) = ch_{V_{-1}}(g) \frac{1}{q} + \sum_{i=1}^{\infty} ch_{V_i}(g) q^i$$

onde ch_{V_i} denota o caráter da representação, e está relacionado pelo traço:

$$ch_{V_i}(g) := tr(\rho_i(g)).$$

Essas funções são chamadas de *séries de McKay-Thompson*. A primeira vista, o número de *séries de McKay-Thompson* seria o mesmo do número de elementos do grupo \mathbb{M} . No entanto, o $\forall h \in \mathbb{M}, ch_{V_i}(g) = ch_{V_i}(hgh^{-1})$, o que leva esse número de séries de McKay-Thompson para 194. Algumas coincidências extras deixam levar esse número para 171 séries distintas.

Na teoria dos números existem 171 funções, chamadas de *Hauptmoduls*. Entre elas está a função j definida na seção anterior. Existe uma coincidência entre as *Hauptmoduls* e as séries de McKay-Thompson. A conjectura do *Monstrous Moonshine* leva isso a um grau mais profundo: ela diz que as *Hauptmoduls* **são** as séries de McKay-Thompson.

Para a função j , ela será a série T_{id} , e portanto os caracteres estarão relacionados com as dimensões dos espaços vetoriais V_i , e portanto, com as dimensões das representações ρ_i como podemos ver a seguir:

$$\begin{aligned} 196884 &= 196883 + 1 \\ 21493760 &= 21296876 + 196883 + 1 \\ 864299970 &= 842609326 + 21296876 + 196883 + 196883 + 1 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Os números do lado direito são as dimensões das representações irredutíveis do *Monster Group* \mathbb{M} .

Capítulo 9

Funções de Partição, Buracos Negros *BTZ* e Entropia de Buracos Negros

Até esse momento construímos a teoria de gravitação em três dimensões e mostramos alguns resultados que surgem de sua estrutura particular. Além de tudo, foi mostrado que, a partir de algumas idéias de caráter especulativo, pudemos determinar uma CFT para a teoria dual (presente na borda da variedade), que nos permitirá extrair resultados puramente quânticos da teoria, e não semi-clássicos, como os obtidos até agora.

Nesse capítulo utilizaremos todo o formalismo desenvolvido até agora para poder encontrar a função de partição dessa teoria que estamos desenvolvendo e, através das propriedades e resultados do *Monstrous Moonshine* mostrar como isso está ligado a buracos negros na teoria e suas entropias em regimes puramente quânticos.

9.1 Função de Partição bosônica

Nosso objetivo é encontrar uma função $Z(q)$, que seja invariante modular, para que ela seja a função de partição do nosso sistema. Dessa maneira podemos determinar quais são os estados físicos que pertencem à gravidade pura em $2 + 1$, que tenha como infinito assintótico AdS_3 .

Primeiramente vemos que o vácuo tem que conter os estados que correspondem ao limite clássico, ou seja, AdS_3 , e como já vimos, esses estados são correspondentes a uma CFT com energia $-c/24$, com $c = 24k$. Portanto a parte da função de partição que corresponde ao estado fundamental $|\Omega\rangle$ é q^{-k} .

Agora temos que determinar as partes da função de partição que não sejam somente pertencentes ao estado fundamental da teoria. A partir do estado fundamental, podemos criar estados excitados se, dada uma seqüência $s_n \in \mathbb{N}$, onde somente um número finito de $s_n \neq 0$, então um estado excitado será $\prod_{n=2}^{\infty} L_{-n}^{s_n} |\Omega\rangle$. Como cada L_{-n} contribui com um aumento de energia n , a energia deste estado excitado é portanto $-k + \sum_{n=2}^{\infty} n s_n$, que é finito. Portanto, considerando esses estados na função de partição, teremos também o termo $\sum_{m=0}^{\infty} (q^n)^m = \frac{1}{1-q^n}$, para todos os $n \geq 2^*$. A função de onda para todos os estados excitados possíveis é

$$Z(q) = q^{-k} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \quad (9.1)$$

No entanto, todos os estados que foram incluídos até este momento são estados que estão ligados ao estado fundamental $|\Omega\rangle$. Todos os estados que estão ligados à presença de buracos negros *BTZ* ainda não foram incluídos e, como discutido em capítulos anteriores, eles são parte integrante da dinâmica deste espaço-tempo. Ou seja, existirá uma modificação $\mathcal{O}(q)$ na função de partição que corresponderá aos estados de buraco negro. A função de partição total, é portanto,

$$Z(q) = q^{-k} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} + \mathcal{O}(q) \quad (9.2)$$

Essa modificação é feita pois, recapitulando (6.10), vemos que um buraco negro *BTZ* clássico só pode existir se os autovalores de L_0 forem positivos (já que a entropia seria imaginária caso essa condição não fosse respeitada).

Um resultado obtido por Höhn[17] nos dá a condição de existência e unicidade de uma função de partição[†], e ela é escrita da forma

$$Z_k = \sum_{r=0}^k f_r^{(k)} J^r \quad (9.3)$$

onde cada um dos $f_r^{(k)}$ são determinados e as funções J são definidas no capítulo 8 (essas funções são por definição invariantes modulares, como já foi dito). Por exemplo $f_0^{(1)} = 0$, $f_1^{(1)} = 1$,

*Cada n advém de um operador L_{-n}

†E que ainda é invariante modular

$f_0^{(2)} = -393767$, $f_1^{(2)} = 0$, $f_2^{(2)} = 1$, e assim por diante. Os primeiros termos das funções de partição até $k = 4$ são:

$$\begin{aligned}
 Z_1(q) &= J(q) \\
 &= q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \dots \\
 Z_2(q) &= J(q)^2 - 393767 \\
 &= q^{-2} + 1 + 42987520q + 40491909396q^2 + \dots \\
 Z_3(q) &= J(q)^3 - 590651J(q) - 64481279 \\
 &= q^{-3} + q^{-1} + 1 + 2593096794q + 12756091394048q^2 + \dots \\
 Z_4(q) &= J(q)^4 - 787535J(q)^2 - 8597555039J(q) - 644481279 \\
 &= q^{-4} + q^{-2} + q^{-1} + 2 + 81026609428q + 1604671292452452276q^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Em [15, 17], Hönh se refere a essas teorias conformes com fatorização holomórfica com funções de partição do tipo (9.3) como teorias de campo conformes *extremas*. Para o caso $k = 1$, como dito no capítulo 7, nós conhecemos a teoria conforme extrema em questão: É a teoria *FLM*, que contém o *Monster Group* \mathbb{M} como grupo de simetrias, e sua função de partição é $Z_1 = J$. Esse fato está relacionado a *Monstrous Moonshine*, como visto no capítulo 8.

