

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**Análise e Desenvolvimento de Controladores
Preditivos Multivariáveis Baseados em Multi-
Modelos Bilineares**

Anderson Luiz de Oliveira Cavalcanti

Natal/RN
Outubro/2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Anderson Luiz de Oliveira Cavalcanti

**Análise e Desenvolvimento de Controladores
Preditivos Multivariáveis Baseados em Multi-
Modelos Bilineares**

Tese submetida à Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. André Laurindo Maitelli

Co-Orientador: Prof. Dr. Adhemar de Barros
Fontes

Natal/RN

Outubro/2008

Anderson Luiz de Oliveira Cavalcanti

Análise e Desenvolvimento de Controladores Preditivos Multivariáveis Baseados em Multi- Modelos Bilineares

Tese submetida à Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Laurindo Maitelli – UFRN - Orientador

Prof. Dr. Adhemar de Barros Fontes – UFBA – Co-Orientador

Prof. Dr. Fábio Meneghetti Ugulino Araújo - UFRN

Prof. Dr. Otacílio da Mota Almeida - UFC

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite – CEFET-MG

Natal/RN

Outubro/2008

“Porque Deus amou o mundo de tal maneira que deu o seu Filho unigênito, para que todo aquele que nele crê não pereça, mas tenha a vida eterna.”

Evangelho segundo São João, capítulo 3, versículo 16

“E disse ao homem: Eis que o temor do Senhor é a sabedoria, e apartar-se do mal é a inteligência.”

Livro de Jó, capítulo 28, versículo 28

Agradecimentos

Ao Deus Pai, ao Deus Filho e ao Divino Espírito Santo que são a essência de todas as coisas.

Aos meus pais pelo incentivo, amor e carinho dedicados a mim.

À minha flor, minha rosa, minha amada esposa *Rose* pelo carinho, paciência e incentivo durante este momento tão importante da minha vida.

Aos meus filhos amados, *Victor e Maria Eduarda*, por serem minha motivação maior de vida.

Aos meus irmãos e, em especial, ao meu irmão *Lula* pela amizade, companheirismo e apoio.

Aos amigos e professores *André Maitelli e Adhemar Fontes* pela orientação, apoio e incentivo.

Ao amigo *Prof. Alessandro José de Souza*, por todo apoio e amizade dedicados.

À todos os colegas do DCA/LAUT/LAMP/LECA que sempre mostraram empenho e trabalho de equipe em todos os projetos.

À *PETROBRAS* e ao *PRH 14 da ANP* pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho aborda aspectos relacionados à análise e ao desenvolvimento de controladores preditivos multivariáveis baseados em multi-modelos bilineares. O Controlador Preditivo Generalizado (GPC) Monovariável e Multivariável para o caso linear é apresentado, sendo destacadas suas propriedades, características principais e aplicações na indústria. O GPC bilinear, que é o controlador base de todo o desenvolvimento desta Tese, é apresentado através da abordagem da quasilinearização por degrau de tempo. Alguns resultados empregando este controlador são apresentados de forma a evidenciar o melhor desempenho do mesmo, quando comparado ao GPC linear, visto que os modelos bilineares representam melhor a dinâmica de determinados processos. A quasilinearização por degrau de tempo, devido ao fato de ser uma aproximação, provoca um erro de predição, que limita o desempenho deste controlador à medida que seu horizonte de predição aumenta. Devido ao referido erro de predição, o GPC bilinear com compensação iterativa é mostrado de forma a minimizar o referido erro, buscando um melhor desempenho que o GPC bilinear clássico. Alguns resultados utilizando o algoritmo de compensação iterativa são mostrados. O emprego dos multi-modelos é abordado nesta Tese, buscando suprir a deficiência existente em controladores baseados em modelo único, quando os mesmos são aplicados em processos com grandes faixas de operação. Formas de mensuração de distância entre modelos, também chamadas de métricas, consistem na principal contribuição desta Tese. Diversos resultados de aplicação em colunas de destilação simuladas, que se aproximam bastante do comportamento real das mesmas, foram realizados, e os resultados se mostraram satisfatórios.

ABSTRACT

This work addresses issues related to analysis and development of multivariable predictive controllers based on bilinear multi-models. Linear Generalized Predictive Control (GPC) monovariate and multivariate is shown, and highlighted its properties, key features and applications in industry. Bilinear GPC, the basis for the development of this thesis, is presented by the time-step quasilinearization approach. Some results are presented using this controller in order to show its best performance when compared to linear GPC, since the bilinear models represent better the dynamics of certain processes. Time-step quasilinearization, due to the fact that it is an approximation, causes a prediction error, which limits the performance of this controller when prediction horizon increases. Due to its prediction error, Bilinear GPC with iterative compensation is shown in order to minimize this error, seeking a better performance than the classic Bilinear GPC. Results of iterative compensation algorithm are shown. The use of multi-model is discussed in this thesis, in order to correct the deficiency of controllers based on single model, when they are applied in cases with large operation ranges. Methods of measuring the distance between models, also called metrics, are the main contribution of this thesis. Several application results in simulated distillation columns, which are close enough to actual behaviour of them, are made, and the results have shown satisfactory.

SUMÁRIO

Agradecimentos.....	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
SUMÁRIO.....	vii
Símbolos e Abreviaturas.....	ix
Figuras.....	xi
Tabelas	xiii
Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1. Motivação e Relevância do Trabalho	1
1.2. Controle Preditivo	3
1.3. Modelos Bilineares.....	4
1.4. Abordagens Multi-Modelo.....	5
1.4.1. Revisão Bibliográfica da Abordagem 1	6
1.4.2. Revisão Bibliográfica da Abordagem 2	6
1.5. Destaque das Contribuições	6
1.6. Estrutura da Tese	7
Capítulo 2	8
Controlador Preditivo Generalizado Linear.....	8
2.1. Introdução	8
2.2. GPC Linear: caso monovariável e sem restrições.....	8
2.2.1. Formulação do Controlador GPC SISO.....	9
2.2.2. Exemplo do GPC Linear: caso SISO	15
2.3. GPC Linear: caso multivariável e sem restrições.....	18
2.3.1. Matriz de Interação	19
2.3.2. Formulação do Controlador GPC Linear MIMO	20
2.3.3. Exemplo para o caso MIMO	27
2.4. Conclusão.....	28
Capítulo 3	29
Controlador Preditivo Generalizado Bilinear	29
3.1. Introdução	29
3.2. GPC Quasilinear: caso monovariável e sem restrições	30
3.2.1. GPC Quasilinear: caso monovariável e sem restrições.....	32
3.2.2. Exemplo do GPC Quasilinear: caso SISO	36
3.3. GPC Quasilinear: caso multivariável e sem restrições.....	40
3.3.1. Formulação do Controlador GPC Bilinear MIMO.....	42
3.3.3. Exemplo do GPC Quasilinear: caso MIMO.....	48
3.4. Conclusão.....	51
Capítulo 4	53
Controlador Preditivo Generalizado Bilinear com Compensação Iterativa.....	53
4.1. Introdução	53
4.2. GPC Bilinear com compensação iterativa: caso monovariável e sem restrições.....	53
4.2.1. Critério de convergência e de parada do caso SISO	55
4.2.2. Exemplo do GPC Quasilinear com compensação iterativa: caso SISO	56
4.3. GPC Bilinear Multivariável com compensação iterativa: caso multivariável e sem restrições.....	58
4.2.3. Critério de convergência e de parada do caso MIMO	60
4.2.4. Exemplo do GPC Quasilinear com compensação iterativa: caso MIMO.....	61
4.4. Conclusões	63
Capítulo 5	64

Controle Preditivo Baseado em Multi-Modelos Bilineares	64
5.1. Introdução	64
5.2. Descrição do multi-modelo multivariável bilinear: ponderação para o modelo	65
5.3. Descrição do multi-modelo multivariável bilinear: ponderação para o controlador	66
5.4. Controlador baseado no multi-modelo com ponderação para o modelo	67
5.5. Controlador baseado no multi-modelo com ponderação para o controlador	72
5.6. Métricas propostas	73
5.6.1. Métrica baseada em norma vetorial	74
5.6.2. Métrica baseada em margem de fase	75
5.7. Resultados de Aplicação	79
5.7.1. Aplicação empregando GPC Quasilinear, abordagem baseada na ponderação no controlador e métrica baseada em norma	81
5.7.2. Aplicação empregando GPC Quasilinear, abordagem baseada na ponderação no modelo e métrica baseada em norma	83
5.7.3. Aplicação empregando GPC Quasilinear, abordagem baseada na ponderação no controlador e métrica baseada em Margem de Fase	85
5.7.4. Aplicação empregando GPC Quasilinear com compensação iterativa, abordagem baseada na ponderação no controlador e métrica baseada em norma	87
5.7.5. Avaliação quantitativa das simulações	89
5.8. Conclusões	91
Capítulo 6	92
Conclusões e Perspectivas	92
Referências Bibliográficas	94
Anexo I – Solução recursiva da equação diofantina	97

Símbolos e Abreviaturas

<i>CPGB</i>	Controlador Preditivo Generalizado Bilinear;
<i>BGPCIC</i>	Bilinear Generalized Predictive Control with Iterative Compensation;
<i>CPGBCI</i>	Controladore Preditivo Generalizado Bilinear com compensação iterativa;
<i>ARIMAX</i>	Auto-regressivo, Integral, Média Móvel, com sinal Exógeno;
<i>d</i>	Retardo do sistema;
<i>GPC</i>	Generalized Predictive Control;
<i>MPC</i>	Model Predictive Control;
<i>GRG</i>	Gradiente Reduzido Generalizado;
<i>PQS</i>	Programação Quadrática Sucessiva;
<i>SISO</i>	Single-Input, Single-Output;
<i>MIMO</i>	Multi-Input, Multi-Output;
<i>MPC</i>	Model Predictive Control;
$\min_j(\varepsilon)$	Mínimo de ε em relação a j ;
<i>NARMAX</i>	Não linear, Auto-regressivo, Média Móvel, com sinal Exógeno;
<i>NARIMAX</i>	Não linear, Auto-regressivo, Integral, Média Móvel, com sinal Exógeno;
<i>N_l</i>	Horizonte mínimo de predição;
<i>NY</i>	Horizonte de predição;
<i>NU</i>	Horizonte de controle;
λ	Ponderação sobre a ação de controle;
ρ	Ponderação sobre o sinal de erro;
$\hat{y}(k+i)$	Predição i-passos à frente da saída baseada em informações disponíveis até o instante k ;
$\mathcal{E}\{x\}$	Esperança da variável x ;
q^{-1}	Operador de atraso unitário;
z	Representa a variável no domínio da frequência da transformada Z;
$y(k)$	Representa a saída do processo no instante atual k . No caso MIMO, $y(k)$

	é um vetor no R^q ;
$u(k)$	Representa a saída do controlador no instante atual k . No caso MIMO, $u(k)$ é um vetor no R^p ;
$e(k)$	Representa um ruído “branco” e gaussiano, com média zero e variância σ^2 . No caso MIMO, $e(k)$ é um vetor no R^q ;
$r(k+i)$	Representa a trajetória de referência futura;
P e Q	Representam matrizes positivas definidas de ponderação sobre o vetor sinal de erro e o vetor de controle, respectivamente;
$MMF(G(z))$	Representa a menor margem de fase da matriz de funções de transferência $G(z)$;
Φ	Representa um conjunto de regimes de operação de um determinado processo;
$\rho_i(\phi)$	Representa a métrica associada a um determinado regime de operação em um certo instante de tempo;
$w_i(\phi)$	Representa o peso associado a um determinado regime de operação em um certo instante de tempo;
$\ x\ _q$	Norma q de um determinado vetor x ;
ϕ	Conjunto de variáveis escolhidas para a descrição de um ponto de operação.

Figuras

Figura 1.1 – Vazão de carga de uma unidade de produção de gás natural	2
Figura 2.1 – Diagrama de blocos do GPC.....	15
Figura 2.2 – Sistema SISO controlado com GPC Linear.....	16
Figura 2.3 – Sinal de controle do sistema SISO controlado com GPC Linear.....	16
Figura 2.4 – Localização dos Pólos e Zeros do sistema em malha aberta dentro do círculo unitário	17
Figura 2.5 – Localização dos Pólos e Zeros do sistema em malha fechada dentro do círculo unitário	17
Figura 2.6 – Diagrama de blocos do GPC MIMO.....	26
Figura 2.7 – Sistema MIMO controlado com GPC Linear	27
Figura 2.8 - Sinais de controle do sistema MIMO controlado com GPC Linear	28
Figura 3.1 - Diagrama de blocos do GPC Quasilinear.....	36
Figura 3.2 – Coluna purificadora 1,3 butadieno	37
Figura 3.3 – Comparação da saída do sistema (GPC linear e GPC Bilinear) – Concentração de M-Acetileno.....	38
Figura 3.4 – Comparação do esforço de controle (GPC linear e GPC Bilinear) – OP% da válvula	39
Figura 3.5 – Diagrama de blocos GPC MIMO Quasilinear	48
Figura 3.6 – Coluna de destilação do tipo debutanizadora	48
Figura 3.7 – Comparação da saída do sistema (GPC linear e GPC Bilinear) – Concentração de i-pentano.....	49
Figura 3.8 - Comparação da saída do sistema (GPC linear e GPC Bilinear) – Concentração de i-buteno	49
Figura 3.9 - Comparação do esforço de controle (GPC linear e GPC Bilinear) – Setpoint do FIC100	50
Figura 3.10 - Comparação do esforço de controle (GPC linear e GPC Bilinear) – Setpoint do TIC100	50
Figura 4.1 – Comparação da saída do sistema (GPC linear, GPC Bilinear, GPC Bilinear com compensação iterativa) – Concentração de M-Acetileno	56
Figura 4.2 – Comparação do esforço de controle (GPC linear, GPC Bilinear e GPC Bilinear com compensação iterativa) – OP% da válvula	57
Figura 4.3 – Concentração de i-pentano – GPC Quasilinear Multivariável com Compensação Iterativa	61
Figura 4.4 - Concentração de i-buteno – GPC Quasilinear Multivariável com Compensação Iterativa	62
Figura 4.5 – Taxa de refluxo – GPC Quasilinear Multivariável com Compensação Iterativa	62
Figura 4.6 – Temperatura de Fundo – GPC Quasilinear Multivariável com Compensação Iterativa	62
Figura 5.1 – Diagrama de blocos do GPC quasilinear SISO	75
Figura 5.2 – Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas) e mono-modelo - Concentração de i-pentano	81

Figura 5.3 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas) e mono-modelo - Concentração de i-buteno.....	82
Figura 5.4 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas) e mono-modelo – Taxa de Refluxo.....	82
Figura 5.5 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas) e mono-modelo – Temperatura no fundo da coluna	82
Figura 5.6 – Pesos dos controlador multi-modelo modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas)	83
Figura 5.7 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas) e mono-modelo - Concentração de i-pentano.....	83
Figura 5.8 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas) e mono-modelo - Concentração de i-buteno.....	84
Figura 5.9 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas) e mono-modelo – Taxa de Refluxo.....	84
Figura 5.10 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas) e mono-modelo – Temperatura no fundo da coluna	84
Figura 5.11 – Pesos dos controlador multi-modelo modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas)	85
Figura 5.12 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase) e mono-modelo - Concentração de i-pentano.....	85
Figura 5. 13 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase) e mono-modelo - Concentração de i-buteno.....	86
Figura 5.14 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase) e mono-modelo – Taxa de Refluxo.....	86
Figura 5.15 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase) e mono-modelo – Temperatura no fundo da coluna	86
Figura 5.16 - Pesos dos controlador multi-modelo modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase)	87
Figura 5.17 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear com compensação iterativa, ponderação no controlador e métrica de norma) e multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de norma)- Concentração de i-pentano.....	88
Figura 5.18 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear com compensação iterativa, ponderação no controlador e métrica de norma) e multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de norma)- Concentração de i-buteno	88
Figura 5.19 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear com compensação iterativa, ponderação no controlador e métrica de norma) e multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de norma)- Taxa de Refluxo	88
Figura 5.20 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear com compensação iterativa, ponderação no controlador e métrica de norma) e multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de norma)- Temperatura de Fundo.....	89

Tabelas

Tabela 3.1 - Índices de desempenho normalizados do GPC SISO linear e quasilinear para $N=22$	40
Tabela 3.2 – Índices de desempenho normalizados do GPC MIMO linear e quasilinear para $N=250$	51
Tabela 4.1 – Índices de desempenho normalizados do GPC linear, bilinear e bilinear com compensação iterativa para $N=22$	57
Tabela 5.1 – Pontos de operação escolhidos	79
Tabela 5.2 – Avaliação Comparativa dos índices de desempenho normalizados das simulações das seções 5.7.1, 5.7.2 e 5.7.3.....	89
Tabela 5.3 - Avaliação Comparativa dos índices de desempenho normalizados das simulações das seções 5.7.1 e 5.7.4	90

Capítulo 1

Introdução

1.1. Motivação e Relevância do Trabalho

Estratégias de controle avançado vêm sendo desenvolvidas durante os últimos anos com o objetivo de suprir algumas deficiências existentes nos controladores clássicos. A indústria moderna, devido à necessidade de competitividade e lucratividade, vem aos poucos abrindo seus espaços para a entrada de novas técnicas. No entanto, tais técnicas avançadas ainda não são tão difundidas em ambientes industriais devido a sua complexidade ser relativamente alta quando comparada à das técnicas clássicas. Além disso, o custo mais alto de implantação e a falta de mão-de-obra qualificada também são fatores preponderantes que influenciam na pouca utilização destas estratégias na indústria.

Os controladores baseados na teoria de sistemas lineares e invariantes no tempo, aplicados ao controle de processos, têm tido grande aceitação no meio acadêmico e industrial. A receptibilidade de tais controladores se dá pelo fato de ser possível escolher uma região de operação do processo na qual o comportamento do mesmo seja, aproximadamente, linear. Mesmo com o aumento da complexidade dos recursos de automação aplicados ao controle de processos (rede de dados, instrumentação inteligente etc), as não-linearidades presentes nesses ambientes ainda é alvo de preocupação dos Engenheiros de Controle, e têm motivado a academia a pesquisar temas relativos aos sistemas não-lineares. Tais preocupações são perfeitamente pertinentes, visto que controladores lineares, geralmente, produzem resultados insatisfatórios quando aplicados: a sistemas com não linearidades acentuadas, ou; a plantas não-lineares que operam em uma larga faixa de operação, como pode ser visto em (Santos, 2007).

Um fato bastante comum em um ambiente industrial é a mudança, ocasionada por motivos previstos ou não, do ponto em que o processo opera. Como estes processos, na maioria das vezes, possuem somente controladores lineares que atuam em nível regulatório, ao acontecer a situação citada, tais controladores não irão desempenhar tão bem seus papéis, visto que são lineares e sintonizados para aquele ponto de operação. Este fato pode ser comprovado por meio do gráfico mostrado na Figura 1.1.

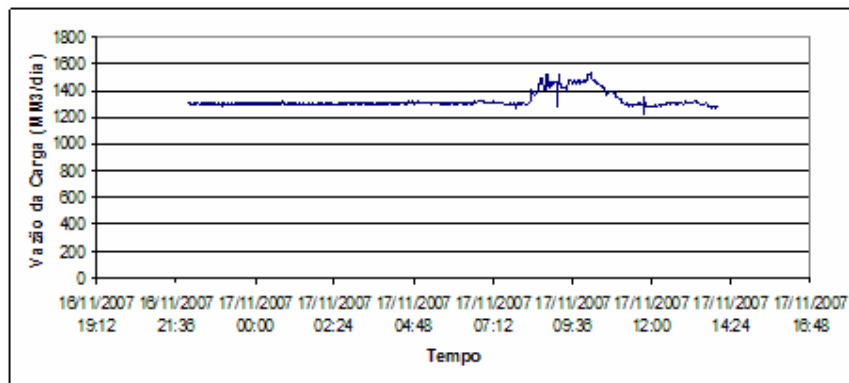


Figura 1.1 – Vazão de carga de uma unidade de produção de gás natural

A Figura 1.1 apresenta a vazão da carga de uma unidade de produção de gás natural em milhões de metros cúbicos por dia. Observa-se, no gráfico, um aumento na vazão durante certo período do dia. Nesse caso, o ponto de operação em que a unidade se encontrava não é mais o mesmo. Usualmente, nessas situações, todo o controle em nível regulatório é colocado em malha aberta pelos operadores, que tentam conduzir a unidade para uma situação estável e segura.

Percebe-se, então, que os controladores que atuam em nível regulatório (que são lineares e usualmente do tipo Proporcional, Integral e Derivativo - PID) não são capazes de atuar de forma completamente satisfatória em situações como esta.

O controle PID ainda é amplamente empregado em nível regulatório, conforme (Almeida, 2002), por:

- apresentar uma estrutura simples;
- possuir reduzido número de parâmetros de ajuste;
- levar em consideração o conhecimento heurístico e intuitivo do usuário e,
- não necessitar de profundos conhecimentos matemáticos.

Os controladores PID, no entanto, apesar de possuírem as vantagens citadas, possuem algumas desvantagens, de forma que sua aplicação é dificultada em processos (Oliveira et al., 2000):

- multivariáveis;
- de ordem elevada;
- com grande atraso de transporte.

Em relação às desvantagens citadas, podemos ainda ressaltar que:

- em sistemas multivariáveis, usualmente, as estratégias de controle clássicas consistem em utilizar compensadores de desacoplamento para empregar um conjunto de PIDs monovariáveis, o que nem sempre é realizável;
- em sistemas de ordem elevada, cuja dinâmica dominante não pode ser representada por sistemas de ordem mais baixa, o PID não oferece um alto grau de liberdade;
- em sistemas com grande atraso de transporte (muito maiores que a constante de tempo do processo) o termo derivativo não consegue “prever” adequadamente o comportamento futuro do erro, não possuindo, portanto, bom desempenho.

As técnicas de controle avançado, principalmente o controle preditivo, tanto lineares como não-lineares, surgiram com intuito de suprir as lacunas deixadas pelo controle PID clássico. No entanto, o que se tem observado é que as técnicas de controle preditivo baseadas em modelos não-lineares são empregadas, na maioria das vezes, linearizando, em um ponto de operação, o modelo não-linear obtido e se projetando um controlador adequado para aquele ponto (Henson e Seborg, 1997; Hapoglu et al., 2001). Neste caso, mais uma lacuna é deixada aberta, visto que o processo pode mudar seu ponto de operação tanto pela própria forma de se operar o processo, como até mesmo por motivos não desejados pelo operador.

A relevância deste trabalho consiste na apresentação de soluções para tratar não-linearidades provenientes da mudança da faixa de operação dos processos. São apresentadas técnicas que buscam preencher as lacunas citadas.

1.2. Controle Preditivo

O controle preditivo (*Model Based Predictive Control*, MPC) é uma técnica que faz uso explícito de um modelo do processo para calcular a seqüência futura ótima de ações de controle. As ações de controle são oriundas de um processo de otimização de uma função de custo que envolve a previsão do sinal de saída do processo e o esforço de controle necessário para atuar no mesmo. Em muitos casos, a otimização incluindo restrições é imposta por razões de segurança. As técnicas de controle preditivo ganham destaque em relação às outras técnicas por (Fontes, 2002; Almeida, 2002):

- serem robustas a erros de modelagem;
- possuírem fácil extensão para o caso multivariável;

- poderem ser aplicadas em processos de fase não-mínima, instáveis em malha aberta e com atraso de transporte;
- permitirem incorporar o tratamento de restrições.

A teoria de controle preditivo surgiu das necessidades das indústrias de refino de petróleo na década de 70. Porém, suas aplicações vêm se estendendo em diversas outras áreas como a indústria aeroespacial (Silva, 2006), a engenharia biomédica (Figueiredo, 2004), a geração de energia elétrica (Sansevero, 2006), entre outras.

1.3. Modelos Bilineares

O modelo não linear no qual este trabalho se baseia é o bilinear. Algumas vantagens destes modelos em relação aos demais, de acordo com Fontes (2002), se baseiam no fato de que:

- embora pertençam a uma classe de sistemas bilineares, apresentam a vantagem de serem mais simples que os demais modelos não lineares e mais representativos que os lineares;
- são mais tratáveis matematicamente que os demais modelos não lineares;
- a bilinearidade está presente em muitos sistemas físicos, especialmente em processos químicos, onde se apresenta de forma intrínseca;
- são lineares nos parâmetros, o que permite aplicar quase a totalidade das técnicas de identificação desenvolvidas para sistemas lineares.

O emprego de modelos bilineares em controle preditivo foi proposto inicialmente em (Svoronos, 1981). Neste trabalho, o autor apresentou uma extensão de controlador de variância mínima, proposto por (Aström, 1970), empregando modelos bilineares. Anos mais tarde, (Yeo & Williams, 1987) apresentaram um controlador preditivo também baseado em modelos bilineares. Goodhart et al., 1994 apresentaram uma abordagem por meio de modelos bilineares do algoritmo GPC proposto por (Clarke et al., 1987). Neste trabalho, foi utilizada a técnica de quasilinearização por degrau de tempo, método que é enfatizado nesta Tese. O modelo empregado naquele trabalho é o NARMAX. No entanto, para que se tenha garantia de erro de regime nulo, se emprega neste trabalho o modelo NARIMAX, que introduz uma ação integral no controlador.

Várias pesquisas, como (Fontes et al., 2002), (Fontes et al., 2004) e (Fontes & Ângelo, 2006), têm proposto melhorias no desempenho do algoritmo apresentado por (Goodhart et al., 1994), visto que tal algoritmo possui um erro de predição que aumenta com o aumento do horizonte de predição devido à quasilinearização por degrau de tempo. Em (Fontes et al., 2002), os autores propõem um termo de compensação com o objetivo de minimizar o erro de predição produzido pela quasilinearização. Em (Fontes et al., 2004) os autores propõem uma forma adaptativa do termo de compensação, o que melhora ainda mais o desempenho do controlador proposto em (Fontes et al., 2002). Em (Fontes & Ângelo, 2006) e (Fontes & Laurandi, 2006) os autores propõem um algoritmo de compensação iterativa para minimizar o erro de predição.

1.4. Abordagens Multi-Modelo

Alguns processos operam em uma larga faixa, como os processos em batelada, de acordo com (Foss et al., 1995). Nestes casos, o grau de não linearidade é muito mais alto em relação aos casos em que o processo trabalha na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Em um sistema não-linear, quando a faixa de operação do processo é muito ampla, possivelmente um modelo linear, ou até mesmo um modelo com bilinearidade local, não é suficiente para representar o processo em toda a faixa. Com o objetivo de resolver este problema, a idéia do controle baseado em múltiplos modelos é proposta, a qual consiste basicamente em selecionar, na faixa de operação de interesse, alguns pontos de equilíbrio do processo e identificar vários modelos válidos para as vizinhanças de cada um destes pontos. Em todos os casos, métodos que avaliam distância entre modelos ou de estruturas de controle são utilizadas para a construção de uma estrutura global, seja esta estrutura apenas um modelo, seja um conjunto modelo e controlador. Estes métodos de medida serão chamados de **métricas** no decorrer desta Tese.

São duas as abordagens sobre multi-modelos encontradas na literatura. A primeira abordagem (chamada de abordagem 1) consiste em encontrar um modelo ponderado por meio de métricas. O modelo ponderado é utilizado como base para o projeto de um controlador único como em (Cavalcanti et al., 2007a), (Foss et al., 1995), (Azimzadeh et al., 1998), (Pickhardt, 2000) e (Constantine & Dumitrache, 2002). A segunda abordagem (chamada de abordagem 2) utiliza métricas para a ponderação das ações de diversos controladores como em (Cavalcanti et al., 2007b), (Cavalcanti et al., 2008a) e (Arslan et al., 2004).

1.4.1. Revisão Bibliográfica da Abordagem 1

O trabalho apresentado por (Foss et al., 1995) utiliza um conjunto de modelos não lineares em espaço de estados que são ponderados, por uma métrica, para gerar um único modelo. O referido modelo serve como base para um controlador preditivo não linear. Em (Azimzadeh et al., 1998) e (Constantine & Dumitrache, 2000), os autores propõe a construção de um modelo ponderado em espaço de estados, a partir de modelos lineares, utilizando métricas baseadas em informações estatísticas do processo. Em (Pickhardt, 2000), o autor utiliza teoria de conjuntos nebulosos para calcular o modelo ponderado mais adequado para o projeto de um controlador preditivo.

