



**INSTITUTO DE FÍSICA**  

---

**Universidade Federal Fluminense**

# Dinâmica e Ruído Quântico em Osciladores Paramétricos Óticos com Momento Angular Orbital

Bernardo Coutinho Camilo dos Santos

Niteroi - RJ

Março 2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Bernardo Coutinho Camilo dos Santos

*Dinâmica e Ruído Quântico em Osciladores  
Paramétricos Óticos com Momento Angular  
Orbital*

Niterói - RJ

Bernardo Coutinho Camilo dos Santos

*Dinâmica e Ruído Quântico em Osciladores  
Paramétricos Óticos com Momento Angular  
Orbital*

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense como um dos pré-requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:  
Antonio Zelaquett Khoury

UFF

Niterói - RJ



S237 Santos, Bernardo Coutinho Camilo dos.  
Dinâmica e ruído quântico em osciladores paramétricos  
óticos com momento angular orbital / Bernardo Coutinho  
Camilo dos Santos ; orientador: Antonio Zelaquett Khoury. --  
Niterói, 2009.  
162 f. : il.

Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal  
Fluminense, 2009.  
Bibliografia: f. 155-161.

1.ÓPTICA QUÂNTICA. 2.RUÍDO QUÂNTICO. 3.FASE GEOMÉTRICA.  
4.OSCILADOR PARAMÉTRICO ÓPTICO. 5.MODO DE LAGUERRE-GAUSS.  
I.Khoury, Antonio Zelaquett, Orientador. II.Universidade  
Federal Fluminense. Instituto de Física. III.Título.

CDD 535.15

# *Resumo*

Apresentaremos uma descrição de feixes com momento angular orbital (MAO) no regime paraxial, juntamente com algumas técnicas de produção de tais feixes. Seguido de uma rápida descrição clássica do processo de amplificação paramétrica, no contexto dos osciladores paramétricos ópticos (OPO). Apresentaremos um resumo da montagem do LOQ - Laboratório de Ótica Quântica da UFF e da montagem do primeiro OPO do estado do Rio de Janeiro. Em seguida investigaremos a transferência do MAO em um OPO tipo II onde, bombeando-o com um modo de Laguerre-Gauss, foi possível produzir diversos tipos de modos transversais.

No contexto clássico, vamos sugerir um experimento para medir a conjugação da fase geométrica em um OPO injetado com MAO, que ocorre quando submetemos o feixe de injeção a um conjunto de transformações cíclicas que descrevem um caminho fechado na esfera de Poincaré. Vamos sugerir também, com o auxílio da representação de Poincaré, uma analogia entre uma espécie de *difusão de modos* e a conhecida difusão de fase que ocorre em um OPO.

Por último, analisaremos a dinâmica quântica de um OPO injetado não degenerado a partir das equações de movimento na representação  $P - positiva$ . Faremos as análises de estabilidade linear do regime estacionário e do ruído quântico através de uma expansão perturbativa que nos permite encontrar soluções analíticas, tanto no regime clássico quanto no regime quântico. Com este tratamento, mostraremos regimes de operação em que os feixes produzidos pelo OPO mostravam correlações quânticas do tipo EPR com intensidades relativamente intensas.

# *Abstract*

We shall present a description of beams bearing orbital angular momentum (OAM) in the paraxial regime, in addition to techniques showing how to produce such beams. Followed by a brief classical description of the optical parametric amplification process in the context of optical parametric oscillators (OPO). We present a summary of the assembly of the LOQ - Quantum Optics Laboratory of UFF and the assembly of the first OPO of the Rio de Janeiro state. We then investigate the transfer of OAM in a type II OPO where, pumping it with a Laguerre-Gaussian mode, was possible to produce many kinds of transverse modes.

Still in the classical context, we suggest an experiment to measure the geometrical phase conjugation in an OPO injected with OAM, which occurs when the injection beam is subjected to a set of cyclic transformations that describes a closed path in the Poincaré sphere. We also suggest, with the aid of the Poincaré representation, an analogy between a kind of *mode diffusion* and the known phase diffusion that occurs in an OPO.

Finally, we analyze the quantum dynamics of a non degenerate injected OPO from the equations of motion in the positive-P representation. We shall make the linear stability analysis of the steady state and the quantum noise dynamics by a perturbation approach that allows us to find analytical solutions, both in the classical and the quantum regime. With this approach, we shall show that this operation regime allows us to produce relatively intense beams with quantum EPR correlations.

À memória de  
Marcos Cesar Coutinho.

"DON'T PANIC!"

*The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

## Agradeço:

Ao meu orientador Antonio Zelaquett Khoury pelo exemplo, paciência e dedicação.

Aos meus pais Nelma e Petrônio e minha irmã Andréa pelo apoio constante e incondicional.

Aos amigos/irmãos Bernardo Mosquera, Carla Carvalho e Suenne Rigueti pelo apoio nos momentos mais difíceis desta jornada, muito obrigado!

À Renata Zocatelli, que caminhou ao meu lado durante boa parte desta jornada.

À família Makler, em especial à Marisa, pelo valioso apoio na reta final desta jornada.

Aos amigos Newton Sanches e Munique Siqueira pelo carinho e apoio.

Aos amigos Letícia Estellita, Diego Uzeda, Daiana Dolavale, Sabrina Graciliano, Dayanne Fernandes, Alexandre Lima, Luciana Hirsh, Carlos Ritter e Thiago Lobo pelos momentos de descontração.

Aos amigos Gralha, Marciano Carneiro e Marcus Moldes pelas valiosas conversas dentro e fora do âmbito acadêmico.

Aos companheiros José Augusto, Cadu e Carolina Vannier por dividirem as angústias com o lasers do laboratório.

À Cinthya Chianca pelos "toques" nos momentos certos.

Ao amigo Eliel pelo exemplo de perseverança, força, luta e alegria.

Aos professores, que muito me ensinaram em sala de aula e fora dela, Thadeu Penna, Kaled Dechoum, Nivaldo Agostinho Lemos, Paulo Murilo C. de Oliveira, Jorge Simões de Sá Martins, João Florêncio Junior, Fábio David A. Aarão Reis, Roberto Toscano, Daniel Rangel, Murray Kenneth Olsen.

Às bibliotecárias Ana Maria, Rita de Cássia, Lucia Regina e Kátia Maria, pela atenção e ajuda.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo apoio financeiro.

# *Sumário*

## **Lista de Figuras**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 17
1.1	Momento Angular da Luz . . . . .	p. 19
1.2	Óptica Paraxial . . . . .	p. 22
1.2.1	A Equação Paraxial . . . . .	p. 23
1.2.2	O Modo Fundamental . . . . .	p. 27
1.2.3	Os Modos de Hermite-Gauss . . . . .	p. 31
1.2.4	Os Modos de Laguerre-Gauss . . . . .	p. 32
1.2.5	A Esfera de Poincaré para Modos Espaciais . . . . .	p. 34
1.2.6	Produção Holográfica de Feixes com Momento Angular Orbital . . . . .	p. 37
1.2.7	Conversor de Modos por Astigmatismo . . . . .	p. 39
1.2.8	Produção dos modos de Hermite . . . . .	p. 42
1.2.9	Detecção . . . . .	p. 43
1.3	Amplificação Paramétrica . . . . .	p. 45
1.4	Oscilação Paramétrica . . . . .	p. 50
1.5	O OPO-UFF e a Oscilação de Modos Espaciais de Ordem Superior . . . . .	p. 52
<b>2</b>	<b>Conjugação de Fase Geométrica em um Oscilador Paramétrico Ótico com Momento Angular Orbital</b>	p. 58
2.1	Representação Espinorial dos Modos Transversais de Primeira Ordem . . . . .	p. 58
2.2	Dinâmica de Modos Transversais . . . . .	p. 59
2.2.1	Análise da Dinâmica sem Injeção de Sinal . . . . .	p. 61

2.2.2	Análise da Dinâmica com Injeção de Sinal . . . . .	p. 64
2.3	Proposta Experimental para a Conversão Adiabática de Modos Espaciais e a Conjugação da Fase Geométrica . . . . .	p. 67
2.4	Evolução Adiabática do Campo de Injeção . . . . .	p. 70
2.5	Resultados Numéricos . . . . .	p. 74
<b>3</b>	<b>Ótica Quântica de Feixes com MAO</b>	p. 77
3.1	Quantização dos Modos Espaciais do Campo Eletromagnético . . . . .	p. 77
3.1.1	Estados de Fock . . . . .	p. 83
3.1.2	Estados Coerentes . . . . .	p. 84
3.1.3	Estados Comprimidos . . . . .	p. 86
3.2	Conversão Paramétrica Descendente . . . . .	p. 90
3.2.1	Transferência de Espectro Angular na Conversão Paramétrica Descendente Espontânea . . . . .	p. 92
3.2.2	Transferência de Espectro Angular na Conversão Paramétrica Descendente Estimulada . . . . .	p. 94
<b>4</b>	<b>Teoria Quântica dos Osciladores Paramétricos Óticos</b>	p. 100
4.1	Dinâmica de Sistemas Quânticos Dissipativos . . . . .	p. 100
4.2	Mapeamento no Espaço de Fase . . . . .	p. 103
4.3	As Equações dinâmicas do OPO . . . . .	p. 106
<b>5</b>	<b>Dinâmica Quântica de um Oscilador Paramétrico Ótico com Injeção de Sinal</b>	p. 109
5.1	Equações de Movimento e Série Perturbativa . . . . .	p. 109
5.2	Soluções Estacionárias para as Quadraturas de Amplitude . . . . .	p. 112
5.3	Flutuações Quânticas, Correlações e Espectros de Ruído . . . . .	p. 115
5.4	Emaranhamento e Paradoxo EPR . . . . .	p. 120



<b>6 Conclusões</b>	p. 125
<b>Apêndice A - Como Gerar as Máscaras</b>	p. 126
A.0.1 Rotina . . . . .	p. 126
<b>Apêndice B - Análise de Estabilidade das Soluções Estacionárias do OPO Injetado</b>	p. 128
<b>Anexo A - Trabalhos Publicados</b>	p. 130
<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 155

# *Lista de Figuras*

1.1	Em (a) vemos a frente de onda de uma onda plana e em (b) de um modo de Laguerre-Gauss com helicidade igual a $+1$ . . . . .	p. 21
1.2	<i>Plano focal do feixe Gaussiano</i> [138]. . . . .	p. 29
1.3	<i>Onda esférica</i> [155]. . . . .	p. 29
1.4	<i>Perfil de intensidade Gaussiano</i> . . . . .	p. 30
1.5	<i>Perfis de intensidade dos modos de Hermite-Gauss</i> . Em (a) vemos o modo fundamental $N = 0$ , em (b) e (c) os modos de primeira ordem $N = 1$ , $(n, m) = (1, 0)$ e $(n, m) = (0, 1)$ , respectivamente. Em (d), (e) e (f) os modos de segunda ordem $N = 2$ , $(n, m) = (2, 0)$ , $(n, m) = (1, 1)$ e $(n, m) = (0, 2)$ , respectivamente. . . . .	p. 32
1.6	<i>Perfis de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss</i> . Em (a) vemos o modo fundamental, $(p, l) = (0, 0)$ . Em (b) e (c) os modos de primeira ordem, $(p, l) = (0, 1)$ e $(p, l) = (0, -1)$ , respectivamente. E em (d), (e) e (f) os modos de segunda ordem, $(p, l) = (0, 2)$ , $(p, l) = (1, 0)$ e $(p, l) = (0, -2)$ , respectivamente. . . . .	p. 33
1.7	<i>Relação entre os modos de HG e os modos de LG de primeira ordem</i> . . . . .	p. 35
1.8	<i>Esfera de Poincaré para os estados de polarização (a) e para os modos transversais de 1<sup>a</sup> ordem (b)</i> . . . . .	p. 36
1.9	<i>Máscaras usadas para gerar os modos de LG</i> . Em (a) uma placa zonal de Fresnel. Em (b) e em (c) temos duas placas zonais espirais (PZE) com helicidade $+1$ e $+2$ , respectivamente. Em (d) o arranjo experimental básico para produção do modo LG. Assim como as placas zonais de Fresnel, as PZE também focalizam o feixe, sendo necessário recolimá-lo após a passagem pela máscara. . . . .	p. 37

1.10	<i>Rede de difração bifurcada. Em (a) a rede de difração com defeito topológico gerada por computador. Em (b) um desenho esquemático do funcionamento da rede, onde <math>m</math> é a vorticidade do feixe.</i> . . . . .	p. 38
1.11	<i>Conversor de modos com lentes cilíndricas.</i> . . . . .	p. 39
1.12	Efeito produzido pelos conversores de modo. No topo vemos o efeito produzido por um conversor $\pi/2$ em um modo $HG_{45^\circ}$ . Abaixo, vemos o efeito de um conversor $\pi$ sobre um modo $LG_{-1}$ . . . . .	p. 41
1.13	(a) Conversor $\pi/2$ , e (b) Conversor $\pi$ [38]. . . . .	p. 41
1.14	Prisma de Dove . . . . .	p. 42
1.15	Arranjo experimental para produção de modos de LG de primeira ordem. O ajuste da fase relativa entre os feixes é feito pelo PZT. . . . .	p. 43
1.16	Overlap entre um modo $HG_{0,1}^{45^\circ}$ e a aproximação produzida pelo interferômetro 1.16. . . . .	p. 43
1.17	Em (a) vemos o padrão gerado pela interferência, (c), entre modos $LG$ , o número de bifurcações é igual ao módulo da helicidade. Em (b) temos o padrão de interferência do modo $LG$ com uma onda esférica conforme esquematizado em (d), o módulo da helicidade dos feixes é igual ao número de espirais claras (ou escuras). . . . .	p. 44
1.18	<i>Cavidade do OPO. <math>r_{1(2)}</math> e <math>t_{1(2)}</math> são, respectivamente, os coeficientes de reflexão e transmissão do espelho 1(2).</i> . . . . .	p. 51
1.19	O LOQ-UFF em quatro épocas diferentes. Em (a) vemos como ele era antes da chegada dos equipamentos e em (b) após a chegada do laser Diabolo e da mesa TMC. Em (c) vemos o LOQ na mesma época em que observamos a primeira oscilação do OPO-UFF e em (d) o LOQ como ele esta atualmente, em pleno funcionamento. . . . .	p. 53
1.20	Cavidade Fabry-Perot do OPO-UFF, dentro o cristal não-linear. Inicialmente trabalhamos com uma configuração próxima à da confocalidade. . . . .	p. 54
1.21	<i>A curva verde corresponde a um dado comprimento de onda e a curva vermelha a um comprimento de onda duas vezes maior.</i> . . . . .	p. 54