9.1.1 Formulação Alternativa

Se quisermos escrever as funções de partição $Z_k(q)$, vemos que aparecem coeficientes grandes, que dificultam a visualização direta de suas propriedades. Para isso, vamos utilizar os operadores de Hecke, apresentados no capítulo anterior como uma maneira de escrever essas funções de partição. Aqui estamos considerando somente os operadores de Hecke de $k = 1$.

Nós queremos que a série de $Z_k(q)$ esteja de acordo com 9.1. Para isso expandiremos 9.1 em série de potências, ou seja $\sum_{r=-k}^{\infty} a_r q^r$.

Como visto na seção 8.2.2, como $J(q) = \frac{1}{q} + \dots$, então $T_r J(q) = \frac{1}{q^r} + \dots$, onde existe somente

um termo em potências de q negativas. Com isso, podemos escrever uma série para Z_k utilizando os termos a , para que em potências negativas ele seja coincidente com 9.1.

Vemos que para $k = 2$, os primeiros termos da série de 9.1 são $\frac{1}{q^2} + 1 + \dots$, ou seja $a_{-2} = a_0 = 1$ e $a_{-1} = 0$. Para $k = 3$, temos $\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q} + 1 + \dots$, ou seja $a_{-3} = a_{-1} = a_0 = 1$ e $a_{-2} = 0$.

Agora, podemos reescrever nossas funções de partição a partir desses operadores de Hecke T . Primeiramente, vamos nomear a função $T'_p(J(\tau)) = pT_p(J(\tau))$. Logo, vamos definir a função de partição Z_k como

$$Z_k = \sum_{r=0}^k a_{-r} T'_r(J(\tau)) \quad (9.5)$$

nós utilizamos os mesmos a da expansão de 9.1 para garantir que as duas expansões sejam as mesmas para potências negativas de q . Utilizando os dados da expansão acima, podemos ver que

$$Z_2(\tau) = (T'_2 + T'_0)(J(\tau)) = J(2\tau) + J\left(\frac{\tau}{2}\right) + J\left(\frac{\tau+1}{2}\right) + 1 \quad (9.6)$$

e que

$$Z_3(\tau) = (T'_3 + T'_1 + T'_0)(J(\tau)) = J(3\tau) + J\left(\frac{\tau}{3}\right) + J\left(\frac{\tau+1}{3}\right) + J\left(\frac{\tau+2}{3}\right) + J(\tau) + 1 \quad (9.7)$$

Voltaremos já a esse ponto, onde utilizaremos essas fórmulas para calcular a entropia advinda dessa teoria no limite semi-clássico.

9.2 Entropia de Buracos Negros *BTZ* revisitada

Neste ponto, já conhecemos quais são as funções de partição para todo k . Como visto no capítulo 8, no caso $k = 1$, os coeficientes da função de partição estão ligados as dimensões das representações irredutíveis do *Monster Group*. Para os casos $k > 1$, não conhecemos as CFT's envolvidas nesses casos. Mantendo a analogia, E. Witten conjectura que as CFT's para $k \neq 1$ manterão a mesma estrutura, ou seja, esses coeficientes representarão as dimensões das representações irredutíveis.

No caso $k = 1$, teremos 196884 operadores de dimensão 2, desses um é tensor de energia momento, e os outros 196883 são operadores primários ligados a criação de buracos negro. Conhecendo esse número, podemos então calcular qual é a entropia ligada a degenerescência desses operadores. Essa entropia é dada por $\ln 196883 \approx 12.19$.

Se compararmos esses números com os valores obtidos através da equação 6.10, podemos comparar com os resultados obtidos acima. É preciso levar em consideração que 6.10 foi obtida de maneira semi-clássica, e as entropias obtidas nesta seção são obtidas de maneira exata na teoria quântica. Por causa disso já devemos esperar que exista uma diferença entre esses valores.

9.2.1 Entropia para o caso $k \gg 1$

Agora que conhecemos os resultados para a entropia de buracos negros *BTZ* para o caso quântico, devemos verificar se o limite semi-clássico é condizente com o que foi obtido no capítulo 6. Para isso, utilizaremos uma famosa fórmula para a expansão da função J , que nos diz como os valores dos coeficientes se comportam para $n \gg 1$ na expansão de Fourier.

A expansão de Fourier de J é escrita como

$$J(q) = \sum_{m=-1}^{\infty} c_m q^m. \tag{9.8}$$

A fórmula de Petersson-Rademacher[25, 27] nos diz que, para $m \gg 1$, então

$$\ln c_m \approx 4\pi\sqrt{m} - \frac{3}{4} \ln m - \frac{1}{2} \ln 2 + \dots \tag{9.9}$$

No caso geral, a função de partição para k é

$$Z_k(\tau) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{k,n} q^n$$

Se utilizarmos os operadores de Hecke, podemos estabelecer uma relação entre os b e c de modo que possamos calcular qual a contribuição para entropia no caso semiclássico. O caso semiclássico corresponde ao limite $k, L_0 \rightarrow \infty$, com $\frac{L_0}{k} = r \in \mathbb{Q}$ fixo. Se utilizarmos 9.8 em 9.5, podemos utilizar o calculo feito no capítulo anterior e encontrar a relação entre J e Z_k ,

escolhendo somente o termo com $r = k$ em 9.5, que é mais significativo. Para isso utilizaremos 8.2, com $d|(k, n) = 1$, que é o termo mais significativo. Logo, vemos que $b_{k,n}^{(0)} = kc_{kn}$, e portanto, utilizando a fórmula de Petersson-Rademacher

$$\ln b_{k,n}^{(0)} \approx 4\pi\sqrt{kn} - \frac{3}{4} \left(\ln n + \frac{1}{3} \ln k \right) - \frac{1}{2} \ln 2 + \dots \quad (9.10)$$

Lembrando que $n = L_0$, vemos que para $k \gg 1$ o termo acima é igual em primeira ordem ao 6.10, para a parte holomórfica. Repetindo isso para a parte antiholomórfica, teremos a entropia do buraco negro BTZ nessa teoria, e vemos que ela é *exatamente* a obtida anteriormente por métodos mais tradicionais na física. E ainda, temos como resultado outros termos na série, que podem nos dar melhores resultados para a entropia do buraco negro *BTZ*.

