IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.000/09

Teleparalelismo: Geometria e Dinâmica

Tiago Gribl Lucas

Orientador

José Geraldo Pereira

Julho de 2009

Agradecimentos

Ao Prof. José Geraldo, pela orientação e paciência.

Aos meus pais e à minha irmã, pelo suporte constante.

Aos meus amigos, neste e em outros continentes.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos as semelhanças e diferenças entre algumas formulações geométricas do Teleparalelismo. Como o fibrado em que estas teorias estão definidas são fibrados com soldagem, novos operadores duais de Hodge podem ser definidos. Usando essa nova definição de dual, construíremos o equivalente teleparalelo da Relatividade Geral de forma autônoma e independente de vínculos externos, e estudaremos alguns pontos de sua dinâmica. Para mostrar a consistência deste novo dual, analisaremos a questão da simetria de dualidade da teoria linearizada.

Palavras Chaves: Teleparalelismo; Gravitação; Torção

Áreas do conhecimento: Gravitação; Teorias de Gauge

Abstract

In this work, we study some features of different geometrical formulations of teleparallel theories. Since the bundle on which these theories are defined is soldered, a new Hodge dual operator can be defined. Using this new definition of dual, it is possible to construct the teleparallel equivalent of General Relativity, independently of external constraints. Then we study some aspects of its dynamics. To show the consistency of this new dual, we analyze the duality symmetry of the linearized theory.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e objetivos

Embora nos seus quase 100 anos de existência a teoria da Relatividade Geral tenha acumulado diversos sucessos experimentais, a busca por uma teoria quântica para o campo gravitacional continua.

Além de propostas mais consolidadas na comunidade científica, como a Teoria de Cordas e a *Loop Quantum Gravity*, visando em particular o problema da Gravitação Quântica, outras linhas de trabalho têm recebido atenção crescente.

Um exemplo notável é o da chamada *Doubly Special Relativity* [1]. Os proponentes destas teorias modificam o grupo de simetria da Relatividade Especial, de maneira a incorporar um parâmetro de comprimento na teoria (relacionado ao comprimento de Planck), violando a simetria de Lorentz. Embora estas teorias sejam teorias clássicas, estas novas relatividades se incorporam naturalmente em alguns formalismos de gravitação quântica. Nesta mesma linha, uma teoria de relatividade baseada no grupo de de Sitter [2] chama a atenção por evitar diversos problemas que permeiam as atuais construções de dSR, tais como o *soccer ball problem*, e sem necessitar violar a invariância de Lorentz.

Em nível clássico, há diversas teorias que procuram reproduzir ou generalizar os resultados da Relatividade Geral, como por exemplo as teorias de gauge para o grupo de Poincaré [3, 4], as teorias de gauge para o grupo Afim [5], a teoria de Einstein–Cartan [4] e o Teleparalelismo [4, 6, 7, 8, 9, 10]. Enquanto nas primeiras a torção aparece como graus de liberdade adicionais do campo gravitacional, no Teleparalelismo a torção surge como *alternativa* à curvatura: em termos da torção, descreve–se os mesmos fenômenos descritos pela Relatividade Geral em termos da curvatura. Ao invés da geometrização da interação, no sentido proposto pela teoria de Einstein, no Teleparalelismo a interação gravitacional é descrita por meio de uma equação de força [11], semelhante à força de Lorentz.

Nesta dissertação, estudaremos primeiramente uma formulação não–covariante do Teleparalelismo. Em seguida, voltaremos nossa atenção para uma formulação covariante, baseada na gaugeficação do grupo de Poincaré e na redução do grupo de estrutura para o grupo de Lorentz. Estudaremos a questão da construção de sua lagrangiana, e alguns aspectos da dinâmica desta teoria, em particular o caso da teoria linearizada.

1.2 Gravitação como uma teoria de gauge

Nas teorias de gauge, é fundamental escolher um grupo de gauge *interno* G, com o qual podemos definir um fibrado principal $P_G(M,G)$ e também fibrados associados $E(M,P_G,F)$, onde M é uma variedade 4–dimensional representando o espaço–tempo e a fibra F é um espaço vetorial onde atua uma dada representação de G. Com base nestas construções, os campos de matéria são tomados como seções de $E(M,G,F)$.

O cenário geométrico da Relatividade Geral é o fibrado tangente. Escolhendo-se trabalhar com bases ortonormais em cada ponto da variedade base, esta construção incorpora naturalmente rotações de Lorentz destas bases. Em algumas teorias, entende-se a Relatividade Geral como uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz [12]. Entretanto, o papel das translações como simetria interna continua não transparente. Uma maneira mais direta de se introduzir as translações é substituir o grupo de Lorentz, nestas construções, pelo grupo de Poincaré. As translações também poderiam ser introduzidas diretamente na variedade base, através da transformação $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ de suas coordenadas. Entretanto, ao escrever a teoria em linguagem de formas diferenciais, a invariância sobre estes difeomorfismos é trivialmente implantada. Gaugeficando o grupo de Poincaré, tanto as translações quanto as transformações de Lorentz são introduzidas em pé de igualdade na teoria, em princípio.

Após a construção desta teoria de gauge para Poincaré, a redução do grupo de Poincaré para o grupo de Lorentz (e a respectiva quebra da simetria translacional) induz a gravitação no espaço-tempo. A construção geométrica então obtida é a do fibrado das bases pseudo–ortonormais, um fibrado principal para o grupo de Lorentz. Ao contrário das teorias de gauge usuais, onde um ponto de um dado fibrado principal não tem relação com objetos do espaço–tangente TM, este fibrado apresenta a *soldagem*: um ponto dele corresponde na verdade a uma base de TM.

A presença da soldagem possibilita novas contrações entre índices de p–formas a valores em TM. Tal possibilidade nos permite generalizar a definição do dual de Hodge para fibrados com soldagem, e com isso obter uma formulação de gauge para a gravitação que se assemelha muito mais com as teorias de Yang–Mills.

1.3 Organização da dissertação

Na primeira parte do Capítulo 2, a formulação do Teleparalelismo como uma teoria de gauge para o grupo das translações, como estudada por Y. M. Cho em [6], será brevemente descrita. O aspecto não–covariante desta teoria será ressaltado. Na segunda parte do capítulo, estudaremos uma formulação da teoria no contexto das teorias de gauge para o grupo de Poincaré [3, 4]. Teceremos alguns comentários também sobre a relação desta teoria com a formulação anterior e com as teorias de gauge para o grupo afim [5, 9]. A teoria resultante pode ser vista como um caso de geometria de Riemann–Cartan, e será utilizada no restante do trabalho.

No Capítulo 3 introduziremos a dinâmica da teoria, nos moldes das teorias de Yang–Mills, escrevendo uma lagrangiana quadrática no *field strenght*. A presença da soldagem, que permite a contração de índices do espaço–tempo com índices do espaço–tangente, nos dá a possibilidade de definirmos um novo operador dual de Hodge para a torção [13], que aparece explicitamente na construção da lagrangiana.

O Capítulo 4 será dedicado ao estudo das equações de movimento gravitacionais linearizadas. Mostraremos que a definição do operador dual de Hodge generalizada é necessária para que a teoria linearizada apresente simetria de dualidade. Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos as conclusões.

Nos Apêndices, alguns cálculos relevantes e que foram omitidos do texto principal encontram–se em detalhes. Os Apêndices A e B tratam de cálculos relevantes para a definição do novo operador dual. O Apêndice C traz a derivação da equação de campo gravitacional.

1.4 Notação e algumas definições

A primeira metade do alfabeto Latino minúsculo $(a, b, c, \cdots = 0, 1, 2, 3)$ denota índices relacionados à base pseudo–ortonormal, enquanto o alfabeto Latino maiúsculo $(A, B, C, \cdots = 0, 1, 2, 3, 4)$ denota índices relacionados à álgebra do grupo de Poincaré. A segunda metade do alfabeto Latino $(i, j, k, \cdots = 0, 1, 2, 3)$, utilizada apenas na seção 2.1, denota índices da álgebra do grupo das translações, e finalmente o alfabeto grego $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots = 0, 1, 2, 3)$ denota índices relacionados à base holônoma.

Objetos relacionados à conexão de Levi–Civita serão denotados por $\circ$, como por exemplo a própria conexão de Levi–Civita $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}$ e o tensor de Riemann $\overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{b\mu\nu}$. Já os objetos relacionados à conexão de Weitzenböck serão denotados por $\bullet$, como por exemplo a conexão de Weitzenböck $\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}$ e a torção a ela associada $\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu}$. Nos demais casos, trata-se de conexões lineares $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ quaisquer, podendo possuir curvatura e torção.

O tensor completamente anti-simétrico será denotado por $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, com $\epsilon_{0123} = +1$, e a métrica de Minkowski será dada por $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 2

A geometria do Teleparalelismo

Como todas as outras três interações da Natureza (fraca, forte e eletromagnética) são descritas por teorias de gauge, queremos construir uma teoria inspirada nestas para a gravitação, dando maior atenção ao papel do grupo de Poincaré (e em particular ao subgrupo das translações). Como nestas teorias a fonte da interação está intimamente relacionada à carga associada à simetria de gauge, queremos construir uma teoria gravitacional onde o papel das translações como fonte de gravitação seja mais evidente do que na Relatividade Geral.

As estruturas geométricas envolvidas nos dois casos são diferentes: enquanto para as demais interações o grupo de gauge é um grupo *interno*, agindo num espaço vetorial interno associado a uma dada representação do grupo de gauge, no caso de teorias gravitacionais o grupo de Poincaré é um grupo *externo*, agindo no próprio espaço–tempo.* Logo, dada esta diferença fundamental, é de se esperar que uma descrição da interação gravitacional em termos de fibrados envolvendo o grupo de Poincaré tenha suas peculiaridades, em relação às teorias de Yang–Mills.

Neste capítulo, apresentaremos de maneira não exaustiva algumas formulações geométricas de teorias gravitacionais, em particular alguns modelos relacionados à descrição da interação gravitacional através da torção. Na seção 2.1, construíremos uma teoria de gauge para o grupo das translações, equivalente à Relatividade Geral quando a lagrangiana da teoria for dada por uma determinada combinação quadrática dos coeficientes de não–holonomia dos frames. Já na seção 2.2, estudaremos uma teoria de gauge para o grupo de Poincaré e sua relação com as teorias de gauge para o grupo afim. No capítulo 3 estudaremos com um pouco mais de

*Mais precisamente, o grupo de Lorentz age no fibrado das bases pseudo–ortonormais, e o grupo de Poincaré no fibrado das bases afins pseudo–ortonormais.

detalhes a dinâmica desta formulação.

2.1 Teoria de gauge para as translações

Partimos do espaço de Minkowski $\mathcal{M}$, com sistema de coordenadas x^μ, frame $\{e_a\}$ e coframe $\{\theta^a\}$ triviais, e ortogonais pela métrica $g = diag(1, -1, -1, -1)$. Seja T o grupo das translações em Minkowski, com geradores P_i, $i = 0, 1, 2, 3$, tais que

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{2.1}$$

Seja $P_T(\mathcal{M}, T)$ um fibrado principal para T, definido sobre $\mathcal{M}$. Como o grupo das translações de Minkowski pode ser identificado ao próprio espaço de Minkowski, um ponto deste fibrado consiste em um ponto de $\mathcal{M}$ e um quadrivetor $x^a = x^a(x^\mu)$. Definindo os geradores que atuam nos quadrivetores x^a por

$$(P_i)^a_b x^b = \delta^a{}_i, \tag{2.2}$$

temos que a ação de T em P_T corresponde então a uma translação deste quadrivetor "interno"

$$x'^a = x^a + \epsilon^a, \tag{2.3}$$

com ϵ^a o parâmetro local, e infinitesimal, da transformação de gauge. Considerando que x^a seja uma seção global† deste fibrado, e também um difeomorfismo entre a variedade base e a fibra, podemos escrever a tetrada em função deste quadrivetor, como

$$e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a, \tag{2.4}$$

e inversa

$$e_a{}^\mu = \partial_a x^\mu, \tag{2.5}$$

com frame e coframe dados por, respectivamente, $e_a = e_a{}^\mu \partial_\mu$ e $e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$. Este coframe é holônomo,

$$de^a = 0, \tag{2.6}$$

e os coeficientes de não–holonomia são todos nulos.

A localização da simetria consiste em substituir o parâmetro global ϵ^a por um parâmetro local $\epsilon^a(x^\mu)$. Introduzimos então um potencial de gauge translacional

†Não faremos muita distinção entre seções globais e locais neste trabalho. Nos casos em que não existam seções globais, define-se seções locais sobre abertos $U_i \in M$, que devem ser compatíveis nas intersecções $U_i \cap U_J$, $i \neq j$.

$B_\mu = P_i B^i{}_\mu$ que, devido ao fato do grupo em questão ser comutativo, se transforma de maneira análoga ao caso do eletromagnetismo

$$B'^a{}_\mu = B^a{}_\mu - \partial_\mu \epsilon^a. \qquad (2.7)$$

A curvatura (ou *field strenght*) desta conexão é definida pela equação de estrutura de Cartan

$$F = dB + \tfrac{1}{2}[B, B] = dB + \tfrac{1}{2}[P_i, P_j] B^i \wedge B^j, \qquad (2.8)$$

onde pela comutatividade do grupo o termo quadrático em B se anula, o que leva às componentes

$$F^i{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^i{}_\nu - \partial_\nu B^i{}_\mu. \qquad (2.9)$$

Como queremos que a presença de gravitação se manifeste diretamente na própria geometria do espaço–tempo, através de uma não–holonomia dos frames de origem puramente gravitacional, podemos introduzir a conexão translacional como a parte não–trivial da tetrada

$$h^a{}_\mu = e^a{}_\mu + B^a{}_\mu, \qquad (2.10)$$

onde $h_a = h_a{}^\mu \partial_\mu$ e $h^a = h^a{}_\mu dx^\mu$ correspondem agora aos novos frame e coframe, e onde definimos $B^a{}_\mu = \delta^a{}_i B^i{}_\mu$. O espaço base deixa de ser o espaço de Minkowski, e passa a ser um espaço M com métrica $g \neq \eta$. Escrevendo as componentes do *field strenght* em relação a este frame ortonormal, chegamos a

$$F^i{}_{bc} = \delta^i{}_d f^d{}_{bc}, \qquad (2.11)$$

onde $f^d{}_{bc}$ é exatamente o coeficiente de não–holonomia do frame,

$$f^d{}_{bc} = h_a{}^\mu h_b{}^\nu (\partial_\nu h^c{}_\mu - \partial_\mu h^c{}_\nu), \qquad (2.12)$$

definido pelo comutador dos elementos do frame

$$[h_b, h_c] = f^d{}_{bc} h_d. \qquad (2.13)$$

Analogamente ao caso das teorias de gauge, construiremos uma lagrangiana quadrática no *field strenght*. A lagrangiana mais geral possível consiste em três termos, com três parâmetros independentes

$$L = h(\alpha F_{abc} F^{abc} + \beta F_{abc} F^{bac} + \gamma F_{ab}{}^a F_c{}^{bc}), \qquad (2.14)$$

que em virtude de (2.11) pode ser escrita como uma lagrangiana quadrática nos coeficientes de não–holonomia

$$L = h(\alpha f_{abc} f^{abc} + \beta f_{abc} f^{bac} + \gamma f_{ab}{}^a f_c{}^{bc}). \qquad (2.15)$$

Para se obter uma teoria gravitacional compatível com a Relatividade Geral, no caso mais simples de gravitação pura ou considerando apenas campos de spin 0, a construção até aqui desenvolvida deve ser invariante sob transformações locais de Lorentz. Naturalmente, a introdução de rotações de Lorentz locais levaria à introdução de uma conexão de Lorentz e à introdução de uma derivada covariante de Lorentz, mas não seguiremos este procedimento nesta seção. Como a introdução desta conexão nos levaria a considerar um fibrado principal para o grupo de Lorentz, e queremos nos ater apenas ao fibrado P_T, tentaremos impor a invariância da lagrangena (2.15) sem considerar a introdução de uma conexão adicional. Uma simples inspeção de (2.13) já nos diz que cada um dos termos quadráticos de (2.15) não é invariante sob transformações de Lorentz. Entretanto, quando $\alpha = 1/4$, $\beta = 1/2$ e $\gamma = -1$, a lagrangiana (2.15) é invariante sob transformações de Lorentz, além de ser equivalente (a menos de um termo de divergência total) da ação de Einstein–Hilbert [6].

