



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.008/08

Excitações gluônicas e quebra dinâmica da simetria quiral nas interações  
hádron-hádron

Victor E. Vizcarra Ruiz

Orientador

Prof. Dr. *Gastão I. Krein*

Setembro de 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

“Buscai em primeiro lugar  
O Reino de Deus e Sua justiça,  
E todas as outras coisas  
Serão acrescentadas.”

Mateus 6:38

## Agradecimentos

À minha querida esposa Néia, por me apoiar nos momentos mais difíceis. Nunca estive só.

A Jéssica e Susan, minhas lindas e preciosas princesinhas.

Ao meu orientador Gastão Krein, fiel amigo e muitas vezes conselheiro, que acreditou e apostou em mim. Meu sincero agradecimento pela sua paciência.

Aos meus amigos: Sérgio, Alexandre, Wanderson e Leandro. Juntos vivenciamos o dia a dia no IFT, enclausurados na edícula, a mais ilustre e misteriosa sala do instituto, onde tivemos as mais acaloradas discussões sobre ciência e sobre outras coisas.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

---

## Resumo

Desenvolvemos um esquema de cálculo prático para obter interações efetivas hádron-hádron tendo como base um modelo microscópico de quarks inspirado no Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb. O Hamiltoniano confina quarks e glúons, realiza a quebra dinâmica da simetria quiral e permite definir um estado de vácuo não perturbativo com condensados de quarks e glúons constituintes. Estados ligados hadrônicos podem ser definidos num espaço de Fock em termos de operadores de campos atuando no vácuo não perturbativo. A partir das interações microscópicas quark-gluon e das amplitudes hadrônicas no espaço de Fock derivamos um potencial efetivo hádron-hádron que pode ser empregado numa equação de Lippmann-Schwinger para calcular observáveis como seções de choque e deslocamentos de fase. Como aplicação do formalismo desenvolvido consideramos a interação de mésons charmosos  $D$  com nucleons.

### Palavras Chaves:

Cromodinâmica quântica, Modelos de quarks, Interações hádron-hádron, Mesons charmosos, Interação de mesons  $D$  com nucleons.

### Áreas do conhecimento:

Física de partículas elementares, Teoria de campos, Física nuclear.

---

## Abstract

We develop a practical calculational scheme to derive effective hadron-hadron interactions from a microscopic quark model inspired in the Hamiltonian of QCD in Coulomb gauge. The Hamiltonian confines quarks and gluons, realizes dynamical chiral symmetry breaking and allows one to define a nonperturbative vacuum state with condensates of constituent quarks and gluons. hadronic bound states can be defined in a Fock space in terms of field operators acting on the nonperturbative vacuum state. From the microscopic quark-gluon interactions and the Fock space hadronic amplitudes we derive an effective hadron-hadron potential that can be used in a Lippmann-Schwinger equation to calculate observables like cross-sections and phase shifts. As an application of the formalism developed we consider the interaction of charmed  $D$  mesons with nucleons.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Excitações gluônicas e a quebra dinâmica da simetria quiral</b>	<b>7</b>
2.1	Simetria quiral na QCD . . . . .	9
2.2	Excitações gluônicas no vácuo da QCD - contínuo . . . . .	13
2.3	Excitações gluônicas no vácuo da QCD - simulações de QCD na rede e parte transversa $V_T$ . . . . .	17
2.4	Quebra dinâmica da simetria quiral e modelo de quarks constituintes	20
<b>3</b>	<b>Resonating group method e interações efetivas hádron-hádron</b>	<b>25</b>
3.1	Sistemas méson-méson e bárion-bárion . . . . .	29
3.2	Sistema méson-bárion . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Derivação explícita da interação <math>DN</math></b>	<b>38</b>
4.1	As interações $V_{qq}$ , $V_{q\bar{q}}$ e $V_{\bar{q}\bar{q}}$ . . . . .	38
4.2	As amplitudes $\phi$ e $\varphi$ . . . . .	41
4.3	Contribuições de cor, spin-sabor e momento para o potencial méson-bárion . . . . .	43
4.3.1	Cálculo dos fatores de cor $C_i$ . . . . .	46
4.3.2	Cálculo do fator de spin-sabor . . . . .	47
4.3.3	Cálculo explícito das integrais $I_i$ . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>55</b>
5.1	Equação de gap . . . . .	56
5.2	Os parâmetros variacionais $\alpha$ e $\beta$ das amplitudes $\varphi$ e $\phi$ . . . . .	61
5.3	Deslocamentos de fase e seções de choque $DN$ . . . . .	63
5.4	Contribuições relativas de $V_C$ e $V_T$ . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>69</b>

---

<b>A</b>	<b>Matrizes de Pauli, de Dirac e de Gell-Mann</b>	<b>72</b>
<b>B</b>	<b>Funções de spin e sabor do nucleon e dos mesons <math>D</math></b>	<b>74</b>
<b>C</b>	<b>As interações quark-quark, antiquark-antiquark e quark-antiquark</b>	<b>77</b>
<b>D</b>	<b>Derivação das massas dos bárions e dos mésons</b>	<b>84</b>
	D.1 A massa dos bárions . . . . .	85
	D.2 A massa dos mésons . . . . .	92
	<b>Referências</b>	<b>97</b>



# Capítulo 1

## Introdução

A cromodinâmica quântica (QCD) [1] é considerada como sendo a teoria fundamental das interações fortes e, como tal, ela deve explicar o espectro hadrônico, as interações entre os hádrons e as propriedades da matéria hadrônica. Devido à *liberdade assintótica* da QCD, métodos perturbativos podem ser aplicados para a descrição de processos que envolvem momentos e energias transferidos altos. As previsões da QCD para tais processos, obtidas através de cálculos analíticos elaborados baseados na teoria de perturbações, estão de acordo com os dados experimentais. Por outro lado, progressos mais lentos têm sido observados no estudo de processos e sistemas hadrônicos em escalas de baixas energias e pequenos momentos transferidos, para os quais a QCD perturbativa não se aplica. A formação dos hádrons e a estrutura da matéria hadrônica são problemas típicos que requerem o emprego de técnicas não perturbativas.

Há uma convicção que o problema de se entender o regime de acoplamento forte da QCD – esse regime é muitas vezes denominado *QCD forte* – consiste na identificação dos graus de liberdade apropriados e as forças efetivas relevantes que atuam entre estes [2]. Em outros campos da Física, esta questão se coloca corriqueiramente em sistemas de muitos corpos como, por exemplo, o núcleo atômico. No caso de um núcleo atômico, por exemplo, a interação entre núcleons, em princípio, deve ser explicada em termos dos graus de liberdade de quarks e glúons. No entanto, há mais de 60 anos, é sabido que a energias suficientemente baixas, essa interação pode ser descrita efetivamente em termos de troca de mésons. Mais recentemente, tem-se mostrado que é possível, e adequado, substituir a presença explícita dos mésons em favor de interações efetivas de contato.

Atualmente, a única fonte de informação teórica a respeito da QCD forte são os resultados de cálculos de QCD na rede [3] que têm como base simulações numéricas de larga escala empregando super-computadores. Grandes avanços no entendimento

da QCD forte têm sido alcançados com a QCD na rede nos últimos anos [4], principalmente no que se refere a aspectos qualitativos sobre o confinamento e sistemas de dois quarks pesados. Um dos problemas mais estudados neste contexto é o potencial  $V(d)$  entre dois quarks pesados estáticos separados por uma distância  $d$ . Para valores de  $d$  grandes, a QCD na rede demonstra que  $V(d) \sim d$ , como se houvesse um tubo de fluxo de campo de cor entre os quarks. Uma imagem tal, de um tubo de fluxo estendendo-se entre os dois quarks, é confirmada estudando-se a distribuição espacial dos campos de cor ao redor dos quarks estáticos.

Por outro lado, muito pouco tem sido possível calcular com a QCD a respeito da interação entre hádrons. Uma razão básica para isso é devido ao fato de as simulações de QCD serem feitas para a teoria formulada no espaço Euclideano, mas um processo de espalhamento entre hádrons é um processo que ocorre no espaço de Minkowski. Muito recentemente tem havido algum progresso nessa direção [5], em que se mostrou possível calcular deslocamentos de fase em sistemas de dois hádrons empregando simulações no espaço de Minkowski. No entanto, é pouco provável que num futuro próximo a QCD na rede seja capaz de fornecer uma descrição precisa e completa para sistemas de muitos quarks como, por exemplo, sistemas de dois ou mais mésons ou núcleons. Neste sentido, torna-se imperativo desenvolver modelos que, além de reproduzirem resultados da QCD na rede para sistemas simples, possam ser estendidos de maneira relativamente fácil para sistemas mais complexos.

O desenvolvimento de modelos que contenham elementos da QCD é importante também no contexto dos experimentos envolvendo colisões de íons pesados relativísticas (RHIC). Um dos principais objetivos desses experimentos é investigar a possibilidade da formação de um novo estado da matéria, conhecido como o plasma de quarks e glúons, em que os quarks e glúons se desconfinam do interior dos hádrons em virtude da grande quantidade de energia depositada pela colisão. Além do desconfinamento dos quarks e glúons, outro fenômeno importante do qual se espera observar algum sinal nesses experimentos é a *restauração da simetria quirial*.

A simetria quirial é uma simetria aproximada da QCD. Como base nessa simetria aproximada é possível entender a pequena massa do meson  $\pi$  de  $m_\pi \simeq 140$  MeV\* – pequena em comparação com as massas dos outros hádrons que são próximas de 1000 MeV. A simetria quirial seria uma simetria exata no limite em que as massas dos quarks fossem nulas e, nesse limite, a simetria seria dinamicamente quebrada e o bóson de Goldstone (que tem massa nula) correspondente seria um meson com os mesmos números quânticos do meson  $\pi$ . Como o meson  $\pi$  não tem massa nula,

---

\*Como é usual na Teoria Quântica de Campos, usaremos a convenção  $c = \hbar = 1$ .

sua pequena massa pode ser entendida como sendo o resultado de uma quebra dinâmica de uma simetria quase exata. Isso realmente parece ser assim na QCD, pois os quarks leves  $u$  e  $d$  – que são os quarks que formam o meson  $\pi$  – têm massas muito pequenas,  $m_{u,d} \simeq 10$  MeV, em comparação com a escala  $\Lambda_{QCD} \simeq 250$  MeV da teoria. O parâmetro de ordem associado a essa quebra dinâmica de simetria é o *condensado de quarks*,  $\langle \bar{q}q \rangle$ , o qual é responsável pela geração de massa para os *quarks constituintes*. Isto é, o resultado da quebra dinâmica da simetria quiral é que os quarks que aparecem na Lagrangiana da teoria, os *quarks de corrente*, que têm massa pequena, adquirem uma massa grande, da ordem de 300 MeV, e esse aumento da massa é diretamente proporcional a  $\langle \bar{q}q \rangle$ . A partir disso é possível entender a relação entre os quarks de corrente e os quarks que são comumente usados em modelos de quarks não relativísticos – os quarks constituintes. Nesses modelos, as massas do próton e do nêutron, por exemplo, são entendidas como sendo devidas basicamente à massa dos quarks constituintes, i.e.,  $3 \times 300$  MeV = 900 MeV.

Agora, como em outros casos de quebra de simetria, a simetria pode ser restaurada como função de *campos externos*, como a temperatura e a densidade bariônica. Uma consequência dessa restauração de simetria é o desaparecimento do parâmetro de ordem. É neste contexto que se espera observar sinais de uma restauração da simetria quiral em colisões de íons pesados, mencionadas acima. Um dos sinais é a mudança na interação entre os hádrons num meio a temperatura e densidade finitas. Isso é assim porque, em havendo uma mudança no condensado de quarks, a massa dos quarks constituintes muda e, como consequência, a massa e o tamanho dos hádrons e dos mésons também mudam.

Portanto, para fazer contato com experimentos que estão em desenvolvimento, e que entrarão em operação num futuro próximo, como as do laboratório FAIR na Alemanha [6], é necessário desenvolver modelos para a QCD que apresentem o confinamento dos quarks e realizem a quebra dinâmica da simetria quiral. Esse é precisamente o objetivo central da presente tese. Especificamente, o objetivo da tese é desenvolver um esquema de cálculo suficientemente prático para a obtenção de interações efetivas hadron-hadron, tendo como base um modelo microscópico baseado na QCD, que realize simultaneamente o confinamento dos quarks e glúons e a quebra dinâmica da simetria quiral.

O esquema de cálculo que será desenvolvido nessa tese tem como base um modelo de quarks microscópico inspirado no Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb. O uso de um Hamiltoniano no calibre de Coulomb oferece muitas vantagens em comparação com outros calibres, como os covariantes. Entre as vantagens destacam-

se as seguintes: somente graus de liberdade físicos são necessários para definir o Hamiltoniano, não são necessários graus de liberdade de fantasmas. Uma outra vantagem é a possibilidade de construir um espaço de Fock e definir estados ligados em termos de operadores de criação e aniquilação, o que permite empregar as técnicas usuais da teoria quântica de muitos corpos. Enfim, é possível usar toda a intuição física adquirida com os modelos de quarks, em particular, com o modelo de quarks não relativístico [7]. Especificamente, o modelo microscópico que vamos empregar incorpora uma interação de confinamento do tipo Coulomb e uma parte correspondente a glúons transversos. A interação Coulombiana é derivada a partir de uma aproximação auto-consistente de quasi-partículas para o vácuo da QCD [8, 9]. Contato também será feito com simulações de QCD na rede no calibre de Coulomb [10, 11, 12, 13]. Esse contato servirá para contrastar com os modelos das Refs. [8, 9] e também para obter subsídios para modelar a parte transversa da interação [14]. O Hamiltoniano do modelo microscópico quebra dinamicamente a simetria quiral, permite definir um vácuo que contém condensados de quarks e glúons constituintes, cujas massas são obtidas através de equações de gap.

A tese terá o seguinte desenvolvimento. A partir das interações de Coulomb e de glúons transversos dadas pelo modelo das Refs. [8, 9, 14] e da QCD na rede no gauge de Coulomb [10, 11, 12, 13], podemos obter a equação de gap para o condensado de quarks. A equação de gap fornece a função de massa dos quarks constituintes como função do momento. Uma vez obtida a massa dos quarks constituintes, o seguinte passo será obter as interações microscópicas quark-quark, antiquark-antiquark e quark-antiquark. Obtidas essas interações microscópicas, então podemos definir os estados ligados no espaço de Fock correspondentes a bárions e mésons. Os estados bariônicos são estados de três quarks e os mesônicos são estados de um quark e um antiquark. As amplitudes de Fock (funções de onda) correspondentes a esses estados são obtidas variacionalmente. Fixadas as amplitudes dos estados no espaço de Fock, resta finalmente calculamos as interações efetivas hádron-hádron. Essas interações efetivas são obtidas usando o “Resonating Group Method” (RGM).

O RGM foi inventado por Wheeler [15] para tratar as interações entre núcleos atômicos, isto é, o espalhamento entre estados ligados de núcleons. O método foi transcrito para o estudo das interações hádron-hádron no contexto de modelos de quarks nos anos 80 nas Refs. [16, 17, 18]. Na presente tese será empregada a formulação do RGM na notação de segunda quantização, adotando o esquema de aproximação desenvolvido na Ref. [19]. Esse método fornece um potencial efetivo hádron-hádron que é ao mesmo tempo simples de usar e transparente na interpretação na

forma de *quark Born diagrams* (QBD) [20]. Uma das virtudes desse potencial é que ele pode ser empregado diretamente numa equação de Lippmann-Schwinger para calcular observáveis, como seções de choque e deslocamentos de fase.

Por fim, como aplicação do formalismo desenvolvido de maneira completamente geral, vamos considerar um problema de interesse atual, a saber, a interação de mésons charmosos  $D$  com núcleons [21, 22]. Esse estudo está direcionado para mésons  $D$  contendo um quark anticharm  $\bar{c}$ , i.e. os mésons  $\bar{D}^0 = (u\bar{c})$  e  $D^- = (d\bar{c})$ . A razão para nos concentrarmos nesses mésons é porque no caso de mésons que contem um quark  $c$  e, conseqüentemente, antiquarks  $\bar{u}$  e  $\bar{d}$ , há a possibilidade de aniquilação entre os quarks leves dos núcleons e desses mésons. Quando há possibilidade de aniquilação, há a possibilidade de formação de ressonâncias. O estudo detalhado de ressonâncias requer um formalismo mais geral que o que está desenvolvido na presente tese e requer um estudo em separado. A aplicação do formalismo para a interação de mésons charmosos  $D$  com núcleons também servirá para comparar com resultados obtidos para esse mesmo processo com uma interação muito mais simples da troca de um glúon [23]. Uma comparação dessa natureza empregando a aproximação de Born para a amplitude de espalhamento foi feita na Ref. [26]. O modelo desenvolvido aqui também poderá ser empregado para avaliar a quebra da simetria  $SU(4)$  de sabor em constantes de acoplamento méson-méson-méson e méson-bárion-bárion ( $g_{\pi\pi D}$ ,  $g_{\omega DD}$ ,  $g_{DN\Lambda_c}$ , etc). Essas constantes de acoplamento e os respectivos fatores de forma são usadas em modelos que usam troca de mésons, como no modelo da Ref. [23]. Comparações com os resultados obtidos com regras de soma da QCD [24, 25] também seriam possíveis com o modelo aqui desenvolvido. Uma comparação dessa natureza seria interessante tanto para calibrar modelos efetivos como também para avaliar a qualidade das previsões do método das regras de soma da QCD para essas quantidades.

O estudo das interações de hádrons charmosos com hádrons normais é de interesse em várias instâncias. Um exemplo, mencionado acima, refere-se aos experimentos de colisões de íons pesados relativísticas. Muita atenção tem sido devotada a estas interações desde a sugestão original de Matsui e Satz [27] de que a supressão da produção de mésons  $J/\Psi$  (que são estados ligados  $\bar{c}c$ ) em RHIC poderia trazer informações sobre o plasma de quarks e glúons. Segundo a hipótese de Matsui e Satz, a produção de mésons  $J/\Psi$  seria desfavorecida num plasma de quarks e glúons porque os quarks e glúons presentes nesse plasma blindam a interação de confinamento que leva a um estado ligado dos pares  $\bar{c}c$ . Uma revisão razoavelmente completa sobre os desenvolvimentos nesta área é a Ref. [28]. Um ponto importante relacionado

aos mésons  $D$ , em particular, é a possibilidade que eles oferecem para o entendimento e a identificação dos graus de liberdade efetivos que são responsáveis pela quebra dinâmica da simetria quiral. Mésons contendo um quark (antiquark) leve e um antiquark (quark) pesado são algumas vezes considerados como sendo o átomo de hidrogênio da QCD. Isto é assim porque o quark  $c$  é muito mais pesado que os quarks  $u$  e  $d$  e, em muito boa aproximação, estes mésons podem ser descritos como estados ligados de um corpo, fato este que simplifica tremendamente o tratamento teórico destes mésons. Ainda mais, como as propriedades dos quarks  $u$  e  $d$  são determinados pelo fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral, a interação destes com uma fonte de carga de cor muito pesada, como é o de um quark  $c$  (ou  $b$ ), pode fornecer informações preciosas sobre as interações da QCD na escala de energia relevante no regime de confinamento. Um dos aspectos mais interessantes neste contexto é o estudo de mudanças nas propriedades dos mésons  $D$  a densidades bariônicas e temperaturas finitas. O formalismo desenvolvido na presente tese certamente será de valia para um estudo dessa natureza [29, 30, 31].

A tese está apresentada da seguinte maneira. No próximo Capítulo serão discutidos os formalismos para a derivação de um modelo de quarks constituintes, os quais servirão de base para a derivação de uma interação efetiva de mésons com bárions. Neste modelo, excitações gluônicas no vácuo da QCD fornecem as interações Coulombiana e de glúons transversos. Essas interações levarão à quebra dinâmica da simetria quiral. No Capítulo 3 será apresentado o esquema de aproximações para obter interações efetivas hádron-hádron a partir do modelo de quarks constituintes derivado no Capítulo 2. Este esquema tem como ponto de partida o RGM formulado na notação de segunda quantização. No Capítulo 4 será derivado explicitamente a interação efetiva meson-barion. A menos dos fatores de spin e isospin adequados para os estados  $\bar{D}^0 N$  e  $D^- N$ , as expressões obtidas são completamente gerais. Resultados numéricos para seções de choque e deslocamentos de fase serão discutidos no Capítulo 5. As conclusões da tese e as perspectivas para desenvolvimentos futuros aparecem no Capítulo 6. A tese ainda contém quatro apêndices. No Apêndice A são apresentadas fórmulas a respeito das matrizes de Pauli, de Dirac e de Gell-Mann. No Apêndice B são apresentadas as funções de spin e sabor do núcleon e dos mésons  $D$ . No Apêndice C são apresentados os detalhes das derivações das interações microscópicas quark-quark, antiquark-antiquark e quark-antiquark. Por fim, o Apêndice D são apresentadas as fórmulas para as massas dos bárions e dos mésons.

## Capítulo 2

### Excitações gluônicas e a quebra dinâmica da simetria quiral

Neste capítulo vamos discutir a derivação de um modelo de quarks constituintes que servirá de base para a derivação de uma interação efetiva de mésons com bárions. Neste modelo, os bárions são estados ligados de três quarks constituintes, e os mésons são estados ligados de um quark e um antiquark constituintes. A massa dos quarks constituintes é da ordem de 300 MeV. Esta massa é gerada dinamicamente a partir de um Hamiltoniano que realiza a quebra dinâmica da simetria quiral. Este Hamiltoniano é inspirado no Hamiltoniano da QCD no gauge de Coulomb. Especificamente, este Hamiltoniano é da forma

$$H = H_q + H_C + H_T, \quad (2.1)$$

com

$$H_q = \int d^3x \Psi^\dagger(\vec{x}) [-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m_0] \Psi(\vec{x}), \quad (2.2)$$

$$H_C = -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \rho^a(\vec{x}) V_C(|\vec{x} - \vec{y}|) \rho^a(\vec{y}), \quad (2.3)$$

$$H_T = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_i^a(\vec{x}) V_{ij}(|\vec{x} - \vec{y}|) J_j^a(\vec{y}), \quad (2.4)$$

com  $\Psi(\vec{x})$  representando o operador de campo dos quarks (com os índices de cor e de sabor suprimidos) e  $m_0 = m_u, m_d \dots$  a massa de corrente dos quarks. Adicionalmente, a densidade de carga e a densidade de corrente  $\rho^a(\vec{x})$  e  $J^a(\vec{x})$  são dadas respectivamente por

$$\rho^a(\vec{x}) = \Psi^\dagger(\vec{x}) T^a \Psi(\vec{x}), \quad J_i^a(\vec{x}) = \Psi^\dagger(\vec{x}) T^a \alpha_i \Psi(\vec{x}), \quad (2.5)$$

com  $T^a = \lambda^a/2$ ,  $a = 1, \dots, 8$ , onde  $\lambda^a$  representam as matrizes SU(3) de Gell-Mann. As matrizes de Dirac,  $\alpha_i$  e  $\beta$ , estão definidas no Apêndice A. O potencial de Coulomb é representado por  $V_C(|\vec{x} - \vec{y}|)$  e o potencial transverso, por  $V_{ij}$ , sendo este definido como

$$V_{ij}(|\vec{x} - \vec{y}|) = \left( \delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right)_{\vec{x}} V_T(|\vec{x} - \vec{y}|). \quad (2.6)$$

Os potenciais  $V_C$  e  $V_T$  que serão empregados nesta tese são motivados por estudos sobre excitações gluônicas na QCD formulada no gauge de Coulomb. Para  $V_C$  vamos nos basear em estudos no contínuo e na rede. Especificamente, os estudos no contínuo que vamos considerar foram originalmente desenvolvidos por Szczepaniak e Swanson [8], e complementados mais recentemente por Reinhardt, Szczepaniak e colaboradores [9]. Esses resultados foram obtidos a partir da QCD no gauge de Coulomb através de um esquema de aproximações baseado num ansatz variacional para uma base de quasi-partículas para as excitações gluônicas no vácuo. Este esquema de aproximações será discutido muito brevemente na seção 2.2 logo a seguir. Com relação aos estudos na rede, vamos considerar os resultados obtidos por Müller-Preussker e colaboradores [12, 13], os quais consideraram questões originalmente investigadas por Cucchieri e Zwanziger\* [10]. Na seção 2.3 vamos brevemente discutir esses resultados. Com relação ao potencial transverso  $V_T$ , vamos empregar uma forma consistente com resultados recentes de QCD na rede, mas ajustando parâmetros livres de maneira a obter uma boa descrição para parâmetros quirais, o condensado de quarks e a massa dos quarks constituintes no vácuo.

Na próxima seção vamos apresentar uma revisão sobre o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral. Vamos inicialmente fazer uma discussão com generalidades sobre simetria quiral e sua realização no modo de Nambu-Goldstone. Logo a seguir, vamos ilustrar esta realização com base num modelo muito simples, o modelo de Nambu-Jona-Lasinio. Na seção 2.2, vamos discutir a derivação de  $V_C$ , e na seção 2.3 será mostrada a extração de  $V_C$  a partir de simulações de QCD na rede. A seguir, na seção 2.4, vamos empregar o Hamiltoniano dado pela Eq. (2.1) para obter o modelo de quarks constituintes para o estudo da interação dos mésons  $D$  com núcleons.

---

\*A partir de agora, o caso contínuo será chamado de *modelo SS* ou simplesmente *SS*, e o caso da QCD na rede, *modelo QCD na rede*.



## 2.1 Simetria quiral na QCD

Na QCD, os geradores de carga vetorial e axial de isospin são escritos como

$$\begin{aligned} Q^a(t) &= \int d^3x \Psi^{i\dagger}(x) \frac{\lambda^a}{2} \Psi^i(x), \\ Q^{5a}(t) &= \int d^3x \Psi^{i\dagger}(x) \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} \Psi^i(x), \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo  $\Psi^\dagger(x)$  o operador de campo de quarks, e  $i$  o índice que identifica sabor. Estas cargas definem outras cargas que geram a álgebra do grupo de transformações  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ , definidas como

$$\begin{aligned} Q_L^a &= \frac{1}{2} (Q^a - Q^{5a}), \\ Q_R^a &= \frac{1}{2} (Q^a + Q^{5a}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

as quais obedecem, separadamente, a álgebra do grupo  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} [Q_L^a(t), Q_L^b(t)] &= i \varepsilon^{abc} Q_L^c(t), \\ [Q_R^a(t), Q_R^b(t)] &= i \varepsilon^{abc} Q_R^c(t), \\ [Q_L^a(t), Q_R^b(t)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $\varepsilon^{abc}$  é o tensor totalmente antissimétrico. A forma dada em (2.8) tem estrutura  $1 \pm \gamma^5$ , o que significa serem autoestados do operador quiralidade  $\gamma^5$ . É a razão desta álgebra ser chamada de  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  quiral.

Vejamos as consequências de se supor que o Hamiltoniano da QCD,  $H_{QCD}$ , seja invariante sob transformações geradas por estas cargas. Por exemplo, consideremos  $|h\rangle$  como sendo um autoestado de  $H_{QCD}$ , representando um hádron  $h$  em repouso, de massa  $m$ . Sendo assim, temos

$$H_{QCD} |h\rangle = m |h\rangle \quad (2.10)$$

Agora, a invariância do Hamiltoniano sob os grupos de simetria  $SU(2)_L$  e  $SU(2)_R$  implica em que este comute com os geradores destes grupos e, portanto,

$$\begin{aligned} H_{QCD} Q^a |h\rangle &= m Q^a |h\rangle, \\ H_{QCD} Q^{5a} |h\rangle &= m Q^{5a} |h\rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ou seja, os estados  $Q^a |h\rangle$  e  $Q^{5a} |h\rangle$  são degenerados com o estado  $|h\rangle$ . Por outro lado, aplicando o operador paridade, temos

$$\mathcal{P} Q^a \mathcal{P}^{-1} = Q^a, \quad \mathcal{P} Q^{5a} \mathcal{P}^{-1} = -Q^{5a}. \quad (2.12)$$

A equação da direita segue devido a  $\gamma_5$ , que implica que  $Q^{5a}$  é uma quantidade axial e, portanto, de paridade negativa. Agora, as Eqs. (2.11) implicam na manifestação de hádrons em multipletos de isospin e que para cada multiplete haja o correspondente multiplete de paridade oposta, ou seja, que cada hádron tenha seu correspondente de paridade oposta, entretanto, não se observaram experimentalmente tais dubletos de paridade. Ocorre, porém, que apenas os multipletos de isospin de massas aproximadamente degeneradas são observados experimentalmente; não há a correspondente manifestação de hádrons em dubletos de paridade.

A manifestação de uma simetria de um Hamiltoniano através de multipletos degenerados é conhecida como realização *a la* Wigner, o que significa que a simetria quiral da QCD não se manifesta no modo de Wigner, caso  $H_{QCD}$  seja realmente invariante sob esta simetria. Significa, então, que o estado  $Q^{5a} |h\rangle$  não pode ser interpretado como o estado de um hádron de mesma massa que o hádron  $h$ . Uma consequência disto é que, com  $h$  substituído pelo vácuo, a carga quiral não aniquila o vácuo:

$$Q^{5a} |0\rangle \neq 0. \quad (2.13)$$

Diz-se, então, que a simetria quiral foi espontaneamente quebrada:<sup>†</sup> o Hamiltoniano é invariante sob o grupo de simetria, mas o estado fundamental não é invariante. A manifestação no espectro de uma simetria da maneira como discutida anteriormente é conhecida como realização *a la* Nambu-Goldstone.

Agora, a simetria do Hamiltoniano não pode simplesmente “desaparecer no vácuo”. Na verdade, a simetria se manifesta de uma maneira mais sutil, através da existência de estados bosônicos de spin zero e massa zero que carregam a mesma carga do gerador da simetria quebrada espontaneamente. Este é o conteúdo do teorema de Goldstone [1]. No caso da simetria quiral, esta simetria é axial, ou seja, os bósons de massa zero devem ser pseudo-escalares (escalar: spin zero, pseudo: axial). O fato importante aqui é que no espectro hadrônico existe uma partícula com características similares às deste bóson: o méson  $\pi$ . Este méson tem uma massa muito menor que as de todas as outras partículas que interagem através das interações fortes. O fato de que a massa dos mésons  $\pi$  não é igual a zero, significa que a simetria de  $H_{QCD}$  não é exata, mas somente aproximada.

O que é que quebra a simetria quiral na QCD? Um termo de massa da forma  $m_0 \bar{\Psi}\Psi$  não é invariante sob transformações quirais geradas por  $Q^{5a}$ . Se  $m_0$ , a

---

<sup>†</sup>É comum encontrarmos na literatura a expressão de quebra dinâmica da simetria quiral ao invés de quebra espontânea, mas neste trabalho utilizaremos as ambas expressões como sinônimas.

massa de corrente dos quarks, for muito menor que qualquer outra escala hadrônica, é possível mostrar que as excitações bosônicas pseudo-escalares tem massas  $m_\pi$  proporcionais a  $m_0$ , na verdade,  $m_\pi^2 \sim m_0$ . Agora, experimentalmente,  $m_0$  é pequeno somente no setor de quarks leves, de sabor  $u$  e  $d$ , onde  $m_u \sim 5$  MeV e  $m_d \sim 10$  MeV. Os quarks estranhos  $s$ , com  $m_s \sim 150$  MeV, se encontram numa situação intermediária entre os quarks leves e os pesados  $c$  e superpesados,  $b$  e  $t$ .

Vamos ilustrar brevemente a quebra dinâmica de simetria quiral, utilizando o modelo de Nambu–Jona-Lasinio [32], um modelo esquemático, não renormalizável do tipo quatro férmions. A densidade Hamiltoniana do modelo é dada por

$$\mathcal{H}_{NJL} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}, \quad (2.14)$$

sendo

$$\mathcal{H}_0 = \bar{\Psi}(\vec{x}) \left( -i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m_0 \right) \Psi(\vec{x}), \quad (2.15)$$

e

$$\mathcal{H}_{int} = -G \left[ \left( \bar{\Psi}(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) \right)^2 - \left( \bar{\Psi}(\vec{x}) \gamma^5 \tau^a \Psi(\vec{x}) \right)^2 \right] \quad (2.16)$$

onde  $G$  é a constante de acoplamento e  $m_0$  é a massa dos férmions. Cada espinor  $\Psi$  tem, além das quatro componentes no espaço de Dirac, duas componentes no espaço de sabor (isospin) e três componentes no espaço de cor. Para que este Hamiltoniano seja invariante sob transformações de  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  é necessário que  $m_0 = 0$ . Um modo simples de descobrir se a simetria é quebrada dinamicamente foi sugerida por Nambu e Jona-Lasinio [32] no contexto do Hamiltoniano acima. Eles sugerem encontrar o propagador dos quarks neste modelo, já que por natureza, uma massa se manifesta com um pólo no propagador. Sendo assim, a simetria será quebrada espontaneamente se (1) o propagador contiver o termo de massa e (2) a energia do vácuo calculada com este propagador com termo de massa for menor que a energia calculada com o propagador sem termo de massa.

