

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO GENERALIZADA
APLICADA À VELOCIDADE DE ROTAÇÃO ESTELAR**

por

Bráulio Batista Soares

sob orientação de

Dr. José Renan de Medeiros (UFRN)

DISSERTAÇÃO APRESENTADA COMO REQUISITO FINAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM FÍSICA NA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE,
NATAL/RN, BRASIL, EM 25 DE JANEIRO DE 2006.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Os membros da banca examinadora certificam que leram, e recomendam a aceitação para o Programa de Pós-Graduação em Física desta instituição a tese intitulada “**Função de Distribuição Generalizada Aplicada à Velocidade de Rotação Estelar**”, apresentada e defendida por **Bráulio Batista Soares**, como parte final dos requisitos obrigatórios para obtenção do grau de **Doutor em Física**.

Data: 25 de janeiro de 2006

Examinadores externos: Dr. Cláudio Henrique F. Melo (ESO)

Dr. Antônio Carlos S. Miranda (UNICAP)

Examinadores internos: Dr. Joel Camara C. Filho (UFRN)

Dr. José Dias do Nascimento Júnior (UFRN)

Orientador: Dr. José Renan de Medeiros (UFRN)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Data: **25 de janeiro de 2006**

Autor: **Bráulio Batista Soares**
Título: **Função de Distribuição Generalizada Aplicada à
Velocidade de Rotação Estelar**
Depto.: **Departamento de Física Teórica e Experimental
Programa de Pós-Graduação em Física**
Titulação: **Doutor em Física**

A Universidade Federal do Rio Grande do Norte tem permissão para circular e copiar com intuítos não-comerciais, partes ou a íntegra desta dissertação.

Assinatura do Autor

O AUTOR RESERVA OUTROS DIREITOS DE PUBLICAÇÃO, E NEM A TESE NEM PARTES EXTENSAS DELA PODEM SER IMPRESSAS OU REPRODUZIDAS SEM A PERMISSÃO POR ESCRITA DO MESMO.

Às minhas vidas

Lorena, minha esposa, minha paixão.

Jonathan e Samantha, meus filhos, meus amores.

“É impossível abrir novos campos se não se estiver disposto a deixar o ancoradouro seguro da doutrina aceita e enfrentar o perigo de um arriscado salto à frente em direção ao vazio”

Werner Heisenberg

Índice

Lista de Tabelas	vii
Lista de Figuras	viii
Agradecimentos	ix
Resumo	xi
Abstract	xii
1 Introdução	1
1.1 Resumo Histórico	3
1.2 Estatística Astronômica	4
1.3 Objetivos	6
2 Momentum Angular – Aspectos da Evolução Estelar	8
2.1 Introdução	8
2.2 Aleatoriedade dos eixos de rotação	12
2.3 Funções de distribuição de $V \sin i$	13
3 Estatística generalizada	16
3.1 Introdução	16
3.2 A maxwelliana padrão	19
3.3 A maxwelliana generalizada	19
3.4 Outro caminho	25
4 Resultados	28
4.1 Introdução	29
4.2 Comportamento rotacional das Plêiades	30
4.3 Comportamento rotacional de estrelas subgigantes	40
5 Conclusões	50

6	Perspectivas	53
A	Cálculos das constantes de normalização	55
A.1	Normalização da função $F_q(\Omega)$	56
A.2	Normalização da função $\phi_q(y)$	58
B	Cálculos dos momentos das funções	60
B.1	Momentos da função $F_q(\Omega)$	61
B.2	Momentos de $\phi_q(y)$	63
B.3	Razão entre os momentos	65
C	Recuperando a função Maxwelliana a partir de $F_q(\Omega)$	66
D	Tabelas	68
E	Sobre o teste Kolmogorov-Smirnov	80
F	Publicações	83
	Bibliografia	94

Índice de Tabelas

4.1	Melhores valores de q determinados por meio do teste Kolmogorov-Smirnov para cada intervalo de B-V correspondente aos painéis da figura 4.5, referente à amostra das Plêiades.	37
4.2	Melhores valores de q determinados por meio do teste Kolmogorov-Smirnov para cada intervalo de B-V correspondente aos painéis da figura 4.11, referente à amostra das subgigantes.	43
4.3	Melhores valores de q determinados por meio do teste Kolmogorov-Smirnov para cada intervalo de B-V correspondente às figuras 4.15 e 4.16, respectivamente, antes e depois da descontinuidade rotacional.	48
D.1	Amostra de estrelas das Plêiades e seus respectivos parâmetros usados no presente trabalho.	69
D.2	Amostra das estrelas subgigantes e seus parâmetros usados no presente trabalho.	75

Índice de Figuras

3.1	Diversas q-maxellianas $\phi_q(x)$ incluindo a Maxwelliana padrão $\phi_{q=1}(x)$ (linha tracejada). As curvas acima da Maxwelliana correspondem ao regime $q > 1$, enquanto as curvas abaixo dela correspondem ao regime $q < 1$. A abscissa é mostrada em escala de $\log x$ para efeito de visualização. B_q e σ de (Eq. ??) são considerados identicamente iguais à unidade.	24
4.1	Comparação entre a distribuição de probabilidade $F(V \sin i)$ (linha contínua) e sua convolução (linha pontilhada) com os erros das medidas para as Plêiades. O teste Kolmogorov-Smirnov revela que a diferença entre as duas distribuições é de 11%, e que os erros não influenciam no comportamento da distribuição da rotação de 95.9% da amostra.	31
4.2	O painel superior mostra a distribuição de probabilidade do índice de cor B–V da amostra das Plêiades. O histograma de freqüência relativa no painel inferior mostra um pico pronunciado em $B - V = 0.75$ e um aparente em $B - V = 1.35$	32
4.3	$V \sin i$ em função do índice de cor $B - V$ da amostra das Plêiades. Estrelas com $V \sin i < 40\text{km/s}$ correspondem a 95.9% da amostra.	33
4.4	Melhores valores de q , em função do valor médio de B–V em cada intervalo, para divisões diferentes da amostra. Em cada painel é mostrado a linha $q = 1$ representando a função Maxwelliana padrão. As barras de erros correspondem aos valores de q determinados para um nível de significância de 0.05. O número no canto superior de cada gráfico indica a quantidade de intervalos de B–V em que foi dividida a amostra das Plêiades, neste caso as primeiras cinco divisões.	34

4.5	Idem Fig. 4.4, para outras cinco divisões diferentes da amostra das Plêiades.	35
4.6	Curvas de níveis de probabilidade para o intervalo ($0.40 \leq B - V < 0.90$) da amostra das Plêiades. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ e 0.20 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q-maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ .	38
4.7	Curvas de níveis de probabilidade para o intervalo ($0.40 \leq B - V < 1.40$) da amostra das Plêiades. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05$ e 0.10 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q-maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ .	39
4.8	O painel superior mostra a distribuição de probabilidade do índice de cor B-V da amostra das subgigantes. O histograma de frequência relativa no painel inferior mostra um pico pronunciado em $B - V = 0.47$ e um mais largo em torno de $B - V = 0.95$.	40
4.9	Melhores valores de q em função do valor médio de B-V em cada intervalo para divisões diferentes da amostra das subgigantes. Em cada painel é mostrado a linha $q = 1$ representando a função Maxwelliana padrão, e as barras de erros correspondentes determinados com um nível de significância de 0.05 . O número no canto superior de cada gráfico indica a quantidade de intervalos de B-V em que foi dividida a amostra das subgigantes, neste caso as primeiras cinco divisões.	41
4.10	Idem Fig. 4.10, para outras cinco divisões diferentes da amostra das subgigantes.	42

- 4.11 Curvas de níveis de probabilidade para o intervalo ($0.35 \leq B - V < 0.60$) da amostra das subgigantes. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ e 0.20 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q-maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ 44
- 4.12 Curvas de níveis de probabilidade para a amostra das subgigantes. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ e 0.20 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q-maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ . O painel superior representa as estrelas do intervalo ($0.35 \leq B - V < 0.68$) enquanto o painel inferior representa as estrelas do intervalo ($0.35 \leq B - V < 0.85$) 45
- 4.13 $V \sin i$ em função do índice de cor B-V da amostra de estrelas subgigantes. É visível a descontinuidade rotacional em $B - V = 0.55$ 46
- 4.14 Curvas de níveis de probabilidade para estrelas à esquerda e à direita da descontinuidade rotacional. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ e 0.20 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q-maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ . O painel superior representa as estrelas à esquerda da descontinuidade ($B - V \leq 0.55$) rotacional, enquanto o painel inferior representa as estrelas à direita da descontinuidade ($B - V > 0.55$) rotacional. 47

4.15 Melhores valores de q , e suas respectivas barras de erro determinado para um nível de significância de 0.05, em função de $B - V$. A linha $q = 1$ representa a função Maxwelliana padrão, e a linha vertical representa a descontinuidade rotacional em $B - V = 0.55$ para as estrelas subgigantes. As Plêiades estão representadas por círculos fechados, e as subgigantes por quadrados abertos. Este gráfico mostra os melhores valores determinados para q em todos os intervalos de $B - V$ mostrados nas figuras 4.4, 4.5, 4.10 e 4.11. 49

Agradecimentos

Certamente este foi o trabalho mais extenuante que já realizei, não por sua complexidade mas pelo momento emocional e racionalmente difícil por qual eu passava. Por esse motivo, espero que, com as palavras a seguir, possa expressar toda minha gratidão àqueles que de uma forma ou de outra me ajudaram a subir mais um degrau na escada da vida.

- Eu gostaria de agradecer ao Prof. José Renan De Medeiros, meu orientador, por suas muitas sugestões e palavras de incentivo, bem como pelo seu constante apoio para a realização desta tese.
- Agradeço aos professores que tão digna e respeitosamente participaram da banca examinadora.
- Também, agradeço ao Dr. Joel Camara de Carvalho pelos esclarecimentos sobre problemas de física em geral. E ao Dr. José Dias do Nascimento Jr. por apontar perspectivas para a aplicação deste trabalho.
- Quero agradecer a todos os professores e funcionários do Departamento de Física Teórica e Experimental desta instituição, que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta tese.
- Eu devo também mencionar que todo este trabalho de pesquisa foi financiado pelo CNPq, através da bolsa de doutorado 140458/00-0.
- Sou grato aos meus amigos e compadres José Pedro, Gísla, José Ronaldo e Antonio Carlos, pelo companheirismo, prestatividade e solidariedade. Certas coisas nessa vida realmente não tem preço, uma delas é a amizade destas pessoas.
- Não posso deixar de agradecer, pela ajuda prestada e palavras de encorajamento, a Rommel, Bruno Canto, Izan Leão, Igor, Débora e Gislânia.

- Ainda, gostaria de agradecer, pelas tantas horas de divertimento “livrado”, a Guilda Rpgista: Eduardo, Carvalho, Rubens, Guilherme, Tiago, Otávio, André Pipa, Anchieta, Paulo César, Renato, Celso, Esther, Inês, Henrique, André, Saulo e Sidarta.
- Agradeço também ao meu avô Augusto, cujas conversas, bem como seu labor como relojoeiro, inspiraram-me a trilhar o caminho da investigação científica.

E, é claro, eu tenho uma dívida de gratidão para com meus pais, impossível de ser paga. Por toda uma vida de sacrifícios, de dedicação e, sobretudo, de amor a mim e a meus irmãos. Espero estar seguindo esse caminho exemplar.

Natal/RN, Brasil
25 de janeiro de 2006

Bráulio Batista Soares

Resumo

No presente estudo nós usamos uma lei de distribuição da entropia maximizada de Tsallis para ajustar a distribuição observada das medidas de velocidade rotacional projetada de estrelas no aglomerado aberto das Plêiades e numa amostra de estrelas subgigantes.

Essa nova função de distribuição, que generaliza a distribuição de Maxwell-Boltzmann, é derivada a partir generalização de não extensividade da entropia de Boltzmann-Gibbs. Nós apresentamos, também, uma comparação entre os resultados da distribuição generalizada e a lei Maxwelliana, e mostramos que a distribuição generalizada se ajusta mais precisamente aos dados observacionais.

Além disso, apresentamos uma comparação entre os valores de q , da distribuição generalizada, determinados para a distribuição de $V \sin i$ das estrelas da seqüência principal (Plêiades) e os valores determinados para a distribuição observada das estrelas evoluídas (subgigantes). Observamos uma correlação entre os valores de q e o estágio de evolução estelar, para uma determinada faixa de massa estelar.

Abstract

In the present work we use a Tsallis maximum entropy distribution law to fit the observations of projected rotational velocity measurements of stars in the Pleiades open cluster.

This new distribution function which generalizes the Maxwell-Boltzmann one is derived from the non-extensivity of the Boltzmann-Gibbs entropy. We also present a comparison between results from the generalized distribution and the Maxwellian law, and show that the generalized distribution fits more closely the observational data.

In addition, we present a comparison between the q values of the generalized distribution determined for the $V \sin i$ distribution of the main sequence stars (Pleiades) and ones found for the observed distribution of evolved stars (subgiants). We then observe a correlation between the q values and the star evolution stage for a certain range of stellar mass.

Capítulo 1

Introdução

Rotação é um fenômeno universal, pois se manifesta em uma infinidade de partículas ou objetos físicos conhecidos. Assim, a natureza demonstra sua necessidade suprema de uma ciclicidade existencial que é observada em diversos campos da física, em particular, na astrofísica estelar. Este campo da ciência eventualmente nos brinda com descobertas maravilhosas como os exoplanetas, a descoberta de que a energia que nos banha todos os dias é fruto de um processo termonuclear iniciado no núcleo do Sol, assim como a descoberta da periodicidade de atividade das manchas solares que tem uma influência no clima da Terra. Todas elas relacionadas com o processo de rotação estelar. É realmente fantástico descobrir que coisas cotidianas como o dia e a noite, tão imprescindíveis para a nossa vida, sejam determinados por um fenômeno tão comum como a rotação. É evidente então que o estudo da rotação estelar é determinante para a compreensão de eventos astronômicos, ou mesmo da vida na Terra. E uma das questões mais intrigantes em astrofísica está relacionada com a natureza da lei estatística que controla a velocidade de rotação estelar.

A rotação estelar é um dos mais importantes observáveis em astrofísica estelar, influenciando fortemente a evolução das estrelas, fornecendo também informações sobre magnetismo estelar, mistura de abundâncias químicas no interior estelar, interação de marés em sistemas binários, e sobre a absorção de anãs-marrons e planetas por estrelas. Além disso,

podemos afirmar que, se o valor atual da velocidade rotacional de estrelas em um determinado estágio evolucionário reflete o momentum angular original com o qual elas foram formadas, o comportamento da velocidade rotacional também pode ser usado para estudar algumas características dos processos físicos que controlam a formação estelar.

Contudo, estudar o comportamento rotacional de estrelas não é uma tarefa simples, pois para tanto é necessário fazer um levantamento de medidas de rotação de maneira que se possa construir distribuições não tendenciosas dessas velocidades. A medida direta da rotação estelar é baseada essencialmente no período de rotação, requerendo assim um número considerável de medidas de modulações fotométricas. Isso é algo difícil de realizar quando se quer obter uma amostra estelar estatisticamente significativa. Já as medidas de velocidade rotacional projetada $V \sin i$ ¹ são relativamente mais fáceis de obter, mas são afetadas pelo efeito de projeção $\sin i$. Todavia, se a amostra estelar é estatisticamente importante, é possível extrair uma estimativa precisa da distribuição das velocidades equatoriais apenas normalizando o $V \sin i$ observado.

Estudos anteriores sobre a natureza da estatística controlando a distribuição da velocidade rotacional estelar eram baseados em medidas pouco precisas de $V \sin i$, o que pode levar a erros sistemáticos nas análises para valores baixos daquele parâmetro. E mais, a maioria dos trabalhos anteriores não tomavam em consideração os mecanismos físicos diferentes que podem afetar a rotação ao longo da evolução estelar.

Nesta Tese, tentamos minimizar ao máximo esses problemas usando medidas observacionais mais precisas do valor de $V \sin i$, e fazendo a análise para intervalos estreitos de $B - V$ que corresponde também a intervalos relativamente estreitos de massa estelar.

¹Projeção da velocidade de rotação da estrela sobre a linha de visada.

1.1 Resumo Histórico

Quase quatro séculos depois dos trabalhos pioneiros de Johannes Fabricius Golschmidt (1587-1615), Galileo Galilei (1564-1642), Thomas Harriot (1560-1621) e Christoph Scheiner (1575-1650), sobre a rotação do Sol, o comportamento da velocidade rotacional de estrelas continua sendo um problema de difícil compreensão, principalmente, do ponto de vista da própria evolução estelar. E se torna uma tarefa ainda mais complexa quando se busca uma relação com a localização das estrelas na Galáxia.

Para responder questões importantes do estudo dos fenômenos astrofísicos relacionados com rotação estelar, como por exemplo: como fica redistribuído o momentum angular da nuvem mãe quando as estrelas se formam? Qual é a distribuição das velocidades rotacionais resultante da formação estelar? Tal distribuição obedece a uma lei físico-estatística? E, como evolui tal distribuição de velocidades? Faz-se ainda necessário determinar o valor da velocidade de rotação aparente $V \sin i$ de uma estrela a partir da medida do alargamento de suas linhas espectrais. Sobretudo, devido à impossibilidade de se medir diretamente a velocidade real de rotação de uma estrela, pois seria preciso um avanço tecnológico significativo dos telescópios óticos atuais para que pudéssemos observar diretamente a taxa de rotação e o ângulo de inclinação do eixo de rotação.

Esta Tese não tem a pretensão de responder estas questões, mas certamente de propor mecanismos imprescindíveis para tanto.

Com certeza uma das mais importantes questões em astrofísica estelar dos últimos cinquenta anos é aquela que concerne à origem físico-estatística da lei que controla a distribuição da velocidade rotacional de estrelas. Durante esse período, foi sugerido que a distribuição da rotação estelar deveria ser descrita por uma função maxwelliana (e.g. [4, 5, 6, 7, 8]), com base num ponto de vista convencional que favorece uma orientação aleatória para os eixos de rotação estelar (e.g. [5, 7, 8, 9, 10]). Todavia, diferentes estudos têm

mostrado uma clara discrepância entre teoria e realidade (e.g. [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]), onde as distribuições observadas de $V \sin i$ não são ajustadas por uma função maxwelliana. Por exemplo, uma função de distribuição Gaussiana ou Maxwelliana que se ajusta bem às estrelas com rotações altas, falha quando usada para ajustar uma distribuição para rotações baixas. O contrário também é verdadeiro: a distribuição que explica as rotações baixas, não serve para fazer o ajuste das rotações altas[19, 16].

Por outro lado, em 1988, surgiu a tese proposta por Constantino Tsallis de generalização da entropia através de uma lei de potência[20], a partir da qual foi possível obter a função de distribuição de Maxwell- Boltzmann[21] generalizada.

1.2 Estatística Astronômica

Determinar uma função de distribuição a partir de dados observacionais requer um estudo minucioso dos parâmetros físicos de um número grande de estrelas.

O diagrama H-R, por exemplo, representa o objeto de estudo estelar mais importante na astrofísica, pois a partir dele o astrônomo é capaz de descrever qualitativamente toda a evolução de uma estrela, e mais, formular questões a respeito da física que governa os fenômenos ocorridos durante essa evolução. Ele é uma ferramenta de análise da distribuição de estrelas com relação à magnitude e à temperatura, dois parâmetros estelares fundamentais.

Outra abordagem consiste em descrever a distribuição de estrelas em função de outro conjunto particular de características. Tais informações podem ser úteis para tópicos como estrutura galáctica, formação e evolução estelar. Uma análise do número de estrelas de um determinado tipo espectral, dentro de um aglomerado galáctico, por exemplo, pode ser realizado a partir de parâmetros observacionais. Um aglomerado estelar consiste de um conjunto de estrelas que compartilham de diversas características como idade, metalicidade, cinemática e posição, enquanto outras características como magnitude, velocidade

de rotação e binaridade podem diferir de estrela para estrela. Portanto, a informação sobre a distribuição de $V \sin i$ pode ser usada, por exemplo, para estimar a taxa de evolução do momentum angular das estrelas.

Sabe-se que é em grupos estelares jovens, cujas estrelas não são evoluídas e estão relacionadas fisicamente, que a distribuição observada das velocidades rotacionais projetadas ($V \sin i$) pode refletir a distribuição das velocidades rotacionais da época da formação estelar. Portanto, as observações e o estudo da distribuição de $V \sin i$ destes objetos astronômicos provêm vínculos importantes sobre a história do momentum angular das estrelas, e também contém informação sobre os mecanismos que levam a redistribuição do momentum angular na formação.

Contudo, alguns fenômenos estelares podem influenciar diretamente o comportamento da distribuição de momentum angular. A desaceleração magnética e a formação de discos são alguns dos mecanismos físicos que contribuem para a redistribuição do momentum angular. A desaceleração magnética é importante durante os primeiros estágios da formação estelar[22], enquanto os discos estelares são importantes nas fases proto-estelar e pré-seqüência principal[23].

Uma outra maneira pela qual ocorre a redistribuição do momentum angular durante a formação estelar é através da formação de sistemas binários. Este mecanismo pode ser estudado relacionando as características da população de binárias em grupos estelares com a distribuição de $V \sin i$, que pode também dar informação sobre as interações de marés gravitacionais em sistemas binários fechados. Assim sendo, os estudos sobre a distribuição de $V \sin i$ em grupos estelares jovens podem dar informações sobre o próprio processo de formação estelar.

Considerando tal exposto, pode-se propor que uma função de distribuição estatística particular é a distribuição da velocidade de rotação estelar, ou função de rotação, $f(V)$,

definida tal que

$$dN(V) = f(V)dV$$

é o número de estrelas com velocidade de rotação entre V e $V + dV$, e que esta função é similar à função de distribuição maxwelliana[5, 8]. Além disso, pode-se também propor que ela se modifique com o tempo, assim como ocorre com as rotações estelares observadas. Por este motivo, a função de rotação de estrelas num aglomerado, deve diferir da função de rotação inicial por causa da evolução estelar. Isso nos remete de volta à questão de qual deve ser a função físico-estatística controlando a distribuição da rotação estelar observada. E tal questão é a motivação original para a elaboração desta Tese.

1.3 Objetivos

Nesta Tese, nós consideramos a modificação sugerida em [21] da hipótese básica de independência estatística entre as distribuições associadas com as componentes da velocidade, e aplicamos às componentes da velocidade angular das estrelas de uma amostra. Agora ao invés de utilizarmos a forma tradicional de independência das probabilidades

$$F(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z = f(\Omega_x) f(\Omega_y) f(\Omega_z)d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z$$

para determinar a probabilidade para cada componente da velocidade angular, consideramos a forma

$$F(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z = \exp_q[\ln_q f(\Omega_x) + \ln_q f(\Omega_y) + \ln_q f(\Omega_z)]d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z ,$$

onde $\exp_q f = e_q^f \equiv [1 + (1 - q)f]^{\frac{1}{1-q}}$ e $\ln_q f \equiv \frac{f^{1-q} - 1}{1-q}$.

A principal meta da presente Tese é então determinar se a função de distribuição de Maxwell-Boltzmann generalizada[21], já que esta inclui a maxwelliana padrão como caso particular, é mais apropriada como ferramenta para explicar o comportamento das distribuições observadas da velocidade de rotação estelar.

Aplicaremos, então, essa função de distribuição generalizada a intervalos distintos de massas estelares, como também, a tipos diferentes de ambientes astronômicos. Com isso, verificaremos a aplicabilidade de tal função às diferentes etapas da evolução de determinada massa estelar, e aos diferentes ambientes nos quais as estrelas estão imersas. A aplicação da distribuição generalizada aos diversos sítios astronômicos nos permitirá analisar as distribuições observadas de $V \sin i$ e a dependência da rotação estelar com as coordenadas galácticas, a fim de buscar mais elementos que ratifiquem, ou retifiquem, a suposição clássica de aleatoriedade dos eixos de rotação no âmbito galáctico.

Portanto, ao propor métodos e teorias estatísticas que levem em conta, mesmo que implicitamente, interações desprezadas a priori (e.g. interações de longo alcance) pelas proposições padrões, esta Tese tenta lançar luz sobre problemas astrofísicos importantes.

Capítulo 2

Momentum Angular – Aspectos da Evolução Estelar

O estudo da evolução do momentum angular de estrelas não-massivas tem conseguido um considerável desenvolvimento nos últimos vinte anos. Com as medidas de taxas de rotação tornando-se cada vez mais disponíveis para um número rapidamente crescente de estrelas não-massivas, localizadas nas mais diferentes regiões da galáxia, diversas classes de modelos matemáticos têm sido desenvolvidas a fim de explicar os resultados observacionais freqüentemente inesperados[24].

Finalmente, e com essa avalanche de dados observacionais, a modelagem da evolução rotacional de estrelas do tipo solar desde o nascimento até a idade do Sol, ou além, pode dar um melhor entendimento dos importantes processos físicos envolvidos tais como perda de momentum via ventos estelares, existência de discos circum-estelares na etapa protoestelar e propriedades de dínamos estelares. Estes processos afetam diretamente o comportamento evolutivo da distribuição das velocidades rotacionais estelares.

2.1 Introdução

A evolução da rotação de uma estrela pode em muitos casos ser vista como a evolução paralela da estrutura da estrela e sua distribuição de momentum angular. A interação

entre estas duas análises pode ser descrita em termos dos processos de redistribuição do momentum angular, bem como da ocorrência e efetividade dos mesmos. As interpretações atuais de observações espectroscópicas e fotométricas estelares têm corroborado pra sustentar a idéia de que a posição de uma estrela no diagrama H–R é afetada pela rotação. Mas, infelizmente, ainda não é possível observar diretamente a velocidade rotacional de uma estrela, impondo assim restrições à determinação exata da forma funcional do momentum angular estelar. Portanto, mais de setenta anos depois, desde Struve[1], os estudos de perfis de linhas espectroscópicas continuam sendo sistematicamente usados para determinar¹ velocidades rotacionais de estrelas.

Contudo, as observações espectroscópicas nos dão $V \sin i$, a velocidade de rotação equatorial projetada sobre a linha de visada. E para um número de estrelas de determinado índice de cor B–V, nós podemos obter uma média $\langle V \sin i \rangle$, e isto por sua vez determina $\langle V \rangle$, segundo [5], desde que a orientação dos eixos de rotação seja aleatória. Como os valores observados de $V \sin i$ não mostram correlação aparente com latitude ou longitude galáctica (cf. [10, 25]), parece razoável assumir que os eixos rotacionais estão distribuídos aleatoriamente.

