



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.004/09

**Estudo de Vórtices em Supercondutores
e Teoria de Campos**

Freddy Jackson Poveda Cuevas

Orientador

Adriano Antonio Natale

Março de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

“A mis padres, Fredy y Rosa.”

*“Sólo basta recordar el pasado,
sentir el presente
y contemplar nuestro futuro,
para saber que ha valido la pena.”*

“Lo que la razón no consigue, lo alcanza a menudo el tiempo.”

Lucio Anneo Séneca.

Agradecimentos

Agradeço à minha família, especialmente aos meus irmãos Leonardo, Alejandro e Laura, pelo apoio moral desde Colombia.

A Sandra, a minha namorada, porque nunca me abandonou apesar das dificuldades e porque sempre levou na sua mente que: *El camino y el tiempo compartidos son el pilar de nuestros triunfos*.

Aos amigos Alexander, Oscar, Almeida, Alberto, Bruce, Aline e Danuce, agradeço pela colaboração para este trabalho e sobretudo por sua companhia e grande amizade.

Aos colegas de pos-graduação que me acompanharam neste mestrado, especialmente a Oscar Bedoya, Alexis (e os caleños), German e Mariela, que me receberam em São Paulo.

Como é natural as minhas amigas e amigos, Ingrid Rocío, Liliana Patricia e Nathalia e Miguel Alejandro, porque temos fé sempre em que podemos ser melhores.

Aos colegas da UPTC que também enfrentaram ao desafio de sair da Colombia e pelos que lá ficaram.

Agradeço aos colegas pós-graduandos do IFT, aos professores e funcionários, às secretarias Luzinete, Rosane, Meire e Vilma.

Ao professor Gastão Krein.

Agradeço ao meu orientador, Adriano A. Natale, primeiro pela paciência e todas as oportunidades que me ofereceu, não só para esta dissertação senão para a minha vida e o futuro.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho é uma revisão sobre vórtices em supercondutores e teoria de campos. Os vórtices são soluções axialmente simétricas para um sistema de equações de movimento (não-lineares) com características bem definidas nos limites assintóticos, que deixam o sistema com um valor finito da energia por unidade de comprimento. O estudo das condições de fronteira em diferentes teorias como a supercondutividade e a teoria de campos nos permite estabelecer se a teoria admite soluções tipo vórtice. Assim, uma teoria tipo Ginzburg-Landau e uma teoria de campos com escalares fundamentais, as duas com **quebra espontânea de simetria (QES)**, apresentam soluções tipo vórtice. Estudaremos as características e algumas das propriedades dos vórtices nas teorias que apresentem QES. Uma teoria de natureza diferente, isto é, sem bósons escalares fundamentais, mas com **quebra dinâmica de simetria (QDS)**, também admite soluções tipo vórtice. O estudo de teorias com QDS serão o primeiro passo para uma possível explicação de confinamento e quebra da simetria quiral.

Palavras Chaves: Vórtices, supercondutores, comprimento característico, comprimento de coerência, parâmetro de Ginzburg-Landau, quebra espontânea de simetria, quebra dinâmica de simetria.

Áreas do conhecimento: Ciências exatas e da terra, Física, Física de Partículas, Teoria de Campos, Supercondutores.

Abstract

This work is a review of vortices in superconducting theory and field theory. The vortices are axial symmetric solutions for a system of equations of motion (nonlinear) with well defined characteristics in the asymptotic limits, that leave the system with a finite value of the energy per unit of length. The study of the boundary conditions in theories, as superconductivity and field theory allow us that to establish if the theory admits vortex solutions. Thus, the Ginzburg-Landau theory and gauge theories with fundamental scalar bosons, with **spontaneous symmetry breaking (SSB)**, present vortex solutions. We will study the characteristics and some of the properties of the vortices in the theories with SSB. A theory of different nature, i.e., without fundamental scalars, but with **dynamical symmetry breaking (DSB)**, admit as well vortex solutions. The study of theories with DSB will be the first step for a possible explanation of confinement and chiral symmetry breaking.

Sumário

Introdução	2
1 Considerações preliminares	4
1.1 Alguns fundamentos das teorias de gauge	4
1.2 Soluções estáveis de energia finita	6
1.2.1 Teorema de Derrick	8
1.2.2 Teorema para os campos de gauge	8
1.3 Condições para que a energia seja finita	10
2 Vórtices em Supercondutores	13
2.1 Sobre a supercondutividade	13
2.1.1 Descrição do fenômeno	13
2.1.2 As equações de London e a teoria BCS	15
2.2 A introdução dos vórtices	17
2.2.1 Teoria de Ginzburg-Landau	17
2.2.2 A solução de Abrikosov para as equações de Ginzburg-Landau	23
3 Vórtices em teorias de campos com quebra espontânea de simetria	27
3.1 Vórtices em uma teoria de gauge Abelianas	27
3.2 Vórtices em teorias de gauge não-Abelianas	33
3.3 Vórtices em $SU(2)$	39
4 Vórtices em teorias de campos com quebra dinâmica de simetria	44
4.1 O modelo Abelianas	45
4.2 O modelo não-Abelianas	47
5 Conclusões	49
A Relações matemáticas	51
A.1 Coordenadas cilíndricas	51
A.2 Considerações sobre a função K_ν	52
A.2.1 Solução em serie para equação diferencial de Bessel com argumento imaginário e a função $K(z)$	52
A.2.2 Limite para $\nu \rightarrow n$ inteiro	54
A.2.3 Derivada da função K_n	55

A.2.4	Limites assintóticos da função K_n	55
B	Homotopias	56
B.1	Considerações gerais	56
B.2	Grupo de homotopias	57
B.2.1	O grupo fundamental	58
B.2.2	Os grupos superiores	61
B.2.3	O grupo quociente	62
	Referências	64

Lista de Figuras

2.1	Resistência em função da temperatura para um material supercondutor.	14
2.2	Diagrama de fase do campo magnético H em função da temperatura T . A dependência do campo magnético com a temperatura é uma relação empírica aproximadamente quadrática $H(T)/H(0) = 1 - (T/T_c)^2$.	15
2.3	Diagrama de fase $H - T$ para um supercondutor tipo II, onde H_{c1} e H_{c2} são os campos magnéticos críticos e as fronteiras onde se apresentam os vórtices.	16
2.4	Comportamento da energia livre em função do parâmetro livre, tendo em conta os sinais dos parâmetros α e β . Para $\beta < 0$ com (a) $\alpha < 0$ e (b) $\alpha > 0$. Para $\beta > 0$ com (c) $\alpha > 0$ e (d) $\alpha < 0$.	19
2.5	Fluxo de campo magnético ao longo da direção- z num supercondutor tipo II, onde C é o fluxo fechado de corrente. O cinza indica a fase supercondutora e a parte branca a fase normal (núcleo).	21
2.6	Sistema tipo vórtice com um loop fechado de corrente C .	23
2.7	Diagrama de uma camada de substância normal (branco, $z \rightarrow -\infty$) e uma camada de um supercondutor (cinza, $z \rightarrow +\infty$), onde se apresenta como campo magnético H e o parâmetro de ordem variam em função da distância.	26
3.1	O campo de gauge em função da distância radial, a constante de acoplamento e a massa da partícula vetorial. Isto é: $\frac{e}{m_v} [\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi$ vs. $m_v \rho$, com $n = 1$.	32
3.2	O campo magnético H_z e o campo escalar ϕ , em função da distância radial. Onde em (a) se vê $\frac{2\pi}{m_v^2 \Phi_0} [\mathbf{H}(\mathbf{r})]_z$ vs. $m_v \rho$ e em (b) temos $\frac{e}{m_v} [\phi(\mathbf{r})]$ vs. $m_v \rho$.	32
B.1	Se $f_0 \sim f_1$ e $f_1 \sim f_2$ então $f_0 \sim f_2$.	57
B.2	Composição de duas trajetórias $(f_0 \bullet f_1)(x) = f_2(x)$.	58
B.3	Equivalência homotópica de diferentes números winding. (a) Para o número zero $\{e\} \equiv \{0\}$. (b) Para $\{1\}$ a curva com linha cheia e $\{-2\}$ com linha pontilhada.	59
B.4	Duas trajetórias C_1 e C_2 de a a b .	60
B.5	Exemplo de uma trajetória para um sistema que é múltiplemente conexo.	61

Introdução

Os objetos chamados vórtices foram estudados inicialmente no contexto da dinâmica de fluidos. Neste cenário, um fluido pode possuir rotação ou circulação em torno de um eixo, ao qual se relaciona uma quantidade chamada vorticidade, definida como a circulação por unidade de área num ponto do fluxo. Os giros podem ter forma de círculos ou espirais cujas trajetórias descritas pelas correntes são *linhas fechadas*, este fenômeno é denominado **vórtice**. Estas linhas fechadas que costumamos chama-las de solenóide se estendem ao longo de um eixo, e por este fato se diz que o solenóide é axialmente simétrico. Existem diferentes problemas em física onde os vórtices aparecem, por exemplo em áreas como a matéria condensada, a cosmologia e as partículas elementares, e destas em casos mais específicos como supercondutividade, hélio líquido, gases atômicos e confinamento de quarks. No entanto, só vamos tomar a idéia de vórtice para levá-la a contextos específicos, primeiro à supercondutividade e segundo à teoria de campos.

Formalmente existem soluções para um sistema de equações diferenciais parciais, que possuem características nas fronteiras, que chamaremos continuamente “limites assintóticos”, onde se preservam leis de conservação topológicas sujeitas a um grupo topológico conhecido como grupo não-trivial de homotopias. Estas soluções, que são soluções homotopicamente diferentes e estáveis, recebem o nome de sólitons. Físicamente é necessário que a energia seja finita ou que ação seja mínima, as condições de fronteira e os sólitons permitem que isto seja possível. Estas soluções tem sido estudadas amplamente em matemática e em física, e foram classificadas segundo número de dimensões espaciais. Em física, particularmente, os sólitons são de carácter clássico e portanto aparecem em teorias clássicas, mas podem ser encontrados em teorias que são de âmbito quântico; este fato os localiza nas teorias semi-clássicas. Os vórtices são soluções estáveis com leis de conservação topológicas bem definidas que conduzem à quantização do fluxo e da vorticidade. As equações de movimento, essencialmente equações diferenciais, possuem essas soluções típicas axialmente simétricas (e aproximadas) de uma teoria que contém vórtices.

Neste trabalho se pretende desenvolver a dinâmica dos vórtices nos supercondutores e na teoria de campos, sem entrar em muitos detalhes formais de sua formulação. Vamos deduzir algumas de suas propriedades a partir de sua Lagrangiana e de suas equações de movimento, sendo estas últimas a principal ferramenta de trabalho. Nosso esforço principal é resolver aquelas equações de movimento (dependendo do modelo que for usado) para obter soluções as quais chamamos *soluções tipo vórtice*.

Vamos tratar dois tipos de teorias, teorias que apresentam quebra espontânea de simetria via mecanismo de Higgs e teorias que tem quebra dinâmica de simetria. O objetivo primordial, é mostrar que uma teoria que não contém campos escalares tipo Higgs que favorecem a quebra dinâmica, também apresenta vórtices.

No capítulo 1, vamos estudar superficialmente os sólitons, mas ressaltaremos as características mais importantes que devem ter as soluções tipo vórtice. Neste capítulo é importante concentrarmos na análise da Lagrangiana e da minimização da ação que nos conduz às condições de fronteira. No capítulo 2, vamos estudar o fenômeno da supercondutividade em substâncias que possuam estado misto, isto é, onde co-existem simultaneamente em duas fases, supercondutora e normal. As substâncias mistas permitem que campos magnéticos externos penetrem parcialmente nos lugares onde há estado normal. Neste caso, o vórtice surge nesta região onde o condensado (a fase supercondutora) é esvaziada formando tubos microscópicos. Este capítulo está convenientemente escrito para entender o que acontece com uma teoria que apresenta quebra espontânea de simetria e, dado que a supercondutividade é um fenômeno fisicamente rico e notavelmente intuitivo, proporciona as idéias fundamentais para abordar a formulação de vórtices na teoria de campos. No capítulo 3, vamos explorar a extensão feita para a teoria de campos, começando por uma teoria de gauge Abelian e depois tomando o caso mais geral numa teoria de gauge não-Abeliana. As duas formulações, tanto a Abelian quanto a não-Abeliana incluem campos de gauge e de Higgs que favorecem a quebra espontânea; analogamente à supercondutividade as duas apresentam soluções tipo vórtice. Mostraremos explicitamente como a versão da teoria de campos se comporta de maneira muito semelhante à teoria para a supercondutividade. O objetivo principal de nosso trabalho encontra-se no capítulo 4, onde discutiremos se é possível ou não soluções tipo vórtice numa formulação de teoria de campos sem campos de Higgs fundamentais com quebra dinâmica de simetria, e por último as conclusões.

Capítulo 1

Considerações preliminares

Este capítulo tem como finalidade apresentar alguns conceitos gerais da teoria de campos, sem entrar em detalhes e fazer uma introdução à teoria de sólitons. Mediante o argumento da finitude da energia por unidade de comprimento obteremos os limites assintóticos de uma teoria qualquer que apresente quebra espontânea de simetria e que garanta soluções tipo vórtice.

1.1 Alguns fundamentos das teorias de gauge

Inicialmente vamos definir a notação empregada ao longo do texto. Os quadri-vetores covariantes e contravariantes vão escrever-se com índices gregos que referem-se à coordenadas de espaço-tempo. Índices latinos para as coordenadas espaciais (na falta de negrito). Como é usual também adotaremos a convenção de índices repetidos. Além disto, empregaremos unidades naturais $c = \hbar = 1$ e uma assinatura da métrica $diag(+, -, -, -)$ (sempre diagonal).

Neste texto, também, utilizaremos a formulação de sistemas contínuos (campos), como este é um assunto bem conhecido não vamos entrar em maiores detalhes sobre sua formulação. Estabelecemos a **ação** para um sistema físico como

$$S = \int d^D x dt \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r) \quad (1.1)$$

onde D é o número de coordenadas de espaciais. O sistema possui uma **densidade Lagrangiana** $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r)$ e através da minimização da ação, $\delta S = 0$, podemos obter as equações de movimento do sistema, ou **equação de Euler-Lagrange**

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0 \quad (1.2)$$

onde ϕ_r representa o campo ou campos que são função de D coordenadas espaciais \mathbf{x} e uma coordenada de tempo t , $\phi_r(\mathbf{x}, t)$.

O tensor de momento-energia provém do teorema de Noether, que relaciona a simetria de translação com uma quantidade conservada (o quadri-momento). Podemos

escreve-lo na sua forma típica:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} \partial^\nu \phi_r - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (1.3)$$

Além disto, existe uma outra quantidade chamada **densidade Hamiltoniana** que é obtida mediante uma transformação de Legendre

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} \partial^0 \phi_r - \mathcal{L}, \quad (1.4)$$

onde $\partial^0 \phi_r$ é a derivada temporal no campo. \mathcal{H} está relacionada diretamente com a Hamiltoniana que nos dá a energia total do sistema. Comparando com a eq. (1.3) a componente $\Theta^{00} = \mathcal{H}$. Ao ser integrada \mathcal{H} no espaço D -dimensional, obtemos a energia total do sistema.

Em geral os campos ϕ_r tem simetrias associadas. As simetrias (objetos) obedecem a um conjunto de regras as quais pertencem a um **grupo** G . Um grupo é um conceito abstrato onde os objetos tem associada uma operação \star (regras) para cada par ordenado. Se diz que os objetos tem estrutura de grupo se e somente se satisfazem as seguintes condições:

1. $\forall f, g \in G$, então $h = f \star g \in G$.
2. $\forall f, g, h \in G$, $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$.
3. Existe um elemento identidade e tal que $f \in G$, $e \star f = f \star e = f$.
4. Cada elemento $f \in G$ tem uma inversa $f^{-1} \in G$, tal que $f \star f^{-1} = f^{-1} \star f = e$.

Quando especificamos o conjunto de objetos de um conceito abstrato como o grupo, chamamos de **representação do grupo**. Os grupos que são uma deformação da unidade são conhecidos como *grupos de Lie*.

Vamos supor um conjunto $\{\phi_i\}$ de N campos, onde cada ϕ_r é uma representação de um grupo chamado **grupo de gauge**. Os $\{\phi_i\}$ se transformam com o elemento do grupo S na **representação fundamental**, tal que

$$\phi_i(x) \rightarrow S_{ij} \phi_j(x), \quad (1.5)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, N$. A transformação é feita fixa num ponto x . Portanto S é uma matriz unitária $N \times N$. Consideremos que S pode ser escrita como:

$$S(\alpha) = e^{-i\alpha_a \tau_a}. \quad (1.6)$$

com $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$, onde $N^2 - 1$ é o número de geradores do grupo correspondente a dimensão do grupo de gauge. $\alpha_a(x)$ são os parâmetros da **transformação de gauge local**, se diz local porque depende dos pontos de espaço-tempo x , em caso contrário se diz que a transformação é uma **transformação de gauge global**. Os geradores de grupo formam um álgebra de Lie:

$$[\tau_a, \tau_b] = i c_{abc} \tau_c, \quad (1.7)$$

onde os c_{abc} são as constantes de estrutura do grupo. Os geradores são matrizes hermitianas sem traço e normalizadas da forma

$$\text{Tr} [\tau_a] = 0, \quad \text{Tr} [\tau_a \tau_b] = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (1.8)$$

Podemos notar que se $c_{abc} = 0$ temos campos do grupo $U(1)$ o qual pode ser relacionado, por exemplo, com a interação eletromagnética; se $c_{abc} = \epsilon_{ijk}$ temos os campos do grupo $SU(2)$ de uma **Teoria Yang-Mills (TYM)** para os isospins; se $c_{abc} = f_{abc}$ temos os campos do grupo $SU(3)$ relacionados com os glúons da interação forte. Quando a constante de estrutura é zero então se diz que o grupo é **Abeliano**, em um outro caso se diz que o grupo é **não-Abeliano**.

Introduzimos um campo de gauge na **representação adjunta** $B_\mu \equiv B_{a\mu} \tau_a$, o qual se acopla com o campo ϕ_r mediante a derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig B_\mu = \partial_\mu + ig B_{a\mu} \tau_a \quad (1.9)$$

onde g é a constante de acoplamento. A derivada covariante atua como um operador matricial $[D_\mu]_{ij}$. Definida a derivada covariante, podemos obter o tensor de campo $B_{\mu\nu}$ mediante a relação de comutação

$$[D_\mu, D_\nu] = ig (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig [B_\mu, B_\nu]) = ig B_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

onde $B_{\mu\nu} \equiv B_a^{\mu\nu} \tau_a$. Em notação de índices

$$B_a^{\mu\nu} = \partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu - g c_{abc} B_b^\mu B_c^\nu \quad (1.11)$$

O tensor de campo $B_{\mu\nu}$ é covariante

$$B_{\mu\nu} \rightarrow e^{-i\alpha_a(x)\tau_a} B_{\mu\nu} e^{i\alpha_a(x)\tau_a} = S B_{\mu\nu} S^{-1}. \quad (1.12)$$

E o campo de gauge, se transforma como:

$$B_\mu \rightarrow S B_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1}. \quad (1.13)$$

1.2 Soluções estáveis de energia finita

A partir das equações de Euler-Lagrange, eq. (1.2), estabelecemos um sistema que possui uma equação de movimento ou um sistema de equações de movimento, em forma de equações diferenciais, obtidas a partir de alguma densidade Lagrangiana da teoria clássica de campos [1]. O sistema tem uma energia

$$E(\mathbf{x}, t) = \int d^D x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \int d^D x \Theta^{00}$$

e D é o número arbitrário de dimensões espaciais. A densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$ envolve os campos clássicos $\phi_r(\mathbf{x}, t)$, e quando $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = 0$ para todo \mathbf{x} , vamos chamar ao valor ϕ_{vac} vácuo da teoria, o qual não é necessariamente único [2]. Quais soluções $\phi_r(\mathbf{x}, t)$ para nossas equações de movimento diferentes do vácuo podem ser consideradas *sólitons*? Para que seja uma solução tipo *sóliton*, devem ser satisfeitas as seguintes propriedades [1]:

(i) A energia das soluções procuradas deve ser finita e positiva:

$$0 < E(\mathbf{x}, t) = \int d^D x \Theta^{00}(\mathbf{x}, t) < \infty \quad (1.14)$$

(ii) Para todo \mathbf{x} e t , $\Theta^{00}(\mathbf{x}, t)$ é não singular e pode ser localizada para todo t . Entendemos por localizada, uma região limitada do espaço definida por $\Theta^{00}(\mathbf{x}, t) \geq \delta$, onde δ é um número arbitrário

$$0 < \delta < \max_{\mathbf{x}} \Theta^{00}(\mathbf{x}, t). \quad (1.15)$$

Uma vantagem de ter uma solução que é localizada para todo tempo t definida em uma região limitada é que pode ser escolhida independente do tempo.

(iii) $\phi_r(\mathbf{x}, t)$ é não singular.

(iv) A solução é não-dissipativa, se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{x}} \Theta^{00}(\mathbf{x}, t) \neq 0. \quad (1.16)$$

(v) Uma consideração extra é que a solução estática (que independe do tempo) seja classicamente estável ou um mínimo local de energia, isto é, para um campo ϕ_r sob uma flutuação infinitesimal $\delta\phi_r$ a solução continua sendo uma solução estática

$$E_{\phi_r + \delta\phi_r} \geq E_{\phi_r}. \quad (1.17)$$

A expressão anterior vira a igualdade ($E_{\phi_r + \delta\phi_r} = E_{\phi_r}$) quando temos modos zero associados a alguma simetria do sóliton os quais são excluídos.