1.22	Primeiros picos observados na operação do OPO-UFF. Em azul claro (escuro) vemos o(s) pico(s) de ressonância do(s) feixe(s) de bombeamento (convertidos). Note que ops vales na curva do feixe de bombeamento coincidem com os picos de ressonância dos feixes convertidos, isto ocorre devido ao favorecimento do processo de transferência de energia bombeamento→convertidos.Em (a) vemos os picos obtidos com o cristal Altechna <sup>®</sup> , de comprimento 7 mm, e em (b), (c) e (d) os picos obtidos com o cristal Litton, de 10 mm de comprimento. Os cristais, na época em que foram adquiridos os dados, apresentavam limiares de oscilação de 10mW e 13mW, respectivamente. . . . .	p. 55
1.23	Esquema do experimento que mediu a produção de modos espaciais de ordem superior. (P)BS são divisores de feixes (não)polarizados e DM é um espelho dicróico. . . . .	p. 56
1.24	Imagens obtidas com a câmera CCD representada na figura (1.23). Na coluna A vemos os perfis de intensidade e na coluna B as auto-interferências dos feixes convertidos para a verificação dos seus momentos angulares orbitais. . . . .	p. 57
2.1	(a) intensidade do feixe de bombeamento transmitida pela cavidade OPO em função da intensidade de entrada. (b) intensidade dos feixes convertidos gerados pelo OPO em função da intensidade de entrada. . . . .	p. 62
2.2	Correlações impostas pela otimização da sobreposição espacial e conservação do momento angular orbital. Sinal e complementar são representados por dois pontos na esfera de Poincaré alinhados simetricamente em relação ao plano equatorial. . . . .	p. 64
2.3	Representação de Poincaré das transformações realizadas nos feixes sinal e complementar. . . . .	p. 68
2.4	Em (a) a configuração experimental proposta para medir a conjugação da fase geométrica. M = espelho, DM = espelho dicróico e POL = polarizador. Em (b) mostramos o sistema de preparação de modos, PBS = divisor de feixes polarizador, QWP = lâminas $\lambda/4$ e HWP = lâminas $\lambda/2$ . . . . .	p. 69
2.5	Efeito produzido pelo operador $C(\omega t, \phi)$ para $\phi = \pi/2$ . . . . .	p. 71
2.6	Efeito produzido pelo operador $R(\omega t)$ . . . . .	p. 72

2.7	Evolução das fases totais dos feixes sinal e complementar, em unidades de $\pi$ , calculada a partir da integração numérica das equações dinâmicas. A inserção mostra os padrões de interferência calculados antes e depois da evolução cíclica ao longo do trajeto ABCA. . . . .	p. 75
2.8	Em (a) mostramos a evolução das fases totais de sinal e complementar, também em unidades de $\pi$ , calculadas a partir da integração numérica das equações dinâmicas. A inserção no gráfico mostra os padrões de interferência mútua calculados antes e depois da evolução cíclica ao longo do caminho ABDCA. Em (b) mostramos a evolução temporal das fases dinâmicas de sinal e complementar calculadas a partir da integração numérica das equações dinâmicas. . . . .	p. 76
3.1	(a) diferença, no espaço de fase, entre as regiões de incerteza geradas por estados comprimidos e estados coerentes. (b) exemplo de uma distribuição de quasi-probabilidade de um estado comprimido. . . . .	p. 89
3.2	Representação dos cones de emissão espontânea de CPD. Em (a) vemos o cone de um casamento de fase tipo I e em (b) um casamento de fase tipo II. . . . .	p. 90
3.3	Produção do modo de Laguerre-Gauss. Em (a) no feixe de bombeamento e em (b) no feixe auxiliar. . . . .	p. 96
3.4	Perfil de intensidade do feixe complementar quando, a) o bombeamento é preparado no modo de Laguerre, e b) o feixe auxiliar é preparado no modo de Laguerre. . . . .	p. 97
3.5	Interferência do feixe complementar. a) bombeamento operando no modo de $LG$ , b) Auxiliar operando no modo de $LG$ . Em c) e d) reproduzimos, respectivamente a) e b) com tratamento de imagem para melhor visualização. e) e f) são simulações teóricas par os casos a) e b). . . . .	p. 98
5.1	Podemos ver que a aproximação linear no regime abaixo do limiar é bastante satisfatória. Nesta figura $\mu_p = 0,6$ e $\mu_s = 0,2$ . . . . .	p. 113
5.2	Vemos que a aproximação quadrática neste regime, $\mu_p = 2$ e $\mu_s = 0,2$ , é praticamente indistinguível de $P_5(x)$ . . . . .	p. 114
5.3	Vemos que a diferença entre as duas interseções é praticamente nula. . . . .	p. 114

- 5.4 Em (a) vemos a quadratura de amplitude do modo de bombeamento,  $x_p^{(0)}$ , em função do parâmetro de bombeamento  $\mu_p$  enquanto o parâmetro de injeção era mantido constante ( $\mu_s = 0, 2$ ). Em (b) mostramos a mesma quadratura agora em função de  $\mu_s$  no limiar ( $\mu_p = 1$ ). . . . . p. 115
- 5.5 Espectros de ruído abaixo do limiar para as quadraturas  $x_-$  em (a) e  $y_+$  em (b). As curvas tracejadas são os resultados analíticos, enquanto as curvas cheias foram obtidas pela integração estocástica das equações completas. As frequências estão em unidades de  $\gamma$  e os parâmetros de bombeamento e injeção foram, respectivamente,  $\mu_p = 0, 6$  e  $\mu_s = 0, 2$ . . . p. 119
- 5.6 Espectros de ruído acima do limiar para as quadraturas  $x_-$  em (a) e  $y_+$  em (b). As curvas tracejadas são os resultados analíticos, enquanto as curvas cheias foram obtidas pela integração estocástica das equações completas. As frequências estão em unidades de  $\gamma$  e os parâmetros de bombeamento e injeção foram, respectivamente,  $\mu_p = 2, 0$  e  $\mu_s = 0, 2$ . . . p. 120
- 5.7 Em (a) os espectros adimensionais dos critérios de Duan e EPR, avaliados abaixo do limiar de operação ( $\mu_p = 0, 6$  e  $\mu_s = 0, 2$ ) para  $\theta = 0 rad$ , obtidos com teoria de perturbação de primeira ordem. As frequências  $\Omega$  são expressas em unidades de  $\gamma$ . Em (b) os espectros adimensionais dos critérios de Duan e EPR na frequência zero em função de  $\theta$ , sob as mesmas condições. . . . . p. 123
- 5.8 Em (a) os espectros adimensionais dos critérios de Duan e EPR, avaliados acima do limiar de operação ( $\mu_p = 2$  e  $\mu_s = 0, 2$ ) para  $\theta = 0 rad$ , obtidos com teoria de perturbação de primeira ordem. As frequências  $\Omega$  são expressas em unidades de  $\gamma$ . Em (b) os espectros adimensionais dos critérios de Duan e EPR na frequência zero em função de  $\theta$ , sob as mesmas condições. . . . . p. 123
- 5.9 Espectros adimensionais dos critérios EPR (a) e Duan (b) abaixo do limiar de operação ( $\mu_p = 0, 6$ ) para  $\theta = 0 rad$ , obtidos com a primeira ordem perturbativa.  $\mu_s = 0$  (linha sólida),  $\mu_s = 0, 1$  (ponto-linha tracejada) e  $\mu_s = 0, 2$  (linha tracejada). Novamente as frequências são expressas em unidades de  $\gamma$ . . . . . p. 124

# 1 *Introdução*

"No existe certo ou errado, apenas as consequências das suas aes."

*(Hank Moody)*

O Eletromagnetismo é a parte da física que se ocupa do estudo dos campos eletromagnéticos e sua interação com a matéria. O espectro eletromagnético, que se estende desde as ondas de rádio  $\lambda \gtrsim 1m$  até a radiação gama  $\lambda \lesssim 10^{-12}m$ , por definição cobre todos os comprimentos de onda possíveis desse campo. Como é sabido, o olho humano não é capaz de detectar todos esses comprimentos de onda, restringindo sua eficácia à uma pequena faixa entre  $400nm - 700nm$ , conhecida como espectro visível. Os estudos da luz, nesta faixa do espectro, feitos pelo frei franciscano Roger Bacon (Somerset, 1214 — Oxford, 1294)[1], e posteriormente por Sir Isaac Newton (Woolsthorpe, 4 de Janeiro de 1643 — Londres, 31 de Março de 1727)[2] e Christiaan Huygens (Haia, Holanda, 14 de Abril de 1629 - Haia, 8 de Julho de 1695)[3], deram origem à parte da física conhecida como Ótica.

## *Ótica Quântica e não-linear*

Após a unificação da Ótica com o Eletromagnetismo feita pelo físico James Clerk Maxwell (13 de Junho de 1831, Edimburgo, Escócia - 5 de Novembro de 1879, Cambridge, Inglaterra)[4], aquela ganhou um poderoso ferramental matemático que permitiu ampliar seu campo de interesses. Com o advento do laser <sup>1</sup> [5, 6] no fim da década de 50, pôde-se inaugurar uma vertente da Ótica que se ocupava do estudo da interação do campo eletromagnético com meios que respondiam não-linearmente aos seus estímulos. Num tipo particular de interação não-linear conhecido como processo paramétrico <sup>2</sup>, a troca de energia entre campos, intermediada pelo meio não-linear, pode produzir novos campos que oscilam com frequências distintas daquelas que originaram o processo.

---

<sup>1</sup> Acrônimo da língua inglesa para "Ligth Amplification by Stimulated Emission of Radiation"(LASER)

<sup>2</sup> Também conhecido como mistura de ondas no jargão da Ótica não-linear.

O surgimento da teoria quântica da luz se deu simultaneamente ao da Ótica não-linear. Com os trabalhos do prêmio Nobel Roy J. Glauber [79, 80, 81] essa nova teoria traz consigo a explicação para extensa gama de fenômenos até então incompreendidos pelos físicos, onde podemos citar os fenômenos de superradiância, o anti-agrupamento de fótons e a estatística subpoissoniana. Mais do que isto, enxerga-se em experimentos de Ótica Quântica o ambiente apropriado para se testar os fundamentos da Mecânica Quântica, como por exemplo os experimentos de violação da desigualdade de Bell [7].

### *Oscilador paramétrico ótico*

Constituído por um cristal não-linear dentro uma cavidade Ótica e bombeado por um laser externo, o oscilador paramétrico ótico (OPO) surgiu como uma alternativa de fonte de luz coerente com uma larga faixa sintonizável. Possui um comportamento bastante semelhante ao do laser. A baixas potências de bombeamento há uma fluorescência oriunda da conversão paramétrica e só a partir de um determinado valor de bombeamento é que ele se põe a oscilar. Este é um comportamento típico de limiar laser.

Assim como no laser, a não-linearidade do seu cristal e a retroalimentação gerada pela cavidade dão origem a uma rica variedade de regimes de operação que por si só são temas de grande interesse acadêmico e tecnológico [8, 9, 10], entre eles a biestabilidade, a auto-pulsação e regimes caóticos diversos [11]. Porém o interesse nos osciladores paramétricos óticos vai além do seu comportamento clássico. Na conversão paramétrica descendente (CPD) um fóton do feixe de bombeamento é aniquilado para dar origem a dois novos fótons altamente correlacionados. Esta correlação oriunda da CPD é o mecanismo responsável pela produção de estados comprimidos [12] e EPR [13] do campo eletromagnético, utilizados em protocolos de teletransporte [14] e medidas *sub shot-noise* de pequenos desvios de feixes óticos [15] empregados na microscopia de força atômica.

Há também as fases geométricas que, além de despertarem a curiosidade dos físicos por si só [39], podem ter uma aplicação prática na construção de um computador quântico. Num futuro próximo poderemos usar as fases geométricas na proteção de portas lógicas contra ruídos [16, 17]. Ao longo desta tese veremos que o OPO também se presta ao estudo e a manipulação de fases geométricas do campo eletromagnético.

### *Momento angular da luz*

Na década de 30 Beth [18] mediu pela primeira vez o momento angular da luz. Com o estudo das cavidades óticas, em função dos esforços para se atingir a operação laser foi possível fazer as primeiras investigações da porção orbital do momento angular [19].



Até a década de 90 o interesse da comunidade científica acerca da componente orbital do momento angular da luz permaneceu em segundo plano frente a outros assuntos de maior interesse até então. Em 1992 Allen *et al.* em seu trabalho seminal [20] devolveram o “prestígio” ao momento angular orbital da luz e desde então este assunto vem despertando grande interesse dos físicos, tendo aplicações desde a informação quântica [21, 22] até a biologia, onde o uso desta propriedade da luz é usado para conseguir um grau de liberdade a mais na operação de pinças óticas [23].

A interação de luz carregando momento angular orbital com meios não-lineares se deu pela primeira vez no processo de geração de segundo harmônico [24], onde demonstrou-se que o momento angular orbital **por fóton** era o dobro do valor correspondente ao feixe fundamental. O primeiro trabalho que investigou a operação de um OPO bombeado por um feixe com momento angular orbital (MAO) foi feito por uma colaboração entre o Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz (LMCAL) da USP e o Laboratório de Ótica Quântica (LOQ) da UFF [28].

Partiremos agora para a descrição do momento angular orbital (MAO) da luz no regime paraxial, caracterizaremos este regime e mostraremos como produzir um feixe com MAO. Após isto, faremos uma descrição sucinta do processo de amplificação paramétrica, processo este que está no coração de um OPO e dos ingredientes necessários para que ela ocorra, finalizando com uma breve descrição do LOQ - Laboratório de Ótica Quântica da UFF e de um trabalho realizado no primeiro OPO do estado do Rio de Janeiro.

## 1.1 Momento Angular da Luz

As leis da dinâmica nos ensinam como lidar com as grandezas físicas que definem o estado de um sistema, revelam também como estas grandezas se comportam ao longo do tempo, permitindo-nos prever o estado final do sistema em questão.

