



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.003/2009

**Formalismo de Schwinger para Trajetórias  
Temporalmente Fechadas**

John Alexander Ramirez Bedoya

Orientador

*Prof.Dr. Bruto Max Pimentel Escobar*

Co-Orientador

*Prof.Dr. Cassius Anderson Miquele de Melo*

Fevereiro de 2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

A mis padres Luz Dary y Gildardo,

A mi hermana Luz Adriana

a mi hermosa sobrina Laura Sofía.

DIOS LOS BENDIGA SIEMPRE

## *Agradecimentos*

Primeiramente, agradeço aos meus pais Luz Dary e Gildardo que acreditaram em mim, cientes dos riscos que isto significava para o futuro da nossa família.

À minha irmã "Luza" que tem me dado a tranquilidade na distância ao cuidar de meus pais.

Ao Professor Dr. Bruto Max Pimentel Escobar, pela orientação, paciência, compreensão e por me dar a oportunidade de acreditar que eu posso.

Ao Professor Dr. Cassius Anderson Miquele de Melo, pela co-orientação, compreensão, e por brindar-me os esclarecimentos para o entendimento dos temas que explorei.

Aos meus primos, Dani, Hernan y Juancho, heróis da "Corpo**Lev**", aos quais fiz a promessa de estar neste ponto da minha vida (já faz dez anos) e, que seguem sendo os meus irmãos.

Agradeço aos amigos que ganhei da vida: Freddy, Oscar, Almeida, Alberto, Germán, Bruce, Camilo, Mário por tentar compreender o meu portunhol, lendo parte da minha dissertação, à Patrícia, Danuce e Aline, por me dar um sorriso e a sua amizade e, aos outros colombianos pelas longas discussões sobre qualquer coisa, a todos por me animar quando pensava daria certo e para aqueles que escutaram a minha poesia.

A Julya, Cristiane e Regina, as mulheres que com a sua valiosa amizade me impediram, cada uma ao seu modo, de perder o controle neste tempo de exploração.

Ao CNPq pela bolsa nestes dois anos.

## ***Resumo***

Nesta dissertação, faz-se um estudo da abordagem de Julian Schwinger à Mecânica Quântica partindo da sua fundamentação na álgebra da medida que é uma caracterização cinemática da teoria; passando pela estruturação do Princípio Variacional por meio do estudo das funções de transformação e, concluindo, com o Princípio Variacional de Schwinger para Trajetórias Temporalmente Fechadas.

Mostra-se a utilidade do Princípio Variacional para o cálculo das amplitudes de transição em Mecânica Quântica por meio da derivação das amplitudes de transição para sistemas simples. Além disso, deriva-se uma amplitude de transição generalizada para o caso do oscilador harmônico com frequência dependente do tempo, incluindo a introdução de um *ansatz* que permite o estudo deste sistema no caso em que a frequência tem um comportamento não adiabático.

Apresentam-se algumas aplicações do Princípio Variacional de Schwinger para Trajetórias Temporalmente Fechadas estudando um oscilador harmônico interagente com dois tipos de sistemas externos: o primeiro, é uma força externa que varia arbitrariamente no tempo e o segundo é um sistema que, pela sua magnitude, não é afetado pelo oscilador e portanto é considerado clássico; este último exemplo tem aplicação no estudo do movimento browniano em nível quântico.

**Palavras Chaves:** Princípio de Schwinger; Trajetórias Temporalmente Fechadas,

**Áreas do conhecimento:** Mecânica Quântica; Teoria Quântica de Campos; Teoria de Campos à Temperatura Finita.

## ***Abstract***

We make a study of the Julian Schwinger's approach to Quantum Mechanics; starting from its foundations on the algebra of measurement, which is a kinematic characterization of the theory; proceeding with the structure of the Variational Principle by means of the study of the transformation functions; and concluding with the Schwinger Variational Principle for Closed Path Time.

We demonstrate the usefulness of the Variational Principle for the calculation of transition amplitudes in Quantum Mechanics through the derivation of transformation functions for simple systems. In addition, we derive a generalized transformation functions in the case of a harmonic oscillator with time dependent frequency, including the introduction of an *ansatz* that allows the study of this system when the frequency exhibits a non-adiabatic behaviour.

We present some applications of the Close Path Time Variational Principle to the study of a harmonic oscillator interacting with two types of external systems: the first one, is an arbitrary external force and the second one is a macroscopic system that could be considered classical due to its magnitude, and hence it cannot be affected by the oscillator; the last one example has application in the study of Brownian motion at quantum level.

# *Sumário*

<b>Introdução</b>	p. 7
<b>Referências</b>	p. 12
<b>1 A construção de uma álgebra partindo de uma medida</b>	p. 13
1.1 A Medida em um Sistema Físico . . . . .	p. 13
1.2 Simbologia da Medida . . . . .	p. 14
1.3 Relações Entre Medidas Sucessivas . . . . .	p. 15
1.3.1 Medição de Observáveis Compatíveis . . . . .	p. 16
1.3.2 Medição de Observáveis não Compatíveis . . . . .	p. 17
1.4 Funções de Transformação . . . . .	p. 19
1.5 O Traço . . . . .	p. 22
1.6 Interpretação Estatística . . . . .	p. 23
1.6.1 O Símbolo de Medida Adjunto . . . . .	p. 26
1.6.2 Álgebra Conjugada . . . . .	p. 27
1.7 Representação Matricial de um Operador . . . . .	p. 27
1.8 Valor Esperado . . . . .	p. 29
1.9 A geometria dos estados . . . . .	p. 30
1.9.1 Decomposição de Uma Medida . . . . .	p. 30
1.9.2 A Reconstrução da Álgebra de Medida . . . . .	p. 31
1.9.3 Álgebra Vetorial . . . . .	p. 32
1.9.4 Representações Espectrais . . . . .	p. 33
1.9.5 Funções de Onda . . . . .	p. 35
<b>Referências</b>	p. 38

<b>2</b>	<b>Princípio Variacional de Schwinger</b>	p. 39
2.1	Transformações Unitárias e Infinitesimais para Estados e Operadores	p. 40
2.1.1	Variações Infinitesimais das Funções de Transformação . . .	p. 43
2.1.2	Transformações Infinitesimais . . . . .	p. 44
2.2	A Medida e o Tempo . . . . .	p. 46
2.2.0.1	O Operador de Ação e o Lagrangeano Quântico . . .	p. 47
2.2.1	Princípio Variacional de Schwinger . . . . .	p. 48
2.2.2	Equação de Schrödinger . . . . .	p. 54
2.3	Integração do Princípio Variacional de Schwinger . . . . .	p. 55
2.3.1	Equação de Hamilton . . . . .	p. 56
2.3.2	Exemplos de Aplicação do Princípio Variacional . . . . .	p. 57
2.3.2.1	Ação para a partícula livre . . . . .	p. 57
2.3.2.2	Função de transformação para uma partícula submetida a uma força constante . . . . .	p. 59
2.3.2.3	Função de transformação para uma partícula submetida a uma força dependente do tempo . . . . .	p. 61
2.3.2.4	Função de transformação para o Oscilador Harmônico com frequência constante . . . . .	p. 64
2.3.2.5	Função de transformação para o oscilador harmônico com frequência dependente do tempo . . . . .	p. 67
2.3.2.6	Forma da ação para algumas funções de frequência particulares . . . . .	p. 71
2.3.3	O operador Hamiltoniano bem ordenado para a derivação das funções de transformação . . . . .	p. 72
2.3.3.1	Função de transformação para o oscilador harmônico com frequência dependente do tempo . . . . .	p. 73
	<b>Referências</b>	p. 83
<b>3</b>	<b>Formalismo para Trajetórias Temporalmente Fechadas</b>	p. 84
3.1	Variáveis Não - Hermitianas . . . . .	p. 84

3.2	Formalismo de Trajetória Temporalmente Fechada. . . . .	p. 86
3.2.1	Oscilador Harmônico Forçado . . . . .	p. 88
3.2.2	Aplicação do formalismo . . . . .	p. 89
3.2.3	Construção da função de transformação . . . . .	p. 93
3.3	Introdução da Temperatura . . . . .	p. 100
3.4	Acoplamento com um Sistema Externo . . . . .	p. 109
3.5	Movimento Browniano . . . . .	p. 116
	<b>Referências</b>	p. 126
4	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	p. 127
	<b>Referências</b>	p. 131
	<b>Apêndice A</b>	p. 132
	<b>Apêndice B</b>	p. 135
	<b>Apêndice C</b>	p. 140

## *Introdução*

A formulação desenvolvida por Julian Seymour Schwinger para a derivação das funções de transformação em Mecânica Quântica provém de uma longa trajetória a partir da análise alternativa dos processos de medida associados à cinemática da Mecânica Quântica, até a formulação do Princípio Variacional que caracteriza a dinâmica dos processos envolvidos. Schwinger foi fortemente influenciado pelos trabalhos de I.I. Rabi entre 1931 e 1939 [1], através dos experimentos sobre a interação de feixes de núcleos atômicos ou moléculas com campos magnéticos [2].

A orientação à aplicação de técnicas variacionais para a solução de problemas em Mecânica Quântica e Eletrodinâmica Clássica, e depois Eletrodinâmica Quântica, provém de seu trabalho no ano 1945 [2] que esteve fundamentalmente orientado para aplicações de radar, cavidades de microondas e radiação sincrotron. Assim, Schwinger começou seu estudo sobre a estrutura da matéria; e em 1950 deu seus primeiros passos em direção a sua reformulação da Teoria Quântica de Campos, baseando-se em seu Princípio Variacional.

Mais tarde, no ano de 1955 [3], Schwinger expôs sua idéia sobre a construção de um álgebra partindo dos resultados dos processos para a obtenção de informação realizadas sobre um sistema quântico. Neste ponto, Schwinger começou pela revisão da teoria cinemática dos processos de medição em Mecânica Quântica, cuja motivação dada por Rabi intervém com a idéia do comportamento de partículas com spin e o fato delas poderem ser separadas por essa característica em um experimento tipo Stern-Gerlach (S.G.).

Nos experimentos mentais de Schwinger, havia vários arranjos experimentais do tipo S.G., mas cada um deles possuía a propriedade de fazer a escolha de uma característica genérica do sistema, precisando somente dos resultados das medidas para a caracterização dos sistemas quânticos imaginando que toda a Mecânica Quântica poderia ser derivada de fatos experimentais. Assim, o sistema era dividido em sistemas menores, todos estes com uma característica em princípio bem definida.

No capítulo I, veremos como o arcabouço originado pelos experimentos mentais, permitiu compreender a estrutura matemática que rege os processos quânticos no ato de medida; assim, partindo da abstração de tais processos e de como se dá sua

incidência sobre o sistema, se mostra a importância da história na construção do mesmo. Desta forma, a análise das medidas consecutivas realizadas sobre um sistema ajuda a compreender como ele poderia ser preparado e, igualmente, como este poderia ser caracterizado. Levando ao final, a uma importante relação entre os processos de medida e os fatos de escolha que são refletidos na interpretação estatística das funções de transformação. Assim, posteriormente, veremos como a caracterização de um sistema por meio de dois observáveis, não necessariamente compatíveis, pode se tornar equivalente com o uso de funções de transformação e com um tipo especial de transformação chamada de unitária, que busca fundamentalmente preservar a informação que se possui do sistema, como a probabilidade ou a norma de um vetor que represente um estado em um espaço de Hilbert, assim, o estudo deste tipo de transformações permite ir além do estudo da cinemática quântica para o estudo da dinâmica dos processos envolvidos.

Na caracterização de um sistema por meio das medições de um observável, associamos um espaço vetorial complexo (espaço de Hilbert), normado, com uma estrutura de medida bem definida. O conjunto de estados que constituem o espaço vetorial é uma base para se escrever qualquer estado possível do sistema. Desta forma, se caracterizarmos o sistema por dois conjuntos de observáveis, não necessariamente compatíveis, podemos expressar os estados resultantes de uma caracterização como uma superposição de estados da outra e desta maneira, poderá existir uma transformação necessariamente unitária entre os espaços vetoriais associados a cada caracterização para preservar a norma e outras características geométricas do espaço. Conseqüentemente, as funções de transformação terão grande importância na construção destas transformações, podendo ser construída toda a caracterização cinemática da teoria.

O estudo da evolução temporal de um sistema quântico, que pertence a caracterização dinâmica da teoria, pode ser vista de um inúmeras formas, e sempre obedecerá ao estudo da evolução dos estados ou dos observáveis. Assim, as funções de transformação também terão um papel fundamental nesta análise, agora transformando entre caracterizações do mesmo sistema, mas que mudam no tempo. No capítulo II, veremos como em analogia com um sistema clássico e de uma maneira quase geral, podemos ver que a evolução do sistema pode ser dada inteiramente por um conjunto de variáveis todas dependendo do mesmo parâmetro e que para o caso quântico serão operadores e, nelas esta depositada toda a informação necessária para o estudo da evolução do sistema.

Em geral, na Mecânica Quântica a evolução temporal de um sistema é dada pelo operador hamiltoniano e foi esta formulação e suas analogias com a Mecânica Clássica, que permitiram fundamentar a Teoria Quântica em seu início. Contudo,

uma formulação lagrangiana da Mecânica Quântica permitiria estender tal formulação aos conceitos relativistas de uma forma mais direta; esta foi realizada por Dirac pela primeira vez em [4], a construção de tal formalismo abriu o caminho para os formalismos de Feynman [5] e o Princípio Variacional de Schwinger [6]. Schwinger propõe uma caracterização funcional das funções de transformação relacionado as suas variações com as variações de um operador para assim encontrar sua forma final.

O operador aqui envolvido é um operador de ação quântico,

$$\hat{S}_{t_0, t_1} = \int_{t_i}^{t_f} \hat{L}(\hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t) dt,$$

onde  $\hat{L}(\hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t)$  é definida como o Lagrangiana quântica do sistema; as variações de  $\hat{S}_{t_0, t_1}$  serão

$$\delta \hat{S}_{t_0, t_1} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \delta_0 \hat{L} + \frac{d(\hat{L}(t) \delta t)}{dt} \right) = \left( \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{q}}} \delta_0 \hat{q} + \hat{L}(t) \delta t \right) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\delta \hat{L}}{\delta \hat{q}} \right) \delta_0 \hat{q},$$

onde podemos ver que a característica principal deste Princípio Variacional de Schwinger, é que a diferença do formalismo de Mecânica Clássica em que  $\hat{S}$  **não é estacionária** e  $\delta \hat{S} \neq 0$ , desta forma obtemos

$$\delta \hat{S}_{t_0, t_1} = \left( \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{q}}} \delta_0 \hat{q} + \hat{L}(t) \delta t \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = (\hat{p} \delta \hat{q} - \hat{H} \delta t) \Big|_{t_0}^{t_1},$$

estes termos na fronteira serão os que originam as variações das funções de transformação. Assim, teremos que

$$\begin{aligned} \delta \langle a(t_1) | b(t_0) \rangle &= i \langle a(t_1) | \delta \left[ \int_{t_i}^{t_f} \hat{L}(\hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t) dt \right] | b(t_0) \rangle \\ &= i \langle a(t_1) | \delta \hat{S}_{t_0, t_1} | b(t_0) \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Um dos pontos mais importantes no formalismo é a integração da expressão anterior, já que para isto, precisamos ordenar temporalmente o operador de ação de tal forma que possa ser analisado o valor em cada um dos estados. Mas somente podemos fazer isto se o operador de ação puder ser ordenado de uma forma clara. Para tal caso, teremos na sua forma bem ordenada\*

$$T \left[ \hat{S}_{t_0, t_1} \right] = \hat{\mathcal{W}}_{t_0, t_1},$$

e assim, obteremos

---

\*Aqui a notação  $T \left[ \hat{S} \right]$ , implica o ordenamento temporal na ação dos operadores envolvidos na forma funcional de  $\hat{S}$ .

$$\delta\langle a(t_1)|b(t_0)\rangle = i\delta\mathcal{W}_{t_0,t_1}\langle a(t_1)|b(t_0)\rangle,$$

fazendo com que a função de transformação<sup>†</sup> possa se mostrar como

$$\langle a(t_1)|b(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}_{t_0,t_1}}.$$

No capítulo II também será utilizado o Princípio Variacional para derivar as funções de transformação para alguns sistemas simples, analisando algumas aplicações para o estudo de sistemas como o oscilador harmônico com frequência dependente do tempo, no caso que não há um comportamento adiabático. É proposta uma forma geral para a função de transformação dependendo de forma implícita das soluções da equação clássica do sistema, recuperando as formas dos propagadores convencionalmente conhecidos. Em seguida, é proposto um *ansatz* para a solução geral onde se evidencia a possibilidade de tratar sistemas onde a frequência só precisa ter a sua primeira derivada contínua, que evidencia a não adiabaticidade do processo.

No capítulo III, voltamos nossa atenção à modificação do Princípio Variacional de Schwinger que permite o cálculo de valores esperados sem envolver o cálculo de funções de transformação individuais, mas usa de ciclos temporais por meio da sua formulação para trajetórias temporalmente fechadas. Esta modificação do Princípio Variacional chamada de Formalismo de Schwinger para Trajetórias Temporalmente Fechadas, foi introduzida por Schwinger no ano de 1961 [7] e, permite o cálculo do valor esperado de quantidades físicas dada uma condição inicial específica, como um estado particular do sistema, ou uma mistura térmica de estados. Esta última consideração permite o estudo de processos termodinâmicos em nível quântico. Um dos primeiros avanços nesta direção foi a proposta de Matsubara no ano de 1955 [8] com o formalismo de tempo imaginário que somente consegue tratar sistemas que se encontram no equilíbrio termodinâmico, porem o tratamento de sistemas que poderiam estar também fora do equilíbrio foi desenvolvido primeiro por Schwinger [7] e mais tarde por Keldysh [9]. Entre outros formalismos para o tratamento de sistemas que estão fora do equilíbrio termodinâmico se encontra também o formalismo de Dinâmica de Campos Térmicos que foi desenvolvido por Umezawa e colaboradores [10]. O formalismo de Trajetória Temporalmente Fechada é usado para tratar uma infinidade de problemas em Mecânica Estatística e Matéria Condensada como sistemas com spin [11], Supercondutividade, [12], laser e tunelamento [13], aplicações em Eletrodinâmica Quântica [14], Cosmologia [15], algumas aplicações em dispersão [16]. Todas estas com a vantagem de, além de conseguir tratar problemas a tempe-

---

<sup>†</sup>Nesta expressão temos posto  $\hbar$ .

ratura finita, podem caraterizar a reação que pode causar a interação de um sistema com um meio externo.

No Formalismo de Schwinger para Trajetórias Temporalmente Fechadas, calcula-se o valor esperado de algum observável, tomando a seguinte função de transformação

$$\delta \langle t_0 | t_0 \rangle = i \langle t_0 | \delta \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \hat{L}_+ \left( \hat{q}_+(t), \dot{\hat{q}}_+(t); t \right) - \hat{L}_- \left( \hat{q}_-(t), \dot{\hat{q}}_-(t); t \right) \right\} dt \right] | t_0 \rangle$$

onde os subíndices ( $\pm$ ) se referem ao sentido dentro da trajetória temporalmente fechada. Se os Lagrangianos quânticos são considerados como

$$\hat{L}_\pm \left( \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t \right) = \hat{L}_{0,\pm} \left( \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t \right) + \lambda_\pm(t) \hat{X} \left( \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t \right),$$

onde as funções  $\hat{L}_{0,\pm} \left( \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t \right)$  estão relacionadas com o Lagrangiano quântico do sistema livre e

$\hat{X} \left( \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t \right)$  que pode ser uma função dos operadores que dão a dinâmica do sistema acoplados com uma fonte externa  $\lambda_\pm(t)$ , temos que

$$\delta_\lambda \langle t_0 | t_0 \rangle = i \langle t_0 | \left[ \int_{t_0}^{t_1} dt (\delta\lambda_+(t) - \delta\lambda_-(t)) \hat{X}(t) \right] | t_0 \rangle,$$

o que implica que se fizermos a derivação funcional do elemento  $\langle t_0 | t_0 \rangle$ , obtemos o valor esperado da função  $\hat{X} \left( \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t \right)$ , como um pequeno exemplo se  $\hat{X} \left( \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t \right) = \hat{q}(t)$  temos

$$-i \frac{\delta_\lambda \langle t_0 | t_0 \rangle}{\delta\lambda_+(t_1)} = \langle t_0 | \hat{q}(t_1) | t_0 \rangle,$$

da mesma forma que

$$i \frac{\delta_\lambda \langle t_0 | t_0 \rangle}{\delta\lambda_-(t_1)} = \langle t_0 | \hat{q}(t_1) | t_0 \rangle.$$

As aplicações deste formalismo tratadas aqui, são o comportamento de uma mistura térmica de estados próprios do oscilador harmônico e o cálculo de algumas quantidades relacionadas com a evolução temporal do sistema. A seguir, trataremos o mesmo oscilador, agora interagindo com um sistema externo, grande o suficiente para ser considerado clássico. Desta forma, e com algumas suposições poderemos conhecer como seria o comportamento de um oscilador harmônico submetido a interações que são estocásticas e como este tipo de sistema tem comportamento que pode modelar o movimento Browniano.

Por último no capítulo IV, faremos nossas conclusões e considerações finais e também mostraremos nossas perspectivas no uso do Formalismo de Schwinger para Trajetórias Temporalmente Fechadas em ótica.

## *Referências*

- [1] Breit, G. e Rabi, I. I., Rev, **38**, 2082 (1931). Rabi, I. I., Phys. Rev, **43**, 838 (1933). Cohen, V. W. e Rabi, I. I., Phys. Rev, **43**, 582 (1933). Rabi, I. I., Kellogg, J. M., e Zacharias, J. R. Phys. Rev, **46**, 163(1934). Breit G. e Rabi, I. I., Phys. Rev, **46**, 230 (1934). Millman Sidney, Fox Marvin, e Rabi, I. I., Phys. Rev, **46**, 320 (1934). Cohen, V. W. e Rabi, I. I., Phys. Rev, **46**, 707 (1934). Fox Marvin e Rabi, I. I., Phys. Rev, **48**, 746 (1935). Rosin Seymour e Rabi, I. I., Phys. Rev, **48**, 373 (1935). Rabi, I. I., Phys. Rev, **49**, 324 (1936). Rabi, I. I., e Zacharias J. R. Phys. Rev, **50**, 472 (1936). Rabi I. I., Millman S., Kusch P., e Zacharias J. R. Phys. Rev, **53**, 318 (1938). Rabi I. I., Millman S., Kusch P., e Zacharias J. R. Phys. Rev, **53**, 384 (1938). Rabi I.I., Millman S., e Zacharias J. R. Phys. Rev, **53**, 495 (1938).
- [2] Mehra, Jagdish e Kimball Milton A., **Climbing the Mountain**, *The Scientific Biography of Julian Schwinger*. (Oxford University Press, Inc., New York - 2000)
- [3] Schwinger Julian S., *Lectures on Quantum Mechanics* (Les Houches, 1955)
- [4] Dirac P.A.M., *Princípios de Mecânica Cuántica* (Barcelona, 1967)
- [5] Feynman P. Richard. , Brown M. Laurie (Editor), *Feynman Thesis - "A new approach to quantum mechanics"*, (World Scientific Publishing Co. Pre.Ldt, 2005)
- [6] Schwinger, Julian S. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **45**, 1542-1553(1959), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 256-265(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 570-579(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 883-897(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 1401-1415(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. os Sci. **47**, 1075-1083(1961), Schwinger, Julian S. , "*Quantum Kinematics and Dynamics*", (W.A. Benjamin Publishers,1970)
- [7] Schwinger Julian S., J.Math.Phys. **2**,407(1961)
- [8] Matsubara T, Prog.Teor.Phys **14**, (1955)351
- [9] Keldysh L.V., JEPT 20 (1965) 1018
- [10] Arimitsu,T. and Umezawa,H., Prog.Th.Phys **74** (1985) 429
- [11] Månson M., e Sjölander A., Phys. Rev. B **11**, 4639 (1975)
- [12] Hu.,Chia-Ren, Phys. Rev. B **21**, 2775 (1980)
- [13] Korenman V., Ann.Phys (New York), **39** (1966) 72, Nozières, Philippe e Abrahams, Elihu, Phys. Rev. B **10**, 3099 (1974), Caroli C., Lederer-Rozenblatt D. , Roulet B. , and Saint-James D., Phys. Rev. B **8**, 4552 (1973)
- [14] Mahanthappa,Kalyana T.,Phys. Rev. 126, **329** (1962)
- [15] Calzetta. E., e Hu, B. L., Phys Rev. D **35**, 495 (1987)
- [16] Canivell V., Garrido L., e San Miguel M., Phys. Rev. A **17**, 480 (1978)

# ***1 A construção de uma álgebra partindo de uma medida***

## **1.1 A Medida em um Sistema Físico**

Do ponto de vista clássico, uma medida tem como idealização que o efeito do aparelho de medição sobre o sistema físico de interesse é desprezível ou que não o afeta de uma maneira apreciável e se isto ocorrer, tal efeito pode ser compensado em uma forma estatística ou em uma forma mecânica [1].

Mas a interação entre o sistema e o aparelho de medida toma importância no momento que considerarmos sistemas microscópicos; nestes casos não há interação que possa ser considerada pequena, o sistema pode ser alterado facilmente e o efeito da medida não pode ser compensado por nenhum meio, já que dada a sensibilidade do sistema ante qualquer novo procedimento pode afetá-lo e fazer com que os resultados obtidos não o representem mais ou sejam imprevisíveis.

Neste primeiro capítulo um dos objetivos será mostrar a necessidade do estudo do comportamento cinemático de um sistema microscópico\* frente à medida e, posteriormente, a construção de uma estrutura matemática ao redor desta. Segundo esta ordem de idéias, podemos observar que a caracterização da resposta de um tal sistema tal, diante de determinados estímulos como a ação de medida, é baseada no fato de que para obter informação do sistema temos que fazer uma troca de energia com ele. Assim, independentemente da sua escala, precisamos introduzir energia no sistema e depois observar as formas em que ele reage; como, por exemplo, emitindo algum tipo de radiação.

Desta forma, a ação de obtenção de informação, a ação de medida, pode ser simbolizada pela quantidade  $R$ , que é a razão entre a quantidade de energia necessária para induzir uma resposta que será chamada  $\Delta E_m$  e a energia total que possui o sistema  $E_s$ ,

---

\*Exemplo: Um feixe de partículas, um ensemble de sistemas, etc.

$$R = \frac{\Delta E_m}{E_s}.$$

Assim,  $R$  dará alguma informação sobre a forma em que o sistema será afetado pela interação com um estímulo externo.

Dada a forma da construção de  $R$ , classicamente o menor valor que pode tomar é dado para  $E_s$  fixo e,  $\Delta E_m(\min) = 0$  e, a partir daí com qualquer flutuação deste valor há uma variação da energia no sistema. Disto, podemos dizer que o estado do sistema pode mudar depois de uma medição já que sua energia vai mudar de uma maneira apreciável e, até agora, só podemos caracterizar o sistema por este valor. Dada a quantização da energia, esta proporção deve estar relacionada com a constante de Planck  $h$  e não pode, portanto, existir um valor de  $\Delta E_m < \alpha h$  <sup>†</sup>, de tal forma que no nível microscópico **não pode haver nenhuma medida que não afete o sistema**. Como temos visto, o raciocínio anterior nos fala somente sobre a produção de uma mudança na energia do sistema originada por uma medição, e portanto, o estudo do problema da medida vai ser caracterizar o que ocorre com o sistema quando estes procedimentos são efetuados por meio dos resultados obtidos na medida. Assim, quantificar de certa forma a incidência de uma medida sobre um sistema microscópico ao estudar os possíveis resultados e as relações que eles têm, será o objetivo das próximas seções.

## 1.2 Simbologia da Medida

Quando medimos alguma característica específica de um sistema, por exemplo a quantidade  $A$ , podemos em princípio obter uma grande quantidade de resultados, como  $\{a_1, a_3, a_4, a_2, \dots\}$ , classificados pela sua grandeza. Chamaremos genericamente de **observável** à quantidade  $A$  com que vai se caracterizar o sistema, e ao conjunto de números  $\mathbf{E}[A] = \{a_j\}$  com  $j$  como índice do conjunto <sup>‡</sup> o espectro de  $A$ . Um sistema pode ser descrito por um número infinito de observáveis,  $A, B, C, D, E, \dots$ , que terão espectros  $\mathbf{E}[A], \mathbf{E}[B], \mathbf{E}[C], \mathbf{E}[D], \dots$  mas cada uma de estas descrições representará de maneira única o sistema.

Suponhamos um feixe de partículas que pode se considerar como um grande ensemble de sistemas, em que cada um deles pode ter um valor bem definido  $a_k$  de  $A$  e, onde cada sistema pode se separar do ensemble [2] por um processo de filtragem tipo

<sup>†</sup> $\alpha$  é uma constante que modifica a expressão para unidades de energia.

<sup>‡</sup>Note se que conjunto dos índices  $j$  ou  $k$  com  $j, k \subseteq N$ , é  $j = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , se o espectro for contínuo, esta notação deve ser entendida como fazendo referência a um intervalo nos números reais.

Stern-Gerlach e cada sub-ensemble resultante com valor  $a_k$ , se diz estar no estado  $a_k$ ,



Assim, sobre este tipo de processos construiremos a álgebra de medida e designaremos o símbolo

$$M_{a_k},$$

para os processo básico de medida sobre um sistema microscópico, que representa o processo por meio do qual é filtrado (separado) o estado do sistema que tem o valor perfeitamente definido  $a_k$ , da quantidade  $A$ .

As relações entre tais símbolos fixam uma série de operações que serão analisadas a seguir.

### 1.3 Relações Entre Medidas Sucessivas

A álgebra da medida expressa a essência dos processos de seleção e como estes se relacionam entre si. Assim, a cada medida realizada sobre o sistema é assinalado um símbolo  $M_{a_k}$  que representa uma seleção dos estados com o valor  $a_k$  e rejeitar aqueles que se encontram em um estado diferente. Como foi visto na seção anterior, os símbolos são rotulados pela quantidade que está sendo medida. Assim, o número de símbolos de medida que temos corresponde ao valor máximo do conjunto  $\max [j]$ . As seguintes relações são deduzidas das características dadas para os símbolos de medida, portanto, expressam somente a forma em que estes operam em conjunto. Dependendo, assim, da forma com que são realizadas as medidas, temos que:

#### 1. A soma de dois símbolos de medida

$$M_{a_1} + M_{a_2},$$

corresponde à medição executada sobre o sistema que aceita estados que têm o valor  $a_1$  ou  $a_2$  sem fazer distinção alguma. É realizada simultaneamente, sendo que esta medida é menos seletiva e produz sub-ensembles associados aos subconjuntos de  $E[A]$  para este caso em especial. De uma maneira mais geral,

também é válida para mais símbolos de medida e, além disso, podemos inferir a associação

$$(M_{a_1} + M_{a_2}) + M_{a_3} = M_{a_1} + (M_{a_2} + M_{a_3}).$$

Com estas propriedades podemos inferir duas implicações fundamentais: a primeira é assinalar um símbolo para o processo de medição que deixa passar todos os estados sem distinção, o símbolo para este processo será 1 (Medida Certa)

$$\sum_{k=0}^N M_{a_k} = 1, \quad (1.1)$$

e a segunda é dada por completude, podendo ser definido o símbolo 0 que significa que há um processo que rejeita qualquer estado.

## 2. Ao **produto** de dois símbolos de medida

$$M_{a_1}M_{a_2},$$

corresponde duas filtragens consecutivas, a leitura de tal símbolo é realizada da direita para esquerda. Ao ser executada a filtragem  $M_{a_2}$  todos os sistemas que têm o valor de  $a_2$  são aceitos e os outros são rejeitados. Logo, a medida realizada pelo segundo processo  $M_{a_1}$  vai rejeitar os sistemas provenientes do primeiro processo, assim o resultado será nulo e poderá ser caracterizado pelo símbolo 0. Entretanto, o que acontece quando  $a_2 = a_1$  é que o processo não é mais nulo e, portanto, temos

$$M_{a_2}M_{a_2} = M_{a_2}.$$

Podemos por meio da seguinte quantidade

$$\delta(a_2, a_1) = \begin{cases} 1 & a_2 = a_1 \\ 0 & a_2 \neq a_1 \end{cases}, \quad (1.2)$$

representar os resultados anteriores como

$$M_{a_1}M_{a_2} = \delta(a_2, a_1)M_{a_2}.$$

Pelas relações anteriores podemos resumir na tabela 1 as propriedades dos elementos de medida.

### 1.3.1 Medição de Observáveis Compatíveis

Dados dois observáveis  $A_1$  e  $A_2$  eles são ditos compatíveis se filtrado do sistema um estado associado ao valor  $a_1$  de  $A_1$  uma filtragem posterior de algum valor  $a_2$

Operação	Existência
$1 \cdot M_a = M_a \cdot 1 = M_a$	Existe elemento identidade para o produto
$0 \cdot M_a = M_a \cdot 0 = 0$	Existe elemento nulo para o produto
$M_a + 0 = M_a$	Existe elemento identidade para a soma

Tabela 1: Elementos da Álgebra de Medida

pertencente ao observável  $A_2$  não altera a informação adquirida no primeiro estágio da medição. Desta forma, o sistema possuirá, com certeza, os valores  $a_1$  e  $a_2$  de uma maneira bem definida e simultânea. Um símbolo para uma operação como esta pode ser construído da seguinte forma

$$M_{a_2 a_1} = M_{a_2} M_{a_1} = M_{a_1} M_{a_2}. \quad (1.3)$$

O fato de que as medições efetuadas sejam operações compatíveis permite que comtem, logo temos

$$M_{a_2 a_1 \dots a_{\max[j]}} = \prod_{k=1}^{\max[j]} M_{a_k}. \quad (1.4)$$

O maior conjunto de observáveis  $\{A_1, A_2, A_3, A_4 \dots\}$  com que pode se caracterizar um sistema é chamado de **maximal**, com este conjunto podemos ter o máximo conhecimento do sistema, simultâneo com a sua existência. Assim, a medida de qualquer propriedade que não pertença ao conjunto, ou que não possa ser expressa como uma combinação dos elementos deste, vai alterar o estado do sistema mudando o conhecimento ganho antes da última medição. Estes novos símbolos têm as mesmas propriedades dos símbolos  $M_{a_k}$ <sup>§</sup>.

A partir da seguinte seção usaremos uma notação de  $a$ , para os elementos  $a_j \in E[A]$  associado ao observável  $A$ , dado que agora trataremos com operações genericas entre os elementos de diferentes conjuntos.

### 1.3.2 Medição de Observáveis não Compatíveis

Depois do que foi tratado nas seções anteriores, podemos tentar descrever algum evento mais verossímil levando em conta que, para comparar mais diretamente com a

<sup>§</sup>O delta de Kronecker para uma medida consecutiva de dois conjuntos de observáveis compatíveis é simbolizada por

$$\delta(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \dots a_{\max[j]}, a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 a'_5 a'_6 \dots a'_{\max[j]}) = \prod_{k=1}^{\max[j]} \delta(a_k, a'_k)$$

realidade os resultados da Mecânica Quântica, temos que estudar os sistemas quando eles são afetados pelas medidas que podem mudar seu estado. Assim, é necessário o estudo das medições de observáveis não - compatíveis.

Dado que podemos descrever o sistema com número infinito de observáveis, temos que se o sistema estiver descrito por um observável  $A$  com espectro  $E[A]$ , este também poderia estar bem descrito por alguma outra propriedade  $B$  com espectro  $E[B]$  e símbolos de medida associados  $M_b$ . Dadas as características dos símbolos de medida, podemos analisar a possibilidade de construir um novo símbolo que represente duas medidas consecutivas de quantidades que pertençam a conjuntos de observáveis que não são compatíveis com a medida representada por  $M_a M_b$ . Esta seqüência de medidas em especial, escolhe sistemas que têm alguma propriedade  $b$  de  $B$  e, em seguida são medidas no sistema (feixe) emergente aqueles subsistemas que tenham o valor  $a$  de  $A$ . Como foi visto anteriormente, este processo não pode ser representado por meio de um só símbolo de medida, já que este fato envolve um componente estatístico. Portanto, nosso conjunto de relações tem que ser aumentado em um novo tipo de símbolos, que escolha um estado com a propriedade  $b_j$  de  $B$  e possa mudá-lo para um estado com o valor  $a_i$  de  $A$ . Tal símbolo poderá ser

$$M_a^b,$$

em que o estado de entrada vai ser  $b$  e o estado de saída  $a$ . O processo em que não haja nenhuma mudança pode ser simbolizado por  $M_a^a$ ; este símbolo é equivalente ao processo  $M_a$ . Assim, para uma série de medidas consecutivas

$$M_a^b M_c^d,$$

tomamos um feixe no estado  $d$  de  $D$  e o transformamos em um feixe no estado  $c$  de  $C$ . Em seguida é realizada outra medida em que só são aceitos sistemas com o valor  $b$  de  $B$  entre aqueles estados que são originados na saída do primeiro processo e transformá - los em estados com o valor bem definido  $a$  de  $A$ .

Para que uma medida tal como a anterior não seja nula, (até agora precisamos que se tenha  $\delta(c, b)$  o que vai produzir uma filtragem com sucesso não nula globalmente) o resultado final será o mesmo que  $M_a^d$ . Dado que os estados intermediários serão irrelevantes para o resultado final, temos que

$$M_a^b M_c^d = \delta(c, b) M_a^d. \quad (1.5)$$

Contudo, pelas características dos símbolos de medida, teremos um resultado

totalmente distinto se fizermos as medidas anteriores em ordem inversa

$$M_c^d M_a^b = \delta(a, d) M_c^b,$$

o que nos mostra que os símbolos de medida para observáveis não compatíveis não são comutativos

$$M_a^b M_c^d \neq M_c^d M_a^b.$$

Ainda que os estados intermediários sejam pouco relevantes, o fato de fazer a medida seletiva entre os estados que emergem do processo  $M_c^d$  aqueles estados que tenham o valor  $b$  de  $B$ , implica que alguns destes estados podem não passar pelo processo de filtragem, já que nada garante que todos estejam neste estado, o que faz a diferença no sentido de ter uma medida que aceite ou rejeite todos os estados ingressantes. Do fato anterior, podemos construir um complemento à nossa simbologia, e assim, inferir um tipo de processo mais geral em que a existência de relações estatísticas nos processos de medida nos permite criar o seguinte símbolo

$$M_c^d M_a^b = \langle d | a \rangle M_c^b, \quad (1.6)$$

onde  $\langle d | a \rangle$  expressa a possibilidade de uma medição não nula da propriedade  $a$  sobre o sistema emergente do processo de filtragem do primeiro estágio de medição que mostrou o valor  $d$ , este é o elemento que contém a relação estatística.<sup>¶</sup>

## 1.4 Funções de Transformação

Embora as medidas representadas pelos símbolos  $M_c^d M_a^b$  e  $M_c^b$  levem ao mesmo resultado, estas representam procedimentos de obtenção distintos. Porém, estes dois procedimentos estão conectados por meio da relação entre as medições de observáveis (1.6) que vão agregar o termo que permite a equivalência entre as medições realizadas. Podemos definir a partir dos símbolos anteriormente mencionados, dois casos especiais

$$M_a M_b^c = \langle a | b \rangle M_a^c$$

e,

$$M_a^b M_c = \langle b | c \rangle M_a^c,$$

---

<sup>¶</sup>O corpo de números associados com os símbolos  $\langle d_j | a_j \rangle$ , podem comutar com os símbolos de medida.

que por meio das propriedades dos elementos de medida (1.1) estão relacionados com os símbolos

$$\begin{aligned}\sum_a \langle a | b \rangle M_a^c &= \left( \sum_a M_a \right) M_b^c \\ &= \mathbf{1} \cdot M_b^c = M_b^c,\end{aligned}$$

e também com

$$\sum_c \langle b | c \rangle M_a^c = M_a^b.$$

Os resultados anteriores podem ser interpretados como a transformação entre medidas realizadas sobre um sistema caracterizado por dois ou mais observáveis, ou seja, que estamos expressando símbolos de medida de um tipo como uma combinação linear de símbolos de medida de outro. Isto se faz com a ajuda dos símbolos que expressam a medição  $\mathbf{1}$ , já que estes implicam a transformação sobre cada um dos estados do espaço do observável que representam. Assim, as relações anteriores permitem ver que a medida realizada (preparação do sistema) por  $M_a^b$  pode ser representada pela combinação linear dos símbolos associados com a medida  $M_c^d$  da seguinte forma

$$\begin{aligned}M_a^b &= \sum_c \sum_d M_c M_a^b M_d \\ &= \sum_c \sum_d \langle c | a \rangle \langle b | d \rangle M_c^d.\end{aligned}$$

Onde temos a modificação pela inclusão dos estados intermediários associados com  $C$  e  $D$ . Um fato muito importante é a interpretação dos símbolos  $\langle c | a \rangle$  como os que transformam as medições executadas sobre um mesmo sistema e são chamadas **funções de transformação**, [1]. Assim, a informação obtida sobre um sistema por meio da medição de uma propriedade genérica qualquer, pode estar relacionada com uma outra medida e desta forma ser escrita de maneira equivalente. As propriedades destas funções podem ser obtidas analisando a seguinte combinação de medidas:

$$\sum_b M_a M_b M_c = \sum_b \langle a | b \rangle \langle b | c \rangle M_a^c.$$

Pela relação de completeza (1.1) temos que

$$\begin{aligned}M_a \sum_b M_b M_c &= M_a \mathbf{1} M_c \\ \sum_b \langle a | b \rangle \langle b | c \rangle M_a^c &= \langle a | c \rangle M_a^c,\end{aligned}$$

o que conduz a;

$$\sum_b \langle a | b \rangle \langle b | c \rangle = \langle a | c \rangle. \quad (1.7)$$

Ao mesmo tempo, por uma comparação, temos que:

$$\sum_b |b\rangle \langle b| = \mathbf{1}, \quad (1.8)$$

que também, vai nos permitir relacionar o símbolo de medida com

$$M_b = |b\rangle \langle b|. \quad (1.9)$$

Assim, se a medida é realizada por dois observáveis compatíveis vemos que identificando  $c = \bar{a}$ , obtemos em (1.7)

$$\begin{aligned} \sum_k \langle a_j | b_k \rangle \langle b_k | \bar{a}_j \rangle &= \langle a_j | \bar{a}_j \rangle \\ &= \delta(a_j, \bar{a}_j), \end{aligned}$$

que é a delta de Kroeneker, obtida anteriormente em (1.2). As operações anteriores implicam que o número de estados, assim como o numero de elementos da álgebra de medida, que pode exibir um sistema frente a sua caracterização com dois observáveis diferentes deve ser equivalente, se os observáveis são compatíveis.