No entanto, precisamos conhecer quais densidades Lagrangianas \mathcal{L} da teoria clássica de campos, geram equações de movimento para campos que possuam soluções estáticas de energia finita, excluindo o vácuo. Procuramos soluções que sejam estáticas cujas energias dependam da dimensionalidade espacial do sistema. Formulamos dois teoremas que sugerirão como relacionar a dimensionalidade com possíveis soluções: o *teorema de Derrick* e uma extensão do dito teorema para os campos de gauge. O número de dimensões (D) onde existem soluções estáveis de energia finita permite-nos classificar os sólitons estáticos

D	Sóliton
1	Kink
2	Vórtice
3	Monopolo
4	Instanton

É de nosso interesse estudar o caso $D = 2$ ou soluções do tipo vórtice.

1.2.1 Teorema de Derrick

Primeiro vamos estudar uma teoria de campos escalares clássicos para D -dimensões espaciais. Que tipo de soluções esperamos desta classe de teoria? E que tipo de soluções seriam estáveis? O teorema de Derrick foi proposto para resolver estas perguntas em uma teoria de campos escalares e é enunciado da seguinte maneira:

Teorema: *Só haverá soluções independentes do tempo de energia finita para $D = 1$ em uma teoria de campo escalar em D dimensões espaciais, descrita pela densidade Lagrangiana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (1.18)$$

onde o potencial é não negativo, $V(\phi) > 0$ e $V(\phi) = 0$ para o vácuo da teoria [3].

Prova: Analisaremos a energia total para a solução proposta independente do tempo $\phi_s(\mathbf{x})$. Decompondo a densidade Hamiltoniana em dois termos que integrados fornecerão a energia da configuração de campo,

$$E = \frac{1}{2} \int d^D x (\nabla \phi_s)^2 + \int d^D x V(\phi_s) = U_1 + U_2 \quad (1.19)$$

assumiremos que os dois termos sejam estritamente positivos, e que para uma dada solução ϕ_s temos valores definidos para U_1 e U_2 . Nosso interesse é analisar para qual número de dimensões espaciais D temos uma energia estável e finita. Para isto faremos uma mudança de escala, ou seja $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ (onde λ é uma constante real)*. Ao fazer a mudança mostramos que a nossa energia total será,

$$E(\lambda) = \frac{1}{2} \int d^D x \lambda^{-D} (\lambda \nabla \phi_s)^2 + \int d^D x \lambda^{-D} V(\phi_s) = \lambda^{(2-D)} U_1 + \lambda^{-D} U_2 \quad (1.20)$$

U_1 e U_2 possuem os mesmo valores da Eq.(1.19). Originalmente (sem mudança de escala) a energia possui um valor constante e positivo, com a mudança de escala estamos lidando com um caso mais geral, para recuperarmos o caso original basta fazer $\lambda = 1$. Requeremos a condição de minimização da energia E em particular para o caso $\lambda = 1$:

$$\left(\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=1} = (2 - D)U_1 - D U_2 = 0 \quad (1.21)$$

levando em conta que U_1 e U_2 são estritamente positivos e descartando a solução trivial $U_1 = U_2 = 0$, a equação terá solução apenas se $D = 1$. Também podemos ter $D = 2$, desde que U_2 seja nulo, mas da eq. (1.19) percebemos que a solução onde $U_2 = 0$ será o vácuo de nossa teoria e esta solução não nos interessa. Procuramos soluções diferentes do vácuo, comumente nos referimos ao vácuo como uma solução trivial do problema ■.

1.2.2 Teorema para os campos de gauge

Vamos usar uma variação do teorema de Derrick para campos de gauge, demonstrado por Coleman em [2]. Observaremos o comportamento das soluções para ditos

*Vemos que se $x' = \lambda x$ o Jacobiano é $J(x, x') = \lambda^{-D}$ para $d^D x = J(x, x') dx'$ e a derivada $d/dx = \lambda d/dx'$.

campos usando a densidade Lagrangiana para um campo de gauge em D -dimensões espaciais. O teorema em questão aplica-se para TYM ou em geral para teorias não-abelianas que não possuem interações (livres), e se enuncia:

Teorema: *Para a densidade Lagrangiana de um campo de gauge não-abeliano livre, em D dimensões espaciais, as únicas soluções de campo de energia finita e independentes do tempo são campos gauge $B_\mu^a = 0$, para $D \neq 4$.*

Prova: Consideremos as componentes do campo de gauge não-Abeliano livre cuja densidade Lagrangiana padrão é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^a B^{a\mu\nu}, \quad (1.22)$$

onde temos o tensor de campo de gauge $B_{\mu\nu}^a$ na eq. (1.11). Procuramos soluções estáticas de energia finita, portanto para os tensores de campo:

$$\begin{aligned} B_{0i}^a &= \partial_0 B_i^a - \partial_i B_0^a - g c_{abc} B_0^b B_i^c = -\partial_i B_0^a - g c_{abc} B_0^b B_i^c \\ B_{ij}^a &= \partial_i B_j^a - \partial_j B_i^a - g c_{abc} B_i^b B_j^c \end{aligned}$$

vamos supor duas quantidades da forma

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \int d^D x (B_{0i}^a)^2 = \frac{1}{2} \int d^D x \left(\partial_i B_0^a - g c_{abc} B_0^b B_i^c \right)^2 \\ L_2 &= \frac{1}{4} \int d^D x (B_{ij}^a)^2 = \frac{1}{4} \int d^D x \left(\partial_i B_j^a - \partial_j B_i^a - g c_{abc} B_i^b B_j^c \right)^2 \end{aligned}$$

A diferença do teorema de Derrick é que não tomaremos a energia total como $L = L_1 + L_2$, vamos tomar uma quantidade que nos garanta que as duas soluções sejam independentes do tempo

$$L = L_1 - L_2. \quad (1.23)$$

Re-escalamos o potenciais de campo e as coordenadas mediante dois parâmetros reais

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\rightarrow \lambda \mathbf{x}, \\ B_0^a(\mathbf{x}) &\rightarrow B_0^a(\mathbf{x}; \sigma, \lambda) = \sigma \lambda B_0^a(\mathbf{x}), \\ B_i^a(\mathbf{x}) &\rightarrow B_i^a(\mathbf{x}; \lambda) = \lambda B_i^a(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Dessa maneira L agora depende dos parâmetros σ e λ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^D x \lambda^{-D} \left(\lambda \partial_i (\sigma \lambda B_0^a) - g \sigma \lambda^2 c_{abc} B_0^b B_i^c \right)^2 &= \lambda^{-D+4} \sigma^2 L_1, \\ \frac{1}{4} \int d^D x \lambda^{-D} \left(\lambda \partial_i (\lambda B_j^a) - \lambda \partial_j (\lambda B_i^a) - g \sigma \lambda^2 c_{abc} B_i^b B_j^c \right)^2 &= \lambda^{-D+4} L_2. \end{aligned}$$

Portanto

$$L(\sigma, \lambda) = \lambda^{-D+4} \sigma^2 L_1 - \lambda^{-D+4} L_2 \quad (1.24)$$

Fazendo $\sigma = \lambda = 1$ a função L retorna à eq. (1.23). Pelo principio de Hamilton L deve ser estacionária com relação a variações independentes do tempo, então sabemos que

$$\left(\frac{dL(\sigma, \lambda)}{d\lambda} \right)_{\sigma=\lambda=1} = (D-4)(L_1 - L_2) = 0$$

Para que a relação seja satisfeita temos que fazer as seguintes considerações: Se $D \neq 4$, então

$$L_1 = L_2 = 0. \quad (1.25)$$

Portanto $B_{0i}^a = B_{ij}^a = 0$ são zero e os campos de gauge vão ser nulos também, $B_\mu^a = 0$. Para $D = 4$ as L_1 e L_2 não necessariamente são iguais a zero. De maneira similar ao teorema de Derrick, devemos procurar soluções estáveis para a Lagrangiana eq. (1.22) para $D = 4$ ■.

1.3 Condições para que a energia seja finita

Vamos nos referir a soluções que têm *estabilidade topológica* a aquelas configurações de sólitons que satisfazem as condições de energia finita. É de nosso interesse estudar grupos de Lie e classifica-los topologicamente e estabelecer se admitem soluções topologicamente estáveis tipo vórtice [6]. Os grupos que estudaremos, são particularmente o grupo $U(1)$, e as modificações especiais dos grupos $SU(2)$ e $SU(3)$ como grupos quocientes. Primeiro consideraremos um caso geral como o grupo de Lie especial unitário de matriz $N \times N$, com $(N^2 - 1)$ -geradores de grupo (τ_a) que satisfazem a álgebra (1.7)[†], isto é um grupo genérico $G = SU(N)$.

Consideremos uma teoria onde existe um campo $\phi(x)$ que se transforma sob uma representação fundamental S de G , da forma

$$\phi(x) \rightarrow S(x) \phi(x) \equiv \exp(-i\tau_a \alpha_a(x)) \phi(x) \quad (1.26)$$

onde α_a são os parâmetros da transformação. Podemos contruir uma Lagrangeana da forma

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} B_{\alpha\mu\nu} B_\alpha^{\mu\nu} + |D_\mu \phi(x)|^2 - V(\phi), \quad (1.27)$$

onde ϕ é um vetor de N -componentes, tal que

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_k(x) \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

os $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) são os campos de Higgs e k é o número necessário de campos de Higgs para ter uma solução tipo vórtice bem definida para campos que são contínuos. $B_{\mu\nu}^a$ é o tensor de campo definido na eq. (1.11). $V(\phi)$ é um potencial para uma teoria com quebra espontânea de simetria e terá a forma típica $V(\phi) = -c_2 \phi^2 + c_4 \phi^{4\ddagger}$, o qual será estudado em detalhe para cada grupo de gauge em particular.

A energia deve ser finita pela condição (1.14), neste caso a energia por unidade de comprimento [7]. Primeiro vemos que os estados de vácuo têm valores constantes

[†]Para o grupo $SU(N)$ de matrizes unitárias de determinante 1, temos $(N^2 - 1)$ -geradores de grupo, enquanto o grupo $SO(N)$ possui $N(N - 1)/2$ -geradores de grupo. Estamos interessados nos grupos especiais unitários.

[‡]Com $c_2 > 0$ e $c_4 > 0$ para garantir a quebra de simetria.

diferentes de zero, $\phi_i^0 \neq 0$, e estende-se ao infinito agindo como um campo de fundo. Portanto esta será uma Lagrangiana típica com quebra espontânea de simetria. Os estados ϕ_i^0 se obtêm da minimização do potencial da Lagrangiana (1.27) (os detalhes vão ser estudados mediante um exemplo importante no capítulo de vórtices em supercondutores). Os vácuos devem ser invariantes sob translações, classicamente, argumento imposto pelas propriedades ϕ_i^0 e $B_a^\mu = 0$. As condições de fronteira são determinadas pelas seguintes condições na energia por unidade de comprimento

$$E \propto \int_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} d^2x \left(-\frac{1}{4} B_{a\mu\nu} B_a^{\mu\nu}\right) \rightarrow 0, \quad (1.29)$$

$$E \propto \int_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} d^2x V(\phi) \rightarrow 0, \quad (1.30)$$

$$E \propto \int_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} d^2x (D_\mu \phi_i)^* (D^\mu \phi_i) \rightarrow 0. \quad (1.31)$$

A componente cinética do campo ϕ é zero assintoticamente para distâncias afastadas do centro (o núcleo) do vórtice escolhido convenientemente em $\mathbf{x} = (0, 0)$, de tal forma que o vórtice se distribui ao longo de uma direção (neste caso z). Esta escolha em particular das coordenadas recebe o nome de *simetria axial* e os vórtices apresentam esta simetria.

A condição (1.31) permite-nos estabelecer que o potencial de gauge B_μ e o campo de Higgs anulam-se assintoticamente

$$D_\mu \phi_i \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1.32)$$

Para vórtices estáticos, como o modelo mais simples (as derivadas temporais são zero), a simetria axial é favorável para simplificar o problema de três a duas dimensões. É possível estabelecer também uma coordenada azimutal que aparece como um ângulo (φ) e uma coordenada que vai do centro do vórtice até o infinito (ρ). Então a condição (1.32) impõe o gradiente

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} [\mathbf{B}(\mathbf{r})]_\varphi = -\frac{i}{e\rho} \frac{1}{\phi_i} \frac{d\phi_i}{d\varphi} = -\frac{i}{e\rho} \frac{d}{d\varphi} \ln \phi_i(\infty, \varphi). \quad (1.33)$$

Então seja uma trajetória l no espaço-tempo de um ponto inicial $x_0(s)$ até um ponto final $x_1(s)$ para a condição (1.32), escolhendo um parâmetro $0 \leq s \leq 1$ ao longo da trajetória, assim

$$\frac{d\phi_i}{ds} = -ie \frac{dx^\mu}{ds} B_\mu \phi_i, \quad (1.34)$$

a qual tem uma estrutura similar à fórmula de Dyson para a evolução temporal,

$$\phi_i(x_1) = T \exp \left(-ie \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} B_\mu \right) \phi_i(x_0) = T \exp \left(-ie \int_{x_1}^{x_0} dx^\mu B_\mu \right) \phi_i(x_0). \quad (1.35)$$

T é o operador de ordenamento das matrizes B_μ . Vemos que emerge um fator de fase não-integrável, similar à equação (B.10) apresentada no apêndice **B**.

Vamos discutir um caso simples. Seja G o grupo $U(1)$ isomorfo ao grupo $SO(2)$ [§]. Este grupo de gauge possui um campo escalar carregado e a Lagrangiana dada pela

[§]Suas álgebras são localmente iguais.

eq. (1.27), para um caso Abelian que apresenta uma quebra espontânea de simetria. O vácuo $\phi^0 = cte$, será deformado como na eq. (1.35) na forma,

$$\phi(\varphi) = e^{-i\chi(\varphi)}\phi^0 \equiv (\phi_1, \phi_2) = (\phi^0 \cos \chi, \phi^0 \sin \chi), \quad (1.36)$$

onde $\chi(\varphi)$ é uma fase real. Assim obtemos seguinte equação:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = (\phi^0)^2, \quad \rho \rightarrow \infty$$

a qual tem a forma da equação para um círculo, S^1 . Este círculo está definido na infinidade, para um tempo fixo é possível fazer um mapeamento $f : S^1 \mapsto S^1$. A variável φ corresponde a um loop fechado de 0 a 2π . Mostrando assim que $\Pi_1(U(1)) = \Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (ver apêndice **B**). Neste exemplo podemos ver também que se $\chi = m\varphi$, para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, n é o número winding. Além disso, o vácuo é dito trivial porque se $\phi = (\phi^0, 0)$ todo mapa $f : S^1 \mapsto S^1$ cai no mesmo ponto $\phi = (\phi^0, 0)$ (winding zero). O potencial de gauge Abelian $B_{\mu a} \tau_a \equiv A_\mu$ no limite assintótico (1.33) será

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} [\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi = -\frac{1}{e\rho} \frac{d\chi(\varphi)}{d\varphi} \rightarrow \lim_{\rho \rightarrow \infty} A(\rho) = -\frac{1}{e} \frac{d\chi}{d\varphi}. \quad (1.37)$$

A expressão (1.37), vai ser usada como condição de fronteira para resolver as equações de movimento.

Capítulo 2

Vórtices em Supercondutores

O estudo da supercondutividade é conveniente como um passo prévio da teoria de campos. Como chegamos a essa conclusão? Se analisamos a Lagrangiana formulada tanto para a supercondutividade quanto para o campo escalar (de Higgs), o potencial $V(\phi)$ é da forma $-c_2\phi^2 + c_4\phi^4$ (favorecendo a quebra de simetria). Mostraremos de maneira intuitiva como emergem os vórtices. Também, usaremos uma formulação da teoria, com sua dinâmica e ansätze tipo vórtice “independentes do tempo”, isto é, que só vamos estudar vórtices que sejam *estáticos* e em ausência de campos elétricos. Neste capítulo expomos o fenômeno da supercondutividade e depois mostraremos como a teoria pode ser formulada em função dos parâmetros que podem ser verificados fenomenologicamente.

2.1 Sobre a supercondutividade

2.1.1 Descrição do fenômeno

O estudo experimental da liquefação de gases para obtenção de baixas temperaturas ou temperaturas próximas ao zero absoluto (0K) levaram ao descobrimento da supercondutividade. Em 1911 Heike Kamerlingh Onnes alcança temperatura de 1.82K na liquefação do Helio (He) e depois conseguiu observar os efeitos da resistividade quando metais com alta pureza eram levados até estas temperaturas [8, 9]. Um metal como o Mercurio (Hg) o qual tem um bom grau de pureza, apresentava resistência elétrica linear ao abaixar a temperatura, mas quando ultrapassava a denominada temperatura crítica T_c a sua resistência diminuía drasticamente até zero, ou seja não apresentava resistência elétrica (ver Fig. 2.1). Assim, as substâncias que mostravam essa característica receberam o nome de supercondutores. Ao descer a temperatura encontramos que existe uma T_c diferente para cada material e conseqüentemente uma maneira de caracterizá-lo.

A mudança na resistência elétrica corresponde a uma transição de fase, isto é, de uma fase normal até uma nova fase chamada fase supercondutora. Se denomina

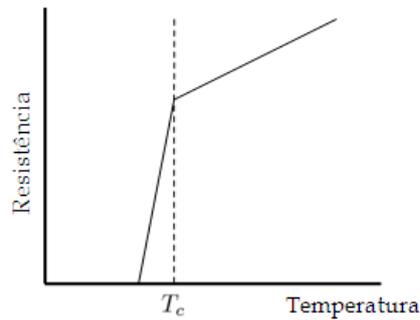


Figura 2.1: Resistência em função da temperatura para um material supercondutor.

transição de fase à mudança na forma em que se apresenta a substância sem alterar seus componentes, onde cada fase encontra-se num estado de equilíbrio em particular. A transição ao estado supercondutor é termodinamicamente reversível, já que se a temperatura começar a aumentar novamente depois de passar a T_c voltamos a obter o estado normal. A T_c serve para fazer a caracterização dos supercondutores é comum separa-los de acordo com esta. Existem dois tipos de supercondutores os do **tipo I (SCI)** ou **convencionais** e os do **tipo II (SCII)** ou **supercondutores de alta temperatura crítica**, onde os SCII tem T_c acima de 23K.

As transições de fase se encontram associadas com a ideia de simetria, assim um sistema muito desordenado tem uma alta simetria. No caso de supercondutores a transição de fase aparece devido a mudança de temperatura; então quanto menor seja a temperatura o sistema estará menos desordenado. Quando um material muda para o estado supercondutor acontece um ordenamento e portanto se altera ou é quebrada alguma simetria [10].

Quando se alcança a temperatura T_c , os elétrons, assumindo que são os responsáveis pelo fenômeno supercondutor, se apresentam mais ordenados em um novo estado da matéria (a supercondutividade). Os elétrons não se comportam de um modo convencional quando estão na fase supercondutora. Primeiramente os elétrons mais externos, atuam livremente como num gás conhecido como gás de Fermi. Além disto, fazemos a aproximação de Bohr-Oppenheimer, onde os núcleos estão fixos ou movem-se muito devagar com respeito aos elétrons [11]. A configuração de núcleos e elétrons dispõe-se numa rede que se agita devido às vibrações. Quando os elétrons se deslocam aleatoriamente por todo o volume do material, então se diz que os elétrons estão na fase normal. Porém, quando a temperatura desce até a temperatura T_c as vibrações na rede começam a diminuir e os elétrons chegam a um ordenamento que quebra a simetria alcançando o estado supercondutor. Esta manifestação coletiva permite evadir imperfeições na rede o que gera os efeitos de resistência nula.

Uma das características mais importantes dos supercondutores é que são suscetíveis aos efeitos dos campos magnéticos. No ano 1933, Meissner and Ochsenfeld descobriam o efeito Meissner ou diamagnetismo perfeito, este consiste na observação que ao levar o material ao estado supercondutor o valor do campo magnético é nulo

dentro do mesmo. Este efeito ocorre quando um campo magnético *externo* é aplicado e produz correntes na superfície do material que geram um campo magnético que repele o outro [12]. Existe então um certo campo magnético crítico H_c que destrói a supercondutividade no material sem importar que esteja debaixo da sua temperatura crítica. Para uma temperatura T temos um campo magnético crítico que quebra o estado superconductor, e é representado num diagrama de fase $H - T$ como mostrado na Fig. 2.2.

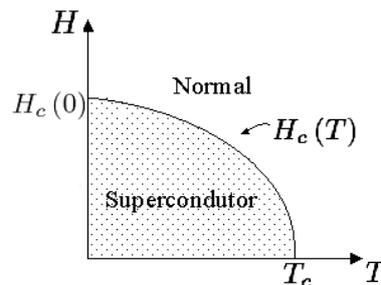


Figura 2.2: Diagrama de fase do campo magnético H em função da temperatura T . A dependência do campo magnético com a temperatura é uma relação empírica aproximadamente quadrática $H(T)/H(0) = 1 - (T/T_c)^2$.

A energia por unidade de volume armazenada no campo magnético H_c é equivalente a energia por unidade de volume necessária para passar da fase normal à fase supercondutora. A energia do campo crítico pode se relacionar com a diferença das energias livres de Helmholtz [13] (a qual não depende do processo, senão dos estados inicial e final do sistema)

$$f_n(T) - f_s(T) = \frac{1}{2} \int d^3r H_c^2, \quad (2.1)$$

onde f_n e f_s são energias livres por unidade de volume, no estado normal e no estado superconductor, respectivamente.

