IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–T.004/06

GRAVITAÇÃO TELEPARALELA: ALGUMAS PROPRIEDADES E IMPLICAÇÕES

Kuai Hong Vu

Orientador

José Geraldo Pereira

Outubro/2006

Agradecimentos

Gostaria de agradecer sinceramente o meu orientador, Prof. José Geraldo Pereira, pela sua orientação durante meu doutorado no IFT.

Agradeço o Prof. Ruben Aldrovandi pelas discussões.

Agradeço o Prof. James M. Nester pelo seu encorajamento.

Agradeço a Prof. Maria C. Tijero e os meus colegas do IFT, Victo, Otávio, Teófilo, Luis, Casana e Ricardo Luciano, por suas bondades e seus auxílios.

Agradeço os colegas Luis Carlos, Otávio, André Ricardo, Teófilo, Juan Pablo e Ricardo Luciano pela correção do português da minha tese.

Agradeço os demais colegas e funcionários do IFT.

Agradeço a minha família pela apoio.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O equivalente teleparalelo da relatividade geral, ou simplesmente teleparalelismo, pode ser interpretado como uma teoria de gauge para o grupo das translações. Devido à sua estrutura de gauge, esta teoria não necessita do princípio da equivalência para descrever a interação gravitacional. Por isso, ela resulta ser uma teoria mais apropriada do que a relatividade geral para estudar alguns problema específicos da gravitação. Por exemplo, ela fornece uma formulação mais conveniente para tratar o problema da energia do campo gravitacional. Além disso, ela pode também se mostrar mais conveniente para tratar efeitos quânticos em gravitação. Com essa idéia em mente, e explorando a analogia com a teoria de Maxwell, constrói-se um formalismo global para a gravitação, o qual é baseado num fator de fase não integrável. Essa formulação é então aplicada ao estudo do movimento de uma partícula sem spin, bem como aos efeitos Colella-Overhauser-Werner e Aharonov-Bohm gravitacioanal. Finalmente, como uma aplicação adicional, procedemos a uma re-análise da teoria das ondas gravitacionais desde o ponto de vista do teleparalelismo.

Palavras Chaves: Gravitação, Teleparalelismo, Torção

Áreas do conhecimento: Gravitação e Cosmologia

Abstract

The teleparallel equivalente of general relativity, or teleparallel gravity for short, can be viewed as a gauge theory for the translation group. Due to its gauge structure, this theory is found not to require the equivalence principle to describe the gravitational interaction. For this reason, it turns out to be more appropriate than general relativity to study some specific problems of gravitation. For example, it provides a more convenient formulation to deal with the energy localization problem of gravitation. Furthermore, it may also provide a much more convenient approach to study quantum effects in gravitation. Exploring then the analogy with Maxwell's theory, a non-integrable phase factor approach for gravitation is constructed. This approach is applied to the motion of spinless particles, as well as to the Colella-Overhauser-Werner and the gravitational Aharonov-Bohm effects, which are quantum effects produced by gravitation. Finally, as a further application, a reanalysis of the theory of the gravitational waves from the teleparallel point of view is presented.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Preliminares

1.1.1 Um Pouco de História

A primeira tentativa para unificar a gravitação com o eletromagnétismo foi feita por H. Weyl em 1918.[1] Embora não tenha tido sucesso, esta proposta introduziu pela primeira vez as noções de *transformação de gauge* e *invariância de gauge*, e pode ser considerada como a semente do que conhecemos hoje como teorias de gauge. Uma segunda tentativa nesta mesma direção foi feita por A. Einstein dez anos depois. Ele se baseou na estrutura matemática do teleparalelismo, também conhecida como paralelismo absoluto ou distante. A idéia crucial foi a introdução de um campo de tetradas, isto é, um campo de bases ortonormais do espaço tangente a cada ponto do espaço-tempo quadridimensional. No entanto, a determinação da tetrada envolve a especificação de dezesseis componentes, enquanto que o campo gravitacional, representado pela métrica do espaço-tempo, requer apenas dez componentes. Einstein, então, supos que os seis graus de liberdade adicionais da tetrada representariam o campo eletromagnético.[2] Esta tentativa de unificação também não teve sucesso, mas da mesma forma como o trabalho de Weyl, ele introduziu conceitos que continuam importantes até os dias de hoje.

É interessante notar que Einstein não concordou com a teoria de unificação de Weyl [3]: *Although your idea is so beautiful, I have to declare frankly that, in my opinion, it is impossible that the theory corresponds to nature.* Weyl também não concordou com a teoria de Einstein [3]: *I prefer not to believe in distant parallelism for a number of reasons. First, my mathematical intuition objects to accepting such an artificial geometry; I find it difficult to understand the force that would keep the*

[1] Um relato interessante sobre a história do nascimento e da evolução das teorias de gauge pode ser encontado na Ref. [1]

[2] Um relato histórico sobre a teoria de unificação de Einstein baseado no teleparalelismo pode ser encontado na Ref. [2].

local tetrads at different points and in rotated positions in a rigid relationship. Esta diferença de opiniões levou a uma intensa troca de correspondências entre Einstein e Weyl, o que também envolveu outros físicos, como W. Pauli, que escreveu para Weyl *... let me emphasize that side of matter concerning which I am in full agreement with you: your incorporation of spinor theory into gravitational theory. I am as dissatisfied as you are with distant parallelism and your proposal to let the tetrads rotate independently at different space-points is a true solution.*

Após este período inicial de intensas atividades, que também incluiu contribuições de E. Cartan e R. Weitzenböck, devido basicamente ao fracasso da tentativa de unificar a gravitação com o eletromanétismo, a noção de teleparalelismo não teve maiores avanços nas três décadas seguintes. Na década de 1960, Møller [4] ressuscitou a idéia inicial de Einstein, mas no contexto de teorias de gauge para a gravitação. Baseados neste trabalho, Pellegrini & Plebanski [5] encontraram uma formulação Lagrangiana para a gravitação teleparalela, um problema que foi depois reconsiderado por Møller [6]. Em 1967, Hayashi & Nakano [7] formularam uma teoria de gauge para o grupo das translações, que foi posteriormente desenvolvido por Hayashi [8]. Alguns anos depois, Hayashi [9] notou a relação entre esta teoria e o teleparalelismo, e uma tentativa para juntar estes dois desenvolvimentos foi feito por Hayashi & Shirafuji [10] em 1979. De acordo com esta formulação, a relatividade geral — que é uma teoria que apresenta apenas curvatura — foi complementada com a gravitação teleparalela – que é uma teoria que apresenta apenas toreção, e possui três parâmetros livres que devem ser determinados experimentalmente. Esta teoria, chamada de "nova relatividade geral", apresentou uma nova forma de se incluir a torção na relatividade geral, uma alternativa a formulação usual de Einstein–Cartan–Sciama–Kibble [11]. A diferença fundamental entre estas duas teorias é que, enquanto na primeira a torcão é um campo que se propaga, na segunda ele não se propaga, um ponto que ás vezes é considerado como uma desvantagem desta teoria.

Agora vem um importante ponto. A gravitação teleparalela, entendida como uma teoria a três parâmetros, é geralmente considerada como um caso particular de teorias de gravitaçâo mais gerais [12], como por exemplo da teoria de gauge para o grupo afim [13]. De acordo com este ponto de vista, a gravitação teleparalela representaria apenas a contribuição da torção à interação gravitacional, que no caso geral incluiria também contribuições de outros objetos geométricos, como por exemplo a curvatura e a não-metricidade. No entanto, como é bem conhecido, para uma escolha específica dos parâmetros livres, a gravitação teleparalela se mostra completamente equivalente à relatividade geral de Einstein, caso em que ela é chamada de o *equivalente teleparalelo da relatividade geral.*[3] Este resultado sugere fortemente

[3]Embora seja geralmente reservado para a teoria de três parâmetros, aqui usaremos o nome de gravitação teleparalela como um sinônimo do equivalente teleparalelo da relatividade geral.

que a gravitação teleparalela não deve ser considerado como um caso particular de teorias mais gerais, mas como uma teoria alternativa para a gravitação, no qual *ao invéz de* curvatura, o campo gravitacional é representado pela torção [14]. Esta é a teoria que será estudada nesta tese.

1.1.2 Estrutura da Tese

Como no caso das outras interações fundamentais da natureza, a gravitação também pode ser descrita por uma teoria de gauge. O equivalente teleparalelo da relatividade geral [15], ou gravitação teleparalela, pode ser interpretada como uma teoria de gauge para o grupo das translações. Neste formalismo, a interação gravitacional é descrita por uma força parecida com a força de Lorentz da eletrodinâmica, com a torção fazendo o papel de força [16]. Sendo uma teoria de gauge para o grupo das translações, que é um grupo Abeliano, a formulação teleparalela da gravitação torna-se em vários aspectos parecida com a teoria eletromagnética de Maxwell. Além disso, devido à sua estrutura de gauge, a gravitação teleparalela mostra-se mais apropriada do que a relatividade geral para lidar com alguns problemas específicos da gravitação. O objetivo principal desta tese será estudar as propriedades teóricas fundamentais da gravitação teleparalela, bem como algumas de suas consequências. No que se segue, apresentaremos a notação e a definição básica dos objetos geométricos, inclusive do campo de tetrada e da conexão. No Cap. 2 faremos uma revisão breve dos fundamentos da gravitação teleparalela. O Cap. 3 discute porque a gravitação teleparalela não se baseia no princípio de equivalência. Isto está ligado ao fato do potencial de gauge, isto é, a parte não trivial da tetrada, ser o campo fundamental no teleparalelismo. O Cap. 4 apresenta uma formulação global para a gravitação, o qual é baseado num fator de fase não-integrável, parecido ao caso eletromagnético. Como aplicação deste formalismo, estudaremos a experiência de Colella-Overhauser-Werner (COW), bem como o efeito de Aharonow-Bohm gravitacional. Uma re-análise da teoria das ondas gravitacionais na gravitação teleparalela será apresentada no Cap. 5. No Cap. 6 são apresentas as conclusões.

1.2 Notação e Definições

1.2.1 Estruturas Lineares e Tetradas

O cenário geométrico de qualquer teoria de gauge para a gravitação é o fibrado tangente, uma construção natural que esta sempre presente no espaço-tempo. De fato, em cada ponto do espaço-tempo — o espaço base do fibrado — existe sempre um espaço tangente ligado a ele — a fibra — no qual o grupo de gauge atua. Usaremos o alfabeto Grego ($\mu, \nu, \rho, \ldots = 0, 1, 2, 3$) para denotar os índices relacionados com o espaço-tempo, e a primeira metade do alfabeto Latino ($a, b, c, \ldots = 0, 1, 2, 3$) para denotar índices relacionados ao espaço tangente, que assumimos ser um espaço-tempo de Minkowski com métrica

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1). \tag{1.1}$$

A segunda metade do alfabeto Latino ($i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$) será reservada para índices de espaço tri-dimensional. Assim, as coordenadas do espaço-tempo serão denotadas por $\{x^\mu\}$, enquanto que as coordenadas do espaço tangente serão denotadas por $\{x^a\}$. Tais coordenadas definem, dentro dos seus domínios, bases locais para campos vetoriais, formados pelos conjuntos de gradientes $\{\partial_\mu\} \equiv \{\partial/\partial x^\mu\}$ e $\{\partial_a\} \equiv \{\partial/\partial x^a\}$, assim como bases $\{dx^\mu\}$ e $\{dx^a\}$ para campos covetoriais, ou diferenciais. Estas bases são duais, no sentido de que $dx^\mu\,\partial_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ e $dx^a\,\partial_b = \delta^a{}_b$. Dentro dos seus respectivos domínios, qualquer vetor ou covetor pode ser expresso em termos destas bases. Além disso, elas podem ser extendidas, por meio do produto direto, para constituir bases para campos tensoriais mais gerais.

Usaremos a notação $\{e_a, e^a\}$ para bases lineares, e $\{h_a, h^a\}$ para um campo de tetradas qualquer. Uma base *holônoma* como $\{\partial_a\}$, relacionada às coordenadas, é um caso muito particular de uma base linear. Qualquer conjunto de quatro campos linearmente independentes $\{e_a\}$ vão formar outra base, e vão ter um dual $\{e^a\}$, cujos membros são tais que $e^a(e_b) = \delta^a{}_b$. Estes campos são as bases lineares gerais sobre a variedade diferenciável do espaço-tempo cujo conjunto constitui o fibrado das bases lineares. É claro que, nos domínios comuns em que eles são definidos, os membros de uma base podem ser escritos em termos dos membros da outra base, isto é,

$$e_a = e_a{}^\mu\,\partial_\mu, \quad e^a = e^a{}_\mu\,dx^\mu, \tag{1.2}$$

e vice-versa. Podemos ainda considerar transformações gerais que levam qualquer base $\{e_a\}$ em qualquer outro conjunto $\{e'_a\}$ de quatro campos linearmente independentes. Estas transformações constituem o grupo linear $GL(4, \mathbb{R})$ de todas as matrices reais 4×4 inversíveis. Note que estas bases, com seus fibrados, são partes constitutivas do espaço-tempo. Elas estão automaticamente presentes assim que o espaço-tempo é assumido como sendo uma variedade diferenciável.

Considere agora a métrica do espaço-tempo g, com componentes $g_{\mu\nu}$, em alguma base dual holônoma $\{dx^\mu\}$:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{1.3}$$

Um campo de tetradas $h_a = h_a{}^\mu\,\partial_\mu$ será uma base linear que relaciona g à métrica do espaço tangente $\eta = \eta_{ab}\,dx^a dx^b$ por

$$\eta_{ab} = g(h_a, h_b) = g_{\mu\nu}\,h_a{}^\mu h_b{}^\nu. \tag{1.4}$$

Isto significa que um campo de tetradas é uma base linear cujos membros h_a são (pseudo) ortogonais pela métrica g. Veremos mais tarde como duas destas bases se relacionam pelo subgrupo de Lorentz, do grupo linear $GL(4, \mathbb{R})$. As componentes dos membros da base dual $h^a = h^a{}_\nu dx^\nu$ satisfazem

$$h^a{}_\mu h_a{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu \quad \text{e} \quad h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a{}_b, \tag{1.5}$$

e portanto a Eq. (1.4) tem a inversa

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, h^a{}_\mu h^b{}_\nu. \tag{1.6}$$

Anolonomia — a propriedade de uma forma diferencial que não é diferencial de alguma coisa, ou do campo vetorial que não é um gradiente — é um lugar comum em muitos assuntos da física. Por exemplo, calor e trabalho são coordenadas anolômicas típicas no espaço de variáveis da termodinâmica, e a velocidade angular de um corpo rígido qualquer é um exemplo clássico de velocidade anolonômica. No contexto da gravitação, anolomia se relaciona, através do princípio de equivalência, à existência de um campo gravitacional. Dada uma métrica Riemanniana como em (1.6), a presença ou ausência de um campo gravitacional é dada pelo caráter anolonômico ou holonômicoo das formas $h^a = h^a{}_\nu dx^\nu$. Podemos imaginar uma mudança de coordenadas $\{x^a\} \leftrightarrow \{x^\mu\}$, tal que

$$dx^a = (\partial_\mu x^a)\; dx^\mu \quad \text{e} \quad dx^\mu = (\partial_a x^\mu)\; dx^a. \tag{1.7}$$

A 1-forma dx^a é holônoma, e os objetos $\partial_\mu x^a$ são as componentes da forma holônoma dx^a escritas na base $\{dx^\mu\}$, com $\partial_a x^\mu$ a sua inversa. Portanto, tal mudança de coordenadas é apenas uma mudança de bases holônomas de 1-formas. Para a base dual, temos as relações

$$\partial_\mu = (\partial_\mu x^a)\; \partial_a \quad \text{e} \quad \partial_a = (\partial_a x^\mu)\; \partial_\mu. \tag{1.8}$$

Consideremos agora uma base h^a tal que $dh^a \neq 0$, isto é, não é formado por diferenciais. Apliquemos a 1-forma anolônoma h^a a ∂/∂_μ. O resultado, $h^a{}_\mu = h^a\, \partial_\mu$, dá as componentes de cada $h^a = h^a{}_\mu dx^\mu$ ao longo de dx^μ. Este procedimento pode ser invertido quando os h^a's são linearmente independentes, e definem campos vetoriais $h_a = h_a{}^\mu \partial_\mu$ que não são gradientes. Como formas fechadas são localmente exatas, podemos dar um critério trivial para a holonomia/anolonomia: uma forma é holônoma *se* a sua derivado exterior se anula. Uma tetrada holônoma vai ser sempre da forma $h^a = dx^a$ para algum conjunto de coordenadas $\{x^a\}$. Para tal tetrada, o tensor métrico (1.6) vai ser simplesmente as componentes da métrica de Lorentz η, mas num sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$.