Então podemos nos questionar sobre como as velocidades rotacionais são distribuídas em torno da média quando as estrelas são agrupadas em pequenos intervalos de B–V. Deutsch[26], a partir de princípios da mecânica estatística, fazendo uma analogia com as velocidades rotacionais de moléculas esféricas numa caixa, já enfatizava que deveríamos esperar uma distribuição de Maxwell-Boltzmann para V , mas outros trabalhos (e.g. [6, 27]) indicavam que as observações não estavam conformes com seu ponto de vista. Estes estudos mostraram que, quando estrelas dos tipos B, A e F são agrupadas independentemente, a função de distribuição tende para um máximo quando $V \rightarrow 0$, enquanto a lei de Maxwell-Boltzmann é zero neste ponto. Apesar das divergências, Deutsch continuou a usar a referida

¹Veja referência [3] para um maior esclarecimento sobre alargamento de linhas espectrais devido à rotação estelar.

função de distribuição em medidas rotacionais [28], sem uma maior preocupação com a importância dos erros de $V \sin i$ nas suas análises.

Devemos enfatizar também que Deutsch[8] determinou analiticamente a forma maxwelliana da função de distribuição que deveria descrever as velocidades rotacionais observadas de uma amostra de estrelas. Tal função foi ampla e satisfatoriamente utilizada no estudo das rotações observadas de estrelas mais quentes do que as do tipo F5; pois até o início dos anos 80, somente existiam dados com boa resolução espectral, e com isso, medidas de $V \sin i$ um pouco mais precisas, para estrelas mais precoces que o tipo espectral F5 (cf. [19, 29]). Apesar disso, em alguns casos (e.g. [30, 15]), o ajuste usando a maxwelliana só era satisfatório se fosse desprezada partes problemáticas da amostra, geralmente as estrelas da cauda da distribuição.

Com o surgimento de medidas de $V \sin i$ mais precisas, principalmente para estrelas mais frias ou pouco massivas, o problema da função de distribuição que controla a velocidade rotacional estelar se tornou evidente.

Exceto para o Sol, nem as observações nem a teoria nos diz qual é a rotação interna de uma estrela do tipo solar durante sua evolução. Dependendo de qual mecanismo físico domina o transporte de momentum angular no interior estelar, pode-se esperar qualquer coisa, desde rotação diferencial pronunciada até rotação de corpo quase-sólido. A helio-sismologia, entretanto, lança luz sobre o perfil rotacional do Sol com resultados um pouco inesperados[31]. A rotação diferencial latitudinal parece ser importante na zona convectiva solar, enquanto a parte mais externa do núcleo radiativo exibe rotação rígida. Contudo, a rotação no núcleo interno ainda não é completamente compreendida (e.g. [32, 33, 34]).

É claro que não só a estrutura interna estelar e sua evolução podem ser determinantes para a evolução do momentum angular das estrelas mas, também, os processos físicos de formação estelar e o ambiente de formação estelar. Estes são responsáveis pela estratificação da nuvem mãe e pela redistribuição do momentum angular da mesma. Isso será também

determinante para a formação de sistemas planetários.

Tem sido também defendido que a formação de sistemas planetários é responsável pela baixa rotação de estrelas do tipo tardia. Sabe-se que, muito embora 99.9% [35] da massa do nosso sistema solar esteja contida no Sol, 98% do momentum angular total desse sistema está associado ao movimento orbital dos planetas.

Huang [36] tratou o problema da formação planetária sugerindo que todas as estrelas passam por algum tipo de mecanismo de desaceleração rotacional. Ele mostrou que, partindo de uma distribuição maxwelliana, a ação de desaceleração leva a uma distribuição com acentuada frequência em baixos valores de $V \sin i$. Huang também sugeriu que alguns mecanismos de desaceleração são mais eficientes em estrelas tardias do que em estrelas de tipo espectral precoce. Assim, ele concluiu que uma quantidade suficiente de matéria estelar poderia ser ejetada dos progenitores de estrelas tardias para formar os planetas. Hoje já está bem estabelecido que a formação planetária não seja o único meio pelo qual a baixa rotação de estrelas tardias possa ser explicada. Mesmo sem planetas, estrelas tardias da seqüência principal exibiriam baixa rotação por causa da perda de momentum angular induzida pelos ventos estelares.

Além do problema da diminuição do momentum angular devido à evolução estelar, existe o problema da orientação dos eixos de rotação das estrelas. A proposição de que orientação dos eixos de rotação das estrelas sejam inteiramente aleatória indica que estrelas individuais não levam na memória a orientação do vetor momentum angular da galáxia como um todo. Então podemos nos perguntar se as estrelas de aglomerados galácticos compartilham estas propriedades.

Smith & Struve [37] descobriram que as velocidades rotacionais das estrelas mais brilhantes das Plêiades possuíam grandes valores. Struve [25], então, sugeriu que os eixos rotacionais

poderiam estar preferencialmente orientados no espaço com $i \equiv 90^\circ$. Van Dien[4], entretanto, concluiu que a distribuição das velocidades rotacionais das Plêiades eram mais compatíveis com uma distribuição de Maxwell-Boltzmann (sugerindo uma orientação aleatória dos eixos) do que com uma distribuição baseada na fórmula de energia de Boltzmann junto com uma orientação unidirecional dos eixos. Esta última tem a forma

$$F \equiv \exp[-h^2(\langle V \rangle - V)^2].$$

Sendo assim, a distribuição observada seria

$$\Phi \equiv \exp[-k^2(\langle V \sin i \rangle - V \sin i)^2] + \exp[-k^2(\langle V \sin i \rangle + V \sin i)^2]$$

onde os dois termos exponenciais correspondem a estrelas com vetores momentos angulares de sinais opostos. Van Dien preferiu a distribuição de Maxwell-Boltzmann à expressão dada acima como um ajuste para os dados das Plêiades. Kraft[30] concluiu que a suposição de aleatoriedade dos eixos rotacionais parecia ajustar-se melhor ao corrente conhecimento da rotação estelar em aglomerados galácticos, muito embora essa evidência não fosse estritamente obrigatória.

Se para o Sol existem contradições e dificuldades quanto à compreensão e determinação dos mecanismos físicos dominantes para o transporte do momentum angular, pode parecer prematuro propor então a priori um modelo de função de distribuição para a velocidade rotacional. Principalmente, devido às incertezas dos processos físicos envolvidos.

Entretanto, a proposição de um modelo de função de distribuição com vínculos físicos das estrelas pode, de maneira não-determinística, contribuir para o entendimento dos processos de evolução do momentum angular estelar.

2.2 Aleatoriedade dos eixos de rotação

A evidência para a orientação randômica dos eixos de rotação é encontrada pela falta de uma correlação entre $V \sin i$ para grupos homogêneos de estrelas[10, 27, 39, 38]. Sob a suposição

de uma orientação aleatória, é possível converter a média de $V \sin i$ que caracteriza um grupo homogêneo de estrelas, em uma velocidade rotacional média usando

$$\langle v \rangle = \langle V \sin i \rangle \frac{4}{\pi} . \quad (2.2.1)$$

Isso é mostrado por Chandrasekhar[5] e por Gray[3].

2.3 Funções de distribuição de $V \sin i$

Sabe-se que as observações nos dão, tão somente, as velocidades rotacionais projetadas ao longo da linha de visada, $V \sin i$, mas estamos interessados realmente nas velocidades equatoriais das estrelas. Para tanto, é necessário conhecer a distribuição de probabilidade $\phi(V \sin i)$ de uma amostra representativa de estrelas de um tipo espectral, para então determinar a distribuição de probabilidade $f(V)$ das velocidades equatoriais.

A seguinte análise foi desenvolvida por Chandrasekhar & Münch[5], e é baseada na suposição de que os eixos de rotação estão distribuídos aleatoriamente no espaço. Esta hipótese é amplamente justificada, pois as observações pareciam mostrar uma falta de correlação entre $V \sin i$ e as coordenadas galácticas das estrelas.

Em virtude dessa suposição, a probabilidade de que a inclinação i , ou o ângulo formado entre o eixo de rotação da estrela e sua linha de visada, se encontre no intervalo $(i, i + di)$ é conhecido como sendo $\sin i$. Analogamente, a probabilidade de ocorrência de V no intervalo $(V, V + dV)$ é $f(V)dV$. Então, como V e i são variáveis independentes, a probabilidade que elas ocorram conjuntamente em seus respectivos intervalos $(V, V + dV)$ e $(i, i + di)$ é

$$f(V) \sin i dV di .$$

Considere agora as velocidades rotacionais projetadas

$$y = V \sin i$$

com uma distribuição de probabilidade governada pela função de frequência supostamente conhecida, $\phi(y)$. Claramente, a probabilidade de que a velocidade aparente y caia no intervalo fixo $(y, y + dy)$ é dada pela integral dupla

$$\phi(y) dy = \iint_{y \leq V \sin i \leq y + dy} f(V) \sin i dV di . \quad (2.3.1)$$

Chandrasekhar & Münch[5] resolveram esse problema e propuseram uma equação para a distribuição acima. Concomitantemente, Brown[40], baseando-se nos resultados daqueles autores, também propôs uma distribuição do tipo retangular e outra do tipo parabólica para, através do processo de inversão de Chandrasekhar & Münch, determinar a função de distribuição que se ajustaria melhor às suas distribuições observadas de $V \sin i$. Com isso, ele mostrou que a forma da função de distribuição da velocidade de rotação equatorial podia variar e, ainda assim, levar a uma distribuição teórica de $V \sin i$ compatível com as observações.

Com base, essencialmente, nessa última assertiva e nas proposições de Brown, Gaigé[12] propôs que a distribuição da velocidade equatorial estelar deveria ter a forma de uma distribuição polinomial com dois parâmetros livres. Além disso, ele propôs que a distribuição observada poderia ser ajustada não somente por uma, mas pela soma de duas ou mais distribuições daquele tipo. É evidente que seu procedimento de inversão produziu distribuições que se ajustaram muito bem às distribuições observadas. Além disso, Fukuda[41], em 1982, corroborando o trabalho de Brown, propôs uma outra função de distribuição particular em que relacionava alguns parâmetros com a largura da distribuição observada.

Contudo, até o presente momento, todas essas distribuições apenas levaram em consideração o caráter estatístico ou matemático, não levando em conta sua origem física a priori. Além do mais, tais distribuições incluíam demasiados parâmetros de ajustamento.

Portanto, ainda existe em aberto uma questão fundamental na área da astrofísica sobre a natureza da distribuição da rotação estelar. Este é um dos aspectos que propusemos

tentar resolver com a elaboração desta Tese.

Capítulo 3

Estatística generalizada

“Não existe nenhuma razão para se impor que os métodos da mecânica estatística devam ser restritos aos sistemas dinâmicos que seguem as prescrições usuais de Boltzmann-Gibbs. Uma vasta classe de sistemas parecem ser tratáveis através de métodos termoestatísticos completamente análogos a esses padrões. Então, surge a seguinte questão: o que deveria uma mecânica estatística satisfazer para refletir a natureza? Claro que uma resposta imediata a essa questão poderia ser: fazer previsões que são confirmadas experimentalmente”.

Tsallis[42]

3.1 Introdução

As distribuições Gaussianas aparecem quase que em todos os fenômenos da natureza, e são conhecidas por estarem intimamente relacionadas à difusão normal resultante de movimentos Brownianos¹.

Entretanto, atualmente está bem estabelecido que exista uma grande variedade de fenômenos estocásticos na física, e em outros campos do conhecimento, que é controlada pelas distribuições de Lévy². A questão básica é entender qual é o fundamento

¹No movimento Browniano, uma partícula dá saltos aleatórios que são geralmente pequenos. A difusão normal resultante é descrita por uma distribuição Gaussiana com uma variância, que caracteriza a largura da distribuição, que é finita [43].

²Essa distribuição foi introduzida, em 1937, pelo matemático francês Paul Lévy[44]. Na difusão do tipo

termo-estatístico deste fato. Tal resposta é bem conhecida para a difusão normal (Gaussianas). Realmente, esta está sustentada sobre dois pilares: a entropia de Boltzmann-Gibbs e o teorema padrão do limite central³. Qual seria o sustentáculo análogo para as distribuições de Lévy? Certamente, só um vínculo complexo *ad hoc* poderia fornecer as distribuições de Lévy[47]. Alguns anos atrás, este problema foi essencialmente resolvido dentro do cenário da termoestatística generalizada, que usa uma entropia não extensiva (e.g. [20, 47, 48, 49, 50, 51]).

Apesar de opiniões contrárias (e.g. [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58]), algumas delas adequadamente refutadas[42], a entropia generalizada está sendo amplamente utilizada, com sucesso, em diversos fenômenos alheios à astrofísica como, por exemplo: na generalização da relação de Einstein de difusividade e temperatura para distribuição do tipo Lévy[59]; no cálculo do calor específico de um rotor rígido anisotrópico clássico e quântico[60]; no desenvolvimento de uma teoria linear dinâmica de sistemas não extensivos de muitos corpos[61]; no estudo de equações não-lineares do tipo Fokker-Planck que descrevem difusões anômalas[62, 63]; na generalização de funções circulares e hiperbólicas[64]; em estudos numéricos de sistemas clássicos com interação de longo alcance utilizando o modelo ferromagnético XY inercial[65]; na generalização da distribuição maxwelliana de velocidades[21]; no estudo da reassociação anômala de proteínas fotodissociadas[66]; na generalização da transformada de Laplace[67]; no estudo da propagação de ondas planas eletrostáticas num plasma sem colisão entre partículas[68]; na generalização do teorema clássico de equi-partição da energia[69]; no estudo comparativo das distribuições que descrevem fenômenos naturais[43]; na generalização da equação de transporte de Boltzmann[70]; no contexto da superestatística desenvolvida por Beck & Cohen[71, 72]; na generalização das distribuições de Fermi-Dirac e Bose-Einstein[73]; no estudo de hamiltonianos para sistemas finitos através de simulações

Lévy, saltos longos são intercalados com saltos mais curtos, de modo que uma região muito maior é coberta pela partícula.

³Veja referência [45] para uma revisão rigorosa do assunto. Ou, para um informativo histórico do Teorema do Limite Central até 1986, leia [46].

de osciladores anarmônicos[74]; no estudo sobre as interpretações físicas das temperatura e pressão num cenário não extensivo[75]; no estudo sobre incertezas termodinâmicas em medidas de informação[76]; essa entropia não extensiva é, ainda, aplicada no estudo da distribuição geográfica da renda per capita[77].

No contexto da astrofísica, a entropia generalizada de Tsallis é bem aplicada no estudo da distribuição das velocidades de aglomerados de galáxias[78], no estudo de dinâmica gravitacional[79, 80, 81], em estudos sobre as taxas de reações nucleares do Sol e sobre seu fluxo de neutrinos[82, 83, 84], no estudo sobre a radiação cósmica de fundo no universo de Robertson-Walker[85], no estudo de colapso gravitacional[86], na discussão sobre superfluidez em estrelas de nêutrons[87], na análise do fluxo de raios cósmicos [88, 89], como também, em estudos sobre o efeito da não extensividade no critério de Jeans para a instabilidade gravitacional[90, 91, 92].

Segundo Tsallis, a ampla aplicabilidade da termoestatística generalizada ocorre porque a ubiquidade e robustez das distribuições de Lévy obedecem naturalmente o teorema do limite central generalizado[48]. Assim, difusões do tipo gaussiana, do tipo anômala, do tipo Lévy e superdifusão podem agora ser unificadas num único cenário simplificado, que é o da termoestatística não extensiva.

Então, assim como nos diversos fenômenos onde as distribuições Gaussianas não são apropriadas para descrevê-los, nesta Tese, nós queremos mostrar que o comportamento da distribuição da velocidade rotacional estelar não é simplesmente um problema de qual modelo de função matemática é usado, mas de qual teoria mecânica estatística é usada.

Tendo como base essa questão, nós propomos uma lei de distribuição modificada, que leva em conta fenômenos descritos pela distribuição de Lévy, para ajustar a distribuição das velocidades rotacionais observadas de estrelas não-massivas.

Antes de apresentarmos o desenvolvimento da função de distribuição generalizada proposta, nós mostramos, de forma resumida, o desenvolvimento analítico da função de distribuição maxwelliana padrão dentro do contexto da rotação estelar.

3.2 A maxwelliana padrão

Deutsch[8], em seu artigo de 1970, determinou analiticamente a função de distribuição para a magnitude de um vetor que tem orientação aleatória. Nesse trabalho, ele assumiu que, se o vetor $\vec{\Omega}$ (a velocidade angular de rotação de uma estrela) é decomposto em componentes cartesianas, a distribuição de qualquer uma das componentes é independente da distribuição das outras. Assim sendo, como

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k},$$

a probabilidade de encontrar Ω_x no intervalo $(\Omega_x, \Omega_x + d\Omega_x)$, Ω_y em $(\Omega_y, \Omega_y + d\Omega_y)$, e Ω_z em $(\Omega_z, \Omega_z + d\Omega_z)$, é dada por

$$F(\Omega) d^3\Omega = f(\Omega_x) f(\Omega_y) f(\Omega_z) d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z, \quad (3.2.1)$$

com $\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$. Daí, então, é fácil mostrar que $F(\Omega)$ é uma distribuição maxwelliana, pois

$$F(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Omega^2 \exp(-\Omega^2). \quad (3.2.2)$$

3.3 A maxwelliana generalizada

A nova função de distribuição (chamada aqui de q-maxwelliana) generaliza a função de Maxwell-Boltzmann[21], e tem origem no trabalho sobre termoestatística não extensiva realizado por Tsallis[20].

O princípio que guiou os argumentos de Maxwell em estabelecer sua celebrada distribuição gaussiana de velocidades não é privilégio da função exponencial, mas também de

uma família inteira de leis de potência, as q-exponenciais:

$$\exp_q(f) = e_q^f \equiv [1 + (1 - q)f]^{-\frac{1}{1-q}} \quad (3.3.1)$$

onde f é uma função de variáveis aleatórias, que inclui a exponencial padrão quando $q = 1$. Isso leva a um forte vínculo com a mecânica estatística não extensiva onde as q-exponenciais têm um papel fundamental, assim como tem a função exponencial na mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. Esta observação possibilitou a generalização do teorema de equi-partição da energia[69] fornecendo também uma distribuição do tipo lei de potência no qual o parâmetro variável é a energia cinética, ou mais precisamente, a velocidade da partícula. Por outro lado, Latora e colaboradores[93] usaram a velocidade rotacional como o parâmetro variável em seu trabalho sobre a dinâmica de um sistema hamiltoniano de N spins clássicos distribuídos num plano. Enquanto que Campa e colaboradores[94] usaram essa mesma estrutura no estudo de rotores que interagem num potencial infinito.

Agora ilustraremos o desenvolvimento da função de distribuição q-maxwelliana no contexto do presente estudo. Nós podemos analisar o problema dentro do cenário não extensivo proposto por Tsallis (1988), modificando a hipótese básica de independência estatística entre as distribuições associadas com as componentes do vetor $\vec{\Omega}$. Como mencionado no trabalho de Silva[21], a independência entre as três componentes da velocidade não é sustentada em sistemas com interação de longo alcance onde o caráter não extensivo é observado. Levando em conta tais argumentos, Silva[21] propuseram uma generalização para a função de distribuição de velocidades.

Usando a mesma argumentação, nós propomos a seguinte generalização para a equação (3.2.1),

$$F(\Omega) d^3\Omega = e_q^{\ln_q f(\Omega_x) + \ln_q f(\Omega_y) + \ln_q f(\Omega_z)} d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z \quad (3.3.2)$$

onde Ω_x , Ω_y e Ω_z representam os módulos das componentes do vetor $\vec{\Omega}$.

As funções q-exp e q-log, e_q^f e $\ln_q f$ respectivamente, são definidas como

$$\exp_q f = e_q^f = (1 + (1 - q)f)^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{and} \quad \ln_q f = \frac{f^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (3.3.3)$$

Note que no caso particular $q = 1$, e_q^f and $\ln_q(f)$ reproduzem a função exponencial e logaritmo recuperando a forma padrão da equação (3.2.1).

A derivada parcial do q-logaritmo de (3.3.2) com relação à Ω_x fornece

$$\frac{\partial \ln_q F}{\partial \Omega_x} = \frac{\partial}{\partial \Omega_x} \ln_q(e_q^{\ln_q f_x + \ln_q f_y + \ln_q f_z}) \quad (3.3.4)$$

mas como $e_q^{\ln_q f} = \ln_q e_q^f = f$,

$$\frac{\partial \ln_q F}{\partial \Omega_i} = \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_x + \ln_q f_y + \ln_q f_z)$$

onde $i = x, y, z$, ou equivalentemente,

$$\frac{\Omega_i F'(\chi)}{\chi F^q(\chi)} = \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_i) \quad (3.3.5)$$

onde $\chi = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$ e $F'(\chi)$ é a derivada total de $F(\chi)$.

Definindo $\Phi(\chi) \equiv \frac{1}{\chi} \frac{F'(\chi)}{F^q(\chi)}$, nós podemos reescrever (3.3.5) como

$$\Phi(\chi) = \frac{1}{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial \Omega_x} (\ln_q f_x) = \frac{1}{\Omega_y} \frac{\partial}{\partial \Omega_y} (\ln_q f_y) = \frac{1}{\Omega_z} \frac{\partial}{\partial \Omega_z} (\ln_q f_z). \quad (3.3.6)$$

Esta equação somente pode ser satisfeita se todos os termos forem iguais a uma constante independente de qualquer componente de Ω . Desta forma, podemos fazer $\Phi(\chi) = -\gamma$, ou

$$\frac{1}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_i) = -\gamma. \quad (3.3.7)$$

Daí, as soluções da equação (3.3.7) para $f(\Omega_i)$ são dadas por

$$\ln_q f_i = -\frac{\gamma \Omega_i^2}{2} \quad (3.3.8)$$

que, substituindo em (3.3.2), nos dá

$$F(\Omega) d^3 \Omega = \exp_q \left(-\frac{\gamma \Omega_x^2}{2} - \frac{\gamma \Omega_y^2}{2} - \frac{\gamma \Omega_z^2}{2} \right) d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z \quad (3.3.9)$$

como $\Omega^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2$, temos

$$F(\Omega) d^3\Omega = \exp_q \left(-\frac{\gamma\Omega^2}{2} \right) d^3\Omega = \left(1 - (1-q)\frac{\gamma\Omega^2}{2} \right)^{\frac{1}{1-q}} d^3\Omega . \quad (3.3.10)$$

Assim, a probabilidade de encontrar Ω no intervalo $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ pode ser determinado da seguinte forma,

$$\Psi(\Omega) = \int F(\Omega) d^3\Omega ,$$

fazendo $d^3\Omega = \Omega^2 \sin\theta d\theta d\varphi d\Omega$, temos, para um determinado Ω fixo,

$$\Psi_q(\Omega) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Omega^2 \left(1 - (1-q)\frac{\gamma\Omega^2}{2} \right)^{\frac{1}{1-q}} \sin\theta d\theta d\varphi .$$

Resolvendo as integrais, encontramos

$$\Psi_q(\Omega) = 4\pi \Omega^2 \left(1 - (1-q)\frac{\gamma\Omega^2}{2} \right)^{\frac{1}{1-q}} . \quad (3.3.11)$$

Definindo $\frac{1}{\sigma^2} = \frac{\gamma}{2}$, temos

$$\Psi_q(\Omega) = 4\pi \Omega^2 \left(1 - (1-q)\frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} . \quad (3.3.12)$$

Entretanto, $\Psi(\Omega)$ ainda necessita ser normalizada. Assim,

$$A_q \int \Psi_q(\Omega) d\Omega = 1 \quad (3.3.13)$$

onde A_q é a constante de normalização, e o índice q é introduzido a fim de explicitar que A depende de q . Neste ponto, é importante assinalar que a equação (3.3.12) tem um limite no valor permitido para Ω igual a $\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}}$ quando $q < 1$.

A equação (3.3.13) é totalmente resolvida no Apêndice A.1, fornecendo

$$F_{q<1}(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{1-q}}{\sigma} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7-5q}{2-2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} \Omega^2 \left(1 - (1-q)\frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.3.14)$$

e

$$F_{q\geq 1}(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{q-1}}{\sigma} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)} \Omega^2 \left(1 - (1-q)\frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} , \quad (3.3.15)$$

que são as funções de distribuição generalizadas para os regimes $q < 1$ e $q \geq 1$. Esta última recupera a forma da maxwelliana padrão determinada por Deutsch[8], quando $q = 1$ (Veja Apêndice C).

Se a distribuição padrão para a velocidade rotacional verdadeira V de uma amostra de estrelas for

$$F(jV) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (jV)^2 \exp[-(jV)^2] \quad (3.3.16)$$

onde $j = 1/\sqrt{\langle (V \sin i)^2 \rangle}$, como mostrado por Deutsch[8], então a distribuição observada da velocidade rotacional projetada $V \sin i$, para uma orientação aleatória dos eixos, deve ser

$$\phi(V \sin i) = 2jV \sin i \exp[-(jV \sin i)^2] \quad (\text{cf. [7]}).$$

Portanto, a distribuição $\phi_q(y)$, onde $y \equiv V \sin i$, deve reproduzir a distribuição padrão, assim como $F_q(V)$ reproduz $F(V)$ no caso limite quando $q = 1$.

Por essa razão, nós propomos a seguinte função de distribuição, mostrada na figura 3.1, para a velocidade rotacional estelar:

$$\phi_q(y) = B_q y \left(1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.3.17)$$

onde B_q é uma constante dependente de q que deve ser determinada analiticamente, a partir da normalização de $\phi_q(y)$. Novamente, é necessário notar que para valores de q menores do que a unidade, devido à exigência da positividade da função, a equação (3.3.17) exhibe um limite natural no valor máximo permitido para y igual a $\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}}$.