Embora a lagrangiana da teoria seja invariante sob transformações locais de Lorentz, a teoria em si não é covariante sob estas transformações. De fato, se quisermos considerar campos com spin não nulo nesta variedade base, devemos considerar o transporte paralelo de vetores, pertencentes a representações do grupo de Lorentz, sobre M. O transporte paralelo de um vetor de P_T é definido com respeito à conexão translacional B, o que dá origem à derivada covariante

$$\mathscr{D}_\mu s^a = \partial_\mu s^a + B^a{}_\mu, \tag{2.16}$$

onde s^a é uma seção de P_T, cuja variação sob transformação de gauge se escreve

$$\delta s^a = \epsilon^a. \tag{2.17}$$

É fácil verificar que a derivada (2.16) varia, sob transformações locais, da mesma maneira que $\partial_\mu s^a$ varia, sob transformações globais, ou seja,

$$\delta \mathscr{D}_\mu s^a = 0. \tag{2.18}$$

Como s^a é um vetor de Lorentz, podemos efetuar tranformações de Lorentz deste vetor

$$s'^a = \Lambda^a{}_b s^b, \tag{2.19}$$

com $\Lambda^a{}_b$ pertencente ao grupo de Lorentz. Entretanto, como a derivada (2.16) não possui termos de conexão para compensar a não–covariância introduzida por esta transformação, (2.16) não é a boa derivada covariante para se construir uma teoria invariante sob transformações locais de Lorentz. Em outras palavras, a derivada covariante definida em (2.16) é covariante sob translações internas, e não sob rotações de Lorentz, que são as transformações de gauge relevantes para campos com spin.

Com base na tetrada, é possível definir-se uma conexão linear sobre M, que dá origem a um transporte paralelo de vetores de TM, cuja derivada covariante é covariante sob transformações locais de Lorentz. A escolha imediata é simplesmente a conexão de Levi–Civita, sem torção mas com curvatura, que pode ser definida em termos da métrica. Uma outra escolha, mais adequada do ponto de vista do formalismo aqui apresentado, é a conexão de Weitzenböck,[‡] que possui torção ao invés de curvatura,

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = h_a{}^{\rho} \partial_\nu h^a{}_\mu. \tag{2.20}$$

A torção desta conexão,

$$\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\nu\mu} - \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}, \tag{2.21}$$

coincide com o *field strenght* translacional (2.11),

$$T^a{}_{bc} = \delta^a{}_i F^i{}_{bc}. \tag{2.22}$$

Implicitamente, a introdução de uma conexão a valores na álgebra de Lorentz corresponde à introdução de um fibrado principal para o grupo de Lorentz, definido sobre a mesma variedade base. Do ponto de vista físico, este é o fibrado relevante para se descrever a interação gravitacional, já que os campos fundamentais da natureza podem ser classificados de acordo com representação irredutíveis do grupo de Poincaré, o produto semi–direto do grupo de Lorentz pelo grupo das translações. Logo, o acoplamento relevante entre os campos e a gravitação deve ser feito com conexões de Lorentz. Com o campo gravitacional sendo representado por estas conexões, é mais interessante então introduzir uma lagrangiana quadrática na curvatura ou na torção desta conexão, ao invés de quadrática nos coeficientes de não–holonomia da base ortornomal de TM. No caso de uma lagrangiana quadrática na torção, a imposição da invariância local de Lorentz na ação, como foi feita nesta seção, não nos permite determinar os três parâmetros livres, como veremos na seção seguinte. Entretanto, é interessante notar que uma teoria gravitacional pura (ou com campos de spin 0 como fonte) pode ser escrita unicamente em termos das traslações, como grupo de simetria local, e da imposição da invariância local de Lorentz da lagrangiana.

[‡]A definição aqui apresentada depende da escolha do frame, e em princípio poderíamos ter definido esta conexão da mesma maneira em um outro frame. Este ponto será explicado em mais detalhes na seção 3.6.

2.2 Teorias de gauge para o grupo de Poincaré

Para introduzirmos campos com spin na construção geométrica da seção anterior foi necessário considerarmos uma conexão adicional, a valores na álgebra de Lorentz. Como queremos obter uma teoria gravitacional que possa tratar de campos com spin, precisamos introduzir o grupo de Lorentz em qualquer construção geométrica que façamos. Uma maneira de fazer isto, e de também introduzir o grupo das translações, é gaugeficar o próprio grupo de Poincaré, que nada mais é que o produto semi–direto do grupo de Lorentz e do grupo das translações.

A introdução do grupo de Poincaré como grupo de gauge está intimamente ligada à gaugeficação dos chamados grupos afins — o produto semi–direto do grupo das translações pelo grupo $GL(4)$[§], das matrizes gerais lineares de ordem 4. Enquanto nas teorias afins permite-se o uso de bases quaisquer no espaço–tangente, nas teorias de gauge para o grupo de Poincaré está implícito o uso de bases pseudo–ortonormais, onde o grupo de Lorentz age.

Consideraremos uma representação do grupo de Poincaré formada de matrizes 5×5, da forma[¶]

$$P^A{}_B = \begin{pmatrix} \Lambda^a{}_b & a^a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

onde $\Lambda^a{}_b$ é um elemento do grupo de Lorentz e a^a é um quadrivetor. Sua ação em um vetor 5-dimensional

$$s^A = \begin{pmatrix} s^a \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

é explicitamente igual a

$$P^A{}_B s^B = \begin{pmatrix} \Lambda^a{}_b s^b + a^a \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

onde reconhecemos a ação do grupo de Poincaré sobre o quadrivetor s^a. Sob uma transformação infinitesimal de Poincaré, onde $\Lambda^a{}_b = \delta^a_b + \omega^a{}_b$ e $a^a = \epsilon^a$, com $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ e ϵ^a infinitesimais, o vetor s^A varia como

$$\delta(s^A) = \begin{pmatrix} \omega^a{}_b & \epsilon^a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^b \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

[§]Este grupo é constituído das matrizes 4×4 inversíveis.

[¶]Os índices $A, B, C, \cdots = 0, 1, 2, 3, 4$ denotam os índices desta representação do grupo de Poincaré.

Seja $P_{\mathcal{P}}(M, \mathcal{P})$ um fibrado principal para o grupo de Poincaré, escrito nesta representação 5–dimensional. Seja também $p(x)^A{}_B$ uma seção global deste fibrado,

$$p^A{}_B(x^\mu) = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}^a{}_b(x^\mu) & \tilde{a}^a(x^\mu) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

No contexto das teorias de gauge para o grupo afim, tal seção pode ser entendida como uma base afim ortonormal associada a cada ponto da variedade base: ao quadrivetor $\tilde{a}^a(x^\mu)$ associamos a origem da base afim, e à transformação de Lorentz $\tilde{\Lambda}^a{}_b$ associamos uma base [14, 15]. Em outras palavras, uma base afim ortonormal de TM consiste numa base ortormal e em um quadrivetor, origem desta base. A ação do grupo de Poincaré em $P_{\mathcal{P}}(M, \mathcal{P})$ efetua uma rotação do frame, e também muda sua origem.

Um fibrado associado a $P_{\mathcal{P}}$ relevante é $E(M, P_{\mathcal{P}}, \mathcal{P}/\mathcal{L})$, cujas fibras $\mathcal{P}/L$ são isomorfas ao espaço de Minkowski e podem ser consideradas vetores da forma (2.24). Logo, a cada ponto de M, uma seção de E associa um quadrivetor de Minkowski, ou seja, uma possível origem para as bases afins. A ação de $\mathcal{P}$ sobre estas seções é dada por (2.25).

Uma conexão afim generalizada [15] sobre M consiste em uma 1–forma a valores na álgebra de Poincaré,

$$A = J_{AB} A^{AB}{}_\mu dx^\mu, \tag{2.28}$$

onde J_{AB} são os geradores da álgebra na representação 5–dimensional. Esta conexão define o transporte paralelo das fibras de P e de seus fibrados associados, de maneira que podemos então definir derivadas covariantes. Por exemplo, a derivada covariante de uma seção e^A de E se escreve

$$\begin{aligned} h_\mu e^A &= \partial_\mu e^A + A^A{}_{B\mu} e^B \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\mu e^a + A^a{}_{b\mu} e^b + B^a{}_\mu \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde decompomos a conexão de Poincaré em $A^a{}_{b\mu}$, a valores na álgebra de Lorentz, e $B^a{}_\mu$, a valores na álgebra das translações:

$$A^A{}_B = \begin{pmatrix} A^a{}_b & B^a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Impondo-se que a derivada covariante assim definida se transforme sob transformações locais de Poincaré da mesma maneira que $\partial_\mu e^A$ se transforma sob transformações globais, ou seja, impondo que

$$\delta(h_\mu e^A) = \omega^A{}_B h_\mu e^B, \tag{2.31}$$

onde $\omega^A{}_B$ é a representação 5–dimensional do parâmetro de rotação $\omega^a{}_b$, obtemos as leis de transformação das componentes da conexão

$$\delta A^a{}_{b\mu} = -D_\mu \omega^a{}_b, \tag{2.32}$$

e

$$\delta B^a{}_\mu = -D_\mu \epsilon^a + \omega^a{}_b B^b{}_\mu, \tag{2.33}$$

onde D_μ denota a derivada de Fock–Ivanenko na conexão de Lorentz $A^a{}_{b\mu}$. Calculando a curvatura de $A^A{}_B$ a partir do comutador das derivadas covariantes h_μ, obtemos

$$[h_\mu, h_\nu] e^A = R^A{}_{B\mu\nu} e^B, \tag{2.34}$$

onde

$$R^A{}_{B\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^a{}_{b\mu\nu} & \Omega^a{}_{\mu\nu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Nesta expressão,

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_{b\nu} - \partial_\nu A^a{}_{b\mu} + A^a{}_{c\mu} A^c{}_{b\nu} - A^a{}_{c\nu} A^c{}_{b\mu} \tag{2.36}$$

é a curvatura da conexão $A^a{}_{b\mu}$, e

$$\Omega^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu + A^a{}_{b\mu} B^b{}_\nu - A^a{}_{b\nu} B^b{}_\mu \tag{2.37}$$

é a derivada covariante de $B^a{}_\mu$.

Para obter como estrutura geométrica final um fibrado principal para o grupo de Lorentz, $L(M)$, é preciso efetuar uma redução do grupo de gauge, indo do grupo de Poincaré para o grupo de Lorentz. O fibrado resultante apresenta a propriedade de soldagem, e podemos então definir uma métrica sobre M, já que a métrica de Minkowski η está naturalmente definida nas fibras. Note que, no processo, a simetria translacional é quebrada: temos liberdade apenas de aplicar transformações de Lorentz aos campos.

Para efetuar a redução, precisamos primeiramente especificar uma seção s^A de $E(M, \mathcal{P})$ [16]. A derivada covariante desta seção se escreve

$$h_\mu s^A = \begin{pmatrix} h^a{}_\mu \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

onde definimos

$$h^a{}_\mu \equiv D_\mu s^a + B^a{}_\mu = \partial_\mu s^a + A^a{}_{b\mu} s^b + B^a{}_\mu \tag{2.39}$$

como o coeficiente da tetrada. Enquanto $A^a{}_{b\mu}$ define naturalmente uma conexão linear em $L(M)$, a parte translacional da conexão de Poincaré aparece na definição da tetrada, juntamente com a conexão de Lorentz. Podemos dizer então que a quebra da simetria translacional induz a soldagem no espaço–tempo, e conseqüentemente, induz a gravitação. No contexto das teorias de gauge para o grupo afim, a tetrada pode ser entendida como uma base invariante sob translações, como pode-se verificar diretamente de (2.39).

Após redução, a curvatura (2.35) se decompõe em dois objetos geométricos: $R^a{}_{b\mu\nu}$, a 2–forma curvatura de $A^a{}_{b\mu}$; e $\Omega^a{}_{\mu\nu}$, a 2–forma derivada covariante de $B^a{}_\mu$. Sabemos que além de curvatura, conexões de Lorentz apresentam também torção, definida como a derivada covariante da tetrada:

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu + A^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu - A^a{}_{b\nu} h^b{}_\mu. \tag{2.40}$$

Isolando $B^a{}_\mu$ em (2.39) e substituindo–o em (2.37), obtemos

$$T^a{}_{\mu\nu} = \Omega^a{}_{\mu\nu} + R^a{}_{b\mu\nu} s^b, \tag{2.41}$$

que expressa a torção em termos do antigo $\Omega^a{}_{\mu\nu}$.

Reescrevendo (2.36) e (2.40) na linguagem de formas diferenciais, temos que

$$R^a{}_b = DA^a{}_b = dA^a{}_b + A^a{}_c \wedge A^c{}_b = \tfrac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{2.42}$$

e

$$T^a = Dh^a = dh^a + A^a{}_b \wedge h^b = \tfrac{1}{2} T^a{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{2.43}$$

onde D denota a derivada exterior covariante na conexão A. As equações (2.42) e (2.43), que definem a curvatura e a torção da conexão $A^a{}_{b\mu}$, são conhecidas como equações de estrutura de Cartan [14, 15].