Uma base anolônoma $\{h_a\}$ satisfaz a tabela de comutação

$$[h_a, h_b] = f^c{}_{ab}\; h_c, \tag{1.9}$$

com $f^c{}_{ab}$ os chamados coeficientes de estrutura, ou coeficientes de anolonomia. A base $\{\partial_\mu\}$ foi apresentada acima como sendo precisamente holônoma porque seus membros comutam entre si. A expressão dual da tabela de comutação acima é a equação de estrutura de Cartan

$$dh^c = -\tfrac{1}{2}\, f^c{}_{ab}\; h^a \wedge h^b = \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu h^c{}_\nu - \partial_\nu h^c{}_\mu)\; dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{1.10}$$

Os coeficientes de estrutura representam os rotacionais dos membros da base:

$$f^c{}_{ab} = h^c([h_a, h_b]) = h_a{}^\mu h_b{}^\nu (\partial_\nu h^c{}_\mu - \partial_\mu h^c{}_\nu) = h^c{}_\mu [h_a(h_b{}^\mu) - h_b(h_a{}^\mu)]. \tag{1.11}$$

Se $f^c{}_{ab} = 0$, então $dh^a = 0$ implica a existência local de funções (coordenadas) x^a tal que $h^a = dx^a$. As tetradas são gradientes quando os rotacionais se anulam.

1.2.2 Conexões

Para definirmos derivadas com um comportamento tensorial bem definido (isto é, para que sejam covariantes), é essencial introduzir-se conexões $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, que são vetores no último índice, mas cujo comportamento não-tensorial nos dois primeiros índices compensa a não-tensorialidade das derivadas ordinárias. Conexões lineares têm um alto grau de intimidade com o espaço-tempo porque elas são definidas no fibrado das bases lineares, que é uma parte constitutiva da estrutura de variedade. Esse fibrado tem algumas propriedades não presentes nos fibrados das teorias de gauge *internas*. Principalmente, ele exibe a propriedade de *soldagem*, que leva à existência de torção para todas as conexões [17]. Conexões lineares — em particular, as conexões de Lorentz — sempre apresentam torção, enquanto que os potenciais de gauge internos não apresentam torção.

É importante comentar neste ponto que, de um ponto de vista formal, curvatura e torção são propriedades de conexões [17]. Precisamente falando, no contexto das interações de gauge, não existe tal coisa de curvatura ou torção do espaço-tempo, mas apenas curvatura ou torção de conexões. Isto se torna evidente se notarmos que muitas conexões diferentes podem existir no mesmo espaço-tempo [18]. É claro que, quando nos restringimos ao caso especial da relatividade geral, onde a única conexão presente é a conexão de Levi–Civita, a universalidade da gravitação permite que essa conexão seja incorporada à própriaa definição do espaço-tempo. No entanto, na presença de conexões com curvatura e torção diferentes, muito mais conveniente considerarmos o espaço-tempo simplesmente como uma variedade, e as conexões (com suas curvaturas e torções) como estruturas adicionais.

A conexão de spin A_μ é uma conexão que assume valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz,

$$A_\mu = \tfrac{1}{2}\, A^{ab}{}_\mu\, S_{ab}, \tag{1.12}$$

onde S_{ab} é uma dada representação dos geradores de Lorentz. Uma conexão linear geral $\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}$ se relaciona com a conexão de spin correspondente $A^{a}{}_{b\mu}$ através de

$$\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = h_{a}{}^{\rho}\partial_{\mu}h^{a}{}_{\nu} + h_{a}{}^{\rho}A^{a}{}_{b\mu}h^{b}{}_{\nu} \equiv h_{a}{}^{\rho}\,\mathcal{D}_{\mu}h^{a}{}_{\nu}, \tag{1.13}$$

onde $\mathcal{D}_{\mu}$ é a derivada de Fock-Ivanenko [19], isto é, uma derivada agindo somente nos índices *internos* (espaço tangente). Consequentemente, a relação inverso é

$$A^{a}{}_{b\mu} = h^{a}{}_{\nu}\partial_{\mu}h_{b}{}^{\nu} + h^{a}{}_{\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu}h_{b}{}^{\rho} \equiv h^{a}{}_{\nu}\nabla_{\mu}h_{b}{}^{\nu}, \tag{1.14}$$

onde ∇_{μ} é a derivada covariante usual na conexão $\Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu}$, que age nos índices *externos* (espaço-tempo) apenas. As equações (1.13) e (1.14) são simplesmente formas diferentes de se expresar o fato de que a derivada total da tetrada — isto é, agindo em ambos índices — se anula idênticamente:

$$\partial_{\mu}h^{a}{}_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}h^{a}{}_{\rho} + A^{a}{}_{b\mu}h^{b}{}_{\nu} = 0. \tag{1.15}$$

Um campo de tetradas relaciona tensores internos com externos. Por exemplo, se V^{a} é um vetor de Lorentz,

$$V^{\rho} = h_{a}{}^{\rho}\,V^{a}$$

vai ser um vetor de espaço-tempo. É então uma tarefa fácil verficar que suas derivadas covariantes se relacionam por

$$\mathcal{D}_{\mu}V^{a} = h^{a}{}_{\rho}\,\nabla_{\mu}V^{\rho}.$$

Uma conexão $\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}$ é dita ser compatível com a métrica se

$$\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} \equiv \partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}g_{\mu\rho} = 0. \tag{1.16}$$

Do ponto de vista da tetrada, usando as equações (1.13) e (1.14), esta equação pode ser re-escrita na forma

$$\partial_{\mu}\eta_{ab} - A^{d}{}_{a\mu}\,\eta_{db} - A^{d}{}_{b\mu}\,\eta_{ad} = 0, \tag{1.17}$$

ou equivalentemente

$$A_{ba\mu} = -A_{ab\mu}. \tag{1.18}$$

Consequentemente, o conteúdo fundamental da propriedade de preservação da métrica é que a conexão de spin é Lorentziana, isto é, assume valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz.

A curvatura e a torção da conexão $A^{a}{}_{b\mu}$ são definidas respectivamente por

$$R^{a}{}_{b\nu\mu} = \partial_{\nu}A^{a}{}_{b\mu} - \partial_{\mu}A^{a}{}_{b\nu} + A^{a}{}_{e\nu}A^{e}{}_{b\mu} - A^{a}{}_{e\mu}A^{e}{}_{b\nu} \tag{1.19}$$

e

$$T^{a}{}_{\nu\mu} = \partial_{\nu}h^{a}{}_{\mu} - \partial_{\mu}h^{a}{}_{\nu} + A^{a}{}_{e\nu}h^{e}{}_{\mu} - A^{a}{}_{e\mu}h^{e}{}_{\nu}. \tag{1.20}$$

Usando a relação (1.14), eles podem ser expressos numa forma puramente espaço-temporal:

$$R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu} \equiv h_a{}^{\rho}\, h^b{}_{\lambda}\, R^a{}_{b\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\eta\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\lambda\nu} \tag{1.21}$$

e

$$T^{\rho}{}_{\nu\mu} \equiv h_a{}^{\rho}\, T^a{}_{\nu\mu} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}. \tag{1.22}$$

As componentes da conexão podem ser convenientemente decompostas de acordo com a relação[4]

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} + K^{\rho}{}_{\mu\nu}, \tag{1.23}$$

onde

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\, g^{\sigma\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \tag{1.24}$$

é a conexão de Levi-Civita da relatividade geral (a qual possui torção nula), e

$$K^{\rho}{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(T_\nu{}^{\rho}{}_\mu + T_\mu{}^{\rho}{}_\nu - T^{\rho}{}_{\mu\nu}\right) \tag{1.25}$$

é o tensor de contorção. Em termos da conexão de spin, a decomposição (1.23) assume a forma

$$A^c{}_{a\nu} = \overset{\circ}{A}{}^c{}_{a\nu} + K^c{}_{a\nu}, \tag{1.26}$$

onde $\overset{\circ}{A}{}^c{}_{a\nu}$ é o coeficiente de rotação de Ricci, a conexão de spin da relatividade geral.

Agora, como a conexão de spin é um tensor no último índice, podemos escrever

$$A^a{}_{bc} = A^a{}_{b\mu}\, h_c{}^{\mu}. \tag{1.27}$$

Portanto, pode ser facilmente verificado que, na base anolônoma h_a, as componentes da curvatura e da torção são dadas respectivamente por [20]

$$R^a{}_{bcd} = h_c A^a{}_{bd} - h_d A^a{}_{bc} + A^a{}_{ec}\, A^e{}_{bd} - A^a{}_{ed}\, A^e{}_{bc} - f^e{}_{cd}\, A^a{}_{be} \tag{1.28}$$

e

$$T^a{}_{bc} = -f^a{}_{bc} + A^a{}_{cb} - A^a{}_{bc}. \tag{1.29}$$

Assim, visto deste frame, a torção inclui a anolonomia. Usando a expressão (1.29) para três combinações de índices, obtemos

$$A^a{}_{bc} = -\tfrac{1}{2}(f^a{}_{bc} + T^a{}_{bc} + f_{bc}{}^a + T_{bc}{}^a + f_{cb}{}^a + T_{cb}{}^a). \tag{1.30}$$

Quando a torção se anula, como na relatividade geral, obtemos a expressão usual dos coeficientes de rotação de Ricci em termos da anolonomia:

$$\overset{\circ}{A}{}^a{}_{bc} = -\tfrac{1}{2}(f^a{}_{bc} + f_{bc}{}^a + f_{cb}{}^a). \tag{1.31}$$

[4]As magnitudes relacionadas com a relatividade geral serão denotados com uma “$\circ$” em cima.

1.2.3 Transformações de Lorentz

A base $\{h_a\}$ está longe de ser única. Na verdade, existe uma infinidade de de campos de tetrada $\{h_a = h_a{}^{\mu}\, \partial_\mu\}$, cada um relacionando g com a métrica de Lorentz η atraves das Eqs. (1.4) e (1.6). Isto vem do fato que, em cada ponto do espaço-tempo de Riemann, a Eq. (1.6) determina o campo de tetrada a menos de uma transformação (a seis-parâmetros) do grupo de Lorentz (no índice do espaço tangente). De fato, suponha outra tetrada $\{h'_a\}$ tal que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\; h^a{}_\mu h^b{}_\nu = \eta_{cd}\; h'^c{}_\mu h'^d{}_\nu. \tag{1.32}$$

Contraindo os dois lados com $h_e{}^\mu h_f{}^\nu$, obtemos que

$$\eta_{ab} = \eta_{cd}\; (h'^c{}_\mu h_a{}^\mu)(h'^d{}_\nu h_b{}^\nu). \tag{1.33}$$

Esta equação nos diz que a matriz com elementos

$$\Lambda^a{}_b = h'^a{}_\mu\; h_b{}^\mu, \tag{1.34}$$

que nos fornece a transformação

$$h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b\, h^b{}_\mu, \tag{1.35}$$

satisfaz

$$\eta_{cd}\; \Lambda^c{}_a\; \Lambda^d{}_b = \eta_{ab}. \tag{1.36}$$

Esta é justamente a condição que uma matriz Λ deve satisfazer para pertencer ao o grupo de Lorentz (neste caso, numa representação vetorial).

Sob uma trasformação local de Lorentz $\Lambda^a{}_b \equiv \Lambda^a{}_b(x)$, a tetrada muda de acordo com (1.35), enquanto que a conexão de spin sofre a seguinte transformação:

$$A'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c\, A^c{}_{d\mu}\, \Lambda_b{}^d + \Lambda^a{}_c\, \partial_\mu \Lambda_b{}^c. \tag{1.37}$$

Da mesma forma, é fácil verificar que $T^a{}_{\nu\mu}$ e $R^a{}_{b\nu\mu}$ transformam-se covariantemente:

$$T'^a{}_{\nu\mu} = \Lambda^a{}_b\, T^b{}_{\nu\mu} \quad \text{and} \quad R'^a{}_{b\nu\mu} = \Lambda^a{}_c\, \Lambda_b{}^d\, R^c{}_{d\nu\mu}. \tag{1.38}$$

Isto significa que $\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$, $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ e $R^\rho{}_{\lambda\nu\mu}$ são invariantes sob uma transfromação local de Lorentz.

Capítulo 2

Descrição Teleparalela da Gravitação

2.1 Conceitos Gerais

De acordo com o ponto de vista do equivalente teleparalelo da relatividade geral [15], curvatura e a torção são capazes de fornecer, independentemente, descrições equivalentes da interação gravitacional. No entanto, essas teorias possuem diferenças conceituais importantes. De acordo com a relatividade geral, a curvatura é usada para *geometrizar* a interação gravitacional, e por conseguinte o conceito de força gravitacional não entra nesta descrição. Por outro lado, a gravitação teleparalela atribui a gravitação à torção, mas neste caso a torção não entra na gravitação geometrizando a interação, mas atuando como uma *força*. Isto significa que no equivalente teleparalelo da relatividade geral não existem geodésicas, mas sim equações de força análogas à equação de força de Lorentz da eletrodinâmica [16]. Desta forma, a interação gravitacional pode ser descrita *alternativamente* em termos de curvatura, como é geralmente feito na relatividade geral, ou em termos de torção, em cujo caso teremos a gravitação teleparalela. Deste ponto de vista podemos dizer que, se a gravitação requer uma conexão com curvatura ou torção, é apenas uma questão de convenção.

Qual é a razão para a gravitação apresentar duas descrições equivalentes? A resposta para esta pergunta esta relacionada com uma propriedade peculiar da gravitação, a chamada *universalidade*. Vamos explorar este ponto em mais detalhes. Como qualquer outra interação da natureza, a gravitação apresenta uma descrição em termos de uma teoria de gauge. De fato, a gravitação teleparalela é conhecida como sendo uma teoria de gauge para o grupo das translações, com a torção fazendo o papel de força. Por outro lado, a universalidade da gravitação significa que todas as partículas da natureza sentem a gravitação da mesma forma. Em outras palavras, objetos com massas distintas vão sentir a gravitação de tal forma que todos eles vão adquirir a mesma aceleração. Como conseqüência desta propriedade, torna-se possível descrever a gravitação, não como uma *força*, mas como uma *deformação* do espaço-tempo. Mais precisamente, de acordo com este ponto de vista, supõe-se que o campo gravitacional produz uma *curvatura* no espaço-tempo, com a interação gravitacional sendo obtida neste caso deixando que partículas sem spin sigam as geodésicas do espaço-tempo. Este é o formalismo usado pela relatividade geral. É importante notar que somente uma interação que apresente a propriedade da universalidade pode ser descrita através de uma *geometrização* do espaço-tempo. Além disso, como a gravitação é a única interação que apresenta a propriedade de universalidade, ela é também a única a apresentar duas descrições alternativas. Por razões históricas, a descrição métrica fornecida pela relatividade geral foi descoberta antes da descrição de gauge da gravitação teleparalela.[1]

Podemos nos perguntar porque uma teoria de gauge para o grupo das translações, e não para um outro grupo do espaço-tempo. A razão esta relacionada com a fonte da gravitação, isto é, energia e momento. Como é bem conhecido do teorema de Noether [21], estas quantidades são conservadas desde que o sistema físico seja invariante sob translações no espaço-tempo. É então natural esperar que o campo gravitacional seja representado por uma teoria de gauge para o grupo das translações. Isto é bem semelhante ao campo eletromagnético, cuja fonte — a quadri-corrente elétrica — é conservada devido a invariância da teoria sob transformações do grupo unitário U(1), que é o grupo de gauge da teoria de Maxwell. Note que momento angular (tanto orbital como intrínseco) não é fonte da gravitação: apenas a energia e o momento associado ao momento angular podem ser fonte da gravitação. Isto significa que o grupo de Lorentz, assim como as dilatações ou as transformações conformes próprias, provavelmente não estão relacionadas com gravitação, mas à outras propriedades de sistemas físicos.

2.2 Fundamentos da Gravitação Teleparalela

O ponto importante da gravitação teleparalela é que ela pode ser entendida como uma teoria de gauge para o grupo das translações [16]. Devido ao caráter peculiar das translações, qualquer teoria de gauge que inclua estas transformações vai diferir das teorias de gauge internas usuais de várias formas, a mais significativa delas sendo a presença de um campo de tetrada. Isto significa essencialmente que o fibrado vai apresentar sempre a propriedade de *soldagem* [17], e consequentemente os setores internos e externos da teoria vão ser conectados.

[1] Todos os dados experimentais existentes indicam que a gravitação é, de fato, universal, ao menos no nível clássico. No entanto, no nível quântico, não existem evidências experimentais concretas de que a gravitação seja universal.