Em (Cavalcanti et al., 2007a), os autores empregam uma métrica multivariável baseada em normas euclidianas para calcular o modelo bilinear ponderado mais adequado para ser utilizado em um controlador preditivo quasilinear. Esta abordagem será apresentada nesta Tese.

1.4.2. Revisão Bibliográfica da Abordagem 2

Em (Arslan et al., 2004) e (Wen et al., 2006), uma métrica baseada em norma H_∞ é proposta para medir a distância da função de transferência em malha fechada, considerando um modelo linearizado e a função de transferência em malha fechada com os modelos dos pontos de equilíbrio tabelados. Naqueles casos, um controlador do tipo PI (Proporcional Integrativo) é projetado para cada ponto de equilíbrio.

Em (Cavalcanti et al., 2007b), os autores empregam a mesma métrica que (Cavalcanti et al., 2007a), porém para calcular a saída ponderada entre um conjunto de controladores projetados (um para cada ponto de operação tabelado). A métrica proposta em (Cavalcanti et al., 2008a) é baseada em uma abordagem multivariável de margem de fase. As propostas empregadas em (Cavalcanti et al., 2007b) e (Cavalcanti et al., 2008a) serão mostradas nesta Tese. Outro caso multivariável é apresentado por (Raiss et al., 2001). Neste trabalho, os autores subdividem os modelos multivariáveis em um conjunto de modelos monovariáveis para a construção de uma métrica baseada em normas.

1.5. Destaque das Contribuições

As contribuições desta Tese consistem:

- na proposta das métricas baseadas em norma e margem de fase;

- na proposta dos controladores baseados nas métricas apresentadas;
- na aplicação dos controladores desenvolvidos em processos simulados e que são comuns na indústria petroquímica.

1.6. Estrutura da Tese

Esta tese está organizada da seguinte forma:

- O capítulo 2 apresenta o controlador preditivo generalizado, tanto para o caso SISO quanto para o caso MIMO;
- O capítulo 3 apresenta o controlador preditivo generalizado quasilinear, tanto para o caso SISO quanto para o caso MIMO;
- O capítulo 4 apresenta uma abordagem baseada em compensação iterativa para o controlador preditivo quasilinear, tanto para o caso SISO como para o caso MIMO;
- O capítulo 5 apresenta as métricas propostas por esta tese (baseadas em norma euclidiana e margem de fase), bem como os controladores advindos destas métricas e a aplicação em um processo clássico da indústria química;
- O capítulo 6 trás as conclusões e as perspectivas do trabalho.

Capítulo 2

Controlador Preditivo Generalizado Linear

2.1. Introdução

O controlador preditivo generalizado (GPC) foi proposto por (Clarke et al., 1987) com o intuito de suprir deficiências apresentadas pelos controladores preditivos existentes. Este controlador é apresentado nesta Tese pelo fato de ser a base para todas as estruturas de controladores apresentadas no decorrer da mesma. O GPC vem se tornando um dos controladores mais populares tanto na indústria quanto na academia devido ao sucesso em aplicações industriais (Volk et al., 2004) e (Richalet, 1993), principalmente em sua abordagem multivariável e com tratamento de restrições.

O GPC utiliza um modelo paramétrico do tipo Auto-regressivo, integral, média móvel, com sinal exógeno (ARIMAX) e seu algoritmo calcula uma seqüência de ações de controle que minimiza certa função objetivo multi-passo. Esta função objetivo é definida dentro de um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle. O conceito de horizonte móvel (ou horizonte retrocedente) é empregado neste controlador. Este capítulo irá apresentar a formulação clássica do GPC tanto na sua forma monovariável, como na forma multivariável e sem restrições.

2.2. GPC Linear: caso monovariável e sem restrições

Um modelo linear descreve o comportamento de um sistema dinâmico não-linear em torno de um determinado ponto de operação. Existem diversas formas de representação de um sistema dinâmico por meio de modelos lineares. O GPC se baseia no modelo ARIMAX o qual, sua forma (SISO), é como segue:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})\frac{e(k)}{\Delta} \quad (2.1)$$

em que:

- q^{-1} representa o operador de atraso;
- $y(k)$ representa a saída do sistema no instante k ;
- $u(k)$ representa a entrada do sistema no instante k ;
- Δ representa o operador de integração, sendo dado por $\Delta = 1 - q^{-1}$;
- d representa o atraso natural, em múltiplos do período de amostragem;
- $e(k)$ representa a presença, no instante k , de um ruído branco de média zero e variância σ^2 .

Os polinômios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$ são dados por:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \quad (2.2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \quad (2.3)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \quad (2.4)$$

em que na , nb e nc são os graus dos polinômios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$, respectivamente.

O modelo apresentado em (2.1) ainda pode ser representado da seguinte forma:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d} B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (2.5)$$

em que $\tilde{A}(q^{-1}) = \Delta A(q^{-1})$.

Por uma questão de simplicidade, nesta Tese, apenas o caso particular em que $C(q^{-1}) = 1$ é implementado. Neste caso, o modelo apresentado em (2.5) se resumiria a:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d} B(q^{-1})\Delta u(k-1) + e(k) \quad (2.6)$$

2.2.1. Formulação do Controlador GPC SISO

A partir do modelo definido em (2.6), uma predição i -passos à frente do sinal de saída do sistema é definida multiplicando (2.6) por q^i :

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k+i) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + e(k+i) \quad (2.7)$$

Na equação apresentada em (2.7), $y(k+i)$ depende de valores passados e futuros das variáveis, ou seja, entrada, saída e ruído. Em contrapartida, é sabido que a melhor estimativa de $y(k+i)$, ou seja, $\hat{y}(k+i)$, deve satisfazer a seguinte condição:

$$\hat{y}(k+i) = \min_r \mathcal{E}\{[y(k+i) - r]^2\} \quad (2.8)$$

cuja solução é dada por:

$$\hat{y}(k+i) = \mathcal{E}\{y(k+i)\} \quad (2.9)$$

O estimador apresentado é conhecido como estimador de Bayes, ou estimador de risco quadrático mínimo. Assim, quando $e(k)$ é um ruído branco, gaussiano, de média zero, a melhor estimativa de $y(k+i)$, é o seu valor determinístico. Dessa forma, com o objetivo de separar a dependência de $y(k+i)$, das informações passadas e futuras, introduz-se a seguinte identidade polinomial, conhecida como equação Diofantina:

$$\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_i(q^{-1}) + q^i \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \quad (2.10)$$

sendo:

$$E_i(q^{-1}) = e_{i,0} + e_{i,1}q^{-1} + \dots + e_{i,i-1}q^{-(i-1)} \quad (2.11)$$

$$F_i(q^{-1}) = f_{i,0} + f_{i,1}q^{-1} + \dots + e_{i,na}q^{-(na-1)} \quad (2.12)$$

Substituindo (2.10) em (2.7) tem-se:

$$y(k+i) = q^{-d}B(q^{-1})E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1)F_i(q^{-1})y(k) + E_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.13)$$

Devido ao fato do grau de $E_i(q^{-1})$ ser $i-1$, então o termo referente ao ruído, na expressão anterior, refere-se ao futuro, de forma que a melhor predição de $y(k+i)$ é:

$$\hat{y}(k+i) = q^{-d} B(q^{-1}) E_i(q^{-1}) \Delta u(k+i-1) + F_i(q^{-1}) y(k) \quad (2.14)$$

Fazendo $H_i(q^{-1}) = E_i(q^{-1}) B(q^{-1})$, tem-se:

$$\hat{y}(k+i) = H_i(q^{-1}) \Delta u(k-d+i-1) + F_i(q^{-1}) y(k) \quad (2.15)$$

Fazendo $H_i(q^{-1}) = H_{f,i}(q^{-1}) + q^{-i} H_{p,i}(q^{-1})$ tem-se que:

$$\hat{y}(k+i) = H_{f,i}(q^{-1}) \Delta u(k-d+i-1) + H_{p,i}(q^{-1}) \Delta u(k-d-1) + F_i(q^{-1}) y(k) \quad (2.16)$$

A equação diofantina mostrada na equação (2.10) possui uma solução recursiva, a qual é mostrada no Anexo I.

Obtida a equação de predição (2.16), o GPC ainda tem definida uma função objetivo multi-passo dentro um horizonte de predição, com ponderação no sinal de controle e de erro:

$$J = \sum_{i=N_1}^{NY} \rho(i) [r(k+i) - \hat{y}(k+i)]^2 + \sum_{i=1}^{NU} \lambda(i) [\Delta u(k+i-1)]^2 \quad (2.17)$$

em que:

- N_1 é o horizonte mínimo de predição;
- NY é o horizonte de predição;
- NU é o horizonte de controle;
- $\rho(i)$ e $\lambda(i)$ são seqüência de ponderações sobre o sinal de erro e o de controle, respectivamente;
- $r(k+i)$ é a trajetória de referência futura.

Sem perda de generalidade, (Clarke et al., 1987) consideram $\rho(i)=1$ e $\lambda(i)$ constante. Levando em conta que o sistema possui um atraso natural de d períodos de amostragem, então a saída do mesmo será influenciada pela entrada $u(k)$ após $d+1$ períodos de amostragem. Dessa forma, os parâmetros da função objetivo podem ser definidos como $N_1 = d+1$, $NY = d+N$ e $NU = N$. A seqüência de predições definidas em (2.17) pode ser escrita da seguinte forma:

A função objetivo mostrada na equação (2.17) pode ser reescrita da seguinte forma matricial:

$$J(\Delta U) = (R - \hat{Y})^T (R - \hat{Y}) + \lambda \Delta U^T \Delta U \quad (2.21)$$

em que $R = [r(k+1) \quad r(k+2) \quad \dots \quad r(k+NY)]^T$.

Substituindo (2.19) em (2.21) tem-se:

$$J(\Delta U) = (R - F - H\Delta U)^T (R - F - H\Delta U) + \lambda \Delta U^T \Delta U \quad (2.22)$$

A equação (2.22) ainda pode ser reescrita da seguinte forma:

$$J(\Delta U) = \frac{1}{2} \Delta U^T G \Delta U + f^T \Delta U + c \quad (2.23)$$

em que:

- $G = 2(H^T H + \lambda I)$;
- $f^T = 2(R - F)^T G$;
- $c = (R - F)^T (R - F)$

A solução analítica de (2.23), na ausência de restrições, é obtida a partir do cálculo do gradiente $\partial J / \partial \Delta U$. O gradiente apresentado é igualado a zero, o que produz a seguinte solução ótima:

$$\Delta U = G^{-1} f = (H^T H + \lambda I)^{-1} H(R - F) \quad (2.24)$$

É importante observar que a matriz $(H^T H + \lambda I)$ é sempre inversível para $\lambda > 0$ e que o parâmetro λ de sintonia que regula a “agressividade” do controlador. Outro detalhe importante a ser observado é que se $(R - F) = 0$, ou seja, se a evolução livre do sistema atinge o objetivo, não há incrementos de controle calculados.

Como o GPC faz uso do princípio do horizonte móvel, apenas o primeiro elemento da seqüência ΔU é enviado ao processo. O primeiro elemento da referida seqüência pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Delta u(k) = K(R - F) \quad (2.25)$$

em que K é a primeira linha da matriz $(H^T H + \lambda I)^{-1} H$.

Consideraremos a trajetória de referência R como constante, podemos reescrever (2.25) da seguinte forma:

$$\Delta u(k) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R - F_{d+1}(q^{-1})y(k) - H_{p,d+1}(q^{-1})\Delta u(k-1) \\ R - F_{d+2}(q^{-1})y(k) - H_{p,d+2}(q^{-1})\Delta u(k-1) \\ \vdots \\ R - F_{d+N}(q^{-1})y(k) - H_{p,d+N}(q^{-1})\Delta u(k-1) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ou ainda:

$$\Delta u(k) = k_1 R - k_1 F_{d+1}(q^{-1})y(k) - k_1 H_{p,d+1}(q^{-1})\Delta u(k-1) - \dots - k_N R - k_N F_N(q^{-1})y(k) - k_N H_{p,N}(q^{-1})\Delta u(k-1) \quad (2.27)$$

Colocando R em evidência, tem-se que:

$$\Delta u(k) = R\bar{K} - F_s(q^{-1})y(k) - \Delta u(k-1)H_s(q^{-1}) \quad (2.28)$$

em que:

$$F_s(q^{-1}) = \sum_{i=1}^N k_i F_{i+d}(q^{-1}) \quad (2.29)$$

$$H_s(q^{-1}) = \sum_{i=1}^N k_i H_{p,i+d}(q^{-1}) \quad (2.30)$$

$$\bar{K} = \sum_{i=1}^N k_i \quad (2.31)$$

Escrevendo (2.28) no domínio da transformada z e em função de $u(z)$ temos que:

$$u(z^{-1}) = \frac{R\bar{K} - F_s(z^{-1})y(z)}{\Delta[1 + H_s(z^{-1})z^{-1}]} \quad (2.32)$$

O diagrama de blocos da Figura 2.1 representa a equação (2.32).

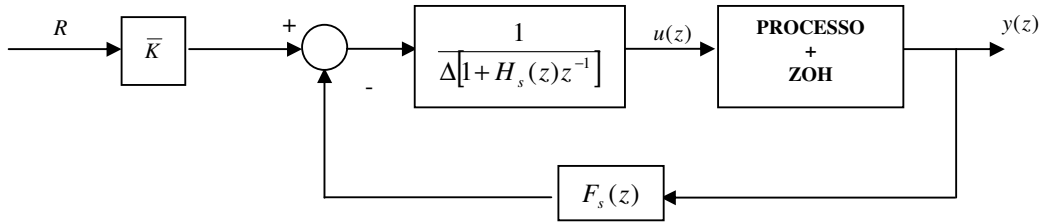


Figura 2.1 – Diagrama de blocos do GPC

A partir do diagrama de blocos da Figura 2.1, observa-se que o GPC é formado por um pré-compensador estático \bar{K} e que a saída realimentada é filtrada por $F_s(z)$. A pré-compensação \bar{K} é um ganho para que o sinal realimentado se adeque ao ganho estático do filtro $F_s(z)$. A ação integral é mostrada de forma explícita na figura em questão.

2.2.2. Exemplo do GPC Linear: caso SISO

Considerando um sistema cujo modelo linear que o descreve é:

$$G(z) = \frac{0.09878z - 0.07434}{z^2 - 1.646z + 0.6703}$$

Neste caso, sua representação por meio de um modelo ARIMAX é dada pelos seguintes polinômios:

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.646q^{-1} + 0.6703q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 0.09878 - 0.07434q^{-1}$$

O modelo em questão mostra que o sistema possui atraso de um período de amostragem, sendo que este período é devido ao segurador de ordem zero. Dessa forma, considera-se $d = 0$ e pode-se definir os seguintes parâmetros para predição: $N_1 = d + 1 = 1$, $NY = N$ e $NU = N$. Para essa simulação, foi escolhido $N = 6$. As Figura 2.2 e Figura 2.3 mostram a simulação utilizando o controlador GPC apresentado. Uma ponderação $\lambda = 1$ sobre o sinal de controle foi escolhida. A referência aplicada foi um degrau unitário $R = 1$.

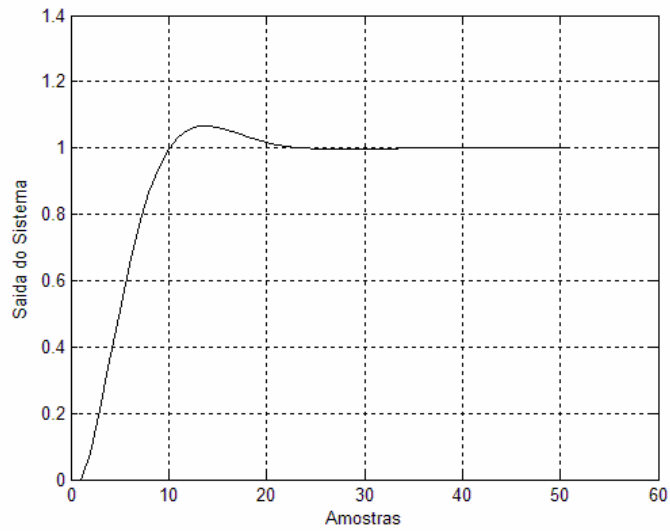


Figura 2.2 – Sistema SISO controlado com GPC Linear

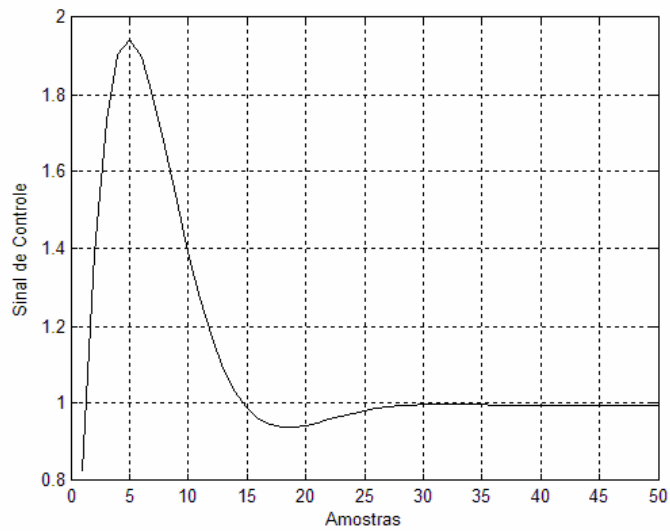


Figura 2.3 – Sinal de controle do sistema SISO controlado com GPC Linear

Em malha fechada, os parâmetros apresentados na Figura 2.1 são:

$$\bar{K} = 0,8264$$

$$F_s(z) = \frac{7,4924z^2 - 10,4630z + 3,7970}{z^2}$$

$$H_s(z) = -0,4211$$

O ganho estático de $F_s(z)$ é igual a \bar{K} , ou seja, 0,8264. A partir das expressões mostradas na Figura 2.1, calcula-se os pólos introduzidos pelo controlador no sistema, que são: $z = 1$ e $z = 0,4211$. O pólo em $z = 1$ garante erro de rastreamento nulo para referências constantes. A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$g_0(z) = \frac{0,08163z - 0,06144}{z^4 - 2,327z^3 + 1,84z^2 - 0,4928z}$$

Os pólos e zeros em malha aberta e malha fechada são mostrados nas Figura 2.4 e Figura 2.5.

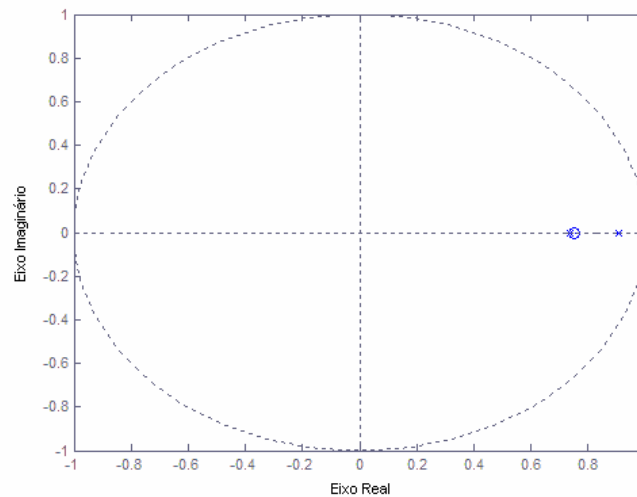


Figura 2.4 – Localização dos Pólos e Zeros do sistema em malha aberta dentro do círculo unitário

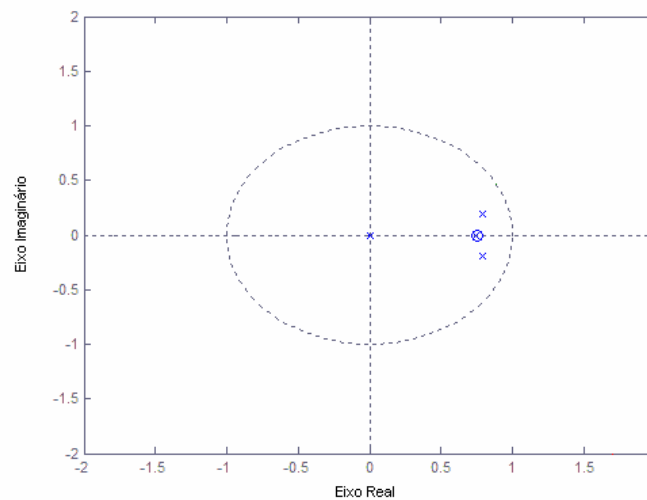


Figura 2.5 – Localização dos Pólos e Zeros do sistema em malha fechada dentro do círculo unitário

2.3. GPC Linear: caso multivariável e sem restrições

As aplicações de controle preditivo no meio industrial são, na maioria dos casos, em sistemas multivariáveis (MIMO). Em um ambiente industrial, uma das etapas cruciais num projeto de controle preditivo multivariável é a escolha adequada das variáveis manipuladas (PVs) e das variáveis controladas (MVs). Um detalhe muito importante a se observar é o acoplamento existente entre essas variáveis. Apesar de o acoplamento ser algo intrínseco em processos industriais, algumas abordagens são baseadas em compensadores de desacoplamento, ou seja, em calcular compensadores de forma a tratar o sistema como vários processos monovariáveis (SISO) separados. A técnica citada, além de requerer que o número de entradas seja igual ao número de saídas, nem sempre é realizável.

O GPC trata o acoplamento existente entre as variáveis de forma natural. O tratamento dos atrasos, que não são necessariamente iguais entre os pares entrada-saída, é feito por meio da abordagem da matriz de interação do sistema (Wolovich, 1974).

O modelo linear ARIMAX multivariável, para um sistema com p entradas e q saídas é dado por:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (2.33)$$

em que:

- q^{-1} representa o operador de atraso;
- $y(k) \in R^q$ representa o vetor de saídas do sistema no instante k ;
- $u(k) \in R^p$ representa o vetor de entradas do sistema no instante k ;
- $\Delta_j(q^{-1})$ representa a matriz de operadores de integração, dada por $\Delta_j(q^{-1}) = (1 - q^{-1})I_j$;
- $e(k) \in R^q$ representa, no instante k , o vetor de ruídos brancos de média zero e variância $diag(\sigma^2)$.

As matrizes polinomiais $A(q^{-1}) \in R^{q \times q}$, $B(q^{-1}) \in R^{q \times p}$ e $C(q^{-1}) \in R^{q \times q}$ são dadas por:

$$A(q^{-1}) = I_q + A_1q^{-1} + \dots + A_{na}q^{-na} \quad (2.34)$$

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1q^{-1} + \dots + B_{nb}q^{-nb} \quad (2.35)$$

$$C(q^{-1}) = I_q + C_1q^{-1} + \dots + C_{nc}q^{-nc} \quad (2.36)$$

Por uma questão de simplicidade, nesta Tese, também para o caso MIMO, apenas o caso particular em que $C(q^{-1}) = I_q$ é apresentado e implementado. Neste caso, o modelo apresentado em (2.33) se resume a:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + e(k) \quad (2.37)$$

2.3.1. Matriz de Interação

O conceito de matriz de interação, introduzido por (Wolovich, 1974), é descrito da seguinte forma: seja $G(z) \in R^{p \times q}$ a matriz de transferência estritamente própria de um sistema multivariável, com $\det(G(z)) \neq 0$, para $z \neq 0$, então existe uma matriz polinomial $\xi(z) = H(z)D(z)$ em que:

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}(z) & 1 & \cdots & 0 \\ h_{31}(z) & h_{32}(z) & \ddots & \vdots \\ h_{q1}(z) & h_{q2}(z) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

sendo $h_{ij}(z)$ divisível por z ou nulo e:

$$D(z) = \begin{bmatrix} z^{f_1} & z^{f_2} & \cdots & z^{f_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{f_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z^{f_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z^{f_q} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)G(z) = K$, com K uma matriz não-singular. Em (Fontes, 2002) é mostrado que o polinômio $\xi(z)$ está diretamente relacionado ao atraso de transporte do sistema monovariável. É comum assumir que a matriz de interação tenha, desde que $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)G(z) = K$, com K não-singular, uma das seguintes formas:

- atrasos iguais entre os pares entrada/saída, ou seja:

$$\xi(z) = z^d I_q, \text{ com } d = \min_{i,j} (d_{i,j}) \quad (2.40)$$

O polinômio mostrado em (2.40) representa o atraso único do sistema como sendo o menor atraso entre os pares entrada/saída. Dessa forma, o modelo do sistema seria dado por:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + e(k) \quad (2.41)$$

em que $B'(q^{-1}) = q^{-d}B(q^{-1})$.

- atrasos diferentes entre os pares entrada/saída, ou seja:

$$\xi(z) = \text{diag}[d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_q], \text{ sendo } d_i = \min_j(d_{i,j}) \quad (2.42)$$

O polinômio mostrado em (2.48) considera o menor atraso de cada saída. Dessa forma, o modelo do sistema seria dado pela equação (2.41), porém com $B'(q^{-1}) = \text{diag}[d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_q]B(q^{-1})$.

2.3.2. Formulação do Controlador GPC Linear MIMO

De maneira similar ao caso SISO, a predição da saída, i -passos à frente, é calculada pré-multiplicando (2.47) por $E_i(q^{-1})q^i$:

$$E_i(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1})y(k+i) = E_i(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+i-1) + E_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.43)$$

em que o polinômio $E_i(q^{-1})$ é obtido a partir da seguinte equação matricial Diofantina:

$$I_q = E_i(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-i}F_i(q^{-1}) \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.43), fazendo as devidas manipulações, tem-se que:

$$y(k+i) = F_i(q^{-1})y(k) + E_i(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+i-1) + E_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.45)$$

Como o grau de $E_i(q^{-1})$ é igual a $i - 1$, então o termo referente ao ruído, na expressão anterior, refere-se ao futuro, de forma que a melhor predição de $y(k + i)$ é como segue:

$$\hat{y}(k + i) = F_i(q^{-1})y(k) + E_i(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k + i - 1) \quad (2.46)$$

Fazendo $E_i(q^{-1})B'(q^{-1}) = H_{f_i}(q^{-1}) + q^{-i}H_{pa_i}(q^{-1})$ tem-se que:

$$\hat{y}(k + i) = F_i(q^{-1})y(k) + H_{pa_i}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k - 1) + H_{f_i}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k + i - 1) \quad (2.47)$$

A equação diofantina matricial mostrada em (2.46), devido ao fato de $\tilde{A}(q^{-1})$ ser diagonal, ou seja, uma saída não depende da outra, pode desmembrada em apenas q equações Diofantinas polinomiais.

A função objetivo para o caso MIMO é dada por:

$$J = \sum_{i=N_1}^{NY} \|r(k + i) - \hat{y}(k + i)\|_P^2 + \sum_{i=1}^{NU} \|\Delta u(k + i - 1)\|_Q^2 \quad (2.48)$$

em que:

- N_1 é o horizonte mínimo de predição;
- NY é o horizonte de predição;
- NU é o horizonte de controle;
- P e Q são matrizes positivas definidas de ponderações sobre os vetores sinal de erro e o de controle, respectivamente;
- $r(k + i) \in R^q$ é o vetor de trajetória de referência futura.

A norma mostrada em (2.48) é dada por:

$$\|X\|_R^2 = R^T X R \quad (2.49)$$

Considerando uma seqüência ótima de N predições, obtém-se a seguinte expressão:

esperada da resposta forçada $H\Delta U$ é igual primeira coluna da matriz H . A conclusão que se chega é que não é necessário utilizar a equação Diofantina para a obtenção da matriz H , visto que a mesma pode ser obtida a partir da resposta do sistema quando se aplica isoladamente degraus unitários nas p entradas. A i -ésima coluna de H , de forma análoga, também pode ser obtida aplicando-se um degrau unitário na i -ésima entrada.

