



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA – CT
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E ENGENHARIA DE
PETRÓLEO - PPGCEP



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**SUPRESSÃO DO RUÍDO DE ROLAMENTO SUPERFICIAL
UTILIZANDO A TRANSFORMADA *CURVELET***

Nisar Rocha de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Liacir dos Santos Lucena

Natal / RN, Maio de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**SUPRESSÃO DO RUÍDO DE ROLAMENTO SUPERFICIAL
UTILIZANDO A TRANSFORMADA *CURVELET***

Nisar Rocha de Oliveira

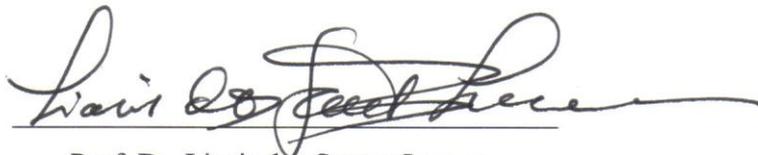
Natal / RN, Maio de 2009

Nisar Rocha de Oliveira

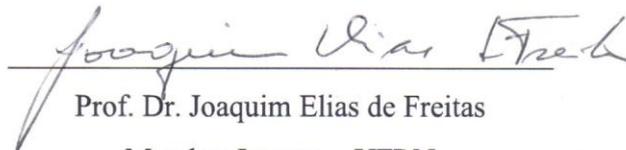
“Supressão do Ruído de Rolamento Superficial Utilizando a Transformada *Curvelet*”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência e Engenharia de Petróleo PPGCEP, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciência e Engenharia de Petróleo.

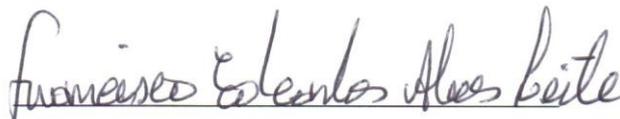
Aprovado em 08 de maio de 2009.



Prof. Dr. Liacir dos Santos Lucena
Orientador – UFRN



Prof. Dr. Joaquim Elias de Freitas
Membro Interno – UFRN



Prof. Dr. Francisco Edcarlos Alves Leite
Membro Externo – UFRSA

OLIVEIRA, Nisar Rocha de – Supressão do Ruído de Rolamento Superficial Utilizando a Transformada *Curvelet*. Dissertação de Mestrado, UFRN, Programa de Pós-Graduação em Ciência e Engenharia de Petróleo. Área de Concentração: Pesquisa e Desenvolvimento em Ciência e Engenharia de Petróleo. Linha de Pesquisa: Física Aplicada à Exploração e à Produção de Petróleo e Gás Natural, Natal – RN, Brasil.

Orientador: Prof. Dr. Liacir dos Santos Lucena.

RESUMO

Dentre os diversos tipos de ruídos existentes nos dados sísmicos terrestres está o *Ruído de Rolamento Superficial* também conhecido como “*ground roll*” que é um tipo particular de ondas de Rayleigh com amplitude forte, frequência baixa e velocidade baixa que gera um cone de grande mergulho no sismograma. O ruído de rolamento superficial contamina os sinais relevantes e pode mascarar a informação desejada, trazidas por ondas espalhadas em regiões mais profundas das camadas geológicas. Nesta dissertação será apresentada uma ferramenta que atenua o ruído de rolamento superficial baseada na transformada *curvelet*. A técnica consiste em decompor o sismograma em uma base de funções *curvelets* as quais são localizadas no tempo e na frequência, além de incorporarem uma orientação angular. Tais características permitem a construção de um filtro *curvelet* que leva em consideração a localização do ruído em escalas, limiares de corte dos coeficientes *curvelets* e dos ângulos no sismograma. O método foi testado com dados reais e os resultados obtidos foram muito bons.

Palavras-Chaves: atenuação do ruído de rolamento superficial, *ground roll*, transformada *curvelet*, processamento sísmico, ondas de Rayleigh

ABSTRACT

Among the many types of noise observed in seismic land acquisition there is one produced by surface waves called *Ground Roll* that is a particular type of Rayleigh wave which characteristics are high amplitude, low frequency and low velocity (generating a cone with high dip). Ground roll contaminates the relevant signals and can mask the relevant information, carried by waves scattered in deeper regions of the geological layers. In this thesis, we will present a method that attenuates the ground roll. The technique consists in to decompose the seismogram in a basis of curvelet functions that are localized in time, in frequency, and also, incorporate an angular orientation. These characteristics allow to construct a curvelet filter that takes in consideration the localization of denoise in scales, times and angles in the seismogram. The method was tested with real data and the results were very good.

Keywords: ground roll attenuation, curvelet transform, seismic processing, Rayleigh wave.

A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério. É esta a emoção fundamental que está na raiz de toda ciência e arte. O homem que desconhece esse encanto, incapaz de sentir admiração e estupefação, esse já está, assim por dizer, morto, e tem os olhos extintos.

Albert Einstein

Mês de Maio

Azul do céu brilhou

E o mês de maio, enfim chegou

Olhos vão se abrir, pra tanta cor

É mês de maio, a vida tem seu esplendor

A luz do sol entrou

Pela janela e convidou

Pra tarde tão bela, e sem calor

É mês de maio, saio e vou ver o sol se pôr

Horizonte, de aquarela, que ninguém jamais pintou

E um enxame, de estrelas, diz que o dia terminou

Noite nem se firmou

E a lua cheia, já clareou

Sombras podem vir, façam favor

É mês de maio, é tempo de ser sonhador

Quem não se enamorou

No mês de maio, bem que tentou

E quem não tiver, ainda amor

Dos solitários, o mês de maio é o protetor

Boa Terra, velha esfera, que nos leva aonde for

Pro futuro, quem nos dera, que te dessem mais valor

Almir Sater e Paulo Simões

Dedicatória

Dedico este trabalho:

Aos meus pais, *Dalmiro Monteiro de Oliveira* e *Maria José Rocha de Oliveira*, pelo amor e carinho com que me educaram. Ao meu pai, em especial, agradeço a paciência e a maestria com que me iniciou na Matemática e a oportunidade de conhecer *O Homem que Calculava*.

À minha esposa, *Jossanamara Alves Bastos Rocha de Oliveira*, que tem estado ao meu lado me apoiando e tendo que me dividir com as atividades acadêmicas.

Aos **Amigos** que me ajudaram a conciliar a Torre com a Universidade – *Ad Astra et Ultra*.

Às “minhas negas”, não posso esquecer: uma no céu, *Royale*; e três na Terra, *Victoria*, *Pandora* e *Dandhara* que, além de nos fazer companhia, vêm cuidando do nosso lar diuturnamente – *Cave Canem* – e estão sempre a nos esperar com alegria e carinho incondicionais.

Agradecimentos

- Ao Grande Arquiteto do Universo a vida e a evolução.
- Ao Prof. Liacir dos Santos Lucena a valiosa orientação neste trabalho e a capacidade de motivar e criar uma atmosfera rica e cativante no campo da pesquisa científica, além de todo o suporte técnico e material a mim dedicados ao longo deste trabalho.
- Ao Prof. Francisco Edcarlos Alves Leite e Marcos Vinícius Cândido Henriques a contribuição imprescindível na utilização das ferramentas da Física Computacional.
- A todos os Professores, alunos e funcionários do PPGCEP o conhecimento transmitido, a cooperação e os serviços prestados ao longo deste trabalho.
- Aos criadores da “*toolbox*” *WaveLab* que incorporada ao *MatLab* permitiu o desenvolvimento das rotinas utilizadas nesta dissertação.
- À UFRN a oportunidade, os incentivos e o suporte ao longo de minha vida acadêmica.

Sumário

Folha de Aprovação.	iii
Resumo.iv
Abstract.v
Epígrafe	vi
Dedicatória	viii
Agradecimentosix
Lista de Figuras	xii
1. Introdução.	1
1.1 Considerações Gerais.	2
1.2 Revisão Bibliográfica.	5
1.3 Física do Petróleo.	8
1.4 Organização desta Dissertação.	9
2. Prospecção do Petróleo.	10
2.1 Introdução.	11
2.2 Ondas Sísmicas.	11
2.3 Sísmica de Reflexão.	15
2.4 Aquisição de Dados Sísmicos.	16
2.5 Processamento de Dados Sísmicos.	18
2.6 Interpretação de Dados Sísmicos.	18
2.7 Ruído de Rolamento Superficial.	18
3. A Transformada Wavelet.	21
3.1 Introdução.	22
3.2 Teoria da Transformada Wavelet.	22
3.2.1 Introdução.	22
3.2.2 Transformada Wavelet Contínua.	23
3.2.3 Propriedades da Transformada Wavelet Contínua.	26
3.2.4 Transformada Wavelet Discreta.	27
3.3 Análise Multi-resolução.	29
3.3.1 Introdução.	29
3.3.2 Definição Matemática.	29
3.3.3 Decomposição em Wavelets.	30
3.3.4 Representação do Algoritmo de Decomposição e Reconstrução em Árvore.	31

4. A Transformada <i>Curvelet</i>.	32
4.1 Introdução	32
4.2 A Transformada <i>Curvelet</i> Contínua	35
4.3 Propriedades da Transformada <i>Curvelet</i>	37
4.4 A Transformada <i>Curvelet</i> Discreta	39
5. Supressão de Ruído de Rolamento Superficial	44
5.1 Introdução	45
5.2 O Ruído de Rolamento Superficial	45
5.3 A Decomposição em <i>Curvelets</i>	47
5.4 Decomposição do Sismograma com Ruído de Rolamento Superficial	47
6. Conclusões e Sugestões	55
6.1 Conclusões	56
6.2 Sugestões Para Trabalhos Futuros	56
Apêndice	58
A. Análise de Fourier	58
B. “Tight Frame”	62
Referências Bibliográficas	66

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica das componentes do tensor tensão em uma base ortonormal . . .	12
2.2	Onda de corpo compressional ou onda primária também denominada de onda P. . . .	13
2.3	Onda de corpo cisalhante ou onda secundária também denominada de onda S. . . .	13
2.4	Onda Rayleigh: um tipo de onda superficial.	14
2.5	Onda Love: outro tipo de onda superficial.	15
2.6	Esquema de aquisição terrestre e marítima de dados sísmicos.	16
2.7	Representação da formação de um traço sísmico. (A) camada sedimentar. (B) heterogeneidades. (C) refletividade. (D) reflexões individuais.	17
2.8	Representação da propagação de uma onda tipo Rayleigh com uma linha de geofones na superfície.	19
2.9	É um sismograma onde A é a região contaminada pelo ruído de rolamento superficial devido às ondas diretas que viajam pela superfície livre do meio de propagação; B é a região contaminada pela onda aérea (onda de choque) que produz um ruído de mergulho menos profundo e C são os refletores.	20
3.1	Exemplo ilustrativo da representação Tempo <i>versus</i> Frequência para STFT.	23
3.2	Exemplo ilustrativo da representação Tempo <i>versus</i> Frequência para a Transformada <i>Wavelet</i> . Das Figuras 3.2 e 3.3 pode-se observar que a frequência é o inverso da escala. . .	23
3.3	<i>Wavelet</i> normalizada para valores diferentes dos parâmetros σ e τ . A <i>wavelet</i> é gerada da derivada segunda da gaussiana. $\psi_3 = \psi_{\sigma/4,-\tau}$, $\psi_1 = \psi_{\sigma,0}$, $\psi_2 = \psi_{\sigma/2,\tau}$	25

3.4	Transformada de Fourier para a <i>wavelet</i> representada na Figura 3.4. O eixo da frequência está normalizada.25
3.5	Representação do algoritmo de decomposição em árvore com os filtros <i>H</i> e <i>G</i> seguidos por uma decimação de fator 2.32
3.6	Representação do algoritmo de reconstrução em árvore com os filtros <i>H</i> e <i>G</i> seguidos por uma inserção de fator 2.32
4.1	Ilustra a divisão do espaço e frequência das <i>curvelets</i> . A Figura à esquerda representa a composição do plano de frequência. No espaço de Fourier, as <i>curvelets</i> têm suporte próximo de uma fatia “parabólica”, e a área sombreada representa tal fatia. A Figura à direita representa esquematicamente a rede cartesiana espacial associada com uma dada escala e orientação.37
4.2	Ilustra o ladrilhamento pseudopolar discreto com trapezóides no domínio da frequência. A janela $\tilde{U}_{j,l}$ localiza suavemente a Transformada de Fourier próximo às fatias cortadas, obedecendo ao parâmetro de escala parabólico. A região sombreada representa uma fatia típica.	41
4.3	Na escala mais grossa, as <i>curvelets</i> são não-direcionais. (a) ilustra o domínio tempo/espaço. (b) ilustra o domínio da frequência (módulo da Transformada de Fourier). O nível de cinza indica o valor zero; o máximo valor positivo é representado pelo preto e o máximo valor negativo é representado pelo branco.42
4.4	Curvelets nas escalas mais finas. O painel da esquerda representa a parte real das <i>curvelets</i> no domínio temporal/espacial. O painel da direita mostra o módulo da Transformada de Fourier. O código de cores é tal como o da Figura 4.3.43
5.1	Ilustra a propagação da onda sísmica e mostra os problemas causados pela onda direta a qual produz o ruído de rolamento superficial “ <i>ground roll</i> ”.	46
5.2	Sismograma contendo o ruído de rolamento superficial sobreposto às estruturas de interesse.	46
5.3	Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na primeira escala. (a) é o sismograma original contendo o referido ruído. (b) é a imagem contendo somente os coeficientes da primeira escala. (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte. (d) estão presentes somente os coeficientes acima do limiar de corte. (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da primeira escala da imagem inicial.49

5.4 Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na segunda escala. (a) é o sismograma original contendo o referido ruído. (b) é a imagem contendo somente os coeficientes da segunda escala. (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte. (d) estão presentes somente os coeficientes acima do limiar de corte. (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da segunda escala da imagem inicial. 50

5.5 Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na terceira escala. (a) é o sismograma original contendo o referido ruído. (b) é a imagem contendo somente os coeficientes da terceira escala. (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte. (d) estão presentes somente os coeficientes acima do limiar de corte. (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da terceira escala da imagem inicial. 51

5.6 Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na quarta escala. (a) é o sismograma original contendo o referido ruído. (b) é a imagem contendo somente os coeficientes da quarta escala. (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte. (d) estão presentes somente os coeficientes acima do limiar de corte. (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da quarta escala da imagem inicial. 52

5.7 Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na quinta escala. (a) é o sismograma original contendo o referido ruído. (b) é a imagem contendo somente os coeficientes da quinta escala. (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte. (d) estão presentes somente os coeficientes acima do limiar de corte. (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da quinta escala da imagem inicial. 53

5.8 Comparação do sinal original contendo o ruído de rolamento superficial (Figura da esquerda) com o resultado da síntese obtida nas etapas anteriores através do critério de limiar de corte (Figura da direita). 54

Capítulo 1
Introdução

1.1 Considerações Gerais

Na atividade exploratória de hidrocarbonetos a grande incógnita é a localização das jazidas. Grandes esforços são envidados na tentativa de melhor localizá-las e, ao mesmo tempo, otimizar a relação custo-benefício desta tarefa.

Os métodos sísmicos são os mais utilizados pelo fato de serem indiretos, isto é, perscrutarem as camadas de subsuperfície sem invadi-las. É possível explorar grandes extensões utilizando-se de ondas sísmicas que se propagam nas diversas camadas da Terra e que, ao se refletirem nas suas discontinuidades, são captadas de volta na superfície por detectores de ondas sísmicas (geofones). Basicamente, o problema consiste em gerar um sinal de grande intensidade que vai se propagar num meio complexo onde existem heterogeneidades em várias escalas e que, ao ser espalhado por essas heterogeneidades, gera ondas que levam a informação geológica até a superfície.

O sismograma é a representação do interior da Terra e de suas estruturas através de um arranjo convenientemente disposto dos dados obtidos por meio da sísmica de reflexão. Um grande problema nessa representação é a intensidade e variedade de ruídos presentes no sismograma. Os registros mais fortes, de um modo geral, são ruídos os quais escondem o sinal de interesse, que é fraco. Eliminar ou, pelo menos, atenuar os ruídos de tais sinais tem sido alvo de intensas pesquisas com novas ferramentas da Física Computacional aplicadas à Ciência do Petróleo. A atenuação de ruídos, desta forma, passa pela análise de sinais que conta com técnicas que vão desde a *Análise de Fourier* até a *Análise Wavelet*. As funções que apresentam suas propriedades estatísticas invariantes no tempo são ditas estacionárias. Uma maneira de analisar as características dessas funções é estudando-se seu conteúdo em frequência. A Transformada de Fourier (TF) [Apêndice A], que faz uso das funções harmônicas (senos e cossenos) como funções de base, é uma ferramenta adequada para analisar funções estacionárias. Quando se aplica a TF em uma função periódica de quadrado integrável, ou seja, $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$, é obtida outra função $\hat{f}(\omega)$ a qual é interpretada como a representação da função $f(t)$ no domínio da frequência. A representação da nova função $f(t)$ será completamente caracterizada por suas frequências. A Transformada de Fourier tem

a desvantagem de que ao transformar um sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência, acarreta a perda da informação da localização temporal. Quando olhamos para a Transformada de Fourier de um sinal, é impossível localizar um evento em particular. Para um sinal estacionário isso não é problema, porque todas as componentes estão presentes por todo o domínio do tempo. No entanto, a maioria dos sinais de interesse contém características de transientes, tais como: tendências, mudanças bruscas, início e final de eventos em geral. Esses transientes são as partes mais importantes do sinal e a Transformada de Fourier não é capaz de detectar tais ocorrências.

Para analisar funções não-estacionárias, isto é, que apresentam variações no tempo de suas propriedades estatísticas, as metodologias que fazem uso da TF, são razoavelmente precárias. Em 1946, Gabor sugeriu uma mudança na TF[1] para suprir essa desvantagem. Ele modificou a TF para *Short Time Fourier Transform* (STFT) ou Transformada “Janelada” de Fourier (TJF). No processamento de funções não-estacionárias, a limitação da TF encontra-se no fato de que ela não permite analisar, em separado, trechos diferentes dessas funções [2]. Assim, caso um trecho seja extremamente ruidoso ou contenha pontos anômalos, um filtro de frequência para a remoção desse ruído afetará toda a função e não apenas o trecho especificado. Esse procedimento também causa um problema conhecido como “efeito de borda” ou “fenômeno de Gibbs” [3], o qual pode ser minimizado utilizando-se funções “janeladas” com decaimentos suaves. Além do efeito de borda, a escolha da largura da janela, para as funções de base, é outro problema relevante. Esta transformada mede localmente e na vizinhança do ponto t a amplitude da componente senoidal de frequência ω . A TJF, apesar de fornecer informação sobre tempo e frequência, tem a desvantagem de que, ao se escolher o tamanho da janela que vai percorrer o sinal, esta janela continua a mesma para todas as frequências. Entretanto, grande parte dos sinais necessita de uma abordagem mais flexível, isto é, precisa de uma janela de largura variável para que possibilite uma localização mais precisa de um determinado evento, tanto no domínio do tempo, quanto no domínio da frequência. A janela usada na TJF é de tamanho fixo para o domínio tempo-frequência, o que torna difícil de capturar as componentes de altas e de baixas frequências simultaneamente. Esse problema [4] é conhecido como Princípio da Incerteza de Heisenberg. Para se tratar melhor esses problemas, faz-se uso da Transformada *Wavelet* (TW) [5], a qual utiliza as funções de base com “janelas” de larguras variáveis que podem ser melhor ajustadas às carac-

terísticas de cada trecho de uma função não-estacionária.