Os SCI são os que apresentam o efeito Meissner onde as linhas de campo magnético externo não penetram dentro do material. Por outro lado, os SCII tem uma característica especial, e são o objetivo deste trabalho, eles apresentam um *estado misto*. O estado misto consiste num estado onde as fases supercondutora e normal coexistem simultaneamente onde as linhas de campo magnético externas penetram parcialmente nos lugares onde há estado normal. Estas linhas microscópicas de fluxo na forma de tubos dentro da substância se denominam vórtices. Neste estado temos dois campos magnéticos críticos H_{c1} e H_{c2} e os vórtices apresentam-se para $H_{c1} < H < H_{c2}$ [14]. O novo diagrama de fase $H - T$ se vê na Fig. 2.3.

2.1.2 As equações de London e a teoria BCS

Um modelo que possa descrever os fenômenos da supercondutividade, como a queda da temperatura e o efeito Meissner, deve ser compatível com as equações de Maxwell.

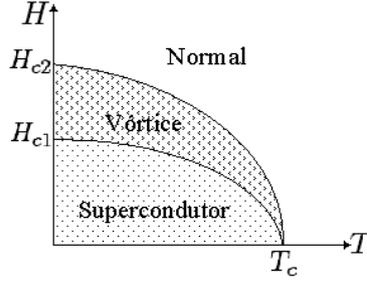


Figura 2.3: Diagrama de fase $H - T$ para um supercondutor tipo II, onde H_{c1} e H_{c2} são os campos magnéticos críticos e as fronteiras onde se apresentam os vórtices.

O trabalho dos irmãos F. e H. London foi propor um modelo com duas equações para os campos elétricos e magnéticos microscópicos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \mathbf{j}_s) = \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times (\Lambda \mathbf{j}_s) = -\mathbf{h}, \quad (2.3)$$

com Λ como um parâmetro fenomenológico a determinar que caracteriza o material supercondutor. O modelo de London, o qual é “mesoscópico”, é um modelo de dois fluidos, porque temos dois tipos de elétrons os normais e os supercondutores, de fato considera-se que nem todos os elétrons de condução são elétrons da fase supercondutora. A densidade total de elétrons é a soma das *densidades eletrônicas normal e supercondutora*,

$$\rho = \rho_s + \rho_n. \quad (2.4)$$

O modelo de dois fluidos permite estabelecer a idéia de densidade de corrente j , mediante o fluxo de elétrons. j é a soma da corrente normal e da supercorrente, associadas aos elétrons normais e supercondutores, respectivamente $j = j_n + j_s$. Definimos a supercorrente j_s como

$$j_s = e\rho_s v_s, \quad (2.5)$$

onde e é a carga e v_s a velocidade dos elétrons supercondutores. Usando a equação de movimento de uma partícula carregada submetida a um campo elétrico $m \frac{dv_s}{dt} = eE$, onde m é a massa da partícula. Empregando a derivada temporal para a expressão (2.5) e igualando com a equação de movimento, obtemos facilmente

$$\frac{m}{e^2 \rho_s} \frac{\partial j_s}{\partial t} = E.$$

A qual é idêntica à equação (2.2). Desta maneira determinamos a forma do parâmetro Λ :

$$\Lambda = \frac{m}{e^2 \rho_s}. \quad (2.6)$$

Substituímos na eq. (2.3) a equação de Maxwell, $\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j}$, e usando identidades vetoriais obtemos uma equação diferencial

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \nabla \cdot \mathbf{h} - \frac{1}{\Lambda} \mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h} - \frac{1}{\Lambda} \mathbf{h} = 0. \quad (2.7)$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$. Esta equação diferencial tem uma solução que vai desde a fronteira do material ao interior do supercondutor,

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_0 e^{-r/\sqrt{\Lambda}}. \quad (2.8)$$

Portanto podemos relacionar Λ diretamente com um comprimento de onda λ_L^2 para $\mathbf{h}(\mathbf{r})$. Tal que

$$\lambda_L = \sqrt{\Lambda} = \sqrt{\frac{m}{e^2 \rho_s}} \quad (2.9)$$

é definido como o *comprimento de onda de London*, o qual mede a penetração do campo magnético no interior do material.

Apesar da importância do modelo de London, o qual prediz algumas características da eletrodinâmica dos materiais supercondutores, ele não esclarece satisfatoriamente os estados normal e supercondutor co-existindo nos SCII.

Na teoria (quântica) sugerida por Bardeen, Cooper e Schrieffer (**BCS**) se propõe uma interação atrativa fraca entre um par de elétrons, chamados o *par de Cooper* [15]. Os pares de Cooper tem o mesmo momento e spins opostos, e se apresentam quando ocorre a quebra de simetria abaixo da T_c . Este estado de pares é um acoplamento que possui um estado de baixa energia. O acoplamento se estabelece mediante um mecanismo conhecido como interação elétron-fónon, onde as vibrações na rede são as que tornam factível tal mecanismo.

2.2 A introdução dos vórtices

2.2.1 Teoria de Ginzburg-Landau

A **teoria de Ginzburg-Landau (TGL)** é uma extensão do modelo de London e da dinâmica de dois fluidos. A TGL pode ser descrita em termos de duas quantidades, que são o campo magnético crítico H_c e o comprimento de onda λ_L , de fato é uma teoria com um só parâmetro porque H_c e λ_L estão relacionados [16]. O estado supercondutor é considerado agora como um *superfluido*, um estado caracterizado pela ausência de viscosidade e que ocorre a baixas temperaturas (próximas do zero absoluto), de maneira que flui sem fricção como se apresenta nos SCI e SCII.

As duas fases nos SCII, normal e supercondutora, podem ser descritas usando $\Psi(\mathbf{r})$, chamada *parâmetro de ordem*. $\Psi(\mathbf{r})$ é a análoga da função de onda para os pares de Cooper. Seu módulo é 1 quando o material é supercondutor e zero quando encontra-se no estado normal. Como foi feito para o modelo de London fazemos uma descrição em termos da quantidade que dê o número de elétrons que participam no superfluido, isto é, a *densidade de superfluididez*, a qual é dada por

$$\rho_s(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2. \quad (2.10)$$

Podemos começar pela densidade Lagrangiana de Schrödinger da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m} \nabla \Psi^* \nabla \Psi + i \dot{\Psi}^* \Psi + i \Psi \dot{\Psi}^* - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \alpha |\Psi|^2 - \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4.$$

Para introduzir os efeitos do campo magnético introduzimos o potencial vetorial do campo \mathbf{A} , usando o acoplamento minimal $\nabla \rightarrow \nabla - ie\mathbf{A}(\mathbf{r})$, portanto

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m} (\nabla + ie\mathbf{A}(\mathbf{r})) \Psi^*(\mathbf{r}) (\nabla - ie\mathbf{A}(\mathbf{r})) \Psi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 - \alpha |\Psi(\mathbf{r})|^2 - \frac{1}{2} \beta |\Psi(\mathbf{r})|^4, \quad (2.11)$$

Consideremos o caso estático $\dot{\Psi}^* = \dot{\Psi} = 0$. Onde m e e são a massa e carga, respectivamente, do par de Cooper. α e β são parâmetros fenomenológicos diferentes de zero e seu comportamento dependerá das condições impostas sobre eles, isto será compreendido mais adiante. Advertimos desde o início que \mathcal{L} corresponde à densidade Lagrangiana abeliana simples do tipo Higgs. \mathcal{L} é um invariante sob uma transformação de gauge

$$\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{-i\theta(\mathbf{r})} \Psi(\mathbf{r}), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{e} \nabla \theta(\mathbf{r}). \quad (2.13)$$

Nós podemos construir a *densidade de energia livre* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n$ de forma análoga à Lagrangiana de Schrödinger para superconductores, a qual é um funcional das $\Psi(\mathbf{r})$ e $\Psi^*(\mathbf{r})$ (para encurtar um pouco a notação tomamos $\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi$, $\Psi^*(\mathbf{r}) \equiv \Psi^*$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{A}$), portanto

$$-\mathcal{L} = \mathcal{F} = \frac{1}{2m} |(\nabla - ie\mathbf{A}) \Psi|^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4. \quad (2.14)$$

É comum encontrarmos nos textos sobre o assunto a seguinte expressão para a energia livre [17]:

$$f_s = f_n + \int d^3r \left[\frac{1}{2m} |(\nabla - ie\mathbf{A}) \Psi|^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{h}|^2 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 \right]. \quad (2.15)$$

A *energia livre de Ginzburg-Landau*. f_s é mínima com respeito a variações do parâmetro de ordem Ψ e tal condição indica que os dois estados, normal e supercondutor, estão em equilíbrio estável um com relação ao outro. f_n é o valor da energia livre da fase normal subjacente, que é apreciável na medida que vai chegando ao valor do campo magnético crítico, claramente observamos que se $\Psi = 0$ a energia livre é a do estado normal,

$$f = f_n + \int d^3r \frac{1}{2} |\mathbf{h}|^2.$$

Olhemos cada um dos termos da expressão (2.15) como energia livre. O termo que contém as derivadas representa a variação do parâmetro de ordem e da corrente de fluxo. A energia livre associada ao campo magnético, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{h} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_a$, representa a expulsão de campo magnético, neste caso \mathbf{H}_a é a energia do campo magnético externo.

A contribuição mais importante de Ginzburg e Landau foi a expansão na serie de potencias (pares) do parâmetro de ordem, a função

$$\alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4. \quad (2.16)$$

A função (2.16) é maior ou igual a zero quando está na fase supercondutora e é igual a zero quando Ψ varia continuamente até encontrar a fase normal. Estas variações

existem para condições onde a temperatura é menor que a temperatura crítica, isto é $T_c - T \ll T_c$. Consideremos a densidade de energia livre (2.14) em ausência de campos externos e de variações do parâmetro Ψ , ou seja consideramos unicamente o termo (2.16)

$$\mathcal{F} = \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4. \quad (2.17)$$

Graficamente o parâmetro β da potencia a quarta em Ψ é o termo dominante na eq. (2.17) (para grande valores de Ψ) e sua assinatura determina a orientação de \mathcal{F} , enquanto a assinatura de α determina a forma. Examinemos cada um dos casos:

- Para $\beta < 0$, \mathcal{F} temos duas possibilidades:
 - $\alpha < 0$, \mathcal{F} não tem mínimo e possui um ponto máximo instável (Fig. 2.4(a)).
 - $\alpha > 0$, \mathcal{F} tem um mínimo e dois pontos máximos instáveis (Fig. 2.4(b)).
- Para $\beta > 0$, \mathcal{F} também temos duas possibilidades:
 - $\alpha > 0$, \mathcal{F} tem um mínimo (Fig. 2.4(c)).
 - $\alpha < 0$, \mathcal{F} tem dois mínimos (Fig. 2.4(d)).

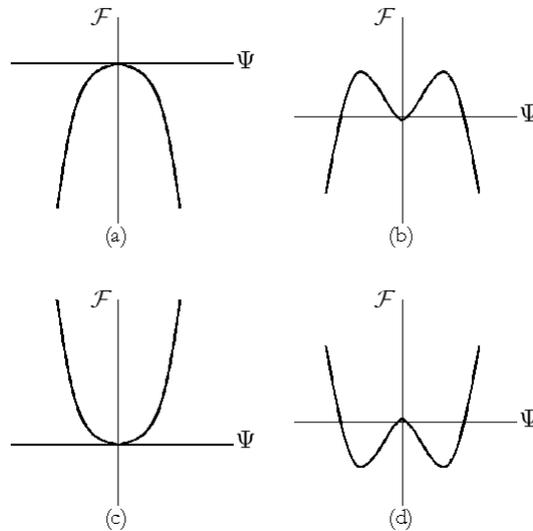


Figura 2.4: Comportamento da energia livre em função do parâmetro livre, tendo em conta os sinais dos parâmetros α e β . Para $\beta < 0$ com (a) $\alpha < 0$ e (b) $\alpha > 0$. Para $\beta > 0$ com (c) $\alpha > 0$ e (d) $\alpha < 0$.

Então nos dois casos para $\beta < 0$ não podemos determinar claramente os mínimos da energia. Fixamos portanto $\beta > 0$, contudo temos as duas possibilidades para α . Para o estado $\alpha > 0$ temos um mínimo em $|\Psi|^2 = 0$ como na Fig. 2.4(c), e como falamos anteriormente o parâmetro de ordem na fase normal é nulo, pelo tanto $\alpha > 0$ revela o fato que o material superou seus valores críticos e está no estado normal. O caso que nos interessa é quando temos um duplo poço ($\beta > 0$ e $\alpha < 0$) como se vê na Fig. 2.4(d), sendo um caso típico da quebra espontânea de simetria porque escolhemos um dos

dois mínimos que se oferecem*. O mínimo da função (2.17) ($\delta\mathcal{F} = 0$) para este caso é onde o parâmetro de ordem é uma *constante* diferente de zero, isto é

$$|\Psi|^2 = |\Psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.18)$$

O subíndice ∞ em Ψ_∞ é porque Ψ se aproxima deste valor infinitamente perto do fundo do poço. Tomando o valor (2.18) e substituindo na expressão (2.17) obtemos

$$\mathcal{F} = -\frac{\alpha^2}{2\beta}.$$

Seria conveniente analisar a energia livre perto do fundo do poço onde os estados supercondutor e normal são iguais termodinamicamente com a energia livre do campo magnético. Então ao compararmos com a eq. (2.1), obtemos a relação entre campo crítico e os parâmetros α e β , assim:

$$\frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{H_c^2}{2}.$$

Além disso verificamos da eq. (2.18) que $\alpha = -\beta\Psi_\infty^2$ e desta forma, com

$$\alpha\Psi_\infty^2 + \frac{1}{2}\beta\Psi_\infty^4 = \frac{H_c^2}{2}$$

deduzimos que

$$\beta = -\frac{H_c^2}{\Psi_\infty^4}, \quad \alpha = \frac{H_c^2}{\Psi_\infty^2}. \quad (2.19)$$

Retomando a densidade Lagrangiana (2.11) extraímos as equações de movimento mediante as equações de Euler-Lagrange, as quais tem a forma

$$-\frac{1}{2m}(\nabla - ie\mathbf{A})^2\Psi + \alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 = 0, \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{2m}ie[\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi^*)\Psi] + \frac{e^2}{m}\mathbf{A}\Psi^*\Psi = 0. \quad (2.21)$$

As eqs. (2.20) e (2.21), conhecidas como *equações diferenciais de Ginzburg-Landau*, elas são *não-lineares* no parâmetro de ordem, sua solução não é “analítica”, isto é, temos que fazer aproximações e simultaneamente resolve-las. No ano 1952, Alexei Alexeyevich Abrikosov, propôs a forma em que o fluxo do campo magnético deveria entrar nos material do tipo SCII. Sua idéia consiste num arranjo de linhas de fluxo penetrando pelos lugares onde a substância é normal (o núcleo) na forma de vórtices microscópicos (ver Fig. 2.5). Abrikosov formulou um *ansatz* para as eqs. (2.20) e (2.21) com simetria cilíndrica [18]. Primeiro estudaremos como se quantiza o fluxo e depois apresentaremos o *ansatz* de Abrikosov.

Vamos explorar a eq. (2.21), comparando com a equação de Maxwell para o campo magnético, $\nabla \times \mathbf{h} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{j}_s$, disto inferimos que

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{2m}ie[(\nabla\Psi^*)\Psi - \Psi^*(\nabla\Psi)] - \frac{e^2}{m}\mathbf{A}\Psi^*\Psi. \quad (2.22)$$

*Os dois mínimos são equivalentes.

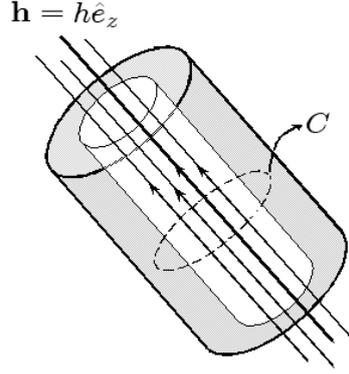


Figura 2.5: Fluxo de campo magnético ao longo da direção- z num supercondutor tipo II, onde C é o fluxo fechado de corrente. O cinza indica a fase supercondutora e a parte branca a fase normal (núcleo).

Por identidades vetoriais chegamos à equação $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{j}_s$ para o potencial vetorial. Supondo que Ψ não varia com a posição e com essa condição a supercorrente é

$$\mathbf{j}_s = -\frac{e^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A} = -\frac{e^2}{m} \rho_s \mathbf{A}.$$

Dessa maneira

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{e^2}{m} \rho_s \mathbf{A} = 0.$$

Em analogia com o modelo de London, a equação anterior tem a mesma forma da eq. (2.7) e pode-se calcular o comprimento de penetração λ_L no material, já que a solução é similar à eq. (2.8). Tomando a densidade ρ quando o parâmetro de ordem é uma constante Ψ_∞^2 , obtemos

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{e^2 |\Psi_\infty|^2}} = \sqrt{-\frac{m\beta}{e^2 \alpha}}. \quad (2.23)$$

A qual é idêntica ao comprimento de onda de London obtido na eq. (2.9).

Comparando a equação de Maxwell para o campo magnético, $\nabla \times \mathbf{h}$, com a eq. (2.21) inferimos

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{2m} i e [(\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* (\nabla \Psi)] - \frac{e^2}{m} \mathbf{A} \Psi^* \Psi.$$

Sem perder a generalidade propomos $\Psi = |\Psi_\infty| f e^{-i\chi(\varphi)}$ onde χ e f são funções reais e substituímos na supercorrente (2.22),

$$\mathbf{j}_s = -\frac{e}{m} |\Psi_\infty|^2 f^2 \nabla \chi - \frac{e^2}{m} |\Psi_\infty|^2 f^2 \mathbf{A}.$$

Isolamos $\nabla \chi(\varphi)$ e integramos numa trajetória fechada C

$$\oint_C d\mathbf{l} \cdot \nabla \chi = -\frac{m}{e \rho_s} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot \mathbf{j}_s}{f^2} - e \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}.$$

O ultimo termo pode ser transformado mediante o Teorema de Stokes em:

$$e \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = e \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\sigma = e \int_S \mathbf{h} \cdot d\sigma = e \Phi_C. \quad (2.24)$$

Φ_C é o fluxo do campo magnético total. A função Ψ deve ser univaluada (similar ao problema proposto na eq. (B.11) do apêndice A), então a fase num loop fechado deve variar por múltiplos inteiros de 2π , consideramos além disso que χ depende só da coordenada φ para um sistema bi-dimensinal restrito a um plano. Portanto a integral deve tomar a forma

$$\oint_C d\mathbf{l} \cdot \nabla \chi = \chi(2\pi) - \chi(0) = 2\pi n, \quad (2.25)$$

onde n é um numero inteiro chamado *número fluxóide*, e representa um incremento na fase do parâmetro de ordem circulando na célula unitária. Então

$$2\pi n = -e\Phi_C - \frac{m}{e\rho_s} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot \mathbf{j}_s}{f^2}.$$

O termo com a integral anula-se em C porque a supercorrente \mathbf{j}_s é perpendicular a $d\mathbf{l}$. Com isto obtemos a condição de quantização do fluxo magnético

$$\Phi_C = -\frac{2\pi n}{e}. \quad (2.26)$$

Cada célula contém pelo menos uma linha de fluxo no ponto onde $|\Psi| = 0$. A energia livre vai crescendo quando n aumenta e é mínima quando escolhemos $n = 1$ [19],

$$\Phi_0 = -\frac{2\pi}{e}, \quad (2.27)$$

lembrando que e é a carga do par de Cooper[†]. O campo magnético terá uma quantidade específica de fluxo e se denomina *quantum de fluxo*. Dessa maneira os vórtices serão quantizados.

Vamos definir outra quantidade a partir da eq. (2.20) na ausência de campos magnéticos e tomando só a parte real do parâmetro de ordem

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi + \alpha\Psi + \beta\Psi^3 = 0,$$

dividimos por Ψ_∞^3 e re-definimos $\Psi_0 = \Psi/|\Psi_\infty|$. Dessa forma

$$\frac{1}{2m|\Psi_\infty|^2}\nabla^2\Psi_0 + \frac{\alpha}{|\Psi_\infty|^2}\Psi_0 + \beta\Psi_0^3 = 0.$$

Como o valor Ψ_∞ é uma constante podemos substituir sua forma, obtendo

$$-\beta \left[-\frac{1}{2m\alpha}\nabla^2\Psi_0 + \Psi_0 - \Psi_0^3 \right] = 0.$$

$\beta \neq 0$, portanto a expressão no parêntese deve ser zero. O termo à frente da derivada de Ψ_0 serve-nos para definir o *comprimento de coerência*

$$\xi = \sqrt{-\frac{1}{2m\alpha}}. \quad (2.28)$$

ξ é uma medida do volume sobre o qual Ψ estende-se sem aumentar a energia e dá o raio do núcleo do vórtice.

[†]As unidades do fluxo $\Phi_0 \approx 2 \times 10^{-7}$ Gauss-cm⁻²

Com as duas quantidades, os comprimentos de London e de coerência, definimos a razão

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi} = \frac{m}{e} \sqrt{2\beta} \quad (2.29)$$

que caracteriza os tipos de supercondutores e é chamado *parâmetro de Ginzburg-Landau*. Então, quando $\kappa \ll 1$ ($\lambda_L \ll \xi$) temos o efeito Meissner total e estamos no caso SCI e se $\kappa \gg 1$ ($\lambda_L \gg \xi$) temos o efeito Meissner parcial e portanto SCII. Este parâmetro é muito importante para definir a escala de análise da teoria.