Como a função objetivo definida em (2.48) estabelece horizontes mínimos de predição, e o sinal de controle é mantido constante após o horizonte de controle NU , então o conjunto de predições que afetam a função objetivo é expresso da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+N_1) \\ \hat{y}(k+N_2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+NY) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{N_1-1} & H_{N_1-2} & \cdots & H_{N_1-NU} \\ H_{N_1} & H_{N_1-1} & \cdots & H_{N_1+1-NU} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{NY-1} & H_{NY-2} & \cdots & H_{NY-NU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+NU-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{IN_1} \\ Y_{IN_1+1} \\ \vdots \\ Y_{INY} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

em que o vetor de resposta livre é dado por:

$$Y_{li} = F_i(q^{-1})y(k) + H_{pq_i}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \quad (2.55)$$

ou ainda:

$$Y_{N_{1y}} = H_{N_{1yu}} \Delta_p U_{NU} + Y_{IN_{1y}} \quad (2.56)$$

em que:

$$Y_{N_{1y}} = [\hat{y}(k+N_1) \quad \hat{y}(k+N_1+1) \quad \cdots \quad \hat{y}(k+NY)]^T \quad (2.57)$$

$$H_{N_{1yu}} = \begin{bmatrix} H_{N_1-1} & H_{N_1-2} & \cdots & H_{N_1-NU} \\ H_{N_1} & H_{N_1-1} & \cdots & H_{N_1+1-NU} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{NY-1} & H_{NY-2} & \cdots & H_{NY-NU} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\Delta_p U_{NU} = \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+NU-1) \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$Y_{IN_{1y}} = \begin{bmatrix} Y_{IN_1} \\ Y_{IN_{1+1}} \\ \vdots \\ Y_{IN_Y} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Reescrevendo a função objetivo (2.48) de forma matricial, tem-se que:

$$J = (R - H_{N_{1yu}} \Delta_p U_{NU} - Y_{IN_{1y}})^T \bar{P} (R - H_{N_{1yu}} \Delta_p U_{NU} - Y_{IN_{1y}}) + \Delta_p U_{NU}^T \bar{Q} \Delta_p U_{NU} \quad (2.61)$$

em que:

$$\bar{P} = \text{diag}[P_1, \dots, P_{q \times NY}] \text{ e } \bar{Q} = \text{diag}[Q_1, \dots, Q_{p \times NU}] \quad (2.62)$$

$$R = [r(k + N_1) \quad \dots \quad r(k + NY)]^T \quad (2.63)$$

A minimização de (2.61), na ausência de restrições, é dada por:

$$\Delta_p U_{NU} = (H_{N_{1yu}}^T H_{N_{1yu}} + \bar{Q})^{-1} H_{N_{1yu}}^T \bar{P} (R - Y_{IN_{1y}}) \quad (2.64)$$

Conforme já mencionado, de acordo com o princípio do horizonte móvel, o vetor sinal de controle efetivamente enviado ao processo corresponde aos p primeiros elementos de $\Delta_p U_{NU}$. Dessa forma, tem-se que:

$$\Delta_p (q^{-1})u(k) = K(R - Y_{IN_{1y}}) \quad (2.65)$$

em que K corresponde aos p primeiras linhas da matriz $(H_{N_{1yu}}^T H_{N_{1yu}} + \bar{Q})^{-1} H_{N_{1yu}}^T \bar{P}$.

Reescrevendo (2.65), para fins de análise em malha fechada, tem-se que:

$$\Delta_p (q^{-1})u(k) = \begin{bmatrix} K_{1,1} & \dots & K_{1,NY-N_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{p,1} & \dots & K_{p,NY-N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R - F_1(q^{-1})y(k) - H_{pq}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \\ \vdots \\ R - F_{NY-N_1}(q^{-1})y(k) - H_{pd_{NY-N_1}}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Vale lembrar que $K_{i,j} \in R^{l \times q}$, $R \in R^{q \times 1}$, $F_i(q^{-1}) \in R^{q \times q}$ e $H_{pa_i}(q^{-1}) \in R^{q \times p}$.

Reescrevendo (2.66), tem-se:

$$\Delta_p(q^{-1})u(k) = \begin{bmatrix} K_{1,1}R - K_{1,1}F_1(q^{-1})y(k) - K_{1,1}H_{pa_1}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + \dots \\ + K_{1,NY-N_1}R - K_{1,NY-N_1}F_{NY-N_1}(q^{-1})y(k) - K_{1,NY-N_1}H_{pa_{NY-N_1}}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \\ \vdots \\ K_{p,1}R - K_{p,1}F_1(q^{-1})y(k) - K_{p,1}H_{pa_1}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + \dots \\ K_{p,NY-N_1}R - K_{p,NY-N_1}F_{NY-N_1}(q^{-1})y(k) - K_{p,NY-N_1}H_{pa_{NY-N_1}}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

ou ainda:

$$\Delta_p(q^{-1})u(k) = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 R - F_{s_1}(q^{-1})y(k) - H_{spa_1}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \\ \vdots \\ \bar{K}_p R - F_{s_p}(q^{-1})y(k) - H_{spa_p}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

em que:

$$\bar{K}_i = \sum_{j=1}^{NY-N_1} K_{i,j} \quad (2.69)$$

$$F_{s_i}(q^{-1}) = \sum_{j=1}^{NY-N_1} K_{i,j} F_j(q^{-1}) \quad (2.70)$$

$$H_{spa_i}(q^{-1}) = \sum_{j=1}^{NY-N_1} K_{i,j} H_{spa_j}(q^{-1}) \quad (2.71)$$

A equação (2.68) ainda pode ser representada, para fins de análise em malha fechada, no domínio da transformada z , da seguinte forma:

$$\Delta_p(z^{-1})u(z^{-1}) = \bar{K}_T R - F_T(z^{-1})y(z^{-1}) - H_T(z^{-1})\Delta_p(z^{-1})u(z^{-1})z^{-1} \quad (2.72)$$

em que:

$$\bar{K}_T = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \vdots \\ \bar{K}_p \end{bmatrix}; \quad F_T(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{s_1}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{s_p}(z^{-1}) \end{bmatrix}; \quad H_T(z^{-1}) = \begin{bmatrix} H_{spa_1}(z^{-1}) \\ \vdots \\ H_{spa_p}(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\left[I + H_T(z^{-1})z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) u(z^{-1}) = \bar{K}_T R - F_T(z^{-1}) y(z^{-1}) \quad (2.74)$$

visto que $\Delta_p(z^{-1})$ é uma matriz simétrica.

Pré-multiplicando os dois membros de (2.74) por $\left\{ \left[I + H_T(z^{-1})z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1}$ tem-se que:

$$u(z^{-1}) = \left\{ \left[I + H_T(z^{-1})z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1} \left\{ \bar{K}_T R - F_T(z^{-1}) y(z^{-1}) \right\} \quad (2.75)$$

ou ainda:

$$u(z^{-1}) = T(z^{-1}) R - S(z^{-1}) y(z^{-1}) \quad (2.76)$$

em que:

$$T(z^{-1}) = \left\{ \left[I + H_T(z^{-1})z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1} \bar{K}_T \quad (2.77)$$

$$S(z^{-1}) = \left\{ \left[I + H_T(z^{-1})z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1} F_T(z^{-1}) \quad (2.78)$$

A Figura 2.6 mostra o diagrama de blocos do GPC MIMO.

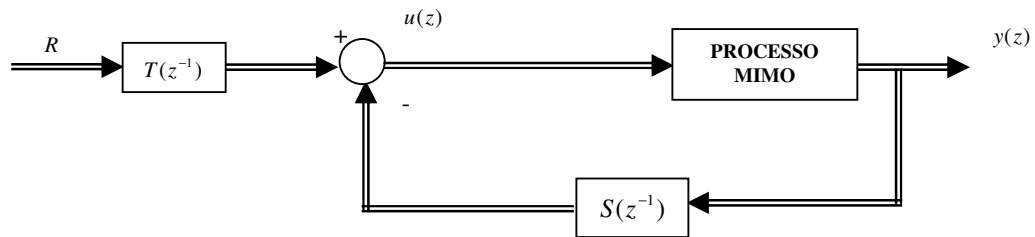


Figura 2.6 – Diagrama de blocos do GPC MIMO

2.3.3. Exemplo para o caso MIMO

Considerando um sistema MIMO de 2 entradas e 2 saídas, cujo modelo linear que o descreve é dado por:

$$A(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 - 0,4q^{-1} + 0,03q^{-2} & 0 \\ 0 & 1 - 0,59q^{-1} + 0,174q^{-2} + 0,00180q^{-3} \end{bmatrix}$$

$$B(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 0,45 + 0,62q^{-1} & -0,21 + 0,78q^{-1} \\ 0,96 - 0,55q^{-1} & 0,43 - 0,87q^{-1} \end{bmatrix}$$

Foram definidos, de forma heurística, os seguintes parâmetros de sintonia $NY = 5$ (para as duas saídas), $\lambda = 0,1$ (para as duas entradas) e foi aplicado o seguinte vetor de referência $R = [1 \ 0]^T$.

A Figura 2.7 e a Figura 2.8 mostram a atuação do controlador GPC linear MIMO sobre o sistema apresentado anteriormente.

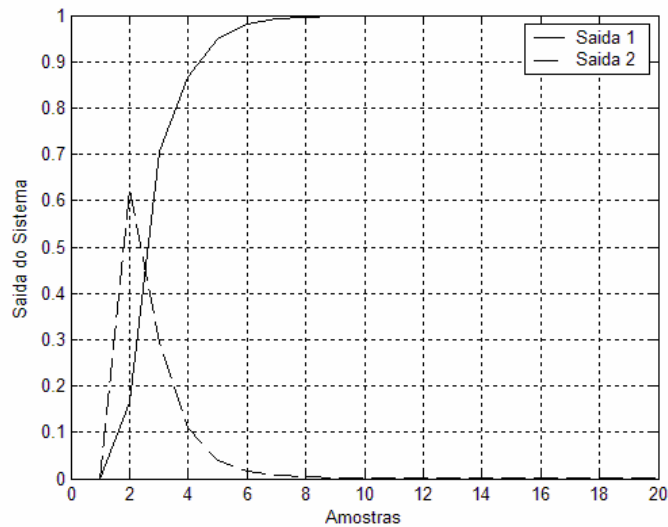


Figura 2.7 – Sistema MIMO controlado com GPC Linear

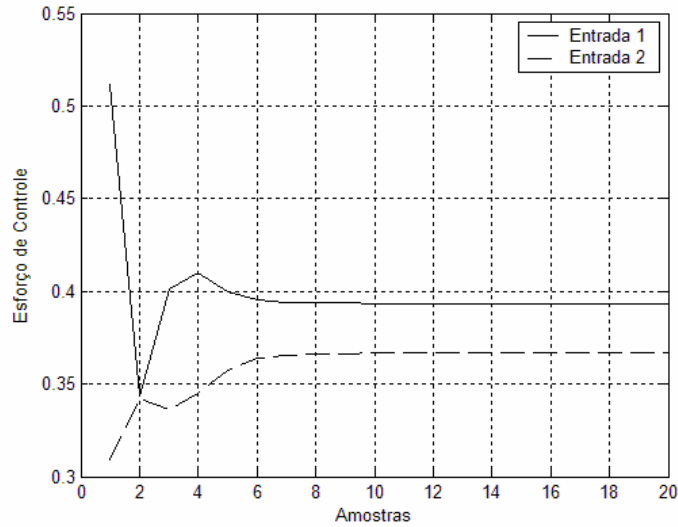


Figura 2.8 - Sinais de controle do sistema MIMO controlado com GPC Linear

2.4. Conclusão

Apesar de a idéia central desta Tese estar focada em modelos bilineares, o entendimento do caso linear é de extrema importância, visto que a extensão para o caso bilinear é mais facilmente efetuada com a compreensão do caso linear. Devido a este fato, foi apresentado o GPC linear tanto o caso SISO como o caso MIMO. Mostrou-se que este controlador adveio a partir de lacunas deixadas pelos controladores existentes à sua época, e que o mesmo possui certo grau de robustez, e ainda pode ser empregado em sistemas com atraso, de fase não-mínima e instáveis em malha aberta.

A análise de malha fechada mostrada propiciou um entendimento mais detalhado sobre a estrutura interna deste controlador, permitindo, por meio da compreensão das análises feitas, a proposição de melhorias ao mesmo. O caso bilinear, que é uma extensão do desenvolvimento mostrado neste capítulo, será mostrado nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

Controlador Preditivo Generalizado Bilinear

3.1. Introdução

Diversas pesquisas (Henson e Seborg, 1997; Hapoglu et al., 2001) mostram que, em processos com não-linearidades acentuadas, um controlador baseado em um modelo linear, frequentemente pode apresentar problemas de desempenho. Em (Fontes et al. 2005) mostra-se um processo de separação de benzeno e ciclohexano em que, mesmo operando-se próximo ao ponto de equilíbrio determinado, o controlador preditivo baseado em um modelo linear identificado não apresentou um desempenho satisfatório. Este problema vem sendo resolvido por técnicas de controle que empregam modelos não-lineares.

No caso particular desta Tese, serão abordados os modelos bilineares, que são um tipo importante de sistemas não-lineares, com estrutura relativamente simples, e que descrevem muitos processos industriais. Dessa forma, diversos métodos focados nesses sistemas estão emergindo (Bloemen et al., 2001; Fontes et al., 2004; He et al., 1999; Lakhdari et al., 1995; Liu and Li, 2004; Yao and Qian, 1997). A importância desse tipo de modelo, além do mesmo descrever diversos tipos de processos industriais, também reside no fato de este:

- ser relativamente mais simples que os demais modelos não-lineares;
- ser linear em parâmetros (Fontes, 2002), permitindo que técnicas lineares de estimação sejam empregadas.

A minimização de um critério quadrático sujeito a um modelo bilinear consiste em um problema de otimização não-linear e uma solução analítica não pode ser obtida (Yeo & Williams 1987). A solução para este entrave é abordada em duas linhas de pesquisa. A primeira linha utiliza algoritmos de otimização não-linear como Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) e a Programação Quadrática Sucessiva (PQS). A segunda linha utiliza técnicas de linearização como a linearização por degrau de tempo, que será tratada nesta Tese. A linearização por degrau de tempo proposta por (Goodhart et al., 1994) é aplicada em uma planta industrial. Os resultados se mostraram bastante satisfatórios e vem motivando a academia a investir em pesquisa dentro desta linha. Este capítulo mostrará o GPC quasilinear tanto para o caso SISO como para o caso MIMO.

3.2. GPC Quasilinear: caso monovariável e sem restrições

O controlador GPC quasilinear utiliza um modelo bilinear, o qual é quasilinearizado para obtenção da predição da saída para ser utilizada no processo de otimização. O modelo NARIMAX bilinear é dado por:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + \sum_{i=1}^{na} \sum_{j=1}^m \eta_{i-d,j} y(k-i)u(k-i-j+1) + C(q^{-1})\frac{e(k)}{\Delta} \quad (3.1)$$

em que:

- q^{-1} representa o operador de atraso;
- $y(k)$ representa a saída do sistema no instante k ;
- $u(k)$ representa a entrada do sistema no instante k ;
- Δ representa o operador de integração, sendo dado por $\Delta = 1 - q^{-1}$;
- d representa o atraso natural, em múltiplos do período de amostragem;
- $e(k)$ representa a presença, no instante k , de um ruído branco de média zero e variância σ^2 ;
- $\eta_{i,j} = 0, \quad \forall i < 0$.

Os polinômios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ são dados por:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \quad (3.2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \quad (3.3)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \quad (3.4)$$

em que na , nb e nc são os graus dos polinômios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$, respectivamente.

Como já mencionado, para que seja efetuada a predição linear, o modelo bilinear apresentado em (3.1) é quasilinearizado. A quasilinearização é dada, por meio da reescrita de (3.1), por:

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{na} \left(a_i - \sum_{j=1}^m d_{(i-d),j} u(k-i-j+1) \right) y(k-i) + q^{-d} B(q^{-1}) u(k-1) + C(q^{-1}) e(k) \quad (3.5)$$

Definindo:

$$\tilde{a}_i(u) = -\sum_{i=1}^{na} \left(a_i - \sum_{j=1}^m d_{(i-d),j} u(k-i-j+1) \right) \quad (3.6)$$

O modelo quasilinear por degrau de tempo, após a reescritura efetuada em (3.5), é dado por:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u) y(k) = q^{-d} B(q^{-1}) u(k-1) + C(q^{-1}) \frac{e(k)}{\Delta} \quad (3.7)$$

em que:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u) = 1 + \tilde{a}_1(u) q^{-1} + \dots + \tilde{a}_{na}(u) q^{-na} \quad (3.8)$$

ou ainda:

$$\bar{A}(q^{-1}, u) y(k) = q^{-d} B(q^{-1}) \Delta u(k-1) + C(q^{-1}) e(k) \quad (3.9)$$

em que:

$$\bar{A}(q^{-1}, u) = \Delta \tilde{A}(q^{-1}, u) \quad (3.10)$$

Um detalhe importante que se observa, reside no fato de que os parâmetros do polinômio $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ dependem do sinal de entrada. No entanto, dentro do horizonte de predição, os parâmetros não são corrigidos pelos valores futuros do sinal de entrada. Portanto, esta aproximação quasilinear produz um erro de predição, que aumenta com o horizonte de predição, o que degrada o desempenho do controlador. Algumas propostas têm sido apresentadas pela academia (Fontes et al., 2002), (Fontes et al., 2004), (Fontes & Ângelo, 2006) e (Fontes & Laurandi, 2006) na tentativa de atenuar a referida degradação.

Por uma questão de simplicidade, nesta Tese, apenas o caso particular em que $C(q^{-1}) = 1$ é apresentado e implementado. Também por questões de simplicidade, somente os termos bilineares do tipo $y(k-i)u(k-i-d)$ serão tratados.

3.2.1. GPC Quasilinear: caso monovariável e sem restrições

A partir do modelo definido em (3.9), uma predição i -passos à frente do sinal de saída do sistema é definida multiplicando a referida equação por q^i :

$$\bar{A}(q^{-1})y(k+i) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + e(k+i) \quad (3.11)$$

Considerando a seguinte equação diofantina:

$$\frac{1}{\bar{A}(q^{-1}, u)} = E_j(q^{-1}, u) + q^{-j} \frac{F_j(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \quad (3.12)$$

em que:

$$E_i(q^{-1}, u) = e_{i,0} + e_{i,1}q^{-1} + \dots + e_{j,j-1}q^{-(j-1)} \quad (3.13)$$

$$F_i(q^{-1}, u) = f_{i,0} + f_{i,1}q^{-1} + \dots + f_{j,na}q^{-(na-1)} \quad (3.14)$$

obtém-se a seguinte expressão:

$$y(k+i) = B(q^{-1})E_i(q^{-1}, u)\Delta u(k+i-d-1) + F_i(q^{-1}, u)y(k) + E_i(q^{-1}, u)e(k+i) \quad (3.15)$$

Visto que o grau de $E_i(q^{-1}, u)$ é $i-1$, então o termo referente ao ruído na expressão (3.15) refere-se ao futuro, de forma que a melhor predição da referida expressão é dada por:

$$\hat{y}(k+i) = H_i(q^{-1}, u)\Delta u(k+i-d-1) + F_i(q^{-1}, u)y(k) \quad (3.16)$$

em que $H_i(q^{-1}, u) = B(q^{-1})E_i(q^{-1}, u)$.

Fazendo $H_i(q^{-1}, u) = H_{f,i}(q^{-1}, u) + q^{-i}H_{p,i}(q^{-1}, u)$ tem-se que:

Reescrevendo (2.18) de forma matricial, tem-se:

$$\hat{Y} = F(u) + H(u)\Delta U \quad (3.20)$$

em que:

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+d+1) \\ \hat{y}(k+d+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+d+N) \end{bmatrix}; \quad \Delta U = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$F(u) = \begin{bmatrix} H_{p,d+1}(q^{-1}, u)\Delta u(k-d-1) + F_{d+1}(q^{-1}, u)y(k) \\ H_{p,d+2}(q^{-1}, u)\Delta u(k-d-1) + F_{d+2}(q^{-1}, u)y(k) \\ \vdots \\ H_{p,d+N}(q^{-1}, u)\Delta u(k-d-1) + F_{d+N}(q^{-1}, u)y(k) \end{bmatrix}; \quad H(u) = \begin{bmatrix} h_0(u) & 0 & 0 & 0 \\ h_1(u) & h_0(u) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1}(u) & h_{N-2}(u) & \cdots & h_0(u) \end{bmatrix}$$

O termo $F(u)$ referido em (3.20) depende, como pode ser observado em (3.21), apenas de termos passados da variação do sinal de controle. Este termo é conhecido como resposta livre do sistema, ou seja, a resposta natural do sistema a partir das condições atuais, considerando-se uma seqüência nula de ações futuras de controle. O termo $H(u)\Delta U$, também referido em (2.19), depende apenas de termos futuros da variação do sinal de controle. Este termo é conhecido como resposta forçada do sistema, ou seja, a resposta obtida da consideração de condição inicial nula e sujeita à seqüência de futuras ações de controle.

A função objetivo mostrada na equação (3.18) pode ser reescrita da seguinte forma matricial:

$$J(\Delta U) = (R - \hat{Y})^T (R - \hat{Y}) + \lambda \Delta U^T \Delta U \quad (3.22)$$

em que $R = [r(k+N_1) \quad r(k+2) \quad \cdots \quad r(k+NY)]^T$.

Substituindo (3.20) em (3.22) tem-se:

$$J(\Delta U) = (F(u) + H(u)\Delta U - R)^T (F(u) + H(u)\Delta U - R) + \lambda \Delta U^T \Delta U \quad (3.23)$$

A solução analítica de (3.23), na ausência de restrições, é obtida a partir do cálculo do gradiente $\partial J / \partial \Delta U$. O gradiente apresentado é igualado a zero, o que produz a seguinte solução analítica sub-ótima:

$$\Delta U = (H(u)^T H(u) + \lambda I)^{-1} H(u)(R - F(u)) \quad (3.24)$$

Como o GPC quasilinear também faz uso do princípio do horizonte móvel, apenas o primeiro elemento da seqüência ΔU é enviado ao processo. O primeiro elemento da referida seqüência pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Delta u(k) = K(u)(R - F(u)) \quad (3.25)$$

em que $K(u)$ é a primeira linha da matriz $(H(u)^T H(u) + \lambda I)^{-1} H(u)$.

Consideraremos a trajetória de referência R como constante, podemos reescrever (3.25) da seguinte forma:

$$\Delta u(k) = \begin{bmatrix} k_1(u) & k_2(u) & \cdots & k_N(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R - F_{d+1}(q^{-1}, u)y(k) - H_{p,d+1}(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) \\ R - F_{d+2}(q^{-1}, u)y(k) - H_{p,d+2}(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) \\ \vdots \\ R - F_{d+N}(q^{-1}, u)y(k) - H_{p,d+N}(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

ou ainda:

$$\Delta u(k) = k_1(u)R - k_1(u)F_{d+1}(q^{-1}, u)y(k) - k_1(u)H_{p,d+1}(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) - \cdots - k_N(u)R - k_N(u)F_N(q^{-1}, u)y(k) - k_N(u)H_{p,N}(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) \quad (3.27)$$

Colocando R em evidência, tem-se que:

$$\Delta u(k) = R\bar{K}(u) - F_s(q^{-1}, u)y(k) - \Delta u(k-1)H_s(q^{-1}, u) \quad (3.28)$$

em que:

$$F_s(q^{-1}, u) = \sum_{i=1}^N k_i(u)F_{i+d}(q^{-1}, u) \quad (3.29)$$

$$H_s(q^{-1}, u) = \sum_{i=1}^N k_i(u)H_{p,i+d}(q^{-1}, u) \quad (3.30)$$

$$\bar{K}(u) = \sum_{i=1}^N k_i(u) \quad (3.31)$$

Escrevendo (3.28) no domínio da transformada z e em função de $u(z)$ temos que:

$$u(z^{-1}) = \frac{R\bar{K}(u) - F_s(z^{-1}, u)y(z^{-1})}{\Delta[1 + H_s(z^{-1}, u)z^{-1}]} \quad (3.32)$$

O diagrama de blocos da Figura 3.1 representa a equação (3.32).

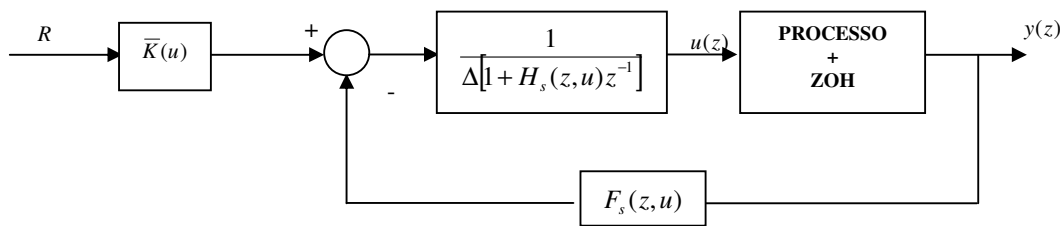


Figura 3.1 - Diagrama de blocos do GPC Quasilinear

O diagrama de blocos da Figura 3.1 mostram que o filtro de resposta livre $F_s(z, u)$, o ganho de pré-compensação $\bar{K}(u)$ e a malha de realimentação de laço direto possuem parâmetros que dependem do sinal de controle e, por conseguinte, do tempo.

3.2.2. Exemplo do GPC Quasilinear: caso SISO

O exemplo desta seção consiste de uma aplicação em uma coluna de destilação do tipo 1,3 butadieno. A coluna de purificação da Unidade de Butadieno tem como função a retirada de componentes com menor ponto de ebulição, isto é, maior volatilidade relativa, do que o do butadieno 1,3 (BD 1,3). O principal componente retirado pelo topo desta coluna é o metilacetileno (MAC) e a corrente de destilado no estado vapor produzida no topo. Estes componentes podem ser considerados como sendo uma mistura binária de MAC e BD 1,3. A corrente de fundo possui 97% de BD 1,3 sendo que o restante é, na sua maioria, constituído por componentes com menores volatilidades relativas do que o BD 1,3. A correta operação desta coluna é essencial para garantir a especificação do produto de fundo.

Essa coluna possui 31 pratos reais, representados por 20 estágios teóricos, e uma elevada vazão de refluxo interno, com uma pequena retirada de topo. Como consequência, a dinâmica do topo torna-se muito mais lenta do que a dinâmica de fundo. O produto de fundo

tem uma rigorosa especificação em relação ao metil-acetileno, neste caso o valor máximo aceitável é de (8) oito ppm massa. A coluna foi simulada com o software comercial HYSYS da empresa HYPROTECH.

A coluna purificadora de Butadieno 1,3 é composta das malhas de controle mostradas na Figura 3.1:

- nível do fundo da coluna - controlado pela vazão de retirada do produto de fundo;
- nível do tambor de refluxo - toda a corrente líquida acumulada no tambor de refluxo é retornada como refluxo líquido de topo, manipulando-se desta forma a vazão do refluxo (L) para se manter o nível do tambor de refluxo;
- pressão da coluna - controlada pelo calor do condensador, manipulando-se a vazão da água de resfriamento (AR), ou seja, a troca térmica no condensador, para se controlar a pressão da coluna.