Na mecânica clássica, a posição  $\vec{r}$  de uma partícula, em relação a um dado sistema de coordenadas, e o seu momento linear  $\vec{p}$  são suficientes para caracterizar o seu estado de movimento. Quando o momento linear da partícula não é paralelo ao vetor posição, o momento angular  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  torna-se particularmente útil na descrição do seu estado de movimento. O momento angular pode ser dividido em duas componentes, a de rotação, que diz respeito ao movimento relativo entre as partículas que compõem o sistema, e a orbital que diz respeito ao movimento do centro de massa do sistema em relação à origem de um sistema de coordenadas.

O momento angular não se limita apenas às partículas massivas, ele também pode ser estendido a campos. No caso do campo eletromagnético, o momento angular depende da estrutura da frente de onda do campo, como veremos a seguir.

Sabemos, do Eletromagnetismo de Maxwell, que o campo eletromagnético carrega energia. O fluxo de energia é dado pelo vetor de Poynting [51] que, no sistema de unidades internacional (SI), pode ser expresso em termos dos campos elétrico e magnético:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = c^2 \epsilon_0 \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] . \quad (1.1)$$

Em meios isotrópicos o vetor de Poynting é paralelo ao vetor de onda, porém isto deixa de ser verdade em meios anisotrópicos. Nestes meios o fenômeno conhecido como "walk off"[28], faz com que o fluxo de energia não seja paralelo à direção de propagação da onda eletromagnética.

O campo eletromagnético também carrega momento linear e angular. A densidade de momento linear do campo eletromagnético, em meios isotrópicos, é proporcional ao vetor de Poynting [65]

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{c^2} = \epsilon_0 \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] . \quad (1.2)$$

A densidade de momento angular do campo eletromagnético, assim como na Mecânica Clássica, é dada por,  $\vec{l}(\vec{r}, t) = \vec{r} \times \vec{p}(\vec{r}, t)$ , com  $\vec{p}(\vec{r}, t)$  dado pela (1.2):

$$\vec{l}(\vec{r}, t) = \vec{r} \times \vec{p}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{r} \times \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] . \quad (1.3)$$

Os momentos linear e angular são obtidos através da integral volumétrica de  $\vec{p}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{l}(\vec{r}, t)$ , respectivamente. A decomposição do momento angular do campo eletromagnético também pode ser feita de maneira análoga ao momento angular de um sistema de  $\mathbf{N}$ -partículas [19]:

$$\vec{L} = \epsilon_0 \int_V \vec{r} \times \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] dv = \vec{L}_s + \vec{L}_o . \quad (1.4)$$

Se escrevermos o campo magnético em termos do potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , as componentes  $\vec{L}_s$  e  $\vec{L}_o$  tomam a seguinte forma, no calibre de Coulomb

$$\vec{L}_s = \epsilon_0 \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{A}(\vec{r}, t) dv \quad (1.5)$$

e

$$\vec{L}_o = \epsilon_0 \int_V E_i(\vec{r}, t) [\vec{r} \times \vec{\nabla}] A_i(\vec{r}, t) dv. \quad (1.6)$$

A componente  $\vec{L}_s$  é independente da escolha de uma origem, e é por esse motivo que a relacionamos ao momento angular intrínseco, ou de spin, do campo eletromagnético. Esta associada ao estado de polarização do fóton [18]. Na Mecânica Quântica, o operador  $\vec{r} \times \vec{\nabla}$  está associado ao momento angular orbital de uma partícula, isto nos induz a interpretarmos a componente  $\vec{L}_o$  como sendo associada ao momento angular orbital do campo. Repare que este mesmo operador relaciona  $\vec{L}_o$  à estrutura de fase do campo eletromagnético. Uma onda plana como a da figura (1.1a) não possui momento angular orbital, ao passo que a onda da figura (1.1b) possui momento angular orbital diferente de zero. Em ambos os casos a estrutura das frentes de onda são os fatores determinantes para que haja ou não momento angular orbital.

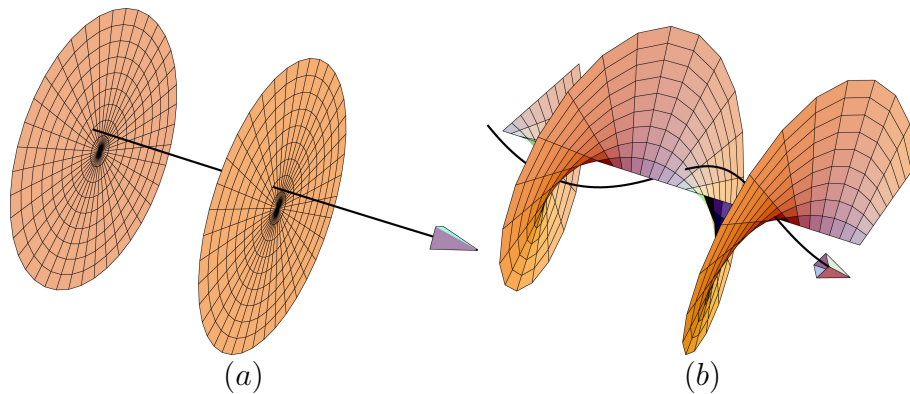


Figura 1.1: Em (a) vemos a frente de onda de uma onda plana e em (b) de um modo de Laguerre-Gauss com helicidade igual a +1.

Com o advento do Laser [5] foi possível gerar feixes de luz com características bem diferentes das lâmpadas incandescentes e a gás, no que se refere à sua monocromaticidade, direcionalidade, intensidade, propriedades estatísticas e coerência. Esta última desempenha um papel central na detecção da vorticidade e da polarização de um feixe. Sem ela não se pode definir um estado de polarização para o feixe, nem se pode estudar a estrutura da frente de onda do mesmo. Além disso, o estudo do momento angular orbital da luz só foi possível depois do desenvolvimento de cavidades óticas de boa qualidade.

Descreveremos agora os modos de Laguerre-Gauss [140] e como estes satisfazem a equação de onda na aproximação paraxial, antes porém faremos uma pequena digressão e falaremos um pouco sobre a aproximação paraxial.

## 1.2 Óptica Paraxial

Quando o primeiro laser foi posto a funcionar no fim da década de 50, muitos diziam que era apenas mais uma ferramenta de valor apenas acadêmico. Hoje podemos dizer que o laser foi uma das maiores invenções do século XX. Ele nunca deixou de ser uma grande ferramenta acadêmica para o estudo das leis fundamentais da natureza. Além disso, resultou em inúmeras aplicações em prazos extremamente curtos em diversas áreas como a metrologia (relógios atômicos e medidas interferométricas), topografia (medidas de distância), telecomunicações (fibras óticas), medicina (cirurgias de correção visual), computação (mídias laser e circuitos óticos), indústria (controle de qualidade), eletrodomésticos (disc laser) e até na indústria bélica (sistemas de posicionamento e sistemas de direcionamento de mísseis).

Na ótica o laser é largamente utilizado como fonte de feixes “bem comportados”, ou seja, produz luz coerente com uma frequência bem definida. Sendo uma radiação eletromagnética, a equação de onda é quem governa a sua dinâmica [51]

$$\nabla^2 E(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (1.7)$$

Um laser é constituído de três partes básicas: 1) um meio de ganho; 2) um sistema de bombeamento de energia e 3) uma cavidade ressonante. Na primeira delas o fenômeno conhecido como emissão estimulada é o responsável pela coerência da luz laser. O sistema de bombeamento fornece a energia necessária para a inversão de população dentro do meio de ganho. A inversão de população em um meio de ganho se dá quando o número de emissores (átomos, moléculas ou pares elétrons-buracos em semicondutores) excitados passa a ser maior que o número de átomos no estado desexcitados. A última parte, a cavidade ressonante, impõe condições de contorno sobre a equação de onda. Estas condições impõem vínculos sobre as frequências de oscilação do laser dando origem aos modos longitudinais, que correspondem a ondas estacionárias ao longo da cavidade. Este é um dos fatores responsáveis pela sua monocromaticidade. Além dos modos longitudinais, a cavidade sustenta no seu interior modos transversais ou modos TEM (*Transversal Electromagnetic*), configurações do campo perpendiculares<sup>3</sup> ao eixo de propagação. Em linhas gerais, a ótica paraxial se aplica quando as dimensões transversais do feixe são muito menores do que as distâncias longitudinais típicas sobre as quais o campo muda significativamente o valor da sua amplitude. A equação paraxial rege a propagação da luz

---

<sup>3</sup> $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

no regime de validade desta aproximação. A seguir estudaremos este regime de validade e as consequências desta aproximação na ótica física.

### 1.2.1 A Equação Paraxial

A ótica paraxial, também conhecida como ótica Gaussiana, é a maneira mais simples de descrever a ótica física. Um grande número de livros-texto contêm capítulos inteiros sobre este tema [51, 140, 62]. Contudo, a abordagem dada por eles leva a uma inconsistência com as equações de Maxwell. Nesta seção mostraremos esta inconsistência e em seguida mostraremos uma abordagem alternativa [34] que está em pleno acordo com as leis do Eletromagnetismo.

Partimos das equações de Maxwell para o campo eletromagnético no vácuo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 , \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad (1.11)$$

$$(1.12)$$

onde  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \exp[-i\omega t]$  e  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}) \exp[-i\omega t]$  são campos<sup>4</sup> oscilantes.

Se tomarmos o rotacional da equação (1.8), num meio isotrópico, obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E} . \quad (1.13)$$

Esta é a conhecida equação de Helmholtz, obtida a partir da equação (1.10). Se analisarmos soluções do tipo  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ , a lei de Ampère (1.9) impõe que

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 . \quad (1.14)$$

Ou seja,  $E_x$  deve ser independente de x. Soluções do tipo onda plana estão em pleno acordo com este resultado. Contudo o *ansatz* usado para soluções propagantes na direção z é

$$E_x = \psi(x, y, z) e^{ikz} . \quad (1.15)$$

Note que  $\partial_x E_x \neq 0$  é proibido pela divergência de  $\vec{E}$ , equação (1.10). Ignorando este

---

<sup>4</sup>Para obtermos os campos físicos a partir destes campos, basta tomarmos as suas partes reais.

problema a dedução da equação paraxial segue calculando-se o laplaciano de  $E_x$ . Esta é a conhecida equação de Helmholtz, obtida a partir da equação (1.10). Se analisarmos soluções do tipo  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ , a lei de Gauss (1.10) impõe que

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad (1.16)$$

ou seja,  $E_x$  deve ser independente de  $x$ . Soluções do tipo onda plana estão em pleno acordo com este resultado. Contudo, o *ansatz* usado para soluções propagantes na direção  $z$  é

$$E_x = \psi(x, y, z)e^{ikz} \quad . \quad (1.17)$$

Note que  $\partial_x E_x \neq 0$  é proibido pela divergência de  $\vec{E}$ . Ignorando este problema a dedução da equação paraxial segue calculando-se o laplaciano de  $E_x$ .

Lembrando que  $k = \omega/c$ ,

$$\nabla^2[\psi(\vec{r})e^{ikz}] = \left[ \nabla^2\psi(\vec{r}) + 2ik\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial z} - k^2\psi(\vec{r}) \right] e^{ikz} \quad . \quad (1.18)$$

Neste ponto costuma-se fazer a aproximação

$$\left| \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial\psi}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right|, \quad (1.19)$$

que é conhecida como aproximação paraxial. Ela se apoia na condição de que o feixe em questão pouco difrata ao longo de sua propagação, em outras palavras assume-se que o feixe está bem colimado. Feita essa aproximação, a equação obtida é conhecida como *equação paraxial*,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad . \quad (1.20)$$

A solução fundamental<sup>5</sup> desta equação é uma gaussiana nas coordenadas transversais  $(x, y)$ . Apesar da aparente inconsistência com a equação (1.10), este resultado está, curiosamente, de acordo com o que é observado experimentalmente. Para evitar as passagens conflitantes com as equações de Maxwell, vamos deduzir a aproximação paraxial de uma maneira alternativa, seguindo de perto a referência [34].

Partindo novamente das equações de Maxwell vamos separar o campo elétrico e o

---

<sup>5</sup>Esta equação é muito parecida com a equação de Schrödinger para uma partícula livre. Esta nomenclatura se baseia nesta semelhança, que será explorada mais adiante.

operador nãla em componentes transversal,  $\rho = (x, y)$ , e longitudinal,  $z$ .

$$\vec{E} = \left[ \vec{\psi}_{\perp}(\vec{r}) + \hat{z}\psi_z(\vec{r}) \right] e^{i(kz - \omega t)} \quad (1.21)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_{\perp} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad (1.22)$$

onde

$$\vec{\nabla}_{\perp} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.23)$$

Usando as expressões anteriores, calculamos o rotacional da equação (1.8) e obtemos uma equação vetorial na qual cada componente deve ser satisfeita independentemente,

$$\vec{\nabla}_{\perp} \left[ \vec{\nabla}_{\perp} \cdot \vec{\psi}_{\perp} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} + ik\psi_z \right] - \nabla_{\perp}^2 \vec{\psi}_{\perp} - \frac{\partial^2 \vec{\psi}_{\perp}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \vec{\psi}_{\perp}}{\partial z} = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial(\vec{\nabla}_{\perp} \cdot \vec{\psi}_{\perp})}{\partial z} - \nabla_{\perp}^2 \psi_z + ik \vec{\nabla}_{\perp} \cdot \vec{\psi}_{\perp} - k^2 \psi_z = 0 \quad , \quad (1.25)$$

onde (1.24) é a equação na direção transversal e (1.25) a equação na direção longitudinal.