A teoria das *wavelets* é uma unificação de várias técnicas desenvolvidas, independentemente, para várias aplicações de processamento de sinais. As *wavelets* são funções que requerem certas propriedades matemáticas. Elas podem ser suaves ou não, ortogonais ou não, podem ter expressões simples ou não. Podem processar tanto o caso contínuo como o caso discreto. Em particular, a TW é de interesse na análise de funções não-estacionárias, porque fornece vantagem quando comparada com a TJF [6]. Com o uso das *wavelets*, torna-se possível representar uma dada função em níveis de resoluções diferentes. Esse fato foi convenientemente explorado por Mallat [7] e Meyer [8], o que lhes permitiu sistematizar o conceito de *Análise Multi-resolução* (AM), que é fundamental no domínio das *wavelets*. Esse tipo de análise, além de facilitar a aplicação de algoritmos, constitui o enquadramento ideal para construção de sistemas *wavelets* [8, 9]. Enormes são os benefícios da aplicação destes algoritmos a problemas de filtragem e processamento de imagens. Os algoritmos propostos por Mallat possibilitam decompor um sinal inicial em outro sinal com um nível de resolução inferior (o que corresponderá a um sinal menos nítido). Simultaneamente, são obtidos os detalhes que permitirão recompor o sinal inicial, partindo das informações contidas no sinal decomposto.

No contexto do processamento de sinais, como acontece, também, com sinais sísmicos na prospecção de petróleo, entende-se por filtragem a remoção de ruídos presentes nesses sinais, visando à melhoria da interpretação para a utilização dos dados. Nesse contexto, as melhorias podem ser obtidas pelo uso da TW [6]. Outra utilização importante das *wavelets* nas pesquisas de petróleo é a compressão de dados sísmicos. Durante a prospecção é gerada uma imensa quantidade de dados sísmicos e este volume de dados demandaria um número enorme de discos para o seu armazenamento. Para isso, faz uso das *wavelets*, que apresentam vantagens, se comparadas aos métodos tradicionais [10] para comprimir dados.

A Transformada *Curvelet* (TC) é uma transformação multi-escala com forte caráter direcional na qual os elementos são altamente direcionais nas escalas mais finas. A representação de singularidades na Transformada de Fourier exige um elevado número de termos para que a análise se aproxime bem do sinal original. As *Wavelets*, devido a sua localização e resolução multi-escala, reconstituem tais sinais e até mesmo singularidades com

muita economia. E isso, somente em uma dimensão, devido à pouca seletividade direcional. Portanto, não reconstruem bem singularidades de dimensões maiores. As *curvelets* provêm uma arquitetura bem adaptada para representar objetos singulares ao longo de uma curva ou de uma direção qualquer. Além do mais, a Transformada *Curvelet* é organizada de tal forma que a maior parte do sinal tem uma representação esparsa, ou melhor, é representada em poucos coeficientes [11]. As funções de base são semelhantes às das *wavelets*, mas agora incorporam o caráter direcional, ou seja, pode-se então, decompor uma imagem variando ou selecionando a direção da função de base. Isso permite descobrir quais são os coeficientes que mais estão presentes na imagem em uma determinada direção. De um modo prático pode-se pensar nas *curvelets* como sendo obtidas através de dilatações, rotações e translações de uma função de forma específica φ .

Resumindo, uma descontinuidade puntiforme afeta todos os coeficientes da Transformada de Fourier. Logo, a TF não descreve bem tais descontinuidades. Usando *wavelets*, somente alguns dos coeficientes são afetados, o que faz da Transformada *Wavelet* uma ferramenta mais adequada para descrever bem essas descontinuidades. No entanto, em dimensões maiores, as *wavelets* não são tão adequadas, pois, descontinuidades ao longo de uma curva simples, afetam todos os coeficientes *wavelets* da curva. Portanto, a TW não descreve bem tais descontinuidades. As *curvelets* são desenhadas para descreverem descontinuidades em superfícies suavemente curvas usando somente um pequeno número de coeficientes. Portanto, a Transformada *Curvelet* descreve bem esse tipo de descontinuidade.

1.2 Revisão Bibliográfica

Em 1807, o físico e matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier desenvolveu um método de análise de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas Séries de Fourier. Qualquer função periódica pode ser decomposta num somatório infinito de senos e cossenos.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.1)$$

A Transformada de Fourier é uma transformada integral que expressa uma função não periódica em termos de funções de base senoidal, ou seja, como uma integral de funções senoidais multiplicadas por coeficientes que representam suas intensidades.

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.2)$$

O fato das funções de base na TF se estenderem por todo o espaço, isto é, de menos infinito a mais infinito, as tornam adequadas para estudar um sinal estacionário. Ao realizar uma transformação para o domínio da frequência, a informação temporal é perdida tornando-a inadequada para analisar sinais não-estacionários, pois não fornece a localização de um evento, tal como mudança de frequência, descontinuidade, singularidades e fenômenos de transientes em geral. As transformadas tempo-frequência surgiram como uma alternativa à análise de Fourier que incorporasse a possibilidade de realização de uma análise local do sinal. Em 1946, o físico Denis Gabor [1], interessado em representar sinais não-estacionários em problemas de comunicações usando funções de base oscilatórias no plano tempo-frequência, desenvolveu um método que divide o sinal original em partes, através de “janelas” de formato gaussiano, onde é realizada uma TF de modo a permitir uma análise em tempo e frequência do sinal original. Essa operação permite que se obtenha alguma informação de quando e quais frequências ocorrem no sinal cuja janela de análise possui uma determinada largura.

$$Gf(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-t)e^{-i\omega u} du \quad (1.3)$$

No entanto, a Transformada de Gabor impõe uma limitação decorrente do compromisso exigido no plano tempo-frequência devido ao valor finito da energia. O problema é que, uma vez escolhida uma janela no domínio do tempo, essa mesma janela (largura) tem de ser usada em todas as frequências. Contudo, no início do século XX, Alfred Haar desenvolveu um sistema de decomposição de funções em uma base ortonormal baseada em um pulso quadrado. A Transformada de Haar é um caso particular da TW discreta. Foi na década de 1980 que as wavelets passaram a ter vida própria. Vários investigadores estiveram envolvidos nestes trabalhos pioneiros. Destacam-se, entre outros, os trabalhos de Grossman e

Morlet [2], Mallat [7], Meyer [8], Daubechies [9]. Trabalhando com sinais geofísicos em uma companhia de petróleo, o francês Jean Morlet se deparou com o problema de analisar esses sinais, os quais apresentavam componentes de frequências altas para um tempo curto e componentes de frequências baixas para um tempo longo. Com a TJF ele foi capaz apenas de analisar as componentes de altas frequências usando “janelas” estreitas ora componentes de baixas frequências usando “janelas” largas, mas não ambas. Desta conclusão, Morlet propôs uma modificação na TJF para melhor analisar esses sinais. Ele usou “janelas” que variavam seus tamanhos para as diferentes bandas de frequências. Essas “janelas” eram geradas por dilatações ou compressões de uma função Gaussiana protótipo. Devido à natureza dessa função “janelada”, Morlet as nomeou de *wavelets*. Convencido de suas idéias, Morlet procurou ajuda ao físico teórico Alex Grossmann, quem firmou uma base matemática para as teorias. Anos depois, as *wavelets* de Morlet atraíram a atenção do matemático Yves Meyer. Fascinado pelo esquema elegante de análise de funções não-estacionárias, Meyer ajudou no enriquecimento da nova teoria, conciliando-a a outros campos da matemática, antes, estudados separadamente. Atualmente, existem várias *wavelets* construídas em $L^2(\mathbb{R})$ que podem ser usadas eficientemente, mas todas parecem ter as mesmas características gerais. O que as distinguem são, fundamentalmente, as suas maiores ou menores localizações no domínio espaço-frequência, as suas continuidades e as suas diferenciabilidades.

$$W\{f, \psi\}(\sigma, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{\sigma, \tau}^*(t)dt \quad (1.4)$$

Em 1999, Candès e Donoho [13] começaram a desenvolver o que veio a ser o próximo passo na evolução das transformadas que usam pequenas ondas localizadas no domínio do tempo/escala como funções de base. A teoria das *ridgelets* teve sua origem na tese de doutorado de Emmanuel Candès (1998). Neste trabalho, Candès mostrou que era possível desenvolver um sistema de análise baseado em funções *ridge*;

$$\psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) - b}{a}\right) \quad (1.5)$$

Essas funções de base são mais adequadas para decompor objetos com descontinuidades ao longo de linhas retas, isto é, de objetos com arestas em uma direção

diferente das direções de base do \mathbb{R}^2 . Os tratamentos de análise multi-resolução e filtro passa-bandas são tais como os da Transformada *Wavelet*. No entanto, quando essas descontinuidades eram ao longo de curvas suaves, as *ridgelets* não forneciam uma análise adequada.

As *curvelets* são o resultado do esforço para obter uma transformação matemática capaz de representar uma descontinuidade suavemente curva em uma superfície como uma soma de funções de base que tenham a capacidade de representar essas descontinuidades com poucos coeficientes.

1.3 Física do Petróleo

O termo *Física do Petróleo* tem se consolidado nos últimos anos como uma área de aplicação das ferramentas e métodos da *Física Estatística* e de *Sistemas Complexos* à exploração e à produção de petróleo e gás natural, mais especificamente, em problemas de remoção de ruídos, processamento de dados sísmicos, análise de grandezas físicas obtidas através de perfis de poços e de caracterização de reservatórios de petróleo. A *Física Estatística* é o ramo da Física que faz uso extensivo da Estatística para analisar sistemas físicos de alta complexidade com elevado número de entes constituintes, o que inviabiliza, ou mesmo impossibilita, o estudo detalhado do sistema usando o Paradigma Newtoniano.

Nas últimas décadas do século XX, parte da comunidade dos físicos passou a se interessar pela dinâmica de sistemas ditos complexos, cujas partes interagem entre si de forma não-linear. Uma das propriedades marcantes de tais sistemas é a presença de *leis de escala* ou *leis de potência*. A tentativa de construir um modelo para esses fenômenos deu origem a novos ramos da Física, a exemplo da *Teoria do Caos* e da *Física de Sistemas Complexos*, de forma que conceitos como criticalidade auto-organizada, auto-similaridade, fractais e leis de potência passaram a fazer parte da Física Contemporânea [26]. E esses novos conceitos da Física Contemporânea estão sendo sistematicamente aplicados à problemas da Ciência do Petróleo no que está ficando conhecido como Física do Petróleo.

1.4 Organização Desta Dissertação

Esta dissertação está organizada em seis capítulos. No *capítulo 1*, fazemos uma abordagem da situação problema e uma introdução teórica da análise de sinais estacionários com referência à aplicação da TF, bem como suas falhas e a necessidade de análise de sinais não-estacionários baseada na teoria das *wavelets* e sua adequação em sinais unidimensionais. Em seguida, devido à necessidade de analisar sinais em duas ou mais dimensões ao longo de qualquer direção e que possibilite uma representação mais econômica em termos de coeficientes, é feita uma descrição breve das transformadas *ridgelet* e *curvelet*. É apresentado, também, o contexto histórico da evolução de cada técnica de análise de funções revelando suas vantagens e desvantagens. No *capítulo 2*, apresentamos algumas propriedades e componentes importantes das ondas sísmicas que influenciam na “captura” de características do subsolo. Apresentamos a técnica da Reflexão Sísmica, produção e representação de um sinal em Geofísica, além de uma descrição das etapas da exploração sísmica. No *capítulo 3*, apresentamos uma revisão da teoria da Transformada *Wavelet* com alguns dos conceitos principais que fazem dessa transformada uma ferramenta muito eficiente para o processamento de sinais. Na seção 3.3, fazemos um tratamento da *Análise Multi-resolução*, que é fundamental para a construção das bases de *wavelets*. No *capítulo 4*, apresentamos uma revisão teórica das *Curvelets* e uma das técnicas de obtenção da sua transformada, que além de exibir as propriedades da análise multi-resolução, incorpora o caráter direcional. No *capítulo 5*, descrevemos as características do ruído de rolamento superficial, a técnica de sua atenuação e os resultados obtidos. No *capítulo 6*, fazemos as conclusões e sugestões para trabalhos futuros. Em seguida, no Apêndice A, mostramos de forma matemática, a ferramenta mais tradicional para a análise de funções, que é a Análise de Fourier; no Apêndice B, uma breve descrição de um “*Tight Frame*” (protótipo ou arcabouço de um espaço vetorial) e finalmente as Referências Bibliográficas.

Capítulo 2
Prospecção do Petróleo

2.1 introdução

O ambiente geológico onde o petróleo é gerado e armazenado é um meio poroso aleatório e complexo possuindo heterogeneidades em um largo espectro de escalas. Este ambiente está localizado, em geral, a milhares de metros de profundidade na crosta terrestre, estendendo-se por uma grande área e com algumas dezenas de metros de espessura. A obtenção de dados desse ambiente pode ser feita através de métodos diretos, como a perfuração de poços, que são muito caros, e/ou através de métodos indiretos, tais como a sísmica de reflexão ou refração, que têm custos menos elevados. Através de simulação computacional, podemos também estimar o padrão e o tipo de geometria do reservatório que, em boa aproximação, é um fractal.

2.2 Ondas Sísmicas

São ondas de natureza mecânica que transportam energia de deformação elástica que se propagam no meio em que foram geradas. A velocidade dessas ondas depende das propriedades elásticas e da densidade do meio de propagação.

Quando se aplica uma força sobre a superfície de um corpo, pode-se modificar a forma e/ou o volume desse corpo. A elasticidade é a propriedade dos corpos de resistirem a essa deformação e de retornarem à forma e/ou ao volume inicial após a retirada das forças externas. Um corpo é dito perfeitamente elástico quando volta à sua forma inicial depois de cessada a força causadora da deformação. A teoria da elasticidade estuda as relações entre as forças e as mudanças, na forma e/ou no volume dos corpos, com base nos conceitos de tensão (*stress*) e deformação (*strain*). Para pequenas deformações, segundo a lei de Hooke, podem ser consideradas perfeitamente elásticas as deformações que ocorrem numa rocha, pois as ondas sísmicas geradas na prospecção do petróleo são causadoras de pequenas deformações, da ordem de $10^{-3}\%$ a $10^{-6}\%$, portanto podem ser classificadas como deformações elásticas. Essas deformações pequenas possuem relações lineares com as tensões que as originam.

Tensão ou “*stress*” é definida como força por unidade de área. Quando a tensão é

perpendicular à área em que atua, é denominada de *tensão normal*; quando ela é tangencial, é denominada de *tensão cisalhante*. Se uma pequena porção do meio for isolada no formato de um pequeno cubo no qual existam tensões externas atuando, podem-se decompor os elementos das tensões que atuam em cada uma das seis faces do cubo de acordo com a Figura 2.1

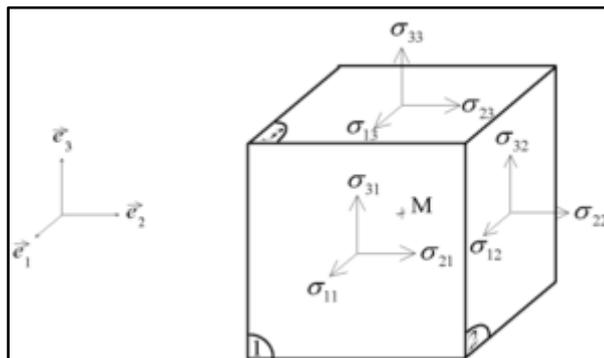


Figura 2.1: Representação gráfica das componentes do tensor tensão em uma base ortonormal.

Na Figura 2.1, os índices subscritos 1, 2 e 3 são relativos aos eixos cartesianos \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 , de modo que σ_{12} indica uma tensão paralela ao eixo \vec{e}_1 atuando numa superfície perpendicular ao eixo \vec{e}_2 . Quando os índices são iguais, a tensão é dita normal; se diferentes, a tensão é cisalhante.

Deformação ou “*strain*” é a mudança na forma e/ou dimensões de um corpo quando este está sob ação de uma tensão. A deformação normal não modifica a forma do corpo, somente o volume. A deformação cisalhante modifica a forma, mas não o volume. Quando o equilíbrio estático é rompido, dá-se início a propagação da *tensão* e da *deformação* sob a forma de ondas elásticas. Desta forma, as ondas sísmicas são ondas elásticas que se propagam na Terra. As ondas sísmicas podem ser classificadas como ondas de *corpo* (ou volume) e de *superfície*. As ondas de volume são as que se propagam através do interior da Terra. Apresentam direções radiais com desvios devido às variações de densidade do meio (refração). São responsáveis pelos primeiros tremores sentidos durante um terremoto. Existem dois tipos de ondas de corpo: as ondas primárias (ondas P) e as secundárias (ondas S). Ondas (P) são ondas compressoriais (longitudinais) as quais são mais velozes que as

ondas (S), e por isso, são os primeiros eventos a serem detectados após um abalo sísmico. Durante a passagem da onda, as partículas do meio vibram na mesma direção de propagação da onda. As ondas (S) são ondas de cisalhamento (transversais), o que significa que o meio é deslocado na direção perpendicular à direção de propagação da onda e se propagam apenas em corpos sólidos, devido ao fato dos fluidos não suportarem forças de cisalhamento. Sua velocidade de propagação é menor que das onda (P), para um dado meio, e a amplitude várias vezes maior.

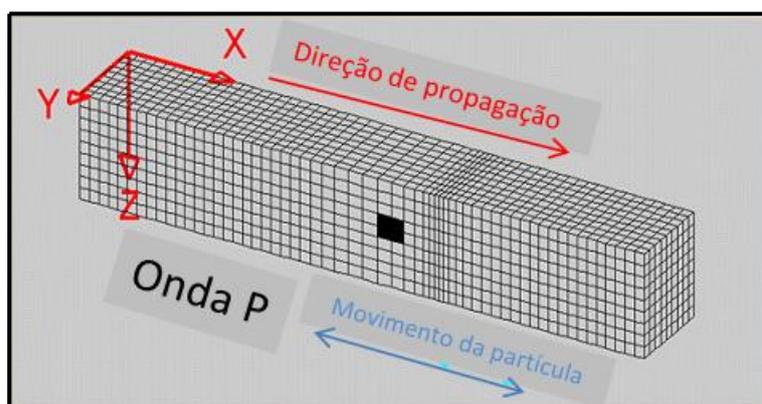


Figura 2.2: Onda de corpo compressional ou onda primária também denominada de onda P.

A Figura 2.2 ilustra um modelo de descrição de uma onda de corpo compressional que também é denominada de onda primária ou onda P. É uma onda longitudinal e um elemento de volume do meio de propagação sofre mudança de volume devido à compressão ao longo da direção de propagação.

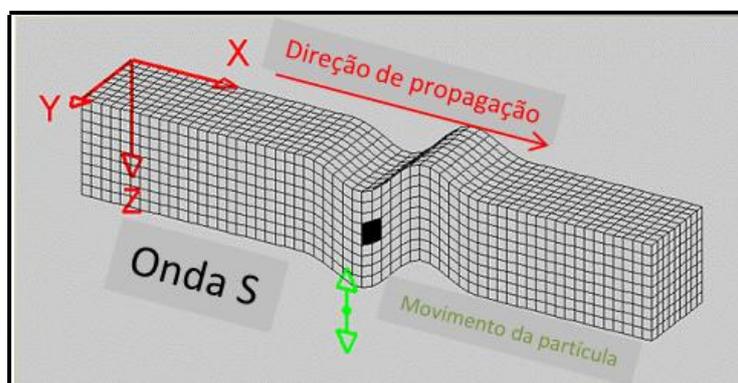


Figura 2.3: Onda de corpo cisalhante ou onda secundária também denominada de onda S.

A Figura 2.3 ilustra um modelo de descrição de uma onda de corpo cisalhante, também denominada onda secundária ou onda S. É uma onda transversal e um elemento de volume do meio de propagação tem sua forma modificada, mas seu volume não se altera.