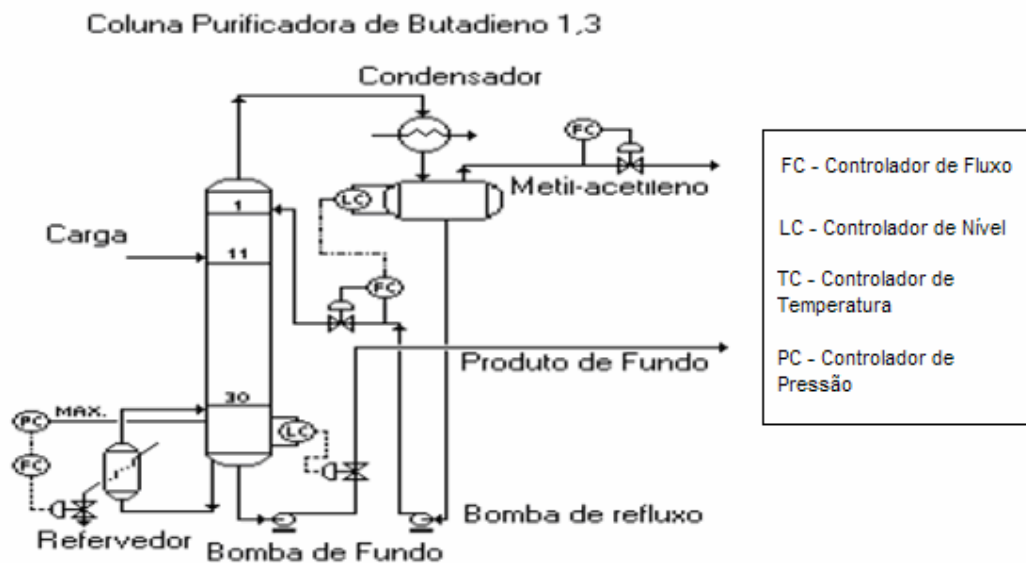


Figura 3.2 – Coluna purificadora 1,3 butadieno

O processo em questão é multivariável, existindo pouco acoplamento entre as malhas de topo e fundo o que possibilitou a implementação e análise dos controladores monovariáveis. O GPC Quasilinear foi utilizado somente para a malha de concentração de topo, tendo em vista que esta malha apresenta uma dinâmica bilinear que justifica a aplicação pretendida. A malha de topo tem como variável manipulada (MV) a vazão de topo e como variável de processo (PV) a concentração de MAC.

Como já mencionado, os modelos bilineares são lineares em parâmetros, de forma que a sua estimação foi obtida por meio do algoritmo de mínimos quadrados recursivo (RLS). Este algoritmo foi escolhido com o objetivo de minimizar as dimensões das matrizes envolvidas, que são muito grandes no caso não-recursivo. O modelo obtido foi obtido por meio da aplicação de um sinal *pseudo* aleatório no processo em um determinado ponto de operação. O período amostragem foi escolhido como sendo $1/30$ do tempo de resposta ao degrau. Como o tempo de resposta foi de 1500 minutos, o período escolhido foi de 50 minutos. O modelo é dado por:

$$y(k) = 0.8188y(k-1) - 0.00001622u(k-1) - 0.002798y(k-1)u(k-1)$$

Os resultados, mostrados na Figura 3.3 e Figura 3.4, são comparados com o GPC linear que emprega o seguinte modelo identificado, também com tempo de amostragem de 50 minutos:

$$y(k) = 0.8479y(k-1) - 0.00002138u(k-1)$$

O modelo linear foi obtido da mesma forma que o bilinear, sendo mudado apenas o regressor do algoritmo mínimos quadrados recursivo.

Um desvio de referência de 0.1691 é aplicado para ambos controladores, que também tiveram como parâmetros de sintonia $N_1 = 1$, $NY = 5$, $NU = 5$ e $\lambda = 3 \times 10^{-6}$.

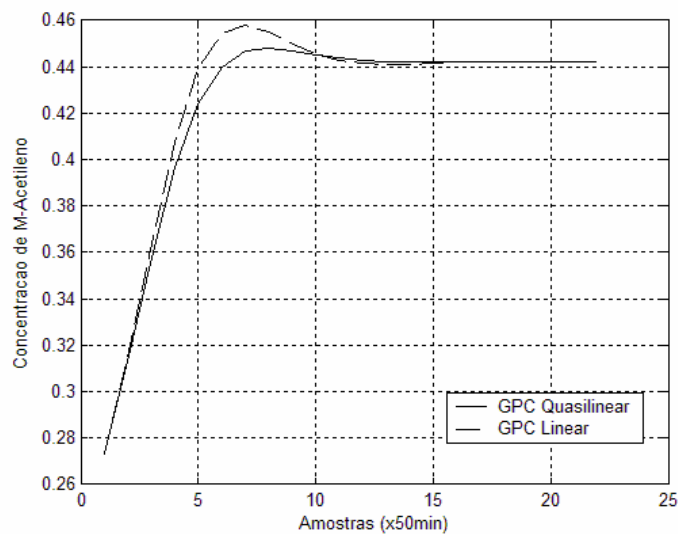


Figura 3.3 – Comparação da saída do sistema (GPC linear e GPC Bilinear) – Concentração de M-Acetileno

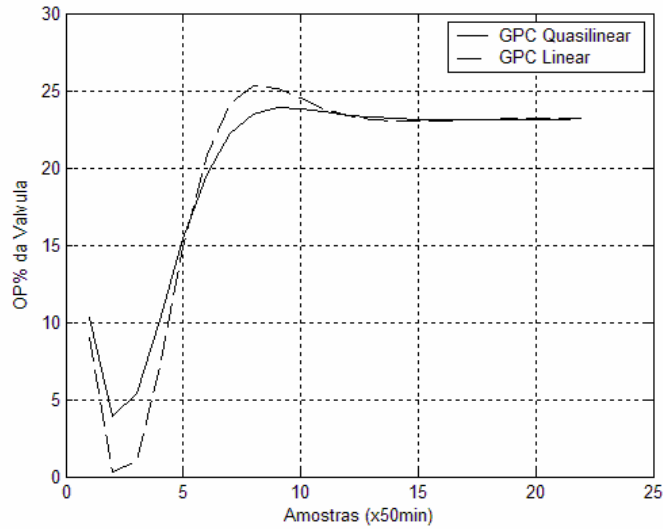


Figura 3.4 – Comparação do esforço de controle (GPC linear e GPC Bilinear) – OP% da válvula

Objetivando avaliar quantitativamente o desempenho do controlador preditivo bilinear quando aplicado a coluna de butadieno 1,3, utilizou-se o índice de desempenho apresentado em (Goodhart, 1994). Este índice considera a ponderação de três parcelas:

- o esforço de controle médio total realizado para se atingir uma dada resposta, representado por:

$$\varepsilon_1 = \sum |u(k)| / N \quad (3.33)$$

em que N é um número inteiro e representa a quantidade de ações de controle tomadas para se obter a resposta desejada;

- a variância do sinal de controle em torno da média que é calculado conforme mostrado a seguir:

$$\varepsilon_2 = \sum (u(k) - \varepsilon_1)^2 / N \quad (3.34)$$

- o desvio médio com relação ao valor do setpoint desejado calculado como segue:

$$\varepsilon_3 = \sum |r(k) - y(k)| / N \quad (3.35)$$

em que $r(t)$ é o valor da referência. Deve-se observar que ε_3 influencia diretamente na qualidade do produto a ser obtido, tendo grande importância na análise qualitativa do processo. O índice de desempenho, representado por ε , e mostrado a seguir, combina ε_1 , ε_2 e ε_3 , o que possibilita uma avaliação única:

$$\varepsilon = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3 \quad (3.36)$$

em que α_1 , α_2 e α_3 são os pesos atribuídos individualmente a cada índice e que ponderam o custo da energia usada pelo sistema, o uso do atuador e a qualidade do produto.

Um detalhe importante a ser observado é que, quanto menor o índice, melhor o desempenho do controlador. Devido às diferentes ordens de grandeza das variáveis envolvidas nos processos, os índices, no decorrer de toda a Tese, serão normalizados de forma que um índice mais próximo a 1 representa um pior comportamento. A Tabela 3.1 mostra a comparação entre os índices mostrados para o GPC linear e o GPC bilinear, considerando os pesos $\alpha_1=0,25$, $\alpha_2 =0,25$ e $\alpha_3 =0,5$. A escolha dos pesos leva em consideração, como maior importância, a qualidade do produto. Observa-se, pela análise da Tabela 3.1, que o GPC bilinear apresentou um melhor desempenho em todos os índices, ou seja, em menor energia usada pelo sistema, em menor uso do atuador e a melhor qualidade do produto.

Controlador	ε_1	ε_2	ε_3	ε_3
GPC Linear	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
GPC Bilinear	0,9812	0,9464	0,9883	0,9760

Tabela 3.1 - Índices de desempenho normalizados do GPC SISO linear e quasilinear para $N=22$

3.3. GPC Quasilinear: caso multivariável e sem restrições

Esta seção descreve o controlador preditivo generalizado bilinear multivariável (CPGBM). O modelo bilinear multivariável (Fontes, 2002) é dado por:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + D_e(q^{-1})D[u(k-1)]D_d(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (3.37)$$

em que $y(k) \in R^q$ é vetor de saída do processo, $u(k) \in R^p$ é o vetor de entrada do processo e $e(k) \in R^q$ é o vetor de ruído branco gaussiano de média zero e variância $diag(\sigma^2)$. As

matrizes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$ são matrizes polinomiais no operador de atraso q^{-1} e são definidas por:

$$A(q^{-1}) = I_{q \times q} + A_1 q^{-1} + \dots + A_{na} q^{-na} \quad (3.38)$$

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1 q^{-1} + \dots + B_{nb} q^{-nb} \quad (3.39)$$

$$C(q^{-1}) = I_{p \times p} + C_1 q^{-1} + \dots + C_{nc} q^{-nc} \quad (3.40)$$

$$D_d(q^{-1}) = D_{d,0} + D_{d,1} q^{-1} + \dots + D_{d,nd_d} q^{-nd_d} \quad (3.41)$$

$$D_e(q^{-1}) = D_{e,0} + D_{e,1} q^{-1} + \dots + D_{e,nd_e} q^{-nd_e} \quad (3.42)$$

em que $A(q^{-1}) \in R^{q \times q}$, $B(q^{-1}) \in R^{q \times p}$, $C(q^{-1}) \in R^{q \times q}$, $D_e(q^{-1}) \in R^{q \times p}$, $D_d(q^{-1}) \in R^{p \times q}$ e a matriz $D[u(k-1)]$ é definida como:

$$D[u(k-1)] = \text{diag}[u_1(k-1) \quad u_2(k-1) \quad \dots \quad u_p(k-1)] \quad (3.43)$$

O modelo não linear apresentado em (3.37) é quasilinearizado com o objetivo de ser empregado no Controlador Preditivo Generalizado Multivariável Quasilinear. A quasilinearização, de forma semelhante ao caso SISO, pode ser obtida reescrevendo o modelo bilinear multivariável da seguinte forma:

$$A(q^{-1}, u) \Delta_q(q^{-1}) y(k) = B(q^{-1}) \Delta_p(q^{-1}) u(k-1) + C(q^{-1}) e(k) \quad (3.44)$$

em que:

$$A(q^{-1}, u) = A(q^{-1}) - q^{-1} D_e(q^{-1}) D[u(k-1)] D_d(q^{-1}) \quad (3.45)$$

A matriz polinomial $A(q^{-1}, u)$ é calculada considerando o sinal de entrada constante em todo o horizonte de predição. De forma semelhante ao caso linear, a matriz polinomial $A(q^{-1}, u)$ é considerada diagonal neste trabalho, visto que não haverá correlação entre saídas. O conceito de matriz de interação é análogo ao mostrado, seção 2.3.1, para o caso linear.

3.3.1. Formulação do Controlador GPC Bilinear MIMO

A saída predita i -passos à frente pode ser obtida fazendo:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u)y(k+i) = B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+i-1) + C(q^{-1})e(k+i) \quad (3.46)$$

em que $\tilde{A}(q^{-1}, u) = A(q^{-1}, u)\Delta_q(q^{-1})$. Neste caso, a matriz $C(q^{-1})$ é considerada como $C(q^{-1}) = I_{p \times p}$. Considerando a seguinte equação diofantina, tem-se:

$$I_{p \times p} = E_i(q^{-1}, u)\tilde{A}(q^{-1}, u) + q^{-i}F_i(q^{-1}, u) \quad (3.47)$$

em que:

$$E_i(q^{-1}, u) = E_{i,0}(u) + E_{i,1}(u)q^{-1} + \dots + E_{i,i-1}(u)q^{-(i-1)} \quad (3.48)$$

$$F_i(q^{-1}, u) = F_{i,0}(u) + F_{i,1}(u)q^{-1} + \dots + F_{i,na}(u)q^{-na} \quad (3.49)$$

Pré-multiplicando (3.46) por $E_i(q^{-1}, u)$, considerando $C(q^{-1}) = I_{p \times p}$, obtemos:

$$E_i(q^{-1}, u)\tilde{A}(q^{-1}, u)y(k+i) = E_i(q^{-1}, u)B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+i-1) + E_i(q^{-1}, u)e(k+i) \quad (3.50)$$

Substituindo (3.47) in (3.50) obtemos:

$$y(k+i) = F_i(q^{-1}, u)y(k) + E_i(q^{-1}, u)B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+i-1) + E_i(q^{-1}, u)e(k+i) \quad (3.51)$$

Como o grau de $E_i(q^{-1}, u)$ é $i-1$, então a predição sub-ótima de $y(k+i)$ é:

$$\hat{y}(k+i) = F_i(q^{-1}, u)y(k) + E_i(q^{-1}, u)B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+i-1) \quad (3.52)$$

Fazendo $E_i(q^{-1}, u)B'(q^{-1}) = H_{f_i}(q^{-1}, u) + q^{-i}H_{pa_i}(q^{-1}, u)$ tem-se que:

$$\hat{y}(k+i) = F_i(q^{-1})y(k) + H_{pa_i}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + H_{f_i}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k+i-1) \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
\hat{Y} &= \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N) \end{bmatrix}; & \Delta_p U &= \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+N-1) \end{bmatrix} \\
F(u) &= \begin{bmatrix} H_{pa_1}(q^{-1}, u)\Delta(q^{-1})u(k-1) + F_1(q^{-1}, u)y(k) \\ H_{pa_2}(q^{-1}, u)\Delta(q^{-1})u(k-1) + F_2(q^{-1}, u)y(k) \\ \vdots \\ H_{pa_N}(q^{-1}, u)\Delta(q^{-1})u(k-1) + F_N(q^{-1}, u)y(k) \end{bmatrix}; & H(u) &= \begin{bmatrix} H_0(u) & 0 & \cdots & 0 \\ H_1(u) & H_0(u) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-1}(u) & H_{N-2}(u) & \cdots & H_0(u) \end{bmatrix} \quad (3.58)
\end{aligned}$$

O termo $F(u)$ referido em (3.57) é conhecido como resposta livre do sistema, ou seja, a resposta natural do sistema a partir das condições atuais, considerando-se seqüências nulas de ações futuras de controle. O termo $H(u)\Delta_p U$, também referido em (3.57), é conhecido como resposta forçada do sistema, ou seja, a resposta obtida da consideração de condição inicial nula e sujeita à seqüência futura de incrementos de controle.

Como a função objetivo definida em (3.54) estabelece horizontes mínimos de predição, e o sinal de controle é mantido constante após o horizonte de controle NU , então o conjunto de predições que afetam a função objetivo é expresso da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+N_1) \\ \hat{y}(k+N_2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+NY) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{N_1-1}(u) & H_{N_1-2}(u) & \cdots & H_{N_1-NU}(u) \\ H_{N_1}(u) & H_{N_1-1}(u) & \cdots & H_{N_1+1-NU}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{NY-1}(u) & H_{NY-2}(u) & \cdots & H_{NY-NU}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+NU-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{IN_1} \\ Y_{IN_1+1} \\ \vdots \\ Y_{INY} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

em que o vetor de resposta livre é dado por:

$$Y_{li} = F_i(q^{-1}, u)y(k) + H_{pa_i}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \quad (3.60)$$

ou ainda:

$$Y_{N_1y} = H_{N_1yu}(u)\Delta_p U_{NU} + Y_{IN_1y} \quad (3.61)$$

em que:

$$Y_{N_{1y}} = [\hat{y}(k+N_1) \quad \hat{y}(k+N_1+1) \quad \cdots \quad \hat{y}(k+NY)]^T \quad (3.62)$$

$$H_{N_{1y}} = \begin{bmatrix} H_{N_1-1}(u) & H_{N_1-2}(u) & \cdots & H_{N_1-NU}(u) \\ H_{N_1}(u) & H_{N_1+1}(u) & \cdots & H_{N_1+1-NU}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{NY-1}(u) & H_{NY-2}(u) & \cdots & H_{NY-NU}(u) \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\Delta_p U_{NU} = \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+NU-1) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$Y_{IN_{1y}} = \begin{bmatrix} Y_{IN_1} \\ Y_{IN_1+1} \\ \vdots \\ Y_{INY} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Reescrevendo a função objetivo (3.54) de forma matricial, tem-se que:

$$J = (R - H_{N_{1y}}(u)\Delta_p U_{NU} - Y_{IN_{1y}})^T \bar{P} (R - H_{N_{1y}}(u)\Delta_p U_{NU} - Y_{IN_{1y}}) + \Delta_p U_{NU}^T \bar{Q} \Delta_p U_{NU} \quad (3.66)$$

em que:

$$\bar{P} = \text{diag}[P_1, \dots, P_{q \times NY}] \text{ e } \bar{Q} = \text{diag}[Q_1, \dots, Q_{p \times NU}] \quad (3.67)$$

$$R = [r(k+N_1) \quad \cdots \quad r(k+NY)]^T \quad (3.68)$$

A minimização de (3.66), na ausência de restrições, é dada por:

$$\Delta_p U_{NU} = (H_{N_{1y}}^T(u)H_{N_{1y}}(u) + \bar{Q})^{-1} H_{N_{1y}}^T(u)\bar{P}(R - Y_{IN_{1y}}) \quad (3.69)$$

Conforme já mencionado, de acordo com o princípio do horizonte móvel, o vetor sinal de controle efetivamente enviado ao processo corresponde aos p primeiros elementos de $\Delta_p U_{NU}$. Dessa forma, tem-se que:

$$\Delta_p(q^{-1})u(k) = K(u)(R - Y_{IN_{1y}}) \quad (3.70)$$

em que $K(u)$ corresponde aos p primeiras linhas da matriz

$$(H_{N_{1yu}}^T(u)H_{N_{1yu}}(u) + \bar{Q})^{-1}H_{N_{1yu}}^T(u)\bar{P}.$$

Reescrevendo (3.70), para fins de análise em malha fechada, tem-se que:

$$\Delta_p(q^{-1})u(k) = \begin{bmatrix} K_{1,1}(u) & \cdots & K_{1,NY-N_1}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{p,1}(u) & \cdots & K_{p,NY-N_1}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R - F_1(q^{-1}, u)y(k) - H_{p q_1}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \\ \vdots \\ R - F_{NY-N_1}(q^{-1}, u)y(k) - H_{p q_{NY-N_1}}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Vale lembrar que $K_{i,j}(u) \in R^{l \times q}$, $R \in R^{q \times 1}$, $F_i(q^{-1}, u) \in R^{q \times q}$ e $H_{p q_i}(q^{-1}, u) \in R^{q \times p}$.

Reescrevendo (3.71), tem-se:

$$\Delta_p(q^{-1})u(k) = \begin{bmatrix} K_{1,1}(u)R - K_{1,1}(u)F_1(q^{-1}, u)y(k) - K_{1,1}H_{p q_1}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + \cdots \\ + K_{1,NY-N_1}(u)R - K_{1,NY-N_1}(u)F_{NY-N_1}(q^{-1}, u)y(k) - K_{1,NY-N_1}(u)H_{p q_{NY-N_1}}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \\ \vdots \\ K_{p,1}(u)R - K_{p,1}(u)F_1(q^{-1}, u)y(k) - K_{p,1}H_{p q_1}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + \cdots \\ K_{p,NY-N_1}(u)R - K_{p,NY-N_1}(u)F_{NY-N_1}(q^{-1}, u)y(k) - K_{p,NY-N_1}(u)H_{p q_{NY-N_1}}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

ou ainda:

$$\Delta_p(q^{-1})u(k) = \begin{bmatrix} \bar{K}_1(u)R - F_{s_1}(q^{-1}, u)y(k) - H_{s p q_1}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \\ \vdots \\ \bar{K}_p(u)R - F_{s_p}(q^{-1}, u)y(k) - H_{s p q_p}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

em que:

$$\bar{K}_i(u) = \sum_{j=1}^{NY-N_1} K_{i,j}(u) \quad (3.74)$$

$$F_{s_i}(q^{-1}, u) = \sum_{j=1}^{NY-N_1} K_{i,j}(u)F_j(q^{-1}, u) \quad (3.75)$$

$$H_{s p q_i}(q^{-1}, u) = \sum_{j=1}^{NY-N_1} K_{i,j}(u)H_{s p q_j}(q^{-1}, u) \quad (3.76)$$

A equação (3.73) ainda pode ser representada, para fins de análise em malha fechada, no domínio da transformada z , da seguinte forma:

$$\Delta_p(z^{-1})u(z^{-1}) = \bar{K}_T(u)R - F_T(z^{-1}, u)y(z^{-1}) - H_T(z^{-1}, u)\Delta_p(z^{-1})u(z^{-1})z^{-1} \quad (3.77)$$

em que:

$$\bar{K}_T(u) = \begin{bmatrix} \bar{K}_1(u) \\ \vdots \\ \bar{K}_p(u) \end{bmatrix}; \quad F_T(z^{-1}, u) = \begin{bmatrix} F_{s_1}(z^{-1}, u) \\ \vdots \\ F_{s_p}(z^{-1}, u) \end{bmatrix}; \quad H_T(z^{-1}, u) = \begin{bmatrix} H_{spq_1}(z^{-1}, u) \\ \vdots \\ H_{spq_p}(z^{-1}, u) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\left[I + H_T(z^{-1}, u)z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1})u(z^{-1}) = \bar{K}_T(u)R - F_T(z^{-1}, u)y(z^{-1}) \quad (3.79)$$

visto que $\Delta_p(z^{-1})$ é uma matriz simétrica.

Pré-multiplicando os dois membros de (3.79) por $\left\{ \left[I + H_T(z^{-1}, u)z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1}$ tem-se que:

$$u(z^{-1}) = \left\{ \left[I + H_T(z^{-1}, u)z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1} \left\{ \bar{K}_T(u)R - F_T(z^{-1}, u)y(z^{-1}) \right\} \quad (3.80)$$

ou ainda:

$$u(z^{-1}) = T(z^{-1}, u)R - S(z^{-1}, u)y(z^{-1}) \quad (3.81)$$

em que:

$$T(z^{-1}, u) = \left\{ \left[I + H_T(z^{-1}, u)z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1} \bar{K}_T(u) \quad (3.82)$$

$$S(z^{-1}, u) = \left\{ \left[I + H_T(z^{-1}, u)z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1} F_T(z^{-1}, u) \quad (3.83)$$

A Figura 3.5 mostra o diagrama de blocos do GPC MIMO Quasilinear.

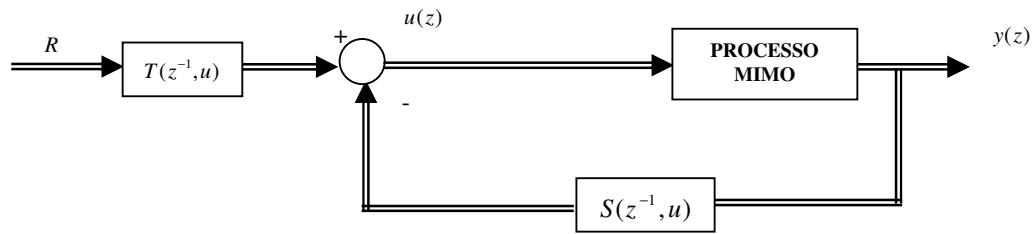


Figura 3.5 – Diagrama de blocos GPC MIMO Quasilinear

3.2.3. Exemplo do GPC Quasilinear: caso MIMO

Esta seção mostra o exemplo de aplicação em uma coluna de destilação do tipo debutanizadora. A coluna de destilação debutanizadora é normalmente utilizada para remover os componentes leves da corrente de gasolina para produzir gás liquefeito de petróleo (GLP), como mostrado em (Fontes, et al., 2006). A estratégia de controle mais comum consiste em definir como variáveis manipuladas a taxa de refluxo e a temperatura do refeedor de fundo e como variáveis controladas as concentrações dos produtos de topo e fundo, como visto em (Almeida, et al., 2000).

As variáveis de processo escolhidas são: concentração do i-pentano na corrente de butanos (y_1) e a concentração de i-buteno na corrente de C5+ (y_2). A coluna em estudo é mostrada na Figura 3.6.

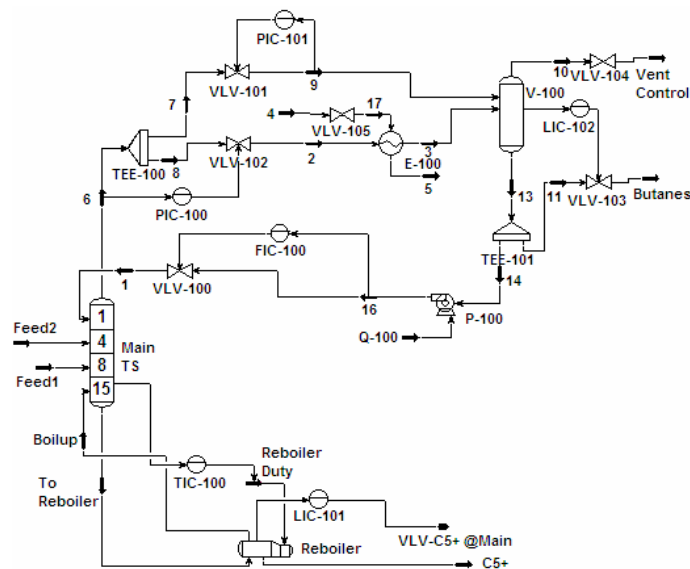


Figura 3.6 – Coluna de destilação do tipo debutanizadora

A taxa de refluxo (dada em m^3/h) é manipulada por meio da modificação do set-point do controlador FIC-100 e a temperatura (dada em $^{\circ}C$) no refeedor de fundo é controlada pela modificação no set-point do controlador TI-100.

Na seguinte simulação, um desvio de 0.00072065, aproximadamente 5%, foi aplicado como referência para a primeira saída (y_1). A saída (y_2) não foi perturbada. Os resultados de simulação são mostrados na Figura 3.7, Figura 3.8, Figura 3.9 e Figura 3.10.