Agora, mostraremos algumas relações importantes entre os símbolos de medida dada a consistência dos resultados das medições com operações algébricas. Podemos observar que o símbolo de medida  $M_{a_j}$  pode ser expresso como combinação linear dos símbolos associados com  $M_{b_j}$  como,

$$\mathbf{1}M_a = \sum_b \langle b | a \rangle M_b^a, \quad (1.10)$$

ou de uma forma equivalente, por meio de (1.9)

$$\mathbf{1}M_a = \sum_b |b\rangle \langle b | a \rangle \langle a| \quad (1.11)$$

$$= \sum_b \langle b | a \rangle M_b^a, \quad (1.12)$$

assim, por comparação agora podemos relacionar o símbolo

$$M_b^a = |b\rangle \langle a|.$$

## 1.5 O Traço

A função de transformação  $\langle a | b \rangle$  pode ser considerada como um funcional linear do símbolo de medida  $\parallel M_b^a$  já que ela está diretamente relacionada com as transformações das medidas realizadas de quantidades não compatíveis. Tal correspondência é chamada traço e tem a seguinte forma:

$$\mathbf{Tr} \{M_b^a\} = \mathbf{Tr} \{ |b\rangle \langle a| \} = \langle a | b \rangle ,$$

esta forma específica vem do fato de que o corpo numérico trabalhado aqui como escalares são os números complexos \*\*, e o traço é a soma dos elementos da diagonal da matriz de transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr} \{M_b^a\} &= \mathbf{Tr} \left\{ \sum_c M_c M_b^a \sum_d M_d \right\} \\ &= \mathbf{Tr} \left\{ \sum_c \sum_d M_c M_b^a M_d \right\} = \mathbf{Tr} \left\{ \sum_c \sum_d \langle c | b \rangle \langle a | d \rangle M_c^d \right\} \end{aligned}$$

Dadas as relações anteriores podemos mostrar pela linearidade do traço que, tem a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr} \{M_b^a\} &= \mathbf{Tr} \left\{ \sum_c \sum_d \langle c | b \rangle \langle a | d \rangle M_c^d \right\} = \sum_c \sum_d \langle c | b \rangle \langle a | d \rangle \mathbf{Tr} \{M_c^d\} \\ &= \sum_c \sum_d \langle a | d \rangle \langle d | c \rangle \langle c | b \rangle = \langle a | b \rangle . \end{aligned}$$

Assim, podemos demonstrar que

$$\mathbf{Tr} \{M_{\bar{a}}^a\} = \langle a | \bar{a} \rangle = \delta(\bar{a}, a) ,$$

e que

$$\mathbf{Tr} \{M_b\} = 1 ,$$

A seguir, também pode ser definido o traço de um produto de símbolos de medida, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr} \{M_d^c M_b^a\} &= \mathbf{Tr} \{ \langle c | b \rangle M_d^a \} \\ \langle c | b \rangle \mathbf{Tr} \{M_d^a\} &= \langle c | b \rangle \langle a | d \rangle , \end{aligned}$$

dados que estes dois números são considerados escalares, seu produto é comutativo e,

---

<sup>||</sup>  $M_b^a$  pode ser relacionado com a função da mudança de base  $|a\rangle \langle b|$ , como será visto nas próximas seções

<sup>\*\*</sup> Pode ser usado um outro corpo de números, como são os quaternions que podem ser vistos em [3], e [4]

portanto, seu traço não vai depender da ordem dos elementos no processo, assim

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \{M_d^c M_b^a\} &= \langle c | b \rangle \langle a | d \rangle \\ \mathrm{Tr} \{M_b^a M_d^c\} &= \mathrm{Tr} \{\langle a | d \rangle M_b^c\} = \langle a | d \rangle \langle c | b \rangle,\end{aligned}$$

com isto mostramos que embora o produto dos símbolos de medida seja não comutativo, seu traço tem essa propriedade. É importante ver com isto que o traço está relacionado estreitamente às funções de transformação que são relacionadas às transformações entre os observáveis envolvidos em alguma operação de medida.

## 1.6 Interpretação Estatística

Dadas as observações nas seções anteriores, temos claro que existe uma componente estatística importante no sentido de como podemos ver o resultado das medições sobre um sistema, e como estas deveriam ser interpretadas. Um dos resultados mais relevantes, é que se temos duas descrições do mesmo sistema por meio dos estados  $\{a_i\} \in \mathbf{E}[A]$  e  $\{b_j\} \in \mathbf{E}[B]$  associados com dois observáveis diferentes  $A$  e  $B$ , estas duas descrições podem ser relacionadas pelo conjunto de funções de transformação  $\{\langle a_i | b_j \rangle\}_{i,j}$ . Se definimos dois conjuntos de elementos  $\{\lambda(a)\}$  e  $\{\lambda(b)\}$  podemos ver que, se redefinimos os símbolos de medida como

$$M_b^a \rightarrow \lambda(a) M_b^a \lambda^{-1}(b) \quad (1.13)$$

e as funções de transformação como

$$\langle a | b \rangle \rightarrow \lambda^{-1}(a) \langle a | b \rangle \lambda(b), \quad (1.14)$$

as operações entre os elementos da álgebra de medida não são alteradas. Dado isto, temos que as funções de transformação  $\langle a | b \rangle$  não podem ter um significado físico direto pelo fato de que não são univocamente definidas, dada a arbitrariedade dos fatores  $\lambda$ .

A interpretação estatística se dá pelo argumento usado para o entendimento do significado do símbolo  $M_b^a M_d^c$ . Como pode-se ver, no estágio intermediário deste processo, temos que no feixe com a propriedade  $d$  do observável  $D$ , resultante do processo inicial  $M_d^c$ , se faz uma nova medida, mas agora da propriedade  $a$  do observável  $A$ , associada ao símbolo  $M_b^a$ . Assim, este fato pode ser tomado como um processo estatístico, dado que uma vez temos um conjunto de sistemas num estado  $d$  de  $D$ , há um ato de "escolha", ao medir entre eles o estado  $a$  de  $A$ . O que equivale a inter-

pretar o símbolo  $\langle d | a \rangle$ , como alguma quantidade relacionada com a probabilidade de encontrar um sistema no estado  $d$  quando temos um ensemble no estado  $a$ .

Para exemplificar um pouco mais a interpretação anterior, podemos considerar o seguinte procedimento de medida,

$$\begin{aligned} M_b M_a M_b &= \langle b | a \rangle M_b \langle a | b \rangle \\ &= \langle b | a \rangle \langle a | b \rangle M_b, \end{aligned}$$

neste processo, aparentemente, não acontece nada no sentido que são recebidos sistemas com a propriedade  $b$  de  $B$  e os estados de saída têm em principio a mesma propriedade. Mas a passagem pela filtragem intermediária, a medição efetuada pelo símbolo  $M_a$ , origina a necessidade de que para obter algum resultado não nulo no estágio final da medida, as transformações entre os estados de  $b \rightarrow a$  e, de novo  $a \rightarrow b$ , têm que ser possíveis, o que pode ser representado pelo símbolo

$$p(a|b) = \langle b | a \rangle \langle a | b \rangle,$$

que, nesta primeira abordagem, refere-se à transformação sucessiva entre os dois sistemas. Este novo símbolo é invariante frente à transformação (1.14) dado que

$$\begin{aligned} p(a|b) &= \langle b | a \rangle \langle a | b \rangle = \lambda^{-1}(b) \langle b | a \rangle \lambda(a) \lambda^{-1}(a) \langle a | b \rangle \lambda(b) \\ &= \langle b | a \rangle \langle a | b \rangle, \end{aligned}$$

o que faz deste um objeto que, além de estar univocamente definido, pode ser relacionado diretamente com uma interpretação <sup>††</sup> estatística como a *probabilidade de encontrar o sistema no estado  $a$  quando é executada uma medição sobre um sistema que se encontra no estado  $b$* .

A probabilidade definida desta forma facilita mostrar que se fizermos uma filtragem não seletiva sobre todos os estados membros do conjunto associado com o observável  $A$ ,

$$\begin{aligned} M_b \hat{1} M_b &= \sum_a M_b M_a M_b = \sum_a \langle b | a \rangle \langle a | b \rangle M_b \\ &= \sum_a p(a|b) M_b, \end{aligned}$$

---

<sup>††</sup>Interpretação que é, basicamente, derivada da seleção do elemento dentre um conjunto de resultados possíveis.

podemos encontrar que a quantidade  $p(a|b)$ , é normalizada à unidade

$$\sum_a p(a|b) = 1.$$

Uma outra característica deste símbolo é a sua simetria, ou seja, a probabilidade de que sistema passe de  $a \rightarrow b$ , é a mesma que  $b \rightarrow a$ , assim:

$$p(a|b) = p(b|a).$$

Além das propriedades encontradas para a probabilidade, temos outra apreciação. Dado que os processos estudados anteriormente envolvem a transição entre dois estados, a determinação de cada um destes estados envolve também dois processos de medida. Desta maneira, existe a probabilidade de que somente uma fração, todos ou nenhum dos estados envolvidos no primeiro estágio do processo de medida sejam aceitos no segundo estágio. O anterior significa que existem dois valores extremos para a fração de estados que passa; que é 1 se passar a totalidade ou, 0 se não passar nenhum. Tal fato é agora mostrado de outra maneira, no sentido de que a probabilidade  $p(a|b)$  está entre os dois limites,

$$0 \leq p(a|b) \leq 1. \quad (1.15)$$

Supondo que o número  $\langle b|a \rangle$  é um número complexo e, dado que a probabilidade é um número real maior que zero, podemos tomar  $\langle b|a \rangle = \overline{\langle a|b \rangle}$ , o que garante que,

$$p(a|b) = \overline{\langle a|b \rangle} \langle a|b \rangle = |\langle a|b \rangle|^2 \geq 0.$$

Um fato interessante desta escolha é a de que os conjuntos  $\{\lambda(a)\}$  e  $\{\lambda(b)\}$  devem ser tais que a probabilidade seja independente deles, assim temos que se

$$\begin{aligned} \langle a|b \rangle &= \lambda^{-1}(a) \langle a|b \rangle \lambda(b), \\ \overline{\langle a|b \rangle} &= \overline{\lambda(a)} \overline{\langle a|b \rangle} \overline{\lambda^{-1}(b)}, \end{aligned}$$

a probabilidade

$$\begin{aligned} p(a|b) &= \overline{\langle a|b \rangle} \langle a|b \rangle \\ &= \overline{\lambda(a)} \overline{\langle a|b \rangle} \overline{\lambda^{-1}(b)} \lambda^{-1}(a) \langle a|b \rangle \lambda(b) \\ &= \overline{\langle a|b \rangle} \langle a|b \rangle, \end{aligned}$$

o que significa que

$$\overline{\lambda(a)} = \lambda^{-1}(a),$$

desta forma podemos ver que pode se associar uma representação exponencial a estes números como uma fase da forma:

$$\lambda(a) = e^{i\varphi(a)},$$

dependendo somente do elemento do espectro. O valor assumido pelas fases  $\varphi(a)$  é arbitrário e não afeta o resultado das medições de uma forma direta, já que as probabilidades independem desta fase.

### 1.6.1 O Símbolo de Medida Adjunto

O fato de que as probabilidades  $p(a|b) = p(b|a)$ , sejam iguais envolve a existência de alguma equivalência entre o símbolo de medida  $M_b^a$  e o símbolo  $M_a^b$ , já que elas são derivadas da forma em que são realizadas as medidas. Uma vez que as probabilidades são simétricas, ao realizar as medidas num sentido ou no outro, obteremos iguais resultados para as transições e, assim, podemos criar a convenção

$$\left(M_a^b\right)^\dagger = M_b^a,$$

onde o símbolo  $\dagger$ (dagger) significa a operação adjunta. Temos como um caso especial

$$\left(M_a^a\right)^\dagger = M_a^a,$$

onde pela igualdade  $M_a^a = \delta(a, a)M_a$  temos a particularidade que

$$M_a^\dagger = M_a,$$

o que define este símbolo como auto-adjunto, ou seja igual a seu adjunto. Agora, uma propriedade derivada das considerações anteriores é:

$$\left(M_a^b M_d^c\right)^\dagger = M_c^d M_b^a = \left(M_d^c\right)^\dagger \left(M_a^b\right)^\dagger. \quad (1.16)$$

Para a soma, e demais operações entre os símbolos de medida pode-se resumir em

$$(X + Y)^\dagger = X^\dagger + Y^\dagger \quad (XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger \quad (\lambda Y)^\dagger = \bar{\lambda} Y^\dagger$$

com  $\bar{\lambda}$  simbolizando um número complexo conjugado.

Podemos ver que em (1.16), o produto dos símbolos de medida podem ser colocados

da seguinte forma

$$\begin{aligned} (M_a^b M_d^c)^\dagger &= (\langle b | d \rangle M_a^c)^\dagger = \overline{\langle b | d \rangle} M_c^a \\ M_c^d M_b^a &= (M_d^c)^\dagger (M_a^b)^\dagger = M_c^d M_b^a \\ &= \langle d | b \rangle M_c^a, \end{aligned}$$

que, por comparação, mostra

$$\langle b | a \rangle = \overline{\langle a | b \rangle}.$$

### 1.6.2 Álgebra Conjugada

O uso dos números complexos como escalares na álgebra de medida implica na existência de uma álgebra conjugada, uma transformação na qual todos os números são trocados pelos seus complexos conjugados, assim

$$\overline{(X + Y)} = \bar{X} + \bar{Y}, \quad (1.17)$$

$$\overline{(XY)} = \bar{X} \bar{Y}, \quad (1.18)$$

$$\overline{(\lambda Y)} = \bar{\lambda} \bar{Y}. \quad (1.19)$$

A formação do adjunto dentro da álgebra dos símbolos de medida tem a forma geral de

$$X^T = \bar{X}^\dagger = \overline{X^\dagger},$$

que recebe o nome de *transposição* e possui as propriedades de

$$(X + Y)^T = X^T + Y^T \quad (XY)^T = Y^T X^T \quad (\lambda Y)^T = \lambda Y^T.$$

E deve ser diferenciada da operação de achar o operador adjunto, pois esta operação tem o significado físico da inversão do processo representado pelo operador.

## 1.7 Representação Matricial de um Operador

Quando fazemos uma transformação entre descrições de um mesmo sistema por observáveis diferentes, exemplo  $A$  e  $B$ , o número de funções de transformação existente dependerá da quantidade de elementos de cada um dos conjuntos relacionados. Assim, os símbolos de medida, em abstrato, podem ser vistos como projetores sobre

uma base em um espaço vetorial de  $N$  elementos <sup>‡‡</sup>.

Individualmente cada uma das funções de transformação pode ser considerada como um elemento de uma matriz, na transformação dos elementos de um espaço para outro, mas isto também nos fornece a possibilidade de expressar qualquer operador por meio da sua influência sobre cada um dos elementos da base, como podemos ver

$$X = \sum_a \sum_b \langle a|X|b\rangle M_a^b,$$

em que os elementos da matriz que representa  $X$ , na base mista de  $a, b$ , são

$$\langle a|X|b\rangle$$

esta é uma forma do operador chamada representação matricial. Outra forma é o produto de dois operadores, equivalente a

$$\begin{aligned} XY &= \sum_a \sum_b \sum_c \sum_d \langle a|X|b\rangle \langle c|Y|d\rangle M_a^b M_c^d = \sum_a \sum_b \sum_c \sum_d \langle a|X|b\rangle \langle c|Y|d\rangle \langle b|c\rangle M_a^d \\ &= \sum_a \sum_d \sum_b \langle a|X|b\rangle \langle b|Y|d\rangle M_a^d = \sum_a \sum_d \langle a|XY|d\rangle M_a^d, \end{aligned}$$

de onde é derivado

$$\langle a|XY|d\rangle = \sum_b \langle a|X|b\rangle \langle b|Y|d\rangle.$$

Os elementos de matriz de  $X$  podem ser representados de uma forma equivalente pelo traço

$$\text{Tr}\{M_a^b X\} = \langle a|X|b\rangle,$$

onde podemos observar o seguinte

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{M_a^b X\} &= \text{Tr} \left\{ \sum_c \sum_d \langle c|X|a\rangle \langle b|d\rangle M_c^d \right\} = \sum_c \sum_d \langle c|X|a\rangle \langle b|d\rangle \text{Tr}\{M_c^d\} \\ &= \sum_c \sum_d \langle c|X|a\rangle \langle b|d\rangle \langle d|c\rangle = \sum_c \langle b|c\rangle \langle c|X|a\rangle = \langle a|X|b\rangle, \end{aligned}$$

em que um caso particular é dado por

$$\text{Tr}\{M_a X\} = \langle a|X|a\rangle.$$

As matrizes que representam os operadores adjuntos são matrizes conjugadas

---

<sup>‡‡</sup>se a sua dimensionalidade é finita

complexas e transpostas das matrizes representadas na sua base. Nos casos anteriores, temos tratado representações mistas, ou seja, que fazem a transformação entre duas bases de elementos. Quando os elementos da base pertencem ao mesmo observável, a representação está num só espaço. Como casos especiais das representações anteriores, temos que se  $X = 1$ , em  $\text{Tr}\{M_a^b X\}$ , obtemos  $\text{Tr}\{(X = 1) M_a^b\} = \langle a | (X = 1) | b \rangle = \langle a | b \rangle$  e, por último, o operador adjunto associado a  $X$  é dado por

$$\langle a | X^\dagger | b \rangle = \overline{\langle b | X | a \rangle}.$$

## 1.8 Valor Esperado

Trataremos do valor esperado ao valor de uma propriedade  $a$  de  $A$  multiplicada pela probabilidade de obtê-la uma vez que o estado se encontra inicialmente no estado  $b$  de  $B$ . Assim, se considerarmos o valor da propriedade  $A$ , quando o sistema está no estado  $b$ , temos que a transição a cada subsistema que tenha um valor  $a \in \mathbf{E}[A]$  de  $A$ , aportará um valor específico à sua soma ponderada pelas probabilidades de medida. Assim, obtemos que:

$$\langle A \rangle_b = \sum_a p(a | b) a,$$

e usando o fato que a probabilidade é normalizada à unidade (1.6), o valor esperado será dado como:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_b &= \sum_a p(a | b) a = \sum_a \text{Tr}\{M_b M_a M_b\} a \\ \text{Tr}\left\{M_b \left(\sum_a a M_a\right) M_b\right\} &= \text{Tr}\left\{\left(\sum_a a M_a\right) M_b\right\}. \end{aligned}$$

Aproveitando a idempotência do  $M_b$ , a ciclicidade do traço, da mesma forma o valor esperado pode ser escrito em termos do traço da seguinte forma

$$\langle A \rangle_b = \text{Tr}\{A M_b\}$$

onde usamos, implicitamente, a expressão  $A = \sum_a a M_a$ . Assim, uma função  $f(A)$  faz parte também do conjunto completo de observáveis compatíveis.

## 1.9 A geometria dos estados

No momento que caracterizamos um sistema quântico por intermédio dos processos de medida notamos que associado a um observável  $A$ , temos  $E[A]$  e um conjunto de estados um para cada valor que este possui.

Se observarmos com cuidado este raciocínio, podemos ver que um símbolo de medida como  $M_a^a = |a\rangle\langle a|$ , nos dá informação sobre a existência de um determinado estado num sistema. Como vimos na seção anterior estes símbolos de medida puderam ser associados aos projetores sobre um espaço vetorial complexo, que tornam possível associação com uma estrutura geométrica.

### 1.9.1 Decomposição de Uma Medida

Como foi dito anteriormente, a sensibilidade de um sistema quântico à medida, torna impossível o seguimento de um estado durante o processo. Desta forma o conhecimento dos estados intermediários como, por exemplo, na medida representada por

$$M_b^a = |b\rangle\langle a|, \quad (1.20)$$

perde sentido no *strictus sensu* dos resultados físicos, já que somente importam os estados *iniciais* e  *finais*. Isto, faz com que o processo representado por (1.20), mude o estado do sistema quântico de um valor  $a$  de  $A$  para um valor  $b$  de  $B$ , possa ser considerado como um bloco indivisível.

Apesar disto, um outro ponto de vista pode ser adotado, no sentido que uma interpretação um pouco mais abstrata do processo representado possa ser tomada. Em (1.20), são aceitos todos os sistemas que têm a propriedade  $a$  de  $A$ , o sistema ingressante com esse estado quântico é "destruído" (a informação é destruída) e depois é "criado" um sistema no estado  $b$  de  $B$ . Visto dessa forma o processo de medida pode ser dividido em duas partes: a destruição de um estado e a criação de outro.

Assim, o símbolo  $M_b^a$  com a álgebra dos símbolos criada até este momento, pode ser visto como equivalente ao produto de dois símbolos,

$$M_b^a = |b\rangle\langle a|.$$

em que o símbolo  $\langle a|$  representa a destruição da informação do sistema que tem a propriedade  $a$  de  $A$  e, o símbolo  $|b\rangle$  representa a criação de um sistema com a propriedade

$b$  de  $B$ .

Dada esta nova maneira de interpretar estes símbolos de medida, podemos ver que no processo combinado

$$M_d^c M_b^a = |d\rangle \langle c| b\rangle \langle a|,$$

existe uma função de transformação  $\langle c| b\rangle$  no meio, com isto podemos observar, que se trocamos os estados  $a, b, c, d$ , por estados relacionados com o mesmo observável,  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ,

$$\begin{aligned} M_{a_4}^{a_3} M_{a_2}^{a_1} &= |a_4\rangle \langle a_3| a_2\rangle \langle a_1| \\ &= |a_4\rangle \langle a_1| \delta(a_3, a_2), \end{aligned} \quad (1.21)$$

podemos notar que uma relação entre elementos de criação e aniquilação de informação no sistema tende a se parecer com uma relação de ortogonalidade entre vetores de um espaço vetorial

$$\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_2 = \delta_{3,2},$$

concordando com isto e, sem perda de generalidade, podemos considerar os elementos  $|a\rangle$  e  $\langle b|$  como vetores de um espaço vetorial complexo e o seu dual, respectivamente.

## 1.9.2 A Reconstrução da Álgebra de Medida

Os símbolos de medida, agora entendidos como operadores de projeção sobre um espaço vetorial complexo, têm propriedades que devem ser deriváveis das propriedades dos novos símbolos de criação e destruição como as propriedades do produto definidas em seções anteriores.

Assim o operador

$$(M_b^a)^\dagger = (|b\rangle \langle a|)^\dagger = |a\rangle \langle b| = M_a^b,$$

o traço

$$\text{Tr} M_b^a = \text{Tr}(|b\rangle \langle a|) = \text{Tr}(\langle a| b\rangle) = \langle a| b\rangle,$$

e o produto de dois símbolos

$$M_d^c M_b^a = |d\rangle \langle c| b\rangle \langle a| = \langle c| b\rangle M_d^a,$$

dado que os operadores  $M_b^a$ , podem ser expressos como combinação de operadores de criação e destruição, temos que

$$X = \sum_{a,b} M_a X M_b = \sum_{a,b} \langle a| X |b\rangle |a\rangle \langle b|,$$

segundo os resultados anteriores, temos que o produto  $\langle a| b\rangle$  é um número complexo

e que além disso, pode ser relacionado com  $\langle a | a' \rangle = \delta_{aa'}$ .

### 1.9.3 Álgebra Vetorial

As transformações entre os conjuntos de estados associados com observáveis distintos são equivalentes a transformações entre espaços vetoriais, ditas mudanças na forma de descrever os sistemas estão associadas às funções de transformação antes tratadas. Assim, podemos representar um vetor qualquer em função de outros tal e como descreve a álgebra de medida. Desta forma, temos

$$1 |a\rangle = \sum_b |b\rangle \langle b | a \rangle .$$

Da mesma maneira,

$$\langle a | 1 = \sum_b \langle a | b \rangle \langle b | ,$$

o que mostra um dos usos das funções de transformação.

Desta maneira, as relações de linearidade impostas pela superposição nas formas em que são decompostos os operadores, estabelecem (junto com as operações já mencionadas), soma, multiplicação por um escalar e mais adiante a norma, o que é chamado uma **"álgebra de estados"**.

Como foi visto, um dos elementos principais é que o produto

$$\langle a | b \rangle ,$$

define um número que pode ser visto como um produto interno entre os elementos do espaço vetorial, dado que o produto interno está relacionado diretamente com a geometria do espaço, mais diretamente a norma, o elemento  $\langle a | b \rangle$  induzirá características geométricas que podem ajudar a aplicar esta nova álgebra.

Na construção de um espaço vetorial para um sistema ao nível quântico, primeiramente devemos ter em conta que não conhecemos nada do sistema até que realizarmos alguns processos de medição. Estes processos nos ajudam a encontrar estados que são associados aos observáveis nos quais temos interesse. Tais observáveis podem tomar uma determinada quantidade de valores que são associados ao conjunto que chamamos de espectro, e cada sistema que tem algum desses valores bem definido, é dito estar nesse estado (Exemplo: o sistema que tem o valor bem definido da quantidade  $a$  de  $A$ , se diz estar no estado  $a$ ), que é representado por um elemento de um espaço vetorial complexo como  $|a\rangle$  ou  $|b\rangle$  são vetores de tal espaço e, ajudam a construir um espaço vetorial de dimensão  $N$ , com  $N$  o número de estados possíveis

do observável com que caracterizamos o sistema.

Outras operações importantes para se obter tudo o que se referente ao espaço vetorial é a ação de um operador sobre um vetor do espaço (vetor de estado). Desta forma, se  $X$  é um operador que atua em um espaço vetorial de dimensão  $N$ , e  $|b\rangle$  é um vetor de tal espaço, o produto será dado por

$$X |b\rangle = \sum_a |a\rangle \langle a| X |b\rangle,$$

porém se o operador é representado na base do espaço que este mesmo gera isto é, a sua base própria, obtemos o seguinte

$$A = \sum_a |a\rangle \langle a| A = \sum_a |a\rangle a \langle a|,$$

em que a ação de um operador sobre os seus vetores - associados (próprios) é

$$\begin{aligned} A |a\rangle &= a |a\rangle, \\ \langle a| A &= \langle a| a, \end{aligned}$$

assim, este espaço vetorial complexo, com o conjunto maximal de observáveis compatíveis define totalmente o sistema.

#### 1.9.4 Representações Espectrais

Uma vez conhecido o conjunto de vetores associados a um operador, podemos construir a sua representação na sua base própria, como

$$A = \sum_a |a\rangle a \langle a|,$$

onde temos que,

$$\begin{aligned} A^2 &= A \sum_a |a\rangle a \langle a| = \sum_a (A |a\rangle) a \langle a| \\ &= \sum_a |a\rangle a^2 \langle a|. \end{aligned}$$

tal decomposição em sua base própria é o que chamamos "decomposição espectral". Para uma função de um operador, exemplo com  $f(A)$  temos que

$$f(A) = \sum_a |a\rangle f(a) \langle a|,$$

além disso, dado o elemento  $a_1 \in \mathbf{E}[A]$  do espectro de  $A$ , podemos mostrar que a decomposição espectral do operador

$$\begin{aligned} A - a_1 1 &= \sum_a |a\rangle a \langle a| - \sum_a |a\rangle a_1 \langle a| \\ &= \sum_a |a\rangle (a - a_1) \langle a|, \end{aligned}$$

agora, se tomarmos outro ponto do espectro, temos que

$$\begin{aligned} (A - a_1)(A - a_2) &= (A - a_1)(A - a_2) \sum_a |a\rangle \langle a| \\ &= (A - a_1) \sum_a |a\rangle (a - a_2) \langle a| \\ &= \sum_a |a\rangle (a - a_1)(a - a_2) \langle a|, \end{aligned}$$

de tal forma que quando tomamos todos os pontos do conjunto  $\mathbf{E}[A]$ , temos

$$\prod_k (A - a_k) = \sum_a |a\rangle \prod_k (a - a_k) \langle a|,$$

a anterior expressão define um polinômio em potências em  $a$  que tem suas raízes em cada ponto do conjunto  $\mathbf{E}[A]$ . Esta equação é chamada **de valores próprios** ou **polinômio característico**. Desta forma, levando em conta os desenvolvimentos anteriores, podemos considerar o seguinte operador,

$$\delta(A, \bar{a}) = \prod_{a \neq \bar{a}} \left( \frac{A - a_k}{\bar{a} - a_k} \right),$$

que tem a seguinte característica: dado que o produto percorre todo o espectro com exceção do valor  $\bar{a}$ , terá um valor de zero atuando sobre qualquer elemento do espaço (o vetor de estado) menos aquele que represente o estado que tenha o valor  $\bar{a}$  de  $A$ , onde terá o valor de 1. Esta característica é a mesma que tem o delta de Kronecker, assim o valor esperado deste operador em um dado estado é

$$\langle \delta(A, \bar{a}) \rangle_b = \begin{cases} 1 & \langle A \rangle_b = \bar{a} \\ 0 & \langle A \rangle_b \neq \bar{a} \end{cases}$$

Se analisarmos com mais cuidado o significado do operador  $\delta(A, \bar{a})$ , podemos ver que por meio da representação espectral temos que

$$\begin{aligned} \delta(A, \bar{a}) &= \sum_a |a\rangle \langle a| \prod_{a \neq \bar{a}} \left( \frac{A - a_k}{\bar{a} - a_k} \right) \\ &= \sum_a |a\rangle \langle a| \prod_{a \neq \bar{a}} \left( \frac{a - a_k}{\bar{a} - a_k} \right) \\ &= |\bar{a}\rangle \langle \bar{a}| = M_{\bar{a}}, \end{aligned}$$

que é o símbolo de medida, o que significa que o operador encontrado tem a possibilidade de selecionar do ensemble o sistema que se encontra no estado desejado, que é basicamente a ação do nosso símbolo de medida  $|\bar{a}\rangle \langle \bar{a}|$ . Posto assim, este tipo de operador tem importantes propriedades na solução de equações funcionais, dado que

$$(A - \bar{a}) \delta(A, \bar{a}) = \delta(A, \bar{a}) (A - \bar{a}) = 0,$$

e

$$\sum_a \delta(A, \bar{a}) = 1,$$

temos

$$\begin{aligned} f(A) \delta(A, \bar{a}) &= \sum_a |a\rangle f(a) \langle a| M_{\bar{a}} = \sum_a |a\rangle f(a) \langle a| \bar{a}\rangle \langle \bar{a}| \\ &= \sum_a |a\rangle f(a) \delta_a^{\bar{a}} \langle \bar{a}| = f(\bar{a}) M_{\bar{a}} \\ &= f(\bar{a}) \delta(A, \bar{a}). \end{aligned}$$

### 1.9.5 Funções de Onda

O espaço vetorial construído para descrever um sistema qualquer fornece uma base para representar qualquer estado em que possa estar o sistema. As propriedades destes vetores de estado serão expressas no conjunto de vetores associados com a projeção desse vetor em cada um dos elementos da base do espaço vetorial, esse conjunto de números é conhecido como *função de onda*. Estes vetores possuem N números (componentes, dependendo da dimensionalidade do sistema), associados com os N elementos da base. As propriedades abstratas dos vetores são realizadas por estes conjuntos de números. Desta forma, se  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  são dois vetores nos quais podemos encontrar o sistema, escrevermos na base  $\{|b\rangle\}$ , como

$$|\psi\rangle = \sum_b |b\rangle \langle b| \psi\rangle = \sum_b |b\rangle \psi(b),$$

e

$$\langle \phi| = \sum_b \langle \phi| b\rangle \langle b| = \sum_b \phi^\dagger(b) \langle b|,$$

onde

$$\phi^\dagger(b) = \langle \phi| b\rangle.$$

Se  $\psi$  e  $\phi$  estão em relação adjunta,  $\phi = \psi^\dagger$ , a correspondente função de onda está conectada pela ação de encontrar o adjunto como

$$\phi(b) = \psi^\dagger(b).$$

O produto de dois vetores será dado por

$$\begin{aligned} \langle \psi_2 | \phi_1 \rangle &= \sum_b \langle \psi_2 | b \rangle \langle b | \phi_1 \rangle \\ &= \sum_b \psi_2^\dagger(b) \phi_1(b), \end{aligned}$$

e, em particular,

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_b \psi(b) \psi^\dagger(b) \geq 0,$$

que caracteriza a geometria dos estados como uma geometria que será dita unitária.

O produto  $|\psi_1\rangle \langle \phi_2|$  é representado pela matriz

$$\langle b | \psi_1 \rangle \langle \phi_2 | b \rangle = \psi_1(b) \phi_2(b),$$

e funções de onda que representam  $X|\psi\rangle$  e  $\langle \phi | X$  são

$$\langle a | X |\psi\rangle = \sum_b \langle a | X | b \rangle \psi(b),$$

e

$$\langle \phi | X | b \rangle = \sum_a \langle a | X | b \rangle \phi(a).$$

Substituindo nas expressões anteriores o operador  $X = 1$ , obtemos a relação entre as funções de onda e um vetor em duas diferentes representações,

$$\begin{aligned} \psi(a) &= \sum_b \langle a | b \rangle \psi(b), \\ \phi(a) &= \sum_b \phi(b) \langle a | b \rangle. \end{aligned}$$

Nota-se que a função de onda que representa  $|b\rangle$  na descrição da base  $\{a\}$  é

$$\psi_b(a) = \langle a | b \rangle = \phi_a(b).$$

Desde o ponto de vista da álgebra de medida, as funções de onda  $\phi$  e  $\psi$  são matrizes com uma soa fila ou coluna cada uma. Esta é uma afirmação conveniente, disser que qualquer operador Hermiteano simboliza uma quantidade física, e que qualquer vetor unitário simboliza um estado. Então o valor esperado da propriedade  $X$  no

estado  $|\psi\rangle$  é dado por

$$\langle X \rangle_\psi = \langle \psi | X | \psi \rangle = \sum_{ab} \psi^\dagger(a) \langle a | X | b \rangle \psi(b).$$

Em particular, a probabilidade de se observar os valores de  $a$  em uma medida relacionada com  $A$  realizada sobre o sistema no estado  $|\psi\rangle$  é simbolizada por

$$p(a|\psi) = \langle \psi | a \rangle \langle a | \psi \rangle = \psi^\dagger(a) \psi(a) = |\psi(a)|^2,$$

que é a nossa definição de probabilidade.

## *Referências*

- [1] Schwinger, Julian S. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **45**, 1542-1553(1959), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 256-265(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 570-579(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 883-897(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 1401-1415(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. os Sci. **47**, 1075-1083(1961), Schwinger, Julian S. ,”*Quantum Kinematics and Dynamics*”, (W.A. Benjamin Publishers,1970), Schwinger, Julian S. , Quantum Mechanics ”*Symbolism of Atomic Measurements*”, (Springer , 2001)- Schwinger.
- [2] Balescu, Radu , *Equilibrium and non Equilibrium Statistical Mechanics*,(John Wiley & Sons, inc. - 1975)
- [3] de Melo, Cássius Anderson Miquele - Princípio Variacional de Schwinger e Teoria Quântica: Aplicações à Mecânica Quântica Quaterniônica e ao Estudo de Sistemas Singulares, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica - UNESP, (2002).
- [4] Finkelstein, David. , Jauch, Joseph M., Schminovich, Samuel and Speiser, David. Jour. Math. Phys **3**,267(1962)

## 2 *Princípio Variacional de Schwinger*

A formulação da Mecânica Quântica proposta por Julian S. Schwinger numa série de artigos [1], foi produto de uma nova exposição do tema desde a teoria da medida até a formulação de um Princípio Variacional [2] para conhecer a dinâmica das funções de transformação em que não é necessário, em nenhum instante, o princípio de correspondência [3, 4], na qual são derivadas de maneira inteiramente natural as relações de comutação e a forma da evolução tanto das variáveis dinâmicas (Representação de Heisenberg) como dos estados quânticos do sistema (Representação de Schrödinger).

Em uma primeira aproximação na direção deste formalismo, teremos que notar a importância das transformações unitárias e como estas devem preservar as características da estrutura do conjunto, ou espaço, onde são aplicadas, mantendo entre outras coisas a probabilidade invariante \*. Além disto, observar também como é a sua relação com as transformações infinitesimais, tanto dos operadores como dos estados e, como podem dar informação da reação dos estados ante uma mudança sobre tudo o sistema.

Cada vez que falamos de algum tipo de transformação, também estamos falando das *amplitudes de probabilidade* (amplitude de transição) dadas pelas relações que permitem uma equivalência entre as diferentes descrições de um mesmo sistema quântico. Este tipo de transformação contém toda a informação do sistema sobre o qual está sendo realizada a medida, em outras palavras a função de transformação contém a informação quântica do sistema, já que elas carregam a informação do que acontece com o sistema entre uma e outra descrição e, portanto, poderemos estudar de alguma forma as respostas do sistema. Dado isto é que o estudo das transformações infinitesimais e a sua influência sobre as funções de transformação ao ligar pequenas mudanças do sistema, permitem definir as variações dos estados frente a qualquer mudança, ou incluso entre medições de observáveis de um mesmo sistema mas em

---

\*Falamos que uma probabilidade se mantém invariante se, ao representar os estados envolvidos em função de qualquer base genérica, ela continua sendo a mesma, ou seja é independente da representação, isto exige mais uma característica nas funções de transformação.

tempos diferentes.

Assim, quando fazemos medidas sobre um sistema dinâmico de natureza quântica [3], embora as mudanças do sistema em general sejam imprevisíveis entre observações, a causalidade tem que ser aplicada. Tanto em Mecânica Clássica como em Mecânica Quântica a evolução do sistema é governada por variáveis dinâmicas que permitem conectar a situação do sistema em um tempo  $t$ , com aquele em um tempo  $t + \delta t$ . Considerando isto, devemos observar que o sistema entre medições geralmente é transformado entre duas diferentes descrições, e que essas transformações devem conservar também a informação que temos sobre o sistema [1]. Assim, também podemos inferir que a evolução temporal deve ser dada por uma transformação infinitesimal unitária que tenha as propriedades gerais de preservação sobre as características do sistema, mas que tenha relação com as suas variáveis dinâmicas. Assim, com este tipo de transformação poderá ser estudada a evolução temporal dos estados do sistema quântico e a evolução dos observáveis pelos quais está sendo caracterizado.

Nas seções seguintes, serão estudadas algumas características das transformações unitárias: o Princípio Variacional de Schwinger e algumas aplicações.

## 2.1 Transformações Unitárias e Infinitesimais para Estados e Operadores

Vimos no final do primeiro capítulo, que na descrição de um sistema quântico ao conjunto de elementos  $E[A] = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ , que constituem o espectro do observável  $A$ , é associado a uma base de vetores unitários que consideramos completa <sup>†</sup>. Se tomarmos dois observáveis diferentes e não necessariamente compatíveis  $A$  e  $B$ , e os conjuntos de vetores unitários que ajudam na descrição de um mesmo sistema,  $\{|a_k\rangle\}$  e  $\{|b_k\rangle\}$ , podemos definir as seguintes transformações entre as diferentes bases da seguinte forma,

$$U_{ab} = \sum_{k=1}^N |a_k\rangle \langle b_k| \quad , \quad e \quad U_{ba} = \sum_{k=1}^N |b_k\rangle \langle a_k|,$$

com

$$U_{ab}^\dagger = U_{ba} \quad U_{ba}^\dagger = U_{ab}.$$

Estes operadores realizam um tipo especial de transformação que nos permite ter uma representação dos vetores associados a um dos observáveis  $A$ , ou  $B$ , em função

---

<sup>†</sup>Que uma base seja considerada completa, significa que qualquer estado do sistema pode ser expresso por uma combinação linear seus elementos, analogamente com um espaço vetorial.

do outro. Dado o fato anterior podemos mostrar que

$$U_{ab}U_{ba} = U_{ab}U_{ab}^\dagger = U_{ba}^\dagger U_{ba},$$

de onde deduzimos que o produto

$$\begin{aligned} U_{ab}U_{ba} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N |a_k\rangle \langle b_k| |b_l\rangle \langle a_l| \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N |a_k\rangle \delta_{kl} \langle a_l| = \hat{1}, \end{aligned}$$

como a que se mostra

$$\begin{aligned} U_{ba} &= U_{ab}^\dagger = U_{ab}^{-1}, \\ U_{ab}^\dagger &= U_{ab} = U_{ba}^{-1}, \end{aligned}$$

e dos fatos anteriores podemos inferir as relações

$$\begin{aligned} U_{ba} |a_k\rangle &= |b_k\rangle, \\ \langle a_k| U_{ab} &= \langle b_k|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Portanto, é visto que a transformação dada pelo operador  $U$  é unitária. Assim que se o operador  $U$  atua sobre uma base ortonormal, vai transformá-la em uma outra base, também ortonormal, em que, conseqüentemente, são mantidas as relações geométricas dado que o produto interno

$$\begin{aligned} \langle b_l| b_k\rangle &= \langle a_l| U_{ab}U_{ba} |a_k\rangle = \langle a_l| U_{ab}U_{ab}^{-1} |a_k\rangle \\ &= \delta_{kl} = \langle a_l| a_k\rangle, \end{aligned}$$

é conservado ainda depois da transformação e, conseqüentemente, a norma que está relacionada com a probabilidade.

Agora que conhecemos como podemos transformar uma base  $\{|a_k\rangle\}_k$  para outra  $\{|b_j\rangle\}_j$ , podemos observar que tomando um operador  $X$  que atue sobre uma base qualquer pode ser expresso como o resultado da sua influência sobre cada um dos elementos do espaço, isto é ser decomposto numa base que não é a gerada pelos seus vetores próprios, dado que ele expressa um ato de medida, desta forma temos que

$$X = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \langle a_k| X |a'_l\rangle |a_k\rangle \langle a'_l|,$$

esta decomposição o relaciona com cada um dos eventos seletivos nos estados que

constituem as bases  $|a'\rangle$  e  $|a\rangle$ , como  $X$  pode causar mudanças na forma dos estados, ele pode representar transformações e podemos ver que ele deve cumprir

$$(XY)^{-1} = (Y^{-1})(X^{-1}).$$

Das observações anteriores podemos inferir que a ação de um operador como  $X$  sobre algum espaço, produz um outro vetor que pode ser expresso no mesmo espaço onde ele está atuando, o que se pode exemplificar com

$$\begin{aligned} X|a''_\alpha\rangle &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N |a_k\rangle \langle a_k| X|a''_l\rangle \langle a''_l| |a''_\alpha\rangle \\ &= \sum_{k=1}^N |a_k\rangle \langle a_k| X|a''_\alpha\rangle, \end{aligned}$$

da mesma forma para o seu dual,

$$\langle a_\alpha| X = \sum_{k=1}^N \langle a_k| X|a''_\alpha\rangle \langle a''_k|.$$

Assim como expressamos o operador  $X$  na base de vetores gerados pelo operador  $A$ , podemos expressar o operador  $A$  na base de vetores que são gerados por ele mesmo, desta forma será representado na base dos estados obtidos pelas medidas efetuadas sobre o sistema da característica que ele representa, portanto podemos ver que

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \langle a_k| A|a_l\rangle |a_k\rangle \langle a_l| = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_l \langle a_k| |a_l\rangle |a_k\rangle \langle a_l| \\ &= \sum_{l=1}^N a_l |a_l\rangle \langle a_l|, \end{aligned}$$

os valores dados de  $a_l \in E[\mathbf{A}]$ , e a base de vetores de estado  $\{|a_l\rangle\}$ , são chamados valores próprios e vetores próprios de  $A$ .