As ondas de superfície propagam-se imediatamente abaixo da superfície terrestre e deslocam-se mais lentamente que as ondas de corpo. Devido à sua baixa frequência, longa duração e grande amplitude, possuem elevado poder destrutivo. Propagam-se pela superfície a partir do epicentro de um sismo. Existem dois tipos de ondas de superfície: *ondas de Rayleigh* e *ondas de Love*.

As ondas de Rayleigh (R) são o resultado da interferência de ondas P e S. A existência destas ondas foi prevista pelo Lord Rayleigh em 1885. Estas ondas provocam vibrações no sentido contrário à propagação da onda, ou seja, um movimento de rolamento (descreve uma órbita elíptica), por isso também é denominada de onda de rolamento superficial e sua amplitude diminui rapidamente com a profundidade.

A Figura 2.4 ilustra um modelo descritivo de uma onda de Rayleigh. Observe que é uma onda numa determinada direção e o movimento dos elementos de volume do meio descrevem um movimento de rolamento cuja intensidade diminui rapidamente com a profundidade.

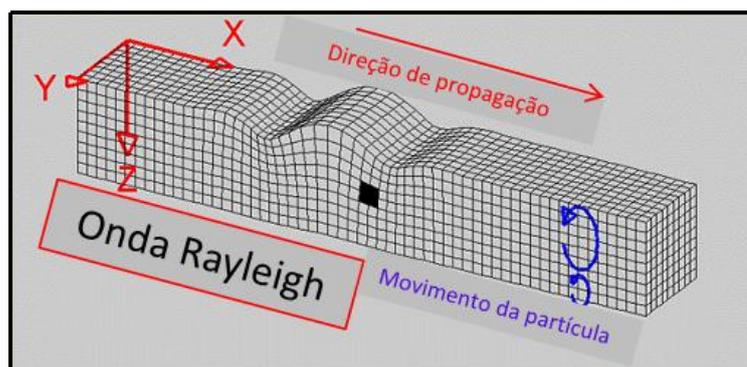


Figura 2.4: Onda de Rayleigh: um tipo de onda superficial.

As ondas de Love (L) são ondas que produzem cisalhamento horizontal do solo e sua energia é obrigada a permanecer nas camadas superiores da Terra devido ao fato de ocorrer por reflexão interna total. Essas ondas são o resultado da interferência de duas ondas S e são ligeiramente mais rápidas que as ondas de Rayleigh. São ondas muito destrutivas.

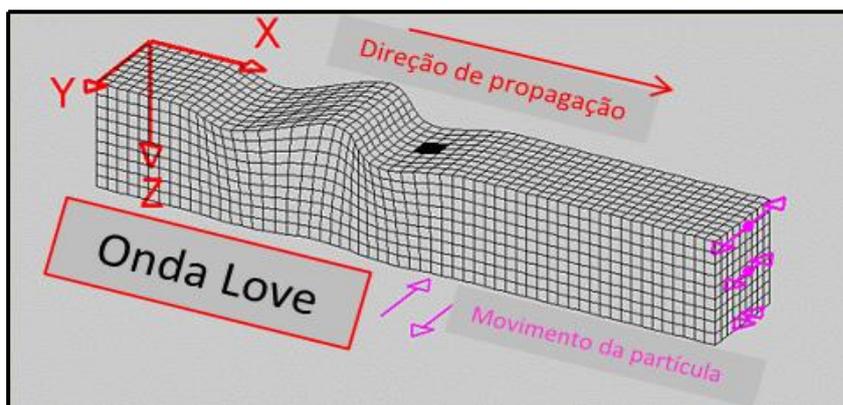


Figura 2.5: Onda de Love: outro tipo de onda superficial.

A Figura 2.5 ilustra um modelo descritivo de uma onda de Love. Observe que os elementos de volume do meio de propagação sofrem um cisalhamento no plano horizontal cuja intensidade diminui com a profundidade.

2.3 Sísmica de Reflexão

Os métodos sísmicos são os que se baseiam na emissão de ondas sísmicas geradas artificialmente na superfície terrestre, ou no mar, por meio de explosivos, ar comprimido, queda de pesos ou vibradores, captando seus “ecos” depois de percorrerem determinada distância no interior da crosta terrestre e serem refletidas ou refratadas nas suas discontinuidades e, então, retornando à superfície com o objetivo de obter um imageamento das estruturas de subsuperfície. Na sísmica de reflexão, observa-se o comportamento das ondas sísmicas que, após penetrarem na crosta, são refletidas por discontinuidades das propriedades elásticas do meio e, retornando à superfície, são detectadas por geofones ou hidrofones estrategicamente dispostos para esse fim. É o principal método usado na prospecção de hidrocarbonetos por fornecerem informações da estrutura do interior da Terra, bem como das propriedades físicas das camadas que a compõem.

2.4 Aquisição de Dados Sísmicos

Uma fonte de ondas sísmicas, tal como explosão de dinamite, é utilizada na aquisição de dados terrestres. No mar, são usados dispositivos pneumáticos, como canhões de ar comprimido. Quando a onda sísmica alcança uma interface entre duas camadas com propriedades elásticas contrastantes, parte da energia é refletida de volta à superfície, e a outra parte da energia é refratada, continuando sua propagação através do novo meio. A porção da energia refletida é captada nos geofones ou hidrofones e registrada nos sismógrafos, que armazenam o tempo duplo de ida e volta do sinal e sua intensidade no momento de chegada aos receptores. Após várias detonações onde se variam as posições da fonte e dos receptores, todos os dados armazenados são enviados para a etapa de processamento.

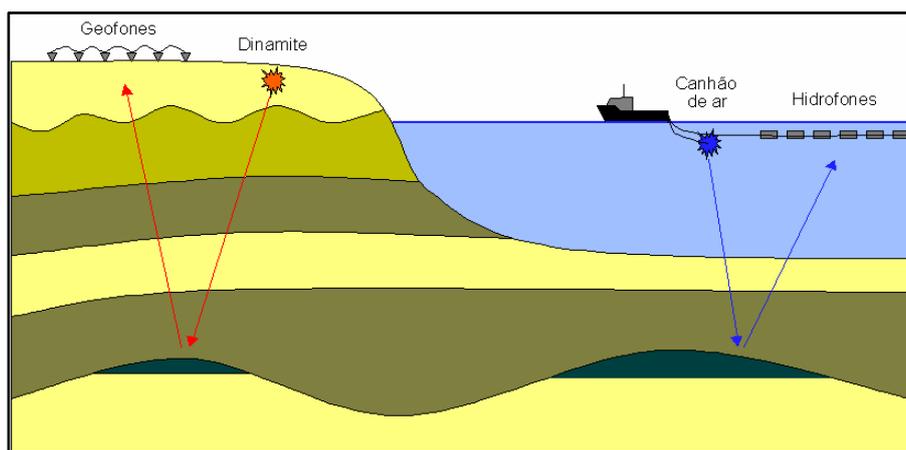


Figura 2.6: Esquema da aquisição terrestre e marítima de dados sísmicos.

A Figura 2.6 ilustra a aquisição de dados sísmicos para levantamentos terrestres e marítimos. Esse processo envolve a geração de uma onda sísmica e sua captação na superfície por um arranjo previamente ordenado de geofones (receptores). As fontes de ondas sísmicas mais convencionais são a explosão de dinamite, para um levantamento terrestre, e disparos de canhões de ar comprimido, para levantamentos marítimos. Em geral, é considerado que o pulso refletido numa descontinuidade tenha a mesma forma que o pulso incidente. Os geofones registram as superposições das reflexões (amplitudes sísmicas) individuais, que variam de valores negativos a positivos, sendo armazenados como números

em representação digital de ponto-flutuante resultando-as em um traço sísmico. Cada traço é apresentado como sendo uma série temporal de amplitudes que tem sua área positiva preenchida. A formação de um traço sísmico está ilustrada na Figura 2.7 [24].

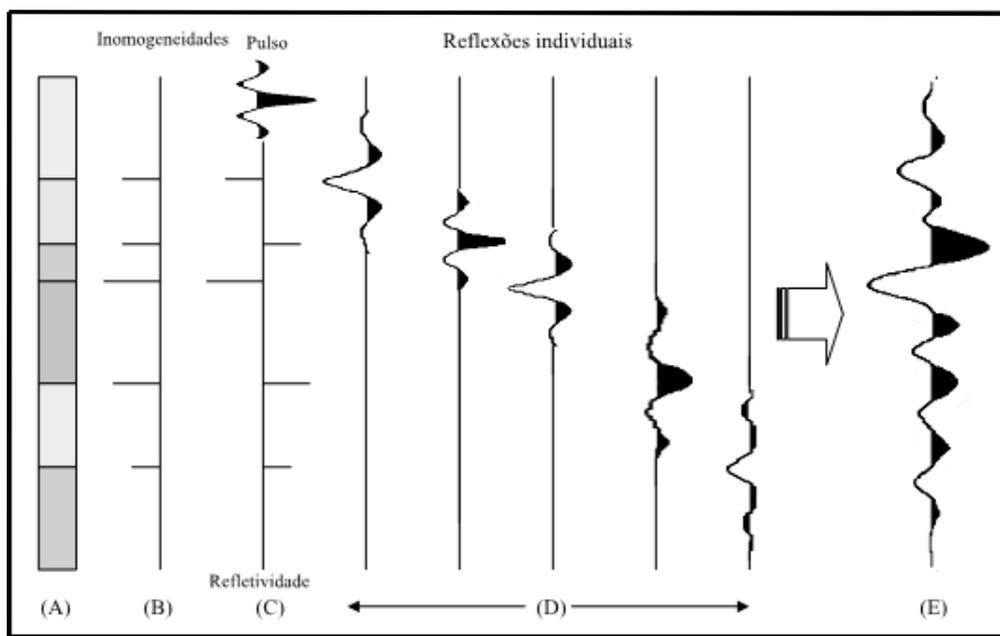


Figura 2.7: Representação da formação de um traço sísmico. (A) camada sedimentar. (B) heterogeneidades. (C) refletividade. (D) reflexões individuais. (E) traço sísmico final.

Na Figura acima, (A) representa as camadas sedimentares do solo com heterogeneidades. Em (B) tem-se as heterogeneidades onde os traços na horizontal representam a densidade da camada. Nas letras (C) e (D) são representados os pulsos incidentes, refratados e refletidos. Quando os pulsos refletidos retornam à superfície, eles podem ser registrados nos geofones. A letra (E) mostra o registro, em apenas um geofone, dos pulsos refletidos. Os princípios físicos estão associados ao particionamento da energia nas interfaces. Condições de contorno permitem calcular como a energia contida na onda é dividida entre as ondas refletidas e transmitidas. Pelos conceitos da Óptica Geométrica, pode-se provar [24] que as reflexões aparecerão nos sismogramas como uma aproximação de uma hipérbole. A reflexão de um mesmo ponto em subsuperfície aparecerá em tempos progressivamente maiores nos traços de uma mesma família, em função da distância entre as fontes e os receptores.

2.5 Processamento de Dados Sísmicos

Nesta etapa, algumas correções e filtragens para remoção de ruídos são realizadas nos dados brutos, que são reorganizados para formarem uma imagem bidimensional do perfil levantado, ou tridimensional a partir da combinação de vários perfis lado a lado. Uma coluna de amostras com as mesmas coordenadas espaciais, variando apenas no tempo, é denominada de *traço sísmico*. Os dados formados por um conjunto de traços sísmicos dispostos ao longo de uma linha é denominado de *linha sísmica 2D*, com uma dimensão espacial e a outra temporal. No caso *3D*, o volume sísmico é formado por várias linhas sísmicas: duas linhas espaciais, que são chamadas de “*inline*”, quando na direção das linhas sísmicas, e “*crossline*” quando dispostas na direção perpendicular às linhas sísmicas, além de uma dimensão temporal.

2.6 Interpretação de Dados Sísmicos

Na etapa de interpretação, o intérprete analisa os dados sísmicos e tenta criar um modelo que represente o ambiente geológico contido na área do levantamento. A interpretação sísmica pode ser classificada de acordo com o foco: estrutural e estratigráfica. A interpretação estrutural, basicamente, tenta identificar as camadas geológicas, isto é, as interfaces entre as camadas e suas falhas. Na interpretação estratigráfica o objetivo é entender o modo como as camadas foram se formando ao longo do tempo.

2.7 Ruído de Rolamento Superficial

As ondas superficiais são uma fonte de ruídos encontrados nos sismogramas. Durante a aquisição, cerca de dois terços da energia sísmica produzida corresponde a esse tipo de onda, mais precisamente, do tipo Rayleigh [25]. O ruído de rolamento superficial “*ground roll*” é uma onda superficial que viaja paralelamente à superfície e apresenta características semelhantes às ondas dispersivas de Rayleigh. Portanto, tem frequências diferentes e velocidades diferentes de propagação. A Figura 2.8 ilustra uma onda de Rayleigh. Esta onda

é complexa e sua propagação se dá pelo movimento elíptico e retrógrado das partículas ao longo da direção de propagação sem transmitir energia para dentro do meio e sua amplitude decresce de forma exponencial com a profundidade, limitando-se a uma camada superficial de determinada espessura. Estas perturbações não carregam consigo informações de subsuperfície e geram intensos registros nos geofones que constituem o ruído de rolamento superficial. Já o sinal de interesse, oriundo da reflexão nas estruturas de subsuperfície, que se sobrepõe ao ruído fica escondido ou pouco visível no sismograma.

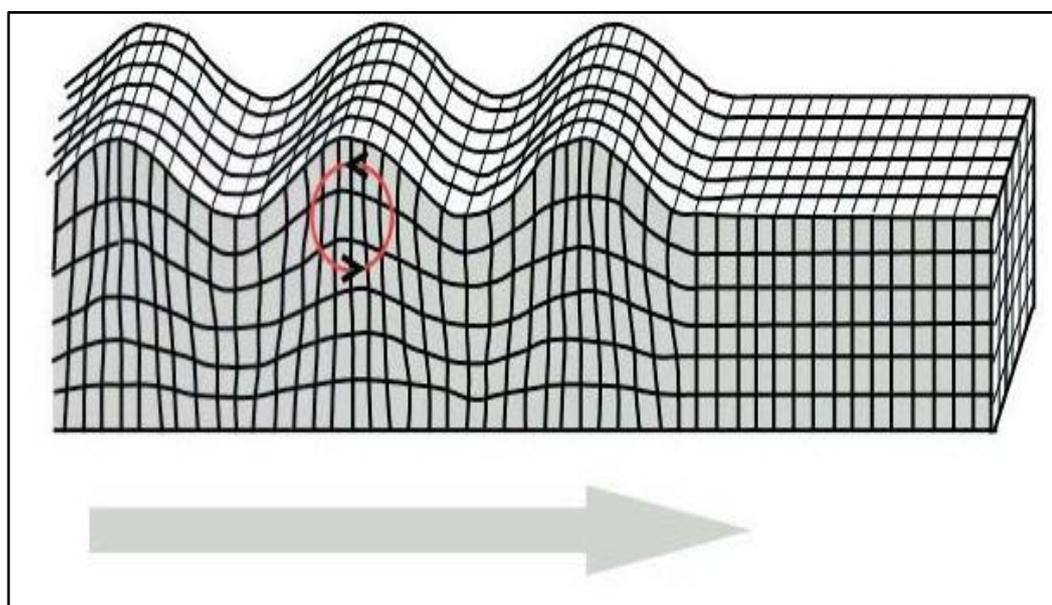


Figura 2.8: Representação da propagação de uma onda do tipo Rayleigh com uma linha de geofones na superfície.

Na Figura 2.9, pode-se verificar o cone formado pelo ruído de rolamento superficial (região **A**), o qual atrapalha a visualização dos eventos de interesse, que são as reflexões relativas às diferentes camadas da subsuperfície (região **C**). O cone formado é caracterizado por uma onda que se propaga com velocidade baixa, frequência baixa e amplitude grande em relação aos eventos de interesse. Observe que o ruído mascara o sinal de interesse ou dificulta a interpretação da continuidade das estruturas de subsuperfície. Na região **B**, temos um mergulho de menor profundidade causado pelas ondas aéreas que são ondas de choque que também contaminam a imagem.

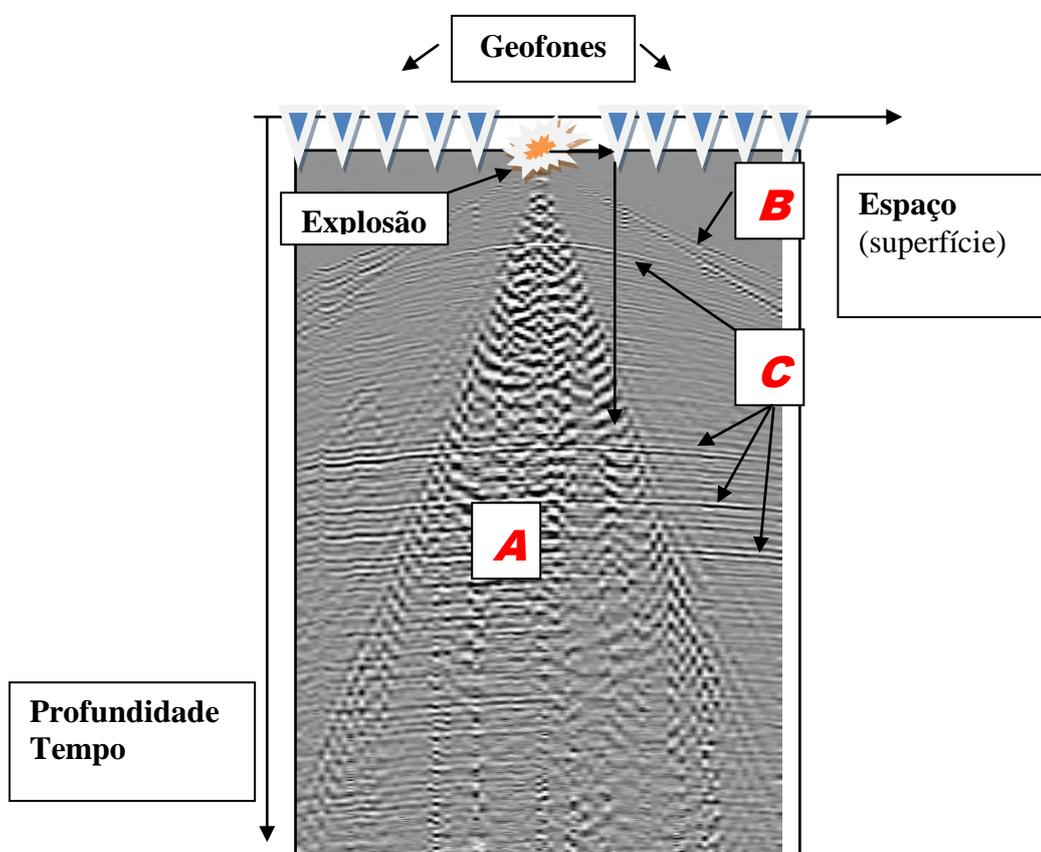


Figura 2.9: É um sismograma onde *A* é a região contaminada pelo ruído de rolamento superficial devido às ondas diretas que viajam pela superfície livre do meio de propagação. *B* é a região contaminada pela onda de choque aérea que provoca um ruído de mergulho menos profundo e *C* são os refletores de interesse.