Desenvolvida no Apêndice B.2, a normalização de (3.3.17) fornece as seguintes distribuições para ambos os regimes $q < 1$ e $q \geq 1$,

$$\phi_{q < 1}(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} \frac{1-q}{\sigma^2} y \left(1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.3.18)$$

e

$$\phi_{q \geq 1}(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \frac{q-1}{\sigma^2} y \left(1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad (3.3.19)$$

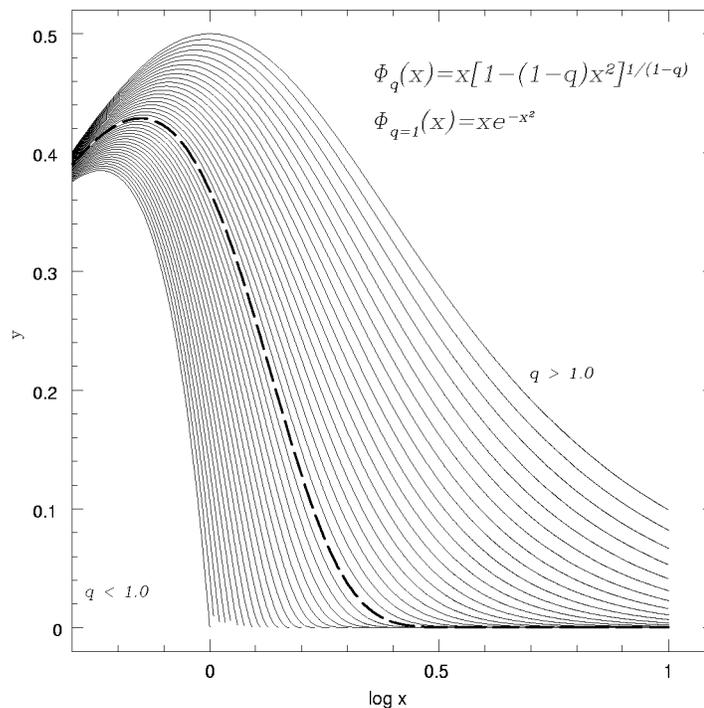


Figura 3.1: Diversas q -maxellianas $\phi_q(x)$ incluindo a Maxwelliana padrão $\phi_{q=1}(x)$ (linha tracejada). As curvas acima da Maxwelliana correspondem ao regime $q > 1$, enquanto as curvas abaixo dela correspondem ao regime $q < 1$. A abscissa é mostrada em escala de $\log x$ para efeito de visualização. B_q e σ de (Eq. 3.3.17) são considerados identicamente iguais à unidade.

Feito todos esses cálculos, finalmente podemos antecipar que o ponto crucial no estudo da evolução do momentum angular estelar é caracterizar a natureza da lei estatística que controla a distribuição das velocidades de rotação. O caráter estatístico, até então, era considerado extensivo e tem sido aclamado pelo uso da distribuição Maxwelliana. Certamente, a falta de uma função de distribuição com um significado físico imediato tem contribuído para a situação ter-se perdurado ao longo desses últimos cinquenta anos. Agora, felizmente, a função de distribuição generalizada, que inclui a Maxwelliana como caso particular, torna possível estabelecer com exatidão a validade da função padrão além de determinar o caráter não extensivo do comportamento rotacional das estrelas.

3.4 Outro caminho

Uma outra abordagem consiste em descrever a distribuição de estrelas em função de sua energia cinética rotacional. Uma análise do número de estrelas de um determinado tipo espectral (ou massa), dentro de um conjunto particular de estrelas (tal como um aglomerado) pode ser realizada da seguinte forma.

Considere um conjunto particular de estrelas, a partir do qual queremos determinar o número de estrelas com energia rotacional entre E e $E + dE$, ou

$$dN(E) = p(E) dE , \quad (3.4.1)$$

onde $p(E)$ é a densidade de probabilidade de estrelas com energia rotacional E . Sabe-se que uma maneira de caracterizar uma distribuição é através da equação diferencial que ela satisfaz. Este caminho foi mostrado por Tsallis e colaboradores[42, 66], dentro do cenário da mecânica estatística não extensiva. Mas, foi originalmente formulado no primeiro trabalho de Planck (1900) sobre a lei da radiação de corpo negro.

As distribuições exponenciais extensivas obedecem à equação diferencial

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -\beta p , \quad (3.4.2)$$

onde β é uma constante. Já as distribuições exponenciais não extensivas seguem uma generalização simples da equação anterior, ou seja,

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -\beta_q p^q . \quad (3.4.3)$$

A equação acima é uma equação diferencial⁴ não-linear, cuja solução é $p(x) = \exp_q(-\beta_q x^\gamma)$.

É interessante notar que a equação (3.4.3) é similar àquela usada por Mayor[96] no estudo do comportamento evolutivo da velocidade rotacional de estrelas em aglomerados

⁴Equação de Bernoulli do tipo

$$\frac{dp}{dx} + h(x)p = g(x)p^\alpha ,$$

onde $h(x) \equiv 0$ e $g(x) \equiv -\gamma x^{\gamma-1} \beta_q$. Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a equação é linear, caso contrário ela é não-linear [95].

abertos. Nesse estudo, Mayor mostrou que as distribuições de $V \sin i$ não poderiam ser reproduzidas se a dependência temporal da rotação tivesse a forma tradicional proposta por Skumanich[97], ou seja, $t^{-\frac{1}{2}}$, onde t é a idade da estrela. E que, por esse motivo, a dependência temporal deveria ter outra forma.

Um outro caminho de determinar $p(x)$, emerge naturalmente da mecânica estatística não extensiva[98, 99, 100, 101, 102, 103] através de uma aproximação variacional na qual uma entropia é maximizada sob vínculos de normalidade e finitude de um momento generalizado da distribuição, ou seja, $\langle \|x\|^\gamma \rangle \equiv \text{constante}$, com $\gamma > 0$. Se for considerado a entropia de Boltzmann-Gibbs $S = -k_\beta \int p(x) \ln p(x) dx$, as formas exponenciais extensivas aparecem como $p(x) \approx \exp[-\beta x^\gamma]$, onde β é um multiplicador lagrangeano; se $\gamma = 1$, $p(x)$ fornece exponenciais; se $\gamma = 2$, $p(x)$ fornece gaussianas. Por outro lado, considerando a entropia não extensiva

$$S_q \equiv k \frac{1 - \int p^q(x) dx}{q - 1}, \quad (3.4.4)$$

surgem as q-exponenciais, ou

$$p(x) \approx e_q^{-\beta_q x^\gamma} \equiv [1 - (1 - q)\beta_q x^\gamma]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (3.4.5)$$

Assim sendo, substituindo x por E na equação (3.4.3), e fazendo $\gamma = 1$, temos para a equação (3.4.1),

$$dN(E) = [1 - (1 - q)\beta_q E]^{\frac{1}{1-q}} dE. \quad (3.4.6)$$

Além disso, quando uma estrela é considerada como um corpo sólido, sua energia rotacional é

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 \quad (3.4.7)$$

onde M e R são a massa e o raio da estrela respectivamente, e ω sua velocidade angular.

Assumindo, também, que esse conjunto particular consiste de estrelas de mesma massa e mesmo raio, podemos encontrar a função de distribuição da energia rotacional estelar de tal conjunto de estrelas determinando a função de distribuição da velocidade angular (ω)

de rotação dessas estrelas. Fazendo uma transformação, de tal forma, que $dE \rightarrow d\omega$, ou seja, $dE = k \omega d\omega$, onde k é uma constante, obtemos então para a equação (3.4.6),

$$dN(\omega) = k \omega \left[1 - (1 - q) \frac{k}{2} \beta_q \omega\right]^{\frac{1}{1-q}} d\omega . \quad (3.4.8)$$

A equação acima fornece, então, o número de estrelas com uma determinada velocidade angular de rotação, a partir de um conjunto particular de estrelas com mesma massa e raio.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo, apresentamos os resultados da aplicação dessa nova função de distribuição (Eq. 4.1.1) nas distribuições observadas de $V \sin i$ de duas amostras diferentes de estrelas, as Plêiades[104] e uma amostra de estrelas subgigantes de campo[105].

Estudaremos as Plêiades porque os aglomerados estelares são sítios astronômicos importantes para o estudo de parâmetros estelares, pois as estrelas de um aglomerado compartilham muitas propriedades, como idade, metalicidade, cinemática e posição, enquanto a magnitude visual, a velocidade rotacional e a binaridade pode diferir de uma estrela para outra.

Decidimos analisar, também, as estrelas subgigantes do trabalho de De Medeiros[105] porque são estrelas de campo, são compostas de estrelas simples e binárias, e são estrelas evoluídas. Além disso, esses objetos têm massas similares às estrelas da amostra das Plêiades.

Assim, englobamos, neste estudo, dois cenários distintos, porém de estrelas semelhantes em massa. Portanto, mesmo com apenas duas amostras, testamos de maneira contundente a aplicação da função de distribuição generalizada proposta por esta Tese.

4.1 Introdução

A distribuição padrão para a velocidade rotacional verdadeira V para uma amostra de estrelas é $F(V) \propto V^2 e^{-V^2}$ como mostrado por Deutsch[8]. Então a distribuição observada da velocidade rotacional projetada $V \sin i$, para uma orientação aleatória dos eixos, deve ser $\phi(y) \propto y e^{-y^2}$, com $y \equiv V \sin i$, como mostrado por Kraft[7]. Portanto, a q-distribuição $\phi_q(y)$ deve reproduzir a distribuição padrão, assim como a função de distribuição $F_q(V)$ (Eq. 3.3.14) recupera a forma de $F(V)$ no caso limite onde $q = 1$. Por esse motivo, neste estudo, utilizamos a equação

$$\phi_q(y) = B_q y \left(1 - (1 - q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad (4.1.1)$$

onde $y \equiv V \sin i$, σ é a largura da distribuição, e B_q é uma constante dependente de q que pode ser determinada analiticamente (ver Apêndices A.1 e B.2), a partir da normalização de $\phi_q(y)$. Mas, para o escopo do presente estudo, podemos desconsiderar a forma analítica de B_q já que podemos determinar seu valor ao ajustar a função de distribuição q-maxwelliana com a distribuição observada de $V \sin i$. Além disso, devido à exigência da positividade da função, é necessário notar que, para valores de q menores do que a unidade, a equação (4.1.1) exibe um limite natural no valor máximo permitido para y . Este limite é mostrado na equação (4.1.2).

Com o intuito de tornar mais precisos nossos resultados e determinar possíveis dependências do parâmetro q com o índice de cor B-V, cada amostra de estrelas foi dividida em vários subgrupos de acordo com seus índices de cor, o que corresponde separar cada amostra por domínios de massa estelar. Então normalizamos os valores de $V \sin i$ com relação à média em cada subgrupo. Além disso, decidimos analisar as velocidades $V \sin i$ a partir de suas distribuições acumuladas, já que histogramas de frequência sofre a influência da escolha da largura dos intervalos. Então comparamos com a seguinte função de

distribuição de probabilidade da q-maxwelliana (Eq. 4.1.1)

$$\Phi_q(y) = \frac{\int_0^y y \left(1 - (1 - q) \frac{y^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{1-q}} dx}{\int_0^{y_{\text{máx}}} y \left(1 - (1 - q) \frac{y^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{1-q}} dx} \quad (4.1.2)$$

$$\text{onde } y_{\text{máx}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sigma}{\sqrt{1-q}} & \text{para } q < 1 \\ \infty & \text{para } q \geq 1 \end{array} \right\}.$$

Esta função foi usada para determinar qual $\Phi_q(x)$ melhor descreve a distribuição observada, e conseqüentemente, os melhores valores de q e σ . O teste estatístico utilizado para tal objetivo foi o teste Kolmogorov–Smirnov¹, que é um teste robusto para distribuições acumuladas.

4.2 Comportamento rotacional das Plêiades

As velocidades rotacionais $V \sin i$ usadas na presente análise foram extraídas do trabalho de Queloz *et al.*[104] sobre a rotação de estrelas no aglomerado das Plêiades. Nossa amostra (Apêndice D.1) inclui as estrelas localizadas no centro do aglomerado bem como aquelas localizadas na coroa. Entretanto, não fizemos qualquer distinção entre estrelas do centro e da coroa, pois a distribuição de $V \sin i$ das estrelas da coroa comparada com a distribuição da rotação para estrelas do centro, não mostra diferença significativa exceto para o intervalo de $B - V$ entre 0.77 e 0.94 (cf. [104]). Essa pequena diferença entre as duas distribuições (centro e coroa) é interpretada por [104] como o resultado de uma contaminação do seus dados devido a umas poucas estrelas que não são membros do aglomerado. Considerando o tamanho da amostra e a pequena quantidade de estrelas não-membros do aglomerado, é esperado que a contaminação não afete significativamente as conclusões deste trabalho. Todos os objetos selecionados são estrelas não-massivas, e formam um conjunto completo e homogêneo de medidas de rotação para estrelas no intervalo de $B - V$ entre 0.4 e 1.4,

¹Veja Apêndice F para maiores informações sobre o teste estatístico Kolmogorov–Smirnov.

correspondendo inversamente a um intervalo de massa que vai de 0.6 massa solar a 1.2 massas solares. Uma discussão completa sobre os procedimentos observacionais, calibração e análise dos erros está disponível no referido trabalho desses autores. Entretanto, é importante ressaltar que os erros individuais das medidas não influenciam significativamente as distribuições de $V \sin i$, como podemos ver na figura 4.1. Como se pode verificar na figura 4.1, a diferença entre a distribuição de $v \sin i$ e a distribuição de sua convolução com os erros é de 11.4%, isso devido principalmente às estrelas com $V \sin i > 40$ km/s que correspondem a 4.1% da amostra.

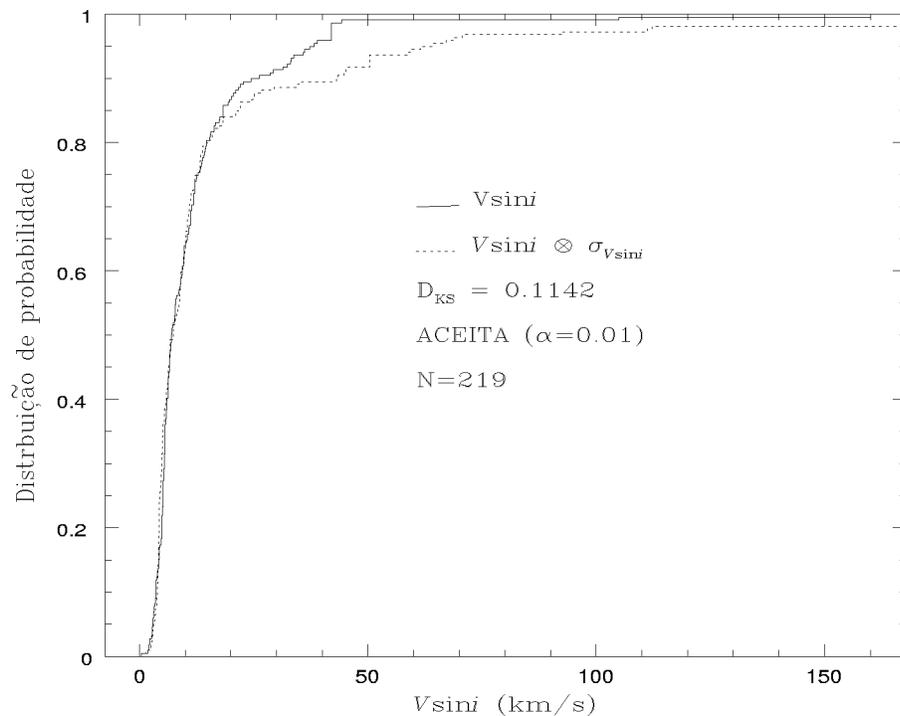


Figura 4.1: Comparação entre a distribuição de probabilidade $F(V \sin i)$ (linha contínua) e sua convolução (linha pontilhada) com os erros das medidas para as Plêiades. O teste Kolmogorov-Smirnov revela que a diferença entre as duas distribuições é de 11%, e que os erros não influenciam no comportamento da distribuição da rotação de 95.9% da amostra.

A figura 4.2 mostra a distribuição de probabilidade e o histograma de frequência relativa.

Neste histograma aparecem dois picos, um bem pronunciado em $B - V = 0.75$ e um aparente em $B - V = 1.35$, sugerindo uma bimodalidade na distribuição. Essa suspeita é motivo para um trabalho mais minuciosas rotações desse aglomerado, mas pode ser desprezada, na presente análise, sem perda de generalidade para o escopo desta tese.

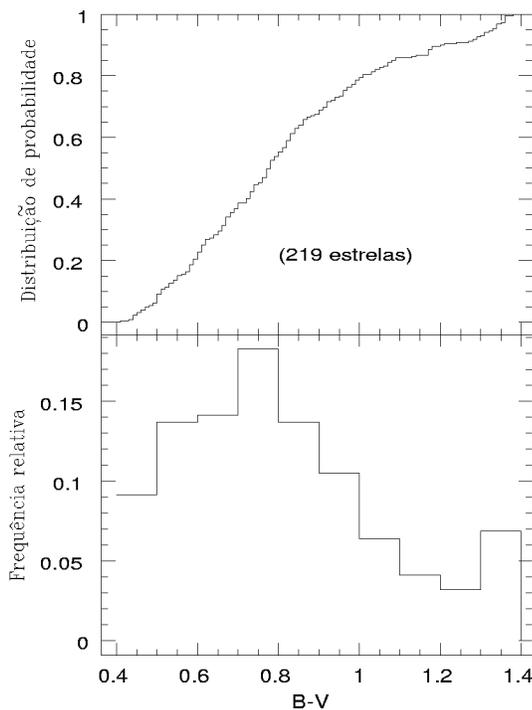


Figura 4.2: O painel superior mostra a distribuição de probabilidade do índice de cor $B - V$ da amostra das Plêiades. O histograma de frequência relativa no painel inferior mostra um pico pronunciado em $B - V = 0.75$ e um aparente em $B - V = 1.35$.

A figura 4.3 mostra a distribuição de $V \sin i$ em km/s em função do parâmetro $B - V$. Nessa figura, podemos ver que a grande maioria (95.9%) das estrelas da mostra tem velocidades $V \sin i < 40$ km/s, 91.3% da amostra tem $V \sin i < 30$ km/s, 86.8% tem $V \sin i < 20$ km/s, e que 64.4% das estrelas tem $V \sin i < 10$ km/s.

Para o presente estudo estatístico, nós fizemos dez diferentes análises, as quais foram

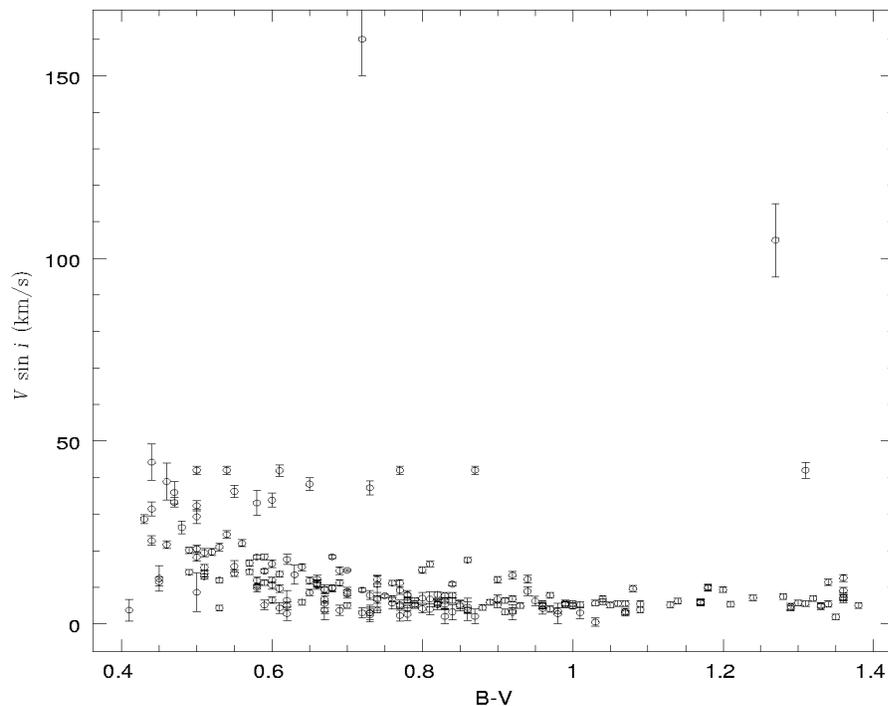


Figura 4.3: $V \sin i$ em função do índice de cor $B - V$ da amostra das Plêiades. Estrelas com $V \sin i < 40 \text{ km/s}$ correspondem a 95.9% da amostra.

realizadas a partir de diferentes divisões da nossa amostra de estrelas. Inicialmente dividimos a amostra em dez intervalos de $B - V$, e daí, regressivamente até analisarmos todo o intervalo de $B - V$ da amostra. Em cada intervalo, nós determinamos o melhor valor para o parâmetro q da equação (4.1.2) que melhor descreve a distribuição das velocidades observadas naquele intervalo considerado. Determinamos também o melhor valor de σ (largura da distribuição) associado àquele parâmetro q . E, por fim, determinamos a probabilidade de que a referida distribuição observada seja ajustada por uma distribuição maxwelliana padrão.

Os valores de q são mostrados nas figuras 4.4 e 4.5 como uma função do valor médio de $B - V$ em cada intervalo.

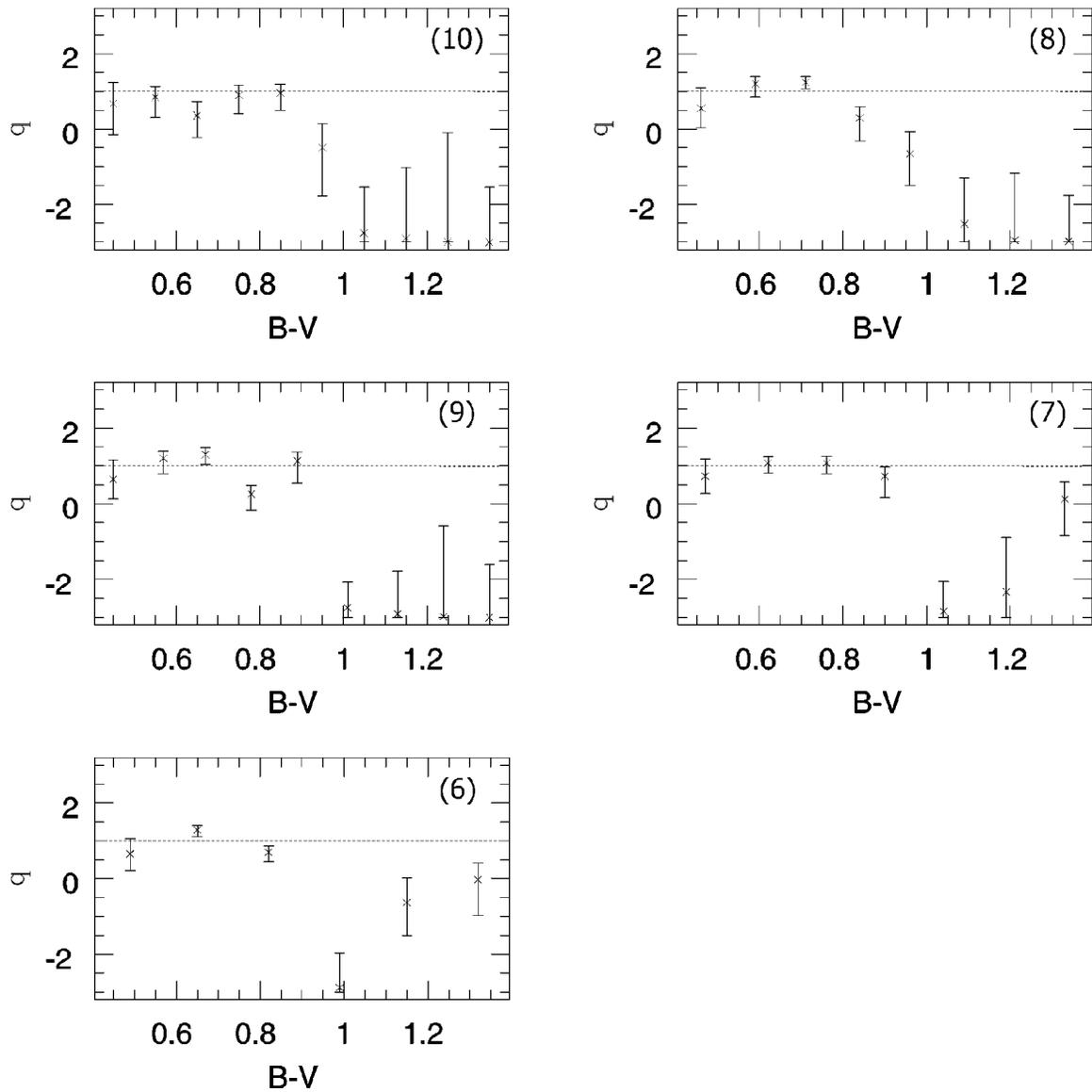


Figura 4.4: Melhores valores de q , em função do valor médio de $B-V$ em cada intervalo, para divisões diferentes da amostra. Em cada painel é mostrado a linha $q = 1$ representando a função Maxwelliana padrão. As barras de erros correspondem aos valores de q determinados para um nível de significância de 0.05. O número no canto superior de cada gráfico indica a quantidade de intervalos de $B-V$ em que foi dividida a amostra das Plêiades, neste caso as primeiras cinco divisões.

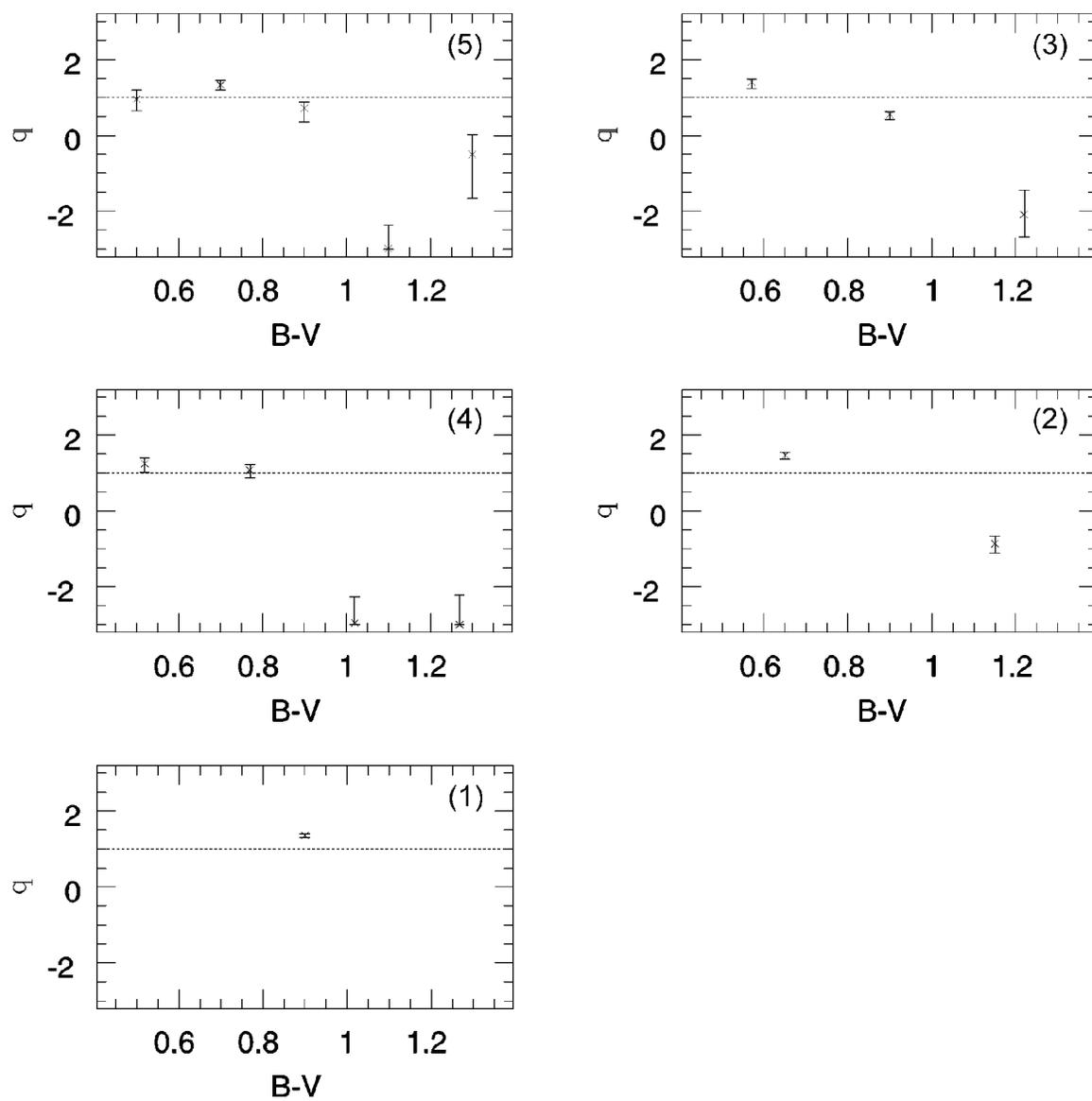


Figura 4.5: Idem Fig. 4.4, para outras cinco divisões diferentes da amostra das Plêiades.