9.3 Comentários Gerais

Até esse momento, cuidamos de construir a teoria de gravitação quântica em $d = 3$, e através disso conseguimos computar alguns resultados de maneira puramente quântica, como a entropia dos buracos negros *BTZ*. Apesar disso, existem diversos detalhes que precisam ser esclarecidos, que vão da construção das teorias conformes até mesmo os espaços de Hilbert da teoria quântica.

9.3.1 Estados

Neste capítulo, focamos em construir as funções de partição para todos os k . Como não nos preocupamos diretamente com a importância da *CFT* associada a cada k (e como não sabemos determinar essa *CFT* de maneira geral), pode parecer indicar que essa tarefa não é importante. Isso, no entanto, não é verdade. Somente conhecendo a *CFT* associada, poderemos compreender a dinâmica completa do buraco negro, já que conheceríamos os campos primários, e então poderíamos calcular seus elementos de matriz.

Como já foi discutido nos capítulos 2 e 6, a teoria de gravitação em $d = 3$ contém graus de liberdade locais, ou seja, não existem ondas gravitacionais. No entanto, quando $\Lambda < 0$, ou seja, o espaço é *AdS*, e somente neste caso [18], a teoria também contém buracos negros, que são os buracos negros *BTZ*. Isso é uma situação diferente da gravitação em $d > 3$, onde existem graus

de liberdade locais, que incluem matéria e radiação. Portanto, em $d = 3$, um buraco negro só pode ser formado por buracos negros de massas menores.

Isso quer dizer que, dado o estado de vacuo do sistema $|\Omega\rangle$, os estados

$$\prod_{j=1}^{\omega} \Phi_j(z_j)|\Omega\rangle, \quad (9.11)$$

onde Φ são campos primários que geram buracos negros de pequena massa, podem gerar estados de buracos negros de massa mais alta.

Como conhecemos só a *CFT* para $k = 1$, não podemos calcular esses estados no caso geral, ou seja, $k \neq 1$. O caso ideal seria que pudéssemos efetuar os cálculos no limite semiclássico, pois assim teríamos outras maneiras de comparar os resultados obtidos via esta teoria e os das teorias já bem estabelecidas.

No entanto, existem diversas propostas da construção destas *CFTs* para $k > 1$. Como ainda são somente conjecturas, não foi possível realizar cálculos explícitos. Contudo, caso se mostrem corretas, permitirão uma comparação mais completa entre esta teoria e as teorias vigentes no limite semiclássico.

Capítulo 10

Conclusão

Ao longo desta dissertação, diversos assuntos relacionados a gravidade em $d = 3$ foram apresentados. A partir deles percebemos que esse tema contém uma grande relação com a teoria de Chern-Simmons. Essa relação é um dos principais responsáveis pela simplicidade da teoria da gravidade em $d = 3$, e o que permite que o estudo dela seja proveitoso para a compreensão de aspectos gerais da gravidade.

No segundo capítulo definimos a gravidade em $d = 3$ e extraímos alguns resultados imediatos que a geometria diferencial nos permitiriam estudar. Esses resultados já mostram que esta teoria, apesar de estar baseada em uma estrutura idêntica a gravidade em $d = 4$, apresenta características bem mais simples, unicamente pela diferença de dimensionalidade.

No terceiro e quarto capítulos nos concentramos em mostrar a equivalência da gravidade em $d = 3$ e a teoria de Chern-Simons (e suas contrapartes supersimétricas). No sistema clássico esta equivalência pode ser obtida de maneira direta, e podemos a partir dela construir a teoria da gravidade a partir de uma interpretação de grupos de Gauge. Em especial, no caso supersimétrico, a construção da teoria nos dá também os outros campos que pertencem àquele multipletto, junto com as interações de seus constituintes.

A partir deste ponto passamos a nos concentrar em obter resultados quânticos. Nos anos oitenta e noventa diversas tentativas de se quantizar a gravidade em $d = 3$ foram tentadas, a partir de métodos já conhecidos na física. Apesar de não terem sido completamente sucedidas, estas tentativas revelaram diversas características desejáveis em uma teoria de gravitação quântica. Algumas destas tentativas foram abordadas no quinto capítulo.

O sexto capítulo se concentrou em apresentar um resultado muito inesperado da gravidade em $d = 3$: a existência de buracos negros. Por causa da simplicidade da teoria, este resultado não era esperado, e portanto atraiu muita atenção para a pesquisa em gravidade em $d = 3$. Estes resultados permitiram comparar com a Relatividade Geral usual o comportamento de buracos negros e, também, a relação com a teoria semiclássica. Esse fato revela outro ingrediente que parece ser geral em teorias de gravidade quântica: A existência de uma dualidade, em que a teoria em $d = 3$ dimensões pode ser explicada por uma em $d = 2$ dimensões, no caso a gravidade em $d = 3$ e uma teoria conforme de campos em $d = 2$. Isso é muito semelhante a dualidade proposta por Juan Maldacena [21] em 1997.

Essa dualidade nos permite focar mais na teoria conforme dual, e é isso que passamos a fazer neste ponto da dissertação. No capítulo 7 estudamos algumas características que permitem a identificação da CFT necessária para a teoria de gravitação em $d = 3$. Essas hipóteses, bastante especulativas, baseadas no trabalho de Witten[34] nos permitem identificar esta CFT e portanto estudá-la de maneira mais profunda. Para isso, no capítulo 8 estudamos o *Monster Group* e como ele se relaciona a escolha da CFT abordada no capítulo 7.

O capítulo 9 finalmente junta todas essas questões para construirmos uma quântica da gravidade e, assim, estudarmos suas propriedades.