Conexões de Lorentz podem ser escritas com respeito à base holônoma, $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$, ou com respeito à base ortonormal, $A^a{}_{b\mu}$.[‖] Suas expressões se relacionam através de

$$A^a{}_{b\mu} = h^a{}_\nu \partial_\mu h_b{}^\nu + h^a{}_\nu \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} h_b{}^\rho, \tag{2.44}$$

que pode ser invertida para expressar Γ em função de A,

$$\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu + h_a{}^\rho A^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu. \tag{2.45}$$

[‖]Note que, embora denotadas diferentemente, ambas as expressões se referem ao mesmo objeto geométrico.

A conexão linear Γ, quando compatível com a métrica, pode ser decomposta de acordo com

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} + K^{\rho}{}_{\mu\nu}, \tag{2.46}$$

onde

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{2.47}$$

é a conexão de Levi–Civita, de torção nula, e

$$K^{\rho}{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(T_\nu{}^{\rho}{}_{\mu} + T_\mu{}^{\rho}{}_{\nu} - T^{\rho}{}_{\mu\nu}) \tag{2.48}$$

é a contorção. Expressa com respeito à base ortonormal, esta expressão se reescreve

$$A^a{}_{b\mu} = \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu} + K^a{}_{b\mu}, \tag{2.49}$$

onde $\overset{\circ}{A}$ é a conexão de spin da Relatividade Geral.

As identidades de Bianchi, identidades geométricas satisfeitas pela curvatura e pela torção, podem ser encontradas ao aplicar-se a derivada exterior nas equações (2.43) e (2.42), que resultam em

$$DT^a = dT^a + A^a{}_b \wedge h^b = R^a{}_b \wedge h^b, \tag{2.50}$$

chamada de primeira identidade de Bianchi, e em

$$DR^a{}_b = dR^a{}_b + A^a{}_c \wedge R^c{}_b - A^c{}_b \wedge R^a{}_c = 0, \tag{2.51}$$

a segunda identidade de Bianchi. Note que ausência de torção, como é o caso para as teorias de gauge para grupos internos, é diferente de uma conexão linear com torção nula, o caso da conexão de Levi–Civita. A presença da soldagem no fibrado, e a existência da torção, implicam em uma identidade de Bianchi adicional, (2.50), que no caso de torção nula é a responsável pela identidade cíclica da curvatura

$$\overset{\circ}{R}{}^a{}_b \wedge h^b = 0, \tag{2.52}$$

ou ainda, em termos das componentes da curvatura com respeito ao coframe,

$$\overset{\circ}{R}{}^a{}_{[bcd]} = 0. \tag{2.53}$$

2.2.1 A conexão de Weitzenböck

A conexão utilizada no Teleparalelismo, ao contrário da conexão de Levi-Civita, possui curvatura nula e torção diferente de zero:

$$\overset{\bullet}{R}{}^{a}{}_{b\mu\nu} = 0 \qquad \text{e} \qquad \overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu} \neq 0. \tag{2.54}$$

A condição de curvatura nula é satisfeita por qualquer conexão do tipo

$$\overset{\bullet}{A}{}'^{a}{}_{b\mu} = \Lambda_{b}{}^{c}\partial_{\mu}\Lambda^{a}{}_{c}, \tag{2.55}$$

chamada de conexão de vácuo. A escolha adotada na literatura, que simplifica consideravelmente os cálculos, é dada por

$$\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} = 0, \tag{2.56}$$

e neste caso a conexão com respeito ao frame holônomo se escreve simplesmente

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = h_{a}{}^{\rho}\partial_{\nu}h^{a}{}_{\mu}, \tag{2.57}$$

que coincide com a conexão utilizada na construção da seção 2.1. A torção é dada por

$$\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}B^{a}{}_{\nu} - \partial_{\nu}B^{a}{}_{\mu}, \tag{2.58}$$

que por outro lado coincide com o *field strenght* (2.9).

Para a conexão de Weitzenböck $\overset{\bullet}{A}{}'^{a}{}_{b\mu}$, a primeira identidade de Bianchi (2.50) se escreve

$$\overset{\bullet}{D}{}'_{\mu}\overset{\bullet}{T}{}'^{a}{}_{\rho\sigma} + \overset{\bullet}{D}{}'_{\rho}\overset{\bullet}{T}{}'^{a}{}_{\sigma\mu} + \overset{\bullet}{D}{}'_{\sigma}\overset{\bullet}{T}{}'^{a}{}_{\mu\rho} = 0, \tag{2.59}$$

enquanto (2.51) é identicamente nula. Entretanto, substituindo a decomposição (2.46) em (2.51), e utilizando a segunda identidade de Bianchi para a conexão de Levi–Civita, obtemos

$$\overset{\circ}{D}_{\rho}\overset{\bullet}{Q}{}^{a}{}_{b\mu\nu} + \overset{\circ}{D}_{\mu}\overset{\bullet}{Q}{}^{a}{}_{b\nu\rho} + \overset{\circ}{D}_{\nu}\overset{\bullet}{Q}{}^{a}{}_{b\rho\mu} = 0, \tag{2.60}$$

onde definimos o tensor

$$\overset{\bullet}{Q}{}^{a}{}_{b\mu\nu} = \overset{\circ}{D}_{\mu}\overset{\bullet}{K}{}^{a}{}_{b\nu} - \overset{\circ}{D}_{\nu}\overset{\bullet}{K}{}^{a}{}_{b\mu} + \overset{\bullet}{K}{}^{c}{}_{b\nu}\overset{\bullet}{K}{}^{a}{}_{c\mu} - \overset{\bullet}{K}{}^{c}{}_{b\mu}\overset{\bullet}{K}{}^{a}{}_{c\nu}. \tag{2.61}$$

Note também que

$$\overset{\bullet}{Q}{}^{a}{}_{b\mu\nu} = -\overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{b\mu\nu}, \tag{2.62}$$

em virtude da decomposição (2.46).

2.2.2 Considerações finais

Nesta seção, partimos de um fibrado principal para o grupo de Poincaré, que pode ser visto como o fibrado afim das bases pseudo–ortonormais, e após um processo de redução do grupo de estrutura chegamos a um fibrado principal para o grupo de Lorentz, ou seja, o fibrado das bases pseudo–ortonormais. A conexão compatível com a métrica que escolhemos para definir o transporte paralelo entre vetores de espaços–tangente em pontos distintos é a conexão de Weitzenböck, com torção diferente de zero, porém com curvatura nula. Utilizando a tetrada e a métrica de Minkowski, presente nos espaços–tangente, temos também uma métrica definida sobre M, através de $g_{\mu\nu} = h^a{}_\mu h^b{}_\nu \eta_{ab}$. Esta construção final (uma variedade, uma métrica e uma conexão compatível com a métrica) é um exemplo dos chamados espaços de Riemann–Cartan [4]. Nestes, pode-se considerar ainda conexões mais gerais, com curvatura e torção, mas que assim como a conexão de Weitzenböck e a de Levi–Civita possuem tensor de não–metricidade nulo:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = 0. \tag{2.63}$$

Nas teorias de gauge para o grupo afim, além da conexão e do coframe, a métrica também é considerada um objeto independente, *a priori*. Enquanto a torção aparece como o *field strenght* do coframe e a curvatura como o *field strenght* da conexão, o tensor de não–metricidade é considerado o *field strenght* associado à métrica.

Capítulo 3

A dinâmica do Teleparalelismo

Este capítulo é dedicado à escolha de uma lagrangiana teleparalela para o campo gravitacional, e ao estudo da dinâmica dela decorrente. Como queremos nos aproximar das teorias de gauge usuais, partiremos de uma lagrangiana quadrática no *field strenght*. Isto nos levará a introduzir uma nova definição de operador dual, no caso de fibrados com soldagem. Em seguida, encontraremos as equações de campo da teoria.

3.1 Ação teleparalela

No caso de grupos de gauge semi–simples, é possível definir-se uma métrica invariante sob a ação do grupo, chamada de métrica de Cartan–Killing [17], que nos permite escrever uma lagrangiana quadrática no *field strenght* da teoria. Para uma álgebra com relações de comutação dadas por

$$\begin{aligned} [J_{AB}, J_{DC}] &= \eta_{BC} J_{AD} - \eta_{AD} J_{BC} - \eta_{BD} J_{AC} - \eta_{AC} J_{BD} \\ &= f^{EF}{}_{AB,CD} J_{EF}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $f^{EF}{}_{AB,CD}$ são as chamadas constantes de estrutura, a métrica de Cartan–Killing é definida como

$$\gamma_{AB,GH} = Tr(J_{AB} J_{GH}) = f^{EF}{}_{AB,CD} f^{CD}{}_{GH,EF}. \tag{3.2}$$

A primeira diferença entre as teorias de gauge para o grupo de Poincaré e as teorias de gauge usuais é devida ao fato de que o grupo de Poincaré não é semi–simples. De fato, isso pode ser visto rapidamente a partir das relações de comutação de sua álgebra de Lie

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{ad}J_{bc} + \eta bdJ_{ac} - \eta_{bc}J_{ad}$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{ac}P_b - \eta_{bc}P_a$$

$$[P_c, P_d] = 0,$$

de onde concluímos que a definição da métrica 3.2 não é uma definição adequada de métrica invariante sob $\mathcal{P}$, já que a métrica definida sobre o setor translacional é identicamente nula. Procedendo de maneira similar ao caso do Eletromagnetismo,* podemos escolher uma outra métrica para o setor translacional, sem relação com a métrica de Cartan–Killing. A escolha natural é a própria métrica η. Utilizando então a métrica de Cartan–Killing restringida ao setor de Lorentz, em conjunto com η para o setor translacional, encontramos uma definição viável de métrica para a álgebra de Lie de $\mathcal{P}$.

Em analogia à ação de Yang–Mills, definimos a ação do campo gravitacional por†

$$S_g = \frac{1}{2ck}\int \gamma_{AB,CD}F^{AB} \wedge \star F^{CD}, \tag{3.3}$$

onde $k = 8\pi G/c^4$, F é a 2–forma curvatura da conexão A, assumindo valores na álgebra de Lie do grupo de Poincaré, e

$$\begin{aligned}\star F &= \tfrac{1}{4}J_{AB}\star F^{AB}{}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \tfrac{1}{4}J_{ab}\star R^{ab}{}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu + \tfrac{1}{2}P_a \star T^a{}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \tag{3.4}$$

é o seu dual. Tanto T quanto R são 2–formas definidas num fibrado com soldagem, o que nos dá mais possibilidades no momento de definir seus duais, já que a presença da forma de soldagem permite contrações entre índices do espaço–tempo (*externos*) e índices do espaço–tangente (*internos*). Nas duas próximas seções, definiremos o novo dual destes objetos.

*O grupo de gauge do Eletromagnetismo, $U(1)$, é comutativo, e também não admite que a métrica de Cartan–Killing seja definida. Entretanto, pode-se escolher outra métrica para a construção da teoria, e no caso escolhe-se como métrica simplesmente um número.

†A constante multiplicativa $1/2ck$ foi escolhida de modo a levar ao limite Newtoniano correto, no caso do equivalente teleparalelo da Relatividade Geral.

3.2 Definindo o novo dual

Utilizando o fato de que podemos contrair índices algébricos com índices do espaço–tempo, as definições mais gerais de dual para a torção e para a curvatura se escrevem

$$\begin{aligned} \star T^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= h\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(a\,T^{\lambda\rho\sigma} + b\,T^{\rho\lambda\sigma} + c\,T^{\theta\rho}{}_{\theta}\,g^{\lambda\sigma}\right) && (3.5)\\ &= \frac{h}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}S^{\lambda\rho\sigma} && (3.6)\end{aligned}$$

onde definimos o tensor

$$S^{\lambda\rho\sigma} = 2a\,T^{\lambda\rho\sigma} + b\,T^{\rho\lambda\sigma} - b\,T^{\sigma\lambda\rho} + c\,T^{\theta\rho}{}_{\theta}\,g^{\lambda\sigma} - c\,T^{\theta\sigma}{}_{\theta}\,g^{\lambda\rho}, \tag{3.7}$$

e

$$\begin{aligned} \star R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} &= h\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Big[a'\,R^{\alpha\beta\rho\sigma} + b'(R^{\alpha\rho\beta\sigma} - R^{\beta\rho\alpha\sigma})\\ &\quad + c'(g^{\alpha\rho}\,R^{\beta\sigma} - g^{\beta\rho}\,R^{\alpha\sigma}) + d'\,g^{\alpha\rho}\,g^{\beta\sigma}\,R\Big]. && (3.8)\end{aligned}$$

Note que tanto $\star T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ quanto $\star R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ são anti-simétricos nos dois últimos índices — já que são 2–formas —, e que $\star R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ é anti–simétrico nos seus dois primeiros índices — já que assume valores na álgebra de Lorentz.

Em analogia com a definição usual de dual, queremos que a nova definição de dual satisfaça, num espaço–tempo quadridimensional com métrica de assinatura -2, a seguinte propriedade

$$\star\star = -1. \tag{3.9}$$

Impondo-a para a definição (3.6), chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{aligned} 4a^2 + 2ac + 2ab - 2bc &= 1\\ b^2 + 2ab + 2bc - 2ac &= 0 && (3.10)\end{aligned}$$

e, impondo-a para (3.8), chegamos a

$$\begin{aligned} -4a'^2 - 4a'b' - 4a'c' + 4c'b' &= -1\\ 4c'b' &= 0\\ -2a'b' - 2b'^2 + 2a'c' - 4c'b' &= 0\\ -2a'c' + 2a'b' + b'^2 - c'^2 &= 0 && (3.11)\\ b'^2 + c'^2 &= 0\\ -2a'd' + 2b'c' + 4b'd' &= 0\\ d'(a' - 2b') &= 0.\end{aligned}$$

Os cálculos levando a tais sistemas encontram-se no Apêndice B. No caso do sistema (3.11), a igualdade $4c'b' = 0$ nos diz que c' ou b' se anula, enquanto que a igualdade $b'^2 + c'^2 = 0$ leva a $b' = c' = 0$. Com essa condição, a última igualdade de (3.11) diz agora que ou a' ou d' se anulam. Supondo que $d' \neq 0$, temos que a primeira equação de (3.11) não é satisfeita, o que não nos permite satisfazer (3.9). Logo, devemos ter que $d' = 0$ e o único parâmetro livre na definição do dual é a'. Este sistema admite então como única solução $a' = \frac{1}{2}$ e $b' = c' = d' = 0$, ou seja, a definição usual de dual:

$$\star R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \;=\; \frac{h}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\alpha\beta\rho\sigma}. \tag{3.12}$$

Já o sistema (3.10) admite infinitas soluções, e *a priori* não existe uma definição única para o dual da torção.