O primeiro ponto a ser observado é que, tomando em conta um nível de significância de 0.05, em todos os casos mostrados nas figuras 4.4 e 4.5, os valores do parâmetro q para $B - V \leq 0.9$ são positivos, e que para valores de $B - V > 0.9$ eles tendem a ser negativos. Porém, é necessário ressaltar que para valores de $B - V > 0.9$ o número reduzido de dados nos intervalos de $B - V$ pode ter comprometido a estatística e sua consequente análise.

Entretanto, é notório que, para intervalos de $B - V$ em que a quantidade de dados é suficiente para realizar o teste estatístico com segurança, as distribuições de $V \sin i$ das estrelas das Plêiades efetivamente não devem obedecer a uma distribuição maxwelliana padrão. Isso é mostrado na figura 4.5, onde a distribuição da rotação observada para a amostra, como um todo, é ajustada por uma função de distribuição generalizada com $q = 1.36^{+0.03}_{-0.05}$ e $\sigma = 0.57$, ou seja, bem distante de $q = 1$, a maxwelliana padrão. Sobretudo, quando nós examinamos as subamostras (para os casos de duas e três divisões), nós observamos que o valor de q não permanece constante, mas é uma função decrescente de $B - V$, portanto, crescente com a massa estelar. Além disso, em geral, estrelas com $B - V > 0.9$ tendem a ter uma distribuição de $V \sin i$ melhor ajustada por uma q -maxwelliana com $q < 1$, e que para os valores mais altos de $B - V$, q torna-se negativo.

Uma mostra detalhada da nossa análise estatística é apresentada na tabela 4.1. Nela, para cada caso, apresentamos os melhores resultados determinados para q e σ , o intervalo de $B - V$, o valor médio de $B - V$ no respectivo intervalo, o valor de máxima probabilidade para o par $(q; \sigma)$, e o número de estrelas de cada intervalo analisado. De imediato, verificamos nesta tabela a tendência de aumento de q com a diminuição de $B - V$.

Quando analisamos as curvas de níveis de probabilidade, estamos querendo mostrar, para alguns intervalos de $B - V$, os valores de q e de σ que podem realmente descrever as distribuições observadas, ou alternativamente, os valores de q e σ que devem ser rejeitados ao se ajustar a distribuição de $V \sin i$ com a q -maxwelliana.

Tabela 4.1: Melhores valores de q determinados por meio do teste Kolmogorov-Smirnov para cada intervalo de $B-V$ correspondente aos painéis da figura 4.5, referente à amostra das Plêiades.

Panel	$\Delta(B - V)$ $\langle B - V \rangle$	q	σ	P_{max}	N
5	0.40 † 0.60	0.95	1.16	0.97	45
	0.51				
	0.60 † 0.80	1.33	0.58	0.87	73
	0.70				
	0.80 † 1.00	0.72	1.16	0.12	54
	0.87				
4	1.00 † 1.20	-2.98	3.00	0.25	24
	1.09				
	1.20 † 1.40	-0.50	1.16	0.50	23
	1.31				
	0.40 † 0.65	1.25	0.88	0.98	62
	0.54				
3	0.65 † 0.90	1.08	0.76	0.86	86
	0.76				
	0.90 † 1.15	-2.95	2.87	0.42	42
	0.99				
	1.15 † 1.40	-2.99	1.89	0.36	29
	1.29				
2	0.40 † 0.73	1.40	0.63	0.96	93
	0.59				
	0.73 † 1.07	0.55	1.27	0.20	89
	0.86				
	1.07 † 1.40	-2.08	1.79	0.47	37
	1.24				
1	0.40 † 0.90	1.47	0.52	0.86	148
	0.67				
	0.90 † 1.40	-0.86	1.70	0.18	71
	1.11				
1	0.40 † 1.40	1.36	0.57	0.21	219
	0.81				

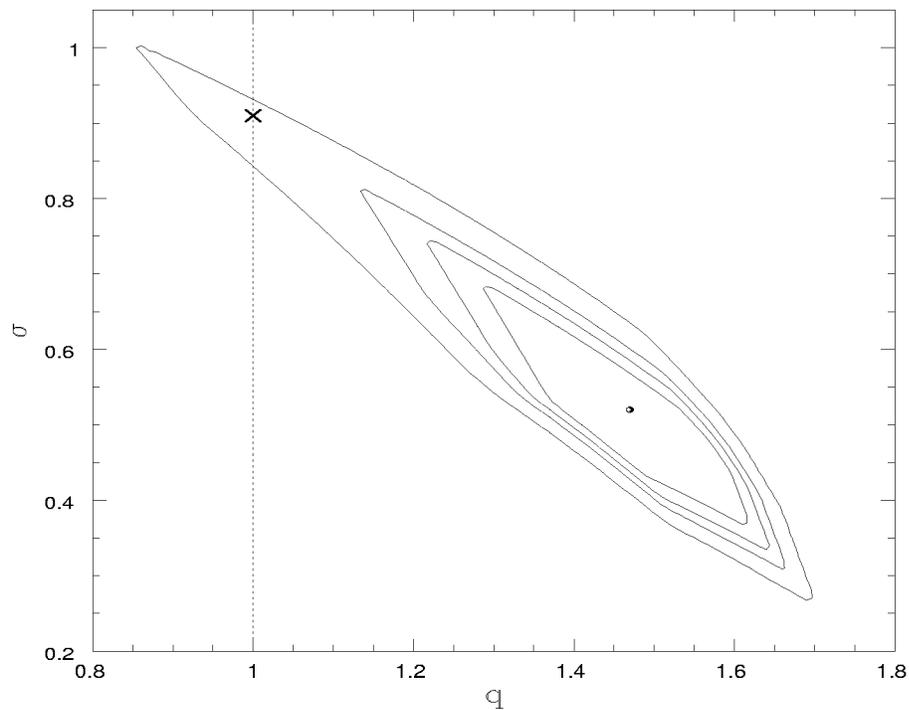


Figura 4.6: Curvas de níveis de probabilidade para o intervalo ($0.40 \leq B - V < 0.90$) da amostra das Plêiades. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ e 0.20 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q -maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ .

Nas figuras 4.6 e 4.7 mostramos exemplos das curvas de probabilidade onde apresentam o comportamento do parâmetro σ , a largura da q -maxwelliana, como uma função do parâmetro q . Está claro que, pelo menos para a presente amostra estelar, a maxwelliana padrão ($q = 1$) para estrelas nos intervalos de $B - V$ entre 0.4 e 0.9 e entre 0.4 e 1.4 está na região de rejeição, ou fora da curva que determina o nível de significância 0.05. Podemos notar também, na figura 4.6, que somente se considerarmos um nível de significância 0.01 é que a maxwelliana padrão pode ser incluída como um possível resultado para ajustá-la à distribuição observada. Já na figura 4.7 essa possibilidade pode ser totalmente descartada.

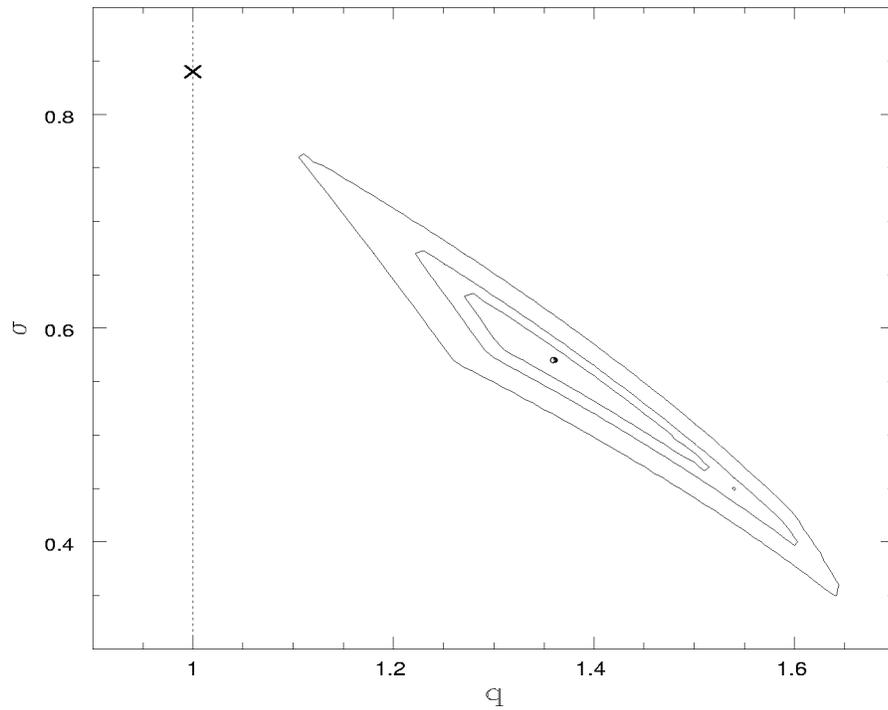


Figura 4.7: Curvas de níveis de probabilidade para o intervalo ($0.40 \leq B - V < 1.40$) da amostra das Plêiades. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05$ e 0.10 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q-maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ .

4.3 Comportamento rotacional de estrelas subgigantes

As velocidades rotacionais $V \sin i$ usadas na presente análise foram extraídas do trabalho de De Medeiros[105] sobre a rotação de estrelas evoluídas de campo. Nossa amostra (Apêndice D.2) inclui as estrelas binárias e simples, e em momento algum fizemos qualquer distinção entre elas. Com isso, arbitrariamente, desconsideramos os efeitos de sincronização que influenciam fortemente a velocidade de estrelas binárias próximas. Todos os objetos selecionados são estrelas não-massivas, e formam um conjunto comprovadamente completo em magnitude visual aparente[106], com medidas de rotação homogêneas para estrelas subgigantes no intervalo de $B - V$ entre 0.35 e 1.30. Uma discussão completa sobre os procedimentos observacionais, calibração e análise dos erros é colocada no referido trabalho desses autores.

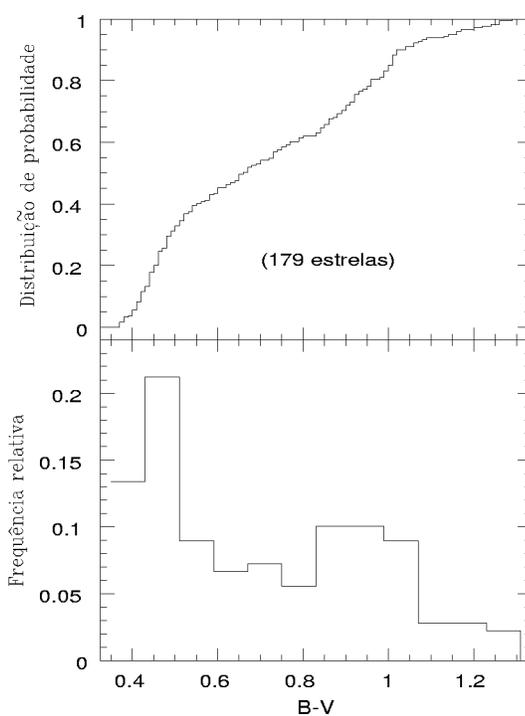


Figura 4.8: O painel superior mostra a distribuição de probabilidade do índice de cor $B - V$ da amostra das subgigantes. O histograma de frequência relativa no painel inferior mostra um pico pronunciado em $B - V = 0.47$ e um mais largo em torno de $B - V = 0.95$.

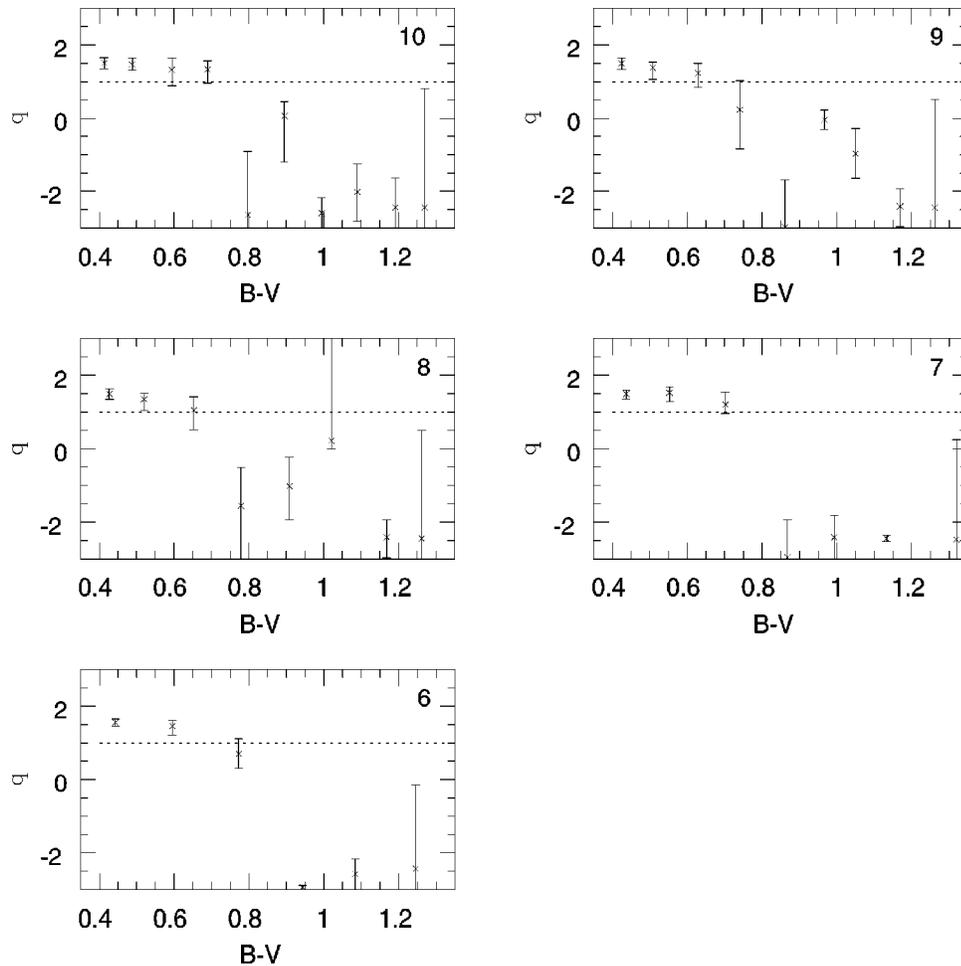


Figura 4.9: Melhores valores de q em função do valor médio de $B-V$ em cada intervalo para divisões diferentes da amostra das subgigantes. Em cada painel é mostrado a linha $q = 1$ representando a função Maxwelliana padrão, e as barras de erros correspondentes determinados com um nível de significância de 0.05. O número no canto superior de cada gráfico indica a quantidade de intervalos de $B-V$ em que foi dividida a amostra das subgigantes, neste caso as primeiras cinco divisões.

Identicamente ao procedimento estatístico e analítico feito para as Plêiades, fizemos o estudo para as estrelas subgigantes da nossa amostra.

Os valores de q são mostrados nas figuras 4.9 e 4.10 como uma função do valor médio de $B - V$ em cada intervalo.

Observamos, também, nas figuras 4.9 e 4.10 que, para valores de $B - V \leq 0.7$, os valores

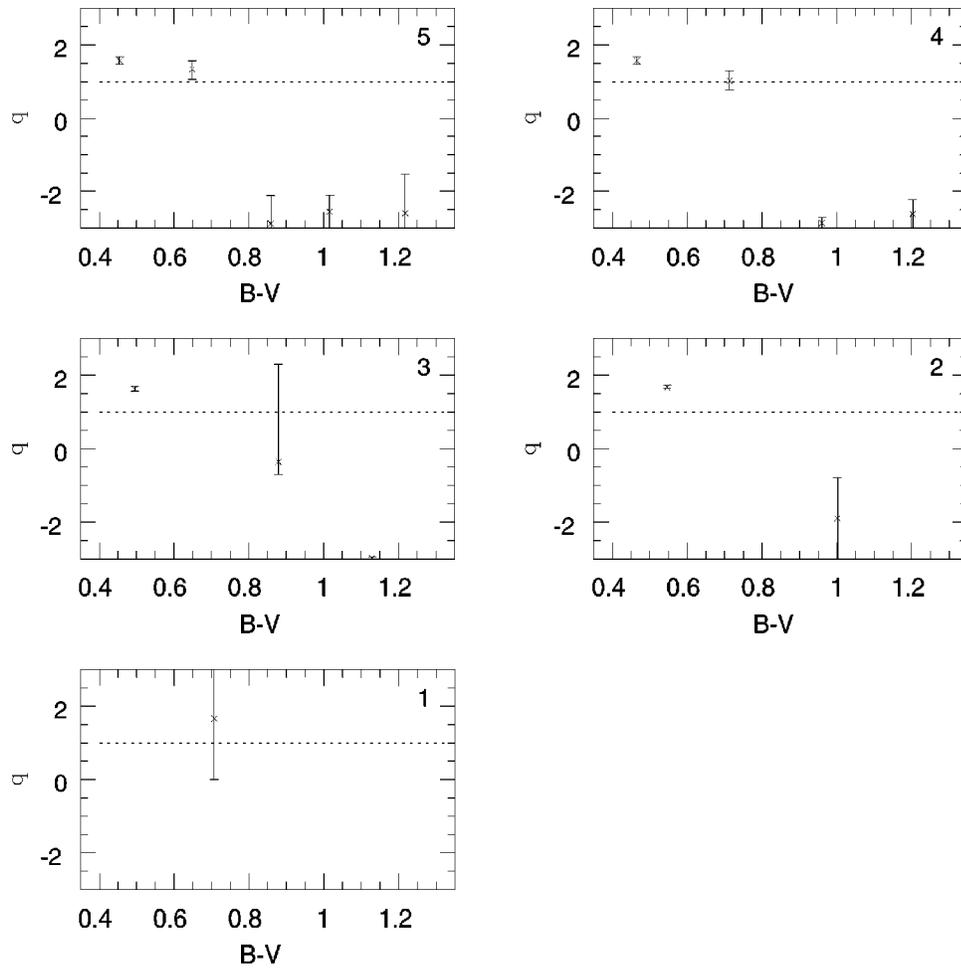


Figura 4.10: Idem Fig. 4.10, para outras cinco divisões diferentes da amostra das subgigantes.

do parâmetro q são positivos e que para valores de $B - V > 0.7$, eles tendem a ser negativos. Conforme figura 4.8, podemos observar que esse valor de $B - V$ também divide a amostra em duas populações de estrelas. Esses valores negativos de q parecem expor uma tendência ainda não substancialmente comprovada.

Podemos observar também que é certo a discordância com a maxwelliana padrão para valores de $B - V$ pequenos. Os resultados mais significativos são detalhados na tabela 4.2.

Observamos na tabela que, exceto para o intervalo de $B - V$ entre 0.60 e 0.85 onde a

Tabela 4.2: Melhores valores de q determinados por meio do teste Kolmogorov-Smirnov para cada intervalo de B-V correspondente aos painéis da figura 4.11, referente à amostra das subgigantes.

Panel	$\Delta(B - V)$ $\langle B - V \rangle$	q	σ	P_{max}	N
5	0.35 † 0.55	1.57	0.41	0.83	71
	0.45				
	0.55 † 0.75	1.34	0.70	0.99	32
	0.65				
	0.75 † 0.95	-2.88	2.96	0.23	35
	0.86				
4	0.95 † 1.15	-2.55	1.51	0.003	32
	1.02				
	1.15 † 1.35	-2.59	2.99	0.16	9
	1.22				
4	0.35 † 0.60	1.57	0.41	0.81	78
	0.47				
	0.60 † 0.85	1.02	0.94	0.74	38
	0.71				
	0.85 † 1.10	-2.86	1.95	0.004	52
	0.96				
3	1.10 † 1.35	-2.61	3.00	0.07	11
	1.20				
	0.35 † 0.68	1.63	0.31	0.87	94
	0.50				
3	0.68 † 1.02	-0.35	1.72	0.04	64
	0.88				
	1.02 † 1.35	-2.97	1.46	0.01	21
1.13					
2	0.35 † 0.85	1.68	0.22	0.74	116
	0.55				
	0.85 † 1.35	-1.89	1.85	0.001	63
1.00					
1	0.35 † 1.35	1.66	0.16	0.04	179
0.71					

distribuição observada é certamente maxwelliana, para todos os outros intervalos de $B - V$ as distribuições de $V \sin i$ não são maxwellianas. Novamente, como para as Plêiades, se observa a tendência de queda do valor do parâmetro q com o índice de cor das estrelas.

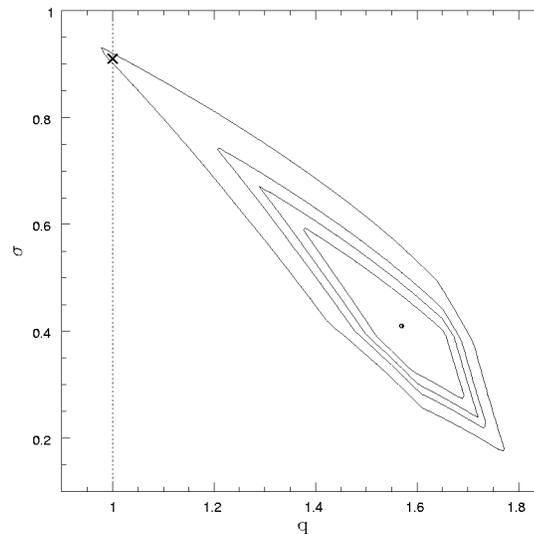


Figura 4.11: Curvas de níveis de probabilidade para o intervalo ($0.35 \leq B - V < 0.60$) da amostra das subgigantes. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ e 0.20 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q-maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ .

Nas figuras 4.11 e 4.12, nós mostramos as curvas de probabilidade que apresentam os melhores resultados para os valores do par $(q; \sigma)$. Vê-se claramente nessas figuras que a maxwelliana padrão se encontra na região de rejeição, ou fora da curva que determina o nível de significância 0.05. Podemos notar que na figura 4.11 a maxwelliana padrão se encontra dentro do nível de significância 0.01, mas apenas na fronteira. Enquanto que, para os outros casos, a maxwelliana padrão se encontra na região de rejeição, o que significa dizer que a maxwelliana padrão é uma distribuição a ser desconsiderada ao se ajustar as distribuições da rotação observada para a subamostra que inclui estrelas com $B - V > 0.60$.

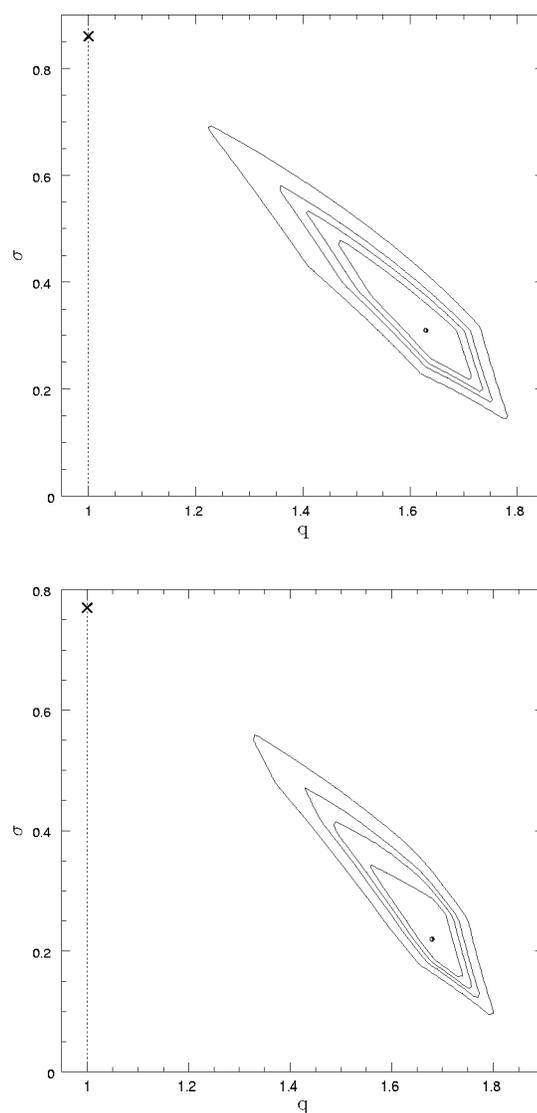


Figura 4.12: Curvas de níveis de probabilidade para a amostra das subgigantes. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ e 0.20 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q-maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ . O painel superior representa as estrelas do intervalo ($0.35 \leq B - V < 0.68$) enquanto o painel inferior representa as estrelas do intervalo ($0.35 \leq B - V < 0.85$)

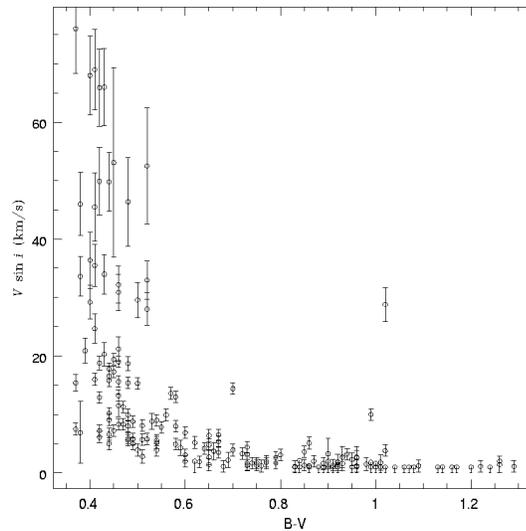


Figura 4.13: $V \sin i$ em função do índice de cor $B-V$ da amostra de estrelas subgigantes. É visível a descontinuidade rotacional em $B - V = 0.55$.