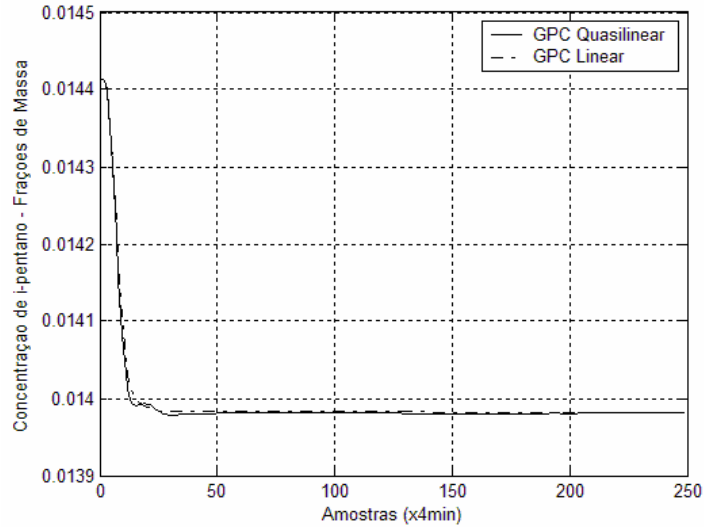


Figura 3.7 – Comparação da saída do sistema (GPC linear e GPC Bilinear) – Concentração de i-pentano

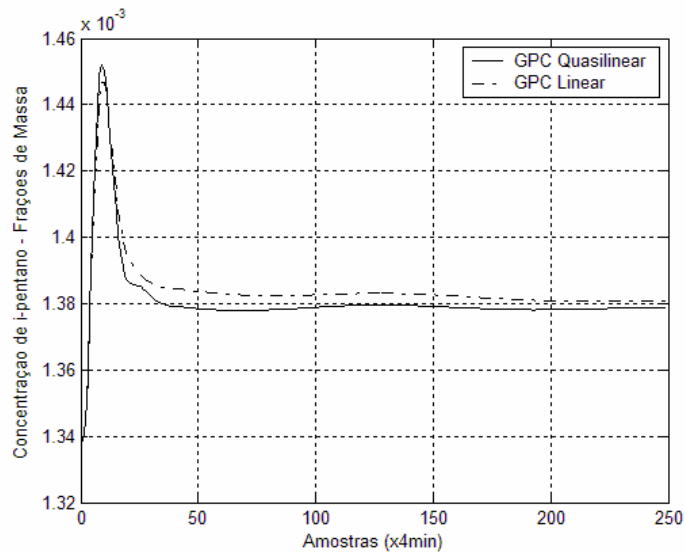


Figura 3.8 - Comparação da saída do sistema (GPC linear e GPC Bilinear) – Concentração de i-buteno

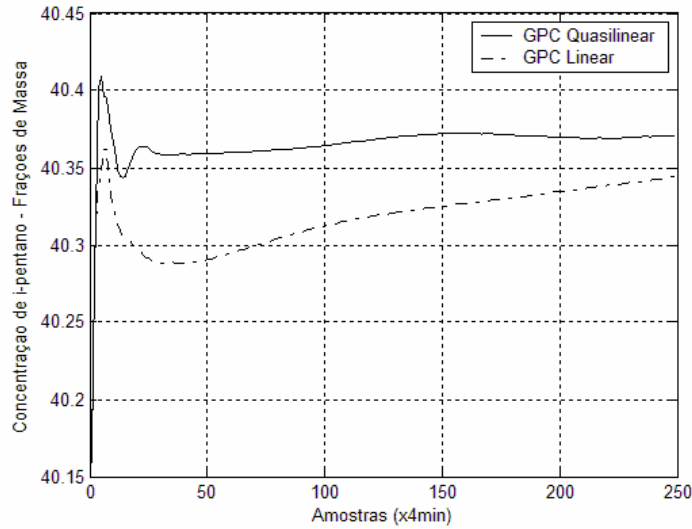


Figura 3.9 - Comparação do esforço de controle (GPC linear e GPC Bilinear) – Setpoint do FIC100

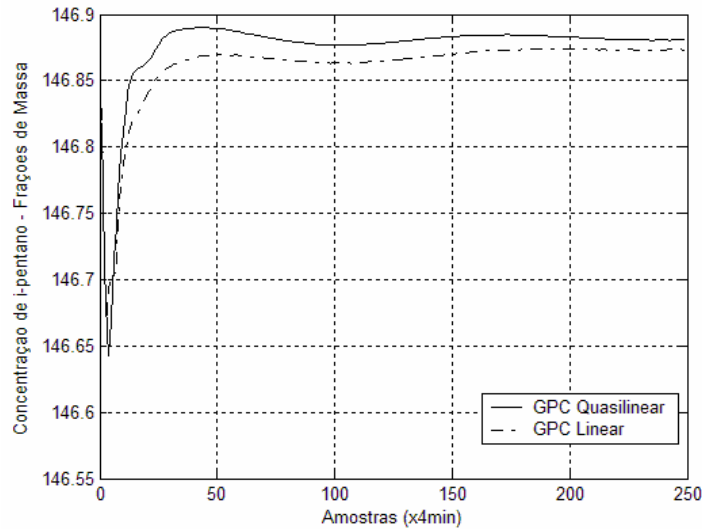


Figura 3.10 - Comparação do esforço de controle (GPC linear e GPC Bilinear) – Setpoint do TIC100

Percebe-se, pelos gráficos analisados, que o GPC Bilinear apresentou um desempenho razoavelmente melhor, quando comparado com o GPC Linear. De forma semelhante ao caso SISO, com o objetivo de avaliar o desempenho desses controladores de forma quantitativa, será apresentada a extensão para o caso multivariável dos índices definidos em (Goodhart et al., 1994).

Os referidos índices podem ser estendidos para o caso multivariável da seguinte forma:

$$\varepsilon_{1,i} = \sum |u_i(k)| / N \quad (3.84)$$

em que $i = 1, \dots, p$ e N é a quantidade de esforços de controle aplicados ao processo para que o mesmo atinja a resposta desejada. O índice apresentado em (3.84) avalia o esforço de control total para atingir uma dada resposta. A variância dos atuadores é dada por:

$$\epsilon_{2,i} = \sum (u_i(k) - \epsilon_{1,i})^2 / N \quad (3.85)$$

O desvio do processo, em termos da integral do erro absoluto (IAE), é dado por:

$$\epsilon_{3,j} = \sum |r_j(k) - y_j| / N \quad (3.86)$$

em que $j = 1, \dots, q$.

O índice conjunto é definido como:

$$\epsilon_j = \sum_{i=1}^p (\alpha_i \epsilon_{1,i} + \beta_i \epsilon_{2,i}) + \rho_j \epsilon_{3,j} \quad (3.87)$$

em que $j = 1, \dots, q$. Os fatores α_i , β_i e ρ_j são pesos escolhidos para refletirem o custo da energia usada, o uso dos atuadores e a qualidade dos produtos, respectivamente.

i	Modelo	$\epsilon_{1,i}$	$\epsilon_{2,i}$	$\epsilon_{3,i}$	ϵ_i
1	Linear	0,9995	1,0000	1,0000	0,9799
1	Quasilinear	1,0000	0,5758	0,8775	0,8751
2	Linear	0,9994	0,8669	1,0000	0,9799
2	Quasilinear	1,0000	1,0000	0,5404	0,7066

Tabela 3.2 – Índices de desempenho normalizados do GPC MIMO linear e quasilinear para N=250

O que se observa na Tabela 3.2 é que os índices de desempenho para o caso quasilinear são, em sua maioria, melhores, quando comparados com o caso linear. Esta melhora diz respeito tanto ao menor consumo de energia, menor uso dos atuadores e melhor qualidade dos produtos.

3.4. Conclusão

Este capítulo apresentou o controlador preditivo generalizado bilinear, que é o objeto central desta Tese. O problema de otimização foi abordado em sua forma analítica por meio

da quasilinearização por degrau tempo. A linearização referida vem apresentando resultados muito promissores conforme (Fontes, 2002) e (Goodhart et al., 1994).

O bom desempenho do GPC bilinear, tanto no caso SISO como no caso MIMO, foi comprovado, quando comparado com o caso linear, pelos exemplos apresentados. O melhor desempenho do GPC bilinear foi quantificado pelos índices de desempenho apresentados, e se referem a menor quantidade de energia gasta pelo sistema, menor uso dos atuadores e melhor qualidade do produto. O capítulo seguinte mostra uma interessante abordagem para a minimização do erro de predição produzido pela aproximação quasilinear. Esta abordagem também servirá de base para as abordagens multi-modelo desta Tese.

Capítulo 4

Controlador Preditivo Generalizado Bilinear com Compensação Iterativa

4.1. Introdução

Este capítulo mostra o Controlador Preditivo Generalizado Bilinear com Compensação Iterativa (BGPCCI) ou (CPGBCI). A abordagem do CPGBCI foi proposta inicialmente por (Fontes & Ângelo, 2006) e sua extensão para o caso multivariável foi apresentada em (Fontes & Laurandi, 2006). O controlador em questão é baseado no Controlador Preditivo Generalizado Bilinear (CPGB) (Goodhart et al., 1994) mostrado no capítulo anterior. Conforme já mencionado, a abordagem de (Goodhart et al., 1994), devido ao modelo utilizado, produz um erro de predição, o qual aumenta com o horizonte de predição, degradando o desempenho deste controlador. O preditor do CPGB é uma solução sub-ótima, cuja predição se distancia do real valor na medida em que o horizonte de predição aumenta. Além do mais, deve-se considerar os desvios devido ao ruído e/ou erros de medição.

A idéia da compensação iterativa, que será detalhada no decorrer desse capítulo, surgiu da necessidade de diminuição do referido erro de predição, com a consequente melhoria de desempenho do CPGB. O algoritmo de compensação iterativa é mostrado, juntamente com suas condições de aplicação e critérios de parada.

4.2. GPC Bilinear com compensação iterativa: caso monovariável e sem restrições

O desenvolvimento do CPGB da seção 3.2 mostrava que a predição da saída i -passos à frente, no instante k , é realizada utilizando o modelo quasilinear, o qual considera os coeficientes do polinômio $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ como dependentes dos valores de entrada disponíveis até o instante $k-1$. Essa abordagem, como já mencionado, gera um erro de predição que aumenta com o horizonte de predição, o que degrada o desempenho do controlador.

O modelo bilinear mostrado na equação (3.1) pode ser escrito, simplificadaamente, da seguinte forma:

do algoritmo de compensação iterativa consiste em utilizar as entradas futuras $u(k), \dots, u(k + NU)$ calculadas pelo algoritmo GPC quasilinear. Como o GPC quasilinear calcula uma seqüência $\Delta u(k), \dots, \Delta u(k + NU)$ de ações de controle, as referidas ações futuras são utilizadas para o cálculo dos sinais de entrada futuros que corrigem o modelo quasilinear. Os referidos sinais de entrada são dados por:

$$u(k + i) = u(k - 1) + \sum_{t=0}^i \Delta u(k + t) \quad (4.6)$$

Efetuada o ajuste descrito, obtém-se um novo polinômio $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ com os valores corrigidos. Este polinômio, por sua vez, permite que o GPC quasilinear calcule uma nova seqüência de ações de controle que o corrigirá novamente. Este procedimento é repetido, iterativamente, até que um critério de parada seja satisfeito.

É importante se observar que, como o polinômio $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ é atualizado a cada iteração, os polinômios $E_i(q^{-1}, u)$ e $F_i(q^{-1}, u)$ precisam ser recalculados por meio da equação diofantina (3.12). Por sua vez, a matriz de resposta forçada $H(u)$ também é recalculada. Percebe-se, portanto, que há um incremento significativo no esforço computacional do algoritmo.

4.2.1. Critério de convergência e de parada do caso SISO

Para que o processo iterativo descrito não se repita indefinidamente, alguns critérios de parada precisam ser estabelecidos. O primeiro critério é baseado na norma da variação do vetor $\Delta U = [\Delta u(k) \ \dots \ \Delta u(k + NU)]$. A referida norma indica a convergência ou não do algoritmo em descrição, ou seja, quando não há variação significativa de incrementos de controle entre as iterações. Em uma determinada iteração r , a norma é dada por:

$$\|V\Delta U\| = \sqrt{(\Delta U_r - \Delta U_{r-1})^T (\Delta U_r - \Delta U_{r-1})} \quad (4.7)$$

As iterações do algoritmo devem parar quando a norma definida em (4.7) for menor que uma determinada tolerância estabelecida:

$$\|\nabla \Delta U\| < \varepsilon \quad (4.8)$$

Dependendo da sintonia pretendida para o controlador preditivo, isto é, dependendo do horizonte de predição e do fator ponderação do esforço de controle, a taxa de convergência do algoritmo pode tornar-se pequena ou, até mesmo, o algoritmo pode não convergir.

O segundo critério de parada é adotado para o caso de o algoritmo não convergir, ou levar muitas iterações para a convergência. Nesse caso, um número máximo N_{\max} de iterações é estabelecido:

$$r < N_{\max} \quad (4.9)$$

Outro detalhe importante a ressaltar é que, caso o algoritmo não convirja, utiliza-se para esse instante a ação de controle determinada pelo pelo GPC quasilinear.

4.2.2. Exemplo do GPC Quasilinear com compensação iterativa: caso SISO

O exemplo desta seção é o mesmo da seção 3.2.2. Neste caso, o controlador com compensação iterativa utilizou uma tolerância de $\varepsilon = 10^{-13}$ e um número máximo de iterações de $N_{\max} = 400$ e os mesmos parâmetros de sintonia da referida seção.. A Figura 4.1 e a Figura 4.2 mostram o sinal de saída e o esforço de controle, respectivamente.

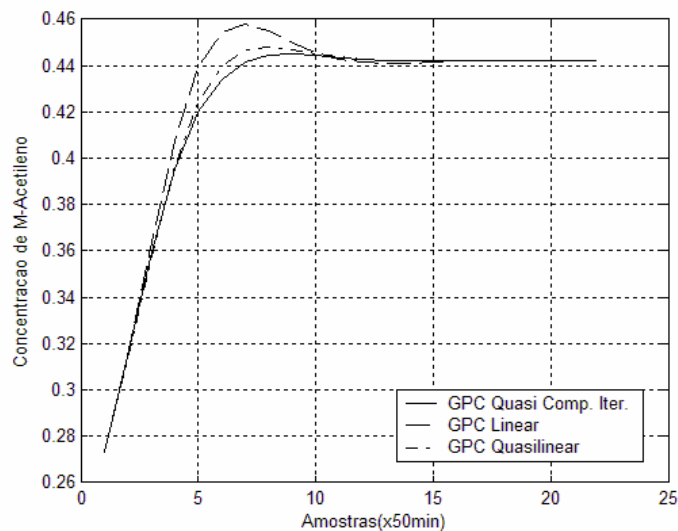


Figura 4.1 – Comparação da saída do sistema (GPC linear, GPC Bilinear, GPC Bilinear com compensação iterativa) – Concentração de M-Acetileno

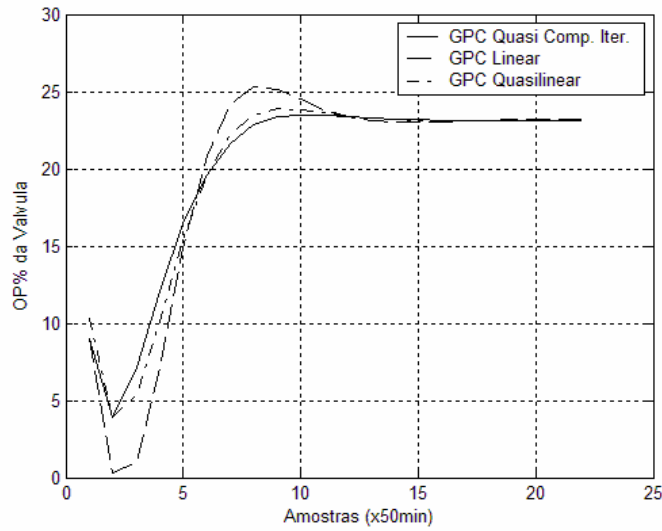


Figura 4.2 – Comparação do esforço de controle (GPC linear, GPC Bilinear e GPC Bilinear com compensação iterativa) – OP% da válvula

Também para o controlador com compensação iterativa foi feita a análise de desempenho baseada nos índices das equações (3.33), (3.34), (3.35) e (3.36). Os resultados são mostrados na Tabela 4.1.

Controlador	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_3
Linear	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Bilinear	0,9812	0,9464	0,9883	0,9760
Comp. Iterativa	0,9780	0,9371	0,9852	0,9714

Tabela 4.1 – Índices de desempenho normalizados do GPC linear, bilinear e bilinear com compensação iterativa para N=22

Percebe-se, pelos índices mostrados na Tabela 4.1, que o controlador baseado no algoritmo de compensação iterativa diminui significativamente o esforço de controle e o uso do atuador. Além do mais, a qualidade do produto é superior, visto que o mesmo se desviou menos da especificação desejada. Observa-se que, no exemplo em questão, a variação do sinal de controle é significativa, permitindo que o algoritmo de compensação iterativa tenha um maior espaço de correção. Nos casos em que não haja uma grande variação do esforço de controle, o espaço de correção é menor e, por consequência, o algoritmo em questão vai se tornando menos indicado, conforme apresentado em (Cavalcanti et al., 2008b) e (Fontes e Laurandi, 2006).

4.3. GPC Bilinear Multivariável com compensação iterativa: caso multivariável e sem restrições

O desenvolvimento do CPGBM da seção 3.3 mostra, de forma semelhante ao caso SISO, que a predição da saída i -passos à frente, no instante k , é realizada utilizando o modelo quasilinear multivariável, o qual considera os coeficientes do polinômio $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ como dependentes dos valores de entrada disponíveis até o instante $k-1$. Essa abordagem, como já mencionado, gera um erro de predição que aumenta com o horizonte de predição, o que degrada o desempenho do controlador.

O modelo bilinear multivariável com p -entradas e q -saídas mostrado na equação (3.43) pode ser escrito, simplificadaamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 y_1(k) &= -a_{1,1}y_1(k-1) - \dots - a_{1,na}y_1(k-na) + \\
 &\quad b_{11,0}u_1(k-1) + \dots + b_{11,nb}u_1(k-nb+1) + \dots + \\
 &\quad b_{1p,0}u_p(k-1) + \dots + b_{1p,nb}u_p(k-nb+1) + \\
 &\quad d_{11,0}y_1(k-1)u_1(k-1) + \dots + d_{11,na}y_1(k-na)u_1(k-na) + \dots + \\
 &\quad d_{1p,0}y_1(k-1)u_p(k-1) + \dots + d_{1p,na}y_1(k-na)u_p(k-na) + e_1(k) \\
 &\quad \vdots \\
 y_q(k) &= -a_{q,1}y_q(k-1) - \dots - a_{q,na}y_q(k-na) + \\
 &\quad b_{11,0}u_1(k-1) + \dots + b_{11,nb}u_1(k-nb+1) + \dots + \\
 &\quad b_{qp,0}u_p(k-1) + \dots + b_{qp,nb}u_p(k-nb+1) + \\
 &\quad d_{q1,0}y_q(k-1)u_1(k-1) + \dots + d_{q1,na}y_q(k-na)u_1(k-na) + \dots + \\
 &\quad d_{qp,0}y_q(k-1)u_p(k-1) + \dots + d_{qp,na}y_q(k-na)u_p(k-na) + e_q(k)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

O processo de quasilinearização de (4.10) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 y_1(k) &= -[a_{1,1} - d_{11,0}u_1(k-1) - \dots - d_{1p,0}u_p(k-1)]y_1(k-1) - \dots \\
 &\quad - [a_{1,na} - d_{11,na}u_1(k-na) - \dots - d_{1p,na}u_p(k-na)]y_1(k-na) + \\
 &\quad b_{11,0}u_1(k-1) + \dots + b_{11,nb}u_1(k-nb+1) + \dots + \\
 &\quad b_{1p,0}u_p(k-1) + \dots + b_{1p,nb}u_p(k-nb+1) + e_1(k) \\
 &\quad \vdots \\
 y_q(k) &= -[a_{q,1} - d_{q1,0}u_1(k-1) - \dots - d_{qp,0}u_p(k-1)]y_q(k-1) - \dots \\
 &\quad - [a_{q,na} - d_{q1,na}u_1(k-na) - \dots - d_{qp,na}u_p(k-na)]y_q(k-na) + \\
 &\quad b_{11,0}u_1(k-1) + \dots + b_{11,nb}u_1(k-nb+1) + \dots + \\
 &\quad b_{qp,0}u_p(k-1) + \dots + b_{qp,nb}u_p(k-nb+1) + e_q(k)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

As expressões mostradas em (4.11) ainda podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 y_1(k) &= -\tilde{a}_{1,1}(u_1, \dots, u_p)y_1(k-1) - \dots - \tilde{a}_{1,na}(u_1, \dots, u_p)y_1(k-na) \\
 &\quad b_{11,0}u_1(k-1) + \dots + b_{11,nb}u_1(k-nb+1) + \dots + \\
 &\quad b_{1p,0}u_p(k-1) + \dots + b_{1p,nb}u_p(k-nb+1) + e_1(k) \\
 &\quad \vdots \\
 y_q(k) &= -\tilde{a}_{q,1}(u_1, \dots, u_p)y_q(k-1) - \dots - \tilde{a}_{q,na}(u_1, \dots, u_p)y_q(k-na) + \\
 &\quad b_{11,0}u_1(k-1) + \dots + b_{11,nb}u_1(k-nb+1) + \dots + \\
 &\quad b_{qp,0}u_p(k-1) + \dots + b_{qp,nb}u_p(k-nb+1) + e_q(k)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

em que $\tilde{a}_{i,t}(u_1, \dots, u_p) = a_{i,t} - \sum_{j=1}^p d_{ij,t}u_j(k-t) \quad i=1, \dots, q, \quad t=1, \dots, na.$

A predição i -passos à frente do modelo quasilinear multivariável mostrado em (4.11) é dada por:

$$\begin{aligned}
 y_1(k+i) &= -[a_{1,1} - d_{11,0}u_1(k+i-1) - \dots - d_{1p,0}u_p(k+i-1)]y_1(k+i-1) - \dots \\
 &\quad - [a_{1,na} - d_{11,na}u_1(k+i-na) - \dots - d_{1p,na}u_p(k+i-na)]y_1(k+i-na) + \\
 &\quad b_{11,0}u_1(k+i-1) + \dots + b_{11,nb}u_1(k+i-nb+1) + \dots + \\
 &\quad b_{1p,0}u_p(k+i-1) + \dots + b_{1p,nb}u_p(k+i-nb+1) + e_1(k+i) \\
 &\quad \vdots \\
 y_q(k+i) &= -[a_{q,1} - d_{q1,0}u_1(k+i-1) - \dots - d_{qp,0}u_p(k+i-1)]y_q(k+i-1) - \dots \\
 &\quad - [a_{q,na} - d_{q1,na}u_1(k+i-na) - \dots - d_{qp,na}u_p(k+i-na)]y_q(k+i-na) + \\
 &\quad b_{11,0}u_1(k+i-1) + \dots + b_{11,nb}u_1(k+i-nb+1) + \dots + \\
 &\quad b_{qp,0}u_p(k+i-1) + \dots + b_{qp,nb}u_p(k+i-nb+1) + e_q(k+i)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Constata-se, pela análise de (4.12), que a predição é calculada considerando os coeficientes $\tilde{a}_{i,j}(u)$, $i=1, \dots, q$, $j=1, \dots, na$ como constantes dentro do horizonte de predição, ou seja, são consideradas apenas as entradas disponíveis até o instante $k-1$.

A partir da equação (4.13), se observa que os parâmetros equivalentes a $\tilde{a}_{i,t}(u_1, \dots, u_p)$, $i=1, \dots, q$, $t=1, \dots, na$ deveriam ser corrigidos por valores futuros do sinal de entrada. A idéia do algoritmo de compensação iterativa consiste em utilizar o vetor de entradas futuras $U_{NU} = [u_1(k) \ \dots \ u_p(k) \ \dots \ u_1(k+NU) \ \dots \ u_p(k+NU)]^T$ calculadas pelo algoritmo GPC quasilinear multivariável. Como o GPC quasilinear multivariável calcula um vetor de seqüências $\Delta_p U_{NU} = [\Delta u_1(k) \ \dots \ \Delta u_p(k) \ \dots \ \Delta u_1(k+NU) \ \dots \ \Delta u_p(k+NU)]^T$ de ações de

controle, as referidas ações futuras são utilizadas para o cálculo dos sinais de entrada futuros que corrigem o modelo quasilinear multivariável. Os referidos sinais de entrada são dados por:

$$u_j(k+i) = u_j(k-1) + \sum_{t=0}^i \Delta u_j(k+t), \quad j = 1, \dots, p \quad (4.14)$$

Efetuada o ajuste descrito, obtém-se uma nova matriz polinomial $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ com os valores corrigidos. Essa matriz polinomial, por sua vez, permite que o GPC quasilinear multivariável calcule uma nova seqüência de ações de controle que o corrigirá novamente. Este procedimento é repetido, iterativamente, até que um critério de parada seja satisfeito.

É importante se observar que, como o a matriz polinomial $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ é atualizada a cada iteração, as matrizes polinômiais $E_i(q^{-1}, u)$ e $F_i(q^{-1}, u)$ precisam ser recalculadas por meio da equação diofantina (3.53). Por sua vez, a matriz de resposta forçada $H(u)$ também é recalculada. Percebe-se, portanto, que há um incremento significativo no esforço computacional do algoritmo.

4.2.3. Critério de convergência e de parada do caso MIMO

Para que o processo iterativo descrito não se repita indefinidamente, alguns critérios de parada precisam ser estabelecidos. O primeiro critério é baseado na norma da variação do vetor $\Delta_p U_{NU} = [\Delta u_1(k) \ \dots \ \Delta u_p(k) \ \dots \ \Delta u_1(k+NU) \ \dots \ \Delta u_p(k+NU)]^T$. A referida norma indica a convergência ou não do algoritmo em descrição, ou seja, que não há mais variação de incrementos de controle entre as iterações. Em uma determinada iteração r , a norma é dada por:

$$\|V\Delta U\| = \sqrt{(\Delta_p U_{NU_r} - \Delta_p U_{NU_{r-1}})^T (\Delta_p U_{NU_r} - \Delta_p U_{NU_{r-1}})} \quad (4.15)$$

As iterações do algoritmo devem parar quando a norma definida em (4.15) for menor que uma determinada tolerância estabelecida:

$$\|V\Delta U\| < \varepsilon \quad (4.16)$$

De maneira análoga ao caso SISO, dependendo da sintonia pretendida para o controlador preditivo, isto é, dependendo do horizonte de predição e da ponderação do esforço de controle, a taxa de convergência do algoritmo pode tornar-se pequena ou, até mesmo, o algoritmo não convergir.

O segundo critério de parada é adotado para o caso de o algoritmo não convergir, ou levar muitas iterações para a convergência. Nesse caso, um número máximo de iterações é estabelecido:

$$r < N_{\max} \tag{4.17}$$

Outro detalhe importante a ressaltar é que, caso o algoritmo não convirja, utiliza-se para esse instante as ações de controle determinadas pelo pelo GPC quasilinear multivariável.

4.2.4. Exemplo do GPC Quasilinear com compensação iterativa: caso MIMO

Nesta seção, para fins de simulação, será utilizada a mesma coluna de destilação mostrada na 3.2.3. No entanto, um grande desvio em relação ao ponto de operação foi aplicado. O referido desvio foi aplicado com o intuito de provocar grandes variações do esforço de controle e, dessa forma, demonstrar a eficiência do controlador com compensação iterativa. O exemplo dessa seção não faz comparações com o caso quasilinear simples ou o caso linear, visto que esses casos não obtiveram um desempenho satisfatório, o que justifica ainda mais a aplicação da compensação iterativa. A Figura 4.3, Figura 4.4, Figura 4.5 e a Figura 4.6 mostram os sinais de saída e os esforços de controle, respectivamente.