Como estamos interessados apenas em feixes produzidos por cavidades óticas, é natural usarmos a cintura do feixe<sup>6</sup>,  $w_0$ , para reescalonar as coordenadas transversais e a distância de Rayleigh,  $z_R = kw_0^2/2$ , que é um comprimento característico associado à difração do feixe<sup>7</sup>, para reescalonar a coordenada longitudinal.

$$x = w_0 \xi \quad , \quad y = w_0 \eta \quad e \quad z = z_R \zeta \quad . \quad (1.26)$$

Após efetuarmos o reescalonamento, multiplicamos a equação para as componentes transversais por  $w_0^3/z_R$  e a equação para a componente longitudinal por  $w_0^4/z_R^2$ . Feito isto, as novas equações em termos das coordenadas adimensionais  $(\xi, \eta, \zeta)$  são

$$\vec{\nabla}_{\tau} \left[ h \vec{\nabla}_{\tau} \cdot \vec{\psi}_{\tau} + h^2 \frac{\partial \psi_{\zeta}}{\partial \zeta} + 2i\psi_{\zeta} \right] - h \nabla_{\tau}^2 \vec{\psi}_{\tau} - h^3 \frac{\partial^2 \vec{\psi}_{\tau}}{\partial \zeta^2} - 4ih \frac{\partial \vec{\psi}_{\tau}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.27)$$

$$h^3 \frac{\partial(\vec{\nabla}_{\tau} \cdot \vec{\psi}_{\tau})}{\partial \zeta} - h^2 \nabla_{\tau}^2 \psi_{\zeta} + 2ih \vec{\nabla}_{\tau} \cdot \vec{\psi}_{\tau} - 4\psi_{\zeta} = 0 \quad . \quad (1.28)$$

onde  $h = w_0/z_R$  e

$$\vec{\nabla}_{\tau} \equiv \hat{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (1.29)$$

Estamos interessados em regimes onde

$$w_0 \ll z_R \quad \therefore \quad w_0 \ll \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad \therefore \quad \lambda \ll w_0 \quad , \quad (1.30)$$

<sup>6</sup>Do inglês "beam waist".

<sup>7</sup> $z_R$  é o comprimento que o feixe deve propagar para que o seu diâmetro aumente de um fator  $\sqrt{2}$ .

ou seja, onde o feixe está bem colimado. Neste regime  $h$  torna-se naturalmente um parâmetro de expansão, o que nos permite escrever

$$\vec{\psi}_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \vec{\psi}_\tau^{(n)} \quad (1.31)$$

$$\psi_\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \psi_\zeta^{(n)} \quad . \quad (1.32)$$

Substituindo as expressões (1.31) e (1.32) nas equações (1.27) e (1.28), veremos que podemos manter apenas os termos pares da expansão de  $\vec{\psi}_\tau$  e apenas os termos ímpares da expansão de  $\psi_\zeta$ .

Após este procedimento reunimos os termos proporcionais a  $h$  e obtemos,

$$\nabla_\tau^2 \vec{\psi}_\tau^{(0)} + 4i \frac{\partial \vec{\psi}_\tau^{(0)}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.33)$$

$$\psi_\zeta^{(1)} = \frac{i}{2} \vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau^{(0)} \quad . \quad (1.34)$$

Comparando a eq. de ordem zero (1.33) com a eq. (1.20) podemos ver que elas são de fato a mesma equação. Sendo que a (1.33) foi obtida através de um processo que obedece as imposições feitas pelas equações de Maxwell. Note que a solução de ordem zero,  $\vec{\psi}_\tau^{(0)}$ , fornece um campo transversal dependente das coordenadas transversais. A primeira correção,  $\psi_\zeta^{(1)}$ , mostra que há uma componente na direção de propagação do feixe. O termo seguinte da série acrescenta correções devido a efeitos de difração,

$$\nabla_\tau^2 \vec{\psi}_\tau^{(2)} + 4i \frac{\partial \vec{\psi}_\tau^{(2)}}{\partial \zeta} = - \frac{\partial^2 \vec{\psi}_\tau^{(0)}}{\partial \zeta^2} \quad (1.35)$$

$$\psi_\zeta^{(3)} = \frac{i}{2} \vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau^{(2)} + \frac{i}{2} \frac{\partial \psi_\zeta^{(1)}}{\partial \zeta} \quad . \quad (1.36)$$

A equação (1.33) é invariante sob rotações em torno do eixo  $z$ , portanto soluções circularmente, elipticamente e linearmente polarizadas são igualmente permitidas. Por simplicidade vamos considerar uma solução linearmente polarizada do tipo

$$\vec{\psi}_\tau^{(0)} = \vec{A} e^{iS} \quad , \quad (1.37)$$

onde  $\vec{A}$  e  $S$  são reais. Substituindo a expressão (1.37) na (1.33) obtemos uma equação complexa onde as partes real e imaginária devem ser satisfeitas separadamente

$$\nabla_\tau^2 \vec{A} - (\vec{\nabla}_\tau S)^2 \vec{A} - 4 \left( \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right) \vec{A} = 0 \quad (1.38)$$



e

$$2(\vec{\nabla}_\tau S \cdot \vec{\nabla}_\tau) \vec{A} + \nabla_\tau^2 S \vec{A} + 4 \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad . \quad (1.39)$$

Fazendo o produto escalar destas equações com  $\vec{A}$ , podemos reescrevê-las como

$$(\vec{\nabla}_\tau S)^2 + 4 \left( \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right) = (\vec{A} \cdot \nabla_\tau^2 \vec{A}) A^{-2} \quad (1.40)$$

e

$$\vec{\nabla}_\tau \cdot (A^2 \vec{\nabla}_\tau S) + 2 \left( \frac{\partial A^2}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad . \quad (1.41)$$

A equação (1.40) é análoga à *equação eikonal* [49] da ótica geométrica com um termo de difração dado por  $(\vec{A} \cdot \nabla_\tau^2 \vec{A}) A^{-2}$ , e a equação (1.41) é uma equação de transporte<sup>8</sup> que representa a conservação da densidade de energia eletromagnética.

A equação (1.40) tem a mesma forma da equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula livre [69]. As analogias entre a ótica geométrica e a Mecânica Clássica levaram Schrödinger a formular a sua Mecânica Ondulatória em analogia com a ótica física. Posteriormente, junto com os trabalhos de Heisenberg, Born, Jordan e Dirac, a Mecânica Ondulatória de Schrödinger deu origem à Mecânica Quântica como a conhecemos hoje. No limite clássico ( $\hbar \rightarrow 0$ ) a equação de Schrödinger se reduz à equação de Hamilton-Jacobi, com a fase da função de onda coincidindo com a ação clássica [69]. Desta forma é de se esperar que as soluções de ambas as equações tenham a mesma forma funcional. Baseado nisso olharemos para as soluções da equação (1.33) semelhantes às da equação de Schrödinger para uma partícula livre.

## 1.2.2 O Modo Fundamental

Destacamos anteriormente a semelhança entre a equação paraxial e a equação de Schrödinger para uma partícula livre. Com isto em mente, construímos um "*ansatz*" para a solução da equação (1.20).

Suponhamos que a solução seja

$$\psi(\vec{r}) = A \exp \left\{ i \left[ \frac{kr^2}{2q(z)} + P(z) \right] \right\} \quad , \quad (1.42)$$

onde  $A$  é uma constante e  $q(z)$  e  $P(z)$  serão determinados a posteriori. Substituindo esta

---

<sup>8</sup>Análoga à equação de continuidade.

expressão na equação paraxial, obtemos

$$\left\{ \frac{k^2}{q^2(z)} \left[ \frac{dq(z)}{dz} - 1 \right] r^2 - 2k \left[ \frac{dP(z)}{dz} - \frac{i}{q(z)} \right] \right\} = 0. \quad (1.43)$$

Para que (1.42) seja solução da (1.20),  $q(z)$  e  $P(z)$  devem satisfazer as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dq(z)}{dz} = 1 \quad (1.44)$$

e

$$\frac{dP(z)}{dz} = \frac{i}{q(z)}. \quad (1.45)$$

Resolvendo a eq. (1.44) vemos que  $q(z)$  deve ter a seguinte forma,

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z - iz_R} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} + i \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{2}{kw^2(z)}. \quad (1.46)$$

As funções

$$w(z) = w_0 \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right]} \quad (1.47)$$

e

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (1.48)$$

são, respectivamente, o raio do feixe e o raio de curvatura da frente de onda no plano  $z$ ,  $w_0$  é a cintura do feixe e  $z_R = kw_0^2/2$  é a distância de Rayleigh<sup>9</sup>.

Uma vez de posse de  $q(z)$  podemos determinar  $P(z)$ ,

$$P(z) = i \ln \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right] - \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \quad (1.49)$$

Vemos que a fase do campo próximo ao eixo  $z$  comporta-se da seguinte maneira

$$E \sim \frac{1}{R} \exp(ikz) \exp \left( i \frac{kr^2}{2R} \right). \quad (1.50)$$

Nos feixes Gaussianos a origem de  $R$  varia com a propagação conforme a equação (1.48). Repare que apenas quando  $z \gg z_R$  o feixe parece ter a sua origem em  $z = 0$ . Quando caminhamos na direção de  $z = 0$  o raio de curvatura passa por um mínimo em  $z = z_R$  e em seguida diverge quando  $z \rightarrow 0$ , onde ele se torna infinito e a frente de onda plana, figura(1.2).

Note que a origem do raio de curvatura muda com a propagação da onda, ele tende ao

---

<sup>9</sup>O fato de  $z_R$  ser real esta relacionado com a finitude das soluções da equação paraxial. Isto ficará evidente quando encontrarmos a solução para o modo fundamental.

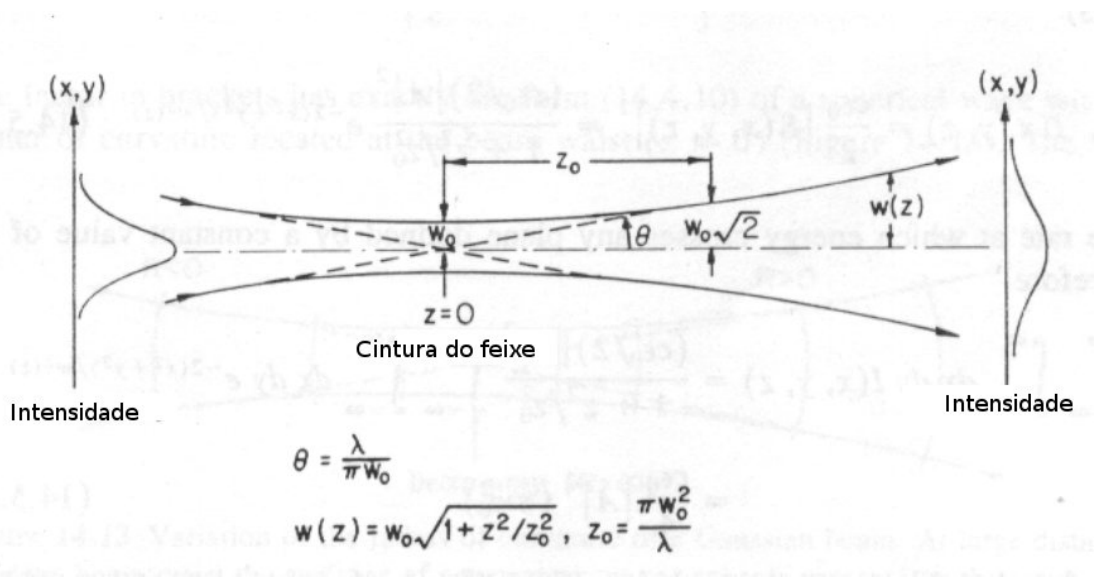


Figura 1.2: Plano focal do feixe Gaussiano [138].

infinito em  $z = 0$  e  $z \rightarrow \infty$ , dois regimes em que as frentes de onda são planas. A expressão para  $R(z)$  mostra que entre esses dois extremos a frente de onda é aproximadamente esférica.

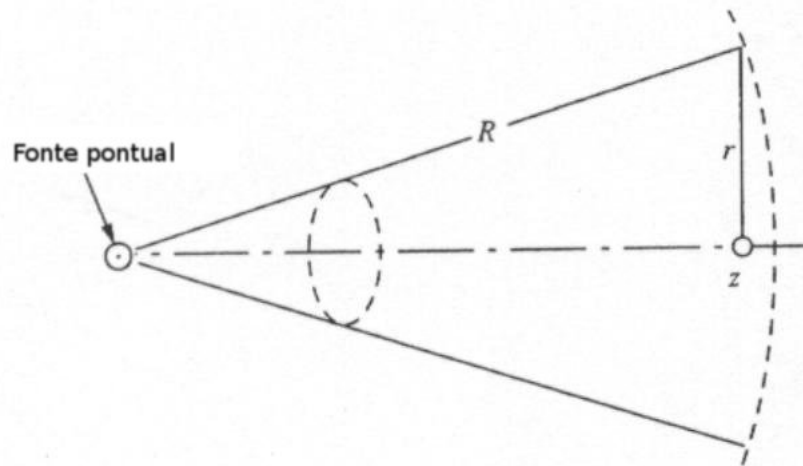


Figura 1.3: Onda esférica [155].

Determinados os parâmetros  $q(z)$  e  $P(z)$ , determinamos “o modo fundamental<sup>10</sup>” da

<sup>10</sup>Veremos adiante que essa nomenclatura se deve a uma analogia com o problema da partícula livre de Schrödinger.

equação paraxial. A solução da equação paraxial é [140]

$$E_x(\vec{r}) = E_0 \underbrace{\frac{w_0}{w(z)} \exp\left[\frac{-r^2}{w(z)}\right]}_{\text{fator de amplitude}} \exp\left\{i \left[ \underbrace{kz - \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)}_{\text{fase longitudinal}} + \underbrace{\frac{kr^2}{2R(z)}}_{\text{fase radial}} \right] \right\}, \quad (1.51)$$

que tem a distribuição de intensidade mostrada na figura 1.4. O fator de amplitude garante

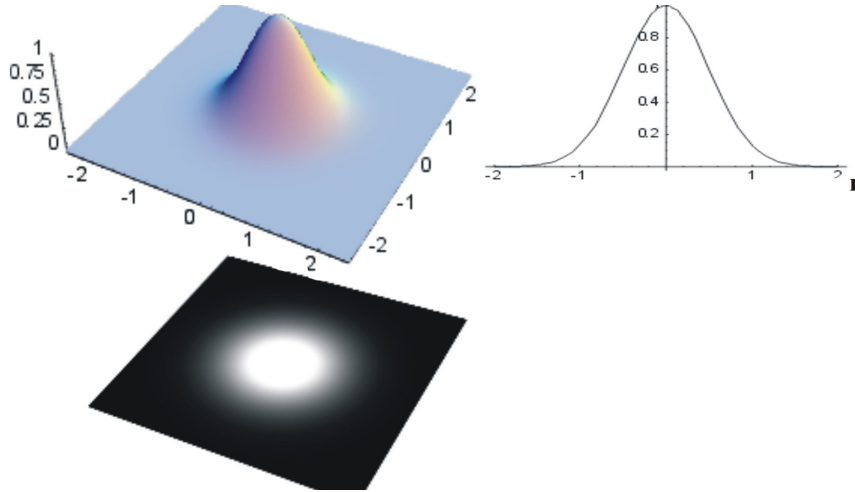


Figura 1.4: *Perfil de intensidade Gaussiano.*

que a energia que atravessa um dado plano  $z$  arbitrário seja constante. Em particular, quando  $z \gg z_R$ , o fator  $w_0/w(z)$  tende para o valor assintótico de  $z_R/z$ , limite em que é válida a aproximação de onda esférica, figura(1.3), o que nos leva a

$$\theta \simeq \tan(\theta) = \frac{dw(z)}{dz} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (1.52)$$

Onde  $\theta$  é o coeficiente angular da assíntota que define o diâmetro do feixe quando  $z \gg z_R$ .