Agora conectaremos o fato de ter duas descrições de um mesmo sistema, mas para um caso especial em que dados dois operadores  $A$  e  $B$  estão relacionados por uma transformação unitária (2.1). Se os operadores cumprem as seguintes equações de valores próprios

$$A|a_l\rangle = a_l|a_l\rangle \quad \text{e,} \quad B|b_l\rangle = b_l|b_l\rangle,$$

temos que a representação espectral do operador  $B$  vai ser dada por

$$B = \sum_{l=1}^N b_l |b_l\rangle \langle b_l|$$

temos que usando (2.1) podemos ver que

$$\begin{aligned} B &= \sum_{l=1}^N b_l U_{ba} |a_l\rangle \langle a_k| U_{ab} = U_{ba} \left( \sum_{l=1}^N a_l |a_l\rangle \langle a_k| \right) U_{ab} \\ &= U_{ba} A U_{ab}, \end{aligned}$$

se eles compartilharem o mesmo espectro, ou seja  $b_l = a_l$ .

o que mostra que as duas descrições podem ser equivalentes, além de poder mostrar que o produto interno entre elementos equivalentes (amplitude de probabilidade), permanece invariante ainda depois da transformação,

$$\langle a_k | b_l \rangle = \langle b_k | U_{ab} | b_l \rangle = \langle a_k | U_{ba} | a_l \rangle.$$

### 2.1.1 Variações Infinitesimais das Funções de Transformação

Como uma parte importante na evolução para a compreensão da importância das funções de transformação e as representações mistas, temos as seguintes definições:

$$\langle b_l | a_m \rangle = \sum_n \langle b_l | c_n \rangle \langle c_n | a_m \rangle \quad (2.2)$$

$$\langle b_l | a_m \rangle = \overline{\langle a_m | b_l \rangle}. \quad (2.3)$$

Tomando as variações infinitesimais das quantidades acima, temos que:

$$\delta \langle b_l | a_m \rangle = \sum_c [\delta \langle b_l | c_n \rangle \langle c_n | a_m \rangle + \langle b_l | c_n \rangle \delta \langle c_n | a_m \rangle] \quad (2.4)$$

e

$$\delta \langle b_l | a_m \rangle = \overline{\delta \langle a_m | b_l \rangle}. \quad (2.5)$$

Agora, podemos tentar interpretar a variação da função de transformação como o elemento matricial de um operador na base  $a, b$ . Assim,

$$\delta \langle a_m | b_l \rangle = i \langle a_m | \delta \hat{W}_{ab} | b_l \rangle. \quad (2.6)$$

Esta será a definição do operador infinitesimal  $\delta W_{ab}$  em que tomando a expressão (2.4) temos

$$\langle b_l | \delta W_{ba} | a_m \rangle = \sum_n [\langle b_l | \delta W_{bc} | c_n \rangle \langle c_n | a_m \rangle + \langle b_l | c_n \rangle \langle c_n | \delta W_{ca} | a_m \rangle] \quad (2.7)$$

$$= \langle b_l | \delta W_{bc} + \delta W_{ca} | a_m \rangle \quad (2.8)$$

de onde pode ser vista a seguinte equação entre tais operadores,

$$\delta W_{ba} = \delta W_{bc} + \delta W_{ca}$$

da qual pode ser deduzida a seguinte igualdade, se fazemos  $c = a$

$$\delta W_{ba} = \delta W_{ba} + \delta W_{aa}$$

ou seja,

$$\delta W_{aa} = 0,$$

o que pode ser também entendido por

$$\delta \langle a_m | a_n \rangle = \delta (\delta_n^m) = 0.$$

Portanto, temos também a igualdade

$$\delta W_{ba} = -\delta W_{ab},$$

e recorrendo às relações derivadas nas seções anteriores nos dá como resultado

$$\delta \overline{\langle a_m | b_l \rangle} = -i \langle b_l | \delta W_{ab}^\dagger | a_m \rangle = i \langle a_m | \delta W_{ab}^\dagger | b_l \rangle,$$

que é igual a

$$\delta \langle b_l | a_m \rangle = i \langle b_l | \delta W_{ba} | a_m \rangle,$$

e, portanto, conservando a forma entre as definições anteriores, temos que

$$\delta W_{ba} = \delta W_{ab}^\dagger$$

o que mostra que todo operador infinitesimal definido da forma (2.6) é auto-adjunto, assim, o  $i$  anteposto à função de transformação tem o objetivo de fazer que o operador  $\delta \hat{W}_{ab}$  seja hermiteano.

### 2.1.2 Transformações Infinitesimais

As transformações unitárias estudadas anteriormente realmente poderiam ser vistas como uma pequena deformação da unidade se fizéssemos referência a uma

possível transformação que se pudesse ver como contínua<sup>‡</sup>, da seguinte forma

$$\begin{aligned} U &= 1 + iG, \\ U^{-1} &= U^\dagger = 1 - iG, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde os operadores  $G$  são operadores hermiteanos infinitesimais. Nesta ordem de idéias, a transformação de um vetor vai ser dada por

$$U^\dagger |a\rangle = (1 - iG) |a\rangle = |\bar{a}\rangle, \quad (2.10)$$

e a de seu dual por

$$\langle a| U = \langle a| (1 + iG) = \langle \bar{a}|,$$

de tal forma que, as transformações serão dadas por

$$-iG |a\rangle = |\bar{a}\rangle - |a\rangle = \delta |a\rangle,$$

e

$$i \langle a| G = \langle \bar{a}| - \langle a| = \delta \langle a|.$$

Levando-se em conta os fatos anteriores, podemos derivar a forma da variação de um operador sabendo que uma transformação como a considerada em (2.6) podese ver refletida como uma mudança no operador que esta sendo analisado. Para começar, podemos tomar a equação de valores próprios  $A |a\rangle = a |a\rangle$  que associa o conjunto de vetores ortonormais  $\{|a_j\rangle\}_j$  com o operador  $A$  e o espectro  $= \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ , e suponhamos que podemos relacionar este conjunto de vetores aos vetores  $\{|\bar{a}_j\rangle\}_j$  relacionados com  $\bar{A}$  pela equação  $\bar{A} |\bar{a}\rangle = \bar{a} |\bar{a}\rangle$ , onde temos que pelas relações de unitariedade entre as bases dadas pela transformação (2.10) o espectro  $a$  é mantido e, portanto,  $a = \bar{a}$ .

Com as considerações anteriores podemos notar que se avaliarmos o valor esperado de um operador  $X$  em ambas bases, teremos que

$$\langle \bar{a}| X |\bar{a}'\rangle = \langle a| U X U^\dagger |a'\rangle,$$

desta forma, podemos deduzir que as variações induzidas nos operadores pelas transformações infinitesimais, serão tais que se

$$\begin{aligned} \delta \langle a| X |a'\rangle &= \langle \bar{a}| X |\bar{a}'\rangle - \langle a| X |a'\rangle \\ &= \langle a| U X U^\dagger |a'\rangle - \langle a| X |a'\rangle \\ &= i \langle a| \delta X |a'\rangle, \end{aligned}$$

---

<sup>‡</sup>Uma transformação contínua está ligada à mudança de um parâmetro que varia de forma contínua em um intervalo de valores, estas transformações estão ligadas com o fato que o valor nulo desse parâmetro recobra a unidade. Assim podemos considerar que, para valores pequenos desse parâmetro, a transformação pode ser considerada uma pequena deformação da unidade.

onde podemos extraer que

$$i\delta X = UXU^\dagger - X,$$

assim, que se usarmos a forma onde identificamos a presença do operador diferencial (2.9), obtemos que a expressão anterior pode ser escrita como

$$\begin{aligned} i\delta X &= (1 + iG)X(1 - iG) - X \\ &= -i(XG - GX) + GXG \\ &= -i[X, G] + GXG, \end{aligned}$$

tomando o termo de primeira ordem, supondo que  $G$  é suficientemente pequeno, temos a forma geral das variações de um operador, frente a uma transformação diferencial

$$\delta X = -[X, G], \quad (2.11)$$

com a definição anterior podemos mostrar que, dados dois observáveis  $X$  e  $Y$

$$\begin{aligned} \delta(XY) &= -[XY, G] \\ &= -X[Y, G] - [X, G]Y \\ &= -\{X(\delta Y) + (\delta X)Y\}. \end{aligned}$$

Podemos observar que a variação (2.11) tem um papel especial ao ser estes elementos indispensáveis no análise variacional das quantidades relacionadas com a dinâmica de um sistema físico, como se verá nas seguintes seções.

## 2.2 A Medida e o Tempo

Os processos de medida até agora somente haviam sido estudados sem ter um lugar no espaço ou algum instante de tempo, no sentido que somente foi explorado o efeito da medida sobre o sistema, mas se queremos conhecer como o este evolui, como é a sua dinâmica, temos que encontrar a maneira de levar em conta tais características do processo de medida, já que estes processos realmente acontecem em algum lugar do espaço e em um tempo bem determinado e, a sua evolução dependerá das características das interações entre os componentes do sistema e seu meio.

Os sistemas geralmente evoluem segundo a mudança de algum tipo de parâmetro, que somente marca uma escala. No caso do tempo é considerada homogênea. Tal mudança é levada em conta desde um instante de tempo considerado como o tempo inicial  $t_0$ , e é medida a partir deste até um tempo final. Geralmente temos casos especiais, quando as dinâmicas dos sistemas têm o mesmo comportamento para evoluções

desde  $t_0$  e em direção a ele, simetria na evolução temporal, mas em alguns sistemas é útil definir que a evolução em algum dos dois sentidos pode não ser igual, ou seja as dinâmicas nos sentidos da evolução  $t_0 \rightarrow t$ , ou  $t \rightarrow t_0$  são diferentes, mas esses casos serão estudados mais adiante quando analisarmos a possibilidade da existência de processos com tais propriedades.

Para a caracterização de um sistema e a sua evolução dinâmica, precisamos de conjuntos de operadores que nos forneçam informação sobre o sistema, dado que eles representam basicamente os processos de medida e, da mesma forma que os estados associados ao sistema, eles terão associado um tempo que nos dirá em que momento foram realizadas tais operações. Então, o estudo da evolução no tempo para o sistema implica uma nova medida, ou uma nova caracterização do sistema por um novo conjunto de observáveis, não necessariamente compatíveis; que neste caso, são aqueles em que foi efetuada a medida inicial mas evoluída no tempo. Estes dois conjuntos agora distintos por causa da mudança do parâmetro tempo, têm relação por meio de uma transformação unitária [2, 3] que, como dito anteriormente, deixa invariantes as propriedades geométricas do sistema.

O anterior raciocínio pode ser visualizado da seguinte forma: se o sistema no tempo  $t_0$  esta caracterizado pelo conjunto de quantidades  $\{|b\rangle\}_{(t_0)}$ , e num instante posterior, tempo  $t_1$  é caracterizado pelas quantidades  $\{|a\rangle\}_{(t_1)}$ , a função de transformação entre os dois conjuntos de medidas será dada pela expressão

$$\langle a(t_1)|b(t_0)\rangle, \quad (2.12)$$

onde cada um dos conjuntos associados são estados próprios dos observáveis  $A(t_1)$  e  $B(t_0)$ , os quais não necessariamente são compatíveis.

### 2.2.0.1 O Operador de Ação e o Lagrangeano Quântico

As variações infinitesimais das funções de transformação podem ser expressas como as variações de um operador auto-adjunto que é um pequeno desvio da unidade  $\hat{1}$ , que tem a propriedade de ser aditivo frente a transformações consecutivas. O operador que gera tais variações, pode ser definido por meio do seguinte postulado fundamental:

Existe uma classe especial de alterações infinitesimais para a qual os operadores associados  $\delta\hat{S}_{t_0,t_1}$  são obtidos por variações

apropriadas de um único operador, o operador de ação  $\hat{S}_{t_0, t_1}$

$$\delta \langle a(t_1) | b(t_0) \rangle = \langle a(t_1) | \delta \hat{S}_{t_0, t_1} | b(t_0) \rangle$$

onde

$$\delta \hat{S}_{t_0, t_1} = \delta [\hat{S}_{t_0, t_1}].$$

Se a transformação relaciona as descrições dos sistema  $\{|a\rangle\}_{(t_1)}$  e  $\{|b\rangle\}_{(t_0)}$  e uma sucessão de transformações infinitesimais em cada intervalo de tempo  $\Delta t$ , temos pelo argumento anterior

$$\hat{S}_{t_0, t_1} = \sum_{t_0}^{t_1} \hat{S}_{t, t+\Delta t}, \quad (2.13)$$

então, quando temos o limite em que o  $\Delta t$  é muito pequeno, e a evolução é dada para um período de tempo maior que  $\Delta t$ , podemos expressar a soma anterior como

$$\hat{S}_{t_0, t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}(t) dt. \quad (2.14)$$

Na integral anterior é introduzido o operador **Lagrangeano**  $\hat{L}(t)$  que é um operador auto-adjunto que tem dependência funcional nas variáveis dinâmicas do sistema.

### 2.2.1 Princípio Variacional de Schwinger

Pelos argumentos anteriores as mudanças na função de transformação são produzidas por variações diretas sobre os estados envolvidos na transição e tais variações são produzidas por mudanças das propriedades físicas que são analisadas, ou por mudanças no tempo. Como as variações infinitesimais nos estados são dadas por um operador infinitesimal, pode-se estabelecer que

$$\begin{aligned} -iG |a, t\rangle &= \delta |a, t\rangle, \\ i \langle a, t| G &= \delta \langle a, t|, \end{aligned}$$

assim, para poder caracterizar as funções de transformação e relacionar estas com os operadores antes mencionados, temos que se analisar as variações de uma função de transformação, assim, estas variações estarão dadas por

$$\begin{aligned} \delta [\langle a, t_1 | b, t_0 \rangle] &= [\delta \langle a, t_1 |] |b, t_0\rangle + \langle a, t_1 | [\delta |b, t_0\rangle] \\ &= i \langle a, t_1 | G_1 |b, t_0\rangle - i \langle a, t_1 | G_0 |b, t_0\rangle \\ &= i \langle a, t_1 | G_1 - G_0 |b, t_0\rangle, \end{aligned}$$

que para um sistema dinâmico haverá relação com a variação desse único operador chamado,  $\hat{L}(t)$ , como

$$\begin{aligned} \delta [\langle a, t_1 | b, t_0 \rangle] &= i \langle a, t_1 | G_1 - G_0 | b, t_0 \rangle \\ &= \langle a, t_1 | \delta \hat{S}_{t_0, t_1} | b, t_0 \rangle = \langle a, t_1 | \delta \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}(t) dt | b, t_0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

que será analisada na seguinte seção.

Observemos a variação do operador  $\hat{S}$ , como função dos operadores de posição e da sua derivada no tempo  $\hat{q}$ , e  $\dot{\hat{q}}$ , que pode ser posta da seguinte forma

$$\delta \hat{S} = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} d\bar{t} \hat{L}(\hat{q}', \dot{\hat{q}}', t') - \int_{t_0}^{t_1} dt \hat{L}(\hat{q}, \dot{\hat{q}}, t),$$

onde as variações temporais são dadas por

$$\begin{aligned} \delta t &= t' - t, \\ \delta \hat{q} &= \delta_0 \hat{q} + \frac{d\hat{q}(t)}{dt} \delta t, \\ \hat{q}'(t) &= \hat{q}(t) + \delta \hat{q}(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

assim, podemos obter que

$$\begin{aligned} \delta \hat{S} &= \int_{t'_0}^{t'_1} dt' \hat{L}(\hat{q}', \dot{\hat{q}}', t') - \int_{t_0}^{t_1} dt \hat{L}(\hat{q}, \dot{\hat{q}}, t) = \int_{t_0}^{t_1} \{ (\delta(dt)) \hat{L} + \delta \hat{L} dt \} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \{ (dt + \delta(dt)) [\hat{L} + \delta \hat{L}] - dt \hat{L} \}, \end{aligned}$$

que conduz à forma

$$\delta \hat{S} = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ dt \hat{L} + dt \delta \hat{L} + \delta(dt) \hat{L} + \delta(dt) \delta \hat{L} - dt \hat{L} \right\},$$

assim, tomando o resultado anterior até a variação de primeira ordem ( $\delta(dt) \delta \hat{L} \simeq 0$ ), conseguimos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \delta \hat{S} &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ dt \left( \delta_0 \hat{L} + \frac{d\hat{L}(t)}{dt} \delta t \right) + \delta(dt) \hat{L} \right\} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \delta_0 \hat{L} + \frac{d\hat{L}(t)}{dt} \delta t + \frac{\delta(dt)}{dt} \hat{L} \right), \end{aligned}$$

onde dado  $\frac{\delta(dt)}{dt} = \frac{d(\delta t)}{dt}$ , reduzimos à forma

$$\begin{aligned}\delta\hat{S} &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \delta_0\hat{L} + \frac{d\hat{L}(t)}{dt}\delta t + \frac{d(\delta t)}{dt}\hat{L} \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \delta_0\hat{L} + \frac{d(\hat{L}(t)\delta t)}{dt} \right),\end{aligned}\tag{2.17}$$

na qual tomando  $\delta_0\hat{L}$  como a variação convencional (somente na forma funcional) encontramos que,

$$\delta_0\hat{L} = \frac{\partial\hat{L}}{\partial\hat{q}}\delta_0\hat{q} + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\delta_0(\dot{\hat{q}}),$$

Dado que a variação  $\delta_0$  não implica em mudança nenhuma sobre o tempo, podemos ver que  $\delta_0\left(\frac{d\hat{q}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta_0\hat{q})$ , obtendo

$$\begin{aligned}\delta_0\hat{L} &= \frac{\partial\hat{L}}{\partial\hat{q}}\delta_0\hat{q} + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\frac{d}{dt}(\delta_0\hat{q}) \\ &= \frac{\partial\hat{L}}{\partial\hat{q}}\delta_0\hat{q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\delta_0\hat{q}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\right)\delta_0\hat{q},\end{aligned}$$

o que produz em (2.17)

$$\begin{aligned}\delta\hat{S} &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \delta_0\hat{L} + \frac{d(\hat{L}(t)\delta t)}{dt} \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\delta_0\hat{q} + \hat{L}(t)\delta t\right) + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\hat{q}}\delta_0\hat{q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\right)\delta_0\hat{q} \right) \\ &= \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\delta_0\hat{q} + \hat{L}(t)\delta t \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial\hat{L}}{\partial\hat{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\right) \right\} \delta_0\hat{q} \\ &= \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\delta_0\hat{q} + \hat{L}(t)\delta t \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\delta\hat{L}}{\delta\hat{q}} \right) \delta_0\hat{q},\end{aligned}$$

onde se compararmos com

$$\delta\hat{S} = \hat{G}_1 - \hat{G}_0,$$

o termo

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\delta\hat{L}}{\delta\hat{q}} \right) \delta_0\hat{q},$$

segundo 2.15 tem que se anular<sup>§</sup>, portanto, uma vez que as variações de  $\delta_0\hat{q}$ , são arbitrárias, temos que

$$\frac{\delta\hat{L}}{\delta\hat{q}} = 0,$$

<sup>§</sup>Este fato estabelece um tipo de equação de Euler - Lagrange Quântica.

o que é fornecido pelas equações de movimento. Assim,  $\delta\hat{S}$  toma a forma

$$\hat{G} = \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\delta_0\hat{q} + \hat{L}(t)\delta t,$$

e por meio de (2.16), temos que

$$\hat{G} = \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\delta\hat{q} + \left( \hat{L}(t) - \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}}\dot{\hat{q}} \right) \delta t.$$

Definindo

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}} \equiv \hat{p},$$

e

$$\hat{H} \equiv \hat{p} \cdot \dot{\hat{q}} - \hat{L}(t),$$

temos que a expressão para  $\hat{G}$  pode ser dada como

$$\hat{G} = \hat{p}\delta\hat{q} - \hat{H}\delta t,$$

assim, o Princípio Variacional assume a seguinte forma

$$\delta[\langle a_{t_1} | b_{t_0} \rangle] = \langle a_{t_1} | \left( \hat{p}\delta\hat{q} - \hat{H}\delta t \right) \Big|_{t_0}^{t_1} | b_{t_0} \rangle,$$

onde o estado final do sistema pode ser considerado como fixo.

Agora se assumirmos que para um operador as variações são dadas por

$$\delta\hat{A} = -i [\hat{A}, \hat{G}],$$

as variações para o operador  $\hat{q}$ , podem ser dadas por

$$\begin{aligned} \delta\hat{q}^i &= -i [\hat{q}^i, \hat{G}] = -i [\hat{q}^i, \hat{p}^j \delta\hat{q}_j - \hat{H}\delta t] \\ &= -i [\hat{q}^i, \hat{p}^j \delta\hat{q}_j] + i [\hat{q}^i, \hat{H}] \delta t \\ &= -i\hat{p}^j [\hat{q}^i, \delta\hat{q}_j] - i [\hat{q}^i, \hat{p}^j] \delta\hat{q}_j + i [\hat{q}^i, \hat{H}] \delta t, \end{aligned}$$

e para o operador  $\hat{p}$ ,

$$\begin{aligned} \delta\hat{p}_i &= -i [\hat{p}_i, \hat{p}^j \delta\hat{q}_j - \hat{H}\delta t] \\ &= -i [\hat{p}_i, \hat{p}^j \delta\hat{q}_j] + i [\hat{p}_i, \hat{H}] \delta t \\ &= -i\hat{p}^j [\hat{p}_i, \delta\hat{q}_j] - i [\hat{p}_i, \hat{p}^j] \delta\hat{q}_j + i [\hat{p}_i, \hat{H}] \delta t, \end{aligned}$$

portanto, se restringirmos a análise para uma das três coordenadas e um tempo fixo,

podemos mostrar facilmente que

$$\begin{aligned}\delta \hat{q}^i &= -i \hat{p}^j [\hat{q}^i, \delta \hat{q}_j] - i [\hat{q}^i, \hat{p}^j] \delta \hat{q}_j, \\ \delta \hat{p}_i &= -i \hat{p}^j [\hat{p}_i, \delta \hat{q}_j] - i [\hat{p}_i, \hat{p}^j] \delta \hat{q}_j.\end{aligned}$$

Fazendo a escolha da função  $\hat{\Lambda} = -\hat{p} \cdot \hat{q}$ , que em analogia com as transformações canônicas em Mecânica Clássica que leva à troca de  $\hat{p}$  por  $\hat{q}$ , conduz à análise, agora da mesma dinâmica, mas vista desde o espaço de momentos onde

$$\delta \hat{\Lambda} = -\delta \hat{p} \cdot \hat{q} - \hat{p} \cdot \delta \hat{q},$$

assim, analisando a mudança induzida no operador  $\hat{G}$  dado pela transformação  $\hat{\Lambda}$ ,

$$\begin{aligned}\overline{\hat{G}}_0 - \hat{G}_0 &= \delta \hat{\Lambda}_0, \\ \overline{\hat{G}}_1 - \hat{G}_1 &= \delta \hat{\Lambda}_1,\end{aligned}$$

obtemos as variações que dão origem à forma do novo operador  $\overline{\hat{G}}$ , que é a seguinte

$$\begin{aligned}\overline{\hat{G}} &= \delta \hat{\Lambda} + \hat{G} \\ &= -\delta \hat{p} \cdot \hat{q} - \hat{p} \cdot \delta \hat{q} + \hat{p} \cdot \delta \hat{q} - \hat{H} \delta t \\ &= -\delta \hat{p} \cdot \hat{q} - \hat{H} \delta t,\end{aligned}$$

de onde podemos obter as variações dos operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$ , na nova descrição do sistema, que são

$$\begin{aligned}\delta \hat{q}_i &= -i [\hat{q}_i, -\delta \hat{p}_j \hat{q}_j - \hat{H} \delta t] \\ &= i [\hat{q}_i, \delta \hat{p}_j \hat{q}_j] + i [\hat{q}_i, \hat{H}] \delta t \\ &= i \delta \hat{p}_j [\hat{q}_i, \hat{q}_j] + i [\hat{q}_i, \delta \hat{p}_j] \hat{q}_j + i [\hat{q}_i, \hat{H}] \delta t,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\delta \hat{p}_i &= -i [\hat{p}_i, -\delta \hat{p}_j \hat{q}_j - \hat{H} \delta t] \\ &= i [\hat{p}_i, \delta \hat{p}_j \hat{q}_j] + i [\hat{p}_i, \hat{H}] \delta t \\ &= i \delta \hat{p}_j [\hat{p}_i, \hat{q}_j] + i [\hat{p}_i, \delta \hat{p}_j] \hat{q}_j + i [\hat{p}_i, \hat{H}] \delta t.\end{aligned}$$

Segundo as idéias da análise anterior, tomando somente uma das coordenadas num tempo fixo  $\delta \hat{q}^i$  e  $\delta \hat{p}_i$  resultam da seguinte forma

$$\begin{aligned}\delta \hat{q}_i &= i \delta \hat{p}_k [\hat{q}_i, \hat{q}_k] + i [\hat{q}^i, \delta \hat{p}_k] \hat{q}_k, \\ \delta \hat{p}_i &= i \delta \hat{p}_k [\hat{p}_i, \hat{q}_k] + i [\hat{p}_i, \delta \hat{p}_k] \hat{q}_k.\end{aligned}$$

Os procedimentos anteriores têm gerado um conjunto de relações para  $\delta\hat{q}_i$  e  $\delta\hat{p}_j$  em dois espaços diferentes, gerados pelos operadores que descrevem a dinâmica do sistema. Estas variações contêm informação que pode ser analisada designando as variações conforme o espaço onde elas são realizadas, i.e.  $\delta_p$  para as variações no espaço dos momentos e  $\delta_q$  para o espaço das coordenadas, se consideramos elas cinematicamente independentes,

$$\delta_p\hat{q}_i = \delta_q\hat{p}_i = 0,$$

temos,

$$\begin{aligned}\delta_q\hat{q}_i &= -i\hat{p}^j [\hat{q}_i, \delta\hat{q}_j] - i [\hat{q}_i, \hat{p}^j] \delta\hat{q}_j \\ \delta_p\hat{q}_i &= i\delta\hat{p}^k [\hat{q}_i, \hat{q}_k] + i [\hat{q}_i, \delta\hat{p}_k] \hat{q}_k = 0 \\ \delta_q\hat{p}_i &= -i\hat{p}_j [\hat{p}_i, \delta\hat{q}_j] - i [\hat{p}_i, \hat{p}_j] \delta\hat{q}_j = 0 \\ \delta_p\hat{p}_i &= i\delta\hat{p}_k [\hat{p}_i, \hat{q}_k] + i [\hat{p}_i, \delta\hat{p}_k] \hat{q}_k.\end{aligned}$$

Assim, deve-se cumprir as seguintes identidades

$$\begin{aligned}-i\hat{p}_j [\hat{q}_i, \delta\hat{q}_j] - i [\hat{q}_i, \hat{p}_j] \delta\hat{q}_j &= \delta\hat{q}_i \\ i\delta\hat{p}_k [\hat{q}_i, \hat{q}_k] + i [\hat{q}_i, \delta\hat{p}_k] \hat{q}_k &= 0 \\ -i\hat{p}_j [\hat{p}_i, \delta\hat{q}_j] - i [\hat{p}_i, \hat{p}_j] \delta\hat{q}_j &= 0 \\ i\delta\hat{p}_k [\hat{p}_i, \hat{q}_k] + i [\hat{p}_i, \delta\hat{p}_k] \hat{q}_k &= \delta\hat{p}_i\end{aligned}$$

então, solucionando o anterior sistema temos que

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_k] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0,$$

temos que uma possível solução é dada por

$$\begin{aligned}[\hat{q}_i, \delta\hat{p}_k] &= [\hat{p}_i, \delta\hat{q}_j] = 0, \\ [\hat{p}_i, \delta\hat{p}_k] &= [\hat{q}_i, \delta\hat{q}_j] = 0,\end{aligned}$$

obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned}-i [\hat{q}_i, \hat{p}_j] \delta\hat{q}_j &= \delta\hat{q}_i, \\ -i [i\delta_{ij}] \delta\hat{q}_j &= \delta\hat{q}_i,\end{aligned}$$

ou

$$[\hat{q}^i, \hat{p}^j] = i\delta_{ij},$$

que são as relações de comutação, para as variáveis que descrevem a dinâmica do sistema, os operadores de momento e posição.

Porém, supondo que somente uma variação na função de transformação é gerada por uma variação no tempo, ou seja  $\hat{G} = -\hat{H}\delta t$ , podemos ver que a variação de um operador  $\hat{A}$ , é dada por

$$\delta\hat{A} = \left( \frac{d\hat{A}}{dt} - \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} \right) \delta t = -i [\hat{A}, \hat{G}] = i [\hat{A}, \hat{H}] \delta t,$$

assim, obtemos

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = i [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial\hat{A}}{\partial t},$$

esta é a equação de Heisenberg para a evolução temporal de um observável

## 2.2.2 Equação de Schrödinger

Retomando o caso geral, as variações da função de transformação são dadas por

$$\delta \langle a_{t2} | b_{t1} \rangle = i \langle a_{t2} | \left( \hat{p}\delta\hat{q} - \hat{H}\delta t \right) \Big|_{t1}^{t2} | b_{t1} \rangle,$$

observarmos que se agora deixarmos os operadores fixos, e nos concentrarmos nas variações dadas apenas no estado final, encontramos

$$\delta |b_{t1}\rangle = 0 \rightarrow \delta q(t_1) = \hat{0} \text{ e } \delta t_1 = 0, \quad (2.18)$$

e

$$\delta \langle a_{t2} | \neq 0 \rightarrow \delta q(t_2) \neq \hat{0} \text{ e } \delta t_2 = \delta t_2 \neq 0,$$

e a descrição  $a$  como a de coordenadas, e o estado  $|b_{t1}\rangle$ , como um estado arbitrário  $|\psi\rangle$ , temos que

$$\begin{aligned} \delta \langle q_2 | \psi \rangle &= i \langle q_2 | \left( \hat{p}\delta\hat{q} - \hat{H}\delta t \right) \Big|_{t1}^{t2} | \psi \rangle \\ &= i \langle q_2 | \hat{p}\delta\hat{q} - \hat{H}\delta t \Big|_{t2} | \psi \rangle - i \langle q_2 | \left( \hat{p}\delta\hat{q} - \hat{H}\delta t \right) \Big|_{t1} | \psi \rangle, \end{aligned}$$

e considerando as condições iniciais (2.18) obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \delta \langle q_2 | \psi \rangle &= i \langle q_2 | \hat{p}_2 \cdot \delta\hat{q}_2 - \hat{H}\delta t_2 | \psi \rangle \\ &= i \langle q_2 | \hat{p}_2 \cdot \delta\hat{q}_2 | \psi \rangle - i \langle q_2 | \hat{H} | \psi \rangle \delta t_2, \end{aligned}$$

onde pela álgebra deduzida na seção anterior,  $[\hat{p}, \delta\hat{q}] = 0$ , a expressão precedente toma a seguinte forma

$$\delta \langle q_2 | \psi \rangle = \delta q_2 \cdot i \langle q_2 | \hat{p}_2 | \psi \rangle - i \langle q_2 | \hat{H} | \psi \rangle \delta t_2, \quad (2.19)$$

Entretanto, a variação deste termo tendo em conta que a suas variações também são induzidas pelas variáveis dinâmicas, temos que

$$\delta \langle q_2 | \psi \rangle = \delta q_2 \cdot \frac{\partial \langle q_2 | \psi \rangle}{\partial q_2} + \delta t_2 \frac{\partial \langle q_2 | \psi \rangle}{\partial t_2}, \quad (2.20)$$

o que por uma simples comparação dos dois últimos resultados (2.19) e (2.20) obtemos as seguintes equações

$$\frac{\partial \langle q_2 | \psi \rangle}{\partial q_2} = i \langle q_2 | \hat{p}_2 | \psi \rangle,$$

e

$$-i \langle q_2 | \hat{H} | \psi \rangle = \frac{\partial \langle q_2 | \psi \rangle}{\partial t_2}, \quad (2.21)$$

que são as equações que estabelecem a evolução temporal dos estados do sistema, além de obter também as representações dos operadores de momento no espaço de coordenadas

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \rightarrow i \hat{p}_2, \quad (2.22)$$

e a segunda equação nos dá uma representação similar, mas agora com o Hamiltoniano. A equação, eq.(2.21), tem uma grande importância, já que ela é independente da representação do sistema, dependendo somente do parâmetro de evolução temporal, é a equação de **Schrödinger**.

## 2.3 Integração do Princípio Variacional de Schwinger

Tal como vimos ao longo deste capítulo, o operador que gera as transformações, no Princípio Variacional de Schwinger, têm uma forma especial. Nesta seção mostraremos como este operador pode ser integrado.

Se considerarmos o elemento matricial de uma função de operadores da forma

$$\langle a' | F(A, B) | b'' \rangle$$

onde  $A$  e  $B$ , representam cada um conjunto de observáveis compatíveis, podemos estabelecer que se estes operadores estiverem ordenados de tal forma que em uma possível expansão da função  $F(A, B)$  os produtos que contêm os termos cruzados forem ordenados obteríamos uma nova função  $\mathcal{F}(A, B)$ , que nos permitíssemos avaliar o elemento matricial, teríamos que

$$\begin{aligned} \langle a' | F(A, B) | b'' \rangle &= \langle a' | \mathcal{F}(A, B) | b'' \rangle \\ &= \mathcal{F}(a', b'') \langle a' | | b'' \rangle. \end{aligned}$$

A função dos operadores  $\mathcal{F}(A, B)$  recebe o nome de operador bem ordenado [3]. Assim, se usarmos essa forma para avaliar o operador ação, temos que

$$\delta \langle a(t_1) | b(t_0) \rangle = i \langle a(t_1) | \delta \hat{S}_{t_0, t_1} | b(t_0) \rangle$$

mas se o operador ação estiver bem ordenado, temos que

$$\delta \langle a(t_1) | b(t_0) \rangle = i \delta \mathcal{W}_{t_0, t_1} \langle a(t_1) | | b(t_0) \rangle$$

fazendo com que a função de transformação pudesse ser mostrada como

$$\langle a(t_1) | b(t_0) \rangle = e^{i \mathcal{W}_{t_0, t_1}}. \quad (2.23)$$

Nas definições anteriores denominou-se o operador bem ordenado de  $\hat{S}_{t_0, t_1}$  como  $\hat{\mathcal{W}}_{t_0, t_1}$ ; então se conseguíssemos pôr o operador de ação quântico na sua forma bem ordenada, obteremos que podemos expressar a amplitude como (2.23).

### 2.3.1 Equação de Hamilton

Com os resultados das seções anteriores, podemos obter uma equação análoga à equação de Hamilton-Jacobi, para os sistemas sob estudo, levando em conta que pelo Princípio Variacional obtemos a equação de Schrödinger, eq.(2.21), tomando (2.23), vemos que

$$-i \langle q | \hat{H} | \psi \rangle = \frac{\partial \langle q | \psi \rangle}{\partial t} = \frac{\partial e^{i \mathcal{W}_{t_0, t}}}{\partial t} = i \frac{\partial \mathcal{W}_{t_0, t}}{\partial t} e^{i \mathcal{W}_{t_0, t}}, \quad (2.24)$$

de onde

$$\langle q | -\hat{H} | \psi \rangle = \langle q | \frac{\partial \hat{\mathcal{W}}_{t_0, t}}{\partial t} | \psi \rangle,$$

similarmente com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle q | \psi \rangle}{\partial q} &= i \langle q | \hat{p} | \psi \rangle = \frac{\partial e^{i \mathcal{W}_{t_0, t}}}{\partial q} = i \frac{\partial \mathcal{W}_{t_0, t}}{\partial q} \langle q | \psi \rangle \\ \langle q | \hat{p} | \psi \rangle &= \langle q | \frac{\partial \hat{\mathcal{W}}_{t_0, t_1}}{\partial \hat{q}} | \psi \rangle, \end{aligned}$$

assim, pela comparação com cada uma das equações anteriores, temos que para qualquer tempo  $t > t_0$

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{W}}_{t_0, t}}{\partial t} + \hat{H} = 0$$

e

$$\hat{p} = \frac{\partial \hat{\mathcal{W}}_{t_0, t}}{\partial \hat{q}},$$

estas equações são fundamentais neste formalismo. Alguns exemplos da aplicação do Princípio Variacional estão mais adiante.

## 2.3.2 Exemplos de Aplicação do Princípio Variacional

Aqui faremos uso do Princípio Variacional para encontrar as funções de transformação para sistemas quânticos simples, tendo como roteiro o uso das soluções clássicas na integral da ação clássica e a correspondente derivação da constante de integração pela introdução de uma sucessão de funções adequadas que convergem à delta de Dirac.