Agora, como uma teoria de gauge para o grupo das translações, o campo fundamental da gravitação teleparalela é o potencial de gauge B_μ, um campo que assume valores na álgebra de Lie do grupo das translações,

$$B_\mu = B^a{}_\mu \, P_a, \tag{2.1}$$

onde $P_a = \partial/\partial x^a$ são os geradores de translação, que satisfazem

$$[P_a, P_b] = 0. \tag{2.2}$$

A transformação de gauge é definida como uma translação local (dependente do ponto) das coordenadas no espaço tangente,

$$x^{a'} = x^a + \alpha^a, \tag{2.3}$$

com $\alpha^a \equiv \alpha^a(x^\mu)$ os parâmetros infinitesimais correspondentes. Em termos de P_a, podemos reescrever a transformação na forma

$$\delta x^a = \alpha^b P_b \, x^a. \tag{2.4}$$

Consideremos agora um campo fonte qualquer $\Psi \equiv \Psi(x^\mu)$. Sua transformação de gauge infinitesimal não depende do seu caráter de spin, e é dada por

$$\delta\Psi = -\alpha^a P_a \Psi, \tag{2.5}$$

com $\delta\Psi$ significando a mudança funcional no mesmo ponto x^μ, que é a transformação relevante para as teorias de gauge. É importante resaltar que os geradores da translação podem atuar no argumento de qualquer campo fonte por causa das identidades (1.8). Usando a definição geral de derivada covariante [18]

$$h_\mu = \partial_\mu - B^a{}_\mu \, \frac{\delta}{\delta \alpha^a}, \tag{2.6}$$

a derivada covariante *translacional* de Ψ é

$$h_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + B^a{}_\mu \, P_a \Psi. \tag{2.7}$$

Equivalentemente, podemos escrever [16]

$$h_\mu \Psi = h^a{}_\mu \, \partial_a \Psi, \tag{2.8}$$

onde

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + B^a{}_\mu \equiv h_\mu x^a \tag{2.9}$$

é um campo de tetradas não-trivial, isto é, anolônomo. Como os geradores $P_a = \partial_a$ são derivadas que agem nos campos através dos seus argumentos, todo campo fonte da natureza vai responder à sua ação, e consequentemente vai se acoplar ao potencial de gauge translacional. Desde que o acoplamento entre $B^a{}_\mu$ e Ψ seja o mesmo para qualquer campo, todos eles vão sentir a gravitação do mesmo jeito. Esta é a origen do conceito de *universalidade*, de acordo com a gravitação teleparalela.[2]

Como é usual nas teorias de gauge, o campo de gauge (ou intensidade do campo de gauge) é obtido através da relação de comutação da derivada covariante. Usando a derivada covariante translacional (2.7), podemos facilmente verificar que[3]

$$[h_\mu, h_\nu]\Psi = \overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} P_a \Psi, \tag{2.10}$$

de onde podemos ver que o campo $\overset{\bullet}{T}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} P_a$ é também um campo que assume valores na álgebra de Lie do grupo das translações. Suas componentes são dadas por

$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu \equiv \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu. \tag{2.11}$$

Agora, da covariância de $h_\mu \Psi$, obtemos a transformação de gauge dos potenciais:

$$B^{a'}{}_\mu = B^a{}_\mu - \partial_\mu \alpha^a. \tag{2.12}$$

Usando as transformações (2.3) e (2.12), vemos que a tetrada é invariante de gauge:

$$h^{a'}{}_\mu = h^a{}_\mu. \tag{2.13}$$

Consequentemente, como esperado para uma teoria de gauge Abeliana, $\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu}$ é invariante sob uma transformação de gauge. Vamos frizar mais uma vez que, enquanto os índices do espaço tangente são levantados e abaixados com a métrica η_{ab}, os índices do espaço-tempo são levantados e abaixados com a métrica $g_{\mu\nu}$ dada pela Eq. (1.6).

A conexão relevante da gravitação teleparalela é a chamada conexão de Weitzenböck[4]

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu, \tag{2.14}$$

que é uma conexão que apresenta torção, mas não curvatura. Dessa definição seguese que

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\nu h^a{}_\mu \equiv \partial_\nu h^a{}_\mu - \overset{\bullet}{\Gamma}{}^\rho{}_{\mu\nu}\, h^a{}_\rho = 0, \tag{2.15}$$

[2] Analogamente ao caso eletromagnético, cuja interação é proporcional a relação *carga/massa inercial* do campo, a interação gravitacional deve ser proporcional a relação *massa gravitacional/massa inercial* do campo. Como estas duas massas, de acordo com o princípio de equivalencia fraco, são iguais, a constante de acoplamento gravitacional resulta ser "1". No entanto, se estas duas massas fossem diferentes, a gravitação perderia seu caráter universal, e a descrição geométrica da relatividade geral deixaria de existir. Veja o capítulo 3 para uma discussão mais detalhada.

[3] As magnitudes relacionadas com a gravitação teleparalela serão denotados com um "•" em acima.

[4] Devemos observar que Weitzenböck nunca escreveu tal conexão. Apesar disso, o nome Weitzenböck será comumente usado para denotar o caso especial de uma conexão de Cartan com curvatura nula.

que é a chamada "condição de paralelismo absoluto". As conexões de Weitzenböck e de Levi–Civita estão relacionadas por

$$\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \dot{K}^{\rho}{}_{\mu\nu}, \tag{2.16}$$

onde

$$\dot{K}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(\dot{T}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + \dot{T}_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} - \dot{T}^{\rho}{}_{\mu\nu}\right) \tag{2.17}$$

é a contorção da torção de Weitzenböck .

Um ponto importante da gravitação teleparalela é que, como consequência da Eq. (1.14), a correspondente conexão de spin de Weitzenböck se anula identicamente:

$$\dot{A}^{a}{}_{b\mu} = 0. \tag{2.18}$$

A relação (1.26) assume então a forma teleparalela

$$\mathring{A}^{c}{}_{a\nu} = 0 - \dot{K}^{c}{}_{a\nu}. \tag{2.19}$$

Usando a conexão de Weitzenböck, o campo de gauge pode ser reescrito na forma

$$\dot{T}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} - \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}, \tag{2.20}$$

de onde vemos que ele nada mais é do que a torção escrita na base das tetradas:

$$\dot{T}^{a}{}_{\mu\nu} = h^{a}{}_{\rho}\,\dot{T}^{\rho}{}_{\mu\nu}. \tag{2.21}$$

Em termos de $\dot{T}^{\rho}{}_{\mu\nu}$, a relação de comutação (2.10) se torna

$$[h_{\mu}, h_{\nu}] = \dot{T}^{\rho}{}_{\mu\nu}\; h_{\rho}. \tag{2.22}$$

Isto significa que a torção desempenha o papel do anolonomia da derivada covariante de gauge translacional.

Como já mencionado, a curvatura da conexão de Weitzenböck se anula identicamente:

$$\dot{R}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \partial_{\mu}\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\theta\nu} - \partial_{\nu}\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\theta\mu} + \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu}\;\dot{\Gamma}^{\sigma}{}_{\theta\nu} - \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\nu}\;\dot{\Gamma}^{\sigma}{}_{\theta\mu} \equiv 0. \tag{2.23}$$

Substituindo $\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}$, como dado pela Eq. (2.16), obtemos

$$\dot{R}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \mathring{R}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} + \dot{Q}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} \equiv 0, \tag{2.24}$$

onde $\mathring{R}^{\theta}{}_{\rho\mu\nu}$ é a curvatura da conexão de Levi–Civita, e

$$\dot{Q}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \dot{D}_{\mu}\dot{K}^{\rho}{}_{\theta\nu} - \dot{D}_{\nu}\dot{K}^{\rho}{}_{\theta\mu} + \dot{K}^{\sigma}{}_{\theta\nu}\;\dot{K}^{\rho}{}_{\sigma\mu} - \dot{K}^{\sigma}{}_{\theta\mu}\;\dot{K}^{\rho}{}_{\sigma\nu} \tag{2.25}$$

é um tensor escrito em termos da conexão de Weitzenböck apenas, com

$$\dot{D}_{\mu}\dot{K}^{\rho}{}_{\theta\nu} = \partial_{\mu}\dot{K}^{\rho}{}_{\theta\nu} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\mu}\dot{K}^{\lambda}{}_{\theta\nu} - \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\theta\mu}\dot{K}^{\rho}{}_{\lambda\nu} - \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu}\dot{K}^{\rho}{}_{\theta\lambda}. \tag{2.26}$$

Aqui, $\overset{\bullet}{D}_\mu$ é a *derivada covariante teleparalela*; agindo num vetor de espaço-tempo V^μ, por exemplo, sua forma explícita é

$$\overset{\bullet}{D}_\rho V^\mu \equiv \partial_\rho V^\mu + \left(\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\mu{}_{\lambda\rho} - \overset{\bullet}{K}{}^\mu{}_{\lambda\rho}\right) V^\lambda. \tag{2.27}$$

Devido à relação (2.16), vemos que ela nada mais é do que a derivada covariante de Levi–Civita da relatividade geral reescrita em termos da conexão de Weitzenböck.

2.3 Lagrangiana e Equações de Campo

A Lagrangiana do equivalente teleparalelo da relatividade geral é

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \frac{h}{2k^2}\left[\frac{1}{4}\,\overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu}\,\overset{\bullet}{T}{}_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu}\,\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\rho - \overset{\bullet}{T}{}_{\rho\mu}{}^\rho\,\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu\right], \tag{2.28}$$

onde $k^2 = 8\pi G/c^4$ e $h = \det(h^a{}_\mu)$. O primeiro termo corresponde à Lagrangiana usual das teorias de gauge. No entanto, devido à presença de um campo de tetradas no caso gravitacional, os índices internos e de espaço-tempo podem ser transformados uns nos outros, e consequentemente novas contrações tornam-se possíveis. É exatamente esta possibilidade que nos fornece os outros dois termos na Lagrangiana. Se definimos o tensor

$$\overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu} = -\overset{\bullet}{S}{}^{\rho\nu\mu} = \left[\overset{\bullet}{K}{}^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}\,\overset{\bullet}{T}{}^{\sigma\mu}{}_\sigma + g^{\rho\mu}\,\overset{\bullet}{T}{}^{\sigma\nu}{}_\sigma\right], \tag{2.29}$$

a Lagrangiana teleparalela (2.28) pode ser reescrita na forma [22]

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \frac{h}{4k^2}\,\overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu}\,\overset{\bullet}{T}{}_{\rho\mu\nu}. \tag{2.30}$$

Usando a identidade

$$\overset{\bullet}{T}{}^\mu{}_{\mu\rho} = \overset{\bullet}{K}{}^\mu{}_{\rho\mu}, \tag{2.31}$$

que segue da definição da contorção, a Lagrangiana pode ser alternativamente escrita como

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \frac{h}{2k^2}\left(\overset{\bullet}{K}{}^{\mu\nu\rho}\overset{\bullet}{K}{}_{\rho\nu\mu} - \overset{\bullet}{K}{}^{\mu\rho}{}_\mu\overset{\bullet}{K}{}^\nu{}_{\rho\nu}\right). \tag{2.32}$$

Agora, considerando contrações apropriadas da Eq. (2.24), é fácil mostrar que

$$-\overset{\circ}{R} = \overset{\bullet}{Q} \equiv \left(\overset{\bullet}{K}{}^{\mu\nu\rho}\overset{\bullet}{K}{}_{\rho\nu\mu} - \overset{\bullet}{K}{}^{\mu\rho}{}_\mu\overset{\bullet}{K}{}^\nu{}_{\rho\nu}\right) + \frac{1}{h}\partial_\mu(2\,h\,\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu). \tag{2.33}$$

Consequentemente, podemos escrever que

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \overset{\circ}{\mathcal{L}} - \partial_\mu\left(h\,k^{-2}\,\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu\right), \tag{2.34}$$

onde

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2k^2}\,\overset{\circ}{R} \tag{2.35}$$

é a Lagrangiana de Einstein-Hilbert da relatividade geral. Nesta expressão, usamos a notação $h = \sqrt{-g}$, com $g = \det(g_{\mu\nu})$. Portanto, à menos de uma divergência total, a Lagrangiana teleparalela é equivalente à Lagrangiana de Einstein–Hilbert da relatividade geral.

É interessante notar que a Lagrangiana de Møller da relatividade geral [6], que é uma Lagrangiana de primeira ordem, e tem a forma

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathrm{M}} = \frac{h}{2k^2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_\mu h^{a\nu}\,\overset{\circ}{\nabla}_\nu h_a{}^\mu - \overset{\circ}{\nabla}_\mu h_a{}^\mu\,\overset{\circ}{\nabla}_\nu h^{a\nu}\right) = \overset{\circ}{\mathcal{L}} - \partial_\mu\Big(\frac{h}{k^2}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu\Big), \tag{2.36}$$

difere da Lagrangiana de Einstein-Hilbert por uma divergência total. Além disso, quando reescrita em termos da conexão de Weitzeböck, ela coincide exatamente — sem nenhum termo de superfície — com a Lagrangiana teleparalela (2.30). Assim, a gravitação teleparalela pode ser considerada como sendo completamente equivalente com a formulação de primeira ordem de Møller da relatividade geral.

Vamos agora considerar a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \overset{\bullet}{\mathcal{L}} + \mathcal{L}_m, \tag{2.37}$$

onde $\mathcal{L}_m$ é a Lagrangiana de um campo de matéria qualquer Ψ. Fazendo variações em relação ao campo de gauge $B^a{}_\rho$, obtemos a versão teleparalela das equações de campo gravitacionais

$$\partial_\sigma(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - k^2\,(h\overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\rho) = k^2\,(h\Theta_a{}^\rho), \tag{2.38}$$

onde $\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} = h_a{}^\lambda \overset{\bullet}{S}_\lambda{}^{\rho\sigma}$,

$$h\overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\rho \equiv -\frac{\partial\overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial B^a{}_\rho} \equiv -\frac{\partial\overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{h}{k^2}\,h_a{}^\lambda\,\overset{\bullet}{S}_c{}^{\nu\rho}\,\overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\nu\lambda} - h_a{}^\rho\overset{\bullet}{\mathcal{L}} \tag{2.39}$$

é a corrente de gauge, que neste caso representa a energia e o momento do campo gravitacional [23],

$$h\Theta_a{}^\rho \equiv -\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta B^a{}_\rho} \equiv -\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta h^a{}_\rho} = -\left(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\lambda\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial_\lambda\partial h^a{}_\rho}\right) \tag{2.40}$$

é o tensor energia-momento de matéria, e

$$\frac{\delta\overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\delta h^a{}_\rho} \equiv \frac{\delta\overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\delta B^a{}_\rho} = \frac{1}{k^2}\,\partial_\sigma(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - (h\overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\rho). \tag{2.41}$$

Com todos os índices de espaço-tempo, a Eq. (2.38) assume a forma

$$\partial_\theta(h\overset{\bullet}{S}_\sigma{}^{\lambda\theta}) - k^2(ht_\sigma{}^\lambda) = k^2 h\Theta_\sigma{}^\lambda, \tag{2.42}$$

onde

$$ht_\sigma{}^\lambda = \frac{h}{k^2}\,\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\rho{}_{\theta\sigma}\overset{\bullet}{S}_\rho{}^{\lambda\theta} - \delta_\sigma{}^\lambda\overset{\bullet}{\mathcal{L}} \tag{2.43}$$

é o pseudotensor energia-momento [23]. Devido à anti-simetria de $\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}$ nos últimos dois índices, a corrente total é conservada como consequência das equações de campo:

$$\partial_\rho \left[h \left(\overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\rho + \Theta_a{}^\rho \right) \right] = 0. \tag{2.44}$$

A equação de campo teleparalela (2.38) tem a mesma estrutura das equações de Yang-Mills. Além disso, em termos de índices espaço-temporais apenas, a corrente de gauge (2.39) se torna

$$\overset{\bullet}{\jmath}_\theta{}^\lambda \equiv h^a{}_\theta \overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\lambda = \frac{1}{k^2} (\overset{\bullet}{S}_\rho{}^{\nu\lambda} \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\nu\theta} - \frac{1}{4} \delta_\theta{}^\lambda \overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu} \overset{\bullet}{T}_{\rho\mu\nu}). \tag{2.45}$$

Nesta forma, ela apresenta a mesma estrutura do tensor de energia-momento simétrico [24] dos campos eletromagnéticos [25] e de Yang–Mills [26].

Finalmente, é importante observar que, usando a Eq. (2.16), pode-se mostrar que o lado esquerdo da equação (2.38) satisfaz a relação

$$\partial_\sigma (h \overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - k^2 \, (h \overset{\bullet}{\jmath}_a{}^\rho) = h \left(\overset{\circ}{R}_a{}^\rho - \tfrac{1}{2} \, h_a{}^\rho \, \overset{\circ}{R} \right). \tag{2.46}$$

Isto significa que, como esperado devido à equivalência entre as Lagrangianas correspondentes, a equação de campo teleparalela (2.38) é equivalente a equação de campo de Einstein

$$\overset{\circ}{R}_a{}^\rho - \tfrac{1}{2} \, h_a{}^\rho \, \overset{\circ}{R} = k^2 \, \Theta_a{}^\rho, \tag{2.47}$$

ou equivalentemente,

$$\overset{\circ}{R}_\lambda{}^\rho - \tfrac{1}{2} \delta_\lambda{}^\rho \overset{\circ}{R} = k^2 \Theta_\lambda{}^\rho. \tag{2.48}$$

2.4 Propriedades de Transformação

A Lagrangiana (2.28) deve ser uma escalar, tanto sob transformações locais de Lorentz, como sob transformações gerais de coordenadas. É fácil se verificar que a Lagrangiana é invariante sob transformações gerais de coordenadas, assim como a equação de campo (2.38) obtida deste Lagrangiana é covariante sob estas transformações. Para verificar que a Lagrangiana é um escalar sob transformações locais de Lorentz, comecemos com a identidade (1.15) no espaço-tempo de Weitzenböck,

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = h_a{}^\lambda \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\nu} h^b{}_\mu + h_a{}^\lambda \partial_\nu h^a{}_\mu. \tag{2.49}$$

Sob uma transformação local de Lorentz $\Lambda^a{}_b \equiv \Lambda^a{}_b(x)$, a mudança na conexão de spin de Weitzenböck tem a forma

$$\overset{\bullet}{A}{}'^a{}_{b\nu} = \Lambda^a{}_d \overset{\bullet}{A}{}^d{}_{e\nu} \Lambda_b{}^e - (\partial_\nu \Lambda^a{}_e) \Lambda_b{}^e. \tag{2.50}$$

Como a conexão de spin de Weitzenböck se anula indenticamente, temos

$$\dot{A}'^{a}{}_{b\nu} = -(\partial_\nu \Lambda^a{}_e)\, \Lambda_b{}^e. \tag{2.51}$$

Usando (2.51), a mudança na conexão de Weitzenböck, de acordo com (2.49), é

$$\dot{\Gamma}'^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -\Lambda_a{}^c\, h_c{}^\lambda\, (\partial_\nu \Lambda^a{}_e)\, \Lambda_b{}^e\, \Lambda^b{}_f\, h^f{}_\mu + \Lambda_a{}^c\, h_c{}^\lambda\, \partial_\nu(\Lambda^a{}_b\, h^b{}_\mu) = \dot{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu}. \tag{2.52}$$

Ou seja, ela é invariante. Consequentemente, a torção é também invariante:

$$\dot{T}'^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \dot{\Gamma}'^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \dot{\Gamma}'^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \dot{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \dot{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \dot{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu}. \tag{2.53}$$

Portanto, a conexão e a torção de Weitzenböck são invariantes sob uma transformação local de Lorentz. Usando este resultado, é fácil verificar que a Lagrangiana teleparalela é também um escalar sob transformações locais de Lorentz $\dot{\mathcal{L}}' = \dot{\mathcal{L}}$.