O primeiro passo foi mostrar a impossibilidade da geração de massa em teoria de perturbação, do seguinte modo – vamos tomar  $m_0 = 0$  para melhor ilustrar a geração de massa. Já que a geração de massa é o resultado dos efeitos de auto-interação entre férmions, a informação da geração de massa deve estar contida na auto-energia de tais partículas. Esta auto-energia é definida por

$$\Sigma(p) = S^{(0)-1}(p) - S^{-1}(p), \quad (2.17)$$

sendo  $S^{(0)-1}(p)$  o inverso do propagador referente a  $\mathcal{H}_0$  da Eq. (2.15), definida como

$$S^{(0)-1}(p) = \not{p}. \quad (2.18)$$

Agora, em primeira ordem de teoria de perturbação, a auto-energia á dada por

$$\Sigma^{(1)}(p) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \text{Tr} [S^{(0)}(p)] - S^{(0)}(p) - \gamma_5 \text{Tr} [S^{(0)}(p)\gamma_5] + \gamma_5 S^{(0)}(p)\gamma_5 \right\}. \quad (2.19)$$

Substituindo  $S^{(0)}$  de (2.18) na Eq. (2.19), o resultado será nulo, isto é,

$$\Sigma^{(1)}(p) = 0. \quad (2.20)$$

Então, em primeira ordem de teoria de perturbação, o propagador  $S^{(1)}(p)$  é dado por

$$S^{(1)}(p) = \frac{1}{\not{p}} = S^{(0)}(p). \quad (2.21)$$

Sabe-se, porém, que, em teoria de perturbação, calcular ordens mais altas significa simplesmente iterar o resultado da ordem imediatamente inferior à desejada, o que significa que a auto-energia continuará sendo igual a zero em qualquer ordem. Fica evidente, então, a natureza não-perturbativa do fenômeno da quebra espontânea da simetria quiral.

A estratégia que NJL adotaram para gerar o termo de massa  $\mathcal{H}_s = M\bar{\Psi}\Psi$  foi adicionar este termo ao Hamiltoniano da Eq. (2.14),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{NJL} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \\ &= (\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_s) + (\mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_s) \\ &= \mathcal{H}'_0 + \mathcal{H}'_{int} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Assim, eles diagonalizaram  $H'_0 = \int d^3x \mathcal{H}'_0$  e trataram  $H'_{int} = \int d^3x \mathcal{H}'_{int}$  perturbativamente, exigindo que a auto-energia correspondente à nova interação  $H'_{int}$  fosse igual a zero. Esta exigência fornece uma equação autoconsistente para  $M$ , chamada de equação de “gap” de massa, dada pela expressão

$$M = \frac{26 G}{(2\pi)^3} \int^\Lambda d^3k \frac{M}{\sqrt{M^2 + k^2}}, \quad (2.23)$$

onde  $\Lambda$  é um momentum de corte, o qual é necessário devido ao fato de o modelo não ser renormalizável.

Assim, encontrada uma solução diferente de zero para  $M$ , Nambu e Jona-Lasinio mostraram que a densidade de energia do vácuo calculada com o propagador com termo de massa,

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - M + i\varepsilon} \quad (2.24)$$

é, de fato, menor que a densidade de energia calculada com  $S^{(0)}$ . Ainda mais, para  $m_0 \neq 0$ , é fácil mostrar que a massa do méson pseudo-escalar é dada por

$$m_\pi^2 = -\frac{m_0}{M} \frac{1}{24GI(m_\pi^2)}, \quad (2.25)$$

onde

$$I(k^2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p + \frac{1}{2}k)^2 - M^2][(p - \frac{1}{2}k)^2 - M^2]}. \quad (2.26)$$

Como dito acima,  $m_\pi^2 \sim m_0$ . Claramente, quando  $m_0 = 0$ , obtemos um bóson pseudo-escalar sem massa, como predito pelo teorema de Goldstone.

## 2.2 Excitações gluônicas no vácuo da QCD - contínuo

O ponto de partida é o Hamiltoniano da QCD no gauge de Coulomb. Este Hamiltoniano é dado em termos de campos de quarks  $\Psi$  e  $\bar{\Psi}$ , e campos de glúons transversos  $\vec{A}^a$ , sujeitos à condição de transversalidade  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a = 0$ , onde  $a = 1, \dots, 8$  são os índices de cor da representação adjunta de  $SU(3)$ . Como no caso da QED podemos definir campos elétricos e magnéticos, dados em termos dos campos  $\vec{A}^a$ . O campo elétrico é, a menos de um sinal, igual ao momento conjugado aos campos  $\vec{A}$ ,

$$\vec{\Pi}^a \equiv -\vec{E}_{tr}^a = \frac{\partial A^a}{\partial t} - g f^{abc} (1 - \nabla^{-2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) A^{0b} \vec{A}^c, \quad (2.27)$$

com

$$A^{0a} = g \left[ \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} \right]^{ab} \rho^b, \quad (2.28)$$

onde  $\vec{D}^{ab}$  é a derivada covariante na representação adjunta, dada por

$$\vec{D}^{ab} = \delta^{ab} \vec{\nabla} + ig T_{ab}^c \vec{A}^c, \quad (2.29)$$

com  $T_{ab}^c = i f^{cab}$ ,  $\rho^a = \rho_q^a + \rho_g^a$  é a densidade de carga de cor, que recebe contribuições de quarks ( $\rho_q$ ) e dos glúons ( $\rho_g$ ), dadas por

$$\rho_q^a = \Psi^\dagger (\lambda^a / 2) \Psi, \quad (2.30)$$

$$\rho_g^a = f^{abc} \vec{E}_{tr}^b \cdot \vec{A}^c. \quad (2.31)$$

Nas expressões acima,  $\lambda^a$  são as matrizes de SU(3) de Gell-Mann e  $f^{abc}$  são as constantes de estrutura do grupo. O campo magnético é dado pela expressão usual em termos das componentes espaciais do tensor de campo  $F_{\mu\nu}^a$ ,

$$\epsilon_{ijk} B_k^a = F_{ij}^a. \quad (2.32)$$

Definidas estas quatidades, podemos escrever o Hamiltoniano da QCD no gauge de Coulomb como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d\vec{x} [\mathcal{J}^{-1} \vec{\Pi}^a \cdot \mathcal{J} \vec{\Pi}^a + \vec{B}^a \vec{B}^a] + \int d\vec{x} \Psi^\dagger [-i\vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} - igA^a T^a) + \beta m] \Psi \\ &+ \frac{1}{2} g^2 \int d\vec{x} d\vec{y} \mathcal{J}^{-1} \rho^a(\vec{x}) K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \mathcal{J} \rho^b(\vec{y}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde  $K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A})$  é o kernel de Coulomb,

$$K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \equiv \left\langle \vec{x}, a \left| \frac{g}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} (-\vec{\nabla}^2) \frac{g}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} \right| \vec{y}, b \right\rangle, \quad (2.34)$$

e a quantidade  $\mathcal{J}$  é o determinante de Fadeev-Popov

$$\mathcal{J} = \det(\nabla \cdot D). \quad (2.35)$$

O esquema de aproximações empreendido por Szczepaniak e Swanson [8] para determinar um Hamiltoniano efetivo de quarks e glúons está baseado num ansatz variacional empregando uma base de quasi-partículas para os glúons. Este autores se concentraram na parte Coulombiana do setor gluônico do Hamiltoniano acima, o qual, como argumentado por vários autores, é o principal responsável pelo confinamento de quarks e glúons. O primeiro passo na direção de implementar o método variacional é o reconhecimento que divergências ultravioleta, presentes em qualquer cálculo, perturbativo ou não perturbativo em um teoria quântica de campos relativística como a QCD, devem ser controladas através de algum método de regularização.

Para organizar o esquema de aproximações, Szczepaniak e Swanson argumentam formalmente em termos de um método de “smearing of the fields”, que consiste em definir campos médios sobre uma região finita (pequena) do espaço. Isto significa que implicitamente está-se introduzindo um cutoff  $\Lambda$  no Hamiltoniano,  $H \rightarrow H(\Lambda)$ , que delimita a região sobre a qual está-se fazendo a média. Isto introduz não localidades no Hamiltoniano, as quais desaparecem quando o cutoff é removido. Agora, para que o cutoff não afete as quantidades físicas, como o espectro do Hamiltoniano, contra-termos  $\delta H(\Lambda)$  devem ser adicionados ao Hamiltoniano, i.e.  $H \rightarrow H(\Lambda) \rightarrow H(\Lambda) + \delta H(\Lambda)$ . Agora, o problema consiste em expandir o Hamiltoniano em termos

de operadores de diferentes dimensões. Quando se fala em dimensões aqui, refere-se às dimensões canônicas dos operadores expressos em termos dos campos. Por exemplo, um campo de glúon tem dimensão canônica (em unidade de  $\hbar c = 1$ ) igual ao inverso de comprimento,  $L^{-1}$ ; um operador de massa para os glúons no Hamiltoniano,  $\Lambda^2 [A^2(x)]_\Lambda$ , que em princípio poderá ser induzido pelo processo de “smearing”, tem dimensão  $L^{-1}$ . A organização desta expansão de operadores é tal que os operadores mais importantes são os de dimensões menores que  $L^{-4}$ , os chamados “operadores relevantes” na linguagem do grupo de renormalização. Esta organização leva a uma interação Coulombiana da forma

$$H_C = \frac{1}{2} g^2 \int d\vec{x} d\vec{y} \rho^a(\vec{x}) K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \rho^b(\vec{y}). \quad (2.36)$$

Os fatores de  $\mathcal{J}$  que aparecem no Hamiltoniano original são expandidos em potências de  $A$ , o que dá origem a operadores com dimensões iguais ou maiores que quatro, os chamados operadores “marginais” e “irrelevantes”, respectivamente. Boas revisões sobre este assunto de renormalização são as Refs. [33, 34].

O próximo passo deste esquema é o seguinte ansatz Gaussiano para as excitações gluônicas para o vácuo [8, 9]:

$$\Psi_0[\vec{A}] = \mathcal{J}^{-\alpha} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{A}^a(\vec{k}) \omega(k) \vec{A}^a(-\vec{k}) \right], \quad (2.37)$$

onde  $\alpha = 1/2$  [9], e  $\omega(k)$  é a função variacional, determinada pela condição de estacionaridade

$$\frac{\delta}{\delta \omega} \langle \omega | H_{rel} | \omega \rangle = 0, \quad (2.38)$$

onde  $|\omega\rangle$  parametriza os diferentes estados variacionais de vácuo. Em  $H_{rel}$  entram, além dos termos proporcionais a  $\vec{\Pi}^a$  e  $\vec{B}^a$  (sem os fatores  $\mathcal{J}$ ) do Hamiltoniano original, o Hamiltoniano de Coulomb  $H_C$  dado na Eq. (2.36), e o operador de massa para os glúons. Os outros termos do Hamiltoniano original da Eq. (2.33), que não são usados no  $H_{rel}$  da Eq. (2.38), são os operadores irrelevantes e marginais mencionados acima. A condição de estacionaridade acima leva a uma equação de gap para  $\omega(k)$ . Esta equação de gap para a teoria sem interação leva simplesmente à solução  $\omega(k) = k$ .

A equação de gap resultante é uma equação integral cujas soluções só podem ser obtidas numericamente. Uma vez obtidas estas soluções, é possível obter o kernel de Coulomb  $K_{ab}$ , que fornece um potencial para interação entre as cargas dadas pelas densidades  $\rho^a$ . Szczepaniak e Swanson [8] fazem um estudo detalhado destas soluções

(para  $\alpha = 0$ ) e fornecem uma parametrização em termos de funções simples. No espaço dos momentos, este potencial de Coulomb, que é a transformada de Fourier do kernel  $K_{ab}$  e que denotamos por  $V_C(k)$ , pode ser muito bem representado pela soma de duas contribuições, uma de longa distância,  $V_l(k)$ , e uma de curta distância,  $V_s(k)$ ,

$$V_C(k) = V_l(k) + V_s(k), \quad (2.39)$$

com a componente de longa distância dada por

$$V_l(k) = \frac{(3,50)^2}{k^2} \left(\frac{m_g}{k}\right)^{1,93}, \quad k \leq m_g, \quad (2.40)$$

e a de curta distância dada por

$$V_s(k) = \frac{8,07}{k^2} \frac{1}{\left[\ln\left(\frac{k^2}{m_g^2} + 1,41\right)\right]^{0,8} \left[\ln\left(\frac{k^2}{m_g^2} + 0,82\right)\right]^{0,62}}, \quad k \geq m_g. \quad (2.41)$$

A quantidade  $m_g$  é uma escala de massa gluônica que é gerada pelo processo de renormalização, e deve ser determinada fenomenologicamente. Para  $k^2 \gg m_g^2$ , o comportamento de  $V_s(k)$  é dado por

$$V_s(k) \rightarrow \frac{8,07}{k^2 \ln^{1,42}(k^2/m_g^2)} \quad \text{para} \quad k^2 \gg m_g^2 \quad (2.42)$$

O fator pré-exponencial  $\mathcal{J}^{-1/2}$  no ansatz da Eq. (2.37) reflete a curvatura do espaço do campo de glúons no calibre de Coulomb. Essa quantidade é equivalente ao Jacobiano da transformação de coordenadas retangulares para coordenadas curvilíneas no espaço ordinário de coordenadas que aparece na medida de integração. Aqui, essa quantidade aparece porque o gauge de Coulomb é o equivalente ao sistema de coordenadas esféricas no espaço de campos – o calibre axial  $A_0 = 0$  é equivalente ao sistema de coordenadas retangulares [35]. Um estudo recente [9] empregando esse ansatz mostra que a única diferença em  $V_C(k)$ , em comparação com aquele derivado por Szczepaniak e Swanson [8], é que no infravermelho profundo, i.e.  $k \approx 0$  – no espaço de coordenadas isso equivale a distâncias relativas  $r \approx \infty$  –  $V_C(k)$  parece comportar-se precisamente como  $1/k^4$ . Isso significa que sua transformada de Fourier leva a um potencial que cresce linearmente com a distância. Na prática, no entanto, a forma precisa de  $V_C$  para distâncias relativas infinitas não é relevante para a fenomenologia e, portanto, a parametrização das soluções dada nas Eqs. (2.40) e (2.41) continua válida.



### 2.3 Excitações gluônicas no vácuo da QCD - simulações de QCD na rede e parte transversa $V_T$

Recentemente tem havido um renovado interesse no estudo de excitações gluônicas no calibre de Coulomb empregando a QCD na rede. Um dos trabalhos mais relevantes neste contexto é o de Cucchieri e Zwanziger [10]. Um dos resultados mais marcantes desse trabalho foi uma indicação de que o comportamento infravermelho do propagador de glúons transversos a tempos iguais parecia concordar com uma fórmula proposta por Gribov há algum tempo [36]. Especificamente, o propagador de glúons transversos a tempos iguais é definido a partir da expressão

$$D_{ij}^{\text{tr}}(x) = \left( \delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right)_{\vec{x}} D^{\text{tr}}(\vec{x}),$$

onde

$$\begin{aligned} D^{\text{tr}}(\vec{x}) &= \langle \omega | T[A_i^a(x, t) A_j^b(0, 0)] | \omega \rangle |_{t=0} \\ &= \delta^{ab} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) D^{\text{tr}}(k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Os resultados das simulações na rede de Cucchieri e Zwanziger [10] para  $D^{\text{tr}}(k)$ , podiam ser ajustados através da função

$$D^{\text{tr}}(k) = \frac{1}{2E(k)}, \quad E(k) = \frac{1}{k} \sqrt{k^4 + M_G^4}, \quad (2.44)$$

onde  $M_G$  é uma escala de massa, conhecida como massa de Gribov. Como dito acima, esta fórmula é motivada pelo que se conhece na literatura como o “cenário de Gribov” para o confinamento [36]. Segundo este cenário, os glúons confinados não se propagam. Uma forma adotada por Gribov para que os glúons não se propagem é uma função de correlação que se anula em  $k = 0$ . No entanto, o anulamento do potencial transversal no infravermelho indica ausência de uma escala de massa.

O propagador de glúons transversos a tempos iguais foi também discutido por Szczepaniak e Swanson [8]. Com o ansatz dado pela Eq. (2.37), a quantidade  $D^{\text{tr}}(k)$  é dada por

$$D^{\text{tr}}(k) = \frac{1}{2\omega(k)} \quad (2.45)$$

Essa expressão mostra que o potencial transversal é determinado pela função  $\omega(k)$ . Szczepaniak e Swanson [8] mostram que no infravermelho  $\omega(k)$  é pouco dependente do momento e é determinada pela escala de massa  $m_g$  discutida na Seção 2.2. No ultravioleta,  $\omega(k)$  cresce praticamente de maneira linear com o momento. A existência

de escala de massa para os glúons transversos no infravermelho é um resultado extremamente importante do trabalho de Szczepaniak e Swanson [8], pois está em desacordo com resultados de simulações de QCD na rede de Cucchieri e Zwanziger [10].

Agora, é importante notar que a presença de uma escala de massa *não* contradiz o cenário de Gribov para o confinamento, de que glúons não se propagam. Apenas contradiz a forma da função de correlação empregada por Gribov. O confinamento se manifesta, desta maneira, com a presença de uma escala de massa, de maneira mais sutil que a proposta pela função de correlação proposta por Gribov. Muito recentemente, novas simulações de QCD na rede [11, 12, 13], empregando redes maiores e com maior estatística, parecem indicar a existência de uma escala de massa, contrariando os resultados anteriores.

Com relação ao potencial  $V_C$ , a Ref. [12] oferece uma parametrização para o potencial de Coulomb no infravermelho, a saber

$$V_l^{\text{rede}}(k) = \frac{8\pi\sigma}{k^4} + \frac{4\pi C}{k^2}, \quad (2.46)$$

com os valores (centrais) ajustados para  $\sigma$  e  $C$  dados por

$$\sigma = (552 \text{ MeV})^2, \quad C = 6. \quad (2.47)$$

Para chegar a esses valores é necessário fixar a escala física das simulações, pois o espaçamento da rede não é fixado a priori. Uma maneira de fixar a escala física é através de uma conexão com o potencial calculado perturbativamente no ultravioleta [13]. Esse potencial, ao nível de um loop, é dado por [37]

$$V_C^{1\text{-loop}}(k) = \frac{192\pi^2}{121} \frac{1}{k^2 \ln(k^2/\Lambda_{Coul}^2)} \quad (2.48)$$

onde  $\Lambda_{Coul}$  é uma escala de massa característica do calibre de Coulomb relacionada à intrínseca da QCD  $\Lambda_{QCD}$ . A relação entre essas duas escalas pode ser calculada em teoria de perturbação. Uma maneira então de fixar a escala é ajustar os dados da rede com essa fórmula, assim fixar as quantidades dimensionais. Na Ref. [13] a fixação da escala física foi feita dessa maneira, mas o mesmo grupo na Ref. [12] argumenta que os dados não permitiam fazer um ajuste confiável e, por isso, usaram um outro método. Esse outro método está baseado no fato que a quantidade

$$k^2 V_C(k) = \frac{12}{11} g^2(k^2/\Lambda_{Coul}^2) \quad (2.49)$$

é invariante sob transformações do grupo de renormalização, o que permite fixar a escala diretamente a partir da relação

$$V_{Coul}(k) = \frac{6}{\beta a^2} V_{Coul}^{\text{rede}}(k, \beta), \quad (2.50)$$

onde  $\beta = 6/g^2$  e  $a$  é o espaçamento da rede em  $\text{GeV}^{-1}$ . O espaçamento da rede é então fixado usando a fórmula de interpolação de Sommer [38]. Desta forma foram obtidos os valores para  $\sigma$  e  $C$  dados na Eq. (2.47).

O ajuste que levou aos valores da Eq. (2.47) para  $\sigma$  e  $C$  que aparecem na Eq. (2.46) descreve bem os dados na região  $0,2 \text{ GeV}^2 < k^2 < 6 \text{ GeV}^2$ . Na ausência de informação para  $k$ 's maiores, vamos por simplicidade tomar para  $k > m_g$  uma parametrização inspirada na solução de SS, a saber

$$V_s^{\text{rede}}(k) = \frac{C}{k^2 \ln^{1.42}(\tau_s + k^2/m_g^2)}, \quad (2.51)$$

onde  $C$  e  $\tau_s$  são escolhidos tais que as partes de longas e curtas distâncias se conectem de maneira suave em  $k = m_g$ . Note que o expoente 1,42 vem da soma de 0,8 e 0,62 da fórmula na Eq. (2.41) – ver também a Eq. (2.42). Escolhemos o ponto de conexão como sendo  $m_g$  em vista da solução de SS e para não introduzir mais um parâmetro a ser ajustado.

Com relação a  $V_T$ , nem Szczepaniak e Swanson [8] nem simulações na rede apresentam parametrizações que possam ser empregadas em nossos estudos. Isso é devido ao fato que os resultados apresentados, como os das Eqs. (2.44) e (2.45), são o resultado de uma integração sobre a componente temporal do momento. Por exemplo, o resultado da rede, Eq. (2.44), é o resultado da seguinte integral no espaço Euclideano

$$D^{\text{tr}}(k) = \int \frac{dk_4}{(2\pi)} \frac{1}{k_4^2 + E^2(k)} = \frac{1}{2E(k)}. \quad (2.52)$$

Obviamente, se estivesse disponível uma parametrização para os resultados numéricos para  $E(k)$ , poderíamos empregá-la para definir  $V_T(k)$  na aproximação estática, que estamos empregando na tese, como  $V_T \sim 1/E^2(k)$ . Em vista disso, nesta tese vamos seguir um procedimento similar ao da Ref. [14] no que se refere à parte transversa da interação. O interesse principal da Ref. [14] era o estudo do desdobramento hiperfino do espectro mesônico. Quatro diferentes formas funcionais para  $V_T$  foram empregadas. Essas diferiam entre si pela dependência com o momento no infravermelho, mas tinham o mesmo comportamento ultravioleta. O comportamento no ultravioleta foi tomado igual à interação  $V_s(k)$  de Szczepaniak e Swanson [8], dada pela Eq. (2.41) acima, que é na forma de um comportamento de liberdade assintótica. Especificamente,  $V_T$  foi escrita na forma

$$V_T(k) = V_{Tl}(k) + V_{Ts}(k), \quad (2.53)$$

com a componente de curta distância dada por  $V_s(k)$  acima e  $V_{Tl}$  parametrizada por quatro diferentes formas. Dessas, as que melhor descreviam os dados experimentais podem ser escritas como

$$V_{Tl}(k) = -\frac{C_h}{k^2 + m^2}, \quad k \leq m, \quad (2.54)$$

onde  $m$  é uma constante e  $C_h$  é uma constante tal que  $V_{Tl}(m_g) = V_{Ts}(m_g)$ . Tanto as escolhas  $m = 0$  ou  $m = m_g$  descreviam razoavelmente bem os desdobramentos hiperfinos do espectro mesônico.

Aqui na presente tese vamos fazer algo similar, mas mais simples. Vamos usar que interpola entre a Yukawa e o comportamento ultravioleta de Szczepaniak e Swanson [8], a saber

$$V_T^{SS}(k) = -\frac{4\pi\alpha_T}{(k^2 + m^2) \ln^{1.42}(\tau + k^2/m_g^2)} \quad (2.55)$$

com  $\alpha_T$ ,  $m^2$  e  $\tau$  parâmetros ajustáveis. Apesar de serem ajustáveis, não há grande liberdade de variação nos parâmetros  $\alpha_T$ ,  $m^2$  e  $\tau$  para observáveis quirais tenham valores aceitáveis fisicamente, como será discutido no Capítulo 5.

Para o caso em que a parte de longo alcance de  $V_C$  é extraída da rede, por simplicidade, e pela ausência de resultados de QCD na rede, vamos empregar a mesma expressão que para o caso acima, i.e.

$$V_T^{rede}(k) = V_T^{SS}(k) \quad (2.56)$$

## 2.4 Quebra dinâmica da simetria quiral e modelo de quarks constituintes

Inicialmente vamos reescrever o Hamiltoniano numa forma mais compacta como

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \Psi^\dagger(\vec{x}) \left( -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m_0 \beta \right) \Psi(\vec{x}) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_a^\mu(\vec{x}) D_{\mu\nu}^{ab}(\vec{x} - \vec{y}) J_b^\nu(\vec{y}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde  $m_0$  é a massa de corrente, as densidades de correntes  $J_a^\mu(\vec{x})$  são tais que a componente  $\mu = 0$  é a densidade de carga de cor  $\rho^a(\vec{x})$  e a componente  $\mu = i$  é a corrente  $J_a^i(\vec{x})$  dadas na Eq. (2.5). A interação efetiva  $D_{\mu\nu}^{ab}(\vec{x} - \vec{y})$  engloba a interação do tipo Coulomb  $D_{00}^{ab}(\vec{x} - \vec{y}) = -V_C(\vec{x} - \vec{y})$  e do tipo Gluons Transversos

$D_{ij}^{ab}(\vec{x} - \vec{y}) = V_{ij}(\vec{x} - \vec{y})$ . O próximo passo consiste em expandir os operadores de campo numa base variacional<sup>‡</sup> na forma

$$\Psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=\pm 1/2} [u_s(\vec{k})q_s(\vec{k}) + v_s(\vec{k})\bar{q}_s^\dagger(-\vec{k})] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (2.58)$$

onde  $q_s^\dagger(\vec{k})$ ,  $\bar{q}_s^\dagger(-\vec{k})$ ,  $q_s(\vec{k})$  e  $\bar{q}_s(-\vec{k})$  representam os operadores de criação e aniquilação de quarks constituintes, e

$$u_s(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E_k + M_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \\ E_k + M_k \end{pmatrix} \chi_s \quad (2.59)$$

$$v_s(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E_k + M_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \hat{k} \\ E_k + M_k \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s^c, \quad (2.60)$$

onde  $E_k = [k^2 + M_k^2]^{1/2}$ ,  $\chi_s^c = -i\sigma^2\chi_s^*$ , e  $\chi_s$  é um espinor de Pauli. A função  $M_k$  é a massa dos quarks constituintes, a quantidade a ser encontrada variacionalmente. No caso do modelo de Nambu–Jona-Lasinio esta função é independente de  $k$ , porque uma interação de quatro fermions nesta aproximação leva a uma massa constante.

Uma outra parametrização conveniente para os espinores é através da definição de um “ângulo quiral”  $\varphi_k$ ,

$$\sin \varphi_k = \frac{M_k}{E_k}, \quad \cos \varphi_k = \frac{k}{E_k}. \quad (2.61)$$

Em termos do ângulo quiral, temos que os espinores são dados por

$$u_s(k) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \sin \varphi_k)}} \begin{pmatrix} 1 + \sin \varphi_k \\ \cos \varphi_k \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \end{pmatrix} \chi_s, \quad (2.62)$$

$$v_s(k) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \sin \varphi_k)}} \begin{pmatrix} -\cos \varphi_k \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \\ 1 + \sin \varphi_k \end{pmatrix} \chi_s^c. \quad (2.63)$$

Agora, utilizando a técnica de contração de Wick, o Hamiltoniano (2.57) poderá ser escrito como

$$H = H_0 + H_2 + H_4, \quad (2.64)$$

---

<sup>‡</sup>Estamos usando o termo “base variacional” por causa da massa dos quarks constituintes que se encontra nos espinores  $u$  e  $v$ . É essa quantidade que será obtida variacionalmente.

onde  $H_0$ , um “c-number”, representa a energia do vácuo, o termo  $H_2$  envolve dois operadores de quarks (antiquarks), e  $H_4$ , quatro operadores. Especificamente, a energia do vácuo é dada pela expressão

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d^3x : \underline{\Psi^\dagger(\vec{x}) \left( -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m_0 \beta \right) \Psi(\vec{x})} : \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3x d^3y : \underline{\Psi^\dagger(\vec{x}) \Gamma_a^\mu \Psi(\vec{x}) D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) \Psi^\dagger(\vec{y}) \Gamma_a^\nu \Psi(\vec{y})} : \end{aligned} \quad (2.65)$$

o Hamiltoniano quadrático é dado por

$$\begin{aligned} H_2 &= \int d^3x : \Psi^\dagger(\vec{x}) \left( -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m_0 \beta \right) \Psi(\vec{x}) : \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3x d^3y : \underline{\Psi^\dagger(\vec{x}) \Gamma_a^\mu \Psi(\vec{x}) D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) \Psi^\dagger(\vec{y}) \Gamma_a^\nu \Psi(\vec{y})} : \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3x d^3y : \underline{\Psi^\dagger(\vec{x}) \Gamma_a^\mu \Psi(\vec{x}) D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) \Psi^\dagger(\vec{y}) \Gamma_a^\nu \Psi(\vec{y})} : \end{aligned} \quad (2.66)$$

e, por fim, a expressão para o Hamiltoniano envolvendo quatro operadores é dada por

$$H_4 = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y : \Psi^\dagger(\vec{x}) \Gamma_a^\mu \Psi(\vec{x}) D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) \Psi^\dagger(\vec{y}) \Gamma_a^\nu \Psi(\vec{y}) : \quad (2.67)$$

Nestas expressões, as contrações de Wick são definidas como

$$\begin{aligned} \underline{\Psi_\alpha(\vec{x}) \Psi_\beta^\dagger(\vec{y})} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\Lambda_+(\vec{k})]_{\alpha\beta} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}, \\ \underline{\Psi_\beta^\dagger(\vec{x}) \Psi_\alpha(\vec{y})} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\Lambda_-(\vec{k})]_{\alpha\beta} e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

com

$$\begin{aligned} \Lambda_+(\vec{k}) &= \sum_s u_s(\vec{k}) u_s^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{2E_k} \left( E_k + \vec{\alpha} \cdot \hat{k} + \beta M_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \sin \varphi_k \beta + \cos \varphi_k \vec{\alpha} \cdot \hat{k} \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_-(\vec{k}) &= \sum_s v_s(\vec{k}) v_s^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{2E_k} \left( E_k - \vec{\alpha} \cdot \hat{k} - \beta M_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \sin \varphi_k \beta - \cos \varphi_k \vec{\alpha} \cdot \hat{k} \right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

são os projetores de energia positiva e negativa respectivamente, que dependem explicitamente da função  $M_k$ . Como são projetores, temos obviamente

$$\Lambda_+(\vec{k}) + \Lambda_-(\vec{k}) = 1. \quad (2.71)$$

Após efetuar as contrações de Wick, obtemos para a densidade de energia no vácuo  $\mathcal{E} \equiv H_0/V$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[ (\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + m_0 \beta) \Lambda^-(\vec{k}) \right] \\ &- 2 \int \frac{d^3 k d^3 q}{(2\pi)^6} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \text{Tr} \left[ \Lambda^+(\vec{k}) \Lambda^-(\vec{q}) \right] \\ &+ 2 \int \frac{d^3 k d^3 q}{(2\pi)^6} V_{ij}(|\vec{k} - \vec{q}|) \text{Tr} \left[ \alpha^i \Lambda^+(\vec{k}) \alpha^j \Lambda^-(\vec{q}) \right]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Agora, eliminando  $\Lambda_+$  em favor de  $\Lambda_-$  a partir da Eq. (2.71), obtemos da condição

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \varphi_k} = 0, \quad (2.73)$$

a equação de gap

$$A(k) \cos \varphi_k - B(k) \sin \varphi_k = 0 \quad (2.74)$$

sendo

$$A(k) = m_0 - \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[ V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) + 2 V_T(|\vec{k} - \vec{q}|) \right] \sin \varphi_q \quad (2.75)$$

e

$$\begin{aligned} B(k) &= k - \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[ V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \hat{k} \cdot \hat{q} \right. \\ &\left. - 2 V_T(|\vec{k} - \vec{q}|) \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q} - k^2)(\vec{k} \cdot \vec{q} - q^2)}{kq |\vec{k} - \vec{q}|^2} \right] \cos \varphi_q. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Fazendo uso da equação de gap, é simples mostrar que o termo  $H_2$  fica na forma diagonal, dado por

$$H_2 = \int d^3 k \varepsilon_k \sum_s \left[ q_s^\dagger(\vec{k}) q_s(\vec{k}) + \bar{q}_s^\dagger(\vec{k}) \bar{q}_s(\vec{k}) \right], \quad (2.77)$$

onde

$$\varepsilon_k = A(k) \sin \varphi(k) + B(k) \cos \varphi(k). \quad (2.78)$$

Estas mesmas equações podem também ser expressas em termos da função massa constituinte  $M_k$ . Fazendo uso das definições dadas na Eq. (2.61), obtemos facilmente para a equação de gap

$$M_k = m_0 + \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[ \frac{f_1(\vec{k}, \vec{q}) V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) + g_1(\vec{k}, \vec{q}) V_T(|\vec{k} - \vec{q}|)}{E_q} \right], \quad (2.79)$$

com

$$f_1(\vec{k}, \vec{q}) = M_q - M_k \frac{q}{k} \hat{k} \cdot \hat{q}, \quad (2.80)$$

$$g_1(\vec{k}, \vec{q}) = 2M_q + 2M_k \frac{q}{k} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q} - k^2)(\vec{k} \cdot \vec{q} - q^2)}{kq|\vec{k} - \vec{q}|^2}, \quad (2.81)$$

e para a energia dos quarks constituintes

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \frac{k^2 + m_0 M_k}{E_k} \\ &+ \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[ \frac{f_2(\vec{k}, \vec{q}) V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) + g_2(\vec{k}, \vec{q}) V_T(|\vec{k} - \vec{q}|)}{E_k E_q} \right], \end{aligned} \quad (2.82)$$

com

$$\begin{aligned} f_2(\vec{k}, \vec{q}) &= M_k M_q + \vec{k} \cdot \vec{q}, \\ g_2(\vec{k}, \vec{q}) &= 2M_k M_q - 2 \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q} - k^2)(\vec{k} \cdot \vec{q} - q^2)}{|\vec{k} - \vec{q}|^2}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Falta agora tratar a parte do hamiltoniano contendo quatro operadores de quarks, o termo  $H_4$  da Eq. (2.67). Porém, isso será discutido no Capítulo 4, quando trataremos explicitamente o problema dos estados ligados de méson e barion.