Capítulo 3

A Transformada *Wavelet*

3.1 Introdução

A Transformada *Wavelet* é uma técnica recente da Física Matemática e com ampla aplicação na Física Estatística (Arneodo et al. (1994, 1995)). Essa transformada tem grande aplicabilidade no estudo das propriedades das funções não-estacionárias e nos fenômenos com transientes, como é o caso dos sinais geofísicos (Deighan et al. (1997)). A utilidade das *wavelets* está na possibilidade de atuarem como funções de base na decomposição de funções $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ de forma mais eficiente que as bases senoidais do método de Fourier. Muitas vezes, a Transformada *Wavelet* é comparada a um microscópio ou lupa pelo fato de proporcionar um efeito tipo lente de aumento (Arneodo et al. (1994)), devido a sua habilidade de localizar, no tempo e na escala, transientes e singularidades em uma função $f(t)$. Assim, esta análise é bastante conveniente para funções não-estacionárias, as quais são encontradas com muita frequência nas aplicações industriais. Atualmente, a Transformada *Wavelet* é uma ferramenta matemática em desenvolvimento com crescimento rápido e com diversas aplicações em vários ramos da ciência (Kobayashi (2001)).

3.2 A Teoria da Transformada Wavelet

3.2.1 Introdução

A Transformada *Wavelet* é uma ferramenta matemática muito usada. Muitas vezes, a TW é comparada a um “microscópio matemático” [17], devido a sua habilidade de localizar transientes e singularidades em uma função $f(t)$. Assim, esta análise é bastante conveniente para funções não-estacionárias, as quais são frequentemente encontradas nas aplicações industriais. Atualmente, a TW é uma ferramenta matemática em desenvolvimento com crescimento rápido e com diversas aplicações em vários ramos da ciência [18].

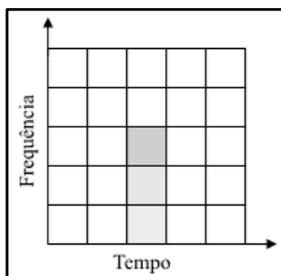


Figura 3.1: Exemplo ilustrativo da representação Tempo *versus* Freqüência para STFT.

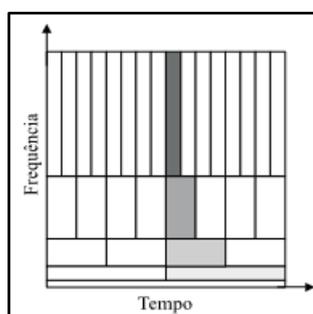


Figura 3.2: Exemplo ilustrativo da representação Tempo *versus* Freqüência para a Transformada Wavelet. Das Figuras 3.2 e 3.3 pode-se observar que a freqüência é o inverso da escala.

3.2.2 A Transformada *Wavelet* Contínua

A Transformada *Wavelet* Contínua (TWC) é uma transformação matemática que decompõe uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ em funções de base denominadas *wavelets* $\psi(t)$. Essa transformada gera uma nova função $f_\psi(\sigma, \tau) \in L^2(\mathbb{R})$ dependente do parâmetro de dilatação/contração σ (parâmetro relacionado com a freqüência que não tem na Transformada Janelada de Fourier) e do parâmetro de translação τ (similar ao parâmetro de localização da Transformada Janelada de Fourier). Como veremos na seção 3.2.3, esses parâmetros assumem valores especiais.

A decomposição pode ser representada pela definição do produto interno da função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ com as funções $\psi_{\sigma, \tau}(t)$, a seguir:

$$W\{f, \psi\}(\sigma, \tau) = \langle f(t), \psi_{\sigma, \tau}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{\sigma, \tau}^*(t) dt \quad (3.1)$$

A geração das funções $\psi_{\sigma, \tau}(t)$ é conseguida por dilatações (parâmetro σ) e translações (parâmetro τ) de uma função principal conhecida na literatura como “*wavelet mãe*”.

$$\psi_{\sigma, \tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \psi\left(\frac{t - \tau}{\sigma}\right) \text{ com } \sigma, \tau \in \mathbb{R}, \sigma \neq 0 \quad (3.2)$$

O termo $(1/\sqrt{|\sigma|})$ corresponde a um fator de normalização da energia para cada *wavelet* $\psi_{\sigma, \tau}$. Isso significa que cada *wavelet* mantém a mesma energia da *wavelet* principal.

Comparando-se as equações (3.1) e (A.18), observa-se que o que elas têm em comum é o produto de uma função por outras funções oscilatórias dentro de uma “janela”. A diferença existente entre elas está na natureza dos parâmetros que cada uma contém. Na equação A.18, o parâmetro τ' representa a localização da “janela” no tempo. Já na equação 3.1, o parâmetro τ é semelhante ao parâmetro τ' , mas o parâmetro σ está associado a variação da largura da “janela”, como pode ser visto na Figura 3.2.

A dependência da *wavelet* em dois parâmetros faz desta uma ferramenta muito eficiente em análise de funções não-estacionárias. Com esses parâmetros é possível analisar uma função, em um conjunto denso de localizações temporais, com relação a uma variação ampla de escala proporcionando uma facilidade para “focalizar” (*zoom*) transientes da função [19].

As Figuras 3.3 e 3.4 estão ilustrando, respectivamente para valores diferentes dos parâmetros σ e τ , uma *wavelet* e seus espectros de Fourier. A *wavelet* usada é a segunda derivada da gaussiana, também conhecida como *chapéu mexicano*, devido à sua forma peculiar. Observa-se que ψ_2 , comparada com ψ_1 , foi contraída por um fator σ e transladada à direita por um fator τ . Do mesmo modo, ψ_3 foi contraída por um fator σ e transladada à esquerda. Observa-se que, quando diminuída a análise do domínio temporal (ψ_2 e ψ_3 , respectivamente), a análise no domínio da frequência é aumentada (ψ_2 e ψ_3 Figura 3.4).

A TW, assim como a TF, é inversível. Com isso, a recuperação da função original $f(t)$ é possível. A reconstrução da função $f(t)$ é possível pela definição da Transformada

Wavelet Inversa (TWI). A expressão matemática é:

$$f(t) = W^{-1}\{f, \psi\}(\sigma, \tau) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{-\infty}^{+\infty} Wf(\sigma, \tau) \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \psi\left(\frac{t - \tau}{\sigma}\right) d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2} \quad (3.3)$$

O termo C_ψ depende da wavelet usada e, matematicamente, é escrito da seguinte forma:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3.4)$$

O termo $|\hat{\psi}(\omega)|$ é a Transformada de Fourier da função $\psi(t)$.

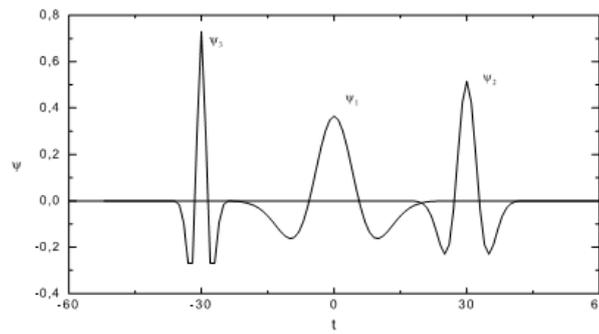


Figura 3.3: Wavelet normalizada para valores diferentes dos parâmetros σ e τ . A wavelet é gerada da derivada segunda da gaussiana. $\psi_3 = \psi_{\sigma/4, -\tau}$, $\psi_1 = \psi_{\sigma, 0}$, $\psi_2 = \psi_{\sigma/2, \tau}$.

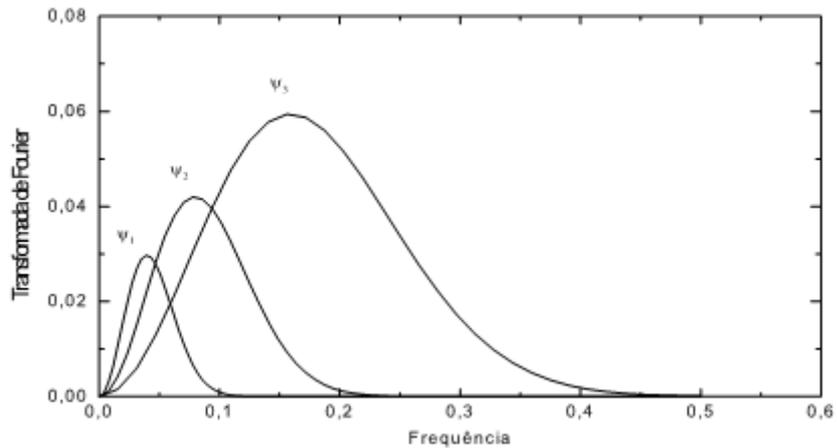


Figura 3.4: Transformada de Fourier para a wavelet representada na figura 3.3. O eixo da freqüência está normalizado.

A equação 3.4 é definida como a condição de admissibilidade e a função $\psi(t)$ tem de obedecê-la, pois, de outra forma, a reconstrução de $f(t)$ não será possível [15]. Em outras palavras, $\psi(t)$ deve satisfazer a essa condição para que a função $f(t)$ possa ser reconstruída sem perda de informações. A equação 3.4 exige, ainda, que $\hat{\psi}(0) = 0$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$. A condição de média nula implica que $\psi(t)$ muda seu sinal, ao menos, uma vez ao longo da reta real e que vai para zero quando $t \rightarrow \infty$. Essa propriedade garante que a função $\psi(t)$ deve ter caráter ondulatório.

3.2.3 Propriedades da Transformada Wavelet Contínua

A TWC satisfaz a algumas propriedades matemáticas básicas:

- **Linearidade.** A linearidade da TWC segue da linearidade do produto interno:

$$W\{\alpha f + \beta g, \psi\}(\sigma, \tau) = \alpha W\{f\psi\}(\sigma, \tau) + \beta W\{g\psi\}(\sigma, \tau) \quad (3.5)$$

- **Invariância por Translação.** Se a TWC da função é dada por $W\{f, \psi\}(\sigma, \tau)$, então a transformada da função $f'(t) \rightarrow f(t - \tau')$ é dada por:

$$W\{f', \psi\}(\sigma, \tau) \rightarrow W\{f, \psi\}(\sigma, \tau - \tau') \quad (3.6)$$

- **Invariância por escala.** Se a TWC da função $f(t)$ é dada por $W\{f, \psi\}(\sigma, \tau)$, então a transformada da função $f'(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} f(\frac{t}{\sigma_0})$ é dada por:

$$W\{f', \psi\}(\sigma, \tau) \rightarrow W\{f, \psi\}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}, \frac{\tau}{\sigma_0}\right) \quad (3.7)$$

- **Conservação da Energia.** A TWC tem a propriedade de conservar a sua energia dada pela expressão matemática;

$$\langle f|f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\psi(\sigma, \tau)|^2 d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2} \quad (3.8)$$

Na Equação 3.2, relatamos que há um fator de normalização que conserva a energia das *wavelets*. Com isso, dizemos que os coeficientes das *wavelets* têm a mesma energia e podem ser pensados como uma densidade de energia. No entanto, a Equação 3.8 significa que não há perda de informação em transformar uma função em seus coeficientes *wavelets*.

3.2.4 Transformada Wavelet Discreta

Na discretização das funções wavelets (Equação 3.2), é natural escolher o parâmetro da dilatação $\sigma = \sigma_0^j$ com $j \in \mathbb{Z}$. σ_0 é o passo de dilatação e, por conveniência, é assumido que seu valor inicial é $\sigma_0 > 1$. Assim, para valores de $j \in \mathbb{Z}^+$, σ será maior que 1; para valores de $j \in \mathbb{Z}^-$, σ será menor que 1.

A discretização do parâmetro de translação τ é feita escolhendo-se $\tau = k\tau_0$ com $k \in \mathbb{Z}$ e $\tau_0 > 0$. Essa escolha não foi feita aleatória. Ela obedece à propriedade de *Invariância por Translação* da Transformada Wavelet Contínua (Equação 3.6). O valor de τ_0 deve ser escolhido de modo que as wavelets $\psi(t - k\tau_0)$ “cubram” todo eixo temporal. A discretização de τ deve estar relacionada com a discretização de $\sigma = \sigma_0^j$. Portanto, uma escolha para τ é da forma $\tau = k\sigma_0^j\tau_0$ para cada j diferente. Logo, a Equação 3.2 assumirá a fórmula matemática:

$$\psi_{\sigma_0^j, k\sigma_0^j\tau_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_0^j|}} \psi\left(\frac{t - k\sigma_0^j\tau_0}{\sigma_0^j}\right) \quad (3.9)$$

Agora, são parâmetros j e k , basicamente, que controlam, respectivamente, as dilatações e translações da wavelet principal.

Agora, a TW de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ terá uma expressão semelhante à Equação 3.1, porém usando a expressão discreta para a wavelet principal (Equação 3.9). Portanto, a transformada é:

$$W\{f, \psi\}(\sigma_0^j, k\sigma_0^j\tau_0) = f_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|\sigma_0^j|}} \psi^*\left(\frac{t - k\sigma_0^j\tau_0}{\sigma_0^j}\right) dt \quad (3.10)$$

Onde $f_{j,k} = \langle f | \psi_{j,k} \rangle$ são os valores da transformada. Na literatura, os $f_{j,k}$ são conhecidos como *coeficientes wavelets* ou *coeficientes de detalhes*.

Quando o tempo é discretizado, a integral da Equação 3.10 pode ser substituída por um somatório. Portanto, a Transformada Wavelet Contínua torna-se a Transformada Wavelet Discreta, como definida abaixo;

$$W\{f, \psi\}(j, k) = \sigma_0^{-j} \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \psi(\sigma_0^{-j} i - k\tau_0), \quad (3.11)$$

e a Transformada *Wavelet* Discreta Inversa é definida como:

$$f(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_0^{-j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} W\{f, \psi\}(j, k) \psi(\sigma_0^{-j} i - k\tau_0) \quad (3.12)$$

Existem vários sistemas de *wavelets* diferentes construídos no $L^2(\mathbb{R})$. Por isso, na escolha sobre qual função *wavelet* será usada para análise, deve-se considerar as suas propriedades. Na próxima subseção, veremos que, usando valores específicos para σ_0 e τ_0 , Daubechies construiu uma base formada por *wavelet* ortonormal de suporte compacto no tempo [9]. O motivo de falarmos de base *wavelet* descrita por Daubechies é que ela foi usada na construção do algoritmo para a remoção do ruído de rolamento superficial (“ground roll”) encontrados nos sismogramas[B].

Transformada *Wavelet* Discreta Ortonormal

Usando-se os valores para $\sigma_0 = 2$ e para $\tau_0 = 1$, é possível construir uma base ortonormal formada por funções *wavelets* no $L^2(\mathbb{R})$. Esses foram os valores usados por Daubechies [9,15], Meyer [20] e Battle-Lemarié[21].

Tomando-se os valores citados acima para σ_0 e τ_0 , a Equação 3.9 assumirá a seguinte expressão matemática:

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - k2^j}{2^j}\right) \quad (3.13)$$

Note que omitimos os parâmetros σ_0 e τ_0 da Equação 3.9, uma vez que, agora, eles assumem valores constantes.

Observa-se que a Equação 3.13 é um caso particular da Equação 3.2. Essa notação conduz a uma estrutura em escalas (índice j) e translações (índice k), chamada “diádica”, que assemelha-se com a notação musical, em que as potências de dois estão relacionadas com intervalos (oitavas) e duração das notas. As *wavelets* obtidas a partir da Equação 3.13 formam uma base ortonormal. A vantagem de se trabalhar com uma base ortonormal é que ela permite uma reconstrução perfeita da função original a partir dos coeficientes da TW.

3.3 Análise Multi-resolução

3.3.1 Introdução

A análise multi-resolução (AM) é um modelo matemático ideal para uma descrição da representação do universo físico em escala. Também, está intrinsecamente relacionada com as *wavelets*. A AM foi desenvolvida por Meyer [8] e Mallat [22] e consiste em uma aproximação de funções $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, em subespaços sucessivos $V_j \in L^2(\mathbb{R})$ com $j \in \mathbb{Z}$, apresentando resoluções diferentes.

Embora a análise multi-resolução seja bastante importante, não apenas no tratamento que envolve a base de *wavelets*, como também pelo enorme potencial em termos de desenvolvimento e aplicação, não será objeto desta dissertação uma descrição completa e exaustiva do assunto. Citaremos alguns conceitos e o formalismo matemático, os quais serão suficientes para a compreensão do sistema de *wavelets* utilizado neste trabalho.

3.3.2 Definição Matemática

Os subespaços V_j constituem uma aproximação multi-resolução se satisfazem as propriedades matemáticas introduzidas pela AM:

1. $\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$
2. $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$
3. $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$
4. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$
5. Existe uma função $\phi \in V_0$ tal que a família $\{\phi_{0,k}(t) = \phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$, forma uma base ortonormal em V_0 .

A AM conduz diretamente a uma decomposição do espaço $L^2(\mathbb{R})$. Essa decomposição será escrita nos subespaços V_j , os quais serão caracterizados pelas funções ϕ , e nos subespaços W_j , caracterizados pelas funções ψ . Os subespaços V_j são subespaços das escalas e V_0 é o subespaço central. Todos os subespaços V_j são versões escaladas do subespaço central V_0 . W_j são os subespaços das funções *wavelets*.

3.3.3 Decomposição em Wavelets

As Funções de Escalas $\phi(t)$ e os Subespaços V_j

Da propriedade¹ 5 surge a necessidade de se definir em V_0 a função que desempenha um papel importante. É a função de escala, a qual será representada pela letra ϕ . As translações inteiras $\phi(t - k)$, com $k \in \mathbb{Z}$, de $\phi(t)$ constituem uma base para o espaço² V_0 . Como consequência das condições enunciadas:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\phi(t - k) \quad (3.14)$$

A qual decompõe a função $\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) \in V_1$ em uma base de V_0 . Para um valor inteiro j , as funções $\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}t - k)$, obtidas através de operações de dilatação e translação, formam uma base para o espaço V_j .

As Funções Wavelets e os Espaços de Detalhes W_j

As aproximações de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ nas escalas 2^j e 2^{j-1} são, respectivamente, iguais às suas projeções sobre V_j e V_{j-1} :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (3.15)$$

onde o símbolo \oplus indica soma direta. O espaço W_j contém as informações *detalhadas* necessárias para ir de uma escala para outra. O fato de o espaço W_j ser o complemento ortogonal do espaço V_j em V_{j-1} e observando-se a Equação 3.15, é fácil concluir que:

$$W_j \perp V_j \quad (3.16)$$

Em outras palavras, as Equações 3.15 e 3.16 afirmam que cada elemento do espaço V_{j-1} pode ser escrito, de forma única, como uma soma de um elemento do espaço V_j e um elemento do espaço W_j . Deve-se perceber, ainda, que os espaços W_j são ortogonais:

$$\cdots \perp W_{j+1} \perp W_j \perp W_{j-1} \perp \cdots \quad (3.17)$$

Da Equação 3.15, juntamente com a propriedade 2, observa-se que o espaço $L^2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como uma soma direta dos espaços W_j :

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.18)$$

¹ As propriedades enumeradas de 1-5 serão explicadas ao longo desta dissertação. Elas não serão explicadas de maneira seqüencial.

² Os V_j 's e os W_j 's são subespaços do $L^2(\mathbb{R})$, mas, de agora em diante, os chamaremos apenas de espaços de escala e wavelet, respectivamente.

Para além da função de escala ϕ definida em V_0 agora há uma outra função definida em W_0 , cuja definição é essencial para a geração do sistema completo de *wavelets*. É a *wavelet* principal. Ela está representada, nesta dissertação, pela letra ψ . As translações inteiras $\psi(t - k)$, com $k \in \mathbb{Z}$, de $\psi(t)$ deverão construir uma base para o espaço W_0 . Como conseqüências das condições enunciadas:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]\psi(t - k) \quad (3.19)$$

A função $\psi\left(\frac{t}{2}\right) \in W_1$ pode ser decomposta em uma base ortonormal de V_0 . Para um dado valor inteiro j , as funções $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k)$, obtidas por meio de uma operação de dilatação e uma operação de translação, constituem uma base para o espaço W_j .