10.1 Discussões e comentários

Os resultados abordados no capítulo 9 geraram grande interesse sobre o tema de gravitação em $d = 3$. As bases bastante especulativas do trabalho de Witten geraram uma seqüência de trabalhos sobre o tema. Ainda em 2007, Witten e Alexander Maloney [22] estudaram de maneira mais completa as características de funções de partição para a gravidade quântica em $d = 3$, incluindo outras possibilidades que as apresentadas aqui. No entanto eles mostram que apesar das bases especulativas, as teorias baseadas em CFT's com fatorização holomórfica tem propriedades interessantes.

No trabalho de Witten de 2007 [34] uma receita para a construção de teorias conformes com $k = 2$ é apresentada, ficando uma incógnita se seria realmente possível construir teorias

conformes nestas condições. Diversos argumentos foram dados para a existência ou não desta CFT. No entanto, *considerando este fato*, alguns resultados já foram obtidos, por exemplo, para o genus das funções de partições para $k = 2, 3$. Em [14] Davide Gaiotto e Xi Yin fazem esta construção, e como os resultados parecem indicar uma grande coerência, eles corroboram a hipótese de existência destas *CFT's* para $k > 1$. Além disso, é demonstrado que para $k < 10$, se a teoria conforme existir, a função de partição de genus 2 é única.

No entanto, em [13] Matthias R. Gaberdiel utilizando a teoria de equações diferenciais modulares apresenta uma conjectura que, se provada verdadeira, impede a existência de teorias conformes com fatorização holomórfica para $k > 1$.

Esta questão resta em aberto e sua solução é muito importante para a melhor resolução deste tema de pesquisa. Caso essas *CFT's* não existam, poderemos argumentar então que, em $d = 3$, a gravidade pura será uma teoria não bem definida.

Apêndice A

Dreibeins e Conexões de Spin

A.1 Fibrado Tangente

Definição 5 (Fibrado Tangente). *Considere uma variedade M n -dimensional. Para cada $x \in M$, considere $T_x M$ a variedade tangente ao ponto x .*

O fibrado tangente é a união disjunta de todos os espaços vetoriais $T_x M$, ou seja

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \quad (\text{A.1})$$

em conjunto com a função de projeção π

$$\pi : (x, v) \rightarrow x$$

com $x \in M$ e $v \in T_x M$

Localmente, o fibrado tangente é $U \times \mathbb{R}^n$ onde U é um aberto em M .

A.2 Fibrados Vetoriais

Um fibrado é uma variedade E com uma estrutura local de produto, que pode ser entendido como uma generalização do fibrado tangente. Um fibrado tangente é uma terna (E, N, F, π) , onde E é chamado o espaço total, M é chamado de espaço base, F é chamado de Fibra e $\pi : E \rightarrow N$ é função de projeção. Para cada ponto $x \in M$ existe uma vizinhança U e um homeomorfismo $\Phi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$, de maneira que $\pi \circ \Phi(x, y) = x$, $x \in U$, $y \in F$. Ou seja, que a região π^{-1} é localmente da forma $U \times F$.

No caso em que F é um espaço vetorial, o fibrado é chamado fibrado vetorial.

A.3 Vierbein

Considere uma variedade M e um fibrado tangente T . Considere também um fibrado vetorial V , com grupo de estrutura $SO(2,1)$. De maneira pictórica, esse fibrado contém simetria de Lorentz. O vierbein e é, portanto, um isomorfismo inversível ligando V em TM , ou seja:

$$e : V \rightarrow TM$$

Ou seja, podemos formular a Relatividade Geral em função dos vierbeins ou, como são também chamados, *referenciais locais*. Como especificado acima, eles têm a característica de

$$\eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b = g_{\mu\nu}$$

e

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}$$

A.3.1 Conexões de Spin

Agora, apliquemos uma derivada covariante ao vierbein e . Se ela fosse nula, isso implicaria que M seria plano. Portanto, adicionaremos um termo à derivada covariante de e , e portanto

$$\nabla_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^a e_\nu^b = 0$$

O termo ω é chamado conexão de spin.

Se estamos em uma condição usual da Relatividade Geral, que é a de torção livre, essa equação acima se resume a

$$de^a + \omega^{ab} \wedge e_b = 0$$

que já apareceu no terceiro capítulo. É a chamada primeira equação de Cartan. Se utilizarmos a derivada covariante para encontrar a curvatura em função dos vierbeins, temos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] e_\rho^a$$

A equação que sai deste cálculo relaciona a dinâmica da conexão de spin, e é chamada segunda equação de Cartan.

Estes detalhes podem ser encontrados de uma maneira mais completa nas seguintes referências: [24] para uma revisão completa destes temas de geometria diferencial e [7] para aplicações de gravidade em $d = 3$.

Apêndice B

Uma revisão de álgebra

Neste apêndice faremos uma revisão dos temas mais básicos discutidos sobre álgebras de Lie nesta dissertação

B.1 Álgebras de Lie

Definição 6 (Álgebra). *Uma álgebra \mathcal{U} sobre um corpo K é um espaço vetorial dotado de uma operação binária bilinear adicional $\cdot : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, de maneira que $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, bem como $(\xi x) \cdot (\eta y) = (\xi\eta)xy$, onde $\xi, \eta \in K$*

Definição 7 (Álgebra de Lie). *Uma álgebra de Lie \mathcal{G} é uma álgebra onde a operação bilinear \cdot , contém as seguintes propriedades*

- $x \cdot x = 0 \forall x \in \mathcal{G}$
- $x \cdot (y \cdot z) + y \cdot (z \cdot x) + z \cdot (x \cdot y) = 0$

No caso de álgebras de Lie, a operação bilinear será denotada por $[\ , \]$ e é chamado de colchetes de Lie.

A segunda propriedade é conhecida por *identidade de Jacobi*. Da primeira propriedade, podemos tirar uma importante característica dos colchetes de Lie, que para $\forall x, y \in \mathcal{G}$

$$[x + y, x + y] = [x, x] + [y, y] + [x, y] + [y, x] = [x, y] + [y, x] = 0 \Rightarrow [x, y] = -[y, x]$$

ou seja, os colchetes de Lie são antisimétricos.