## Capítulo 3

### Resonating group method e interações efetivas hádron-hádron

Este é um dos capítulos centrais desta tese. Vamos desenvolver um esquema de aproximação para obter interações efetivas méson-bárion a partir do modelo de quarks constituintes derivado no capítulo anterior. Este esquema tem como ponto de partida o *Resonating Group Method* (RGM) [15] formulado na notação de segunda quantização [19], em que os kernels de antissimetrização são expandidos em potências das funções de onda dos bárions e dos mésons. O resultado desta expansão fornece um potencial efetivo méson-bárion que é ao mesmo tempo simples de usar e transparente na interpretação na forma de *quark Born diagrams* (QBD) [20]. Conforme dito na Introdução, o formalismo será direcionado para o estudo em que não há possibilidade de aniquilação de quarks. Quando há possibilidade de aniquilação entre quarks e antiquarks, há a possibilidade de formação de ressonâncias. O estudo detalhado de ressonâncias requer um formalismo mais geral que o que está desenvolvido na presente tese e requer um estudo em separado.

O método RGM foi inventado por Wheeler no contexto de interações núcleo-núcleo. A importância deste método radica no seu tratamento coletivo de partículas, isto é, na solução de problemas envolvendo partículas compostas. Com o advento dos modelos de quarks, este método foi naturalmente transcrito para o estudo das interações hádron-hádron. Pioneiros nestes estudos são os trabalhos de Ribeiro [16], Oka e Yasaki [17] e Faessler [18]. O ponto de partida do RGM é a especificação do Hamiltoniano microscópico envolvendo os quarks e antiquarks, e dos estados ligados destes quarks e antiquarks que participam do processo de interação. De uma maneira

completamente geral, o Hamiltoniano microscópico pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 H_{\text{mic}} = & T(\mu) q_{\mu}^{\dagger} q_{\mu} + T(\nu) \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu} + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger} q_{\nu}^{\dagger} q_{\rho} q_{\sigma} \\
 & + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\rho} \bar{q}_{\sigma} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\rho} q_{\sigma}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

onde os índices  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\sigma$  e  $\rho$  identificam os números quânticos dos quarks e anti-quarks,  $\mu, \nu, \sigma, \rho = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$ . Os operadores de quark e antiquark satisfazem as relações de anticomutação canônicas,

$$\begin{aligned}
 \{q_{\mu}, q_{\nu}\} &= \{q_{\mu}, \bar{q}_{\nu}\} = \{\bar{q}_{\mu}, \bar{q}_{\nu}\} = \{q_{\mu}, \bar{q}_{\nu}^{\dagger}\} = 0, \\
 \{q_{\mu}, q_{\nu}^{\dagger}\} &= \{\bar{q}_{\mu}, \bar{q}_{\nu}^{\dagger}\} = \delta_{\mu\nu}.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

A derivação explícita de cada um dos termos acima no contexto do modelo discutido no Capítulo anterior será discutida no Capítulo 4.

Vamos agora discutir processos de espalhamento. Precisamos inicialmente obter o estado de um méson. Tal estado é escrito genericamente como

$$|\alpha\rangle = M_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle, \tag{3.3}$$

onde  $M_{\alpha}^{\dagger}$  representa o operador que cria o estado de um méson, definido como

$$M_{\alpha}^{\dagger} = \phi_{\alpha}^{\mu\nu} q_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger}, \tag{3.4}$$

sendo  $\phi_{\alpha}^{\mu\nu}$  a amplitude no espaço de Fock, em que o índice  $\alpha$  representa os números quânticos do méson,  $\alpha = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$  e os índices  $\mu$  e  $\nu$ , como mencionado antes, identificam os números quânticos dos quarks e antiquarks.

Igualmente, escrevemos o estado de um bárion como

$$|\beta\rangle = B_{\beta}^{\dagger} |0\rangle, \tag{3.5}$$

onde  $B_{\beta}^{\dagger}$  é o operador criador do estado bariônico, dado como

$$B_{\beta}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{3!}} \varphi_{\beta}^{\mu_1\mu_2\mu_3} q_{\mu_1}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger}, \tag{3.6}$$

sendo  $\varphi_{\beta}^{\mu_1\mu_2\mu_3}$  a função de onda relativa da partícula. O índice  $\beta$  representa os números quânticos do bárion,  $\beta = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$ , e os índices  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  e  $\mu_3$  identificam os números quânticos dos quarks,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$ .

Empregando as relações de anticomutação acima, obtemos para produto interno para mésons,

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = \langle 0 | M_{\alpha} M_{\alpha'}^{\dagger} | 0 \rangle = \phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \phi_{\alpha'}^{\mu\nu}, \tag{3.7}$$

e para os bárions,

$$\langle \beta | \beta' \rangle = \langle 0 | B_\beta B_{\beta'}^\dagger | 0 \rangle = \varphi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \varphi_{\beta'}^{\mu_1\mu_2\mu_3}. \quad (3.8)$$

Vamos supor que as amplitudes do espaço de Fock  $\phi_\alpha^{\mu\nu}$  e  $\varphi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3}$  sejam ortonormalizadas, i.e.

$$\phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_{\alpha'}^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (3.9)$$

$$\varphi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \varphi_{\beta'}^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \delta_{\beta\beta'}. \quad (3.10)$$

Utilizando as relações de anticomutação, juntamente com as condições de ortogonalização, (3.7) e (3.8), obtemos as relações de comutação para os operadores de mésons compostos,

$$[M_\alpha, M_{\alpha'}] = 0, \quad [M_\alpha, M_{\alpha'}^\dagger] = \delta_{\alpha\alpha'} - \Delta_{\alpha\alpha'}^M, \quad (3.11)$$

e

$$[q_\mu, M_\alpha] = [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0, \quad (3.12)$$

$$[q_\mu, M_\alpha^\dagger] = \delta_{\mu\mu'} \phi^{*\mu'\nu} \bar{q}_\nu^\dagger, \quad [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] = -\delta_{\nu\nu'} \phi^{*\mu\nu'} q_\mu^\dagger, \quad (3.13)$$

sendo

$$\Delta_{\alpha\alpha'}^M = \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_{\alpha'}^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_{\alpha'}^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu. \quad (3.14)$$

Para os bárions obtemos as relações de anticomutação,

$$\{B_\beta, B_{\beta'}\} = 0 \quad \{B_\beta, B_{\beta'}^\dagger\} = \delta_{\beta\beta'} - \Delta_{\beta\beta'}^B, \quad (3.15)$$

e

$$\{q_\mu, B_\beta\} = 0, \quad (3.16)$$

$$\{q_\mu, B_\beta^\dagger\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \varphi^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger, \quad \{q_\mu^\dagger, B_\beta\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \varphi^{*\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_3} q_{\mu_2}, \quad (3.17)$$

sendo

$$\Delta_{\beta\beta'}^B = 3 \varphi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \varphi_{\beta'}^{\mu_1\mu_2\nu_3} q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_3} - \frac{3}{2} \varphi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \varphi_{\alpha'}^{\mu_1\nu_2\nu_3} q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3}. \quad (3.18)$$

Os termos  $\Delta_{\alpha\alpha'}^M$  e  $\Delta_{\beta\beta'}^B$ , acima, surgem como uma manifestação da natureza composta e da estrutura interna destas partículas. A existência destes termos tornam bastante complicados os problemas de muitos corpos em que os graus de liberdades

internos de tais partículas não podem ser desprezados, pois as técnicas usuais de teoria de campos aplicam-se a operadores que satisfazem as relações de comutação (ou anticomutação) canônicas. Analogamente, o fato que os comutadores  $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$  e  $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$  do méson, e os anticomutadores  $\{q_\mu, B_\beta^\dagger\}$  e  $\{q_\mu^\dagger, B_\beta\}$  do bárion, não se anulam, expressa a dependência cinemática entre cada um dos operadores destas partículas e os operadores de quark e antiquark. Esta é a razão do porque os operadores de méson,  $M_\alpha$  e  $M_\alpha^\dagger$ , e os operadores de bárion,  $B_\beta$  e  $B_\beta^\dagger$ , não constituem variáveis dinâmicas convenientes.

O seguinte passo será calcular a equação de movimento para a amplitude  $\phi_\alpha^{\mu\nu}$ . Esta pode ser obtida a partir do princípio variacional

$$\delta\langle\alpha|(H_{\text{mic}} - \varepsilon_\alpha^m)|\alpha\rangle = 0, \quad (3.19)$$

onde  $\varepsilon_\alpha^m$  é a energia total do méson, isto é, energia de centro de massa mais energia interna (massa), e a variação é com relação a  $\phi$ . O resultado é

$$H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_\alpha^{\sigma\rho} = \varepsilon_\alpha^m \phi_\alpha^{\mu\nu}, \quad (3.20)$$

onde

$$H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) = \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}[T(\sigma) + T(\rho)] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho). \quad (3.21)$$

É importante notar que *não* há soma sobre o índice  $\alpha$  no lado direito da Eq. (3.20).

Da mesma forma, não é difícil mostrar que a equação de movimento correspondente ao bárion é dada como

$$H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_\beta^{\sigma\rho\chi} = \varepsilon_\beta^b \varphi_\beta^{\mu\nu\chi}, \quad (3.22)$$

sendo  $\varepsilon_\beta^b$  a energia total e

$$H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) = 3[\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}T(\sigma) + V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho)]. \quad (3.23)$$

Agora que encontramos a equação de movimento para um méson e um bárion, estamos prontos para tratar o problema dos sistemas de dois hádrons usando o “Resonating Group Method”. Nosso objetivo nesta tese é o sistema de um méson charmoso e um nucleon (sistema méson-bárion). No entanto, para ilustrar o procedimento, vamos inicialmente considerar os sistemas méson-méson e bárion-bárion, que são simples, pois envolvem partículas de mesma natureza. Para tal, vamos seguir de muito perto a apresentação da Ref. [19].

### 3.1 Sistemas méson-méson e bárion-bárion

O estado de dois mésons é definido como

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_m^{\alpha\beta} M_\alpha^\dagger M_\beta^\dagger |0\rangle, \quad (3.24)$$

onde  $\Phi_m^{\alpha\beta}$  é a função de onda para o estado de dois mésons. O operador  $M^\dagger$  foi definido na Eq. (3.4). O índice  $m$  representa os números quânticos do sistema méson-méson. Os índices  $\alpha$  e  $\beta$  representam os números quânticos dos mésons - isto não deve dar origem a confusões pois, ao final, estes índices sempre vão aparecer conectados às respectivas amplitudes mesônicas no espaço de Fock.

O produto interno para este estado de dois mésons, que impomos que seja ortonormalizado, implica que

$$\begin{aligned} \langle m | m' \rangle &= \frac{1}{2} \Phi_m^{*\alpha\beta} \langle 0 | M_\beta M_\alpha M_{\alpha'}^\dagger M_{\beta'}^\dagger | 0 \rangle \Phi_{m'}^{\alpha'\beta'} \\ &= \Phi_m^{*\alpha\beta} N_m(\alpha\beta, \alpha'\beta') \Phi_{m'}^{\alpha'\beta'} \equiv \delta_{mm'}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

sendo  $N_m(\alpha\beta, \alpha'\beta')$  o kernel de normalização mesônico, cuja forma é

$$N_m(\alpha\beta, \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} - K_m(\alpha\beta, \alpha'\beta'), \quad (3.26)$$

onde  $K_m(\alpha\beta, \alpha'\beta')$  é o kernel mesônico de troca,

$$K_m(\alpha\beta, \alpha'\beta') = \phi_\alpha^{*\lambda\omega} \phi_\beta^{*\theta\chi} \phi_{\beta'}^{\lambda\chi} \phi_{\alpha'}^{\theta\omega}. \quad (3.27)$$

A equação de movimento para a amplitude  $\Phi_m^{\alpha\beta}$  é obtida como anteriormente na Eq. (3.19), mas desta vez aplicada ao estado de dois mésons  $|m\rangle$ :

$$\delta \langle m | (H_{\text{mic}} - \varepsilon_m) | m \rangle = 0, \quad (3.28)$$

Após ter contraído todos os operadores de quarks e efetuado a variação, obtemos a equação

$$[H_{RGM-m}(\alpha\beta, \alpha'\beta') - \varepsilon_m N_m(\alpha\beta, \alpha'\beta')] \Phi_m^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.29)$$

onde  $\varepsilon_m$  representa a energia total do sistema méson-méson, e  $H_{RGM-m}(\alpha\beta, \alpha'\beta')$  dado por

$$H_{RGM-m}(\alpha\beta, \alpha'\beta') = T_{RGM-m}(\alpha\beta, \alpha'\beta') + V_{RGM-m}(\alpha\beta, \alpha'\beta'), \quad (3.30)$$

sendo  $T_{RGM-m}(\alpha\beta, \alpha'\beta')$  o termo correspondente à “energia cinética” dos dois mésons, dado por

$$T_{RGM-m}(\alpha\beta, \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\beta'} \phi_\beta^{*\mu\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\sigma\rho} + \delta_{\beta\alpha'} \phi_\alpha^{*\mu\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\beta'}^{\sigma\rho}, \quad (3.31)$$

e  $V_{RGM-m}(\alpha\beta, \alpha'\beta')$  é o termo de interação

$$V_{RGM-m}(\alpha\beta, \alpha'\beta') = V_m^{intra-ex}(\alpha\beta, \alpha'\beta') + V_m^{ex}(\alpha\beta, \alpha'\beta'), \quad (3.32)$$

com

$$\begin{aligned} V_m^{intra-ex}(\alpha\beta, \alpha'\beta') &= -\phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\beta^{*\kappa\chi} H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\beta'}^{\sigma\chi} \phi_{\alpha'}^{\kappa\rho} \\ &\quad - \phi_\alpha^{*\mu\chi} \phi_\beta^{*\kappa\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\beta'}^{\kappa\chi} \phi_{\alpha'}^{\sigma\rho}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} V_m^{ex}(\alpha\beta, \alpha'\beta') &= -2 \phi_\beta^{*\kappa\chi} \phi_\alpha^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\kappa\rho} \phi_{\beta'}^{\sigma\chi} \\ &\quad - \phi_\beta^{*\nu\chi} \phi_\alpha^{*\mu\kappa} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\rho\kappa} \phi_{\beta'}^{\sigma\chi} \\ &\quad - \phi_\beta^{*\chi\nu} \phi_\alpha^{*\kappa\mu} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\kappa\rho} \phi_{\beta'}^{\chi\sigma}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aqui, a interpretação de cada um destes termos é a seguinte: o termo  $V_m^{intra-ex}$  corresponde à interação dos dois mésons com uma interação gluônica dentro de um dos mésons, seguida de troca de um quark (antiquark) entre esses mésons, e  $V_m^{ex}$  corresponde à interação dos dois mésons através de uma interação gluônica entre eles, seguida de troca de um quark (antiquark) entre as mesmas. Em princípio há mais um termo na Eq. 3.32, usualmente chamado [19] de  $V_m^{dir}$ , que corresponde à interação dos dois mésons através de uma interação gluônica entre eles, sem troca de quark, o qual é identicamente zero porque não pode haver troca de cor entre estados sem cor.

Para o caso de dois bárions, o resultado é similar. Definindo o estado de dois bárions como

$$|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Pi_b^{\alpha\beta} B_\alpha^\dagger B_\beta^\dagger |0\rangle, \quad (3.35)$$

temos que a condição de normalização das amplitudes  $\Pi_b$  é dada por

$$\begin{aligned} \langle b | b' \rangle &= \frac{1}{2} \Pi_b^{*\alpha\beta} \langle 0 | B_\beta B_\alpha B_{\alpha'}^\dagger B_{\beta'}^\dagger | 0 \rangle \Pi_{m'}^{\alpha'\beta'} \\ &= \Pi_b^{*\alpha\beta} N_b(\alpha\beta, \alpha'\beta') \Pi_{b'}^{\alpha'\beta'} \equiv \delta_{bb'}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde

$$N_b(\alpha\beta, \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} - K_b(\alpha\beta, \alpha'\beta'), \quad (3.37)$$

sendo  $K_b(\alpha\beta, \alpha'\beta')$  dado por

$$K_b(\alpha\beta, \alpha'\beta') = 9 \varphi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \varphi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \varphi_{\alpha'}^{\nu_1\nu_2\mu_3} \varphi_{\beta'}^{\mu_1\mu_2\nu_3}. \quad (3.38)$$

A equação de movimento para  $\Pi_b^{\alpha\beta}$  é dada por

$$[H_{RGM-b}(\alpha\beta, \alpha'\beta') - \varepsilon_b N_b(\alpha\beta, \alpha'\beta')] \Pi_m^{\alpha'\beta'} = 0, \quad (3.39)$$

onde  $\varepsilon_b$  é a energia total do sistema de dois bárions, e

$$H_{RGM-b}(\alpha\beta, \alpha'\beta') = T_{RGM-b}(\alpha\beta, \alpha'\beta') + V_{RGM-b}(\alpha\beta, \alpha'\beta'), \quad (3.40)$$

com

$$T_{RGM-b}(\alpha\beta, \alpha'\beta') = 3 \delta_{\alpha\alpha'} \varphi_\alpha^{*\mu\nu\tau} H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\alpha'}^{\sigma\rho\tau}, \quad (3.41)$$

e

$$V_{RGM-b}(\alpha\beta, \alpha'\beta') = V_b^{ex}(\alpha\beta, \alpha'\beta') + V_b^{intra-ex}(\alpha\beta, \alpha'\beta'), \quad (3.42)$$

onde  $V_b^{ex}$  é dado por

$$\begin{aligned} V_b^{ex}(\alpha\beta, \alpha'\beta') &= + 9 \varphi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \varphi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\mu_3} \varphi_{\alpha'}^{\rho\nu_2\nu_3} \\ &- 36 \varphi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \varphi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\nu_3} \varphi_{\alpha'}^{\rho\nu_2\mu_3} \\ &- 9 \varphi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \varphi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\beta'}^{\rho\mu_2\mu_3} \varphi_{\alpha'}^{\sigma\nu_2\nu_3} \\ &+ 18 \varphi_\alpha^{*\mu\nu\mu_3} \varphi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\beta'}^{\nu_1\sigma\mu_3} \varphi_{\alpha'}^{\rho\nu_2\nu_3} \\ &- 18 \varphi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \varphi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\rho} \varphi_{\alpha'}^{\nu_1\nu_2\mu_3} \end{aligned} \quad (3.43)$$

e  $V_b^{intra-ex}$  é dado por

$$\begin{aligned} V_b^{intra-ex}(\alpha\beta, \alpha'\beta') &= - 6 \varphi_\alpha^{*\mu\mu_2\nu} \varphi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\nu_3} \varphi_{\alpha'}^{\nu_1\nu_2\rho} \\ &- 6 \varphi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \varphi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu} H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\rho} \varphi_{\alpha'}^{\nu_1\nu_2\mu_3} \\ &- 6 \varphi_\alpha^{*\mu\nu\mu_3} \varphi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\beta'}^{\sigma\rho\nu_3} \varphi_{\alpha'}^{\nu_1\nu_2\mu_3}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Como antes, o termo  $V_b^{ex}$  corresponde à interação dos dois bárions através de uma interação gluônica seguida da troca de um quark, e  $V_b^{intra-ex}$  corresponde à interação dos dois bárions com uma interação gluônica dentro de um dado bárion, seguida por troca de um quark.

Agora, as Eq. (3.29) e (3.39) não estão na forma de uma equação de Schrödinger usual, devido ao aparecimento dos kernels de normalização  $N_m$  e  $N_b$  multiplicando os autovalores de energia. Estes kernels aparecem obviamente porque eles aparecem nas condições de normalização das amplitudes  $\Phi_m$  e  $\Pi_b$ , como mostrado nas

Eqs. (3.25) e (3.36). Isto significa que as interações  $V_{RGM-m}$  e  $V_{RGM-b}$  não podem ser interpretadas como potenciais méson-méson e bárion-bárion que entrariam na maneira usual numa equação de espalhamento do tipo Lippmann-Schwinger na forma

$$T_m = V_{RGM-m} + V_{RGM-m} \frac{1}{\epsilon_m + i\epsilon - H_{RGM-m}} V_{RGM-m}, \quad (3.45)$$

e equivalentemente para os bárions. No entanto, é possível construir interações hádron-hádron da forma usual, isto é, que podem ser colocadas numa equação de Lippmann-Schwinger padrão como na Eq. (3.45) através de uma renormalização das funções de onda do sistemas de dois hádrons de modo que as correspondentes funções de onda renormalizadas sejam renormalizadas da maneira usual. Como o processo de renormalização é o mesmo para ambos os casos mesônico e bariônico, aqui iremos desenvolvê-lo explicitamente somente para o caso mesônico. Define-se a função de onda renormalizada como

$$\bar{\Phi}_j^{\alpha\beta} = N_{\Phi}^{1/2}(\alpha\beta; \alpha'\beta') \Phi_j^{\alpha'\beta'}, \quad (3.46)$$

onde  $N_{\Phi}$  é o kernel de normalização correspondente ao estado de dois hádrons descrito pela função de onda  $\Phi$ . Obviamente, o estado renormalizado  $\bar{\Phi}^{\alpha\beta}$  obedece à normalização usual

$$\bar{\Phi}_j^{\alpha\beta*} \bar{\Phi}_k^{\alpha\beta} = \delta_{j,k}. \quad (3.47)$$

Define-se agora o Hamiltoniano RGM “renormalizado” ,

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') = N_{\Phi}^{-1/2}(\alpha\beta; \gamma\delta) H_{RGM}(\gamma\delta; \gamma'\delta') N_{\Phi}^{-1/2}(\gamma'\delta'; \alpha'\beta'). \quad (3.48)$$

Com isto, não é difícil mostrar que obteremos equações de movimento que são da forma usual de uma equação de Schrödinger,

$$[\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') - \epsilon_j \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}] \bar{\Phi}_j^{\alpha'\beta'} = 0 \quad (3.49)$$

onde

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') = H_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') + \Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta'), \quad (3.50)$$

com o termo  $\Delta H_{RGM}$  contendo potências dos fatores

$$\Delta_m(\mu\nu; \sigma\rho) = \phi_{\alpha}^{\mu\nu} \phi_{\alpha}^{*\sigma\rho}, \quad (3.51)$$



onde é importante salientar que há uma soma implícita sobre  $\alpha$ . Para os bárions, o termo equivalente é dado por

$$\Delta_b(\mu_1\mu_2\mu_3; \nu_1\nu_2\nu_3) = \varphi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3} \varphi_\alpha^{*\nu_1\nu_2\nu_3}. \quad (3.52)$$

Estes fatores são chamados de “kernel de estados ligados” e têm as seguintes propriedades - ver Ref. [19]:

$$\Delta_m(\mu\nu; \sigma\rho)\phi_\alpha^{\sigma\rho} = \phi_\alpha^{\mu\nu}, \quad \Delta_b(\mu\nu\tau; \sigma\rho\lambda)\varphi_\beta^{\sigma\rho\lambda} = \varphi_\beta^{\mu\nu\tau}. \quad (3.53)$$

Na forma como está, a equação acima é exata e somente pode ser resolvida numericamente. No entanto, é possível simplificar substancialmente o problema, sem no entanto comprometer o conteúdo físico do problema, expandindo a raiz quadrada do kernel de normalização como

$$N^{-1/2} = (1 - N_E)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} N_E + \dots, \quad (3.54)$$

em que somente o primeiro termo é retido. A qualidade desta aproximação foi investigada na Ref. [19], onde foi mostrado que o erro não chega a 5% no potencial efetivo hádron-hádron. A este nível de aproximação,  $\Delta H_{RGM}$  é dado por

$$\begin{aligned} \Delta H_{RGM-m}^{(1)}(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\beta^{*\mu_1\nu_1} H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta_m(\sigma\rho; \sigma_1\rho_1) \phi_{\beta'}^{\sigma_1\nu_1} \phi_{\alpha'}^{\mu_1\rho_1} \\ &+ \phi_\alpha^{*\sigma_1\rho_1} \phi_\beta^{*\mu_1\nu_1} \Delta_m(\sigma_1\nu_1; \mu\nu) H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\beta'}^{\mu_1\rho_1} \phi_{\alpha'}^{\sigma\rho}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde o sobrescrito (1) nesta expressão significa primeira ordem na expansão do kernel de normalização, como mostrado na Eq. (3.54).

Mesmo assim como está, o problema continua muito complicado devido às integrais multidimensionais (somas sobre os índices de quarks) que estão envolvidas nestas expressões. No entanto, para o caso em que as funções de onda dos hádrons individuais  $\phi^{\mu\nu}$  são autoestados do Hamiltoniano microscópico  $H_{q\bar{q}}$ , o termo  $\Delta H_{RGM}$  cancela exatamente os termos  $V^{intra-ex}$ . Isto é,

$$V_m^{intra-ex}(\alpha\beta; \alpha'\beta') + \Delta H_{RGM-m}^{(1)}(\alpha\beta; \alpha'\beta') = 0. \quad (3.56)$$

Com isto, temos então que as interações efetivas méson-méson e bárion-bárion são simplesmente dadas pelos correspondentes termos de troca quark-gluon  $V_m^{ex}$ , dada pela Eqs. (3.34). Como dito acima, o caso bariônico é tratado da mesma forma, com resultados idênticos, de que os termos intra se cancelam.

### 3.2 Sistema méson-bárion

Agora vamos tratar do problema de interesse nesta tese, o sistema méson-bárion. A estratégia aqui fica muito facilitada agora em vista da discussão na seção anterior. O estado de um méson e um bárion é escrito genericamente como

$$|a\rangle = \Psi_a^{\alpha\beta} M_\alpha^\dagger B_\beta^\dagger |0\rangle, \quad (3.57)$$

onde  $\Psi_a^{\alpha\beta}$  é a função de onda relativa. Impondo a normalização usual de que  $\langle a|a'\rangle = \delta_{aa'}$ , obtemos que a normalização das funções de onda relativas méson-bárion são dadas como

$$\begin{aligned} \langle a|a'\rangle &= \Psi_a^{*\alpha\beta} \langle 0|B_\beta M_\alpha M_{\alpha'}^\dagger B_{\beta'}^\dagger|0\rangle \Psi_{a'}^{\alpha'\beta'} \\ &= \Psi_a^{*\alpha\beta} N(\alpha\beta; \alpha'\beta') \Psi_{a'}^{\alpha'\beta'} \equiv \delta_{aa'}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde  $M_\alpha^\dagger$  e  $B_\alpha^\dagger$  são respectivamente os operadores de criação de um méson e de um bárion, definidos na introdução deste Capítulo, e  $N(\alpha\beta; \alpha'\beta')$  é o kernel de normalização para o sistema méson-bárion, dado por

$$N(\alpha\beta; \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\alpha'} - N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta'), \quad (3.59)$$

onde o kernel de troca  $N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta')$  é dado por

$$\begin{aligned} N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= \varphi_\beta^{*\mu\nu\sigma} \phi_\alpha^{*\rho\lambda} \phi_{\alpha'}^{\sigma\lambda} \varphi_{\beta'}^{\mu\nu\rho} + \varphi_\beta^{*\mu\nu\sigma} \phi_\alpha^{*\rho\lambda} \phi_{\alpha'}^{\nu\lambda} \varphi_{\beta'}^{\mu\rho\sigma} \\ &+ \varphi_\beta^{*\mu\nu\sigma} \phi_\alpha^{*\rho\lambda} \phi_{\alpha'}^{\mu\lambda} \varphi_{\beta'}^{\rho\nu\sigma}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

sendo  $\phi_\alpha^{\mu\nu}$  e  $\varphi_\alpha^{\mu\nu\sigma}$  respectivamente as funções de onda do méson e do bárion.

A equação de movimento RGM do sistema méson-bárion é construído através do princípio variacional dada na Eq. (3.19) e fazendo uso do Hamiltoniano da Eq. (3.1), obtendo

$$[H_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') - \varepsilon_a N(\alpha\beta; \alpha'\beta')] \Psi_a^{\alpha'\beta'} = 0, \quad (3.61)$$

onde  $H_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta')$  envolve o termo cinético  $T_{RGM}$  e o potencial  $V_{RGM}$ , como em (3.30). Agora, tanto  $T_{RGM}$  quanto  $V_{RGM}$ , envolvem os termos  $\phi$ 's e  $\varphi$ 's. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} T_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= \delta_{\beta\beta'} \phi_\alpha^{*\mu\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\sigma\rho} \\ &+ \delta_{\alpha\alpha'} \varphi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \varphi_{\beta'}^{\sigma\rho\mu_3}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

e

$$V_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') = V_{mb}^{dir}(\alpha\beta; \alpha'\beta') + V_{mb}^{ex}(\alpha\beta; \alpha'\beta') + V_{mb}^{intre-ex}(\alpha\beta; \alpha'\beta'), \quad (3.63)$$

sendo

$$\begin{aligned} V_{mb}^{intra-ex}(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= -\frac{3}{2} \varphi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \phi_\alpha^{*\mu\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\mu_1\rho} \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\mu_3} \\ &\quad - \frac{3}{2} \varphi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \phi_\alpha^{*\mu_1\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\sigma\rho} \varphi_{\beta'}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ &\quad - 3\varphi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \phi_\alpha^{*\chi\lambda} H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\mu_3\lambda} \varphi_{\beta'}^{\sigma\rho\chi}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} V_{mb}^{dir}(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= +3\varphi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \phi_\alpha^{*\chi\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\chi\rho} \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\mu_3} \\ &\quad + 3\varphi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3} \phi_\alpha^{*\mu\lambda} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\sigma\lambda} \varphi_{\beta'}^{\rho\mu_2\mu_3} \\ &\quad + 3\varphi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \phi_\alpha^{*\nu\lambda} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\rho\lambda} \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\mu_3} \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} V_{mb}^{ex}(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= -3\varphi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3} \phi_\alpha^{*\mu\lambda} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\rho\lambda} \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\mu_3} \\ &\quad - 3\varphi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \phi_\alpha^{*\mu_1\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\sigma\rho} \varphi_{\beta'}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ &\quad - 6\varphi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \phi_\alpha^{*\mu\lambda} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\mu_1\lambda} \varphi_{\beta'}^{\sigma\rho\mu_3} \\ &\quad - 6\varphi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3} \phi_\alpha^{*\chi\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\mu_1\rho} \varphi_{\beta'}^{\chi\sigma\mu_3} \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde  $H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)$  e  $H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho)$  representam os Hamiltonianos do méson e do bárion, definidas respectivamente nas Eqs. (3.21) e (3.23).

Como anteriormente, definimos o Hamiltoniano RGM “renormalizado” como

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') = N^{-1/2}(\alpha\beta; \gamma\delta) H_{RGM}(\gamma\delta; \gamma'\delta') N^{-1/2}(\gamma'\delta'; \alpha'\beta'), \quad (3.67)$$

e a função de onda “renormalizada” como

$$\bar{\Psi}_a^{\alpha\beta} = N^{1/2}(\alpha\beta; \alpha'\beta') \Psi_a^{\alpha'\beta'}. \quad (3.68)$$

Com estas definições, e com a expansão da matriz  $N^{-1/2}$ , dada na Eq. (3.54), encontramos

$$\left[ \bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') - \varepsilon_a \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \right] \bar{\Psi}_a^{\alpha'\beta'} = 0, \quad (3.69)$$

onde

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') = H_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') + \Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta'). \quad (3.70)$$

Como antes, o termo  $\Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta')$  contém potências do “kernel de estados ligados”, definidos nas Eq. (3.51) e (3.52).