A fim de determinar mais precisamente o comportamento da distribuição da rotação de estrelas subgigantes, dividimos a amostra em duas, sendo que uma parte envolvendo as medidas de rotação estelar localizadas à esquerda da descontinuidade rotacional ($B - V = 0.55$), e a outra parte envolvendo as estrelas à direita dessa descontinuidade (e.g. [11, 107]). Essa descontinuidade pode ser vista na figura 4.13. Os resultados estatísticos são mostrados na tabela 4.3.

A tabela mostra que a tendência de diminuição do valor de q com o aumento do índice de cor não parece ser um fato casual mas uma regra.

Observamos, então, o comportamento da distribuição $V \sin i$ na figura 4.14, onde mostramos estrelas à esquerda e à direita da descontinuidade rotacional.

Podemos notar que a distribuição de $V \sin i$ das estrelas da esquerda da descontinuidade ($B - V \leq 0.55$) não segue a função de distribuição maxwelliana padrão a um nível de significância 0.05 e que, para estrelas à direita da descontinuidade, a distribuição observada tem grandes chances de ser descrita por uma maxwelliana padrão.

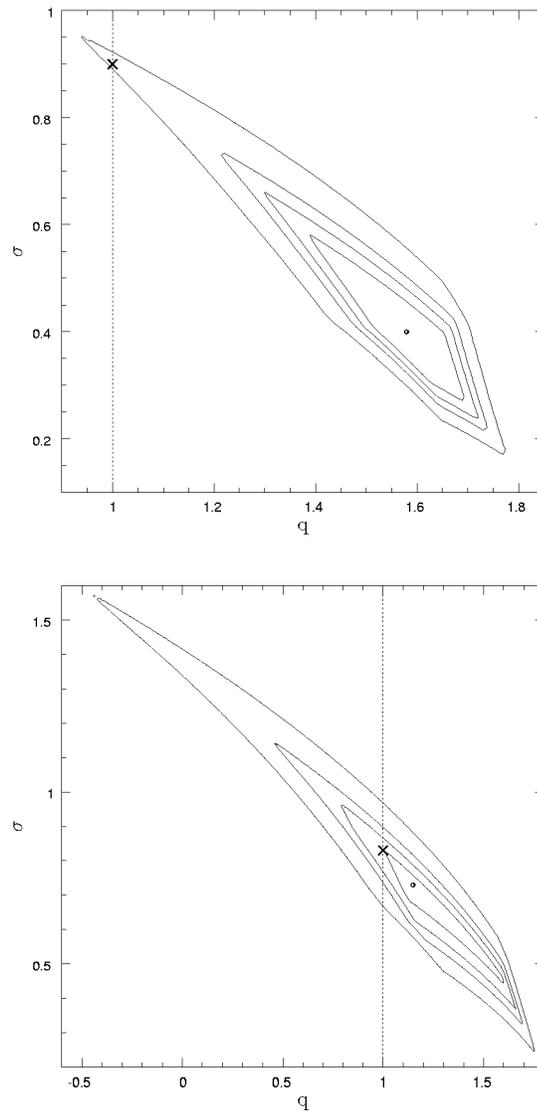


Figura 4.14: Curvas de níveis de probabilidade para estrelas à esquerda e à direita da descontinuidade rotacional. As curvas correspondem aos níveis de significância $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ e 0.20 , ou respectivamente da mais externa para a mais interna. As região fora da curva é a zona de rejeição da hipótese de que as distribuições de $V \sin i$ são descritas por funções q-maxwellianas. O símbolo (\times) representa o melhor σ para a maxwelliana padrão, e o símbolo (\bullet) representa a probabilidade máxima encontrada para q e σ . O painel superior representa as estrelas à esquerda da descontinuidade ($B - V \leq 0.55$) rotacional, enquanto o painel inferior representa as estrelas à direita da descontinuidade ($B - V > 0.55$) rotacional.

Tabela 4.3: Melhores valores de q determinados por meio do teste Kolmogorov-Smirnov para cada intervalo de $B-V$ correspondente às figuras 4.15 e 4.16, respectivamente, antes e depois da descontinuidade rotacional.

$\frac{\Delta(B-V)}{\langle B-V \rangle}$	q	σ	P_{max}	N
≤ 0.55	1.58	0.40	0.76	72
0.46				
> 0.55	1.15	0.73	0.35	64
0.80				

Por fim analisamos as duas amostras juntas. A figura 4.15 mostra a relação entre o parâmetro q da função de distribuição generalizada e o índice de cor $B - V$ para a amostra das Plêiades e das subgigantes.

Pode-se observar nessa figura que, para valores de $B - V \leq 0.55$, as estrelas subgigantes apresentam uma distribuição q -maxwelliana com parâmetro $q > 1$, e que as distribuições observadas das estrelas das Plêiades nesse intervalo de $B - V$ tendem a ter um valor de q menor que a unidade. Nota-se também que para valores intermediários de $B - V$ ambas as amostras tendem a ter um valor de q acima da unidade e que, para outros valores de $B - V$, ambas as amostras têm um comportamento similar de distribuição da velocidade rotacional.

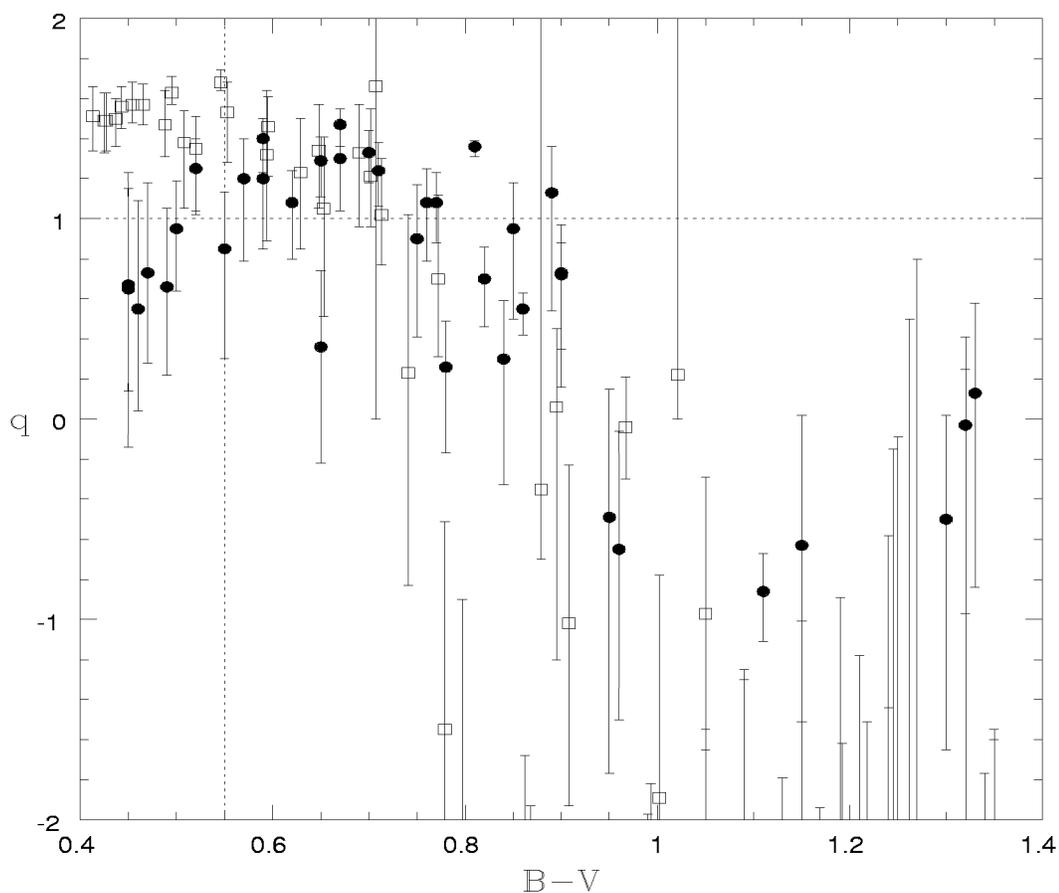


Figura 4.15: Melhores valores de q , e suas respectivas barras de erro determinado para um nível de significância de 0.05, em função de $B - V$. A linha $q = 1$ representa a função Maxwelliana padrão, e a linha vertical representa a descontinuidade rotacional em $B - V = 0.55$ para as estrelas subgigantes. As Plêiades estão representadas por círculos fechados, e as subgigantes por quadrados abertos. Este gráfico mostra os melhores valores determinados para q em todos os intervalos de $B - V$ mostrados nas figuras 4.4, 4.5, 4.10 e 4.11.

Capítulo 5

Conclusões

A principal conclusão a que chegamos é que, baseado na análise estatística que realizamos para as velocidades rotacionais das estrelas nas Plêiades e de estrelas subgigantes de campo, a função de distribuição q -maxwelliana é a função mais apropriada para explicar as distribuições de $V \sin i$ observadas em estrelas destas duas amostras, pois os resultados apresentados nesta Tese a corroboram.

Acredita-se que o momentum angular inicial é estabelecido durante a fase inicial de acrescentamento do gás para uma estrela recém formada, via o encadeamento (“locking”) da velocidade rotacional estelar com a velocidade angular do disco de acrescentamento circumestelar. Quando a taxa de acrescentamento é alta através do disco, o raio onde a magnetosfera estelar se liga ao disco é menor, sua velocidade de rotação Kepleriana é alta e, conseqüentemente, a velocidade rotacional da estrela será maior. Por essa razão, nas regiões de formação de estrelas onde a densidade de partículas do meio é alta, tanto será alta a taxa de acrescentamento como a velocidade rotacional. Esta hipótese é sustentada pela distribuição das velocidades de rotação das estrelas B nas regiões densas da Nebulosa de Orion, onde é observada uma mudança para valores mais altos quando comparado com estrelas localizadas em regiões muito menos densas do referido complexo estelar (cf. [108]). Esse processo explicaria as diferenças encontradas no comportamento rotacional de aglomerados de estrelas e de estrelas de campo[109]. Estes argumentos, bem como os dados

observacionais, indicam que as estrelas que nascem em aglomerados densos giram mais rapidamente. Isso aponta, também, que a velocidade rotacional é o resultado de um processo complexo que envolve fortes interações com o meio onde a estrela foi formada, além da perda de momentum angular via ventos estelares ou via transferência de momentum angular no interior estelar.

Um outro elemento deve ser considerado nos resultados do presente estudo, em particular para $q \neq 1$, é o fato de que estamos analisando a velocidade rotacional projetada. Ainda não há a certeza de que os eixos de rotação das estrelas sejam orientados aleatoriamente, pois essa orientação pode depender do processo de formação estelar e da localização da estrela na Galáxia.

O fato de que $q \neq 1$ para a amostra completa das Plêiades não foi uma total surpresa, pois como tem sido mostrado, teórica e observacionalmente por diversos autores, em diferentes contextos astrofísicos envolvendo a interação de longo alcance (“long-range”) da gravidade[110, 80, 79] a estatística não extensiva de Tsallis dá excelentes resultados.

Por fim, um resultado um tanto inesperado é a tendência observada na qual o valor q da distribuição diminui com o aumento do índice de cor $B - V$. Este comportamento do valor de q da distribuição de $V \sin i$ parece apontar para uma clara dependência da rotação com a massa estelar. As estrelas das Plêiades apresentam parâmetros físicos similares exceto rotação e massa. Portanto, o comportamento de q realmente deveria refletir o efeito da massa estelar sobre a rotação. Mas, é evidente que a verificação dessa relação merece maiores investigações, as quais planejamos realizar em futuros trabalhos estudando outros aglomerados estelares e outras estrelas de campo com diferentes parâmetros físicos como metalicidade, idades e massas. Poderemos também testar esta hipótese para estrelas gigantes vermelhas, cujas velocidades rotacionais dependem, entre outros parâmetros, da profundidade da zona convectiva, da desaceleração magnética, da perda de massa e das interações de marés ocorridas nas binárias.

Concluimos também que as estrelas subgigantes apresentam um comportamento em que as distribuições observadas têm valores de q positivos para valores baixos de $B - V$, e negativos para valores altos. Especialmente para valores baixos de $B - V$, a amostra das subgigantes apresenta distribuições observadas efetivamente descritas pela função de distribuição generalizada, a despeito da maxwelliana padrão.

Analisando o comportamento da rotação ao longo de uma seqüência evolucionária, desde o início da formação estelar até o estágio das gigantes vermelhas, será possível estudar o parâmetro q como uma função do tempo. De antemão, podemos dizer que, baseando-se nos resultados apresentados neste estudo, as estrelas das Plêiades com $B - V \leq 0.55$ apresentam distribuições com $q < 1.0$, e que as estrelas evoluídas desse mesmo intervalo de $B - V$ apresentam valores de q maiores que a unidade. Isso mostra que, pelo menos para as estrelas nessa faixa de massa, o parâmetro q da função de distribuição generalizada parece ser sensível à idade estelar. Se assim o for, esse estudo poderá ajudar a determinar em que idade de uma estrela os diferentes processos físicos estarão afetando sua rotação e, conseqüentemente, a evolução do seu momentum angular.

A presente Tese, portanto, apesar de ser uma primeira aplicação da estatística não extensiva de Tsallis no estudo da rotação estelar, parece indicar que é necessário levar em conta os diferentes mecanismos que exercem papéis importantes sobre a rotação desde o momento da formação estelar. Além disso, mostra que o estudo da natureza e do comportamento evolucionário da distribuição da velocidade de rotacional das estrelas pode ser realizado através de uma função de distribuição generalizada.

Capítulo 6

Perspectivas

Como perspectivas temos o objetivo de testar a função de distribuição q-maxwelliana para estrelas em aglomerados abertos e nuvens moleculares de formação estelar, de modo ampliar ao máximo o intervalo de idades e de massas estelares. As seguintes amostras estão prontas para serem testadas usando a q-maxwelliana proposta, de forma a comprovarem, ou refutarem, a eficácia da referida função de distribuição:

- Estrelas da pré-seqüência principal e estrelas tipo Vega[111];
- Estrelas da nuvem de Orion[112, 113, 114] com idade de 1Myr;
- Estrelas jovens das regiões de Camaleão e do Lobo[115, 116] com idade variando de 1 a 5 Myr;
- Estrelas do aglomerado jovem NGC 2264[117] com idade de 3 Myr;
- Estrelas jovens da associação Sco OB2[118, 119] que englobam os subgrupos estelares "Upper Scorpius", "Upper Centaurus Lupus" e "Lower Centaurus Crux" com idades variando de 4 a 15 Myr;
- Estrelas jovens de baixa massa nos aglomerados abertos IC2391 e IC2602[120] com idades de 30 ± 5 Myr;
- Estrelas F, G e K do aglomerado aberto M34[121, 122] com idade de 250 Myr;
- Hyades[123] com idade de 600 Myr;
- E, estrelas do aglomerado aberto M67[109] com idade de 4 Gyr.

Finalmente, pretendemos testar a função de distribuição q-maxwelliana no estudo da velocidade residual e, também, da velocidade rotacional de estrelas em aglomerados globulares, pois estes são objetos astrofísicos cujas estrelas estão ligadas gravitacionalmente.

Apêndice A

Cálculos das constantes de normalização

As seguintes seções apresentam os cálculos realizados na determinação das constantes de normalização das funções $F_q(\Omega)$ e $\phi_q(y)$.

A.1 Normalização da função $F_q(\Omega)$

A equação (3.3.13) nos fornece

$$A_q \int_0^{\frac{\infty, q \geq 1}{\sqrt{1-q}, q < 1}} 4\pi \Omega^2 \left(1 - (1-q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega = 1. \quad (\text{A.1.1})$$

Fazendo a seguinte substituição de variável, para $q < 1$,

$$u = (1-q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2}$$

e derivando com relação a Ω , temos

$$\Omega d\Omega = \frac{\sigma^2}{2(1-q)} du \quad \text{e} \quad \Omega = \frac{\sigma}{\sqrt{1-q}} u^{\frac{1}{2}}$$

que, substituindo em (A.1.1), nos dá

$$A_{q < 1} 2\pi \frac{\sigma^3}{(1-q)^{3/2}} \int_0^1 u^{1/2} (1-u)^{\frac{1}{1-q}} du = 1. \quad (\text{A.1.2})$$

Rearranjando os termos da equação acima, temos

$$A_{q < 1} \int_0^1 u^{1/2} (1-u)^{\frac{1}{1-q}} du = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{1-q}}{\sigma} \right)^3. \quad (\text{A.1.3})$$

A integral na equação (A.1.3) é uma função Beta¹. Assim, fazendo as substituições

$$u = t, \quad z = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad w = \frac{2-q}{1-q},$$

em (A.1.3), nós obtemos

¹Veja referência [124] para uma revisão das funções Gama e Beta.

$$\mathcal{B}(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (\text{A.1.4})$$

com $\Re\{z\} > 0$ e $\Re\{w\} > 0$, e onde

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.1.5})$$

$$A_{q<1} = \left(\frac{\sqrt{1-q}}{\sigma\sqrt{\pi}} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7-5q}{2-2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}. \quad (\text{A.1.6})$$

Para o regime $q \geq 1$, fazemos a seguinte substituição na equação (A.1.1),

$$u = (q-1) \frac{\Omega^2}{\sigma^2}$$

para, assim, obter

$$A_{q \geq 1} \int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{(1+u)^{\frac{1}{q-1}}} du = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{q-1}}{\sigma} \right)^3. \quad (\text{A.1.7})$$

Em seguida, fazemos

$$u = t, \quad z = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad z + w = \frac{1}{q-1}.$$

Dessa forma, obtendo

$$A_{q \geq 1} = \left(\frac{\sqrt{q-1}}{\sigma\sqrt{\pi}} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)}. \quad (\text{A.1.8})$$

O termo $\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)$ impõe a condição de que $q < \frac{5}{3}$.

Concluindo, as equações (A.1.6) e (A.1.8) são as constantes de normalização para os regimes $q < 1$ e $q \geq 1$, respectivamente, da função de distribuição $F_q(\Omega)$.

Como consequência, a função de distribuição $F_q(\Omega)$ completamente resolvida é, para $q < 1$,

$$F_{q<1}(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{1-q}}{\sigma} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7-5q}{2-2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} \Omega^2 \left(1 - (1-q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad (\text{A.1.9})$$

e, para $q \geq 1$,

$$F_{q \geq 1}(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{q-1}}{\sigma} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)} \Omega^2 \left(1 - (1-q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad (\text{A.1.10})$$

A.2 Normalização da função $\phi_q(y)$

A equação (3.3.17) deve obedecer a seguinte condição de normalização para $\phi_q(y)$:

$$\int_0^{y_{\text{máx}}} \phi_q(y) dy = 1 \quad (\text{A.2.1})$$

ou

$$\int_0^{y_{\text{máx}}} B_q y \left(1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{1-q}} dy = 1 \quad (\text{A.2.2})$$

$$\text{onde } y_{\text{máx}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sigma}{\sqrt{1-q}} & \text{para } q < 1 \\ \infty & \text{para } q \geq 1 \end{array} \right\}.$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis,

$$u = (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \quad \text{para } q < 1 \quad \text{e} \quad u = (q-1) \frac{y^2}{\sigma^2} \quad \text{para } q \geq 1.$$

Que, quando substituídos em (A.2.2), fornecem respectivamente

$$\frac{\sigma^2}{2(1-q)} B_{q<1} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{1-q}} du = 1 \quad (\text{A.2.3})$$

e

$$\frac{\sigma^2}{2(q-1)} B_{q\geq 1} \int_0^\infty \frac{1}{(1-u)^{\frac{1}{q-1}}} du = 1. \quad (\text{A.2.4})$$

Novamente, as integrais nas equações (A.2.3) e (A.2.4) têm formas de funções Beta (cf. equação A.1.4), onde para $q < 1$ fazemos

$$u = t, \quad z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad w - 1 = \frac{1}{1-q},$$

e, para $q \geq 1$ fazemos as substituições

$$u = t, \quad z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad z + w = \frac{1}{q-1}.$$

Dessa forma, obtemos as seguintes constantes de normalização, para os regimes $q < 1$ e $q \geq 1$ respectivamente,

$$B_{q<1} = 2 \left(\frac{\sqrt{1-q}}{\sigma} \right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} \quad (\text{A.2.5})$$

e

$$B_{q \geq 1} = 2 \left(\frac{\sqrt{q-1}}{\sigma} \right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}. \quad (\text{A.2.6})$$

Portanto, os cálculos acima fornecem a função de distribuição $\phi_q(y)$, completamente resolvida, para $q < 1$,

$$\phi_{q < 1}(y) = 2 \left(\frac{\sqrt{1-q}}{\sigma} \right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} y \left(1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad (\text{A.2.7})$$

e, para $q \geq 1$,

$$\phi_{q \geq 1}(y) = 2 \left(\frac{\sqrt{q-1}}{\sigma} \right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} y \left(1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad (\text{A.2.8})$$

Apêndice B

Cálculos dos momentos das funções

A seguir é mostrado como são determinados os momentos das funções $F_q(\Omega)$ e $\phi_q(y)$.

B.1 Momentos da função $F_q(\Omega)$

Os momentos de $F_q(\Omega)$ são determinados da seguinte forma:

$$\langle \Omega^r \rangle = \int_0^{\Omega_{\text{máx}}} \Omega^r F_q(\Omega) d\Omega, \quad \text{onde} \quad \Omega_{\text{máx}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{1-q}}, & \text{para } q < 1; \\ \infty, & \text{para } q \geq 1. \end{cases}$$

com r representando a ordem do momento da função. Assim, quando $r = 1$, $r = 2$ e $r = 3$ temos respectivamente a média, o desvio quadrático médio, e a assimetria da função.

Então,

$$\langle \Omega^r \rangle_{q < 1} = \int_0^{\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}}} \Omega^r \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{1-q}}{\sigma} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7-5q}{2-2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} \Omega^2 \left(1 - (1-q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega \quad (\text{B.1.1})$$

e

$$\langle \Omega^r \rangle_{q \geq 1} = \int_0^{\infty} \Omega^r \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{q-1}}{\sigma} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)} \Omega^2 \left(1 - (1-q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega. \quad (\text{B.1.2})$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis,

$$u = (1-q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \quad \text{para } q < 1 \quad \text{e,} \quad u = (q-1) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \quad \text{para } q \geq 1.$$

e que, substituindo em (B.1.1) e (B.1.2), dão respectivamente

$$\langle \Omega^r \rangle_{q < 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{7-5q}{2-2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}} \right)^r \int_0^1 u^{\frac{r+1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{1-q}} du = 1 \quad (\text{B.1.3})$$

e

$$\langle \Omega^r \rangle_{q \geq 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{q-1}} \right)^r \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{r+1}{2}}}{(1+u)^{\frac{1}{q-1}}} du = 1. \quad (\text{B.1.4})$$

Assim, as integrais nas equações (B.1.3) e (B.1.4) são funções Beta (cf. equação A.1.4), onde para $q < 1$ fazemos uma nova mudança de variáveis

$$u = t, \quad z = \frac{r+3}{2} \quad \text{e} \quad w = \frac{2-q}{1-q},$$

e, para $q \geq 1$ fazemos

$$u = t, \quad z = \frac{r+3}{2} \quad \text{e} \quad z+w = \frac{1}{q-1} .$$

Tais procedimentos dão como resultados, para $q < 1$ e $q \geq 1$ respectivamente,

$$\langle \Omega^r \rangle_{q < 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}} \right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7-5q}{2-2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + \frac{r+3}{2}\right)} \quad (\text{B.1.5})$$

e

$$\langle \Omega^r \rangle_{q \geq 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{q-1}} \right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{r+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)} . \quad (\text{B.1.6})$$

B.2 Momentos de $\phi_q(y)$

Os momentos de $\phi_q(y)$ são determinados da seguinte forma:

$$\langle y^r \rangle = \int_0^{y_{\text{máx}}} y^r \phi_q(y) dy, \quad \text{onde } y_{\text{máx}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{1-q}}, & \text{para } q < 1; \\ \infty, & \text{para } q \geq 1. \end{cases}$$

E, da mesma forma como mostrado na seção anterior, r representa a ordem do momento da função. Assim, para $r = 1$, $r = 2$ e $r = 3$ respectivamente, obtêm-se a média, o desvio quadrático médio, e a assimetria da função.

Então,

$$\langle y^r \rangle_{q < 1} = \int_0^{\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}}} y^r 2 \left(\frac{\sqrt{1-q}}{\sigma} \right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} y \left(1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} dy \quad (\text{B.2.1})$$

e

$$\langle y^r \rangle_{q \geq 1} = \int_0^{\infty} y^r 2 \left(\frac{\sqrt{q-1}}{\sigma} \right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} y \left(1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} dy. \quad (\text{B.2.2})$$

Fazendo as seguintes substituições de variáveis,

$$u = (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2}, \quad \text{para } q < 1 \quad \text{e} \quad u = (q-1) \frac{y^2}{\sigma^2}, \quad \text{para } q \geq 1.$$

que, substituindo em (B.2.1) e (B.2.2), fornecem respectivamente

$$\langle y^r \rangle_{q < 1} = \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}} \right)^r \int_0^1 u^{\frac{r}{2}} (1-u)^{\frac{1}{1-q}} du = 1 \quad (\text{B.2.3})$$

e

$$\langle y^r \rangle_{q \geq 1} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{q-1}} \right)^r \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{r}{2}}}{(1+u)^{\frac{1}{q-1}}} du = 1. \quad (\text{B.2.4})$$

Assim, as integrais nas equações (B.2.3) e (B.2.4) são funções Beta (cf. equação A.1.4), onde para $q < 1$ faz-se

$$u = t, \quad z = \frac{r+2}{2} \quad \text{e} \quad w = \frac{2-q}{1-q},$$

e, para $q \geq 1$,

$$u = t, \quad z = \frac{r+2}{2} \quad \text{e} \quad z + w = \frac{1}{q-1}.$$

Isso fornece, para $q < 1$ e $q \geq 1$ respectivamente,

$$\langle y^r \rangle_{q < 1} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}} \right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + \frac{r+2}{2}\right)} \quad (\text{B.2.5})$$

e

$$\langle y^r \rangle_{q \geq 1} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{q-1}} \right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}. \quad (\text{B.2.6})$$

B.3 Razão entre os momentos

Nesta seção mostramos que existe uma relação simples entre os momentos de $F_q(\Omega)$ e $\phi_q(y)$.