Para determinarmos unicamente $\star T$, é necessário encontrarmos uma condição adicional sobre os parâmetros a, b e c. Uma maneira de encontrar uma tal condição consiste em eliminar as possíveis contagens duplas em (3.6): dado que o primeiro e o segundo termos de (3.6) diferem apenas por permutações de índices e que o primeiro termo é anti-simétrico em ρ e σ, para eliminarmos dupla contagem dos termos provenientes deste primeiro termo poderíamos impor que

$$b = 2a. \tag{3.13}$$

A imposição (3.13) nos permite encontrar uma solução para o sistema (3.10), dada por $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = -1$, o que leva à seguinte definição de dual da torção

$$\star T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = h\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\tfrac{1}{4}\,T^{\lambda\rho\sigma} + \tfrac{1}{2}\,T^{\rho\lambda\sigma} - 1\,T^{\theta\rho}{}_{\theta}\,g^{\lambda\sigma}\right). \tag{3.14}$$

É interessante notar que decompondo a torção em suas componentes irredutíveis (ver o Apêndice B) na expressão (3.6), é possível expressar $\star T$ em termos de apenas dois parâmetros independentes, após impormos (3.9).

Embora tal escolha de parâmetros leve à equivalência entre o Teleparalelismo e a Relatividade Geral, os parâmetros poderiam ter sido escolhidos de maneira (quase) completamente arbitrária, e ainda teríamos uma teoria gravitacional viável *a priori*. Note que a condição (3.13) é a única que faz com que a contorção apareça explicitamente na expressão de S, dada agora por

$$S^{\rho\mu\nu} = K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}T^{\sigma\mu}{}_{\sigma} + g^{\rho\mu}T^{\sigma\nu}{}_{\sigma}. \tag{3.15}$$

Uma segunda maneira de determinarmos $\star T$ passa pelo estudo da equação de movimento resultante. Assumindo que o princípio do acoplamento minimal seja válido, a equação de movimento do campo gravitacional na presença de um campo fonte só é consistente se a definição de dual da torção for exatamente a dada por (3.14). Este fato será mostrado na seção 3.5.

3.3 Equação de movimento gravitacional

Utilizando a definição mais geral de dual da torção (3.6) na expressão da ação gravitacional (3.3), e utilizando agora a conexão de Weitzenböck, temos

$$\overset{\bullet}{S}_g = \frac{1}{8ck} \int \eta_{ab} \overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} \left(\star \overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\rho\sigma} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma. \tag{3.16}$$

Utilizando a identidade

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} h^2 d^4x, \tag{3.17}$$

com $d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, temos que a ação é dada por

$$S_g = -\frac{1}{8ck} \int \eta_{ab} \overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} \left(\star \overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\rho\sigma} \right) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} h^2 d^4x. \tag{3.18}$$

Utilizando o tensor $S^{\rho\mu\nu}$ introduzido em (3.6) e a identidade

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -\frac{2}{h^2} \left(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta \right), \tag{3.19}$$

a equação (3.18) se escreve

$$\overset{\bullet}{S}_g = \frac{1}{4ck} \int \overset{\bullet}{T}_{\rho\mu\nu} \overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu} h d^4x, \tag{3.20}$$

de onde extraímos a densidade de Lagrangena correspondente

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}}_g = \frac{h}{4k} \overset{\bullet}{T}_{\rho\mu\nu} \overset{\bullet}{\mathcal{S}}{}^{\rho\mu\nu} = \frac{h}{2k} \left(a\, \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu} \overset{\bullet}{T}{}_\rho{}^{\mu\nu} + b\, \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\rho + c\, \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\rho} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu \right). \tag{3.21}$$

As equações de movimento gravitacionais consistem nas equações de Euler–Lagrange obtidas de (3.21) sob variações $\delta B^a{}_\mu$ do campo de gauge ou, equivalentemente, variações $\delta h^a{}_\mu$ da tetrada. Os cálculos detalhados se encontram no Apêndice C. O resultado final é dado por

$$\partial_\sigma (h \overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma}) - k\, (h \overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\rho) = 0, \tag{3.22}$$

onde

$$\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma} = - \overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\sigma\rho} \equiv -\frac{k}{h} \frac{\partial \overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \tag{3.23}$$

é o chamado superpotencial, e

$$\overset{\bullet}{\jmath}_a{}^{\rho} \equiv -\frac{1}{h}\frac{\partial \overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho}} \tag{3.24}$$

é o a corrente energia–momento total. Note que introduzimos a mesma notação para o superpotencial e para o tensor S definido em (3.7), introduzido na definição de dual (3.6). Utilizamos a mesma notação pois ambos são na verdade o mesmo tensor, como veremos logo em seguida. A equação (C.3) é a chamada forma potencial da equação de movimento. As expressões explícitas para o superpotencial e a corrente total são dadas por (C.9)

$$\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma} = 2a\,\overset{\bullet}{T}_a{}^{\sigma\rho} + b\,\overset{\bullet}{T}{}^{\sigma}{}_a{}^{\rho} - b\,\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_a{}^{\sigma} + c\,\overset{\bullet}{T}{}^{\theta\sigma}{}_{\theta}\,h_a{}^{\rho} - c\,\overset{\bullet}{T}{}^{\theta\rho}{}_{\theta}\,h_a{}^{\sigma}, \tag{3.25}$$

que coincide com a definição (3.7), e por (C.21)

$$\overset{\bullet}{\jmath}_a{}^{\rho} = \frac{1}{k}h_c{}^{\sigma}\overset{\bullet}{T}{}^{c}{}_{\nu a}\,\overset{\bullet}{S}{}_{\sigma}{}^{\nu\rho} - \frac{1}{k}A^c{}_{a\nu}\,\overset{\bullet}{S}{}_c{}^{\nu\rho} - \frac{h_a{}^{\rho}}{h}\overset{\bullet}{\mathcal{L}}. \tag{3.26}$$

Note que a equação de movimento (3.22) tem sempre a mesma forma, para qualquer escolha de parâmetros na lagrangiana. Este fato será relevante para a discussão da seção 4.

3.4 Lagrangiana dos campos fonte

Quando consideramos campos fonte na teoria, surge a questão de como acoplá-los ao campo gravitacional. No contexto da Relatividade Geral, tal acoplamento é feito em termos da conexão de Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$. Já no contexto do teleparalelismo, temos também à nossa disposição a conexão de Weitzenböck, que nos permitiria em princípio estabelecer um outro tipo de acoplamento com o campo gravitacional.

O acoplamento com uma conexão arbitrária compatível com a métrica, Γ, leva a inconsistências na própria equação de movimento [9, 18]: a simetria do lado esquerdo da equação de movimento implica que a parte anti-simétrica do tensor energia-momento dinâmico dos campos fonte deve ser zero, o que leva à conservação do tensor de spin destes campos. Entretanto, para campos com spin acoplados com o campo gravitacional através de Γ, o tensor energia–momento não é necessariamente simétrico.

Uma maneira de resolver a inconsistência consiste em utilizar a própria conexão de Levi–Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$, que pode ser escrita em termos de quantidades teleparalelas através da decomposição (2.46), neste acoplamento [18, 19]. Neste caso, o tensor energia–momento dinâmico é simétrico, coincidindo com o tensor energia–momento simetrizado de Belinfante [4]. Com este acoplamento, a teoria teleparalela coincide com a Relatividade Geral até mesmo na presença de campos com spin [19].

Note que se escrevêssemos a lagrangiana dos campos fonte acoplando-os com $\overset{\bullet}{A}$, e utilizássemos (2.46) para reescrever a lagrangiana em função de $\overset{\circ}{A}$, obteríamos um termo de interação extra quadrático no superpotencial. Tal termo, que surge na teoria de Einstein–Cartan, leva a predições diferentes das previstas pela Relatividade Geral [4].

3.5 Argumento para determinação do dual

Seja $\Theta_a{}^\rho$ o tensor energia-momento simétrico de um campo fonte, por exemplo um campo escalar. Em Minkowski, $\Theta_a{}^\rho$ satisfaz à lei de conservação

$$\partial_\rho \Theta_a{}^\rho = 0. \tag{3.27}$$

Tomando como princípio que esta equação é generalizada para um espaço-tempo com gravitação através do acoplamento minimal, substituindo-se derivadas ordinárias por derivadas covariantes, temos que

$$\overset{\circ}{D}_\rho (h\,\Theta_a{}^\rho) = 0 \tag{3.28}$$

deve ser a generalização de (3.27) na presença de gravitação. Esta lei de conservação, até então é uma identidade que surge da dinâmica do campo: a invariância da ação do campo fonte sob transformações infinitesimais de coordenadas leva a (3.28).

Na presença de um campo fonte, a equação de campo gravitacional (3.22) se escreve agora

$$\partial_\sigma (h \overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma}) - k\,(h \overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\rho) = k\,h \Theta_a{}^\rho. \tag{3.29}$$

Como o lado direito de (3.29) deve satisfazer à lei de conservação covariante (3.28), devemos ter que

$$\overset{\circ}{D}_\rho \left[\partial_\sigma (h \overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma}) - k\,(h \overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\rho) \right] = 0. \tag{3.30}$$

Ao contrário de (3.28), que pode ser deduzida à partir da dinâmica da teoria, a equação (3.30) não pode ser obtida impondo-se que a variação da ação gravitacional se anule. De fato, a invariância da lagrageana gravitacional sob transformações infinitesimais de coordenadas dá origem justamente a equações de movimento para a tetrada. Como a derivada covariante desta expressão contém explicitamente a conexão de Weitzenböck e a contorção, é de se esperar que seja necessário que o superpotencial tenha uma dependência muito específica na contorção, a fim de que (3.30) seja satisfeita. Como a contorção é definida independentemente da escolha de operador dual, (3.30) não deve ser satisfeita para qualquer conjunto de parâmetros a, b e c. Isto nos sugere que precisamos que alguma condição *geométrica* nos garanta que (3.30) seja sempre satisfeita.

Ora, impondo-se a condição $b = 2a$, podemos mostrar que (3.30) é simplesmente a identidade de Bianchi (2.60) contraída. Logo, ao assumirmos que campos fonte se acoplam ao campo gravitacional através do acoplamento minimal, devemos ter que a divergência covariante da equação de campo gravitacional seja igual a zero. Isto nos é garantido pela identidade de Bianchi (2.60) apenas se $b = 2a$, o que leva à definição de operador dual (3.14). Com tal escolha, utilizando a decomposição (2.46) na lagrangiana (3.21), obtemos [7]

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}}_g = -\frac{h}{2k}\overset{\circ}{R} - \partial_\mu \left(\frac{h}{k} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu} \right). \tag{3.31}$$

Vemos então que a lagrangiana teleparalela difere da lagrangiana de Einstein–Hilbert apenas por um termo de superfície, que não afeta as equações de movimento.

3.6 Variação de Palatini

Na seção 3.3, encontramos a equação de campo teleparalela ao variar a ação gravitacional com respeito à tetrada, de maneira análoga à Relatividade Geral. Assim como no caso da Relatividade Geral, é necessário fixar a conexão de Lorentz à priori. A fixação usualmente feita na literatura, e que leva a uma conexão com torção e sem curvatura, é dada por $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = 0$ para um frame qualquer.

Quando consideramos a tetrada e a conexão como objetos independentes, na lagrangiana de Einstein–Hilbert, variações desta com respeito à conexão levam a uma equação que diz justamente que a conexão é a conexão de Levi–Civita. No caso da dinâmica regida por esta lagrangiana, então, não é necessário fixar *a priori* a conexão da teoria: a informação que define a conexão já está incluída na lagrangiana.

Como a fixação da conexão de Weitzenböck parece um tanto arbitrária, já que pode ser feita em qualquer frame, poderíamos tentar aplicar o mesmo método da variação de Palatini para a lagrangiana do Teleparalelismo, com a esperança de que a conexão fosse unicamente determinada, assim como acontece na Relatividade Geral.

Incluindo agora um termo de multiplicador de Lagrange $\lambda_a{}^{b\mu\nu} R^a{}_{b\mu\nu}$, para fixar a conexão da teoria como sendo uma conexão sem curvatura, a lagrangiana teleparalela se escreve

$$\mathcal{L}_g = \frac{h}{4k} \overset{\bullet}{T}_{\rho\mu\nu} \overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu} + \frac{h}{4k} \lambda_a{}^{b\mu\nu} \overset{\bullet}{R}{}^a{}_{b\mu\nu}. \tag{3.32}$$

A lagrangiana total é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m, \tag{3.33}$$

onde $\mathcal{L}_m$ é a lagrangiana dos campos de matéria. O tensor $\lambda_a{}^{b\mu\nu}$ apresenta as mesmas simetrias do tensor de Riemann, e é constituído então por 36 componentes independentes. Variações de (3.33) com respeito à tetrada levam à equação de campo

$$\partial_\sigma (h \overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma}) - k\,(h \overset{\bullet}{\jmath}_a{}^{\rho}) = k\,(h\,\tau_a{}^{\rho}), \tag{3.34}$$

onde

$$h\,\tau_a{}^{\rho} = -\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^a{}_\rho}, \tag{3.35}$$

é o tensor energia–momento dinâmico dos campos de matéria. Variações com respeito à conexão de Lorentz levam a

$$\overset{\bullet}{D}_\mu (h\,\lambda_{bc}{}^{\rho\mu}) - h \overset{\bullet}{S}{}_{[bc]}{}^{\rho} = 0, \tag{3.36}$$

já que como o acoplamento dos campos de matéria com a gravitação se dá através da conexão de Levi–Civita, que por sua vez pode ser escrita em termos da tetrada, temos que

$$\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \overset{\bullet}{A}{}^{bc}{}_\rho} = 0. \tag{3.37}$$

Finalmente, variações com respeito ao multiplicador de Lagrange levam a

$$\overset{\bullet}{R}{}^a{}_{b\mu\nu} = 0, \tag{3.38}$$

que fixa a conexão da teoria como uma conexão sem curvatura.

A equação (3.34) é uma equação dinâmica para a tetrada, e pode-se mostrar, por meio da decomposição da conexão (2.46), que ela corresponde à equação de Einstein na presença de um campo fonte

$$\overset{\circ}{R}_a{}^{\rho} - \frac{h_a{}^{\rho}}{2} \overset{\circ}{R} = k\,\tau_a{}^{\rho}. \tag{3.39}$$

Este resultado já era esperado, dada a equivalência (3.31) entre as lagrangianas.