Agora, considerando apenas fatores de ordem mais baixa nos kernels  $\Delta_m(\mu\nu; \sigma\rho)$  e  $\Delta_b(\mu\nu\tau; \sigma\rho\lambda)$ , e eliminando os fatores mistos das mesmas, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta') = & + \frac{3}{2} \varphi_\beta^{*\theta\kappa\omega} \phi_\alpha^{*\mu\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta_m(\sigma\rho; \chi\lambda) \phi_{\alpha'}^{\omega\lambda} \varphi_{\beta'}^{\theta\kappa\chi} \\ & + 3 \varphi_\beta^{*\mu\nu\tau} \phi_\alpha^{*\chi\lambda} H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta_b(\sigma\rho\tau; \theta\kappa\omega) \phi_{\alpha'}^{\omega\lambda} \varphi_{\beta'}^{\theta\kappa\chi} \\ & + \frac{3}{2} \varphi_\beta^{*\theta\kappa\omega} \phi_\alpha^{*\chi\lambda} \Delta_m(\omega\lambda; \mu\nu) H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\sigma\rho} \varphi_{\beta'}^{\theta\kappa\chi}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Agora, para o caso em que  $\phi^{\mu\nu}$  e  $\varphi^{\mu\nu\sigma}$  serem autoestados do Hamiltoniano microscópico, i.e. se satisfizerem respectivamente as Eqs. (3.20) e (3.22), e usando as propriedades dos kernels de estados ligados  $\Delta_m(\mu\nu; \mu'\nu')$  e  $\Delta_b(\mu\nu\sigma; \mu'\nu'\sigma')$ , dadas na Eq. (3.53), não é difícil mostrar que  $\Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \alpha'\beta')$  cancela exatamente  $V_{mb}^{intra-ex}(\alpha\beta; \alpha'\beta')$ . O que resta são os termos  $V_{mb}^{dir}$  e  $V_{mb}^{ex}$ . O termo  $V_{mb}^{dir}$  é identicamente zero, como será explicitamente mostrado no próximo Capítulo, e já argumentado para os casos méson-méson e bárion-bárion. O termo remanescente,  $V_{mb}^{ex}$  é um termo de “quark-gluon-interchange”, em que há a troca simultânea de um quark e um glúon entre o méson e o bárion. A Fig. 3.1 apresenta uma representação pictórica dos quatro termos que compõem  $V_{mb}^{ex}$ .

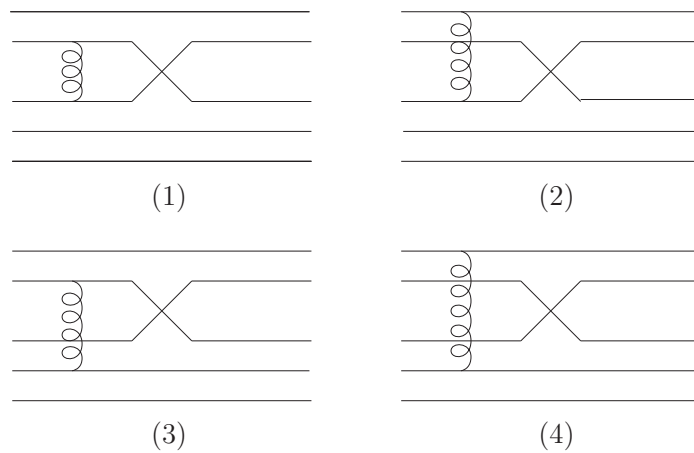


Figura 3.1: Representação pictórica das quatro contribuições que compõem  $V_{mb}^{ex}$ .

Para prosseguir, precisamos das expressões explícitas das amplitudes no espaço de Fock para os mésons e bárions  $\phi_\alpha^{\mu\nu}$  e  $\varphi_\alpha^{\mu\nu\sigma}$ , e das interações  $V_{qq}$ ,  $V_{q\bar{q}}$  e  $V_{\bar{q}\bar{q}}$ . Isto será o objeto do próximo Capítulo, onde estas quantidades serão obidas no contexto do modelo discutido no Capítulo 2.

## Capítulo 4

### Derivação explícita da interação $DN$

Neste Capítulo vamos obter as expressões explícitas para a interação efetiva  $DN$ . Conforme dito anteriormente, o formalismo desenvolvido é adequado para os mésons  $\bar{D}^0$  e  $D^-$ , cujos conteúdos de quarks e antiquarks são  $u\bar{c}$  e  $d\bar{c}$ , respectivamente.

Para obter as expressões explícitas precisamos das amplitudes  $\phi_\alpha^{\mu\nu}$  e  $\varphi_\alpha^{\mu\nu\sigma}$ , e das interações  $V_{qq}$ ,  $V_{q\bar{q}}$  e  $V_{\bar{q}\bar{q}}$ . Estas quantidades dependem da função  $M_k$ , determinada pela equação de gap Eq. (2.79). Em princípio, obtida a função de massa  $M_k$  podemos calcular as massas e funções de onda dos mésons e bárions (ver, por exemplo Ref. [39]). Com isto, obteremos explicitamente a interação  $H_4$  em termos dos espinores  $u_s(k)$  e  $v_s(k)$ , os quais dependem da função  $M_k$ , conforme mostrado nas Eqs. (2.59) e (2.60). Ao empregarmos estas expressões nos diferentes termos das interações efetivas méson-bárion obtidas no Capítulo anterior, chegaríamos a integrais em 12 dimensões que somente podem ser resolvidas empregando integração de Monte Carlo. Obviamente isto pode ser feito. No entanto, isto seria um preciosismo um tanto irrelevante para os processos de espalhamento de mésons  $D$  por núcleons que trataremos nesta Tese e a discussão pode ser um tanto simplificada empregando uma aproximação para a dependência de momento das funções  $M_k$ , como será discutido a seguir.

Na próxima seção vamos começar discutindo esta aproximação para  $M_k$ , e então obteremos as interações  $V_{qq}$ ,  $V_{q\bar{q}}$  e  $V_{\bar{q}\bar{q}}$ , e as amplitudes  $\phi_\alpha^{\mu\nu}$  e  $\varphi_\alpha^{\mu\nu\sigma}$ . Logo a seguir, vamos, então, obter as expressões explícitas para os diferentes termos da interação efetiva  $DN$ .

#### 4.1 As interações $V_{qq}$ , $V_{q\bar{q}}$ e $V_{\bar{q}\bar{q}}$

Inicialmente, como será visto no próximo Capítulo, para os mésons charmosos, temos que a solução da equação de gap leva a  $M_k \simeq m_0$ , i.e., o efeito da quebra dinâmica

da simetria quiral é irrelevante nas escalas da massa do quark charm\*. Portanto, podemos simplesmente ignorar a equação de gap para o quark charm. Somente para quarks leves que o efeito da quebra dinâmica da simetria quiral é importante.

Para os quarks leves, não podemos ignorar a equação de gap. No entanto, podemos aproximar a dependência de momentum de  $M_k$ , tendo em vista o fato que as escalas que determinam as propriedades das amplitudes  $\phi$  e  $\varphi$  são dominadas pelas componentes de baixos momentos. Isto porque as propriedades destas funções de onda são determinadas predominantemente pela interação de confinamento  $V_l(q)$ , Eq. (2.40), a qual é fortemente dominada pelos momentos  $q \simeq 0$ , o que implica que as funções de onda decaem muito rapidamente para altos momentos. Portanto, nas integrais envolvendo os espiniores  $u_s(\vec{k})$  e  $v_s(\vec{k})$ , as componentes de altos momentos são fortemente suprimidas pelas funções de onda  $\phi$  e  $\varphi$ .

Em vista disso, vamos aproximar a dependência de momento da função de massa dos quarks leves por

$$M_k = M - M_1 k - M_2 k^2. \quad (4.1)$$

que são os três primeiros termos da expansão de Taylor da equação de gap (2.79).

Com isto, não é difícil mostrar que os espiniores  $u_s(k)$  and  $v_s(k)$  podem ser escritos como

$$u_s(\vec{k}) \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{k^2}{8M^2} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{2M} \end{pmatrix} \chi_s \quad (4.2)$$

e

$$v_s(k) \approx \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{2M} \\ 1 - \frac{k^2}{8M^2} \end{pmatrix} \chi_s^c, \quad (4.3)$$

onde, por consistência com a expansão na Eq. (4.1), retivemos termos até  $\mathcal{O}(k^2)$ . Substituindo estas expressões na Eq. (2.67) para  $H_4$ , obtemos termos  $V_{qq}$ ,  $V_{q\bar{q}}$  e  $V_{\bar{q}q}$  na forma do Hamiltoniano de Breit da QED, com o potencial  $1/k^2$  da QED substituído pelas interações  $V_C(k)$  na parte de Coulomb, e  $V_T(k)$  na parte transversa, dadas respectivamente pelas Eqs. (2.39) e (2.53). A interação de Breit contém, além de termos que dependem somente do momento transferido  $q = k_\mu - k_\sigma$ , termos dependentes dos operadores de spin, na forma de interações spin-spin, tensorial e spin-órbita. Também há termos que dependem do inverso do produto das massas

---

\*O termo “irrelevante” significa o quão pouquíssimo é o efeito da quebra de simetria quiral sobre a massa do quark charm,  $m_c \sim 1,2$  GeV, em relação ao fortíssimo efeito que a quebra de simetria quiral tem sobre as massas  $m_u \approx m_d \sim 10$  MeV.

dos quarks na forma  $q^2/(M_\mu M_\nu)$ ,  $(\vec{q} \cdot \vec{k}_\mu)(\vec{q} \cdot \vec{k}_\nu)/(q^2 M_\mu M_\nu)$  e  $(\vec{k}_\mu \cdot \vec{k}_\nu)/(q^2 M_\mu M_\nu)$ . As expressões explícitas são derivadas com todos os detalhes no Apêndice C.

É importante notar que, estritamente, essa aproximação não é essencial porque, tanto a função  $\sqrt{(E_k + M_k)/2E_k}$  como a  $k/\sqrt{2E_k(E_k + M_k)}$ , que aparecem nas expressões exatas dos espinores  $u_s(\vec{k})$  e  $v_s(\vec{k})$ , podem ser muito bem aproximadas por Gaussianas na forma  $\exp(-ak^2)$  e  $1 - \exp(-bk^2)$ , respectivamente. As formas aproximadas diferem das formas exatas apenas no ultravioleta profundo, região que de qualquer maneira não contribui nas integrais para os estados ligados e para as interações efetivas hádron-hádron, conforme discutido acima. Isto significa que, como as funções de onda dos hádrons também podem ser expandidas em Gaussianas, a maioria das integrais podem ser feitas analiticamente. Não seguimos essa estratégia por duas razões básicas. Uma, porque empregando as expressões aproximadas das Eqs. (4.2) e (4.3) para os espinores  $u_s(\vec{k})$  e  $v_s(\vec{k})$ , podemos fazer contato direto com a interação de Fermi-Breit, muito utilizada no contexto do modelo de quarks não-relativístico. A segunda razão é porque na realidade, para os propósitos da presente tese, as expressões exatas não iriam mudar quantitativamente os resultados para as interações efetivas méson-núcleon porque, como já dito acima, somente a parte de baixos momentos de  $M_k$  é realmente relevante. Em uma única instância a aproximação de baixos momentos não é boa, a saber, no cálculo das energias de partícula única  $\varepsilon(k)$ . Essa quantidade recebe uma contribuição de autoenergia que depende das interações  $V_C$  e  $V_T$  que se torna divergente ultravioleta na aproximação de baixos momentos, como será discutido no Apêndice D. Para o cálculo deste termo de autoenergia empregamos o ajuste Gaussiano mencionado acima.

Agora, os processos de quark-glúon-interchange dados por  $V_{mb}^{ex}$  derivado no Capítulo anterior são determinados pela extensão espacial das funções de onda dos hádrons envolvidos na interação. Isso significa, como será verificado mais adiante, que a interação bárion-méson efetiva é dominada essencialmente pela interação de onda  $S$ . Devido a isso, os termos envolvendo ângulos entre momentos (e ainda inversamente à massa dos quarks) são altamente suprimidos. Isto é muito bem conhecido na literatura no contexto da troca de um glúon (OGE) perturbativo; de todos os termos da interação de Breit de OGE, somente os termos que dependem somente de  $q^2$  e de spin-spin contribuem significativamente para os espalhamentos hádron-hádron a baixas energias – ver, por exemplo, as Refs. [40] e [41]. Para o presente caso, já que estamos trabalhando com as mesmas escalas de massas para os quarks que no caso dos modelos de quarks que empregam OGE, podemos simplesmente tomar a interação spin-spin. Retendo, então, somente esses termos do



potencial de Breit, temos que cada um dos termos  $V_{qq}$ ,  $V_{q\bar{q}}$  e  $V_{\bar{q}\bar{q}}$  é da forma

$$\left. \begin{array}{l} V_{qq} \\ V_{q\bar{q}} \\ V_{\bar{q}\bar{q}} \end{array} \right\} = \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{q}') (\mathcal{F}^a)^{c_\mu c_\sigma} (\mathcal{F}^a)^{c_\nu c_\rho} v(q), \quad (4.4)$$

com  $\vec{q} = \vec{k}_\mu - \vec{k}_\sigma$  e  $\vec{q}' = \vec{k}_\rho - \vec{k}_\nu$ , e  $v(\vec{q})$

$$v(q) = V_C(q) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M_\mu M_\nu} \vec{S}_{s_\mu s_\sigma} \cdot \vec{S}_{s_\nu s_\rho} V_T(q) \quad (4.5)$$

e

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \lambda^a/2, & \text{para quarks} \\ -(\lambda^a)^t/2, & \text{para antiquarks} \end{cases} \quad (4.6)$$

onde as  $\lambda^a$  são as matrizes de cor  $SU(3)$ , e o índice  $t$  acima significa transposição de linhas por colunas.

## 4.2 As amplitudes $\phi$ e $\varphi$

De uma maneira geral, podemos escrever para a amplitude do méson  $\phi_\alpha^{\mu\nu}$  a expressão

$$\phi_\alpha^{\mu\nu}(\vec{p}_\alpha) = \frac{\delta^{\mu\nu}}{\sqrt{3}} \chi_\alpha^{\mu\nu} \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{k}_\mu - \vec{k}_\nu) \phi_\alpha(\vec{k}_\mu, \vec{k}_\nu) \quad (4.7)$$

onde  $\chi_\alpha^{\mu\nu}$  e  $\delta^{\mu\nu}$  são os coeficientes de Clebsch-Gordan de spin-sabor e cor – ver Apêndice B. A amplitude  $\phi_\alpha(k_\mu, k_\nu)$  depende dos momentos, com  $p_\alpha$  sendo o momento do centro-de-massa. Da mesma forma, para o bárion podemos escrever  $\varphi_\alpha^{\mu\nu\sigma}$  de uma maneira geral como

$$\varphi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3}(\vec{p}_\beta) = \delta(\vec{p}_\beta - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \frac{\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\chi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3}}{\sqrt{18}} \varphi_\beta(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \quad (4.8)$$

com  $\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3}$  e  $\chi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}$  sendo os coeficientes de Clebsch-Gordan de cor e spin-sabor, respectivamente – ver Apêndice B. O termo de cor nada mais é o tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita. A amplitude  $\varphi_\alpha(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$  depende somente dos momentos, com  $p_\beta$  sendo o momento do centro-de-massa do bárion.

Aqui, vamos seguir a Ref. [39] e determinar  $\phi_\alpha(\vec{k}_\mu, \vec{k}_\nu)$  e  $\varphi_\beta(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$  variacionalmente, i.e. fazemos um ansatz para estas amplitudes em termos de parâmetros variacionais, calculamos o valor esperado do Hamiltoniano com estas amplitudes e determinamos os parâmetros minimizando o valor esperado assim calculado. Para a amplitude  $\phi$  do méson vamos empregar a seguinte forma Gaussiana

$$\phi_\alpha(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \left( \frac{1}{\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{k_{rel}^2}{8\alpha^2} \right), \quad (4.9)$$

onde

$$\vec{k}_{rel} = M_1 \vec{k}_1 - M_2 \vec{k}_2, \quad (4.10)$$

com

$$M_1 = \frac{2M_{\bar{q}}}{M_q + M_{\bar{q}}}, \quad M_2 = \frac{2M_q}{M_q + M_{\bar{q}}}. \quad (4.11)$$

Esta combinação de massas e momentos nada mais é que a usual definição de momentum relativo para o caso de massas diferentes. Para a amplitude  $\varphi$  do bárion, tomamos a forma

$$\varphi_{\beta}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = \left( \frac{3}{\pi^2 \beta^4} \right)^{3/4} \exp \left[ - \sum_{i=1}^3 \frac{(\vec{k}_i - \vec{P}/3)^2}{2\beta^2} \right]. \quad (4.12)$$

Nestas, os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros variacionais.

Neste ponto talvez fosse importante salientar que no caso em que não empregássemos o método variacional com funções Gaussianas como ansatz, mas sim resolvêssemos numericamente uma equação de Schrödinger (ou de Salpeter) para as amplitudes  $\phi$  e  $\varphi$ , esta solução numérica sempre poderia ser expandida em Gaussianas. Então, quase todas as integrais correspondentes ao termo espacial,  $I_i$ , que veremos depois, também poderiam ser efetuadas analiticamente. Mas isto fica para um trabalho futuro.

Os parâmetros variacionais  $\alpha$  e  $\beta$  são calculados minimizando a massa dos bárions  $M_b$  e dos mésons  $M_m$ . Especificamente, calculamos inicialmente as massas dos bárions e dos mésons como

$$M_{b,m} = \frac{\langle \alpha | (H_2 + H_4) | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \Big|_{\vec{p}_{\alpha}=0} \quad (4.13)$$

onde  $|\alpha\rangle$  é o estado de um bárion ou um méson, que depende das amplitudes  $\phi$  ou  $\varphi$ , dependendo do caso.

Notamos que o tamanho dos bárions e dos mésons são determinados essencialmente pelo potencial de Coulomb, pois é precisamente essa parte que confina os quarks. A parte transversa é importante para discutir em detalhe o espectro dos hádrons, principalmente no que se refere aos desdobramentos de spin e spin-órbita. Naturalmente ela é importante, como já dito e será demonstrado no próximo Capítulo, para a equação de gap, sendo essencial para obter uma quebra substancial da simetria quiral, i.e. para obter valores numéricos para os parâmetros quirais próximos de seus valores físicos. Não é possível obter o valor absoluto da massa dos hádrons sem considerar a nuvem piônica, conforme discutido na Ref. [39].

A expressão para a massa do bárion foi obtida explicitamente no Apêndice D. Ela é dada pela Eq. (D.43), a qual repetimos aqui por completeza:

$$\begin{aligned}
 M_b(\beta) &= 3m_f + \frac{3\beta^2}{M_f} - 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ V_C(q) \left[ e^{-q^2/2\beta^2} - f_2^b(q^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M^2} \left( -\frac{1}{4} \right) V_T(q) \left[ e^{-q^2/2\beta^2} - 2g_2^b(q^2) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde  $f_2^b(q^2)$  e  $g_2^b(q^2)$  são independentes de  $\alpha$ , conforme discutido no Apêndice D. O parâmetro  $\alpha$  é determinado pela condição

$$\frac{dM_b(\beta)}{d\beta} = 0, \tag{4.15}$$

que leva à seguinte equação transcendental para  $\beta$

$$\beta^4 = \frac{M_f}{3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^2 \left\{ \left[ V_C(q) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M^2} \left( -\frac{1}{4} \right) V_T(q) \right] e^{-q^2/2\beta^2} \right\}. \tag{4.16}$$

A expressão para a massa do méson também foi obtida explicitamente no Apêndice D, sendo dada pela Eq. (D.66):

$$\begin{aligned}
 M_m &= m_{f_1} + m_{f_2} + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{M_{f_1}} + \frac{1}{M_{f_2}} \right) \alpha^2 - \frac{4}{3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ V_C(q) \left[ e^{-q^2/4\alpha^2} - f_2^m(q^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + V_T(q) \left[ \frac{2}{3} \frac{q^2}{M_{f_1} M_{f_2}} \left( -\frac{3}{4} \right) e^{-q^2/4\alpha^2} - 2g_2^m(q^2) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Como acima, o parâmetro  $\alpha$  é determinado a partir de

$$\frac{dM_m(\alpha)}{d\alpha} = 0 \tag{4.18}$$

a qual leva à seguinte equação transcendental para  $\alpha$

$$\alpha^4 = \frac{2}{9} \left( \frac{M_{f_1} M_{f_2}}{M_{f_1} + M_{f_2}} \right) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^2 \left[ V_C(q) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M_{f_1} M_{f_2}} \left( -\frac{3}{4} \right) V_T(q) \right] e^{-q^2/4\alpha^2}. \tag{4.19}$$

### 4.3 Contribuições de cor, spin-sabor e momento para o potencial méson-bárion

Uma vez especificadas as amplitudes  $\phi$  e  $\varphi$ , estamos preparados para calcular as diferentes contribuições para o potencial méson-bárion. Estas contribuições vêm das somas sobre os índices de cor, spin-sabor e momento dos quarks.

Inicialmente vamos considerar o termo de quark-glúon-interchange  $V_{mb}^{ex}$  dado na Eq. (3.66). Este será escrito nos seus termos separados,

$$V_{mb}^{ex} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4, \quad (4.20)$$

onde

$$V_1 = -3 \varphi_\beta^* \nu^{\mu_2 \mu_3} \phi_\alpha^* \mu^\lambda V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\rho\lambda} \varphi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\mu_3}, \quad (4.21)$$

$$V_2 = -3 \varphi_\beta^* \mu^{\mu_2 \mu_3} \phi_\alpha^* \mu_1 \nu V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\sigma\rho} \varphi_{\beta'}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}, \quad (4.22)$$

$$V_3 = -6 \varphi_\beta^* \mu_1 \nu \mu_3 \phi_\alpha^* \mu^\lambda V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\mu_1 \lambda} \varphi_{\beta'}^{\sigma\rho\mu_3}, \quad (4.23)$$

$$V_4 = -6 \varphi_\beta^* \mu_1 \mu_3 \phi_\alpha^* \chi^\nu V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \phi_{\alpha'}^{\mu_1 \rho} \varphi_{\beta'}^{\chi\sigma\mu_3}, \quad (4.24)$$

Cada um dos termos  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , estão representados pictoricamente, em ordem, na Fig. 3.1. Dadas as amplitudes  $\phi$  e  $\varphi$ , cada um dos termos  $V_i$  pode ser escrito no modo compacto,

$$V_i = -3 C_i W_i I_i, \quad (4.25)$$

onde os  $C_i$ 's englobam os coeficientes de Clebsch-Gordan de cor, os  $W_i$ 's de spin-sabor e os  $I_i$ 's correspondem ao termo espacial.

As formas explícitas dos fatores de cor são as seguintes:

$$C_1 = \frac{\epsilon_{\nu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta_{\mu\lambda}}{\sqrt{3}} (\mathcal{T}^a)^{\mu\sigma} (\mathcal{T}^a)^{\nu\rho} \frac{\delta_{\rho\lambda}}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon_{\sigma\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}}, \quad (4.26)$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_{\mu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta_{\mu_1\nu}}{\sqrt{3}} (\mathcal{T}^a)^{\mu\sigma} (\mathcal{T}^a)^{\rho\nu} \frac{\delta_{\sigma\rho}}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}}, \quad (4.27)$$

$$C_3 = \frac{\epsilon_{\mu_1\nu\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta_{\mu\lambda}}{\sqrt{3}} (\mathcal{T}^a)^{\mu\sigma} (\mathcal{T}^a)^{\rho\nu} \frac{\delta_{\mu_1\lambda}}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon_{\sigma\rho\mu_3}}{\sqrt{6}}, \quad (4.28)$$

$$C_4 = \frac{\epsilon_{\mu_1\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta_{\chi\nu}}{\sqrt{3}} (\mathcal{T}^a)^{\mu\sigma} (\mathcal{T}^a)^{\rho\nu} \frac{\delta_{\mu_1\rho}}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon_{\chi\sigma\mu_3}}{\sqrt{6}}. \quad (4.29)$$

As funções  $W_i$  são dadas por

$$W_1 = \frac{\chi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{18}} \frac{\chi_\alpha^{*\mu\lambda}}{\sqrt{2}} (\mathcal{F}_i)^{\mu\sigma} (\mathcal{F}_i)^{\nu\rho} \frac{\chi_{\alpha'}^{\rho\lambda}}{\sqrt{2}} \frac{\chi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\mu_3}}{\sqrt{18}}, \quad (4.30)$$

$$W_2 = \frac{\chi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{18}} \chi_\alpha^{*\mu_1\nu} (\mathcal{F}_i)^{\mu\sigma} (\mathcal{F}_i)^{\nu\rho} \chi_{\alpha'}^{\sigma\rho} \frac{\chi_{\beta'}^{\mu_1\mu_2\mu_3}}{\sqrt{18}}, \quad (4.31)$$

$$W_3 = \frac{\chi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3}}{\sqrt{18}} \chi_\alpha^{*\mu\lambda} (\mathcal{F}_i)^{\mu\sigma} (\mathcal{F}_i)^{\nu\rho} \chi_{\alpha'}^{\mu_1\lambda} \frac{\chi_{\beta'}^{\sigma\rho\mu_3}}{\sqrt{18}}, \quad (4.32)$$

$$W_4 = \frac{\chi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3}}{\sqrt{18}} \chi_\alpha^{*\chi\nu} (\mathcal{F}_i)^{\mu\sigma} (\mathcal{F}_i)^{\nu\rho} \chi_{\alpha'}^{\mu_1\rho} \frac{\chi_{\beta'}^{\chi\sigma\mu_3}}{\sqrt{18}}, \quad (4.33)$$

onde  $\mathcal{F}$  é a matriz identidade, para o primeiro termo da Eq. (4.5) e o operador de pin  $S_i$  para o segundo termo desta.

Por fim, as funções espaciais  $I_i$ , que resultam da integração sobre os momentos dos quarks e vão depender dos momentos dos mésons e dos bárions, são dadas por

$$\begin{aligned} I_1 &= \int d^3k_\lambda d^3k_2 d^3k_3 d^3k_\mu d^3k_\nu d^3k_\sigma d^3k_\rho \delta(p_\beta - k_\nu - k_2 - k_3) \varphi_\beta^*(k_\nu, k_2, k_3) \\ &\times \delta(p_\alpha - k_\mu - k_\lambda) \phi^*(k_\mu, k_\lambda) \delta(k_\mu + k_\nu - k_\sigma - k_\rho) \mathcal{V}(k_\mu - k_\sigma) \\ &\times \delta(p_{\alpha'} - k_\rho - k_\lambda) \phi(k_\rho, k_\lambda) \delta(p_{\beta'} - k_\sigma - k_2 - k_3) \varphi_{\beta'}(k_\sigma, k_2, k_3) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_\mu d^3k_\nu d^3k_\sigma d^3k_\rho \delta(p_\beta - k_\mu - k_2 - k_3) \varphi_\beta^*(k_\mu, k_2, k_3) \\ &\times \delta(p_\alpha - k_1 - k_\nu) \phi^*(k_1, k_\nu) \delta(k_\mu + k_\nu - k_\sigma - k_\rho) \mathcal{V}(k_\mu - k_\sigma) \\ &\times \delta(p_{\alpha'} - k_\sigma - k_\rho) \phi(k_\sigma, k_\rho) \delta(p_{\beta'} - k_1 - k_2 - k_3) \varphi_{\beta'}(k_1, k_2, k_3) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int d^3k_\lambda d^3k_1 d^3k_3 d^3k_\mu d^3k_\nu d^3k_\sigma d^3k_\rho \delta(p_\beta - k_1 - k_\nu - k_3) \varphi_\beta^*(k_1, k_\nu, k_3) \\ &\times \delta(p_\alpha - k_\mu - k_\lambda) \phi^*(k_\mu, k_\lambda) \delta(k_\mu + k_\nu - k_\sigma - k_\rho) \mathcal{V}(k_\mu - k_\sigma) \\ &\times \delta(p_{\alpha'} - k_1 - k_\lambda) \phi(k_1, k_\lambda) \delta(p_{\beta'} - k_\sigma - k_\rho - k_3) \varphi_{\beta'}(k_\sigma, k_\rho, k_3), \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int d^3 k_\chi d^3 k_1 d^3 k_3 d^3 k_\mu d^3 k_\nu d^3 k_\sigma d^3 k_\rho \delta(p_\beta - k_1 - k_\mu - k_3) \varphi_\beta^*(k_1, k_\mu, k_3) \\
 &\times \delta(p_\alpha - k_\chi - k_\nu) \phi^*(k_\chi, k_\nu) \delta(k_\mu + k_\nu - k_\sigma - k_\rho) \mathcal{V}(k_\mu - k_\sigma) \\
 &\times \delta(p_{\alpha'} - k_1 - k_\rho) \phi(k_1, k_\rho) \delta(p_{\beta'} - k_\chi - k_\sigma - k_3) \varphi_{\beta'}(k_\chi, k_\sigma, k_3) \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Nestas,  $\mathcal{V}(q)$  significa ou  $V(q)$  ou  $2q^2 V_T(q)/(3M_\mu M_\nu)$  da Eq. (4.5). Para calcular estas integrais, precisamos saber as dependências de momento explícitas das amplitudes  $\phi$  e  $\varphi$ . Na Subseção 4.3.3 vamos apresentar uma parametrização destas funções em termos de Gaussianas com parâmetros variacionais. Desta forma, quase todas as integrais podem ser feitas explicitamente, restando apenas uma integral unidimensional, a qual deverá ser feita numericamente.

A seguir, nas próximas subseções vamos calcular explicitamente cada um dos fatores de cor  $C_i$ , spin-sabor  $W_i$  e as integrais  $I_i$ . Os valores obtidos para esses fatores foram verificados com os que aparecem na literatura. Em particular, escolhemos apresentar as integrais  $I_i$  e os fatores de spin-sabor  $W_i$  como na Ref. [23], ao invés da forma apresentada na Ref. [41]. A primeira referência estuda a interação  $DN$  e a segunda a interação  $KN$ , mas ambos os estudos são feitos no contexto do modelo de troca de um glúon.

### 4.3.1 Cálculo dos fatores de cor $C_i$

No cálculo dos fatores de cor  $C_i$  a seguir, vamos nos referir aos diagramas da Fig. 3.1.

Diagrama de cor (1):

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{k'k} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{m'm} \times \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijm'} \times \frac{1}{3} \delta_{\bar{m}k'} \delta_{\bar{m}m} \\
 &= \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{k'k} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{m'm} \times \frac{1}{6} 2 \delta_{km'} \times \frac{1}{3} \delta_{k'm} = \frac{2}{3 \times 6} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{mk} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{km} \\
 &= \frac{2}{3 \times 6} \text{Tr} \left( \frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2} \right) = 4 \times \frac{2}{3 \times 6} = \frac{4}{9} \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

Diagrama de cor (2):

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{j'j} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{m'm} \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ij'm'} \frac{1}{3} \delta_{\bar{m}m} \delta_{\bar{m}k} \\
 &= \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{j'j} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{m'm} \frac{1}{6} (\delta_{jj'} \delta_{km'} - \delta_{jm'} \delta_{kj'}) \times \frac{1}{3} \delta_{km} \\
 &= \frac{1}{3 \times 6} \left[ \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right) \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right) - \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2}\right) \right] \\
 &= -\frac{1}{3 \times 6} \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2}\right) = -\frac{4}{9}. \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

Diagrama de cor (3):

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{k'k} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2}\right)_{\bar{m}'\bar{m}} \times \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijm} \times \frac{1}{3} \delta_{\bar{m}m} \delta_{\bar{m}'k'} \\
 &= -\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{k'k} \left(\frac{\lambda^{aT}}{2}\right)_{k'm} \times \frac{1}{6} 2 \delta_{km} \times \frac{1}{3} \\
 &= -\frac{2}{3 \times 6} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{k'k} \left(\frac{\lambda^{aT}}{2}\right)_{k'k} \\
 &= -\frac{2}{3 \times 6} \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2}\right) = -4 \times \frac{2}{3 \times 6} = -\frac{2}{9}. \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

Diagrama de cor (4):

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{j'j} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2}\right)_{\bar{m}'\bar{m}} \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ij'm} \frac{1}{3} \delta_{\bar{m}m} \delta_{\bar{m}'k} \\
 &= -\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{j'j} \left(\frac{\lambda^{aT}}{2}\right)_{\bar{m}'\bar{m}} \frac{1}{6} (\delta_{jj'} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kj'}) \times \frac{1}{3} \delta_{\bar{m}m} \delta_{\bar{m}'k} \\
 &= \frac{1}{3 \times 6} \left[ \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right) \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right) - \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2}\right) \right] \\
 &= -\frac{1}{3 \times 6} \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2}\right) = +\frac{2}{9}. \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

### 4.3.2 Cálculo do fator de spin-sabor

Até o momento nossa discussão foi praticamente independente da natureza dos mésons, isto é, não foi necessário especificar seus estados de spin e sabor. Agora

chegou a hora de especificá-los para o caso dos mésons  $D$ . Nesta Tese os mésons considerados são os mésons pseudoescalares que contêm um antiquark charm, a saber  $\bar{D}^0$  e  $D^-$ . A dependência de sabor da interação microscópica é apenas através do segundo termo da Eq. (4.4), que depende das massas dos quarks. Com relação aos índices de spin, temos dois tipos de interação, uma diagonal nestes índices (interação do tipo Coulomb), e outra proporcional a  $\vec{S}^{(a)} \cdot \vec{S}^{(b)}$  (interação do tipo spin-spin), onde  $a$  indica o quark no núcleon e  $b$  indica o quark ou o antiquark no méson que interagem. Para calcular estes elementos de matriz, vamos usar a convenção de que os quarks trocados entre o núcleon e o méson são respectivamente os enumerados por 1 e 4, como mostrado na Fig. 4.1.