A equação de campo (2.38) obtida desta Lagrangiana deve ser também covariante sob uma transformação local de Lorentz. Para verificar isto, comecemos pela equação de campo (2.38), mas incluindo a conexão de spin de Weitzenböck:

$$\frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a{}_\lambda} \equiv \partial_\nu (h \dot{S}_a{}^{\lambda\nu}) - \dot{A}^b{}_{a\nu}\, (h \dot{S}_b{}^{\lambda\nu}) - k^2 h \dot{\jmath}_a{}^\lambda = 0. \tag{2.54}$$

Devemos notar que, quando escrevemos a equação de campo teleparalela (2.38), já usamos o fato de que $\dot{A}^b{}_{a\nu} = 0$. No entanto, sob uma transformação local de Lorentz, a conexão de spin de Weitzenböck tem a forma (2.51). Usando esta propriedade, é fácil verificar que, sob uma transformação local de Lorentz,

$$\left(\frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a{}_\lambda}\right)' = \Lambda_a{}^b [\partial_\nu (h \dot{S}_b{}^{\lambda\nu}) - k^2 \dot{\jmath}_b{}^\lambda]. \tag{2.55}$$

Desta forma, vemos que a equação de campo teleparalela é, de fato, covariante sob uma transformação local de Lorentz.

2.5 Teorema de Noether

Vamos considerar a integral de ação de um campo de matéria qualquer,

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_M d^4x. \tag{2.56}$$

Além disso, vamos assumir um formalismo de primeira ordem, de acordo com o qual a Lagrangiana depende apenas dos campos e das suas primeiras derivadas. Sob uma transformação geral das coordenadas do espaço-tempo,

$$x'^\rho = x^\rho + \xi^\rho, \tag{2.57}$$

a tetrada se transforma de acordo com

$$\delta h_a{}^\mu = h_a{}^\rho \partial_\rho \xi^\mu - \xi^\rho \partial_\rho h_a{}^\mu. \tag{2.58}$$

Introduzindo a notação

$$h\Theta^a{}_\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta h_a{}^\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h_a{}^\mu} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\lambda h_a{}^\mu}, \tag{2.59}$$

com $\Theta^a{}_\mu$ o tensor energia-momento da matéria, a transformação da integral de ação sob a transformação de coodenada do espaço-tempo (2.57) é escrita como

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \Theta^a{}_\mu \delta h_a{}^\mu h d^4x. \tag{2.60}$$

Substituindo $\delta h_a{}^\mu$, como dado pela Eq. (2.58), obtemos

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \Theta^a{}_\mu (h_a{}^\rho \partial_\rho \xi^\mu - \xi^\rho \partial_\rho h_a{}^\mu) h d^4x. \tag{2.61}$$

Por outro lado, da Eq. (1.15), temos que

$$\partial_\rho h_a{}^\mu = A^b{}_{a\rho} h_b{}^\mu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} h_a{}^\lambda. \tag{2.62}$$

Substituindo em (2.61), após algumas manipulações, obtemos

$$\delta S = \frac{1}{c} \int [\Theta^\rho{}_c (\partial_\rho \xi^c + A^c{}_{b\rho} \xi^b) + \Theta^\rho{}_\mu T^\mu{}_{\lambda\rho} \xi^\lambda - A^b{}_{ac} \Theta^a{}_b \xi^c] h d^4x. \tag{2.63}$$

Como $\Theta^a{}_b$ é simétrico [27], o teceiro termo se anula, e os termos restantes podem ser escritos na forma

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \Theta^\rho{}_c [\partial_\rho \xi^c + A^c{}_{b\rho} \xi^b - K^c{}_{b\rho} \xi^b] h d^4x. \tag{2.64}$$

Fazendo uma integração por partes no primeiro termo, desprezando o termo de superfície, e considerando a arbitrariedade de ξ^c, segue da invariância da integral de ação que

$$\partial_\mu (h\Theta^\mu{}_a) - (A^b{}_{a\mu} - K^b{}_{a\mu}) h\Theta^\mu{}_b = 0. \tag{2.65}$$

Levando em conta a identidade

$$\partial_\mu h = h \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\mu\rho} = h(\Gamma^\rho{}_{\mu\rho} - K^\rho{}_{\mu\rho}), \tag{2.66}$$

a lei de conservação acima torna-se

$$\partial_\mu \Theta^\mu{}_a + (\Gamma^\mu{}_{\rho\mu} - K^\mu{}_{\rho\mu}) \Theta^\rho{}_a - (A^b{}_{a\mu} - K^b{}_{a\mu}) \Theta^\mu{}_b = 0. \tag{2.67}$$

Numa forma puramente espaço-temporal, ela é dada por

$$\partial_\mu \Theta^\mu{}_\lambda + (\Gamma^\mu{}_{\rho\mu} - K^\mu{}_{\rho\mu}) \Theta^\rho{}_\lambda - (\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - K^\rho{}_{\lambda\mu}) \Theta^\mu{}_\rho = 0 \tag{2.68}$$

Usando as identidades

$$A^{ab}{}_{\mu} - K^{ab}{}_{\mu} \equiv \overset{\circ}{A}{}^{ab}{}_{\mu} \tag{2.69}$$

e

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - K^{\rho}{}_{\mu\nu} \equiv \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}. \tag{2.70}$$

vemos que a derivada covariante aparecendo na lei de conservação do tensor energia-momento coincide com a derivada covariante de Levi-Civita da relatividade geral. Portanto, a conclusão básica é que, mesmo que na presença de curvatura e torção, o teorema de Noether fornece a mesma lei de conservação da relatividade geral.

2.6 Identidades de Bianchi

Analogamente à teoria de Maxwell, a primeira indentidade de Bianchi da teoria de gauge para o grupo das translações é [28]

$$\partial_{\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\rho\mu} + \partial_{\mu}\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\nu\rho} = 0. \tag{2.71}$$

Através de um cálculo tedioso, mas direto, ela pode ser reescrita de uma forma somente de espaço-tempo:

$$\overset{\bullet}{Q}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} + \overset{\bullet}{Q}{}^{\rho}{}_{\nu\theta\mu} + \overset{\bullet}{Q}{}^{\rho}{}_{\mu\nu\theta} = 0. \tag{2.72}$$

Usando a relação (2.24), é fácil verificar que ela coincide com a primeira identidade de Bianchi da relatividade geral:

$$\overset{\circ}{R}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} + \overset{\circ}{R}{}^{\rho}{}_{\nu\theta\mu} + \overset{\circ}{R}{}^{\rho}{}_{\mu\nu\theta} = 0. \tag{2.73}$$

Por outro lado, semelhantemente à relatividade geral, a gravitação teleparalela apresenta também uma segunda identidade de Bianchi, que é dada por

$$\overset{\bullet}{D}_{\sigma}\overset{\bullet}{Q}_{\rho\theta\mu\nu} + \overset{\bullet}{D}_{\nu}\overset{\bullet}{Q}_{\rho\theta\sigma\mu} + \overset{\bullet}{D}_{\mu}\overset{\bullet}{Q}_{\rho\theta\nu\sigma} = 0. \tag{2.74}$$

Esta identidade é equivalente à segunda identidade de Bianchi da relatividade geral,

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\sigma}\overset{\circ}{R}_{\rho\theta\mu\nu} + \overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\overset{\circ}{R}_{\rho\theta\sigma\mu} + \overset{\circ}{\nabla}_{\mu}\overset{\circ}{R}_{\rho\theta\nu\sigma} = 0, \tag{2.75}$$

cuja forma contraida é

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\rho}\left[\overset{\circ}{R}_{\lambda}{}^{\rho} - \tfrac{1}{2}\delta_{\lambda}{}^{\rho}\overset{\circ}{R}\right] = 0. \tag{2.76}$$

Através de um processo semelhante, a forma contraída da identidade de Bianchi teleparalela (2.74) é

$$\overset{\bullet}{D}_{\rho}\left\{\frac{1}{h}\left[\partial_{\sigma}(h\overset{\bullet}{S}_{\lambda}{}^{\rho\sigma}) - k^{2}\,(h\overset{\bullet}{t}_{\lambda}{}^{\rho})\right]\right\} = 0. \tag{2.77}$$

Se lembrarmos que, na presença de um campo fonte qualquer, a equação de campo teleparalela é dada por

$$\partial_\sigma(h\overset{\bullet}{S}_\lambda{}^{\rho\sigma}) - k^2\,(h\overset{\bullet}{t}_\lambda{}^{\rho}) = k^2\,(h\Theta_\lambda{}^{\rho}), \tag{2.78}$$

a identidade de Bianchi (2.77) nos fornece a lei de conservação do tensor energia-momento de matéria:

$$\overset{\bullet}{D}_\rho\Theta_\lambda{}^{\rho} = 0. \tag{2.79}$$

Agora, de modo a sermos consistentes com a segunda identidade de Bianchi (2.77), vemos da equação de campo (2.78) que o tensor de energia-momento de matéria deve satisfazer a lei de conservação,

$$\overset{\bullet}{D}_\rho\Theta^\rho{}_\lambda \equiv \partial_\rho\Theta^\rho{}_\lambda + (\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\rho} - \overset{\bullet}{K}{}^\rho{}_{\nu\rho})\Theta^\nu{}_\lambda - (\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\nu{}_{\lambda\rho} - \overset{\bullet}{K}{}^\nu{}_{\lambda\rho})\Theta^\rho{}_\nu = 0 \tag{2.80}$$

ou equivalentemente,

$$\overset{\circ}{\nabla}_\rho\Theta^\rho{}_\lambda \equiv \partial_\rho\Theta^\rho{}_\lambda + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\rho}\Theta^\nu{}_\lambda - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\nu{}_{\lambda\rho}\Theta^\rho{}_\nu = 0. \tag{2.81}$$

Como uma inspeção simples nos mostra, as leis de conservação acima, obtidas através da identidade de Bianchi, são consistentes com as leis de conservação correspondentes obtidas do teorema de Noether.

Capítulo 3

Gravitação Sem o Princípio da Equivalência

3.1 Mecânica de uma Partícula

3.1.1 Geodésica Versus Equação de Força

Vamos considerar, no contexto da gravitação teleparalela, o movimento de uma partícula sem spin de massa m em um campo gravitacional $B^a{}_\mu$. Analogamente ao caso eletromagnético, a integral de ação é escrita na forma

$$\mathcal{S} = \int_a^b \left[-m\, c\, u_a\, dx^a - B^a{}_\mu\, p_a\, dx^\mu \right], \tag{3.1}$$

onde

$$p_a = mcu_a \tag{3.2}$$

é a "carga" conservada sob translações no espaço-tempo, e

$$u^a = h^a{}_\mu\, u^\mu = h^a \left(\frac{1}{ds} \right) \tag{3.3}$$

é a quadri-velocidade anolônoma da partícula, com

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \tag{3.4}$$

a quadri-velocidade holônoma, que é escrita em termos do intervalo invariante no espaço-tempo $ds = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$.

Substituindo o quadri-momento (3.2), a ação (3.1) se torna

$$\mathcal{S} = -m\, c \int_a^b \left[u_a\, dx^a + B^a{}_\mu\, u_a\, dx^\mu \right]. \tag{3.5}$$

O primeiro termo representa a ação de uma partícula livre, e o segundo termo representa o acoplamento da massa da partícula com o campo gravitacional. Note que a separação da ação neste dois termos é possível apenas em uma teoria de gauge, como é o caso da gravitação teleparalela, não sendo possível na relatividade geral. Apesar desta diferença, a ação (3.5) é equivalente à ação usual da relatividade geral. De fato, usando a identidade

$$h^a = dx^a + B^a, \tag{3.6}$$

a ação se reduz à

$$\mathcal{S} = -m\,c \int_a^b u_a\, h^a. \tag{3.7}$$

Como $u_a\, h^a = ds$, vemos que a ação se reduz a sua versão da relatividade geral

$$\mathcal{S} = -\int_a^b m\,c\,ds.$$

Neste caso, a interação da partícula com o campo gravitacional é descrito pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, usado para definir ds.

A variação da ação (3.1) fornece a equação de movimento

$$h^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = \stackrel{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\rho}\, u_a\, u^\rho. \tag{3.8}$$

Esta é a equação de força que governa o movimento da partícula, no qual a intensidade do campo de gauge $\stackrel{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\rho}$ — isto é, a torção — desempenha o papel de força gravitacional. Para escrevê-la numa forma puramente de espaço-temporal, usamos a relação

$$h^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = \omega_\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds} - \stackrel{\bullet}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta\, u^\nu, \tag{3.9}$$

onde ω_μ é a quadri–aceleração da partícula. Então, obtemos que

$$u^\nu \stackrel{\bullet}{\nabla}_\nu u_\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds} - \stackrel{\bullet}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu}\, u_\theta\, u^\nu = \stackrel{\bullet}{T}{}^\theta{}_{\mu\nu}\, u_\theta\, u^\nu. \tag{3.10}$$

O lado esquerdo desta equação é a *derivada covariante de Weitzenböck* da quadrivelocidade u_μ ao longo da linha de mundo da partícula. A presença do tensor de torção no lado direito, como já mencionado, mostra que na gravitação teleparalela a torção faz o papel de força gravitacional. Usando a identidade

$$\stackrel{\bullet}{T}{}^\theta{}_{\mu\nu}\, u_\theta\, u^\nu = -\stackrel{\bullet}{K}{}^\theta{}_{\mu\nu}\, u_\theta\, u^\nu, \tag{3.11}$$

esta equação pode ser reescrita na forma

$$u^\nu \stackrel{\bullet}{D}_\nu u_\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds} - \left(\stackrel{\bullet}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu} - \stackrel{\bullet}{K}{}^\theta{}_{\mu\nu}\right) u_\theta\, u^\nu = 0. \tag{3.12}$$

O lado esquerdo desta equação é a *derivada covariante teleparalela* de u_μ ao longo da linha de mundo da partícula. Usando a relação (2.16), ela resulta

$$u^\nu \stackrel{\circ}{\nabla}_\nu u_\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds} - \stackrel{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu}\, u_\theta\, u^\nu = 0. \tag{3.13}$$

Esta é exatamente a equação da geodésica da relatividade general, o que significa que as trajetórias seguidas por partículas sem spin são geodésicas no espaço-tempo de Riemann. Em um sistema de coordenadas localmente inercial, a primeira derivada do tensor métrico se anula, e consequentemente a conexão de Levi-Civita

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) \tag{3.14}$$

se anula também. Neste caso, a equação geodésica (3.13) se torna a equação de movimento de uma partícula livre. Esta é a versão usual do princípio de equivalência (forte), como formulado na relatividade geral [27].

É importante notar que, usando a definição de torção (2.20), a equação de força (3.10) pode ser reescrita na forma alternativa

$$\frac{du_\mu}{ds} - \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\nu\mu} \, u_\theta \, u^\nu = 0. \tag{3.15}$$

Como $\overset{\bullet}{\Gamma}_{\theta\nu\mu}$ não é simétrico nos últimos dois índices, esta não é uma equação de geodésica. Isto significa que as trajetórias seguidas por partículas sem spin não são geodésicas — ou autoparalelas — no espaço-tempo de Weitzenböck. Em um sistema de coordenadas localmente inercial, a primeira derivada do tensor métrico se anula, e se lembrarmos que $g_{\mu\nu} = h^a{}_\mu \, h_{a\nu}$, então obtemos que

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} \equiv \overset{\bullet}{\Gamma}_{\nu\mu\rho} + \overset{\bullet}{\Gamma}_{\mu\nu\rho} = 0. \tag{3.16}$$

Isto significa que a conexão de Weitzenböck $\overset{\bullet}{\Gamma}_{\theta\nu\mu}$ se torna anti-simétrica nos *dois primeiros índices*. Portanto, neste sistema de coordenadas, devido à simetria de $u^\theta \, u^\nu$, a equação de força (3.15) se torna a equação de movimento de uma partícula livre. Esta é a versão teleparalela do princípio de equivalência (forte) [16].