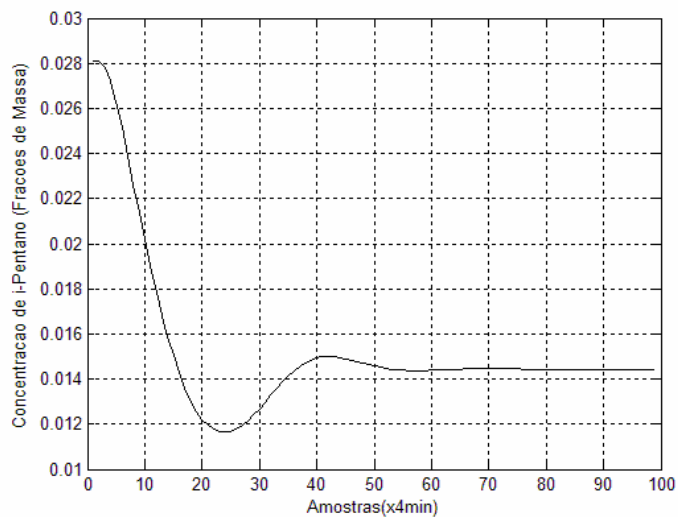


Figura 4.3 – Concentração de i-pentano – GPC Quasilinear Multivariável com Compensação Iterativa

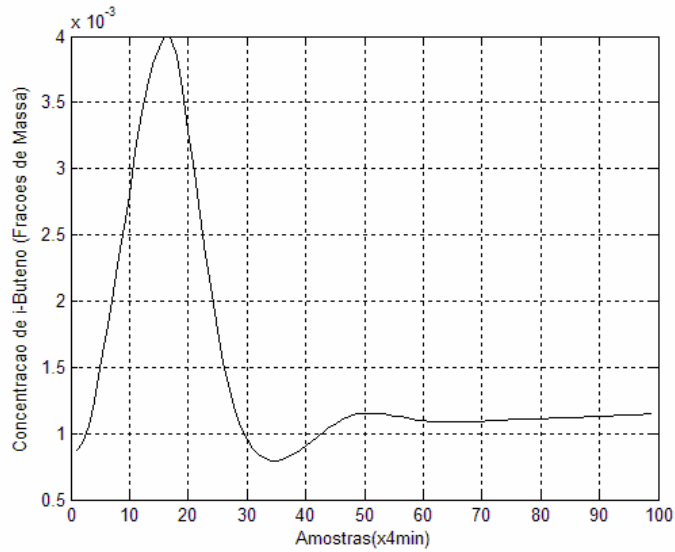


Figura 4.4 - Concentração de i-buteno – GPC Quasilinear Multivariável com Compensação Iterativa

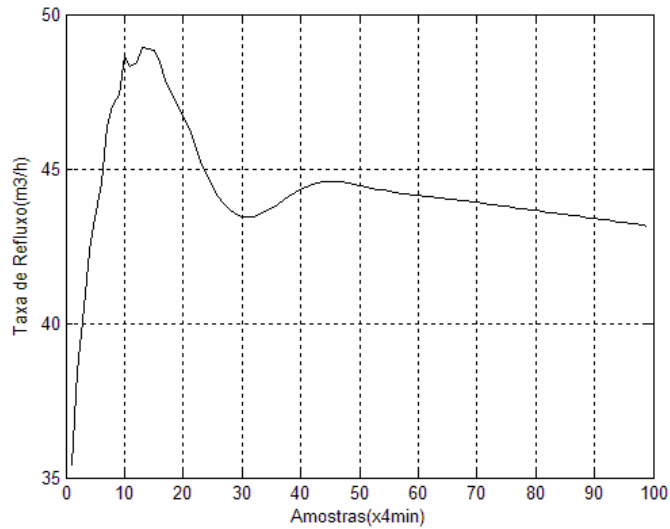


Figura 4.5 – Taxa de refluxo – GPC Quasilinear Multivariável com Compensação Iterativa

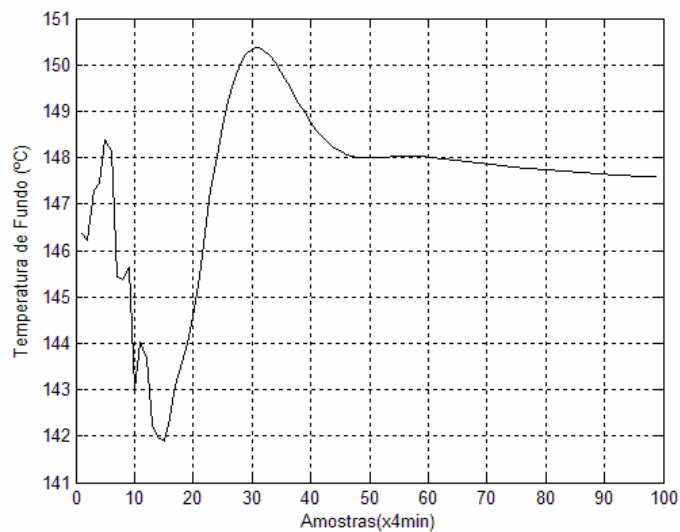


Figura 4.6 – Temperatura de Fundo – GPC Quasilinear Multivariável com Compensação Iterativa

Os resultados da aplicação do GPC Quasilinear Multivariável com Compensação Iterativa revelam um bom desempenho desse controlador, visto que, para a aplicação em questão, o mesmo conseguiu suprir uma lacuna deixada pelos controladores quasilinear e linear.

4.4. Conclusões

Este capítulo mostrou o algoritmo de compensação iterativa, tanto para o caso monovariável quanto para o caso multivariável. A técnica, como já mencionado, consiste em minimizar o erro de predição gerado pela quasilinearização do modelo bilinear. A correção é efetuada a partir da própria seqüência futura de ações de controle calculada pelo controlador quasilinear multivariável proposto por (Goodhart et al., 1994).

O algoritmo em questão se mostrou bastante eficiente quando aplicado em processos em que há uma variação significativa do sinal de controle, permitindo que, dessa forma, se tenha um maior espaço para correção do erro de predição. Vale salientar que o esforço computacional devido à compensação iterativa é algo que deve ser analisado na fase de projeto do controlador. No caso de processos petroquímicos, devido às grandes constantes de tempo, o esforço computacional não se torna um problema. Para o exemplo do caso monovariável apresentado neste capítulo, o tempo médio de convergência do algoritmo, considerando um computador com processador Intel® Core 2 Duo com 1,6GHz, memória *cache* L2 de 2MB e memória principal de 1GB, foi de 0,0125s. Para o exemplo do caso multivariável apresentado neste capítulo, com a mesma máquina citada, o tempo médio de convergência do algoritmo foi de 1,75s.

O capítulo subsequente apresentará as principais contribuições desta tese, destacando as técnicas multi-modelo, bem como as métricas propostas.

Capítulo 5

Controle Preditivo Baseado em Multi-Modelos Bilineares

5.1. Introdução

Este capítulo trata do principal tema desta Tese: os controladores baseados em multi-modelos. Conforme já mencionado, freqüentemente são encontrados, na indústria, processos que trabalham em largas faixas de operação. Nesses casos, não é possível encontrar um único modelo linear ou bilinear local que represente bem toda a dinâmica do processo. Uma alternativa seria a obtenção de um modelo não-linear mais complexo, o que requereria, no caso do emprego de controle preditivo, um processo de predição e otimização não-linear, o que não é trivial (Camacho & Bordons, 1999). Outro caso, também comumente encontrado na indústria, é a mudança, programada ou não, do ponto de operação do processo. O exemplo que podemos citar é o da Unidade de Produção de Gás Natural III (UPGN-III) da Petrobras, na cidade de Guamaré/RN. A UPGN-III recebe gás e petróleo de três fontes: das plataformas existentes nos campos de Ubarana e Agulha, das plataformas dos campos de Pescada e Arabaiana; e dos campos da região de Mossoró; chegando até a ECUB (Estação de Compressores de Ubarana). O petróleo é fornecido à TRANSPETRO, após tratamento, enquanto o gás constitui a carga nominal total de 3.500.000 m³/dia a 1,033 kgf/cm² abs e 20°C. A ECUB eleva a pressão para 70 kgf/cm² para processamento nas três UPGN's. A carga nominal da UPGN-III é de 1.500.000 m³/dia. Em certas situações, como de manutenção, por exemplo, alguma das fontes pode se tornar, por certo período, indisponível, fazendo com que a carga nominal diminua e o processo seja conduzido a outro ponto de operação. Nesse caso, havendo algum controle preditivo baseado em um modelo válido para uma região ao redor daquele ponto de operação, este não será mais válido.

Nesta Tese buscou-se, no intuito de suprir as lacunas mencionadas acima, uma solução conhecida no meio acadêmico como abordagem multi-modelos. A referida abordagem busca decompor a faixa de operação em diversos pontos de operação e identificar um modelo, neste caso bilinear, para cada um destes pontos. Conforme já mencionado, existem duas abordagens multi-modelo, as quais serão detalhadas a seguir.

A primeira abordagem emprega uma métrica que calcula um peso para cada modelo. A partir do modelo global, um único controlador é projetado para o modelo global (Foss et

al., 1995), (Azimzadeh et al., 1998), (Constantine & Dumitrache, 2000), (Pickhardt, 2000) e (Cavalcanti et al., 2007a).

A segunda abordagem projeta um controlador adequado para cada modelo de cada ponto de operação. Uma métrica é definida para calcular qual peso será atribuído a cada controlador, de forma que o sinal de controle enviado ao processo seja uma soma ponderada das contribuições de cada controlador (Cavalcanti et al., 2007b), (Cavalcanti et al., 2008a), (Arslan et al., 2004), (Wen et al., 2006) e (Raiss et al., 2001).

Este capítulo apresenta propostas para ambas as abordagens, empregando algumas métricas que serão utilizadas no cálculo dos pesos citados.

5.2. Descrição do multi-modelo multivariável bilinear: ponderação para o modelo

Considerando um modelo multivariável bilinear com p -entradas e q -saídas, em termos de equações diferenças, da seguinte forma:

$$y(k) = f_i[y(k-1), \dots, y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb), u(k-1) \otimes y(k-1), \dots, u(k-na) \otimes y(k-na), \theta_i] \quad (5.1)$$

em que $y(k) \in R^q$ é o vetor de saídas no instante k , $y(k-t) \in R^q$ é o vetor de saídas passadas no instante $k-t$, $u(k-t) \in R^p$ é o vetor de entradas passadas no instante $k-t$ e $\theta_i \in R^{q \times (q \cdot na + p \cdot nb + p \cdot q \cdot na)}$ é a matriz de parâmetros que descreve o sistema em torno de um determinado ponto de operação i . O produto de Kronecker $u(k-t) \otimes y(k-t)$ é definido como:

$$u(k-t) \otimes y(k-1) = \begin{bmatrix} u_1(k-t)y(k-1) \\ \vdots \\ u_p(k-t)y(k-1) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

O modelo bilinear multivariável local descrito em (5.1) é válido em um ponto de operação e se torna menos válido na medida em que o sistema afasta-se deste ponto. Um determinado ponto de operação é denotado por uma função ϕ e a faixa completa de operação do processo que pretende ser descrito é denotada por um conjunto de pontos de operação Φ .

Um regime de operação é definido como um subconjunto de $\Phi_i \subset \Phi$ em que o modelo descrito por (5.1) é adequado para a descrição do sistema.

A escolha de quais variáveis serão escolhidas para a descrição do problema, ϕ , depende do tipo de problema a ser abordado. Tipicamente, ϕ contém um subconjunto de saídas e entradas, ou seja, $\phi = H(y, u)$, mas podem conter outras variáveis. Nesta Tese, as perturbações mensuráveis não são modeladas.

Assume-se que existe uma métrica $\rho_i : \Phi \rightarrow [0,1]$ que é projetada de tal forma que seu valor é próximo a **um** para pontos de operação em que o modelo local i é uma boa descrição do sistema e próximo a **zero**, caso contrário. Se a faixa de operação do sistema é decomposta em NPO pontos de operação, de forma que $\Phi_1, \dots, \Phi_{NPO} \subset \Phi$, então, para cada modelo local é definida uma métrica ρ_i com $i = 1, \dots, NPO$. Dessa forma, pode-se determinar um modelo global para a faixa de operação, da seguinte forma:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{NPO} f_i[y(k-1), \dots, y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb), u(k-1) \otimes y(k-1), \dots, u(k-na) \otimes y(k-na), \theta_i] w_i(\phi) \quad (5.3)$$

em que:

$$w_i(\phi) = \frac{\rho_i(\phi)}{\sum_{j=1}^{NPO} \rho_j(\phi)} \quad (5.4)$$

Os pesos $w_i(\phi) : \Phi \rightarrow [0,1]$ são a normalização da métrica ρ_i e têm a seguinte propriedade definida:

$$\sum_{j=1}^{NPO} w_j(\phi) = 1 \quad (5.5)$$

5.3. Descrição do multi-modelo multivariável bilinear: ponderação para o controlador

Nessa abordagem considera-se que, para cada regime de operação $\Phi_1, \dots, \Phi_{NPO} \subset \Phi$ existe um controlador quasilinear u_1, \dots, u_{NPO} que o estabiliza. Nesse caso, o controlador pode ser dado por:

$$u_i(k) = h_i[y(k-1), \dots, y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb), R, \Omega_i(u)] \quad (5.6)$$

em que $y(k-t) \in R^q$ é o vetor de saídas passadas no instante $k-t$, $u(k-t) \in R^p$ é o vetor de entradas passadas no instante $k-t$, $R \in R^q$ é o vetor de referências e $\Omega_i \in R^{q \times (q.na+p.nb)}$ é a matriz de parâmetros que descreve o sistema em torno de um determinado ponto de operação i . A mesma métrica $\rho_i : \Phi \rightarrow [0,1]$ descrita na seção 5.2 pode ser utilizada para o cálculo da ponderação da ação de controle a ser efetivamente enviada ao processo.

$$u(k) = \sum_{i=1}^{NPO} h_i[y(k-1), \dots, y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb), R, \Omega_i(u)] w_i(\phi) \quad (5.7)$$

5.4. Controlador baseado no multi-modelo com ponderação para o modelo

Considerando um conjunto com NPO modelos multivariáveis bilineares como o descrito em (3.43), teria-se que:

$$A_i(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B_i(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + D_{e_i}(q^{-1})D[u(k-1)]D_{d_i}(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k-1) + C_i(q^{-1})e(k) \quad (5.8)$$

em que $i = 1, \dots, NPO$. A quasilinearização de (5.8) forneceria o seguinte modelo multivariável quasilinear por degrau de tempo:

$$A_i(q^{-1}, u)\Delta_q(q^{-1})y(k) = B_i(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + C_i(q^{-1})e(k) \quad (5.9)$$

em que:

$$A_i(q^{-1}, u) = A_i(q^{-1}) - q^{-1}D_{e_i}(q^{-1})D[u(k-1)]D_{d_i}(q^{-1}) \quad (5.10)$$

O modelo global, que cobre a faixa de operação em questão, é calculado a partir da métrica definida na seção 5.2 e é dado por:

$$A_g(q^{-1}, u)\Delta_q(q^{-1})y(k) = B_g(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + C_i(q^{-1})e(k) \quad (5.11)$$

em que:

$$A_g(q^{-1}, u) = \sum_{i=1}^{NPO} A_i(q^{-1}, u)w_i(\phi) \quad (5.12)$$

$$B_g(q^{-1}) = \sum_{i=1}^{NPO} B_i(q^{-1})w_i(\phi) \quad (5.13)$$

$$C_g(q^{-1}) = \sum_{i=1}^{NPO} C_i(q^{-1})w_i(\phi) \quad (5.14)$$

Dessa forma, todo o desenvolvimento do controlador quasilinear multivariável é feito por meio das matrizes polinômiais $A_g(q^{-1}, u)$ e $B_g(q^{-1})$.

A saída predita j -passos à frente pode ser obtida fazendo:

$$\tilde{A}_g(q^{-1}, u)y(k+j) = B_g(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + C_g(q^{-1})e(k+j) \quad (5.15)$$

em que $\tilde{A}_g(q^{-1}, u) = A_g(q^{-1}, u)\Delta_q(q^{-1})$. Neste caso, em todos os pontos de operação, a matriz $C_i(q^{-1})$ é considerada como $C_i(q^{-1}) = I_{p \times p}$, de forma que $C_g(q^{-1}) = I_{p \times p}$. Considerando a seguinte equação diofantina:

$$I_{p \times p} = E_j(q^{-1}, u)\tilde{A}_g(q^{-1}, u) + q^{-j}F_j(q^{-1}, u) \quad (5.16)$$

em que:

$$E_j(q^{-1}, u) = E_{j,0}(u) + E_{j,1}(u)q^{-1} + \dots + E_{j,j-1}(u)q^{-(j-1)} \quad (5.17)$$

$$F_j(q^{-1}, u) = F_{j,0}(u) + F_{j,1}(u)q^{-1} + \dots + F_{j,na}(u)q^{-na} \quad (5.18)$$

Pré-multiplicando (5.15) por $E_j(q^{-1}, u)$, considerando $C_g(q^{-1}) = I_{p \times p}$, se obtém:

$$E_j(q^{-1}, u)\tilde{A}_g(q^{-1}, u)y(k+j) = E_j(q^{-1}, u)B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + E_i(q^{-1}, u)e(k+j) \quad (5.19)$$

Substituindo (5.16) em (5.19) obtemos:

$$y(k+j) = F_j(q^{-1}, u)y(k) + E_j(q^{-1}, u)B_g(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+i-1) + E_j(q^{-1}, u)e(k+i) \quad (5.20)$$

Como o grau de $E_j(q^{-1}, u)$ é $j-1$, então a predição sub-ótima de $y(k+j)$ é:

$$\hat{y}(k+j) = F_j(q^{-1}, u)y(k) + E_j(q^{-1}, u)B_g(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+i-1) \quad (5.21)$$

Fazendo $E_j(q^{-1}, u)B'_g(q^{-1}) = H_{f_j}(q^{-1}, u) + q^{-i}H_{pa_j}(q^{-1}, u)$ tem-se que:

$$\hat{y}(k+j) = F_j(q^{-1})y(k) + H_{pa_j}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + H_{f_j}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) \quad (5.22)$$

Conforme já mencionado, o algoritmo GPC consiste em calcular uma seqüência de ações de controle de forma a minimizar uma função objetivo multi-passo definida sobre um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle e do erro de predição. A função objetivo para o caso MIMO é dada por:

$$J = \sum_{j=N_1}^{NY} \|r(k+j) - \hat{y}(k+j)\|_{P_g}^2 + \sum_{j=1}^{NU} \|\Delta u(k+j-1)\|_{Q_g}^2 \quad (5.23)$$

em que:

- N_1 é o horizonte mínimo de predição;
- NY é o horizonte de predição;
- NU é o horizonte de controle;
- Q_g e P_g são matrizes globais positivas definidas de ponderações sobre os vetores sinal de erro e o de controle, respectivamente;
- $r(k+i) \in R^q$ é o vetor de trajetória de referência futura.

Considerando uma seqüência ótima de N predições, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+N_1) \\ \hat{y}(k+N_2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+NY) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{N_1-1}(u) & H_{N_1-2}(u) & \cdots & H_{N_1-NU}(u) \\ H_{N_1}(u) & H_{N_1-1}(u) & \cdots & H_{N_1+1-NU}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{NY-1}(u) & H_{NY-2}(u) & \cdots & H_{NY-NU}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+NU-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{IN_1} \\ Y_{IN_1+1} \\ \vdots \\ Y_{IN_Y} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

em que o vetor de resposta livre é dado por:

$$Y_{ij} = F_j(q^{-1}, u)y(k) + H_{p_{aj}}(q^{-1}, u)\Delta_p(q^{-1})u(k-1) \quad (5.29)$$

ou ainda:

$$Y_{N_1y} = H_{N_1yu}(u)\Delta_p U_{NU} + Y_{IN_1y} \quad (5.30)$$

em que:

$$Y_{N_1y} = [\hat{y}(k+N_1) \quad \hat{y}(k+N_1+1) \quad \cdots \quad \hat{y}(k+NY)]^T \quad (5.31)$$

$$H_{N_1yu} = \begin{bmatrix} H_{N_1-1}(u) & H_{N_1-2}(u) & \cdots & H_{N_1-NU}(u) \\ H_{N_1}(u) & H_{N_1-1}(u) & \cdots & H_{N_1+1-NU}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{NY-1}(u) & H_{NY-2}(u) & \cdots & H_{NY-NU}(u) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$\Delta_p U_{NU} = \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+NU-1) \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$Y_{IN_1y} = \begin{bmatrix} Y_{IN_1} \\ Y_{IN_1+1} \\ \vdots \\ Y_{IN_Y} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Reescrevendo a função objetivo (5.23) de forma matricial, tem-se que:

$$J = (R - H_{N_1yu}(u)\Delta_p U_{NU} - Y_{IN_1y})^T \bar{P}_g (R - H_{N_1yu}(u)\Delta_p U_{NU} - Y_{IN_1y}) + \Delta_p U_{NU}^T \bar{Q}_g \Delta_p U_{NU} \quad (5.35)$$

em que:

$$\bar{P}_g = \text{diag}[P_{1,g}, \dots, P_{q \times NY,g}] \text{ e } \bar{Q}_g = \text{diag}[Q_{1,g}, \dots, Q_{p \times NU,g}] \quad (5.36)$$

$$R = [r(k + N_1) \quad \dots \quad r(k + NY)]^T \quad (5.37)$$

É importante observar que, nessa proposta, para cada ponto de operação, uma matriz de ponderações sobre a ação de controle e sobre o erro de referência é definida. Dessa forma, a métrica definida na seção 5.2 também é utilizada para calcular as matrizes \bar{Q}_g e \bar{P}_g globais de ponderação. O cálculo das matrizes ponderadas é dado por:

$$P_g(q^{-1}) = \sum_{i=1}^{NPO} P_i w_i(\phi) \quad (5.38)$$

$$Q_g(q^{-1}) = \sum_{i=1}^{NPO} Q_i w_i(\phi) \quad (5.39)$$

A minimização de (5.35), na ausência de restrições, é dada por:

$$\Delta_p U_{NU} = (H_{N_{1yu}}^T(u) H_{N_{1yu}}(u) + \bar{Q}_g)^{-1} H_{N_{1yu}}^T(u) \bar{P}_g (R - Y_{IN_{1y}}) \quad (5.40)$$

Conforme já mencionado, de acordo com o princípio do horizonte móvel, o vetor sinal de controle efetivamente enviado ao processo corresponde aos p primeiros elementos de $\Delta_p U_{NU}$. Dessa forma, tem-se que:

$$\Delta_p(q^{-1})u(k) = K(u)(R - Y_{IN_{1y}}) \quad (5.41)$$

em que $K(u)$ corresponde aos p primeiras linhas da matriz $(H_{N_{1yu}}^T(u) H_{N_{1yu}}(u) + \bar{Q}_g)^{-1} H_{N_{1yu}}^T(u) \bar{P}_g$.

5.5. Controlador baseado no multi-modelo com ponderação para o controlador

Conforme já mencionado, a métrica proposta na seção 5.3 é utilizada para ponderar as ações de controle dos NPO controladores projetados. É válido lembrar que o vetor de ações de controle, para um controlador projetado em um ponto de operação, é dado por:

$$u_i(z^{-1}) = T_i(z^{-1}, u)R - S_i(z^{-1}, u)y(z^{-1}) \quad (5.42)$$

em que:

$$T_i(z^{-1}, u) = \left\{ \left[I + H_{T_i}(z^{-1}, u)z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1} \bar{K}_{T_i}(u) \quad (5.43)$$

$$S_i(z^{-1}, u) = \left\{ \left[I + H_{T_i}(z^{-1}, u)z^{-1} \right] \Delta_p(z^{-1}) \right\}^{-1} F_{T_i}(z^{-1}, u) \quad (5.44)$$

Assim, o controlador global pode ser dado por:

$$u_g(z^{-1}) = T_g(z^{-1}, u)R - S_g(z^{-1}, u)y(z^{-1}) \quad (5.45)$$

em que:

$$T_g(q^{-1}, u) = \sum_{i=1}^{NPO} T_i(q^{-1}, u)w_i(\phi) \quad (5.46)$$

$$S_g(q^{-1}, u) = \sum_{i=1}^{NPO} S_i(q^{-1}, u)w_i(\phi) \quad (5.47)$$

Dessa forma, a análise de malha fechada para esta abordagem multi-modelo pode ser realizada por meio das matrizes polinomiais mostradas (5.46) e (5.47).

5.6. Métricas propostas

As seções anteriores mostraram a formulação matemática das duas abordagens multi-modelo tratadas nesta Tese. Conforme mencionado, assume-se que existe uma métrica $\rho_i : \Phi \rightarrow [0,1]$ que é projetada de tal forma que seu valor é próximo a **um** para pontos de operação em que o modelo local i é uma boa descrição do sistema e próximo a **zero** caso contrário. Dessa forma, esta seção apresentará métricas baseadas em normas vetoriais e margem de fase.

5.6.1. Métrica baseada em norma vetorial

Esta métrica considera a saída do sistema multivariável com p -entradas e q -saídas como um vetor no espaço R^q . O conceito de norma é oriundo da álgebra linear e tem como objetivo expressar diferentes formas de se medir distâncias entre pontos em um espaço vetorial. A norma $\|\cdot\|_2$, também conhecida como norma euclidiana ou distância euclidiana, é uma das mais intuitivas normas da álgebra linear e, em muitos casos, é empregada em sistemas de controle com o objetivo de expressar distância entre pontos (principalmente em abordagens em espaço de estados). Uma norma q de um vetor x pode ser entendida, de forma geral, como:

$$\|x\|_q = \left(\sum |x_i|^q \right)^{1/q} \quad (5.48)$$

sendo $q > 1$. A cada instante de amostragem, são calculadas as distâncias do ponto em que o processo está até cada um dos pontos de operação escolhidos $\Phi_1, \dots, \Phi_{NPO} \in \Phi$. Em uma trajetória escolhida, a distância do primeiro ao último ponto de operação, pode ser expressa por:

$$d_{1,NPO} = \|\bar{y}_{NPO} - \bar{y}_1\|_2 \quad (5.49)$$

em que $\bar{y}_i \in R^q$, $i = 1, \dots, NPO$ é o vetor de saída no regime de operação $\Phi_i \subset \Phi$, $i = 1, \dots, NPO$ e $d_{1,NPO}$ é a distância entre os pontos correspondentes aos vetores $\bar{y}_1 \in R^q$ e $\bar{y}_{NPO} \in R^q$.

A distância expressa em (5.49) servirá de base para o cálculo da distância do ponto em que o processo está até o ponto de operação tabelado:

$$\rho_i = \frac{d_{1,NPO}}{\|y(k) - \bar{y}_i\|_2}; \quad i = 1, \dots, NPO \quad (5.50)$$

em que $y(k) \neq \bar{y}_i$. No caso de $y(k) = \bar{y}_i$, considera-se $w_i(\phi) = 1$.

Vale ressaltar que esta métrica só é bem aplicada quando se tem pontos de operação que obedecem a trajetórias com comportamento monotônico.

5.6.2. Métrica baseada em margem de fase

A margem de fase é um indicador baseado na resposta em frequência do sistema. Este indicador é formulado, em princípio, para sistemas contínuos e reflete a configuração de pólos e zeros do sistema em malha fechada considerado. Para o caso discreto, no mapeamento entre os planos s e z , o período de amostragem é levado em conta. Será considerado, inicialmente, o caso da margem de fase definida para um sistema SISO. Considerando o diagrama do GPC quasilinear mostrado na Figura 5.1, supondo que o modelo bilinear pode ser tratado como linear variante no tempo, com parâmetros variando em função da entrada, teríamos, a cada instante de amostragem, o seguinte diagrama de blocos:

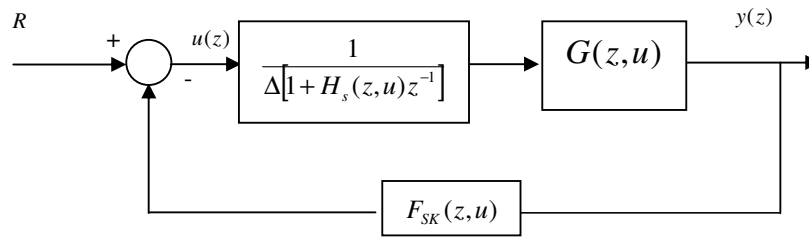


Figura 5.1 – Diagrama de blocos do GPC quasilinear SISO

em que $F_{SK}(z, u) = \frac{F_s(z, u)}{\bar{K}}$

Fazendo:

$$C(z, u) = \frac{1}{\Delta[1 + H_s(z, u)z^{-1}]} \quad (5.51)$$

A função de transferência de malha fechada o sistema mostrado na Figura 5.1 é dada por:

$$G_{MF}(z, u) = \frac{C(z, u)G(z, u)}{1 + C(z, u)G(z, u)F_{SK}(z, u)} \quad (5.52)$$

A estabilidade nominal do sistema (5.52) é avaliada por meio das raízes de $1 + C(z, u)G(z, u)F_s(z, u)$ que é a equação característica do sistema realimentado. As raízes da referida equação característica devem estar no interior do círculo unitário para que o sistema seja estável. O cálculo das raízes da equação característica é dado por:

$$C(z,u)G(z,u)F_{SK}(z,u) = -1 \quad (5.53)$$

Considera-se que o sistema de controle da Figura 5.1 não tem funções de transferência com pólos fora do círculo unitário. Sendo h o período e amostragem escolhido e sejam as frequências ω_0 e ω_π definidas como aquelas que satisfazem cada uma das equações a seguir:

$$\left| C(e^{j\omega_0 h}, u)G(e^{j\omega_0 h}, u)F_{SK}(e^{j\omega_0 h}, u) \right| = 1 \quad (5.54)$$

$$\angle C(e^{j\omega_\pi h}, u)G(e^{j\omega_\pi h}, u)F_{SK}(e^{j\omega_\pi h}, u) = -\pi \quad (5.55)$$

Se

$$-\pi < C(e^{j\omega_0 h}, u)G(e^{j\omega_0 h}, u)F_{SK}(e^{j\omega_0 h}, u) < \pi \quad (5.56)$$

e

$$\left| C(e^{j\omega_\pi h}, u)G(e^{j\omega_\pi h}, u)F_{SK}(e^{j\omega_\pi h}, u) \right| < 1 \quad (5.57)$$

então o sistema é estável. Como é sabido, as funções de transferência citadas são modelos linearizados para o sistema real e constituem aproximações para seu comportamento. Dessa forma, pode-se afirmar que trabalhar nos limites de estabilidade é algo não desejável para um sistema de controle. Dessa forma, podem-se estabelecer margens de segurança de forma que o sistema opere suficientemente longe da condição de instabilidade. A distância da condição limite de estabilidade pode ser quantificada na resposta em frequência de duas formas: Margem de Fase e Margem de Ganho.