A dimensão da álgebra de Lie é idêntica a dimensão do espaço vetorial \mathcal{G} , e no caso de dimensão finita ou contável, podemos escolher uma base \mathcal{B} para o espaço vetorial. Os elementos desta base são chamados *geradores* da álgebra de Lie \mathcal{G} . Já que qualquer elemento pode ser escrito em função dos elementos da base, conhecendo o conjunto de todas as duplas $[T^a, T^b]$ para os elementos da base \mathcal{B} , conheceremos então como aplicar os colchetes de Lie para qualquer elemento de \mathcal{G} . Por isso

$$[T^a, T^b] = f_c^{ab} T^c$$

e os coeficientes f são chamados de *constantes de estrutura*.

Uma subálgebra \mathcal{H} de \mathcal{G} é um subespaço vetorial que é também uma álgebra (ou seja, sua operação binária \cdot é fechada entre elementos de \mathcal{H})

B.2 Subálgebra de Cartan

É claro, da definição dada acima, que mudando a base da álgebra de Lie, mudaremos também as constantes de estrutura. Com isso, podemos escrever as álgebras de Lie em uma base específica, o que facilita muito a escrita das constantes de estrutura. Essa base é conhecida como *base de Weyl-Cartan*. Para a construção dos elementos desta base, devemos encontrar um conjunto de operadores da base que deverão todos comutar entre si. A subálgebra gerada por esses elementos é chamada de *subálgebra de Cartan*. Essa subálgebra tem algumas características importantes, como por exemplo:

- É a maior subálgebra abeliana contida constituída de elementos semisimples
- Em uma álgebra de Lie semisimples, todas as subálgebras de Cartan são ligadas por automorfismos e possuem a mesma dimensão

Na base de *Weyl-Cartan*, a álgebra dos colchetes de Poisson tem uma estrutura bem típica. Existirão elementos H^a que comutarão entre si, ou seja,

$$[H^a, H^b] = 0$$

e elementos E^α , onde

$$[H^a, E^\alpha] = \alpha^a E^\alpha$$

e

$$[E^\alpha, E^\beta] = e_{\alpha,\beta} E^{\alpha+\beta}$$

e ainda

$$[E^\alpha, E^{-\alpha}] = \sum_i^r \alpha^i H^i$$

com a dimensão da subálgebra de Cartan sendo denotada por r .

Vamos aplicar esta construção às álgebras utilizadas ao longo desta dissertação, para que possamos conhecer suas subálgebras de Cartan.

B.2.1 Subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2, 1)$ e $\mathfrak{so}(3, 1)$

A álgebra de Lie dos grupos $\mathfrak{so}(2, 1)$ e $\mathfrak{so}(3, 1)$ pode ser vista nos comutadores abaixo:

$$\begin{cases} [J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J^c \\ [J_a, P_b] = \epsilon_{abc} P^c \\ [P_a, P_b] = \Lambda \epsilon_{abc} J^c \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

com $\Lambda \neq 0$

Nós queremos encontrar uma nova forma de escrever esta álgebra, de maneira que suas propriedades fiquem explícitas, e possamos encontrar a dimensão da subálgebra de Cartan. Para isso, começaremos reescrevendo com geradores deste grupo da maneira seguinte:

$$J_a^\pm = \frac{1}{2} \left(J_a \pm \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} P_a \right) \quad (\text{B.2})$$

e teremos uma nova álgebra, que será

$$\begin{cases} [J_a^+, J_b^+] = \epsilon_{abc} J^{c+} \\ [J_a^-, P_b^-] = \epsilon_{abc} P^{c-} \\ [J_a^+, J_b^-] = 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Essa álgebra dos colchetes de Poisson está de acordo com a representação da base de Weyl-Cartan, e portanto nos mostra que a dimensão destas duas subálgebras para essas álgebras de Lie é igual a dois.

B.3 Forma de Killing

Considere a seguinte aplicação

$$y \mapsto ad_x(y) := [x, y]$$

esta aplicação é conhecida como mapa adjunto. Podemos utilizar ele para construir uma forma sobre as álgebras de Lie que faz o papel de uma métrica e que permite compor diferentes membros destas álgebras.

A *forma de Killing* (ou forma de Killing-Cartan) é definida como

$$\kappa(x, y) = tr(ad_x \circ ad_y)$$

onde $x, y \in \mathcal{G}$, tr indica o traço os operadores lineares e \circ representa a composição destes operadores.

B.4 Contração de $SO(2, 1)$

No grupo $SO(2, 1)$ podemos escrever a seguinte homotopia

$$exp(t\nu_1 M_1 + t\nu_2 M_2 + \theta L)$$

onde ν são a *rapidez*, que geram as transformações de Lorentz, e θ varia entre $-\pi$ e π . Quanto $t \rightarrow 0$, isso converge a $exp(\theta L)$ que é o grupo $SO(2)$.

Apêndice C

Simetria Conforme

Durante todo este trabalho, diversos resultados foram obtidos exclusivamente pela teoria resultante ser uma teoria de campos conformes*.

C.1 Simetria Conforme

Considere uma variedade d dimensional. Essa variedade será chamada *conformalmente plana* se o seu elemento de linha for da forma

$$ds^2 = e^{\omega(x)} \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (\text{C.1})$$

Agora, considere um grupo de transformações de coordenadas que mantenha uma métrica conformalmente plana. Este grupo será chamado de *grupo conforme*. Obviamente translações e rotações estão incluídas neste grupo, assim como estão incluídas transformações de Lorentz (que preservam $\eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$) e as dilatações λx^μ .

Outra transformação que preserva a condição C.1 são as informações, ou seja, $x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2}$, já que mapeia $\eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \rightarrow \frac{\eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}{(x^2)^2}$, que está de acordo com C.1. Podemos então, compondo inversões com translações, criar o grupo das transformações conformes especiais, que é

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2} \quad (\text{C.2})$$

Podemos contar o número de graus de liberdade destas transformações, e veremos que elas

*Denotada pelo trabalho como *CFT*

são D translações, $\frac{1}{2}D(D - 1)$ rotações e transformações de Lorentz, uma para dilatações e D transformações especiais conformes. Isso nos dá $\frac{1}{2}(D + 2)(D + 1)$ graus de liberdade no grupo conforme. E isso é o mesmo número de dimensões de $SO(D + 2)$, só que sendo não compacto, o que nos dá $SO(D, 2)$ para a assinatura Lorentziana e $SO(D + 1, 1)$ para a Euclidiana.