Para o regime $q < 1$,

$$\frac{\langle y^r \rangle_{q < 1}}{\langle \Omega^r \rangle_{q < 1}} = \frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}}\right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + \frac{r+2}{2}\right)}}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-q}}\right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7-5q}{2-2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + \frac{r+3}{2}\right)}} \quad (\text{B.3.1})$$

isso fornece

$$\frac{\langle y^r \rangle_{q < 1}}{\langle \Omega^r \rangle_{q < 1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + \frac{r+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7-5q}{2-2q}\right)\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + \frac{r+2}{2}\right)}. \quad (\text{B.3.2})$$

E, para o regime $q \geq 1$,

$$\frac{\langle y^r \rangle_{q \geq 1}}{\langle \Omega^r \rangle_{q \geq 1}} = \frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{q-1}}\right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{q-1}}\right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{r+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)}} \quad (\text{B.3.3})$$

fornecendo

$$\frac{\langle y^r \rangle_{q \geq 1}}{\langle \Omega^r \rangle_{q \geq 1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{r+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}. \quad (\text{B.3.4})$$

Aplicando, então, o limite para $q \rightarrow 1$ a essa equação, têm-se

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\langle y^r \rangle_{q \geq 1}}{\langle \Omega^r \rangle_{q \geq 1}} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{r+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}. \quad (\text{B.3.5})$$

Com todos os termos dependentes de q tendendo para $\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)$ quando $q \rightarrow 1$, se conclui que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\langle y^r \rangle_{q \geq 1}}{\langle \Omega^r \rangle_{q \geq 1}} = \frac{\langle y^r \rangle_{q=1}}{\langle \Omega^r \rangle_{q=1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2} + \frac{3}{2}\right)}. \quad (\text{B.3.6})$$

Esta é a mesma relação entre momentos encontrada por Chandrasekhar & Münch[5].

Apêndice C

Recuperando a função Maxwelliana a partir de $F_q(\Omega)$

Seja a função de distribuição generalizada

$$F_q(\Omega) = C_q \Omega^2 \left[1 - (1 - q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-q}}$$

onde C_q é a constante de normalização. Aplicando o logaritmo, temos

$$\ln F_q(\Omega) = \ln C_q + \ln \Omega^2 + \frac{1}{1-q} \ln \left[1 - (1 - q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right].$$

Quando se aplica o limite, para $q = 1$, obtêm-se

$$\ln F_{q=1}(\Omega) = \ln C_{q=1} + \ln \Omega^2 + \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \ln \left[1 - (1 - q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right].$$

Usando, então, a regra de L'Hospital no último termo

$$\ln F_{q=1}(\Omega) = \ln C_{q=1} + \ln \Omega^2 + \frac{\frac{\partial}{\partial q} \left\{ \ln \left[1 - (1 - q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right] \right\}_{q=1}}{\frac{\partial}{\partial q} (1 - q)_{q=1}}$$

que nos fornece

$$\ln F_{q=1}(\Omega) = \ln C_{q=1} + \ln \Omega^2 - \frac{\Omega^2}{\sigma^2}.$$

Extraindo a exponencial para todos os termos, temos como resultado

$$e^{\ln F_{q=1}(\Omega)} = e^{\ln C_{q=1} + \ln \Omega^2 - \frac{\Omega^2}{\sigma^2}}$$

ou, ainda,

$$F_{q=1}(\Omega) = C_{q=1} \Omega^2 e^{-\frac{\Omega^2}{\sigma^2}}$$

que é a distribuição Maxwelliana!

Apêndice D

Tabelas

Tabela D.1: Amostra de estrelas das Plêiades e seus respectivos parâmetros usados no presente trabalho.

Designação ^a	B-V ^b	$V \sin i^c$ (km/s)	$e_{V \sin i}^d$ (km/s)	Nota ^{e,f,g}
HII 1015	0.61	9.6	1.1	COR
HII 102	0.68	18.3	0.5	COR
HII 1032	0.73	37.2	1.9	COR
HII 1039	0.96	4.9	0.8	ELO
HII 1061	1.36	7.1	0.8	ELO
HII 1095	0.86	3.6	0.8	ELO
HII 1100	1.09	5.4	0.8	ELO
HII 1110	1.17	5.9	0.8	ELO
HII 1114	1.36	7.3	0.8	ELO
HII 1117a	0.62	6.4	2.6	COR
HII 1117b	0.67	3.6	2.5	COR
HII 1122	0.43	28.6	1.2	COR
HII 1124	0.92	3.5	0.8	ELO
HII 1139	0.44	31.4	1.9	COR
HII 1182	0.6	16.4	1.1	COR
HII 120	0.67	9.4	1.2	COR
HII 1200	0.51	13.7	0.9	COR
HII 1207	0.59	5.1	1.3	COR
HII 1215	0.6	6.5	0.9	COR
HII 1220	0.83	6.3	0.8	ELO
HII 1275	0.79	6.4	0.8	ELO
HII 129	0.83	5.3	1.4	COR
HII 1298	0.96	4.8	0.8	ELO
HII 1332	0.99	5.3	0.8	ELO
HII 1348a	1.05	5.1	0.8	ELO
HII 1348b	1.35	1.8	0.8	ELO
HII 1355	1.36	12.5	0.9	ELO
HII 1392	0.55	15.7	1.6	COR
HII 1454	1.07	3.3	0.8	ELO
HII 1485	1.31	42.0	2.2	ELO
HII 1512	1.21	5.3	0.8	ELO
HII 1514	0.61	13.6	0.8	COR
HII 1516	1.27	105.0	10.0	ELO
HII 152	0.65	11.8	0.9	ELO
HII 1553	1.08	9.6	0.9	ELO
HII 1593	0.72	3.0	1.4	COR
HII 1613	0.49	20.1	0.8	COR
HII 164	0.46	38.9	5.1	COR
HII 1726	0.51	12.9	0.7	COR

Tabela D.1: *continuação*

Designação ^a	B-V ^b	$V \sin i^c$ (km/s)	$e_{V \sin i}^d$ (km/s)	Nota ^{e,f,g}
HII 173a	0.73	7.8	1.2	COR
HII 173b	0.83	6.3	2.2	COR
HII 1756	1.33	5.0	0.8	ELO
HII 1766	0.44	22.7	1.3	COR
HII 1776	0.68	9.8	0.9	ELO
HII 1785	1.36	6.5	0.8	ELO
HII 1794	0.59	11.2	0.8	COR
HII 1797	0.52	19.6	0.9	COR
HII 1856	0.51	15.4	0.9	COR
HII 186	0.76	11.1	0.7	COR
HII 189	1.33	4.7	0.8	ELO
HII 191	1.36	9.1	0.8	ELO
HII 1924	0.57	14.2	0.7	COR
HII 193	0.76	6.8	0.8	ELO
HII 2016	1.18	9.8	0.9	ELO
HII 2027a	0.76	5.6	1.6	COR
HII 2106	0.82	8.0	0.8	ELO
HII 2126	0.82	5.3	0.8	ELO
HII 2147a	0.74	6.9	3.2	COR
HII 2147b	0.74	10.8	2.3	COR
HII 2172	0.58	10.3	0.4	COR
HII 2209	1.34	5.4	0.8	ELO
HII 2278	0.83	7.7	0.8	ELO
HII 2284	0.74	3.7	0.8	ELO
HII 2311	0.78	6.5	0.8	ELO
HII 233	0.49	14.1	0.7	COR
HII 2341	0.67	3.6	0.8	ELO
HII 2366	0.78	4.3	0.8	ELO
HII 2406	0.72	9.2	0.5	COR
HII 2407+	0.91	6.3	0.8	ELO
HII 2462	0.79	4.9	0.8	ELO
HII 248	0.74	12.1	1.1	COR
HII 25	0.44	44.2	4.9	COR
HII 250	0.64	5.9	0.8	ELO
HII 2500	0.58	33.0	3.4	COR
HII 2506	0.55	13.8	0.8	COR
HII 253	0.65	38.2	1.8	COR
HII 2548	1.3	5.7	0.8	ELO
HII 2588	1.13	5.2	0.8	ELO
HII 263	0.84	7.8	0.8	COR

Tabela D.1: *continuação*

Designação ^a	B-V ^b	$V \sin i^c$ (km/s)	$e_{V \sin i}^d$ (km/s)	Nota ^{e,f,g}
HII 2644	0.7	5.0	0.8	ELO
HII 2665	0.79	5.4	0.8	ELO
HII 2741	0.97	7.8	0.8	ELO
HII 2786	0.56	22.0	1.0	COR
HII 2870	0.97	4.0	0.8	ELO
HII 2880	0.82	6.0	0.8	ELO
HII 2881*	0.92	13.3	1.0	ELO
HII 293	0.67	6.6	1.0	COR
HII 296	0.8	14.7	0.9	COR
HII 298	0.84	6.3	0.8	ELO
HII 2984	0.96	5.4	0.8	ELO
HII 3019	1.17	6.0	0.8	ELO
HII 303	0.86	17.4	0.7	COR
HII 3096	0.95	6.2	1.3	COR
HII 3097	0.7	14.6	0.3	COR
HII 3104	1.24	7.1	0.8	ELO
HII 314	0.61	41.9	1.6	COR
HII 3179	0.53	4.3	0.8	ELO
HII 3187	1.14	6.2	0.8	ELO
HII 320	0.84	10.8	0.5	COR
HII 34	0.89	5.9	0.8	ELO
HII 357	1.18	10.0	0.9	ELO
HII 380	1.17	6.0	0.8	ELO
HII 405	0.5	18.2	1.0	COR
HII 430	0.78	6.3	0.8	ELO
HII 451	1.17	5.7	0.8	ELO
HII 476	0.53	21.0	1.0	COR
HII 489	0.59	18.3	0.8	COR
HII 513	1.28	7.4	0.8	ELO
HII 514	0.66	10.5	1.0	COR
HII 522	0.88	4.4	0.8	ELO
HII 571	0.75	7.6	0.5	COR
HII 590	1.32	6.9	0.8	ELO
HII 627	0.47	33.2	1.3	COR
HII 636	0.98	3.5	0.8	ELO
HII 659	0.66	12.2	1.1	COR
HII 676	1.07	5.5	0.8	ELO
HII 739	0.59	14.4	0.6	COR
HII 746	0.77	4.8	0.8	ELO
HII 793	1.38	5.0	0.8	ELO
HII 799	1.29	4.7	0.8	ELO

Tabela D.1: *continuação*

Designação ^a	B-V ^b	$V \sin i^c$ (km/s)	$e_{V \sin i}^d$ (km/s)	Nota ^{e,f,g}
HII 870	0.68	9.7	0.9	ELO
HII 879	1.03	5.6	0.8	ELO
HII 883	1.09	3.8	0.8	ELO
HII 885	0.99	5.2	0.8	ELO
HII 890	1.34	5.4	0.8	ELO
HII 915	1.2	9.3	0.8	ELO
HII 916	0.82	5.6	0.8	ELO
HII 923	0.58	18.2	0.6	COR
HII 97	1.04	6.8	0.8	ELO
HII 974	1.29	4.2	0.8	ELO
HII 996	0.6	11.9	0.8	COR
Ia 317	0.5	42.0	1.2	CCOR
Ib 38	0.66	10.9	0.9	CCOR
Ib 55	0.74	6.6	1.0	CCOR
Ib 78	1.03	0.4	1.1	CCOR
Ib 146a	0.45	12.4	3.5	CCOR
Ib 146b	0.5	8.6	5.3	CCOR
II 293	0.65	8.5	0.9	CCOR
II 359	0.57	16.6	0.9	CCOR
III I059	0.8	4.1	1.2	CCOR
III I391	0.73	2.3	1.8	CCOR
III I679	0.96	4.1	1.5	CCOR
III I700	0.67	9.3	0.9	CCOR
IV 131	0.77	2.2	1.5	CCOR
IV 314	0.98	2.7	2.8	CCOR
Pels 109	1.31	5.5	0.8	CELO
Pels 11	0.82	5.2	1.3	CCOR
Pels 114	1.04	6.0	0.8	CELO
Pels 115	1.06	5.5	0.8	CELO
Pels 12	0.69	11.2	0.9	CCOR
Pels 121	0.62	4.9	1.1	CCOR
Pels 123	0.92	3.1	2.1	CCOR
Pels 124	0.5	20.5	0.9	CCOR
Pels 126	0.58	9.8	1.0	CCOR
Pels 128	0.61	4.3	1.5	CCOR
Pels 137	1.01	3.0	1.6	CCOR
Pels 137	1.01	5.2	0.8	CELO
Pels 138	0.76	5.6	1.6	CCOR
Pels 140	0.45	11.5	1.2	CCOR
Pels 142	0.81	3.9	1.5	CCOR
Pels 143	0.85	5.2	1.2	CCOR

Tabela D.1: *continuação*

Designação ^a	B-V ^b	$V \sin i^c$ (km/s)	$eV \sin i^d$ (km/s)	Nota ^{e,f,g}
Pels 146	0.62	17.6	1.4	CCOR
Pels 15	0.54	24.4	1.1	CCOR
Pels 150	0.48	26.3	1.7	CCOR
Pels 151	0.67	5.5	2.2	CCOR
Pels 162	0.91	3.2	0.8	CELO
Pels 17	0.5	29.3	2	CCOR
Pels 173	0.41	3.7	3	CCOR
Pels 174	0.54	42.0	1.2	CCOR
Pels 18	0.58	11.8	1.0	CCOR
Pels 189	0.93	4.9	0.8	CELO
Pels 19	0.85	4.8	1.4	CCOR
Pels 192	1.34	11.4	0.9	CELO
Pels 20	0.61	9.6	1.1	CCOR
Pels 22	0.9	12.1	0.9	CELO
Pels 23	0.55	36.2	1.7	CCOR
Pels 28	0.94	8.9	1.2	CCOR
Pels 29	0.6	33.8	1.9	CCOR
Pels 30	0.9	6.7	1.1	CCOR
Pels 31	0.94	12.2	1.0	CCOR
Pels 34	0.69	3.6	1.4	CCOR
Pels 35	0.51	19.4	1.1	CCOR
Pels 37	0.63	13.4	2.6	CCOR
Pels 38	0.73	3.1	2.0	CCOR
Pels 39	0.83	2.0	2.0	CCOR
Pels 4	0.78	2.6	1.7	CCOR
Pels 40	0.53	11.9	0.7	CCOR
Pels 41	0.9	5.1	0.8	CELO
Pels 43	0.92	6.8	0.8	CELO
Pels 44	0.86	3.9	3.1	CCOR
Pels 45	0.78	7.8	1.3	CCOR
Pels 46	0.7	8.1	1.2	CCOR
Pels 47	0.86	4.5	1.5	CCOR
Pels 5	0.66	11.1	0.9	CCOR
Pels 50	0.8	7.0	1.5	CCOR
Pels 56	0.77	42.0	1.2	CCOR
Pels 59	0.99	5.6	0.8	CELO
Pels 6	0.47	35.9	3.1	CCOR
Pels 63	1.07	2.9	0.8	CELO
Pels 66	1.0	4.9	0.9	CELO
Pels 68	0.81	6.7	2.0	CCOR
Pels 69	0.81	16.3	0.8	CCOR

Tabela D.1: *continuação*

Designação ^a	B-V ^b	$V \sin i^c$ (km/s)	$e_{V \sin i}^d$ (km/s)	Nota ^{e,f,g}
Pels 7	0.62	2.7	1.9	CCOR
Pels 71	0.77	9.1	1.1	CCOR
Pels 71	0.77	11.1	0.9	CELO
Pels 72	0.72	160.0	10.0	CELO
Pels 75	0.87	42.0	1.2	CCOR
Pels 78	0.7	8.8	1.1	CCOR
Pels 79	0.73	2.8	1.7	CCOR
Pels 8	0.64	15.5	1.0	CCOR
Pels 83	0.69	14.5	1.1	CCOR
Pels 89	0.84	3.2	2.1	CCOR
Pels 9	1.0	5.5	0.8	CELO
S 151x	0.46	21.6	1.0	CCOR
S 183x	0.5	32.3	1.4	CCOR
V 88	0.77	5.2	1.2	CCOR
V 198a	0.6	10.5	1.1	CCOR
V 198b	0.87	2.0	2.0	CCOR
V 308	0.78	8.0	1.0	CCOR

^a Identificação da estrela como aparece no trabalho de Queloz *et al.*[104];

^b Índice de cor $B - V$;

^c Velocidade rotacional projetada $V \sin i$;

^d Incerteza na medida da velocidade rotacional projetada;

^e COR corresponde às medidas obtidas utilizando o espectrógrafo CORAVEL;

^f ELO corresponde às medidas obtidas utilizando o espectrógrafo ELODIE;

^g Estrelas da região da coroa do aglomerado são identificadas por uma letra C à frente das iniciais do espectrógrafo, enquanto as estrelas da região central do aglomerado não apresentam tal letra.

Tabela D.2: Amostra das estrelas subgigantes e seus parâmetros usados no presente trabalho.

Designação ^a	Tipo espectral	$B - V^b$	$V \sin i^c$ (km/s)	$\text{erro}_{V \sin i}^d$ (km/s)	Binaridade ^e
HD224617	F4IV	0.42	49.9	5.8	...
HD127821	F4IV	0.41	45.5	5.8	...
HD15798	F4IV	0.45	7.2	1.0	SB
HD99028	F4IV	0.41	16.0	1.0	...
HD1343	F4IV-5	0.37	7.5	1.0	...
HD155078	F5IV	0.52	52.5	9.9	SB?
HD22701	F5IV	0.37	76.0	7.6	...
HD8799	F5IV	0.42	65.9	6.6	...
HD125451	F5IV	0.38	46.0	5.4	...
HD29169	F5IV	0.38	6.9	5.3	SB
HD6680	F5IV	0.4	36.4	4.8	...
HD150012	F5IV	0.41	35.5	3.6	...
HD191570	F5IV	0.38	33.6	3.4	...
HD11151	F5IV	0.43	34.0	3.4	...
HD131040A	F5IV	0.4	29.2	2.9	...
HD18404	F5IV	0.41	24.7	2.5	...
HD102713	F5IV	0.46	11.5	1.9	SBO
HD208703	F5IV	0.37	15.4	1.4	...
HD196524	F5IV	0.44	49.8	5.0	SBO
HD144069	F5IV	0.45	19.4	1.0	SBO
HD218804	F5IV	0.44	17.8	1.0	SB
HD186185	F5IV	0.46	15.6	1.0	SB
HD176095	F5IV	0.46	13.2	1.0	...
HD137052	F5IV	0.44	10.2	1.0	SBO
HD158170	F5IV	0.58	8.0	1.0	...
HD3229	F5IV	0.44	5.0	1.0	...
HD212487	F5IV:	0.49	8.8	1.0	...
HD176903	F5IV-5	0.48	46.4	7.6	...
HD75487	F5IV-5	0.39	20.9	2.1	...
HD43386	F5IV-5	0.42	18.8	1.2	...
HD61421	F5IV-5	0.42	6.1	1.0	SBO
HD162003	F5IV-5	0.42	12.9	1.0	...
HD184663	F6IV	0.41	69.0	6.9	...
HD213051	F6IV	0.4	68.0	6.8	...
HD199766	F6IV	0.46	32.2	3.2	SBO
HD197373	F6IV	0.46	30.9	3.1	...
HD133484	F6IV	0.46	21.2	2.1	...
HD16399	F6IV	0.44	16.5	1.8	SB
HD105678	F6IV	0.5	29.6	3.0	...
HD82328A	F6IV	0.46	8.3	1.0	...
HD60532	F6IV	0.51	8.1	1.0	...

Tabela D.1: *continuação*

Designação ^a	Tipo espectral	$B - V^b$	$V \sin i^c$ (km/s)	$\text{erro}_{V \sin i}^d$ (km/s)	Binaridade ^e
HD78154A	F6IV	0.49	5.8	1.0	...
HD124570	F6IV	0.54	5.6	1.0	...
HD89449	F6IV	0.45	17.3	1.0	...
HD120136	F6IV	0.48	15.4	1.0	SB?
HD25621	F6IV	0.5	15.3	1.0	...
HD181096	F6IV:	0.44	6.6	1.0	...
HD139460	F6IV-5	0.53	8.8	1.4	...
HD156350	F6IV-5	0.51	2.8	1.1	...
HD13871	F6IV-5	0.44	9.1	1.0	...
HD207978	F6IV-5	0.42	7.2	1.0	...
HD209942	F6IV-5	0.52	5.8	1.0	...
HD5156	F6IV-5	0.44	15.8	1.0	...
HD163989	F6IV-5s	0.49	5.0	1.0	...
HD219291	F6IVw	0.45	53.1	16.2	...
HD6706	F7IV	0.43	66.0	6.6	...
HD16765	F7IV	0.52	33.0	3.3	...
HD18262	F7IV	0.48	9.9	1.0	...
HD216385	F7IV	0.48	5.9	1.0	...
HD100219	F7IV	0.54	5.2	1.0	SB?
HD151769	F7IV	0.47	11.3	1.0	SB?
HD6301	F7IV-5	0.43	20.3	2.0	...
HD119992	F7IV-5	0.47	8.3	1.0	...
HD4813	F7IV-5	0.5	3.9	1.0	...
HD29859	F7IV-5	0.54	9.0	1.0	...
HD8774	F7IVbvs	0.46	19.0	1.0	...
HD130945	F7IVw	0.48	18.7	1.2	...
HD144284	F8IV	0.52	28.0	2.8	SBO
HD122563	F8IV	0.9	3.3	2.6	SB
HD157853	F8IV	0.73	3.2	2.2	...
HD400	F8IV	0.48	5.6	1.0	...
HD12558	F8IV	0.54	3.9	1.0	...
HD196885	F8IV:	0.55	7.8	1.0	SB
HD127986	F8IVw	0.51	5.7	1.0	...
HD26923	G0IV	0.59	4.3	1.3	...
HD13421	G0IV	0.56	9.9	1.0	...
HD150680	G0IV	0.65	4.8	1.0	SBO
HD66011	G0IV	0.57	13.6	1.0	...
HD121370	G0IV	0.58	13.0	1.0	SBO
HD142267	G0IV	0.6	2.0	1.0	SBO
HD137510	G0IV-5	0.6	6.9	1.0	SB?
HD139777A	G0IV-5	0.67	5.4	1.0	...

Tabela D.1: *continuação*

Designação ^a	Tipo espectral	$B - V^b$	$V \sin i^c$ (km/s)	$\text{erro}_{V \sin i}^d$ (km/s)	Binaridade ^e
HD33021	G1IV	0.62	2.0		...
HD217014	G2.5IV	0.67	6.5	1.0	SB
HD218640	G2IV	0.65	6.4	1.0	...
HD12235	G2IV	0.62	5.2	1.0	...
HD9562	G2IV	0.64	4.2	1.0	...
HD89010	G2IV	0.67	3.5	1.0	SB
HD126868A	G2IV	0.7	14.4	1.0	SB?
HD202582	G2IV+4	0.6	3.1	1.0	...
HD34411	G2IV-5	0.63	1.9	1.0	...
HD12583	G3IV	0.98	1.5	1.2	...
HD156846	G3IV	0.58	4.9	1.0	...
HD127243	G3IV	0.85	3.6	1.0	...
HD144585	G4IV-5	0.66	3.7	1.5	...
HD164507	G5IV	0.69	2.2	1.3	...
HD190771	G5IV	0.65	2.7	1.2	...
HD5268	G5IV	0.92	1.9		...
HD26913	G5IV	0.7	3.9	1.0	...
HD162076	G5IV	0.94	3.2	1.0	...
HD219834A	G5IV	0.8	3.1	1.0	SBO
HD161797A	G5IV	0.75	1.7	1.0	...
HD39881	G5IV	0.65	1.4	1.0	...
HD10697	G5IV	0.75	1.3	1.0	...
HD125184	G5IV	0.73	1.3	1.0	...
HD157347	G5IV	0.68	1.1	1.0	...
HD80956	G5IV	0.87	2.0	1.0	...
HD154160	G5IV:	0.76	1.2	1.0	...
HD196755	G5IV+4	0.72	3.3	1.0	...
HD176668	G5IV+5	0.93	1.6	1.3	...
HD82074	G6IV	0.84	2.1		...
HD73752	G6IV	0.73	4.4	1.0	SB
HD190360A	G6IV+5	0.73	1.7	1.2	...
HD173949	G7IV	0.96	2.6	1.2	...
HD188512	G8IV	0.86	1.2		...
HD8375	G8IV	0.83	1.0		SB
HD20618	G8IV	0.86	1.0		...
HD73593	G8IV	0.99	1.0		...
HD203358	G8IV	1.08	1.0		...
HD217944	G8IV	0.9	1.0		...
HD25893	G8IV	0.86	5.1	1.0	...
HD170829	G8IV	0.79	1.7	1.0	SBO
HD217107	G8IV	0.74	1.7	1.0	SBO

Tabela D.1: *continuação*

Designação ^a	Tipo espectral	$B - V^b$	$V \sin i^c$ (km/s)	$\text{erro}_{V \sin i}^d$ (km/s)	Binaridade ^e
HD182572	G8IV	0.77	1.7	1.0	...
HD53329	G8IV	0.91	1.3	1.0	...
HD73017	G8IV	0.96	1.2	1.0	...
HD218101	G8IV	0.83	1.1	1.0	...
HD20277	G8IV	0.99	10.0	1.0	SB
HD215243	G8IV	0.48	8.0	1.0	SB?
HD171994	G8IV	0.9	2.0	1.0	...
HD27536	G8IV:	0.91	1.0		...
HD46480	G8IV-5	0.89	1.6	1.0	...
HD104304	G8-K0IV	0.77	2.0	1.0	...
HD94132	G9IV	0.99	1.0		SB?
HD100030	G9IV	0.88	1.0		SB?
HD20559	G9IV	1.04	1.0		...
HD125538	G9IV	1.06	1.0		...
HD175225	G9IVa	0.84	1.0		SB?
HD106225	K0IV	1.02	28.8	2.9	SBO
HD19826	K0IV	0.93	2.7	1.8	SB
HD10909	K0IV	0.96	2.7	1.8	SBO
HD152781	K0IV	0.92	1.8	1.4	...
HD152153	K0IV	1.26	1.4	1.4	...
HD645	K0IV	1.01	1.8	1.3	...
HD170811	K0IV	0.99	1.8		...
HD198149	K0IV	0.92	1.4		...
HD8779	K0IV	1.24	1.0		SB?
HD2589	K0IV	0.84	1.0		...
HD4440	K0IV	1.01	1.0		...
HD11949	K0IV	1.01	1.0		...
HD21467	K0IV	0.95	1.0		...
HD23249	K0IV	0.92	1.0		...
HD71952	K0IV	1.01	1.0		...
HD140301	K0IV	1.16	1.0		...
HD145148	K0IV	1.0	1.0		...
HD219668	K0IV	1.07	1.0		...
HD223524	K0IV	1.13	1.0		...
HD82734	K0IV	1.02	3.8	1.0	...
HD99491	K0IV	0.79	2.6	1.0	...
HD191026	K0IV	0.85	1.3	1.0	...
HD104307	K0IV	1.22	1.1	1.0	SB
HD71071	K1IV	0.95	2.3	1.1	SBO
HD5286	K1IV	1.0	1.6		...
HD32503	K1IV	1.2	1.0		SB

Tabela D.1: *continuação*

Designação ^a	Tipo espectral	$B - V$ ^b	$V \sin i$ ^c (km/s)	erro $V \sin i$ ^d (km/s)	Binaridade ^e
HD191067	K1IV	1.02	1.0		SB
HD22072	K1IV	0.89	1.0		SB?
HD142980	K1IV	1.14	1.0		SB?
HD92588	K1IV	0.88	1.0		...
HD165438	K1IV	0.96	1.0		...
HD197964	K1IV	1.04	1.0		...
HD76291	K1IV	1.09	1.2	1.0	...
HD142091	K1IVa	1.0	1.0		SB?
HD29613	K1IVa	1.06	1.0		...
HD104055	K2IV	1.26	2.0		...
HD10486	K2IV	1.01	1.0		...
HD121146	K2IV	1.17	1.0		...
HD201196	K2IV	1.01	1.0		...
HD147142	K2IV	1.29	1.1	1.0	...
HD94386	K3IV	1.16	1.0		...