3.1.2 O Limite Newtoniano

Vamos agora considerar o limite Newtoniano, o qual é obtido assumindo que o campo gravitacional é estacionário e fraco. Isto significa que a derivada no tempo de $B^a{}_\mu$ se anula, e que $|B^a{}_\mu| \ll 1$, respectivamente. Conseqüentemente, todas as partículas vão se mover com uma velocidade suficientemente pequena de tal forma que[1] u^i pode ser descartado em relação a u^0. Neste caso, a equação de movimento (3.15) pode ser escrita como

$$\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} - \overset{\bullet}{\Gamma}_{00\mu} \, c^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0. \tag{3.17}$$

[1] Usaremos $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$ para denotar as componentes de espaço dos índices de espaço-tempo.

Agora, levando em consideração que o campo é estacionário, e até primeira ordem em ${B^a}_\mu$, obtemos da definição da conexão de Weitzenböck (2.14) que

$$\overset{\bullet}{\Gamma}_{00\mu} = \partial_\mu B_{00}. \tag{3.18}$$

A equação de movimento (3.17) é então equivalente à estas duas equações,

$$\frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = -c^2\, \vec{\nabla} B_{00} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \tag{3.19}$$

e

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = 0, \tag{3.20}$$

onde $x_0 = x^0 = ct$, e as componentes de $\vec{x}$ são dadas por $x^i = -x_i$. A solução da segunda equação é que dt/ds é constante. Dividindo por $(dt/ds)^2$ deixa a primeira equação na forma

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -c^2\, \vec{\nabla} B_{00}. \tag{3.21}$$

O resultado Newtoniano correspondente é

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi, \tag{3.22}$$

onde ϕ é o potencial gravitacional. Comparando (3.21) com (3.22) nós vemos que

$$c^2\, B_{00} = \phi. \tag{3.23}$$

3.2 Trabalhando sem o Princípio da Equivalência

3.2.1 Teleparalelismo e Universalidade

Ao menos no nível clássico, a gravitação mostra uma propriedade bem peculiar: partículas com massas diferentes e composições diferentes sentem a gravitação de tal forma que todas elas adquirem a mesma aceleração, e dadas as mesmas condições iniciais, seguem o mesmo caminho. Tal resposta universal — geralmente referida como *universalidade* — é a característica mais fundamental da interação gravitacional [29]. Ela é única, e peculiar à gravitação: nenhuma outra interação básica da natureza possui essa característica. Por outro lado, há muito que se conhece efeitos que são sentidos igualmente por todos os corpos. Estes efeitos são conhecidos como efeitos *inerciais*, que aparecem em referenciais não-inerciais. Exemplos na terra são as forças centrífugas e de Coriolis.

A universalidade dos efeitos gravitacionais e inerciais foi um dos ingredientes usados por Einstein para construir a relatividade geral, sua teoria para a gravitação. Outro ingrediente foi a noção de campo. Este conceito fornece uma melhor formulação para as interações, coerentes com a relatividade especial. Todas as forças conhecidas são mediadas por campos no espaço-tempo. Pelas considerações acima, se a gravitação deve ser representada por um campo, ela deve ser um campo universal, igualmente sentido por todas as partículas. Uma solução natural seria assumir que a gravitação muda o próprio espaço-tempo. E, de todos os campos presentes no espaço-tempo, a métrica parece ser o mais fundamental. Então, o jeito mais simples de se mudar o espaço-tempo seria mudar sua métrica. Além disso, a métrica realmente muda quando vista de um referencial não-inercial, caso em que os efeitos inerciais (também universais) estão presentes. Portanto, a presença de um campo gravitacional deveria ser representada por uma mudança na métrica do espaço-tempo. Na ausência de gravitação, a métrica deveria se reduzir à métrica de Minkowski.

Um ponto crucial da descrição de Einstein, a qual está fundamentalmente baseada na universalidade, é que ela não faz uso do conceito de *força* para a interação gravitacional. De fato, a gravitação é representada por uma deformação na estrutura do espaço-tempo, ao invéz de atuar através de uma força. Mais precisamente, supõe-se que a presença de um campo gravitacional produza uma *curvatura* no espaço-tempo. Uma partícula (sem spin) em um campo gravitacional simplesmente seguiria as geodésicas do espaçõ-tempo modificado. Note que nenhum outro tipo de deformação no espaço-tempo se supõe existir. Por exemplo, assume-se que a torção, que seria outra deformação natural do espaço-tempo, se anula desde o princípio. Esta é a formulação da relatividade geral, na qual a geometria substitui o conceito de força gravitacional, e as trajetórias são determinadas por geodésicas, não por equações de força. Os espaço-tempos subjacentes são espaços pseudo-Riemannianos.

É importante frizar que apenas uma interação que apresenta a propriedade de universalidade pode ser descrita por uma geometrização do espaço-tempo. Na eventual ausência da universalidade, a descrição da relatividade geral da gravitação falharia. É importante notar também que a universalidade da queda livre é geralmente identificada como uma afirmação do princípio de equivalência fraco. De fato, se todas as partículas se movem ao longo de geodésicas, o movimento será independente de suas massas, e consequentemente universal. Mas, de modo que seja independente de suas massas, elas devem de alguma forma ser canceladas da equação de movimento. Como este cancelamento só pode ser feito quando as massas inerciais e gravitacionais coincidem, esta última afirmação é também geralmente identificada com o princípio de equivalência fraco. No entanto, devemos notar que isto somente é verdade no nível clássico. No nível quântico, mesmo que as massas inerciai e gravitacionais coincidam, os efeitos gravitacionais podem eventualmente depender da massa.

Na relatividade geral de Einstein, que é uma teoria fundamentalmente baseada na universalidade de queda livre, ou equivalentemente, no princípio de equivalência fraco, a geometria substitui o conceito de força na descrição da interação gravitacional. Apesar da relatividade geral ter passado em todos os teste experimentais [30, 31], ao menos no nível clássico, uma possível violação do princípio de equivalência fraco levaria à não-universalidade da queda livre, entre outras consequências observáveis, e consequentemente à ruina da descrição gravitacional da relatividade geral. Notemos que a ausência de um princípio de equivalência eletromagnético é a razão pela qual não existe uma descrição geométrica, no sentido da relatividade geral, para a interação eletromagnética.

Sendo uma teoria de gauge para o grupo das translações, o equivalente teleparalelo da relatividade geral não descreve a interação gravitacional através de uma geometrização do espaço-tempo, mas sim como uma força gravitacional semelhante à força de Lorentz do eletromagnetismo. Por outro lado, a teoria de Maxwell, que é uma teoria de gauge para o grupo unitário $U(1)$, é capaz para descrever a interação eletromagnética, a qual é não-universal. Dada a analogia entre o eletromagnetismo e a gravitação teleparalela, a questão que se coloca é se a formulação de gauge da gravitação teleparalela também seria capaz de descrever a interação gravitacional na ausência de universalidade, isto é, na ausência do princípio de equivalência fraco. É importante deixar claro que, embora existam várias controvérsias relacionadas com o princípio de equivalência [32, 33], nossa intenção não é questionar sua validade, mas simplesmente verificar se a descrição teleparalela da gravitação requer ou não sua existência.

Para responder a pergunta acima, vamos considerar de novo o problema do movimento de uma partícula sem spin em um campo gravitacional representado pelo potencial de gauge translacional ${B^a}_\mu$. No entanto, de modo a violarmos explícitamente o princípio de equivalência fraco, e consequentemente a universalidade de queda livre, vamos assumir que a massa gravitacional m_g e a massa inercial m_i não coincidem. Neste caso, a integral de ação é escrita na forma

$$\mathcal{S} = -m_i\, c \int_a^b \left[u_a\, dx^a + \frac{m_g}{m_i}\, {B^a}_\mu\, u_a\, dx^\mu \right]. \tag{3.24}$$

A variação da ação (3.24) nos dá a equação de movimento [34]

$$\left(\partial_\mu x^a + \frac{m_g}{m_i}\, {B^a}_\mu \right) \frac{du_a}{ds} = \frac{m_g}{m_i}\, {\overset{\bullet}{T}{}^a}_{\mu\rho}\, u_a\, u^\rho. \tag{3.25}$$

Esta é a equação de força que governa o movimento da partícula, na qual a torção ${\overset{\bullet}{T}{}^a}_{\mu\rho}$ faz o papel de força gravitacional. Semelhantemente à força de Lorentz do eletromagnetismo, que depende da relação q/m_i, com q a carga elétrica da partícula, a força gravitacional depende explicitamente na relação m_g/m_i da partícula.

O ponto crucial a se notar é que, embora a equação de movimento dependa explicitamente na relação m_i/m_g da partícula, tanto ${B^a}_\mu$ como ${\overset{\bullet}{T}{}^a}_{\rho\mu}$ não dependem desta relação. Isto significa essencialmente que a equação de campo teleparalela

(2.38) pode ser consistentemente resolvida para o potencial gravitacional $B^a{}_\mu$, que pode então ser usado para escrever a equação de movimento (3.25), independentemente da validade ou não do princípio de equivalência fraco [35]. Assim, mesmo na ausência do princípio de equivalência fraco, a gravitação teleparalela é capaz de descrever o movimento de uma partícula com $m_g \neq m_i$ [34].

3.2.2 Relatividade Geral e Universalidade

Agora, vamos ver o que acontece no contexto da relatividade geral. Usando a identidade (3.11), a equação de força (3.25) pode ser reescrita na forma

$$\frac{du_\mu}{ds} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\rho}\, u_\lambda\, u^\rho = \left(\frac{m_g - m_i}{m_g}\right) \partial_\mu x^a \, \frac{du_a}{ds}, \tag{3.26}$$

onde usamos também a relação (2.16). Note que a violação do princípio de equivalência fraco produz um desvio no movimento geodésico, o qual é proporcional à diferença entre as massas gravitacional e inercial. Além disso, note que como assumimos a não-universalidade de queda livre, não existe um sistema de coordenadas local no qual os efeitos gravitacionais estão ausentes. Então, as geodésicas do espaço-tempo curvo não representam mais as linhas de mundo das partículas em queda livre. Isso significa que a relatividade geral falha, e a gravitação não é mais uma teoria geométrica. É claro que quando $m_g = m_i$, a equação de movimento (3.26) se reduz à equação da geodésica da relatividade geral. No entanto, na ausência do princípio de equivalência fraco, ela não é uma equação de geodésica, o que significa que ela não cumpre com a descrição *geométrica* da relatividade geral, de acordo com a qual as trajetórias de todas as partículas sem spin devem ser dadas por *geodésicas*.

No limite Newtoniano, a equação de movimento (3.25) se reduz a

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_g}{m_i}\, c^2\, \vec{\nabla} B_{00}. \tag{3.27}$$

Comparando com a equação Newtoniana (3.22), devemos ter que $c^2 B_{00} = \phi$ para que

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_g}{m_i}\, \vec{\nabla}\phi. \tag{3.28}$$

De acordo com esta equação, se o princípio de equivalência fraco não é válido, a força gravitacional é proporcional à relação (m_g/m_i) no limite Newtoniano. Como a teoria de Newton também não exige a igualdade entre as massas gravitacional e inercial — isto é, não depende da universalidade — podemos afirmar que o limite Newtoniano segue de forma muito mais natural do teleparalelismo do que da relatividade geral. Isso fica ainda mais evidente se lembrarmos que, enquanto na relatividade geral não existe o conceito de força gravitacional, este conceito existe tanto no teleparalelismo como na teoria de Newton.

É importante observar que, se tentarmos incorporar a ausência de universalidade nos fundamentos da relatividade geral, veremos que se torna necessário incorporar as propriedades da partícula na geometria. Isto pode ser conseguido assumindo que, ao invéz da tetrada (2.9) da gravitação teleparalela, definamos uma nova tetrada

$$\bar{h}^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \frac{m_g}{m_i} \, B^a{}_\mu, \tag{3.29}$$

a qual leva em consideração a relação m_g/m_i da partícula sob consideração. Esta tetrada define uma nova métrica no espaço-tempo

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{ab} \, \bar{h}^a{}_\mu \, \bar{h}^b{}_\nu, \tag{3.30}$$

em termos da qual o intervalo invariante de espaço-tempo correspondente é

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} \, dx^\mu dx^\nu. \tag{3.31}$$

Notando que neste caso a relação entre o campo de gauge e a torção se torna

$$\frac{m_g}{m_i} \, \overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\rho} = \bar{h}^a{}_\lambda \, \overset{\bullet}{\bar{T}}{}^\lambda{}_{\mu\rho}, \tag{3.32}$$

é fácil verificar que, para uma dada relação m_g/m_i, a equação de movimento (3.8) é equivalente à equação da geodésica

$$\frac{d\bar{u}_\mu}{d\bar{s}} - \overset{\circ}{\bar{\Gamma}}{}^\lambda{}_{\mu\rho} \, \bar{u}_\lambda \, \bar{u}^\rho = 0, \tag{3.33}$$

onde $\bar{u}_\mu \equiv dx_\mu/d\bar{s} = \bar{h}^a{}_\mu u_a$, e $\overset{\circ}{\bar{\Gamma}}{}^\rho{}_{\mu\nu}$ é a conexão de Christoffel da métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$. Note que esta equação também pode ser obtida da integral de ação

$$\bar{S} = -m_i \; c \int_a^b d\bar{s}, \tag{3.34}$$

que é a forma usual da ação no contexto da relatividade geral.

No entanto, o preço a se pagar por impor uma equação de movimento geodésica para descrever uma interação não-universal é que a teoria gravitacional se torna inconsistente. De fato, a solução da equação de campo de Einstein correspondente

$$\overset{\circ}{\bar{R}}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \, \bar{g}_{\mu\nu} \overset{\circ}{\bar{R}} = \frac{8\pi G}{c^4} \, \bar{\Theta}_{\mu\nu}, \tag{3.35}$$

neste caso dependeria na relação m_g/m_i da partícula teste, o que torna a teoria inconsistente no sentido de que partículas testes com diferentes relaçõe m_g/m_i iriam requerer conexões com diferentes curvaturas para manter todas as equações de movimento dadas por geodésicas. É claro que, sendo um campo verdadeiro, o campo gravitacional não pode depender de qualquer propriedade de partículas teste.

Podemos então concluir que, na ausência do princípio de equivalência fraco, a descrição geométrica da gravitação fornecida pela relatividade geral desaparece. Como o potencial de gauge $B^a{}_\mu$ pode ser sempre obtido independentemente de qualquer propriedade da partícula teste, a gravitação teleparalela permanece uma teoria consistente na falta de universalidade. Por conseguinte, $B^a{}_\mu$ pode ser considerado como o campo mais fundamental que descreve a gravitação [34]. Apesar da equivalência entre a descrição geométrica da relatividade geral e a descrição de gauge da gravitação teleparalela quando se assume que o princípio de equivalência é válido, a gravitação teleparalela pode ser considerada como uma teoria mais fundamental no sentido que ela não precisa do princípio de equivalência para descrever a interação gravitacional.

Capítulo 4

Formulação Global para a Gravitação

4.1 O Fator de Fase Não-Integrável

O campo fundamental da gravitação teleparalela é o potencial de gauge $B^a{}_\mu(x)$. Nesta formulação, a gravitação torna-se bastante parecida com o eletromagnetismo. Baseando-se nesta analogia, e também na formulação integral da teoria de Maxwell, um tratamento de fator de fase não-integrável teleparalelo para a gravitação pode ser desenvolvido [36]. Como no caso eletromagnético, ele representa a versão quântica da força de Lorentz gravitacional clássica.

Como é bem conhecido, além do formalismo *diferencial* usual, o eletromagnetismo também apresenta um formulação *global* em termos de um fator de fase não-integrável [37]. De acordo com esta formulação, podemos considerar o eletromagnetismo como a ação invariante de gauge de um fator de fase não-integrável (isto é, dependente do caminho). Para uma partícula com carga elétrica q em movimento, com ponto inicial P e ponto final Q, o fator de fase é

$$\Phi_e(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) = \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\int_{\mathsf{P}}^{\mathsf{Q}} A_\mu \, dx^\mu\right], \tag{4.1}$$

onde A_μ é o potecial de gauge eletromagnético. No limite clássico (não-quântico), o tratamento do fator de fase não-integrável produz os mesmos resultados da equação de força de Lorentz

$$\frac{du^a}{ds} = \frac{q}{mc^2} \, F^a{}_b \, u^b. \tag{4.2}$$

Neste sentido, podemos considerar o tratamento do fator de fase como uma generalização *quântica* da equação de força de Lorentz *clássica*. Na realidade, ele é mais geral pois pode ser usado tanto em domínios simplesmente-conexos, como também em domínios mutiplamente-conexos. De fato, este formalismo pode ser usado para descrever o efeito Aharonov-Bohm, um fenômeno quântico que aparece em espaços mutiplamente-conexos.