Voltando à analogia com o problema da partícula livre de Schrödinger[43], percebemos que os dois sistemas são completamente análogos<sup>11</sup>, segundo a seguinte regra de correspondência.

$$\begin{aligned} z &\longleftrightarrow t \\ w(z) &\longleftrightarrow \Delta x(t) \\ \psi_{M.Q.}(\vec{r}, t) &\longleftrightarrow E(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

O diâmetro mínimo do feixe,  $2w_0$ , pode ser interpretado como uma consequência do princípio de incerteza de Heisenberg para a posição e o momento linear do fóton.

<sup>11</sup>Cohen-Tannoudji, *Quantum Mechanics*, vol. 1, complemento GI, página 61.

Agora que já estamos de posse do modo fundamental da equação paraxial, podemos passar para os modos de ordem superior, conhecidos como modos de Hermite-Gauss e modos de Laguerre-Gauss.

### 1.2.3 Os Modos de Hermite-Gauss

A solução encontrada na seção anterior não é a única solução para a equação paraxial. Assim como na equação de Schrödinger, existe um conjunto completo de soluções ortogonais para a equação paraxial.

Para obter este conjunto de soluções, vamos usar um *ansatz* a seguir. Neste permitiremos que a amplitude dependa das coordenadas transversais,

$$\psi(\vec{r}) = A g\left(\frac{x}{w(z)}\right) h\left(\frac{y}{w(z)}\right) \exp\left\{i\left[\frac{kr^2}{2q(z)} + P(z)\right]\right\}, \quad (1.53)$$

onde  $w(z)$  e  $q(z)$  são dados pelas (1.47) e (1.48). O raio de curvatura e o diâmetro do feixe são os mesmos do modo fundamental. O parâmetro  $w_0$  define um conjunto de soluções ortogonais da equação paraxial. Soluções com cinturas,  $w_0$ , diferentes são linearmente dependentes.

Seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, chegamos às expressões de  $g$  e  $h$

$$g\left(\frac{x}{w(z)}\right) = H_n\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right). \quad (1.54)$$

$$h\left(\frac{y}{w(z)}\right) = H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right). \quad (1.55)$$

Onde  $H_n(x)$  e  $H_m(y)$  são os polinômios de Hermite [35].

A função  $P(z)$  agora depende da ordem dos polinômios de Hermite.

$$P(z) = i \ln\left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}\right) - (n + m + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right), \quad (1.56)$$

A solução geral da equação paraxial, em coordenadas cartesianas, é então

$$\begin{aligned} \psi_{n,m} = & \frac{A_{n,m}}{w(z)} H_n\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right) H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right) \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] \\ & \exp\left\{i\left[\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} - (n + m + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$A_{n,m}$  é uma constante de normalização.

Os índices  $m$  e  $n$  dos polinômios definem uma hierarquia de modos dada por  $N = m + n$ , note que se fizermos  $n = m = 0$  na expressão anterior nós recuperamos a solução dada pela equação (1.51), o que justifica a nomenclatura usada para aquela solução ( $N = 0$ ). Na figura 1.5 podemos ver alguns padrões de intensidade gerados por esta família de modos.

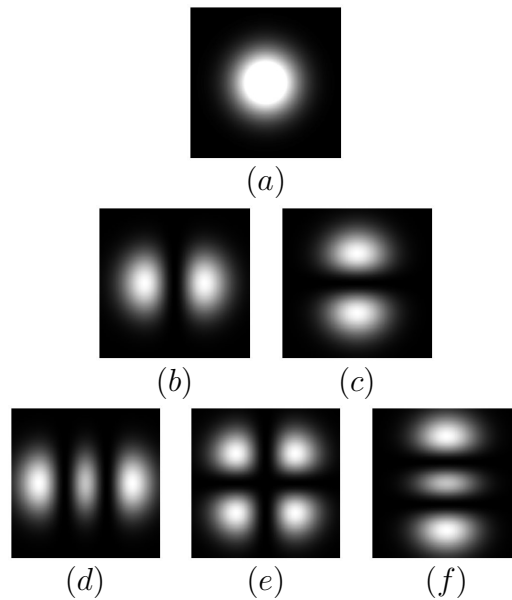


Figura 1.5: *Perfis de intensidade dos modos de Hermite-Gauss. Em (a) vemos o modo fundamental  $N = 0$ , em (b) e (c) os modos de primeira ordem  $N = 1$ ,  $(n, m) = (1, 0)$  e  $(n, m) = (0, 1)$ , respectivamente. Em (d), (e) e (f) os modos de segunda ordem  $N = 2$ ,  $(n, m) = (2, 0)$ ,  $(n, m) = (1, 1)$  e  $(n, m) = (0, 2)$ , respectivamente.*

#### 1.2.4 Os Modos de Laguerre-Gauss

Dada a simetria cilíndrica da equação (1.33) é natural esperarmos que esta também admita soluções que respeitem essa simetria. Estas soluções são conhecidas como os modos de Laguerre-Gauss, os quais descreveremos adiante.

Em coordenadas cilíndricas, a equação paraxial tem a seguinte forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad . \quad (1.58)$$

Partindo do *ansatz*

$$\psi(\vec{r}) = \chi \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left\{ i \left[ \frac{kr^2}{2R(z)} + P(z) + l\phi \right] \right\} \quad , \quad (1.59)$$

e seguindo o procedimento das duas seções anteriores, encontramos que

$$\chi_p^l \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) = \left[ \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2(z)} \right] L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \quad (1.60)$$

e

$$P(z) = i \ln \left( \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \right) - (2p + |l| + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \quad , \quad (1.61)$$

onde  $L_p^{|l|}$  são os polinômios associados de Laguerre.

Com estes resultados podemos escrever as soluções da equação paraxial em coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \psi_{p,l} = & \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(z)(p+|l|)!}} \left[ \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2(z)} \right] L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \times \\ & \times \exp \left\{ i \left[ \frac{kr^2}{2R(z)} - (2p + |l| + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) + l\phi \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.62)$$

A figura 1.6 mostra o perfil de intensidade das três primeiras ordens dos modos de Laguerre-Gauss. Note que o modo fundamental também é contemplado neste conjunto de soluções.

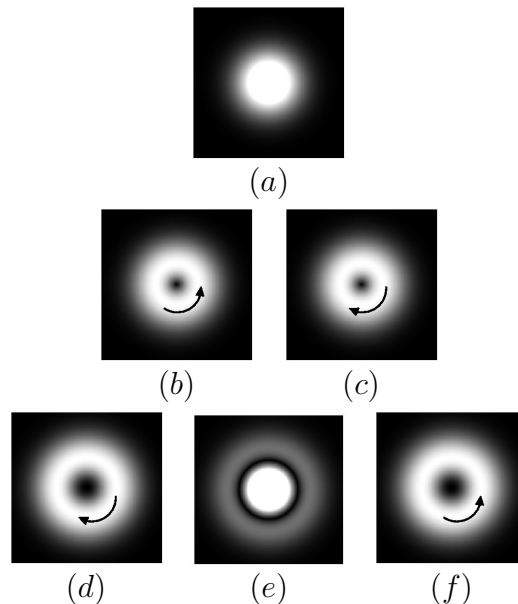


Figura 1.6: *Perfis de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss. Em (a) vemos o modo fundamental,  $(p,l) = (0,0)$ . Em (b) e (c) os modos de primeira ordem,  $(p,l) = (0,1)$  e  $(p,l) = (0,-1)$ , respectivamente. E em (d), (e) e (f) os modos de segunda ordem,  $(p,l) = (0,2)$ ,  $(p,l) = (1,0)$  e  $(p,l) = (0,-2)$ , respectivamente.*

Assim como os modos de Hermite-Gauss (HG), os modos de Laguerre-Gauss (LG) formam um conjunto completo de soluções ortonormais da equação paraxial. Isto carac-

teriza uma base de um espaço vetorial, indicando que os modos de HG e LG formam duas bases distintas do espaço de soluções da equação paraxial<sup>12</sup>. De fato, existe uma combinação linear de polinômios de Hermite que gera um polinômio de Laguerre [20], e vice-versa.:

$$\sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k P_k^{n-k, m-k}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = 2^{n+m} \times$$

$$\times \begin{cases} (-1)^m m! (x + iy)^{n-m} L_n^{n-m}(x^2 + y^2) & \text{para } n \geq m \\ (-1)^n n! (x - iy)^{m-n} L_n^{m-n}(x^2 + y^2) & \text{para } m > n \end{cases}, \quad (1.63)$$

onde

$$P_k^{n-k, m-k}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^m (1+t)^n] |_{t=0} \quad (1.64)$$

são os polinômios de Jacobi.

Para os modos de primeira ordem a relação entre as bases  $HG_{m,n}$  e  $LG_p^l$ , é bastante simples.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm i HG_{0,1}) = LG_0^{\pm 1} \quad (1.65)$$

O significado da equação anterior está ilustrado na figura 1.7.

Também podemos escrever modos de HG de 1<sup>a</sup> ordem, rodados de um ângulo  $\theta$ , em termos dos modos  $HG_{0,1}$  e  $HG_{1,0}$  [20]. Em particular, quando  $\theta=45^\circ, 135^\circ$ , temos

$$HG_{0,1}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{0,1} + HG_{1,0}) \quad (1.66)$$

$$HG_{0,1}^{135^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{0,1} - HG_{1,0}) . \quad (1.67)$$

A relação entre modos de HG e modos de LG é idêntica à que existe entre os estados de polarização, onde os modos de  $HG_{1,0}$  e  $HG_{0,1}$  fazem os papéis das polarizações horizontal e vertical e os modos de  $LG_0^{+1}$  e  $LG_0^{-1}$  os papeis das polarizações circulares à direita e à esquerda.

## 1.2.5 A Esfera de Poincaré para Modos Espaciais

Baseado na semelhança entre estados de polarização e modos transversais de primeira ordem, pode-se construir uma representação análoga à esfera de Poincaré para polarização.

---

<sup>12</sup>O que garante que qualquer combinação linear de elementos de uma mesma família de modos também seja solução da equação paraxial.



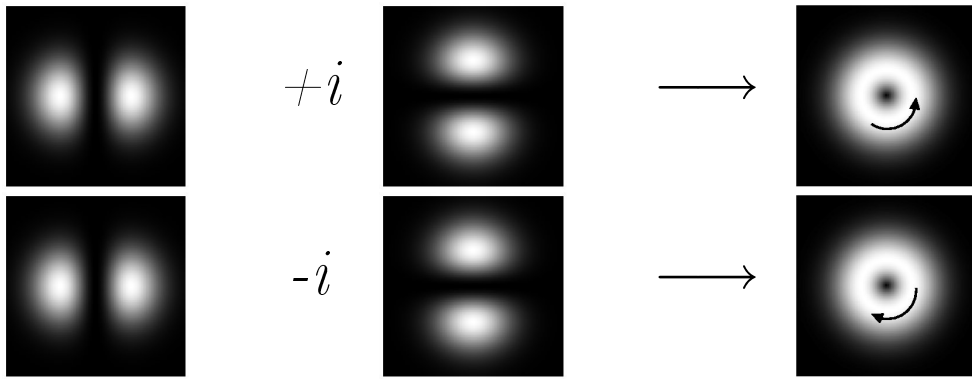


Figura 1.7: *Relação entre os modos de HG e os modos de LG de primeira ordem.*

O estado de polarização de um feixe monocromático pode ser totalmente caracterizado pelos parâmetros de Stokes [40, 51].

$$s_1 = \frac{I_{0^\circ} - I_{90^\circ}}{I_{0^\circ} + I_{90^\circ}} \quad (1.68)$$

$$s_2 = \frac{I_{45^\circ} - I_{135^\circ}}{I_{45^\circ} + I_{135^\circ}} \quad (1.69)$$

$$s_3 = \frac{I_{\odot} - I_{\ominus}}{I_{\odot} + I_{\ominus}} \quad , \quad (1.70)$$

onde  $I_{0^\circ}$ ,  $I_{90^\circ}$ ,  $I_{45^\circ}$  e  $I_{135^\circ}$  são, respectivamente, as intensidades das componentes de polarização do feixe que se quer caracterizar, medidas segundo as direções  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $135^\circ$ . As componentes circulares,  $I_{\odot}$  e  $I_{\ominus}$ , são medidas com o auxílio de lâminas birrefringentes  $\lambda/4$ .

Para feixes completamente polarizados, os parâmetros de Stokes obedecem ao seguinte vínculo,

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1 \quad (1.71)$$

Esta equação bastante familiar sugere que os parâmetros de Stokes podem ser interpretados como as coordenadas Cartesianas de uma superfície esférica de raio unitário, onde cada ponto da superfície representa um dado estado de polarização do feixe. Esta representação é conhecida como a representação de Poincaré, ou simplesmente esfera de Poincaré [40], figura 1.8(a).

A esfera de Poincaré tem a mesma estrutura que a esfera de Bloch [41] para os estados de um sistema de spin  $1/2$ . Os pólos norte e sul da esfera de Poincaré são análogos aos autoestados da componente  $z$  do momento angular de spin e representam, respectivamente, luz circularmente polarizada à esquerda e luz circularmente polarizada à direita. Qualquer estado de polarização de um feixe totalmente polarizado<sup>13</sup>, e portanto

<sup>13</sup>Um feixe totalmente polarizado é análogo a um estado puro e um feixe não polarizado é análogo a

qualquer ponto na esfera de Poincaré, pode ser entendido como uma superposição de polarizações circulares à esquerda e à direita. Os pontos no equador da esfera representam os estados de polarização linear, onde a orientação desta polarização linear é determinada pela fase relativa entre as componentes de polarização circular do feixe.