2.2.2 A solução de Abrikosov para as equações de Ginzburg-Landau

Os ansätze para as eqs. (2.20) e (2.21) formulados por Abrikosov [18] para $\kappa \gg 1$, representam as soluções vórtices (ver discussão da ref. [14]). As linhas de fluxo do campo magnético tem uma simetria axial por esse fato é conveniente uma solução em coordenadas cilíndricas [20] (na fase $|\Psi_\infty| f e^{-i\chi(\varphi)}$ fazemos $\chi'(\varphi) = -\chi(\varphi)$), portanto

$$\Psi = |\Psi_\infty| e^{in\varphi} f(\rho), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{A} = \hat{e}_\varphi A(\rho). \quad (2.31)$$

Onde estabelecemos os ansätze num eixo preferencial na direção- z , na qual está orientado o campo magnético. No ansatz (2.31) o campo vetorial é função de ρ e sua componente encontra-se na na direção azimutal φ . No ansatz (2.30) n provem da quantização do fluxo e a fase que depende da coordenada φ muda de 0 a 2π . Os ansätze representam um sistema como o apresentado na Fig. 2.6. Além disso estamos considerando o *caso estático* onde o potencial escalar é zero (indicado como A_0) (na ausência de campos elétricos externos).

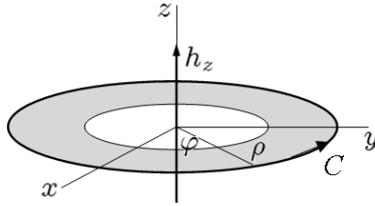


Figura 2.6: Sistema tipo vórtice com um loop fechado de corrente C .

Podemos utilizar os ansätze com o parâmetro de ordem normalizado, $\Psi_0 = \Psi/|\Psi_\infty| = e^{in\varphi} f(\rho)$, então

$$\Psi_0 = e^{in\varphi} f(\rho), \quad (2.32)$$

$$\mathbf{A} = \hat{e}_\varphi A(\rho). \quad (2.33)$$

Normalizamos as equações de movimento (2.20) e (2.21)

$$\xi^2 (\nabla - ie\mathbf{A})^2 \Psi_0 - \Psi_0 + \Psi_0^3 = 0, \quad (2.34)$$

$$\lambda_L^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{i}{2e} [(\nabla \Psi_0^*) \Psi_0 - \Psi_0^* (\nabla \Psi_0)] + \mathbf{A} |\Psi_0|^2 = 0. \quad (2.35)$$

Usando os operadores diferenciais com simetria cilíndrica (ver Apêndice **A**), obtemos duas equações diferenciais acopladas que são da forma

$$\xi^2 \left[\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} - e^2 \left(A(\rho) - \frac{n}{e\rho} \right)^2 f(\rho) \right] + f(\rho) - f^3(\rho) = 0, \quad (2.36)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \frac{1}{\lambda_L^2} \hat{e}_\varphi \left(A(\rho) - \frac{n}{e\rho} \right) f^2(\rho) = 0. \quad (2.37)$$

Introduzindo o potencial vetor invariante de gauge

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} + \frac{1}{e} \nabla \theta \rightarrow Q(\rho) \hat{e}_\varphi = \left(A(\rho) - \frac{n}{e\rho} \right) \hat{e}_\varphi, \quad (2.38)$$

obtemos

$$\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} - e^2 Q^2(\rho) f(\rho) + \frac{1}{\xi^2} f(\rho) - \frac{1}{\xi^2} f^3(\rho) = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 Q(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} - \frac{Q(\rho)}{\rho^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} Q(\rho) f^2(\rho) = 0 \quad (2.40)$$

A eq. (2.40) pode ser resolvida considerando a região assintótica onde $f \simeq 1$ para uma distância $\rho \gg \xi$, multiplicando por ρ^2

$$\rho^2 \frac{\partial^2 Q(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} - \left(1 + \frac{\rho^2}{\lambda_L^2} \right) Q(\rho) = 0. \quad (2.41)$$

Está é uma equação diferencial de Bessel com argumento puramente imaginário para uma função da primeira ordem ($\nu = 1$) e sua solução é uma **função de Macdonald** [21] (vêr Apêndice de **A**), isto é

$$Q(\rho) \simeq -\frac{1}{e\lambda_L} K_1 \left(\frac{\rho}{\lambda_L} \right). \quad (2.42)$$

Re-escrita em termos de $A(\rho)$ obtemos a solução

$$A(\rho) \simeq \frac{n}{\rho e} - \sqrt{-\frac{\alpha}{m\beta}} K_1 \left(\sqrt{-\frac{\alpha}{m\beta}} \rho \right). \quad (2.43)$$

O campo magnético na direção- z , como $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{Q}$, será escrito na seguinte forma

$$h_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho Q(\rho)) = -\frac{1}{e} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\rho}{\lambda_L} K_1 \left(\frac{\rho}{\lambda_L} \right) \right] = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} K_0 \left(\frac{\rho}{\lambda_L} \right) \quad (2.44)$$

onde utilizamos o quantum de fluxo $\Phi_0 = 2\pi/e$ e a relação para as derivadas de K_n [21]. Se analisarmos as funções de Macdonald podemos fazer algumas considerações para o seu comportamento nas fronteiras. Para valores grandes de ρ , isto é $\rho \rightarrow \infty$, tanto K_1 quanto K_0 decrescem exponencialmente (ver Apêndice **B**). Então h_z é:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} h_z = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \sqrt{\frac{2\lambda_L}{\pi\rho}} \exp \left(-\frac{\rho}{\lambda_L} \right) \quad (2.45)$$

e para o extremo onde $\rho/\lambda_L \ll 1$ ($\rho \rightarrow 0$), temos que

$$K_1 = \lambda_L/\rho, \quad K_0 = -\ln(\rho/\lambda_L).$$

O campo magnético para $\rho/\lambda_L \ll 1$ é logarítmico

$$h_z \simeq \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \ln\left(\frac{\lambda_L}{\rho}\right), \quad (2.46)$$

o qual tem um *cut-off* para $\rho \sim \xi$, onde $|\Psi_0|^2$ começa a cair a zero.

Até então, não conhecemos especificamente a função $f(\rho)$ da eq. (2.39), mas é possível obter uma solução que seja aproximada. Ainda podemos testar uma solução razoável para $\rho \rightarrow 0$, onde f é um polinômio da forma

$$f(\rho) \approx c_k \rho^k \quad (2.47)$$

e onde c_k é um coeficiente constante e arbitrário, com $k \geq 0$. Usando a eq. (2.36)

$$\xi^2 \left[k(k-1)c_k \rho^{k-2} + k c_k \rho^{k-2} - n^2 c_k \rho^{k-2} - 2Aen c_k \rho^{k-1} \right] - e^2 \xi^2 A^2 c_k \rho^k + c_k \rho^k - c_k^3 \rho^{3k} = 0$$

os termos dominantes, quando $\rho \rightarrow 0$ em f , são aqueles que são proporcionais a ρ^{k-2} e conseguimos jogar fora os outros que não contribuem. Dessa forma, para satisfazer a igualdade

$$k(k-1)c_k \rho^{k-2} + k c_k \rho^{k-2} - n^2 c_k \rho^{k-2} = [k^2 - n^2] c_k \rho^{k-2} = 0,$$

vemos que $k = n$ dados $c_k, \rho^{k-2} \neq 0$. O polinômio (2.47) depende do quantum do fluxo. Se $n = 0$ temos uma solução trivial, porém se escolhermos $n = 1$ em (2.47), vamos ter uma solução que é linear em ρ quando $\rho \rightarrow 0$. Uma boa aproximação será $n = 1$ tomando $f(\rho \rightarrow 0) \approx C' \rho$, onde C' é uma constante.

Agora faremos uma simplificação na eq. (2.36) assumindo um campo $A(\rho) = 0$ e $\rho \rightarrow \infty$, neste caso

$$\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\xi^2} f(\rho) - \frac{1}{\xi^2} f^3(\rho) = 0. \quad (2.48)$$

Propomos que a solução seja da forma $f(\rho) = 1 + g(\rho)$, para linearizar a equação, isto é válido se $g(\rho) \ll 1$, já que nesta região assintótica $f \simeq 1$, então

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\xi^2} (1 + g) - \frac{1}{\xi^2} (1 + 3g + 3g^2 + g^3) \simeq \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} - \frac{2g}{\xi^2} = 0,$$

a solução deve ser proporcional a

$$g(\rho) \sim e^{-\sqrt{2}\xi^{-1}\rho} \sim e^{-2\sqrt{m\alpha}\rho} \quad (2.49)$$

onde descartamos a solução positiva porque não é bem comportada assintoticamente para ρ muito grande.

Usando o resultado obtido na eq. (2.49), podemos construir uma solução aproximada

$$f(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 1 - C e^{-2\sqrt{m\alpha}\rho}, \quad (2.50)$$

com C constante (e escolhida de forma correta) que satisfaz nossas condições assintóticas em $\rho \rightarrow \infty$.

As soluções (2.44) e (2.50) basicamente estão sujeitas à forma em que variam λ_L e ξ , as quais estão relacionadas pelo parâmetro κ . Quando λ_L é pequeno comparado com ξ , se diz que a distância de penetração do campo magnético desde a superfície até um dado ponto é um comprimento curto ($\lambda \lesssim z \lesssim \xi$), identificamos a mostra como um SCI (ver Fig. 2.7(a)). Para SCI o parâmetro de ordem Ψ_0 se torna saturado para um ξ grande. Acontece o contrário para os SCII, como se vê na Fig. 2.7(b), o λ_L tem um alcance muito maior na profundidade do material supercondutor e o campo magnético desaparece na região $\xi \lesssim z \lesssim \lambda$. Nos SCII o parâmetro de ordem se satura rapidamente.

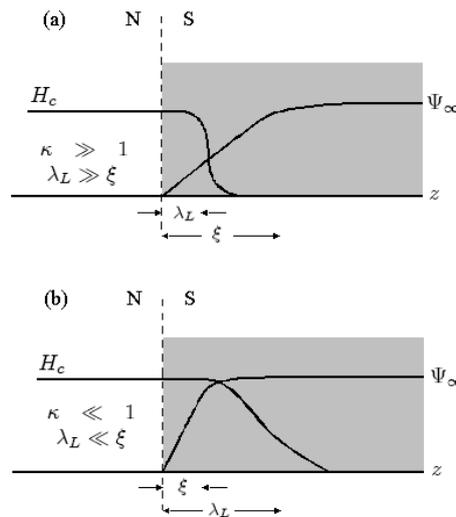


Figura 2.7: Diagrama de uma camada de substância normal (branco, $z \rightarrow -\infty$) e uma camada de um supercondutor (cinza, $z \rightarrow +\infty$), onde se apresenta como campo magnético H e o parâmetro de ordem variam em função da distância.

Vórtices em teorias de campos com quebra espontânea de simetria

Procuraremos a versão análoga do efeito Meissner da supercondutividade na teoria de campos, o qual é produto da quebra espontânea da simetria. Mostraremos que a eletrodinâmica escalar e nas teorias não-Abelianas também possuem os parâmetros λ e ξ , comprimento característico e de coerência respectivamente, isto é em função do parâmetro de Ginzburg-Landau usados para descrever a teoria fenomenologicamente. Também usaremos as equações de movimento e suas soluções independentes do tempo e em ausência de campos elétricos.

3.1 Vórtices em uma teoria de gauge Abeliana

Nielsen e Olesen [22] mostraram que as soluções tipo vórtice propostas por Abrikosov para SCII também existem na teoria de campos, por exemplo para a teoria de gauge do grupo abeliano $U(1)$ com uma densidade Lagrangiana de um campo escalar carregado (ϕ complexo) acoplado a um campo vetorial (A_μ). Consideremos a densidade Lagrangiana da eletrodinâmica escalar com um potencial de Higgs

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^* D^\mu\phi + c_2|\phi|^2 - c_4|\phi|^4, \quad (3.1)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, corresponde à derivada covariante, e é a constante de acoplamento. $c_2 > 0$ e $c_4 > 0$, são constantes positivas. O tensor de campo $F_{\mu\nu}$ tem a forma $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ & + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) + ie(\partial_\mu\phi^*)A^\mu\phi - ieA_\mu\phi^*(\partial^\mu\phi) + e^2A_\mu A^\mu\phi^*\phi] \\ & + c_2\phi^*\phi - c_4\phi^*\phi\phi^*\phi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A Lagrangiana da eletrodinâmica escalar é invariante sob transformações de gauge locais, isto é, sob transformações do tipo

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi(x), \quad (3.3)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (3.4)$$

Da Lagrangiana expressa pela eq. (3.2) extraímos as equações de movimento mediante as equações de Euler-Lagrange, de fato, temos três equações independentes para os campo escalar ϕ , sua parte conjugada ϕ^* e o campo vetorial A_μ ; estas são

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + ie\partial_\mu(A^\mu\phi) + ieA_\mu\partial^\mu\phi - e^2A_\mu A^\mu\phi - 2c_2\phi + 4c_4\phi|\phi|^2 = 0, \quad (3.5)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi^* - ie\partial_\mu(A^\mu\phi^*) + ieA_\mu\partial^\mu\phi^* - e^2A_\mu A^\mu\phi^* - 2c_2\phi^* + 4c_4\phi^*|\phi|^2 = 0, \quad (3.6)$$

e por último para o campo vetorial A_μ

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}ie[(\partial^\nu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\nu\phi)] - e^2A^\nu\phi^*\phi \equiv j^\nu. \quad (3.7)$$

Numa superfície de duas dimensões o campo escalar no espaço de Minkowski deve se comportar como (ver a eq. (1.36))

$$\phi = e^{-i\chi}f \quad (3.8)$$

onde χ é uma fase arbitraria que depende só das coordenadas espaciais. Usando as equações (3.7) e (3.8), obtemos

$$j_\mu = e|\phi|^2\partial_\mu\chi + e^2A_\mu|\phi|^2,$$

isolamos A_μ

$$A_\mu = \frac{1}{e^2}\frac{j_\mu}{|\phi|^2} - \frac{1}{e}\partial_\mu\chi. \quad (3.9)$$

O fluxo esta definido como a integral do tensor de campo $F_{\mu\nu}$ e o elemento de superfície $d\sigma^{\mu\nu}$, este é:

$$\Phi = \int F_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu} = \oint A_\mu(x)dx^\mu = -\frac{1}{e}\oint\partial_\mu\chi(x)dx^\mu, \quad (3.10)$$

o qual corresponde à integração sobre qualquer loop fechado sem correntes. Sabemos que este sistema apresenta simetria axial, portanto escolhemos apropriadamente a simetria cilíndrica para descrever o fluxo em termos de uma coordenada independente a qual é identificada com z e de duas dependentes as quais são identificadas como (ρ, φ) .

A energia da solução deve ser finita e portanto o valor do campo ϕ deve ser só o valor do vácuo $|\phi_{\min}|$. No infinito $\rho \rightarrow \infty$ o campo $\phi = |\phi_{\min}|$, mas como χ não necessariamente desaparece, podemos considerar a fase $\chi = \chi(\varphi)$ dependente unicamente da coordenada φ que possui um período de 2π . No entanto, ϕ deve ser univaluada e portanto χ varia como $2\pi n$ (n inteiro) para o loop fechado [5] (de maneira análoga ao feito para a eq. (B.11) no apêndice **B**). Logo o fluxo dado na eq. (3.10) tem a forma

$$\Phi = n\Phi_0 = -\frac{2\pi n}{e}, \quad (3.11)$$

onde Φ_0 é o quantum de fluxo, que foi obtido para a supercondutividade na eq. (2.26).

Escolhemos o gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$ para as equações de movimento (3.5) e (3.6). E propomos uns ansätze com um eixo preferencial na direção- z , considerando o caso estático ($A_0 = 0$), escrevendo os campos como

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{-in\varphi} f(\rho), \quad (3.12)$$

$$[\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi = -\frac{\hat{e}_\varphi}{\rho} A(\rho), \quad (3.13)$$

onde \hat{e}_φ é o vetor unitário na direção- φ e n é a unidade de fluxo [23]. Estes ansätze são similares aos propostos por Abrikosov (2.32) e (2.33).

A primeira equação de movimento na forma vetorial é

$$-\nabla^2 \phi - 2ie\mathbf{A} \cdot \nabla \phi + e^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \phi - 2c_2 \phi + 4c_4 \phi |\phi|^2 = 0,$$

com a simetria proposta e os ansätze (3.12) e (3.13) obtemos:

$$\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df(\rho)}{d\rho} - \frac{[n + eA(\rho)]^2}{\rho^2} f(\rho) + 2c_2 f(\rho) - 4c_4 f^3(\rho) = 0. \quad (3.14)$$

A segunda equação de movimento é

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{2}ie[\phi^*(\nabla\phi) - (\nabla\phi^*)\phi] + e^2 \mathbf{A} \phi^* \phi$$

o que conduz à

$$\frac{d^2 A(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dA(\rho)}{d\rho} - e[n + eA(\rho)] f^2(\rho) = 0. \quad (3.15)$$

Temos que usar condições de fronteira para $A(\rho)$ e $f(\rho)$ para que a energia seja finita (ver a explicação para a eq. (1.37))

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) = |\phi_{\min}|, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} A(\rho) = -\frac{n}{e}, \quad (3.16)$$

$$f(0) = A(0) = 0. \quad (3.17)$$

Não existem soluções diretas para as equações diferenciais descritas por (3.14) e (3.15). Porém existem soluções exatas considerando o tensor de energia-momento, o tratamento feito com o tensor de energia-momento permite obter equações diferenciais equivalentes as propostas em (3.14) e (3.15), mas desacopladas. Os limites da energia para soluções tipo vórtice foram estudadas por Bogomol'nyi [24] e por Jacobs and Rebbi [25]. No entanto, vamos considerar a aproximação feita por Nielsen e Olesen [22].

Por outro lado o potencial de Higgs, $V(\phi\phi^*) = -c_2\phi^*\phi + c_4\phi^*\phi\phi^*\phi$, oferece informação sobre o mínimo absoluto, isto é, o vácuo da teoria. Este vácuo tem um valor do campo constante e diferente de zero o qual determina a dinâmica do sistema. Se escolhermos a solução trivial para o mínimo de $V(\phi\phi^*)$ chegamos a um valor constante igual a zero. Mas se considerarmos um vácuo tipo quebra espontânea da simetria, facilmente podemos determinar um mínimo diferente de zero, o qual tem o valor:

$$|\phi_{\min}| = \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}. \quad (3.18)$$

Desta maneira intuimos que uma boa aproximação para a Lagrangiana da eq. (3.2) é que para distâncias grandes ($\rho \rightarrow \infty$) todos os campos devem desaparecer, exceto o vácuo. Portanto ϕ deve se comportar como:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) = |\phi_{\min}| = \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}} = f_0. \quad (3.19)$$

Com a condição de fronteira da eq. (3.16), a equação de movimento (3.15) é aproximadamente satisfeita se tomamos $f(\rho) \simeq f_0$

$$f(\rho) \simeq \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}, \quad (3.20)$$

com c_2 e c_4 tão grandes para controlar as variações do potencial $A(\rho)$ da expressão $1/\rho \cdot f_0^2$ na eq. (3.15) pode ser tratado aproximadamente como uma constante para ρ grande como foi feito em [22]. A eq. (3.15), tem a forma convencional de uma equação diferencial de Bessel com argumento imaginario (ver Apêndice A). Sua solução é

$$A(\rho) \simeq -\frac{n}{e} [1 - ef_0\rho K_1(ef_0\rho)]. \quad (3.21)$$

A função K_1 decresce exponencialmente para $\rho \rightarrow \infty$, como já foi visto, portanto

$$A(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} -\frac{n}{e} + nef_0\rho \sqrt{\frac{\pi}{2e\rho f_0}} \exp(-ef_0\rho). \quad (3.22)$$

Isto concorda com nossa condição de fronteira (3.16) para o potencial vetor do campo, a qual nos diz que o campo é diferente de zero quando, $\rho \rightarrow \infty$. A solução na sua forma explícita é

$$[\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi \simeq \frac{n}{e} \left[\frac{1}{\rho} - ef_0 K_1(ef_0\rho) \right] \quad (3.23)$$

Consideremos a solução obtida na eq. (3.21) comparando-a diretamente com a forma obtida para a supercondutividade na eq. (2.42), imediatamente reconhecemos que o comprimento característico (análogo ao comprimento de London, λ_L) é

$$\lambda = \frac{1}{ef_0} = \sqrt{\frac{2c_4}{e^2 c_2}}. \quad (3.24)$$

O campo $F^{\mu\nu}$, escrito para duas dimensões vai ficar na direção- z , em analogia ao campo magnético na eq. (2.44), o qual escreve-se como

$$[\mathbf{H}(\mathbf{r})]_z = \nabla \times [\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi \simeq -\hat{e}_z n f_0 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho K_1(ef_0\rho))$$

ou

$$H_z \simeq -nef_0^2 \frac{1}{ef_0\rho} \frac{d}{d(ef_0\rho)} [ef_0\rho K_1(ef_0\rho)] = -ne \frac{c_2}{2c_4} K_0\left(e\sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}\rho\right) \quad (3.25)$$

e quando $\rho \rightarrow \infty$

$$H_z \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} -nef_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{2e\rho f_0}} \exp(-ef_0\rho). \quad (3.26)$$

Para a quebra espontânea de simetria temos um valor do vácuo f_0 , eq. (3.18), que é obtido da minimização (a primeira derivada) do potencial $V(\phi\phi^*)$, podemos re-escrever ϕ como um campo deslocado de f_0 , da seguinte maneira

$$\phi \equiv f_0 + \eta. \quad (3.27)$$

η são as flutuações ao redor do vácuo. Podemos re-escrever a Lagrangiana (3.2) em termos do mínimo (do vácuo)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu (f_0 + \eta)^2 + c_2(f_0 + \eta)^2 - c_4(f_0 + \eta)^4.$$

Expandimos a parte do potencial

$$\begin{aligned} & c_2\eta^2 - c_4\eta^4 - 4c_4\eta^3f_0 - 6c_4\eta^2f_0^2 - 4c_4\eta f_0^3 + 2c_2\eta f_0 - c_4f_0^4 + c_2f_0^2 \\ &= \frac{c_2^2}{4c_4} - 2c_2\eta^2 - c_4\eta^4 - 2\sqrt{2c_4c_2}\eta^3 \end{aligned}$$

Obtemos uma Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2f_0^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\eta)^2 - 4c_2\eta^2 - 2c_4\eta^4 - 4\sqrt{2c_4c_2}\eta^3\right] \quad (3.28)$$

$$+ \frac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu\eta^2 + e^2f_0A_\mu A^\mu\eta + \frac{c_2^2}{4c_4}. \quad (3.29)$$

Além disto, consideremos o termo do potencial que acompanha η^2 na Lagrangiana (3.28)

$$4c_2\eta^2 = 8c_4f_0^2\eta^2 \quad (3.30)$$

é uma quantidade relacionada com a massa ao quadrado da partícula escalar, a qual é produto do mecanismo de Higgs (o qual é equivalente ao efeito Meissner). Então para pequenas oscilações uma solução apropriada para η deveria ser proporcional a uma solução do tipo Yukawa, tomando $2\sqrt{c_2}$ como a massa, isto é

$$\eta \sim e^{-2\sqrt{c_2}\rho} \quad (3.31)$$

a qual decai exponencialmente para valores muito grandes de ρ ($\rho \rightarrow \infty$) (análoga à solução apresentada na eq. (2.50))* . Descartamos o termo $e^{2\sqrt{c_2}\rho}$ porque diverge para $\rho \rightarrow \infty$. A massa serve-nos para definir o comprimento de coerência em analogia com a supercondutividade (ver eq. (2.28)). Então

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{c_2}} \quad (3.32)$$

Portanto com as condições de fronteira apropriadas podemos obter uma solução para ρ muito grande da forma

$$\phi(\mathbf{r}) \simeq \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}} \left[1 - \mathcal{O}\left(e^{-2\sqrt{c_2}\rho}\right)\right]. \quad (3.33)$$

Por outro lado, da Lagrangiana (3.28) o termo $e^2f_0^2$ que acompanha $\frac{1}{2}A_\mu A^\mu$, pode ser associado com uma massa ao quadrado para o campo vetorial A_μ . Então se ef_0 é a massa, o comprimento λ vai estar relacionado mediante a eq. (3.24).