^a Identificação da estrela no catálogo Henry Drapper;

^b Índice de cor $B - V$;

^c Velocidade rotacional projetada $V \sin i$;

^d Incerteza na medida da velocidade rotacional projetada;

^e A simbologia SB, SBO e SB? indica que a estrela é parte integrante de um sistema binário;

Apêndice E

Sobre o teste Kolmogorov-Smirnov

O teste KS é uma das ferramentas estatísticas mais importantes, e talvez a mais poderosa, no estudo de testes de melhor ajuste de distribuições cumulativas. A literatura disponível sobre o teste estatístico KS é extensa, desde livros[125, 126] que discorrem sobre o assunto, a artigos[127, 128, 129, 130, 131] que atualizam e enriquecem ainda mais essa ferramenta. O teste Kolmogorov-Smirnov[132] é aplicável às distribuições espalhadas que são funções de uma variável independente, isto é, para conjuntos de dados onde cada ponto pode ser associado com um simples número. Em tais casos, a lista de dados pode ser facilmente convertida em um estimador $S_N(x)$ não tendencioso da função de distribuição cumulativa da distribuição de probabilidade da qual ela foi originada: se os N eventos estão localizados nos valores x_i , $i = 1, \dots, N$, então $S_N(x)$ é uma função que dá a fração de dados à esquerda de um dado valor x . Esta função é obviamente constante entre x_i 's consecutivos (ordenados em ordem crescente), e dá um salto de valor constante, $1/N$, em cada x_i . Diferentes funções de distribuição, ou conjunto de dados, dão diferentes funções de distribuição acumulada estimada pelo procedimento acima. Entretanto, todas as funções concordam como o menor valor permitido de x (onde eles são zero), e com o maior valor de x permitido (onde eles são iguais a um). Por isso, é o comportamento entre o maior e o menor valor que distingue as distribuições. Um aspecto geral do teste KS é que ele é invariante sob qualquer reparametrização de x . O valor D do teste KS é definido como sendo o valor máximo

da diferença absoluta entre duas funções de distribuição. Dessa forma, comparando um conjunto de dados, $S_N(x)$, com uma função de distribuição cumulativa conhecida $P(x)$, a estatística KS é

$$D = \max_{-\infty < x < \infty} | S_N(x) - P(x) |$$

enquanto que, comparando duas funções de distribuição cumulativa, $S_{N_1}(x)$ e $S_{N_2}(x)$, a estatística KS é

$$D = \max_{-\infty < x < \infty} | S_{N_1}(x) - S_{N_2}(x) |.$$

Assim, pode-se usar o teste KS para comparar um conjunto de dados com uma função de distribuição qualquer, como também, comparar dois conjuntos de dados diferentes. O que faz o teste KS útil é que sua distribuição no caso de hipótese nula (conjunto de dados originários da mesma distribuição) pode ser calculada, pelo menos para uma aproximação útil; dando assim um número significativo de qualquer valor de D não nulo. A função que entra no cálculo da probabilidade pode ser escrita como:

$$Q_{KS}(\lambda) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-2j^2\lambda^2}$$

que é uma função monotônica com valores limites $Q_{KS}(0) = 1$ e $Q_{KS}(\infty) = 0$. Em termos desta função, o nível de significância de um valor observado de D (prova contrária da ¹hipótese nula) é dada pela fórmula

$$Probabilidade(D > observado) = Q_{KS}([\sqrt{N_e} + 0.12 + 0.11/\sqrt{N_e}]D)$$

onde N_e é o número efetivo de dados; $N_e = N$ para o caso de uma distribuição, e $N_e = (N_1 N_2)/(N_1 + N_2)$ para o caso de se ter duas distribuições, onde N_1 é o número de dados da primeira distribuição e N_2 é o número de dados da segunda. A natureza da aproximação envolvida na equação da probabilidade é que ela torna-se assintoticamente precisa quando N_e torna-se grande, mas já é muito boa para $N_e \geq 4$. Por fim, D é, resumidamente, a

¹ $D = 0$, ou seja, as duas distribuições são idênticas.

probabilidade de que duas distribuições sejam diferentes; e P é a probabilidade de que as duas distribuições, sejam iguais.

Apêndice F

Publicações



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Physica A ■ (■■■■) ■■■–■■■

PHYSICA A

www.elsevier.com/locate/physa

Tsallis maximum entropy distribution function for stellar rotational velocities in the Pleiades

B.B. Soares, J.C. Carvalho, J.D. do Nascimento Jr., J.R. De Medeiros*

Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 59072-970 Natal, RN., Brazil

Received 14 March 2005; received in revised form 2 August 2005

Abstract

In the present study we use a Tsallis maximum entropy distribution law to fit the observed distribution of projected rotational velocity measurements of stars in the Pleiades open cluster. This new distribution function which generalizes the Maxwell–Boltzmann one is derived from the non-extensivity generalization of Boltzmann–Gibbs entropy. We present a comparison between results from the generalized distribution and the Maxwellian law and show that the generalized distribution fits more closely the data.

© 2005 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Stars; Rotation; Distribution; Main sequence; Open cluster

1. Introduction

Rotation is one of the most important observable in stellar astrophysics, driving strongly the evolution of stars, providing also valuable informations on stellar magnetism, mixing of chemical abundances in stellar interior, tidal interaction in close binaries, and engulfing of brown dwarfs and planets. In addition, if the present value of the rotational velocity of stars at a given evolutionary stage reflects the original angular momentum with which they were formed, the behaviour of the distribution of rotational velocity may also be used to study some of the characteristics of the physical processes controlling star formation.

One of the most puzzling questions in stellar astrophysics along the past 50 years is that concerning the nature of the statistical law controlling the distribution of stellar rotational velocity, in spite of the large acceptance that stellar rotation axes have a random orientation [1]. Chandrasekhar and Munch [2] in the middle of the past century were the first to derive analytically the distribution of stellar projected rotational velocity, on the basis of a Gaussian distribution. In their approach, these authors first assumed a parametric form for a function $f(v)$, where v is the true rotational velocity, then computed the corresponding distribution of the projected rotational velocity $V \sin i$ and finally adjusted a set of stellar parameters to reproduce the $V \sin i$ measurements. Two decades later, Deutsch [3] claimed that the distribution of stellar rotational velocities should have the form of a Maxwell–Boltzmann law, by analogy with the rotational velocities of hard

*Corresponding author.

E-mail address: renan@dfte.ufrn.br (J.R. De Medeiros).

spherical molecules in a box. All these studies followed a conventional view that favours a randomly orientation for stellar rotation axes [1]. Nevertheless, a number of studies have shown a clear discrepancy between theory and observations, where observed distributions are not fitted by a Gaussian or Maxwellian function with a good level of significance. A Gaussian or Maxwellian distribution that fits the fast rotators fails to account for low rotation rates. On the other hand, a fit to slow rotators fails to explain the rapidly rotating stars [4,5].

In fact, construction of unbiased rotational velocity distributions is a hard task. Direct measurements of stellar rotation are based essentially on the rotation period, requiring a huge number of photometric modulation measurements, difficult to achieve for statistically significant sample of stars. Measurements of the projected rotational velocity $V \sin i$ are more straightforward but are, of course, affected by the $\sin i$ projection effect. Nevertheless, if the stellar sample is statistically representative it is then possible to extract an accurate estimate of the distribution of equatorial velocities by normalizing the observed $V \sin i$. Early studies on the nature of the statistics controlling the distribution of stellar rotational velocity were based on $V \sin i$ measurements with poor precision, which, admittedly, can lead to systematic errors on the final analyses for low $V \sin i$ values. In addition, most of the early works have not taken into consideration the different physical mechanism that may affect rotation along the stellar evolution.

The molecular clouds where stars are formed are very irregular, with turbulent motions, leading to the assumption of chaotic star formation processes, including collapse and fragmentation of large gas clouds and turbulence in smaller ones. A random orientation of rotation axes is expected on the basis of these stellar formation processes. A chief argument to support the hypothesis that i , the angle of inclination between axis of rotation and the line of sight, is distributed randomly is the fact that rotational velocities of stars seems to be independent of their galactic coordinates. Nevertheless, stars do not interact in the same way as hard spherical molecules in a box, with a large number of physical mechanisms affecting the rotation once stars are formed. Among these mechanisms one can underline: angular momentum transfer either from the star to the surrounding accretion disk [6] or to a stellar wind originating at the boundary between the disk and stellar magnetosphere [7], tidal interaction and mass exchange in close binary systems [8], engulfing of planets or brown dwarfs [9], changes in the moment of inertia as a result of changes in stellar radius and external structure and possible decoupling within the star between rotation of its external shells and its core. Further, different studies have pointed for a dependence of rotation of specific group of stars on their position in the Galaxy [10,11].

In the present study, we show that the question of the nature of the distribution of stellar rotational velocity, at least for low-mass stars in the Pleiades open cluster, is not simply a question of which mathematical function model is used, but it depends primarily on the statistical mechanics applied, which should be general enough to take into account the changes in rotation with time. For this purpose, we have used the Tsallis maximum entropy distribution law to fit the observed rotational velocity distribution of the stars in the Pleiades. This new distribution function (hereafter q -Maxwellian) generalizes the Maxwell–Boltzmann function [12], and arises from the non-extensive statistical framework first proposed by Tsallis [13] and applied successfully to different astrophysical problems, like matter distribution of self-gravitating system [14–16], stellar polytropes [17], Lévy- and correlated-like anomalous diffusions [18], solar neutrino fluxes [19], cosmological model [14], dynamic linear response theory [15], velocity distribution of galaxy clusters [16], gravothermal catastrophe [17] and Jeans gravitational instability [20]. According to Tsallis et al. [21], within the generalized thermostatics, the ubiquity and robustness of Lévy distributions in nature follow naturally from generalized central limit theorem. Normal, Gaussian-type, diffusion and anomalous, Lévy-type, superdiffusion now can be unified in a simple picture. The reader is also referred to Tsallis [22] and Abe and Okamoto [23] for a more comprehensive discussion on Tsallis non-extensive statistics and its applications.

One should note that we have focused our first attempt on the Pleiades stars, since stellar clusters are important laboratories for the study of stellar parameters because their stars show some similar properties as age and metallicity, while others as rotational velocity may differ from star to star. This well-studied, relatively young stellar cluster (its age amounts to 100 million years) is about 13 pc across, encompassing $\sim 1000 M_{\odot}$ in stars. We firstly give a brief account of the q -Maxwellian function, then we determine the best fit for the observed distribution of the projected rotational velocity $V \sin i$ in different mass ranges of the Pleiades stars. Finally, we give some conclusions and perspective of future work to further clarify the problem.

2. q -Maxwellian distribution function

The principle that guided Maxwell arguments in establishing his celebrated Gaussian distribution of velocities is not a privilege of the exponential function, but it is shared by an entire family of power-law functions. These are the q -exponentials $\exp_q(f) \equiv [1 + (1 - q)f]^{1/(1-q)}$ where f is a function of random variables, which includes the standard exponential as the limiting case when $q = 1$. This provides a remarkable bridge with non-extensive statistical mechanics, where the q -exponentials play a fundamental role (just as the exponential does within Boltzmann–Gibbs statistical mechanics). This observation enabled the establishment of the q -generalized classical energy equipartition theorem [24] yielding also a power law type distribution in which the variable parameter is the kinetic energy. On the other hand, Latora et al. [25] have used the rotational velocity as the variable parameter in his work on the dynamics of a Hamiltonian system of N planar classical spins, whereas Campa et al. [26] have used the same framework in the study of rotators interacting through an infinite range potential.

In what follows we illustrate the application of the q -Maxwellian distribution function in the context of the present study.

Deutsch [3] has considered the distribution function for the magnitude of a vector that has random orientation. For this, it is required to find the distribution function of a positive scalar ω , which is the magnitude of a vector $\vec{\omega}$. We assume that the distribution of $\vec{\omega}$ is isotropic. We also assume that if it is decomposed into components along Cartesian axes, the distribution of any component is independent of the other components.

Deutsch has defined Ω as the non-dimensional quantity $j\omega$, where j is a parameter with the dimension of ω^{-1} , so

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k}.$$

The probability that Ω_x lies in the interval $[\Omega_x, \Omega_x + d\Omega_x]$, Ω_y in $[\Omega_y, \Omega_y + d\Omega_y]$ and Ω_z in $[\Omega_z, \Omega_z + d\Omega_z]$ is then

$$F(\Omega) d^3\Omega = f(\Omega_x) f(\Omega_y) f(\Omega_z) d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z, \quad (1)$$

with $\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$. It is straightforward [3] to show that $F(\Omega)$ is the standard Maxwellian distribution

$$F(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Omega^2 \exp(-\Omega^2). \quad (2)$$

Nevertheless, we can analyse the problem within the non-extensive framework proposed by Tsallis [13], modifying the basic hypothesis of statistical independence between the distributions associated with the components of $\vec{\Omega}$. As pointed out by Silva et al. [12], the independence between the three velocity components do not hold in systems with long-range interaction, where the non-extensive character is observed. Taking into account such arguments, Silva et al. [12] have proposed the following generalization for Eq. (1),

$$F(\Omega) d^3\Omega = \exp_q(\ln_q f(\Omega_x) + \ln_q f(\Omega_y) + \ln_q f(\Omega_z)) d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z, \quad (3)$$

where the q -exponential $\exp_q(f)$ and q -logarithm $\ln_q(f)$ functions are defined as

$$\exp_q(f) = [1 + (1 - q)f]^{1/(1-q)} \quad \text{and} \quad \ln_q(f) = \frac{f^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (4)$$

Note that in the limit $q = 1$, $\exp_q(f)$ and $\ln_q(f)$ reproduce the usual exponential and logarithm functions recovering the standard form of (1).

The partial differentiation of the q -log of (3) with respect to Ω_i yields

$$\frac{\partial \ln_q F}{\partial \Omega_i} = \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_x + \ln_q f_y + \ln_q f_z)$$

since $\exp_q(\ln_q(f)) = \ln_q(\exp_q(f)) = f$, where $i = x, y, z$. Equivalently,

$$\frac{\Omega_i F'(\chi)}{\chi F^q(\chi)} = \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_i), \quad (5)$$

where $\chi = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$ and $F'(\chi)$ is the total derivative of $F(\chi)$.

Defining $\Phi(\chi) \equiv (1/\chi)F'(\chi)/F^q(\chi)$, we can rewrite (5) as

$$\Phi(\chi) = \frac{1}{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial \Omega_x} (\ln_q f_x) = \frac{1}{\Omega_y} \frac{\partial}{\partial \Omega_y} (\ln_q f_y) = \frac{1}{\Omega_z} \frac{\partial}{\partial \Omega_z} (\ln_q f_z). \quad (6)$$

This equation can be satisfied only if all terms are equal to a constant that does not contain the Ω -components. Thus, we can make $\Phi(\chi) = -\gamma$, that is,

$$\frac{1}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_i) = -\gamma. \quad (7)$$

Hence, the solutions of Eq. (7) for $f(\Omega_i)$ are given by

$$\ln_q f_i = -\frac{\gamma \Omega_i^2}{2} + \ln_q A, \quad (8)$$

where A is a constant of integration. Taking the q -exponential we obtain

$$f(\Omega_i) = \left[1 + (1-q) \left(\ln_q A - \frac{\gamma \Omega_i^2}{2} \right) \right]^{1/(1-q)}. \quad (9)$$

Defining a new constant as

$$\frac{2}{\sigma^2} = \frac{\gamma}{1 + (1-q) \ln_q A} = \frac{\gamma}{A^{1-q}},$$

where the parameter σ is the width of the q -Maxwellian, and substituting it in (9), results

$$f(\Omega_i) = A_q \left[1 - (1-q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)}. \quad (10)$$

Here, we have introduced the sub-index q to make explicit the q -dependence of A . Eq. (10) recovers the standard exponential term of the Gaussian function for $q = 1$.

Then the probability of finding Ω in the interval $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ can be determined as follows:

$$F(\Omega) = \int f(\Omega) d^3 \Omega.$$

Putting $d^3 \Omega = \Omega^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\Omega$, for a given Ω we obtain

$$F_q(\Omega) = \iint A_q \Omega^2 \left[1 - (1-q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

which after integrating gives

$$F_q(\Omega) = 4\pi A_q \Omega^2 \left[1 - (1-q) \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)}. \quad (11)$$

Since the standard distribution of the true rotational velocity V for a star sample is $F(V) \propto V^2 e^{-V^2}$, as shown by Deutsch [3], the standard observed distribution of the projected rotational velocity $V \sin i$, for a random orientation of axes, must be given by $\phi(y) \propto y e^{-y^2}$ [27], with $y \equiv V \sin i$. Henceforth, the q -distribution $\phi_q(y)$ should reproduce the standard one, in the same way as $F_q(V)$ recovers $F(V)$ in the $q = 1$ limiting case.

Therefore, we propose the following distribution function for the observed stellar rotational velocities:

$$\phi_q(y) = B_q y \left[1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)}, \quad (12)$$

where B_q is a q -dependent constant which should be determined analytically from the normalization of $\phi_q(y)$. One can note that for values of q less than unity, the positiveness of the distribution function implies a natural cut-off in the maximal allowed value for y . This limit is showed in Eq. (13).

3. The data set

The rotational velocities $V \sin i$ used in the present analyses were taken from the rotational survey for the Pleiades stars carried out by Queloz et al. [28]. Our sample amounts to 219 stars of the original sample given by those authors, from where we have excluded stars with only an upper limit in $V \sin i$. All the selected objects are low-mass stars and provide a complete and unbiased rotation data set for stars in the $B-V$ range (0.4–1.4) corresponding to a mass range from $0.6M_{\odot}$ to $1.2M_{\odot}$. For a complete discussion on the observational procedure, calibration and error analysis the reader is referred to Queloz et al. [28]. Nevertheless, let us underline that individual errors in $V \sin i$ measurements are better than about 1 km/s and do not play a significant role on the observed distributions as shown in Fig. 1.

4. Results

For the present statistical study, we have made three different analysis. In the first one (A) we take all stars in the whole $B-V$ interval of the sample (0.4–1.4). In the second (B) we divided the sample in two sub-samples of $B-V$, namely (0.40–0.90 and 0.90–1.40) while in the third (C) we took three sub-samples corresponding to $B-V$ intervals (0.40–0.73, 0.73–1.07 and 1.07–1.40).

We have normalized the $V \sin i$ values with respect to the average in each sub-sample. In addition, in order to avoid biases in constructing of the frequency histograms due to arbitrary choices of bin range, we have

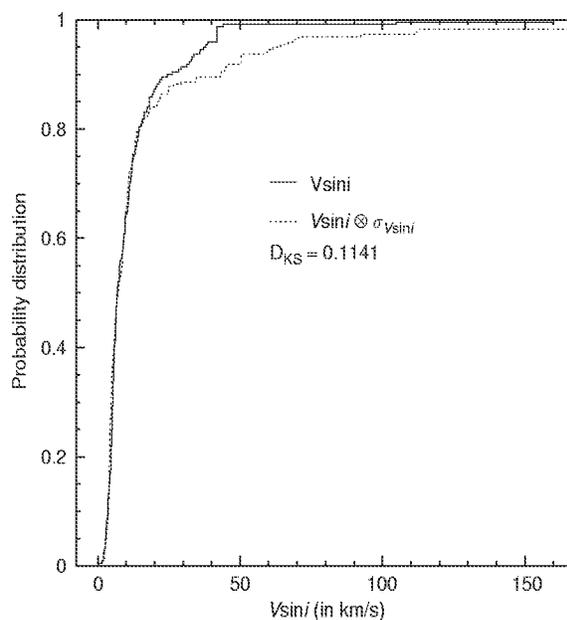


Fig. 1. Comparison between $F(V \sin i)$ probability distribution and its convolution with measurement errors for the star sample. The Kolmogorov–Smirnov statistics D_{KS} is the largest distance between the two distributions.

decided to study the observed cumulative distribution of the rotational velocities, $F(V \sin i)$, and compare it with the probability distribution function in (12), namely

$$\Phi_q(y) = \frac{\int_0^y y \left[1 - (1-q) \frac{y^{2q}}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)} dy}{\int_0^{y_{max}} y \left[1 - (1-q) \frac{y^{2q}}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)} dy}, \quad (13)$$

where

$$y_{max} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{1-q}} & \text{if } q < 1 \\ \infty & \text{if } q \geq 1 \end{cases}.$$

This distribution function was used to fit the observational data, to obtain the best $\Phi_q(y)$ and, consequently, the best q -value and σ -value for each observed cumulative distribution using the Kolmogorov–Smirnov statistical test.

The values of q are shown in Fig. 2 as a function of the average value of $B-V$. The first thing to notice is that, in all three cases (A, B and C), the $V \sin i$ distributions of the Pleiades stars effectively do not obey a standard Maxwellian function. For instance, in the upper panel (entire sample) the observed rotation

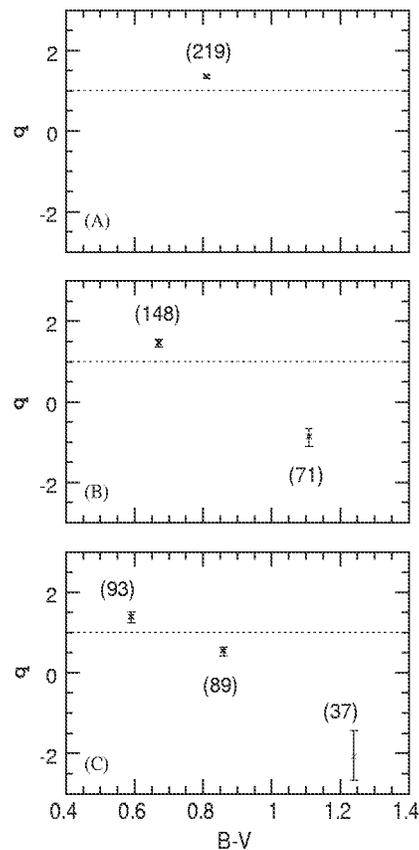


Fig. 2. Best q -values as a function of average value of $B-V$ in each interval for different divisions of the star sample. In each panel, we show the number of stars for each $B-V$ interval, the $q = 1$ line representing the standard Maxwellian function, and the error bars corresponding to 0.05 significance level for the best σ value determined.

Table 1
Best q -values determined by using Kolmogorov–Smirnov test for each $B-V$ interval corresponding to the panels in Fig. 2

Panel	$\Delta(B-V)$ ($B-V$)	q	σ	P_{max}	N
A	0.40–1.40	1.36	0.57	0.21	219
B	0.40–0.90	1.47	0.52	0.86	148
	0.90–1.40	–0.86	1.70	0.18	71
	0.40–0.73	1.40	0.63	0.96	93
C	0.73–1.07	0.55	1.27	0.20	89
	1.07–1.40	–2.08	1.79	0.47	37
	0.40–0.90	1.47	0.52	0.86	148
	0.90–1.40	–0.86	1.70	0.18	71

distribution is fitted by a generalized distribution function with $q = 1.36_{-0.05}^{+0.03}$ and $\sigma = 0.57$. Moreover, when we examine the sub-samples (cases B and C), we observe that q does not stay constant, but is a decreasing function of $B-V$. In general, stars with $B-V > 0.80$ tend to have a $V \sin i$ distribution best fitted by a q -Maxwellian with $q < 1$ and, for higher values of $B-V$, q becomes negative.

A detailed summary of our statistical analysis is shown in Table 1. There, for each case, we present the best results determined for q and σ , the $B-V$ interval, $\Delta(B-V)$, the maximum probability for the pair $(q; \sigma)$ and the number of stars in each analyzed $B-V$ interval.

It is instructive to compare the distribution of $V \sin i$ for the Pleiades stars with those obtained from the q -Maxwellian and the standard Maxwellian functions. Fig. 3 shows the best fits for the histogram of the observed distribution of normalized $V \sin i$ for the whole $B-V$ interval (case A in Table 1). The dashed line represents the distribution calculated from the q -Maxwellian function with $q = 1.36$. The dotted line is the standard Maxwellian function. The number in parenthesis is the amount of stars in the sample. The distribution of observed $V \sin i$ is clearly more adequately fitted by the q -Maxwellian function. Such a behaviour is also observed for the other $B-V$ intervals represented in Table 1, namely, cases B and C.

Finally, in Fig. 4 we present the behaviour the parameter σ , the width of the q -Maxwellian, as a function of the parameter q for two intervals of $B-V$ (case B). It is clear that, at least for the present stellar sample, the standard Maxwellian ($q = 1$) for stars with $B-V$ between 0.4 and 0.9 (left panel) is in the rejection region or outside the curve which delineates 0.05 significance level. For the second interval 0.9–1.40 (right panel), the Maxwellian lies just in the frontier of the 0.05 significance level curve. This clearly shows that, at least at this significance level, the behaviour of the distribution of rotational velocity of stars of the Pleiades in these two $B-V$ interval is non-Maxwellian.