Tomando a divergência covariante de (3.36) e utilizando a anti-simetria do superpotencial em conjunto com (3.38), obtemos

$$\overset{\bullet}{D}_\rho(h \ \overset{\bullet}{S}{}_{[bc]}{}^\rho) = 0. \tag{3.40}$$

Como esta equação é idêntica à parte anti-simétrica de (3.34), quando escrita com os índices apropriados, ela é automaticamente satisfeita. Logo, esta equação não é capaz de determinar a conexão da teoria, e a liberdade de escolher $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = 0$ em qualquer frame continua. Podemos usar (3.36) então para determinar o multiplicador de Lagrange $\lambda_a{}^{b\mu\nu}$. Das 24 equações independentes de (3.36), podemos eliminar 6 com (3.40), o que nos deixa com 18 equações independentes, que não são suficientes para determinar as 36 componentes de $\lambda_a{}^{b\mu\nu}$. Entretanto, a existência de uma simetria[‡] relacionada a este multiplicador de Lagrange [4] permite fixar 18 graus de liberdade, de tal maneira que (3.36) pode ser utilizada para determinar os 18 graus de liberdade restantes.

[‡]Note que a lagrangiana (3.32) é invariante sob a transformação $\lambda'_{ab}{}^{\mu\nu} = \lambda_{ab}{}^{\mu\nu} + \overset{\bullet}{D}\epsilon_{ab}{}^{\mu\nu\rho}$, com $\epsilon_{ab}{}^{\mu\nu\rho}$ completamente anti-simétrico nos seus índices superiores. Pode-se mostrar isso facilmente efetuando-se uma integração por partes do termo em ϵ, e graças à identidade de Bianchi.

Capítulo 4

Aproximação linear e simetria de dualidade

Como exemplo da utilidade da nova definição de operador dual (3.14) para a torção, iremos analisar brevemente a questão da simetria de dualidade da interação gravitacional no regime de campos fracos. Como já é conhecido, a Relatividade Geral apresenta esta simetria neste limite, e nesta seção iremos analisar o que acontece, do ponto de vista teleparalelo, com a teoria linearizada.

A linearização das equações de Einstein em torno da métrica de Minkowski leva a equações de movimento semelhantes às do campo de spin 2 sem massa em Minkowski, o que leva à interpretação de que a interação gravitacional é mediada por um campo de spin 2 auto–interagente [4, 20]. Entretanto, o acoplamento de campos de spin superior a 1 com o campo gravitacional é um problema ainda em aberto. As dificuldades encontradas em tal acoplamento, no caso de um campo $\psi_{\mu\nu}$ de spin 2 foram primeiro analisadas por Aragone e Deser em [21]. Recentemente, a representação de Fierz para o campo de spin 2 tem sido utilizada para analisar este problema tanto no contexto da Relatividade Geral [22], quanto no do Teleparalelismo [23], onde a representação de Fierz surge de maneira natural. Pela maneira natural como esta representação surge no Teleparalelismo, iremos aqui utilizar esta representação.

O campo $\psi_{\mu\nu}$ é simétrico $\psi_{\mu\nu} = \psi_{\nu\mu}$. A partir dele construímos o chamado tensor de Fierz [22]

$$F_{\alpha\mu\nu} \;=\; \partial_\mu \psi_{\nu\alpha} - \partial_\alpha \psi_{\nu\mu} + \eta_{\mu\nu}\left(\partial_\alpha \psi - \partial_\lambda \psi_\alpha{}^\lambda\right) - \eta_{\alpha\nu}\left(\partial_\mu \psi - \partial_\lambda \psi_\mu{}^\lambda\right), \tag{4.1}$$

onde $\psi = \psi^\mu{}_\mu$. O tensor $F_{\alpha\mu\nu}$ é anti–simétrico no primeiro par de índices

$$F_{\alpha\mu\nu} = -F_{\mu\alpha\nu} \tag{4.2}$$

e satisfaz à identidade cíclica

$$F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\nu\alpha} + F_{\nu\alpha\mu} = 0. \tag{4.3}$$

Um tensor satisfazendo as propriedades (4.2) e (4.3) possui 20 componentes independentes. Para poder representar um campo de spin 2, exigiremos ainda que o tensor de Fierz satisfaça à identidade

$$\partial^\nu F_{\alpha\mu\nu} = 0. \tag{4.4}$$

Satisfazendo a estas três identidades, o tensor de Fierz possui 10 componentes independentes, mesmo número que o campo $\psi_{\mu\nu}$, o que lhe confere os graus de liberdade necessários para descrever um campo de spin 2 sem massa no espaço–tempo de Minkowski.*

4.1 Equações de campo linearizadas

Em Minkowski, existe um sistema de coordenadas preferencial $\{x^\mu\}$ tal que a base coordenada do espaço–tangente seja ortonormal pela métrica g, ou seja,

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \tag{4.5}$$

Neste sistema de coordenadas, a base ortonormal $\{h_a\}$ coincide, a menos de uma rotação global de Lorentz, com a própria base coordenada $\{\partial_\mu\}$, de maneira que os coeficientes da tetrada são triviais e dados por $h^a{}_\mu = \delta^a{}_\mu$. Alternativamente, dado um sistema de coordenadas qualquer, é possível chegar aos mesmos coeficientes da tetrada através de rotações locais de Lorentz, de tal maneira que consideraremos na sequência que os coeficientes da tetrada no espaço de fundo são triviais e dados por $\delta^a{}_\mu$.

Agora, consideramos o potencial $B^a{}_\mu$ como uma pequena perturbação da tetrada, de tal maneira que podemos expandi-lo em função de um parâmetro de perturbação infinitesimal adimensional ε como

$$B^a{}_\mu = \varepsilon B^a_{(1)\mu} + \varepsilon^2 B^a_{(2)\mu} + \dots\ . \tag{4.6}$$

*Destas 10 componentes, 8 podem ser eliminadas por fixação de gauge, como pode ser visto em [4]. Assim, sobram apenas 2 graus de liberdade, correspondendo às duas helicidades possíveis que um campo de spin 2 sem massa pode ter.

A tetrada perturbada é dada então por

$$h^a{}_\mu = \delta^a{}_\mu + \varepsilon B^a_{(1)\mu} + \varepsilon^2 B^a_{(2)\mu} + \dots \ , \tag{4.7}$$

e a expansão correspondente da métrica se escreve

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon \left(B_{(1)\mu\nu} + B_{(1)\nu\mu} \right) + \dots \ , \tag{4.8}$$

onde os índices do espaço–tempo agora são levantados e abaixado com a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

Embora a perturbação $B_{(1)\mu\nu}$ não seja necessariamente simétrica, já foi mostrado na literatura que a parte anti-simétrica desta perturbação não contribui para a lagrangiana em primeira ordem e nem para a equação de campo linearizada [23]. Assumiremos então que $B_{(1)\mu\nu}$ seja simétrico. Neste caso, em primeira ordem, a conexão de the Weitzenböck é dada por

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\rho_{(1)\mu\nu} = \partial_\nu B^\rho_{(1)\mu}, \tag{4.9}$$

enquanto que a torção e a contorção são dados respectivamente por

$$\overset{\bullet}{T}{}^\rho_{(1)\mu\nu} = \partial_\mu B^\rho_{(1)\nu} - \partial_\nu B^\rho_{(1)\mu} \tag{4.10}$$

e

$$\overset{\bullet}{K}{}^\rho_{(1)\mu\nu} = \partial^\rho B_{(1)\mu\nu} - \partial_\mu B^\rho_{(1)\nu}. \tag{4.11}$$

Substituindo estes tensores no superpotencial (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{S}{}_{(1)\nu}{}^{\rho\mu} = \frac{1}{2}[\partial^\rho B^\mu_{(1)\nu} - \partial^\mu B^\rho_{(1)\nu} - \delta_\nu{}^\mu \left(\partial^\rho B^\sigma_{(1)\sigma} - \partial_\sigma B^{\sigma\rho}_{(1)} \right) \\ + \delta_\nu{}^\rho \left(\partial^\mu B^\sigma_{(1)\sigma} - \partial_\sigma B^{\sigma\mu}_{(1)} \right)]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Como o superpotencial (4.12) satisfaz as mesmas propriedades (4.2) e (4.3) do tensor de Fierz, definimos o tensor de Fierz $F^{\rho\mu}{}_\nu$ por

$$F^{\rho\mu}{}_\nu \equiv - \overset{\bullet}{S}{}_{(1)\nu}{}^{\rho\mu}. \tag{4.13}$$

Note que a perturbação, $B^\rho_{(1)\mu}$, está sendo considerada como o próprio campo de spin 2, $\psi_{\mu\nu}$.

Como o termo $h\overset{\bullet}{J}_\lambda{}^\rho$ de (3.22) é de segunda ordem no parâmetro de perturbação ε, a equação de campo linearizada (3.22) é dada simplesmente por

$$\partial_\mu F^{\rho\mu}{}_\nu = 0, \tag{4.14}$$

que é exatamente a equação de campo que descreve um campo não–massivo de spin 2 em um espaço–tempo plano [21, 22, 23].

4.2 Simetria de dualidade

A simetria de dualidade é uma propriedade das teorias de Yang–Mills, onde a equação de movimento no caso sem fontes é simplesmente a identidade de Bianchi reescrita para o dual da curvatura. A partir de uma identidade geométrica, pode-se então determinar a dinâmica de teorias com tal propriedade.

Em primeira ordem, a identidade de Bianchi (2.50) pode ser escrita em termos apenas de índices do espaço–tempo como

$$\partial_\rho \overset{\bullet}{T}{}^{\alpha}_{(1)\mu\nu} + \partial_\nu \overset{\bullet}{T}{}^{\alpha}_{(1)\rho\mu} + \partial_\mu \overset{\bullet}{T}{}^{\alpha}_{(1)\nu\rho} = 0, \tag{4.15}$$

ou equivalentemente

$$\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}\partial_\rho \overset{\bullet}{T}{}^{\alpha}_{(1)\mu\nu} = 0. \tag{4.16}$$

Se a teoria linearizada apresenta simetria de dualidade, sua equação de campo gravitacional, no caso sem fontes, deve ser dada por

$$\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}\partial_\rho \star \overset{\bullet}{T}{}^{\alpha}_{(1)\mu\nu} = 0. \tag{4.17}$$

Substituindo a definição de dual (3.6) em (4.17) obtemos em primeira ordem

$$\partial_\sigma \overset{\bullet}{S}{}_{(1)\lambda}{}^{\sigma\rho} = 0, \tag{4.18}$$

que é justamente a equação de campo linearizada que havíamos obtido em (4.14). Mostramos então que o Teleparalelismo apresenta simetria de dualidade na aproximação linear [24], no vácuo. Dada a equivalência entre esta teoria e a Relatividade Geral, isto é compatível com o fato de que a Relatividade Geral também apresenta esta simetria na mesma aproximação linear [25]. Além do mais, vemos que a definição de dual generalizado dada em (3.6) é necessária para que a teoria teleparalela linearizada apresente esta simetria.

Para finalizar esta seção, é interessante notar que no Teleparalelismo há uma anti–simetria da ação relacionada a esta simetria de dualidade. A ação teleparalela é dada por

$$\overset{\bullet}{S}[\overset{\bullet}{T}] = \frac{c^3}{16\pi G}\int \eta_{ab}\, \overset{\bullet}{T}{}^a \wedge \star \overset{\bullet}{T}{}^b, \tag{4.19}$$

e reescrita para o dual, leva a

$$\overset{\bullet}{S}[\star\overset{\bullet}{T}] = \frac{c^3}{16\pi G}\int \eta_{ab} \star \overset{\bullet}{T}{}^a \wedge \star\star \overset{\bullet}{T}{}^b. \tag{4.20}$$

Como $\star\star \overset{\bullet}{T}{}^a = -\overset{\bullet}{T}{}^a$, obtemos

$$\overset{\bullet}{S}[\star\overset{\bullet}{T}] = -\frac{c^3}{16\pi G}\int \eta_{ab} \star\overset{\bullet}{T} \wedge \overset{\bullet}{T} = -\overset{\bullet}{S}[\overset{\bullet}{T}]. \tag{4.21}$$

Já que (4.20) e (4.19) diferem por um sinal global, elas levam à mesma equação de movimento no caso sem fontes. É importante notar que esta simetria está sempre presente na ação, mas a equação de movimento só apresenta simetria de dualidade na aproximação linear da teoria e no caso sem fontes.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação, resumimos algumas das teorias que procuram fazer um contato maior entre a interação gravitacional e as teorias de gauge. Começamos com uma formulação não–covariante do Teleparalelismo, baseada na "gaugeficação" do grupo das translações. Em seguida, construímos uma teoria de gauge para o grupo de Poincaré, onde a covariância da teoria é explicíta desde o início, e efetuamos a redução do grupo de estrutura para o grupo de Lorentz. Concentramos os esforços no estudo desta formulação do equivalente teleparalelo da Relatividade Geral, que descreve a interação gravitacional através da torção, ao invés da curvatura.

Para p-formas a valores no espaço–tangente, a presença de soldagem possibilita a contração entre índices internos e externos, o que nos dá a possibilidade de generalizar o operador dual de Hodge [13]. Definimos um novo operador dual para a torção que permite-nos escrever a lagrangiana da teoria nos moldes das teorias de Yang–Mills. Analisando então a equação de movimento correspondente, e impondo a consistência com o acoplamento minimal, conseguimos determinar unicamente este novo dual, e conseqüentemente a dinâmica da teoria.

Pode-se mostrar que a dinâmica encontrada é equivalente à da Relatividade Geral. Conseguimos então consistência com os resultados experimentais obtidos por esta teoria, sem necessitar impor invariância local de Lorentz da ação, como na formulação não–covariante, e sem impor equivalência com a Relatividade Geral *a priori*. Mostramos também que, para o Teleparalelismo linearizado apresentar simetria de dualidade, como acontece na Relatividade Geral linearizada, é necessário considerar este novo operador dual ao invés do dual usual. Esta é uma característica importante da teoria, e que mostra a consistência da nova definição de dual de Hodge.

Como continuação deste trabalho, a formulação do Teleparalelismo mais apropriada a ser considerada numa possível generalização do grupo de simetria local, de Poincaré para de Sitter, é a baseada na gaugeficação do grupo de Poincaré e na redução do grupo de estrutura para o grupo de Lorentz, que leva a uma geometria de Riemann–Cartan para o espaço–tempo.* A definição do novo operador dual aqui apresentada é um passo importante no sentido de determinarmos a dinâmica desta teoria de maneira consistente e compatível com os resultados experimentais já obtidos, no limite de validade da Relatividade Geral e conseqüentemente do Teleparalelismo.