Com os comprimentos λ e ξ , característico e de coerência, respectivamente, definimos a razão

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \frac{2\sqrt{2c_4}}{e} \quad (3.34)$$

*Podemos resolver a equação (3.14), usando argumentos similares aos usados para a eq. (2.48), só que usamos $f(\rho) = f_0 + \eta(\rho)$, no limite onde $\eta/f_0 \ll 1$. Esta solução é válida para valores que estão infinitamente próximas ao vácuo ou seja pequenas oscilações.

donde podemos tirar que $e^2 = 8c_4$ ($\kappa = 1$); este parâmetro é construído para caracterizar nossas soluções lembrando que o mesmo parâmetro nos serve para caracterizar os tipos de supercondutores (parâmetro de Ginzburg-Landau). Então na teoria de Ginzburg-Landau quando $e^2 > 8c_4$ ($\kappa \ll 1$) temos o efeito Meissner total e SCI e se $e^2 < 8c_4$ ($\kappa \gg 1$) temos o efeito Meissner parcial e portanto SCII. Neste modelo Abeliano podemos identificar a massa de uma partícula escalar $m_s = 2\sqrt{c_2}$ e a massa de uma partícula vetorial $m_v = ef_0$, cujos *comprimentos de onda de Compton* são da forma

$$\xi = \frac{1}{m_s}, \quad \lambda = \frac{1}{m_v}, \quad (3.35)$$

respectivamente. Dessa forma podemos re-escrever as soluções propostas por Nielsen e Olesen em termos das massas das partículas m_v e m_s . O campo de gauge, é apresentado graficamente na Fig. 3.1.

$$[\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi \simeq \frac{n}{e} \left[\frac{1}{\rho} - m_v K_1(m_v \rho) \right] \quad (3.36)$$

Por outro lado, o campo H_z e o campo $\phi(\rho)$ são

$$[\mathbf{H}(\mathbf{r})]_z \simeq -\frac{n}{e} m_v^2 K_0(m_v \rho), \quad (3.37)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{m_v}{e} [1 - \mathcal{O}(e^{-m_s \rho})]. \quad (3.38)$$

Os quais são apresentados graficamente na Fig. 3.2.

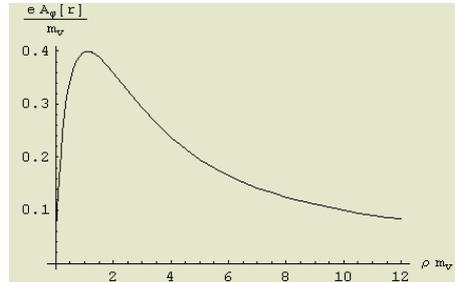


Figura 3.1: O campo de gauge em função da distância radial, a constante de acoplamento e a massa da partícula vetorial. Isto é: $\frac{e}{m_v} [\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi$ vs. $m_v \rho$, com $n = 1$.

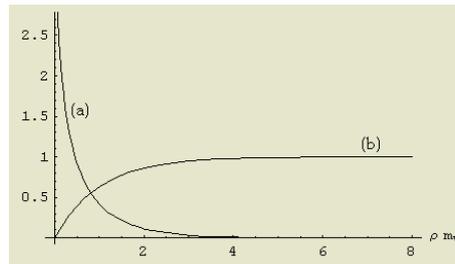


Figura 3.2: O campo magnético H_z e o campo escalar ϕ , em função da distância radial. Onde em (a) se vê $\frac{2\pi}{m_v^2 \Phi_0} [\mathbf{H}(\mathbf{r})]_z$ vs. $m_v \rho$ e em (b) temos $\frac{e}{m_v} [\phi(\mathbf{r})]$ vs. $m_v \rho$.

3.2 Vórtices em teorias de gauge não-Abelianas

Faremos uma extensão mais geral de um grupo de gauge, isto é, estudaremos uma teoria de gauge não-Abeliana (em geral), que admite soluções tipo vórtice, seguindo um pouco a filosofia da teoria Abeliana, propomos uma densidade Lagrangiana para o grupo de gauge $SU(N)$ [26]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathbf{B}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^R (D_\mu \phi^A) \cdot (D^\mu \phi^A) + \frac{1}{2} \sum_{B=1}^T (D_\mu \psi^B) \cdot (D^\mu \psi^B) - V(\phi^A, \psi^B), \quad (3.39)$$

onde $B^{\mu\nu} \equiv \mathbf{B}^{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\tau} = B_a^{\mu\nu} \tau_a$. Temos N -bósons de Higgs na representação adjunta, separados em dois tipos de bósons os ϕ^A e os ψ^B . Lembrando que os geradores τ_a estão normalizados, $Tr[\tau_a \tau_b] = \frac{1}{2} \delta_{ab}$, obtemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Tr[B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}] + \sum_{A=1}^R Tr[D_\mu \phi^A D^\mu \phi^A] + \sum_{B=1}^T Tr[D_\mu \psi^B D^\mu \psi^B] - V(\phi^A, \psi^B). \quad (3.40)$$

Esta densidade Lagrangiana é uma extensão da eletrodinâmica escalar estudadas por Nielsen e Olesen [22]. Os campos são invariantes sob transformações de gauge locais

$$S = e^{-i\alpha_a(x)\tau_a}, \quad (3.41)$$

$$\phi(x) \rightarrow S\phi^A(x)S^{-1}, \quad \psi(x) \rightarrow S\psi^B(x)S^{-1}, \quad (3.42)$$

$$B_\mu^a \tau_a \rightarrow SB_\mu^a \tau_a S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1}. \quad (3.43)$$

onde $a = 1, \dots, N^2 - 1$, $N^2 - 1$ é o número de geradores do grupo (dimensão do grupo). Os campos de Higgs se transformam na representação adjunta.

A densidade Lagrangiana neste caso possui campos na representação adjunta indicados por $\phi^A \equiv \phi^A \cdot \boldsymbol{\tau} = \phi_a^A \tau_a$ ($A = 1, 2, \dots, R$) e $\psi^B \equiv \psi^B \cdot \boldsymbol{\tau} = \psi_a^B \tau_a$ ($B = 1, 2, \dots, T$) como campos de Higgs. Os ϕ^A e ψ^B são os campos escalares, que são identificados com B para aqueles escalares que pertencem à sub-algebra de Cartan e A os campos escalares complementários, tal que $R + T = N$. Além disto, introduzimos um acoplamento minimal dos campos de Higgs com o potencial de gauge $B_\mu = \mathbf{B}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} \equiv B_{a\mu} \tau_a$, mediante uma derivada covariante na representação adjunta

$$D_\mu = \partial_\mu + ig B_{a\mu} \tau_a \equiv \partial_\mu + ig [B_\mu,] \quad (3.44)$$

O tensor de campo $B_a^{\mu\nu}$ tem a forma

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig [B_\mu, B_\nu] \quad (3.45)$$

Tal que

$$B_a^{\mu\nu} = \partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu - g c_{abc} B_b^\mu B_c^\nu. \quad (3.46)$$

onde g é constante de acoplamento (similar a e no caso Abeliano).

As equações de movimento são extraídas da Lagrangiana na eq. (3.39). Para o campo de gauge B_μ a equação de movimento é:

$$D_\mu B^{\mu\nu} = ig \sum_{A=1}^R [D_\nu \phi^A, \phi^A] + ig \sum_{B=1}^T [D_\nu \psi^B, \psi^B] \equiv J^\nu. \quad (3.47)$$

De outro lado temos as equações de movimento para os campos escalares ϕ^A

$$D_\mu D^\mu \phi^A = -\frac{\delta V}{\delta \phi^A}. \quad (3.48)$$

A variação de $V(\phi, \psi)$ deve ser proporcional ao campo ϕ^A .

O grupo de gauge que se considera é o $G = SU(N)$ e os bósons de Higgs encontram-se na representação adjunta. Considerando além disto que o centro do grupo de $SU(N)$ é

$$I_N e^{-2\pi i n/N} \in \mathbb{Z}_N \quad (3.49)$$

onde I_N é a matriz unidade $N \times N$. Vamos definir o grupo fator G/H cujo grupo fundamental $\Pi_1(G/H) = \Pi_1(SU(N)/\mathbb{Z}_N) = \mathbb{Z}_N$ é não-trivial (ver apêndice **B**). Temos $(N-1)$ -classes homotópicas não-triviais. A parte das classes triviais correspondentes ao vácuo trivial. Proporcionamos a idéia de loop para um contorno fechado

$$\Omega_n(\varphi + 2\pi) = e^{-2\pi i n/N} \Omega_n(\varphi), \quad (3.50)$$

onde $n = 1, 2, \dots, N-1$ (o número winding). Podemos relacionar rotações com o grupo Abelian \mathbb{Z}_N , tal que $\Omega_n \in SU(N)$, então

$$\Omega_n(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-in\varphi/N} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-in\varphi/N} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-in\varphi/N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i(1-1/N)n\varphi} \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Cujo determinante $\det[\Omega_n] = 1$.

$B_{\mu\nu} \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow \infty$ os campos de gauge desaparecem no infinito. Escolhemos o potencial de gauge B_μ no limite assintótico $\rho \rightarrow \infty$ (podemos usar a equação (3.43) de maneira similar mas substituindo S pelo Ω_n)

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(B_\mu + \frac{i}{g} \Omega_n^{-1}(\varphi) \partial_\mu \Omega_n(\varphi) \right) = 0,$$

o que nos leva a satisfazer a seguinte condição

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} B_\mu = -\frac{i}{g} \Omega_n^{-1}(\varphi) \partial_\mu \Omega_n(\varphi) = -\frac{n}{ig} M \partial_\mu \varphi$$

onde M é da forma:

$$M = \frac{i}{n} \Omega_n^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Omega_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-N}{N} \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Podemos escrever M como

$$M = \sum_{i=1}^{N-1} m_i H_i, \quad (3.53)$$

onde m_i são os pesos magnéticos [27] e as H_i são $(N - 1)$ -matrizes *diagonais* da sub-álgebra de Cartan do grupo $SU(N)$. Além disto, o traço da matriz M é zero, $Tr [M] = 0$. Pode-se estabelecer relações de comutação das H_i com os geradores E_α para $SU(N)$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot \mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i H_i, \quad (3.54)$$

$$[H_i, E_{\pm\alpha}] = \pm \alpha_i E_{\pm\alpha}. \quad (3.55)$$

os α são as raízes (os pesos da representação adjunta), e também temos

$$\mathbf{m} \cdot \alpha \equiv m_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{N-1} m_i \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad (3.56)$$

equação que relaciona os pesos magnéticos e as raízes da sub-álgebra de Cartan.

Dessa forma é possível propor um campo

$$B_\mu = -b_\mu M. \quad (3.57)$$

Os campos ψ^B tem um comportamento idêntico ao campo de Higgs no caso Abeli-ano onde tem um valor constante equivalente ao valor do vácuo. De outro lado para os campos ϕ^A e B_μ vão ser propostos, de maneira similar ao Nielsen e Olesen nas eqs. (3.12) e (3.13), através de ansätze com simetria em torno ao eixo- z , deixando-os dependendo explicitamente das coordenadas ρ e φ

$$\phi^A = \Omega_n^{-1}(\varphi) F^A(\rho) \Omega_n(\varphi), \quad (3.58)$$

$$\psi^B = \sum_{j=1}^{N-1} C_j^B H_j, \quad (3.59)$$

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r})]_\varphi = -\hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} B(\rho) M, \quad (3.60)$$

onde $A = 1, 2, \dots, R$; $B = 1, 2, \dots, T$ e $n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$, as fases $e^{-2\pi i n/N}$ são as raízes da unidade provenientes do subgrupo de rotações de gauge (3.51). Além disto

$$F^A(\rho) = \sum_{\pm\alpha} f_\alpha^A(\rho) E_\alpha. \quad (3.61)$$

Os $E_{\pm\alpha}$ são os geradores da sub-álgebra de Cartan das eqs. (3.54) e (3.55). Os F^A para $\rho \rightarrow \infty$ devem ter um valor definido diferente de zero,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} F^A(\rho) \sim F_0^A, \quad A = 1, 2, \dots, R. \quad (3.62)$$

Quantidade similar à apresentada na eq. (3.19). Os campos ψ^B não contribuem para as equações de movimento porque do ansatz (3.59) os campos comutam pela estrutura da sub-álgebra de Cartan, $[H_i, H_j] = 0$.

Vamos considerar o limite assintótico da Lagrangiana na ação por unidade de área. Usando coordenadas cilíndricas consideremos o limite $\rho \rightarrow \infty$, propomos soluções de maneira análoga a Nielsen e Olesen. Analisamos o comportamento assintótico dos campos de Higgs e do potencial de gauge e a estrutura do vácuo. Então, a derivada covariante (3.44) para o campo de Higgs deve se anular para a condição assintótica, $\rho \rightarrow \infty$,

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ig [B_\mu, \phi] \rightarrow 0. \quad (3.63)$$

Nesta teoria os campos escalares possuem um vácuo especial. Um vácuo ordinário associado à álgebra de Cartan para os campos de Higgs ψ^B e um vácuo de campos ϕ^A em direções ortogonais E_α à álgebra de Cartan, isto quer dizer que os campos de Higgs são ortogonais no espaço de quebra de $SU(N)$.

A derivada covariante usando a simetria axial, é:

$$D_\varphi \phi^A = \partial_\varphi \phi^A - \hat{e}_\varphi \frac{ig}{\rho} B(\rho) [M, \phi^A], \quad (3.64)$$

escolhemos

$$\partial_\varphi \phi^A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^A}{\partial \varphi} = -\frac{in}{\rho} [M, \phi^A], \quad (3.65)$$

onde $\partial_\varphi \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, de tal forma que (ver eq. (1.32))

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_\varphi \phi^A = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (n + gB(\rho)) \partial_\varphi \phi^A \rightarrow 0.$$

No limite, $\rho \rightarrow \infty$, a função deve ser da forma:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} B(\rho) = -\frac{n}{g}. \quad (3.66)$$

Condição de contorno que é equivalente à eq. (3.16), só que para uma teoria não-Abeliana.

Escolhemos um A em particular, para os outros é equivalente, na equação de movimento dos campos de Higgs na eq. (3.48)

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^A + ig [\partial_\mu B^\mu, \phi^A] + 2ig [B_\mu, \partial^\mu \phi^A] - g^2 [B_\mu, [B^\mu, \phi^A]] = -\frac{\delta V}{\delta \phi^A}$$

Usando o ansatz (3.60)

$$\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^A}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \varphi^2} - 2ig \frac{B(\rho)}{\rho} [M, \partial_\varphi \phi^A] - \frac{g^2}{\rho^2} B^2(\rho) [M, [M, \phi^A]] = \frac{\delta V}{\delta \phi^A}$$

No quarto termo da equação podemos usar a eq. (3.65)

$$\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^A}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\rho^2} (2ngB(\rho) + g^2 B^2(\rho)) [M, [M, \phi^A]] = \frac{\delta V}{\delta \phi^A}$$

Para poder separar a equação de movimento propomos (com base na eq. (3.65))

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \varphi^2} = -\frac{n^2}{\rho^2} [M, [M, \phi^A]]. \quad (3.67)$$

chegamos, usando o ansatz (3.60), à seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^A}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} (n + gB(\rho))^2 [M, [M, \phi^A]] = \frac{\delta V}{\delta \phi^A}.$$

Para separar as equações propomos, apartir da equação (3.67)

$$n^2 [M, [M, \phi^A]] = C_n^A(\rho) \phi^A \quad (3.68)$$

Desta forma:

$$\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^A}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} C_n^A(\rho) [n + gB(\rho)]^2 \phi^A = \frac{\delta V}{\delta \phi^A}.$$

Usando o ansatz (3.58), vemos que

$$\frac{\partial^2 F^A(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F^A(\rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} C_n^A(\rho) [n + gB(\rho)]^2 F^A(\rho) - \Omega_n \frac{\delta V}{\delta \phi^A} \Omega_n^{-1} = 0. \quad (3.69)$$

Chegamos à forma da eq. (3.14) mas com o termo $C_n^A(\rho)$ que carregamos pelo fato de ser uma teoria não-Abeliana.

A equação de movimento para o potencial de gauge B_μ

$$(\partial_\mu + ig [B_\mu, \cdot]) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu + ig [B^\mu, B^\nu]) = \sum_{A=1}^R ig [\partial^\nu \phi^A, \phi^A] - g^2 [[B^\nu, \phi^A], \phi^A]$$

Usando o ansatz (3.60) (só sobrevive o termo que é proporcional a $\partial_\mu \partial^\mu B^\nu$) temos uma equação de movimento da forma:

$$-\nabla^2 \left(\frac{1}{\rho} B(\rho) M \right) + \sum_{A=1}^R ig [\partial_\nu \phi^A, \phi^A] + \frac{g^2}{\rho} B(\rho) \sum_{A=1}^R [[M, \phi^A], \phi^A] = 0,$$

Usando novamente a condição (3.65) e substituindo na equação de movimento, obtemos

$$\frac{\partial^2 B(\rho)}{\partial \rho^2} M - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B(\rho)}{\partial \rho} M - g(n + gB(\rho)) \sum_{A=1}^{N-1} [\phi^A, [\phi^A, M]] = 0 \quad (3.70)$$

Para que seja separável impomos

$$\sum_{A=1}^R [\phi^A, [\phi^A, M]] = D_n(\rho) M \quad (3.71)$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 B(\rho)}{\partial \rho^2} M - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B(\rho)}{\partial \rho} M + g(n + gB(\rho)) D_n(\rho) M = 0. \quad (3.72)$$

Novamente temos uma equação equivalente à eq. (3.15), onde podem ser escolhidas as funções:

$$F^A(\rho) = \sum_{\pm\alpha} f_\alpha^A(\rho) E_\alpha = \frac{f^A(\rho)}{\sqrt{N}} (E_{\alpha_A} + E_{-\alpha_A}) \quad (3.73)$$

onde os geradores E_{α_A} são os geradores de *subida* $E_{+\alpha_A}$ e de *descida* $E_{-\alpha_A}$ associados às raízes α_A . $f^A(\rho)$ é uma função escalar. Para a eq. (3.68), usamos

$$C_n^A(\rho) = (\mathbf{m} \cdot \alpha^A)^2 = (k_n^A)^2, \quad k_n^A \in \mathbb{Z}. \quad (3.74)$$

Então se tomarmos a condição usada na eq. (3.74), definimos agora a forma de $D_n(\rho)$

$$D_n(\rho) \mathbf{m} = 2 \sum_{A=1}^R k_n^A \frac{(f^A(\rho))^2}{N} \alpha^A \rightarrow D_n(\rho) = \frac{2}{m^2} \sum_{A=1}^R (k_n^A)^2 \frac{(f^A(\rho))^2}{N}. \quad (3.75)$$

O coeficiente (3.75) envolve as funções escalares $f^A(\rho)$ de maneira análoga ao caso de Nielsen-Olesen.