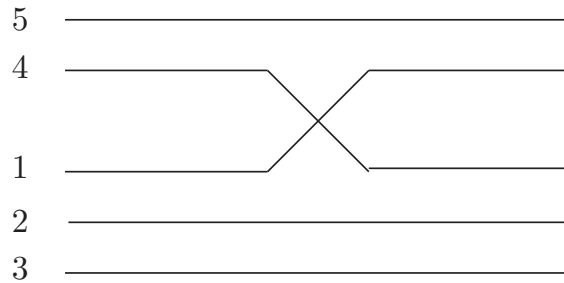


Figura 4.1: Convenção de troca de quarks para calcular os elementos de matriz de spin-sabor.

Agora, a troca entre dois quarks de sabor  $u$  e  $d$ , denotados por  $i$  e  $j$ , pode ser implementada através do operador  $P_{ij}$  definido por

$$P^{ij} = \frac{1}{4} \left( 1 + \vec{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{\sigma}^{(j)} + \vec{\tau}^{(i)} \cdot \vec{\tau}^{(j)} + \vec{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{\sigma}^{(j)} \vec{\tau}^{(i)} \cdot \vec{\tau}^{(j)} \right), \quad (4.42)$$

onde  $\vec{\sigma}$  e  $\vec{\tau}$  são as matrizes de Pauli de spin e sabor ( $u$  e  $d$ ). Precisamos então calcular elementos de matriz entre estados de núcleon  $N$  e méson  $D$  da forma  $\langle N'D' | P^{14} | ND \rangle$  e  $\langle N'D' | P^{14} \vec{S}^{(a)} \cdot \vec{S}^{(b)} | ND \rangle$ . Para calcular estes, precisamos de seguintes elementos de matriz de operadores de spin e sabor de quarks entre estados de núcleon  $|N\rangle$  e



$|N'\rangle$ . Para tal, empregamos as seguintes regras de substituição:

$$\sigma_i^{(a)} \rightarrow \frac{1}{3} \sigma_i^N, \quad (4.43)$$

$$\sigma_i^{(a)} \tau_l^{(a)} \rightarrow \frac{5}{3} \sigma_i^N \tau_l^N, \quad (4.44)$$

$$\sigma_i^{(a)} \sigma_j^{(b)} \rightarrow -\frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (4.45)$$

$$\sigma_i^{(a)} \tau_l^{(a)} \sigma_j^{(b)} \rightarrow \frac{1}{9} \delta_{ij} \tau_l^N. \quad (4.46)$$

Aqui,  $\sigma^N$  e  $\tau^N$  significam os operadores de spin e isospin do núcleon. Também são necessários os seguintes elementos de matriz entre estados de mésons  $|D\rangle$ :

$$\langle D | \sigma_i | D \rangle = \langle D | \bar{\sigma}_i | D \rangle = 0, \quad (4.47)$$

$$\langle D | \sigma_i \bar{\sigma}_j | D \rangle = -\delta_{ij}, \quad (4.48)$$

$$\langle \bar{D}^0 | \tau_l | \bar{D}^0 \rangle = -\langle D^- | \tau_l | D^- \rangle = \delta_{l3}, \quad (4.49)$$

$$\langle \bar{D}^0 | \tau_l | D^- \rangle = \delta_{l1} - i \delta_{l2} \quad (4.50)$$

Com isto, podemos calcular os elementos de matriz correspondentes a cada um dos diagramas. Para a interação tipo Coulomb, temos os seguintes resultados:

Diagrama Coulombiano (1):

$$\langle p\bar{D}^0 | P^{14} | p\bar{D}^0 \rangle = \langle n\bar{D}^0 | P^{14} | n\bar{D}^0 \rangle = \frac{1}{3}, \quad (4.51)$$

$$\langle pD^- | P^{14} | pD^- \rangle = \langle n\bar{D}^0 | P^{14} | pD^- \rangle = \frac{1}{6}. \quad (4.52)$$

Diagrama Coulombiano (2):

$$\langle p\bar{D}^0 | P^{14} | p\bar{D}^0 \rangle = \langle n\bar{D}^0 | P^{14} | n\bar{D}^0 \rangle = \frac{1}{3}, \quad (4.53)$$

$$\langle pD^- | P^{14} | pD^- \rangle = \langle n\bar{D}^0 | P^{14} | pD^- \rangle = \frac{1}{6}. \quad (4.54)$$

Diagrama Coulombiano (3):

$$\langle p\bar{D}^0 | P^{14} | p\bar{D}^0 \rangle = \frac{2}{3}, \quad (4.55)$$

$$\langle pD^- | P^{14} | pD^- \rangle = \langle n\bar{D}^0 | P^{14} | pD^- \rangle = \langle n\bar{D}^0 | P^{14} | n\bar{D}^0 \rangle = \frac{1}{3}. \quad (4.56)$$

Diagrama Coulombiano (4):

$$\langle p\bar{D}^0 | P^{14} | p\bar{D}^0 \rangle = \frac{2}{3}, \quad (4.57)$$

$$\langle pD^- | P^{14} | pD^- \rangle = \langle n\bar{D}^0 | P^{14} | pD^- \rangle = \langle n\bar{D}^0 | P^{14} | n\bar{D}^0 \rangle = \frac{1}{3}. \quad (4.58)$$

Para a interação microscópica do tipo spin-spin, calculamos os correspondentes elementos de matriz para os operadores  $S_j^{(a)} S_j^{(b)}$ . Obviamente, para o caso de nosso interesse previsamos na realidade  $\vec{S}^{(a)} \cdot \vec{S}^{(b)} = \sum_{i=1}^3 S_i^{(a)} S_i^{(b)}$ . Os resultados são os seguintes:

Diagrama Spin-spin (1):

$$\begin{aligned} \langle p\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | p\bar{D}^0 \rangle &= \frac{1}{12} \delta_{ij} - \frac{i}{9} \epsilon_{ijk} S_k^N, \\ \langle pD^- | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | pD^- \rangle &= \frac{1}{24} \delta_{ij} + \frac{i}{36} \epsilon_{ijk} S_k^N, \\ \langle n\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | pD^- \rangle &= \frac{1}{24} \delta_{ij} - \frac{5i}{36} \epsilon_{ijk} S_k^N, \\ \langle n\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | n\bar{D}^0 \rangle &= \frac{1}{24} \delta_{ij} + \frac{i}{36} \epsilon_{ijk} S_k^N. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Diagrama Spin-spin (2):

$$\begin{aligned} \langle p\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | p\bar{D}^0 \rangle &= -\frac{1}{12} \delta_{ij} + \frac{i}{9} \epsilon_{ijk} S_k^N, \\ \langle pD^- | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | pD^- \rangle &= -\frac{1}{24} \delta_{ij} - \frac{i}{36} \epsilon_{ijk} S_k^N, \\ \langle n\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | pD^- \rangle &= -\frac{1}{24} \delta_{ij} + \frac{5i}{36} \epsilon_{ijk} S_k^N, \\ \langle n\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | n\bar{D}^0 \rangle &= -\frac{1}{24} \delta_{ij} - \frac{i}{36} \epsilon_{ijk} S_k^N. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Diagrama Spin-spin (3):

$$\begin{aligned} \langle p\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | p\bar{D}^0 \rangle &= -\frac{1}{36} \delta_{ij}, \\ \langle pD^- | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | pD^- \rangle &= -\frac{1}{18} \delta_{ij}, \\ \langle n\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | pD^- \rangle &= \frac{1}{36} \delta_{ij}, \\ \langle n\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | n\bar{D}^0 \rangle &= -\frac{1}{12} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Diagrama Spin-spin (4):

$$\begin{aligned}
 \langle p\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | p\bar{D}^0 \rangle &= \frac{1}{36} \delta_{ij}, \\
 \langle pD^- | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | pD^- \rangle &= \frac{1}{18} \delta_{ij} \\
 \langle n\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | pD^- \rangle &= -\frac{1}{36} \delta_i \\
 \langle n\bar{D}^0 | P^{14} S_i^{(1)} S_j^{(1)} | n\bar{D}^0 \rangle &= \frac{1}{18} \delta_{ij}.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

### 4.3.3 Cálculo explícito das integrais $I_i$

Agora, dadas as Eqs. (4.9) e (4.12) podemos calcular as integrais. Cada  $I_i$  é proporcional a uma delta de conservação de momento,  $\delta(p_\alpha + p_\beta - p_{\alpha'} - p_{\beta'})$ , a qual vamos suprimir nas expressões abaixo. Vamos também trabalhar no sistema de coordenadas do centro-de-massa (CM), onde os momenta dos hádrons são dados por  $p_\alpha = -p_\beta = p$  e  $p_{\alpha'} = -p_{\beta'} = p'$ . Devido aos expoentes complicados tanto na Eq. (4.9) como na Eq. (4.12), empregamos o programa *Mathematica* para fazer estas integrais. Essas expressões foram originalmente obtidas para a interação  $KN$  na Ref. [40], mas escritas de maneira diferente – as expressões aqui conferem com as apresentadas na Ref. [23], também escritas numa ordem e forma diferentes. Os resultados são tais que cada integral  $I_i$  pode ser expressa como

$$I_i(p, p') = \left[ \frac{3g}{(3+2g)\pi\alpha^2} \right]^{3/2} I(a_i, b_i) \exp(-c_i p^2 - d_i p'^2 + e_i p \cdot p'), \tag{4.63}$$

onde

$$I(a_i, b_i) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(q) \exp(-a_i q^2 + b_i \cdot q). \tag{4.64}$$

Os  $a_i, b_i, \dots$ , são dados por

Diagrama (1):

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{3g}{(3+2g)\alpha^2}, \\
 b_1 &= -\frac{g(1+4\rho)(p+p')}{(3+2g)(1+\rho)\alpha^2}, \\
 c_1 &= \frac{3g^2 + 3(1+\rho)^2 + g(7+8\rho+10\rho^2)}{6(3+2g)(1+\rho)^2\alpha^2}, \\
 d_1 &= c_1, \\
 e_1 &= \frac{g^2 + (1+\rho)^2 - 2g(-1+\rho^2)}{(3+2g)(1+\rho)^2\alpha^2}.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Diagrama (2):

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{g(3+g)}{2(3+2g)\alpha^2}, \\
 b_2 &= \frac{g[(2+g+2\rho)p - (1+g-2\rho)p']}{(3+2g)(1+\rho)\alpha^2}, \\
 c_2 &= \frac{3g^2 + 3(1+\rho)^2 + g(7+8\rho+10\rho^2)}{6(3+2g)(1+\rho)^2\alpha^2}, \\
 d_2 &= c_2, \\
 e_2 &= \frac{g^2 + (1+\rho)^2 - 2g(-1+\rho^2)}{(3+2g)(1+\rho)^2\alpha^2}.
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Diagrama (3):

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{6+7g}{4(3+2g)\alpha^2}, \\
 b_3 &= \frac{-3[1+g+(1+2g)\rho]p + [3+g+(3-2g)\rho]p'}{2(3+2g)(1+\rho)\alpha^2}, \\
 c_3 &= \frac{3g^2 + 3(1+\rho)^2 + g(7+8\rho+10\rho^2)}{6(3+2g)(1+\rho)^2\alpha^2}, \\
 d_3 &= c_3, \\
 e_3 &= e_1.
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Diagrama (4):

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \frac{2+g}{4\alpha^2}, \\
 b_4 &= \frac{-(1+g+\rho)(p-p')}{2(1+\rho)\alpha^2}, \\
 c_4 &= c_1, \\
 d_4 &= d_1, \\
 e_4 &= e_1.
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Nestas expressões, as quantidades  $g$  e  $\rho$  são definidas como

$$g = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \rho = \frac{M_q}{M_{\bar{q}}}. \tag{4.69}$$

Isto encerra a derivação de todos os termos necessários para calcular a interação efetiva  $DN$ . Juntando todos os termos, podemos escrever

$$V_{DN}(p, p') = \sum_{i=1}^4 \omega_i \frac{1}{2} [I_i(p, p') + I_i(p', p)], \tag{4.70}$$

onde os fatores  $\omega_i$  contém todos os fatores de cor, spin-sabor e os fatores globais  $-3$  e  $-6$  que aparecem nas Eqs. (4.21)-(4.24). Os valores destes fatores estão dados na Tabela 4.1 abaixo. Nessa Tabela, mostramos os fatores  $\omega_i$  tanto para os estados de carga  $D^-N$  e  $\bar{D}^0N$ , como também para os estados acoplados de isospin  $I = 0$  e  $I = 1$ . Estes últimos são dados em termos dos estados de carga  $D^-N$  e  $\bar{D}^0N$  por

$$|I = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |p\rangle |D^-\rangle + |n\rangle |\bar{D}^0\rangle ] \tag{4.71}$$

e

$$|I = 1, M = 1\rangle = |p\rangle |\bar{D}^0\rangle, \tag{4.72}$$

$$|I = 1, M = -1\rangle = |n\rangle |D^-\rangle, \tag{4.73}$$

$$|I = 1, M = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |p\rangle |D^-\rangle - |n\rangle |\bar{D}^0\rangle ], \tag{4.74}$$

sendo  $M$  a terceira componente de isospin.

Agora estamos prontos para a obtenção de resultados numéricos para as diversas quantidades físicas derivadas até aqui.

Tabela 4.1: Os coeficientes  $\omega_i$  da Eq. (4.70) para os processos envolvendo os sistemas  $D^-N$  e  $\bar{D}^0N$  e para os estados acoplados de isospin  $I = 0$  and  $I = 1$ .

Process	$\omega_1$		$\omega_2$		$\omega_3$		$\omega_4$	
	$1_i 1_j$	$S_i S_j$	$1_i 1_j$	$S_i S_j$	$1_i 1_j$	$S_i S_j$	$1_i 1_j$	$S_i S_j$
$p \bar{D}^0 \rightarrow p \bar{D}^0$	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/18	1/3	1/18
$n D^- \rightarrow n D^-$	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/18	1/3	1/18
$p D^- \rightarrow p D^-$	1/3	1/6	1/3	1/6	1/3	1/9	1/3	1/9
$n \bar{D}^0 \rightarrow n \bar{D}^0$	1/3	1/6	1/3	1/6	1/3	1/9	1/3	1/9
$p D^- \rightarrow n \bar{D}^0$	1/3	1/6	1/3	1/6	1/3	-1/18	1/3	-1/18
$I = 0$	0	0	0	0	0	-1/6	0	-1/6
$I = 1$	-4/9	-1/3	+4/9	-1/3	+4/9	-1/18	-4/9	-1/18

## Capítulo 5

### Resultados numéricos

O objetivo principal da tese foi alcançado no último Capítulo com a derivação explícita das expressões para o potencial efetivo méson-bárion. Apesar de terem sido obtidos os fatores de spin-isospin para o caso particular da interação  $\bar{D}N$ , deve ter ficado claro que o formalismo é aplicável para qualquer interação méson-bárion, a única mudança é precisamente nesses fatores. Para lembrar, o objetivo principal da tese era construir um esquema de cálculo suficientemente prático para a obtenção de interações efetivas méson-bárion, tendo como base um modelo microscópico para as excitações gluônicas, que realize o confinamento dos quarks e glúons e também realize a quebra dinâmica da simetria quiral. Agora, por completeza e para mostrar a factibilidade de implementar de maneira realista o esquema desenvolvido, no presente Capítulo vamos apresentar resultados numéricos explícitos para o caso da interação de mésons charmosos  $\bar{D}^0$  e  $D^-$  com núcleons. A motivação para o estudo das interações de mésons charmosos com núcleons foi discutida na Introdução.

A aplicação do formalismo desenvolvido para o caso da interação de mésons  $\bar{D}$  com núcleons será feita passo a passo. Ela terá início com a obtenção de resultados numéricos para a equação de gap. A equação de gap fornece a função de massa dos quarks constituintes como função do momento,  $M_k$ . Uma vez obtida a massa dos quarks constituintes, obtemos os espinores de Dirac  $u$  e  $v$  que entram nas expressões para as interações microscópicas quark-quark, antiquark-antiquark e quark-antiquark. Dadas essas interações, podemos obter os parâmetros variacionais  $\alpha$  e  $\beta$  das funções de onda Gaussianas dos bárions e dos mésons, respectivamente. Fixados esses parâmetros, podemos finalmente calcular as interações efetivas bárion-méson e obter valores numéricos para seções de choque e deslocamentos de fase para os espalhamento de mésons  $\bar{D}$  e núcleons.

## 5.1 Equação de gap

A equação de gap é dada pela Eq. (2.79). Soluções explícitas dependem de  $V_C$  e  $V_T$ . Conforme discutido no Capítulo 2, nesta tese vamos empregar duas formas diferentes para  $V_C$ , aquela derivada por Szczepaniak e Swanson [8], dada pelas Eqs. (2.39)-(2.41), e a derivada a partir de simulações numéricas na rede da QCD no gauge de Coulomb, dadas pelas Eqs. (2.46) e (2.47).

Uma característica dessas interações é que elas divergem na região infravermelha (baixos momentos, ou distâncias longas). Especificamente para  $k \rightarrow 0$ , a interação se comporta como

$$V_C(k) \rightarrow \frac{1}{k^\alpha}, \quad (5.1)$$

onde  $\alpha$  é dado por  $\alpha = 3.93$  ou  $\alpha = 4$ . Quando essa é substituída na Eq. (2.79), apesar de não introduzir divergência infravermelha na equação, torna a sua solução numérica muito difícil porque há um cancelamento de dois termos divergentes. Para controlar numericamente esse cancelamento, é necessário regularizar de alguma forma a equação no infravermelho. Uma forma comum de regularizar a equação seria introduzir uma pequena massa  $\mu$  de forma que a singularidade  $1/k^\alpha$  seria escrita como  $1/[(k^2 + \mu^2)q^{\alpha-2}]$  e determinar  $\mu$  de maneira que as soluções estabilizem para  $\mu$  suficientemente pequeno. Uma estratégia tal foi empregada pelas Refs. [42] e [43] para uma interação do tipo  $1/k^4$ . Aqui vamos empregar uma estratégia diferente, que consiste em “subtrair um zero conveniente” à equação de gap, a saber

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \frac{M_k}{E_k} \frac{1}{k} \hat{k} \cdot (\vec{k} - \vec{q}). \quad (5.2)$$

Para ver que essa integral é realmente zero, basta fazer a troca de variáveis  $\vec{k} - \vec{q} \rightarrow \vec{q}$ , a qual leva à seguinte expressão

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \frac{M_k}{E_k} \frac{1}{k} \hat{k} \cdot (\vec{k} - \vec{q}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(q) \frac{M_k}{E_k} \frac{1}{k} \hat{k} \cdot \vec{q} \\ &= \frac{M_k}{E_k} \frac{1}{k} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(q) \hat{k} \cdot \vec{q} \end{aligned} \quad (5.3)$$

A última integral é zero. Subtraindo a Eq. (5.2) da Eq. (2.79), podemos reescrever



a parte da equação de gap que depende de  $V_C$ , que vamos chamar de  $I_C$ , como

$$\begin{aligned}
 I_C &\equiv \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{f_1(\vec{k}, \vec{q}) V_C(|\vec{k} - \vec{q}|)}{E_q} \\
 &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \frac{1}{E_q} \left( M_q - M_k \frac{q}{k} \hat{k} \cdot \hat{q} \right) \\
 &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \left[ \left( \frac{M_q}{E_q} - \frac{M_k}{E_q} \right) - \left( \frac{q}{k} \hat{q} \cdot \hat{k} - 1 \right) \left( \frac{M_k}{E_q} - \frac{M_k}{E_k} \right) \right] \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Notamos que nessa última expressão, quando  $\vec{q} \rightarrow \vec{k}$ , ponto em que o potencial diverge fortemente, temos que os dois termos que multiplicam  $V_C(|\vec{k} - \vec{q}|)$  se anulam identicamente, independentemente da integral sobre os ângulos. Isso significa que não há o cancelamento entre duas divergências infravermelhas, como na equação de gap original, cada termo se anula de maneira independente quando  $\vec{q} \rightarrow \vec{k}$ .

Uma vez regularizada a integral no infravermelho, estamos com todos os ingredientes necessários para obter as soluções da equação de gap, uma vez especificadas as interações  $V_C$  e  $V_T$ . A equação de gap é resolvida da seguinte maneira. Para cada valor de  $k$ , ela é considerada como sendo uma equação não-linear cuja incógnita é  $M_k$ . Essa equação é resolvida por iteração, i.e., dado um ansatz inicial para  $M_k$ , as integrais sobre  $\vec{q}$  são efetuadas numericamente e a equação não linear é resolvida para cada  $k$ , obtendo-se assim um novo  $M_k$ . Essa solução é empregada para obter outra, e o processo é repetido até que os  $M_k$  de iterações sucessivas, para cada valor de  $k$ , não difiam entre si de um valor maior  $\epsilon = 10^{-5}$ . Empregamos a subrotina FIXPDF, disponível na internet no seguinte site: <http://www.netlib.org/hompack/index.html>.

Antes de considerar as diferentes formas de interações  $V_C$  e  $V_T$ , vamos analisar o comportamento assintótico ultravioleta da função  $M_k$ . A seguir, vamos considerar o comportamento ultravioleta do integrando do condensado de quarks,  $\langle \bar{q}q \rangle$ , cuja definição geral é

$$\langle \bar{q}q \rangle_\Lambda = -\frac{3}{\pi^2} \int^\Lambda dk k^2 \left[ \frac{M_k}{\sqrt{k^2 + M_k^2}} - \frac{m_0}{\sqrt{k^2 + m_0^2}} \right], \quad (5.5)$$

onde  $\Lambda$  é um número muito grande. Agora, para  $k \rightarrow \infty$ , a equação de gap diz que

$$M_k \rightarrow m_0 + \frac{2}{3} [V_C(k) + 2V_T(k)] \int^k \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_q}{E_q} \quad (5.6)$$

Suponhamos que o comportamento ultravioleta da interação (de  $V_C$ , ou de  $V_T$  ou de ambas) seja

$$V(k) \rightarrow \frac{4\pi\alpha_s}{k^2 \ln^\lambda(k^2)}, \quad (5.7)$$

onde  $\alpha_s$  é uma constante. Consideremos inicialmente o limite quiral,  $m_0 = 0$ . Nesse caso, não é difícil se convencer que o comportamento ultravioleta da função  $M_k$  é da forma

$$M_k \rightarrow \frac{1}{k^2 \ln^\lambda(k^2)}. \quad (5.8)$$

Temos então que o integrando do condensado de quarks leva a uma integral finita no ultravioleta para  $\lambda > 1$ , pois

$$\langle \bar{q}q \rangle_\Lambda \sim -\frac{3}{\pi^2} \int^\Lambda dk k^2 \frac{1}{k^3 \ln^\lambda(k^2)} = -\frac{3}{\pi^2} \frac{1}{2} \int^\Lambda d(k^2) \frac{1}{k^2 \ln^\lambda(k^2)} \sim \ln^{1-\lambda}(\Lambda^2). \quad (5.9)$$

Note que mesmo que a integral fosse ultravioleta divergente, não há problema algum. Por exemplo, é conhecido a partir da QCD perturbativa que na verdade  $\lambda = 1$  para  $k \rightarrow \infty$ , e que  $\alpha_s = d\pi$ , com  $d = 12/(33 - 2N_f)$  onde  $N_f$  é o número de sabores de quarks. Nesse caso, a integral do condensado diverge logicamente. No entanto, é possível definir um condensado “running”, i.e. um condensado que passa a depender de uma escala de momento  $\mu$  da forma

$$\langle \bar{q}q \rangle_\mu = \left[ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right]^{-d} \langle \bar{q}q \rangle_\Lambda. \quad (5.10)$$

Uma discussão detalhada sobre esse assunto pode ser encontrada na Ref. [44]. Para o caso de  $m_0 \neq 0$ , a Eq. (5.6) mostra que  $M_k$  não vai zero, mas sim a  $m_0$ . Ainda mais, nesse caso, independentemente do valor de  $\lambda$ , não é possível definir um condensado. A solução é introduzir o conceito de uma massa de corrente “running” [44], i.e.  $m_0(\mu)$ . Para os propósitos da presente tese, não precisamos ir além nessa discussão, porque não estamos interessados em investigar o valor do condensado de quarks para  $m_0 \neq 0$ . Isso, no entanto, não significa que vamos trabalhar no limite quiral. Pelo contrário, vamos usar  $m_0 \neq 0$ , mas não estaremos interessados no valor do condensado de quarks para essa situação.

Agora estamos preparados para apresentar resultados numéricos para soluções da equação de gap. Conforme discutido no Capítulo 2, vamos empregar nesta tese duas formas para  $V_C$ . Vamos inicialmente considerar a expressão derivada por Szczepaniak e Swanson [8], dada pelas Eqs. (2.39)-(2.41). Ela está dividida numa parte de longo alcance, de confinamento, e uma parte de curto alcance. A parte de longo alcance tem o comportamento dado pela Eq. (5.1), com  $\alpha = 3.93$ . A parte de longo alcance tem o comportamento assintótico ultravioleta dado pela Eq. (5.7), com  $\lambda = 1.42$ . Essa interação depende de um parâmetro  $m_g$ , o qual está relacionado a uma massa gluônica gerada dinamicamente no processo de renormalização. Essa

massa deve ser fixada fenomenologicamente. Na referência [8], para o valor de  $m_g$  estimou-se  $530 \text{ MeV} \leq m_g \leq 720 \text{ MeV}$ , e o valor empregado para ajustar a tensão da corda entre duas cargas de cor estáticas medida na rede foi  $m_g = 600 \text{ MeV}$ .

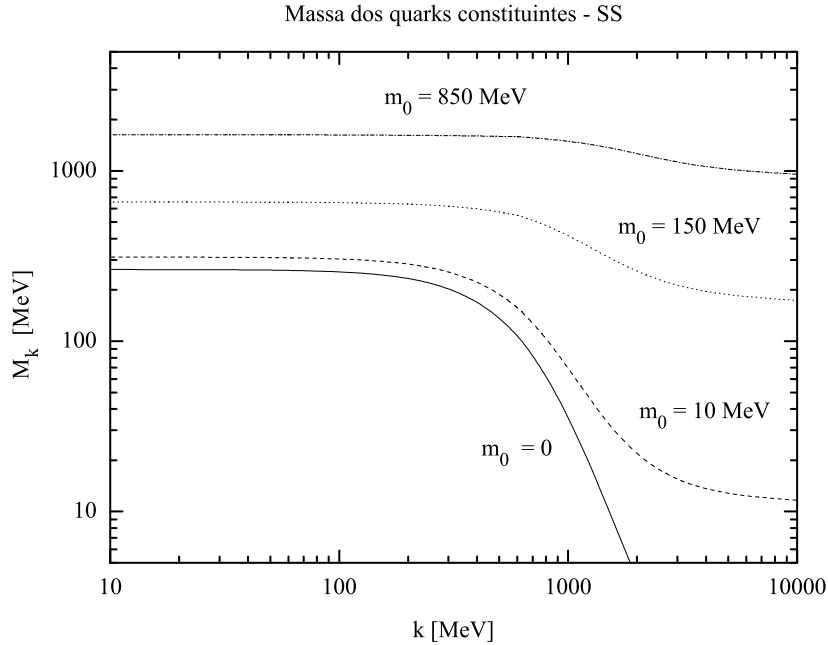


Figura 5.1: A função  $M_k$  como função do momento para diferentes valores da massa de corrente  $m_0$  para o modelo SS.

Conforme mencionado no Capítulo 2, para  $V_T(k)$  vamos empregar a expressão dada na Eq. (2.55). Ajustamos os parâmetros de maneira que  $M$  na Eq. (4.1) seja da ordem de 300 MeV para os quarks leves, dado  $m_0 = 10 \text{ MeV}$  – vamos considerar  $M_u = M_d$ , pois não estamos interessados em incorporar efeitos de quebra de isospin, que são da ordem de menos de 1% ao nível hadrônico. Tomando o valor  $m_g = 600 \text{ MeV}$ , encontramos  $M = 312 \text{ MeV}$  para  $\alpha_T = 0.5$ ,  $m = m_g/2$  e  $\tau = 1.05$ . O valor para o condensado de quarks no vácuo foi de  $(-\langle \bar{q}q \rangle)^{1/3} = 300 \text{ MeV}$ . Note que nesse caso o condensado é finito e não é necessário obter a função de massa para valores assintoticamente altos de maneira a expressá-lo numa escala de  $\mu \simeq 1 \text{ GeV}$  – ver Eq. (5.10) – como é usual [44]. Os valores dos parâmetros  $\alpha_T$ ,  $m$  e  $\tau$  não são univocamente determinados, podemos variá-los um pouco. Por exemplo, se aumentarmos um pouco  $\alpha_T$ , esse aumento pode ser compensado com o aumento em  $m$  ou  $\tau$  sem mudar muito os valores obtidos para  $M$  e o condensado. No entanto, eles não podem ser variados por fatores da ordem de 5 ou 10.

Apresentamos na Fig. (5.1) a função  $M_k$  para diferentes valores da massa de corrente  $m_0$ . Daqui para frente vamos indicar com “SS” nos gráficos os resultados obtidos com  $V_C$  do modelo de Szczepaniak e Swanson. Os diferentes valores de  $m_0$  correspondem às massas dos quarks  $u, d, s$  e  $c$ . Como pode ser observado, o efeito da quebra dinâmica da simetria quiral diminui com o aumento de  $m_0$ , como deveria ser, pois com o aumento de  $m_0$  o efeito da interação na autenergia dos quarks deve diminuir, conforme discutido inicialmente. Também pode ser observado que as massas mudam com o momento de maneira apreciável somente para momentos maiores que 500 MeV.

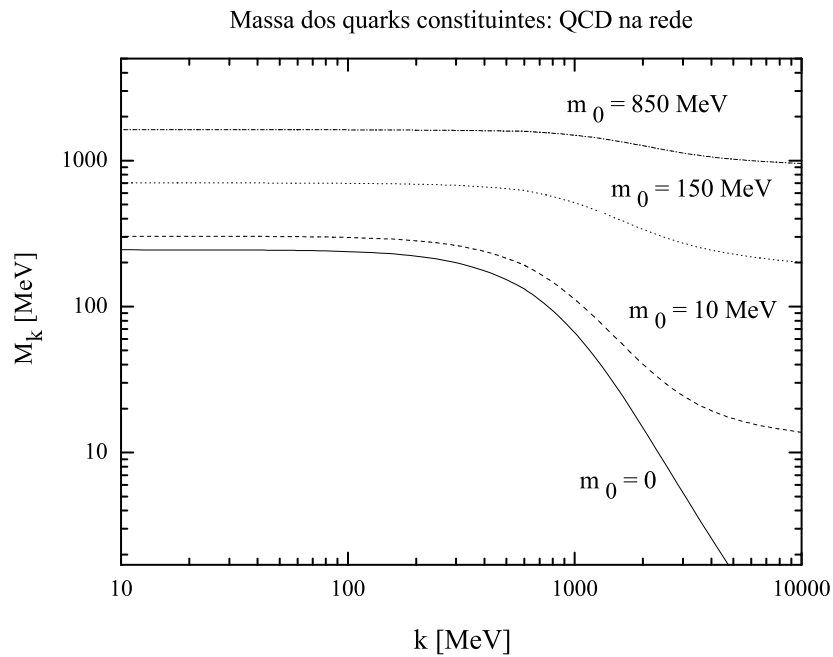


Figura 5.2: A função  $M_k$  como função do momento para diferentes valores da massa de corrente  $m_0$  para o modelo inspirado na QCD na rede.