Em analogia com o eletromagnetismo, $B^a{}_\mu$ pode então ser usado para construir uma formulação gobal para a gravitação. Comecemos com o fator de fase eletromagnético $\Phi_e(\mathsf{P}|\mathsf{Q})$, o qual é definido por

$$\Phi_e(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\,\mathcal{S}_e\right], \tag{4.3}$$

onde $\mathcal{S}_e$ é a integral de ação que descreve a interação da partícula carregada com o campo eletromagnético. Na gravitação teleparalela, de acordo com a Eq. (3.1), a integral de ação que descreve a interação da partícula de massa gravitacional m_g com o campo gravitacional é

$$\mathcal{S}_g = -\int_{\mathsf{P}}^{\mathsf{Q}} m_g\, c\, B^a{}_\mu\, u_a\, dx^\mu. \tag{4.4}$$

Portanto, o fator de fase gravitacional não-integrável correspondente é dado por [36]

$$\Phi_g(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) = \exp\left[\frac{i m_g c}{\hbar}\int_{\mathsf{P}}^{\mathsf{Q}} B^a{}_\mu\, u_a\, dx^\mu\right]. \tag{4.5}$$

Semelhantemente ao fator de fase eletromagnético, ele representa a lei *quântica* que generaliza a equação de força gravitacional *clássica* (3.25).

4.2 Experiência de Colella-Overhauser-Werner

Como uma primeira aplicação do fator de fase gravitacional não-integrável (4.5), consideremos o experimento de Colella-Overhauser-Werner (COW) [38]. Ele consiste em usarmos um interferômetro de neutrons para observar a mudança de fase quântica causada pela interação com o campo gravitacional da Terra, o qual é usualmente assumido ser Newtoniano. Agora, como já vimos, o campo gravitacional Newtoniano é caracterizado pela condição que somente $B^0{}_0 \neq 0$. Além disso, como a experiência é feita com neutrons térmicos, é possvél usar a aproximação de velocidade pequena. Neste caso, o fator de fase gravitacional (4.5) torna-se

$$\Phi_g(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) = \exp\left[\frac{i m_g}{\hbar}\int_{\mathsf{P}}^{\mathsf{Q}} c^2\, B_{00}\, dt\right], \tag{4.6}$$

onde usamos que $u^0 = \gamma \simeq 1$ para neutrons térmicos. Nesta aproximação, podemos usar a identificação [ver Eq. (3.23)]

$$c^2\, B_{00} = \phi \equiv g\, z, \tag{4.7}$$

onde ϕ é o potencial Newtoniano da Terra (suposto ser homogêneo). Nesta expressão, g é a aceleração gravitacional, a assume-se não mudar significativamente na região da experiência, e z é a distância da Terra desde algum ponto de referência. Conseqüentemente, o fator de fase pode ser reescrito na forma

$$\Phi_g(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) = \exp\left[\frac{im_g g}{\hbar}\int_{\mathsf{P}}^{\mathsf{Q}} z(t)\,dt\right] \equiv \exp i\varphi. \tag{4.8}$$

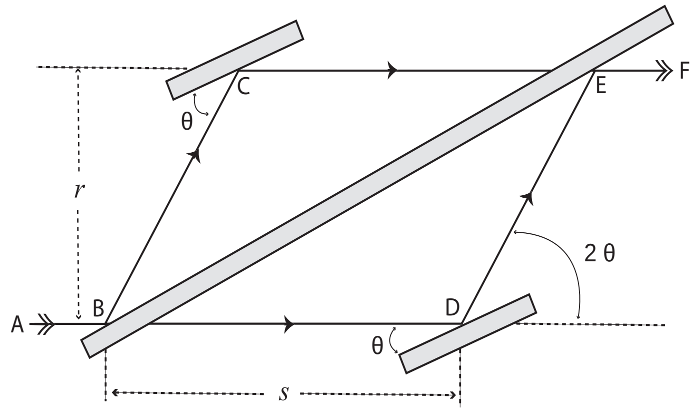

Figura 4.1: *Ilustração esquemática do interferômetro de neutron de COW.*

Calculemos a fase φ através de duas trajetórias da Fig. 4.1. Primeiro, consideraremos a trajetória BDE. Assumindo que o segmento BD é em $z = 0$, obtemos

$$\varphi_{\mathsf{BDE}} = \frac{m_g g}{\hbar}\int_{\mathsf{D}}^{\mathsf{E}} z(t)\,dt. \tag{4.9}$$

Para a trajetória BCE, temos

$$\varphi_{\mathsf{BCE}} = \frac{m_g g}{\hbar}\int_{\mathsf{B}}^{\mathsf{C}} z(t)\,dt + \frac{m_g g r}{\hbar}\int_{\mathsf{C}}^{\mathsf{E}} dt. \tag{4.10}$$

Como a contribuição para a fase dos segmentos DE e BC são iguais, obtemos

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{\mathsf{BCE}} - \varphi_{\mathsf{BDE}} = \frac{m_g g r}{\hbar}\int_{\mathsf{C}}^{\mathsf{E}} dt. \tag{4.11}$$

Para a velocidade do neutron através do segmento CE, nós temos

$$\int_{\mathsf{C}}^{\mathsf{E}} dt \equiv \frac{s}{v} = \frac{s m_i \lambda}{h}, \tag{4.12}$$

onde s é o comprimento do segmento CE, e $\lambda = h/(m_i v)$ é o comprimento de onda de de Broglie associado ao neutron. Portanto, obtemos

$$\Delta\varphi = s\,\frac{2\pi g r \lambda m_g m_i}{h^2}. \tag{4.13}$$

Se assumirmos que o princípio de equivalência fraco é válido, a massa gravitacional m_g e a massa inercial m_i coincidirão, e a mudança de fase torna-se

$$\Delta\varphi = s\,\frac{2\pi g r \lambda m^2}{h^2}, \tag{4.14}$$

que é exatamente a diferença de fase induzida gravitacionalmente pelo experimento de COW, a qual já foi verificada experimetalmente muitas vezes [39]. É importante observar que, mesmo quando as massas inercial e gravitacional são iguais, a diferença de fase depende da massa da partícula. Isso é uma forte indicação de que a gravitação no nível quântico parece deixar de ser universal [40].

4.3 O Efeito Aharonov-Bohm Gravitacional

Como uma segunda aplicação, usaremos o fator de fase (4.5) para estudar a analogia gravitacional do efeito Aharonov-Bohm [41]. O efeito de Aharonov-Bohm (eletromagnético) usual consiste em uma mudança, por uma quantidade constante, do padrão de interferência do elétron, numa região onde não há campo magnético, mas há um potencial de gauge não-trivial A_i. Semelhantemente, o efeito Aharonov-Bohm gravitacional consiste numa mudança semelhante do mesmo padrão de interferência, mas produzido pela presença de um potencial de gauge gravitacional B_{0i}. Como a mudança de fase no experimento COW é produzida pelo acoplamento da massa do neutron com a compomente B_{00} do potencial de gauge das translações, podemos considerará-lo como um efeito de Aharonov-Bohm gravitoelétrico. Uma denominação semelhante é usada no caso eletromagnético [42].

Fenomenologicamente, este tipo de efeito pode aparecer nas imediações de uma fonte massiva girando, como por exemplo como uma estrêla de neutrons. Diferentemente de uma situação ideal, na situação real o campo gravitacional não pode ser eliminado, e conseqüentemente o efeito Aharonov-Bohm gravitacional deve ser adicionado aos outros efeitos que também provocam uma mudança de fase.

Primeiro, consideraremos o caso em que não há campo externo. Se os elétrons são emitidos com momentum característico p, então a função de onda tem comprimento de onda $\lambda = h/p$. Denotando por L a distância entre a fenda e a tela (ver Fig. 4.2), e por d a distância entre as duas fendas, a diferença de fase numa distância x do ponto central da tela é

$$\delta^0\varphi(x) = \frac{2\pi x d}{L\lambda}. \tag{4.15}$$

Esta expressão define o padrão de interferência na tela.

Consideremos agora o caso em que uma espécie de "solenóide gravitacional" infinito produz um fluxo de campo gravitomagnético estático concentrado no seu interior. Na situação ideal, o campo gravitacional desaparece completamente fora do solenóide, mas existe um potencial de gauge não-trivial B_{0i}. Quando deixamos

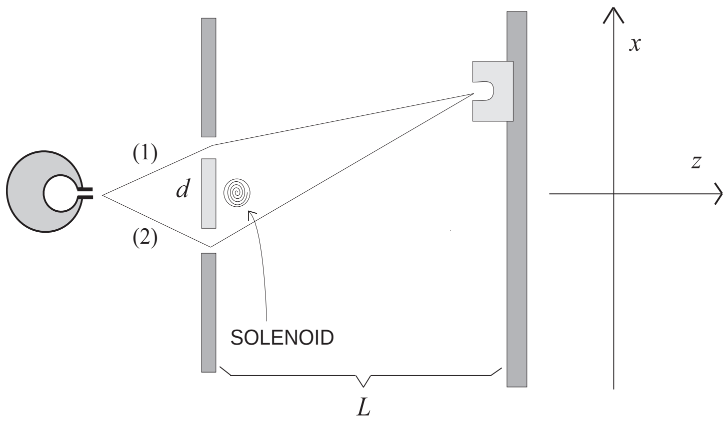

Figura 4.2: *Ilustração esquemática do interferômetro de elétron de Aharonov-Bohm.*

os elétrons se moverem no lado de fora do solenóide, os fatores de fase correspondentes aos caminhos de um dos lado do solenóide interferirão com fatores de fase correspondentes aos caminhos do outro lado. Como resultado dessa diferença de fase adicional, o padrão de interferência na tela será alterado. Calculemos, então, esta mudança de fase adicional. O fator de fase gravitacional (4.5) pela situação física descrita acima é

$$\Phi_g(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) = \exp\left[-\frac{im_g c}{\hbar}\int_{\mathsf{P}}^{\mathsf{Q}} u^0 \vec{B}_0 \cdot d\vec{r}\right], \tag{4.16}$$

onde $\vec{B}_0$ é o vetor com componentes ${B_0}^i = -B_{0i}$. Como

$$u^0 = \gamma \equiv [1 - (v^2/c^2)]^{-1/2},$$

e considerando que a velocidade do elétron v é constante, podemos escrever

$$\Phi_g(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) = \exp\left[-\frac{i\gamma m_g c}{\hbar}\int_{\mathsf{P}}^{\mathsf{Q}} \vec{B}_0 \cdot d\vec{r}\right]. \tag{4.17}$$

Agora, denotando por φ_1 a fase correspondente ao caminho por um lado do solenóide, e por φ_2 a fase correspondente ao caminho pelo outro lado, a diferença de fase na tela será

$$\delta\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\gamma m_g c}{\hbar}\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{r}. \tag{4.18}$$

Ela pode ser reescrita na forma

$$\delta\varphi = \frac{\mathcal{E}\,\Omega}{\hbar\, c}\left(\frac{m_g}{m_i}\right), \tag{4.19}$$

onde $\mathcal{E} = \gamma m_i c^2$ é a energia cinética do elétron, e

$$\Omega = \oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{r} = \oint (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{\sigma} \equiv \oint \vec{H} \cdot d\vec{\sigma} \tag{4.20}$$

é o fluxo de $\vec{H}$ no interior do solenóide. Em componentes, o campo gravitacional $\vec{H}$ é escrito como

$$H^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\left(\partial_j B_{0k} - \partial_k B_{0j}\right) = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\,\overset{\bullet}{T}_{0jk}, \tag{4.21}$$

com $\overset{\bullet}{T}_{0jk}$ o campo teleparalelo (2.11). Lembrando que a torção axial é definida por

$$\overset{\bullet}{a}{}^{\mu} = (1/6)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\overset{\bullet}{T}_{\nu\rho\sigma},$$

é então fácil verificar que $H^i = \overset{\bullet}{a}{}^i$ são as componentes espaciais da torção axial, com

$$\overset{\bullet}{a}{}^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\,\overset{\bullet}{T}_{0jk}. \tag{4.22}$$

Isso mostra que H^i representa a componente gravitomagnética do campo gravitacional [43], em analogia ao campo magnético do efeito Aharonov-Bohm eletromagnético.

A expressão (4.19) fornece a diferença de fase produzida pela interação da energia cinética das partículas com um potencial de gauge, que causa o efeito Aharonov-Bohm gravitacional. Quando assumimos que as massas inerciais e gravitacionais são iguais, a mudança de fase tem a forma

$$\delta\varphi = \frac{\mathcal{E}\,\Omega}{\hbar\, c}. \tag{4.23}$$

Como esta diferença depende da energia, ela se aplica igualmente á partículas de massivas e não-massivas. Há uma diferença, entretanto: enquanto para partículas massivas ela é um efeito quântico autêntico, para partícula sem massas, devido ao caráter de onda intrínseco delas, ele pode ser considerado como um efeito clássico. De fato, usando a expressão $\mathcal{E} = \hbar\omega$ para a energia, a Eq. (4.23) torna-se

$$\delta\varphi = \frac{\omega\,\Omega}{c}, \tag{4.24}$$

e vemos que, neste caso, a diferença não depende mais da constante de Planck.

Em contraste com o efeito Aharonov-Bohm eletromagnético, a diferença de fase no caso gravitacional depende da energia cinética da partícula, que por sua vez depende da massa e da velocidade da partícula. Como no caso eletromagnético, entretanto, a diferença de fase é independente da posição x na tela, e conseqüentemente o padrão de interferência definido por (4.23) será mudado como um todo por uma quantidade constante. Também é importante mencionar que a invariância do fator de fase gravitacional sob a transformação de gauge translacional (2.12) implica que

$$\Omega\mathcal{E} = n\hbar c, \tag{4.25}$$

onde n é um número inteiro. Diferentemente do caso eletromagnético, no qual é possível definir um *quantum* de fluxo magnético, vemos da equação acima que no caso gravitacional, devido ao fato da energia cinética aparecer no lugar da carga elétrica, não é possível definir um quantum de fluxo gravitomagnético que seja independente das características da partícula [44].

4.4 Tratamentos Quântico versus Clássico

Mostraremos agora que no limite clássico o formalismo do fator de fase não-integrável se reduz ao tratamento usual fornecido pela equação de força gravitacional. No caso eletromagnético, o argumento padrão é bem conhecido: a fase que aparece no caso quântico é exatamente a ação clássica que conduz à força de Lorentz. No entanto, pretendemos ilustrar o resultado diretamente, e para isso consideraremos o experimento de interferência de elétron atravéz de duas fendas, na presença de um campo gravitomagnético estático e homogêneo $\vec{H}$, permeando toda a região entre a fenda e a tela (ver Fig. 4.3). Este campo deve apontar na direção y negativa, e produzir uma mudança de fase que é adicionada à fase (4.15) já existente na ausência de campo gravitomagnético. De acordo com Eq. (4.23), esta mudança é dada por $\mathcal{E}\Omega/\hbar c$, com Ω o fluxo através da superfície S circunscrita pelas duas trajetórias. É

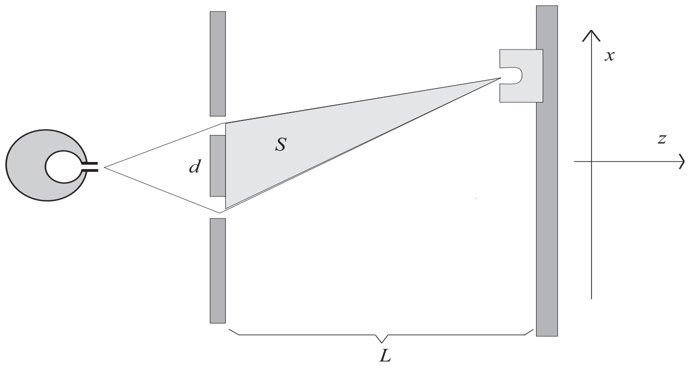

Figura 4.3: *Ilustração esquemática do experimento de interferência de elétrons num campo gravitomagnético. A única contribuição à mudança de fase vem do fluxo através da superfície S delimitada pelas duas trajetórias.*

fácil ver que $S = Ld/2$ para qualquer valor de x. Conseqüentemente, o fluxo é

$$\Omega = -H_y Ld/2, \tag{4.26}$$

onde $\vec{H} = -H_y\,\hat{e}_y$, com $\hat{e}_y$ um vetor unitário na direção y. Portanto, a diferença de fase total será

$$\delta\varphi = \frac{2\pi x d}{L\lambda} - \frac{\mathcal{E} H_y L d}{2\hbar c}. \tag{4.27}$$

Essse é o resultado produzido pelo formalismo do fator de fase.