Os campos escalares ϕ^A e ψ^B têm propriedades topológicas apropriadas, dado isto só precisamos fazer algumas restrições sobre os campos. Para $SU(N)$ possuímos $(N-1)$ -classes não triviais e portanto $(N-1)$ -bósons de Higgs ϕ^A , dessa forma A corre de 1 até $N-1$. De outro lado, também temos uma classe trivial correspondente ao vácuo trivial da teoria relacionado com ψ^B (na sub-álgebra de Cartan), todos os B -campos são equivalentes entre si e portanto um campo ψ^B é suficiente. O qual já era uma condição imposta e conhecida desde o começo porque $R+T = (N-1) + 1 = N$.

Com as considerações acima redefinimos a densidade Lagrangiana (3.52), da seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Tr [B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}] + \sum_{A=1}^{N-1} Tr [D_\mu \phi^A D^\mu \phi^A] + Tr [D_\mu \psi^B D^\mu \psi^B] - V(\phi^A, \psi). \quad (3.76)$$

Além disto temos os ansätze para os diferentes campos

$$\phi^A = \frac{f^A(\rho)}{\sqrt{N}} \Omega_n^{-1}(\varphi) (E_{\alpha_A} + E_{-\alpha_A}) \Omega_n(\varphi), \quad (3.77)$$

$$\psi^B = \sum_{j=1}^{N-1} C_j^B H_j, \quad (3.78)$$

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r})]_\varphi = -\hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} B(\rho) M, \quad (3.79)$$

Até este momento não apresentamos a forma explícita das matrizes relacionadas com a sub-álgebra de Cartan. Os geradores desta álgebra para o grupo $SU(N)$, são os H_l , com $l = 1, \dots, N-1$, cujos elementos de matriz são [28]

$$[H_l]_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}} \left(\sum_{k=1}^l \delta_{mk} \delta_{nk} - l \delta_{m,l+1} \delta_{n,l+1} \right). \quad (3.80)$$

O gerador H_{N-1} é da forma:

$$H_{N-1} = \frac{1}{\sqrt{2N(N-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-N \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

E onde o peso magnético correspondente é

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{2(N-1)}{N}} (0, 0, \dots, 0, 1). \quad (3.82)$$

Os elementos de matriz dos geradores E_{α_A} são

$$(E_{\alpha_A})_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{iA} \delta_{jN}, \quad A = 1, \dots, N-1. \quad (3.83)$$

Por último temos que

$$k_n^A = \sqrt{\frac{2(N-1)}{N}} \alpha_{N-1}^A = \sqrt{\frac{2(N-1)}{N}} \sqrt{\frac{N}{2(N-1)}} = 1 \quad (3.84)$$

são independentes de A , então para todo A temos que $k_n^A = 1$.

Como os C_n^A e D_n estão relacionados com k_n^A e temos a condição, eles vão mudar respectivamente como

$$C_n^A(\rho) = 1, \quad (3.85)$$

$$D_n(\rho) \equiv D(\rho) = \frac{1}{N-1} \sum_{A=1}^{N-1} (f^A(\rho))^2. \quad (3.86)$$

Lembrando que $m^2 = 2(N-1)/N$.

Usando (3.85) e (3.86) em (3.69) e (3.72) temos um conjunto de equações de movimento:

$$\frac{d^2 F^A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dF^A(\rho)}{d\rho} - \frac{[n + gB(\rho)]^2}{\rho^2} F^A(\rho) - v_A(\rho) F^A(\rho) = 0, \quad (3.87)$$

$$\frac{d^2 B(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dB(\rho)}{d\rho} - g(n + gB(\rho)) D(\rho) = 0, \quad (3.88)$$

onde

$$v_A(\rho) F^A(\rho) = \Omega_n \frac{\delta V}{\delta \phi^A} \Omega_n^{-1} \quad (3.89)$$

Pondo em evidência as condições de fronteira, para que a energia seja finita (análogas às de Nielsen-Olesen, eqs. (3.16) e (3.17))

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f^A(\rho) = \left(\frac{N \text{Tr} [(\phi_{\min}^A)^2]}{\text{Tr} [(E_{\alpha_A} + E_{-\alpha_A})^2]} \right)^{1/2}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} B(\rho) = -\frac{n}{g}, \quad (3.90)$$

$$f^A(0) = B(0) = 0. \quad (3.91)$$

As eqs. (3.87) e (3.88) são as equações diferenciais para o grupo $SU(N)$ explicitamente equivalentes às equações diferenciais (3.14) e (3.15) para o modelo $U(1)$ proposto por Nielsen e Olesen.

3.3 Vórtices em $SU(2)$

O grupo $SU(2)$ não pode ter soluções tipo vórtice porque são triviais (condição (B.13) para grupos superiores), então escolhemos o grupo quociente $SU(2)/\mathbb{Z}_2$, com $\Pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, já que este oferece soluções não-triviais que garantem a existência de vórtices [29].

A Lagrangiana para $SU(2)$ é da forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathbf{B}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi) \cdot (D^\mu \phi) + \frac{1}{2} (D_\mu \psi) \cdot (D^\mu \psi) - V(\phi, \psi), \quad (3.92)$$

Os geradores τ^a do grupo $SU(2)$ são as matrizes de Pauli

$$\begin{aligned}\tau_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.93)$$

Temos um só gerador de Cartan, e pode-se comparar com a eq. (3.81),

$$H = \frac{1}{2}\sigma_3. \quad (3.94)$$

Devido ao fato que só temos um gerador de Cartan, então $A = 1$, e portanto $\phi^A \equiv \phi$.

Da eq. (3.51) vemos que em forma explícita para $SU(2)$,

$$\Omega(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-in\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{in\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

Usando também a forma explícita para M

$$M = \frac{i}{n}\Omega^{-1}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

Vemos que a matriz M corresponde ao gerador τ_3 apresentado na eq. (3.93). Com a combinação dos operadores $E_{\pm\alpha}$ obtemos alguns geradores de grupo:

$$E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1, \quad (3.97)$$

A raiz α e o peso m vão ser, respectivamente

$$\alpha_1 = (0, 1), \quad \alpha_2 = (1, 0), \quad m = (0, 1). \quad (3.98)$$

Dessa forma $k_n = 1$ satisfaz a condição (3.84).

Os campos de Higgs vão ser uma combinação das matrizes de Pauli, então é possível exprimi-los como uma combinação destas matrizes

$$\phi = \phi_a\tau_a \equiv \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 \phi_a\sigma_a, \quad \psi = \psi_a\tau_a \equiv \sum_{a=1}^3 \frac{1}{2}\psi_a\sigma_a. \quad (3.99)$$

Usamos os ansätze (3.77), (3.78) e (3.79), mas para $SU(2)$

$$\phi = \frac{f(\rho)}{2}\Omega^{-1}\sigma_1\Omega, \quad (3.100)$$

$$\psi = C_1 H_1 = C'_1 \sigma_3 \quad (3.101)$$

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r})]_\varphi = -\hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} B(\rho) M, \quad (3.102)$$

onde C'_1 é uma constante a determinar e onde $n = 1$.

Com os campos de Higgs definidos então propomos o potencial $V(\phi, \psi)$ da Lagrangiana (3.39) para o caso $SU(2)$, que é da forma [29]

$$V(\phi, \psi) = -c_2\psi^2 + c_4\psi^4 - d_2\phi^2 + d_4\phi^4 + e_2(\phi \cdot \psi)^2 + e_4\phi^2\psi^2, \quad (3.103)$$

onde $c_2 > 0$, $c_4 > 0$, $d_2 > 0$, $d_4 > 0$, $e_2 > 0$ e $e_4 > 0$, são constantes positivas. Conseguimos obter o estado vácuo da teoria mediante a minimização do potencial, para os diferentes campos de Higgs e suas combinações,

$$\begin{aligned}\frac{\delta V(\phi, \psi)}{\delta \psi^2} &= -c_2 + 2c_4\psi^2 + e_4\phi^2 = 0 \\ \frac{\delta V(\phi, \psi)}{\delta \phi^2} &= -d_2 + 2d_4\phi^2 + e_4\psi^2 = 0 \\ \frac{\delta V(\phi, \psi)}{\delta \phi \cdot \psi} &= -2e_2(\phi \cdot \psi) = 0;\end{aligned}$$

Asumimos que ϕ e ψ são não-colineares [22], além disto a desigualdade de Cauchy-Schwarz vai ser sempre ortogonal (para os vácuos). Escolher os campos ortogonais é selecionar a máxima quebra de simetria, obtemos 3 mínimos

$$Tr[\psi_{\min}^2] = \frac{d_2e_4 - 2c_2d_4}{2(e_4^2 - 4c_4d_4)}, \quad Tr[\phi_{\min}^2] = \frac{c_2e_4 - 2c_4d_2}{2(e_4^2 - 4c_4d_4)}, \quad Tr[(\phi\psi)_{\min}] = 0, \quad (3.104)$$

e portanto os vácuos, respectivamente são:

$$f_0 \equiv \left(\frac{d_2e_4 - 2c_2d_4}{2(e_4^2 - 4c_4d_4)} \right)^{1/2}, \quad h_0 \equiv \left(\frac{c_2e_4 - 2c_4d_2}{2(e_4^2 - 4c_4d_4)} \right)^{1/2}. \quad (3.105)$$

Re-escrevemos o potencial

$$\begin{aligned}V(\phi, \psi) &= -2c_2Tr[\psi^2] + 4c_4(Tr[\psi^2])^2 - 2d_2Tr[\phi^2] + 4d_4(Tr[\phi^2])^2 \\ &\quad + 4e_2(Tr[\phi\psi])^2 + 4e_4Tr[\phi^2]Tr[\psi^2],\end{aligned} \quad (3.106)$$

e derivamos com respeito ao campo ϕ

$$\frac{\delta V}{\delta \phi} = -4d_2\phi + 16d_4\phi Tr[\phi^2] + 8e_2\psi Tr[\phi\psi] + 8e_4\phi Tr[\psi^2].$$

Tomando os ansätze (3.100) e (3.101), para esta derivada,

$$\frac{\delta V}{\delta \phi} = -2d_2f\Omega_n^{-1}\sigma_1\Omega_n + 4d_4f^3\Omega_n^{-1}\sigma_1\Omega_n + 2e_2C_1^2f\sigma_3Tr[\Omega_n^{-1}\sigma_1\Omega_n\sigma_3] + 2e_4C_1^2f\Omega_n^{-1}\sigma_1\Omega_n.$$

Temos que $\Omega_n\sigma_3 = \sigma_3\Omega_n$, porque $\Omega_n \sim e^{-i\varphi\sigma_3/2}$, então $Tr[\Omega_n^{-1}\sigma_1\Omega_n\sigma_3] = Tr[\Omega_n^{-1}\sigma_1\sigma_3\Omega_n] = Tr[\sigma_1\sigma_3] = 0$ [30].

De outro lado no limite assintótico para ψ^2 , isto é quando $\rho \rightarrow \infty$, encontramos

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} Tr[\psi^2] = Tr[\psi_{\min}^2] = \frac{1}{2}C_1^2 = f_0^2,$$

e portanto

$$C_1 = \sqrt{2}f_0. \quad (3.107)$$

Dessa maneira determinamos o valor da constante que acompanha (3.101).

Então as equações de movimento são obtidas a partir de (3.87) e (3.88)

$$\frac{d^2F(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dF(\rho)}{d\rho} - \frac{[n + gB(\rho)]^2}{\rho^2} F(\rho) - v(\rho)F(\rho) = 0,$$

$$\frac{d^2 B(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dB(\rho)}{d\rho} - g[n + gB(\rho)] f(\rho) = 0,$$

onde

$$v(\rho) F(\rho) = \Omega_n \frac{\delta V}{\delta \phi} \Omega_n^{-1} = -4d_4 \left[\frac{1}{4d_4} (2d_2 - 4e_4 f_0^2) - f^2 \right] f \sigma_1.$$

Novamente vamos usar os ansätze (3.100), (3.101) e (3.102) nas equações de movimento.

Vemos que a equação de movimento para $F(\rho)$, lembrando que $F(\rho) = \frac{1}{2} f(\rho) \sigma_1$, é da forma

$$\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df(\rho)}{d\rho} - \frac{[n + gB(\rho)]^2}{\rho^2} f(\rho) + 8d_4 \left[\frac{1}{2d_4} (d_2 - 2e_4 f_0^2) - f^2(\rho) \right] f(\rho) = 0$$

Esta equação é quase idêntica à equação de Nielsen-Olesen para teorias de gauge abelianas (ver eq. (3.14)),

$$\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df(\rho)}{d\rho} - \frac{[n + eA(\rho)]^2}{\rho^2} f(\rho) + 4c_4 [f_0^2 - f^2(\rho)] f(\rho) = 0.$$

Com certeza sabemos que o termo que acompanha ao $f^2(\rho)$ na soma deveria ser proporcional ao h_0^2 , comparando com o caso Abeliano (eq. (3.14)). Determinamos que o valor deste termo é função das constantes do potencial, e claramente observamos que

$$\frac{1}{2d_4} (d_2 - 2e_4 f_0^2) = 2h_0^2 \quad (3.108)$$

Re-escrevemos as equações de movimento

$$\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df(\rho)}{d\rho} - \frac{[n + gB(\rho)]^2}{\rho^2} f(\rho) + 8d_4 [2h_0^2 - f^2(\rho)] f(\rho) = 0, \quad (3.109)$$

$$\frac{d^2 B(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dB(\rho)}{d\rho} - 2g[n + gB(\rho)] h_0^2 = 0, \quad (3.110)$$

com condições de fronteira

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) = (2Tr[\phi_{\min}^2])^{1/2}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} B(\rho) = -\frac{n}{g}, \quad (3.111)$$

$$f(0) = B(0) = 0. \quad (3.112)$$

As equações eq. (3.109) e (3.110), foram resolvidas de maneira aproximada ao caso Abeliano de Nielsen e Olesen. Sem preâmbulos a solução para $B(\rho)$ é uma função de MacDonald K_1

$$B(\rho) \simeq -\frac{n}{g} [1 - 2gh_0 \rho K_1(2gh_0 \rho)]. \quad (3.113)$$

A solução completa na sua forma explícita é

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r})]_\varphi \simeq \frac{n}{2g} \sigma_3 \left[\frac{1}{\rho} - 2gh_0 K_1(2gh_0 \rho) \right]. \quad (3.114)$$

Já foi exposto que a matriz M na eq. (3.96) corresponde ao gerador τ_3 na eq. (3.93). De outro lado, a solução obtida para a supercondutividade na eq. (2.42) e por Nielsen-Olesen na eq. (3.36), é fácil ver que o comprimento característico ou comprimento de onda de Compton, λ , é

$$\lambda = \frac{1}{2gh_0} = \frac{1}{m_v}, \quad (3.115)$$

onde m_v é a “massa do campo de gauge” e onde h_0 foi definido na eq. (3.105). Além disto, usando um argumento similar ao usado para resolver a equação (2.48), isto é $f(\rho) = \sqrt{2}h_0 + \eta(\rho)$ quando $\eta/(\sqrt{2}h_0) \ll 1$ como uma solução que está infinitamente próxima ao vácuo, obtemos uma solução da forma $\eta(\rho) \sim e^{-\xi^{-1}\rho}$, e portanto obtemos a forma para o comprimento de coerência

$$\xi = \frac{1}{4h_0\sqrt{2d_4}} = \frac{1}{m_s}. \quad (3.116)$$

Mediante (3.115) e (3.116), podemos calcular o parâmetro de Ginzburg-Landau:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \frac{m_s}{m_v} = \frac{2\sqrt{2d_4}}{g}.$$

Vórtices em teorias de campos com quebra dinâmica de simetria

Nos capítulos anteriores vimos que as características dos vórtices (ou do tipo do supercondutor) dependem crucialmente da massa do boson gerada na quebra espontânea de simetria. A idéia da quebra de simetria através do mecanismo de Higgs tornou-se bastante comum, mas esta não é a única forma de quebrar simetrias e gerar massas. Na verdade, mesmo na Eletrodinâmica Quântica é possível atribuir uma massa nua ao foton e ainda ter uma teoria renormalizável e unitária [33]. Tal possibilidade não ocorre no caso de teorias de gauge não-Abelianas, no entanto existe a possibilidade de um mecanismo dinâmico de quebra de simetrias onde os campos da teoria se rearranjam gerando o equivalente do boson de Higgs e campos de gauge massivos. O exemplo clássico deste tipo de teoria, no caso de teorias com fermiônicos, é o modelo de Nambu-Jona-Lasinio [34] e este tipo de mecanismo é denominado quebra dinâmica de simetria.

Vamos exemplificar, para o caso Abeliano, como é possível construir uma Lagrangiana massiva invariante de gauge acrescentando a teoria o seguinte termo de massa

$$M_A^2 (A_\mu - g^{-1}U(\theta)\partial_\mu U^{-1}(\theta))^2, \quad (4.1)$$

onde

$$U(\theta) = e^{i\theta}.$$

A Lagrangiana é invariante de gauge sob a transformação

$$A'_\mu = V A_\mu V^{-1} - \frac{1}{g}(\partial_\mu V)V^{-1},$$

e

$$U' = U(\theta') = VU,$$

desde que tenhamos uma equação de movimento para U igual a

$$D_\mu (A^\mu - g^{-1}U\partial_\mu U^{-1}) = 0 \quad (4.2)$$

que pode ser resolvida como uma série de potências em g [35]. Na verdade o parâmetro θ deverá ser substituído da seguinte forma

$$\theta = g \frac{1}{\square} \partial \cdot A + O(g^2). \quad (4.3)$$

Isto irá gerar uma Lagrangiana não-local e não-polinomial, mas estes problemas são eliminados pela condição de vínculo da Eq.(4.3). Em última instância θ será reconhecido como um campo efetivo cujas características são discutidas na Ref. [35]. A extensão deste mecanismo ao caso não-Abeliano pode ser visto na Refs. [35] e [36] e não será discutido em detalhe aqui. A Lagrangiana resultante neste esquema pode ser vista como uma Lagrangiana efetiva para a teoria de gauge, mas o problema fundamental é entender qual a origem da massa M_A !

Nesta dissertação vamos trabalhar com Lagrangianas que contêm um termo de massa para o boson de gauge, sem a necessidade de introduzir um campo de Higgs fundamental para que este termo apareça. Vamos verificar que estas Lagrangianas levam a uma equação de movimento que admitem uma solução do tipo vórtice. Não vamos discutir a origem da Lagrangiana em questão. Como dissemos anteriormente: O problema fundamental fica por conta do entendimento da origem da massa M_A . Este é um problema complexo, sendo que esta massa tem uma origem quântica cuja existência no caso não-Abeliano foi discutida pela primeira vez na Ref. [37] e sómente agora está se chegando a um melhor entendimento deste mecanismo [38].

4.1 O modelo Abeliano

Consideremos a densidade Lagrangiana para um modelo dinâmico [35], com um termo de massa para um campo vetorial A^μ , o qual é da forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_A^2 A_\mu A^\mu \quad (4.4)$$

onde $M_A \neq 0$, a Lagrangiana correspondente à teoria com um bóson vetorial massivo é chamada eletrodinâmica massiva*. Esta Lagrangiana não é invariante de gauge, devido a este fato modificamos a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_A^2 \left(A_\mu + \frac{i}{e} (\partial_\mu U) U^{-1} \right)^2, \quad (4.5)$$

onde e é uma constante de acoplamento e

$$U = e^{-i\theta(x)}. \quad (4.6)$$

Esta Lagrangiana é invariante sob transformações

$$U \rightarrow VU, \quad (4.7)$$

$$A_\mu \rightarrow VA_\mu V^{-1} + \frac{i}{e} V \partial_\mu V^{-1}. \quad (4.8)$$

*A Lagrangiana com o termo massivo é chamada Lagrangiana de Stueckelberg, e é uma teoria re-normalizável desde que os vínculos sobre $\theta(x)$ sejam obedecidos.

onde V é uma matriz de transformação. Este modelo basicamente pertence ao grupo $U(1)$, o mesmo da eletrodinâmica, só que possui um termo de massa.

Da Lagrangiana extraímos as equações de movimento para A_μ

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + M_A^2 \left(A^\nu + \frac{i}{e} (\partial^\nu U) U^{-1} \right) = 0, \quad (4.9)$$

e para U temos uma equação de movimento da forma:

$$\partial_\mu \left(A^\mu + \frac{i}{e} (\partial^\mu U) U^{-1} \right) = 0, \quad (4.10)$$

a qual é um produto da invariância de gauge.

Usaremos o mesmo argumento de energia finita para entender como a Lagrangiana (4.5) admite soluções tipo vórtice. Retomando as idéias impostas nas eqs. (1.29) e (1.30) do primeiro capítulo para anular o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ e termo massivo no infinito, isto é no limite assintótico $\rho \rightarrow \infty$. É de notar que estamos pre-dispondo ou preparando a teoria para que possua simetria axial. O termo proporcional a M_A^2 na Lagrangiana deve ter energia finita por unidade de comprimento, considerando este termo como se fosse o potencial $V(\phi)$, examinamos:

$$E \propto \int_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} d^2x \frac{1}{2} M_A^2 \left(A_\mu + \frac{i}{e} (\partial_\mu U) U^{-1} \right)^2 \rightarrow 0, \quad (4.11)$$

isto é possível se

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} A_\mu = -\frac{i}{e} (\partial_\mu U) U^{-1} = -\frac{i}{e} \partial_\mu \varphi \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) U^{-1}, \quad (4.12)$$

Nesta configuração o campo é nulo, o qual pode ser contrastado com a eq. (4.10). Automaticamente $E \propto \int_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} d^2x F^{\mu\nu} \rightarrow 0$. Então foi escolhido dessa maneira, porque vamos garantir que a simetria é axial, e no limite quando $\rho \rightarrow \infty$ o U depende só da variável azimutal identificada como φ .