### 2.3.2.1 Ação para a partícula livre

A equação de movimento da partícula livre é:

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} = 0,$$

podemos ver que com as condições  $q(t_0) = q_0$ ,  $q(t_1) = q_1$ , obtemos a seguinte solução

$$q(t) = \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} (t - t_0) + q_0,$$

a ação para este sistema entre os tempos  $t_0$  e  $t_1$ , é dada por

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L = \frac{1}{2} m \left( \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} \right)^2 \int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{1}{2} m \frac{(q_1 - q_0)^2}{t_1 - t_0},$$

usando as equações operacionais de Hamilton-Jacobi

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial \hat{q}}, \\ \hat{H} + \frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial t} &= \hat{0}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

e se assumirmos a forma do operador principal de Hamilton como

$$\hat{\mathcal{W}} = \hat{S} + \hat{\phi}(t), \tag{2.26}$$

obtemos

$$\hat{\mathcal{W}} = \frac{1}{2} m \frac{\hat{q}^2 - \hat{q}_0^2 - 2\hat{q}\hat{q}_0}{t - t_0} + \hat{\phi},$$

desta forma usando a relação canônica entre o momento  $\hat{p}$  dado em (2.25), e a relação de comutação canônica entre o momento e a posição, podemos derivar a relação de comutação dos operadores para tempos diferentes,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \left[ \hat{q}, m \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{t - t_0} \right] = i\hbar,$$

o que conduz

$$\hat{q}_0 \hat{q} = \frac{i\hbar}{m} (t - t_0) + \hat{q} \hat{q}_0,$$

então, o operador Hamiltoniano é expresso como

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{m}{2} \left( \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{t - t_0} \right)^2 \\ &= \frac{m}{2(t - t_0)^2} \{ \hat{q}^2 + \hat{q}_0^2 - \hat{q}_0 \hat{q} - \hat{q} \hat{q}_0 \} \\ &= \frac{m}{2(t - t_0)^2} \left\{ \hat{q}^2 + \hat{q}_0^2 - \frac{i\hbar}{m} (t - t_0) - 2\hat{q}\hat{q}_0 \right\},\end{aligned}$$

comparando a expressão anterior com a eq.(2.26) e as equações (2.25), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = \hat{H} \\ &= -\frac{m}{2(t - t_0)^2} \{ \hat{q}^2 + \hat{q}_0^2 - 2\hat{q}\hat{q}_0 \} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t},\end{aligned}$$

onde obtemos que

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = \frac{d\hat{\phi}}{dt} = \frac{i\hbar}{2(t - t_0)},$$

daí que  $\hat{\phi}$  é dado pela expressão

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_0 + \frac{i\hbar}{2} \ln(t - t_0),$$

fazendo que  $\hat{\phi}_0 = \phi_0 \hat{1}$  e, dando  $\phi_0 = \frac{i\hbar}{2} \ln(A)$ , obtemos a seguinte forma para a função  $\hat{\phi}(t)$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(t) &= \frac{i\hbar}{2} \ln(A) + \frac{i\hbar}{2} \ln(t - t_0) \\ &= \frac{i\hbar}{2} \ln(A(t - t_0)),\end{aligned}$$

assim  $\hat{\mathcal{W}}$  tem a forma

$$\hat{\mathcal{W}} = \frac{1}{2} m \frac{\hat{q}^2 + \hat{q}_0^2 - 2\hat{q}\hat{q}_0}{t - t_0} + \frac{i\hbar}{2} \ln(A(t - t_0)),$$

daqui a evolução da amplitude de transição é dada por

$$\begin{aligned}\langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \exp[\hat{\mathcal{W}}] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \ln(A(t - t_0)) \right] \exp \left[ -\frac{m}{2i\hbar} \frac{(q - q_0)^2}{t - t_0} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{A(t - t_0)}} \exp \left[ -\frac{m}{2i\hbar} \frac{(q - q_0)^2}{t - t_0} \right],\end{aligned}$$

Para identificar a constante  $A$ , podemos usar o fato

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle = \delta(q_1 - q_0),$$

assim, se usamos a seguinte sucessão de funções para a delta de Dirac

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 y^2) = \delta(y),$$

podemos ver que se tomarmos,

$$y \rightarrow q_1 - q_0,$$

e

$$n^2 = \frac{m}{2i\hbar(t_0 - t_1)},$$

a função de transformação resulta ser,

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i(t_0 - t_1)}} \exp\left[-\frac{m}{2i\hbar} \frac{(q - q_0)^2}{t - t_0}\right].$$

### 2.3.2.2 Função de transformação para uma partícula submetida a uma força constante

A equação de movimento é dada pela seguinte expressão

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{F}{m},$$

e a solução, para as condições de fronteira  $q(t_0) = q_0$  e  $q(t_1) = q$  é,

$$q(t) = \frac{F}{2m} (t_1 - t_0)^2 + \left(\frac{q_0 - q}{t_0 - t_1}\right) (t - t_0) - \frac{F}{2m} (t_1 - t_0) (t - t_0) + q_0,$$

a ação para este sistema, entre os tempos  $t_0$  e  $t_1$ , que resulta após da integração é

$$S = \frac{m}{2} \frac{q^2 - q_0^2 - 2qq_0}{t_0 - t_1} + \frac{F}{2} (q + q_0) (t - t_0) - \frac{F^2}{24m} (t_1 - t_0)^3.$$

Como no exemplo anterior, podemos derivar a forma da constante de integração na função de transformação, supondo que o operador principal de Hamilton tem a seguinte forma

$$\hat{\mathcal{W}} = \hat{S} + \hat{\phi}(t),$$

assim, teremos que o momento é dado por

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial \hat{q}} = \hat{p} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{q}} = \frac{F}{2} (t - t_0) + \frac{m(\hat{q} - \hat{q}_0)}{t_0 - t_1}, \quad (2.27)$$

com os resultados acima o operador Hamiltoniano correspondente,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - F\hat{q}$$

resulta ser

$$\hat{H} = \frac{F^2}{8m} (t_1 - t_0)^2 - \frac{F}{2} (\hat{q} + \hat{q}_0) + \frac{m}{2} \frac{(\hat{q}^2 + \hat{q}_0^2 - \{\hat{q}\hat{q}_0 + \hat{q}_0\hat{q}\})}{t_0 - t_1}.$$

Para obter um Hamiltoniano e Ação bem ordenados, precisamos considerar o ordenamento temporal de  $\hat{q}_0$  e  $\hat{q}_1$ , o que implica conhecer as suas relações de comutação no tempo. Para isto, podemos fazer uso da expressão para o momento em função dos operadores de posição  $\hat{q}_0$  e  $\hat{q}_1$ , assim vemos que

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{p}] &= \left[ \hat{q}, \frac{F}{2} (t - t_0) + \frac{m(\hat{q} - \hat{q}_0)}{t_0 - t_1} \right] \\ &= \frac{m}{t_0 - t_1} [\hat{q}, \hat{q}_0] = i\hbar, \end{aligned}$$

e temos que,

$$\hat{q}\hat{q}_0 + i\hbar \frac{t_0 - t_1}{m} = \hat{q}_0\hat{q},$$

desta forma

$$\hat{H} = \frac{F^2}{8m} (t_1 - t_0)^2 - \frac{F}{2} (\hat{q} + \hat{q}_0) + \frac{m}{2} \frac{(\hat{q}^2 + \hat{q}_0^2 - 2\hat{q}\hat{q}_0)}{(t_0 - t_1)^2} - \frac{i\hbar}{2(t_0 - t_1)}.$$

Agora, das equações de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\phi}(t)}{\partial t} = -\hat{H},$$

podemos notar,

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = -\frac{m}{2} \frac{\hat{q}^2 - \hat{q}_0^2 - 2\hat{q}\hat{q}_0}{(t_0 - t_1)^2} + \frac{F}{2} (\hat{q} + \hat{q}_0) - \frac{F^2}{8m} (t_1 - t_0)^2,$$

portanto, o termo que originará a constante de integração, será dada pela expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\phi}(t)}{\partial t} &= -\hat{H} - \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} \\ &= \frac{i\hbar}{2(t_0 - t_1)}, \end{aligned}$$

desta forma temos que

$$\hat{\phi}(t) = \frac{i\hbar}{2} \ln A(t_0 - t_1),$$

Assim, a função de transformação será dada por

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2} \frac{q^2 - q_0^2 - 2qq_0}{t_0 - t_1} + \frac{F}{2} (q + q_0) (t - t_0) - \frac{F^2}{24m} (t_1 - t_0)^3 + \frac{i\hbar}{2} \ln A(t_0 - t_1) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A(t_0 - t_1)}} \exp \left\{ -\frac{m(q - q_0)^2}{2i\hbar(t_0 - t_1)} \right\} \exp \left\{ \frac{iF}{2\hbar} (q + q_0) (t - t_0) - \frac{iF^2}{24\hbar m} (t_1 - t_0)^3 \right\}, \end{aligned}$$

Para determinarmos a constante  $A$ , segue-se o mesmo cálculo que da partícula livre, resultando com  $A = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i(t_0 - t_1)}}$ , portanto, a função de transformação é dada por

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2i\hbar\pi(t_0 - t_1)}} \exp \left\{ -\frac{m(q - q_0)^2}{2i\hbar(t_0 - t_1)} + \frac{iF}{2\hbar}(q + q_0)(t - t_0) - \frac{iF^2}{24\hbar m}(t_1 - t_0)^3 \right\}.$$

### 2.3.2.3 Função de transformação para uma partícula submetida a uma força dependente do tempo

Segundo a seção anterior, a solução da equação diferencial para o sistema

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}, \quad (2.28)$$

é dada por

$$q(t) = \left( \frac{q - q_0}{t_0 - t_1} \right) (t - t_0) - \frac{1}{m} \left( \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right) \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} F(x) dx d\tau + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} F(x) dx d\tau + q_0. \quad (2.29)$$

A ação para este sistema vêm dada pela seguinte expressão,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 + F(t)q \right) dt,$$

podemos notar que tomando a eq.(2.28) ao considerarmos,

$$\frac{d}{dt} \left( q \frac{dq}{dt} \right) - \frac{F(t)}{m} q,$$

podemos escrever novamente a ação da forma,

$$S = \frac{m}{2} q \frac{dq}{dt} \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} F(t)q(t) dt,$$

substituindo a expressão (3.76), o primeiro termo do lado direito da equação anterior é dado por

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} q(t) \frac{dq(t)}{dt} \Big|_{t_0}^{t_1} &= \frac{m}{2} \left\{ q(t_1) \frac{dq(t_1)}{dt} - q(t_0) \frac{dq(t_0)}{dt} \right\} \\ &= \frac{m}{2} \frac{(q - q_0)^2}{t_0 - t_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{q - q_0}{t_1 - t_0} \right) \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} F(x) dx d\tau + \frac{q}{2} \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

e o segundo termo por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} F(t)q(t) dt &= \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{q - q_0}{t_0 - t_1} \right) - \frac{1}{m} \left( \frac{1}{t_1 - t_0} \right) \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} F(x) dx d\tau \right\} \int_{t_0}^t F(t) (t - t_0) dt \\ &+ \frac{1}{2m} \int_{t_0}^{t_1} F(t) \left\{ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} F(x) dx d\tau \right\} dt + \frac{q_0}{2} \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt, \end{aligned}$$

para obter uma forma útil desta expressão, temos que integrar em partes os seguintes termos

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) \left\{ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} F(x) dx d\tau \right\} dt = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} F(x) dx d\tau \right\} - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \right\}^2 dt$$

e

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) (t - t_0) dt = (t_1 - t_0) \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} F(\tau) d\tau dt,$$

assim, substituindo na ação, obtemos uma expressão finalmente da forma

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2(t_0 - t_1)} \left( (q - q_0)^2 - 2(q - q_0) \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau + \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \right\}^2 \right) \\ &\quad + q \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau - \frac{1}{2m} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \right\}^2 dt \\ &= \frac{m}{2(t_0 - t_1)} \left( (q^2 + q_0^2 - 2qq_0) - 2(q - q_0) \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau + \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \right\}^2 \right) \\ &\quad + q \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau - \frac{1}{2m} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \right\}^2 dt. \end{aligned}$$

Tomando a função principal de Hamilton como

$$\hat{\mathcal{W}} = \hat{S} + \hat{\phi}(t),$$

o momento é dado por

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{q}} \\ &= \frac{m}{(t_0 - t_1)} \left( \hat{q} - \hat{q}_0 - \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \right) + \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

então a energia cinética do sistema será dada por,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}^2}{2m} &= \frac{1}{2m} \left( \frac{m(\hat{q} - \hat{q}_0)}{(t_0 - t_1)} - \frac{m}{(t_0 - t_1)} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau + \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \right)^2 \\ &= \frac{m}{2} \left( \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{(t_0 - t_1)} \right)^2 - m \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{(t_0 - t_1)^2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau + \left( \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{(t_0 - t_1)} \right) \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{m}{2(t_0 - t_1)^2} \left( \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \right)^2 - \frac{1}{(t_0 - t_1)} \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2m} \left( \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \right)^2, \end{aligned}$$

e o Hamiltoniano terá a forma de

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} - F(t)\hat{q} \\
&= \frac{m}{2} \left( \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{t_0 - t_1} \right)^2 - m \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{(t_0 - t_1)^2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau + \left( \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{t_0 - t_1} \right) \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \\
&\quad + \frac{m}{2(t_0 - t_1)^2} \left( \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \right)^2 - \frac{1}{(t_0 - t_1)} \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2m} \left( \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \right)^2 - F(t)\hat{q}.
\end{aligned}$$

Tomando a forma do momento calculamos o comutador para obter um Hamiltoniano e Ação bem ordenados, assim podemos notar

$$\begin{aligned}
[\hat{q}, \hat{p}] &= \left[ \hat{q}, m \left( \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{t_0 - t_1} \right) - \frac{m}{(t_0 - t_1)} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau + \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \right] \\
&= \frac{m}{t_0 - t_1} [\hat{q}, \hat{q}_0] = i\hbar,
\end{aligned}$$

como na seção anterior em que as forças não afetam as relações de comutação, se estas não dependerem das variáveis dinâmicas do sistema, assim temos novamente

$$\hat{q}\hat{q}_0 + i\hbar \frac{t_0 - t_1}{m} = \hat{q}_0\hat{q},$$

desta maneira

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} - F(t)\hat{q} \\
&= \frac{m}{2} \frac{\hat{q}^2 + \hat{q}_0^2 - 2\hat{q}\hat{q}_0}{(t_0 - t_1)^2} - m \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{(t_0 - t_1)^2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau + \left( \frac{\hat{q} - \hat{q}_0}{t_0 - t_1} \right) \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \\
&\quad + \frac{m}{2(t_0 - t_1)^2} \left( \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \right)^2 - \frac{1}{(t_0 - t_1)} \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2m} \left( \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \right)^2 - F(t)\hat{q}^2 - \frac{i\hbar(t_0 - t_1)}{2},
\end{aligned}$$

se tomarmos as equações de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\phi}(t)}{\partial t} = -\hat{H},$$

podemos observar que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{S}}{\partial t_1} &= -\frac{m}{2(t_0 - t_1)^2} \left( (\hat{q}^2 + \hat{q}_0^2 - 2\hat{q}\hat{q}_0) - 2(\hat{q} - \hat{q}_0) \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau + \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \right\}^2 \right) \\
&\quad + \frac{m}{2(t_0 - t_1)} \left( -2(\hat{q} - \hat{q}_0) \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(\tau)}{m} d\tau + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(\tau)}{m} d\tau \right) \\
&\quad + \hat{q}F(t_1) - \frac{1}{2m} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \right\}^2 + \frac{\partial \hat{\phi}(t)}{\partial t_1},
\end{aligned}$$

e, igualmente à seção anterior, o termo que originará a constante de integração, será dada pela expressão

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\phi}(t_1)}{\partial t_1} &= -\hat{H} - \frac{\partial \hat{S}}{\partial t_1} \\ &= \frac{i\hbar}{2(t_0 - t_1)},\end{aligned}$$

desta forma temos que

$$\hat{\phi}(t_1) = \frac{i\hbar}{2} \ln A(t_0 - t_1),$$

assim, a função de transformação será dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}\langle q, t_1 | q_0, t_0 \rangle &= \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2(t_0 - t_1)} \left( (q^2 + q_0^2 - 2qq_0) - 2(q - q_0) \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \right) \right\} \\ &\quad \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2(t_0 - t_1)} \left( \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \frac{F(x)}{m} dx d\tau \right\}^2 + q \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \right) \right\} \\ &\quad \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ -\frac{1}{2m} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \right\}^2 dt + \frac{i\hbar}{2} \ln A(t_0 - t_1) \right\}.\end{aligned}$$

Novamente, para determinarmos a constante  $A$ , usamos a a mesma metodologia do exemplo da partícula livre, resultando em  $A = \frac{m}{2i\hbar\pi}$ , portanto a função de transformação é

$$\langle q, t_1 | q_0, t_0 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2i\hbar\pi(t_0 - t_1)}} \exp \left\{ -\frac{m(q - q_0)^2}{2i\hbar(t_0 - t_1)} + \frac{iF}{2\hbar} (q + q_0)(t - t_0) - \frac{iF^2}{24\hbar m} (t_1 - t_0)^3 \right\}.$$

### 2.3.2.4 Função de transformação para o Oscilador Harmônico com frequência constante

A equação de movimento para o sistema é dada pela seguinte expressão

$$m \frac{d^2 q(t)}{dt^2} - m\omega^2 q(t) = 0, \quad (2.30)$$

onde a solução genérica da equação (2.30) é

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t), \quad (2.31)$$

então com as condições iniciais dadas por  $q(t_0) = q_0$  e  $q(t_1) = q_1$ , podemos encontrar as constantes  $A$  e  $B$  da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega t_0) & \text{sen}(\omega t_0) \\ \cos(\omega t_1) & \text{sen}(\omega t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

logo

$$\frac{1}{\text{sen}(\omega(t_1 - t_0))} \begin{pmatrix} \text{sen}(\omega t_1) & -\text{sen}(\omega t_0) \\ -\cos(\omega t_1) & \cos(\omega t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

onde substituindo a expressão anterior em 2.31, obtemos

$$q(t) = \frac{1}{\text{sen}(\omega(t_1 - t_0))} \{q_1 \text{sen}(\omega(t - t_0)) + q_0 \text{sen}(\omega(t_1 - t))\}$$

A ação  $S$  para o sistema é dada por

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} m \left( \frac{dq(t)}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2(t) \right\} dt,$$

e usando a eq.(2.30) temos que

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left( q(t) \frac{dq(t)}{dt} \right) dt$$

e integrando, obtemos finalmente

$$S = \frac{1}{2} m q(t) \frac{dq(t)}{dt} \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{m\omega}{2\text{sen}(\omega(t_1 - t_0))} \{ (q_0^2 + q_1^2) \cos(\omega(t_1 - t_0)) - 2q_0 q_1 \}.$$

Deste resultado podemos observar que a ação quântica será dada pela expressão

$$\hat{S} = \frac{m\omega}{2\text{sen}(\omega(t - t_0))} \{ (\hat{q}_0^2 + \hat{q}^2) \cos(\omega(t - t_0)) - 2\hat{q}_0 \hat{q} \},$$

e o momento

$$\hat{p} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{q}} = \frac{m\omega}{\text{sen}(\omega(t - t_0))} \{ \hat{q} \cos(\omega(t - t_0)) - \hat{q}_0 \}.$$

Como nos exemplos anteriores, para conhecer as relações de comutação entre  $\hat{q}_0$ ,  $\hat{q}$  podemos usar a comutação entre as variáveis canônicas, desta forma

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \left[ \hat{q}, \frac{m\omega}{\text{sen}(\omega(t - t_0))} \{ \hat{q} \cos(\omega(t - t_0)) - \hat{q}_0 \} \right],$$

assim obtemos:

$$\hat{q}_0 \hat{q} = \hat{q} \hat{q}_0 + \frac{i\hbar \text{sen}(\omega(t - t_0))}{m\omega}. \quad (2.32)$$

Agora, para derivar a forma do operador Hamiltoniano, o momento canonicamente conjugado ao quadrado será dado pela expressão

$$\hat{p}^2 = \left( \frac{m\omega}{\text{sen}(\omega(t - t_0))} \right)^2 \{ \hat{q}^2 \cos^2(\omega(t - t_0)) - \hat{q} \hat{q}_0 \cos(\omega(t - t_0)) - \hat{q}_0 \hat{q} \cos(\omega(t - t_0)) + \hat{q}_0^2 \}$$

substituindo na expressão anterior (2.32), temos

$$\hat{p}^2 = \left( \frac{m\omega}{\text{sen}(\omega(t - t_0))} \right)^2 \left\{ \hat{q}^2 \cos^2(\omega(t - t_0)) - 2\hat{q} \hat{q}_0 \cos(\omega(t - t_0)) - \frac{i\hbar \text{sen}(2\omega(t - t_0))}{2m\omega} + \hat{q}_0^2 \right\}$$

e a partir disto, o operador Hamiltoniano será

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \\ &= \frac{m\omega^2}{2\text{sen}^2(\omega(t_1 - t_0))} \left\{ \hat{q}^2 \cos^2(\omega(t - t_0)) - 2\hat{q}\hat{q}_0 \cos(\omega(t - t_0)) - \frac{i\hbar\text{sen}(2\omega(t_1 - t_0))}{2m\omega} + \hat{q}_0^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2.\end{aligned}$$

Usando de novo a expressão

$$\frac{\partial\hat{\mathcal{W}}}{\partial t} = \frac{\partial\hat{S}}{\partial t} + \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t} = \hat{H}, \quad (2.33)$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{S}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m\omega}{2\text{sen}(\omega(t - t_0))} \{ (\hat{q}_0^2 + \hat{q}^2) \cos(\omega(t - t_0)) - 2\hat{q}_0\hat{q} \} \right) \\ &= -\frac{m\omega^2}{2} \frac{1}{\text{sen}^2(\omega(t - t_0))} \{ (\hat{q}_0^2 + \hat{q}^2) \cos^2(\omega(t - t_0)) - 2\hat{q}_0\hat{q} \cos(\omega(t - t_0)) \} \\ &\quad - \frac{m\omega^2}{2} (\hat{q}_0^2 + \hat{q}^2),\end{aligned}$$

comparando com a equação para  $\hat{\mathcal{W}}$  obtemos o termo

$$\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t} = i \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\cos(\omega(t - t_0))}{\text{sen}(\omega(t - t_0))} = i \frac{\hbar\omega}{2} \cot(\omega(t - t_0))$$

onde integrando, obtemos finalmente

$$\hat{\phi} = i \frac{\hbar}{2} \ln(A \text{sen}(\omega(t - t_0)))$$

desta forma a amplitude de transição possui a seguinte forma

$$\begin{aligned}\langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \exp[\mathcal{W}] \\ &= \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\phi\right] \exp\left[-\frac{m\omega}{2i\hbar\text{sen}(\omega(t - t_0))} \{ (q_0^2 + q^2) \cos(\omega(t - t_0)) - 2q_0q \} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{A \text{sen}(\omega(t - t_0))}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2i\hbar\text{sen}(\omega(t - t_0))} \{ (q_0^2 + q^2) \cos(\omega(t - t_0)) - 2q_0q \} \right],\end{aligned}$$

segundo novamente a mesma metodologia dos exemplos anteriores, exemplo partícula livre, obtemos que a constante  $A = \frac{2\pi i\hbar}{m\omega}$ , assim, a expressão para a função de transformação para o oscilador harmônico com frequência constante será dada por

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\text{sen}(\omega(t - t_0))}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2i\hbar\text{sen}(\omega(t - t_0))} \{ (q_0^2 + q^2) \cos(\omega(t - t_0)) - 2q_0q \} \right].$$

### 2.3.2.5 Função de transformação para o oscilador harmônico com frequência dependente do tempo

A diferença dos exemplos anteriores em que conhecíamos as soluções clássicas das equações de movimento de uma forma explícita, nesta seção, temos que dada a infinidade de formas funcionais que podem ter as frequências para este tipo de oscilador, não podemos apresentar uma solução explícita. Embora deste inconveniente, podemos supor o conhecimento de uma solução e derivaremos explicitamente a função de transformação para esta, e depois acharemos explicitamente algumas funções de transformação para algumas formas específicas da solução. A equação de movimento do sistema é dada pela seguinte expressão

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega^2(t)q(t) = 0, \quad (2.34)$$

propomos uma solução geral da forma

$$q(t) = af(t) + bg(t),$$

onde as funções  $f(t)$  e  $g(t)$  são soluções da equação diferencial eq.(2.34), e serão determinadas uma vez dada a frequência e as condições de contorno associadas ao problema. Assim, como uma generalidade, tomando um par de condições iniciais dadas por:

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

obtemos a solução geral ¶

$$q(t) = \frac{1}{f_0g_1 - f_1g_0} (q_0 [g_1f(t) - f_1g(t)] + q_1 [f_0g(t) - g_0f(t)]),$$

desta forma a ação para o sistema será dada por

$$S = \frac{m}{2}q_1^2 \frac{1}{f_0g_1 - f_1g_0} [f_0\dot{g}_1 - g_0\dot{f}_1] + \frac{m}{2}q_0^2 \frac{1}{f_0g_1 - f_1g_0} [f_1\dot{g}_0 - g_1\dot{f}_0] \\ - \frac{m}{2}q_1q_0 \frac{1}{f_0g_1 - f_1g_0} [f_1\dot{g}_1 - g_1\dot{f}_1] - \frac{m}{2}q_0q_1 \frac{1}{f_0g_1 - f_1g_0} [f_0\dot{g}_0 - g_0\dot{f}_0].$$

Um fato importante a ser considerado, é que dado que consideramos  $f(t)$  e  $g(t)$  como soluções da equação diferencial (2.34) podemos obter de forma explícita que o Wron-

---

¶Estes resultados são ao nível geral obtidos em relação à existência de valores bem definidos em tempos  $t_0$  e  $t_1$ , assim que

$$\lim_{t \rightarrow t_0/t_1} f(t) = f_{0/1} \quad (2.35)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0/t_1} g(t) = g_{0/1}. \quad (2.36)$$

kiano em qualquer tempo é uma constante, assim temos que

$$f(t)\dot{g}(t) - g(t)\dot{f}(t) = C,$$

onde  $C$  é uma quantidade que chamaremos como conservada, o mesmo para o termo

$$f_0\dot{g}_0 - g_0\dot{f}_0 = C.$$

A versão quântica da ação que nos será útil é dada pela seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \hat{S} = & \frac{m}{2}\hat{q}^2 \frac{1}{f_0g(t) - f(t)g_0} \left[ f_0\dot{g}(t) - g_0\dot{f}(t) \right] + \frac{m}{2}\hat{q}_0^2 \frac{1}{f_0g(t) - f(t)g_0} \left[ f(t)\dot{g}_0 - g(t)\dot{f}_0 \right] \\ & - m\hat{q}\hat{q}_0 \frac{C}{f_0g(t) - f(t)g_0}. \end{aligned}$$

Para obter a função de transformação e a sua correspondente constante de integração, podemos assumir, como nos exemplos anteriores, que o operador principal de Hamilton tem a forma

$$\hat{\mathcal{W}} = \hat{S} + \hat{\phi},$$

o momento vai ser dado pela expressão

$$\hat{p} = \frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial \hat{q}},$$

que em termos da ação será dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{q}} = \hat{p} &= m\hat{q} \frac{1}{f_0g(t) - f(t)g_0} \left[ f_0\dot{g}(t) - g_0\dot{f}(t) \right] - m\hat{q}_0 \frac{C}{f_0g(t) - f(t)g_0} \\ &= \frac{m}{f_0g(t) - f(t)g_0} \left( \hat{q} \left[ f_0\dot{g}(t) - g_0\dot{f}(t) \right] - \hat{q}_0 C \right), \end{aligned}$$

e o Hamiltoniano por

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\hat{q}^2 \\ &= \frac{1}{2m} \frac{m^2}{\{f_0g(t) - f(t)g_0\}^2} \left( \hat{q}^2 \left[ f_0\dot{g}(t) - g_0\dot{f}(t) \right]^2 - (\hat{q}\hat{q}_0 + \hat{q}_0\hat{q})C \left[ f_0\dot{g}(t) - g_0\dot{f}(t) \right] + \hat{q}_0^2 C^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\hat{q}^2. \end{aligned}$$

Para obter um Hamiltoniano bem ordenado precisamos de encontrar as relações de comutação para diferentes tempos, isto se faz considerando o ordenamento temporal dos operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{q}_0$ . Para isto, podemos usar as relações de comutação canônicas

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{p}] &= \left[ \hat{q}, \frac{m}{f_0g(t) - f(t)g_0} \left( \hat{q} \left[ f_0\dot{g}(t) - g_0\dot{f}(t) \right] - \hat{q}_0 C \right) \right] \\ &= -\frac{\eta m}{f_0g(t) - f(t)g_0} [\hat{q}, \hat{q}_0] = i\hbar, \end{aligned}$$

que conduzem ao

$$\hat{q}_0 \hat{q} = i\hbar \frac{f_0 g(t) - f(t) g_0}{\eta m} + \hat{q} \hat{q}_0,$$

assim o operador Hamiltoniano na sua forma bem ordenada é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) \hat{q}^2 \\ &= \hat{q}^2 \frac{m}{2} \left\{ \frac{[f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)]^2}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} + \omega^2(t) \right\} + \hat{q}_0^2 \frac{m}{2} \frac{C^2}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} + \\ &\quad - \hat{q} \hat{q}_0 m \eta \frac{[f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)]}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} - \frac{i\hbar}{2} \frac{[f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)]}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

na expressão anterior já foram feitas fatorizações adequadas. Se revisarmos cuidadosamente as funções que acompanham aos operadores na expressão (2.38) podemos ver que podem ser expressas da seguinte forma: se considerarmos que  $f_0 g(t) - f(t) g_0$  é também uma outra solução para o oscilador harmônico com frequência dependente do tempo, assim

$$\begin{aligned} \frac{[f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)]^2}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} + \omega^2(t) &= \frac{[f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)]^2}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} - \frac{\left(f_0 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} - g_0 \frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right), \end{aligned}$$

e os outros termos como

$$\frac{[f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)]}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right),$$

e, por último, temos que considerar

$$\begin{aligned} C &= f(t) \dot{g}(t) - g(t) \dot{f}(t) = f_0 \dot{g}_0 - g_0 \dot{f}_0, \\ C^2 &= \left( f(t) \dot{g}(t) - g(t) \dot{f}(t) \right) \left( f_0 \dot{g}_0 - g_0 \dot{f}_0 \right), \end{aligned}$$

o que conduz ao

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} &= \frac{\left( f(t) \dot{g}(t) - g(t) \dot{f}(t) \right) \left( f_0 \dot{g}_0 - g_0 \dot{f}_0 \right)}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} \\ &= -\frac{\left( \dot{f}(t) \dot{g}_0 - \dot{g}(t) \dot{f}_0 \right) \left( f_0 g(t) - f(t) g_0 \right)}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} + \frac{\left( f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0 \right) \left( f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t) \right)}{\{f_0 g(t) - f(t) g_0\}^2} \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right), \end{aligned}$$

portanto o Hamiltoniano fica expresso da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{H} = & -\hat{q}^2 \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) - \hat{q}_0^2 \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) \\ & + \hat{q} \hat{q}_0 m \frac{d}{dt} \left( \frac{C}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) - \frac{i\hbar}{2} \frac{d}{dt} \ln(f_0 g(t) - f(t) g_0),\end{aligned}$$

e se compararmos com

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = & \hat{q}^2 \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) + \hat{q}_0^2 \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) \\ & - \hat{q} \hat{q}_0 m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{C}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t},\end{aligned}$$

por meio de

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = -\hat{H} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t},$$

encontramos

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2} \frac{d}{dt} \ln(f_0 g(t) - f(t) g_0),$$

e integrando temos que

$$\hat{\phi} = \frac{i\hbar}{2} A \ln(f_0 g(t) - f(t) g_0),$$

assim, a função de transformação para o sistema pode se dada por

$$\begin{aligned}\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = & \frac{1}{\sqrt{A(f_0 g(t) - f(t) g_0)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2(f_0 g(t) - f(t) g_0)} \hat{q}^2 [f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)] \right\} \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2(f_0 g(t) - f(t) g_0)} \left( \hat{q}_0^2 [f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0] - 2C \hat{q} \hat{q}_0 \right) \right\}.\end{aligned}$$

Por último somente fica calcular a constante  $A$ , que segundo os procedimentos dos exemplos anteriores pode ser obtida do cálculo do limite da função de transformação em tempos iguais,  $\lim_{t_0 \rightarrow t_1} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle$ . Para garantir a existência da constante  $A$  devemos exigir que o limite das funções  $f(t)$  e  $g(t)$  nos tempos  $t$  e  $t_0$  exista, o que foi suposto ao considerar

$$\lim_{t \rightarrow t_0/t} f(t) = f_{t_0/t} \quad (2.38)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0/t} g(t) = g_{t_0/t}. \quad (2.39)$$

assim, podemos ver que a forma funcional da expressão anterior nos sugere que ao igual que nos exemplos anteriores obtemos que  $A = \frac{2\pi i\hbar}{mC}$ , desta forma a expressão para a função de transformação para o oscilador harmônico com frequência

dependente de tempo generalizada é dada por

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \sqrt{\frac{mC}{2\pi i \hbar (f_0 g(t) - f(t) g_0)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2 (f_0 g(t) - f(t) g_0)} \hat{q}^2 [f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2 (f_0 g(t) - f(t) g_0)} \left( \hat{q}_0^2 [f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0] - 2\eta \hat{q} \hat{q}_0 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

### 2.3.2.6 Forma da ação para algumas funções de frequência particulares

Podemos recuperar a ação para o oscilador harmônico com frequência constante, se tomarmos as soluções

$$f(t) = \cos[\omega t] \quad \text{e}, \quad g(t) = \sin[\omega t],$$

originam as seguintes mudanças nas funções envolvidas em 2.40,

$$\begin{aligned} f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t) &= \omega \cos[\omega(t_0 - t)], \\ f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0 &= \omega \cos[\omega(t_0 - t)], \\ f_0 g(t) - f(t) g_0 &= \sin[\omega(t - t_0)], \\ C &= \omega, \end{aligned}$$

desta forma, temos que

$$\hat{S} = \frac{m\omega}{2 \sin[\omega(t - t_0)]} (\hat{q}^2 \cos[\omega(t_0 - t)] + \hat{q}_0^2 \cos[\omega(t_0 - t)] - 2\hat{q}\hat{q}_0),$$

e conseqüentemente obtemos

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{A \sin[\omega(t - t_0)]}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin[\omega(t - t_0)]} [(\hat{q}^2 + \hat{q}_0^2) \cos[\omega(t_0 - t)] - 2\hat{q}\hat{q}_0] \right\}.$$

Que é a ação e função de transformação associadas com o oscilador harmônico com frequência constante. Também, podemos recuperar o resultado tradicional [5], em que se usa um ansatz para a solução da forma

$$f(t) = \rho(t) \cos[\gamma(t)] \quad \text{e}, \quad g(t) = \rho(t) \sin[\gamma(t)]$$

onde segundo o mesmo raciocínio anterior se originam as seguintes mudanças,

$$\begin{aligned} f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t) &= \rho_0 \dot{\rho}(t) \sin[\gamma(t) - \gamma_0] + \rho_0 \rho(t) \dot{\gamma}(t) \cos[\gamma(t) - \gamma_0], \\ f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0 &= -\rho(t) \dot{\rho}_0 \sin[\gamma(t) - \gamma_0] + \rho_0 \dot{\gamma}_0 \rho(t) \cos[\gamma(t) - \gamma_0], \\ f_0 g(t) - f(t) g_0 &= \rho(t) \rho_0 \sin[\gamma(t) - \gamma_0], \\ C &= \rho^2(t) \dot{\gamma}(t), \end{aligned}$$

assim a ação é dada por

$$\hat{S} = \frac{m}{2 \sin[\gamma(t) - \gamma_0]} \left\{ \left( \hat{q}^2 \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \hat{q}_0^2 \frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} \right) \sin[\gamma(t) - \gamma_0] + (\hat{q}_0^2 \dot{\gamma}_0 + \hat{q}^2 \dot{\gamma}(t)) \cos[\gamma(t) - \gamma_0] - 2\hat{q}\hat{q}_0\rho^2(t)\dot{\gamma}(t) \right\},$$

e a função de transformação, será dada por

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \sqrt{\frac{m\rho(t)\dot{\gamma}(t)}{2\pi i \hbar \rho_0 \sin[\gamma(t) - \gamma_0]}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left( \hat{q}^2 \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \hat{q}_0^2 \frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} \right) \right\} \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2 \sin[\gamma(t) - \gamma_0]} \left\{ (\hat{q}_0^2 \dot{\gamma}_0 + \hat{q}^2 \dot{\gamma}(t)) \cos[\gamma(t) - \gamma_0] - 2\hat{q}\hat{q}_0\rho^2(t)\dot{\gamma}(t) \right\} \right\}.$$

### 2.3.3 O operador Hamiltoniano bem ordenado para a derivação das funções de transformação

Até agora, construímos as funções de transformação por intermédio do uso da ação clássica do sistema e, das soluções das equações de movimento derivadas da Lagrangiana. Desde o Princípio, a Mecânica Quântica foi criada sob o ponto de vista de que desde uma dinâmica Hamiltoniana também, é possível encontrar uma relação entre as funções de transformação e o Hamiltoniano do sistema. Nas seções anteriores foram derivadas as equações para a dinâmica dos estados do sistema

$$\frac{\partial \langle q | \psi \rangle}{\partial q} = \frac{i}{\hbar} \langle q | \hat{p} | \psi \rangle, \quad (2.41) \\ -\frac{i}{\hbar} \langle q | \hat{H} | \psi \rangle = \frac{\partial \langle q | \psi \rangle}{\partial t},$$

como dos operadores

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}. \quad (2.42)$$

Para esta nova implementação implica como um primeiro passo, de uma forma similar à construção das funções de transformação anterior, achar as equações de movimento e construir o operador Hamiltoniano de forma bem ordenada, com ajuda das relações de comutação em diferentes tempos.

Dadas as equações (2.41) e (2.42), podemos entender que as equações dinâmicas para os operadores de momento  $\hat{p}$ , e posição  $\hat{q}$ , são dadas por

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{q}, \hat{H}]. \quad (2.43)$$

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{p}, \hat{H}]. \quad (2.44)$$

tomando as equações anteriores, podemos obter

$$\frac{\partial \langle q | q_0 \rangle}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \langle q | \hat{H}(q, q_0; t) | q_0 \rangle,$$

que também pode ser obtida de maneira simples se fizermos  $|\psi\rangle = |q_0\rangle$ . Se pusermos o operador Hamiltoniano na sua forma bem ordenada,  $\hat{H}(q, q_0; t) \rightarrow \hat{\mathcal{H}}(q, q_0; t)$ , obtemos uma equação da forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle q | q_0 \rangle}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} \langle q | \hat{\mathcal{H}}(q, q_0; t) | q_0 \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(q, q_0; t) \langle q | q_0 \rangle, \end{aligned}$$

para a seguir integrar a equação resultando

$$\langle q | q_0 \rangle = \mathcal{A}(q, q_0) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}(q, q_0; \tau) d\tau \right],$$

onde a expressão  $\mathcal{A}(q, q_0)$  provém da integração da função de transformação no tempo, podendo sempre determina-la com a condição

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \langle q | q_0 \rangle = \delta(t - t_0),$$

a constante de normalização  $\mathcal{A}(q, q_0)$ , pode ser determinada com a ajuda de da primeira das duas equações em (2.41). Um exemplo da aplicação será visto a continuação.

### 2.3.3.1 Função de transformação para o oscilador harmônico com frequência dependente do tempo

Para este exemplo, partiremos de considerar que uma possível forma de uma solução para a equação diferencial para o oscilador harmônico com frequência dependente do tempo é dada por

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \omega^2(t) q(t) = 0. \quad (2.45)$$

Aqui, não seguiremos os resultados padrão, em que se usa um ansatz convencional<sup>||</sup>, que é usada no exemplo tratado em 2.3.2.6, e usaremos o seguinte,

$$q(t) = A(t) \exp \left[ \alpha \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \quad (2.46)$$

desta forma substituindo em (2.45), obtemos

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + 2\alpha\omega(t) \frac{dA(t)}{dt} + \alpha \frac{d\omega(t)}{dt} A(t) + (1 + \alpha^2)\omega(t)^2 A(t) = 0, \quad (2.47)$$

e se fizermos a escolha

$$1 + \alpha^2 = 0, \quad (2.48)$$

---

<sup>||</sup>Ver discussão ao final do capítulo

temos que  $\alpha = \pm i$ , obtendo o seguinte conjunto de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\ddot{A}(t) + 2i\omega(t)\dot{A}(t) + i\dot{\omega}(t)A(t) &= 0, \\ \ddot{B}(t) - 2i\omega(t)\dot{B}(t) - i\dot{\omega}(t)B(t) &= 0.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Se tomarmos o conjugado da segunda equação em (2.49) podemos notar que

$$A^*(t) = B(t).$$

As equações (2.49) têm a forma genérica de

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + P(t)\frac{dy(t)}{dt} + Q(t)y(t) = 0,$$

forma que permite um estudo, em função das características funcionais de  $P(t)$  e  $Q(t)$ . Podemos sublinhar que a diferença do conjunto de equações (2.49) é que precisamos somente que a frequência,  $\omega(t)$ , tenha a primeira derivada contínua, ou que tenha um número finito de descontinuidades (todas elas removíveis).

Uma rescrituração das equações (2.49), levando em conta que a função  $S(t)$  em 2.3.2.6 é relacionada com a amplitude, assim como  $A(t)$ , e  $\gamma(t)$  é relacionada com a fase, é

$$\ddot{A}(t) + \frac{\alpha}{A(t)} \frac{d}{dt} [A^2(t)\omega(t)] = 0,$$

onde podemos ver claramente que a quantidade

$$A^2(t)\omega(t) \neq C$$

não pode ser uma constante, a diferencia da quantidade análoga  $C = \rho^2(t) \dot{\gamma}(t)$ , calculada no exemplo onde foi tomado o ansatz 2.3.2.6.

dado que a quantidade  $C$  não pode ser uma constante, não temos uma relação direta entre a amplitude e a fase. Este tipo de soluções é útil para analisar outro tipo de regime onde a frequência pode ter variações mais bruscas, dado que a relação  $C = \rho^2(t) \dot{\gamma}(t)$  impõe um comportamento muito suave à fase. Então, levando em conta as previas considerações, podemos formular que solução proposta para o problema do oscilador harmônico com frequência dependente do tempo é nova, tendo o anzats (2.46), temos geralmente que

$$\begin{aligned}q(t) &= aA(t) \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] + bB(t) \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \\ &= aA(t) \exp [i\Omega(t)] + bB(t) \exp [-i\Omega(t)]\end{aligned}\tag{2.50}$$

onde  $a$  e  $b$ , são constantes complexas que serão determinadas pelas condições iniciais,

e

$$\Omega(t) = \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau.$$

Esta nova solução pode ser interpretada como a dinâmica do operador posição (se for estudada na representação de Heisenberg), então para poder ter a informação completa da evolução temporal dos observáveis, precisamos definir o momento e a posição no tempo  $t_0$ , o que implica conhecer a forma das constantes  $a$  e  $b$ , isto através da proposta das condições iniciais para as equações diferenciais (2.49) como,

$$\begin{aligned} A(t_0) &= A_0 \text{ e } B(t_0) = B_0, \\ \dot{A}(t_0) &= \dot{A}_0 \text{ e } \dot{B}(t_0) = \dot{B}_0, \end{aligned}$$

desta forma, temos que para  $\hat{q}(t)|_{t=t_0} = \hat{q}_0$

$$\begin{aligned} \hat{q}(t) &= \hat{q} = \hat{a}A(t) \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] + \hat{b}B(t) \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \\ \hat{q}_0 &= \hat{a}A_0 + \hat{b}B_0, \end{aligned}$$

e para  $\hat{p}(t)|_{t=t_0} = \hat{p}_0 = m \left. \frac{d\hat{q}(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$

$$\begin{aligned} m \frac{d\hat{q}(t)}{dt} &= \hat{p} = m\hat{a} \left[ \dot{A}(t) + i\omega(t)A(t) \right] \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + m\hat{b} \left[ \dot{B}(t) - i\omega(t)B(t) \right] \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \\ \hat{p} &= m\hat{a} \left[ \dot{A}(t) + i\omega(t)A(t) \right] \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + m\hat{b} \left[ \dot{B}(t) - i\omega(t)B(t) \right] \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \\ \hat{p}_0 &= m\hat{a} \left[ \dot{A}_0 + i\omega_0 A_0 \right] + \hat{b} \left[ \dot{B}_0 - i\omega_0 B_0 \right], \end{aligned}$$

então em analogia com o caso do oscilador harmônico com frequência constante, os valores dos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , podem ser encontrados usando o mesmo procedimento.