C.2 Grupo conforme em $d = 2$

Para $D = 2$, muitas coisas são diferentes. Primeiramente, os grupos $SO(2, 2)$ e $SO(3, 1)$ são somente uma parte de um grupo muito maior de transformações que preservam C.1.

Da teoria de funções holomórficas, sabemos que qualquer transformação $z \rightarrow f(z)$ e $\bar{z} \rightarrow f(\bar{z})$, se f é holomórfica, então essa função preservará a condição de planitude conforme. As transformações geradas por esses grupos são, de maneira infinitesimal

$$z \rightarrow z' = z - \epsilon_n z^{n+1} \tag{C.3}$$

e

$$\bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{z} - \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1} \tag{C.4}$$

onde ϵ é o parametro de transformação. Isso nos mostra que as transformações são geradas pelos operadores

$$\ell_n = -z^{n+1} \partial$$

e

$$\bar{\ell}_n = -\bar{z}^{n+1} \bar{\partial}.$$

É bem claro ver que

$$\left\{ \begin{array}{l} [\ell_m, \ell_n] = (m - n)\ell_{m+n} \\ [\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n)\bar{\ell}_{m+n} \\ [\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0 \end{array} \right. \tag{C.5}$$

Quando vamos para o caso quântico podemos dizer, de maneira pictórica, que temos que considerar também as comutações entre os elementos, o que nos gera a álgebra

É bem claro ver que

$$\begin{cases} [L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m - n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \\ [L_m, \bar{L}_n] = 0 \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Esta álgebra é conhecida como álgebra de Virasoro, e o termo c é chamado de carga central. Em duas dimensões, podemos escrever sempre os elementos de uma forma de números complexos, já que $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$.

Quando aplicamos uma transformação conforme nos elementos z e \bar{z} , um operador \mathcal{A} se transforma da forma $\mathcal{A}(z', \bar{z}') = \zeta^{n_R} \bar{\zeta}^{n_L} \mathcal{A}(z, \bar{z})$. Em uma transformação infinitesimal, podemos escrever as transformações de \mathcal{A} em função de L_0 , como foi feito em (6.7, 6.8).

C.3 Teorema de Zamolodchikov

Definição 8 (Função C). *Considere uma função $C(g_i, \mu)$, dependendo das constantes de acoplamento g_i em uma teoria quântica de campos, e uma escala de energia μ , que tem as seguintes propriedades*

- $C(g_i, \mu)$ *decrece monotonicamente sobre o fluxo de grupo de renormalização*
- *Sobre os pontos fixos do grupo de renormalização, sobre as constantes de acoplamento g_i^* , a função $C(g_i^*, \mu) = C$ para qualquer escala μ .*

Um teorema chamado de *teorema-c* impõe que, se essa função acima existe, então o fluxo do grupo de renormalização nesta teoria é irreversível.

Zamolodchikov, em [35], demonstrou que em teorias conformes de campos em duas dimensões, a função C sempre existe. Mas de maneira mais importante ainda, ele demonstrou que esta função, sobre os pontos fixos, é igual a carga central da teoria conforme de campos em questão.

Este fato impede que a carga central varie livremente, já que isso contraria a definição dos pontos fixos g_i^* , e com isso, qualquer teoria de campos conformes em duas dimensões deverá ter cargas centrais *isoladas*, que é uma das propriedades chave desta dissertação.

Apêndice D

Cargas globais na teoria de *Chern-Simons*

Neste apêndice estudaremos as cargas globais na teoria de *Chern-Simons*, e como isso se liga as fronteiras da teoria.

D.1 Uma rápida introdução ao formalismo de Dirac

Dada uma teoria em que possamos escrever o lagrangeano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, onde q e \dot{q} representam todas as posições e velocidades q_i, \dot{q}_i . A ação fica

$$S = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (\text{D.1})$$

e podemos definir momentos generalizados a partir desse lagrangeano, por $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.

A mudança para o formalismo Hamiltoniano, é no fundo, a passagem do conjunto de variáveis $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$. Essa passagem é possível se o Hessiano do sistema é não singular, ou seja, se

$$\det \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0$$

Se essa condição é satisfeita, é possível passar de maneira unívoca o sistema de $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$. Se essa condição não é satisfeita, então existem relações $\phi_m(p, q) = 0 (m = 1 \dots M)$ que serão chamados de *vínculos primários*. Esses vínculos serão impedimentos na construção da Hamiltoniana da maneira usual, já que introduzirão redundâncias no sistema. Esses vínculos

terão que ser levados em conta na evolução do sistema, e portanto a evolução temporal do sistema será dada por:

$$\dot{F} = \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\} \quad (\text{D.2})$$

Queremos também que os vínculos obedeam equações de consistência, ou seja

$$\dot{\phi}_m = 0 = \{\phi_m, H\} + u^m \{\phi_m, \phi_{m'}\} \quad (\text{D.3})$$

Se (D.3) não é obedecido, então vamos adicionar novos vínculos que serão chamados de *vínculos secundários*.

Uma condição muito importante de consistência do sistema é que a dimensão da superfície vinculada é a mesma por todo o espaço, ou seja, que

$$\text{rank} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_{|\Gamma} = \text{Constante} \quad (\text{D.4})$$

Onde Γ é a superfície vinculada.

No espaço de fase total, temos um produto simplético, o parênteses de Poisson. Como queremos que as superfícies vinculadas se comportem como espaços de fase, precisamos restringir o parênteses de Poisson para essa superfície, de modo que o produto seja fechado nessa superfície. A restrição $\{ , \}_P \rightarrow \{ , \}_D$ gera o chamado *parênteses de Dirac*.

No tratamento de resultados físicos, será o parênteses de Dirac que terá importância. Portanto, a quantização canônica desses sistemas será feita a partir do Parênteses de Dirac, e não do de Poisson.