3.3.4 Representação do Algoritmo de Decomposição e Reconstrução em Árvore

Uma forma rápida e computacionalmente eficiente para se obter os *coeficientes de escala* $a_{j,k} = \langle f(t) | \phi_{j,k}(t) \rangle$ e os *coeficientes wavelets* $d_{j,k} = \langle f(t) | \psi_{j,k}(t) \rangle$ é através do algoritmo de decomposição em árvore proposto por Mallat [23]. As Equações 3.20 e 3.21 relacionam os coeficientes $a_{j,k}$ e $d_{j,k}$. Uma vez que a aproximação discreta (coeficientes $a_{j,k}$) de $f(t)$ em uma resolução j é obtida, a aproximação discreta de $f(t)$ em uma resolução mais “grossa” $j + 1$ equivale a uma convolução discreta dos coeficientes $a_{j,k'}$ com o filtro discreto $h[k']$ com uma amostragem 2 (Equação 3.20). O *coeficiente wavelet* ($d_{j,k}$), na resolução $j + 1$, é equivalente a uma convolução do coeficiente de escala ($a_{j,k}$) na resolução j com o filtro discreto $g[k']$ (Equação 3.21) com uma amostragem 2.

$$a_{j+1,k} = \sum_{k'} h[k' - 2k]a_{j,k'} \quad (3.20)$$

$$d_{j+1,k} = \sum_{k'} g[k' - 2k]a_{j,k'} \quad (3.21)$$

Portanto, a Transformada *Wavelet* pode ser interpretada, no contexto de processamento do sinais, como uma filtragem seguida de uma decimação. A função de escala de $\phi(t)$ é importante porque é através dos *coeficientes de escala* que são gerados os *coeficientes wavelets*. No entanto, a Transformada *Wavelet* pode ser implementada como o esquema representado pela Figura 3.5.

Os blocos H e G funcionam como filtros passa-baixas e passa-altas, respectivamente, os quais estão associados à *wavelet* em análise. Eles correspondem a médias e diferenças, respectivamente. O símbolo ($\downarrow 2$) representa uma operação de decimação (subamostragem) por 2. Mesmo com a operação de subamostragem aplicada na transformada, o número de amostras do sinal original não muda em sua expansão *wavelet* ortonormal. Assim, se o sinal original contém n amostras, então sua expansão, em *wavelet* ortonormal, terá n amostras.

$$a_j[k'] = \sum_k h[k' - 2k]a_{j+1}[k] + \sum_k g[k' - 2k]d_{j+1}[k] \quad (3.22)$$

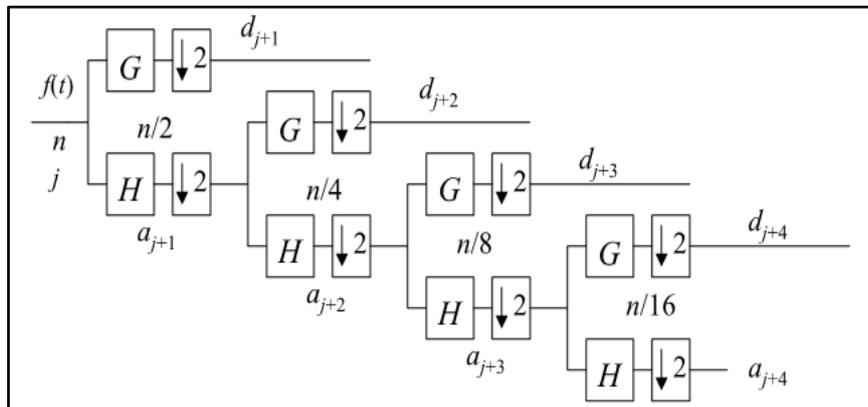


Figura 3.5: Representação do algoritmo de decomposição em árvore com os filtros H e G seguidos por uma decimação de fator 2.

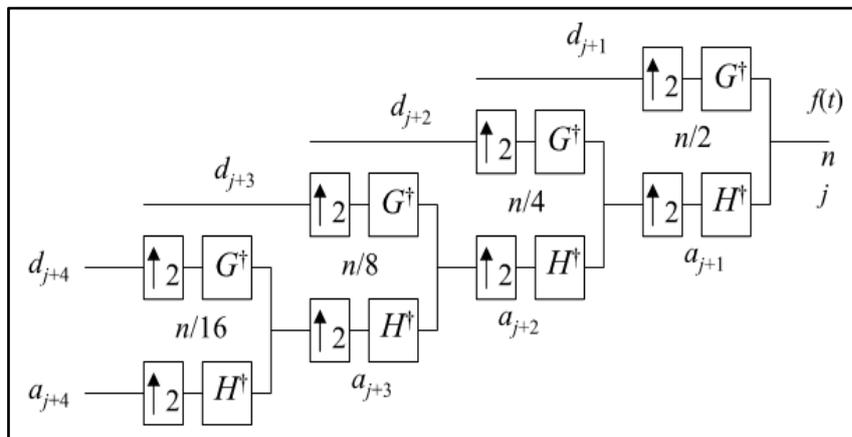


Figura 3.6: Representação do algoritmo de reconstrução em árvore com os filtros H e G seguidos por uma inserção de fator 2.

Capítulo 4

A Transformada *Curvelet*

4.1 Introdução

Na análise de Fourier, funções trigonométricas são utilizadas para formar uma base na qual podemos decompor outras funções, ou seja, a idéia é aproximar uma função por uma combinação linear de senos e cossenos. Toda função periódica, de período 2π , de quadrado integrável, isto é, $L^2(0, 2\pi)$ é gerada pela superposição de exponenciais complexas. Nas *wavelets*, a idéia é a mesma: representar ou aproximar uma função por uma combinação linear de pequenas ondas que sejam localizadas no tempo. Aí surge o diferencial das *wavelets* em comparação com os senos e cossenos, que somente são localizados no domínio da frequência, enquanto aquelas têm localização em tempo e frequência. Outra vantagem é a economia de coeficientes, os quais são necessários apenas nos trechos singulares do sinal. Uma pequena mudança no domínio da frequência, na base de Fourier, produz mudança em todo o domínio do tempo; diferentemente, na base de *wavelets*, tal mudança permanece localizada em tempo e frequência e esse comportamento as tornam ideais para analisar sinais não-estacionários, transientes e estruturas auto-similares.

As *wavelets* foram definidas, no início da década de 1980, com base na generalização de conceitos já conhecidos, oriundos de diversos campos da ciência. Pouco tempo depois, a natureza das *wavelets* já estava, de forma clara, bem definida, passando a assumir sua identidade própria. Um grande avanço no desenvolvimento das funções de base das *wavelets* se deu na análise tempo e frequência de sinais geofísicos (Morlet et al. (1982)). A fundamentação teórica veio logo após. Vários pesquisadores estiveram envolvidos nessa formulação pioneira. Dentre outros, destacam-se os trabalhos de Grossmann e Morlet (Grossmann et al. (1984)), Daubechies (Daubechies et al. (1988)) e Mallat et al. (Mallat (1989)).

Em 1999, uma nova classe de funções de base, as *curvelets*, que ainda está sendo aperfeiçoada, está ganhando diversas aplicações, tais como: remoção de ruídos, compressão de sinais, reconhecimento de padrões, dentre outras. As *curvelets* consistem em funções de base na qual uma imagem pode ser representada com bem menos coeficientes que na síntese *wavelet*. O caráter direcional das *curvelets* permite que a representação da imagem seja feita através de uma operação que inclui o parâmetro angular na função de base.

4.2 A Transformada Curvelet Contínua

Com respeito às *curvelets*, esta dissertação vai se limitar a trabalhar em duas dimensões (i.e., \mathbb{R}^2), com variável espacial x , ω a variável do domínio da frequência e com r e θ coordenadas polares no domínio da frequência. Sejam $W(r)$ e $V(t)$ um par de janelas, que chamaremos de “janela radial” e “janela angular”, respectivamente. Estas janelas são ambas suaves, não-negativas e reais, com W tomando argumentos reais e positivos com suporte em $r \in (1/2, 2)$ e V tomando argumentos reais com suporte em $t \in [-1, 1]$.

Essas janelas obedecerão às condições de admissibilidade:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W^2(2^j r) = 1, \quad r \in (3/4, 3/2) \quad (4.1)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} V^2(t - l) = 1, \quad t \in (-1/2, 1/2) \quad (4.2)$$

Agora, para cada $j \geq j_0$, introduziremos a janela de frequência U_j definida no domínio de Fourier por:

$$U_j(r, \theta) = 2^{-3j/4} W(2^{-j} r) V\left(\frac{2^{|j/2|} \theta}{2\pi}\right) \quad (4.3)$$

Onde $[j/2]$ é a parte inteira de $j/2$. Desta forma, o suporte de U_j é uma “fatia” polar definida pelo suporte de W e V , as janelas radiais e angulares aplicadas com janelas de larguras dependentes da escala em cada direção. Para obter *curvelets* reais, trabalharemos com a versão simétrica da Equação 4.3, a saber: $U_j(r, \theta) = U_j(r, \theta + \pi)$. Seja a forma de onda $\varphi_j(x)$ a “*curvelet* mãe” no sentido de que todas as *curvelets* na escala 2^{-j} , as quais são obtidas por rotações e translações de φ_j presente:

- **Uma seqüência igualmente espaçada de ângulos de rotação** $\theta_l = 2\pi \cdot 2^{-|j/2|} \cdot l$, com $l = 0, 1, \dots$ tal que $0 \geq \theta_l < 2\pi$ (observe que o espaçamento entre ângulos consecutivos são dependentes da escala);

- E a seqüência dos *parâmetros de translação* $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Com essas notações, definiremos as *curvelets* com funções de $x = (x_1, x_2)$ na escala 2^{-j} , com orientação θ_l e posição $x_k^{(j,l)} = R_{\theta_l}^{-1}(k_1 \cdot 2^{-j}, k_2 \cdot 2^{-j/2})$ por:

$$\varphi_{j,l,k}(x) = \varphi_j \left[R_{\theta_l} \left(x - x_k^{(j,l)} \right) \right] \quad (4.4)$$

onde R_θ é a rotação de θ em radianos e R_θ^{-1} sua inversa (que é também a sua transposta):

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta^{-1} = R_\theta^T = R_{-\theta} \quad (4.5)$$

Um coeficiente *curvelet* é simplesmente o produto interno entre um elemento de $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e a *curvelet* $\varphi_{j,l,k}$ como mostra a expressão abaixo:

$$c(j, l, k) = \langle f | \varphi_{j,l,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\varphi_{j,l,k}(x)} dx \quad (4.6)$$

Visto que a Transformada *Curvelet* opera no domínio da freqüência, ficará demonstrado mais adiante a utilidade da aplicação do *teorema de Plancherel* e expressar esse produto interno como uma integral sobre o plano da freqüência:

$$c(j, k, l) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \hat{f}(\omega) \overline{\varphi_{j,l,k}(\omega)} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \hat{f}(\omega) U_j(R_{\theta_l}\omega) e^{\langle x_k^{(j,l)}, \omega \rangle} d\omega \quad (4.7)$$

Como na teoria das *wavelets*, há também elementos de escalas mais “grosseiras”, de modo que é possível introduzir um filtro do tipo *passa-baixa* W_0 obedecendo:

$$|W_0(r)|^2 + \sum_{j \geq 0} |W(2^{-j}r)|^2 = 1 \quad (4.8)$$

E para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, definimos *curvelet* de escala “grosseira” como:

$$\varphi_{j_0,k}(x) = \varphi_{j_0}(x - 2^{-j_0}k), \quad \hat{\varphi}_{j_0}(\omega) = 2^{-j_0}W_0(2^{-j_0}|\omega|)$$

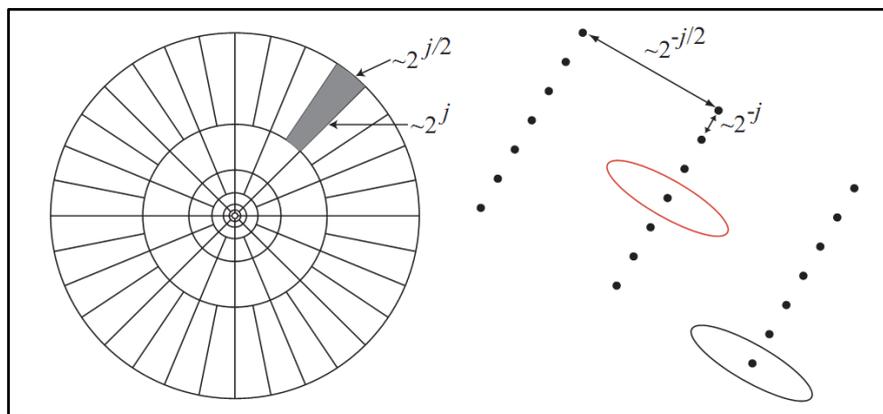


Figura 4.1: ilustra a divisão do espaço e frequência das *curvelets*. A figura à esquerda representa a composição do plano de frequência. No espaço de Fourier, as *curvelets* têm suporte próximo de uma fatia “parabólica”, e a área sombreada representa tal fatia. A figura à direita representa esquematicamente a rede cartesiana espacial associada com uma dada escala e orientação.

Daí, portanto, as *curvelets* na escala “grossa” são não-direcionais, ou seja, no maior fator de escala a *curvelet* é simétrica. A Transformada *Curvelet* na sua totalidade consiste dos elementos direcionais de escala fina $(\varphi_{j,l,k})_{j \geq j_0, l, k}$ e dos elementos não-direcionais de escala “grossa” $(\Phi_{j_0,k})_k$. É no comportamento direcional dos elementos de escala fina que estamos interessados.

4.3 Propriedades da Transformada *Curvelet*

1. “*Tight frame*”³ [Apêndice B]. Tal como numa base ortonormal, é possível expandir facilmente uma função arbitrária $f(x_1, x_2) \in L^2(\mathbb{R})^2$ como uma série de *curvelets*;

$$f = \sum_{j,k,l} \langle f | \varphi_{j,l,k} \rangle \varphi_{j,l,k} \tag{4.9}$$

com uma igualdade valendo no espaço das funções de quadrado integrável L^2 e a relação de Parseval:

³ A idéia é de um *protótipo ou arcabouço de um espaço vetorial*.

$$\sum_{j,k,l} |\langle f, \varphi_{j,l,k} \rangle|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad (4.10)$$

em 4.9 e 4.10 as somas se estendem até as escalas grossas.

2. Parâmetro de escala parabólico. A localização em frequência de φ_i implica na seguinte estrutura espacial: $\varphi_j(x)$ tem um decaimento rápido no retângulo de 2^{-j} por $2^{-j/2}$ com o eixo maior apontando na direção vertical. O comprimento e a largura efetiva obedecem a uma relação de escala:

$$\text{comprimento} \approx 2^{-j/2}, \text{ largura} \approx 2^{-j} \Rightarrow \text{largura} \approx (\text{comprimento})^2 \quad (4.11)$$

3. Comportamento oscilatório. Tal como é aparente a partir da sua definição, $\hat{\varphi}_j$ é de fato suportada a partir do eixo vertical ($\omega_1 = 0$), exceto no eixo horizontal ($\omega_2 = 0$). Em poucas palavras, isso diz que $\varphi_j(x)$ é oscilatória na direção x_1 e um passa-baixa na direção x_2 . Daí por tanto, na escala 2^{-j} , uma *curvelet* é uma estrutura fina cujo envelope é um determinado cume de comprimento efetivo $2^{-j/2}$ e largura 2^{-j} e que exhibe um comportamento oscilatório ao longo do cume principal.

4. Momentos nulos. O molde da *curvelet* φ_j é dito ter q momentos nulos quando:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j(x_1, x_2) x_1^n dx_1 = 0 \text{ para todo } 0 \leq n < q \text{ para todo } x_2 \quad (4.12)$$

A mesma propriedade é válida para *curvelets* giradas quando x_1 e x_2 são tomados como sendo as coordenadas giradas correspondentes. Observe que a integral é tomada na direção perpendicular ao cume, de modo que a contagem dos momentos nulos é um modo de quantificar a propriedade oscilatória mencionada no item anterior. No domínio de Fourier, 4.12 torna-se uma linha de zeros com algumas multiplicidades:

$$\frac{\partial^n \hat{\varphi}_j}{\partial \omega_1^n}(0, \omega_2) = 0, \text{ para todo } 0 \leq n < q \text{ para todo } \omega_2$$

As *curvelets*, como definidas e implementadas neste trabalho, têm um número infinito de momentos nulos porque possuem suporte compacto fora da origem no plano da frequência como ilustrado nas Figuras 4.1 e 4.2.

4.4 Transformada *Curvelet* Discreta

De modo semelhante ao caso contínuo, a transformada discreta é linear e utiliza como dados de entrada vetores cartesianos da forma $f[t_1, t_2]$, $0 \leq t_1, t_2 < n$, que nos permitem pensar no dado de saída como uma coleção de coeficientes $c^D(j, l, k)$ obtida pelo o análogo discreto de 4.6 que é:

$$c^D(j, l, k) = \sum_{0 \leq t_1, t_2 < n} f[t_1, t_2] \overline{\varphi_{j,l,k}^D[t_1, t_2]} \quad (4.13)$$

Onde cada $\varphi_{j,k,l}^D$ é uma pequena forma de onda digital (em que o índice sobrescrito D quer dizer digital).

Coronização Discreta

Na definição contínua em 4.3, a janela U_j extrai suavemente frequências próximas da coroa diádica $\{2^j \leq r \leq 2^{j+1}\}$ e próximo do ângulo $\{-\pi \cdot 2^{-j/2} \leq \theta \leq \pi \cdot 2^{-j/2}\}$. Coroa e rotações não são especialmente adaptadas para representrar linhas e colunas cartesianas. Em vez disso, é conveniente substituir esses conceitos pelos equivalentes cartesianos. Aqui, a coroa cartesiana é baseada em quadrados concêntricos (ao invés de círculos) e cisalhados. Por exemplo, o análogo cartesiano da família $(W_j)_{j \geq 0}$, $W_j(\omega) = W(2^{-j}\omega)$ seria uma janela da forma:

$$\tilde{W}_j(\omega) = \sqrt{\Phi_{j+1}^2(\omega) - \Phi_j^2(\omega)}, \quad j \geq 0 \quad (4.14)$$

Onde Φ é definido como o produto de uma janela unidimensional passa-baixa:

$$\Phi_j(\omega_1, \omega_2) = \phi(2^{-j}\omega_1)\phi(2^{-j}\omega_2) \quad (4.15)$$

A função ϕ obedece $0 \leq \phi \leq 1$, de ser igual a 1 no intervalo $[-1/2, 1/2]$, e nula do lado de fora de $[-2, 2]$. De modo que:

$$\Phi_0(\omega)^2 + \sum_{j \geq 0} \tilde{W}_j^2(\omega) = 1 \quad (4.16)$$

Acabamos de ver como separar as escalas e vejamos agora a localização angular. Suponha que V seja como antes, ou seja, obedeça 4.2 e estabelece:

$$V_j(\omega) = V(2^{|j/2|} \omega_2 / \omega_1) \quad (4.17)$$

Pose-de então usar \tilde{W}_j e V_j para definir a janela “cartesiana”:

$$\tilde{U}_j(\omega) := \tilde{W}_j(\omega)V_j(\omega) \quad (4.18)$$

é evidente que \tilde{U}_j isola frequências próximas da fatia $\{(\omega_1, \omega_2): 2^j \leq \omega_1 \leq 2^{j+1}, -2^{-j/2} \leq \omega_2 / \omega_1 \leq 2^{-j/2}\}$ e é um cartesiano equivalente da janela “polar” do caso contínuo. Introduz-se agora o conjunto de inclinações igualmente espaçadas $\tan \theta_l := l \cdot 2^{-|j/2|}$, $l = -2^{|j/2|}, \dots, 2^{|j/2|} - 1$ e define:

$$\tilde{U}_{j,l}(\omega) := W_j(\omega)V_j(S_{\theta_l}\omega) \quad (4.19)$$

Onde S_θ é a matriz cisalhamento:

$$S_\theta := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tan \theta & 1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Os ângulos θ_l não são igualmente espaçados aqui, mas as inclinações são. Quando completada pela simetria em torno da origem e rotação por $\pm \pi/2$ radianos; a $\tilde{U}_{j,l}$ é o análogo cartesiano da família $U_j(R_{\theta_l}\omega)$ do caso contínuo. A família $\tilde{U}_{j,l}$ implica num “ladrilhamento” concêntrico cuja geometria é ilustrada na Figura 4.2

De um modo prático, pode-se pensar nas *curvelets* como sendo obtidas através de dilatações, rotações e translações parabólicas de uma função de forma específica φ . As *Curvelets* são indexadas pelo parâmetro de escala (j), de orientação (l) e de localização (k).

$$\Phi_{a,b,\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \Psi D_a R_\theta(x-b) \quad (4.21)$$

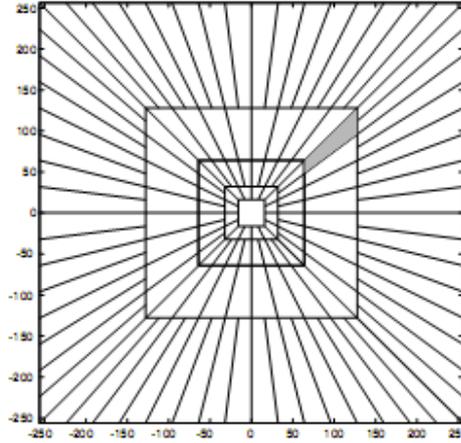


Figura 4.2: Ilustra o ladrilhamento pseudopolar discreto com trapezoides no domínio da freqüência. A janela $\tilde{U}_{j,l}$ localiza suavemente a Transformada de Fourier próximo às fatias cortadas obedecendo ao parâmetro de escala parabólico. A região sombreada representa uma fatia típica.