Invertendo a matriz  $M$

$$M \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ m \left[ \dot{A}_0 + i\omega_0 A_0 \right] & m \left[ \dot{B}_0 - i\omega_0 B_0 \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}_0 \\ \hat{p}_0 \end{pmatrix},$$

então temos que  $M^{-1}$  é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} m \left[ \dot{B}_0 - i\omega_0 B_0 \right] & -B_0 \\ -m \left[ \dot{A}_0 + i\omega_0 A_0 \right] & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_0 \\ \hat{p}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix},$$

Vemos que esta matriz  $M$  atua como uma transformação canônica entre  $(\hat{a}, \hat{b})$  e

$(\hat{q}_0, \hat{p}_0)$ , assim como no caso de frequência constante o determinante da matriz

$$\det M = \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ m [\dot{A}_0 + i\omega_0 A_0] & m [\dot{B}_0 - i\omega_0 B_0] \end{vmatrix} \quad (2.51)$$

$$= m \left( A_0 [\dot{B}_0 - i\omega_0 B_0] - B_0 [\dot{A}_0 + i\omega_0 A_0] \right) = mC(t_0), \quad (2.52)$$

representa a região no tempo da validade desta transformação entre os operadores, e tem uma grande importância\*\* na definição das condições iniciais para a convergência da integral de ação. Segundo os resultados prévios temos que  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  serão dados pela seguinte expressão

$$\hat{a} = \hat{q}_0 \frac{[\dot{B}_0 - i\omega_0 B_0]}{C(t_0)} - \hat{p}_0 \frac{B_0}{mC(t_0)},$$

$$\hat{b} = -\hat{q}_0 \frac{[\dot{A}_0 + i\omega_0 A_0]}{C(t_0)} + \hat{p}_0 \frac{A_0}{mC(t_0)},$$

onde tomamos a definição de 2.51 e, assim 2.50 adquire a seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \left( \hat{q}_0 \frac{[\dot{B}_0 - i\omega_0 B_0]}{C(t_0)} - \hat{p}_0 \frac{B_0}{mC(t_0)} \right) A(t) \exp [i\Omega(t)] \\ &+ \left( -\hat{q}_0 \frac{[\dot{A}_0 + i\omega_0 A_0]}{C(t_0)} + \hat{p}_0 \frac{A_0}{mC(t_0)} \right) B(t) \exp [-i\Omega(t)] \\ &= \hat{q}_0 \frac{[\dot{B}_0 - i\omega_0 B_0]}{C(t_0)} A(t) \exp [i\Omega(t)] - \hat{p}_0 \frac{B_0}{mC(t_0)} A(t) \exp [i\Omega(t)] \\ &- \hat{q}_0 \frac{[\dot{A}_0 + i\omega_0 A_0]}{C(t_0)} B(t) \exp [-i\Omega(t)] + \hat{p}_0 \frac{A_0}{mC(t_0)} B(t) \exp [-i\Omega(t)] \\ &= \frac{\hat{q}_0}{C(t_0)} \left\{ [\dot{B}_0 - i\omega_0 B_0] A(t) \exp [i\Omega(t)] - [\dot{A}_0 + i\omega_0 A_0] B(t) \exp [-i\Omega(t)] \right\} \\ &+ \frac{\hat{p}_0}{mC(t_0)} \left\{ A_0 B(t) \exp [-i\Omega(t)] - \hat{p}_0 B_0 A(t) \exp [i\Omega(t)] \right\}. \end{aligned}$$

Para ter uma forma mais compacta, definiremos o seguinte conjunto de funções

$$F_0(t) = A_0 B(t) \exp [-i\Omega(t)] - B_0 A(t) \exp [i\Omega(t)],$$

$$F_1(t) = [\dot{B}_0 - i\omega_0 B_0] A(t) \exp [i\Omega(t)] - [\dot{A}_0 + i\omega_0 A_0] B(t) \exp [-i\Omega(t)],$$

---

\*\*A importância, é dada pelo fato de que no caso de frequência constante estabelece-se uma escala para a validade da descrição do sistema e, neste caso segue acontecendo um fato similar mas agora no sentido que ela possui uma independência das variáveis no intervalo de tempo no qual o sistema pode ser descrito

e com ajuda das equações (2.49), as funções  $F_0(t)$  e  $F_1(t)$ , satisfazem,

$$\frac{d^2 F_0(t)}{dt^2} + \omega^2(t)F_0(t) = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{d^2 F_1(t)}{dt^2} + \omega^2(t)F_1(t) = 0$$

$$F_0(t) \frac{dF_1(t)}{dt} - \frac{dF_0(t)}{dt} F_1(t) = -C(t)C(t_0)$$

$$\left( B(t)\dot{A}(t) - A(t)\dot{B}(t) + 2i\omega(t)A(t)B(t) \right) = C(t) \quad (2.54)$$

onde, se pode ver que

$$\frac{dC(t)}{dt} = 0,$$

com o uso das equações eq.(2.49)

Que agora pode ser tomado como uma definição especial, já que vem do fato que agora o  $\det M$  é relacionado com o Wroskiano das soluções  $C(t)|_{t=t_0} = C(t_0)$ , e isto mostra que a quantidade  $C(t)$  é uma constante no tempo, e poderemos tomar sem perda de generalidade que existe a identidade <sup>††</sup>

$$C(t) = C(t_0). \quad (2.55)$$

Agora, a expressão para o  $\hat{q}(t)$  é

$$\hat{q}(t) = \frac{\hat{q}_0}{C(t_0)} F_1(t) + \frac{\hat{p}_0}{mC(t_0)} F_0(t), \quad (2.56)$$

e para o momento  $\hat{p}$  é representada por

$$\hat{p} = m \frac{\hat{q}_0}{C(t_0)} \dot{F}_1(t) + \frac{\hat{p}_0}{C(t_0)} \dot{F}_0(t), \quad (2.57)$$

por conveniência podemos fazer a substituição de  $\hat{p}_0$  em (2.57) usando (2.56), tendo então para  $\hat{p}_0$ ,

$$\hat{p}_0 = \hat{q}(t) \frac{mC(t_0)}{F_0(t)} - \hat{q}_0 \frac{mF_1(t)}{F_0(t)},$$

---

<sup>††</sup>A matriz Wroskiana para  $q(t)$ , é

$$W(t) = \left( \begin{array}{cc} A(t) \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] & B(t) \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \\ \frac{d}{dt} \left\{ A(t) \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \right\} & \frac{d}{dt} \left\{ B(t) \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] \right\} \end{array} \right)$$

e o determinante desta  $\det W(t)$  é dado por

$$\det W(t) = A(t)\dot{B}(t) - B(t)\dot{A}(t) - 2i\omega(t)A(t)B(t) = -C(t)$$

e para  $\hat{p}$ ,

$$\begin{aligned}\hat{p} &= m \frac{\hat{q}_0}{C(t_0)} \dot{F}_1(t) - m \frac{\hat{q}_0}{C(t_0)} \frac{\dot{F}_0(t) F_1(t)}{F_0(t)} + \hat{q} m \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} \\ &= m \frac{\hat{q}_0}{C(t_0)} \left( \frac{F_0(t) \dot{F}_1(t)}{F_0(t)} - \frac{\dot{F}_0(t) F_1(t)}{F_0(t)} \right) + \hat{q} m \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} \\ &= -m \hat{q}_0 \frac{C(t)}{F_0(t)} + \hat{q} m \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)},\end{aligned}$$

e então com estas definições podemos conhecer a relação entre os operadores de posição para diferentes tempos, usando as relações de comutação canônica dos operadores,

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \left[ \hat{q}, -m \hat{q}_0 \frac{C(t)}{F_0(t)} + \hat{q} m \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} \right] = -[\hat{q}, \hat{q}_0] m \hat{q}_0 \frac{C(t)}{F_0(t)} = i\hbar,$$

para obter

$$\hat{q}_0 \hat{q} = \frac{i\hbar F_0(t)}{m C(t)} + \hat{q} \hat{q}_0, \quad (2.58)$$

Portanto a energia cinética do sistema é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\hat{p}^2}{2m} &= \frac{m}{2} \left[ \hat{q} \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} - \hat{q}_0 \frac{C(t)}{F_0(t)} \right]^2 \\ &= \frac{m}{2} \left[ \hat{q}^2 \frac{\dot{F}_0^2(t)}{F_0^2(t)} + \hat{q}_0^2 \frac{C^2(t)}{F_0^2(t)} - \frac{C(t) \dot{F}_0(t)}{F_0^2(t)} (\hat{q}_0 \hat{q} + \hat{q} \hat{q}_0) \right],\end{aligned}$$

usando (2.58), temos que a expressão anterior pode ser posta como

$$\begin{aligned}\frac{\hat{p}^2}{2m} &= \frac{m}{2} \left[ \hat{q}^2 \frac{\dot{F}_0^2(t)}{F_0^2(t)} + \hat{q}_0^2 \frac{C^2(t)}{F_0^2(t)} - \frac{C(t) \dot{F}_0(t)}{F_0^2(t)} \left( \frac{i\hbar F_0(t)}{m C(t)} + 2\hat{q} \hat{q}_0 \right) \right] \\ &= \frac{m}{2} \left[ \hat{q}^2 \frac{\dot{F}_0^2(t)}{F_0^2(t)} + \hat{q}_0^2 \frac{C^2(t)}{F_0^2(t)} - 2 \frac{C(t) \dot{F}_0(t)}{F_0^2(t)} \hat{q} \hat{q}_0 \right] - \frac{i\hbar \dot{F}_0(t)}{2 F_0(t)}.\end{aligned} \quad (2.59)$$

Agora tomando o operador Hamiltoniano para o sistema que é dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) \hat{q}^2,$$

e substituindo nele 2.59 o operador anterior pode ser expresso da seguinte maneira

$$\hat{H} = \frac{m}{2} \left[ \hat{q}^2 \frac{\dot{F}_0^2(t)}{F_0^2(t)} + \hat{q}_0^2 \frac{C^2(t)}{F_0^2(t)} - 2 \frac{C(t) \dot{F}_0(t)}{F_0^2(t)} \hat{q} \hat{q}_0 \right] - \frac{i\hbar \dot{F}_0(t)}{2 F_0(t)} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) \hat{q}^2,$$

e usando as relações 2.53, temos que com

$$\frac{1}{2} m \omega^2(t) \hat{q}^2 = -\frac{m}{2 F_0(t)} \frac{d^2 F_0(t)}{dt^2} \hat{q}^2,$$

o operador  $\hat{H}$  pode ser expresso da forma

$$\hat{H} = \frac{m}{2} \left[ \hat{q}^2 \left( \frac{\dot{F}_0^2(t)}{F_0^2(t)} - \frac{d^2 F_0(t)}{dt^2} \right) + \hat{q}_0^2 \frac{C^2(t)}{F_0^2(t)} - 2 \frac{C(t)\dot{F}_0(t)}{F_0^2(t)} \hat{q} \hat{q}_0 \right] - \frac{i\hbar}{2} \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)},$$

a primeira função entre os parênteses pode ser posta como uma derivada total do tempo, assim

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} \right) = \frac{\dot{F}_0^2(t)}{F_0^2(t)} - \frac{d^2 F_0(t)}{dt^2},$$

e condicionando à natureza de  $C(t)$ , temos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{C(t)}{F_0(t)} \right) = \frac{dC(t)}{dt} \frac{1}{F_0(t)} - \frac{C(t)\dot{F}_0(t)}{F_0^2(t)} = -\frac{C(t)\dot{F}_0(t)}{F_0^2(t)},$$

e a expressão

$$\begin{aligned} \frac{C^2(t)}{F_0^2(t)} &= -\frac{C(t_0)C(t)}{C^2(t_0)F_0^2(t)} \left\{ F_0(t) \frac{dF_1(t)}{dt} - \frac{dF_0(t)}{dt} F_1(t) \right\} \\ &= -\frac{C(t_0)C(t)}{C^2(t_0)} \frac{d}{dt} \left( \frac{F_1(t)}{F_0(t)} \right), \end{aligned}$$

também pode ser transformada. Assim, com as anteriores operações, o operador Hamiltoniano toma a seguinte forma

$$\hat{H} = \frac{m}{2} \left[ -\hat{q}^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} \right) - \hat{q}_0^2 \frac{C(t_0)C(t)}{C^2(t_0)} \frac{d}{dt} \left( \frac{F_1(t)}{F_0(t)} \right) + 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{C(t)}{F_0(t)} \right) \hat{q} \hat{q}_0 \right] - \frac{i\hbar}{2} \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)}.$$

A função de transformação associada  $\langle q, t | q_0, t_0 \rangle$ , vai ser dada por

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= A(q, q_0) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int \left( \frac{m}{2} \left[ -\hat{q}^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{q}_0^2 \frac{C(t_0)C(t)}{C^2(t_0)} \frac{d}{dt} \left( \frac{F_1(t)}{F_0(t)} \right) + 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{C(t)}{F_0(t)} \right) q q_0 - \frac{i\hbar}{2} \frac{d}{dt} \ln F_0(t) \right) dt \right\} \\ &= A(q, q_0) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( q^2 \frac{m}{2} \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} + \hat{q}_0^2 \frac{m}{2} \frac{F_1(t)}{F_0(t)} - m q q_0 m \frac{C(t)}{F_0(t)} + \frac{i\hbar}{2} \ln F_0(t) \right) \right\} \\ &= \frac{A(q, q_0)}{\sqrt{F_0(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2 F_0(t)} \left( q^2 \dot{F}_0(t) + \hat{q}_0^2 F_1(t) - 2 q q_0 C(t) \right) \right\} \end{aligned}$$

então podemos dar para  $C(t)$  o caráter especial de conservada 2.55, podendo usar o argumento  $\frac{C(t)C(t_0)}{C(t_0)C(t_0)} = 1$  o que permitirá recuperarmos a ação

$$S(q, q_0, t) = \frac{m}{2 F_0(t)} \left( q^2 \dot{F}_0(t) + \hat{q}_0^2 F_1(t) - q q_0 m C(t) \right),$$

Para verificar a validade desta expressão podemos recuperar a ação para o oscilador harmônico com frequência constante, tomando o fato de que nesse regime

$\omega(t) \rightarrow \omega_0$ , e que as funções  $B(t) = A(t) = K$  são constantes, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\omega(t) \rightarrow \omega_0} \dot{F}_0(t) &= -2i\omega_0 K^2 \cos [i\omega_0(t - t_0)] \\ B(t) = A(t) &= K \\ \lim_{\omega(t) \rightarrow \omega_0} F_1(t) &= -2i\omega_0 K^2 \cos [i\omega_0(t - t_0)] \\ B(t) = A(t) &= K \\ \lim_{\omega(t) \rightarrow \omega_0} F_0(t) &= K^2 \sin [-i\omega_0(t - t_0)]. \\ B(t) = A(t) &= K \end{aligned}$$

que conduz ao

$$\lim_{\omega(t) \rightarrow \omega_0} S(q, q_0, t) = \frac{m}{2 \sin [\omega_0(t - t_0)]} (\{q^2 + q_0^2\} \cos [\omega_0(t - t_0)] - qq_0).$$

Agora temos que determinar a forma da constante  $A(q, q_0)$  e, para isto temos que usar a expressão

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \frac{A(q, q_0)}{\sqrt{F_0(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2F_0(t)} \left( q^2 \dot{F}_0(t) + q_0^2 F_1(t) - 2qq_0 C(t) \right) \right\} \\ &= \frac{A(q, q_0)}{\sqrt{F_0(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q, q_0, t) \right\}, \end{aligned}$$

então tomando

$$\frac{\partial \langle q, t | q_0, t_0 \rangle}{\partial q} = \frac{i}{\hbar} \langle q, t | \hat{p} | q_0, t_0 \rangle,$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle q, t | q_0, t_0 \rangle}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \frac{A(q, q_0)}{\sqrt{F_0(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q, q_0, t) \right\} \right\} \\ &= \left( \frac{1}{A(q, q_0)} \frac{\partial A(q, q_0)}{\partial q} + \frac{i}{\hbar} qm \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} - \frac{i}{\hbar} q_0 m \frac{C(t)}{F_0(t)} \right) \langle q, t | q_0, t_0 \rangle, \end{aligned}$$

e junto com a equação para  $\hat{p}$ ,

$$\frac{i}{\hbar} \langle q, t | \hat{p} | q_0, t_0 \rangle = \frac{i}{\hbar} \left( qm \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t)} - q_0 m \frac{C(t)}{F_0(t)} \right) \langle q, t | q_0, t_0 \rangle,$$

podemos por uma comparação ter

$$\frac{\partial A(q, q_0)}{\partial q} = 0,$$

ou seja,  $A(q, q_0)$  não tem nenhuma dependência de  $q$ , assim que agora com

$$\frac{\partial \langle q, t | q_0, t_0 \rangle}{\partial q_0} = \frac{i}{\hbar} \langle q, t | \hat{p}_0 | q_0, t_0 \rangle,$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle q, t | q_0, t_0 \rangle}{\partial q_0} &= \frac{1}{\sqrt{F_0(t)}} \frac{\partial}{\partial q_0} \left\{ A(q, q_0) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q, q_0, t) \right\} \right\} \\ &= \left( \frac{1}{A(q, q_0)} \frac{\partial A(q, q_0)}{\partial q_0} - \frac{i}{\hbar} \left[ m q_0 \frac{F_1(t)}{F_0(t)} - m q \frac{C(t)}{F_0(t)} \right] \right) \langle q, t | q_0, t_0 \rangle, \end{aligned}$$

da mesma forma o elemento matricial de  $\hat{p}_0$ , que é dado por

$$\frac{i}{\hbar} \langle q, t | \hat{p}_0 | q_0, t_0 \rangle = -\frac{i}{\hbar} \left( m q_0 \frac{F_1(t)}{F_0(t)} - m q \frac{C(t)}{F_0(t)} \right) \langle q, t | q_0, t_0 \rangle,$$

mostra que  $A(q, q_0)$  também não terá dependência de  $q_0$ , então temos que

$$\frac{1}{A(q, q_0)} \frac{\partial A(q, q_0)}{\partial q_0} = 0$$

,da mesma forma que com  $A(q, q_0) = K(t)$ , onde  $K(t)$  é uma função a determinar, assim a expressão completa para a função de transformação é dada por

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \frac{K(t)}{\sqrt{F_0(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2F_0(t)} \left( q^2 \dot{F}_0(t) + q_0^2 F_1(t) - 2q q_0 C(t) \right) \right\}$$

agora igualmente que nas seções onde foram desenvolvidos os exemplos para as aplicações do operador principal de Hamilton, podemos notar que  $K(t) = \sqrt{\frac{imC(t)}{2\pi\hbar}} = \sqrt{\frac{imC(t_0)}{2\pi\hbar}}$ , portanto, a função de transformação deve ter a forma de

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \sqrt{\frac{imC(t_0)}{2\pi\hbar F_0(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2F_0(t)} \left( q^2 \dot{F}_0(t) + q_0^2 F_1(t) - 2q q_0 C(t) \right) \right\}.$$

O resultado anterior, embora, podendo ser derivado desde 2.41, somente é usado para mostrar uma aplicação do uso do operador Hamiltoniano para a derivação das funções de transformação. Mas um fato interessante ocorre com as características funcionais das soluções 2.46, já que elas mostram a possibilidade do estudo de um comportamento não adiabático das variações da frequência e, portanto, uma maior gama de aplicações [6].

Na literatura [7, 8], é usado o seguinte anzats

$$q(t) = S(t) e^{i\gamma(t)}, \quad (2.60)$$

como aquele que é usado em 2.3.2.6, pode-se notar que em [9] os autores acham que a forma funcional de 2.60 é correta ao tomar em conta as condições para obter um propagador exato para o sistema por meio do Método de Integral de Caminho de Feynman. A solução 2.60 é tomada como padrão em muitas outras publicações posteriores como, por exemplo, [10], em que através do Princípio Variacional de Schwinger

conseguem o mesmo propagador que [9] confirmando a utilidade do ansatz <sup>‡‡</sup>, algumas implicações deste tipo de solução podem ser vistas em [11].

---

<sup>‡‡</sup>Este ansatz é considerado útil, já que pensar numa solução deste tipo, permite evidenciar a existência de alguns invariantes adiabáticos no sistema, assim é uma solução quando a frequência  $\omega(t)$  varia lentamente.

## *Referências*

- [1] Schwinger, Julian S. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **45**, 1542-1553(1959), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 256-265(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 570-579(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 883-897(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 1401-1415(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. os Sci. **47**, 1075-1083(1961), Schwinger, Julian S. ,”*Quantum Kinematics and Dynamics*”, (W.A. Benjamin Publishers,1970)
- [2] Schwinger, Julian S., Quantum Mechanics ”*Symbolism of Atomic Measurements*”, (Springer , 2001)
- [3] Dirac P.A.M., *Princípios de mecânica cuántica* (Ediciones Ariel - 1967)
- [4] Toms, David J.,*The Schwinger action principle an effective action* (Cambridge University Press - 2007)
- [5] de Melo Miquele, Cássius Anderson - Princípio Variacional de Schwinger e Teoria Quântica: Aplicações à Mecânica Quântica Quaterniônica e ao Estudo de Sistemas Singulares, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica - UNESP, (2002.)
- [6] Dodonov V.V., Klimov A.B., Nikonov D.E.,Phys.Rev **A47**,4442(1993),Dodonov V.V., Man’ko V.I., Nikonov D.E.,Phys.Rev **A51**,3328(1995)
- [7] M.Kulsrud, Russell., Phys.Rev. **106**,205(1957)
- [8] Lewis,H.R.Jr., Jour.Math. Phys. **9**, 1976(1968)
- [9] Khandekar D.C., and Lawande S.V., Jour.Math. Phys. **16**, 384(1975)
- [10] Farina,C. e Seguí-Santoja, Antonio J., Phys.Lett A **184**(1993) 23
- [11] Ditirch.W., and Reuter.M., Classical and Quantum Dynamics, *From Classicalal paths to Path Integrals*, [Cap 8,Third edition] (Springer-Verlag, 2001)

## 3 *Formalismo para Trajetórias Temporalmente Fechadas*

### 3.1 Variáveis Não - Hermitianas

Todo o formalismo tratado até aqui estudou sistemas descritos por observáveis hermitianos e, portanto, os que possuem um espectro completamente real. Não obstante uma análise um pouco mais profunda dos problemas que envolvem tais observáveis permite, em alguns casos, a sua formulação em função de novas variáveis, não necessariamente hermiteanas, por meio de uma transformação canônica [1, 2, 3]. As variáveis não hermiteanas podem simplificar os cálculos dando lugar a interpretações com um alto conteúdo físico. Um exemplo é a descrição do oscilador harmônico em função dos operadores de criação e destruição que são operadores não hermitianos e que permitem descrição do sistema em função de seus estados próprios de energia \*.

Para dar um exemplo de seu uso, trataremos um sistema simples, como é o oscilador harmônico com frequência constante e, a conseqüente derivação da sua função de transformação associada. Esta função terá posterior utilidade na aplicação do formalismo de trajetória fechada, propósito deste capítulo.

Primeiramente definimos o par de variáveis não hermitianas<sup>†</sup>

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad \text{e,} \quad \hat{y}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{q} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \quad (3.1)$$

que servem para escrever o hamiltoniano do oscilador harmônico com frequência constante da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 = \frac{\hbar\omega}{2} \{ \hat{y}, \hat{y}^\dagger \} \\ &= \hbar\omega \left\{ \hat{y}^\dagger \hat{y} + \frac{1}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

\*As variáveis não hermitianas auxiliam no entendimento de sistemas oscilantes ou com características ondulatórias como também para sistemas cujo espectro de energia é igualmente espaçado.

<sup>†</sup>Dado que estas variáveis representam uma transformação canônica, conservam as relações de comutação  $[\hat{y}, \hat{y}^\dagger] = 1$ .

e de onde podemos notar que as equações de movimento são dadas pelas seguintes expressões

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{y}^\dagger} = -i\omega \hat{y} \quad \text{e,} \quad \frac{d\hat{y}^\dagger}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{y}} = i\omega \hat{y}^\dagger, \quad (3.3)$$

assim, as equações (3.3) têm soluções dadas pelas seguintes funções de operadores

$$\hat{y}(t) = \hat{y}_0 e^{-i\omega t} \quad \text{e,} \quad \hat{y}^\dagger(t) = \hat{y}_0^\dagger e^{i\omega t}. \quad (3.4)$$

Para se obter a função de transformação  $\langle y^\dagger, t | y_0 \rangle = \langle y^\dagger, t | y, 0 \rangle$ , podemos usar a equação de Schrödinger<sup>‡</sup>,

$$\begin{aligned} \partial \langle y^\dagger, t | y, 0 \rangle &= -\frac{i}{\hbar} \langle y^\dagger, t | \hat{H}(t) | y, 0 \rangle \partial t = -\frac{i}{\hbar} \langle y^\dagger, t | \hbar\omega \left( \hat{y}^\dagger \hat{y} + \frac{1}{2} \right) | y, 0 \rangle \partial t \\ &= -i\omega \langle y^\dagger, t | \hat{y}^\dagger(t) \hat{y}_0 e^{-i\omega t} | y, 0 \rangle \partial t - i\frac{\omega}{2} \langle y^\dagger, t | y, 0 \rangle \partial t \\ &= \langle y^\dagger, t | y, 0 \rangle \left( -i\hat{y}^\dagger \hat{y}_0 e^{-i\omega t} - i\frac{\omega}{2} \right) \partial t, \end{aligned}$$

desta forma depois de integrar, obtemos a função de transformação que procurávamos

$$\begin{aligned} \langle y^\dagger, t | y, 0 \rangle &= e^{-i\frac{\omega}{2}t} \langle y^\dagger | \exp \left[ -i\hat{y}^\dagger \hat{y}_0 e^{-i\omega t} \right] | y'' \rangle \\ &= e^{-i\frac{\omega}{2}t} \exp \left[ -i\hat{y}^\dagger \hat{y}_0 e^{-i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Da função anterior de transformação podemos derivar o espectro do sistema; para isto, podemos observar que fazendo uma expansão da função de transformação numa série de potências de  $y^\dagger$  e  $y$ , temos que (3.5) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \langle y^\dagger, t | y, 0 \rangle &= e^{-i\frac{\omega}{2}t} \langle y^\dagger | \exp \left[ -i\hat{y}^\dagger \hat{y}_0 e^{-i\omega t} \right] | y \rangle \\ &= e^{-i\frac{\omega}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} \frac{(y)^n}{\sqrt{n!}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por outro lado, se tomarmos de novo a função de transformação  $\langle y^\dagger, t | y, 0 \rangle$  sabendo, que a evolução temporal do estado  $\langle y^\dagger, 0 |$  até um tempo  $t$  é dada pelo hamiltoniano ( $\hat{H}$ ) do sistema e como este não tem uma dependência explícita do tempo, temos

$$\langle y^\dagger, t | = \langle y^\dagger, 0 | e^{-i\mathbf{H}t}, \quad (3.7)$$

desta forma a função de transformação (3.5) também poderá ser escrita como

$$\langle y^\dagger, t | y, 0 \rangle = \langle y^\dagger, 0 | e^{-i\mathbf{H}t} | y, 0 \rangle, \quad (3.8)$$

onde se inserirmos um conjunto completo de estados próprios do operador  $\mathbf{H}$

$$\hat{1} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|, \quad (3.9)$$

---

<sup>‡</sup>Ver Cap 2, Sec 2.2.2.

temos que (3.5) pode se expressar da seguinte forma

$$\begin{aligned}\langle y^\dagger, t | y, 0 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle y^\dagger, 0 | e^{-i\mathbf{H}t} | n \rangle \langle n | y, 0 \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\mathbf{E}_n t} \langle y^\dagger, 0 | n \rangle \langle n | y, 0 \rangle.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Dado que ambas séries, (3.6) e (3.10), são expressões equivalentes de (3.5) podemos fazer uma comparação termo a termo identificando os termos

$$\langle y^\dagger | n \rangle = \frac{(y^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \quad e, \quad \langle n | y \rangle = \frac{(y)^n}{\sqrt{n!}},$$

e assim, podemos ver que o termo

$$\mathbf{E}_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

nos dá o espectro do sistema<sup>§</sup>.

## 3.2 Formalismo de Trajetória Temporalmente Fechada.

No capítulo anterior o objetivo principal foi calcular as amplitudes de transição para alguns sistemas de interesse; como foi discutido, as funções de transformação fundamentalmente contém toda a informação quântica do sistema, mas algumas questões de caráter físico não podem ser respondidas diretamente a partir delas. Desta forma, se faz necessário o estudo de quantidades tais como valores esperados de alguma propriedade física do sistema. Este estudo permite, em princípio, por exemplo, conhecer a evolução de alguma propriedade partindo de alguma condição inicial, como um estado específico, ou mais geral, de uma mistura inicial de estados que descrevam alguma condição física desejada.

O Formalismo de Trajetória Temporalmente Fechada, proposto por Julian Seymour Schwinger em 1961 [4], mostra uma modificação do Princípio Variacional que permite, de forma generalizada, o cálculo de valores esperados das variáveis dinâmicas do sistema como de funções das mesmas sem a necessidade do cálculo de funções de transição individuais; do mesmo modo, dada a possibilidade de dar conta da evolução de qualquer condição inicial dada a dinâmica estabelecida mas operador Lagrangiano do sistema é possível construir estruturas compatíveis com as quantidades calculadas em mecânica estatística, ao ter como uma condição inicial algum estado do sistema em equilíbrio termodinâmico e assim, dada a forma em que se constrói a teoria pode-

<sup>§</sup>Nota-se que se tem agregado o  $\hbar$  para evidenciar as unidades de energia, ao longe deste capítulo só usaremos dependendo da necessidade.

se estudar processos em que o sistema sai do equilíbrio termodinâmico, permitindo uma maior gama de aplicações.

Com ajuda das funções de transformação

$$\langle a'', t_f | b', t_i \rangle,$$

podem ser calculados valores esperados de quantidades físicas, dadas condições iniciais específicas para o estado do sistema. Assim, por exemplo, o valor esperado de um operador  $X(t) = \hat{X}(\hat{q}(t), \hat{p}(t); t)$  em um tempo  $t_f$  tendo como condição inicial o sistema no estado  $|b, t_i\rangle$  pode ser calculado da seguinte forma

$$\langle X(t_f) \rangle_{b't_i} = \sum_{a', a''} \langle b', t_i | a', t_f \rangle \langle a', t_f | X(t_f) | a'', t_f \rangle \langle a'', t_f | b', t_i \rangle, \quad (3.11)$$

na expressão (3.11) temos que calcular as funções de transformação individuais do sistema, cujas variações são dadas por

$$\delta \langle a't_f | b't_i \rangle = i \langle a't_f | \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L \right] | b't_i \rangle, \quad (3.12)$$

$$\delta \langle b't_i | a't_f \rangle = -i \langle b't_i | \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L \right] | a't_f \rangle, \quad (3.13)$$

correspondendo cada uma, á forma em que é tomada a evolução temporal considerando a versão adjunta da função de transformação como o processo inverso no tempo, assim ás formas em que as mudanças entre os diferentes estados devem ser comparadas é tal que podemos obter para uma função de transformação para (3.11)  $\langle b't_i | b''t_i \rangle$ , de onde poderiam se obter o valor de  $\langle X(t_f) \rangle_{b't_i}$ , mas o problema fundamental é que dada a estrutura do Princípio Variacional, as variações de dita função seriam

$$\delta \langle b't_i | b''t_i \rangle = \delta \left[ \sum_{a'} \langle b't_i | a't_f \rangle \langle a't_f | b't_i \rangle \right] = 0,$$

que pode ser visto mais diretamente, isto é, dado que temos

$$\delta \langle b't_i | b''t_i \rangle = \sum_{a'} [\delta \langle b't_i | a't_f \rangle \langle a't_f | b't_i \rangle + \langle b't_i | a't_f \rangle \delta \langle a't_f | b't_i \rangle],$$

e usando as relações (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} \delta \langle b't_i | b''t_i \rangle &= i \sum_{a'} \left[ \langle b't_i | a't_f \rangle \langle a't_f | \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L \right] | b't_i \rangle - \langle b't_i | \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L \right] | a't_f \rangle \langle a't_f | b't_i \rangle \right] \\ &= i \langle b't_i | \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L \right] | b''t_i \rangle - i \langle b't_i | \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L \right] | b't_i \rangle \\ &= i \langle b't_i | \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L \right] - \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L \right] | b''t_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

já que devemos ter  $\langle b'|t_i|b''t_i\rangle = \delta(b', b'')$  e, isto impede uma melhor análise do sistema. A modificação do Princípio Variacional que pode ser considerada para obter uma expressão útil, é pensar na possibilidade de que o sistema evolua com uma dinâmica que dependência da direção em que o tempo é considerado, ou seja, que a dinâmica dependa do sentido em que é tomado o tempo. Assim, para tal caso, podemos propor uma função de transformação para um ciclo fechado no tempo, de forma que os tempos iniciais e finais sejam os mesmos

$$\begin{aligned} \delta \langle t_i | t_i \rangle &= \delta [\langle t_i | t_f \rangle \times \langle t_f | t_i \rangle] \\ &= i \langle t_i | \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L_+ \right] - \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L_- \right] | t_i \rangle \\ &= i \langle t_i | \left[ \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L_+ - \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L_- \right] | t_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aqui o termo  $|t_f\rangle \times \langle t_f|$  simboliza a soma sobre um conjunto completo de estados do sistema que são usados como intermediários, se considerarmos os Lagrangianos da expressão (3.14) dados por  $L_{\pm} = \lambda_{\pm}(t) \hat{X}(\hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t); t) = \lambda_{\pm}(t) \hat{X}(t)$ , indicando pelos subíndices a diferença das dinâmicas segundo a direção temporal, podemos obter

$$\delta_{\lambda} \langle t_i | t_i \rangle = i \langle t_i | \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt (\delta \lambda_+(t) - \delta \lambda_-(t)) X(t) \right] | t_i \rangle,$$

assim, pode se ver que se fazermos a derivação do funcional do elemento  $\langle t_i | t_i \rangle$ , obtemos o valor esperado como

$$-i \frac{\delta_{\lambda} \langle t_i | t_i \rangle}{\delta \lambda_+(t)} = \langle t_i | X(t_f) | t_i \rangle,$$

da mesma forma que

$$i \frac{\delta_{\lambda} \langle t_i | t_i \rangle}{\delta \lambda_-(t)} = \langle t_i | X(t_f) | t_i \rangle$$

onde  $\lambda_{\pm}(t)$ , podem ser definidas como fontes externas que dependem da direção da direção temporal.

### 3.2.1 Oscilador Harmônico Forçado

Um exemplo que mostra claramente a utilidade da modificação anterior do Princípio Variacional, para este tipo de ciclos temporais, é considerarmos um oscilador harmônico sujeito a uma força externa arbitraria, o operador Lagrangeano do sistema é

$$\hat{L} = i\hat{y}^{\dagger} \frac{d\hat{y}}{dt} - \omega \hat{y}^{\dagger} \hat{y} - \hat{y}^{\dagger} K(t) - \hat{y} K^*(t),$$

fazendo a variação funcional de  $\hat{L}$  com respeito aos operadores  $\hat{y}^\dagger$  e  $\hat{y}$  temos que

$$\begin{aligned}\delta\hat{L} &= i\delta\hat{y}^\dagger\frac{d\hat{y}}{dt} + i\hat{y}^\dagger\delta\frac{d\hat{y}}{dt} - \omega\delta\hat{y}^\dagger\hat{y} - \omega\hat{y}^\dagger\delta\hat{y} - \delta\hat{y}^\dagger K(t) - \delta\hat{y}K^*(t) \\ &= \delta\hat{y}^\dagger\left(i\frac{d\hat{y}}{dt} - \omega\hat{y} - K(t)\right) + i\hat{y}^\dagger\delta\frac{d\hat{y}}{dt} - \omega\hat{y}^\dagger\delta\hat{y} - K^*(t)\delta\hat{y},\end{aligned}$$

fazendo a substituição pelo termo

$$\hat{y}^\dagger\delta\frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{d(\hat{y}^\dagger\delta\hat{y})}{dt} - \frac{d\hat{y}^\dagger}{dt}\delta\hat{y},$$

obtemos

$$\delta\hat{L} = \delta\hat{y}^\dagger\left(i\frac{d\hat{y}}{dt} - \omega\hat{y} - K(t)\right) - \left(i\frac{d\hat{y}^\dagger}{dt} + \omega\hat{y}^\dagger + K^*(t)\right)\delta\hat{y},$$

onde o termo de superfície dado por  $\frac{d(\hat{y}^\dagger\delta\hat{y})}{dt}$  foi ignorado. Assim, levando em conta que as variações  $\delta\hat{L} = 0$ , obtemos as equações de movimento para cada um dos operadores

$$\begin{aligned}i\frac{d\hat{y}}{dt} - \omega\hat{y} &= K(t), \\ -i\frac{d\hat{y}^\dagger}{dt} - \omega\hat{y}^\dagger &= K^*(t),\end{aligned}\tag{3.15}$$

a solução destas equações diferenciais, são dadas pela integração direta

$$\begin{aligned}e^{i\omega t}\frac{d\hat{y}}{dt} + i\omega e^{i\omega t}\hat{y} &= -iK(t)e^{i\omega t}, \\ \frac{d}{dt}\{\hat{y}e^{i\omega t}\} &= -iK(t)e^{i\omega t}.\end{aligned}$$

Desta forma, integrando entre um tempo inicial  $t_i$  e qualquer tempo  $t$ , temos a seguinte solução

$$\hat{y}(t) = e^{-i\omega(t-t_i)}\hat{y}(t_i) - i\int_{t_i}^t K(t')e^{-i\omega(t-t')}dt'$$

e a evolução do operador adjunto, é dada pela seguinte função

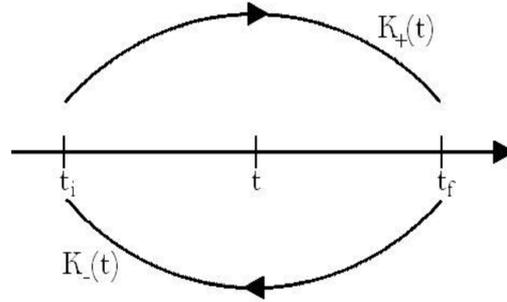
$$\hat{y}^\dagger(t) = e^{i\omega(t-t_i)}\hat{y}^\dagger(t_i) + i\int_{t_i}^t K^*(t')e^{i\omega(t-t')}dt',$$

com os anteriores resultados, podemos proceder á construção da função de transformação aplicando o formalismo estudado.

### 3.2.2 Aplicação do formalismo

Para a construção das funções de transformação segundo o formalismo de trajetória de tempo fechada, precisamos de construir a forma em que os operadores evoluem para esta forma especial contorno, assim, precisamos lembrar que o ciclo tem a seguinte forma

Desta forma, o sistema evolui a partir de um tempo inicial  $t_i$ , até um tempo  $t$ , para

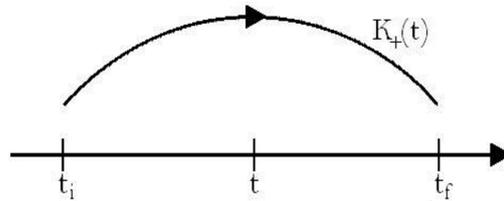


**Figura 1:** A zeta horizontal, indica a evolução temporal do parâmetro tempo  $t$ , e as linhas curvas superior e inferior indicam os tempos e direções nas quais esse parâmetro temporal  $t$  é levado em conta. Em cada um destes há uma força externa diferente  $K_+(t)$  ou  $K_-(t)$ , dependendo do sentido da evolução temporal.

o sentido positivo da flecha temporal, que é tomado com percorrer o ciclo no sentido horário; assim, segundo o raciocínio da primeira seção deste capítulo, teremos duas dinâmicas para cada parte destas trajetórias:

$K_+(t)$  na parte superior, setor para o qual temos que  $t_i < t < t_f$  e  $K_-(t)$  e na parte inferior, para a qual temos  $t_f < t < t_i$ . Devido á forma em que o ciclo é seguido, para a evolução do operador adjunto, é tomado o sentido anti-horário.

Retornando ao caso do oscilador harmônico, temos que a evolução até um tempo  $t$  arbitrário entre  $t_i < t < t_f$  (estamos na parte superior do ciclo),



**Figura 2:** A metade do ciclo orientado adiante no tempo, é indicada pela força externa  $K_+(t)$ .

é dada pela seguinte expressão

$$\hat{y}_+(t) = e^{-i\omega(t-t_i)}\hat{y}_+(t_i) - i \int_{t_i}^t K_+(t') e^{-i\omega(t-t')} dt', \quad (3.16)$$

e se definimos a seguinte função degrau especial

$$\eta_+(t-t') = \begin{cases} 1 & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

podemos ver na figura 3 que no intervalo de valores  $t > t'$ , teremos o seguinte comportamento,

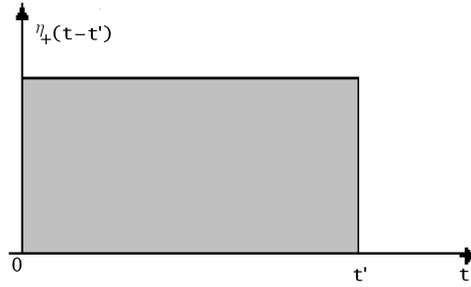


Figura 3: Função degrau para a orientação adiante na evolução temporal.

desta forma, a integral em (3.16) poderá ser expressa no intervalo de integração  $t_i < t < t_f$  da seguinte forma

$$\int_{t_i}^t K_+(t') e^{-i\omega(t-t')} dt' = \int_{t_i}^{t_f} K_+(t') \eta_+(t-t') e^{-i\omega(t-t')} dt'. \quad (3.17)$$

Assim, finalmente temos que (3.16) pode ser expressa como

$$\hat{y}_+(t) = e^{-i\omega(t-t_i)} \hat{y}_+(t_i) - i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \eta_+(t-t') K_+(t') dt'. \quad (3.18)$$

Para complementar o estudo do ciclo completo, podemos calcular agora o retorno para o tempo  $t$ ; retornamos para este ponto depois de ter percorrido a parte superior do ciclo, assim temos que tomar a parte inferior do ciclo, mas partindo de o ponto  $t_i$ , tal como se mostra **no figura abaixo**. Assim, usando a solução (3.16) para a função  $\hat{y}_+(t)$ , podemos tomar a evolução de o tempo  $t_i$  até o ponto  $t_f$ , e alcançar de novo o ponto  $t$  segundo a parte inferior da trajetória marcada pelo ciclo

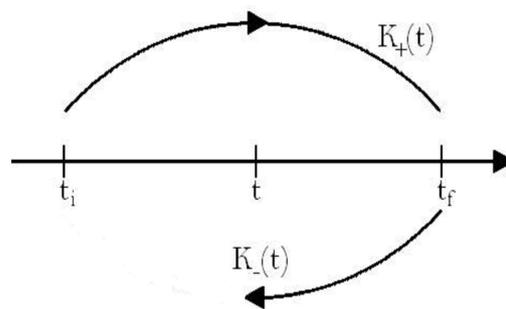


Figura 4: Nesta figura se evidencia a forma em que o ponto de retorno  $t$  é tomado, assim, observamos que para poder voltar nele precisamos da força externa  $K_-(t)$ .

para este caso, a solução vem dada por

$$\hat{y}_-(t) = e^{-i\omega(t-t_i)} \hat{y}_+(t_i) - i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} K_+(t') dt' + i \int_t^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} K_-(t') dt'. \quad (3.19)$$

Como no caso anterior, podemos definir uma nova função degrau, contudo, desta vez

com o propósito de mostrar o sentido que leva a dinâmica relacionada com a parte inferior do ciclo

$$\eta_-(t-t') = \begin{cases} 1 & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases} .$$

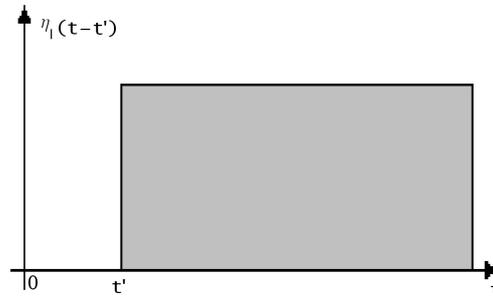


Figura 5: Função degrau para a orientação para atrás na evolução temporal.