Os modos transversais de primeira ordem são isomorfos aos estados de polarização. Sendo os modos de  $HG_{1,0}$  e  $HG_{0,1}$  análogos às polarizações lineares horizontal e vertical, respectivamente, e os modos de  $LG_0^{\pm 1}$  às polarizações circulares à direita e à esquerda, respectivamente. Assim sendo é possível construir uma esfera de Poincaré para os modos de primeira ordem [44], figura 1.8(b).

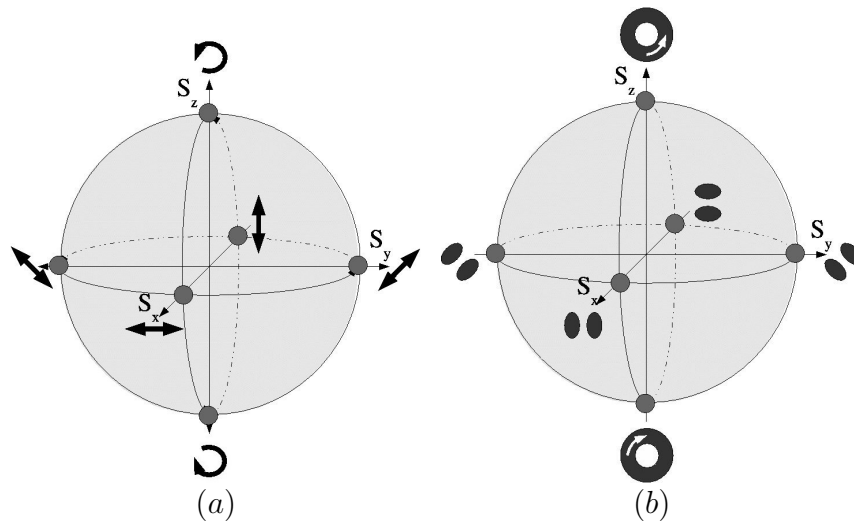


Figura 1.8: *Esfera de Poincaré para os estados de polarização (a) e para os modos transversais de 1<sup>a</sup> ordem (b).*

As coordenadas Cartesianas desta nova esfera também podem ser interpretadas como parâmetros de Stokes para os modos transversais.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{I_{HG_{1,0}^{0^\circ}} - I_{HG_{1,0}^{90^\circ}}}{I_{HG_{1,0}^{0^\circ}} + I_{HG_{1,0}^{90^\circ}}} \\
 p_2 &= \frac{I_{HG_{1,0}^{45^\circ}} - I_{HG_{1,0}^{135^\circ}}}{I_{HG_{1,0}^{45^\circ}} + I_{HG_{1,0}^{135^\circ}}} \\
 p_3 &= \frac{I_{LG_0^1} - I_{LG_0^{-1}}}{I_{LG_0^1} + I_{LG_0^{-1}}} .
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

---

um estado de mistura estatística.

### 1.2.6 Produção Holográfica de Feixes com Momento Angular Orbital

Um dos métodos mais simples para gerar feixes com momento angular orbital é o método holográfico. Este método utiliza uma variação das placas zonais de Fresnel, as quais chamaremos de placas zonais espirais (PZE) [52, 137], figura 1.9.

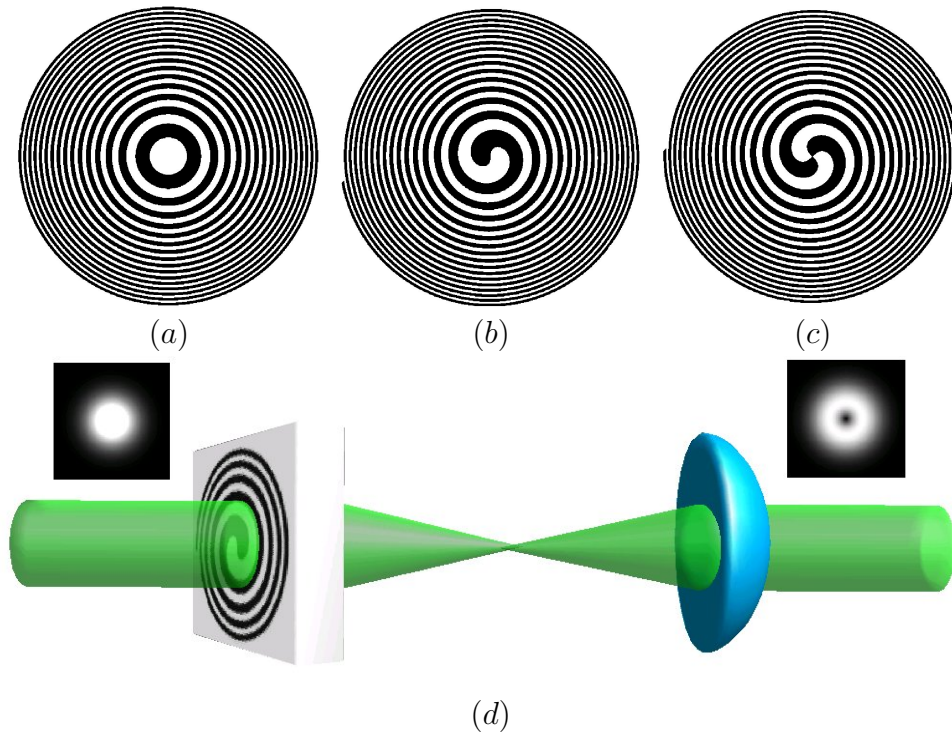


Figura 1.9: Máscaras usadas para gerar os modos de LG. Em (a) uma placa zonal de Fresnel. Em (b) e em (c) temos duas placas zonais espirais (PZE) com helicidade  $+1$  e  $+2$ , respectivamente. Em (d) o arranjo experimental básico para produção do modo LG. Assim como as placas zonais de Fresnel, as PZE também focalizam o feixe, sendo necessário recolimá-lo após a passagem pela máscara.

Para a fabricação das PZE seguimos a seguinte receita. Primeiro gera-se num computador o padrão de interferência entre um modo LG e uma onda plana, figuras 1.9(b) e 1.9(c)). Depois imprime-se a figura gerada em uma impressora de boa resolução. Em seguida fotografa-se<sup>14</sup> as impressões com um filme super grão fino como o *Kodalith*<sup>®</sup> e usa-se o próprio filme revelado como PZE.

A geração das espirais é feita através do programa de computador contido no Apêndice A, este calcula o padrão de interferência entre uma onda plana e um modo de Laguerre-

<sup>14</sup>A microfilmagem também produz resultados bastante satisfatórios e atualmente é o método empregado em nosso laboratório.

Gauss,

$$|\psi_{p,l} + 1| \propto |1 + e^{i(\alpha r^2 + l\theta)}| \propto \cos\left(\frac{\alpha r^2 + l\theta}{2}\right) \quad (1.73)$$

Os pontos onde esta função tem valor nulo representam as regiões onde a intensidade é nula, e vice-versa. Os pontos onde a intensidade é nula são dados por

$$\frac{\alpha r^2 + l\theta}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{(2n+1)\pi - l\theta}{\alpha}}, \quad n = 0, \dots, (2l-1) \quad (1.74)$$

Nas equações acima  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares da figura,  $\alpha$  é a escala radial da figura,  $l$  é a helicidade do feixe que queremos gerar e  $n$  é um inteiro que varia de zero até o número de regiões claras e escuras. Note que para  $n \geq 2l$  as espirais se repetem.

O programa desenha as curvas dadas pela equação anterior, para o valor de  $l$  desejado, e então pinta de preto as regiões necessárias. O produto final desta rotina é um arquivo *Postscript* pronto para ser impresso e fotografado.

A figura 1.10(a) mostra outro tipo de holograma capaz de gerar modos com momento angular. Quando iluminado por um modo gaussiano, este holograma funciona como uma rede de difração, figura 1.10(b), onde a ordem zero da rede é o modo incidente, e as ordens laterais são os modos de LG [52]. Este holograma é gerado por computador através do gráfico de densidades<sup>15</sup> da seguinte função<sup>16</sup>

$$|1 + e^{i[\alpha(r^2 + r \sin\beta) + l\theta]}| \propto \cos\left(\frac{\alpha r^2 + r \sin\beta + l\theta}{2}\right) \quad (1.75)$$

A helicidade das ordens de difração deste tipo de máscara diferem do módulo de  $l$  entre si, como mostra a figura(1.10(b)).

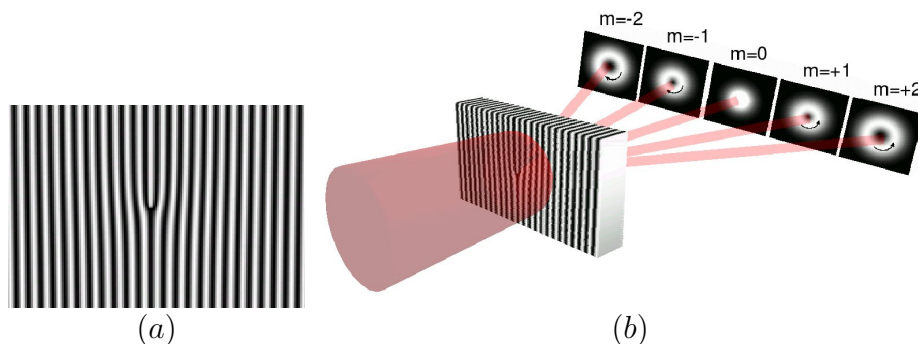


Figura 1.10: *Rede de difração bifurcada. Em (a) a rede de difração com defeito topológico gerada por computador. Em (b) um desenho esquemático do funcionamento da rede, onde  $m$  é a vorticidade do feixe.*

<sup>15</sup>Em programas como *Maple* e *Mathematica* os gráficos podem ser feitos escrevendo-se  $r = |x + iy|$  e  $\theta = \arg(x + iy)$ .

<sup>16</sup>Note que as PZE também podem ser geradas por este processo, basta fazer  $\beta = 0$ .

Este método é bastante vantajoso devido ao custo e praticidade. Porém, quando trabalhamos num regime de alta intensidade não é mais possível utilizá-lo, pois o plástico do filme derrete. Isto restringe a utilização das máscaras a experimentos onde o regime de intensidade é baixo. Há uma outra desvantagem na utilização das máscaras. Como estas são uma variação da placa zonal de Fresnel, desperdiçam uma quantidade considerável de luz. Além disso para que o feixe gerado seja de boa qualidade precisamos iluminar a máscara com uma onda plana, e para isso temos que expandir o feixe que nela incide desperdiçando ainda mais potência. Uma possível solução para estes problemas é a confecção de placas zonais de fase [139], estas não desperdiçam tanta luz quanto as placas zonais de amplitude apresentadas aqui, porém o custo de confecção deste tipo de máscara é alto comparado às máscaras de amplitude. As máscara de fase foram implementadas no LOQ pelo estudante de doutorado Carlos Eduardo Rodrigues de Souza , utilizando a técnica contida em [55], através de uma colaboração com o Laboratório Ótica e Litografia da UNICAMP sob a supervisão da professora Lucila Helena D. Cescato.

### 1.2.7 Conversor de Modos por Astigmatismo

Para contornarmos as desvantagens do método holográfico de produção de modos de LG num regime de altas intensidades podemos usar, além das placas zonais de fase, um método alternativo que utiliza lentes cilíndricas para transformar um modo  $HG_{0,1}$  em um modo  $LG_{0,1}$ .

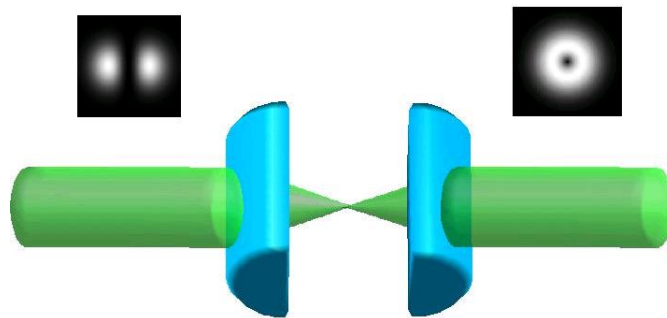


Figura 1.11: *Conversor de modos com lentes cilíndricas.*

As equações (1.63) e (1.65) mostram como as duas bases se relacionam, e o que deve ser feito para se obter um modo através do outro. A fase relativa introduzida entre os componentes da decomposição pode ser obtida explorando-se a fase de Gouy<sup>17</sup>,  $\varphi(z)$ .