Onde D_a é uma matriz de escala parabólica, R_θ rotação em radianos e, para $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\Psi(x_1, x_2)$ é algum tipo de perfil admissível. É possível decompor e reconstruir uma função arbitrária $f(x_1, x_2)$ como uma superposição de *curvelets* em várias escalas, posições e orientações. De um modo geral, as *curvelets* podem ser discretizadas da seguinte forma:

$$a_j = 2^{-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \theta_{j,l} = 2\pi l \cdot 2^{-j/2}, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{j/2} - 1, \quad e$$

$$b_k^{(j,l)} = R_{\theta_{j,l}}(k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j/2}), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \quad \text{de forma que } \varphi_{j,l,k} = \Phi_{a_j, b_k^{(j,l)}} \theta_{j,l}$$

A coleção $(\varphi_{j,l,k})$ obedece:

$$f = \sum_{j,k,l} \langle f | \varphi_{j,l,k} \rangle \varphi_{j,l,k} \quad (4.22)$$

$$\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{j,k,l} |\langle f | \varphi_{j,l,k} \rangle|^2 \quad (4.23)$$

A Figura 4.3 (a) ilustra uma *curvelet* na escala mais grossa no domínio do tempo/escala e em 4.3(b) no domínio da frequência através de uma transformada de Fourier. Veja que na escala mais grossa a função de base *curvelet* é não-direcional (observe a simetria da *curvelet* no domínio do tempo/escala). Isto implica que nas escalas mais grossas não há tanta variedade de coeficientes devido à carência angular, o que provavelmente não contribuirá para remover estruturas coerentes ao longo de uma determinada direção.

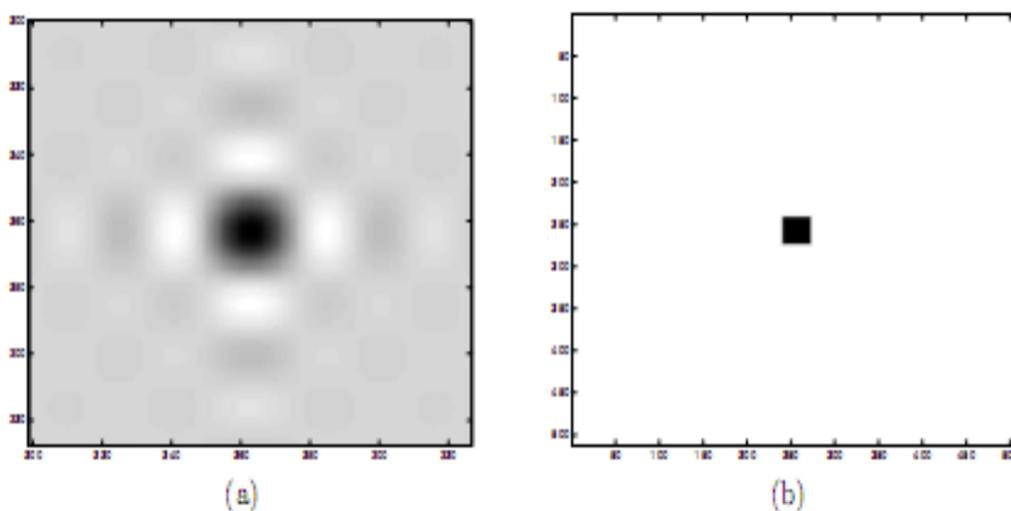


Figura 4.3: Na escala mais grossa, as *curvelets* são não-direcionais. (a) ilustra o domínio do tempo/escala. (b) ilustra o domínio da frequência (módulo da Transformada de Fourier). O nível de cinza indica o valor zero. O máximo valor positivo é representado pelo preto e o máximo valor negativo é representado pelo branco.

A Figura 4.4 ilustra as *curvelets* em escalas mais finas no painel da esquerda. Observe o caráter direcional da função de base, mais estreita em uma direção que está bem evidente agora. E, à medida que a escala vai ficando mais fina, a *curvelet* vai ficando mais estreita, o que permite um detalhamento maior das estruturas representadas. A orientação, agora presente nas funções de base, amplia o poder de detalhamento desta representação, principalmente de estruturas coerentes e direcionais.

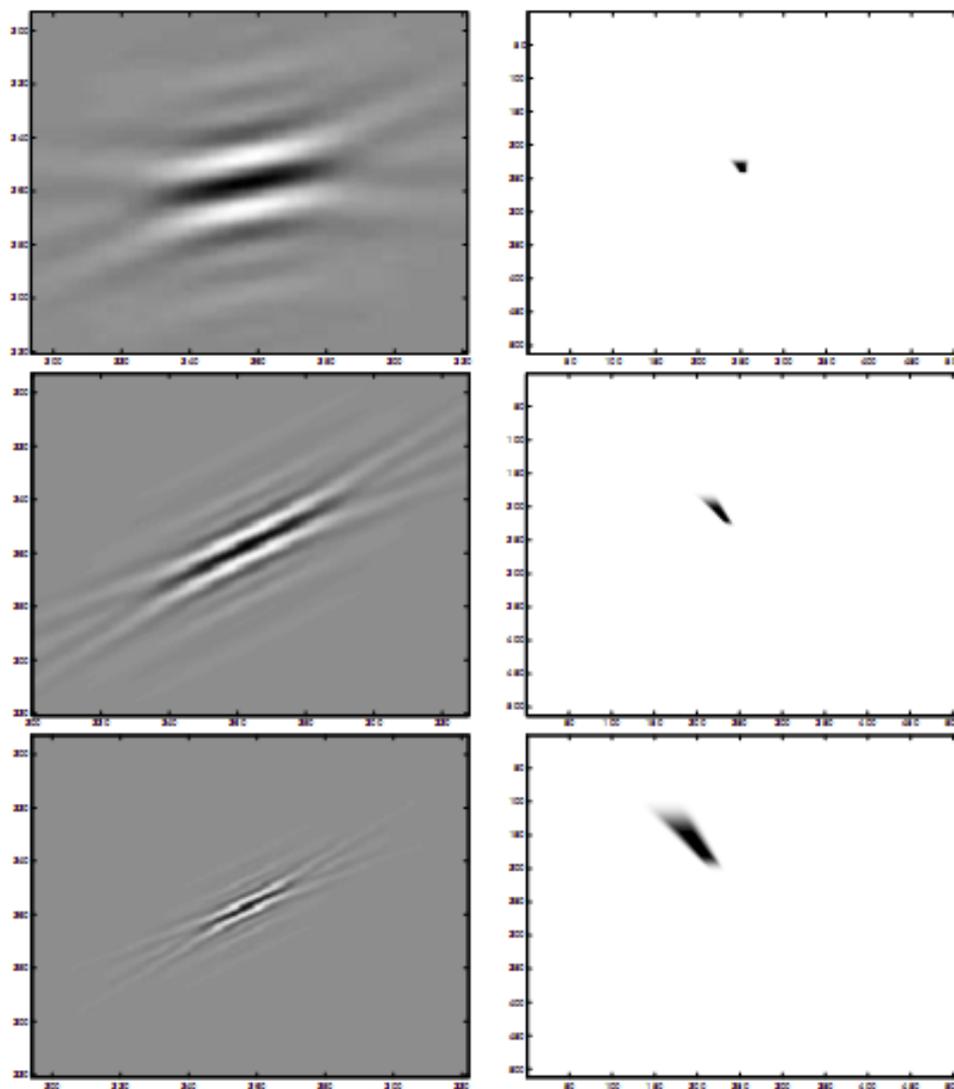


Figura 4.4: *Curvelets* nas escalas mais finas. O painel da esquerda representa a parte real das *curvelets* no domínio temporal/espacial. O painel da direita mostra o módulo da Transformada de Fourier. O código de cores é tal como na Figura 4.3.

Capítulo 5

Supressão do Ruído de Rolamento Superficial

5.1 Introdução

Na investigação das ondas sísmicas, *Lord Rayleigh* (1887) mostrou que podem existir ondas na superfície de um semi-espaço livre de tração. Essas ondas não penetram muito abaixo da superfície e, conseqüentemente, são denominadas de ondas superficiais, também chamadas de ondas de *Rayleigh*.

As ondas de Rayleigh são importantes na propagação de ondas sísmicas porque estão confinadas na interface e diminuem com a distância (profundidade) r na forma de $1/r$, enquanto as ondas P e S diminuem na forma de $1/\sqrt{r}$ [21]. Portanto, em grandes distâncias, as ondas de interface passam a ser formas de ondas dominantes.

O termo “*ground roll*” é comumente usado para referir-se às ondas superficiais, que são constituídas principalmente de ondas de *Rayleigh*.

Lord Rayleigh (1887) foi o primeiro a apresentar a teoria de ondas sobre uma superfície livre de tensão de um sólido elástico semi-infinito mostrando que o movimento de partículas estava confinado perto da superfície e que se tornava desprezível a alguns comprimentos de onda a partir da superfície livre.

As ondas superficiais constituem uma fonte comum de ruídos em dados sísmicos. O ruído de rolamento superficial é uma onda sísmica dispersiva que se propaga paralelamente às camadas superiores do solo, caracterizadas por velocidade e frequência baixas e intensidade forte. Sua propagação se dá pelo movimento elíptico e retrógrado das partículas do meio ao longo da direção de propagação.

5.2 O Ruído de Rolamento Superficial

Também conhecido na literatura como “*Ground Roll*”, é um ruído coerente⁴ relacionado com a própria excitação da fonte, como as ondas de superfície e as ondas aéreas. É um tipo de onda de Rayleigh que aparece nos sinais captados pelos geofones devido ao acoplamento de ondas compressoriais e das componentes verticais das ondas cisalhantes que se propagam ao longo da superfície livre (Yilmaz, 1987). A Figura 5.1 ilustra a propagação da onda sísmica e mostra os problemas causados pela onda direta. Na Figura 5.2 pode-se verificar o cone formado pelo rolamento superficial se caracterizando como uma

⁴ **Ruído coerente.** São os ruídos que apresentam alinhamento ou correlação através de vários traços, enquanto que os ruídos não-coerentes são aleatórios não apresentando uma lei de formação.

onda que se propaga com velocidade baixa, amplitude forte e frequência baixa em relação aos eventos de interesse, que são as reflexões relativas às diferentes camadas do subsolo. Outra característica marcante do ruído de rolamento superficial é sua distribuição espacial no sismograma a qual está localizada ao longo de um setor angular. Sendo no vértice deste setor o local da explosão que gera a onda sísmica.

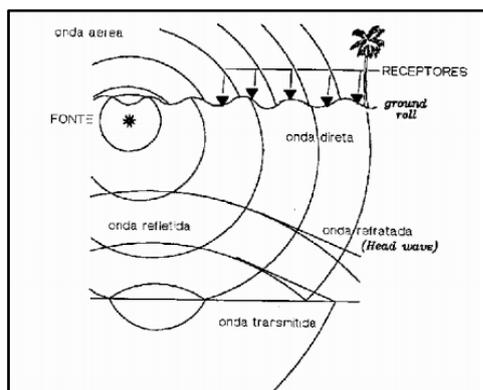


Figura 5.1: Ilustra a propagação da onda sísmica e mostra os problemas causados pela onda direta a qual produz o ruído de rolamento superficial “ground roll”.

Observe que há uma superposição do sinal de interesse (onda volumétrica) com o ruído (onda superficial), que são registrados pela linha de geofones, os quais interpretam as ondas superficiais como se fosse uma onda de volume oriunda das estruturas de subsuperfície, como ilustra a Figura 5.2 abaixo:

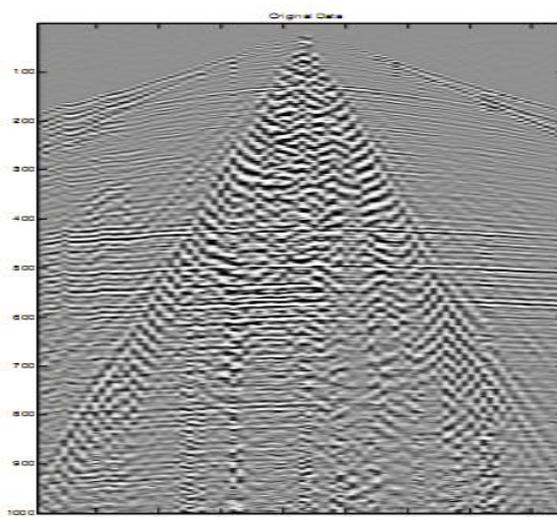


Figura 5.2: Sismograma contendo o ruído de rolamento superficial sobreposto às estruturas de interesse.

5.3 A Decomposição em *Curvelets*

Basicamente, todo sinal bidimensional com energia finita $f(x_1, x_2)$ pode ser representado por:

$$f = \sum_{j,k,l} \langle f | \varphi_{j,l,k} \rangle \varphi_{j,l,k} \quad (5.1)$$

Onde $\varphi_{j,l,k}$ constitui uma base no espaço $L^2(\mathbb{R})$ e

$$c(j, l, k) = \langle f | \varphi_{j,l,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\varphi_{j,l,k}(x)} dx \quad (5.2)$$

os coeficientes das funções de base. Ou seja, o sinal pode ser decomposto em uma base de funções $\varphi_{j,l,k}$, denominadas de *curvelets*, as quais são bidimensionais e adequadas para representarem superfícies com descontinuidades ao longo de uma curva.

A vantagem de representar o sismograma como uma soma de *curvelets* é que estas funções têm um caráter direcional, isto é, incorporam uma orientação que resulta em uma transformação com mais informações (mais coeficientes) que na transformada *wavelet*, que não dispõe do parâmetro angular.

O parâmetro angular das *curvelets* obedece a uma discretização na qual as escalas mais grossas possuem poucos setores angulares e, nas escalas mais finas, o espaço angular vai ganhando mais setores. Na escalas mais grossas, a incerteza angular é maior e, à medida que a escala vai ficando mais fina, a incerteza angular diminui, permitindo um aumento progressivo na quantidade coeficientes da transformada.

A decomposição em *curvelets* se dá nos parâmetros de *escala* (j), de *orientação* (l) e de *posição* (k), os quais passam a serem os critérios de decomposição e de filtragem do sinal em análise.

A Transformada *Curvelet* permite uma análise multi-resolução, cobrindo o espaço escala-frequência com uma janela radial onde são representadas as escalas (j) e uma janela angular que permite preencher todas as posições desse espaço obedecendo à discretização progressiva dos ângulos à medida que a escala aumenta.

5.4 Decomposição do Sismograma com o Ruído de Rolamento Superficial

No sismograma original, sabemos que o ruído de rolamento superficial tem intensidade mais forte e frequência mais baixa que o sinal de interesse. Esse é um comportamento geral

que vai se refletir nos coeficientes que compõem a imagem. A análise em *curvelets* conduz a uma decomposição em funções de base localizadas no domínio do tempo, caracterizadas por uma coleção de comprimentos os quais constituem o parâmetro de escala; de acordo com a escala, os coeficientes se distribuem ao longo de janelas angulares, visto que as *curvelets* possuem um caráter direcional.

A idéia é verificar a relação sinal/ruído em cada escala com a finalidade de saber se o comportamento é ou não como no sismograma original. Uma vez realizada a decomposição do sinal em escalas, é possível que já haja atenuação do ruído em determinada(s) escala(s). Portanto, a decomposição em escalas constitui o primeiro critério de atenuação do ruído de rolamento superficial. O próximo passo é estabelecer um limiar de corte que possibilite a atenuação do ruído nesta escala. Esta limiarização constitui o segundo critério de atenuação do ruído. Em cada escala será checado o limiar que promova a melhor separação do ruído. Este processo está baseado em inspeções visuais nos dados de saída que são formados por duas imagens que somadas recompõem a imagem da referida escala. E finalmente, o parâmetro angular contribui na remoção ruído devido à sua coerência que se distribui ao longo de duas direções contidas num setor angular do sismograma. O limiar de corte dos coeficientes na Transformada *Curvelet* tem grande impacto na análise de estruturas coerentes como no caso do ruído de rolamento superficial porque as *curvelets* são funções de base direcionais (principalmente nas escalas mais finas) e durante a análise a direção do ruído será contemplada em determinada escala. Isto faz com que os coeficientes desta escala e na direção do ruído sejam grandes em comparação com os demais, permitindo uma limiarização eficiente.

Outra possibilidade é decompor inicialmente o sismograma em ângulos e, posteriormente, em escalas, mas isso somente seria interessante nas escalas mais finas devido ao maior número de direções da transformada. Aplicar os limiares de corte em cada etapa, etc. O fato é que há várias possibilidades de composição das operações que podem levar à atenuação do ruído e que podem ser testadas com relativa facilidade com os recursos do pacote “*WaveLab*”, disponibilizados pelos seus criadores na *rede mundial de computadores* no sítio www.curvelet.org.

A Figura 5.3 ilustra o procedimento de atenuação do RRS na primeira escala. Em (a) tem-se a imagem original contendo o RRS. Em (b), somente os coeficientes da primeira escala estão presentes. Os coeficientes da primeira escala não diferenciam estruturas refletoras das estruturas de ruídos de modo que a remoção de tais coeficientes constitui a melhor opção de filtragem. Além do mais, não há um limiar que revele ou consiga separar, em duas partes, a imagem da primeira escala. Em (c), somente os coeficientes abaixo do limiar 0,03 do desvio padrão dos coeficientes desta escala estão presentes. Em (d), somente os coeficientes acima do referido limiar estão presentes e em (e), tem-se o resultado da remoção dos coeficientes da primeira escala da imagem original. Comparando-se (a) com (e), vemos que não houve atenuação sensível do RRS e as estruturas presentes em (b) estão, na sua maioria, na região do ruído. Então, a primeira escala será removida a título de filtragem.