Então, a integral indefinida em (3.19) pode ficar expressa como

$$\int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \eta_-(t-t') K_-(t') dt' = \int_t^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} K_-(t') dt' .$$

Assim, a expressão para  $\hat{y}_-(t)$  é

$$\begin{aligned} \hat{y}_-(t) = & e^{-i\omega(t-t_i)} \hat{y}_+(t_i) - i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} K_+(t') dt' \\ & + i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \eta_-(t-t') K_-(t') dt' . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Agora, definimos as expressões conjugadas para a evolução dos operadores. Nestes casos, temos que a evolução temporal do sistema é estudada no sentido anti-horário da trajetória temporalmente fechada, mas mantendo a dinâmica em cada um dos lados

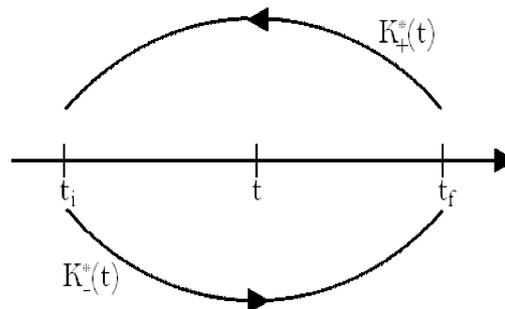


Figura 6: Mantendo a zeta horizontal indicando a direção da evolução temporal do parâmetro tempo  $t$ , o operador adjunto evolui no sentido oposto do ciclo devido a que este tipo de operador representa sempre a operação inversa.

Desta forma, tomando as expressões iniciais para a evolução do operador adjunto

$$\hat{y}^\dagger(t) = e^{i\omega(t-t_i)} \hat{y}^\dagger(t_i) + i \int_{t_i}^t K^*(t') e^{i\omega(t-t')} dt',$$

podemos ver de igual maneira que no estudo anterior a evolução do operador a partir do tempo  $t_i$  até um tempo  $t$ , é dada pela seguinte expressão

$$\hat{y}_-^\dagger(t) = e^{i\omega(t-t_i)} \hat{y}_-^\dagger(t_i) + i \int_{t_i}^t K_-^*(t') e^{i\omega(t-t')} dt',$$

o subíndice  $-$  indica que a evolução temporal é dada no sentido inverso do tempo, neste caso podemos usar a função  $\eta_-(t-t')$ , mas para isto temos que mudar o sinal do exponencial; a combinação destas duas mudanças mantém a forma da função. Assim, temos que

$$\hat{y}_-^\dagger(t) = e^{i\omega(t-t_i)} \hat{y}_-^\dagger(t_i) + i \int_{t_i}^t e^{-i\omega(t-t')} \eta_-(t-t') K_-^*(t') dt'. \quad (3.21)$$

Se comparamos  $\hat{y}_-^\dagger(t)$ , podemos ver que a troca do índice "+" por "-", nos sinais dos operadores dentro do integrando para  $\hat{y}_+(t)$ , obtemos facilmente

$$\hat{y}_+(t) \xrightarrow{+ \rightarrow -} \hat{y}_-^\dagger(t)$$

assim, temos que

$$\hat{y}_+^\dagger(t) = e^{i\omega(t-t_i)} \hat{y}_-^\dagger(t_i) + i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} K_-^*(t') dt' - i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \eta_+(t-t') K_+^*(t') dt'. \quad (3.22)$$

### 3.2.3 Construção da função de transformação

Com as definições anteriores pode-se construir a função de transformação referindo-se ao menor estado de energia do oscilador livre (3.2),

$$\langle 0, t_i | y^\dagger(t_i) y(t_i) | 0, t_i \rangle = 0,$$

ou, equivalentemente, pelas equações de vetores-próprios

$$y(t_i) | 0, t_i \rangle = 0, \quad (3.23)$$

$$\langle 0, t_i | y^\dagger(t_i) = 0.$$

Para a análise seguinte serão examinados os efeitos induzidos pelas mudanças em  $K_-(t)$  e  $K_+(t)$  e, de  $K_-^*(t)$  e  $K_+^*(t)$ , já que os acoplamentos destes termos com as variáveis dinâmicas do sistema são uma ferramenta para o cálculo dos valores esperados de funções de operadores. Então as variações nestas quantidades serão refleti-

das nas formas como definimos as funções dos operadores<sup>¶</sup>. Para dar uso á expressão (3.14), podemos ver que cada uma das dinâmicas é dada pelos Lagrangeanos

$$\begin{aligned}\hat{L}_- &= i\hat{y}_-^\dagger \frac{d\hat{y}_-}{dt} - \omega\hat{y}_-^\dagger \hat{y}_- - \hat{y}_-^\dagger K_-(t) - \hat{y}_- K_-^*(t), \\ \hat{L}_+ &= i\hat{y}_+^\dagger \frac{d\hat{y}_+}{dt} - \omega\hat{y}_+^\dagger \hat{y}_+ - \hat{y}_+^\dagger K_+(t) - \hat{y}_+ K_+^*(t).\end{aligned}$$

Assim, ao realizarmos as variações sobre os forças externas na função de transformação e levando em conta o fato de que estamos fazendo o cálculo com as condições (3.23), temos que

$$\begin{aligned}\delta_K \langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm} &= -i \langle t_i | \int_{t_i}^{t_f} dt (\delta K_+^*(t) \hat{y}_+(t) - \delta K_-^*(t) \hat{y}_-(t)) | t_i \rangle \\ &\quad -i \langle t_i | \int_{t_i}^{t_f} dt (\hat{y}_+^\dagger(t) \delta K_+(t) - \hat{y}_-^\dagger(t) \delta K_-(t)) | t_i \rangle,\end{aligned}\quad (3.24)$$

levando em conta (3.23), se tomarmos

$$\hat{y}_+(t_i) = \hat{y}_-^\dagger(t_i) = 0,$$

assim, temos as seguintes soluções

$$\begin{aligned}\hat{y}_+(t) &= -i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \eta_+(t-t') K_+(t') dt', \\ \hat{y}_-(t) &= -i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \{K_+(t') - \eta_-(t-t') K_-(t')\} dt', \\ \hat{y}_+^\dagger(t) &= i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \{K_-^*(t') - \eta_+(t-t') K_+^*(t')\} dt', \\ \hat{y}_-^\dagger(t) &= i \int_{t_i}^t e^{-i\omega(t-t')} \eta_-(t-t') K_-^*(t') dt',\end{aligned}$$

desta forma temos que o termo  $\delta K_+^*(t) \hat{y}_+(t) - \delta K_-^*(t) \hat{y}_-(t)$ , presente na variação de (3.24) fica expresso por

$$\begin{aligned}&\delta K_+^*(t) \hat{y}_+(t) - \delta K_-^*(t) \hat{y}_-(t) \\ &= -i \delta K_+^*(t) \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \eta_+(t-t') K_+(t') dt' \\ &\quad + i \delta K_-^*(t) \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \{K_+(t') - \eta_-(t-t') K_-(t')\} dt' \\ &= -i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \begin{pmatrix} \delta K_+^*(t) & \delta K_-^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_+(t-t') & 0 \\ -1 & \eta_-(t-t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_+(t') \\ K_-(t') \end{pmatrix} dt',\end{aligned}$$

<sup>¶</sup> Como será mostrado mas adiante, a função de transformação será igual á unidade se  $K_-^*(t) = K_+^*(t)$ , e  $K_-(t) = K_+(t)$ .

e da mesma forma o produto  $\hat{y}_+^\dagger(t)\delta K_+(t) - \hat{y}_-^\dagger(t)\delta K_-(t)$  pode ser expresso como

$$\begin{aligned}
& \hat{y}_+^\dagger(t)\delta K_+(t) - \hat{y}_-^\dagger(t)\delta K_-(t) \\
= & i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \{K_-^*(t') - \eta_+(t-t')K_+^*(t')\} dt' \delta K_+(t) \\
& - i \int_{t_i}^t e^{-i\omega(t-t')} \eta_-(t-t')K_-^*(t') dt' \delta K_-(t) \\
= & -i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t-t')} \begin{pmatrix} K_+^*(t) & K_-^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_+(t-t') & 0 \\ -1 & \eta_-(t-t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta K_+(t') \\ \delta K_-(t') \end{pmatrix} dt',
\end{aligned}$$

que introduzido no integrando inicial da função de transformação (3.24), é

$$\begin{aligned}
& \delta_K \langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm} \\
= & -i \langle t_i | \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} \begin{pmatrix} K_+^*(t) & K_-^*(t) \end{pmatrix} \left\{ -ie^{-i\omega(t-t')} \begin{pmatrix} \eta_+(t-t') & 0 \\ -1 & \eta_-(t-t') \end{pmatrix} \right\} \\
& \times \begin{pmatrix} \delta K_+(t') \\ \delta K_-(t') \end{pmatrix} dt' dt | t_i \rangle,
\end{aligned}$$

se definirmos

$$iG_0(t-t') = e^{-i\omega(t-t')} \begin{pmatrix} \eta_+(t-t') & 0 \\ -1 & \eta_-(t-t') \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} K_+(t) \\ K_-(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}^*(t) = \begin{pmatrix} K_+^*(t) & K_-^*(t) \end{pmatrix},$$

temos que a função de transformação fica dada pela seguinte expressão

$$\langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm} = \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \mathbf{K}(t') \right]. \quad (3.25)$$

Podemos ver que se identificarmos  $K_-^* = K_+^* = K^*$ , e  $K_- = K_+ = K$ , na expressão

$$\begin{aligned}
& \mathbf{K}^*(t)G_0(t-t')\mathbf{K}(t') \\
= & -ie^{-i\omega(t-t')} \begin{pmatrix} K_+^*(t) & K_-^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_+(t-t') & 0 \\ -1 & \eta_-(t-t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_+(t') \\ K_-(t') \end{pmatrix} \\
= & -ie^{-i\omega(t-t')} (K_+(t') K_+^*(t)\eta_+(t-t') + K_-^*(t)K_-(t')\eta_-(t-t') - K_-^*(t)K_+(t')),
\end{aligned}$$

e usamos o fato de que

$$\eta_+(t-t') + \eta_-(t-t') = 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}^*(t)G_0(t-t')\mathbf{K}(t') \Big|_{K_-(t)=K_+(t); K_-(t)=K_+^*(t)} \\ &= -ie^{-i\omega(t-t')} (K(t') K^*(t) [\eta_+(t-t') + \eta_-(t-t')] - K^*(t)K(t')) = 0, \end{aligned}$$

com o que mostramos

$$\langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm} \Big|_{K_-(t)=K_+(t); K_-(t)=K_+^*(t)} = 1. \quad (3.26)$$

Agora uma interpretação de  $G_0(t-t')$  como uma quantidade que pode ser derivada de maneira padrão no formalismo pode ser vista se fizermos duas variações consecutivas a (3.25) para cada um das forças externas, e depois fazemos as suas fontes zero. Assim, temos que a primeira variação é dada por

$$\delta_K \langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm} = -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt' dt \delta \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \delta \mathbf{K}(t') \langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm},$$

e uma segunda origina

$$\begin{aligned} \delta_{K^*} \delta_K \langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm} &= -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt' dt \delta \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \delta \mathbf{K}(t') \langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm} \\ &- \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \mathbf{K}(t') \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \delta \mathbf{K}(t') \langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm}, \end{aligned}$$

assim se fazemos em

$$\delta_{K^*} \delta_K \langle t_i | t_i \rangle_0^{K^\pm} \Big|_{\mathbf{K}^*=\mathbf{K}=0} = -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt' dt \delta \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \delta \mathbf{K}(t'). \quad (3.27)$$

Uma forma geral para a derivação de (3.27), pode ser tirada dos resultados anteriores, se fizermos duas variações consecutivas na estrutura do Lagrangeano  $\hat{L}$  em (3.14), mas levando em conta que a dependência temporal não é de forma geral explícita. Assim, teremos que a primeira variação vai ser dada por

$$\delta_1 \langle t_i | t_i \rangle = i \langle t_i | \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \delta_1 L_+(t) - \int_{t_i}^{t_f} dt \delta_1 L_-(t) \right] | t_i \rangle, \quad (3.28)$$

ao fazer outra variação á função de transformação anterior, temos que levar em conta uma composição dos operadores que fazem a transformação infinitesimal, em que o sinal inferior sugere um ordenamento temporal, assim

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 \langle t_i | t_i \rangle &= - \langle t_i | \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \{ \delta_1 L_+(t) \delta_2 L_+(t') - \delta_1 L_+(t) \delta_2 L_-(t') \\ &- \delta_1 L_-(t) \delta_2 L_+(t') + \delta_1 L_-(t) \delta_2 L_-(t') \} | t_i \rangle, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde se considerarmos o sentido da evolução temporal  $t' < t$  rearrajamos os termos

anteriores para obter agora

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 \langle t_i | t_i \rangle &= - \langle t_i | \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \{ \delta_1 L_+(t) \delta_2 L_+(t') - \delta_2 L_-(t') \delta_1 L_+(t) \\ &\quad - \delta_1 L_-(t) \delta_2 L_+(t') + \delta_1 L_-(t) \delta_2 L_-(t') \} (t') | t_i \rangle \end{aligned} \quad (3.30)$$

como vimos no princípio, a dependência funcional dos Lagrangeanos é dada por

$$L_{\pm}(t) = L_{\pm}(\hat{y}_{\pm}, \hat{y}_{\pm}^{\dagger}; t), \quad (3.31)$$

assim, podemos ver que cada termo na forma (3.30) em comparação com a função (3.27) derivada para o caso anterior, podemos identificar os valores esperados

$$\begin{aligned} iG_0(t-t') &= \begin{pmatrix} \langle (\hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t'))_+ \rangle_0 & - \langle \hat{y}^{\dagger}(t') \hat{y}(t) \rangle_0 \\ \langle \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') \rangle_0 & \langle (\hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t'))_- \rangle_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\omega(t-t')} \eta_+(t-t') & 0 \\ -e^{-i\omega(t-t')} & e^{-i\omega(t-t')} \eta_-(t-t') \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da propriedade que tem os elementos da diagonal de  $G_0(t-t')$

$$\begin{aligned} \left( \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') \right)_+ + \left( \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') \right)_- &= \{ \hat{y}(t), \hat{y}^{\dagger}(t') \} \\ &= \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') + \hat{y}^{\dagger}(t') \hat{y}(t), \end{aligned}$$

assim temos que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \left( \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') + \hat{y}^{\dagger}(t') \hat{y}(t) \right) | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{y}^{\dagger}(t') \hat{y}(t) | 0 \rangle \\ &= e^{-i\omega(t-t')} \end{aligned}$$

que é equivalente a ter

$$\begin{aligned} \langle 0 | \left( \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') \right)_+ + \left( \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') \right)_- | 0 \rangle &= \langle 0 | \left( \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') \right)_+ | 0 \rangle + \langle 0 | \left( \hat{y}(t) \hat{y}^{\dagger}(t') \right)_- | 0 \rangle \\ &= e^{-i\omega(t-t')} \eta_+(t-t') + e^{-i\omega(t-t')} \eta_-(t-t') \\ &= e^{-i\omega(t-t')} (\eta_+(t-t') + \eta_-(t-t')) \\ &= e^{-i\omega(t-t')}, \end{aligned}$$

todos os resultados anteriores foram realizados, considerando o valor esperado do estado livre do oscilador harmônico.

A função de transformação (3.25) não é a única que pode ser derivada, já que podemos construir uma função de transformação para qualquer estado inicial do oscilador. Para estes casos, podemos fazer uso do seguinte procedimento: considerando

as seguintes forças impulsoras

$$\begin{aligned} K_+(t) &= iy''\delta(t-t_i) \\ K_-^*(t) &= -iy'^{\dagger}\delta(t-t_i) \end{aligned} \quad (3.32)$$

que introduzem a dependência funcional de operadores na função de transformação, que permitem descrever pequenas mudanças do sistema depois de um ciclo, sendo reintroduzidas como forças externas, e impulso inicial do seguinte, tais efeitos podem ser vistos nas seguintes relações,

$$\begin{aligned} y'' &= \hat{y}_+(t+0) - \hat{y}_+(t), \\ y'^{\dagger} &= \hat{y}_-^{\dagger}(t+0) - \hat{y}_-^{\dagger}(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

com o 0 indicando uma quantidade infinitesimalmente pequena. Assim, partindo da função anterior, podemos notar que a introdução destes forças externas, induzem a mudança sobre os estados iniciais  $|0, t_i\rangle$  e  $\langle 0, t_i|$  para estados da forma  $|y_i'^{\dagger}, t_i\rangle$  e  $\langle y_i'', t_i|$ . Esta mudança é provocada basicamente pela presença do impulso unitário na força externa mudando instantaneamente o estado, sendo assim, vemos que se fizermos a substituição das forças externas (3.32) nas equações iniciais (3.15) obtemos os resultados (3.33), que têm a seguinte influência sobre o estado de vácuo

$$[\hat{y}_+(t_i+0) - \hat{y}_+(t_i)]|0, t_i\rangle = \hat{y}_+(t_i+0)|0, t_i\rangle = y''|0, t_i\rangle$$

o que forma uma equação de valores próprios mostrando que em

$$\hat{y}_+(t_i+0)|0, t_i\rangle = y''|0, t_i\rangle.$$

O estado  $|0, t_i\rangle$  é equivalente ao estado  $|y'', t_i+0\rangle$ . Assim, teremos que na função de transformação para o estado de vácuo ocorrem mudanças que originam uma expressão para uma transição geral entre qualquer dois estados de energia do oscilador, que tem a seguinte forma

$$\langle y_i'^{\dagger}, t_i | y_i'', t_i \rangle^{K_{\pm}} = \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \underline{\mathbf{K}}^*(t) G(t-t') \underline{\mathbf{K}}(t') \right],$$

onde expandindo a expressão levando em conta que agora os termos das forças externas são:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}^*(t) &= \begin{pmatrix} K_+^*(t) & K_-^*(t) - iy'^{\dagger}\delta(t-t_i) \end{pmatrix}, \\ \underline{\mathbf{K}}(t) &= \begin{pmatrix} K_+(t) + iy''\delta(t-t_i) \\ K_-(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o integrando do lado direito da função de transformação ficará da seguinte forma

$$\begin{aligned}
& -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \underline{\mathbf{K}}^*(t) G(t-t') \underline{\mathbf{K}}(t') = \\
& = - \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' e^{-i\omega(t-t')} \begin{pmatrix} K_+^*(t) & K_-^*(t) - iy'^\dagger \delta(t-t_i) \end{pmatrix} \\
& \quad \times \begin{pmatrix} \eta_+(t-t') & 0 \\ -1 & \eta_-(t-t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_+(t') + iy'' \delta(t'-t_i) \\ K_-(t') \end{pmatrix} \\
& = y'^\dagger y'' - iy'' \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_i)} (K_+^*(t) - K_-^*(t)) - iy'^\dagger \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{-i\omega(t_i-t')} (K_+(t') - K_-(t')) \\
& \quad - i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \mathbf{K}(t').
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, a função de transformação em nível geral é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\langle y'^\dagger, t_i | y'', t_i \rangle^{K\pm} & = \exp \left[ y'^\dagger y'' - iy'' \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_i)} (K_+^*(t) - K_-^*(t)) \right. \\
& \quad - iy'^\dagger \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{-i\omega(t_i-t')} (K_+(t') - K_-(t')) \\
& \quad \left. - i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \mathbf{K}(t') \right]. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Para entender como podemos extrair informação, como amplitudes de transição individuais ou espectros, da expressão (3.34), podemos analisar a forma em como foi conseguido o espectro do sistema do oscilador harmônico com frequência constante, assim que a função de transformação obtida para trajetórias temporalmente fechadas dada pela expressão (3.34), também pode ser decomposta na base de estados energia do oscilador harmônico com o propósito de conhecer o espectro do operador Hamiltoniano e as amplitudes de transição entre os estados próprios deste quando uma força externa como o suposto ao longo da dedução esta presente. Denotando a função como

$$\begin{aligned}
\langle y'^\dagger, t_i | y'', t_i \rangle^{K\pm} & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y'^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \langle n, t_i | m, t_i \rangle^{K\pm} \frac{(y'')^m}{\sqrt{m!}} \\
& = \exp[y'^\dagger y'' + y'^\dagger \alpha + \beta y'' + \gamma], \quad (3.35)
\end{aligned}$$

com  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  funções do tempo que fazem da expressão anterior equivalente a (3.34). Podemos comparar a decomposição espectral da função de transformação (3.35), com sua expansão em série de potências, que é dada por

$$\exp[y'^\dagger y'' + y'^\dagger \alpha + \beta y'' + \gamma] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y'^\dagger)^n}{n!} \frac{(y'')^m}{m!} \alpha^n \beta^m \exp[y'^\dagger y'' + \gamma]$$

usando o procedimento mostrado no **Apêndice A** temos que

$$\langle n, t_i | n, t_i \rangle^{K^\pm} = \exp[\gamma] L_n(-\alpha\beta), \quad (3.36)$$

em que as funções  $L_n(x)$  são os polinômios de Laguerre de ordem  $n$ . A expressão (3.36) é particularmente importante, pois expressa o traço da função de transformação nos estados próprios do oscilador harmônico forçado, assim, ela será útil para a descrição de alguns sistemas em que um conjunto de sistemas de osciladores estão sujeitos a determinados tipos de forças, daí e considerando a forma original dos elementos  $\alpha$  e  $\beta$ , temos que

$$\begin{aligned} \langle n, t_i | n, t_i \rangle^{K^\pm} &= \exp[\gamma] L_n(-\alpha\beta) \\ &= \exp\left[-i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \mathbf{K}(t')\right] \\ &\quad \times L_n\left(- \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_i)} (K_+^*(t) - K_-^*(t)) \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{-i\omega(t_i-t')} (K_+(t') - K_-(t'))\right). \end{aligned}$$

### 3.3 Introdução da Temperatura

Com a informação anterior e, principalmente, com a obtenção da função de transformação  $\langle n, t_i | n, t_i \rangle^{K^\pm}$ , podemos construir estruturas que serão úteis para o estudo de sistemas considerados como um conjunto de osciladores; e dada a versatilidade do formalismo, a relação de um estado inicial tal que seja uma mistura estatística de estados próprios do oscilador, poderemos obter informação do sistema macroscópico partindo das características de uma das suas partes. Então, considerando sistema definido como uma mistura estatística de estados próprios do oscilador tal que o  $n$ -ésimo estado tem a probabilidade

$$(1 - e^{-\beta\omega}) e^{-\beta n\omega},$$

onde a quantidade

$$\frac{1}{\beta} = \vartheta,$$

pode ser considerado como a temperatura <sup>||</sup>. Temos que tal superposição pode ser representada por

$$\begin{aligned} &\exp[\gamma] (1 - e^{-\beta\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\omega} L_n(x) \\ &= (1 - e^{-\beta\omega}) \frac{\exp[\gamma]}{2\pi i} \oint \frac{\exp[\xi]}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-\beta\omega} \left[ 1 - \frac{x}{\xi} \right] \right)^n d\xi, \end{aligned} \quad (3.37)$$

<sup>||</sup>A temperatura  $\vartheta$  aqui considerada não obedece a um valor estatístico do sistema, ela faz referência á energia do nível.

segundo a soma de uma série geométrica da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

temos que considerando

$$\left| e^{-\beta\omega} \left[ 1 - \frac{x}{\xi} \right] \right| < 1,$$

podemos expressar a série do lado direito de (3.37) como

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\beta\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\omega} \exp[\gamma] L_n(x) &= (1 - e^{-\beta\omega}) \frac{\exp[\gamma]}{2\pi i} \oint \frac{\exp[\xi]}{\xi - e^{-\beta\omega} [\xi - x]} d\xi \\ &= \frac{\exp[\gamma]}{2\pi i} \oint \exp[\xi] \left( \xi + \frac{x}{e^{\beta\omega} - 1} \right)^{-1} d\xi \\ &= \exp[\gamma] \exp\left[-\frac{x}{e^{\beta\omega} - 1}\right], \end{aligned}$$

poede ser obtida uma importante quantidade

$$\langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K\pm} = \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \mathbf{K}^*(t) G_{\vartheta}(t-t') \mathbf{K}(t') \right] \quad (3.38)$$

na qual temos

$$iG_{\vartheta}(t-t') = iG_0(t-t') + \frac{G_{+0}(t-t_i) G_{-0}(t_i-t')}{e^{\beta\omega} - 1}$$

$$G_{+0}(t-t_i) = e^{-i\omega(t-t_i)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$G_{-0}(t_i-t) = e^{i\omega(t_i-t)} \begin{pmatrix} -1 & , & 1 \end{pmatrix},$$

assim, temos que a nova função  $iG_{\vartheta}(t-t')$  mas esta vez térmica, tem a forma

$$iG_{\vartheta}(t-t') = e^{-i\omega(t-t')} \begin{pmatrix} \eta_+(t-t') + \langle n \rangle_{\vartheta} & -\langle n \rangle_{\vartheta} \\ -1 - \langle n \rangle_{\vartheta} & \eta_-(t-t') + \langle n \rangle_{\vartheta} \end{pmatrix},$$

onde

$$\langle n \rangle_{\vartheta} = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1},$$

esta relacionada com a meio do número de partículas num dado nível  $n$  de energia, (distribuição de Bose-Einstein).

Podemos ver que os resultados anteriores, resumidos na expressão (3.38), podem ser recuperados diretamente resolvendo as equações de movimento, na maneira usada para determinar a função  $\langle 0, t_i | 0, t_i \rangle^{K\pm} = \langle t_i | t_i \rangle_0^{K\pm}$ . Substituindo este pelo valor

esperado no vácuo de um operador  $\hat{U}$ , podemos ver que

$$\langle 0, t_i | 0, t_i \rangle^{K^\pm} = \langle 0, t_i | \hat{U} | 0, t_i \rangle,$$

assim, mudando a condição inicial dada por  $\langle 0, t_i |$ , pelo média estatística

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\beta\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\omega} \langle n, t_i | n, t_i \rangle^{K^\pm} &= (1 - e^{-\beta\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\omega} \langle n, t_i | \hat{U} | n, t_i \rangle \quad (3.39) \\ &= (1 - e^{-\beta\omega}) \text{tr}[\exp[-\beta\omega \hat{y}^\dagger \hat{y}] \hat{U}], \end{aligned}$$

isto dado que os estados  $|n, t_i\rangle$  são os estados próprios do oscilador harmônico livre. Assim, a comparação da expressão (3.38) com (3.39) encontramos a seguinte relação

$$\hat{y}_-(t_i) = \hat{y}_+(t_i) e^{\beta\omega}, \quad (3.40)$$

em lugar da condição inicial  $\hat{y}_+(t_i) = 0$ . A expressão (3.40) é obtida combinando a evolução temporal dada por um parâmetro da forma  $t \rightarrow t + i\beta$ , assim podemos separar que

$$\exp[-\beta\omega \hat{y}^\dagger \hat{y}] \hat{y}(t) \exp[\beta\omega \hat{y}^\dagger \hat{y}] = e^{\beta\omega} \hat{y}(t),$$

desta forma, com a propriedade de ciclicidade do traço temos que

$$\begin{aligned} \text{tr}[\exp[-\beta\omega \hat{y}^\dagger \hat{y}] \hat{y} \hat{U}] &= \text{tr}[\exp[-\beta\omega \hat{y}^\dagger \hat{y}] \hat{y} \exp[\beta\omega \hat{y}^\dagger \hat{y}] \exp[-\beta\omega \hat{y}^\dagger \hat{y}] \hat{U}] \\ &= \text{tr}[e^{\beta\omega} \hat{y} \exp[-\beta\omega \hat{y}^\dagger \hat{y}] \hat{U}] = \text{tr}[\exp[-\beta\omega \hat{y}^\dagger \hat{y}] \hat{U} e^{\beta\omega} \hat{y}]. \end{aligned}$$

Assim, tomando as soluções dadas em (3.20), avaliadas no tempo  $t_i$

$$\begin{aligned} \hat{y}_-(t_i) &= \hat{y}_+(t_i) - i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t_i-t')} K_+(t') dt' + i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t_i-t')} \eta_-(t_i-t') K_-(t') dt' \\ &= \hat{y}_+(t_i) - i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t_i-t')} K_+(t') dt' + i \int_{t_i}^{t_f} e^{-i\omega(t_i-t')} K_-(t') dt', \end{aligned}$$

e tomando a condição inicial dada em (3.40) obtemos

$$\hat{y}_-(t_i) - \hat{y}_+(t_i) = \hat{y}_+(t_i) (e^{\beta\omega} - 1) = -i \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{i\omega(t-t_i)} (K_+(t) - K_-(t)),$$

onde finalmente temos

$$\hat{y}_+(t_i) = -i \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{i\omega(t-t_i)} (K_+(t) - K_-(t)) \quad (3.41)$$

$$= -i \langle n \rangle_{\vartheta} \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{i\omega(t-t')} (K_+(t') - K_-(t')). \quad (3.42)$$

Conseqüentemente, para os previamente determinados  $\hat{y}_\pm(t_i)$  em (3.18), (3.20), (3.21), (3.22) e trocando o termo (3.41), temos de novo a função de transformação térmica

(3.38)

$$\langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} = \langle t_i | t_i \rangle_0^{K_{\pm}} \exp \left[ - \langle n \rangle_{\vartheta} \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' (K_+^*(t) - K_-^*(t)) e^{-i\omega(t-t')} (K_+(t') - K_-(t')) \right],$$

o qual reproduz o resultado inicial ao considerar a mistura térmica no sistema.

É interessante notar que o fato de considerar que a evolução do sistema agora num tempo definido no plano imaginário  $t + i\beta$ , dá as condições de ter introduzido a temperatura considerada na mistura de estados próprios do oscilador harmônico dada (3.37). Este, é um dos primeiros lugares onde além da caracterização da evolução temporal de um sistema, pode se acompanhar suas mudanças térmicas. Desta forma, dependendo desses dois parâmetros, podemos falar do estudo de sistemas fora do equilíbrio.

Como uma aplicação elementar do resultado dado em (3.38), se pode avaliar o valor esperado da energia do oscilador harmônico em um tempo  $t_f$  para um sistema que está em equilíbrio térmico em um tempo  $t_i$  e posteriormente perturbado por uma força dependente do tempo. Esta quantidade pode ser calculada como

$$\langle t_i | \omega \hat{y}^\dagger \hat{y} | t_i \rangle_{\vartheta} = \omega \frac{\delta}{\delta K_-(t)} \frac{\delta}{\delta K_+^*(t)} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} \Big|_{K_+=K_-, K_+^*=K_-^*}.$$

Se tomarmos a forma explícita da expressão para  $\langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}}$ , temos

$$\begin{aligned} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} &= \exp \left[ - \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' e^{-i\omega(t-t')} \begin{pmatrix} K_+^*(t) & K_-^*(t) \\ K_-(t) \{ \eta_+(t-t') + \langle n \rangle_{\vartheta} \} - K_-(t') \langle n \rangle_{\vartheta} \\ K_-(t) \{ \eta_-(t-t') + \langle n \rangle_{\vartheta} \} - K_+(t') \{ 1 + \langle n \rangle_{\vartheta} \} \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

podemos ver que a derivada funcional  $\frac{\delta}{\delta K_+^*(t_f)} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}}$  nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta K_+^*(t_f)} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} &= - \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t_f-t)} (K_+(t) \{ \eta_+(t_f-t) + \langle n \rangle_{\vartheta} \} - K_-(t) \langle n \rangle_{\vartheta}) \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t_f-t)} [K_+(t) - \langle n \rangle_{\vartheta} (K_+(t) - K_-(t))] \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}}, \end{aligned}$$

uma subsequente derivação  $\frac{\delta}{\delta K_-(t)}$  nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta K_-(t_f)} \frac{\delta}{\delta K_+^*(t_f)} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} &= \\ \frac{\delta}{\delta K_-(t_f)} \left( \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t_f-t)} [K_+(t) - \langle n \rangle_{\vartheta} (K_+(t) - K_-(t))] \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} \right), \end{aligned}$$

que é

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta K_-(t_f)} \frac{\delta}{\delta K_+^*(t_f)} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} = \langle n \rangle_{\vartheta} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} \\ & + \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t_f-t)} [K_+(t) - \langle n \rangle_{\vartheta} (K_+(t) - K_-(t))] \frac{\delta}{\delta K_-(t_f)} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} \\ & = \langle n \rangle_{\vartheta} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} \\ & + \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t_f-t)} [K_+(t) - \langle n \rangle_{\vartheta} (K_+(t) - K_-(t))] \\ & \times \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{-i\omega(t-t_f)} [K_-^*(t) \eta_-(t-t_f) + \langle n \rangle_{\vartheta} [K_-^*(t) - K_+^*(t)]] \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}}, \end{aligned}$$

assim, que quando  $K_+ = K_-$ ,  $K_+^* = K_-^*$  temos que  $\frac{\delta}{\delta K_-(t_f)} \frac{\delta}{\delta K_+^*(t_f)} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}}$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta K_-(t)} \frac{\delta}{\delta K_+^*(t)} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} \Big|_{K_+=K_-, K_+^*=K_-^*} &= \langle n \rangle_{\vartheta} + \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t_f-t)} K(t) \times \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{-i\omega(t'-t_f)} K^*(t'), \\ &= \omega \langle n \rangle_{\vartheta} + \omega \left| \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{i\omega t} K(t) \right|^2. \end{aligned}$$

que é o valor esperado de energia requerido.

Da mesma forma todos os valores esperados das funções dos operadores  $\hat{y}(t_f)$  e  $\hat{y}^\dagger(t_f)$ , podem ser derivados do cálculo do valor esperado do operador

$$\exp \left[ -i \left\{ \lambda \hat{y}^\dagger(t_f) + \mu \hat{y}(t_f) \right\} \right],$$

esta quantidade pode ser obtida adicionando, às forças  $K_+(t)$  e  $K_+^*(t)$ , termos impulsivos da forma\*\*

$$\begin{aligned} K_+(t) &= \lambda \delta(t-t_f), \\ K_+^*(t) &= \mu \delta(t-t_f), \end{aligned} \quad (3.43)$$

modificando a função  $\langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}}$ , da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}, \lambda \delta(t-t_f), \mu \delta(t-t_f)} &= \exp \left[ - \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' e^{-i\omega(t-t')} \begin{pmatrix} K_+^*(t) + \mu \delta(t-t_f) & K_-^*(t) \\ \eta_+(t-t') + \langle n \rangle_{\vartheta} & - \langle n \rangle_{\vartheta} \\ -1 - \langle n \rangle_{\vartheta} & \eta_-(t-t') + \langle n \rangle_{\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_+(t') + \lambda \delta(t'-t_f) \\ K_-(t) \end{pmatrix} \right] \\ &= \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} \exp \left[ -\lambda \mu (\langle n \rangle_{\vartheta} + \eta_+(0)) - \mu \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t_f-t)} [K_+(t) - \langle n \rangle_{\vartheta} (K_+(t) - K_-(t))] \right. \\ & \quad \left. + \lambda \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} [K_-^*(t) \eta_-(t-t_f) - \langle n \rangle_{\vartheta} [K_-^*(t) - K_+^*(t)]] \right], \end{aligned}$$

assim, como para todos os valores esperados devemos tomar o caso em que  $K_+ =$

\*\*Aqui, não é usada a conjugação-complexa.

$$K_-, K_+^* = K_-^*$$

$$\begin{aligned} & \langle t_i | \exp \left[ -i \left\{ \lambda \hat{y}^\dagger(t_f) + \mu \hat{y}(t_f) \right\} \right] | t_i \rangle_{\vartheta} = \\ & = \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}, \lambda \delta(t-t_f), \mu \delta(t-t_f)} \Big|_{K_+ = K_-, K_+^* = K_-^*} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$= \exp \left[ -\lambda \mu \left( \langle n \rangle_{\vartheta} + \frac{1}{2} \right) + \lambda \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} K^*(t) - \mu \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega(t-t_f)} K(t) \right] \quad (3.45)$$

o qual envolve o valor especial da função degrau  $\eta_+(0) = \frac{1}{2}$ .

Alternativamente, se fizermos a escolha

$$\begin{aligned} K_+(t) &= \lambda \delta(t - t_f), \\ K_+^*(t) &= \mu \delta(t - t_f + 0), \end{aligned} \quad (3.46)$$

obtemos da mesma forma que no caso anterior

$$\begin{aligned} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}, \lambda \delta(t-t_f), \mu \delta(t-t_f)} &= \exp \left[ - \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' e^{-i\omega(t-t')} \left( \begin{array}{cc} K_+^*(t) + \mu \delta(t - t_f + 0) & K_-^*(t) \\ \eta_+(t - t') + \langle n \rangle_{\vartheta} & - \langle n \rangle_{\vartheta} \\ -1 - \langle n \rangle_{\vartheta} & \eta_-(t - t') + \langle n \rangle_{\vartheta} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} K_+(t') + \lambda \delta(t' - t_f) \\ K_-(t) \end{array} \right) \right] \\ &= \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta}^{K_{\pm}} \exp \left[ -\lambda \mu (\langle n \rangle_{\vartheta} + \eta_+(0)) \right. \\ &\quad \left. - \mu \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t_f-t)} [K_+(t) - \langle n \rangle_{\vartheta} (K_+(t) - K_-(t))] \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} [K_-^*(t) \eta_-(t - t_f) - \langle n \rangle_{\vartheta} [K_-^*(t) - K_+^*(t)]] \right], \end{aligned}$$

a diferença do caso anterior para as forças impulsivas (3.43), o fato da diferença de tempos finais em (3.46), manifesta-se no fato de que o termo  $\eta_+(-0) = 0$ , considerando as relações de comutação  $[\hat{y}^\dagger(t_f), \hat{y}(t_f)]$ , obtemos como resultado

$$\begin{aligned} & \langle t_i | \exp \left[ -i \lambda \hat{y}^\dagger(t_f) \right] \exp \left[ -i \mu \hat{y}(t_f) \right] | t_i \rangle_{\vartheta} \\ & = \exp \left[ -\lambda \mu \langle n \rangle_{\vartheta} + \lambda \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega(t_f-t)} K^*(t) - \mu \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t_f-t)} K(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Com os resultados obtidos em (3.45) e (3.47), podemos ver que o cálculo de valores esperados não nos impede de calcular as probabilidades individuais. Na verdade, pode ser calculada a probabilidade de transição para um estado específico de energia do oscilador harmônico; temos somente que mostrar os operadores de projeção sobre estes estados como funções dos operadores  $\hat{y}^\dagger$  e  $\hat{y}$ ; desta forma os valores esperados para os quais as probabilidades são requeridas.

Tomando o projetor

$$P_n = |n\rangle \langle n|,$$

podemos ver que este operador pode ser representado pelo o elemento de matriz

$$\begin{aligned}\langle y'^{\dagger} | P_n | y'' \rangle &= \langle y'^{\dagger} | n \rangle \langle n | y'' \rangle = \frac{(y'^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} \frac{(y'')^n}{\sqrt{n!}} \\ &= \frac{(y'^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} \frac{(y'')^n}{\sqrt{n!}} \exp[-y'^{\dagger} y''] \langle y'^{\dagger} | y'' \rangle ;\end{aligned}$$

aqui pode se ver o uso dos operadores de criação e aniquilação

$$\left(\hat{y}^{\dagger}\right)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle ,$$

desta forma, levando em conta o anterior, podemos ver facilmente que o projetor  $P_n$  ao estado  $n$  pode se ver como

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{(\hat{y}^{\dagger})^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\hat{y}^{\dagger})^k (\hat{y})^k}{k!} (\hat{y})^n \\ &= \frac{(\hat{y}^{\dagger})^n}{n!} \exp[-\hat{y}^{\dagger}; \hat{y}] (\hat{y})^n ,\end{aligned}\tag{3.48}$$

e onde também podemos ver que dará a probabilidade que o oscilador harmônico este no estado  $n$  – *ésimo*. Na expressão (3.48) foi introduzida a notação  $(;)$  para indicar que é uma multiplicação ordenada de operadores.

Uma função geradora conveniente para estes operadores de projeção no caso térmico é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n = \exp[-(1-\alpha) \hat{y}^{\dagger}; \hat{y}],\tag{3.49}$$

a expressão anterior pode ser entendida como a função geratriz das probabilidades de transição do sistema para cada um dos estados específicos do oscilador harmônico, dado que esta expressa em uma série de potências dos elementos  $(1-\alpha) \hat{y}^{\dagger}; \hat{y}$ , que são os projetores a cada um dos estados envolvidos. Assim que o termo da ordem  $n$  na expansão será o projetor ao  $n$  – *ésimo* estado. dado que os elementos na expansão  $\hat{y}^{\dagger}$  e  $\hat{y}$  são associados com os elementos acompanhantes dos fatores em (3.47), assim que se aplicarmos (3.49) sobre (3.47) observamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n = \exp \left[ (1-\alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \exp \left[ -i\lambda \hat{y}^{\dagger}(t_f) \right] \exp \left[ -i\mu \hat{y}(t_f) \right] \Big|_{\lambda=\mu=0} ,$$

isto se deve á derivação pelo fator  $(1-\alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu}$  da função  $\exp \left[ -i\lambda \hat{y}^{\dagger}(t_f) \right] \exp \left[ -i\mu \hat{y}(t_f) \right]$ , já que identifica o

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} &\rightarrow \hat{y}^{\dagger}, \\ \frac{\partial}{\partial \mu} &\rightarrow \hat{y},\end{aligned}$$

origina um fator de concordância com a expansão em série de potências (3.49), assim

cada termo fará com que

$$(1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp \left[ -i\lambda \hat{y}^\dagger(t_f) \right] \frac{\partial}{\partial \mu} \exp \left[ -i\mu \hat{y}(t_f) \right] = \\ (1 - \alpha) \left[ -i\hat{y}^\dagger(t_f) \right] \exp \left[ -i\lambda \hat{y}^\dagger(t_f) \right] \left[ -i\hat{y}(t_f) \right] \exp \left[ -i\mu \hat{y}(t_f) \right],$$

tendo no  $\lim_{\lambda=\mu \rightarrow 0}$

$$(\alpha - 1) \hat{y}^\dagger(t_f) \hat{y}(t_f),$$

e, conseqüentemente, a soma de todos os termos conduz a obtenção da função geratriz (3.49), que será equivalente a avaliar as derivações sobre o valor esperado calculado em (3.47) no  $\lim_{\lambda=\mu \rightarrow 0}$ , como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p(n, \vartheta, K) = \exp \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \exp \left[ -\lambda \mu \langle n \rangle_\vartheta \right. \\ \left. + \lambda \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} K^*(t) - \mu \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} K(t) \right] \Big|_{\lambda=\mu=0},$$

onde o termo  $p(n, \vartheta, K)$ , é a probabilidade de se-encontrar o oscilador harmônico no  $n$  -ésimo estado, depois da aplicação de uma força externa arbitrária dependente do tempo tem atuado. Se o sistema foi inicialmente descrito por uma mistura térmica de estados, depois de um análise matemática da expressão anterior (ver **Apendice B**), temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p(n, \vartheta, K) = \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} \exp \left[ -|\gamma|^2 \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} (1 - \alpha) \right],$$

onde

$$|\gamma|^2 = \left| \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega t} K(t) \right|^2,$$

e de onde obtemos

$$p(n, \vartheta, K) = \left( 1 - e^{-\beta\omega} \right) \exp \left[ -|\gamma|^2 \left( 1 - e^{-\beta\omega} \right) \right] e^{-n\beta\omega} L_n \left[ -4|\gamma|^2 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right) \right].$$

Além de descrever uma situação física de um equilíbrio térmico inicial, este resultado, fornece uma função geradora para as probabilidades de transição entre cada um dos estados do oscilador harmônico,

$$\sum_{n'=0}^{\infty} p(n, n', K) e^{-\beta\omega(n'-n)} = \exp \left[ -|\gamma|^2 \left( 1 - e^{-\beta\omega} \right) \right] L_n \left[ -4|\gamma|^2 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right) \right] \\ = \exp \left[ -|\gamma|^2 \left( 1 - e^{-\beta\omega} \right) \right] L_n \left[ |\gamma|^2 \left( 1 - e^{-\beta\omega} \right) \left( 1 - e^{\beta\omega} \right) \right],$$

desta forma, temos que o elemento na expansão é dado por

$$p(n, n', K) = \frac{n_{<}!}{n_{>}!} \left( |\gamma|^2 \right)^{n_{>} - n_{<}} \left[ L_{n_{>}}^{n_{>} - n_{<}} \left( |\gamma|^2 \right) \right]^2 \exp \left[ -|\gamma|^2 \right],$$

na qual  $n_>$  e  $n_<$  representam o maior e o menor dos dois inteiros  $n$  e  $n'$ .