No limite clássico, podemos interpretar o experimento da fenda da seguinte forma. Os elétrons em movimento através do campo gravitomagnético experimentam uma mudança na direção de movimento. Para x pequeno, podemos escrever a velocidade do elétron aproximadamente como $v \simeq v_z$. Neste caso, eles serão transversalmente acelerados pelo campo gravitomagnético durante o intervalo de tempo

$$\Delta t = \frac{L}{v_z}. \tag{4.28}$$

Esta aceleração na direção x transversal é

$$a_x = \frac{2x}{(\Delta t)^2}. \tag{4.29}$$

Como a aceleração adquirida é constante, podemos escolher um ponto específico para calcula-la. Então, consideramos o ponto de intensidade máxima na tela, o qual é determinado pela condição $\delta\varphi = 0$. Isto produz

$$x = \frac{H_y \, \lambda \, L^2 \, \mathcal{E}}{2 \, h \, c}. \tag{4.30}$$

A aceleração é então

$$a_x = \frac{H_y \, \lambda \, \mathcal{E} \, v_z^2}{h \, c}. \tag{4.31}$$

Portanto, do ponto de vista clássico, podemos dizer que os elétrons experimentam uma força na direção x dada por

$$\mathcal{F}_x \equiv \gamma \, m \, a_x = \frac{\mathcal{E} \, v_z \, H_y}{c} \, \frac{\lambda \, p}{h}, \tag{4.32}$$

com $p = \gamma m v_z$ o momento do elétron. Agora, usando a relação de de Broglie $\lambda = h/p$, é possível eliminar a constante de Planck. Dessa forma, obtemos o resultado clássico

$$\mathcal{F}_x = \frac{\mathcal{E}}{c} \, v_z H_y = \frac{\mathcal{E}}{c} \, (\vec{v} \times \vec{H})_x, \tag{4.33}$$

que fornece a equação de movimento

$$\frac{\overset{\bullet}{D} p_x}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{c} \, (\vec{v} \times \vec{H})_x, \tag{4.34}$$

onde $\overset{\bullet}{D}/dt$ representa uma derivada covariante do tempo na conexão de Weitzenböck. Esta é exatamente a componente x da equação da força gravitacional (3.10).

Para ver isto, consideramos a equação de força de Lorentz gravitacional (3.10)

$$\frac{\overset{\bullet}{D} u_\mu}{ds} \equiv \frac{du_\mu}{ds} - \overset{\bullet}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\rho} \, u_\lambda \, u^\rho = \overset{\bullet}{T}_{\lambda\mu\rho} \, u^\lambda \, u^\rho. \tag{4.35}$$

Como já mencionado, ela é equivalente à equação geodésica da relatividade geral. O lado esquerdo dela é a derivada covariante de Weitzenböck da quadrivelocidade ao longo da trajetória, e o lado direito representa a força gravitacional. Na presença de um campo gravitomagnético, somente as componentes $\overset{\bullet}{T}_{0ij}$ da torção não se anulam. Conseqüentemente, a equação de força acima se reduz a

$$\frac{\overset{\bullet}{D} u_i}{ds} = \overset{\bullet}{T}_{0ij} \, u^0 \, u^j. \tag{4.36}$$

Usando as relações $u^0 = \gamma$ e $u^j = (\gamma v^j)/c$, assim como o fato de que o campo gravito-magnético não muda o valor absoluto da velocidade da partícula, e conseqüentemente $d\gamma/ds = 0$, obtemos

$$\frac{\overset{\bullet}{D} v_i}{ds} = \gamma \, \overset{\bullet}{T}_{0ij} \, v^j. \tag{4.37}$$

De acordo com Eq. (4.21), vemos que $T_{0ij} = \epsilon_{ijk} \, H^k$. Portanto, ao usarmos que $ds = (c/\gamma) dt$, obtemos

$$\frac{\overset{\bullet}{D} v_i}{dt} = c \, \epsilon_{ijk} \, v^j \, H^k = c \, (\vec{v} \times \vec{H})_i. \tag{4.38}$$

A equação correspondente para as componentes do momento $p^i = \gamma m v^i$ é

$$\frac{\overset{\bullet}{D} p^i}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{c} \, (\vec{v} \times \vec{H})^i, \tag{4.39}$$

que é exatamente a Eq. (4.34). A força que aparece no lado direito é bem parecida com a força de Lorentz eletromagnética, com a energia cinética no lugar da carga elétrica, e com o vetor de campo gravitomagnético $\vec{H}$ no lugar do campo magnético usual.

Capítulo 5

Ondas Gravitacionais

5.1 Introdução

Apesar das ondas gravitacionais ainda não terem sido diretamente detectadas, há evidências experimentais convincentes de sua existência, originárias basicamente da mudança do período orbital de sistemas de pulsars binários [45]. Tais evidências, no entanto, não fornecem nenhuma indicação sobre a forma das mesmas. Este assunto, na verdade, ainda é controverso devido às dificuldades teóricas que obscurecem as propriedade das ondas gravitacionais [46]. Um dos maiores problemas refere-se ao conceito de localização da energia na relatividade geral. Por um lado, parece ser concenso que o princípio de equivalência forte proíbe que a energia do campo gravitacional seja definida de forma covariante. Em outras palavras, que ela possa ser localizada [29]. Por outro lado, supoẽ-se frequentemente que as ondas gravitacionais transportam energia, o que implica na existência de algum tipo de localização de energia. Mesmo considerando que as ondas gravitacionais são um fenômeno estendido, estes dois argumentos são claramente conflitantes.

Do ponto de visto da teoria de campos, a gravitação deveria apresentar sua própria densidade de energia. Embora controversa, esta idéia tem recebido suporte considerável. Por exemplo, em seu clássico livro, Synge [32] diz que *In Einstein's theory, either there is a gravitational field or there is none, according to as the Riemann tensor does not or does vanish. This is an absolute property; it has nothing to do with any observer's world line*. De acordo com Synge, portanto, a energia de campo gravitacional deveria ser localizável independentemente de qualquer observador. Na mesma linha, Bondi argumenta que [47] *In relativity a non-localizable form of energy is inadmissible, because any form of energy contributes to gravitation and so its location can in principle be found*. O ponto fundamental é observar que qualquer argumento apoiando a localização de energia está em direto conflito com o princípio de equivalência forte, o qual, acredita-se, proibe tal localização [29].

Por outro lado, como qualquer outra interação fundamental de natureza, a gravitação pode ser descrita em termos de uma teoria de gauge. De fato, o equivalente teleparalelo da relatividade geral, ou simplesmente gravitação teleparalela, pode ser interpretado como uma teoria de gauge para o grupo das translações. Nesta versão alternativa da teoria, em vez de curvatura, a torção representa o campo gravitacional. Portanto, ao invés da variedade de Riemann, o espaço-tempo subjacente é o espaço-tempo de Weitzenböck [48]. Apesar desta diferença fundamental, a gravitação teleparalela é totalmente equivalente á relatividade geral, pelo menos no nível clássico [49]. No entanto, diferenças conceituais aparecem. De acordo com a relatividade geral, a curvatura é usada para *geometrizar* a interação. Por outro lado, o teleparalelismo atribui gravitação á torção, mas neste caso a torção descreve a interação gravitaçional, não atravéz de uma gemetrização, mas atravéz de uma *força*. Como conseqüência, não há geodésicas em gravitação teleparalela, mas somente equações de força parecidas com a equação de força Lorentz da eletrodinâmica [16].

Uma propriedade importante da gravitação teleparalela é que, como já discutido, devido à sua estrutura de gauge, ela não requer o princípio da equivalência para descrever a interação gravitacional [34]. Portanto, a gravitação teleparalela fornece uma formulação mais conveniente para tratar o problema da localização de energia [23] e, conseqüentemente, o problema da enegia transportada por ondas gravitacionais. Neste capítulo, iremos então rever a teoria das ondas gravitacionais, porém desde o ponto de vista do teleparalelismo.

5.2 Aproximação Linear

Em relatividade geral o campo gravitacional é representado pela métrica do espaço-tempo, um tensor simétrico de segunda ordem. As ondas planas gravitacionais correspondentes, obtidas como soluções da equação de Einstein linearizada, apresentam modos com helicidade 0, ± 1 e ± 2. No entanto, através de uma escolha apropriada do sistema de coordenadas, pode-se fazer com que os modos com helicidade 0 e ± 1 se anulem, indicando que não são físicamente relevantes [27]. Portanto, os modos físicamente relevantes são somente aqueles com helicidade ± 2. Por outro lado, no contexto do equivalente teleparalelo da relatividade geral, o campo gravitacional é representado pelo potencial de gauge translacional $B^a{}_\mu$, uma 1-forma assumindo valores na álgebra de Lie do grupo das translações,

$$B_\mu = B^a{}_\mu \, P_a, \tag{5.1}$$

com $P_a = \partial_a$ geradores das translações infinitesimais. Como B_μ é um campo vetorial, parecido ao caso eletromagnético, o campo gravitacional no teleparalelismo deveria apresentadar modos físicos relevantes propagando-se com helicidade ± 1 somente. Se isto fosse verdade, a gravitação teleparalela apresentaria propriedades físicas diferentes em relação á relatividade geral [50]. No entanto, como um potencial de gauge translacional, o índice algébrico de $B^a{}_\mu$ é também un índice de espaço-tempo, porém relacionado ao espaço tangente. Esta propriedade, junto com a propriedade de "soldagem" do fibrado tangente, introduz diferenças importantes em relação ao campo eletromagnético. Para esclarecer este ponto, é conveniente fazer uma comparação entre as equações de ondas da gravitação teleparalela e da relatividade geral.

Estudemos, então, as equações de campo linearizadas da gravitação teleparalela. Primeiramente, notemos que a tetrada trivial $h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a$ descreve a geometria plana. Além disso, é sempre possível escolher coordenadas nas quais a métrica o espaço-tempo tem a mesma forma diagonal da métrica do espaço-tempo de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu x^a \, \partial_\nu x^b \, \eta_{ab} = \eta_{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1).$$

Considerando a condição de campo fraco

$$|B^a{}_\mu| \ll 1, \tag{5.2}$$

podemos expandir a tetrada $h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + B^a{}_\mu$ em torno do epaço plano. Até primeira ordem, a conexão de Weitzenböck é

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\rho{}_{\mu\nu} = \partial_\nu B^\rho{}_\mu, \tag{5.3}$$

onde $B^\rho{}_\mu = \partial_a x^\rho B^a{}_\mu$. Por conseguinte, o torção e seu traço são dados, respectivamente, por

$$\overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^\rho{}_\nu - \partial_\nu B^\rho{}_\mu \quad \text{e} \quad \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\rho} = \partial_\mu B^\rho{}_\rho - \partial_\rho B^\rho{}_\mu. \tag{5.4}$$

Agora, decompomos o tensor $B_{\mu\nu}$ nas partes simétrica e anti-simétrica,

$$B_{\mu\nu} = s_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}, \tag{5.5}$$

onde

$$s_{\mu\nu} := B_{(\mu\nu)} = \tfrac{1}{2}\left(B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu}\right) \quad \text{e} \quad a_{\mu\nu} := B_{[\mu\nu]} = \tfrac{1}{2}\left(B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu}\right). \tag{5.6}$$

Em termos desses novos campos, tensor de contorção é

$$\overset{\bullet}{K}{}^\rho{}_{\mu\nu} = \partial^\rho s_{\mu\nu} - \partial_\mu s^\rho{}_\nu + \partial_\nu a^\rho{}_\mu, \tag{5.7}$$

enquanto que o superpotencial (2.29) torna-se

$$\overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu} = 2\mathcal{F}^{\mu\nu\rho} + \left(\partial^\rho a^{\mu\nu} + \eta^{\rho\nu}\,\partial_\sigma a^{\sigma\mu} - \eta^{\rho\mu}\,\partial_\sigma a^{\sigma\nu}\right), \tag{5.8}$$

com $\mathcal{F}^{\mu\nu\rho} = -\mathcal{F}^{\nu\mu\rho}$ o tensor de Fierz [51]

$$\mathcal{F}^{\mu\nu\rho} = \tfrac{1}{2}\Big[\partial^\mu s^{\nu\rho} - \partial^\nu s^{\mu\rho} - \eta^{\rho\nu}\left(\partial^\mu s^\sigma{}_\sigma - \partial_\sigma s^{\sigma\mu}\right) + \eta^{\rho\mu}\left(\partial^\nu s^\sigma{}_\sigma - \partial_\sigma s^{\sigma\nu}\right)\Big]. \tag{5.9}$$

Consideremos agora a equação do campo gravitacional sem fonte,

$$\partial_\sigma(h\overset{\bullet}{S}{}_\lambda{}^{\rho\sigma}) - k^2\,(h\overset{\bullet}{t}{}_\lambda{}^\rho) = 0, \tag{5.10}$$

com $h\overset{\bullet}{t}_{\lambda}{}^{\rho}$ o pseudotensor energia-momento [23]. Até primeira ordem, ela assume a forma

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu\rho} + \tfrac{1}{2}\partial_\mu \left(\partial^\rho a^{\mu\nu} + \eta^{\rho\nu}\,\partial_\sigma a^{\sigma\mu} - \eta^{\rho\mu}\,\partial_\sigma a^{\sigma\nu}\right) = 0. \tag{5.11}$$

No entato, um cálculo simples nos mostra que

$$\partial_\mu \left(\partial^\rho a^{\mu\nu} + \eta^{\rho\nu}\,\partial_\sigma a^{\sigma\mu} - \eta^{\rho\mu}\,\partial_\sigma a^{\sigma\nu}\right) \equiv 0. \tag{5.12}$$

Como $\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}$ depende apenas do campo simetrico $s^{\mu\rho}$, a parte anti-simetrica de $B_{\mu\nu}$ desaparece completamente de equação linearizada, a qual assume a forma [52]

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu\rho} = 0. \tag{5.13}$$

Substituindo-se o tensor de Fierz (5.9), ela se torna

$$\Box\left(\eta_{\mu\nu}\, s^\rho{}_\rho - s_{\mu\nu}\right) - \partial_\mu\partial_\nu s^\rho{}_\rho - \eta_{\mu\nu}\,\partial_\alpha\partial_\beta s^{\alpha\beta} + \partial_\mu\partial_\lambda s^\lambda{}_\nu + \partial_\nu\partial_\lambda s^\lambda{}_\mu = 0, \tag{5.14}$$

onde $\Box = \partial_\rho\partial^\rho$ é o d'Alembertiano no espaço-tempo plano. Agora, de forma análoga á relatividade geral, podemos adotar o gauge harmônico, no qual

$$\partial_\rho s^\rho{}_\mu = \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu s^\rho{}_\rho. \tag{5.15}$$

Neste caso, a equação de campo (5.14) se reduz a

$$\Box\, s_{\mu\nu} = 0, \tag{5.16}$$

que é a equação de onda relativística usual.

Em termos de $s_{\mu\nu}$ e $a_{\mu\nu}$, o tensor métrico até a primeira ordem é dado por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2 s_{\mu\nu}, \tag{5.17}$$

de onde vemos que $s_{\mu\nu}$ é a perturbação da métrica. A conclusão é que a equação de campo linearizada no teleparalelismo é essencialmente a mesma da relatividade geral. Este resultado concorda com a equivalência entre estas duas teorias. Portanto, os modos físicamente relevantes na gravitação teleparalela são os mesmos da relatividade geral, isto é, aqueles com helicidade ± 2. A parte anti-simétrica de $B_{\mu\nu}$, portanto, não tem relevância física, pelo menos no que concerne a propagação de ondas gravitacionais.

Uma outra maneira de verificar este resultado é observar que a Lagrangiana teleparalela (2.30) pode ser reescrita na forma [52]

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \frac{h}{4k^2}\left(\overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu}\,\overset{\bullet}{S}_{\rho\mu\nu} - \overset{\bullet}{S}{}^{\sigma\mu}{}_\sigma\,\overset{\bullet}{S}{}^\rho{}_{\mu\rho} - 3\,\overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu}\,\overset{\bullet}{S}_{[\rho\mu\nu]}\right). \tag{5.18}$$

Inserindo a expressão de primeira ordem para $\overset{\bullet}{S}_{\rho\mu\nu}$, dada pela Eq. (5.8), podemos verificar que o campo anti-simétrico $a_{\mu\nu}$ desaparece completamente do Lagrangiana (5.18). A equação de campo linearizada (5.11) é obtida pela variação da Lagrangiana (5.18) com respeito a $s_{\mu\nu}$.

Isto mostra que as partículas sem massa das ondas gravitacionais em gravitação teleparalela também têm spin 2.

5.3 Ondas Planas

Como vimos, na ausência de fontes, a equação de onda linearizada assume uma forma parecida com a do caso eletromagnético:

$$\Box s_{\mu\nu} = 0. \tag{5.19}$$

Uma solução de onda plana desta equação é

$$s_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp[ik_\rho x^\rho] + e^*_{\mu\nu} \exp[-ik_\rho x^\rho], \tag{5.20}$$

onde $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ é o tensor de polarização, e o vetor de onda k_ρ satisfaz

$$k_\rho \, k^\rho = 0. \tag{5.21}$$

A condição de gauge (5.15) implica adicionalmente que

$$k_\mu \, e^\mu{}_\nu = \tfrac{1}{2} \, k_\nu \, e, \tag{5.22}$$

onde $e \equiv e^\mu{}_\mu$. A solução acima é usualmente assumida representar uma onda gravitacional plana propagando-se no vácuo com a velocidade da luz. Entretanto, o seu real significado físico só pode ser determinado attravés de uma análise sobre a energia transportada pelas mesmas.