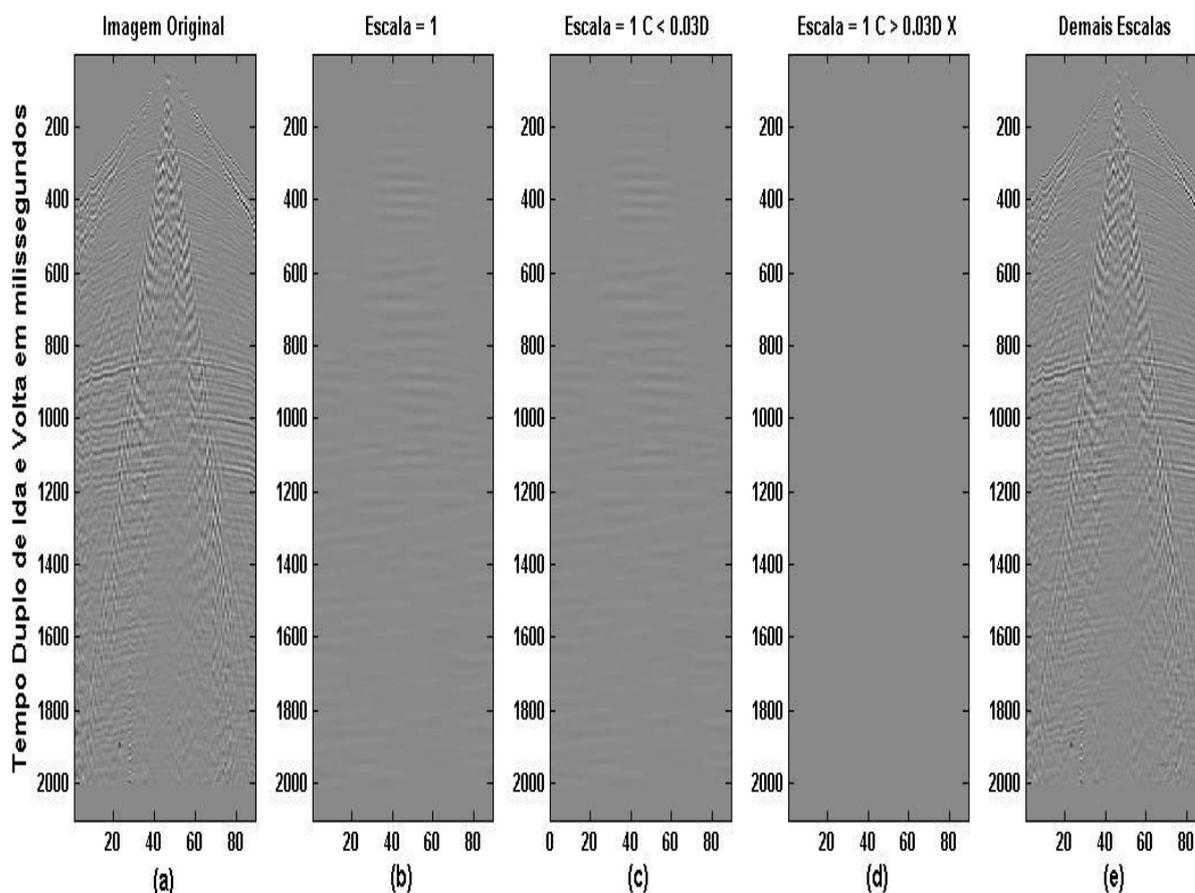


Figura 5.3: Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na primeira escala. Em (a), tem-se o sismograma original contendo o referido ruído; (b) é a imagem contendo somente os coeficientes da primeira escala; em (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte; em (d) estão presentes somente os coeficientes acima do limiar de corte e (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da primeira escala da imagem inicial.

A Figura 5.4 ilustra o procedimento de atenuação do RRS na segunda escala. Em (a) tem-se a imagem original contendo o RRS. Em (b), somente os coeficientes da segunda escala estão presentes onde coexistem o RRS e refletores de interesse. Em (c), somente os coeficientes abaixo do limiar 0,0003 do desvio padrão dos coeficientes desta escala estão presentes. Em (d), somente estão presentes os coeficientes acima do referido limiar e, em (e), tem-se o resultado da remoção dos coeficientes da segunda escala da imagem original. Observe que o resultado da limiarização em (d) atenua o RRS e mantém a maior parte do sinal de interesse. Lembrado que a imagem (b) é a soma das imagens (c) e (d), portanto, a imagem (d) é a parcela de contribuição desta escala.

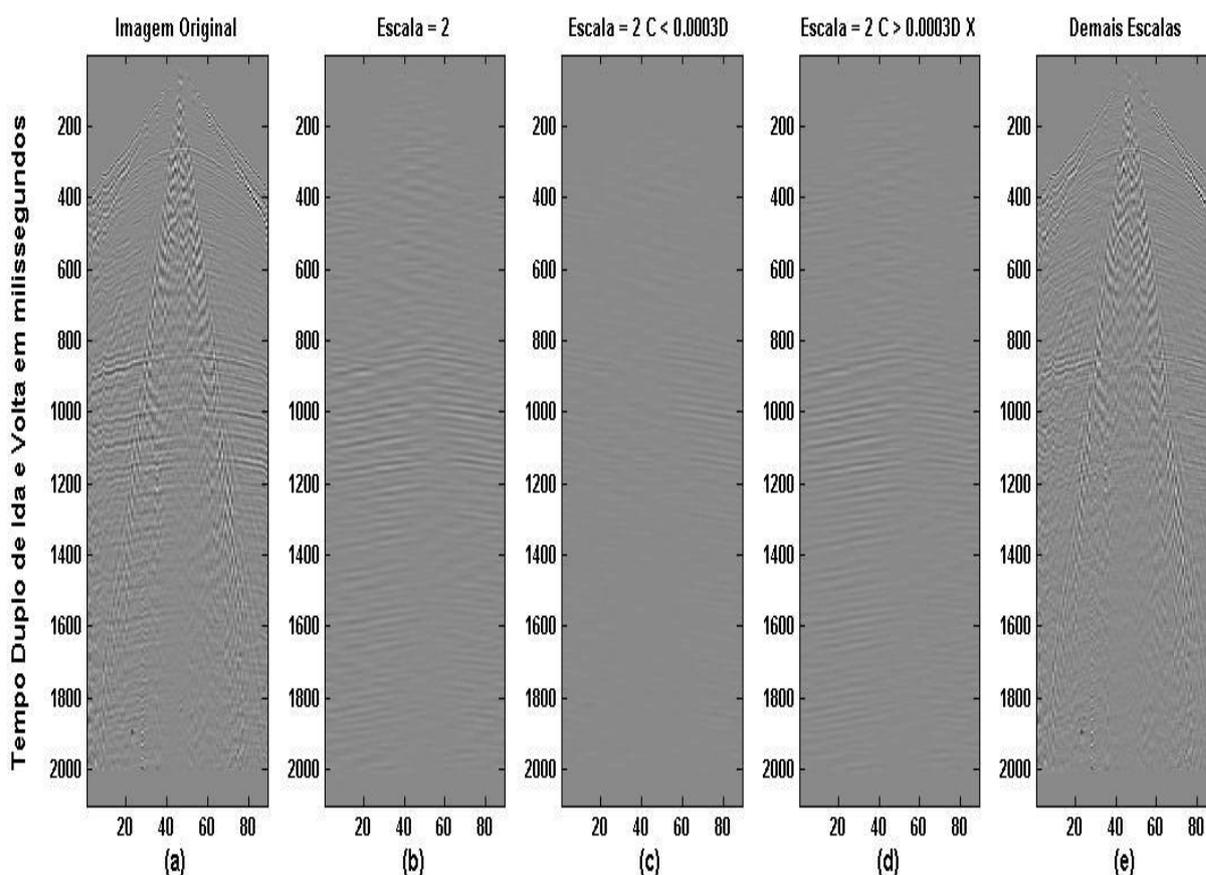


Figura 5.4: Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na segunda escala. Em (a), tem-se o sismograma original contendo o referido ruído; (b) é a imagem contendo somente os coeficientes da segunda escala; em (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte; em (d) estão presentes somente os coeficientes acima do limiar de corte e (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da segunda escala da imagem inicial.

A Figura 5.5 ilustra o procedimento de atenuação do RRS na terceira escala. Em (a), tem-se a imagem original contendo o RRS. Em (b), somente estão presentes os coeficientes da terceira escala onde co-existem o RRS (mais presente) e refletores de interesse. Em (c), somente estão presentes os coeficientes abaixo do limiar 0,0004 do desvio padrão dos coeficientes desta escala. Em (d), somente estão presentes os coeficientes acima do referido limiar e, em (e), tem-se o resultado da remoção da terceira escala da imagem original. Observe que o resultado da limiarização em (c) atenua o RRS e mantém a boa parte do sinal de interesse. Lembrado que a imagem (b) é a soma das imagens (c) e (d), portanto, a imagem (c) é a parcela de contribuição desta escala.

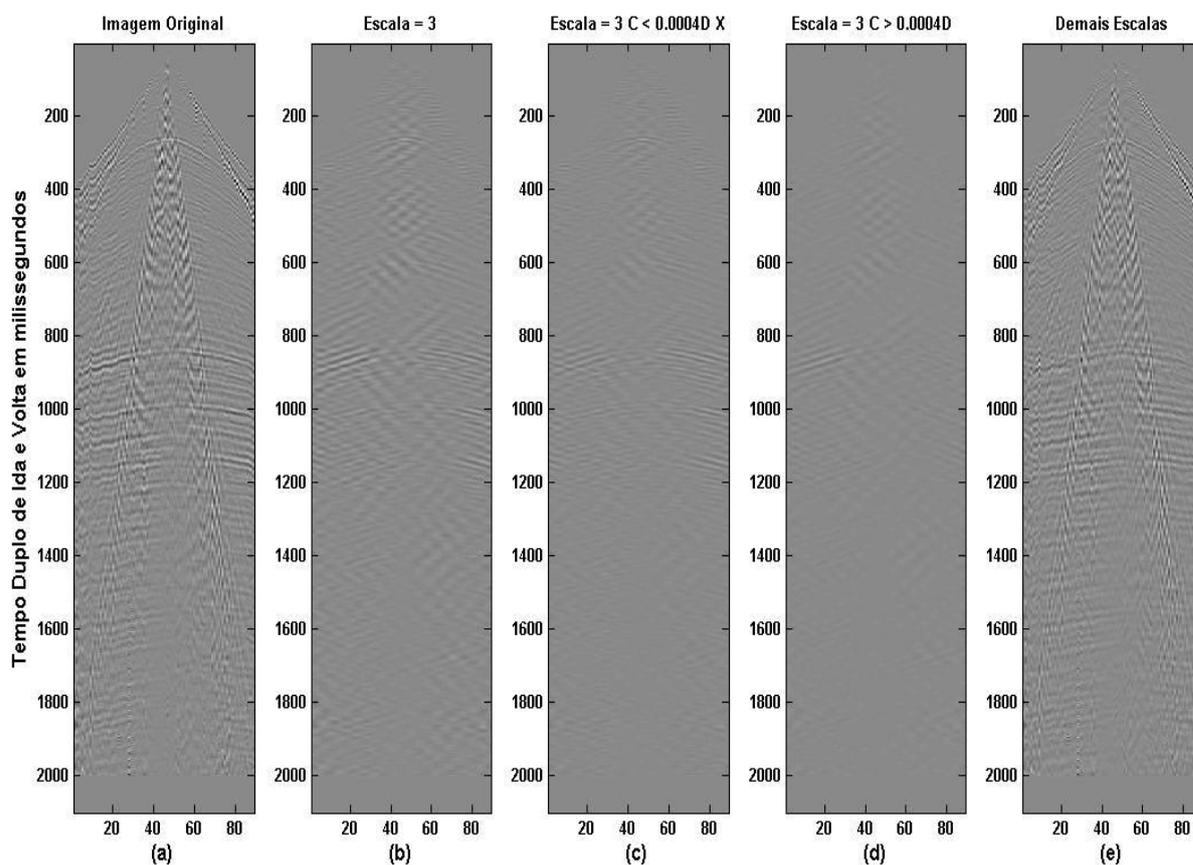


Figura 5.5: Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na terceira escala. Em (a), tem-se o sismograma original contendo o referido ruído; (b) é a imagem contendo somente os coeficientes da terceira escala; em (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte; em (d) estão presentes somente os coeficientes acima do limiar de corte e (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da terceira escala da imagem inicial.

A Figura 5.6 ilustra o procedimento de atenuação do RRS na quarta escala. Em (a), tem-se a imagem original contendo o RRS. Em (b), somente estão presentes os coeficientes da quarta escala onde co-existem o RRS (mais presente) e refletores de interesse (menos presente). Em (c), somente estão presentes os coeficientes abaixo do limiar 10^{-6} do desvio padrão dos coeficientes desta escala. Em (d), somente estão presentes os coeficientes acima do referido limiar e, em (e), tem-se o resultado da remoção da quarta escala da imagem original. Observe que o resultado da limiarização em (d) atenua o RRS e mantém alguma parte do sinal de interesse. Lembrado que a imagem (b) é a soma das imagens (c) e (d), portanto, a imagem (d) é a parcela de contribuição desta escala.

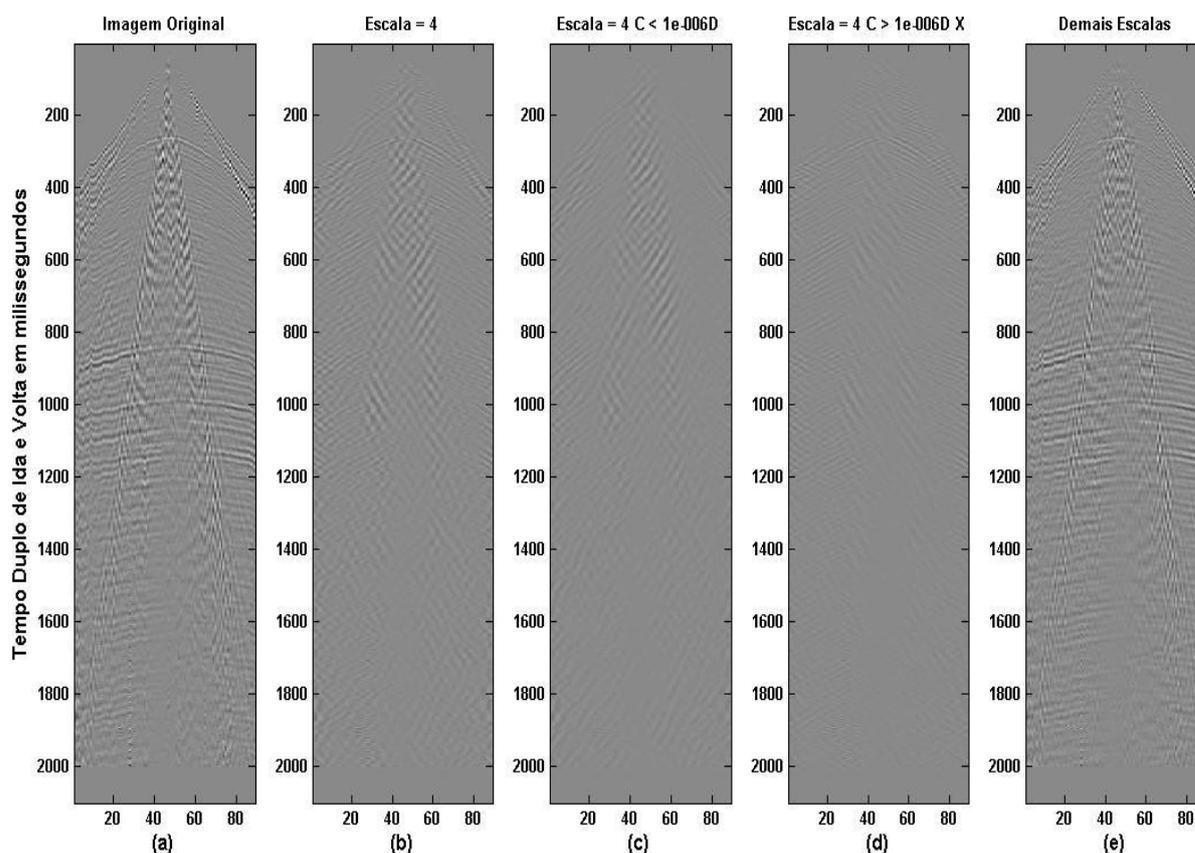


Figura 5.6: Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na quarta escala. Em (a), tem-se o sismograma original contendo o referido ruído; (b) é a imagem contendo somente os coeficientes da quarta escala; em (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte; em (d) estão presentes somente os coeficientes acima do limiar de corte e (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da quarta escala da imagem inicial.

A Figura 5.7 ilustra o procedimento de atenuação do RRS na quinta escala. Em (a), tem-se a imagem original contendo o RRS. Em (b), somente estão presentes os coeficientes da quinta escala onde praticamente só há o RRS. Em (c), somente estão presentes os coeficientes abaixo do limiar nulo. Em (d), somente os coeficientes acima do referido limiar e, em (e), tem-se o resultado da remoção da quinta escala da imagem original. A limiarização nesta escala não foi capaz de separar o ruído do sinal de interesse, porque esta escala é praticamente só o RRS, de forma que a melhor contribuição desta escala é a sua total remoção do sinal.

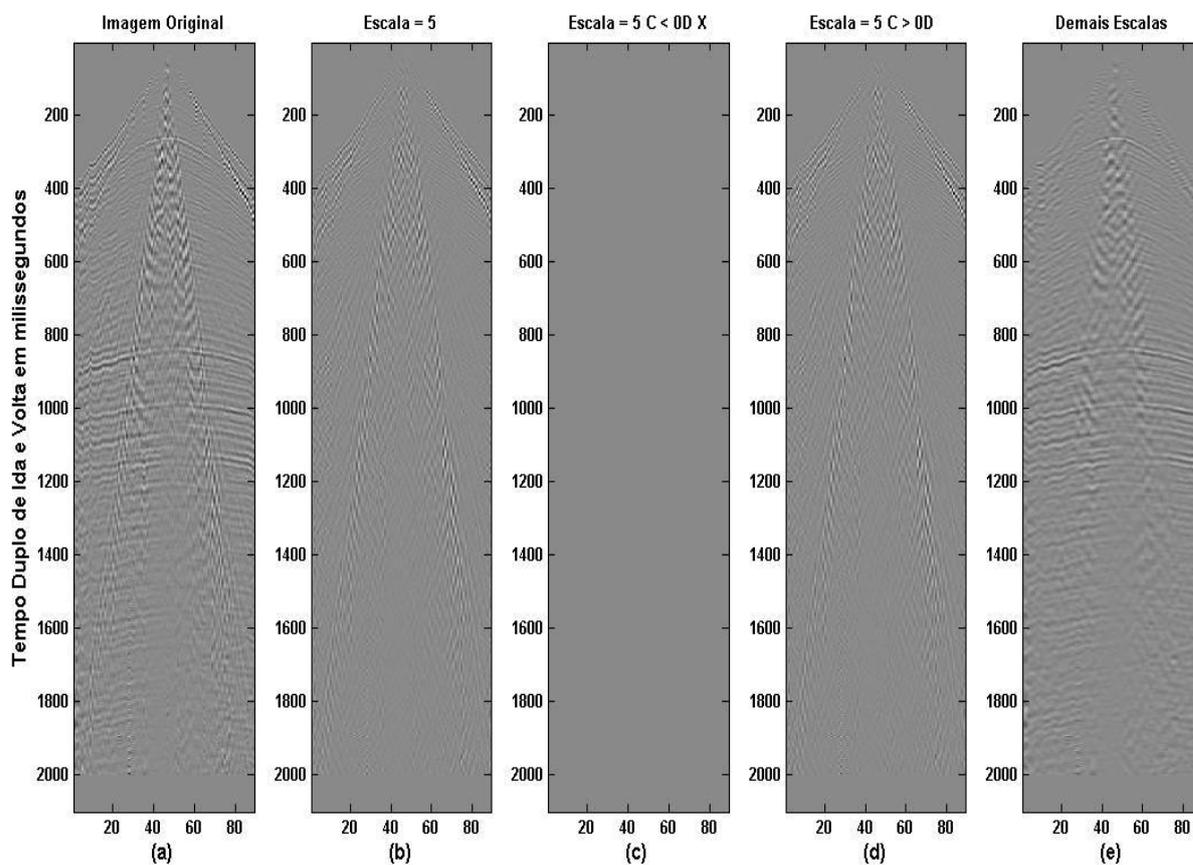


Figura 5.7: Ilustra o procedimento de remoção do ruído de rolamento superficial na quinta escala. Em (a), tem-se o sismograma original contendo o referido ruído; (b) é a imagem contendo somente a quinta escala; em (c) estão presentes somente os coeficientes abaixo do limiar de corte; em (d) estão presentes somente coeficientes acima do limiar de corte e (e) é o resultado da remoção dos coeficientes da quinta escala da imagem inicial.