Além das derivações anteriores podemos calcular outra forma interessante de encontrar os valores esperados térmicos. Para isto, retornaremos á trajetória em diferentes tempos, dando o tempo  $t'_i = t_i - T$ , e mantendo a função de transformação como uma matriz, e computamos a razão dos traços; assim

$$\frac{\text{tr} \langle t'_i | t_i \rangle^{K_{\pm}}}{\text{tr} \langle t'_i | t_i \rangle}, \quad (3.50)$$

podemos ver que esta razão ficará reduzida á unidade no caso em que não se tenham forças externas. Podemos ver que por se tratar de um traço o Princípio Variacional de novo descreve a dependência sobre  $K_{\pm}^*(t)$  e  $K_{\pm}(t)$  por meio dos operadores  $y_{\pm}^{\dagger}(t)$  e  $y_{\pm}(t)$ , os quais são relacionados com as forças por meio das equações de movimento e, em particular (3.20), temos

$$\hat{y}_-(t'_i) = e^{-i\omega(t'_i-t_i)} \hat{y}_+(t_i) - i \int_{t_i}^{t'_i} e^{-i\omega(t'_i-t)} K_+(t) dt - i \int_{t'_i}^{t_i} e^{-i\omega(t'_i-t)} K_-(t) dt,$$

podemos reconhecer que a estrutura de traço implica em uma condição de contorno da forma

$$\hat{y}_-(t'_i) = \hat{y}_+(t_i).$$

Agora consideremos

$$\text{tr} \langle t'_i | \hat{y}_-(t'_i) | t_i \rangle = \sum_a \langle a, t'_i | \hat{y}_-(t'_i) | a, t_i \rangle,$$

em que requeremos a base  $\{|a\rangle\}$ , sem uma dependência temporal. Então

$$\langle a, t'_i | \hat{y}_-(t'_i) = \sum_{a'} \langle a | \hat{y} | a' \rangle \langle a', t'_i |$$

e

$$\text{tr} \langle t'_i | \hat{y}_-(t'_i) | t_i \rangle = \sum_a \sum_{a'} \langle a', t'_i | a, t_i \rangle \langle a' | \hat{y} | a \rangle$$

dada a não dependência temporal da base escolhida, podemos ver que é equivalente somente no caso em que consideramos o traço

$$\sum_a \sum_{a'} \langle a', t'_i | a, t_i \rangle \langle a' | \hat{y} | a \rangle = \text{tr} \langle t'_i | \hat{y}_-(t'_i) | t_i \rangle,$$

o que implica que neste caso especial

$$\text{tr} \langle t'_i | \hat{y}_-(t'_i) | t_i \rangle = \text{tr} \langle t'_i | \hat{y}_-(t_i) | t_i \rangle,$$

com o qual é estabelecido o resultado.

A condição inicial efetiva agora aparece como

$$\hat{y}_+(t_i) = i \frac{1}{e^{-i\omega T} - 1} \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega(t-t_i)} K_+(t) - \int_{t'_i}^{t_f} dt e^{i\omega(t-t_i)} K_-(t) \right],$$

e assim, temos que (3.50) implica no cálculo da seguinte razão:

$$\exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \mathbf{K}^*(t) G_0(t-t') \mathbf{K}(t') \right] \times \exp \left[ -\frac{1}{e^{-i\omega T} - 1} \left| \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega t} (K_+(t) - K_-(t)) \right|^2 \right],$$

onde a variável temporal em  $K_+(t)$  e  $K_-(t)$  toma valores entre  $t_i$  e  $t_f$ , respectivamente. Para resolver o problema físico dado não precisamos que  $K_-(t)$  possa desaparecer no intervalo  $(t'_i, t_i)$ , assim, todas as integrais poderiam ser definidas no intervalo  $(t_i, t_f)$ . Então, dado que

$$\langle t'_i | = \langle t_i | e^{-i\omega(t'_i-t_i)n}, \quad n = \hat{y}^\dagger \hat{y}(t_i),$$

que foi avaliado na mesma forma que

$$\frac{\text{tr} \langle t_i | e^{i\omega T n} | t_i \rangle^{K_\pm}}{\text{tr} \langle t_i | e^{i\omega T n} | t_i \rangle},$$

e que esta razão continua existindo se fazermos a substituição

$$-iT = \beta > 0,$$

a fórmula desejada resulta como

$$\frac{\text{tr} \langle t_i | e^{i\omega T n} | t_i \rangle^{K_\pm}}{\text{tr} \langle t_i | e^{i\omega T n} | t_i \rangle} = \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \mathbf{K}^*(t) G_\beta(t-t') \mathbf{K}(t') \right],$$

que é uma expressão equivalente com (3.38).

### 3.4 Acoplamento com um Sistema Externo

No desenvolvimento anterior, o estudo do problema do oscilador harmônico forneceu ferramentas que nos permitirão a análise um problema físico verdadeiro: um oscilador sujeito a uma força externa e debilmente acoplado com um sistema externo. Para este tratamento, todas as interações do oscilador são consideradas como lineares nas variáveis de posição, assim o lagrangeano para o sistema pode ser dado como

$$\hat{L} = i\hat{y}^\dagger \frac{d\hat{y}}{dt} - \omega_0 \hat{y}^\dagger \hat{y} - \hat{y}^\dagger K(t) - \hat{y} K^*(t) - \sqrt{2}\hat{q}\hat{Q} + \hat{L}_{ext}, \quad (3.51)$$

no qual o setor  $\hat{L}_{ext}$  caracteriza o sistema externo e,  $\hat{Q}(t)$  é um operador hermitiano desse sistema<sup>††</sup>, coloca-se de maneira expressa a dependência da variável hermiteana  $\hat{q}$  dado que o campo externo também poderia estar acoplado á variável  $\hat{p}$ . Podemos levar em conta que esta variável pode ser expressa em função dos operadores  $\hat{y}^\dagger$  e  $\hat{y}$  como em (3.1), fazendo  $\hbar = m = 1, \omega = \omega_0$

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y} + \hat{y}^\dagger). \quad (3.52)$$

No tratamento deste novo sistema, devemos construir uma função de transformação  $\langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta_0, \vartheta}^{K_\pm}$  que descreva o acoplamento entre o sistema descrito, inicialmente, por uma mistura térmica a uma temperatura  $\vartheta_0$  para o oscilador acoplado com um sistema externo descrito por uma mistura térmica a uma temperatura  $\vartheta$ . A temperatura  $\vartheta_0$  pode ser interpretada literalmente ou como um elemento paramétrico para obter os valores esperados referentes aos estados de energia do oscilador.

Para estudar o efeito do acoplamento do oscilador com o sistema externo é introduzido em (3.51) um parâmetro variável  $\lambda$ , modificando o termo  $\sqrt{2}\hat{q}\hat{Q} \rightarrow \sqrt{2}\lambda\hat{q}\hat{Q}$ , com o objetivo principal de extrair dentro dos cálculos os termos nas expansões perturbativas, daí que usando o formalismo de trajetória temporalmente fechada podemos calcular

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \langle t_i | t_i \rangle^{K_\pm} = -i \langle t_i | \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \sqrt{2}\hat{q}_+(t) \hat{Q}_+(t) - \sqrt{2}\hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \right\} \right] | t_i \rangle^{K_\pm}, \quad (3.53)$$

que nos dará em primeiro ordem no acoplamento do oscilador com o sistema externo e, em que a distinção entre as trajetórias, para adiante ou para trás no tempo, provém da aplicação das diferentes forças externas  $K_\pm(t)$  nos dois segmentos do contorno fechado. A caracterização do sistema externo como essencialmente macroscópico é incorporada supondo que pelo seu tamanho, a presença do oscilador não produz nenhum efeito sobre ele.

Assim, em uma primeira ordem na aproximação, os operadores  $\hat{Q}_\pm(t)$  podem ser trocados por quantidades numéricas efetivas, dependentes da temperatura  $\langle \hat{Q}(t) \rangle_\vartheta$ . Os fenômenos que aparecem nesta ordem de precisão são facilmente calculáveis, como foi visto no capítulo II, tendo estas forças externas como constantes ou dependentes do tempo. Assim, por exemplo, para o caso do oscilador harmônico livre, um força constante somente produz um corrimento na energia dos níveis do sistema. Desta maneira a influência nesta ordem de aproximação destes acoplamentos pode ser com-

<sup>††</sup>Para uma melhor compreensão, podemos ter que

$$\hat{L}_{ext} = \hat{L}_{ext} [\hat{Q}(t), \dot{\hat{Q}}(t)].$$

parativamente trivial, embora supomos que

$$\langle \hat{Q}(t) \rangle_{\vartheta} = 0. \quad (3.54)$$

De uma nova diferenciação de (3.53) com respeito ao  $\lambda$ , obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \langle t_i | t_i \rangle^{K\pm} &= -i \langle t_i | \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \sqrt{2} \hat{q}_+(t) \hat{Q}_+(t) - \sqrt{2} \hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt' \left\{ \sqrt{2} \hat{q}_+(t') \hat{Q}_+(t') - \sqrt{2} \hat{q}_-(t') \hat{Q}_-(t') \right\} \right] | t_i \rangle^{K\pm} \\ &= \langle t_i | \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \left[ \left( \hat{q}(t) \hat{Q}(t) \hat{q}(t') \hat{Q}(t') \right)_+ \right. \\ &\quad \left. - 2 \hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \hat{q}_+(t') \hat{Q}_+(t') + \left( \hat{q}(t) \hat{Q}(t) \hat{q}(t') \hat{Q}(t') \right)_- \right] | t_i \rangle^{K\pm}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

A introdução da aproximação é baseada na suposição de que o oscilador afeta debilmente o sistema externo e transforma a expressão anterior em<sup>††</sup> [Ver **Apêndice C**]

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \langle t_i | t_i \rangle^{K\pm} &= \langle t_i | \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \left[ \left( \hat{y}(t') \hat{y}^\dagger(t) \right)_+ A_{++}(t-t') \right. \\ &\quad \left. - \hat{y}_-(t') \hat{y}_+^\dagger(t) A_{++}(t-t') + \hat{y}_-^\dagger(t) \hat{y}_+(t') A_{++}(t-t') \right. \\ &\quad \left. + \left( \hat{y}(t') \hat{y}^\dagger(t) \right)_- A_{--}(t-t') \right] | t_i \rangle^{K\pm}, \end{aligned}$$

dada a debilidade do acoplamento do oscilador com o sistema externo, precisamos ter muitos períodos temporais para que o sistema sinta o efeito acumulado, assim, que as quantidades com uma dependência temporal como  $e^{\pm i\omega_0(t+t')}$  serão suprimidas em comparação com aquelas que variam como  $e^{\pm i\omega_0(t-t')}$ . Neste ponto, é introduzida uma aproximação, que permite ter um termo efetivo no operador ação, que faz referência á trajetória temporalmente fechada do oscilador, poderia reproduzir o valor aproximado de  $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \langle t_i | t_i \rangle$  em  $\lambda = 0$ . Assim, a ação completa que satisfaz este requerimento, com  $\lambda^2$  sendo igual á unidade, é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}} &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( i \hat{y}^\dagger \frac{d\hat{y}}{dt} - \omega_0 \hat{y}^\dagger \hat{y} - \hat{y}^\dagger K(t) - \hat{y} K^*(t) \right) \Big|_{-}^{+} + i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \left[ \left( \hat{y}(t') \hat{y}^\dagger(t) \right)_+ A_{++}(t-t') \right. \\ &\quad \left. - \hat{y}_-(t') \hat{y}_+^\dagger(t) A_{++}(t-t') + \hat{y}_-^\dagger(t) \hat{y}_+(t') A_{++}(t-t') + \left( \hat{y}(t') \hat{y}^\dagger(t) \right)_- A_{--}(t-t') \right]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

A aplicação do Princípio de Variacional em (3.56), fornece as seguintes equações de

<sup>††</sup>Onde transformamos a variável  $\hat{q}$  com a ajuda de (3.52).

movimento que são não locais no tempo

$$i \frac{d\hat{y}_+}{dt} - \omega_0 \hat{y}_+ + i \int_{t_i}^{t_f} dt' [A_{++}(t-t') y_+(t') - A_{+-}(t-t') y_-(t')] = K_+(t) \quad (3.58)$$

$$i \frac{d\hat{y}_-}{dt} - \omega_0 \hat{y}_- - i \int_{t_i}^{t_f} dt [A_{--}(t-t') y_-(t') - A_{-+}(t-t') y_+(t')] = K_-(t) \quad (3.59)$$

$$-i \frac{d\hat{y}_+^\dagger}{dt} - \omega_0 \hat{y}_+^\dagger + i \int_{t_i}^{t_f} dt [y_+^\dagger(t') A_{++}(t-t') - y_-^\dagger(t') A_{-+}(t-t')] = K_+^*(t) \quad (3.60)$$

$$-i \frac{d\hat{y}_-^\dagger}{dt} - \omega_0 \hat{y}_-^\dagger - i \int_{t_i}^{t_f} dt [y_-^\dagger(t') A_{--}(t-t') - y_+^\dagger(t') A_{-+}(t-t')] = K_-^*(t) \quad (3.61)$$

As últimas duas equações são também obtidas combinando formalmente a operação de achar o adjunto com a mudança dos índices  $+ \rightarrow -$ , que acompanham os operadores e forças externas  $K(t)$ . Outras formas de significativo interesse, são dadas pelo par de equações

$$\left( i \frac{d}{dt} - \omega_0 \right) (\hat{y}_- - \hat{y}_+) - i \int_{t_i}^{t_f} dt' [A_{--} - A_{+-}] (t-t') (\hat{y}_- - \hat{y}_+) (t') = K_-(t) - K_+(t), \quad (3.62)$$

e

$$\begin{aligned} \left( i \frac{d}{dt} - \omega_0 \right) (\hat{y}_- + \hat{y}_+) + i \int_{t_i}^{t_f} dt' [A_{++} - A_{+-}] (t-t') (\hat{y}_- + \hat{y}_+) (t') & \quad (3.63) \\ -i \int_{t_i}^{t_f} dt' [A_{+-} - A_{-+}] (t-t') (\hat{y}_- - \hat{y}_+) (t') & = K_-(t) + K_+(t), \end{aligned}$$

onde os termos

$$\begin{aligned} [A_{--} - A_{+-}] (t-t') & = \left\langle \left( \hat{Q}(t), \hat{Q}(t') \right)_- \right\rangle_\vartheta - \left\langle \hat{Q}(t'), \hat{Q}(t) \right\rangle_\vartheta \quad (3.64) \\ & = \eta_-(t-t') \left\langle \hat{Q}(t), \hat{Q}(t') \right\rangle_\vartheta - \left\langle \hat{Q}(t'), \hat{Q}(t) \right\rangle_\vartheta \\ & = \left\langle [\hat{Q}(t), \hat{Q}(t')] \right\rangle_\vartheta \eta_-(t-t'), \\ -[A_{++} - A_{+-}] (t-t') & = - \left\langle \left( \hat{Q}(t), \hat{Q}(t') \right)_- \right\rangle_\vartheta + \left\langle \hat{Q}(t'), \hat{Q}(t) \right\rangle_\vartheta \\ & = \left\langle [\hat{Q}(t), \hat{Q}(t')] \right\rangle_\vartheta \eta_+(t-t'), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [A_{+-} - A_{-+}] (t-t') & = \left\langle \hat{Q}(t) \hat{Q}(t') + \hat{Q}(t') \hat{Q}(t) \right\rangle_\vartheta \\ & = \left\langle \{ \hat{Q}(t), \hat{Q}(t') \} \right\rangle_\vartheta. \end{aligned}$$

O caráter não local destas equações não é muito marcado se, por exemplo, a correlação entre  $\hat{Q}(t)$  e  $\hat{Q}(t')$  no sistema macroscópico desaparece quando  $|t-t'| \ll \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Então, se o comportamento de  $y(t)$  sobre um período temporal curto, é dado aproximadamente por  $\exp[-i\omega t]$ , a matriz  $A(t-t')$  é efetivamente substituída pela sua transfor-

mada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t-t') \exp[-i\omega(t-t')] A(t-t') = A(\omega),$$

assim, os aportes desta, se transformam em funções dependentes somente da frequência e as equações de movimento (3.62) e (3.63) são convertidas em

$$\left(i \frac{d}{dt} - \omega_0\right) (\hat{y}_- - \hat{y}_+) - i [A_{--} - A_{+-}] (\omega) (\hat{y}_- - \hat{y}_+) = K_-(t) - K_+(t),$$

$$\left(i \frac{d}{dt} - \omega_0\right) (\hat{y}_- + \hat{y}_+) + i [A_{++} - A_{+-}] (\hat{y}_- + \hat{y}_+) + i [A_{+-} + A_{-+}] (\omega) (\hat{y}_- - \hat{y}_+) = K_-(t) + K_+(t).$$

Assim que definido

$$\omega_+ = \omega_0 - i [A_{++} - A_{+-}] (\omega) = \tilde{\omega} - \frac{1}{2} i \gamma, \quad (3.65)$$

$$\omega_- = \omega_0 + i [A_{--} - A_{+-}] (\omega) = \tilde{\omega} + \frac{1}{2} i \gamma, \quad (3.66)$$

e

$$a(\omega) = [A_{+-} + A_{-+}] (\omega), \quad (3.67)$$

as equações (3.62) e (3.63) podem ser escritas como

$$\left(i \frac{d}{dt} - \omega_-\right) (\hat{y}_- - \hat{y}_+) = K_-(t) - K_+(t), \quad (3.68)$$

$$\left(i \frac{d}{dt} - \omega_+\right) (\hat{y}_- + \hat{y}_+) - ia(\omega) (\hat{y}_- - \hat{y}_+) = K_-(t) + K_+(t). \quad (3.69)$$

No resultado anterior, pode-se mostrar que  $A_{+-}(\omega)$  e  $A_{-+}(\omega)$  são quantidades positivas e reais, dado que temos que

$$\begin{aligned} A_{+-}(-\omega) &= A_{-+}(\omega) \quad (3.70) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left( \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} dt e^{-i\omega t} \hat{Q}(t) \right)^\dagger \left( \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} dt' e^{-i\omega t'} \hat{Q}(t') \right) \right\rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} dt dt' e^{i\omega(t-t')} \hat{Q}(t) \hat{Q}(t') \right\rangle, \end{aligned}$$

onde tem se tomado que  $\hat{Q}^\dagger(t) = \hat{Q}(t)$ , assim, uma consequência do fato anterior temos que se tomarmos (3.67), podemos ver que pela sua simetria se trocamos  $\omega \rightarrow -\omega$  temos

$$a(-\omega) = A_{+-}(-\omega) + A_{-+}(-\omega) = A_{-+}(\omega) + A_{+-}(\omega) = a(\omega), \quad (3.71)$$

e assim teremos que

$$a(\omega) = a(-\omega) \geq 0,$$

também podemos ver que a diferença entre (3.65) e (3.67) é dada por

$$\begin{aligned}\omega_+ - \omega_- &= i[A_{+-} - A_{++}] (\omega) - i[A_{--} - A_{+-}] (\omega) \\ &= i[A_{--} - A_{++} - 2A_{+-}] (\omega) \\ &= i\gamma(\omega),\end{aligned}$$

do que decorre que

$$\gamma(\omega) = [A_{-+} - A_{+-}] (\omega) = -\gamma(-\omega), \quad (3.72)$$

é uma função par real. Desta forma podemos ver que se tomarmos a soma de (3.65) temos que

$$\omega_+ + \omega_- = 2\omega_0 + i[A_{--} - A_{++}] (\omega) = 2\tilde{\omega}, \quad (3.73)$$

assim que temos que

$$\omega = \omega_0 - \frac{1}{2}i[A_{++} - A_{--}] (\omega),$$

onde

$$\begin{aligned}[A_{++} - A_{--}] (t - t') &= \epsilon(t - t') \langle [\hat{Q}(t), \hat{Q}(t')] \rangle_{\vartheta} \\ &= \epsilon(t - t') [A_{-+} - A_{+-}] (t - t'),\end{aligned}$$

onde

$$\epsilon(t - t') = \eta_+(t - t') - \eta_-(t - t'),$$

assim que tomando (3.72) podemos expressar  $\gamma(\omega)$  como

$$-i[A_{++} - A_{--}] (\omega) = \frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega - \omega'} \gamma(\omega'),$$

e  $\tilde{\omega}$  emerge como uma quantidade real

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= \omega_0 - \frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega - \omega'} \gamma(\omega') \\ &= \omega_0 - \frac{2}{\pi}P \int_0^{\infty} \frac{\omega' d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \gamma(\omega').\end{aligned}$$

Não temos realizado nenhuma referência á natureza do valor esperado do sistema macroscópico, o que é agora tomado como a média térmica

$$\begin{aligned}\langle X \rangle_{\vartheta} &= Ctr \left[ e^{-\beta \hat{H}_{ext}} \hat{X} \right] \\ C^{-1} &= tr \left[ e^{-\beta \hat{H}_{ext}} \right],\end{aligned}$$

onde  $\hat{H}_{ext}$  é o operador de energia do sistema externo. A implicação para a estrutura dos valores esperados é contida em

$$\langle \hat{Q}(t), \hat{Q}(t') \rangle_{\vartheta} = Ctr \left[ e^{-\beta \hat{H}} \hat{Q}(t) \hat{Q}(t') \right] \quad (3.74)$$

que utiliza a propriedade formal

$$\begin{aligned} e^{-\beta\hat{H}}\hat{Q}(t)e^{\beta\hat{H}} &= e^{i\hat{H}(t+i\beta)}\hat{Q}(0)e^{-i\hat{H}(t+i\beta)} \\ &= \hat{Q}(t+i\beta), \end{aligned}$$

e a propriedade ciclica do traço. obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q}(t), \hat{Q}(t') \rangle_{\vartheta} &= \text{Ctr} \left[ e^{-\beta\hat{H}} \hat{Q}(t') \hat{Q}(t+i\beta) \right] \\ &= \langle \hat{Q}(t'), \hat{Q}(t+i\beta) \rangle_{\vartheta}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Assim que usando (3.70), com a relação dada em (3.75), temos

$$A_{-+}(\omega) = e^{\beta\omega} A_{+-}(\omega),$$

com o que concluímos que

$$e^{-\frac{1}{2}\beta\omega} A_{-+}(\omega) = e^{\frac{1}{2}\beta\omega} A_{+-}(\omega),$$

com a definição de (3.67) temos que

$$a(\omega) - A_{-+}(\omega) = A_{+-}(\omega),$$

assim, podemos encontrar

$$\begin{aligned} \left( e^{-\frac{1}{2}\beta\omega} + e^{\frac{1}{2}\beta\omega} \right) A_{-+}(\omega) &= e^{\frac{1}{2}\beta\omega} a(\omega) \\ &= 2 \cosh\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) A_{-+}(\omega) \end{aligned}$$

de onde finalmente temos

$$e^{-\frac{1}{2}\beta\omega} A_{-+}(\omega) = \frac{a(\omega)}{2 \cosh\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right)},$$

a qual é uma função par positiva de  $\omega$ . Como uma consequência, temos que pegando (3.72) temos

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= A_{-+}(\omega) - A_{+-}(\omega) = A_{-+}(\omega) \left[ 1 - e^{-\beta\omega} \right] \\ &= \frac{a(\omega) e^{\frac{1}{2}\beta\omega} \left[ 1 - e^{-\beta\omega} \right]}{2 \cosh\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right)} = a(\omega) \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) \end{aligned}$$

com  $\beta\omega > 0$ , que pode ser escrito como

$$a(\omega) = 2\gamma(\omega) \left[ \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} + \frac{1}{2} \right],$$

As relações anteriores permitem, na aproximação estabelecida, que uma vez conhecidas as funções  $\gamma(\omega)$  possam ser avaliadas algumas características do sistema. De

fato, a função  $\gamma(\omega)$  faz referência a

$$\gamma(\omega) = [A_{-+} - A_{+-}](\omega),$$

aos valores esperados térmicos do sistema.

### 3.5 Movimento Browniano

Como resultado da análise anterior, procuramos remover toda referência explícita ao sistema externo como uma entidade dinâmica. Assim, estamos conseguindo equações efetivas de movimento tanto para  $\hat{y}_+(t)$ , como para  $\hat{y}_-(t)$ , que contêm forças externas e três parâmetros: a frequência angular  $\omega$ ,  $\gamma$  e  $a$ , sendo que o último par esta relacionado com a temperatura do sistema macroscópico.

As condições de contorno são

$$(\hat{y}_- - \hat{y}_+)(t_f) = 0,$$

e, segundo o primeiro exemplo deste capítulo, a escolha de uma mistura térmica inicial é originada pela escolha

$$\hat{y}_-(t_i) = e^{\beta_0\omega} \hat{y}_+(t_i).$$

Desta forma, encontramos que a condição inicial para a equação (3.68) é

$$(\hat{y}_- - \hat{y}_+)(t) = i \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{i\omega-(t'-t)} \eta_-(t'-t) (K_+ - K_-)(t'),$$

o qual supre a condição inicial para a solução da equação (3.69),

$$(\hat{y}_- + \hat{y}_+)(t_i) = \coth\left(\frac{1}{2}\beta_0\omega\right) i \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega-(t-t_i)} (K_+ - K_-)(t)$$

desta forma, a solução requerida é dada por

$$\begin{aligned} i(y_- + y_+)(t) &= \int_{t_i}^{t_f} dt' e^{-i\omega+(t'-t)} \eta_+(t-t') (K_+ + K_-)(t') & (3.76) \\ &- \coth\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ e^{i\omega+(t-t')} \eta_+(t-t') e^{i\omega-(t'-t)} \eta_-(t-t') \right] \\ &\times (K_+ + K_-)(t') + \left[ \coth\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) - \coth\left(\frac{1}{2}\beta_0\omega\right) \right] \\ &\times \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega+(t-t_i)} e^{i\omega-(t-t_i)} (K_+ - K_-)(t'), \end{aligned}$$

tomando os termos

$$\coth\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) \quad \text{e,} \quad \coth\left(\frac{1}{2}\beta_0\omega\right)$$

e comparando a expressão com (3.3), temos que

$$\begin{aligned}\coth\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) &= \frac{1}{1-e^{\beta\omega}} + \frac{e^{\beta\omega}}{1-e^{\beta\omega}} = (1+e^{\beta\omega})\langle n \rangle_{\vartheta} \\ \coth\left(\frac{1}{2}\beta_0\omega\right) &= \frac{1}{1-e^{\beta_0\omega}} + \frac{e^{\beta_0\omega}}{1-e^{\beta_0\omega}} = (1+e^{\beta_0\omega})\langle n \rangle_{\vartheta_0},\end{aligned}$$

como no exemplo anterior, as soluções correspondentes  $y_{\pm}^{\dagger}(t)$  são obtidas trocando os rótulos ( $\pm$ ) na equação formal adjunta.

A dependência diferencial da função de transformação  $\langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta_0\vartheta}^{K_{\pm}}$  sobre a inclusão de forças externas é descrita por estes resultados, e a fórmula explícita obtida sobre integração ao igual que no primeiro caso é

$$\langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta_0\vartheta}^{K_{\pm}} = \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \mathbf{K}^*(t) G_{\vartheta_0\vartheta}(t-t_i, t'-t_i) \mathbf{K}(t') \right],$$

onde chamamos  $[n_0 = \langle n \rangle_{\vartheta_0}, n = \langle n \rangle_{\vartheta}]$ , e assim

$$G_{\vartheta_0\vartheta}(t-t_i, t'-t_i) = e^{-i\omega_+(t-t')}\eta_+(t-t') \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ -n-1 & n \end{pmatrix} + \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} & e^{-i\omega_-(t-t')}\eta_-(t-t') \begin{pmatrix} n & -n \\ -n-1 & n+1 \end{pmatrix} + \\ & + e^{-i\omega_+(t-t_i)}e^{i\omega_-(t'-t_i)}(n_0-n) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.78)\end{aligned}$$

Podemos observar que se usarmos as definições (3.65) temos outra forma de apresentar a matriz (3.77) como

$$\begin{aligned} G_{\vartheta_0\vartheta}(t-t_i, t'-t_i) &= e^{-i\tilde{\omega}(t-t')}e^{-\frac{1}{2}|\gamma||t-t'|} \begin{pmatrix} \eta_+(t-t')+n & -n \\ -n-1 & \eta_-(t-t')+n \end{pmatrix} \\ & + e^{-i\tilde{\omega}(t-t')}e^{-\gamma\{\frac{1}{2}(t-t')-t_i\}}(n_0-n) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

onde é usado o fato que

$$e^{-\frac{1}{2}|\gamma||t-t'|} = e^{-\frac{1}{2}\gamma(t-t')}\eta_+(t-t') + e^{\frac{1}{2}\gamma(t-t')}\eta_-(t-t').$$

Ao igual que no primeiro exemplo, podemos calcular valores esperados e funções dos operadores, como um exemplo disto podemos calcular a relaxação térmica da

energia do oscilador é derivada de

$$\begin{aligned} \langle t_i | y^\dagger y(t_f) | t_i \rangle_{\vartheta_0 \vartheta} &= \frac{\delta}{\delta K_-(t)} \frac{\delta}{\delta K_+^*(t)} \langle t_i | t_i \rangle_{\vartheta_0 \vartheta}^{K_\pm} \Big|_{K_\pm=0}. \\ &: -iG_{\vartheta_0 \vartheta}(t-t_i, t'-t_i)_{+-}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

e expressa por

$$\langle n(t_f) \rangle = \langle n \rangle_{\vartheta} + (\langle n \rangle_{\vartheta_0} - \langle n \rangle_{\vartheta}) e^{-\gamma(t_f-t_i)}.$$

A técnica previamente empregada de forças impulsivas aplicadas no tempo  $t_f$ , em (3.45) e (3.47), dá um resultado mais geral

$$\begin{aligned} \langle t_i | \exp -i \left[ \lambda y^\dagger(t_f) + \mu y(t_f) \right] | t_i \rangle_{\vartheta_0 \vartheta}^K &= \exp \left[ -\lambda \mu \left( \langle n \rangle(t_f) + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \lambda \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega_-(t_f-t)} K^*(t) - \mu \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega_+(t_f-t)} K(t) \right] \end{aligned}$$

para a qual uma variedade de formas funcionais de valores esperados pode ser obtida.

O cálculo de (3.79), ilustra uma característica geral da matriz  $G(t, t')$ , que é implicada pela falta de dependência do tempo  $t_f$ . Em verdade, tal tempo final não precisa aparecer explicitamente na estrutura da função de transformação  $\langle t_i | t_i \rangle^{K_\pm}$  e todos os tempos de integração podem ir desde  $t_i \rightarrow +\infty$ . Então  $t_f$  é implícito, como o tempo para o qual  $K_\pm(t)$  aparece e, a estrutura de  $G$  deve ser tal que possa ser removida qualquer dependência de um tempo maior do que  $t_f$ . Tomando o exemplo que estamos tratando, temos que como no caso da adição de forças impulsoras em (3.43) que gerou (3.45), na presente situação o uso de forças impulsoras em  $t_f$  produz, por exemplo o termo.

$$\int_{t_f}^{\infty} dt G(t-t_i, t'-t_i) K(t),$$

no qual  $K_- = K_+ = K$ . Daqui é necessário que

$$G(t, t') \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad t < t',$$

e similarmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} G(t, t') = 0, \quad t > t',$$

isto é que somando as colunas de  $G(t, t')$  fornece as funções retardadas de  $t-t'$ , enquanto as somas das filas fornecem as funções avançadas de  $t-t'$ . Em cada instância, as duas componentes devem ter uma soma nula. Estas afirmações são imediatamente verificadas para  $G_{\vartheta_0 \vartheta}(t-t_i, t'-t_i)$  e segue uma expressão mais geral da construção operatorial de.

$$iG = \begin{pmatrix} \langle (\hat{y}(t) \hat{y}^\dagger(t'))_+ \rangle & -\langle \hat{y}^\dagger(t') \hat{y}(t) \rangle \\ \langle \hat{y}(t) \hat{y}^\dagger(t') \rangle & \langle (\hat{y}(t) \hat{y}^\dagger(t'))_- \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

onde notado a conexão direta com os produtos (3.64) para  $\hat{Q}$ , temos

$$\begin{aligned} \left( \hat{y}(t) \hat{y}^\dagger(t') \right)_+ - \hat{y}^\dagger(t') \hat{y}(t) &= \hat{y}(t) \hat{y}^\dagger(t') - \left( \hat{y}(t) \hat{y}^\dagger(t') \right)_- \\ &= \eta_+(t-t') \left[ \hat{y}(t), \hat{y}^\dagger(t') \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left( \hat{y}(t) \hat{y}^\dagger(t') \right)_+ - \hat{y}(t) \hat{y}^\dagger(t') &= \hat{y}^\dagger(t') \hat{y}(t) - \left( \hat{y}(t) \hat{y}^\dagger(t') \right)_- \\ &= \eta_-(t-t') \left[ \hat{y}(t), \hat{y}^\dagger(t') \right], \end{aligned}$$

assim, nossos resultados mostram que

$$\begin{aligned} \left\langle \left[ \hat{y}(t), \hat{y}^\dagger(t') \right] \right\rangle_{\vartheta_0 \vartheta} &= e^{-i\omega_+(t-t')} \eta_+(t-t') \\ &\quad + e^{-i\omega_-(t-t')} \eta_-(t-t') + e^{-i\tilde{\omega}(t-t')} e^{-\gamma \frac{1}{2}|t-t'|}. \end{aligned}$$

Outra propriedade geral pode ser ilustrada pelo cálculo da positividade de  $iG(t, t')_{+-}$ , o primeiro termo na matriz (3.80) é dado pelo cálculo da expressão

$$\begin{aligned} & - \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' K^*(t) iG(t-t_i, t'-t_i)_{+-} K(t') \\ &= \langle t_i | \left( \int_{t_i}^{t_f} dt K(t) y(t) \right)^\dagger \left( \int_{t_i}^{t_f} dt K(t) y(t) \right) | t_i \rangle > 0, \end{aligned}$$

Assim, encontramos que

$$\begin{aligned} -iG(t-t_i, t'-t_i)_{+-} &= e^{-i\tilde{\omega}(t-t')} \exp \left[ -\gamma \frac{1}{2} [(t-t') - t_i] \right] \langle n \rangle_{\vartheta} + \\ &\quad e^{-i\tilde{\omega}(t-t')} \exp \left[ e^{-\gamma \frac{1}{2}|t-t'|} - e^{\gamma \frac{1}{2}[(t-t')-t_i]} \right] \langle n \rangle_{\vartheta_0}, \end{aligned}$$

onde é claramente necessário que cada termo obedeça separadamente ao requerimento de positividade. O primeiro termo é trivial,

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' K^*(t) \exp \left[ -i\tilde{\omega}(t-t') - \gamma \frac{1}{2} [(t-t') - t_i] \right] K(t') \\ &= \left| \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega_+(t-t_i)} K(t) \right|^2 > 0, \end{aligned}$$

e o requerimento para o segundo termo se consegue da fórmula

$$e^{-\gamma \frac{1}{2}|t-t'|} - e^{\gamma \frac{1}{2}[(t-t')-t_i]} = \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^\infty d\omega' \frac{\sin \omega'(t-t_i) \sin \omega'(t'-t_i)}{\omega'^2 + (\frac{1}{2}\gamma)^2}.$$

Toda a informação que tem sido obtida do oscilador é mostrada considerando as

forças,

$$\begin{aligned} K_{\pm}(t) &= \lambda_{\pm}(t) + K(t) \\ K_{\pm}^*(t) &= \mu_{\pm}(t) + K^*(t), \end{aligned}$$

e fazendo explicitamente os efeitos de  $\lambda_{\pm}(t)$ ,  $\mu_{\pm}(t)$  equivalentes aos efeitos de operadores ordenados temporalmente:

$$\begin{aligned} & \langle t_i | \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \lambda_- y^\dagger + \mu_- y \right] \right] \right)_- \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \lambda_+ y^\dagger + \mu_+ y \right] \right] \right)_+ | t_i \rangle_{\vartheta 0 \vartheta}^K \\ = & \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \mu(t) i G(t - t_i, t' - t_i) \lambda(t') \right. \\ & + \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' K^*(t) e^{-i\omega_-(t-t')} \eta_-(t - t') (\lambda_+ - \lambda_-)(t') \\ & \left. + \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' (\mu_+ - \mu_-)(t) e^{-i\omega_-(t-t')} \eta_+(t - t') K(t') \right]. \end{aligned}$$

Esta é a formula para o calculo direto dos valores esperados de  $y(t)$  e  $y^\dagger(t)$ . Um resultado menos explicito mas simples, pode ser dado por meio dos valores esperados para as funções de operadores,

$$\left[ i \frac{d}{dt} - \omega_+ \right] y(t) - K(t) = K_f(t), \quad (3.81)$$

$$\left[ -i \frac{d}{dt} - \omega_- \right] y^\dagger(t) - K^*(t) = K_f^\dagger(t). \quad (3.82)$$

Onde daremos desde o princípio que os valores esperados de estas quantidades são dados como

$$\langle K_f(t) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle K_f^\dagger(t) \rangle = 0,$$

então as flutuações de  $y(t)$  e  $y^\dagger(t)$ , podem ser atribuídas ao efeito das forças  $K_f(t)$  e  $K_f^\dagger(t)$ , as quais aparecem como um análogo quântico das forças randômicas na aproximação clássica de Langevin á teoria do movimento Browniano. A mudança do ponto de vista é realizada pela introdução de

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}(t) &= \left[ -i \frac{d}{dt} - \omega_- \right] u_{\pm}(t) \\ \mu_{\pm}(t) &= \left[ i \frac{d}{dt} - \omega_+ \right] v_{\pm}(t) \end{aligned} \quad (3.83)$$

onde nós supomos, só por simplicidade, que as funções  $u(t)$  e  $v(t)$ , intrudidas como elementos que são afetados pelas forças  $\mu_{\pm}(t)$  e  $\lambda_{\pm}(t)$ , desaparecem na fronteira. Desta forma, integrações parciais suprirão os operadores  $\hat{y}$  e  $\hat{y}^\dagger$  com  $K_f(t)$  e  $K_f^\dagger(t)$ .

Para levar isto até o fim, temos que pegando a forma das equações (3.81) e, (3.83),

embora, nós precisemos do seguinte lema sobre produto temporalmente ordenado:

$$\begin{aligned} & \left( \exp \left[ \int dt \left( A(t) + \frac{d}{dt} B(t) \right) \right] \right)_+ \\ &= \left( \exp \left[ \int dt A(t) \right] \right)_+ \left( \exp \left[ \int dt \left[ A(t) + \frac{d}{dt} B(t), B(t) \right] \right] \right)_+ \end{aligned}$$

o qual envolve a suposição essencial que  $B(t)$  some nos tempos terminais, e a hipótese que  $[A(t), B(t)]$  e  $[\frac{d}{dt} B(t), B(t)]$  comutam com todos os operadores. A prova é obtida substituindo  $B(t)$  com  $\lambda B(t)$  e diferenciando com respeito ao parâmetro  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \left( A(t) + \lambda \frac{d}{dt} B(t) \right) \right] \right)_+ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \dots(\lambda, t) \right] \right)_+ \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \dots(\lambda, t) \right] \right)_+ \frac{d}{dt} B(t) \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \dots(\lambda, t) \right] \right)_+. \end{aligned}$$

Então, uma integração parcial origina, que

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \dots(\lambda, t) \right] \right)_+ \left[ A(t) + \lambda \frac{d}{dt} B(t), B(t) \right] \\ & \times \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \dots(\lambda, t) \right] \right)_+ \\ &= \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \dots(\lambda, t) \right] \right)_+ \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ A(t) + \lambda \frac{d}{dt} B(t), B(t) \right], \end{aligned}$$

concordando com a hipótese, e o resultado estabelecido segue-se da integração da equação diferencial anterior. A estrutura do lema é dada pelo rearranjo

$$\begin{aligned} -i \left( \lambda y(t) + \mu y^\dagger(t) \right) &= -i \left[ u \left( K^*(t) + K_f^\dagger(t) \right) + v \left( K(t) + K_f(t) \right) \right] \\ &+ \frac{d}{dt} \left( u y^\dagger(t) - v y(t) \right), \end{aligned}$$

e nós imediatamente achamos o comutador que é múltiplo do operador unidade,

$$\begin{aligned} \left[ A(t) + \lambda \frac{d}{dt} B(t), B(t) \right] &= -i \left[ \lambda y(t) + \mu y^\dagger(t), u y^\dagger(t) - v y(t) \right] \\ &= -i(\lambda v + \mu u) \rightarrow 2iv \left( i \frac{d}{dt} - \omega \right) u. \end{aligned}$$

a última forma envolve ignorar a derivada temporal total que não contribuirá no resultado final. Para avaliar  $[A, B]$  devemos referir ao significado de  $K_f(t)$  e  $K_f^\dagger(t)$  que supridas pela verdadeira equação de movimento,

$$\begin{aligned} K_f(t) &= Q(t) + (\omega_0 - \omega_+) y(t) \\ K_f^\dagger(t) &= Q(t) + (\omega_0 - \omega_-) y^\dagger(t), \end{aligned} \tag{3.84}$$

então

$$\begin{aligned} [A(t), B(t)] &= -i \left[ u(t) (\omega_0 - \omega_-) y^\dagger(t) + \right. \\ &\quad \left. v(t) (\omega_0 - \omega_+) y(t), u(t) y^\dagger(t) - v(t) y(t) \right] \\ &= 2iv(t) u(t) (\omega - \omega_0), \end{aligned}$$

o qual também é proporcional ao operador unidade. Concordando com

$$\begin{aligned} &\left( \exp \left[ \int dt \left( \lambda y(t) + \mu y^\dagger(t) \right) \right] \right)_+ \tag{3.85} \\ &= \left( \exp \left[ \int dt \left( u(t) \left( K^*(t) + K_f^\dagger(t) \right) + v(t) \left( K(t) + K_f(t) \right) \right) \right] \right)_+ \\ &\quad \times \exp \left[ i(\omega - \omega_0) \int dt v(t) u(t) - i \int dt v(t) \left( i \frac{d}{dt} - \omega \right) u(t) \right], \end{aligned}$$

e a conjugação complexa origina um resultado análogo para o ordenamento temporal no sentido negativo do tempo.