Na Fig (5.2) apresentamos a função  $M_k$  para diferentes valores da massa de corrente  $m_0$  empregando o modelo extraído de resultados de QCD na rede – os resultados obtidos com esse modelo serão indicados nos gráficos com “QCD na rede”. Especificamente, para obter esses resultados empregamos a Eq. (2.46) para a parte de longo alcance de  $V_C$  e a Eq. (2.51) para a parte de curto alcance de  $V_C$ . Para  $V_T$ , empregamos a mesma expressão que para o modelo SS. Novamente empregamos  $m_g = 600$  MeV e para obter um valor de  $M = 303$  MeV para os quarks  $u$  e  $d$  empregamos  $\alpha_T = 0.7$ . Os valores dos outros parâmetros são os mesmos que

para o modelo SS. Conforme pode ser notado na figura, os resultados para  $M_k$  são qualitativamente similares aos do modelo SS, com o valor de  $M$  no presente caso um pouco menor que no modelo de SS. No entanto, mesmo com um valor menor para  $M$ , o valor do condensado é da ordem de 30% maior que no modelo SS. Isto é devido ao fato da interação  $V_C$  ser maior no modelo da QCD na rede do que no modelo SS. Esse fato da interação ser mais forte, como será visto a seguir, também vai implicar que os valores dos parâmetros variacionais  $\alpha$  e  $\beta$  diferem de maneira um pouco mais significativa nos dois modelos.

## 5.2 Os parâmetros variacionais $\alpha$ e $\beta$ das amplitudes $\varphi$ e $\phi$

As Fig. 5.3 apresenta as massas do núcleon  $\varphi$  e do méson D  $\phi$  como função dos respectivos parâmetros variacionais  $\alpha$  e  $\beta$  para os modelos SS e QCD na rede. As massas foram obtidas empregando as interações  $V_C$  e  $V_T$  e o valor de  $M_0$  obtido com a equação de gap para esses modelos – obviamente empregando sempre os mesmos conjuntos de parâmetros que definem essas interações e cujos valores foram dados acima. Os valores absolutos de  $M_N$  e  $M_D$  foram ajustados de maneira a fornecerem seus valores experimentais, mas os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  que minimizam  $M_N(\beta)$  e  $M_D(\alpha)$  foram obtidos numericamente resolvendo as equações não lineares dadas nas Eqs. (4.16) e (4.19), respectivamente. Os valores obtidos foram:

Modelo SS:

$$\beta = 310 \text{ MeV}, \quad \alpha = 270 \text{ MeV}$$

Modelo QCD na rede:

$$\beta = 530 \text{ MeV}, \quad \alpha = 485 \text{ MeV}$$

Esses valores obtidos com os dois modelos mostram que os tamanhos dos hádrons são um tanto diferentes. Como o tamanho no espaço de configuração é inversamente proporcional a  $\alpha$  e  $\beta$ , temos que o modelo de QCD na rede prevê um tamanho menor para os hádrons. Os valores obtidos com o modelo QCD na rede são mais próximos dos “valores padrões” comumente empregados nos estudos da interação de mésons  $D$  com núcleons empregando o modelo de quarks não relativístico [23], a saber:  $\beta = 400 \text{ MeV}$  e  $\alpha = 383.5 \text{ MeV}$ . Isso terá implicações importantes para os observáveis da interação  $DN$ , como será visto a seguir.

A explicação para esses valores diferentes para os tamanhos dos hádrons nos dois modelos é a parte de longo alcance da interação  $V_C$ , que é diferente nos dois modelos; a da QCD na rede é maior que a do modelo SS, conforme pode ser facilmente verificado usando os valores numéricos de  $\sigma$ ,  $C$  e  $m_g$ .

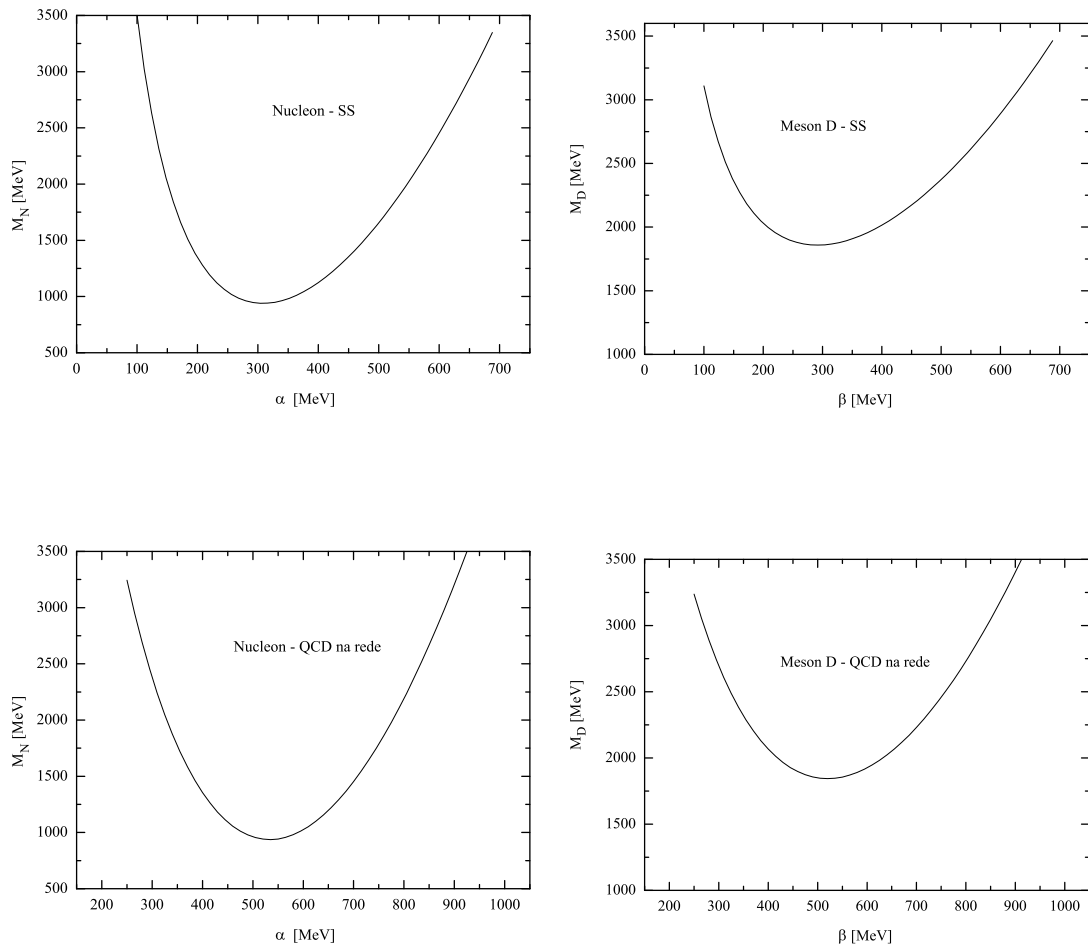


Figura 5.3: A massa do núcleon e do méson D como função dos seus respectivos parâmetros variacionais  $\alpha$  e  $\beta$  para o modelo SS (pain es superiores) e QCD na rede (pain es inferiores).

### 5.3 Deslocamentos de fase e seções de choque $DN$

O deslocamento de fase  $\delta_L$  para um estado de momento angular orbital  $L$  a uma energia  $E$  é dado por [45]

$$\delta_L(E) = \frac{\text{Im } T_L}{\text{Re } T_L} \quad (5.11)$$

onde  $T_L(E)$  é a componente de momento angular  $L$  da matriz  $T$  on-shell. A matriz  $T$  é a solução da equação de Lippmann-Schwinger, dada na Eq. (3.45). A decomposição em ondas parciais dessa equação pode ser escrita como [45]

$$T_L(p, p', k^2) = V_L(p, p') + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty dq q^2 \frac{V_L(p, q) T_L(q, p', k^2)}{k^2 - q^2 + i0} \quad (5.12)$$

onde  $k^2 = 2m_{red}E$ , com  $m_{red} = M_N M_D / (M_N + M_D)$  e  $E$  é a energia cinética do sistema méson-núcleon, e

$$V_L(p, p') = \pi^2 \int_{-1}^1 d\theta \text{sen}(\theta) P_L(\cos(\theta)) V(\vec{p}, \vec{p}'), \quad (5.13)$$

com  $V(\vec{p}, \vec{p}')$  sendo a interação efetiva  $V_{DN}$  derivada no Capítulo anterior.

Para resolver numericamente essa equação empregamos o método da matriz  $\Gamma$  – para detalhes, ver a Ref. [45]. O código numérico é o mesmo empregado para gerar os resultados da Ref. [46], o qual nos foi cedido gentilmente pelo Prof. Lauro Tomio. A seção de choque total elástica é dada em termos dos deslocamentos de fase pela expressão usual

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) \text{sen}^2(\delta_L). \quad (5.14)$$

Na Fig. 5.4 apresentamos os resultados para os deslocamentos de fase como função da energia cinética no centro de massa para os estados de momento angular orbital  $L = 0, 1, 2$  e isospin  $I = 0$  e  $I = 1$ , tanto para o modelo SS, como também para o modelo QCD na rede. Aqui foram empregados os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  dados acima. Também foram empregados os mesmos valores dos parâmetros para as interações  $V_C$  e  $V_T$  que aqueles empregados na equação de gap, que gera  $M_0$ , e que também são empregadas para obter  $\alpha$  e  $\beta$ . Nessa, e nas próximas figuras,  $E_{c.m.}$  indica a energia total do sistema méson-núcleon no centro de massa. Também, vamos apresentar resultados somente para energias cinéticas menores que 150 MeV, devido à natureza de baixas energias do modelo, como também devido às condições

experimentais [6] que prevêm produções de mésons charmosos próximas ao limiar de produção.

Inicialmente é importante notar que a interação efetiva total é repulsiva – o caráter repulsivo é uma combinação de fatores de cor, spin-isospin, Princípio de Pauli e, naturalmente, o sinal da interação microscópica. Convém notar que invertendo o sinal das interações microscópicas, o sinal da interação efetiva se inverte.

A diferença mais marcante nos resultados obtidos com os dois modelos transparece nos estados com isospin  $I = 1$  e momento angular orbital  $L = 1$  e  $L = 2$ . Conforme pode ser visto na Tabela 4.1, para  $I = 0$ , a parte proporcional a  $V_C$  (é a parte independente de spin, proporcional a  $1_i 1_j$  na Tabela) não contribui para a interação efetiva  $V_{DN}$ . Portanto, como a parte transversa é essencialmente a mesma para os dois modelos, somente os estados com  $I = 1$  recebem contribuições diferentes nos dois modelos.

O fato que os resultados para as ondas com  $L = 1$  e  $L = 2$  são bem diferentes nos dois modelos pode ser entendido como sendo devido ao diferente tamanho dos hádrons, o qual determina o alcance da interação efetiva  $V_{DN}$ . O alcance de  $V_{DN}$  no espaço de configuração cresce com o aumento do tamanho dos hádrons, i.e. quanto menor  $\alpha$ , por exemplo, maior é o alcance da interação. Isso pode ser facilmente visto considerando a transformada de Fourier de  $V_{DN}(p, p')$  na aproximação local. Definindo  $P = p + p'$  e  $q = p - p'$  e fazendo a transformada de Fourier com relação  $q$ , e desprezando as contribuições não locais que vêm da transformada de Fourier com relação a  $P$ , obtemos termos proporcionais a

$$V_{DN}(r) \sim e^{-\lambda \alpha^2 r^2}, \quad (5.15)$$

onde  $\lambda$  engloba todas as constantes restantes (como  $g$ ,  $\rho$ , etc) que aparecem na expressão de  $I_i(p, p')$  da Eq. (4.64). Portanto, quanto menor  $\alpha$  (tamanho maior do hádron no espaço de configuração), maior é o alcance da interação efetiva  $V_{DN}$ . Logo, os estados de momento angular  $L = 1$  e  $L = 2$  “sentem” mais a interação do modelo SS do que a interação do modelo QCD na rede. Note que o efeito do alcance da interação parece ser mais importante do que o efeito da intensidade da interação, que é maior no modelo QCD na rede do que no modelo SS.

Na Fig. 5.5 apresentamos os resultados obtidos para a seção de choque total obtida com os dois modelos. A primeira constatação é que a seção de choque para o estado com isospin  $I = 0$  é muito menor que a para o estado com  $I = 1$  nos dois modelos. Agora, as seções de choque para o estado  $I = 1$  no modelo SS é da ordem de três vezes maior que a do modelo QCD na rede. Este fato é devido



às contribuições significativas dos estados de momento angular  $L = 1$  e  $L = 2$  no modelo SS. Conforme discutido acima, essas contribuições são maiores no modelo SS devido ao alcance maior da interação efetiva  $V_{DN}$  nesse modelo.

#### 5.4 Contribuições relativas de $V_C$ e $V_T$

Para finalizar, vamos comparar as contribuições relativas de  $V_C$  e  $V_T$  para a seção de choque total. Na Fig. 5.6 mostramos a seção de choque total como função da energia cinética no centro de massa para o estado de isospin  $I = 1$ . A linha contínua é o resultado completo, que inclui a interação  $V_C$  e  $V_T$ . A linha tracejada é o resultado para a seção de choque quando somente  $V_T$  é empregada. Claramente,  $V_T$  contribui com 50% para a seção de choque total. É interessante notar também que a contribuição de  $V_T$  é essencialmente igual à contribuição spin-spin da troca de um glúon, conforme pode ser verificado na Ref. [23]. Há duas diferenças entre o resultado apresentado aqui e o da Ref. [23]: 1) os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são um pouco diferentes (aqui eles são maiores que em [23]) e, 2) a parte de spin-spin da troca de um glúon é uma interação de contato, enquanto aqui ela tem um alcance finito diferente de zero. Portanto, enquanto  $\alpha$  e  $\beta$  aqui fornecem uma interação de menor alcance, o efeito parece ser compensado pelo fato da interação ser de alcance diferente de zero.

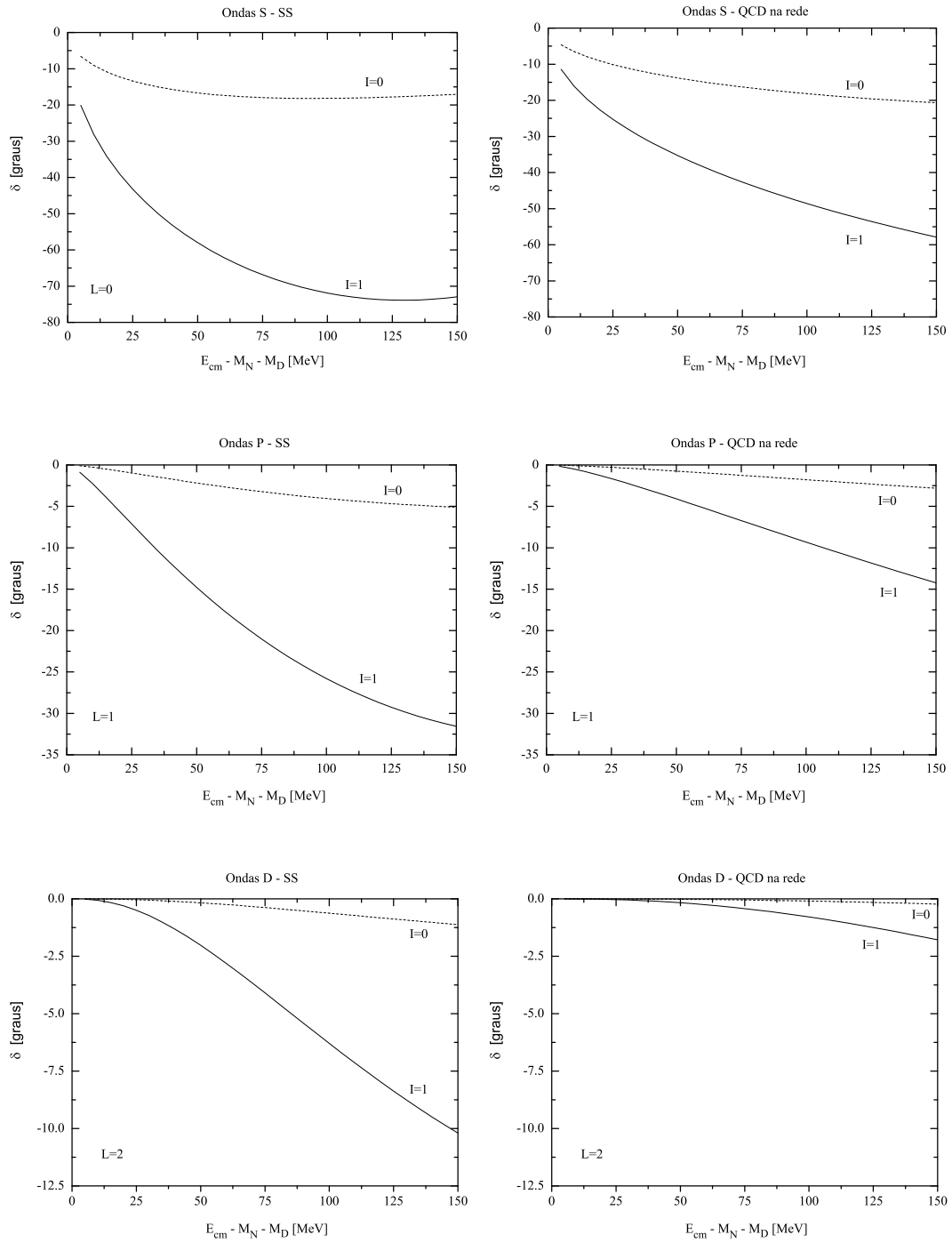


Figura 5.4: Deslocamento de fase  $L = 0, 1, 2$  e  $I = 1$  (linhas contínuas) e  $I = 0$  (linhas tracejadas) como função da energia cinética no centro-de-massa para o modelo SS (painéis da esquerda) e para o modelo QCD na rede (painéis da direita).

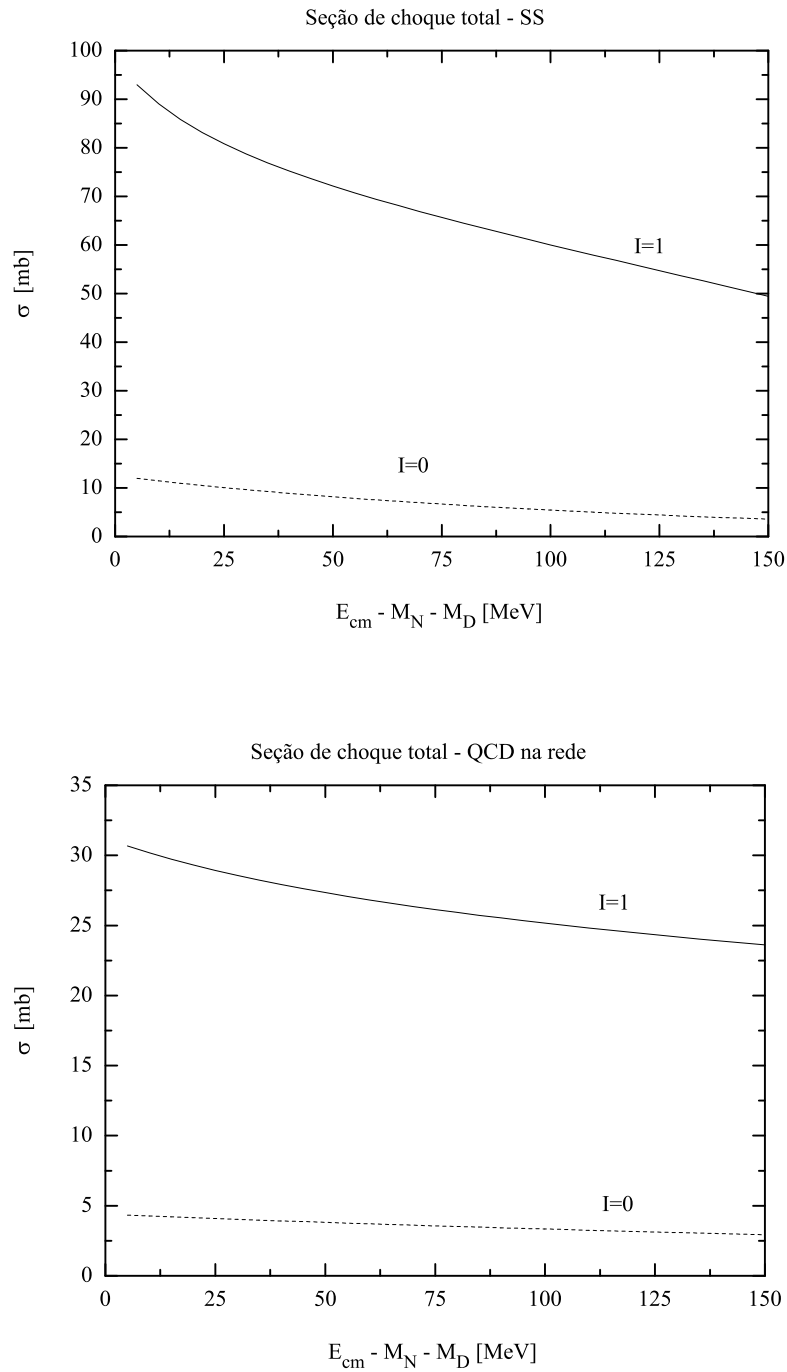


Figura 5.5: Seção de choque elástica total para os estados  $I = 1$  (linha contínua) e  $I = 0$  (linha tracejada) como função da energia cinética no centro-de-massa para o modelo SS (painel superior) e o modelo QCD na rede (painel inferior). Note as escalas diferentes nos dois gráficos.

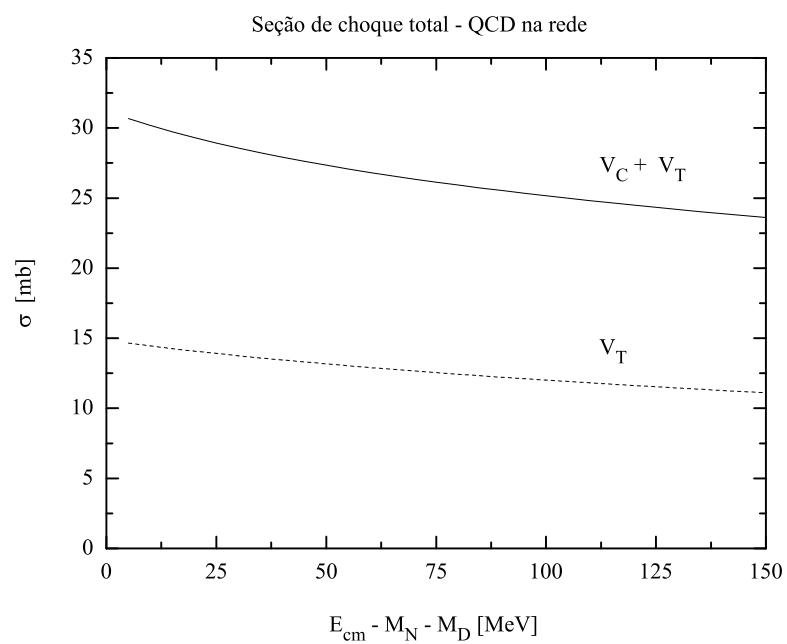


Figura 5.6: Seção de choque total para o estado  $I = 1$  (linha sólida) e a contribuição de  $V_T$  (linha tracejada) para a seção de choque total.

## Capítulo 6

### Conclusões e Perspectivas Futuras

A tese teve o objetivo geral de desenvolver um esquema de cálculo suficientemente prático para a obtenção de interações efetivas hadron-hadron, tendo como base um modelo microscópico baseado na QCD, que realize simultaneamente o confinamento dos quarks e gluons e a quebra dinâmica da simetria quiral. O esquema de cálculo desenvolvido na tese tem como base um modelo de quarks microscópico inspirado no Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb.

Uma das motivações principais para o desenvolvimento desse esquema de cálculo é a necessidade de desenvolver modelos que contenham elementos da QCD, que vão além dos modelos de quarks tradicionais [23]. Nesses modelos tradicionais não há uma conexão direta entre os diversos parâmetros que definem a interação microscópica e a massa dos quarks constituintes e as funções de onda dos hadrons. Outra motivação é a necessidade de modelos que, sob influências externas como temperatura e densidade bariônica, incorporem mudanças no confinamento e na quebra dinâmica da simetria quiral. Claramente um modelo de quarks com parâmetros especificados de maneira *ad hoc* é incapaz de realizar isso. Por outro lado, o modelo microscópico empregado na presente tese tem os elementos necessários para realizar essa tarefa. Por fim, vale reiterar que para fazer contato com experimentos que estão em desenvolvimento, e que entrarão em operação num futuro próximo, como as no laboratório FAIR na Alemanha [6], é necessário desenvolver modelos para a QCD com as características descritas.

O modelo microscópico empregado aqui incorpora uma interação de confinamento do tipo Coulomb e de gluons transversos. Foram empregadas duas formas para a interação Coulombiana, uma derivada a partir de uma aproximação auto-consistente de quasi-partículas para o vácuo da QCD [8, 9], e outra ajustado a partir de simulações de QCD na rede no calibre de Coulomb [10, 11, 12]. Para a interação de gluons transversos foi empregada uma estratégia similar à da Ref. [14], mas inspirada

em resultados da QCD na rede que parecem indicar que a interação transversa não diverge no infravermelho. A partir das interações de Coulomb e de gluons transversos, obtivemos a equação de gap para o condensado de quarks. A equação de gap fornece a função de massa dos quarks constituintes, a seguir foram determinadas as interações microscópicas quark-quark, antiquark-antiquark e quark-antiquark, a partir das quais foram obtidos os estados ligados no espaço de Fock correspondentes a bárions e mésons. As amplitudes de Fock correspondentes aos estados bariônicos e mesônicos foram determinadas variacionalmente. Obtidas essas amplitudes, as interações efetivas hadron-hadron foram obtidas com o “Resonating Group Method” (RGM).

Por fim, como aplicação do formalismo desenvolvido, consideramos o problema do espalhamento de mésons charmosos  $D$  com núcleons, um assunto de grande interesse atual, conforme discutido na Introdução. O estudo foi direcionado para mésons  $D$  contendo um quark anticharm  $\bar{c}$ , i.e. os mésons  $\bar{D}^0 = (u\bar{c})$  e  $D^- = (d\bar{c})$ . Os resultados numéricos explícitos mostraram que os valores para os deslocamentos de fase e as seções de choque elásticas são muito encorajadores. Eles são da mesma ordem de magnitude que os obtidos com outros modelos. As contribuições das interações longitudinal  $V_C$  e transversa  $V_T$  são da mesma ordem de magnitude – para os estados com  $I = 1$ . É importante notar aqui que a interação  $V_C$  inclui, além da interação de confinamento, uma parte de curto alcance. Em modelos em que trocas de mésons são incluídas para descrever a parte de longo alcance da interação entre os hadrons e a troca de um gluon para descrever a parte de curto alcance, como por exemplo o modelo da Ref. [23], a interação de confinamento não é incluída porque ela não é parte da troca de um gluon e, efetivamente, é descrita pela troca de mésons. Em estudos futuros seria interessante investigar essa questão da descrição efetiva da interação de confinamento através da troca de mésons com mais profundidade.

Independentemente dos números obtidos, na nossa opinião o avanço mais significativo que foi alcançado na tese foi o emprego de um modelo em que todos os parâmetros envolvidos na interação efetiva hadron-hadron, como o tamanho dos hadrons e a interação entre seus constituintes, são gerados dinamicamente. O confinamento é o resultado das excitações gluônicas no vácuo, e as massas dos quarks e suas interações efetivas são o resultado da quebra dinâmica da simetria quiral no vácuo. Uma outra característica importante que deve ser mencionada é que o esquema de cálculo desenvolvido, além de ser simples de ser empregado, é flexível o suficiente para incorporar aprimoramentos tanto em modelos para a QCD no contínuo como em simulações na rede. Desenvolvimentos futuros muito provavelmente vão

trazer uma definição melhor para a forma da interação de gluons transversos, como também vão fixar de maneira mais precisa os valores dos parâmetros do potencial de confinamento.

Esses méritos do esquema desenvolvido não significa, no entanto, que ele não pode ser aprimorado. Pelo contrário, ele pode e deve ser aprimorado. Um dos aspectos que deve ser aprimorado é a determinação das amplitudes de Fock dos hadrons. É necessário ir além do ansatz de uma única Gaussiana para essas amplitudes. Isso pode ser feito de maneira não muito complicada através da combinação do método variacional com a diagonalização de matriz. As amplitudes são expandidas numa base Gaussiana com parâmetros variacionais e a matriz Hamiltoniana calculada nessa base diagonalizada. Um aprimoramento que pode ser feito, com um pouco mais de esforço, é evitar a expansão de baixos momentos da função de massa dos quarks constituintes. Isso pode ser conseguido ajustando as componentes superior e inferior dos espinores de Dirac por Gaussianas. É importante reiterar que o emprego de Gaussianas tanto para as amplitudes hadronicas como para os espinores de Dirac é fundamental para evitar cálculos numéricos pesados (como integrações de Monte-Carlo) para o cálculo das integrais para a interação efetiva hadron-hadron.

Uma extensão do formalismo que pode ser feita imediatamente é o tratamento de processos envolvendo aniquilação de quarks e antiquarks. Isso vai permitir tratar processos em que podem ocorrer ressonâncias. Isso pode ser feito ainda com o emprego das equações de Lippmann-Schwinger, mas é necessário tratar canais acoplados. Uma outra linha de investigação que pode ser implementada a partir do modelo desenvolvido aqui é o estudo da quebra da simetria  $SU(4)$  de sabor em constantes de acoplamento méson-méson-méson e méson-bárion-bárion. Essas constantes e os fatores de forma entram em modelos que usam troca de mésons, como no modelo da Ref. [23]. Nessa mesma direção de investigação está a comparação de resultados para essas constantes de acoplamento e fatores de forma com previsões de regras de soma da QCD, como as das Refs. [24, 25].

Por fim, cabe ressaltar que a consideração de efeitos de temperatura e densidade nas interações hadron-hadron pode ser feita com o formalismo desenvolvido aqui. Desenvolvimentos nessa direção estão em andamento [29, 31].