D.2 Cargas globais

Começemos escrevendo a ação de uma teoria de Chern-Simons na forma hamiltoniana, ou seja

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^2x \epsilon^{ij} g_{ab} (\dot{A}_i^a A_j^b + A_0^a F_{ij}^b) + B(\partial\Sigma) \quad (\text{D.5})$$

e o termo B está ligado às condições de fronteira, e garante a invariância de gauge da teoria. A métrica g_{ab} é a forma de Killing da teoria, e está associada ao grupo de simetria em questão. Assumimos aqui que a variedade tem a topologia $\Sigma \times \mathbb{R}$. Vamos trabalhar somente com graus de liberdade espaciais ($i = 1, 2$).

Da equação acima, vemos que o campo A_0^a não é dinâmico, sendo somente um multiplicador de Lagrange, e os campos A_i^a são dinâmicos. Disso, podemos ver que $\{A_i^a, A_j^b\} = \frac{2\pi}{k} g^{ab} \epsilon_{ij} \delta(x, y)$. Se calcularmos o parênteses de Poisson com a ação acima, então teremos o vínculo $G_a = \frac{k}{4\pi} g_{ab} \epsilon^{ij} F_{ij}^b$.

Nossa grande questão é descobrir se o gerador

$$G(\eta^a) = \int_{\Sigma} \eta^a G_a + Q(\eta)$$

é um vínculo de primeira classe. Para isso, vamos calcular qual a variação de G com os campos dinâmicos A_i , e obtemos

$$\delta G = \frac{k}{2\pi} \int \sigma \epsilon^{ij} \eta_a D_i \delta A_j^a + \delta Q(\eta)$$

onde D_i é a derivada covariante agindo na conexão A , que se encontra na representação adjunta. Se integrarmos por partes este termo chegaremos a

$$\delta G = -\frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \epsilon^{ij} D_i \eta_a \delta A_j^a + \frac{k}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a \delta A_k^a dx^k + \delta Q$$

E portanto, podemos definir que G será de primeira classe se o termo de fronteira Q for

$$\delta Q = -\frac{k}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a \delta A_i^a dx^i$$

Agora, para compreender qual o parênteses de Poisson de dois geradores G , com parâmetros η e λ , diferentes, temos que

$$\{G(\eta), G(\lambda)\} = \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \epsilon^{ij} D_i \eta_a D_j \lambda^a = \int_{\Sigma} [\eta, \lambda^a] G_a + \frac{k}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a D \lambda^a$$

Para que o resultado acima seja ainda um gerador G , precisamos que o termo $\frac{k}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a D \lambda^a = Q(\sigma) + K(\eta, \lambda)$, onde σ é um parametro dependente dos outros dois parâmetros. Isso nos

mostra que

$$\{G(\eta), G(\lambda)\} = G(\sigma) + K(\eta, \lambda)$$

O termo com σ define a álgebra de cargas globais. No entanto, o termo K não depende disso, e é portanto um termo de carga central. Se na expressão acima passarmos para os parênteses de Dirac, teremos então

$$\{Q(\eta), Q(\lambda)\}^* = Q(\sigma) + K(\eta, \lambda) \quad (\text{D.6})$$

O termo K é, portanto, o responsável pela existência de extensões centrais de álgebra de comutadores, e que, determinando K nos dará o valor exato da carga central. É o que faremos a seguir.

D.3 Álgebra de Virasoro

Queremos estudar como surge na teoria a dependência da dinâmica da fronteira da mesma. Para isso, vamos primeiramente considerar a métrica

Como queremos estudar a Álgebra de Virasoro da teoria de Chern-Simons, vamos estudar como ela se comporta sobre difeomorfismos. Talvez existam diferentes condições para a fronteira para qual a carga Q representará graus de liberdade advindos dos difeomorfismos.

É bem conhecido, e já foi mostrado nesta dissertação, que os difeomorfismos estão contidos nas equações de movimento da teoria. Isso nos mostra que não é esperado o surgimento de novas e independentes cargas conservadas para essa simetria.

Começaremos como no capítulo 3, considerando que as transformações são da forma

$$\eta^a = \xi^i A_i^a$$

para um ξ qualquer.

As cargas associadas aos difeomorfismos serão denotadas por J , que são da forma

$$\delta J = \frac{k}{2\pi} \int \xi^i A_i \delta A_k dx^k$$

Escrevendo em componentes (normais e tangenciais à fronteira da variedade)

$$\delta J = \frac{k}{2\pi} \int \xi^r A_r \delta A_\phi + \frac{1}{2} \xi^\phi \delta A_\phi^2 dx^k$$

e onde observamos que se $\delta A_r^a = 0$, na fronteira, a expressão é integrável.

Como a teoria de Chern-Simons não contém graus de liberdade locais, temos que fixar o gauge de modo que os graus de liberdade estejam somente na fronteira. Para isso, vamos escrever $A_i = U^{-1} \partial_i U$. Vamos impor a condição $\partial_\phi A_r = 0$ para fixar o gauge, o que mostra que $U = a(\phi)b(r)$. Resolvendo este sistema, vemos que $A_r = \frac{\partial_r b}{b}$ e $A_\phi = \frac{\partial_r b \partial_\phi a}{ab}$.

Já que $\delta A_r^a = 0$, podemos escrever $A_r^a = \alpha^a$, onde α é uma constante da álgebra de Lie, e portanto

$$J = \frac{k}{2\pi} \int \left(\xi^r \alpha A_\phi + \frac{1}{2} \xi^\phi A_\phi^2 \right) d\phi + J_0$$

com J_0 sendo um termo em que $\delta J_0 = 0$ e, recapitulando o que foi apresentado, podemos mostrar qual é esse termo.