5. Discussion and conclusions

The most important result of the present work is that, based on the statistical analysis we carried out of the rotational velocities of stars in the open cluster Pleiades, the q -Maxwellian distribution function is a more feasible function to control the observed $V \sin i$ distributions. For the entire sample, the value of q is found to be $1.36_{-0.05}^{+0.03}$, clearly different of $q = 1$ of the Maxwellian distribution. This is not entirely surprising considering that the star formation and evolution process is not an isolated phenomenon, as underlined in the Introduction of the present study, this being particularly true for stars in clusters.

For instance, it is believed that the initial angular momentum is established during the early phase of accretion of gas to the new born star via locking of stellar rotational velocity to the angular velocity of the circumstellar accretion disk. For high accretion rate through the disk, the radius where the stellar magnetosphere links to the disk is smaller, its Keplerian rotation speed is high and, consequently, the

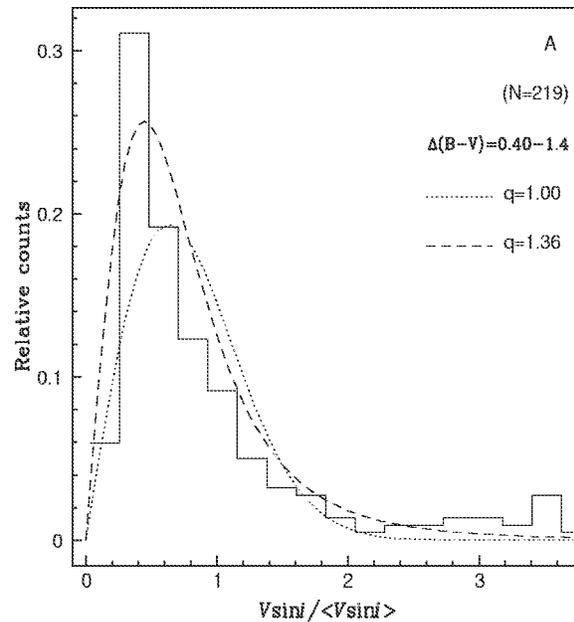


Fig. 3. The distribution of rotational velocities for the Pleiades stars. The histogram represents the observed distribution of normalized $V \sin i$. The dashed line represents the distribution calculated from the q -Maxwellian function. The dotted line is the standard Maxwellian function.

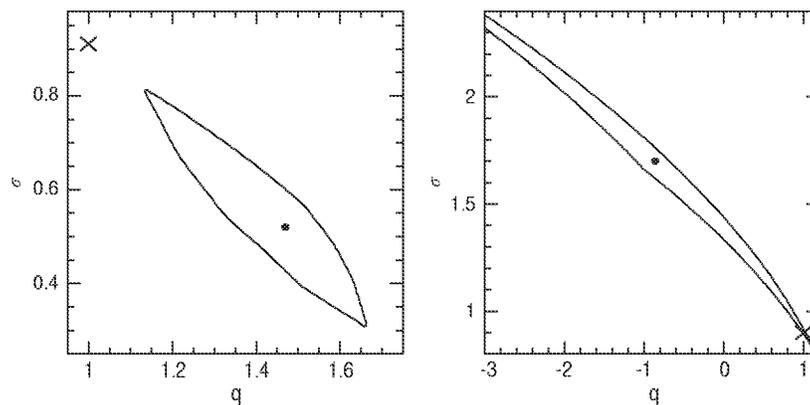


Fig. 4. The rejection region (outside the curve) of the null hypothesis that the $V \sin i$ distributions are drawn from the q -Maxwellian functions at 0.05 significance level for stars in case B with $B-V$ intervals 0.40–0.90 (left panel) and 0.90–1.40 (right panel). In both panels, the crosses (\times) represent the best σ for the standard Maxwellian function and the dots (\bullet) represent the maximum probabilities for q and σ values.

rotational velocity of the star will also be higher. Therefore, in star formation regions where the density is high, so will be the accretion rate and one expects, on average, the rotational velocity to be higher as well. In support of this, the distribution of rotation velocities of B stars in the dense Orion Nebula cluster is observed to be shifted toward higher values when compared with stars found in much lower density regions of the Orion complex [29]. This process would explain the differences found, for example, in the rotational behaviour of cluster stars and field stars [30]. These arguments, as well as the observations, not only indicate that stars born in dense clusters rotate more rapidly, but that, the rotational velocity of a star is the result of a complex

process. It involves, for instance, a strong interaction with the environment where the star was formed and where the star is now evolving, besides the angular momentum loss via stellar winds and angular momentum transfer in the stellar interior.

Another element to be considered as we look into the present result, in particular for $q \neq 1$, is the fact that we are analysing the projected rotational velocity. There is no insurance that the stars rotation axes are randomly orientated since the star final orientation of the rotation axis may depend on both the star formation process and its location in the Galaxy.

Finally, the fact that $q \neq 1$ for the whole sample may not come as total surprise if we consider that it has been shown both theoretical and observationally by several authors that in different astrophysical contexts involving the long-range nature of gravity [31,32], Tsallis non-extensive statistics gives excellent results.

A more unexpected result is the trend observed in which the q value of the distribution decreases with increasing $B-V$ colour index. This behaviour of the q value of the $V \sin i$ distribution seems to point for a clear dependence of rotation upon stellar mass. Let us recall that in stellar clusters like the Pleiades, stars present similar physical parameters except rotation and mass. In this sense, the behaviour of q in the present analysis would seem to reflect the effect of stellar mass on rotation. Evidently, this deserves further investigation which we plan to carry out in future works by studying other stellar clusters and field stars with different physical parameters as metallicity, age and masses. We can also test this hypothesis by examining the distribution of rotational velocities for evolved stars, since we know that for these stars, other factors, besides the close relation between mass and rotation, are present. For instance, the rotational velocity of red giant stars depends, among others, on the depth of the convective zone, magnetic braking, mass loss and tidal interactions. By analysing the behaviour of rotation along an evolutionary sequence from the star birth-line to the red giant stage, it will be possible to study the q parameter as a function of time. Such an analyses may help us to understand where, in time, different physical processes are affecting stellar rotation and, by consequence, the evolution of the stellar angular momentum evolution.

The present study, which should be regarded as a preliminary attempt, seems to point to a fundamental aspect: for the study of the nature and the evolutionary behaviour of the distribution of stellar rotational velocity, it is necessary to take into account the different mechanisms that may play a role on rotation once stars are formed, which, very probably, affect rotation strength and axis orientation.

Acknowledgements

This work has been supported by continuous grants from the CNPq Brazilian Agency. We also acknowledge financial support of the Rio Grande do Norte FAPERN Agency. It is a pleasure to thank C. Tsallis for a careful reading of the manuscript and valuable suggestions for improvements in this work. We express our thanks to the referees for the careful reading and constructive comments on the original version of this paper. B. B. Soares thanks the CNPq for Grant 140458/00-0 and J. D. do Nascimento Jr. acknowledges the CNPq/PROFIX Grant 540461/01-6.

References

- [1] O. Struve, *Pop. Astr.* 53 (1945) 202.
- [2] S. Chandrasekhar, G. Münch, *Astrophys. J.* 111 (1950) 142.
- [3] A.J. Deutsch, in: A. Slettebak (Ed.), *Stellar Rotation*, IAU Colloquium, Reidel, Dordrecht, 1970, p. 207.
- [4] M.M. Dworetzky, *Astrophys. J.* 28 (1974) 101.
- [5] S.C. Wolff, S. Edwards, G.W. Preston, *Astrophys. J.* 252 (1982) 322.
- [6] A. Koenigl, *Astrophys. J.* 370 (1991) L39.
- [7] F. Shu, J. Najita, E. Ostriker, F. Wilkin, S. Ruden, S. Lizano, *Astrophys. J.* 429 (1994) 781.
- [8] J.R. De Medeiros, J.R.P. Da Silva, M.R.G. Maia, *Astrophys. J.* 578 (2002) 943.
- [9] L. Siess, M. Livio, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 304 (1999) 925.
- [10] J.R. De Medeiros, J.C. Carvalho, B. Soares, C. da Rocha, M.R.G. Maia, *Astron. Astrophys.* 358 (2000) 113.
- [11] G. Burki, A. Maeder, *Astron. Astrophys.* 57 (1977) 401.
- [12] R. Silva, A.R. Plastino, J.A.S. Lima, *Phys. Lett. A* 249 (1998) 401.
- [13] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* 52 (1988) 479.

- [14] V.H. Hamity, D.E. Barraco, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 4664.
- [15] A.K. Rajagopal, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 3469.
- [16] A. Lavagno, G. Kaniadakis, M. Rego-Monteiro, P. Quarati, C. Tsallis, *Astr. Lett. Comm.* 34 (1998) 449.
- [17] A. Taruya, M. Sakagami, *Physica A* 307 (2002) 185.
- [18] D.H. Zanette, P.A. Alemany, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 366.
- [19] G. Kaniadakis, A. Lavagno, P. Quarati, *Phys. Lett. B* 369 (1996) 308.
- [20] J.A.S. Lima, R. Silva, J. Santos, *Astron. Astrophys.* 396 (2002) 309.
- [21] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. Souza, R. Maynard, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 3589 Erratum: *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 5442.
- [22] C. Tsallis, *Braz. J. Phys.* 29 (1999) 1.
- [23] S. Abe, A. Okamoto (Eds.), *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications*, Springer, Heidelberg, 2001.
- [24] J.A.S. Lima, A.R. Plastino, *Braz. J. Phys.* 30 (2000) 176.
- [25] V. Latora, A. Rapisarda, C. Tsallis, *Physica A* 305 (2002) 129.
- [26] A. Campa, A. Giansanti, D. Moroni, C. Tsallis, *Phys. Lett. A* 286 (2001) 251.
- [27] R.P. Kraft, in: G.H. Herbig (Ed.), *Spectroscopic Astrophysics. An Assessment of the Contributions of Otto Struve*, University of California Press, Berkeley, 1970, p. 385.
- [28] D. Queloz, S. Allain, J.-C. Mermilliod, J. Bouvier, M. Mayor, *Astron. Astrophys.* 335 (1998) 183.
- [29] S.E. Strom, S.C. Wolff, D.H.A. Dror, *Astrophys. J.* 129 (2005) 809.
- [30] C.H.F. Melo, L. Pasquini, J.R. De Medeiros, *Astron. Astrophys.* 375 (2001) 851.
- [31] A.R. Plastino, A. Plastino, *Phys. Lett. A* 174 (1993) 384.
- [32] A.R. Plastino, A. Plastino, *Braz. J. Phys.* 29 (1999) 79.

Bibliografia

- [1] Shagn, G. & Struve, O. (1929). *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 89, 222.
- [2] Elvey, C. T. (1930). *The Astrophysical Journal* 71, 221.
- [3] Gray, D. F. (1992). *The Observations and Analysis of Stellar Photosphere*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [4] Van Dien, E. (1948). *The Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* 42, 249.
- [5] Chandrasekhar, S. & Münch, G. (1950). *The Astrophysical Journal* 111, 142.
- [6] Huang, S. -S. (1953). *The Astrophysical Journal* 118, 285.
- [7] Kraft, R. P. (1970). *Spectroscopic Astrophysics. An Assessment of the Contributions of Otto Struve*, ed. G. H. Herbig , p. 385. University of California Press, Berkeley, EUA.
- [8] Deutsch, A. J. (1970). *Stellar Rotation*, ed. A. Slettebak, p. 207. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht–Holland.
- [9] Bernacca, P. L. (1970). *Stellar Rotation*, ed. A. Slettebak, p. 227. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht–Holland.
- [10] Abt, H. A. (2001). *The Astronomical Journal* 122, 2008.

- [11] De Medeiros, J. R., Da Rocha, C. & Mayor M.(1996). *Astronomy and Astrophysics* 314, 499.
- [12] Gaigé, Y. (1993). *Astronomy and Astrophysics* 269, 267.
- [13] Gray, D. F. (1989). *The Astrophysical Journal* 347, 1021.
- [14] Gray, D. F. & Toner, C. G. (1987). *The Astrophysical Journal* 322, 360.
- [15] Soderblom, D. R. (1983). *The Astrophysical Journal Supplement Series* 53, 1.
- [16] Wolff, S. C., Edwards, S. & Preston, G. W. (1982). *The Astrophysical Journal* 252, 322.
- [17] Guthrie, B. N. G. (1982). *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 198, 795.
- [18] Guthrie, B. N. G. (1985). *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 215, 545.
- [19] Dworetzky, M. M. (1974). *The Astrophysical Journal* 28, 101.
- [20] Tsallis, C. (1988). *Journal of Statistical Physics* 52, 479.
- [21] Silva Jr., R., Plastino, A. R. & Lima, J. A. S. (1998). *Physical Letters A* 249, 401.
- [22] Mouschovias, Telemachos Ch. (1991). *The Astrophysical Journal* 373, 169.
- [23] Bodenheimer, P. (1993). *Reviews in Modern Astronomy* 6, 233.
- [24] Krishnamurthi, A., Pinsonneault, M. H., Barnes, S. & Sophia, S. (1997). *The Astrophysical Journal* 480, 303.
- [25] Struve, O. (1950). *Stellar Evolution* Princeton University Press, EUA.

- [26] Deutsch, A. J. (1967). *The Magnetic and Related Stars*, ed. R. Cameron, p. 181. Mono Book Corp. Baltimore – EUA.
- [27] Huang, S. -S. & Struve, O. (1960). *Stars and Stellar Systems, Vol. VI, Stellar Atmospheres*, p. 321, ed. J. L. Greenstein. University of Chicago Press, Chicago, EUA.
- [28] Slettebak, A. (1954). *The Astrophysical Journal* 119, 146.
- [29] Conti, P. S. & Ebbets, D. (1977). *The Astrophysical Journal* 213, 438.
- [30] Kraft, R. P. (1965). *The Astrophysical Journal* 141, 993.
- [31] Gough, D. O. (1991). *Angular Momentum Evolution of Young Stars*, Eds. S. Catalano & J. R. Stauffer, p. 271. Kluwer Academic Publishers, Holanda.
- [32] Elsworth, Y. et al. (1995). *Nature* 376, 669.
- [33] Tomczyk, S., Schou, J. & Thompson, M. (1995). *The Astrophysical Journal* 448, L57.
- [34] Ulrich, R. K. (1993). *Inside the Stars, IAU Coll. 137*, Eds. W. W. Weiss & A. Baglin, ASP Conf. Series Vol. 40, p. 25.
- [35] Chernin, A. D. (1991). *Astrophysics and Space Science* 186, 159.
- [36] Huang, S. -S. (1965). *The Astrophysical Journal* 141, 985.
- [37] Smith, B. & Struve, O. (1944). *The Astrophysical Journal* 100, 360.
- [38] Slettebak, A. (1949). *The Astrophysical Journal* 110, 498.
- [39] Huang, S. -S. & Struve, O. (1954). *Annales d'Astrophysique* 17, 85.
- [40] Brown, A. (1950). *The Astrophysical Journal* 111, 366.
- [41] Fukuda, I. (1982). *The Publications of the Astronomical Society of Pacific* 94, 271.

- [42] Tsallis, C. (2005). *Physica D* 193, 3.
- [43] Tsallis, C. (2000). *Revista Brasileira de Ensino de Física* 22, 156.
- [44] Lévy, P. (1925) *Calcul des Probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, França.
- [45] Stuart, A. & Ord, J. K. (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics. Vol. I. Distribution Theory*, p. 310, sexta edição. John Wiley & Sons Inc., New York, EUA.
- [46] Le Cam. L. (1986). *Statistical Science* 1, 78.
- [47] Prato, D. & Tsallis, C. (1999). *Physical Review E* 60, 2398.
- [48] Tsallis, C., Levy, S. V. F., Souza, A. M. C. & Maynard R. (1995). *Physical Review Letters* 75, 3589.
- [49] Tsallis, C., Mendes, R. S. & Plastino, A. R. (1998). *Physica A* 261, 534.
- [50] Tsallis, C., Borges, E. P. & Baldovin, F. (2002). *Physica A* 305, 1.
- [51] Curado, E. M. F. & Tsallis, C. (1991). *Journal of Physics A* 24, L69. [Corrigenda: 24, 3187 (1991) e 25, 1019 (1992)].
- [52] Vives, E. & Planes, A. (2002). *Physical Review Letters* 88, 020601.
- [53] Vollmayr-Lee, B. P. & Luijten, E. (2001). *Physical Review E* 63, 031108.
- [54] Nauenberg, M. (2003). *Physical Review E* 67, 036114.
- [55] Luzzi, R., Vasconcellos, A. R. & Galvao Ramos, J. (2002). *Science* 298, 1171.
- [56] Zanette, D. H. & Montemurro, M. A. (2003). *Physical Review E* 67, 031105.
- [57] Zanette, D. H. & Montemurro, M. A. (2003). *Physical Letters A* 316, 184.
- [58] Zanette, D. H. & Montemurro, M. A. (2003), cond-mat/0305070.

- [59] Zanette, D. H. & Alemany P. A. (1995). *Physical Review Letters* 75, 366.
- [60] Curilef, S. & Tsallis, C. (1995). *Physica A* 215, 542.
- [61] Rajagopal, A. K. (1996). *Physical Review Letters* 76, 3469.
- [62] Nobre, F. D., Curado, E. M. F. & Rowlands, G. (2004). *Physica A* 334, 109.
- [63] Tsallis, C. & Bukman, D. J. (1996). *Physical Review E* 54, 2197.
- [64] Borges, E. P. (1998). *Journal of Physics A* 31, 5281.
- [65] Anteneodo, C. & Tsallis, C. (1998). *Physical Review Letters* 80, 5313.
- [66] Tsallis, C., Bemsiki, G. & Mendes, R. S. (1999). *Physical Letters A* 257, 93.
- [67] Lenzi, E. K., Borges, E. P. & Mendes, R. S. (1999). *Journal of Physics A* 32, 8551.
- [68] Lima, J. A. S., Silva Jr., R. & Santos, J. (2000). *Physical Review E* 61, 3260.
- [69] Lima, J. A. S. & Plastino, A. R. (2000). *Brazilian Journal of Physics* 30, 176.
- [70] Lima, J. A. S., Silva Jr., R. & Plastino, A. R. (2001). *Physical Review Letters* 86, 2938.
- [71] Beck, C. & Cohen, E. G. D. (2003). *Physica A* 322, 267.
- [72] Souza, A. M. C. & Tsallis, C. (2003). *Physical Letters A* 319, 273.
- [73] Aragão-Rêgo, H. H., Soares, D. J., Lucena, L. S., Da Silva, L. R., Lenzi, E. K. & Sauerbrey, K. (2003). *Physica A* 317, 199.
- [74] Adib, A. B., Moreira, A. A., Andrade Jr., J. S. & Almeida, M. P. (2003). *Physica A* 322, 276.
- [75] Toral, R. (2003). *Physica A* 317, 209.
- [76] Pennini, F. & Plastino, A. (2004). *Physica A* 334, 132.

- [77] Borges, E. P. (2002), cond-mat/0205520.
- [78] Lavagno, A., Kaniadakis, G., Rego-Monteiro, M., Quarati, P. & Tsallis, C. (1998). *Astrophysical Letters and Communications* 35, 449.
- [79] Aly, J. J. (1993). *N-Body Problems and Gravitational Dynamics*, Proceedings of the Meeting held at Aussois-France, eds. F. Combes & E. Athanassoula, p.19. Publications de l'Observatoire de Paris, Paris.
- [80] Plastino, A. R. & Plastino, A. (1999). *Brazilian Journal of Physics* 29, 79.
- [81] Boghosian, B. M. (1996). *Physical Review E* 53, 4754.
- [82] Lavagno, A. & Quarati, P. (2000). *Nuclear Physics B* 87, 209.
- [83] Lavagno, A. & Quarati, P. (2001). *Physical Letters B* 498, 47.
- [84] Kaniadakis, G., Lavagno, A. & Quarati, P. (1996). *Physical Letters B* 369, 308.
- [85] Hamity, V. H. & Barraco, D. E. (1996). *Physical Review Letters* 76, 4664.
- [86] Taruya, A. & Sakagami, M-. (2002). *Physica A* 307, 185.
- [87] Kaniadakis, G., Lavagno, A. & Quarati, P. (1997). *Nuclear Physics A* 621, 381.
- [88] Tsallis, C., Anjos, J. C. & Borges, E. P. (2003). *Physical Letters A* 310, 372.
- [89] Beck, C. (2004). *Physica A* 331, 173.
- [90] Lima, J. A. S., Silva, R. & Santos, J. (2002). *Astronomy and Astrophysics* 396, 309.
- [91] Jiulin, D. (2004). *Physical Letters A* 320, 347.
- [92] Jiulin, D. (2004). *Physica A* 335, 107.
- [93] Latora, V., Rapsarda, A. & Tsallis, C. (2002). *Physica A* 305, 129.

- [94] Campa, A., Giansanti, A., Moroni, D. & Tsallis, C. (2001). *Physical Letters A* 286, 251.
- [95] Kreyszig, E. (1993). *Advanced Engineering Mathematics*, 7^a ed., p. 33. John Wiley & Sons Inc., Singapura.
- [96] Mayor, M. & Mermilliod, J. C. (1991). *Angular Momentum Evolution of Young Stars*, Eds. S. Catalano & J. R. Stauffer, p. 315. Kluwer Academic Publishers, Holanda.
- [97] Skumanich, A. (1972). *The Astrophysical Journal* 171, 565.
- [98] Mandelbrot, B. B. (1977). *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- [99] Liljeros, F., Edling, C. R., Amaral, L. A. N., Stanley, H. E. & Åberg, Y. (2001). *Nature* 411, 907.
- [100] Upadhyaya, A., Rieu, J. -P., Glazier, J. A. & Sawada, Y. (2001). *Physica A* 293, 549.
- [101] Malacarne, L. C., Mendes, R. S. & Lenzi, E. K. (2001). *Physical Review E* 65, 17106.
- [102] Bak, P., Christensen, K., Danon, L. & Scanlon, T. (2002). *Physical Review Letters* 88, 178501.
- [103] Abe, S. & Suzuki, N. (2003). *Physical Review E* 67, 16106.
- [104] Queloz, D., Allain, S., Mermilliod, J.-C., Bouvier, J. & Mayor, M. (1998) *Astronomy and Astrophysics* 335, 183.
- [105] De Medeiros, J. R., Carvalho & Mayor, M. (1999). *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* 433, 460.
- [106] Bahcall, J. N., Casertano, S. & Ratnatunga, K. (1987). *The Astrophysical Journal* 320, 515.

- [107] De Medeiros, J. R. & Mayor, M. (1991). *Angular Momentum Evolution of Young Stars*, Eds. S. Catalano & J. R. Stauffer, p. 201. Kluwer Academic Publishers, Holanda.
- [108] Strom, S. E., Wolff, S. C. & Dror, D. H. A. (2005). *The Astrophysical Journal* 129, 809.
- [109] Melo, C. F. H., Pasquini, L. & De Medeiros, J. R. (2001). *Astronomy and Astrophysics* 375, 851.
- [110] Plastino, A. R. & Plastino, A. (1993). *Physical Letters A* 174, 384.
- [111] Mora, A., Mrín, B., Solano, E., Monteiro, B., de Winter, D., Eiroa, C., Ferlet, R., Grady, C. A., Davies, J. K., Miranda, L. F., Ondmajer, R. D., Palacios, J., Quirrenbach, A., Harris, A. W., Rauer, H., Cameron, A., Deeg, H. J., Garzón, F., Penny, A., Schneider, J., Tsapras, Y. & Wesselius, P. R. (2001). *Astronomy and Astrophysics* 378, 116.
- [112] Stassun, K. G., Mathieu, R. D., Mazeh, T. & Vrba, F. J. (1999). *The Astronomical Journal* 117, 2941.
- [113] Herbst, W., Bailer–Jones, C. A. L. & Mundt, R. (2001). *The Astrophysical Journal* 554, L197.
- [114] Rhode, K. L., Herbst, W. & Mathieu, R. D. (2001). *The Astronomical Journal* 122, 3258.
- [115] Dubath, P., Reipurth, B. & Mayor, M. (1996). *Astronomy and Astrophysics* 308, 107.
- [116] Joergens, V. & Guenther, E. (2001). *Astronomy and Astrophysics* 279, L9.
- [117] Kearns, K. E., Eaton, N. L., Herbst, W. C. & Mazzurco, C. J. (1997). *The Astronomical Journal* 114, 1098.

- [118] Adams, N. R., Walter, F. M. & Wolk, S. J. (1998). *The Astronomical Journal* 116, 237.
- [119] Brown, A. G. A. & Verschueren, W. (1997). *Astronomy and Astrophysics* 319, 811.
- [120] Stauffer, J. R., Hartmann, L. W., Prosser, C. F., Randich, S., Balachandran, S., Patten, B. M., Simon, T. & Giampapa, M. (1997). *The Astrophysical Journal* 479, 776.
- [121] Jones, B. F., Fisher, D., Shetrone, M. & Soderblom, D. R. (1997). *The Astronomical Journal* 114, 352.
- [122] Soderblom, D. R., Jones, B. F. & Fisher, D. (2001). *The Astrophysical Journal* 563, 334.
- [123] Soderblom, D. R., Stauffer, J. R., Hudon, J. D. & Jones, B. F. (1993). *The Astrophysical Journal Supplement Series* 85, 315.
- [124] Davis, Philip J. (1967). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, eds. Milton Abramowitz & Irene A. Stegun, p. 258, nona edição. Dover Publications, Inc., Nova Iorque, EUA.
- [125] Conover, W. J. (1999). *Practical Nonparametric Statistics*, terceira edição. John Wiley & Sons Inc., New York, EUA.
- [126] D'Agostino, R. B. & Stephens, M. A. (1986). *Goodness-of-Fit*. Marcel Dekker, New York, EUA.
- [127] Schröer, G. & Trenkler, D. (1995). *Computational Statistics & Data Analysis* 20, 185.
- [128] Justel, A., Peña, D. & Zamar, R. (1997). *Statistics & Probability Letters* 35, 251.
- [129] Reschenhofer, E. (1997). *Computational Statistics & Data Analysis* 24, 433.

- [130] Drew, J. H., Glen, A. G. & Leemis, L. M. (2000). *Computational Statistics & Data Analysis* 34, 1.
- [131] Qin, Y. -P., Xie, G. Z., Zheng, X. -T. & Wu, S. -M. (1998). *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* 132, 301.
- [132] <http://www.physics.csbsju.edu/stats/KS-test.html>

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)