## Apêndice A

### Matrizes de Pauli, de Dirac e de Gell-Mann

As **matrizes de Pauli**  $\sigma^i$  são matrizes hermitianas  $2 \times 2$ , e cujo traço é nulo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Estas matrizes satisfazem as seguintes relações

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \quad \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} \quad (\text{A.2})$$

As **matrizes de Dirac**,  $\alpha^i$  e  $\beta$ , são matrizes hermitianas  $4 \times 4$ , de traço nulo,

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

onde 1 representa a matriz identidade  $2 \times 2$ . São definidas as matrizes  $\gamma^\mu$  como

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i, \quad \text{com } i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.4})$$

sendo que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$



É importante escrever o traço de alguns produtos das matrizes  $\gamma$ ,

$$\text{Tr} [\beta \vec{\gamma} \cdot \hat{k}] = \text{Tr} [\beta \gamma^i \gamma^j] = \text{Tr} [\beta \gamma^i \gamma^j \vec{\gamma} \cdot \hat{k}] = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Tr} [\vec{\gamma} \cdot \hat{k}] = \text{Tr} [\gamma^i \gamma^j \vec{\gamma} \cdot \hat{k}] = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Tr} [\gamma^i \gamma^j] = -4 \delta^{ij} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Tr} [\vec{\gamma} \cdot \hat{k} \vec{\gamma} \cdot \hat{q}] = -4 \hat{k} \cdot \hat{q} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Tr} [\gamma^i \vec{\gamma} \cdot \hat{k} \gamma^j \vec{\gamma} \cdot \hat{q}] = 4 (k_i q_j + k_j q_i - \delta^{ij} \hat{k} \cdot \hat{q}) \quad (\text{A.11})$$

As **matrizes de Gell-Mann**,  $\lambda^a$ , são as matrizes hermitianas  $3 \times 3$ , de traço nulo,

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Estas matrizes satisfazem as seguintes relações

$$\text{Tr}[\lambda^a \lambda^b] = 2\delta^{ab} \quad (\text{A.13})$$

$$\left[ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (\text{A.14})$$

onde  $f^{abc}$  é o fator totalmente antisimétrico, cujos valores não nulos são

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1, & f^{147} &= \frac{1}{2}, & f^{156} &= -\frac{1}{2} \\ f^{246} &= \frac{1}{2}, & f^{257} &= \frac{1}{2} \\ f^{345} &= \frac{1}{2}, & f^{367} &= \frac{1}{2} \\ f^{458} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f^{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

## Apêndice B

### Funções de spin e sabor do nucleon e dos mesons $D$

Neste Apêndice vamos apresentar as funções de spin e sabor dos nucleons e dos mesons  $D$ . Vamos começar discutindo o nucleon. O spin do núcleon é  $1/2 \hbar$  e o seu isospin é  $1/2$ . A projeção  $1/2$  do isospin é o próton, e a projeção  $-1/2$  é o neutron. Para construir este estado, vamos considerar um modelo de quarks não relativístico, como o considerado nesta tese. No limite de simetria exata de sabor ( $m_u = m_d$ ), temos que o estado de spin-sabor deve ser simétrico para os estados fundamentais dos nucleons. Isto é devido ao fato de que a função de onda de cor para os núcleons é totalmente anti-simétrica, pois este é o único estado de simetria  $SU(3)$  com cor nula, e a parte espacial da função de onda deve ser simétrica (pois estamos interessados nos estados fundamentais). A construção de um estado de spin-sabor totalmente simétrico é conseguida a partir do uso de estados de spin e sabor com simetria mixta, i.e. estados com simetria definida (estado simétrico ou antisimétrico) sob a troca de duas partículas, mas sem simetria definida com relação a trocas das duas primeiras com a terceira partícula. Especificamente,

$$|p \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MS}(\uparrow) \eta_{MS}(u) + \chi_{MA}(\uparrow) \eta_{MA}(u)], \quad (\text{B.1})$$

$$|p \downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MS}(\downarrow) \eta_{MS}(u) + \chi_{MA}(\downarrow) \eta_{MA}(u)], \quad (\text{B.2})$$

$$|n \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MS}(\uparrow) \eta_{MS}(d) + \chi_{MA}(\uparrow) \eta_{MA}(d)], \quad (\text{B.3})$$

$$|n \downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MS}(\downarrow) \eta_{MS}(d) + \chi_{MA}(\downarrow) \eta_{MA}(d)], \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\chi_{MS}(\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_{10} \alpha - \sqrt{2} \chi_{11} \beta), \quad \chi_{MA}(\uparrow) = \chi_{00} \alpha, \quad (\text{B.5})$$

$$\chi_{MS}(\downarrow) = -\frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_{10} \beta - \sqrt{2} \chi_{1-1} \alpha), \quad \chi_{MA}(\downarrow) = \chi_{00} \beta, \quad (\text{B.6})$$

e

$$\begin{aligned} \eta_{MS}(u) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\eta_{10} u - \sqrt{2} \eta_{11} d) & \eta_{MA}(u) &= \eta_{00} u \\ \eta_{MS}(d) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (\eta_{10} d - \sqrt{2} \eta_{1-1} u) & \eta_{MA}(d) &= \eta_{00} d \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  sendo autoestados da matriz de Pauli de spin  $\sigma_3$  com autovalores  $\pm 1$  e  $u$  e  $d$  autoestados da matriz de Pauli de isospin  $\tau_3$  com autovalores  $\pm 1$ , e

$$\begin{aligned} \chi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha\beta - \beta\alpha) \\ \chi_{1-1} &= \beta\beta & \chi_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha\beta + \beta\alpha) & \chi_{11} &= \alpha\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

e

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (ud - du) \\ \eta_{1-1} &= dd & \eta_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (ud + du) & \eta_{11} &= uu \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Assim, os resultados para o próton e para o nêutron, com projeções de spin  $\pm 1/2$ , são

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \left[ 2 u_{\uparrow}(1) d_{\downarrow}(2) u_{\uparrow}(3) + 2 d_{\downarrow}(1) u_{\uparrow}(2) u_{\uparrow}(3) + 2 u_{\uparrow}(1) u_{\uparrow}(2) d_{\downarrow}(3) \right. \\ &\quad - u_{\downarrow}(1) d_{\uparrow}(2) u_{\uparrow}(3) - u_{\uparrow}(1) d_{\uparrow}(2) u_{\downarrow}(3) - d_{\uparrow}(1) u_{\downarrow}(2) u_{\uparrow}(3) \\ &\quad \left. - d_{\uparrow}(1) u_{\uparrow}(2) u_{\downarrow}(3) - u_{\uparrow}(1) u_{\downarrow}(2) d_{\uparrow}(3) - u_{\downarrow}(1) u_{\uparrow}(2) d_{\uparrow}(3) \right] \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |p \downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \left[ -2 u_{\downarrow}(1) d_{\uparrow}(2) u_{\downarrow}(3) - 2 d_{\uparrow}(1) u_{\downarrow}(2) u_{\downarrow}(3) - 2 u_{\downarrow}(1) u_{\downarrow}(2) d_{\uparrow}(3) \right. \\ &\quad + u_{\uparrow}(1) d_{\downarrow}(2) u_{\downarrow}(3) + u_{\downarrow}(1) d_{\downarrow}(2) u_{\uparrow}(3) + d_{\downarrow}(1) u_{\uparrow}(2) u_{\downarrow}(3) \\ &\quad \left. + d_{\downarrow}(1) u_{\downarrow}(2) u_{\uparrow}(3) + u_{\uparrow}(1) u_{\downarrow}(2) d_{\downarrow}(3) + u_{\downarrow}(1) u_{\uparrow}(2) d_{\downarrow}(3) \right], \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |n \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \left[ -2u_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)d_{\uparrow}(3) - 2d_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) - 2d_{\uparrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) \right. \\
 &+ u_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) + u_{\uparrow}(1)d_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) + d_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\uparrow}(3) \\
 &\left. + d_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) + d_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) + d_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\uparrow}(3) \right], \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 |n \downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \left[ 2u_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)d_{\downarrow}(3) + 2d_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) + 2d_{\downarrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) \right. \\
 &- u_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) - u_{\downarrow}(1)d_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) - d_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\downarrow}(3) \\
 &\left. - d_{\downarrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) - d_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\downarrow}(3) - d_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) \right]. \quad (\text{B.13})
 \end{aligned}$$

Por fim, a estrutura de spin e sabor dos mesons  $D$  é muito simples, a saber:

$$|\bar{D}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha\beta - \beta\alpha) u\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{\uparrow}\bar{c}_{\downarrow} - u_{\downarrow}\bar{c}_{\uparrow}), \quad (\text{B.14})$$

$$|D^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha\beta - \beta\alpha) d\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_{\uparrow}\bar{c}_{\downarrow} - d_{\downarrow}\bar{c}_{\uparrow}). \quad (\text{B.15})$$

## Apêndice C

### As interações quark-quark, antiquark-antiquark e quark-antiquark

Vamos começar da expressão do Hamiltoniano microscópica dado pela Eq. (2.64)

$$H = H_0 + H_2(\vec{x}) + : H_4(\vec{x}) : \quad (\text{C.1})$$

onde  $H_0$  é a energia do vácuo dada pela Eq. (2.65),  $H_2$  é o termo “cinético” dado pela Eq. (2.66)

$$H_2 = \int d^3k \varepsilon_f(\vec{k}) \left[ q_s^{\dagger cf}(\vec{k}) q_s^{cf}(\vec{k}) + \bar{q}_s^{\dagger cf}(\vec{k}) \bar{q}_s^{cf}(\vec{k}) \right] \quad (\text{C.2})$$

onde inserimos explicitamene os índices de de cor  $c$ , sabor  $f$  e spin  $s$  e, por fim,  $H_4$  é a interação residual dada pela Eq. (2.67), a qual escrevemos aqui como

$$\begin{aligned} H_4 = & \frac{1}{2} \int d^3x d^3y V_\Gamma(\vec{x} - \vec{y}) : \left[ \Psi_\alpha^{\dagger c' f}(\vec{x}) \Gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{F}^a)^{c'c} \Psi_\beta^{cf}(\vec{x}) \right] \\ & \times \left[ \Psi_\gamma^{\dagger c' \bar{f}}(\vec{y}) \Gamma_{\gamma\delta}(\mathcal{F}^a)^{c'\bar{c}} \Psi_\delta^{\bar{c}\bar{f}}(\vec{y}) \right] : \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde  $\mathcal{F}^a$ ,  $a = 1, \dots, 8$  são as matrizes de cor  $3 \times 3$  de  $\text{SU}(3)$ , dadas em termos das matrizes de Gell-Mann  $\lambda^a$  como na Eq. (4.6), e  $V_\Gamma(\vec{x} - \vec{y})$  são os potenciais, em que  $\Gamma = 1$  para a parte de Coulomb e  $\Gamma = \alpha^i$  para a parte transversa. Explicitamente, esses potenciais são dados por

Para  $\Gamma = 1$ :

$$V_\Gamma(\vec{x} - \vec{y}) = V_C(|\vec{x} - \vec{y}|) \quad (\text{C.4})$$

Para  $\Gamma = \alpha^i$ :

$$V_\Gamma(\vec{x} - \vec{y}) = U_{ij}(|\vec{x} - \vec{y}|) = V_T(|\vec{x} - \vec{y}|) \left( \delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right) \quad (\text{C.5})$$

Os operadores de campo são expandidos como na Eq. (2.58). Aqui vamos reescrever essa expressão explicitando os índices de cor, sabor e spin

$$\Psi_\alpha^{cf}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left[ u_\alpha^f(\vec{p}, s) q_s^{cf}(\vec{p}) + v_\alpha^f(\vec{p}, s) \bar{q}_s^{\dagger cf}(-\vec{p}) \right] e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (\text{C.6})$$

Lembramos que os operadores  $q_s^{cf}$  e  $\bar{q}_s^{cf}$  aniquilam o vácuo com simetria quiral quebrada  $|\Omega\rangle$ , i.e.

$$q_s^{cf}|\Omega\rangle = 0 = \bar{q}_s^{cf}|\Omega\rangle \quad (\text{C.7})$$

Substituindo esta expansão na Eq. (C.3), temos que  $H_4$  pode ser dividida em diferentes contribuições relacionadas às interações quark-quark, antiquark-antiquark, quark-antiquark e outras interações que envolvem processos de aniquilação. Aqui estamos interessados nos primeiros termos somente, a saber

Interação quark-quark:

$$\begin{aligned} V_{qq} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p_1 \cdots d^3p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 + \vec{p}_2 - \vec{p}_4) \sum_{f_1 \cdots f_4} \sum_{c_1 \cdots c_4} \sum_{s_1 \cdots s_4} \delta^{f_1 f_3} \delta^{f_2 f_4} \\ &\times (\mathcal{F}^a)^{c_3 c_1} (\mathcal{F}^a)^{c_4 c_2} V_{qq}(\vec{p}_1 f_1 s_1, \vec{p}_2 f_2 s_2, \vec{p}_3 f_3 s_3, \vec{p}_4 f_4 s_4) \\ &\times q_{f_3 s_3}^{c_3 \dagger}(\vec{p}_3) q_{f_4 s_4}^{c_4 \dagger}(\vec{p}_4) q_{f_2 s_2}^{c_2}(\vec{p}_2) q_{f_1 s_1}^{c_1}(\vec{p}_1) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} V_{qq}(\vec{p}_1 f_1 s_1, \vec{p}_2 f_2 s_2, \vec{p}_3 f_3 s_3, \vec{p}_4 f_4 s_4) &= V_\Gamma(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \left[ u_\alpha^{f_3 \dagger}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^f(\vec{p}_1, s_1) \right] \\ &\times \left[ u_\gamma^{f_4 \dagger}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Interação antiquark-antiquark:

$$\begin{aligned} V_{\bar{q}\bar{q}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p_1 \cdots d^3p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 + \vec{p}_2 - \vec{p}_4) \sum_{f_1 \cdots f_4} \sum_{c_1 \cdots c_4} \sum_{s_1 \cdots s_4} \delta^{f_1 f_3} \delta^{f_2 f_4} \\ &\times (\mathcal{F}^a)^{c_3 c_1} (\mathcal{F}^a)^{c_4 c_2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\vec{p}_1 f_1 s_1, \vec{p}_2 f_2 s_2, \vec{p}_3 f_3 s_3, \vec{p}_4 f_4 s_4) \\ &\times \bar{q}_{f_3 s_3}^{c_3 \dagger}(\vec{p}_3) \bar{q}_{f_4 s_4}^{c_4 \dagger}(\vec{p}_4) \bar{q}_{f_2 s_2}^{c_2}(\vec{p}_2) \bar{q}_{f_1 s_1}^{c_1}(\vec{p}_1) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} V_{\bar{q}\bar{q}}(\vec{p}_1 f_1 s_1, \vec{p}_2 f_2 s_2, \vec{p}_3 f_3 s_3, \vec{p}_4 f_4 s_4) &= V_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \left[ v_\alpha^{f_1 \dagger}(-\vec{p}_1, s_1) \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta^{f_3}(-\vec{p}_3, s_3) \right] \\ &\times \left[ v_\gamma^{f_2 \dagger}(-\vec{p}_2, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_\delta^{f_4}(-\vec{p}_4, s_4) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Interação quark-antiquark:

$$\begin{aligned}
 V_{q\bar{q}} &= \int \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 + \vec{p}_2 - \vec{p}_4) \sum_{f_1 \cdots f_4} \sum_{c_1 \cdots c_4} \sum_{s_1 \cdots s_4} \delta^{f_1 f_3} \delta^{f_2 f_4} \\
 &\times (\mathcal{F}^a)^{c_3 c_1} (\mathcal{F}^{aT})^{c_4 c_2} V_{q\bar{q}}(\vec{p}_1 f_1 s_1, \vec{p}_2 f_2 s_2, \vec{p}_3 f_3 s_3, \vec{p}_4 f_4 s_4) \\
 &\times q_{f_3 s_3}^{c_3 \dagger}(\vec{p}_3) \bar{q}_{f_4 s_4}^{c_4 \dagger}(p_4) \bar{q}_{f_2 s_2}^{c_2}(p_2) q_{f_1 s_1}^{c_1}(p_1)
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
 V_{q\bar{q}}(\vec{p}_1 f_1 s_1, \vec{p}_2 f_2 s_2, \vec{p}_3 f_3 s_3, \vec{p}_4 f_4 s_4) &= V_{\Gamma}(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \left[ u_{\alpha}^{f_3 \dagger}(p_3, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_{\beta}^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1, s_1) \right] \\
 &\times \left[ v_{\gamma}^{f_2 \dagger}(-p_2, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_{\delta}^{f_4}(-p_4, s_4) \right]
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

Como ilustração, vamos mostrar em detalhe a derivação da interação quark-quark. Substituindo o operador campo na expressão para  $H_4$  e retendo somente termos contendo  $q^{\dagger} q^{\dagger} q q$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{qq} &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}^a)^{c_4 c_2} (\mathcal{F}^a)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \int d^3 x d^3 y V_{\Gamma}(\vec{x} - \vec{y}) \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^6} \\
 &\times e^{-i\vec{p}_4 \cdot \vec{x} + i\vec{p}_2 \cdot \vec{x} - i\vec{p}_3 \cdot \vec{y} + i\vec{p}_1 \cdot \vec{y}} \left[ u_{\alpha}^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_{\beta}^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \left[ u_{\gamma}^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_{\delta}^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] \\
 &\times : q_{s_4}^{\dagger c_4 f_4}(\vec{p}_4) q_{s_2}^{c_2 f_2}(\vec{p}_2) q_{s_3}^{\dagger c_3 f_3}(\vec{p}_3) q_{s_1}^{c_1 f_1}(\vec{p}_1) :
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

A introdução das deltas de sabor  $\delta^{f_4 f_2}$  e  $\delta^{f_3 f_1}$  é para conveniência posterior. Introduzindo a transformada de Fourier do potencial

$$V_{\Gamma}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}_{\Gamma}(q) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \tag{C.15}$$

e substituindo essa na Eq. (C.14), obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{qq} &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}^a)^{c_4 c_2} (\mathcal{F}^a)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^6} \tilde{V}_{\Gamma}(q) \\
 &\times \int d^3 x d^3 y e^{i(\vec{q} - \vec{p}_4 + \vec{p}_2) \cdot \vec{x}} e^{-i(\vec{q} + \vec{p}_3 - \vec{p}_1) \cdot \vec{y}} \left[ u_{\alpha}^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_{\alpha}^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \\
 &\times \left[ u_{\gamma}^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_{\delta}^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] q_{s_4}^{\dagger c_4 f_4}(\vec{p}_4) q_{s_2}^{c_2 f_2}(\vec{p}_2) q_{s_3}^{\dagger c_3 f_3}(\vec{p}_3) q_{s_1}^{c_1 f_1}(\vec{p}_1) :
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

Nessa expressão podemos identificar duas funções delta que vêm da integração sobre

as coordenadas  $x$  and  $y$ , o que leva a

$$\begin{aligned}
 V_{qq} &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}^a)^{c_4 c_2} (\mathcal{F}^a)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^6} \tilde{V}_\Gamma(q) \\
 &\times (2\pi)^6 \delta(\vec{q} - \vec{p}_4 + \vec{p}_2) \delta(\vec{q} + \vec{p}_3 - \vec{p}_1) \left[ u_\alpha^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \\
 &\times \left[ u_\gamma^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] q_{s_4}^{\dagger c_4 f_4}(\vec{p}_4) q_{s_3}^{\dagger c_3 f_3}(\vec{p}_3) q_{s_1}^{c_1 f_1}(\vec{p}_1) q_{s_2}^{c_2 f_2}(\vec{p}_2) \quad (\text{C.17})
 \end{aligned}$$

onde já colocamos os operadores em ordem normal. Usando a segunda delta, podemos escrever a primeira como  $\delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4 + \vec{p}_2)$ . Fazendo a integral sobre  $q$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{qq} &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}^a)^{c_4 c_2} (\mathcal{F}^a)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \int \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^3} \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \\
 &\times \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4 + \vec{p}_2) \left[ u_\alpha^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \left[ u_\gamma^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] \\
 &\times q_{s_4}^{\dagger c_4 f_4}(\vec{p}_4) q_{s_3}^{\dagger c_3 f_3}(\vec{p}_3) q_{s_1}^{c_1 f_1}(\vec{p}_1) q_{s_2}^{c_2 f_2}(\vec{p}_2) \quad (\text{C.18})
 \end{aligned}$$

A qual pode ainda ser escrita como

$$\begin{aligned}
 V_{qq} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4 + \vec{p}_2) (\mathcal{F}^a)^{c_4 c_2} (\mathcal{F}^a)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \\
 &\times \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \left[ u_\alpha^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \left[ u_\gamma^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] \\
 &\times q_{s_4}^{\dagger c_4 f_4}(\vec{p}_4) q_{s_3}^{\dagger c_3 f_3}(\vec{p}_3) q_{s_1}^{c_1 f_1}(\vec{p}_1) q_{s_2}^{c_2 f_2}(\vec{p}_2) \quad (\text{C.19})
 \end{aligned}$$

Na aproximação de baixos momentos para a função massa constituinte dada pela Eq. (4.1)

$$M_f(p) = M_f - M_{1f} p - M_{2f} p^2 \quad (\text{C.20})$$

onde explicitamos o sabor  $f$ , obtemos que os  $u_f(\vec{p}, s)$  e  $v_f(\vec{p}, s)$  em  $\mathcal{O}(p^2)$  são dados por

$$u_f(\vec{p}, s) \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{p^2}{8M_f^2} \\ \frac{\sigma \cdot \vec{p}}{2M_f} \end{pmatrix} \chi_s \quad (\text{C.21})$$

e

$$v_f(\vec{p}, s) \approx \begin{pmatrix} -\frac{\sigma \cdot \vec{p}}{2M_f} \\ 1 - \frac{p^2}{8M_f^2} \end{pmatrix} \chi_s^c \quad (\text{C.22})$$



$$\begin{aligned}
V_{qq} &= V_{\Gamma}(\vec{q}) \left[ u_{\alpha}^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_{\beta}^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] \left[ u_{\gamma}^{f_2 \dagger}(\vec{p}_2 + \vec{q}, s_4) \Gamma_{\gamma\delta} u_{\delta}^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \\
&= V_C(\vec{q}) \left[ u_{\alpha}^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) u_{\alpha}^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] \left[ u_{\beta}^{f_2 \dagger}(\vec{p}_2 + \vec{q}, s_4) u_{\beta}^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \\
&+ V_T(\vec{q}) \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) \left[ u_{\alpha}^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) (\alpha^i)_{\alpha\beta} u_{\beta}^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] \\
&\times \left[ u_{\alpha}^{f_2 \dagger}(\vec{p}_2 + \vec{q}, s_4) (\alpha^j)_{\gamma\delta} u_{\delta}^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \\
&\equiv V_C^{qq} + V_T^{qq}
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Usando as expressões para os espinores  $u$  acima, podemos mostrar facilmente que

$$u_{\alpha}^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) u_{\alpha}^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) = \delta_{s_3 s_1} - \frac{q^2}{8M_f^2} \delta_{s_3 s_1} + \frac{i\sigma_{s_3 s_1} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_1)}{4M_f^2} \tag{C.24}$$

e

$$u_{\alpha}^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) (\vec{\alpha})_{\alpha\beta} u_{\beta}^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) = \frac{\vec{p}_1}{M_f} \delta_{s_3 s_1} + \frac{\vec{q}}{2M_f} \delta_{s_3 s_1} + \frac{i\sigma_{s_3 s_1} \times \vec{q}}{2M_f} \tag{C.25}$$

Com esses resultados, podemos mostrar que  $V_C^{qq}$  é dado por

$$\begin{aligned}
V_C^{qq} &= V_C(q) \left\{ \left[ 1 - q^2 \left( \frac{1}{8M_{f_1}^2} + \frac{1}{8M_{f_2}^2} \right) \right] \delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2} + \frac{i\sigma_{s_3 s_1} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_1)}{4M_{f_1}^2} \delta_{s_4 s_2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{i\sigma_{s_4 s_2} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_2)}{4M_{f_2}^2} \delta_{s_3 s_1} \right\}
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Escrevendo agora  $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ , temos finalmente

$$\begin{aligned}
V_C^{qq} &= V_C(q) \left\{ \left[ 1 - q^2 \left( \frac{1}{8M_{f_1}^2} + \frac{1}{8M_{f_2}^2} \right) \right] \delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2} + \frac{iS_{s_3 s_1} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_1)}{2M_{f_1}^2} \delta_{s_4 s_2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{iS_{s_4 s_2} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_2)}{2M_{f_2}^2} \delta_{s_3 s_1} \right\}
\end{aligned} \tag{C.27}$$

A obtenção de  $V_T^{qq}$  é um pouco mais elaborada:

$$\begin{aligned}
 V_T^{qq} &= V_T(q) \left[ \frac{p_1^i}{M_{f_1}} \delta_{s_3 s_1} + \frac{q^i}{2M_{f_1}} \delta_{s_3 s_1} + \frac{i(\sigma_{s_3 s_1} \times \vec{q})^i}{2M_{f_1}} \right] \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) \\
 &\times \left[ \frac{p_2^j}{M_{f_2}} \delta_{s_4 s_2} - \frac{q^j}{2M_{f_2}} \delta_{s_4 s_2} - \frac{i(\sigma_{s_4 s_2} \times \vec{q})^j}{2M_{f_2}} \right] \\
 &= V_T(q) \left\{ \frac{1}{M_{f_1} M_{f_2}} \left[ \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{q})(\vec{p}_2 \cdot \vec{q})}{q^2} \right] \delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2} \right. \\
 &+ \frac{i(\sigma_{s_3 s_1} \times \vec{q}) \cdot \vec{p}_2}{2M_{f_1} M_{f_2}} \delta_{s_4 s_2} - \frac{i(\sigma_{s_4 s_2} \times \vec{q}) \cdot \vec{p}_1}{2M_{f_1} M_{f_2}} \delta_{s_3 s_1} \\
 &\left. - \frac{q^2}{4M_{f_1} M_{f_2}} \left[ \frac{(\sigma_{s_3 s_1} \cdot \vec{q})(\sigma_{s_4 s_2} \cdot \vec{q})}{q^2} - \sigma_{s_3 s_1} \cdot \sigma_{s_4 s_2} \right] \right\} \\
 &= V_T(q) \left\{ \frac{1}{M_{f_1} M_{f_2}} \left[ \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{q})(\vec{p}_2 \cdot \vec{q})}{q^2} \right] \delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2} \right. \\
 &+ \frac{2}{3} \frac{q^2}{4M_{f_1} M_{f_2}} \sigma_{s_3 s_1} \cdot \sigma_{s_4 s_2} + \frac{i(\sigma_{s_3 s_1} \times \vec{q}) \cdot \vec{p}_2}{2M_{f_1} M_{f_2}} \delta_{s_4 s_2} - \frac{i(\sigma_{s_4 s_2} \times \vec{q}) \cdot \vec{p}_1}{2M_{f_1} M_{f_2}} \delta_{s_3 s_1} \\
 &\left. - \frac{q^2}{4M_{f_1} M_{f_2}} \left[ \frac{(\sigma_{s_3 s_1} \cdot \vec{q})(\sigma_{s_4 s_2} \cdot \vec{q})}{q^2} - \frac{1}{3} \sigma_{s_3 s_1} \cdot \sigma_{s_4 s_2} \right] \right\} \tag{C.28}
 \end{aligned}$$

Usando  $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ , o resultado final pode ser colocado na seguinte forma

$$\begin{aligned}
 V_T^{qq} &= V_T(q) \left\{ \frac{1}{M_{f_1} M_{f_2}} \left[ \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{q})(\vec{p}_2 \cdot \vec{q})}{q^2} \right] \delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2} + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M_{f_1} M_{f_2}} S_{s_3 s_1} \cdot S_{s_4 s_2} \right. \\
 &+ \frac{i(S_{s_3 s_1} \times \vec{q}) \cdot \vec{p}_2}{M_{f_1} M_{f_2}} \delta_{s_4 s_2} - \frac{i(S_{s_4 s_2} \times \vec{q}) \cdot \vec{p}_1}{M_{f_1} M_{f_2}} \delta_{s_3 s_1} \\
 &\left. - \frac{q^2}{M_{f_1} M_{f_2}} \left[ \frac{(S_{s_3 s_1} \cdot \vec{q})(S_{s_4 s_2} \cdot \vec{q})}{q^2} - \frac{1}{3} S_{s_3 s_1} \cdot S_{s_4 s_2} \right] \right\} \tag{C.29}
 \end{aligned}$$

Agora vamos obter  $V_{\bar{q}q}$ . Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned}
 V_{\bar{q}q}(\dots) &= V_{\Gamma}(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \left[ v_{\alpha}^{f_1\dagger}(-\vec{p}_1, s_1) \Gamma_{\alpha\beta} v_{\beta}^{f_1}(-\vec{p}_3, s_3) \right] \\
 &\times \left[ v_{\gamma}^{f_2\dagger}(-\vec{p}_2, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_{\delta}^{f_2}(-\vec{p}_4, s_4) \right] \\
 &= V_C(-\vec{q}) \left[ v_{\alpha}^{f_1\dagger}(-\vec{p}_1, s_1) v_{\alpha}^{f_1}(-(\vec{p}_1 + \vec{q}), s_3) \right] \\
 &\times \left[ v_{\beta}^{f_2\dagger}(-\vec{p}_2, s_2) v_{\beta}^{f_2}(-(\vec{p}_2 - \vec{q}), s_4) \right] \\
 &+ V_T(\vec{q}) \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) \left[ v_{\alpha}^{f_1\dagger}(-\vec{p}_1, s_1) (\alpha^i)_{\alpha\beta} v_{\beta}^{f_1}(-(\vec{p}_1 + \vec{q}), s_3) \right] \\
 &\times \left[ v_{\alpha}^{f_2\dagger}(-\vec{p}_2, s_2) (\alpha^j)_{\gamma\delta} v_{\delta}^{f_2}(-(\vec{p}_2 - \vec{q}), s_4) \right] \\
 &\equiv V_C^{\bar{q}q} + V_T^{\bar{q}q} \tag{C.30}
 \end{aligned}$$

As expressões para os espinores  $v$  leva a

$$v_{\alpha}^{f_1\dagger}(-\vec{p}_1, s_1) v_{\alpha}^f(-(\vec{p}_1 + \vec{q}), s_3) = \delta_{s_3 s_1} - \frac{q^2}{8M_f^2} \delta_{s_3 s_1} + \frac{i\sigma_{s_3 s_1} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_1)}{4M_f^2} \tag{C.31}$$

$$v_{\alpha}^{f_1\dagger}(-\vec{p}_1, s_1) (\vec{\alpha})_{\alpha\beta} v_{\beta}^f(-(\vec{p}_1 + \vec{q}), s_3) = \frac{\vec{p}_1}{M_f} \delta_{s_1 s_3} + \frac{\vec{q}}{2M_f} \delta_{s_1 s_3} + \frac{i\sigma_{s_3 s_1}^c \times \vec{q}}{2M_f} \tag{C.32}$$

Notamos que essas expressões são iguais às correspondentes do caso anterior e, portanto

$$V_C^{\bar{q}q} = V_C^{\bar{q}q} \quad V_T^{\bar{q}q} = V_T^{qq} \tag{C.33}$$

e, com isso,  $V_{\bar{q}q} = V_{qq}$ . O mesmo é verdade para  $V_{q\bar{q}}$ , e assim temos o resultado

$$V_{qq} = V_{\bar{q}q} = V_{q\bar{q}} \tag{C.34}$$

É importante notar que os fatores de cor  $\mathcal{F}^a \mathcal{F}^a$  são diferentes para os três casos em virtude da Eq. (4.6).

## Apêndice D

### Derivação das massas dos bárions e dos mésons

Neste apêndice vamos calcular variacionalmente as massas dos bárions e dos mésons, seguindo a Ref. [39]. Para tal, vamos empregar como ansatz as funções Gaussianas dadas no Capítulo 4. Necessitamos a energia de partícula única  $\varepsilon_f(k)$ , dada pelas Eqs. (2.82) e (2.83). Conforme mencionado anteriormente,  $\varepsilon_f(k)$  recebe uma contribuição de autoenergia dependente de  $V_C$  e  $V_T$ , dada pelos termos que dependem de  $f_2(k, q)$  e  $g_2(k, q)$  dadas na Eq. (2.83). Essa contribuição de autoenergia é divergente no infravermelho devido a  $V_C$ , que é uma interação confinante. Para estados singletos de cor, como o bárion e o méson que estamos considerando, essa divergência é crucial para o cancelamento da divergência infravermelha vinda do termo  $H_4$ , como será visto logo a seguir.

Por outro lado, como mencionado no Capítulo 4, a aproximação de baixos momentos introduz artificialmente uma divergência ultravioleta nesse termo de autoenergia. O problema está na integral sobre a variável  $q$ , a dependência na variável  $k$  não causa problema, porque, ultimamente, ela vai ser integrada com uma função de onda que se anula rapidamente com o aumento de  $k$ . A integral sobre a variável  $q$  não será atenuada por uma função de onda. No caso em que não se usa a aproximação de baixos momentos, a integral sobre  $q$  é finita. Para evitar esse problema, uma alternativa é ajustar a dependência em  $q$  das funções  $f_2$  e  $g_2$  com Gaussianas  $f_2^b(q^2)$  ( $f_2^m(q^2)$ ) e  $g_2^b(q^2)$  ( $g_2^m(q^2)$ ), onde os índices  $b$  e  $m$  significam bárion e méson. Isso é assim porque para o núcleon somente quarks leves contribuem, enquanto que para o méson  $D$  há também contribuição de quark pesado, e isso influi no processo de ajuste. Com isso, podemos escrever para  $\varepsilon_f(k)$  a seguinte expressão

$$\varepsilon_f(k) = m_f + \left(1 - \frac{m_f}{2M_f}\right) \frac{k^2}{M_f} + \frac{2}{3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [V_C(q)f_2^{b,m}(q^2) + 2V_T(q)g_2^{b,m}] \quad (\text{D.1})$$

As funções  $f_2^{b,m}(q^2)$  e  $g_2^{b,m}(q^2)$  satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$f_2^{b,m}(0) = g_2^{b,m}(0) = 1 \quad (\text{D.2})$$

$$f_2^{b,m}(\infty) = g_2^{b,m}(\infty) = 0 \quad (\text{D.3})$$

Por fim, é importante notar que, para a determinação variacional do tamanho dos hádrons, i.e. para determinar  $\alpha$  e  $\beta$ , as funções  $f_2^{b,m}$  e  $g_2^{b,m}$  são irrelevantes porque elas independem de  $\alpha$  e  $\beta$ . Elas são importantes somente para a determinação do valor absoluto das massas do bárion e do méson. No entanto, como já comentado anteriormente, a determinação absoluta dessas massas não é muito importante no contexto da presente tese, porque para a determinação das interações efetivas bárion-méson, somente a função de onda é relevante. Essas, por sua vez, somente dependem de  $\alpha$  e  $\beta$ , e não do valor das massas dos hadrons.