Com a ajuda de (3.84) e das equações de movimento (3.81) e (3.83), podemos ver que (3.85) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &\langle t_i | \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \left( u(t) K_f^\dagger(t) + v(t) K_f(t) \right) \right] \right)_- \\ &\quad \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_f} dt \left( u(t) K_f^\dagger(t) + v(t) K_f(t) \right) \right] \right)_+ |t_i\rangle_{\vartheta 0 \vartheta}^K \\ &= \exp \left[ -i \int dt v(t) \kappa u(t) \right], \end{aligned}$$

onde

$$\kappa = \gamma \begin{pmatrix} n + \frac{1}{2} & -n \\ -n & n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} + i(\tilde{\omega} - \omega_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

os elementos desta matriz são também expressos por

$$\kappa \delta(t - t') = \begin{pmatrix} \left\langle \left( K_f(t) K_f^\dagger(t') \right)_+ \right\rangle & - \left\langle K_f^\dagger(t') K_f(t) \right\rangle \\ - \left\langle K_f(t) K_f^\dagger(t') \right\rangle & \left\langle \left( K_f(t) K_f^\dagger(t') \right)_- \right\rangle \end{pmatrix}.$$

Tais valores esperados são entendidos como avaliações efetivas que servem para descrever as propriedades do oscilador sob circunstâncias onde as aproximações usadas são válidas.

Observando que quando  $n$  é suficientemente grande como para permitir despre-

zar todos os outros termos,

$$\kappa = \frac{1}{2}a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left[ \frac{1}{2}a = \gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \right],$$

e o sentido da multiplicação de operadores não tem mais significado. Este é o limite clássico para o qual

$$\begin{aligned} & \left\langle \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} dt \left( u(t) K_f^\dagger(t) + v(t) K_f(t) \right) \right] \right\rangle_{\vartheta} \\ &= \exp \left[ - \int dt \frac{1}{2} a v(t) u(t) \right] \end{aligned}$$

onde temos colocado  $u_+ = u_- = u$  e  $v_+ = v_- = v$ . Introduzindo os componentes reais da força  $K_f(t)$  que é considerada agora randômica como

$$\begin{aligned} K_f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (K_1(t) + iK_2(t)), \\ K_f^\dagger(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (K_1(t) - iK_2(t)), \end{aligned}$$

o resultado no limite clássico é

$$\left\langle \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} dt (u_1 K_1 + u_2 K_2) \right] \right\rangle_{\vartheta} = \exp \left[ - \int dt \frac{1}{2} a (u_1^2 + u_2^2) \right].$$

As flutuações em diferentes tempos são independentes. Se considerarmos a média temporal das forças

$$\bar{K} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' K(t'),$$

achamos pela transformada de Fourier que as dupla variação

$$\langle \delta(\bar{K} - K'_1) \delta(\bar{K} - K'_2) \rangle_{\vartheta} = \frac{\Delta t}{\pi a} \exp \left[ - \frac{\Delta t}{a} (K_1'^2 + K_2'^2) \right],$$

a qual é a distribuição gaussiana dada pela probabilidade que a média da força em um intervalo  $\Delta t$  tenha um valor em uma pequena vizinhança do ponto  $K'$ . Neste limite clássico, a constante de flutuação  $a$  esta relacionada com o amortecimento, ou a constante de dissipação  $\gamma$  e a temperatura macroscópica  $\vartheta$  por

$$a = \left( \frac{2\gamma}{\omega} \right) \vartheta.$$

Nossas equações implicadas podem ser aplicadas a situações nas quais o sistema externo não esta em equilíbrio térmico. Para ver esta possibilidade retornaremos as funções positivas  $A_{-+}(\omega)$ ,  $A_{+-}(\omega)$  que descrevem o sistema externo e podemos ver

que, geralmente

$$\frac{A_{-+}(-\omega)}{A_{+-}(-\omega)} = \left[ \frac{A_{-+}(\omega)}{A_{+-}(\omega)} \right]^{-1} \geq 0.$$

Estas propriedades podem ser expressadas escrevendo

$$\frac{A_{-+}(\omega)}{A_{+-}(\omega)} = e^{\omega\beta(\omega)},$$

onde  $\beta(\omega)$  é uma função real par, que tem domínio de  $(-\infty, \infty)$ . Quando somente um valor de  $\omega$  é de interesse, todas as situações concebíveis para os sistemas externos podem ser descritas por o simples parâmetro  $\beta$ , o recíproco do qual aparece como uma temperatura efetiva so sistema macroscópico. Um novo domínio físico que aparece caracterizado por uma temperatura negativa  $\beta < 0$  do sistema macroscópico. Dado que  $a$  é intrinsecamente uma constante positiva, isto é  $\gamma$  que terá sinal oposta

$$-\gamma = a \frac{1 - e^{-|\beta|\omega}}{1 + e^{-|\beta|\omega}} > 0,$$

e o efeito do sistema externo sobre o oscilador muda de amortecimento para amplificação.

Nós discutiremos a seguinte seqüência física: no tempo  $t_i$ , o oscilador está em uma mistura térmica de estados a uma temperatura  $\vartheta_0$ , é perturbado por uma força externa a qual está presente por um tempo curto em comparação com  $\frac{1}{|\gamma|}$ . Depois de um tempo suficientemente longo,  $\sim (t_f - t_i)$ , tal que o fator de amplificação seja suficientemente maior,

$$k = e^{\frac{1}{2}|\gamma|(t_f - t_i)} \gg 1,$$

as medidas realizadas na vizinhança do tempo  $t_f$ . A predição de todas as medidas é contida em a formula geral para os valores esperados. Aproximações que carregam a situação física sob consideração são dadas por

$$\begin{aligned} & \int \int dt dt' (\mu_+ - \mu_-)(t) e^{-i\omega_+(t-t')} \eta_+(t-t') K(t') \\ \simeq & \int dt (\mu_+ - \mu_-)(t) e^{-i\omega t} \int dt' e^{i\omega t'} K(t'), \\ & \int \int dt dt' K^*(t) e^{-i\omega_-(t-t')} \eta_-(t-t') (\lambda_+ - \lambda_-)(t') \\ \simeq & \int dt K^*(t) e^{-i\omega t} \int dt' e^{i\omega t'} (\lambda_+ - \lambda_-)(t'), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& i \int \int dt dt' \mu(t) G(t-t_2, t'-t_2) \lambda(t') \\
& \simeq k^2 \left( \langle n \rangle_{\vartheta_0} + \frac{1}{1 - e^{-|\beta|\omega}} \right) \int dt (\mu_+ - \mu_-)(t) e^{-i\omega t} \\
& \quad \times \int dt' e^{i\omega t'} (\lambda_+ - \lambda_-)(t').
\end{aligned}$$

A partir das combinações  $\mu_+ - \mu_- = \mu$ ,  $\lambda_+ - \lambda_- = \lambda$ , reconhecemos que a não comutatividade da multiplicação de operadores não tem mais significado. Assim, o movimento do oscilador foi amplificado para o nível clássico. Para expressar as conseqüências de modo mais simples, escrevemos

$$\begin{aligned}
y(t) &= k e^{-i\omega t} (y_s + y_n) \\
y^\dagger(t) &= k e^{i\omega t} (y_s^* + y_n^*),
\end{aligned}$$

com

$$y_s = -i \int_{t_i}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} K(t'),$$

e  $y_n$  os operadores do sistema, sobre a definição

$$\begin{aligned}
u &= k \int dt e^{i\omega t} \lambda(t), \\
v &= k \int dt e^{-i\omega t} \mu(t),
\end{aligned}$$

obtemos um resultado independente do tempo

$$\langle \exp[-i(uy_n^* + vy_n)] \rangle = \exp \left[ - \left( \langle n \rangle_{\vartheta_0} + \frac{1}{1 - e^{-|\beta|\omega}} \right) vu \right],$$

o qual implica que

$$\langle y_n^* \rangle = \langle y_n \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle |y_n^*|^2 \rangle &= \langle n \rangle_{\vartheta_0} + \frac{1}{1 - e^{-|\beta|\omega}} \\
&\geq \langle n \rangle_{\vartheta_0} + 1.
\end{aligned}$$

Assim a coordenada do oscilador  $y(t)$  é a superposição amplificada de dois termos harmônicos, um de amplitude e fase definidas (sinal), e um outro com amplitude e fase randômica (ruído), governados por uma distribuição Gaussiana dois dimensional.

Estas considerações para manter a amplificação podem ser vistas como um modelo primitivo de um dispositivo maser, com o oscilador correspondendo com um simples modo da cavidade ressoante eletromagnética.

## *Referências*

- [1] Schwinger, Julian S. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **45**, 1542-1553(1959), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 256-265(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 570-579(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 883-897(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 1401-1415(1960), Ibid. , Proc. Natl. Acad. os Sci. **47**, 1075-1083(1961), Schwinger, Julian S. ,”*Quantum Kinematics and Dynamics*”, (W.A. Benjamin Publishers,1970)
- [2] Schwinger, Julian S., Quantum Mechanics ”*Symbolism of Atomic Measurements*”, (Springer , 2001)
- [3] de Melo, Cássius Anderson Miquele - Princípio Variacional de Schwinger e Teoria Quântica: Aplicações á Mecânica Quântica Quaterniônica e ao Estudo de Sistemas Singulares, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica - UNESP, (2002).
- [4] Schwinger, Julian S., Jour.Math Phys. **2**,407(1961)
- [5] Schwinger, Julian S., Phys.Rev.**91**,728(1953)

## 4 *Conclusões e Perspectivas*

Neste trabalho, conseguiu-se entender como a abstração dos processos de medida feita pelo Schwinger através dos símbolos de medida, permitiu a construção de uma estrutura de relações entre eles e levou à construção dos espaços vetoriais relacionados à álgebra da medida. Também estes fatos permitiram evidenciar a importância das funções de transformação e das transformações unitárias. As funções de transformação mostraram sua importância na interpretação estatística das transições entre descrições de um mesmo sistema e, com o estudo das mudanças dos estados entre uma e outra descrição conseguiu-se entender a importância das transformações unitárias.

Assim, o uso dos elementos anteriormente permitiu construir a fundamentação do Princípio Variacional e como ele por meio do estudo das mudanças infinitesimais sobre os estados e os observáveis causadas pela evolução temporal do sistema, sabemos que o Princípio Variacional de Schwinger é uma caracterização diferencial das funções de transformação em que o responsável por causar sua mudança é o operador de ação quântica, operador construído como função das variáveis dinâmicas do sistema.

Uma das características fundamentais deste desenvolvimento é que em nenhum instante é necessário recorrer ao princípio de correspondência, o que quer dizer que a teoria é construída inteiramente quântica desde o princípio e, também, que são as equações de movimento dos operadores que permitem encontrar a totalidade de elementos da teoria. Como um fato importante, conseguimos mostrar que tanto as representações de Heisenberg como a de Schrödinger podem ser obtidas variando tão só os observáveis ou os estados.

Os métodos que foram usados para obter as funções de transformação, dados o Lagrangeano e o Hamiltoniano do sistema são, o método do operador principal de Hamilton que usa o fato de que a derivada temporal da ação é igual ao Hamiltoniano do sistema, assim, uma vez tida a ação clássica do sistema e, com a solução achada para as equações de movimento poderíamos ordenar temporalmente os operadores e,

assim, comparando as duas expressões podemos encontrar a forma da constante de normalização e achar a função de transformação na sua forma final. Outro método usado foi o uso do operador Hamiltoniano, que usa agora as equações de Schrödinger para derivar a forma da constante de normalização.

Estes dois métodos são usados para estudar vários exemplos simples, em que conseguimos ver algumas características importantes nas funções de transformação. Como uma primeira característica o uso do operador Lagrangeano exige que as soluções das equações de movimento tenham suas condições de contorno de Dirichlet, o que inibe de alguma forma o estudo da dinâmica de um sistema a comportamentos específicos, mas que mostra como característica fundamental o fato da necessidade da independência das soluções no intervalo temporal de interesse, por meio do inverso do determinante da Matriz Wroskiana, presente em todas as constantes de normalização de cada função de transformação derivada e que mostra a existência de uma escala de tempo associada com a validade da descrição. Em tanto, as funções de transformação derivadas por meio do operador Hamiltoniano embora sejam as mesmas que as derivadas pelo operador principal de Hamiltoniano, podem expressar com mais facilidade a evolução temporal do sistema ao requerer condições iniciais especificadas em um tempo só. Além disso, demonstrou-se implicitamente, que sempre as relações de comutação em diferentes instantes de tempo, estão relacionadas com o determinante da matriz Wronskiana das soluções, porém se existir um termo de interação, ele não dependerá de alguma forma funcional das variáveis dinâmicas do sistema.

Dos exemplos tratados, destacamos a aplicação do oscilador harmônico com frequência dependente do tempo, neste exemplo se provou o poder do Princípio Variacional ao derivar de uma forma geral a função de transformação para este sistema independentemente da forma funcional da solução, assim, mostramos a possibilidade de recuperar o resultado padrão da teoria de integral de caminho de Feynman [1], [2]. As aplicações na literatura deste tipo de osciladores abarca o estudo de sistemas adiabáticos, como osciladores paramétricas, aceleradores de partículas e detectores de partículas graças a sua viabilidade para descrever sistemas como partículas em campos eletromagnéticos variáveis no tempo, mas, o comportamento não adiabático destes osciladores também tem aplicações importantes como é o estudo do efeito casimir dinâmico [3], assim é proposto um *ansatz* de solução da forma:

$$q(t) = A(t) \exp \left\{ \alpha \int_{t_0}^{t_1} \omega(\tau) d\tau \right\},$$

que devido à presença da integral da frequência na exponencial, permite o estudo de sistemas em que há uma variação tal que somente precisamos de uma primeira de-

rivada contínua, facilitando o estudos de sistemas com uma variação não adiabática da frequência; assim, restando uma equação diferencial para a amplitude que pode ser resultante ou em algumas situações podem ser estudadas as suas características fundamentais.

Por último, o objetivo final deste trabalho foi o estudo do Formalismo de Schwinger para Trajetórias Temporalmente Fechadas. Este formalismo é derivado de uma modificação do Princípio Variacional, cuja principal aplicação é o cálculo de valores esperados de sistemas que evoluem com uma dinâmica bem definida, dada uma condição inicial específica. Um dos principais fatos é o uso da teoria de fontes, produto do trabalho de Schwinger [4], que, basicamente, estudou a resposta de um sistema físico pela presença de uma força (fonte externa) e a sua evolução temporal quando ela é desligada. A modificação dada no formalismo permite, de uma maneira ampla, o estudo de quantidades associadas ao sistema por meio do estudo de valores esperados de funções de operadores calculados de uma forma explícita no sistema, em que os operadores estão acoplados a parâmetros servem como fontes externas e, permitem depois o cálculo de funções mais complexas, mas agora só por intermédio de derivações das funções de transformação com relação desses parâmetros. Mostrou-se como podem ser incluídas, de uma forma direta, funções de operadores mais complexas, através da inclusão de forças impulsoras que levam as variáveis dinâmicas do sistema para valores nos quais podemos usar como elementos para derivar funções mais complexas.

Finalmente, no exemplo que trata o acoplamento de um oscilador com um sistema externo, se mostra que através da suposição do acoplamento fraco se dá a possibilidade de fazer uma expansão perturbativa de modo que com os primeiros ordens, pode-se limitar a dependência do sistema externo ao conhecimento só de alguns funções de parâmetros que o caracterizam, desta forma, poder formular a presença do sistema externo como um termo efetivo nas equações de movimento e, assim, derivar todas as funções de operadores para determinar as características do sistema. No exemplo que trata o movimento browniano, vimos que reduzindo as funções que aproximam o comportamento do sistema externo a parâmetros e, adicionando forças de diferentes caracteres, como o aleatório, podemos obter equações tipo Langevin. O anterior segundo o método empregado para deduzir a fórmula para o cálculo generalizado dos valores esperados do sistema que foi usada no primeiro exemplo do capítulo III, agora considerando que as novas forças são funções dependentes do tempo mas que tem uma dependência funcional das variáveis dinâmicas do sistema fato refletido na consideração do ordenamento temporal de tais forças, podem se induzir uma variedade de comportamentos no sistema, e a sua sensibilidade às flutuações destas.

Como perspectiva de aplicação no tratamento de sistemas com o Formalismo de Schwinger para Trajetórias Temporalmente Fechadas, estudaremos o comportamento de uma partícula carregada dentro de uma cavidade na qual interage com os modos normais de um campo eletromagnético sem usar a hipótese do acoplamento fraco, estudando primeiro o comportamento de um número reduzido de osciladores, e paulatinamente aumentar o número deles para derivar características gerais do sistema completo.

## *Referências*

- [1] Farina, C. e Seguí-Santoja, Antonio J., Phys.Lett A **184**(1993) 23
- [2] Khandekar D.C., and Lawande S.V., Jour.Math. Phys. **16**, 384(1975)
- [3] Dodonov V.V., Klimov A.B., Nikonov D.E., Phys.Rev A**47**,4442(1993), Dodonov V.V., Man'ko V.I., Nikonov D.E., Phys.Rev A**51**,3328(1995)
- [4] Schwinger, Julian S., *Particles Sources and Fields Vol 1*, (Advanced Book Program, 1998)

## APÊNDICE A

Tomando a função

$$\exp \left[ y'^{\dagger} y'' + y'^{\dagger} \alpha + \beta y'' + \gamma \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y'^{\dagger})^n}{n!} \frac{(y'')^m}{m!} \alpha^n \beta^m \exp \left[ y'^{\dagger} y'' + \gamma \right]$$

e definindo a função

$$B[\alpha, \beta] = \exp \left[ \alpha y'^{\dagger} + \beta y'' \right]$$

podemos ver que as derivadas

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} B[\alpha, \beta] = y'^{\dagger} B[\alpha, \beta],$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \beta} B[\alpha, \beta] = y'' B[\alpha, \beta],$$

podem ser associadas diretamente com

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \rightarrow y'^{\dagger}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \rightarrow y''.$$

Assim a função (3.34) pode ser expressa da forma

$$\exp \left[ y'^{\dagger} y'' + \alpha y'^{\dagger} + \beta y'' + \gamma \right] = \exp[\gamma] \exp \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \exp \left[ \alpha y'^{\dagger} + \beta y'' \right].$$

Agora tomando a expansão em séries de potências de

$$B[\alpha, \beta] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y'^{\dagger})^n}{n!} \frac{(y'')^m}{m!} \alpha^n \beta^m,$$

temos que

$$\exp[\gamma] \exp \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \exp \left[ \alpha y'^{\dagger} + \beta y'' \right] = \exp[\gamma] \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y'^{\dagger})^n}{n!} \frac{(y'')^m}{m!} \exp \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \alpha^n \beta^m,$$

analisando a expressão

$$\exp \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \alpha^n \beta^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^k \beta^m \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^k \alpha^n,$$

e tomando o fato de que

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k x^m = \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k},$$

temos a seguinte expressão

$$\exp \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \alpha^n \beta^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{m!}{(m-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} \beta^{m-k} \alpha^{n-k},$$

onde facilmente podemos ver que a soma é nula quando

$$k > m,$$

ou

$$k > n.$$

Fazendo duas diferentes substituições

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x^{(n-k)+1}} dx &= \frac{1}{(n-k)!} & m > n \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x^{(m-k)+1}} dx &= \frac{1}{(m-k)!} & n > m \end{aligned}$$

dado que a série se trunca com o menor deles\*. Assim, podemos expressar o resultado da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{m!}{(m-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} \beta^{m-k} \alpha^{n-k} &= \begin{cases} \frac{m!}{2\pi i} \oint \frac{e^x \beta^m}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \alpha^{n-k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^k dx & n < m \\ \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^y \alpha^n}{y^{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!k!} \beta^{m-k} \left( \frac{y}{\alpha} \right)^k dy & m < n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{m!}{2\pi i} \oint \frac{e^x \beta^m}{x^{m+1}} \left( \alpha + \frac{x}{\beta} \right)^n dx & n < m \\ \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^y \alpha^n}{y^{n+1}} \left( \beta + \frac{y}{\alpha} \right)^m dy & m < n \end{cases} \end{aligned}$$

onde foi tomada a fórmula do binômio de Newton

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \alpha^{n-k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^k &= \left( \alpha + \frac{x}{\beta} \right)^n, \\ \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!k!} \beta^{m-k} \left( \frac{y}{\alpha} \right)^k &= \left( \beta + \frac{y}{\alpha} \right)^m. \end{aligned}$$

\*A série é truncada, já que quando o termo  $k$  na soma é maior que  $m$ , ou que  $n$ , os valores dos fatoriais são infinitos. Assim, tomando, por exemplo  $m = 3$  e  $n = 10$ , temos que a série será truncada em  $k = 3$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{3!}{(3-k)!} \frac{10!}{(10-k)!} = \frac{1}{0!} \frac{3!}{3!} \frac{10!}{10!} + \frac{1}{1!} \frac{3!}{2!} \frac{10!}{9!} + \frac{1}{2!} \frac{3!}{1!} \frac{10!}{7!},$$

que daí todos os termos serão nulos.

Do que temos finalmente que

$$\exp\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]\alpha^n\beta^m = \begin{cases} \frac{m!}{2\pi i} \oint \frac{e^x\beta^m}{x^{m+1}} \left(\alpha + \frac{x}{\beta}\right)^n dx & n < m \\ \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^y\alpha^n}{y^{n+1}} \left(\beta + \frac{y}{\alpha}\right)^m dy & m < n \end{cases}.$$

Assim, retomando a nossa expressão inicial para a expansão da função de transformação inicial, temos que

$$\begin{aligned} \exp\left[y^\dagger y'' + \alpha y'^\dagger + \beta y'' + \gamma\right] &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y'^\dagger)^n}{n!} \left\{ \exp[\gamma] \begin{cases} \frac{m!}{2\pi i} \oint \frac{e^x\beta^m}{x^{m+1}} \left(\alpha + \frac{x}{\beta}\right)^n dx & n < m \\ \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^y\alpha^n}{y^{n+1}} \left(\beta + \frac{y}{\alpha}\right)^m dy & m < n \end{cases} \frac{(y'')^m}{m!} \right. \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y'^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \langle n, t_i | m, t_i \rangle^{K\pm} \frac{(y'')^m}{\sqrt{m!}}, \end{aligned}$$

onde fazendo a comparação obtemos,

$$\begin{aligned} \langle n, t_i | m, t_i \rangle^{K\pm} &= \begin{cases} \exp[\gamma] \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{m!}{n!}} \oint \frac{e^x}{x} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{m-n} \left(\frac{\alpha\beta}{x} + 1\right)^n dx & n < m \\ \exp[\gamma] \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \oint \frac{e^y}{y} \left(\frac{\alpha}{y}\right)^{n-m} \left(\frac{\alpha\beta}{y} + 1\right)^m dy & m < n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \exp[\gamma] \sqrt{\frac{m!}{n!}} \frac{n!}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{m-n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} \left(\frac{\alpha\beta}{x} + 1\right)^n dx & n < m \\ \exp[\gamma] \sqrt{\frac{n!}{m!}} \frac{m!}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{n-m} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^y}{y} \left(\frac{\alpha\beta}{y} + 1\right)^m dy & m < n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \exp[\gamma] \sqrt{\frac{m!}{n!}} \frac{n!}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{m-n} L_n(-\alpha\beta) & n < m \\ \exp[\gamma] \sqrt{\frac{n!}{m!}} \frac{m!}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{n-m} L_m(-\alpha\beta) & m < n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \exp[\gamma] \sqrt{\frac{m!}{n!}} \frac{n!}{m!} L_n^{m-n}(-\alpha\beta) (-\beta)^{m-n} & n < m \\ \exp[\gamma] \sqrt{\frac{n!}{m!}} \frac{m!}{n!} L_m^{n-m}(-\alpha\beta) (-\alpha)^{n-m} & m < n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \exp[\gamma] \sqrt{\frac{n!}{m!}} L_n^{m-n}(-\alpha\beta) (-\beta)^{m-n} & n < m \\ \exp[\gamma] L_n(-\alpha\beta) & n = m \\ \exp[\gamma] \sqrt{\frac{m!}{n!}} L_m^{n-m}(-\alpha\beta) (-\alpha)^{n-m} & m < n \end{cases} \end{aligned}$$

onde a notação  $n_>$  ou  $n_<$ , é dada para o maior ou menor dos dois elementos. Agora podemos fazer a comparação para o caso especial da diagonal do elemento de matriz, que é dado quando  $n = m$ , de onde temos que

$$\langle n, t_i | n, t_i \rangle^{K\pm} = \exp[\gamma] L_n(-\alpha\beta) = \exp[\gamma] L_n(x).$$

## APÊNDICE B

Tomando a expressão

$$\exp[-\lambda\mu \langle n \rangle_{\vartheta} + \lambda\gamma^* - \mu\gamma], \quad (\text{B.1})$$

e se expressarmos

$$\exp[-\lambda\mu \langle n \rangle_{\vartheta} + \lambda\gamma^* - \mu\gamma] = \exp[-\lambda\mu \langle n \rangle_{\vartheta}] \sum_{n,m} \frac{\lambda^n \gamma^{*n} \mu^n \gamma^m (-1)^m}{n! m!}, \quad (\text{B.2})$$

dado que somente estamos interessados em potências da forma  $(\lambda\mu)^n$ , tomaremos os elementos da diagonal da expressão anterior, assim teremos que

$$\exp[-\lambda\mu \langle n \rangle_{\vartheta}] \sum_n \frac{\lambda^n \gamma^{*n} \mu^n \gamma^n (-1)^n}{n! n!} = \exp[-\lambda\mu \langle n \rangle_{\vartheta}] \sum_n \frac{(-\lambda\mu \gamma^* \gamma)^n}{n! n!} \quad (\text{B.3})$$

agora tomando que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x^{n+1}} dx = \frac{1}{n!}, \quad (\text{B.4})$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} \exp[-\lambda\mu \langle n \rangle_{\vartheta}] \sum_n \frac{(-\lambda\mu \gamma^* \gamma)^n}{n! n!} &= \exp[-\lambda\mu \langle n \rangle_{\vartheta}] \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} dx \sum_n \frac{1}{n!} \left( \frac{-\lambda\mu \gamma^* \gamma}{x} \right)^n \quad (\text{B.5}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} e^{-\lambda\mu \left( \langle n \rangle_{\vartheta} + \frac{\gamma^* \gamma}{x} \right)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_n \frac{(-\lambda\mu)^n}{n!} \oint \frac{e^x}{x} \left( \langle n \rangle_{\vartheta} + \frac{\gamma^* \gamma}{x} \right)^n dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_n \frac{(-\langle n \rangle_{\vartheta} \lambda\mu)^n}{n!} \oint \frac{e^x}{x} \left( 1 + \frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_{\vartheta} x} \right)^n dx, \end{aligned}$$

levando em conta que os polinômios de Laguerre podem ser escritos como

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} \left( 1 + \frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_{\vartheta} x} \right)^n = L_n \left( -\frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_{\vartheta}} \right), \quad (\text{B.6})$$

temos que a expressão (B.1) na diagonal, ( $m = n$ ), é dada por

$$\sum_n \frac{(-\langle n \rangle_{\vartheta} \lambda\mu)^n}{n!} L_n \left( -\frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_{\vartheta}} \right). \quad (\text{B.7})$$

Agora aplicando sobre o elemento anterior o operador  $\exp \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \right]$ , podemos extrair a seguinte informação dado que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p(n, \vartheta, K) = \exp \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \exp \left[ -\lambda \mu \langle n \rangle_{\vartheta} + \lambda \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} K^*(t) - \mu \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} K(t) \right] \Big|_{\lambda=\mu=0} \quad (\text{B.8})$$

onde tomando

$$\gamma = \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} K(t),$$

a expressão (B.1) pode se escrever como

$$\exp \left[ -\lambda \mu \langle n \rangle_{\vartheta} + \lambda \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} K^*(t) - \mu \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega(t-t_f)} K(t) \right], \quad (\text{B.9})$$

assim que

$$\exp \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \sum_n \frac{(-\langle n \rangle_{\vartheta} \lambda \mu)^n}{n!} L_n \left( -\frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_{\vartheta}} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p(n, \vartheta, K). \quad (\text{B.10})$$

Da mesma forma que em apêndices anteriores, faremos o cálculo de

$$\exp \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] (\lambda \mu)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha)^k}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^k \lambda^n \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \right)^k \mu^n, \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha)^k}{k!} \frac{n!}{(n - k)!} \frac{n!}{(n - k)!} \mu^{n-k} \lambda^{n-k} &= \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n - k)!} (1 - \alpha)^k \left( \frac{\mu \lambda}{x} \right)^{n-k} dx \\ &= \frac{n! (1 - \alpha)^n}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} \left( 1 + \frac{\mu \lambda}{(1 - \alpha)x} \right)^n dx \\ &= \frac{n! (1 - \alpha)^n}{2\pi i} L_n \left( -\frac{\mu \lambda}{(1 - \alpha)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

assim, temos que

$$\begin{aligned} \exp \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \sum_n \frac{(-\langle n \rangle_{\vartheta} \lambda \mu)^n}{n!} L_n \left( -\frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_{\vartheta}} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} &= \\ \sum_n \frac{(-\langle n \rangle_{\vartheta})^n}{n!} L_n \left( -\frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_{\vartheta}} \right) n! (1 - \alpha)^n L_n \left( -\frac{\mu \lambda}{(1 - \alpha)} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0}, & \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

e da propriedade

$$L_n \left( -\frac{\mu \lambda}{(1 - \alpha)} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} = 1, \quad (\text{B.14})$$

obtemos

$$\sum_n \frac{(-\langle n \rangle_\vartheta)^n}{n!} L_n \left( -\frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_\vartheta} \right) n! (1-\alpha)^n L_n \left( -\frac{\mu \lambda}{(1-\alpha)} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} = \sum_n (-\langle n \rangle_\vartheta (1-\alpha))^n L_n \left( -\frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_\vartheta} \right) \quad (\text{B.15})$$

é a função geratriz dos polinômios de Laguerre

$$\sum_n z^n L_n(x) = \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{1-z}, \quad (\text{B.16})$$

assim, que associando

$$\begin{aligned} z &= -\langle n \rangle_\vartheta (1-\alpha), \\ x &= -\frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_\vartheta}, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p(n, \vartheta, K) = \sum_n (-\langle n \rangle_\vartheta (1-\alpha))^n L_n \left( -\frac{\gamma^* \gamma}{\langle n \rangle_\vartheta} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$= \frac{1}{1 + \langle n \rangle_\vartheta (1-\alpha)} \exp \left\{ -\frac{\gamma^* \gamma (1-\alpha)}{1 + \langle n \rangle_\vartheta (1-\alpha)} \right\}, \quad (\text{B.19})$$

e como

$$\langle n \rangle_\vartheta = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (\text{B.20})$$

temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p(n, \vartheta, K) = \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} \exp \left\{ -|\gamma|^2 \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} (1-\alpha) \right\}. \quad (\text{B.21})$$

Para identificar os termos  $p(n, \vartheta, K)$ , podemos observar que se tomarmos a expressão

$$\begin{aligned} -|\gamma|^2 \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} (1-\alpha) &= -|\gamma|^2 \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} (1-\alpha) \\ &= -|\gamma|^2 \left[ \frac{(1 - e^{-\beta\omega}) - \alpha (1 - e^{-\beta\omega})}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} \right] \\ &= -|\gamma|^2 \left[ \frac{(1 - e^{-\beta\omega}) - \alpha (1 - e^{-\beta\omega}) - \alpha e^{-\beta\omega} (1 - e^{-\beta\omega}) + \alpha e^{-\beta\omega} (1 - e^{-\beta\omega})}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} \right] \\ &= |\gamma|^2 \frac{4 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right)}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} - |\gamma|^2 (1 - e^{-\beta\omega}), \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

e substituindo-a em (B.21) obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1 - e^{-\beta\omega}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} \exp \left\{ -|\gamma|^2 \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} (1-\alpha) \right\} \\ &= \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} \exp \left\{ |\gamma|^2 \frac{\alpha e^{-\beta\omega} 4 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right)}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} - |\gamma|^2 (1 - e^{-\beta\omega}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

e agrupando os termos dependentes de  $\alpha$ , podemos notar que

$$= (1 - e^{-\beta\omega}) \exp \left[ -|\gamma|^2 (1 - e^{-\beta\omega}) \right] \frac{\exp \left\{ |\gamma|^2 \frac{\alpha e^{-\beta\omega} 4 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right)}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} \right\}}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}}. \quad (\text{B.24})$$

Agora, podemos expressar, com ajuda da integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x - \delta} = e^\delta, \quad (\text{B.25})$$

podemos ver que em (B.24) o seguinte termo pode ser substituído

$$\exp \left\{ |\gamma|^2 \frac{4 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right)}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x - |\gamma|^2 \frac{\alpha e^{-\beta\omega} 4 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right)}{1 - \alpha e^{-\beta\omega}}}, \quad (\text{B.26})$$

desta forma, a expressão completa (B.24) será

$$(1 - e^{-\beta\omega}) \exp \left[ -|\gamma|^2 (1 - e^{-\beta\omega}) \right] \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x (1 - \alpha e^{-\beta\omega}) - \alpha e^{-\beta\omega} |\gamma|^2 4 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right)}, \quad (\text{B.27})$$

fatorizando  $x$ , no denominador da integral em (B.27), temos

$$(1 - e^{-\beta\omega}) \exp \left[ -|\gamma|^2 (1 - e^{-\beta\omega}) \right] \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} \frac{1}{1 - \frac{\alpha e^{-\beta\omega} + \alpha e^{-\beta\omega} - |\gamma|^2 4 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right)}{x}}, \quad (\text{B.28})$$

agora, usando o fato de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}, \quad (\text{B.29})$$

a expressão dentro da integral em (B.28), é dada por

$$(1 - e^{-\beta\omega}) \exp \left[ -|\gamma|^2 (1 - e^{-\beta\omega}) \right] \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-\beta n \omega} \left( 1 + \frac{|\gamma|^2 4 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right)}{x} \right)^n = \quad (\text{B.30})$$

$$(1 - e^{-\beta\omega}) \exp \left[ -|\gamma|^2 (1 - e^{-\beta\omega}) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-\beta n \omega} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} \left( 1 + \frac{|\gamma|^2 4 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right)}{x} \right)^n,$$

onde podemos encontrar novamente a forma integral dos polinômios de Laguerre

$$L_n \left[ -4 |\gamma|^2 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right) \right] = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^x}{x} \left( 1 + \frac{4 |\gamma|^2}{x} \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right) \right)^n dx, \quad (\text{B.31})$$

desta forma temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p(n, \vartheta, K) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (1 - e^{-\beta\omega}) e^{-n\beta\omega} \exp \left[ -|\gamma|^2 (1 - e^{-\beta\omega}) \right] L_n \left[ -4 |\gamma|^2 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right) \right], \quad (\text{B.32})$$

onde finalmente podemos distinguir

$$p(n, \vartheta, K) = (1 - e^{-\beta\omega}) e^{-n\beta\omega} \exp[-|\gamma|^2 (1 - e^{-\beta\omega})] L_n \left[ -4 |\gamma|^2 \sinh^2 \left( \frac{\beta\omega}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.33})$$

## APÊNDICE C

Os operadores de posição e momento podem ser escritos como

$$\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{y} + \hat{y}^\dagger) = \hat{q} \quad e, i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{y}^\dagger - \hat{y}) = \hat{p},$$

assim, podemos ver que os elementos do termo

$$\begin{aligned} & \left\{ \sqrt{2}\hat{q}_+(t) \hat{Q}_+(t) - \sqrt{2}\hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \right\} \left\{ \sqrt{2}\hat{q}_+(t') \hat{Q}_+(t') - \sqrt{2}\hat{q}_-(t') \hat{Q}_-(t') \right\} = \\ & 2\hat{q}_+(t) \hat{Q}_+(t) \hat{q}_+(t') \hat{Q}_+(t') - 2\hat{q}_+(t) \hat{Q}_+(t) \hat{q}_-(t') \hat{Q}_-(t') \\ & - 2\hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \hat{q}_+(t') \hat{Q}_+(t') + 2\hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \hat{q}_-(t') \hat{Q}_-(t') = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \langle t_i | t_i \rangle^{K\pm} &= \langle t_i | \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \left[ \hat{q}_+(t) \hat{Q}_+(t) \hat{q}_+(t') \hat{Q}_+(t') - \hat{q}_+(t) \hat{Q}_+(t) \hat{q}_-(t') \hat{Q}_-(t') \right. \\ & \quad \left. - \hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \hat{q}_+(t') \hat{Q}_+(t') + \hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \hat{q}_-(t') \hat{Q}_-(t') \right] | t_i \rangle^{K\pm} \\ &= \langle t_i | \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \left[ \left( \hat{q}(t) \hat{Q}(t) \hat{q}(t') \hat{Q}(t') \right)_+ \right. \\ & \quad \left. - 2\hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \hat{q}_+(t') \hat{Q}_+(t') + \left( \hat{q}(t) \hat{Q}(t) \hat{q}(t') \hat{Q}(t') \right)_- \right] | t_i \rangle^{K\pm}, \end{aligned}$$

assim, substituindo as quantidades

$$\begin{aligned} \hat{Q}_\pm(t) \hat{Q}_\pm(t') &\implies \left\langle \left( \hat{Q}(t) \hat{Q}(t') \right)_\pm \right\rangle_\vartheta, \\ \hat{Q}_-(t) \hat{Q}_+(t') &\implies \left\langle \left( \hat{Q}(t) \hat{Q}(t') \right)_{-+} \right\rangle_\vartheta, \\ \hat{Q}_+(t) \hat{Q}_-(t') &\implies \left\langle \left( \hat{Q}(t) \hat{Q}(t') \right)_{+-} \right\rangle_\vartheta, \end{aligned}$$

podem ser expressos da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{q}_\pm(t) \hat{Q}_\pm(t) \hat{q}_\pm(t') \hat{Q}_\pm(t') &= \\ \frac{1}{2\omega} \left[ \hat{y}_\pm(t) \hat{y}_\pm(t') + \hat{y}_\pm^\dagger(t) \hat{y}_\pm^\dagger(t') + \hat{y}_\pm(t) \hat{y}_\pm^\dagger(t') + \hat{y}_\pm^\dagger(t) \hat{y}_\pm(t') \right] &\left\langle \left( \hat{Q}(t) \hat{Q}(t') \right)_\pm \right\rangle_\vartheta, \end{aligned}$$

$$\hat{q}_-(t) \hat{Q}_-(t) \hat{q}_+(t') \hat{Q}_+(t') = \frac{1}{2\omega} \left[ \hat{y}_-(t) \hat{y}_+(t') + \hat{y}_-^\dagger(t) \hat{y}_+^\dagger(t') + \hat{y}_-(t) \hat{y}_+^\dagger(t') + \hat{y}_-^\dagger(t) \hat{y}_+(t') \right] \left\langle \left( \hat{Q}_-(t) \hat{Q}_+(t') \right)_{-+} \right\rangle_{\vartheta},$$

$$\hat{q}_+(t) \hat{Q}_+(t) \hat{q}_-(t') \hat{Q}_-(t') = \frac{1}{2\omega} \left[ \hat{y}_+(t) \hat{y}_-(t') + \hat{y}_+^\dagger(t) \hat{y}_-^\dagger(t') + \hat{y}_+(t) \hat{y}_-^\dagger(t') + \hat{y}_+^\dagger(t) \hat{y}_-(t') \right] \left\langle \left( \hat{Q}_+(t) \hat{Q}_-(t') \right)_{+-} \right\rangle_{\vartheta},$$

podemos obter sem uma perda de generalidade que estes elementos pertencem a matriz

$$A(t-t') = \begin{pmatrix} A_{++}(t-t') & A_{+-}(t-t') \\ A_{-+}(t-t') & A_{--}(t-t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \left( \hat{Q}_-(t) \hat{Q}_+(t') \right)_+ \right\rangle_{\vartheta} & -\left\langle \hat{Q}_+(t') \hat{Q}_-(t) \right\rangle_{\vartheta} \\ \left\langle \hat{Q}_+(t) \hat{Q}_-(t') \right\rangle_{\vartheta} & \left\langle \left( \hat{Q}_+(t) \hat{Q}_-(t') \right)_- \right\rangle_{\vartheta} \end{pmatrix},$$

agora temos que a expressão para  $-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \langle t_i | t_i \rangle$  tem a forma de

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \langle t_i | t_i \rangle^{K\pm} &= \langle t_i | \frac{1}{2\omega} \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \left[ \left[ \hat{y}_+(t) \hat{y}_+^\dagger(t') + \hat{y}_+^\dagger(t) \hat{y}_+(t') \right] A_{++}(t-t') \right. \\ &\quad - \left[ \hat{y}_+(t) \hat{y}_-^\dagger(t') + \hat{y}_+^\dagger(t) \hat{y}_-(t') \right] A_{-+}(t-t') \\ &\quad - \left[ \hat{y}_-(t) \hat{y}_+^\dagger(t') + \hat{y}_-^\dagger(t) \hat{y}_+(t') \right] A_{+-}(t-t') \\ &\quad \left. + \left[ \hat{y}_-(t) \hat{y}_-^\dagger(t') + \hat{y}_-^\dagger(t) \hat{y}_-(t') \right] A_{--}(t-t') \right] |t_i \rangle^{K\pm} \end{aligned}$$

onde temos descartado todos os termos que contem os produtos  $y(t) y(t')$  e  $y^\dagger(t) y^\dagger(t')$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)