Do ponto de vista conceitual, uma onda linear não deveria ser capaz de transportar sua própria carga. Tomemos como exemplo a Cromodinâmica. Uma onda linear das equações de Yang-Mills, isto é, uma solução das equações de Yang-Mills linearizadas, é necessariamente *sem cor* no sentido que elas não transportam sua própria carga, e portanto não interagem entre si. Em outras palavras, um campo de Yang-Mills deve necessariamente ser não-linear, ou então não é um campo de Yang-Mills. Como o campo gravitacional também transporta sua própria carga, isto é, energia e momentum, ele é mais parecido com o campo de Yang Mills do que com o campo eletromagnético, que como é bem conhecido não transporta sua própria carga. Dessa analogia, parece fazer sentido que, exatamente como no caso de Yang-Mills, para ser capaz de transportar energia e momentum, uma onda gravitacional deve necessariamente ser não linear. De fato, ondas lineares, por definição, não interagem entre si, e portanto não devem possuir nem energia nem momentum. Esses argumentos são ainda muito prematuros, e exigem certamente uma análise muito mais detalhada antes de se tirar qualquer conclusão. Esta análise está atualmente em andamento [53].

Capítulo 6

Comentários Finais

6.1 Gravitação e Universalidade

Na relatividade geral de Einstein, que é uma teoria fundamentalmente baseada na universalidade, ou seja, no princípio de equivalência, a geometria substitui o conceito de força na descrição de interação gravitacional. Apesar do fato de que, pelo menos no nível clássico o princípio de equivalência já ter passado por todos os testes experimentais, qualquer violação desse princípio, entre outras conseqüências, levaria à não-universalidade da queda livre, e consequentemente à não válidade da descrição geométrica da relatividade geral. Notemos que, pelo fato de ser não-universal, e consequentemente não existir um princípio de equivalência eletromagnético, não há uma descrição geométrica, no sentido de relatividade geral, para a interação eletromagnética.

Por outro lado, como uma teoria de gauge para o grupo de translação, o equivalente teleparalelo de relatividade geral não descreve a interação gravitacional através de uma geometrização de espaço-tempo, mas como uma força parecida com a força de Lorentz da eletrodinâmica. Da mesma forma que a teoria de de Maxwell é capaz de descrever a (não-universal) interação eletromagnética, é possível mostrar que a gravitação teleparalela pode descrever de forma consistente a interação gravitacional, mesmo na ausência de universalidade. Apesar da descrição geométrica da relatividade geral ser equivalente à descrição de gauge de gravitação teleparalela [49], a gravitação teleparalela pode ser considerada uma teoria mais fundamental no sentido de que ela não requer o princípio de equivalência para descrever a interação gravitacional.

A propriedade acima da gravitação teleparalela pode adquirir uma importância fundamental no nível quântico. De fato, algumas experiências sugerem que, neste nível, a gravitação parece não ser mais universal [40]. Considere, por exemplo, a experiência COW, que estuda a diferença de fase quântica induzida pela gravitação num feixe de neutrons térmicos. Como é bem conhecido, esta diferença de fase depende da massa dos neutron, e é consequentemente não-universal. O mesmo acontece no efeito Aharonov-Bohm gravitacional, cuja diferença de fase depende da energia cinética relativística das partículas consideradas. Muito embora, no caso específico do experimento COW, a dependencia da massa possa ser eliminada através da introdução de uma espécie de "princípio de equivalência quântico" [39], a dificuldade básica permanece no sentido que seria necessário definir versões diferentes deste princípio quântico para cada fenômeno. Como a gravitação teleparalela pode descrever a gravitação independentemente da validade do princípio de equivalência, ela não requerer uma versão quântica deste princípio para lidar com os efeitos quânticos induzidos pela gravitação, e pode ser considerado uma mais apropriado para estudar tais efeitos [54].

O ponto crucial é o caráter diferente do campo fundamental em cada teoria. Na relatividade geral, o campo fundamental é um campo de tetrada $h^a{}_\mu$ (ou equivalentemente, um tensor métrica $g_{\mu\nu}$). Na gravitação teleparalela, o campo fundamental é um potencial de gauge $B^a{}_\mu$, a parte não-trivial do campo de tetrada:

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + B^a{}_\mu. \tag{6.1}$$

Esta diferença fundamental tem conseqüências profundas. De fato, qualquer teoria gravitacional cujo campo fundamental é uma tetrada (ou uma métrica) é necessariamente uma *teoria geométrica*. Por outro lado, uma teoria cuja campo fundamental é um potencial de gauge não tem o mesmo caráter geométrico. Como uma teoria de gauge como a teoria de Maxwell, a gravitação teleparalela pode ser formulada independentemente de qualquer princípio de equivalência. Para entender este ponto, consideraremos uma partícula cuja massa gravitacional m_g não coincide com sua massa inercia m_i. Então os princípios de equivalências fraco e forte não são mais válido. Como nós vemos, uma teoria geométrica para a gravitação requereria a introdução de um campo de tetrada novo, dado por [34]

$$\bar{h}^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \frac{m_g}{m_i} B^a{}_\mu. \tag{6.2}$$

Como a relação m_g/m_i da partícula teste aparece "dentro" da definição de tetrada, qualquer teoria em que $\bar{h}^a{}_\mu$ é o campo fundamental será inconsistente no sentido que partículas com relações m_g/m_i diferentes requereriam conexões com curvaturas diferentes para manter uma descrição geométrica da gravitação, em que todas as trajetórias seriam dadas por geodésicas. Por outro lado, vemos da tetrada (6.2) que a relação m_g/m_i aparece "fora" do potencial de gauge $B^a{}_\mu$. Isto significa que a equação de campo gravitacional (2.38) pode ser consistentemente resolvida para $B^a{}_\mu$, independentemente de qualquer propriedade da partícula teste. Essa é a razão fundamental pela qual a gravitação teleparalela permanece como uma teoria consistente, mesmo na ausência de universalidade. Podemos então concluir que, de forma parecida com o que acontece na teoria de Maxwell, a qual é também uma teoria de gauge, a gravitação teleparalela não requer a existência de um princípio de equivalência para descrever a interação gravitacional. Do ponto de visto da gravitação teleparalela, portanto, a questão da existência ou não de uma versão quântica do princípio de equivalência é totalmente irrelevante.

6.2 Formulação Global para a Gravitação

O campo fundamental da gravitação teleparalela é o potencial de gauge $B^a{}_\mu(x)$. Nesta formulação, a gravitação torna-se estruturalmente parecida com o eletromagnetismo. Baseando-se nesta analogia, e também na formulação integral da teoria de Maxwell [37], um formalismo global para a gravitação foi desenvolvido [36]. Como no caso eletromagnético, ele representa a versão quântica da força gravitacional clássica.

Como uma primeira aplicação deste formalismo, consideramos a experiência COW. Neste contexto, tomando o limite Newtoniano, mostramos que ele fornece a mudança de fase quântica correta induzida pela interação dos neutrons com o campo gravitacional da Terra. Como esta mudança de fase é produzida pelo acoplamento da massa do neutron com a componente B_{00} do potencial de gauge translacional, podemos considerá-la como um efeito de Aharonov-Bohm gravitoelétrico [42].

Como uma segunda aplicação, sem consideramos qualquer aproximação, obtivemos a mudança de fase quântica correspondente à analogia gravitacional do efeito Aharonov-Bohm. Este efeito é produzido pelo acoplamento da energia cinética dos elétrons com as componentes B_{0i} do potencial de gauge, e por conseguinte pode ser considerado como um efeito de Aharonov-Bohm gravitomagnético.

Finalmente, considerando um experimento simples de duas fendas, em que as partículas atravessam uma região com um campo gravitomagnético homogêneo, mostramos que, no limite clássico, o tratamento do fator de fase não-integrável (quântico) coincide com o tratamento (clássico) usual baseado na equação da força gravitacional. Isto significa que, para as trajetórias clássicas consideradas aqui, ambos fornecem o mesmo resultado. Além disso, considerando-se que as massas inercial e gravitacional são iguais, a gravitação torna-se universal no limite clássico no sentido que as trajetórias resultantes não dependem das massas das partículas.

6.3 Equivalência Versus Incerteza

A Relatividade geral e a mecânica quântica não são consistentes uma com a outra. Este conflito provém do fato que os princípios nos quais estas duas teorias são baseadas não são consistente um com o outro. Por um lado, a relatividade geral é baseada no princípio de equivalência, cuja versão forte estabelece a equivalência *local* entre gravitação e inércia. Por outro lado, a mecânica quântica é baseada no princípio da incerteza, o qual é essencialmente *não-local*: uma partícula teste não segue uma dada trajetória, mas todas as trajetórias possíveis, cada uma com uma probablidade diferente. Como estes dois princípios são fundamentalmente diferentes, eles não podem existir simultâneamente [55]. Surge então a pergunta inevitável: qual deles deve ser descartado? Esta é uma pergunta difícil pois a relatividade geral e a mecânica quântica são dois dos pilares principais de física moderna. Descartar um dos princípios fundamentais significaria descartar uma das duas teorias. No entanto, uma análise mais aprofundada desta questão sugere fortemente que o princípio da equivalência é a parte mais frágil. De fato, além das controvérsias existentes sobre o seu real significado, a gravitação teleparalela descreve a interação gravitacional sem a necessidade deste princípio. A troca da relatividade geral pelo teleparalelismo, portanto, poderia eventualmente levar a uma reconciliação conceitual da gravitação com a mecânica quântica [56, 57].

Na gravitação teleparalela, o campo fundamental que descreve a gravitação não é nem a tetrada nem a métrica, mas o potencial de gauge translacional ${B^a}_\mu$. A métrica não é mais fundamental, mas sim uma quantidade obtida a partir do campo fundamental. Ondas gravitacionais, portanto, devem ser entendidas como ondas do potencial de gauge ${B^a}_\mu$, e não como ondas da métrica. Além disso, a quantização do campo gravitacional deve ser feita em ${B^a}_\mu$, e não na métrica. Dado que ${B^a}_\mu$ é um campo no sentido usual da palavra, a quantização do campo gravitacional pode-se apresentar mais consistente se considerada desde o ponto de vista da gravitação teleparalela. Naturalmente, esta ainda é uma questão em aberto para ser explorada no futuro.

Referências Bibliográficas

[1] L. O'Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory* (Princeton University Press, Princeton, 1998).

[2] T. Sauer, *Field equations in teleparallel spacetime: Einstein's 'Fernparallelismus' approach towards unified field theory*, Einstein's Papers Project [gr-qc/0405142].

[3] L. O'Raifeartaigh and N. Straumann, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 1 (2000).

[4] C. Møller, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **1**, No. 10 (1961).

[5] C. Pellegrini and J. Plebanski, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **2**, No. 2 (1962).

[6] C. Møller, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **89**, No. 13 (1978).

[7] K. Hayashi and T. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **38**, 491 (1967).

[8] K. Hayashi, *Nuovo Cimento* A **16**, 639 (1973).

[9] K. Hayashi, *Phys. Lett.* B **69**, 441 (1977).

[10] K. Hayashi and T. Shirafuji, *Phys. Rev.* D **19**, 3524 (1979).

[11] Para um livro texto sobre a teoria de Einstein–Cartan–Sciama–Kibble, ver por exemplo, V. de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation* (World Scientific, Singapore, 1985).

[12] I. L. Shapiro, *Phys. Rep.* **357**, 113 (2002).

[13] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, *Phys. Rep.* **258**, 1 (1995).

[14] H. I. Arcos and J. G. Pereira, *Class. Quant. Grav.* **21**, 5193 (2004) [gr-qc/0408096]; V. C. de Andrade, H. I. Arcos and J. G. Pereira, *Proc. Sci. WC2004*, 028 (2004) [gr-qc/0412034].

[15] Para uma revisão, ver R. T. Hammond, *Rep. Prog. Phys.* **65**, 599 (2002).

[16] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, *Phys. Rev.* D **56**, 4689 (1997).

[17] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, 2nd edition (Intersciense, New York, 1996).

[18] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapore, 1995).

[19] V. A. Fock and D. Ivanenko, *Z. Phys.* **54**, 798 (1929); V. A. Fock, *Z. Phys.* **57**, 261 (1929).

[20] R. Aldrovandi, P. B. Barros and J. G. Pereira, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 991 (2003).

[21] N. P. Konopleva and V. N. Popov, *Gauge Fields* (Harwood, New York, 1980).

[22] J. W. Maluf, *J. Math. Phys.* **35**, 335 (1994); J. W. Maluf, *J. Math. Phys.* **36**, 4242 (1995).

[23] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4533 (2000).

[24] F. J. Belinfante, *Physica* **6**, 687 (1939).

[25] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, Oxford, 1975).

[26] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).

[27] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

[28] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Overview*, in *Proceedings of the Ninth Marcel Grossmann Meeting*, ed. by V. G. Gurzadyan, R. T. Jantzen and R. Ruffini (World Scientific, Singapore, 2002) [gr-qc/0011087].

[29] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, New York, 1973).

[30] Uma discussão sobre o status experimental do princípio da equivalência pode ser encontrado em C. M. Will, *Living Rev. Rel.* **4**, 4 (2001) [gr-qc/0103036].

[31] M. P. Haugan and C. Lämerzahl, *Lect. Notes Phys.* **562**, 195 (2001).

[32] Ver o Prefácio de J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960).

[33] T. Damour, *Questioning the Equivalence Principle*, contribution to the workshop *Missions spatiales en physique fondamentale* (Chatillon, France, 18-19/1/2001), edited by C. Bordé and P. Touboul, published in *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences (Serie IV)* **2**, 1249 (2001) [gr-qc/0109063].

[34] R. Aldrovandi, J. G. Pereira and K. H. Vu, *Gen. Rel. Grav.* **36**, 101 (2004) [gr-qc/0304106].

[35] R. Aldrovandi, J. G. Pereira, K. H. Vu, *Doing without the Equivalence Principle.* Seminário apresentado na *Tenth Marcel Grossmann Meeting*, July, 20-26, 2003, Rio de Janeiro, Brazil; publicado nos Proceedings (World Scientific, Singapore, 2005) [gr-qc/0410042].

[36] R. Aldrovandi, J. G. Pereira and K. H. Vu, *Class. Quantum Grav.* **21**, 51 (2004).

[37] T. T. Wu and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **D12**, 3845 (1975).

[38] R. Colella, A. W. Overhauser and S. A. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1472 (1974).

[39] C. Lämmerzahl, *Gen. Rel. Grav.* **28**, 1043 (1996); C. Lämmerzahl *Acta Phys. Pol.* **29**, 1057 (1998).

[40] D. Greenberger, *Ann. Phys.* (NY) **47**, 116 (1968); D. Greenberger and A. W. Overhauser, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 43 (1979).

[41] A. K. Lawrence, D. Leiter and G. Samozi, *Nuovo Cimento* **17B**, 113 (1973); L. H. Ford and A. Vilenkin, *J. Phys.* A **14**, 2353 (1981); V. B. Bezerra, *Class. Quantum Grav.* **8**, 1939 (1991).

[42] M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect* (Springer-Verlag, Berlin, 1989), Lecture Notes in Physics 340.

[43] J. G. Pereira, T. Vargas and C. M. Zhang, *Class. Quantum Grav.* **18** 833 (2001).

[44] E. G. Harris, *Am. J. Phys.* **64**, 378 (1996).

[45] S. Bonazzola and J. A. Marck, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **44** 655 (1994); C. Cutler and K. S. Thorne, *An Overview of Gravitational-Wave Source*, Proceedings of the 16th International Conference on General Relativity and Gravitation, 2002 [gr-qc/0204090].

[46] F. I. Cooperstock, *Mod. Phys. Lett.* A **14** 1531 (1999); F. I. Cooperstock, *Ann. Phys. (NY)* **282**, 115 (2000).

[47] H. Bondi, *Proc. Roy. Soc. London* A **427** 249 (1990).

[48] R. Weitzenböck, *Invariantentheorie* (Noordhoff, Gronningen, 1923).

[49] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Phys. Rev.* **D64**, 027502 (2001).

[50] T. W. B. Kibble, in *Seminar on High-Energy Physics and Elementary Particles*, edited by C. Fronsdal and A. Salam (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965).

[51] M. Novello and R. P. Neves, *Class. Quantum Grav.* **19**, 5335 (2002) [gr-qc/0204058].

[52] Yu. N. Obukhov and J. G. Pereira, *Phys. Rev.* **D69**, 128502 (2004).

[53] R. Aldrovandi, J. G. Pereira and K. H. Vu, *Some Conceptual Considerations on the Gravitational Waves*, em preparação.

[54] R. Aldrovandi, J. G. Pereira and K. H. Vu, *Selected Topics in Teleparallel Gravity*. Seminário apresentado no "XXIV Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos", Caxambú, Brazil; publicado em *Braz. J. Phys.* **34**, 1374 (2004) [gr-qc/0312008].

[55] R. Y. Chiao, in *Wheeler's 90th Birthday Symposium Proceedings* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003) [gr-qc/0303100].

[56] R. Aldrovandi, J. G. Pereira and K. H. Vu, *Gravity and the Quantum: Are they Reconcilable?*. Seminário apresentado na conferência *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations-3*, June 6-11, 2005, Växjö University, Växjö, Sweden. AIP Conference Proceedings, vol. 810, ed. por G. Adenier and A. Yu. Khrennikov (AIP, New York, 2006) [gr-qc/0509051].

[57] R. Aldrovandi, L. C. T. Guillen, J. G. Pereira and K. H. Vu, *Bringing Together Gravity and the Quanta*. Contribution to the proceedings of the Albert Einstein Century International Conference, Paris, 18-22 July, 2005 [gr-qc/0603122].