Este problema foi amplamente discutido por Cornwall em [36] e [39] como soluções clássicas numa teoria de gauge para campos quânticos. Cornwall assinala que uma teoria de gauge massiva, descrita pela Lagrangiana (4.4), admite soluções tipo vórtice. Comprovaremos que este modelo com a Lagrangiana (4.4) realmente permite ter estas soluções, para isto usaremos o ansatz típico empregado por Schaposnik [23],

$$[\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi = -\frac{A(\rho)}{\rho} \hat{e}_\varphi, \quad (4.13)$$

além disto, supomos que $U = e^{-i\theta(x)} \equiv e^{-i\theta(\varphi)}$. Dessa forma obtemos uma equação diferencial da forma

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - M_A^2 \mathbf{A} + \frac{i}{e} M_A^2 (\nabla U) U^{-1} = 0. \quad (4.14)$$

Utilizamos as coordenadas apropriadas para este problema com simetria cilíndrica,

$$\frac{\partial^2 A(\rho)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho} - M_A^2 \left(A(\rho) - \frac{1}{e} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (4.15)$$

obtemos uma equação quase idêntica à proposta por Nielsen e Olesen. É possível obter a mesma equação diferencial se

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = -n.$$

Pode se ver que esta é uma condição natural proposta por Cornwall [39]. Portanto chegamos a:

$$\frac{\partial^2 A(\rho)}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho} - M_A^2 \left(A(\rho) + \frac{n}{e} \right) = 0, \quad (4.16)$$

cuja solução já foi muito estudada e é explicitamente da forma:

$$A(\rho) = -\frac{n}{e} [1 - M_A \rho K_1(M_A \rho)]. \quad (4.17)$$

Dessa maneira a solução completa é da forma

$$[\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi = \frac{n}{e} \left[\frac{1}{\rho} - M_A K_1(M_A \rho) \right]. \quad (4.18)$$

Veja-se que a solução é exata, diferente do caso apresentado por Nielsen-Olesen quando a teoria tem quebra espontânea de simetria, a solução para $[\mathbf{A}(\mathbf{r})]_\varphi$ é aproximadamente igual, como se vê na eq. (3.23), porque são feitas aproximações sobre a componente radial do campo escalar $f(\rho)$ no limite quando $\rho \rightarrow \infty$ onde toma o valor do vácuo. O comprimento de onda de Compton é idêntico à eq. (3.35)

$$\lambda = \frac{1}{M_A}, \quad (4.19)$$

onde M_A era da forma $M_A = ef_0$.

4.2 O modelo não-Abeliano

É possível fazer uma generalização da teoria de bósons vetoriais com massa, similares ao fóton, para um campo de gauge não-Abeliano [40] associado a um grupo de gauge $SU(N)$. De maneira similar ao caso Abeliano, introduzimos uma Lagrangiana para um campo de gauge com massa M_B da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathbf{B}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_B^2 \left(\mathbf{B}_\mu + \frac{i}{g} [(\partial_\mu U) U^{-1}]^a \right)^2, \quad (4.20)$$

usando novamente o fato que $B_{\mu\nu} \equiv \mathbf{B}^{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\tau} = B_a^{\mu\nu} \tau_a$, e de forma análoga para B_μ . Normalizamos os geradores τ^a , $Tr[\tau^a \tau^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}$, e obtemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Tr[B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}] + M_B^2 Tr \left[B_\mu + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \right]^2, \quad (4.21)$$

neste caso g é a constante de acoplamento e

$$U = e^{-i\tau_a \theta_a(x)}. \quad (4.22)$$

Esta Lagrangiana é invariante sob transformações

$$U \rightarrow VU, \quad (4.23)$$

$$B_\mu \rightarrow VB_\mu V^{-1} + \frac{i}{g} V \partial_\mu V^{-1}. \quad (4.24)$$

As equações de movimento correspondentes a A_μ e U , são da forma:

$$D_\mu B^{\mu\nu} + M_B^2 \left(B^\nu + \frac{i}{g} (\partial^\nu U) U^{-1} \right) = 0, \quad (4.25)$$

$$D_\mu \left(B^\mu + \frac{i}{e} (\partial^\mu U) U^{-1} \right) = 0 \quad (4.26)$$

onde a derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ig [B_\mu, \]$ se encontra na representação adjunta.

Da mesma maneira que no caso Abelian, o tensor de campo $B_{\mu\nu} \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow \infty$, isto é que os campos de gauge desaparecem neste limite se

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} Tr [B_\mu] = -\frac{i}{g} Tr [(\partial_\mu U) U^{-1}] = -\frac{i}{g} Tr \left[\partial_\mu \varphi \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) U^{-1} \right]$$

Este é o potencial de gauge B_μ no limite assintótico $\rho \rightarrow \infty$.

Vamos propor o seguinte ansatz

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r})]_\varphi = -\frac{\hat{e}_\varphi}{\rho} B(\rho) Q \quad (4.27)$$

onde Q é a matriz diagonal (no grupo $SU(N)$). Substituindo na equação de movimento para o campo de gauge B_μ , obtemos

$$\nabla^2 B_\varphi \hat{e}_\varphi - M_B^2 \left(B_\varphi \hat{e}_\varphi + \frac{i}{g} (\partial_\varphi U) U^{-1} \right) = 0,$$

chegamos a uma equação diferencial da forma

$$\frac{\partial^2 B(\rho)}{\partial \rho^2} Q - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B(\rho)}{\partial \rho} Q - M_B^2 \left(B(\rho) Q - \frac{i}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) U^{-1} \right) = 0, \quad (4.28)$$

dessa forma se tomarmos a condição,

$$i \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) U^{-1} = -nQ.$$

Nós iremos obter:

$$\frac{\partial^2 B(\rho)}{\partial \rho^2} Q - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B(\rho)}{\partial \rho} Q - M_B^2 \left(B(\rho) + \frac{n}{g} \right) Q = 0, \quad (4.29)$$

a qual é idêntica à equação diferencial do modelo Abelian, cuja solução é da forma

$$B(\rho) = -\frac{n}{g} [1 - M_B \rho K_1(M_B \rho)] \quad (4.30)$$

e na sua forma completa:

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r})]_\varphi = \frac{nQ}{g} \left[\frac{1}{\rho} - M_B K_1(M_B \rho) \right]. \quad (4.31)$$

A qual é a solução típica de vórtice. Além disto da mesma maneira, temos que:

$$\lambda = \frac{1}{M_B}, \quad (4.32)$$

como o comprimento de onda de Compton.

Conclusões

Neste trabalho fizemos uma revisão sobre vórtices em supercondutores e teoria de campos. Isto é, tanto a supercondutividade como a teoria de campos admitem soluções clássicas estáticas em duas dimensões, as quais chamamos vórtices. Além disto, o estudo foi baseado no argumento que o sistema deve possuir um valor finito da energia por unidade de comprimento, e a partir disto deduzimos todas as propriedades e a dinâmica que implicam este tipo de soluções.

Vimos também, que a supercondutividade como uma teoria tipo Ginzburg-Landau e a teoria de campos com escalares fundamentais apresentam **quebra espontânea de simetria (QES)**, e que o resultado desta quebra, respectivamente, são o efeito Meissner e o mecanismo de Higgs (análogo da supercondutividade). As duas teorias com QES têm dois parâmetros, o comprimento característico λ e o comprimento de coerência ξ . Na supercondutividade o λ descreve a penetração do campo magnético enquanto na teoria de campos dá conta do alcance do bóson vetorial (bóson de gauge). Além disto, na supercondutividade o ξ é o raio do vórtice enquanto em teoria de campos dá conta do alcance do bóson escalar (bóson de Higgs). É de notar que λ e ξ são parâmetros fenomenológicos e contêm os parâmetros livres da teoria, depois mostramos como descrever as duas teorias em termos de um só parâmetro que possui toda a informação necessária, o parâmetro de Ginzburg-Landau κ , o qual não é mais que razão dos comprimentos característico e de coerência

Foi verificado ademais, que uma teoria com **quebra dinâmica de simetria (QDS)** também admite soluções tipo vórtice, este representa nosso principal interesse. Observamos claramente que uma teoria com QDS nas versões Abelian e não-Abelian, também podem ser expressas em termos de um comprimento característico λ e como é natural em termos da massa do bóson de gauge. No entanto, o comprimento de coerência ξ vai ser objeto de estudo em trabalhos futuros, e cabe dizer que uma teoria com QDS também apresentam bósons escalares só que serão não-fundamentais, ou seja, compostos. Evidentemente a massa efetiva destes bósons escalares (compostos) estarão relacionados como o comprimento de coerência ξ .

Por último, numa continuidade deste trabalho podemos estudar o confinamento

na cromodinâmica quântica (QCD), sendo os vórtices possivelmente os objetos fundamentais que o geram [41]. Isto é, em estudos ulteriores terão que ser entendidas as implicações dos vórtices em uma teoria não-Abeliana com QDS. Além disto, pesquisas recentes neste tipo de teorias apontam que eles (os vórtices) sejam necessários para explicar *a quebra de simetria quiral* [41].

Apêndice A

Relações matemáticas

A.1 Coordenadas cilíndricas

Em termos de coordenadas cilíndricas

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

O Jacobiano de transformação

$$J(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O elementos de linha, de área (assumindo que z não muda) e de volume, respectivamente são

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d\rho \hat{e}_\rho + \rho d\varphi \hat{e}_\varphi + dz \hat{e}_z, \\ d^2r &= \rho d\rho d\varphi \\ d^3r &= \rho d\rho d\varphi dz, \end{aligned}$$

onde \hat{e}_ρ , \hat{e}_φ e \hat{e}_z são os vetores unitários ortonormais entre si e cujos produtos vetoriais são

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho \times \hat{e}_z &= -\hat{e}_\varphi, \\ \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z &= \hat{e}_\rho, \\ \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi &= \hat{e}_z. \end{aligned}$$

O gradiente nestas coordenadas está dado por:

$$\nabla = \hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{e}_\varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

O rotacional

$$\nabla \times \mathbf{V} = \hat{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{e}_\varphi \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) + \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\varphi) + \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right).$$

tal que $\mathbf{V} \equiv (V_\rho, V_\varphi, V_z)$. Outro operador diferencial é o laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

e o laplaciano vetorial nestas coordenadas

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{V_\rho}{\rho^2} \\ \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{\rho^2} \\ \frac{\partial^2 V_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \end{pmatrix}.$$

A métrica no espaço destas coordenadas é da forma

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A.2 Considerações sobre a função K_ν

A.2.1 Solução em serie para equação diferencial de Bessel com argumento imaginário e a função $K(z)$

A equação diferencial de Bessel com argumento imaginario é da forma:

$$z^2 \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + z \frac{dZ(z)}{dz} - (z^2 + \nu^2) Z(z) = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde $z = ix$ e ν é um número não necessariamente inteiro. Ao resolver a equação por series no método de Frobenius

$$\begin{aligned} Z(z) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^{k+\lambda} \\ \frac{dZ(z)}{dz} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) z^{k+\lambda-1} \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) z^{k+\lambda-2} \end{aligned}$$

Substituindo

$$\begin{aligned} z^2 \left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) z^{k+\lambda-2} \right] + z \left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) z^{k+\lambda-1} \right] - (\nu^2 + z^2) \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^{k+\lambda} &= 0 \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) z^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) z^{k+\lambda} - \nu^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^{k+\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^{k+\lambda+2} &= 0. \end{aligned}$$

Para as tres primeiras series fazemos $\lambda = j + 2$ e na última fazemos $\lambda = j$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} a_{j+2} [(k+j+2)(k+j+1) + (k+j+2) - \nu^2] z^{k+j+2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{k+j+2} = 0.$$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} a_{j+2} \left[(k+j+2)^2 - \nu^2 \right] z^{k+j+2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{k+j+2} = 0.$$

$$a_0 (k^2 - \nu^2) z^k + a_1 \left[(k+1)^2 - \nu^2 \right] z^{k+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \left[a_{j+2} \left((k+j+2)^2 - \nu^2 \right) - a_j \right] z^{k+j+2} = 0.$$

O método de Frobenius exige que $a_0 \neq 0$, portanto o polinômio de k tem solução $k = \pm \nu$. Precisamos saber satisfazer a relação igual a zero, e dessa forma $a_1 = 0$. Ficamos então com a relação de recorrência

$$a_{j+2} = \frac{1}{(k+j+2)^2 - \nu^2} a_j$$

Para $k = \nu$ temos

$$a_{j+2} = \frac{1}{(\nu+j+2)^2 - \nu^2} a_j = \frac{1}{j^2 + 2j\nu + 4j + 4\nu + 4} a_j = \frac{1}{(j+2)(j+2\nu+2)} a_j$$

e para $k = -\nu$

$$a_{j+2} = \frac{1}{(-\nu+j+2)^2 - \nu^2} a_j = \frac{1}{j^2 - 2j\nu + 4j - 4\nu + 4} a_j = \frac{1}{(j+2)(j-2\nu+2)} a_j$$

Pegamos a raiz $k = \nu$. Se tivermos $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ vemos que os termos que são múltiplos de a_1 são zero, portanto só tomamos os termos de j que são pares

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 2(\nu+1)} a_0 = \frac{1}{2^2 \cdot 1(\nu+1)} a_0,$$

$$a_4 = \frac{1}{2^2 \cdot 2(\nu+2)} a_2 = \frac{\nu}{2^4 \cdot 2 \cdot 1(\nu+2)(\nu+1)} a_0,$$

$$a_6 = \frac{1}{6 \cdot 2(\nu+3)} a_4 = \frac{1}{2^2 \cdot 3(\nu+3)} a_4 = \frac{1}{2^6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1(\nu+3)(\nu+2)(\nu+1)} a_0, \dots$$

Então se satisfaz uma nova relação

$$a_{2p} = \frac{1}{2^{2p} p! (\nu+p) \dots (\nu+2)(\nu+1)} a_0$$

se multiplicamos e dividimos por $\nu(\nu-1)(\nu-2) \dots 2 \cdot 1$

$$a_{2p} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2) \dots 2 \cdot 1}{2^{2p} p! (\nu+p) \dots (\nu+2)(\nu+1) \nu(\nu-1)(\nu-2) \dots 2 \cdot 1} a_0 = \frac{\nu!}{2^{2p} p! (\nu+p)!} a_0$$

Portanto a série para $k = \nu$ é da forma

$$Z(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} z^{\nu+\lambda} = z^{\nu} (a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots)$$

substituindo os coeficientes, os quais estão em função de a_0

$$Z_{\nu}(z) = a_0 \left(z^{\nu} + \frac{\nu!}{2^2 \cdot 1! (\nu+1)!} z^{\nu+2} + \frac{\nu!}{2^4 \cdot 2! (\nu+2)!} z^{\nu+4} + \dots \right)$$

Resumindo

$$Z_{\nu}(z) = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nu!}{2^{2j} j! (\nu+j)!} z^{\nu+2j}$$

multiplicamos e dividimos por um 2^ν e ficamos com

$$Z_\nu(z) = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^\nu \nu!}{j! (\nu + j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2j}$$

Podemos escolher um a_0 tal que

$$a_0 = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\nu! 2^\nu (\sin \nu\pi)}$$

Então

$$Z_\nu(z) = -\frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! (\nu + j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2j} = -\frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} I_\nu(z).$$

Para $k = -\nu$ temos uma serie similar

$$Z_{-\nu}(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! (-\nu + j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2j} = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} I_{-\nu}(z)$$

Obtemos a forma final como a soma das duas soluções

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (\text{A.2})$$

que é a solução para a equação diferencial de Bessel com argumento imaginário (A.1).

Além disto, podemos ver que se $\nu \rightarrow -\nu$

$$K_{-\nu}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_\nu(z) - I_{-\nu}(z)}{\sin(-\nu\pi)} = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)} = K_\nu. \quad (\text{A.3})$$

A.2.2 Limite para $\nu \rightarrow n$ inteiro

Tomaremos uma outra solução que é também solução da equação (A.1):

$$(-1)^n I_{-\nu}(z) - (-1)^n I_\nu(z),$$

onde n é um número inteiro. Para nossas soluções tipo vórtice m é precisamente um número inteiro. Então para o caso onde $\nu \neq n$

$$\frac{(-1)^n I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \nu - n}$$

Examinemos o limite quando $\nu \rightarrow n$, se obtem uma divergência

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{(-1)^n I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \nu - n}$$

Existe além desta, uma solução $I_n(z)$ que é também solução, então

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{I_{-\nu}(z) - I_{-n}(z)}{\nu - n} - \frac{I_\nu(z) - I_n(z)}{\nu - n} \right] = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}$$

Disto concluímos que

$$K_n = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu. \quad (\text{A.4})$$

A.2.3 Derivada da função K_n

Existem fórmulas apresentadas para as funções de Bessel, que são as fórmulas de recorrência das derivadas

$$\frac{\partial}{\partial z} [z^n K_n(z)] = z^n K_{n-1}(z). \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [z^{-n} K_n(z)] = -z^{-n} K_{n+1}(z). \quad (\text{A.6})$$

que relaciona uma ordem da função K com a ordem seguinte e vice-versa.

A.2.4 Limites assintóticos da função K_n

Os limites da função $K_n(z)$ são bem conhecidos e estudados em diferentes textos. Vamos tomar os limites para $n = 0, 1$ na função, então para $z \rightarrow 0$ obtemos

$$K_0(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\ln z, \quad K_1(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{z}. \quad (\text{A.7})$$

Para $z \rightarrow \infty$, temos

$$K_0(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad K_1(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B

Homotopias

B.1 Considerações gerais

Formulemos alguns conceitos básicos da *topologia geral*. Consideremos um conjunto X o qual será nossa referência. Seja um x_i um aberto* de X , que pode representar, um conjunto, uma função, um vetor, etc. Uma coleção $T_X = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de X terá por nome *topologia* X , se satisfaz o seguinte:

- $\emptyset \in T_X$ e $X \in T_X$, onde \emptyset é o vazio.
- Se $x_1 \in T \wedge x_2 \in T \Rightarrow x_1 \cap x_2 \in T$.
- $\forall S \in T \mid \cup_{x_i \in S} x_i \in T$ (Se $S \in T_X \Rightarrow \exists \cup_i x_i = S$)

O par (X, T_X) é denominado espaço topológico.

Precisamos definir continuidade, sejam (X, T_X) e (Y, T_Y) dois espaços topológicos, $f : X \mapsto Y$ se diz contínua se e sómente se para $y_i \in Y$ existe uma imagem inversa $f^{-1}(y_i) = \{x_i \in X \mid f(x_i) = y_i\}$, a qual é um aberto. f se denomina uma função contínua ou mapeamento, então X e Y são mapeados dado f . Por exemplo, uma função f bijectiva é uma correspondência um a um entre os elementos que compõem nosso espaço.

Vamos estudar a equivêlencia entre dois espaços topológicos mediante mapeamentos contínuos chamados **homotopias**. A homotopia é um mapeamento contínuo entre dois espaços topológicos, mas a deformação gerada pela função encontra-se regulada por um parâmetro. Então um espaço X é homotópico a Y se existe uma homotopia entre eles [42].

Consideremos dois mapas f_0 e f_1 as quais são duas funções contínuas atuando sobre dois espaços topológicos X e Y , tal que $f_0, f_1 : X \mapsto Y$. Introduzimos um intervalo fechado em um espaço Euclideo $\mathbb{I} = [0, 1]$. Então os dois mapas f_0 e f_1 são homotópicos se existe uma função parametrizada por τ ($0 \leq \tau \leq 1$), tal que

*Aberto define-se como um elemento sem sua fronteira.

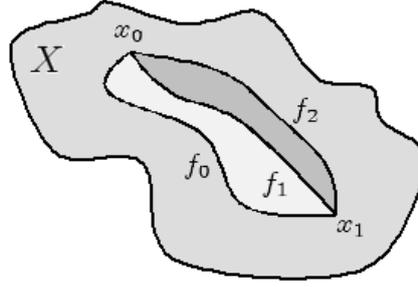


Figura B.1: Se $f_0 \sim f_1$ e $f_1 \sim f_2$ então $f_0 \sim f_2$.

$F : X \times \mathbb{I} \mapsto Y$ é uma homotopia entre f_0 e f_1 , onde $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ para cada $x \in X$. $F(x, \tau)$ é uma família de mapas intermediários entre f_0 e f_1 . As homotopias são comumente indicadas por $f_0 \sim f_1$, o símbolo (\sim) indica que existe uma relação de equivalência.

Esta propriedade permite estabelecer a equivalência entre dois espaços, por exemplo existe uma homotopia entre X e Y se temos mapeamento $f_1 : X \mapsto Y$ e há um mapeamento inverso $f_2 : Y \mapsto X$, f_2 é uma inversa homotópica a f_1 .