Se o valor do módulo em resposta em frequência, na frequência ω_π , for inferior a 1, então o sistema é estável. Se o valor for próximo a 1, o sistema está próximo do limite de estabilidade. Por outro lado, se esse valor for muito menor que 1, o sistema está longe deste limite, e pode-se ter mais confiança de que o sistema real efetivamente terá comportamento estável. Assim, a relação entre o valor limite $\left| C(e^{j\omega_\pi h}, u)G(e^{j\omega_\pi h}, u)F_{SK}(e^{j\omega_\pi h}, u) \right| = 1$ e o valor do módulo na frequência ω_π é uma medida de distância à instabilidade e, portanto, da robustez do sistema. Essa medida é conhecida na teoria de sistemas de controle como Margem de Ganho. Podemos então afirmar que a margem de ganho pode ser calculada pela expressão:

$$MG = \frac{1}{|C(e^{j\omega_n h}, u)G(e^{j\omega_n h}, u)F_{SK}(e^{j\omega_n h}, u)|} \quad (5.58)$$

Outra medida de robustez pode ser obtida em função da fase da resposta em frequência. Levando em conta a frequência em que o módulo da resposta em frequência é igual a ω_0 , o sistema estará no limite da estabilidade se a fase for igual -180° nesta mesma frequência. Se, nessa frequência, a fase for menos negativa do que -180° , então o sistema será estável. Esta diferença entre o valor da fase e seu valor limite para instabilidade é chamada Margem de Fase. O cálculo da margem de fase pode ser obtido da seguinte expressão:

$$MF = \angle C(e^{j\omega_0 h}, u)G(e^{j\omega_0 h}, u)F_{SK}(e^{j\omega_0 h}, u) - 180^\circ \quad (5.59)$$

A métrica proposta nesta seção tem por objetivo verificar, quantitativamente, a distância entre modelos. Assim sendo, para efeitos de medição de distância entre modelos, será considerado que o sistema em malha fechada terá $C(z, u) = 1$ e $F_{SK}(z, u) = 1$ em todos os pontos de operação.

Como o escopo desta Tese reside em sistemas multivariáveis, é necessário buscar uma forma de calcular a Margem de Fase para um sistema multivariável. Considerando o modelo bilinear quasilinearizado em um ponto de operação i :

$$A_i(q^{-1}, u)y(k) = B_i(q^{-1})u(k-1) \quad (5.60)$$

em que:

$$A_i(q^{-1}, u) = A_i(q^{-1}) - q^{-1}D_{e_i}(q^{-1})D[u(k-1)]D_{d_i}(q^{-1}) \quad (5.61)$$

Pré-multiplicando (5.60) por $A_i(q^{-1}, u)^{-1}$, tem-se que:

$$y(k) = A_i(q^{-1}, u)^{-1}B_i(q^{-1})q^{-1}u(k) \quad (5.62)$$

Dessa forma, a matriz função de transferência pode ser obtida a partir de (5.62) como sendo:

$$G_i(z, u) = A_i(z, u)^{-1} B_i(z) z^{-1} \quad (5.63)$$

Com a matriz função de transferência é possível calcular $p \times q$ margens de fase e, por conseguinte, se obter $p \times q$ trajetórias. Uma abordagem consiste em utilizar as $p \times q$ trajetórias e calcular uma métrica da forma $\rho_{i,jt} : \Phi \rightarrow [0,1]$ em que $i = 1, \dots, NPO$, $j = 1, \dots, p$ e $t = 1, \dots, p$. Sendo a matriz função de transferência representada da seguinte forma:

$$G_i(z, u) = \begin{bmatrix} g_{i,11}(z, u) & \cdots & g_{i,1q}(z, u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i,p1}(z, u) & \cdots & g_{i,pq}(z, u) \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (5.64)$$

consideraremos $MF_{jt}^{(i)} = \angle g_{jt}^{(i)}(e^{j\omega h}, u) - 180^\circ$ como sendo a Margem de Fase, em Φ_i , da função de transferência da j -ésima linha e t -ésima coluna. Como no caso multivariável há acoplamento, a distância entre os modelos de um ponto de operação i para um ponto $i+1$ deve ser relacionada com a menor Margem de Fase do ponto i e a menor Margem de Fase do ponto $i+1$. Esta relação indicará a dificuldade do controlador em relação aos pontos em questão. Dessa forma, $MMF^{(i)} = \min(MF_{jt}^{(i)})$ com $i = 1, \dots, NPO$, $j = 1, \dots, p$ e $t = 1, \dots, p$ é a menor Margem de Fase do ponto i .

Assim sendo, é definida a seguinte métrica:

$$\rho_i = 1 - \frac{|MMF^{(k)} - MMF^{(i)}|}{\max(MMF^{(i)}) - \min(MMF^{(i)})} \quad (5.65)$$

em que $MMF^{(k)}$ é a menor Margem de Fase de uma matriz de funções de transferência interpolada. A interpolação é efetuada considerando os parâmetros dos polinômios das matrizes polinomiais discretas do modelo bilinear multivariável (3.43) como uma função de vetores saída nos pontos de operação. Um detalhe a ser ressaltado consiste no caso de haver extrapolação, ou seja, se calcule parâmetros para o modelo quando a saída do sistema estiver fora dos limites de operação estabelecidos. Neste caso, o algoritmo proposto assumirá a margem de fase limite.

5.7. Resultados de Aplicação

Foram apresentados os controladores preditivos multivariáveis GPC Linear, GPC Quasilinear e GPC Quasilinear com Compensação Iterativa. Juntamente com os referidos controladores, foram apresentadas as abordagens multi-modelo baseadas na ponderação do modelo e na ponderação do controlador. Da mesma forma, foram apresentadas métricas baseadas em norma e em Margem de Fase. Com o universo de técnicas apresentadas, pode-se combinar os controladores com as abordagens e as métricas, produzindo uma gama bastante ampla de algoritmos possíveis. Esta Tese não apresenta todas as combinações possíveis, mas apenas algumas escolhidas de forma a demonstrar o desempenho destas abordagens quando comparadas entre si e quando comparadas ao caso mono-modelo tradicional.

Todos os resultados são baseados na coluna de destilação apresentada na seção 3.2.3. A coluna é dividida em três pontos de operação, conforme mostrado na Tabela 5.1.

Ponto de Operação	Entrada	Saída (Frações de Massa)
1	$u_1 = 40 \text{ m}^3/\text{h}$	$y_1 = 0,014413$
	$u_2 = 147 \text{ }^\circ\text{C}$	$y_2 = 0,001339$
2	$u_1 = 37 \text{ m}^3/\text{h}$	$y_1 = 0,017581$
	$u_2 = 147,5 \text{ }^\circ\text{C}$	$y_2 = 0,001161$
3	$u_1 = 34 \text{ m}^3/\text{h}$	$y_1 = 0,021994$
	$u_2 = 148 \text{ }^\circ\text{C}$	$y_2 = 0,001004$

Tabela 5.1 – Pontos de operação escolhidos

Os modelos bilineares identificados nos pontos de operação tiveram seus parâmetros estimados por meio do algoritmo de mínimos quadrados recursivo multivariável. Esta estimação foi possível visto que, conforme já mencionado, os modelos bilineares são lineares nos parâmetros. Para cada um dos pontos de operação foram aplicados degraus em cada par, isoladamente, para a análise da resposta. A partir da resposta ao degrau, que foi em média de 120 minutos para cada par em todos os pontos de operação, foi estabelecido o período de amostragem de 4 minutos, ou seja, 1/30 do tempo de resposta. Os modelos são dados por:

- **Modelo no ponto de operação 1**

$$\begin{aligned}
y_1(k) = & 1.7230y_1(k-1) - 0.3983y_1(k-2) - 0.7234y_1(k-3) + 0.3844y_1(k-4) \\
& - 0.000006758u_1(k-1) - 0.00001999u_1(k-2) - 0.000003850u_1(k-3) + 0.00001591u_1(k-4) \\
& + 0.000005856u_2(k-1) + 0.00002120u_2(k-2) + 0.00001250u_2(k-3) - 0.000007897u_2(k-4) \\
& - 0.00092470y_1(k-1)u_1(k-1) - 0.0008130y_1(k-2)u_1(k-2) \\
& + 0.00005739y_1(k-3)u_1(k-3) - 0.0006597y_1(k-4)u_1(k-4) \\
& + 0.00126900y_1(k-1)u_2(k-1) + 0.0002971y_1(k-2)u_2(k-2) \\
& + 0.00018083y_1(k-3)u_2(k-3) + 0.0016506y_1(k-4)u_2(k-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(k) = & 1.3941y_2(k-1) - 0.1432y_2(k-2) - 0.4484y_2(k-3) - 0.1237y_2(k-4) \\
& + 0.000008404u_1(k-1) + 0.000008687u_1(k-2) - 0.000002434u_1(k-3) - 0.000008945u_1(k-4) \\
& - 0.000029980u_2(k-1) + 0.000006996u_2(k-2) - 0.000007718u_2(k-3) + 0.00001015u_2(k-4) \\
& + 0.006967y_2(k-1)u_1(k-1) - 0.000008457y_2(k-2)u_1(k-2) \\
& - 0.010850y_2(k-3)u_1(k-3) - 0.00670500y_2(k-4)u_1(k-4) \\
& - 0.011950y_2(k-1)u_2(k-1) + 0.00041450y_2(k-2)u_2(k-2) \\
& + 0.014940y_2(k-3)u_2(k-3) - 0.0057750y_2(k-4)u_2(k-4)
\end{aligned}$$

○ **Modelo no ponto de operação 2**

$$\begin{aligned}
y_1(k) = & 1.8325y_1(k-1) - 0.5365y_1(k-2) - 0.7133y_1(k-3) + 0.4083y_1(k-4) \\
& - 0.000008620u_1(k-1) - 0.00002249u_1(k-2) - 0.000002766u_1(k-3) + 0.00001847u_1(k-4) \\
& + 0.000006050u_2(k-1) + 0.00002328u_2(k-2) + 0.00001383u_2(k-3) - 0.00001061u_2(k-4) \\
& - 0.0006632y_1(k-1)u_1(k-1) - 0.0004891y_1(k-2)u_1(k-2) \\
& + 0.0002701y_1(k-3)u_1(k-3) - 0.0005625y_1(k-4)u_1(k-4) \\
& + 0.0008329y_1(k-1)u_2(k-1) - 0.000002468y_1(k-2)u_2(k-2) \\
& + 0.00005463y_1(k-3)u_2(k-3) + 0.0014000y_1(k-4)u_2(k-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(k) = & 1.1313y_2(k-1) - 0.006979y_2(k-2) - 0.2089y_2(k-3) - 0.04242y_2(k-4) \\
& + 0.000005220u_1(k-1) + 0.00001041u_1(k-2) + 0.000001734u_1(k-3) - 0.0000088460u_1(k-4) \\
& - 0.000028330u_2(k-1) + 0.000002226u_2(k-2) - 0.000003377u_2(k-3) - 0.000002755u_2(k-4) \\
& + 0.008887y_2(k-1)u_1(k-1) + 0.003230y_2(k-2)u_1(k-2) \\
& - 0.007570y_2(k-3)u_1(k-3) - 0.013810y_2(k-4)u_1(k-4) \\
& - 0.01351y_2(k-1)u_2(k-1) - 0.004174y_2(k-2)u_2(k-2) \\
& + 0.004506y_2(k-3)u_2(k-3) + 0.006100y_2(k-4)u_2(k-4)
\end{aligned}$$

○ **Modelo no ponto de operação 3**

$$\begin{aligned}
y_1(k) = & 1.9174y_1(k-1) - 0.6789y_1(k-2) - 0.6474y_1(k-3) + 0.4024y_1(k-4) \\
& - 0.00001041u_1(k-1) - 0.00002612u_1(k-2) - 0.000002315u_1(k-3) + 0.00002145u_1(k-4) \\
& + 0.000006432u_2(k-1) + 0.00002535u_2(k-2) + 0.00001553u_2(k-3) - 0.00001138u_2(k-4) \\
& - 0.0004911y_1(k-1)u_1(k-1) - 0.0001234y_1(k-2)u_1(k-2) \\
& + 0.0003817y_1(k-3)u_1(k-3) - 0.0005225y_1(k-4)u_1(k-4) \\
& + 0.0005392y_1(k-1)u_2(k-1) - 0.0001294y_1(k-2)u_2(k-2) \\
& + 0.00001743y_1(k-3)u_2(k-3) + 0.001222y_1(k-4)u_2(k-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(k) = & 0.9538y_2(k-1) + 0.08909y_2(k-2) - 0.1031y_2(k-3) - 0.0992y_2(k-4) \\
& + 0.000003564u_1(k-1) + 0.00001441u_1(k-2) - 0.000007129u_1(k-3) - 0.000001030u_1(k-4) \\
& - 0.000028001u_2(k-1) - 0.00000001530u_2(k-2) + 0.000003567u_2(k-3) - 0.00001262u_2(k-4) \\
& + 0.007057y_2(k-1)u_1(k-1) + 0.0008421y_2(k-2)u_1(k-2) \\
& + 0.01265y_2(k-3)u_1(k-3) - 0.02345y_2(k-4)u_1(k-4) \\
& - 0.01046y_2(k-1)u_2(k-1) - 0.008279y_2(k-2)u_2(k-2) \\
& - 0.008300y_2(k-3)u_2(k-3) + 0.01430y_2(k-4)u_2(k-4)
\end{aligned}$$

5.7.1. Aplicação empregando GPC Quasilinear, abordagem baseada na ponderação no controlador e métrica baseada em norma

Nesta simulação o processo se encontra no terceiro ponto de operação e um desvio de referência é aplicado ao controlador, de forma que o mesmo conduza o processo para próximo ao primeiro ponto de operação. O controlador proposto é comparado com GPC quasilinear com modelo único. Os resultados são mostrados na Figura 5.2, Figura 5.3, Figura 5.4 e Figura 5.5. Os resultados desta seção foram publicados em (Cavalcanti et al., 2007b).

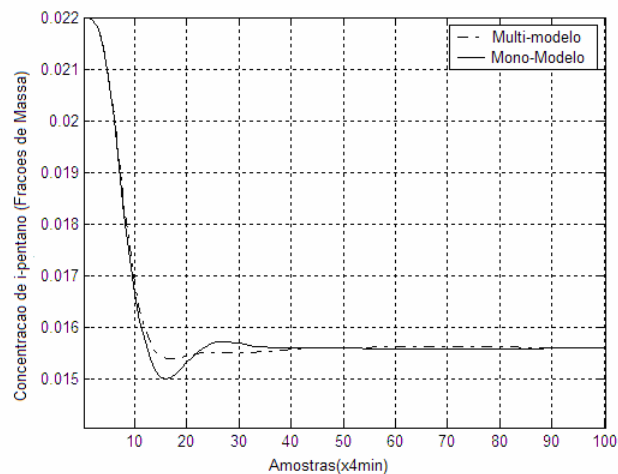


Figura 5.2 – Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas) e mono-modelo - Concentração de i-pentano

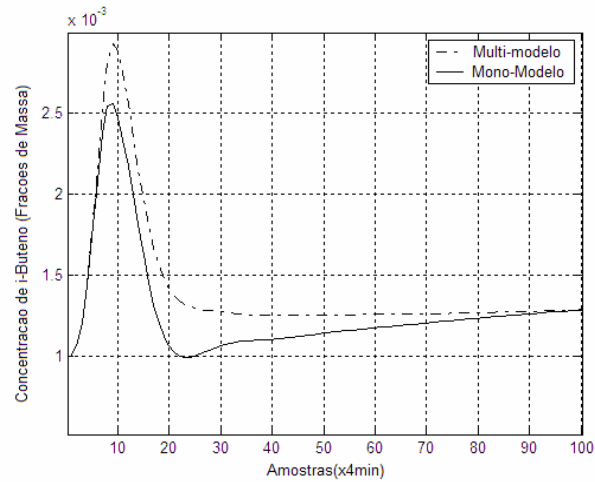


Figura 5.3 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas) e mono-modelo - Concentração de i-buteno

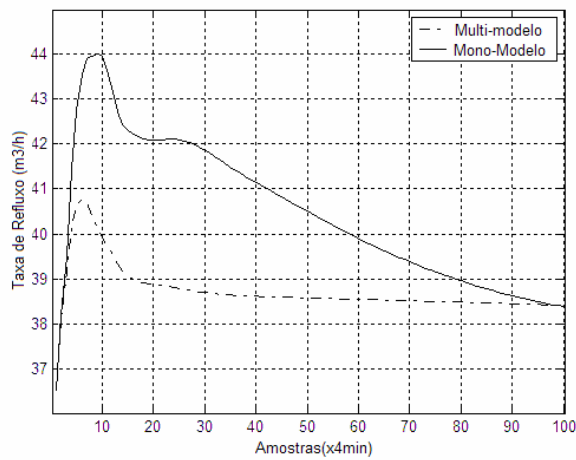


Figura 5.4 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas) e mono-modelo – Taxa de Refluxo

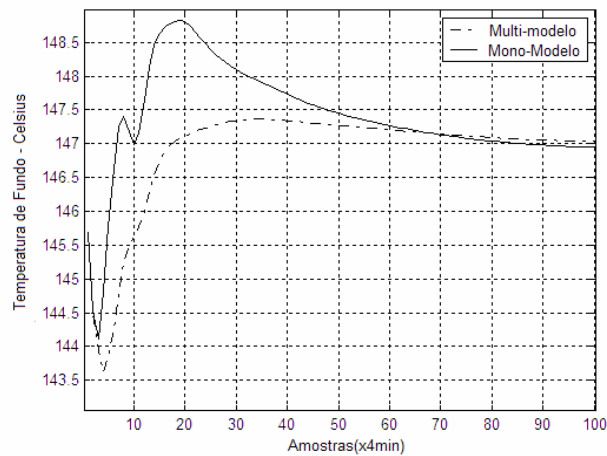


Figura 5.5 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas) e mono-modelo – Temperatura no fundo da coluna

Os gráficos apresentados evidenciam um melhor resultado da abordagem multi-modelo quando comparada com a abordagem clássica de modelo único. A referida melhoria será mostrada de forma quantitativa nas seções subsequentes. A Figura 5.6 mostra a variação dos pesos no decorrer da simulação.

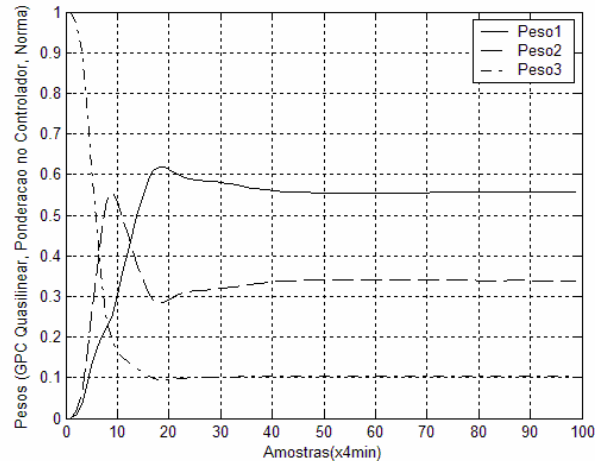


Figura 5.6 – Pesos dos controlador multi-modelo modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de normas)

5.7.2. Aplicação empregando GPC Quasilinear, abordagem baseada na ponderação no modelo e métrica baseada em norma

Nesta simulação as mesmas condições da seção 5.7.1 são utilizadas. O controlador proposto é comparado com GPC quasilinear com modelo único. Os resultados são mostrados na Figura 5.7, Figura 5.8, Figura 5.9 e Figura 5.10.

Os resultados desta seção foram publicados em (Cavalcanti et al., 2007a).

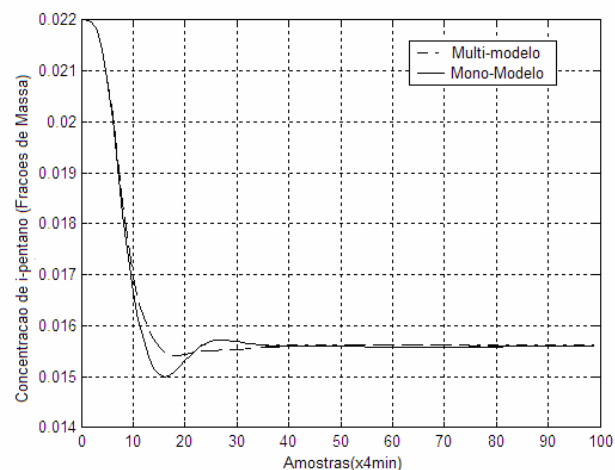


Figura 5.7 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas) e mono-modelo - Concentração de i-pentano

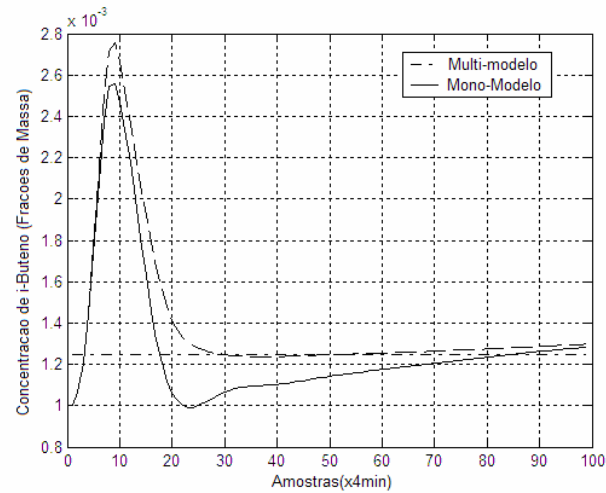


Figura 5.8 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas) e mono-modelo - Concentração de i-buteno

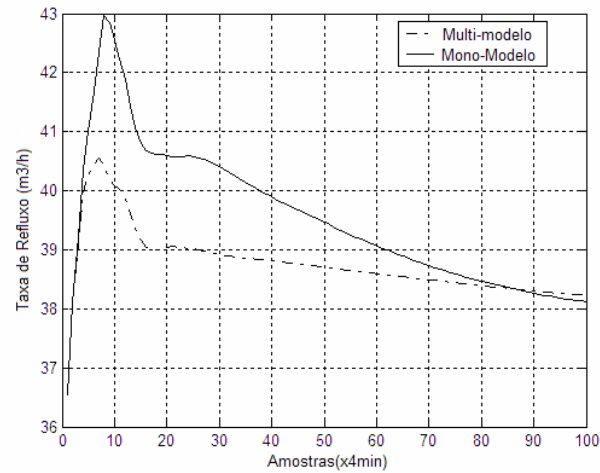


Figura 5.9 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas) e mono-modelo – Taxa de Refluxo

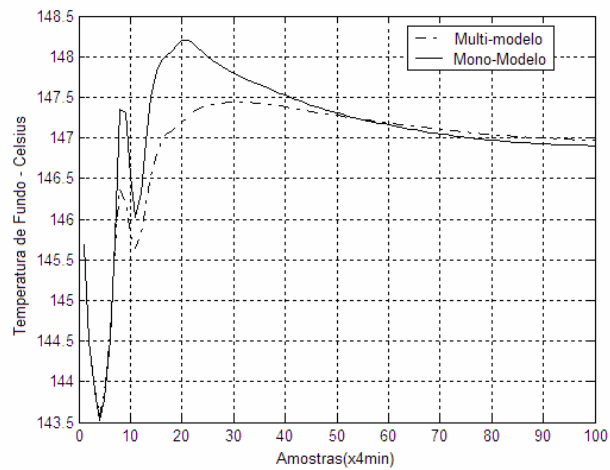


Figura 5.10 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas) e mono-modelo – Temperatura no fundo da coluna

A Figura 5.11 mostra a variação dos pesos no decorrer da simulação.

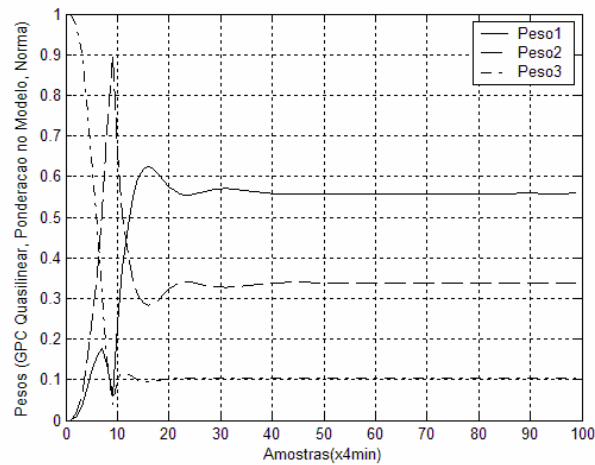


Figura 5.11 – Pesos dos controlador multi-modelo modelo (GPC Quasilinear, ponderação no modelo e métrica de normas)

Os gráficos apresentados, também para esta simulação, evidenciam um melhor resultado da abordagem multi-modelo quando comparada com a abordagem clássica de modelo único. A referida melhoria será mostrada de forma quantitativa nas seções subseqüentes.

5.7.3. Aplicação empregando GPC Quasilinear, abordagem baseada na ponderação no controlador e métrica baseada em Margem de Fase

Nesta simulação as mesmas condições da seção 5.7.1 são utilizadas. O controlador proposto é comparado com GPC quasilinear com modelo único. Os resultados são mostrados na Figura 5.12, Figura 5. 13, Figura 5.14 e Figura 5.15.

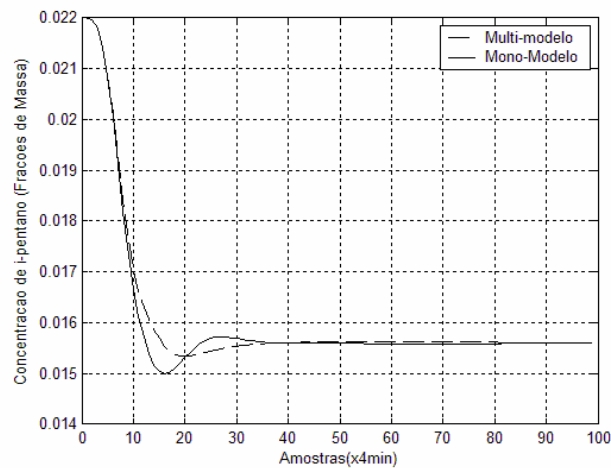


Figura 5.12 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase) e mono-modelo - Concentração de i-pentano

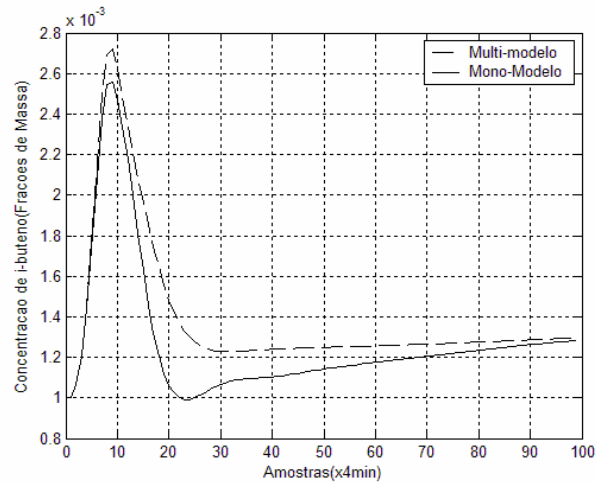


Figura 5.13 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase) e mono-modelo - Concentração de i-buteno

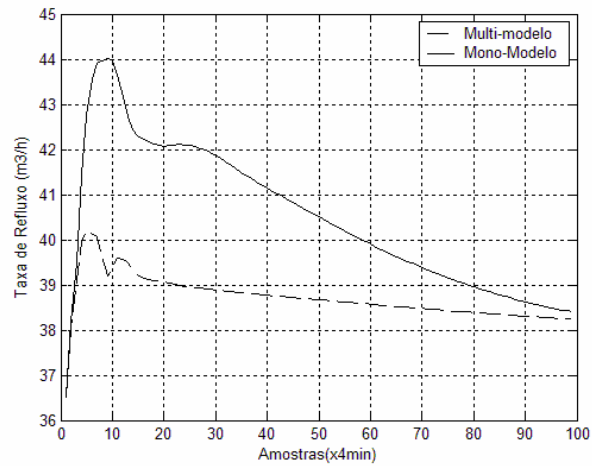


Figura 5.14 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase) e mono-modelo – Taxa de Refluxo

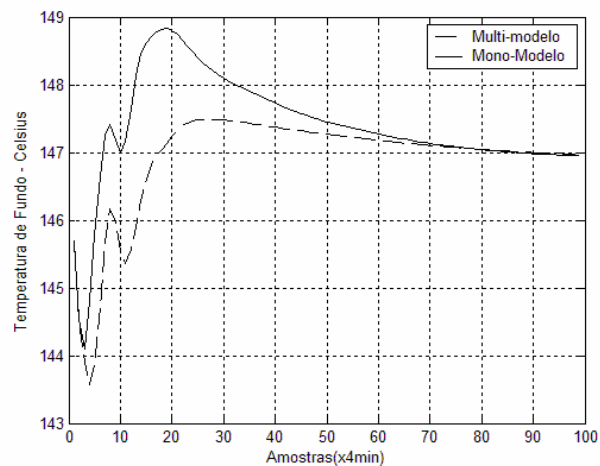


Figura 5.15 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase) e mono-modelo – Temperatura no fundo da coluna

A Figura 5.16 mostra a variação dos pesos no decorrer da simulação.