A Figura 5.8 compara a imagem original, contendo o RRS, com a imagem atenuada. É sensível a atenuação das estruturas coerentes geradas pelas ondas aéreas e pelas ondas de rolamento superficial, além da manutenção das estruturas de interesse.

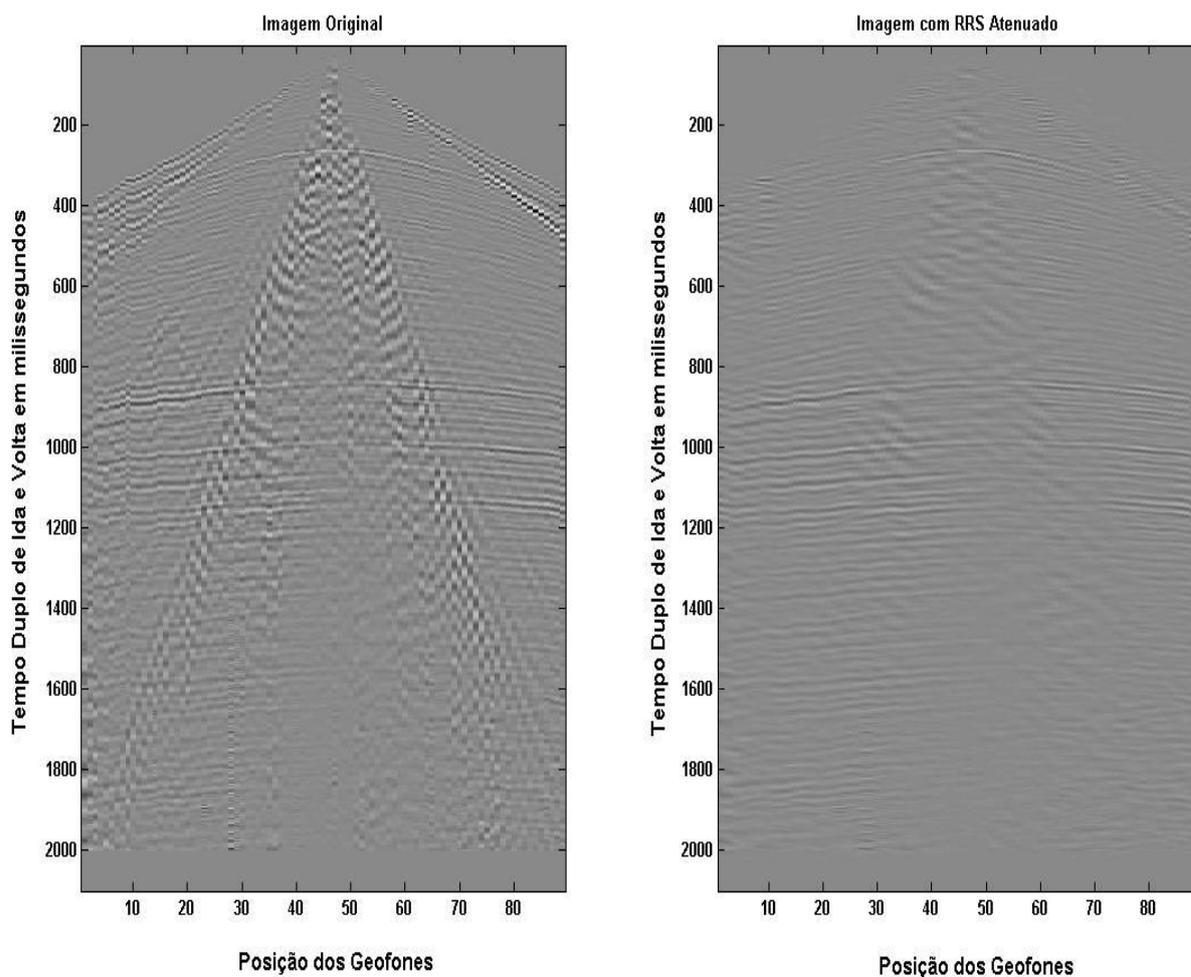


Figura 5.8: Compara o sinal original contendo o ruído de rolamento superficial (Figura da esquerda) com o resultado da síntese do melhor limiar em cada escala obtida nas etapas anteriores (Figura da direita).

Capítulo 6
Conclusões e Sugestões

6.1 Conclusões

O objetivo desta dissertação é dar um passo a diante na técnica de atenuação de ruídos, em especial, o ruído de rolamento superficial. Ao utilizar um espaço de funções bem mais amplo que os espaços relacionados às técnicas tradicionais e, até mesmo em relação ao espaço das *wavelets*, obtemos uma filtragem mais rápida e eficiente. Outro fato relevante é que as funções de base *curvelet* são bidimensionais e atuam diretamente na imagem, e não no traço sísmico, o que é bastante vantajoso e prático.

A decomposição da imagem em escalas revelou que o ruído de rolamento superficial se distribui de forma variada com respeito à intensidade dos coeficientes e extensão ao longo do sismograma. Por inspeção visual, pode-se perceber que o “*ground roll*” aparece mais à medida que a escala diminui. No entanto, as intensidades dos coeficientes diminuem. Há um limiar de corte ideal por escala que melhor separa o ruído do sinal de interesse e a relação sinal ruído variou de acordo com a escala. Nas segunda e quarta escalas, o sinal de interesse foi melhor separado do RRS quando os coeficientes selecionados foram os com valores acima do limiar ideal. Na terceira escala, o resultado foi o contrário; o sinal de interesse foi melhor separado do RRS quando os coeficientes selecionados foram os com valores abaixo do limiar ideal. Na primeira e na quinta escalas, o limiar de corte não surtiu efeito devido ao fato que na primeira escala os componentes do sinal de interesse e do RRS são semelhantes e não houve limiar que promovesse a separação. Na quinta escala, onde grande parte do RRS está presente e há bem pouco do sinal de interesse, também não houve limiar que promovesse a separação.

O fato do ruído se concentrar nas escalas mais finas está associado ao fator angular, que tem uma incerteza cada vez menor, o que proporciona uma seleção mais eficiente de estruturas coerentes, tais como estruturas do “*ground roll*”.

6.2 Sugestões Para Trabalhos Futuros

As diversas limitações dos métodos utilizados fazem dos dados sísmicos um dos mais complexos desafios para uma interpretação correta. Como as informações de interesse

não são adequadamente analisadas pelos métodos de visualização devido à complexidade nas amplitudes, no caráter não-estacionário do sinal e no conteúdo elevado de ruídos. Portanto, a utilização da Transformada *Curvelet* em processamento sísmico começa a ser explorada e, com os resultados do nosso trabalho, nós também percebemos que esta é uma ferramenta muito valiosa. Isso porque as *curvelets* apresentam uma base com número muito maior de graus de liberdade, possibilitando na escolha de uma base para uma análise mais rica e detalhada.

Uma proposta para um trabalho futuro consiste em aplicar a transformada *curvelet* por setores angulares, tomando como origem dos ângulos o ponto onde ocorre a explosão que origina o sinal sísmico e, desta forma, otimizar mais ainda a filtragem do sinal analisado. Realizar um estudo estatístico da distribuição dos coeficientes por escalas e por direções com a finalidade de caracterizar melhor o ruído e conseqüentemente identificar seus coeficientes no domínio transformado.

Apêndice A
Análise de Fourier

Na Física-Matemática, freqüentemente encontramos pares de funções relacionadas por uma expressão da forma:

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt \quad (A.1)$$

A função $g(\alpha)$ é denominada de transformada integral de $f(t)$ pelo núcleo $K(\alpha, t)$. A operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função $f(t)$ no espaço t para uma função $g(\alpha)$ no espaço α . Para detectar características de uma função, nós devemos analisá-la. A ferramenta tradicionalmente usada para tal análise é a Transformada de Fourier, a qual será apresentada neste apêndice de forma não-exaustiva.

A.1 Análise de Funções

O produto interno de uma função $f(t)$ com uma outra função $g(t)$ é definido por:

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt \quad (A.2)$$

Onde g^* significa o complexo conjugado de $g(t)$. A norma (energia) da função $f(t)$ é definida por:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt} \quad (A.3)$$

A convolução de $f(t)$ com $g(t)$ é definida por:

$$(f * g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)dt \quad (A.4)$$

Uma função $f(t)$ pode ser melhor analisada se for expressa como uma combinação linear da forma:

$$f(t) = \sum_n c_n \varphi_n(t) \quad (A.5)$$

onde n é um índice inteiro e c_n são os coeficientes da expansão. Para o caso em que a função $\varphi(t)$ é uma combinação de senos e cossenos da forma

$$\varphi_{\omega_n}(t) = \cos(\omega_n t) + \text{sen}(\omega_n t) = e^{i\omega_n t} \quad (A.6)$$

a decomposição em A.5 muda para

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n(t)} \quad (\text{A.7})$$

A equação A.7 é conhecida como Série de Fourier. A equação A.7 é uma representação, em uma base ortonormal, da função $f(t)$.

A.1.1 Séries de Fourier

Considere uma função $f(t)$ com período $P > 0$, isto é, $f(t + P) = f(t)$ definida no espaço $L^2_P(\mathbb{R})$ de funções periódicas e de quadrado integrável:

$$\int_{p_0}^{p_0+P} |f(t)|^2 dt \leq \infty \quad (\text{A.8})$$

Se f é definida sobre $0 < t < P$, então f pode ser decomposta da forma A.7

$$f(t) = \sum_n a_n e^{int/P} = \sum_n a_n e^{i\omega_n t} \quad (\text{A.9})$$

Onde $\omega_n \equiv n/P$, com $n \in \mathbb{Z}$, e a_n ;

$$a_n = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (\text{A.10})$$

A Teoria de Fourier expande qualquer função periódica em uma soma infinita de senos e cossenos. Os a_n são os coeficientes de Fourier de $f(t)$.

A.1.2 Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é um operador que age sobre uma função $f(t)$ de acordo com:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.11})$$

A Transformada de Fourier Inversa de $\hat{f}(\omega)$ é definida por:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.12})$$

Observando as equações A.6, A.11 e A.12 temos a relação:

$$\varphi_t(\omega) = \frac{1}{2\pi} \varphi_\omega^*(t) \quad (\text{A.13})$$

Onde $\varphi_\omega^*(t)$ é o complexo conjugado. Para duas funções $f(t)$ e $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$, a *Identidade de Parseval* pode ser escrita como:

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}|\hat{g} \rangle \quad (\text{A.14})$$

A energia de $f(t)$ pode ser calculada em ambos os domínios usando-se a *Identidade de Plancherel*:

$$\langle f(t)|f(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\omega)|\hat{f}(\omega) \rangle \quad (\text{A.15})$$

a qual é uma forma especial da relação de Parseval.

Transformada de Fourier Discreta

Em sua versão discreta a transformada de Fourier de $f(t)$ com N pontos é da forma:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t)e^{-i\omega t} \quad (\text{A.16})$$

Às vezes, é usado o fator de normalização $1/N$ na equação A.16. O parâmetro ω assume os valores:

$$\omega = 2\pi \frac{m}{N} \text{ com } m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.17})$$

O parâmetro ω é denominado de frequência e m é o “índice de frequência”.

A.1.3 A Transformada de Fourier Janelada

A Transformada de Fourier da versão *Janelada* ou “*Short Time Fourier Transform*” (STFT) é:

$$\hat{f}'(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - \tau')e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.18})$$

onde $g(t)$ é uma função “janelada” real, tem duração finita e é centrada em $t = 0$. A *janela* é deslocada ao longo da função $f(t)$ e, para cada passo τ' , aplica-se a Transformada usual de Fourier. Portanto, com a Transformada de Fourier *janelada* é permitido analisar, em concordância com o Princípio da Incerteza, a função $f(t)$ no domínio tempo-frequência. Na forma discreta pode ser escrita:

$$\hat{f}'(\omega, \tau) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t)g(t - \tau')e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.19})$$

Onde $g(t)$ é uma função “janelada” responsável pela delimitação do trecho que está sendo considerado na função $f(t)$. A posição da “janela” é dada pelo parâmetro τ' .

Apêndice B
“Tight Frame”

Até então na literatura, em língua portuguesa, não foi encontrado uma tradução adequada para “*tight frame*” que pudesse expressar de forma clara e concisa o seu significado no contexto de análise de funções e espaços vetoriais.

A teoria dos *frames* fornece a representação de uma função em termos de funções de uma base que não é necessariamente ortonormal (nem mesmo linearmente independente) [27]. Um tratamento mais detalhado é dado por Daubechies (1992), no qual se baseia este apêndice.

Um conjunto de funções $\{\varphi_j, j \in J\}$ de um espaço de Hilbert \mathcal{H} constitui um *frame* se existem $A > 0, B < \infty$ tais que, para todo $f \in \mathcal{H}$:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (B.1)$$

A e B são os limites do *frame* (*moldura* que estabelece a largura do intervalo AB). O *frame* é “*tight*” (*apertado, justo*) quando $A = B$ e, neste caso:

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 = A\|f\|^2 \quad (B.2)$$

E pode-se recuperar f a partir de $\langle f, \varphi_j \rangle$, ou seja:

$$f = A^{-1} \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad (B.3)$$

Se o *frame* for *tight*, tem-se que $A = 1$ e $\|\varphi_j\| = 1, \forall j$, então $\{\varphi_j, j \in J\}$ é uma base ortonormal. Em geral, dado um *frame* $\{\varphi_j\}$, existe um *frame dual* $\{\tilde{\varphi}_j\}$ tal que:

$$f = \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j \quad (B.4)$$

Para qualquer $f \in \mathcal{H}$, o que significa que temos uma fórmula de reconstrução para f a partir de $\langle f, \varphi_j \rangle$. Neste caso:

$$f = \sum_j \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j \quad (B.5)$$

Se $\varphi_{j,l,k}$ for uma *curvelet*-mãe, para reconstruir f a partir de $\langle f, \varphi_{j,l,k} \rangle$ exige-se que $\varphi_{j,l,k}$ forme um *frame*. Nem todas as escolhas dos parâmetros de φ conduzem a *frames* de *curvelets*. No entanto, para uma escolha apropriada de φ e de seus parâmetros esse será o caso.

Desta forma, um “*tight frame*” é um *protótipo ou arcabouço de espaço vetorial* apertado, justo com respeito aos limites A e B , e que poderá vir a ser uma base ortonormal, caso os parâmetros da função de base sejam adequados.

Referências
Bibliográficas

- [1] Gabor, D.; *Theory of Communication*. J. Inst. Elect. **93** (1946) 429-457.
- [2] Grossman, A., Morlet, J.; *Decomposition of Hardy Functions into Square integrable Wavelets os Constant Shape*. SIAMJ.Math. **15** (1984) 723-736.
- [3] Gottlieb, D.; Shu, C.W.; *Siam Review*, **39**, 644.
- [4] Qian, S.; Chen, D.; *Joint Time-Frequency Analysis-Methods and Applicatins*. Prentice Hall PTR; Upper Saddle River.
- [5] Meyer, Y.; *Wavelets: Algorithms and Aplications*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. SIAM. 1993.
- [6] Galvão, R. K. H., Araújo, M. C. U., Pimentel, M. F.; *Estudo Comparativo Sobre Filtragem de Sinais Usando Transformadas de Fourier e Wavelet*.Q.Nova, **24** (2001), N°6, 874-884.
- [7] Mallat, S.; *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. **11** (1989) 674-693.
- [8] Meyer, Y.; *Ondelettes*. Hermann. New York 1990.
- [9] Daubechies, I.; *Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets*. Communications on Pure and Applied Mathematics, **41** (1988), 909-996.
- [10] Souza, J. R. M.; *Compressão de Dados Sísmicos Utilizando a Transformada Wavelet*. Dissertação de Mestrado, UFRN, Setembro 2002.
- [11] Candès, E. J., Demanet, L; *Curvelets and Fourier Integral Operators*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336** (2003), 395-398.
- [12] Candès, E. J., Donoho, D. L.; *New Tight Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Piecewise C^2 Singularities*. Comm. Pure Appl. Math., to appear.
- [13] E. J. Candès e D. L. Donoho. Curvelets – *A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation for Objects with Edges*. In C. Rabut A. Cohen and L. L Schumaker, editors, *Curves and Surfaces*, pages 105-120, Vanderbilt University Press, 2000. Nashville, TN.
- [14]D.L. Donoho and M.R. Duncan. Digital Curvelet Transform: Strategy, Implementation and Experiments; *Technical Report, Stanford University 1999*.

- [15] Daubechies, I.; *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia 1992.
- [16] LEITE, F. E. A.; *Supressão do Ruído de Rolamento Superficial Utilizando uma Transformada Wavelet Discreta com Suporte Compacto no Tempo*. Dissertação de Mestrado, UFRN, Dezembro de 2003.
- [17] Arneodo, A., Muzy, J. F., Bacry, E.; *The Multifractal Formalism Revisited with Wavelets*. Int. J. Bifurcation Chaos, **4**(2) (1994), 245.
- [18] Kobayashi. M.; *Wavelets and their Applications in Industry*. Nonlinear Analysis, **47** (2001), 1749-1760.
- [19] Walter, J. S.; *Fourier Analysis and Wavelet Analysis*. Notices of the AMS, **44** (1997), nº6, 658-670.
- [20] Meyer, Y.; *Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algères d'operateus*. Séminaire Bourbaki. **662** (1985), nº662, 1985-1986.
- [21] da Cruz, R. P.; *Deconvolução na Presença de Ruído Coerente de Alta Amplitude*. Tese de Doutorado, UFBA, Janeiro de 1988.
- [22] Mallat, S.; *Multiresolution approximations and wavele orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$* . Trans. Amer. Math. Soc., **315** (1989), 69-87.
- [23] Mallat, S.; *Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models*. IEEE Trans. Acous. Speech and Signal Processing, **37** (1989), 2091-2110.
- [24] Thomas, J. E.; *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. Rio de Janeiro; Interciência; Petrobrás, 2001.
- [25] Richart, F. E., Hall, J. R., Woods, R. D.; *Vibration of Soils and Foundations*. Prentice-Hall, 1970.
- [26] Gleria, I., Matsushita, R., Da Silva, S.; *Sistemas Complexos, Criticalidade e Leis de Potência*. Revista Brasileira de Ensino de Física, **26** (2004), 99-108.
- [27] Morettin, P. A. *Ondas e Ondaletas*. São Paulo: Edusp, 1999.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)