As equivalências homotópicas se entendem examinando os mapeamentos seguintes: $F : f_0 \sim f_1$ e $G : f_1 \sim f_2$ então $H : f_0 \sim f_2$, isto pode ser feito se escolhermos um mapeamento apropriado para as homotopias F , G e H . Como podemos escolher o mapeamento adequado? Poderíamos considerar por exemplo $H(x, \tau)$ para todo $x \in X$, cujos valores fixos inicial e final são $H(a, \tau) = x_0$ e $H(b, \tau) = x_1$, respectivamente, os quais vamos chamar os pontos finais de uma *trajetória*. Agora, $F(x, 2\tau)$ com $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$ é uma homotopia $f_0 \sim f_1$ e $G(x, 2\tau - 1)$ com $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$, uma outra homotopia é $f_1 \sim f_2$. Podemos ver que para $H(x, \tau)$ com $0 \leq \tau \leq 1$,

$$H(x, \tau) = \begin{cases} F(x, 2\tau) & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2\tau - 1) & \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

portanto $H : f_0 \sim f_2$, ver Fig. B.1. Podemos afirmar que mapas homotopicamente equivalentes formam uma classe denotada por $\{f\}$ [4].

B.2 Grupo de homotopias

As homotopias podem formar estrutura de grupo? Em um espaço X consideremos duas trajetórias f_0 entre x_0 e x_1 e f_1 entre x_1 e x_2 . Há uma composição ou produto \bullet entre f_0 e f_1 , temos $(f_0 \bullet f_1)(x) = f_2(x)$, então f_2 é uma trajetória entre x_0 e x_2 , ou

$$f_2(x) = \begin{cases} f_0(2x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f_1(2x - 1) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Supomos o espaço X como se tivesse um buraco, como se vê na Fig. B.2.

A operação \bullet permite-nos distinguir uma estrutura de grupo para classes de homotopia:

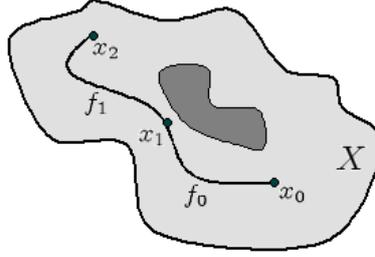


Figura B.2: Composição de duas trajetórias $(f_0 \bullet f_1)(x) = f_2(x)$.

- (i) Associatividade: $\{f_0\} \bullet (\{f_1\} \bullet \{f_2\}) = (\{f_0\} \bullet \{f_1\}) \bullet \{f_2\}$.
- (ii) Identidade: A identidade é entendida para $x \in X$, tal que $e_X : \mathbb{I} \mapsto X$, tal que $e_X(\mathbb{I}) = x$. É uma trajetória constante em X . Se f é uma trajetória com pontos finais x_0 e x_1 , temos que $\{e_{x_0}\} \bullet \{f\} = \{f\}$ e $\{f\} \bullet \{e_{x_1}\} = \{f\}$. Então as $\{e_{x_0}\}$ e $\{e_{x_1}\}$ são identidades diferentes.
- (iii) Inversa: A existência de uma trajetória inversa f^{-1} para uma trajetória f entre x_0 e x_1 vai ser $f^{-1}(x) = f(1 - x)$ de onde $\{f\} \bullet \{f^{-1}\} = \{e_{x_0}\}$ e $\{f^{-1}\} \bullet \{f\} = \{e_{x_1}\}$.

As características apresentadas em (ii) e (iii) deixam em evidência que não formam um grupo sob \bullet , de fato formam um monóide.

B.2.1 O grupo fundamental

Da seção anterior concluímos que as homotopias não formam um grupo. No entanto, podemos considerar uma nova característica para as trajetórias, “*loops*” fechados[†]. Assim, f é uma trajetória com pontos finais x_0 e x_1 tal que $x_0 = x_1$. Evidentemente a propriedade (i) de associatividade é satisfeita. Devido aos loops fechados então a identidade é única $\{e\}$, e a existência de identidade (ii) induz também a existência de um elemento inverso (iii). Desta maneira as classes de homotopia com loops formam um grupo.

O grupo formado pelas classes de homotopias com trajetórias fechadas que podem ser mapeadas a um ponto é chamado o **grupo fundamental** ou **primeiro grupo de homotopia**, o qual é identificado como $\Pi_1(X, x_0)$ ou $\Pi_1(X)$. Um intervalo fechado $\mathbb{I} = [0, 1]$, onde o ponto inicial seja igual ao final, é equivalente a um círculo S^1 com um ponto de referência x_0 . Façamos um mapeamento do tipo $f : S^1 \mapsto X$. Como exemplo instrutivo de como estes mapeamentos funcionarão, consideremos um espaço $X = \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ (o plano real menos a origem $(0, 0)$), em analogia ao espaço com um buraco na Fig. B.2. No ponto $(0, 0)$ o espaço não está definido. Existem dois tipos de trajetórias que serão permitidas, aquelas que evitam a origem (ver Fig. B.3(a)) e aquelas que não evitam a origem (ver Fig. B.3(b)).

[†]A palavra *loop* significa *laço*, mas usaremos a palavra em inglês.

As trajetórias que evitam a origem, podemos definir em todo espaço classes de homotopias definidos em todos os pontos, por isso escolhemos, sem problemas, uma homotopia apropriada onde estará definida em todo espaço o elemento identidade $\{e\}$, ou seja, os loops fechados, sem importar se são em sentido horário ou sentido anti-horário, que não contém a origem, e que são trivialmente mapeados a uma curva constante, $C(x) = x_0$.

Agora analisaremos o segundo tipo de trajetórias possíveis aquelas que contém a origem, isto torna o problema particularmente bem diferente. Neste caso analisamos quantas voltas o mapeamento dará em torno do ponto $(0, 0)$, assim contaremos o número de vezes que o domínio S^1 caberá em loops no plano real. O número de voltas ao redor da origem serão separadas por classes e vão ser diferentes se o loop está em sentido horário ou sentido anti-horário. Por exemplo, se temos uma volta em sentido horário identificamos a classe como $\{1\}$, porém se são duas voltas em sentido anti-horário a classe é identificada como $\{-2\}$ (ver Fig. B.3(b)). Concluimos então que $\Pi_1(X)$ será o conjunto dos inteiros (\mathbb{Z}), $\Pi_1(\mathbb{R}^2 - (0, 0)) = \mathbb{Z}$, porque podemos dar um número inteiro de voltas (n -voltas) em torno da origem. Para n -voltas a classe designada é $\{n\}$, conhecida como **o número winding**[‡]

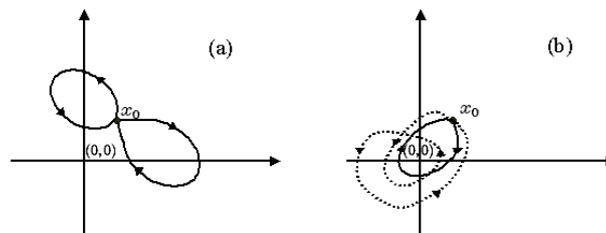


Figura B.3: Equivalência homotópica de diferentes números winding. (a) Para o número zero $\{e\} \equiv \{0\}$. (b) Para $\{1\}$ a curva com linha cheia e $\{-2\}$ com linha pontilhada.

Dois espaços X e Y que sejam homotópicamente equivalentes obedecem

$$\Pi_1(X) = \Pi_1(Y), \quad (\text{B.3})$$

que faz X e Y idênticos. As classes equivalentes de nosso interesse são da forma

$$\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}, \quad (\text{B.4})$$

que possuem um número winding diferente de zero. Um vórtice, especialmente, é estável se existe um número winding diferente de zero para o primeiro grupo homotópico. O número winding corresponde à *carga topológica* (também nomeada número kink).

Quando um espaço X é mapeavel trivialmente a uma trajetória constante, isto é a um ponto x_0 , então dizemos que X tem *conectividade simples*. De outra maneira X

[‡]A palavra *winding* significa *enrolamento*, mas usaremos a palavra em inglês.

é denominado com *conectividade múltipla*. Esta característica resulta muito importante para nosso problema (e em geral para a física) e é uma forma de fazer a conexão entre os efeitos físicos e a topologia. A conectividade múltipla proporciona as soluções tipo vórtice.

Examinemos uma situação em particular e de nosso interesse como exemplo de conectividade [42]. Suponhamos um espaço \mathbb{R}^3 onde temos duas trajetórias, as quais estão sujeitas a um plano \mathbb{R}^2 . As duas trajetórias identificadas como C_1 e C_2 têm como ponto inicial a e um ponto final b , os dois sobre o plano como se vê na Fig. B.4. Dessa forma podemos definir uma função

$$\chi(a) = 0, \quad \chi(x) = \int_a^x \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{B.5})$$

onde \mathbf{A} é algum vetor sobre o elemento de linha $d\mathbf{l}$. Então estabelecemos as duas trajetórias sobre o plano

$$\chi_1(b) = \int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad \chi_2(b) = \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{B.6})$$

Se a inversa $\chi_2^{-1} = -\chi_2$, é possível fazer a diferença das duas funções da eq. (B.6):

$$\chi_1(b) - \chi_2(b) = \int_{C_1 - C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{B.7})$$

C representa a curva total em um loop fechado. Para que a função seja uni-valorada

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\sigma = 0, \quad (\text{B.8})$$

onde foi usado o theorema de Stokes e $d\sigma$ é o elemento de área em uma superfície S . Podemos ver que se $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ então $\mathbf{A} = \nabla\varphi$, e portanto

$$\chi(x) = \int_a^x \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \varphi(x) - \varphi(a) = \varphi(x). \quad (\text{B.9})$$

Neste caso \mathbf{A} se diz integrável.

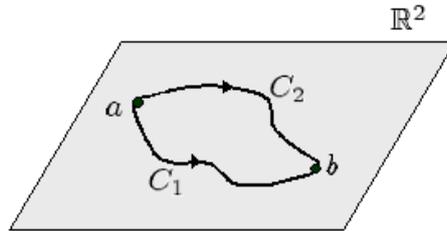


Figura B.4: Duas trajetórias C_1 e C_2 de a a b .

Vamos supor agora um caso onde $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$. Neste caso o \mathbf{A} seria não-integrável e além tampouco uni-valorado isto é, de conectividade múltipla. Consideremos um caso em particular da mecânica quântica e o caminho representado na eq. (B.5), o qual se apresenta na forma de um fator de fase acompanhando a função

de onda. O fator de fase é não-integrável. Como exemplo tomemos um anel onde a região central não faz parte do espaço como é mostrado na Fig. B.5. Examinemos um exemplo físico de interesse essencial para o estudo de vórtices. Um campo magnético \mathbf{H} interage com um elétron no contorno $C = C_1 - C_2$. Agora \mathbf{A} representa o vetor potencial e a função de onda para este sistema é expressada da maneira seguinte

$$\Psi(x) = e^{-i\chi(x)}\Psi(a) = \exp\left(-ie \int_a^x \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \Psi(a) \quad (\text{B.10})$$

Então o fator de fase é

$$\chi = e \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = e \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\sigma = e \int_S \mathbf{H} \cdot d\sigma = e\Phi \quad (\text{B.11})$$

o qual muda em proporção à integral do vetor potencial. A função de onda estaria multivaluada no mesmo ponto ao redor do buraco, isto não é satisfatório para descrever um sistema físico. Φ é o fluxo do campo \mathbf{H} que passa através da superfície S , neste caso para conservar a função uni-valorada $-e\Phi = 2\pi n$, onde n é um número inteiro. Este caso vai ser retomado mais adiante.

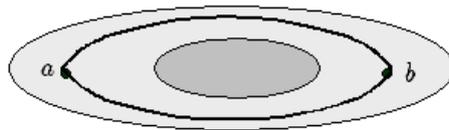


Figura B.5: Exemplo de uma trajetória para um sistema que é multiplemente conexo.

Nos sistemas com soluções tipo vórtice procuramos que o parâmetro de ordem na supercondutividade e o campo de Higgs na teoria gauge sejam uni-valorados. Estas soluções serão examinadas em detalhe.

B.2.2 Os grupos superiores

Retomando, podemos estender os mapeamentos do grupo círculo S^1 de maneira similar, mas para dimensões diferentes maiores que 1, isto é uma esfera em n -dimensões S^n (hiper-esfera). Tomemos um cubo n -dimensional

$$\mathbb{I}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_i \leq 1\}, \quad (\text{B.12})$$

com suas faces identificadas e com o pólo norte x_0 de S^n . Novamente com um tratamento análogo as classes de mapeamentos com um ponto fixo na imagem $f(x_0) = y_0$ formam um grupo denominado **n -ésimo grupo homotópico** ou **grupo superior** $\Pi_n(X)$. O n -ésimo grupo homotópico de um mapeamento com conjunto imagem topologicamente equivalente a uma esfera de n -dimensões é o conjunto dos inteiros, $\Pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Este resultado diz que os mapeamentos $f : S^n \mapsto S^n$ estão caracterizados pelo fato de como uma hiper-esfera cobre a outra hiper-esfera.

Podemos fazer algumas considerações interessantes sobre os grupos superiores. O grupo $\Pi_n(X)$ é Abelian para $n > 1$ mas não necessariamente para $n = 1$, isto é

para o grupo fundamental. Para uma m -esfera

$$\Pi_n(S^m) = 0, \quad m > n. \quad (\text{B.13})$$

No entanto, se tomamos o grupo $m < n$ ele é não-trivial. Nas teorias tipo Yang-Mills estes grupos são comuns. Observe-se que mapeamentos para o caso do grupo Abelian $U(1)$ não são permitidos, assim $\Pi_n(U(1)) = 0$ com $n \geq 2$, todos serão homotópicos ao mapa identidade.

B.2.3 O grupo quociente

É importante enfatizar a construção de espaços quocientes associados à estrutura de grupos [28]. Consideremos um sub-grupo H o qual pertence ao grupo G , $H \in G$. Consideremos dois elementos arbitrários $g_1, g_2 \in G$, os quais satisfazem $g_1^{-1}g_2 \in H$. Um **co-conjunto esquerdo** (coset esquerdo) de um subgrupo H no grupo G é um conjunto de elementos formados pela ação dos elementos de H pela direita sobre um elemento g do grupo G , isto é

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Então um espaço co-conjunto é denotado como

$$G/H = \{gH \mid g \in G\} \quad (\text{B.14})$$

Se um subgrupo H é invariante, isto é

$$gH = Hg \rightarrow gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G.$$

Então para todo $g \in G$,

$$(g_1H)(g_2H) = (g_1Hg_1^{-1})(g_1g_2H) = (g_1g_2)(g_2^{-1}Hg_2H), \quad (\text{B.15})$$

se $(g_2^{-1}Hg_2H) = H$, o espaço é chamado **espaço quociente** de G por H , G/H . Os subgrupos triviais a identidade e e H mesmo são invariantes para qualquer grupo.

Na teoria homotópica aplicada à física precisamos do conceito do grupo quociente (G/H). Seja G um grupo gauge qualquer que tem um subgrupo de H denominado o não-quebrado. Se aplicarmos um elemento $h \in H$ sobre um vácuo da teoria se obtem $h\phi^0 = \phi^0$. Também podemos pensar que todos os vácuos são da forma $g\phi^0$, para algum g em G . Aqueles campos associados ao sub-grupo H permanecem sem massa enquanto os campos associados ao grupo G são massivos. O conjunto de vácuos (ou zeros) podem ser identificados com um espaço quociente G/H [2].

No caso de um grupo genérico $SU(N)$, se analisarmos se ele tem soluções tipo vórtice estudaremos um valor de N em particular. Analizemos o grupo especial de matrizes unitárias 2×2 de determinante 1, o grupo $G = SU(2)$. A matriz 2×2 mais geral que seja unitária ($U^\dagger U = 1$), escreve-se como:

$$U = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

pela condição de $\det(U) = 1$ temos,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (\text{B.17})$$

A qual é equação de uma esfera tri-dimensional embebida em um espaço de 4 dimensões. Existe uma equivalência topológica entre o grupo $SU(2)$ e S^3 . No entanto, sabemos de antemão que $\Pi_1(S^3) = 0$ e portanto não há possibilidades de ter uma solução tipo vórtice porque o espaço tem conectividade simples.

Para buscar estabilidade topológica, estudamos os grupos quocientes $SU(N)/\mathbb{Z}_N$,

$$\begin{aligned} \Pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2 \\ \Pi_1(SU(3)/\mathbb{Z}_3) &= \mathbb{Z}_3 \\ &\vdots \\ \Pi_1(SU(N)/\mathbb{Z}_N) &= \mathbb{Z}_N \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

o $\mathbb{Z}_N \equiv \mathbb{Z}(SU(N))$ é o centro do grupo $SU(N)$. Isto é interessante porque ao contrário de uma teoria gauge Abelianas tipo $U(1)$ onde temos um número infinito de vórtices diferentes, no caso não-Abeliano temos um número restrito ou finito de vórtices com números winding $\pm N \bmod N$. Por exemplo, $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ tem vórtices com windings $0, \pm 1$ e $SU(3)/\mathbb{Z}_3$ tem vórtices com windings $0, \pm 1, \pm 2$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skargerstam and A. Stern, *Classical Topology and Quantum States* (World Scientific Publishing, Farred Road, Singapore, 1991).
- [2] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*. (Cambridge University Press., New York, USA, 1985).
- [3] G. H. Derrick, *J. Math. Phys.* **5**, 1252 (1964).
- [4] W. Marciano and H. Pagels, *Quantum Chromodynamics*. (North Holland Publishing Company, Rockefeller Univ. New York, USA, 1978).
- [5] J. Preskill, *Vortices and Monopoles*.(Lectures presented at the 1985 Les Houches Summer School, Les Houches, France, Jul 1 - Aug 8, 1985).
- [6] H. C. Tze and Z. F. Ezawa, *Phys. Rev.* **D14**, 1006 (1976).
- [7] E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).
- [8] H. K. Onnes, *Leiden Comm.* **120b**, **122b**, **124c** (1911).
- [9] R. de Bruyn Ouboter, *Heike Kamerlingh Onnes's Discovery of Superconductivity*, *Scientific American*, Março (1997).
- [10] R. Baquero, O. Navarro, *Ideas Fundamentales de la Superconductividad* (Cinvestav, Universidad Autónoma de México, México D. F., México, 2007). L. E. Young, S. A. Ramírez, R. Baquero, *Rev. Col. Fís.* **38**, No. 2, 2006
- [11] M. Mueller, *Fundamentals of Quantum Chemistry Molecular Spectroscopy and Modern Electronic Structure Computations* (Kluwer academic publisher, New York University Press, Princeton, USA, 2002). N. Szabo, A. Ostlund, *Modern Quantum Chemistry, Introduction to Advanced Electronic Structure Theory*, (Dover Publications, New York, USA, 1996).
- [12] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (McGraw Hill, Inc., 2a. ed., New York, USA, 1996).
- [13] F. London, *Superfluids, Macroscopic Theory of Superconductivity*, vol. 1 (John Wiley & Sons, New York, USA, 1950).

- [14] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metal and Alloys* (Bejamin, New York, USA, 1966).
- [15] L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956); Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [16] V. L. Ginzburg, L. D. Landau, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) **20**, 1064 (1950).
- [17] N. Kopnin, *Vortices in Type-II Superconductors: structure and dynamics* (Lectures notes, L. D. Landau Institute for Theoretical Physics, Moscow, Russia and Laboratoire de Physique des Solides, Université Paris-Sud, Bât 510, Orsay, 1995-1996).
- [18] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP. **5**, 1174 (1957).
- [19] G. Lasher, Phys. Rev. **140**, A523 (1965).
- [20] R. D. Parks, *Superconductivity (in two volumes)* (Marcel Dekker, Inc., New York, USA, 1969).
- [21] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University, 2a. ed., United Kingdom, 1944). B. G. Korenev, *Bessel Functions and Their Applications* (Taylor and Francis, New York, USA, 2002).
- [22] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B61**, 45 (1973).
- [23] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. **D14**, 1100 (1976).
- [24] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [25] L. Jacobs and C. Rebbi, Phys. Rev. **B19**, 4486 (1979).
- [26] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. **D34**, 3206 (1986).
- [27] P. Goddard, J. Nuyts, and D. Olive, Nucl. Phys. **B125**, 1 (1977).
- [28] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Westview, Press., 2a. ed., USA, 1999).
- [29] C. N. Kumar and A. Khare, Phys. Lett. **B178**, 395 (1986).
- [30] P. Hasenfratz, Phys. Lett. **B85**, 338 (1978).
- [31] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. **56**, 2564 (1986).
- [32] A. S. Schwarz and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. **90B**, 135 (1980).
- [33] E. de Rafael, *Lectures on quantum electrodynamics*, (Lectures on Quantum Electrodynamics, 1st Part Centre de Physique Theorique, 1976).
- [34] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).

- [35] J.M. Cornwall, *Phys. Rev.* **D10**, 500 (1974).
- [36] J.M. Cornwall, *Deeper Pathways in High Energy Physics: Semiclassical physics and confinement*, editado pelos Kursunoglu, A. Pelmutter and L. Scott, (Plenum, New York, USA, 1977).
- [37] J. M. Cornwall, *Phys. Rev.* **D26**, 1453 (1982).
- [38] A. C. Aguilar, D. Binosi and J. Papavassiliou, *Phys. Rev.* **D78**, 025010 (2008).
- [39] J.M. Cornwall, *Nucl. Phys.* **B157**, 392 (1979).
- [40] T. Kunimasa and T. Goto, *Prog. Theor. Phys.* **37**, 452 (1967). A. A. Slavnov, *Teor. Mat. Fiz.* **10**, 201 (1972).
- [41] J. M. Cornwall. (Talk at the symposium "Approaches to Quantum Chromodynamics", Oberwolz, September 2008) hep-ph/0812.0359.
- [42] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific Publishing, Farred Road, Singapoure, 1995).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)