<sup>17</sup>Em 1890 Gouy mostrou que um onda eletromagnética focalizada adquire uma fase axial adicional de  $\pi$  em relação à onda plana, quando passa pelo foco, porém até hoje não foi feita uma interpretação física satisfatória da fase de Gouy. Na introdução do trabalho de A. B. Ruffin *et al* [144] podem ser

Para um feixe Gaussiano isotrópico, ou seja, não astigmático, a fase de Gouy é dada por [38]

$$(n + m + 1)\varphi(z) \quad , \quad (1.76)$$

onde  $\varphi(z) = \arctan(z/z_R)$ . No caso de feixes astigmáticos, com as linhas nodais paralelas ao eixo de astigmatismo, por exemplo um feixe modo Hermite-Gaussiano que passou por uma lente cilíndrica, a amplitude pode ser considerada separadamente em dois planos de propagação perpendiculares  $(x, z)$  e  $(y, z)$ . Tal feixe tem distâncias de Rayleigh distintas,  $z_{R_x}$  e  $z_{R_y}$ , em cada plano de propagação isso nos permite escrever a fase de Guoy total do feixe como

$$(n + m + 1) \varphi(z) = (n + 1/2) \varphi_x(z) + (m + 1/2) \varphi_y(z) \quad , \quad (1.77)$$

onde

$$\varphi_x(z) = (n + 1/2) \arctan\left(\frac{z}{z_{R_x}}\right) \quad , \quad (1.78)$$

$$\varphi_y(z) = (m + 1/2) \arctan\left(\frac{z}{z_{R_y}}\right) \quad . \quad (1.79)$$

Os conversores de modos por astigmatismo exploram esta decomposição da fase de Gouy para transformar o modo de propagação, fazendo-o astigmático apenas em uma região confinada do espaço e isotrópico fora dela, figura 1.11. Fazendo um modo  $HG_{0,1}$  passar por um par de lentes cilíndricas rodadas de  $45^\circ$  em relação a linha nodal do modo, é introduzida uma diferença de fase entre as componentes do modo [38], equações (1.66). Se a fase introduzida entre as componentes for igual a  $\pi/2$ , o conversor transforma um modo HG rodado de  $45^\circ$  ( $135^\circ$ ) num modo  $LG_0^{\pm 1}$ , e vice-versa. Este conversor é o que chamaremos a partir de agora de “conversor  $\pi/2$ ”. O conversor  $\pi$ , que introduz uma fase de  $\pi$  entre as componentes do modo, inverte a helicidade de um modo  $LG_{p,l}$  para  $LG_{p,-l}$ , figura (1.12). Já um modo HG rodado de um ângulo  $\theta$  referente ao plano de simetria de um conversor  $\pi$  sofre uma reflexão especular em relação à este eixo. Aqui podemos retornar à analogia entre os modos transversais de primeira ordem e os estados de polarização do campo eletromagnético, feita na seção 1.2.5, identificando os conversores com as lâminas birrefringentes<sup>18</sup>. Os conversores  $\pi/2$  fariam o papel das lâminas  $\lambda/4$  e os conversores  $\pi$  o das lâminas  $\lambda/2$ . A fase introduzida pelos conversores depende da distância  $d$  entre as

---

encontradas referências sobre o assunto. Em [145, 146] os autores fornecem possíveis explicações para a origem da fase de Gouy.

<sup>18</sup>Materiais birrefringentes, dada sua estrutura molecular, possuem dois índices de refração distintos para polarizações lineares distintas, o ordinário e o extra-ordinário. Esta propriedade é a responsável pela transformação dos estados de polarização.

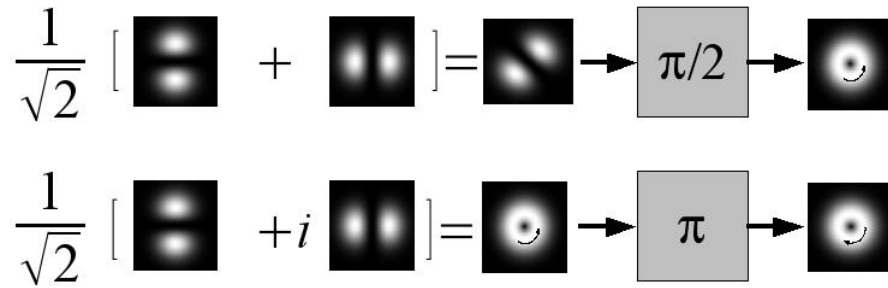


Figura 1.12: Efeito produzido pelos conversores de modo. No topo vemos o efeito produzido por um conversor  $\pi/2$  em um modo  $HG_{45^\circ}$ . Abaixo, vemos o efeito de um conversor  $\pi$  sobre um modo  $LG_{-1}$ .

lentes cilíndricas. Para um modo  $HG_{0,1}^{45^\circ}$  podemos construir um conversor  $\pi/2$  colocando as lentes cilíndricas a uma distância  $d = f\sqrt{2}$ , onde  $f$  é a distância focal das lentes, figura 1.13(a). O funcionamento das lentes pressupõe uma cintura característica para o feixe incidente, portanto é preciso usar uma lente para adaptar o modo espacial do feixe ao conversor astigmático. A definição de uma cintura  $w_0$  para o feixe é equivalente a definição de  $z_R$  para o mesmo, isso se deve à estreita relação existente entre essas duas grandezas representada pela equação  $z_R = kw_0^2/2$ . Um conversor  $\pi$  pode ser construído colocando-se

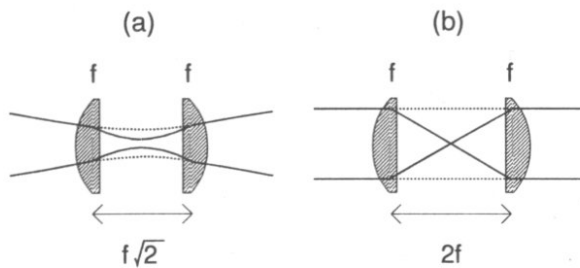


Figura 1.13: (a) Conversor  $\pi/2$ , e (b) Conversor  $\pi$  [38].

as lentes cilíndricas a uma distância  $d = 2f$ , figura 1.13(b). O conversor  $\pi$  só funciona próximo ao limite da Ótica geométrica, para contornar esta dificuldade podemos usar um prisma de Dove, que produz o mesmo efeito de um conversor  $\pi$ , ao produzir uma reflexão na sua base, figura 1.14.

Como a polarização e os modos de ordem 1 são isomórfos, o papel dos conversores é totalmente análogo à atuação das lâminas de meia onda no espaço de polarização da luz.

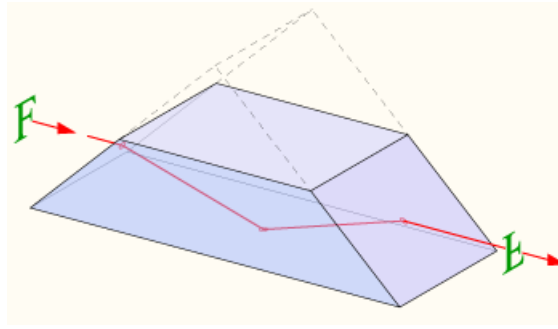


Figura 1.14: Prisma de Dove

### 1.2.8 Produção dos modos de Hermite

Para que os conversores com lentes cilíndricas transformem um modo  $HG_{0,1}^{45^\circ(135^\circ)}$  em um modo  $LG_{0,\pm 1}$ , precisamos de um laser que opere no modo  $HG_{0,1}$ . Infelizmente, os lasers comercialmente disponíveis são otimizados para operar apenas no modo gaussiano fundamental ( $TEM_{0,0}$ ). Para contornar essa dificuldade utilizamos uma variante do sagaz método proposto em [143] para simular um modo  $HG_{0,1}^{45^\circ}$ .

Um feixe no modo  $HG_{0,1}^{45^\circ}$  é equivalente a soma de um  $HG_{0,1}$  com um  $HG_{1,0}$

$$HG_{0,1}^{45^\circ} \propto \left[ \frac{2\sqrt{2}(x+y)}{w(z)} \right] \exp \left[ -\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} \right] \quad (1.80)$$

onde  $w(z)$ , dado pela equação (1.47), é o raio do feixe.

Um feixe gaussiano é dividido em duas partes iguais em um interferômetro de Mach-Zender como na figura 1.16. Em um dos braços do interferômetro há um espelho montado sobre um PZT<sup>19</sup> em um estágio de translação, pelo qual podemos controlar o alinhamento e a fase relativa entre os braços. O interferômetro é então alinhado de maneira que os feixes saiam paralelos e a uma distância relativa de  $2w_0$ . Usando estes dois feixes no modo Gaussiano fundamental, ajustamos suas fases relativas para  $\pi$  com o PZT.

$$HG_{0,1}^{45^\circ} \sim \exp \left[ -\frac{(x-w_0/\sqrt{2})^2 + (y-w_0/\sqrt{2})^2}{w_0^2} \right] - \exp \left[ -\frac{(x+w_0/\sqrt{2})^2 + (y+w_0/\sqrt{2})^2}{w_0^2} \right] \quad (1.81)$$

Na figura 1.16 pode ser visto um esquema do interferômetro que simula um modo HG de primeira ordem a partir de um modo gaussiano fundamental, seguido do conversor de

<sup>19</sup>Do inglês *Piezoelectric Transducer*, o PZT é uma cerâmica cuja estrutura cristalina possui a propriedade de se deformar quando submetida a um campo elétrico. Possui inúmeras aplicações na indústria eletrônica dada a sua alta precisão para efetuar pequenos deslocamentos.



modos que produz o modo  $LG$ . Como pode ser visto no gráfico ??, este procedimento

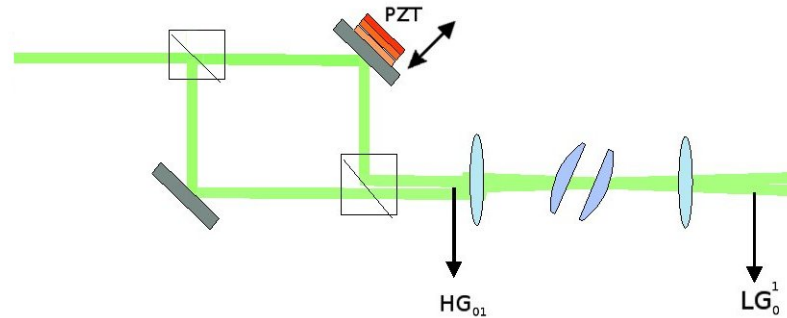


Figura 1.15: Arranjo experimental para produção de modos de LG de primeira ordem. O ajuste da fase relativa entre os feixes é feito pelo PZT.

nos fornece uma boa aproximação do campo descrito na equação (1.80).

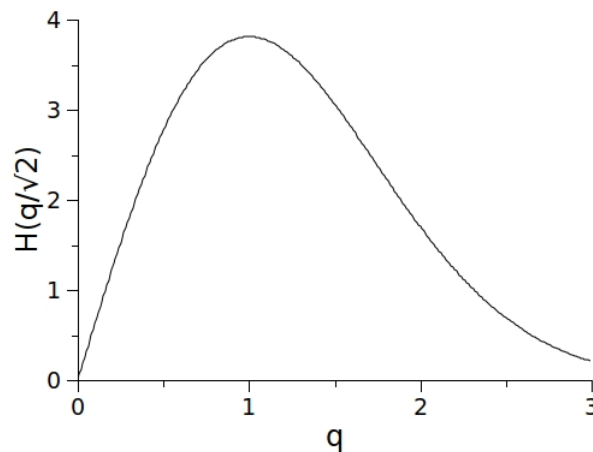


Figura 1.16: Overlap entre um modo  $HG_{0,1}^{45^\circ}$  e a aproximação produzida pelo interferômetro 1.16.

Passaremos agora para a descrição dos métodos de detecção dos modos de Laguerre-Gauss.

### 1.2.9 Detecção

Após a passagem pelo conversor  $\pi/2$  é necessário averiguar o produto final para nos certificarmos de que realmente se obteve um modo de LG. Para tal não basta detetarmos um perfil de intensidade como os da figura 1.6, precisamos averiguar se a fase do campo possui a estrutura correta, ou seja, a dependência azimutal dada pelo termo  $e^{il\phi}$

da equação 1.62. Para tal basta interferir o feixe que se quer analisar com ele mesmo em um interferômetro de Michelson ligeiramente desalinhado, de modo a sobrepor a singularidade de fase do feixe proveniente de um dos braços do interferômetro sobre o anel de intensidade do feixe vindo do outro braço, figura 1.17(c). Com este método observamos dois “garfos” contendo  $l$  bifurcações cada, onde  $l$  é o parâmetro relacionado com o momento angular orbital do feixe. Este procedimento produz um padrão de interferência como o das figuras 1.17(a).

Um outro método que pode ser empregado na caracterização de feixes que carregam momento angular orbital constitui em interferirmos um modo de LG colinearmente com uma onda esférica, figura(1.17(d)). Com isto obteremos padrões de interferência como o da figura 1.17(b). Estes padrões evidenciam a típica dependência azimutal na fase dos modos  $LG$ .

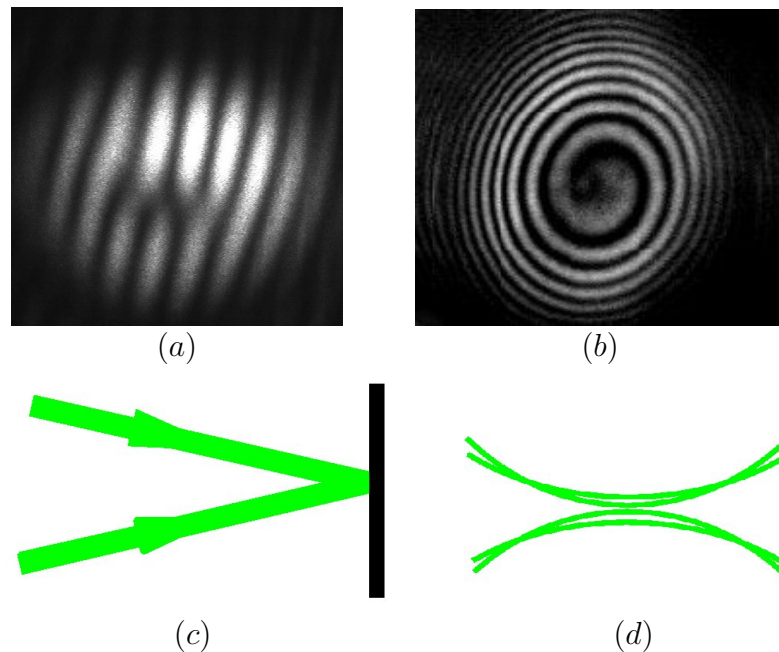


Figura 1.17: Em (a) vemos o padrão gerado pela interferência, (c), entre modos  $LG$ , o número de bifurcações é igual ao módulo da helicidade. Em (b) temos o padrão de interferência do modo  $LG$  com uma onda esférica conforme esquematizado em (d), o módulo da helicidade dos feixes é igual ao número de espirais claras (ou escuras).

É possível ainda, em ambos os métodos, distinguir o sentido da helicidade do feixe, e consequentemente o sentido de seu momento angular orbital. Para isto basta observarmos a orientação dos garfos produzidos pelo método da figura 1.17(c) ou o sentido de rotação das espirais produzidas pelo método da figura 1.17(d).

### 1.3 Amplificação Paramétrica

Quando feixes de luz interagem dentro de meios não-lineares, harmônicos e sub-harmônicos do feixe original podem ser gerados. Isto é o que acontece dentro de um oscilador paramétrico ótico (OPO). Constituído por uma cavidade ótica, responsável pela realimentação do sistema, com um cristal não-linear no seu interior, um feixe de bombeamento gera os feixes *signal* e *complementar* pela interação com um meio que possui uma não-linearidade de segunda ordem, ou seja, um tensor de segunda ordem,  $\chi^{(2)}$ , significativo.