*Como as translações do grupo de de Sitter não formam um grupo, não é possível construir uma formulação não-covariante, nos moldes da aqui apresentada, para uma teoria gravitacional baseada neste grupo de simetria local.

Apêndice A

Decomposição irredutível da torção

A torção se escreve, em termos de suas componentes irredutíveis sobre o grupo de Lorentz [26], como

$$T_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3}\left(t_{\lambda\mu\nu} - t_{\lambda\nu\mu}\right) + \frac{1}{3}\left(g_{\lambda\mu}v_{\nu} - g_{\lambda\nu}v_{\mu}\right) + \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}a^{\rho}, \tag{A.1}$$

onde

$$v_{\mu} = T^{\nu}{}_{\nu\mu} \tag{A.2}$$

e

$$a^{\mu} = \frac{1}{6}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T_{\nu\rho\sigma} \tag{A.3}$$

são respectivamente chamadas de parte vetorial e axial, e

$$t_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\mu\lambda\nu}\right) + \frac{1}{6}\left(g_{\nu\lambda}v_{\mu} + g_{\nu\mu}v_{\lambda}\right) - \frac{1}{3}g_{\lambda\mu}v_{\nu} \tag{A.4}$$

é a parte puramente tensorial da torção, ou seja, cuja parte tensorial e axial são nulas. Seja o dual da torção definido por

$$\star T^{\alpha}{}_{\rho\sigma} = h\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(aT^{\alpha\mu\nu} + bT^{\mu\alpha\nu} + cg^{\alpha\nu}T^{\theta\mu}{}_{\theta}\right). \tag{A.5}$$

Em termos da decomposição (A.1), ele se escreve

$$\begin{aligned}\star T^{\alpha}{}_{\rho\sigma} &= h\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left[\frac{1}{3}(2a+b)(t^{\alpha\mu\nu} - t^{\alpha\nu\mu}) + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{6} + \frac{c}{2}\right)\left(g^{\alpha\mu}v^{\nu} - g^{\alpha\nu}v^{\mu}\right)\right.\\ &\quad\left. + (a-b)\epsilon^{\alpha\mu\nu\lambda}a_{\lambda}\right]\end{aligned} \tag{A.6}$$

As componentes irredutíveis do dual da torção são

$$\begin{aligned}
\star v_\sigma &= \star T^\lambda{}_{\lambda\sigma} \\
&= h\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}(aT^{\lambda\mu\nu} + bT^{\mu\lambda\nu} + cg^{\lambda\nu}T^{\theta\mu}{}_\theta) \\
&= h\epsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}(a-b)T^{\lambda\mu\nu} \\
&= -6h(a-b)a_\sigma,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
\star a^\mu &= \frac{1}{6}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \star T_{\nu\rho\sigma} \\
&= \frac{h}{6}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\left(aT_\nu{}^{\alpha\beta} + bT^\alpha{}_\nu{}^\beta + c\delta^\rho_\nu T^{\theta\alpha}{}_\theta\right) \\
&= \frac{1}{3h}(2a+b+3c)v^\mu,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

e

$$\begin{aligned}
\star t_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\star T_{\lambda\mu\nu} + \star T_{\mu\lambda\nu}\right) + \frac{1}{6}\left(g_{\nu\lambda} \star v_\mu + g_{\nu\mu} \star v_\lambda\right) - \frac{1}{3}g_{\lambda\mu} \star v_\nu \\
&= \frac{h}{2}[\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(aT_\lambda{}^{\rho\sigma} + bT^\rho{}_\lambda{}^\sigma + c\delta^\sigma_\lambda T^{\theta\rho}{}_\theta) + \epsilon_{\lambda\nu\rho\sigma}(aT_\mu{}^{\rho\sigma} + bT^\rho{}_\mu{}^\sigma + c\delta^\sigma_\mu T^{\theta\rho}{}_\theta)] + \\
&\quad -h(a-b)(g_{\nu\lambda}a_\mu + g_{\nu\mu}a_\lambda) + 2h(a-b)g_{\lambda\mu}a_\nu.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Calculando agora o dual do dual destas componentes, temos

$$\begin{aligned}
\star\star v_\sigma &= -6h(a-b) \star a_\sigma \\
&= -2(a-b)(2a+b+3c)v_\sigma,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
\star\star a^\mu &= \frac{1}{3h}(2a+b+3c) \star v^\mu \\
&= -2(a-b)(2a+b+3c)a^\mu
\end{aligned} \tag{A.11}$$

e

$$\begin{aligned}
\star\star t_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\star\star T_{\lambda\mu\nu} + \star\star T_{\mu\lambda\nu}\right) + \frac{1}{6}\left(g_{\nu\lambda} \star\star v_\mu + g_{\nu\mu} \star\star v_\lambda\right) \\
&\quad -\frac{1}{3}g_{\lambda\mu} \star\star v_\nu.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Impondo a condição

$$\star\star T^\rho{}_{\mu\nu} = -T^\rho{}_{\mu\nu}, \tag{A.13}$$

obtemos as seguintes condições para os parâmetros livres na definição do dual

$$4a^2 + 2ac + 2ab - 2bc = 1 \tag{A.14}$$

$$b^2 + 2ab + 2bc - 2ac = 0.. \tag{A.15}$$

A imposição (A.13) implica também que $\star\star v^{\mu} = -v^{\mu}$, $\star\star a^{\mu} = -a^{\mu}$ e $\star\star t_{\lambda\mu\nu} = -t_{\lambda\mu\nu}$, e para tanto é necessário que

$$2(a-b)(2a+b+3c) = 1. \tag{A.16}$$

Ora, o lado esquerdo desta equação é simplesmente

$$2(a-b)(2a+b+3c) = (4a^2+2ac+2ab-2bc) - 2(b^2+2ab+2bc-2ac), \tag{A.17}$$

e utilizando as equações (A.14) e (A.15), a condição (A.16) é também satisfeita. Logo, não surgem condições extras a serem impostas aos parâmetros a, b e c ao se considerar o dual da torção em termos das suas componentes irredutíveis.

Entretanto, somando (A.14) com (A.15), obtemos que

$$2a+b = \pm 1. \tag{A.18}$$

Escolhendo $2a+b=1$, podemos escrever (A.6) como

$$\star T^{\alpha}{}_{\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left[\frac{1}{3}(t^{\alpha\mu\nu} - t^{\alpha\nu\mu}) + \alpha(g^{\alpha\mu}v^{\nu} - g^{\alpha\nu}v^{\mu}) + \beta\epsilon^{\alpha\mu\nu\lambda}a_{\lambda}\right], \tag{A.19}$$

onde $\alpha = \frac{c}{2} + \frac{1}{6}$ e $\beta = 3a - 1$ são duas novas constantes. Vemos então que, em termos da decomposição irredutível da torção, bastam duas constantes para se definir este novo operador dual. Escolhendo $2a+b=-1$, poderíamos proceder da mesma maneira e expressar (A.19) em função de duas novas constantes.

Apêndice B

Cálculos sobre o novo operador de Hodge

B.1 Torção

A definição mais geral de dual da torção é dada por

$$\star T^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(aT^{\alpha\rho\sigma} + bT^{\rho\alpha\sigma} + cg^{\alpha\sigma}T^{\rho}), \tag{B.1}$$

onde $T^{\rho} = T^{\sigma\rho}{}_{\sigma}$. Como $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é anti-simétrico nos seus dois últimos índices, o termo entre parênteses contribui apenas com a parte anti-simétrica nestes índices. Por simplicidade, não é necessário explicitar esta anti-simetria.

Tomando o dual de (B.1), obtemos

$$\star\star T^{\alpha}{}_{\gamma\lambda} = \sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}(a\star T^{\alpha\mu\nu} + b\star T^{\mu\alpha\nu} + cg^{\alpha\nu}\star T^{\mu}), \tag{B.2}$$

onde $\star T^{\mu} = \star T^{\sigma\mu}{}_{\sigma}$. Explicitamente, (B.2) se escreve

$$\begin{aligned}\star\star T^{\alpha}{}_{\gamma\lambda} &= \sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}g^{\rho\rho'}g^{\sigma\sigma'}\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}(a^2T^{\alpha}{}_{\rho\sigma} + abT_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma} + ac\delta^{\alpha}_{\sigma}T_{\rho}) \\ &\quad + \sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}g^{\alpha\alpha'}g^{\nu\nu'}g^{\rho\rho'}g^{\sigma\sigma'}\epsilon_{\alpha'\nu'\rho'\sigma'}(b^2T_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma} + abT^{\mu}{}_{\rho\sigma} + bc\delta^{\mu}_{\sigma}T_{\rho}) \\ &\quad + \sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu}{}^{\alpha}g^{\mu\mu'}g^{\theta\theta'}g^{\rho\rho'}g^{\sigma\sigma'}\epsilon_{\mu'\theta'\rho'\sigma'}(c^2g_{\sigma\theta}T_{\rho} + acT_{\theta\rho\sigma} + bcT_{\rho\theta\sigma})\end{aligned} \tag{B.3}$$

Usando a o fato de que

$$g^{\mu\mu'}g^{\theta\theta'}g^{\rho\rho'}g^{\sigma\sigma'}\epsilon_{\mu'\theta'\rho'\sigma'} = \frac{1}{g}\epsilon^{\mu\theta\rho\sigma}, \tag{B.4}$$

a identidade

$$\begin{aligned}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\epsilon^{\beta\rho\sigma\nu} &= \frac{1}{g}(\delta^{\beta}{}_{\gamma}\delta^{\rho}{}_{\lambda}\delta^{\sigma}{}_{\mu} - \delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\rho}{}_{\gamma}\delta^{\sigma}{}_{\mu} + \delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\rho}{}_{\mu}\delta^{\sigma}{}_{\gamma} \\ &\quad - \delta^{\beta}{}_{\mu}\delta^{\rho}{}_{\lambda}\delta^{\sigma}{}_{\gamma} + \delta^{\beta}{}_{\mu}\delta^{\rho}{}_{\gamma}\delta^{\sigma}{}_{\lambda} - \delta^{\beta}{}_{\gamma}\delta^{\rho}{}_{\mu}\delta^{\sigma}{}_{\lambda}),\end{aligned} \tag{B.5}$$

e lembrando que $|g|/g = -1$, podemos escrever (B.3) como

$$\begin{aligned} \star\star T^{\alpha}{}_{\gamma\lambda} &= -(4a^2 + 2ac + 2ab - 2bc)T^{\alpha}{}_{\gamma\lambda} \\ &\quad -(b^2 + 2ab - 2ac + 2bc)(T_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda} - T_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\gamma}) \\ &\quad -(-b^2 - 2ab + 2ac - 2bc)(\delta^{\alpha}_{\lambda}T_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}T_{\lambda}). \end{aligned} \tag{B.6}$$

Note que os termos das duas últimas linhas apresentam a mesma combinação dos parâmetros a, b e c, a menos de um sinal global. A imposição

$$\star\star T^{\alpha}{}_{\gamma\lambda} = -T^{\alpha}{}_{\gamma\lambda} \tag{B.7}$$

leva ao sistema de equações

$$4a^2 + 2ac + 2ab - 2bc = 1 \tag{B.8}$$

$$b^2 + 2ab - 2ac + 2bc = 0. \tag{B.9}$$

B.2 Curvatura

A definição mais geral de dual do tensor de curvatura é dada por

$$\begin{aligned} \star R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} &= \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}[aR^{\alpha\beta\rho\sigma} + b(R^{\alpha\rho\beta\sigma} - R^{\beta\rho\alpha\sigma}) \\ &\quad +c(g^{\alpha\rho}R^{\beta\sigma} - g^{\beta\rho}R^{\alpha\sigma}) + dg^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}R] \end{aligned} \tag{B.10}$$

onde $R^{\alpha\rho} = \delta^{\sigma}_{\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}$ e $R = g_{\alpha\rho}R^{\alpha\rho}$. Note que esta definição é claramente anti-simétrica nos índices α e β, o que é necessário já que R é uma 2-forma a valores na álgebra de Lorentz. O tensor de Ricci dual se escreve

$$\star R^{\alpha\beta} = \sqrt{|g|}\epsilon^{\beta\lambda\rho\sigma}\left[aR^{\alpha}{}_{\lambda\rho\sigma} + b(R^{\alpha}{}_{\rho\lambda\sigma} - R_{\lambda\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma}) + c\delta^{\alpha}_{\rho}R_{\lambda\sigma}\right] \tag{B.11}$$

e a curvatura escalar dual

$$\star R = \sqrt{|g|}(a - 2b)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}R^{\alpha\beta\gamma\lambda}. \tag{B.12}$$

O dual do dual da curvatura se escreve

$$\begin{aligned} \star\star R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} &= \sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}[a \star R^{\alpha\beta\rho\sigma} + b(\star R^{\alpha\rho\beta\sigma} - \star R^{\beta\rho\alpha\sigma}) \\ &\quad +c(g^{\alpha\rho} \star R^{\beta\sigma} - g^{\beta\rho} \star R^{\alpha\sigma}) + dg^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma} \star R]. \end{aligned} \tag{B.13}$$

Para dividir o cálculo em etapas, identificaremos cada termo desta expressão como se segue

$$\begin{aligned}
\text{Termo I} &= a\sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\star R^{\alpha\beta\rho\sigma} && \text{(B.14)}\\
\text{Termo II} &= b\sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}(\star R^{\alpha\rho\beta\sigma} - \star R^{\beta\rho\alpha\sigma}) && \text{(B.15)}\\
\text{Termo III} &= c\sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}(g^{\alpha\rho}\star R^{\beta\sigma} - g^{\beta\rho}\star R^{\alpha\sigma}) && \text{(B.16)}\\
\text{Termo IV} &= d\sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\star R && \text{(B.17)}
\end{aligned}$$

Termo I

Usando o fato que $|g|/g = -1$ e a identidade

$$\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{2}{g}(\delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\lambda} - \delta^{\rho}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\gamma}), \tag{B.18}$$

chegamos a

$$a\sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\star R^{\alpha\beta\mu\nu} = -4a^2 R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} - 2abG^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda} - 2acT^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda} - 2adS^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}, \tag{B.19}$$

onde definimos os seguintes tensores

$$G^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda} = R^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda} - R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\gamma} + R^{\beta}{}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\gamma} - R^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda}, \tag{B.20}$$

$$T^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma}R^{\beta}{}_{\lambda} - \delta^{\alpha}{}_{\lambda}R^{\beta}{}_{\gamma} + \delta^{\beta}{}_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\gamma} - \delta^{\beta}{}_{\gamma}R^{\alpha}{}_{\lambda}, \tag{B.21}$$

e

$$S^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda} = \left(\delta^{\alpha}{}_{\gamma}\delta^{\beta}{}_{\lambda} - \delta^{\alpha}{}_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\gamma}\right) R \tag{B.22}$$

Termo II

Este termo é dado por

$$\left\{b\sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\star R^{\alpha\mu\beta\nu}\right\} - \{\alpha \leftrightarrow \beta\}. \tag{B.23}$$

Desta expressão surgem termos proporcionais a ba, b^2, bc e bd. Primeiramente calcularemos cada um destes termos contidos no primeiro termo entre chaves da expressão acima, e em seguida subtrairemos o mesmo termo com os índices α e β trocados para encontrar a expressão total.