O termo

$$\int (\xi^i A_i) \partial_\phi (\zeta^j A_j) d\phi$$

apresentado na seção D.2, está relacionado ao termo de fronteira da teoria. Se utilizarmos o fato que o traço entre tres termos A é identicamente nulo, e o valor de A_r na fronteira é

$$\int \left([\xi, \zeta]^r \alpha A + \frac{1}{2} [\xi, \zeta]^\phi A^2 \right) d\phi + \alpha^2 \int \xi^r \partial_\phi \zeta^r d\phi$$

ou seja, o último termo da equação acima corresponde ao termo K de D.6. No caso em que $\xi^i = (-\partial_\phi \xi, x^i)$, para que a equação acima seja respeitada

$$J = \frac{k}{4\pi} \int (\alpha^2 + 2\alpha \partial_\phi A + A^2) \xi(\phi)$$

ou sejam $J_0 = \frac{k}{4\pi} \int \xi d\phi$. Com esse termo, já determinamos qual a carga central da álgebra de Virasoro envolvida. Mas é preciso deixá-la de forma mais clara. Para isso, faremos a expansão em modos de Fourier, de modo que:

$$\alpha^2 + 2\alpha\partial_\phi A + A^2 = \frac{1}{k} \sum_{-\infty}^{\infty} L_n e^{in\phi}$$

que, aplicando no comutador de Dirac é

$$\{L_n, L, m\}^* = i(n - m)L_{n+m} + \frac{i}{12}cn(n^2 - 1)\delta_{n+m}$$

onde $c = 12k\alpha^2$. Se determinarmos α conheceremos então qual a relação entre a carga central e a teoria de gravidade em $d = 3$. E da referência [8], podemos ver que $\alpha^2 = \frac{1}{2}$, e como do capítulo 3, $k = \frac{\ell}{4G}$, então

$$\boxed{c = \frac{3\ell}{2G}} \tag{D.7}$$

Esse resultado não é unicamente demonstrável desta maneira

Referências Bibliográficas

- [1] ACHÚCARRO, A., AND TOWNSEND, P. A Chern-Simons action for three-dimensional anti-de Sitter supergravity theories. *Physics Letters B180* (Jan 1986), 89–92.
- [2] ACHÚCARRO, A., AND TOWNSEND, P. Extended supergravities in $d = 2 + 1$ as Chern-Simons theories. *Physics Letters B* (Jan 1989).
- [3] BANADOS, M., TEITELBOIM, C., AND ZANELLI, J. The Black Hole in Three Dimensional Space Time. *Physical Review Letters 69* (1992), 1849.
- [4] BEKENSTEIN, J. D. Black Holes and Entropy. *Phys. Rev. D 7, 8* (Apr 1973), 2333–2346.
- [5] BROWN, J., AND HENNEAUX, M. Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: An example from three *Communications in Mathematical Physics* (Jan 1986).
- [6] CARLIP, S. The (2+1)-Dimensional Black Hole. *Classical and Quantum Gravity 12* (1995), 2853.
- [7] CARLIP, S. *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1998.
- [8] CARLIP, S. Conformal Field Theory, (2+1)-Dimensional Gravity, and the BTZ Black Hole. *Classical and Quantum Gravity 22* (2005), R85.
- [9] CARLIP, S., GEGENBERG, J., AND MANN, R. B. Black holes in three-dimensional topological gravity. *Phys. Rev. D 51, 12* (Jun 1995), 6854–6859.

- [10] CHAMSEDDINE, A. H., ARNOWITT, R., AND NATH, P. Locally supersymmetric grand unification. *Phys. Rev. Lett.* *49*, 14 (Oct 1982), 970–974.
- [11] DIMOPOULOS, S., RABY, S., AND WILCZEK, F. Supersymmetry and the scale of unification. *Phys. Rev. D* *24*, 6 (Sep 1981), 1681–1683.
- [12] FUCHS, J., AND SCHWEIGERT, C. *Symmetries, Lie Algebras and Representations*, second edition ed. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1997.
- [13] GABERDIEL, M. R. Constraints on extremal self-dual CFTs. *JHEP* *11* (2007), 087.
- [14] GAIOTTO, D., AND YIN, X. Genus Two Partition Functions of Extremal Conformal Field Theories. *JHEP* *08* (2007), 029.
- [15] GANNON, T. *Moonshine Beyond the Monster, The Bridge Connecting Algebra, Modular Forms and Physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2006.
- [16] HAWKING, S. W. Black hole explosions? *Nature* *248* (1974), 30–32.
- [17] HOEHN, G. Selbstduale vertexoperator-superalgebren und das babymonster (self-dual vertex operator super algebras and the baby monster). *arXiv math.QA* (Jun 2007).
- [18] IDA, D. No Black-Hole Theorem in Three-Dimensional Gravity. *Phys. Rev. Lett.* *85*, 18 (Oct 2000), 3758–3760.
- [19] LANG, S. *Complex Analysis*. Graduate Text on Mathematics. Springer, 1994.
- [20] MALDACENA, J. M. Black holes in string theory.
- [21] MALDACENA, J. M. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.* *2* (1998), 231–252.
- [22] MALONEY, A., AND WITTEN, E. Quantum gravity partition functions in three dimensions. *arXiv hep-th* (Dec 2007). 71 pages, 6 figures.

- [23] MONCRIEF, V. Reduction of the Einstein equations in 2+1 dimensions to a Hamiltonian system over Teichmüller space. *J. Math. Phys.* 30 (1989), 2907–2914.
- [24] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series In Physics. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [25] PETERSSON, H. Über die Entwicklungskoeffizienten der Automorphen Formen. *Acta. Math* 58 (1932), 169.
- [26] POLCHINSKI, J. *String Theory*, vol. 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 2005.
- [27] RADEMACHER, H. The Fourier Series and the Functional Equation of the Absolute Modular Invariant $J(\tau)$. *American Journal of Mathematics* 61, 1 (1939), 237–248.
- [28] SCHELLEKENS, A. N. Meromorphic $c = 24$ Conformal Field Theories. *arXiv hep-th* (May 1992).
- [29] STEIN, W. *Hecke Algebras and Modular Forms: Notes derived from Ribet's 1996 Berkeley grad. course*. 1998.
- [30] STROMINGER, A. Black hole entropy from near-horizon microstates. *Journal of High Energy Physics* 1998, 02 (1998), 009–009.
- [31] UNRUH, W. G. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D* 14, 4 (Aug 1976), 870–892.
- [32] UNRUH, W. G., AND WALD, R. M. Time and the interpretation of canonical quantum gravity. *Phys. Rev. D* 40, 8 (Oct 1989), 2598–2614.
- [33] WITTEN, E. 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B* 311 (Jan 1988), 48–78.
- [34] WITTEN, E. Three-Dimensional Gravity Reconsidered. *arxiv.org* (2007).
- [35] ZAMOŁODCHIKOV, A. B. Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory. *JETP Lett.* 43 (1986), 730–732.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)