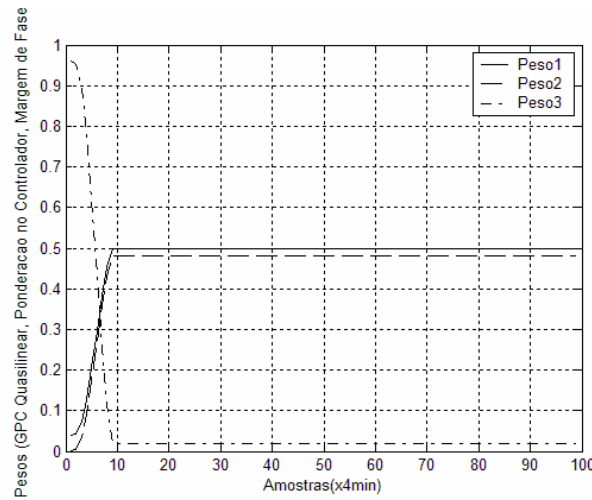


Figura 5.16 - Pesos dos controlador multi-modelo modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de margem de fase)

Os gráficos apresentados, também para esta simulação, evidenciam um melhor resultado da abordagem multi-modelo quando comparada com a abordagem clássica de modelo único. A referida melhoria será mostrada de forma quantitativa nas seções subsequentes. Os resultados desta seção foram publicados em (Cavalcanti et al., 2008a).

5.7.4. Aplicação empregando GPC Quasilinear com compensação iterativa, abordagem baseada na ponderação no controlador e métrica baseada em norma

Nesta simulação, para que o empregado do controlador com compensação iterativa fosse justificado, o processo partiu do ponto de operação $u_1 = 31 \text{ m}^3/\text{h}$, $u_2 = 148,5 \text{ }^\circ\text{C}$, $y_1=0,028125$ e $y_2=0,000874$ e foi aplicado os desvios $-0,01371$ e $0,000465$ no controlador. Dessa forma, houve uma variação significativa no esforço de controle, o que proporcionou um maior espaço de correção ao algoritmo. Este controlador foi comparado, por meio dos gráficos, com o controlador GPC Quasilinear com abordagem baseada na ponderação no controlador e métrica baseada em norma.

Os resultados desta simulação são mostrados na Figura 5.17, Figura 5.18, Figura 5.19 e Figura 5.20. Os referidos resultados foram publicados em (Cavalcanti et al., 2008b).

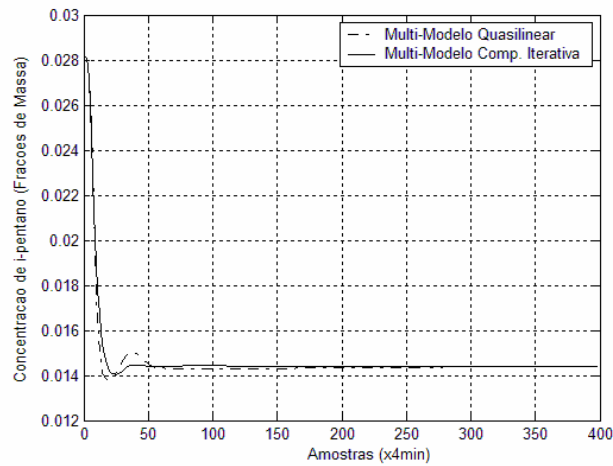


Figura 5.17 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear com compensação iterativa, ponderação no controlador e métrica de norma) e multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de norma)- Concentração de i-pentano

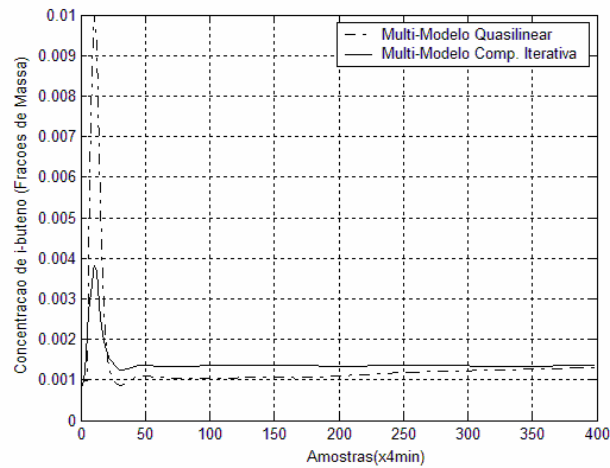


Figura 5.18 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear com compensação iterativa, ponderação no controlador e métrica de norma) e multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de norma)- Concentração de i-buteno

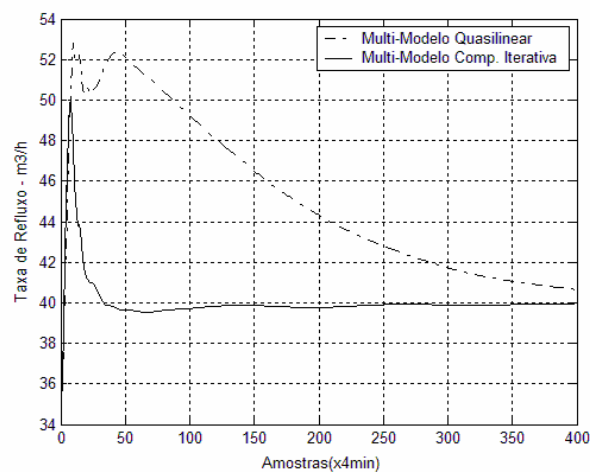


Figura 5.19 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear com compensação iterativa, ponderação no controlador e métrica de norma) e multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de norma)- Taxa de Refluxo

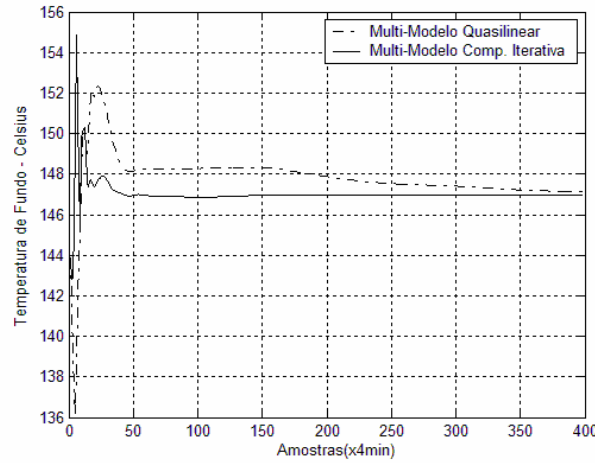


Figura 5.20 - Comparação entre multi-modelo (GPC Quasilinear com compensação iterativa, ponderação no controlador e métrica de norma) e multi-modelo (GPC Quasilinear, ponderação no controlador e métrica de norma)- Temperatura de Fundo

5.7.5. Avaliação quantitativa das simulações

A avaliação quantitativa das simulações apresentadas é efetuada pelos índices mostrados nas equações (3.90), (3.91), (3.92) e (3.93). Vale lembrar que os índices (3.90), (3.91) e (3.92) representam a energia dispendida pelo sistema, o uso dos atuadores e a qualidade dos produtos, respectivamente. Neste trabalho foi considerado $\alpha_i = 0.1$, $\beta_i = 0.15$ e $\rho_j = 0.5$, dada a maior importância da qualidade dos produtos. A Tabela 5.2 apresenta a avaliação comparativa dos índices de desempenho.

<i>i</i>	Controlador	$\mathcal{E}_{1,i}$	$\mathcal{E}_{2,i}$	$\mathcal{E}_{3,i}$	\mathcal{E}_i
1	Controlador Mono-modelo	1,0000	1,0000	0,9969	0,9895
2	Controlador Mono-modelo	1,0000	0,9403	1,0000	0,99105.7.1
1	Controlador com ponderação no <i>controle</i> , quasilinear e métrica de <i>norma</i>	0,9575	0,1236	0,9750	0,83135.7.1
2	Controlador com ponderação no <i>controle</i> , quasilinear e métrica de <i>norma</i>	0,9968	0,8657	0,7779	0,73275.7.2
1	Controlador com ponderação no <i>modelo</i> , quasilinear e métrica de <i>norma</i>	0,9706	0,2008	0,9387	0,84635.7.2
2	Controlador com ponderação no <i>modelo</i> , quasilinear e métrica de <i>norma</i>	0,9978	1,0000	0,8988	0,82635.7.3
1	Controlador com ponderação no <i>controle</i> , quasilinear e métrica de <i>margem de fase</i>	0,9560	0,0888	1,0000	0,84745.7.3
2	Controlador com ponderação no <i>controle</i> , quasilinear e métrica de <i>margem de fase</i>	0,9967	0,9254	0,7935	0,7441

Tabela 5.2 – Avaliação Comparativa dos índices de desempenho normalizados das simulações das seções 5.7.1, 5.7.2 e 5.7.3

Vale lembrar que um menor índice reflete em um desempenho melhor no critério avaliado. De uma maneira geral, o desempenho dos controladores baseados em multi-modelo foi superior quando comparados com o mono-modelo. O controlador que apresentou menor energia gasta na excursão da válvula de refluxo $\varepsilon_{1,1} = 0,9560$ e na válvula de temperatura de fundo $\varepsilon_{1,2} = 0,9967$ foi o baseado na métrica de margem de fase. O menor uso do atuador da válvula de refluxo $\varepsilon_{2,1} = 0,0888$ é obtido pelo controlador baseado na métrica de margem de fase, e o menor uso do atuador da válvula de temperatura de fundo $\varepsilon_{2,2} = 0,8657$ é obtido pelo controlador com ponderação no controle e métrica de norma.

Em relação à melhor qualidade do produto de topo $\varepsilon_{3,1} = 0,9387$, o controlador com melhor desempenho foi o baseado na ponderação do modelo e métrica de norma. A melhor qualidade no produto de fundo $\varepsilon_{3,2} = 0,7779$ foi apresentada pelo controlador com ponderação no controle e métrica de norma. O melhor índice global para a malha de topo $\varepsilon_1 = 0,8313$ e para a malha de fundo $\varepsilon_2 = 0,7327$ foi obtido pelo controlador com ponderação no controle e métrica de norma. Vale lembrar que estes índices globais foram calculados levando em conta que o critério mais significativo a ser avaliado é a qualidade dos produtos, ou seja, $\alpha_i = 0,1$, $\beta_i = 0,15$ e $\rho_j = 0,5$. Em uma coluna do tipo desbutanizadora, como a que foi exemplificada, estes critérios de qualidade dos produtos devem ser rigorosos, visto que existem especificações legais para o GLP a ser vendido.

A avaliação da simulação da seção 5.7.4 é apresentada separadamente visto que foi feita em condições diferentes das simulações anteriores. A Tabela 5.3 apresenta a avaliação comparativa dos índices de desempenho das simulações das seções 5.7.1 e 5.7.4.

i	Controlador	$\varepsilon_{1,i}$	$\varepsilon_{2,i}$	$\varepsilon_{3,i}$	ε_i
1	Controlador com ponderação no controle, quasilinear e métrica de norma	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	Controlador com ponderação no controle, quasilinear e métrica de norma	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	Controlador com ponderação no controle, quasilinear com <i>compensação iterativa</i> e métrica de norma	0,8066	0,8744	0,7804	0,7337
2	Controlador com ponderação no controle, quasilinear com <i>compensação iterativa</i> e métrica de norma	0,9929	0,2163	0,2267	0,4569

Tabela 5.3 - Avaliação Comparativa dos índices de desempenho normalizados das simulações das seções 5.7.1 e 5.7.4

Percebe-se, pela observação da Tabela 5.3, que o controlador multi-modelo baseado no algoritmo de compensação iterativa apresentou um desempenho bastante superior quando comparado ao controlador multi-modelo baseado em modelo único. Como já mencionado, o que explica esta diferença significativa de desempenho entre os citados controladores é que, neste caso, por ser elevada a variação do esforço de controle, a predição utilizando o modelo quasilinear apresenta erro acentuado. Isto permite que o procedimento da compensação iterativa encontre um maior espaço para correção da predição, como mostrado em (Cavalcanti et al., 2008b).

5.8. Conclusões

Este capítulo apresenta uma avaliação das principais contribuições desta Tese. Foram propostas duas métricas que buscam definir qual controlador ou qual modelo é o mais apropriado dentre um dado universo de operação. Em decorrência das métricas propostas, quatro contribuições são apresentadas que combinam controladores (quasilinear e compensação iterativa), abordagens multi-modelo e métricas. De uma forma geral, os resultados foram encorajadores no sentido da aplicação destas contribuições em aplicações que envolvam processos com largas faixas de operação. A melhoria obtida em relação à abordagem quasilinear tradicional vem reforçar a necessidade de aprofundamento desta pesquisa, de forma a se conceber controladores robustos e com garantia de estabilidade, o que não foi o alvo desta Tese.

O controlador com compensação iterativa representou um desempenho bastante promissor quando aplicado em processos com grande variação no esforço de controle. Esforços conforme apresentado em (Fontes et al., 2008) vem sendo dispendidos para conseguir um algoritmo com garantia de estabilidade robusta para o algoritmo de compensação iterativa, o que já seria um passo inicial para a generalização para o caso multi-modelos.

Uma síntese destas contribuições foi publicada como capítulo do livro “Robotics, Automation and Control” da editora I-Tech Education and Publishing, Viena, Áustria, pp. 283-300, ISBN 978-953-7619-16-9.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta Tese, foi mostrada a teoria dos controladores preditivo, suas origens, aplicações e metodologias de projetos. Mostrou-se que os principais desafios de um bom projeto de controle preditivo reside: na obtenção de um modelo, na escolha da função objetivo e nos parâmetros de sintonia que a envolvem, na obtenção de uma predição e na solução do problema de otimização. Em todo o decorrer deste trabalho, apenas soluções analíticas foram consideradas. As bases para o entendimento dos conceitos envolvidos no trabalho foram estabelecidas, inicialmente, na apresentação do Controlador Preditivo Generalizado (GPC) tanto em sua forma monovariável como em sua forma multivariável, tendo sido mostrada uma análise em malha fechada do referido controlador.

Como o tema central da tese residia no tratamento do Controlado Preditivo Generalizado Bilinear (BGPC), e por conseqüência no tratamento de modelos bilineares, foi apresentado o referido controlador para o caso monovariável e multivariável. Mostrou-se que resultados bastante promissores vem sendo obtidos pela academia, a qual vem mostrando que os modelos bilineares possuem alto grau de representação de dinâmicas que não podem ser representadas por modelos lineares. Os referidos resultados mostram, também, que diversos processos, principalmente colunas de destilação, possuem características intrinsecamente bilineares. A abordagem para o BGPC foi dada a partir da quasilinearização do modelo bilinear, onde foi obtida uma predição sub-ótima. É importante destacar que, embora a predição obtida tenha sido sub-ótima, com a conseqüente solução analítica sub-ótima, a referida abordagem mostrou bons resultados quando comparados com GPC linear.

Conquanto os resultados obtidos pela abordagem quasilinear tenham se mostrado satisfatórios, diversos esforços vêm sendo empregados para melhorar seu desempenho, conforme foi mostrado no decorrer deste trabalho. Nesse sentido, foi mostrado o algoritmo de compensação iterativa. O referido algoritmo tem se mostrado eficiente para minimizar o erro de predição que advém da quasilinearização por degrau de tempo. Critérios de convergência foram estabelecidos para fins de obtenção de seqüências de esforços controle mais próximas à solução ótima. Resultados promissores, envolvendo a compensação iterativa, vêm sendo apresentados pela academia e também foram apresentados neste trabalho.

A principal contribuição deste trabalho residiu na proposição das métricas baseadas em norma e em Margem de Fase. Como conseqüências das métricas referidas, foram concebidos quatro controladores diferentes, combinando as diversas abordagens citadas no decorrer do trabalho. As métricas são índices calculados de forma a mensurar a distância entre os pontos de operação tabelados e o ponto em que o processo se encontra em um determinado instante de tempo. As métricas são utilizadas para o cálculo de pesos que são associados às saídas dos controladores ou aos modelos dos pontos de operação escolhidos. Os controladores propostos foram aplicados a uma coluna de destilação do tipo desbutanizadora, a qual é um processo típico em Unidades de Produção de Gás Natural. Este tipo de processo produz o gás GLP como produto de topo e a gasolina natural (C5+) como produto de fundo. Os resultados qualitativos das simulações com a desbutanizadora se mostraram favoráveis às propostas apresentadas nesta pesquisa, quando comparadas ao caso quasilinear com modelo único. A combinação do controlador com compensação iterativa se mostrou uma alternativa bastante interessante a ser aplicada em processos com largas faixas de operação e que possuem grande variação do esforço de controle, conforme já mencionado.

Por fim, com relação aos trabalhos que podem ser continuados a partir desta pesquisa, sugere-se:

- a implementação de outras combinações entre controlador, abordagem multi-modelo e métrica não implementadas;
- o desenvolvimento de uma métrica mista que englobe Margem de Fase e Margem de Ganho;
- o desenvolvimento de um algoritmo multi-modelos que garanta a estabilidade robusta;
- o desenvolvimento de um algoritmo multi-modelo robusto a partir desigualdades matriciais bilineares.

Referências Bibliográficas

- ARSLAN, E.; ÇAMURDAN, M. C.; PALAZOGLU, A. e ARKUN, Y. “Multi-Model Control of Nonlinear Systems Using Closed-Loop Gap Metric”, *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, Vol. 3, pp. 2374-2378, 2004.
- ALMEIDA, E.; RODRIGUES, M.A. e ODLOAK, D. “Robust Predictive Control of a Gasoline Debutanizer Column”, *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, vol. 17, pp. 11, São Paulo, 2000.
- ALMEIDA, O. M. *Controle PID Auto-Ajustável, Inteligente e Preditivo*, Tese de Doutorado, PGEEL/UFSC, Florianópolis, SC, 2002.
- AZIMADEH, F.; PALIZBAN, H.A. e ROMAGNOLI, J. A. “On Line Optimal Control of a Batch Fermentation Process Using Multiple Model Approach”, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, pp. 455-460, 1998.
- BLOEMEN, H.H.J.; VAN DEN BOOM, T.J.J. e VERBRUGGEN, H.B. “An Optimization Algorithm Dedicated to a MPC Problem for Discrete Time Bilinear Models”, *Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, VA, p.2371-2381, 2001.
- CAMACHO E. F. e BORDONS C. *Model Predictive Control*, Springer- Verlag, New York, 1999.
- CAVALCANTI, A. L. O; FONTES, A. B. e MAITELLI, A. L. “A Multi-Model Approach For Bilinear Generalized Predictive Control”, *Proceedings of 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, Angers, França, pp. 289-295, 2007a.
- CAVALCANTI, A. L. O; FONTES, A. B. e MAITELLI, A. L. “Generalized Predictive Control Based in Multivariable Bilinear Multimodel”, *Proceedings of 8th International IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, Cancún, México, pp. 91-96, 2007b.
- CAVALCANTI, A. L. O; FONTES, A. B. e MAITELLI, A. L. “A phase margin metric for multi-model multivariable MPC”, *Proceedings of 16th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp. 1874-1879, DOI 10.1109/MED.2008.4602126, Ajaccio, França, 2008a.
- CAVALCANTI, A. L. O; FONTES, A. B. e MAITELLI, A. L. “Uma Abordagem com Múltiplos Modelos para o Controlador Preditivo Generalizado Bilinear Multivariável com Compensação Iterativa”, *Anais do XVII CBA*, Juiz de Fora, MG, 2008b.
- CLARKE, D. W.; MOHTADI C. e TUFFS, P. S. “Generalized Predictive Control – Parts 1 and 2”, *Automatica*: Vol. 21, nº. 2, 1897.
- CONSTANTIN, N. e DUMITRACHE, I. “Robust Control of Nonlinear Processes Using Multiple Models”, *Proceedings of 15th IFAC World Congress*, pp. 365-370, Barcelona, Espanha, 2002.

- FONTES, A.B. *Desenvolvimento e Avaliação de Controladores Preditivos Baseados em Modelos Bilineares*, Tese de Doutorado, PPgEE/UFRN, Natal, RN, 2002.
- FONTES, A. B.; MAITELLI, A.L. e SALAZAR, A. O. “A New Bilinear Generalized Predictive Control Approach: Algorithms and Results”, *Proceedings of 15th IFAC World Congress*, pp. 235-239, Barcelona, Espanha, 2002.
- FONTES, A. B.; MAITELLI, A.L. e CAVALCANTI, A. L. O. “Bilinear Compensated Generalized Predictive Control: An Adaptive Approach”, *Proceedings of 5th Asian Control Conference*, pp. 1783-1788, Melbourne, Austrália, 2004.
- FONTES, A. B.; MAITELLI, A.L. e CAVALCANTI, A. L. O. “Controle Preditivo Aplicado a uma Coluna de Destilação”, *Anais do 3º Congresso de P&D de Petróleo e Gás Natural*, Salvador, Bahia, 2005.
- FONTES, A. B. e ÂNGELO, E. “Controle Preditivo Generalizado Bilinear Aplicado a uma Coluna Butaneno 1,3: A Compensação Iterativa, Uma Nova Abordagem”. *Anais do XVI CBA*, pp. 863-868, Salvador, Bahia, 2006.
- FONTES, A. e LAURANDI, S. “Controlador Preditivo Generalizado Bilinear Multivariável com Compensação Iterativa, Uma Nova Abordagem”, *Anais do XII Congresso Latino Americano de Controle Automático*, pp. 133-138, 2006.
- FONTES, A., DÓREA, C. E. T. e GARCIA, M.R.S. “An Iterative Algorithm for Constrained MPC with Stability of Bilinear Systems”, *Proceedings of 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp. 1526-1531, DOI 10.1109/MED.2008.4602048, Ajaccio, França, 2008a.
- FIGUEIREDO, M. B. *Controle preditivo para servoventiladores em terapias respiratórias*, Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP, 2004.
- FOSS, B.A.; JOHANSEN, T.A. e SORENSEN, A.V. “Nonlinear Predictive Control Using Local Models – Applied to a Batch Fermentation Process”, *Control Eng. Practice*, pp. 389-396, 1995.
- GOODHART, S. G.; BURNHAM, K. J. e JAMES, D.J.G. “Bilinear Self-tuning Control of a high temperature Heat Treatment Plant”. *IEE Control Theory & Appl.*: Vol. 141, nº 1, pp. 12-18, 1994.
- HAPOGLU, H.; KARACAN, S.; ERTEN KOCA, Z. S. e ALPBAZ, M. “Parametric and Nonparametric Model Based Control of a Packed Distillation Column”, *Chemical Engineering and Processing*, vol. 40, n. 6, p. 537-544, 2001.
- HE, J.C.; YANG, M.Y.; YU, L. e CHEN, G.D. “Predictive control of a class of generalized bilinear systems”, *Mechatronic Engineering*, 16(5):225-226 (in Chinese), 1999.
- HENSON, M.A. e SEBORG, D.E. *Nonlinear Process Control*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- LAKHDARI, Z.; MOKHTARI, M.; LECLUSE, Y. e Provost, J. “Adaptive Predictive Control of a Class of Nonlinear Systems—A Case Study”, *IFAC Proceedings: Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, Budapest, Hungary, p.209-214, 1995.

- LIU, G.Z.; LI, P. "Generalized Predictive Control for a Class of Bilinear Systems", *IFAC 7th Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, Hong Kong, China, p.952-956, 2004.
- OLIVEIRA, G.H.C.; AMARAL, W.C.; FAVIER, G. e DUMONT, G.A. "Constrained robust predictive controller for uncertain processes modeled by orthonormal series function", *Automatica*, 36(4):563-571, 2000.
- PICKHARDT, R. "Adaptive Control of a Solar Power Plant Using a Multi-Model", *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, Vol. 147, n. 5, pp. 493-500, 2000.
- RICHALET, J. "Industrial Applications of Model Based Predictive Control", *Automatica*, 29(5):1951-1274, 1993.
- SANSEVERO, G. *Controle preditivo baseado em modelo para turbo-geradores hidráulicos tipo Francis*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP, 2006.
- SANTOS, J.E.S. *Controle Preditivo Não-Linear para Sistemas de Hammerstein*, Tese de Doutorado, PGEEL/UFSC, Florianópolis, SC, 2007.
- SILVA, C. C. *Guiamento de Mísseis Empregando Controle Preditivo*, Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP, 2006.
- SVORONOS, S. e STEPHANOPOULOS, G. "On Bilinear Estimation and Control", *Int. J. Control*, Vol. 34, nº 4, pp. 651-684, 1981.
- VOLK, U., KNIESE, D.W., HAHN, R., HABER, R., SCHMITZ, U. "Optimized multivariable predictive control of an industrial distillation column considering hard and soft constraints", *Control Engineering Practice*, 13(2005):913-927, 2004.
- WEN, T.; CAIFEN, F. e LIU J. "Multi-model Control of a Boiler-Turbine Unit", *Proceeding of China Control Conference*, pp. 200-204, 2006.
- WOLOVICH, W. "Multivariable system synthesis with step disturbance rejection", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 19, Issue 2, pp. 127.130, 1974.
- YAO, X.Y. e QIAN, J.X. "Generalized predictive control of algorithm of bilinear system", *Journal of Zhejiang University: Engineering Science*, 31(2):231-236 (in Chinese), 1997.
- YEO, Y.K. e WILLIAMS, D.C. "Bilinear Model Predictive Control", *Ind. Eng. Chem. Res.*, pp. 2267-2274, 1987.

Anexo I – Solução recursiva da equação diofantina

Considerando a seguinte equação diofantina:

$$\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_i(q^{-1}) + q^i \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}$$

em que:

$$E_i(q^{-1}) = e_{i,0} + e_{i,1}q^{-1} + \dots + e_{i,i-1}q^{-(i-1)}$$

$$F_i(q^{-1}) = f_{i,0} + f_{i,1}q^{-1} + \dots + e_{i,na}q^{-(na-1)}$$

$$\tilde{A}(q^{-1}) = 1 + \tilde{a}_1q^{-1} + \dots + \tilde{a}_{na+1}q^{-(na+1)}$$

Uma solução recursiva para a referida equação pode ser obtida da seguinte forma:

- Solução (para $i = 1$):
 - $E_1(q^{-1}) = 1$
 - $F_1(q^{-1}) = [1 - \tilde{A}(q^{-1})]q$
- Solução (para $i > 1$):
 - $R_j = f_{i-1,0}$
 - $f_{i,j-1} = f_{j,i-1} - R_j \tilde{a}_j, \quad j = 1, \dots, \text{grau}(A(q^{-1}))$
 - $E_i(q^{-1}) = E_{i-1}(q^{-1}) + R_j q^{-(i-1)}$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)