Termo ab

Usando a identidade (B.5), o termo entre as primeiras chaves proporcional a ba é dado por

$$-2ab\left(\delta^{\beta}{}_{\gamma}R^{\alpha}{}_{\lambda}-\delta^{\beta}{}_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\gamma}\right)-ab\left(R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda}-R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\gamma}\right). \tag{B.24}$$

Fazendo a troca $\alpha\leftrightarrow\beta$, o termo total se escreve então

$$\text{termo } ab=-4abR^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda}+2abT^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}. \tag{B.25}$$

Termo b^2

O termo proporcional a b^2 é

$$\begin{aligned} b^2|g|\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\epsilon^{\beta\nu\rho\sigma}\left(R^{\alpha}{}_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma}-R^{\mu}{}_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma}\right) &= -b^2(-\delta^{\beta}{}_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\gamma}-R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\gamma}+R^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}+\delta^{\beta}{}_{\gamma}R^{\alpha}{}_{\lambda}\\ &\quad +\delta^{\beta}{}_{\gamma}R_{\lambda}{}^{\alpha}+R^{\beta}{}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\gamma}-R^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda}-\delta^{\beta}{}_{\lambda}R_{\gamma}{}^{\alpha}), \end{aligned} \tag{B.26}$$

e fazendo a troca $\alpha\leftrightarrow\beta$, o termo total se escreve então

$$\text{termo } b^2=-2b^2G^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}+b^2T^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}+b^2T_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}, \tag{B.27}$$

onde

$$T_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}=\delta^{\alpha}{}_{\gamma}R_{\lambda}{}^{\beta}-\delta^{\alpha}{}_{\lambda}R_{\gamma}{}^{\beta}+\delta^{\beta}{}_{\lambda}R_{\gamma}{}^{\alpha}-\delta^{\beta}{}_{\gamma}R_{\lambda}{}^{\alpha}. \tag{B.28}$$

Note que quando a torção é nula, $R_{\alpha\beta}=R_{\beta\alpha}$ e $T^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}=T_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}$.

Termo bc

O termo proporcional a bc é

$$\begin{aligned} bc|g|\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\epsilon^{\beta\nu\rho\sigma}\left(\delta^{\alpha}{}_{\rho}R^{\mu}{}_{\sigma}-\delta^{\mu}{}_{\rho}R^{\alpha}{}_{\sigma}\right) &= bcS^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}-bcT^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}+\\ &\quad -2bc\left(\delta^{\beta}{}_{\gamma}R^{\alpha}{}_{\lambda}-\delta^{\beta}{}_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\gamma}\right), \end{aligned} \tag{B.29}$$

e fazendo a troca $\alpha\leftrightarrow\beta$, o termo total se escreve então

$$\text{termo } bc=2bcS^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda} \tag{B.30}$$

Termo bd

O termo proporcional a bd é

$$bd|g|\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\epsilon^{\beta\nu\rho\sigma}\delta^{\alpha}{}_{\rho}\delta^{\mu}{}_{\sigma}R=2bdS^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda} \tag{B.31}$$

e fazendo a troca $\alpha\leftrightarrow\beta$, o termo total se escreve então

$$\text{termo } bd=4bdS^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda} \tag{B.32}$$

Termo III

Este termo é dado por

$$\left\{c\sqrt{|g|}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}g^{\alpha\mu}\star R^{\beta\nu}\right\} - \{\alpha \leftrightarrow \beta\}\,. \tag{B.33}$$

Usando (B.11), este termo se reescreve como

$$\left\{c|g|g^{\alpha\mu}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\epsilon^{\nu\delta\rho\sigma}\left[aR^{\beta}{}_{\delta\rho\sigma} + b(R^{\beta}{}_{\rho\delta\sigma} - R_{\delta\rho}{}^{\beta}{}_{\sigma}) + c\delta^{\beta}_{\rho}R_{\delta\sigma}\right]\right\} - \{\alpha \leftrightarrow \beta\}\,. \tag{B.34}$$

Termo ca

O termo proporcional a ca do primeiro termo entre chaves é dado por

$$ca|g|g^{\alpha\mu}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\epsilon^{\nu\delta\rho\sigma}R^{\beta}{}_{\delta\rho\sigma} = -2ac\left(R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} + R^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda} - R^{\beta}{}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\right), \tag{B.35}$$

e fazendo a troca $\alpha \leftrightarrow \beta$ obtemos que o termo total vale

$$\text{termo } ca = -4acR^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} + 2acG^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}. \tag{B.36}$$

Termo cb

O termo proporcional a cb do primeiro termo entre chaves é dado por

$$cb|g|g^{\alpha\mu}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\epsilon^{\nu\delta\rho\sigma}\left(R^{\beta}{}_{\rho\delta\sigma} - R_{\delta\rho}{}^{\beta}{}_{\sigma}\right) = 2cbR^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} + 2cbR_{\gamma\lambda}{}^{\alpha\beta} - 2cbG^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}, \tag{B.37}$$

e fazendo a troca $\alpha \leftrightarrow \beta$ obtemos que o termo total vale

$$\text{termo } cb = 4cbR^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} + 4cbR_{\gamma\lambda}{}^{\alpha\beta} - 4cbG^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}. \tag{B.38}$$

Note que quando não há torção, $R_{\gamma\lambda}{}^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda}$.

Termo c^2

O termo proporcional a c^2 do primeiro termo entre chaves é dado por

$$\begin{aligned} c^2|g|g^{\alpha\mu}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\epsilon^{\nu\delta\rho\sigma}\delta^{\beta}_{\rho}R_{\delta\sigma} \;&=\; c^2(\delta^{\beta}{}_{\lambda}R_{\gamma}{}^{\alpha} - \delta^{\beta}{}_{\gamma}R_{\lambda}{}^{\alpha} + g^{\alpha\beta}R_{\lambda\gamma} \\ &\quad -\delta^{\beta}{}_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\gamma} + \delta^{\beta}{}_{\gamma}R^{\alpha}{}_{\lambda} - g^{\alpha\beta}R_{\gamma\lambda}), \end{aligned} \tag{B.39}$$

e fazendo a troca $\alpha \leftrightarrow \beta$ obtemos que o termo total vale

$$\text{termo } c^2 = c^2T_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta} - c^2T^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}. \tag{B.40}$$

Note que aqui o sinal relativo entre os dois tensores T é negativo, ao contrário do cálculo do termo b^2.

Termo IV

Este termo é dado por

$$d\sqrt{|g|}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\star R. \tag{B.41}$$

Usando (B.12), obtemos

$$d\sqrt{|g|}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\epsilon_{\gamma\lambda\mu\nu}\star R = d(a-2b)|g|\epsilon_{\gamma\lambda}{}^{\alpha\beta}\epsilon_{\nu\delta\rho\sigma}R^{\nu\delta\rho\sigma}. \tag{B.42}$$

Agrupando os resultados obtidos, o dual do dual do tensor de curvatura se escreve

$$\begin{aligned}
\star\star R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} \; = \; & +R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda}(-4a^2-4ab-4ac+4cb) \\
& +R_{\gamma\lambda}{}^{\alpha\beta}(+4cb) \\
& +G^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}(-2ab-2b^2+2ac-4cb) \\
& +T^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}(-2ac+2ab+b^2-c^2) \\
& +T_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}(+b^2+c^2) \\
& +S^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda}(-2ad+2bc+4bd) \\
& +|g|\epsilon_{\gamma\lambda}{}^{\alpha\beta}\epsilon_{\nu\delta\rho\sigma}R^{\nu\delta\rho\sigma}d(a-2b)
\end{aligned} \tag{B.43}$$

Impondo a relação

$$\star\star R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} = -R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} \tag{B.44}$$

em (B.43), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
-4a'^2-4a'b'-4a'c'+4c'b' &= -1 \\
4c'b' &= 0 \\
-2a'b'-2b'^2+2a'c'-4c'b' &= 0 \\
-2a'c'+2a'b'+b'^2-c'^2 &= 0 \\
b'^2+c'^2 &= 0 \\
-2a'd'+2b'c'+4b'd' &= 0 \\
d'(a'-2b') &= 0.
\end{aligned} \tag{B.45}$$

Apêndice C

Cálculo da equação de campo teleparalela

Nesta seção, iremos derivar a versão teleparalela da equação de campo gravitacional, que foi utilizada no Capítulo 3. Assumiremos que estamos trabalhando num frame qualquer, onde $\overset{\bullet}{A} \neq 0$. Neste caso, a torção assume a forma

$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^a{}_\mu - \partial_\mu h^a{}_\nu + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\nu} h^e{}_\mu - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\mu} h^e{}_\nu. \tag{C.1}$$

A lagrangiana quadrática na torção, em função de três parâmetros arbitrários, é dada por (3.21)

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \frac{h}{2k} \left(a\, \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu} \overset{\bullet}{T}{}_\rho{}^{\mu\nu} + b\, \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\rho + c\, \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\rho} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu \right), \tag{C.2}$$

onde $k = 8\pi G/c^4$. A equação de movimento é obtida variando-a com respeito ao campo de gauge $B^a{}_\mu$ ou, equivalentemente, aos coeficientes da tetrada $h^a{}_\mu$, o que nos leva a

$$\partial_\sigma (h \; \overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma}) - k\, (h \overset{\bullet}{\jmath}{}_a{}^\rho) = 0, \tag{C.3}$$

onde

$$\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma} = - \; \overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\sigma\rho} \equiv - \frac{k}{h} \frac{\partial \overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \tag{C.4}$$

é o chamado superpotencial, e

$$\overset{\bullet}{\jmath}{}_a{}^\rho \equiv - \frac{1}{h} \frac{\partial \overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_\rho} \tag{C.5}$$

é o a corrente energia–momento total. A equação (C.3) é a chamada forma potencial da equação de movimento. Nas próximas seções, encontraremos as formas explícitas de $\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma}$ e $\overset{\bullet}{\jmath}{}_a{}^\rho$.

C.1 O superpotencial

Derivando o primeiro termo de (C.2) com respeito a $\partial_\sigma h^a{}_\rho$, obtemos

$$
\begin{aligned}
a \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)}\left(\dot{T}_{\lambda\mu\nu}\dot{T}^{\lambda\mu\nu}\right) &= 2a\, \dot{T}_b{}^{\mu\nu} \frac{\partial \dot{T}^b{}_{\mu\nu}}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)} \\
&= 2a\, \dot{T}_b{}^{\mu\nu}\delta^b_a\left(\delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu - \delta^\sigma_\nu\delta^\rho_\mu\right) \\
&= 2a\, \dot{T}_a{}^{\sigma\rho} - 2a\, \dot{T}_a{}^{\rho\sigma} \\
&= 4a\dot{T}_a{}^{\sigma\rho}. \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

Procedendo da mesma maneira com o segundo termo de (C.2) chegamos a

$$
\begin{aligned}
b \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)}\left(\dot{T}_{\rho\mu\nu}\,\dot{T}^{\mu\rho\nu}\right) &= b\, \frac{\partial \dot{T}^c{}_{\mu\nu}}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)}\,\dot{T}^{\nu\mu}{}_c + b\,\dot{T}^c{}_{\mu\nu}\frac{\partial \dot{T}^{\nu\mu}{}_c}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)} \\
&= b\,\delta^c_a\left(\delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu - \delta^\sigma_\nu\delta^\rho_\mu\right)\,\dot{T}^{\nu\mu}{}_c \\
&\quad + b\,\dot{T}^c{}_{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)}\left(h_c{}^\beta h_b{}^\nu g^{\mu\alpha}\dot{T}^b{}_{\alpha\beta}\right) \\
&= b\,\dot{T}^{\rho\sigma}{}_a - b\,\dot{T}^{\sigma\rho}{}_a + b\,\dot{T}^{\beta\alpha}{}_b\,\frac{\partial \dot{T}^b{}_{\alpha\beta}}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)} \\
&= 2b\,\dot{T}^{\rho\sigma}{}_a + b\,\dot{T}^{\beta\alpha}{}_b\,\delta^b_a\left(\delta^\sigma_\alpha\delta^\rho_\beta - \delta^\sigma_\beta\delta^\rho_\alpha\right) \\
&= 2b\,\dot{T}^{\rho\sigma}{}_a + b\,\dot{T}^{\rho\sigma}{}_a - b\,\dot{T}^{\sigma\rho}{}_a \\
&= 2b\,\dot{T}^{\rho\sigma}{}_a - 2b\,\dot{T}^{\sigma\rho}{}_a, \qquad \text{(C.7)}
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de quem nem a métrica nem a tetrada dependem de $\partial_\sigma h^a{}_\rho$. A derivada do último termo da lagrangiana é

$$
\begin{aligned}
c\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)}\left(\dot{T}^\nu{}_{\mu\nu}\dot{T}^{\lambda\mu}{}_\lambda\right) &= 2c\,\dot{T}^{\nu\mu}{}_\nu\frac{\partial \dot{T}^\lambda{}_{\mu\lambda}}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)} \\
&= 2c\,\dot{T}^{\nu\mu}{}_\nu\, h_b{}^\lambda\frac{\partial \dot{T}^b{}_{\mu\lambda}}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)} \\
&= 2c\,\dot{T}^{\nu\mu}{}_\nu\, h_b{}^\lambda\,\delta^b_a\left(\delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\lambda - \delta^\sigma_\lambda\delta^\rho_\mu\right) \\
&= 2c\,\dot{T}^{\nu\sigma}{}_\nu\, h_a{}^\rho - 2c\,\dot{T}^{\nu\rho}{}_\nu\, h_a{}^\sigma. \qquad \text{(C.8)}
\end{aligned}
$$

Combinando estes resultados, o superpotencial (C.4) é finalmente dado por

$$
\begin{aligned}
\dot{S}_a{}^{\rho\sigma} &= -\frac{k}{h}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma h^a{}_\rho\right)} \\
&= 2a\,\dot{T}_a{}^{\rho\sigma} + b\,\dot{T}^{\sigma\rho}{}_a - b\,\dot{T}^{\rho\sigma}{}_a + c\,\dot{T}^{\nu\rho}{}_\nu h_a{}^\sigma - c\,\dot{T}^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho, \qquad \text{(C.9)}
\end{aligned}
$$

que é igual à definição (3.7).