## D.1 A massa dos bárions

Definimos a massa de um bárion com spin-sabor  $\alpha$  – no caso de um núcleon  $\alpha = \{M_s, M_t\}$ , com  $M_s = 1/2$  para o spin e  $M_t = 1/2$  para isospin – como

$$M_b = M_{B_\alpha} \equiv E_{\alpha\beta}(\vec{0}, \vec{0}) \Big|_{\beta=\alpha} \quad (\text{D.4})$$

onde

$$E_{\alpha\beta}(\vec{P}, \vec{P}') \equiv \frac{\langle \alpha \vec{P} | H | \beta \vec{P}' \rangle}{\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle} \quad (\text{D.5})$$

com

$$|\alpha \vec{P}\rangle = B_\alpha^\dagger(\vec{P})|\Omega\rangle \quad (\text{D.6})$$

$B_\alpha^\dagger(\vec{P})$  é o operado de criação do bárion, e  $\vec{P}$  é o momento do CM do arion. Como sempre,  $|\Omega\rangle$  é o vácuo com a simetria quiral quebrada dinamicamente, definido pela Eq. (C.7). A representação explícita do operador de criação de um bárion, com todos os termos explicitados, é dado por

$$\begin{aligned} B_\alpha^\dagger(\vec{P}) &= \frac{1}{\sqrt{3!}} \frac{\epsilon^{c_1 c_2 c_3}}{\sqrt{3!}} \frac{T_\alpha^{f_1 s_1 f_2 s_2 f_3 s_3}}{\sqrt{18}} \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \\ &\times q_{s_1}^{\dagger c_1 f_1}(\vec{p}_1) q_{s_2}^{\dagger c_2 f_2}(\vec{p}_2) q_{s_3}^{\dagger c_3 f_3}(\vec{p}_3) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

onde  $\Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$  é a amplitude no espaço de Fock no espaço de momento. Note que em princípio,  $\Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$  também carrega um índice  $\alpha$  que, por simplicidad

non é escrito explicitamente. Para os estado fundamental do bárion,  $T_\alpha^{f_1 s_1 f_2 s_2 f_3 s_3}$  e  $\Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$  são completamente simétricos nos seus índices. A amplitude no espaço dos momentos pode ser escrita como

$$\Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \quad (\text{D.8})$$

Como no texto principal da Tese, para melhor manipular as expressões empregamos a notação abreviada, em que colocamos todos os índices dos quarks referentes a momento, cor, spin e sabor num único como

$$\mu \equiv \{\vec{p}, c, s, f\} \quad (\text{D.9})$$

e da mesma forma para os índices do bárion

$$\alpha \equiv \{\vec{P}, \alpha\} \quad (\text{D.10})$$

deve ficar claro no contexto que  $\alpha$  indica projeção de spin-flavor quando os índices forem feitos explícitos, e indica momento-spin-flavor na notação abreviada. Desta maneira,

$$B_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Psi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger \quad (\text{D.11})$$

É importante notar que  $\Psi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$  é completamente antisimétrica no índices  $\mu_1 \mu_2 \mu_3$  devido aos índices de cor. Deve estar claro também que usamos a convenção de que há uma soma ou integral sobre índices repetidos, a menos que seja dito o contrário.

Na notação abreviada, o Hamiltoniano de partícula única pode ser escrito como (somente a parte de quarks é relevante aqui)

$$H_K = \int d^3k \varepsilon_f(\vec{k}) q_s^{\dagger cf}(\vec{k}) q_s^{cf}(\vec{k}) \equiv \varepsilon(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu \quad (\text{D.12})$$

Da mesma maneira, a interação  $V_{qq}$  de  $H_4$  pode ser escrita

$$V_{qq} = \frac{1}{2} V(\mu\nu\sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \quad (\text{D.13})$$

Vamos iniciar calculando

$$E_{\alpha\beta}^K(\vec{P}, \vec{P}') \equiv \frac{\langle \alpha \vec{P} | H_K | \beta \vec{P}' \rangle}{\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle} \quad (\text{D.14})$$

O numerador é dado por

$$\langle \alpha | H_K | \beta \rangle = \frac{1}{3!} \Psi_\alpha^{* \mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_\beta^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \varepsilon(\mu) \langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_\mu^\dagger q_\mu q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger | 0 \rangle \quad (\text{D.15})$$

Após a contração dos operadores de criação e aniquilação, e usando o fato que as  $\Psi$ 's são completamente antisimétricas nos seus índices, temos que

$$\langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_{\mu}^{\dagger} q_{\nu_1}^{\dagger} q_{\nu_2}^{\dagger} q_{\nu_3}^{\dagger} | 0 \rangle \longrightarrow 18 \delta_{\mu\nu_1} \delta_{\mu_1\mu} \delta_{\mu_2\nu_2} \delta_{\mu_3\nu_3} \quad (\text{D.16})$$

A flecha indica que esta expressão é verdadeira somente sob soma com a multiplicação pelas  $\Psi$ 's. Desta maneira, temos que

$$\langle \alpha | H_K | \beta \rangle = 3 \Psi_{\alpha}^{* \mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_{\beta}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \varepsilon(\mu) \delta_{\mu\nu_1} \delta_{\mu_1\mu} \delta_{\mu_2\nu_2} \delta_{\mu_3\nu_3} \quad (\text{D.17})$$

Usando as funções delta,

$$\langle \alpha | H_K | \beta \rangle = 3 \Psi_{\alpha}^{* \mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_{\beta}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \varepsilon(\mu_1) \quad (\text{D.18})$$

Reinserindo os índices

$$\begin{aligned} \langle \alpha \vec{P} | H_K | \beta \vec{P}' \rangle &= 3 \frac{1}{3!} \varepsilon^{c_1 c_2 c_3} \varepsilon^{c_1 c_2 c_3} \frac{1}{18} T_{\alpha}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} T_{\beta}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \varepsilon(\vec{p}_1) \\ &\times \delta(\vec{P} - \vec{p}_3 - \vec{p}_2 - \vec{p}_1) \delta(\vec{P}' - \vec{p}_3 - \vec{p}_2 - \vec{p}_1) |\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)|^2 \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Note que no último passo supusemos que  $\varepsilon(\mu) = \varepsilon(\vec{k})$  é a mesma para todos os sabores – que é aproximadamente verdadeiro para o caso do núcleon. Da normalização, temos que

$$\frac{1}{18} T_{\alpha}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} T_{\beta}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{D.20})$$

e

$$\frac{1}{3!} \varepsilon^{c_1 c_2 c_3} \varepsilon^{c_1 c_2 c_3} = 1 \quad (\text{D.21})$$

Com isso, podemos escrever

$$\langle \alpha \vec{P} | H_K | \beta \vec{P}' \rangle = \delta(\vec{P} - \vec{P}') \delta_{\alpha\beta} K_{\alpha}(\vec{P}) \quad (\text{D.22})$$

onde

$$K_{\alpha}(\vec{P}) = 3 \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \varepsilon(\vec{p}_1) \delta(\vec{P} - \vec{p}_3 - \vec{p}_2 - \vec{p}_1) |\Phi_{\alpha}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)|^2 \quad (\text{D.23})$$

Aqui introduzimos um índice  $\alpha$  no  $K$  devido ao fato que  $\Phi$  em princípio depende desse índice, como indicado.

Agora, para  $\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle$  obtemos facilmente

$$\begin{aligned} \langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle &= \frac{1}{3!} \varepsilon^{c_1 c_2 c_3} \varepsilon^{c_1 c_2 c_3} \frac{1}{18} T_{\alpha}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} T_{\beta}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \delta(\vec{P} - \vec{P}') \\ &\times \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) |\Phi_{\alpha}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)|^2 \\ &= \delta(\vec{P} - \vec{P}') \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

O resultado final para a Eq. (D.14) é então

$$E_{\alpha\beta}^K(\vec{P}, \vec{P}') = \delta_{\alpha\beta} K_\alpha(\vec{P}) \quad (\text{D.25})$$

Da Eq. (D.4), temos que a contribuição do Hamiltoniano de partícula única para a massa do bárion no estado de spin-sabor  $\alpha$ , que denotamos por  $M_\alpha^K$ , é dado por

$$\begin{aligned} M_B^K &= K_\alpha(\vec{0}) \\ &= 3 \int d^3p_1 d^3p_2 \varepsilon(\vec{p}_1) |\Phi_\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2 \\ &= 3 \int d^3p_1 \varepsilon(\vec{p}_1) \int d^3p_2 |\Phi_\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2 \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

A seguir consideramos a contribuição da parte de interação do Hamiltoniano

$$E_{\alpha\beta}^I(\vec{P}, \vec{P}') \equiv \frac{\langle \alpha \vec{P} | H_I | \beta \vec{P}' \rangle}{\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle} \quad (\text{D.27})$$

Temos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H_I | \beta \rangle &= \frac{1}{2} V(\mu\nu\sigma\rho) \frac{1}{3!} \Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu_1\nu_2\nu_3} \\ &\times \langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

onde

$$\begin{aligned} V(\mu\nu\sigma\rho) &= \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_3 c_1} \frac{1}{(2\pi)^3} \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\ &\times \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \left[ u_\alpha^{\dagger\mu}(\vec{p}_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^\sigma(\vec{p}_2) \right] \left[ u_\gamma^{\dagger\nu}(\vec{p}_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^\rho(\vec{p}_1) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

Para o cálculo do termo  $\langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger | 0 \rangle$  precisamos efetuar a contração dos operadores de criação e aniquilação, cujo resultado é

$$\langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger | 0 \rangle \rightarrow 36 \delta_{\sigma\nu_1} \delta_{\rho\nu_2} \delta_{\mu_1\mu} \delta_{\mu_2\nu} \delta_{\mu_3\nu_3} \quad (\text{D.30})$$

Com isso, temos então

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H_I | \beta \rangle &= \frac{6}{2} V(\mu\nu\sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu_1\nu_2\nu_3} \delta_{\sigma\nu_1} \delta_{\rho\nu_2} \delta_{\mu_1\mu} \delta_{\mu_2\nu} \delta_{\mu_3\nu_3} \\ &= \frac{6}{2} V(\mu\nu\sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_\beta^{\sigma\rho\mu_3} \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$



Agora, usando as funções delta e expliciando  $V(\mu\nu\sigma\rho)$ ,  $\Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}$  e  $\Psi_\beta^{\nu_1\nu_2\nu_3}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha | H_I | \beta \rangle &= \frac{6}{3!} \frac{1}{2} \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_4 c_2} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \\
 &\times \int \frac{d^3 k d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_4 - \vec{p}_3 - \vec{k}) \\
 &\times \delta(\vec{p}_\beta - \vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{k}) \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha'} \left[ u_\alpha^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \\
 &\times \left[ u_\gamma^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\gamma^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha'} \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \\
 &\times \Phi^*(\vec{p}_4, \vec{p}_3, \vec{k}) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, \vec{k}) \\
 &= \frac{6}{3!} \frac{1}{2} \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_4 c_2} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta) \\
 &\times \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha'} \\
 &\times \left[ u_\alpha^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \left[ u_\gamma^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] \\
 &\times T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha'} \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \Phi^*(\vec{p}_4, \vec{p}_3, \vec{p}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
 &\times \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \tag{D.32}
 \end{aligned}$$

Notamos que não deve haver confusão pelo fato de estarmos usando os mesmos símbolos  $\alpha$  e  $\beta$  para os índices de bárion e índices de espinoriais de Dirac, o significado de cada deve ser claro pelo contexto em que aparecem. Com isso, obtemos para  $M_\alpha^I \equiv E_{\alpha\alpha}^I(\vec{0}, \vec{0})$  o seguinte

$$\begin{aligned}
 M_b^I &= \frac{6}{3!} \frac{1}{2} \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_4 c_2} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \\
 &\times \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha} \\
 &\times \left[ u_\alpha^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \left[ u_\gamma^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha} \\
 &\times \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \Phi^*(\vec{p}_4, \vec{p}_3, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \tag{D.33}
 \end{aligned}$$

Da função delta  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \longrightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}_3 = \vec{p}_4 - \vec{p}_2$ . Fazendo a troca de variáveis  $\vec{q} = \vec{p}_3 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_4$ , podemos escrever  $\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{q}$  and  $\vec{p}_4 = \vec{p}_2 - \vec{q}$ , e usando as

deltas de sabor, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 M_b^I &= \frac{6}{3!} \frac{1}{2} \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_3 c_1} \int \frac{d^3 q d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha} \\
 &\times \left[ u_\alpha^{\dagger f_2}(\vec{p}_2 - \vec{q}, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \left[ u_\gamma^{\dagger f_1}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha} \\
 &\times \tilde{V}_\Gamma(\vec{q}) \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
 &= \frac{6}{3!} \frac{1}{2} \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_3 c_1} \int \frac{d^3 q d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha} \\
 &\times \left[ u_\alpha^{\dagger f_2}(\vec{p}_2 - \vec{q}, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \left[ u_\gamma^{\dagger f_1}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha} \\
 &\times \tilde{V}_\Gamma(\vec{q}) \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \tag{D.34}
 \end{aligned}$$

Podemos ir um passo a mais e calcular o fator de cor. Como

$$\epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} = \delta_{c_4 c_2} \delta_{c_3 c_1} - \delta_{c_4 c_1} \delta_{c_3 c_2} \tag{D.35}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_3 c_1} &= \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_2 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_1 c_1} - \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_1 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_2 c_1} \\
 &= \left[ \text{Tr} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right) \right] \left[ \text{Tr} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right) \right] - \left[ \text{Tr} \left( \frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2} \right) \right] \\
 &= -4 \quad . \tag{D.36}
 \end{aligned}$$

Com isso, temos que a contribuição do termo de interação para a massa é dada por

$$\begin{aligned}
 M_b^I &= -2 \int \frac{d^3 q d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha} \left[ u_\alpha^{\dagger f_2}(\vec{p}_2 - \vec{q}, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2) \right] \\
 &\times \left[ u_\gamma^{\dagger f_1}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1) \right] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha} \tilde{V}_\Gamma(\vec{q}) \\
 &\times \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \tag{D.37}
 \end{aligned}$$

Até aqui, as expressões para  $M_b^K$  e  $M_b^I$  são exatas, i.e. elas não envolvem as aproximações de baixos momentos para os espinores.

Agora, usando a expressão da Eq. (D.1) para a energia de um quark, podemos

escrever para  $M_b^K$  o seguinte

$$\begin{aligned}
 M_b^K &= 3 \int d^3 p_1 \varepsilon(\vec{p}_1) \int d^3 p_2 |\Phi_\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2 \\
 &= 3m_f + 3 \left(1 - \frac{m_f}{2M_f}\right) \int d^3 p_1 d^3 p_2 \frac{p_1^2}{M_f} |\Phi_\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2 \\
 &+ 2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} [V_C(q) f_2^b(q^2) + 2V_T(k) g_2^b(q^2)] \tag{D.38}
 \end{aligned}$$

Para o termo  $M_b^I$ , empregando a aproximação de baixos momentos, obtemos a expressão

$$\begin{aligned}
 M_b^I &= -2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha} \left[ \delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2} V_C(q) \right. \\
 &+ \left. \frac{2}{3} \frac{q^2}{M_{\alpha_1} M_{\alpha_2}} \vec{S}_{s_3 s_1} \cdot \vec{S}_{s_4 s_2} V_T(q) \right] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha} \\
 &\times \int d^3 p_1 d^3 p_2 \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
 &= -2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[ V_C(q) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M^2} \left(-\frac{1}{4}\right) V_T(q) \right] \\
 &\times \int d^3 p_1 d^3 p_2 \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \tag{D.39}
 \end{aligned}$$

Para calcular as integrais, vamos usar o ansatz Gaussiano discutido no texto, em  $\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$  é dada por

$$\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \left(\frac{3}{\pi^2 \alpha^4}\right)^{3/4} e^{-[(\vec{p}_1)^2 + (\vec{p}_2)^2 + (\vec{p}_3)^2]/2\alpha^2} \tag{D.40}$$

para a qual temos que

$$\int d^3 p_2 |\Phi_\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2 = \left(\frac{3}{2\pi\alpha^2}\right)^{3/2} e^{-3p_1^2/2\alpha^2} \tag{D.41}$$

$$\int d^3 p_1 d^3 p_2 \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = e^{-q^2/2\alpha^2} \tag{D.42}$$

Colocando agora tudo junto, obtemos para a massa do bárion

$$\begin{aligned}
 M_b &= M_\alpha^K + M_\alpha^I \\
 &= 3m_f + 3 \left(1 - \frac{m_f}{2M_f}\right) \left(\frac{3}{2\pi\alpha^2}\right)^{3/2} \int d^3p \frac{p^2}{M_f} e^{-3p^2/2\alpha^2} \\
 &\quad - 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ V_C(q) \left[ e^{-q^2/2\alpha^2} - f_2^b(q^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M^2} \left(-\frac{1}{4}\right) V_T(q) \left[ e^{-q^2/2\alpha^2} - 2g_2^b(q^2) \right] \right\} e^{-q^2/2\alpha^2} \\
 &\simeq 3m_f + \frac{3\alpha^2}{M_f} - 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ V_C(q) \left[ e^{-q^2/2\alpha^2} - f_2^b(q^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M^2} \left(-\frac{1}{4}\right) V_T(q) \left[ e^{-q^2/2\alpha^2} - 2g_2^b(q^2) \right] \right\} \tag{D.43}
 \end{aligned}$$

onde desprezamos o termo  $m_f/2M_f \simeq 0.01$ .

Aqui fica claro que a divergência infravermelha devida ao confinamento, presente tanto na energia de um quark  $\varepsilon(q)$  e como na interação quark-quark, cancela exatamente. Isso pode ser visto considerando o integrando da integral acima para  $q \rightarrow 0$ , i.e. a integral

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(q) \left[ e^{-q^2/2\alpha^2} - f_2^b(q^2) \right] = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq q^2 V_C(q) \left[ e^{-q^2/2\alpha^2} - f_2^q(q^2) \right] \tag{D.44}$$

é finita para um potencial confinante  $V_C(q)$  tal que para  $q \rightarrow 0$

$$V_C(q) \rightarrow \frac{1}{q^\kappa}, \quad \kappa \leq 4 \tag{D.45}$$

já que  $f_2^b(q^2) \rightarrow 1$  para  $q \rightarrow 0$ . Não fosse pelo fator  $f_2^b(q^2)$ , que vem do termo  $\varepsilon(q)$ , a integral seria divergente no limite inferior  $q \rightarrow 0$ .

## D.2 A massa dos mésons

De maneira análoga ao caso da massa de um bárion, definimos a massa de um méson com projeção de pin-sabor  $\alpha$  como

$$M_m \equiv E_{\alpha\beta}(\vec{0}, \vec{0}) \Big|_{\beta=\alpha} \tag{D.46}$$

onde

$$E_{\alpha\beta}(\vec{P}, \vec{P}') \equiv \frac{\langle \alpha \vec{P} | H | \beta \vec{P}' \rangle}{\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle} \tag{D.47}$$

com

$$|\alpha \vec{P}\rangle = M_\alpha^\dagger(\vec{P})|\Omega\rangle \quad (\text{D.48})$$

onde  $M_\alpha^\dagger(\vec{P})$  é o operador de criação do estado de um méson, e  $\vec{P}$  é o momento do CM do méson. Como acima,  $|\Omega\rangle$  é o vácuo com simetria quiral quebrada dinamicamente, definido pela Eq. (C.7). A representação explícita do operador de criação em termos dos operadores de criação de quark e antiquark é dada por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger|\Omega\rangle = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger|\Omega\rangle \quad (\text{D.49})$$

com  $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$  normalizada como

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{D.50})$$

O valor esperado do Hamiltoniano no estado de um méson é dado por

$$\langle\alpha|H|\beta\rangle = \langle\alpha|H_K|\beta\rangle + \langle\alpha|H_I|\beta\rangle \quad (\text{D.51})$$

com

$$\langle\alpha|H_K|\beta\rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} T(\mu) \Phi_\beta^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} T(\nu) \Phi_\beta^{\mu\nu} \quad (\text{D.52})$$

e

$$\langle\alpha|H_I|\beta\rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\beta^{\sigma\rho} \quad (\text{D.53})$$

Para  $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$  escrevemos

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \frac{\delta^{c_\mu c_\nu}}{\sqrt{3}} \chi_\alpha^{\mu\nu} \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) \phi_\alpha(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \quad (\text{D.54})$$

Usando essa forma na Eq. (D.52), obtemos para as contribuições dos termos de um quark e um antiquark do Hamiltoniano para a massa do méson o seguinte

$$\begin{aligned} \langle\alpha|H_K|\beta\rangle &= \frac{1}{3} \delta^{c_1 c_2} \delta^{c_1 c_2} \chi_\alpha^{\mu_1 \nu} \chi_\beta^{\mu_1 \nu} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta(\vec{P}_\beta - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ &\times \varepsilon_{f_1}(\vec{p}_1) \phi_\alpha^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \phi_\beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ &+ \frac{1}{3} \delta^{c_1 c_2} \delta^{c_1 c_2} \chi_\alpha^{\mu \nu_2} \chi_\beta^{\mu \nu_2} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta(\vec{P}_\beta - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ &\times \varepsilon_{f_2}(\vec{p}_2) \phi_\alpha^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \phi_\beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{P}_\beta) M_m^K \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

em que, para  $\vec{P}_\alpha = 0$ ,  $M_m^K$  é dado por

$$M_m^K = \int d^3 p_1 \varepsilon_{f_1}(\vec{p}_1) |\phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1)|^2 + \int d^3 p_2 \varepsilon_{f_2}(\vec{p}_2) |\phi(-\vec{p}_2, \vec{p}_2)|^2 \quad (\text{D.56})$$

Consideremos agora o termo  $\langle \alpha | H_I | \beta \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H_I | \beta \rangle &= \frac{1}{3} \delta^{c_3 c_4} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \left( -\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_4 c_2} \delta^{c_1 c_2} \chi_\alpha^{\alpha_1 \alpha_2} \chi_\beta^{\alpha_1 \alpha_2} \\ &\times \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3} V_\Gamma(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\ &\times \left[ u_\alpha^{f_1 \dagger}(p_3, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1, s_1) \right] \left[ v_\gamma^{f_2 \dagger}(-p_2, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_\delta^{f_2}(-p_4, s_4) \right] \\ &\times \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\vec{P}_\beta - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \phi^*(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{P}_\alpha - P_\beta) M_m^I \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

onde, para  $\vec{P}_\alpha = 0$ ,  $M_m^I$  é dado por

$$\begin{aligned} M_m^I &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3} V_\Gamma(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \left[ u_\alpha^{f_1 \dagger}(p_3, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1, s_1) \right] \\ &\times \left[ v_\gamma^{f_2 \dagger}(-p_2, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_\delta^{f_2}(-p_4, s_4) \right] \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) \phi^*(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_3}{(2\pi)^3} V_\Gamma(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \left[ u_\alpha^{f_1 \dagger}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1, s_1) \right] \\ &\times \left[ v_\gamma^{f_2 \dagger}(\vec{p}_1, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_\delta^{f_2}(\vec{p}_3, s_4) \right] \phi^*(\vec{p}_3, -\vec{p}_3) \phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1) \\ &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^3 p_1 d^3 q}{(2\pi)^3} V_\Gamma(\vec{q}) \left[ u_\alpha^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_1 \dagger}(\vec{p}_1, s_1) \right] \\ &\times \left[ v_\gamma^{f_2 \dagger}(\vec{p}_1, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_\delta^{f_2}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_4) \right] \phi^*(\vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{q}) \phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1) \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

onde o fator  $-4/3$  vem do cálculo do fator de cor, calculado da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \delta^{c_3 c_4} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \left( -\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_4 c_2} \delta^{c_1 c_2} &= \frac{1}{3} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \left( -\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_3 c_1} \\
 &= -\frac{1}{3} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1 c_3} \\
 &= -\frac{1}{3} \text{Tr} \left( \frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2} \right) \\
 &= -\frac{4}{3}
 \end{aligned} \tag{D.59}$$

Até aqui, não há aproximação para baixos momentos dos espinores  $u$  e  $v$ .

Para as contribuições vindas de  $\varepsilon(k)$  de um quark e um antiquark para a massa do méson obtemos

$$\begin{aligned}
 M_m^K &= m_{f_1} + m_{f_2} + \frac{4}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} [V_C(q) f_2^m(q^2) + 2V_T(q) g_2^m(q^2)] \\
 &+ \left( \frac{1}{M_{f_1}} + \frac{1}{M_{f_2}} \right) \int d^3 p p^2 |\phi(p, -p)|^2
 \end{aligned} \tag{D.60}$$

e para a contribuição da interação quark-antiquark

$$\begin{aligned}
 M_m^I &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[ V_C(q) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M_{f_1} M_{f_2}} \left( -\frac{3}{4} \right) V_T(q) \right] \\
 &\times \int d^3 p_1 \phi^*(\vec{q} + \vec{p}_1, -\vec{q} - \vec{p}_1) \phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1)
 \end{aligned} \tag{D.61}$$

O ansatz Gaussiano para as amplitudes  $\phi$  é dado por

$$\phi(p_1, p_2) = \left( \frac{1}{\pi \beta^2} \right)^{3/4} e^{-(m_1 \vec{p}_1 - m_2 \vec{p}_2)^2 / 8\beta^2} \tag{D.62}$$

onde

$$m_1 = \frac{2m_{\bar{q}}}{m_q + m_{\bar{q}}} \quad m_2 = \frac{2m_q}{m_q + m_{\bar{q}}} \tag{D.63}$$

Com isso, temos

$$\int d^3 p p^2 |\phi(p, -p)|^2 = \frac{3}{2} \beta^2 \tag{D.64}$$

$$\int d^3 p_1 \phi^*(\vec{q} + \vec{p}_1, -\vec{q} - \vec{p}_1) \phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1) = e^{-q^2/4\beta^2} \tag{D.65}$$

Somando agora  $M_m^K$  e  $M_m^I$ , obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
 M_m = & m_{f_1} + m_{f_2} + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{M_{f_1}} + \frac{1}{M_{f_2}} \right) \beta^2 - \frac{4}{3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ V_C(q) \left[ e^{-q^2/4\beta^2} - f_2^m(q^2) \right] \right. \\
 & \left. + V_T(q) \left[ \frac{2}{3} \frac{q^2}{M_{f_1} M_{f_2}} \left( -\frac{3}{4} \right) e^{-q^2/4\beta^2} - 2g_2^m(q^2) \right] \right\} \quad (\text{D.66})
 \end{aligned}$$

Novamente notamos o cancelamento da divergência infravermelha devida ao potencial de confinamento. O mecanismo é o mesmo que no caso do bárion.



## Referências

- [1] T. Muta, *Foundations of quantum chromodynamics* (World Scientific, Cingapura, 1987).
- [2] N.Isgur, *Why  $N^*$ 's are important*, nucl-th/0007008.
- [3] I. Montvay e G. Muenster, *Quantum fields on a lattice* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [4] Uma ótima fonte de referências é a série de Proceedings das conferências internacionais “Lattice QCD”, publicadas regularmente por Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) e, mais recentemente, pela publicação eletrônica PoS: <http://pos.sissa.it>
- [5] P.F. Bedaque, J. Phys. Conf. Ser. **69**, 012028 (2007); S.R. Beane, P.F. Bedaque, K. Orginos e M.J. Savage, Phys. Rev. Lett. **97**, 012001 (2006).
- [6] Informações sobre o projeto FAIR e dos vários experimentos planejados podem ser obtidas no site: <http://www.gsi.de/fair/> .
- [7] F.E. Close, *An Introduction to Quarks and Partons* (Academic Press, Londres, 1980).
- [8] A.P. Szczepaniak and E.S. Swanson, Phys. Rev. D **65**, 025012 (2002).
- [9] D. Epple, H. Reinhardt, W. Schleifenbaum, e A.P. Szczepaniak, arXiv:0712.3694 .
- [10] A. Cucchieri and D. Zwanziger, Phys. Rev. D **65**, 014001 (2001).
- [11] Y. Nakagawa, H. Toki, A. Nakamura e T. Saito PoS LAT2007:319,2007
- [12] A. Voigt, E.-M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker e A. Sterbeck, arXiv:0803.2307 [hep-lat].

- [13] A. Voigt, E.-M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker e A. Sterbeck, PoS LAT2007:338,2007.
- [14] F.J. Llanes-Estrada, S.R. Cotanch, A.P. Szczepaniak and E.S. Swanson, Phys. Rev. C **70**, 035202 (2004).
- [15] J. A. Wheeler, Phys. Rev. **52**, (1937), 1083.
- [16] J. E. T. Ribeiro, Z. Phys. C **5**, 27 (1980).
- [17] M. Oka e K. Yazaki, Phys. Lett. B **90** (1980) 41; Prog. Theor. Phys. **66**, 551 (1981); Prog. Theor. Phys. **66**, 5572 (1981).
- [18] A. Faessler, F. Fernandez, G. Lubeck e K. Shimizu, Phys. Lett. B **112**, 201 (1982); Nucl. Phys. A **402**, 555 (1983).
- [19] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel e J.S. da Veiga, Ann. Phys. **268**, 105 (1998).
- [20] T. Barnes and E.S. Swanson, Phys. Rev. D **46**, 131 (1992); Phys. Rev. D **49**, 1166 (1994).
- [21] G. Krein e V.E. Vizcarra, artigo em preparação.
- [22] G. Krein e V.E. Vizcarra, a ser publicado nos proceedings da Conferência *Quark Confinement and the Hadron Spectrum VIII*, Mainz, 2008.
- [23] J. Haidenbauer, G. Krein, U.-G. Meissner e A. Sibirtsev, Eur. Phys. J. A **33**, 107 (2007).
- [24] F.S. Navarra, M. Nielsen, M.E. Bracco, M. Chiapparini e C.L. Schat, Phys. Lett. B **489**, 319 (2000); M.E. Bracco, M. Chiapparini, A. Lozea, F.S. Navarra e Marina Nielsen, Phys. Lett. B **521**, 1 (2001); F.S. Navarra, M. Nielsen e M.E. Bracco, Phys. Rev. D **65**, 037502 (2002); M.E. Bracco, M. Chiapparini, F.S. Navarra e M. Nielsen, Phys. Lett. B **659**, 559 (2008).
- [25] L.B. Holanda, R.S. Marques de Carvalho e A. Mihara, Phys. Lett. B **644**, 232 (2007).
- [26] S.M. Antunes, G. Krein e V.E. Vizcarra, Braz. J. Phys. **37**, 265 (2007).
- [27] T. Matsui e H. Satz, Phys. Lett. **B178**, 416 (1986).

- [28] T. Barnes, *Charmonium cross sections and the QGP*, nucl-th/0306031.
- [29] S.M. Antunes, *Estudo de Sistemas Hadrônicos no Limite de Acoplamento Forte da QCD a Densidades e Temperaturas Finitas*, Tese de Doutorado, IFT, 2008.
- [30] S.M. Antunes, G. Krein, V.E. Vizcarra e P.K. Panda, *Braz. J. Phys.* **35**, 877 (2005).
- [31] S.M. Antunes, G. Krein e V.E. Vizcarra, a ser publicado nos proceedings da Conferência *Quark Confinement and the Hadron Spectrum VIII*, Mainz, 2008.
- [32] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).
- [33] J. Polchinski, arXiv:hep-th/9210046.
- [34] D. B. Kaplan, arXiv:nucl-th/9506035.
- [35] T.D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, (Harwood Academic Publishers, Nova Iorque, 1981).
- [36] V.N. Gribov, *Nucl. Phys. B* **139**, 1 (1978).
- [37] A. Cucchieri and D. Zwanziger, *Phys. Rev. D* **65**, 014002 (2001).
- [38] S. Necco e R. Sommer, *Nucl. Phys. B* **622**, 328 (2002).
- [39] P.J.A. Bicudo, G. Krein, J.E.F.T. Ribeiro e J.E. Villate, *Phys. Rev. D* **45**, 1673 (1992); P.J.A. Bicudo, G. Krein, and J.E.F.T. Ribeiro, *Phys. Rev. C* **64**, 25202 (2001).
- [40] D. Hadjimichef, J. Haidenbauer e G. Krein, *Phys. Rev. C* **63**, 035204 (2001).
- [41] D. Hadjimichef, J. Haidenbauer e G. Krein, *Phys. Rev. C* **66**, 055214 (2002).
- [42] R. Alkofer e P.A. Amundsen, *Nucl. Phys. B* **306**, 305 (1988).
- [43] R. Alkofer, M. Kloker, A. Krassnigg, and R.F. Wagenbrunn, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 022001 (2006).
- [44] A.G. Williams, G. Krein e C.D. Roberts, *Ann. Phys. (NY)* **210**, 464 (1991).
- [45] S.K. Adhikari, *Variational Principles and the Numerical Solution of Scattering Problems* (Wiley, Nova Iorque, 1998).
- [46] L. Tomio e S.K. Adhikari, *Phys. Rev. C* **22**, 28 (1980).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)