C.2 A corrente energia–momento total

Derivando (C.2) com respeito a $h^a{}_\rho$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_\rho} &= \frac{h}{2k}\Big(a\, \frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} \overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\mu\nu} + a\, \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu} \frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} + b\, \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu} \frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_c}{\partial h^a{}_\rho} + b\, \frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_c \\ &\quad + c\, \overset{\bullet}{T}{}_{\lambda\mu}{}^\lambda \frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu}{\partial h^a{}_\rho} + c\, \frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}_{\lambda\mu}{}^\lambda}{\partial h^a{}_\rho} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu \Big) + h_a{}^\rho \overset{\bullet}{\mathcal{L}}, \end{aligned} \tag{C.10}$$

onde usamos o fato que

$$\frac{\partial h}{\partial h^a{}_\rho} = h_a{}^\rho\, h. \tag{C.11}$$

Antes de calcular as derivadas que aparecem em (C.10), citaremos algumas propriedades que podem ser facilmente demonstradas:

$$\frac{\partial h_c{}^\nu}{\partial h^a{}_\rho} = -h_a{}^\nu h_c{}^\rho, \tag{C.12}$$

e

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial h^c{}_\rho} = -g^{\rho\nu} h_c{}^\mu - g^{\rho\mu} h_c{}^\nu. \tag{C.13}$$

Agora, da definição (C.1), a primeira derivada que aparece em (C.10) pode ser calculada trivialmente,

$$\frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} = \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{a\mu}\, \delta^\rho_\nu - \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{a\nu}\, \delta^\rho_\mu. \tag{C.14}$$

O segundo tipo de termos que aparece em (C.10) é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} &= \eta_{cb} \frac{\partial}{\partial h^a{}_\rho} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\alpha\beta} \right) \\ &= \left(\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial h^a{}_\rho} g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha} \frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial h^a{}_\rho} \right) \overset{\bullet}{T}{}_{c\alpha\beta} + \eta_{cb}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\alpha\beta}}{\partial h^a{}_\rho} \\ &= \left(-g^{\nu\beta} g^{\alpha\rho} h_a{}^\mu - g^{\nu\beta} g^{\mu\rho} h_a{}^\alpha - g^{\mu\alpha} g^{\nu\rho} h_a{}^\beta - g^{\mu\alpha} g^{\beta\rho} h_a{}^\nu \right) \overset{\bullet}{T}{}_{c\alpha\beta} \\ &\quad + \eta_{cb}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left(\overset{\bullet}{A}{}^b{}_{a\alpha} \delta^\rho{}_\beta - \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{a\beta} \delta^\rho{}_\alpha \right) \\ &= -h_a{}^\mu \overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\rho\nu} - g^{\mu\rho} \overset{\bullet}{T}{}_{ca}{}^\nu - g^{\nu\rho} \overset{\bullet}{T}{}_c{}^\mu{}_a - h_a{}^\nu \overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\mu\rho} \\ &\quad + \eta_{cb}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\rho} \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{a\alpha} - \eta_{cb}\, g^{\mu\rho} g^{\nu\beta} \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{a\beta}. \end{aligned} \tag{C.15}$$

O terceiro tipo de termos é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{T}^{\nu\mu}{}_{c}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} &= \eta_{cb}\,\frac{\partial}{\partial h^{a}{}_{\rho}}\left(h^{b}{}_{\sigma}\dot{T}^{\nu\mu\sigma}\right) \\
&= \eta_{cb}\,\delta^{b}_{a}\,\delta^{\rho}_{\sigma}\,\dot{T}^{\nu\mu\sigma} + \eta_{cb}\,h^{b}{}_{\sigma}\,\frac{\partial \dot{T}^{\nu\mu\sigma}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} \\
&= \eta_{ca}\,\dot{T}^{\nu\mu\rho} + \eta_{cb}\,h^{b}{}_{\sigma}\,\frac{\partial \dot{T}^{\nu\mu\sigma}}{\partial h^{a}{}_{\rho}},
\end{aligned} \tag{C.16}$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{T}^{\nu\mu\sigma}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} &= \frac{\partial}{\partial h^{a}{}_{\rho}}\left(\eta^{bc}h_{b}{}^{\nu}\dot{T}_{c}{}^{\mu\sigma}\right) \\
&= -\eta^{bc}h_{a}{}^{\nu}h_{b}{}^{\rho}\dot{T}_{c}{}^{\mu\sigma} + \eta^{bc}h_{b}{}^{\nu}\frac{\partial \dot{T}_{c}{}^{\mu\sigma}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} \\
&= -h_{a}{}^{\nu}\dot{T}^{\rho\mu\sigma} - \eta^{bc}h_{b}{}^{\nu}\left(h_{a}{}^{\mu}\dot{T}_{c}{}^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho}\dot{T}_{ca}{}^{\sigma} + g^{\sigma\rho}\dot{T}_{c}{}^{\mu}{}_{a} + h_{a}{}^{\sigma}\dot{T}_{c}{}^{\mu\rho}\right) \\
&\quad +\eta^{bc}h_{b}{}^{\nu}\eta_{cd}\,g^{\mu\alpha}g^{\sigma\rho}\dot{A}^{d}{}_{a\alpha} - \eta^{bc}h_{b}{}^{\nu}\eta_{cd}\,g^{\mu\rho}g^{\sigma\beta}\dot{A}^{d}{}_{a\beta} \\
&= -h_{a}{}^{\nu}\dot{T}^{\rho\mu\sigma} - h_{a}{}^{\mu}\dot{T}^{\nu\rho\sigma} - g^{\mu\rho}\dot{T}^{\nu}{}_{a}{}^{\sigma} - g^{\sigma\rho}\dot{T}^{\nu\mu}{}_{a} - h_{a}{}^{\sigma}\dot{T}^{\nu\mu\rho} \\
&\quad +h_{b}{}^{\nu}g^{\mu\alpha}g^{\sigma\rho}\dot{A}^{b}{}_{a\alpha} - h_{b}{}^{\nu}g^{\mu\rho}g^{\sigma\beta}\dot{A}^{b}{}_{a\beta}.
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Com a ajuda de (C.17), podemos calcular o quarto tipo de termos de (C.10)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{T}^{\nu\mu}{}_{\nu}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} &= \frac{\partial}{\partial h^{a}{}_{\rho}}\left(g_{\nu\sigma}\dot{T}^{\nu\mu\sigma}\right) \\
&= \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial h^{a}{}_{\rho}}\dot{T}^{\nu\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}\frac{\partial \dot{T}^{\nu\mu\sigma}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} \\
&= (\eta_{ac}\,h^{c}{}_{\sigma}\,\delta^{\rho}_{\nu} + \eta_{ac}\,h^{c}{}_{\nu}\,\delta^{\rho}_{\sigma})\,\dot{T}^{\nu\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}\Big(- h_{a}{}^{\nu}\dot{T}^{\rho\mu\sigma} - h_{a}{}^{\mu}\dot{T}^{\nu\rho\sigma} - g^{\mu\rho}\dot{T}^{\nu}{}_{a}{}^{\sigma} \\
&\quad -g^{\sigma\rho}\dot{T}^{\nu\mu}{}_{a} - h_{a}{}^{\sigma}\dot{T}^{\nu\mu\rho} + h_{b}{}^{\nu}g^{\mu\alpha}g^{\sigma\rho}\dot{A}^{b}{}_{a\alpha} - h_{b}{}^{\nu}g^{\mu\rho}g^{\sigma\beta}\dot{A}^{b}{}_{a\beta}\Big) \\
&= -\dot{T}^{\rho\mu}{}_{a} - h_{a}{}^{\mu}\dot{T}^{\nu\rho}{}_{\nu} - g^{\mu\rho}\dot{T}^{\nu}{}_{a\nu} + h_{b}{}^{\rho}g^{\mu\nu}\dot{A}^{b}{}_{a\nu} - h_{b}{}^{\nu}g^{\mu\rho}\dot{A}^{b}{}_{a\nu}.
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Finalmente, o quinto e último tipo de termos de (C.10) é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{T}_{\lambda\mu}{}^{\lambda}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} &= \frac{\partial}{\partial h^{a}{}_{\rho}}\left(h_{c}{}^{\lambda}\dot{T}^{c}{}_{\mu\lambda}\right) \\
&= -h_{a}{}^{\lambda}h_{c}{}^{\rho}\dot{T}^{c}{}_{\mu\lambda} + h_{c}{}^{\lambda}(\dot{A}^{c}{}_{a\mu}\delta^{\rho}{}_{\lambda} - \dot{A}^{c}{}_{a\lambda}\delta^{\rho}{}_{\mu}) \\
&= = -\dot{T}^{\rho}{}_{\mu a} + h_{c}{}^{\rho}\dot{A}^{c}{}_{a\mu} - h_{c}{}^{\lambda}\dot{A}^{c}{}_{a\lambda}\delta^{\rho}{}_{\mu}.
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Considerando todos os resultados acima, (C.10) é dado, depois de algumas manipulações algébricas, por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_\rho} &= \frac{h}{k} h_c{}^\sigma \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\nu a}\Big(2a\,\overset{\bullet}{T}{}_\sigma{}^{\rho\nu} + b\,\overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_\sigma{}^\nu - b\,\overset{\bullet}{T}{}^\nu{}_\sigma{}^\rho - c\delta_\sigma{}^\rho \overset{\bullet}{T}{}^{\lambda\nu}{}_\lambda + c\delta_\sigma{}^\nu \overset{\bullet}{T}{}^{\lambda\rho}{}_\lambda\Big) \\
&\quad + \frac{h}{k} A^c{}_{a\nu}\Big(2a\,\overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\nu\rho} + b\,\overset{\bullet}{T}{}^\nu{}_c{}^\rho - b\,\overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_c{}^\nu + c\,h_c{}^\rho \overset{\bullet}{T}{}_\lambda{}^{\nu\lambda} - c\,h_c{}^\nu \overset{\bullet}{T}{}_\lambda{}^{\rho\lambda}\Big) + h_a{}^\rho \overset{\bullet}{\mathcal{L}} \\
&= \frac{h}{k} h_c{}^\sigma \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\nu a}\, \overset{\bullet}{S}{}_\sigma{}^{\rho\nu} + \frac{h}{k} \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{a\nu}\, \overset{\bullet}{S}{}_c{}^{\nu\rho} + h_a{}^\rho \overset{\bullet}{\mathcal{L}}, \qquad \text{(C.20)}
\end{aligned}
$$

e a corrente (C.5) é finalmente dada por

$$
\overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\rho = \frac{1}{k} h_c{}^\sigma \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\nu a}\, \overset{\bullet}{S}{}_\sigma{}^{\nu\rho} - \frac{1}{k} A^c{}_{a\nu}\, \overset{\bullet}{S}{}_c{}^{\nu\rho} - \frac{h_a{}^\rho}{h} \overset{\bullet}{\mathcal{L}}. \qquad \text{(C.21)}
$$

Referências Bibliográficas

[1] Giovanni Amelino–Camelia *et al.*, *Comparison of relativity theories with observer–independent scales of both velocity and length/mass*, Class.Quant. Grav. **20** (2003) 5353; Giovanni Amelino–Camelia, *Doubly Special Relativity*, Nature **418** (2002) 34.

[2] R. Aldrovandi, J.P. Béltran Almeida and J.G. Pereira, Class.Quant.Grav. **24** (2007) 1385.

[3] W. Dreschler, *Poincaré gauge field theory and gravitation*, Ann.I.H.Poincaré **A 37** (1982) 155.

[4] M. Blagojevic, *Gravitation and Gauge Symmetries*, (Institute of Physics Publishing, London, 2001).

[5] Frank Gronwald, *Metric-affine gauge theory of gravity I. Fundamental structure and field equations*, Int.J.Mod.Phys. **D6** (1997) 263

[6] Y.M. Cho, *Einstein Lagrangian as the translational Yang–Mills Lagrangian*, Phys.Rev. **D14** (1976) 2521.

[7] J.W. Maluf, *Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity*, J.Math.Phys. **35** (1994) 335.

[8] V.C. de Andrade, L.C.T. Guillen and J.G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Overview*, 9th Marcel Grossmann Meeting, 2000 arXiv:gr-qc/0011087

[9] Yu.N. Obukhov and J.G. Pereira, *Metric-affine approach to teleparallel gravity*, Phys.Rev. **D67** (2003) 044016.

[10] Yakov Itin, *Coframe geometry and gravity*, arXiv:gr-qc/0711.4209.

[11] V.C. de Andrade and J.G. Pereira, *Gravitational Lorentz Force and the Description of the Gravitational Interaction*, Phys.Rev. **D56** (1997) 4689.

[12] Carlo Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).

[13] Tiago Gribl Lucas and J.G. Pereira, *Hodge Dual for Soldered Bundles*, J.Phys. **A42** (2009) 035402.

[14] R. Aldrovandi and J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapore, 1995).

[15] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Wiley–Intersciense, New York, 1996).

[16] R.J. Petti, *Translational spacetime symmetries in gravitational theories*, Class.Quant.Grav. **23** (2006) 737.

[17] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (Wiley–Interscience, New York, 1974).

[18] Yu.N. Obukhov and J.G. Pereira, *Lessons of spin and torsion: Reply to "Consistent coupling to Dirac fields in teleparallelism"*, Phys.Rev. **D69** (2004) 128502.

[19] V.C. de Andrade, L.C.T. Guillen and J.G. Pereira, *Teleparallel Spin Connection*, Phys.Rev. **D64** (2001) 027502.

[20] R.M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).

[21] C. Aragone and S. Deser, *Constraints on gravitationnaly coupled tensor fields*, Nuovo Cim. **A3** (1971) 709; C. Aragone and S. Deser, *Consistency problems of Spin–2 gravity coupling*, Nuovo Cim. **B57** (1980) 33.

[22] M. Novello and R. P. Neves, *Spin–2 field theory in curved spacetime in the Fierz representation*, Class.Quant.Grav. **19** (2002) 5335.

[23] Yu.N. Obukhov and J. G. Pereira, *Teleparallel origin of the Fierz picture for spin–2 particle*, Phys.Rev. **D67** (2003) 044008.

[24] V.C. de Andrade, A.L. Barbosa and J.G. Pereira, *Gravitation and Duality Symmetry*, Int.J.Mod.Phys. **D14** (2005) 1635.

[25] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim, *Duality in linearized gravity*, Phys. Rev. **D71** (2005) 024018.

[26] K. Hayashi and A. Bregman, *Poincaré gauge invariance and the dynamical role of spin in gravitational theory*, Ann.Phys.(NY) **75** (1973) 562.