A ótica não-linear estuda os fenômenos que ocorrem devido a modificações das propriedades óticas dos sistemas materiais pela presença da luz. Efeitos óticos não-lineares são aqueles em que a resposta do sistema material ao campo eletromagnético aplicado depende não-linearmente do campo. Exemplos típicos são a geração de segundo harmônico, a soma e subtração de frequências, a mistura de ondas e a amplificação paramétrica [147, 62].

Os fenômenos eletromagnéticos em meios dielétricos não-condutores são governados pelas equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.82)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.83)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.84)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.85)$$

onde  $\vec{D}$  é o vetor deslocamento e  $\vec{J}$  a densidade de corrente elétrica. Através da equação da continuidade,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.86)$$

podemos relacionar  $\vec{J}$  com a densidade de cargas  $\rho$  do sistema.

A densidade de corrente  $\vec{J}$  e a densidade de cargas  $\rho$  podem ser descritas por uma expansão em multipólos [19] ou em termos de uma polarização generalizada  $\vec{\mathbb{P}}$  e uma densidade de corrente estacionária  $\vec{J}_{dc}$ ,

$$\vec{J} = \vec{J}_{dc} + \frac{\partial \vec{\mathbb{P}}}{\partial t}, \quad (1.87)$$

como estamos lidando com meios não condutores,  $\vec{J}_{dc} = 0$ . Por fim, a equação da conti-

nuidade nos fornece

$$\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{P}}. \quad (1.88)$$

A resposta de um meio a campos aplicados a ele é descrita pela polarização  $\mathbb{P}$ . Em geral, a polarização é uma função não-linear de  $\vec{E}$ . Quando estamos num regime em que o campo elétrico é suficientemente fraco podemos escrever a polarização do meio como uma série de potências de  $\vec{E}$ , separando-a em uma parcela linear,  $P_L$ , e e outra parcela não-linear,  $P_{NL}$ , ou seja,

$$\vec{\mathbb{P}} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL}, \quad (1.89)$$

onde

$$\left(\vec{P}_L\right)_i = \epsilon_0 \chi_{lm} E_m \quad (1.90)$$

e

$$\left(\vec{P}_{NL}\right)_i = \chi_{lmn}^{(2)} E_m E_n + \chi_{lmno}^{(3)} E_m E_n E_o + \dots \quad (1.91)$$

O caráter tensorial de  $\chi_{lm}$  é o que dá origem aos efeitos de bi-refringência e astigmatismo do meio [47].  $\chi_{lmno}^{(2)}$  e  $\chi_{lmno}^{(3)}$  são, respectivamente, os tensores susceptibilidade de 2ª e 3ª ordem.

Usando a (1.89) podemos reescrever a lei de Ampère (1.83) como

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}_{NL} \quad (1.92)$$

onde  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \overset{\leftrightarrow}{\chi}^{(1)})$ .

Tomando o rotacional da lei de Faraday (1.82), obtemos

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}), \quad (1.93)$$

utilizando as propriedades do rotacional juntamente com  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ , chegamos à

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (1.94)$$

que é a equação de onda para o campo elétrico num meio com polarização não linear.

Em particular, se estivermos lidando com meios não-lineares de segunda ordem, iluminados por campos oscilantes que se propagam na direção  $z$ , do tipo

$$\vec{E}^{(\omega_s)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}^{(\omega_s)}(\vec{r}) e^{i(\omega_s t - k_s z)} + \vec{E}^{(\omega_s)*}(\vec{r}) e^{-i(\omega_s t - k_s z)} \right] \quad (1.95)$$

$$\vec{E}^{(\omega_p)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}^{(\omega_p)}(\vec{r}) e^{i(\omega_p t - k_p z)} + \vec{E}^{(\omega_p)*}(\vec{r}) e^{-i(\omega_p t - k_p z)} \right], \quad (1.96)$$

a  $(P_{NL})_l$  será escrita como

$$[P_{NL}(\vec{r}, t)]_l = \frac{1}{4} \left[ \chi_{lmn}^{(\omega_p+\omega_s)} E_m^{(\omega_s)}(\vec{r}) E_n^{(\omega_p)}(\vec{r}) e^{i[(\omega_p+\omega_s)t - (n_p k_p + n_s k_s)z]} \right] \quad (1.97)$$

$$+ \chi_{lmn}^{(\omega_p+\omega_s)*} E_m^{(\omega_s)*}(\vec{r}) E_n^{(\omega_p)*}(\vec{r}) e^{-i[(\omega_p+\omega_s)t - (n_p k_p + n_s k_s)z]} \quad (1.98)$$

$$+ \chi_{lmn}^{(\omega_p-\omega_s)} E_m^{(\omega_s)}(\vec{r}) E_n^{(\omega_p)}(\vec{r}) e^{i[(\omega_p-\omega_s)t - (n_p k_p - n_s k_s)z]} \quad (1.99)$$

$$+ \chi_{lmn}^{(\omega_p-\omega_s)*} E_m^{(\omega_s)*}(\vec{r}) E_n^{(\omega_p)*}(\vec{r}) e^{-i[(\omega_p-\omega_s)t - (n_p k_p - n_s k_s)z]} \quad (1.100)$$

onde  $n_j$  ( $j = p, s, i$ ) são os respectivos índices de refração do meio para cada campo.

O caráter não-linear do meio é o que permite que os campos troquem energia entre si, a polarização não-linear serve como mediadora desta troca atuando como uma espécie de fonte para os campos gerados dentro do material. Ao longo do texto adotaremos a nomenclatura *signal* (s), *complementar* (i) e *bombeamento* (p) para representar os campos envolvidos no processo. Frequências  $\omega = \omega_s + \omega_p$  e  $\omega = \omega_s - \omega_p$  têm iguais chances de serem produzidas. Para que o processo ocorra eficientemente, é necessário que o campo gerado numa dada posição do cristal interfira construtivamente com o campo gerado nas posições subsequentes. Quando isto ocorre, dizemos que há "casamento de fase". A relação de dispersão no material desempenha um papel fundamental para a observância desta condição. Por exemplo, para que o processo de diferença de frequência seja eficiente, é necessário que as frequências envolvidas satisfaçam

$$n(\omega_p)\omega_p - n(\omega_s)\omega_s = n(\omega_p - \omega_s)(\omega_p - \omega_s) \quad (1.101)$$

ou ainda,

$$n_p k_p - n_s k_s = n_i k_i, \quad (1.102)$$

onde  $k_i = \omega_i/c$ ,  $n_i = n(\omega_i)$  e  $\omega_i = \omega_p - \omega_s$ . Normalmente esta condição não é satisfeita quando os campos envolvidos no processo possuem todos a mesma polarização. Contudo é possível contornar esta dificuldade valendo-se do efeito de birrefringência, podemos ainda escolher o tipo de efeito, soma ou diferença de frequências, usando um cristal com o corte adequado<sup>20</sup>.

Neste trabalho estaremos interessados na geração de diferença de frequência, também chamada de *conversão paramétrica descendente*.

Também é possível utilizar o método usado na seção 1.2.1 para a dedução da equação paraxial quando lidamos com meios não-lineares [34]. Se fizermos isto para meios não

---

<sup>20</sup>O corte segundo uma dada direção em relação aos planos cristalográficos determina que tipo de casamento de fase o cristal terá.

condutores e escrevendo as componentes do campo elétrico gerado dentro do cristal como  $E_l^{(\omega_i)}(\vec{r}, t) = E_l^{(\omega_i)}(\vec{r}) \exp[i(\omega_i t - n_i k_i z)]$ , chegaremos a

$$\nabla_{\perp}^2 E_l^{(\omega_i)} - 2in_i k_i \frac{\partial E_l^{(\omega_i)}}{\partial z} = -\mu_0 \omega_i^2 \chi_{lmn}^{(\omega_p - \omega_s)} E_m^{(\omega_s)*} E_n^{(\omega_p)} e^{-i\Delta k z} \quad (1.103)$$

que é a mesma equação paraxial obtida na seção 1.2.1, mas agora com um termo de fonte quadrático no campo. Nesta equação  $\Delta k = n_p k_p - n_s k_s - n_i k_i$  é o desacordo de fase entre os campos e  $\nabla_{\perp}^2$  é o operador laplaciano transversal.

Vale ressaltar que, a rigor, a susceptibilidade elétrica pode ser encarada como uma espécie de função resposta do dielétrico ao estímulo ao qual ele foi submetido, neste caso o campo elétrico. Como tal, é natural que exista uma dependência da susceptibilidade com a frequência do campo, porém se os efeitos de dispersão puderem ser desprezados a susceptibilidade perde essa dependência passando a ter o mesmo valor para todas as frequências. Esta simetria é conhecida como conjectura de Kleinman [147, 148]. Por sorte a maioria dos cristais utilizados na amplificação paramétrica apresentam esta simetria. Assim sendo daqui em diante usaremos apenas  $\chi^{(2)}$  para representar a susceptibilidade de segunda ordem do meio.

Como dissemos no capítulo anterior, os modos normais de propagação do campo eletromagnético formam uma base ortogonal de soluções da equação paraxial, isso nos permite decompor o campo em termos de suas componentes nestas bases [149]. No entanto, devemos lembrar que agora estamos lidando com a propagação do campo dentro de um meio não-linear e que tal meio atua como um mediador nas trocas de energia entre os campos envolvidos no processo em questão. Sendo assim, devemos considerar o efeito destas trocas de energia entre os campos através de mudanças nas suas amplitudes à medida em que se propagam dentro do meio não-linear.

Escrevendo o campo elétrico como uma superposição de seus modos de propagação:

$$E_j(\vec{r}) = \sum_{\beta} \psi_{\beta}(\vec{\rho}, z) A_{j,\beta}(z), \quad (1.104)$$

onde  $\vec{\rho} = (x, y)$ ,  $\beta$  é um conjunto de índices que identificam um dado modo espacial,  $j = p, s, i$ .  $\psi_{\beta}(\vec{\rho}, z)$  pode representar tanto um modo de Hermite-Gauss (1.57) quanto um modo de Laguerre-Gauss (1.62). Basta calcularmos as derivadas parciais da equação (1.103) e projetar o campo na base HG ou LG. Levando em conta a ortogonalidade das

funções  $\psi_{n,m}$ , este procedimento nos leva à seguinte equação para  $A_\beta(z)$

$$\frac{dA_{j,\beta}}{dz} = -i \frac{\mu_0 \omega_j c \chi}{2n_j} \sum_{\eta,\sigma} \Lambda_{\beta,\eta,\sigma}(z) A_{l,\eta}^* A_{m,\sigma} e^{-i\Delta k z} \quad \text{com } j \neq m \neq l, \quad (1.105)$$

onde

$$\Lambda_{\beta,\eta,\sigma}(z) = \int d^2 \rho \psi_\beta^*(\vec{\rho}, z) \psi_\eta^*(\vec{\rho}, z) \psi_\sigma(\vec{\rho}, z) \quad (1.106)$$

é a integral de recobrimento dos modos [149].

Como neste trabalho estamos interessados apenas em efeitos não-lineares de segunda ordem, devemos resolver três equações idênticas a (1.105) para cada campo correspondente às frequências  $\omega_p$ ,  $\omega_s$  e  $\omega_i$ . Isso pode ser feito muito facilmente se estivermos trabalhando com meios não-lineares em que o acoplamento entre os campos seja fraco. Neste regime de acoplamento fraco podemos admitir que após uma passagem pelo cristal as amplitudes dos campos não sofrem mudanças significativas. Isto posto, podemos usar uma aproximação de primeira ordem para a integração da equação (1.105), obtendo<sup>21</sup>

$$A_{s,\beta}(l_c) = A_{s,\beta}(0) - i g_{\beta,\eta,\sigma}^s A_{i,\eta}^*(0) A_{p,\sigma}(0) \quad (1.107)$$

$$A_{i,\eta}(l_c) = A_{i,\eta}(0) - i g_{\eta,\beta,\sigma}^i A_{s,\beta}^*(0) A_{p,\sigma}(0) \quad (1.108)$$

$$A_{p,\sigma}(l_c) = A_{p,\sigma}(0) - i g_{\sigma,\beta,\eta}^{p*} A_{s,\beta}(0) A_{i,\eta}(0), \quad (1.109)$$

onde supomos um comprimento  $l_c$  para o cristal não-linear e  $g_{\beta,\eta,\sigma}$  são os acoplamentos dos campos, dados por

$$g_{\beta,\eta,\sigma}^j = \frac{\mu_0 \omega_j c \chi}{2n_j} \int_0^{l_c} dz \Lambda_{\beta,\eta,\sigma}(z) e^{-i\Delta k z}. \quad (1.110)$$

Este modelo para a amplificação paramétrica onde os feixes sinal e bombeamento, de frequências  $\omega_s$  e  $\omega_p$ , geram o feixe complementar, de frequência  $\omega_i$ , é o modelo clássico para a conversão paramétrica estimulada. Note que se usarmos como condições de contorno  $A_{s,\beta}(0) = A_{i,\eta}(0) = 0$  e  $A_{s,\sigma}(0) \neq 0$ , teremos como soluções das equações (1.105)

$$A_{s,\beta}(z) = 0 \quad (1.111)$$

$$A_{i,\eta}(z) = 0 \quad (1.112)$$

$$A_{s,\sigma}(z) = cte. \quad (1.113)$$

Contudo, isto *nunca* é observado. Mesmo bombeando o cristal apenas com o feixe de frequência  $\omega_p$  é possível gerar os feixes sinal e complementar, este fenômeno é conhecido

---

<sup>21</sup>Adotamos a convenção de soma sobre índices repetidos, convenção que usaremos ao longo deste trabalho.

como conversão paramétrica descendente *espontânea* ou fluorescência paramétrica. Existem pelo menos duas explicações possíveis para este fenômeno, a primeira é baseada na eletrodinâmica estocástica [150, 151, 152, 153] e a segunda, e mais difundida, é baseada na teoria quântica para o campo eletromagnético. Apresentaremos uma descrição sucinta da explicação baseada na teoria quântica, porém isto só será feito mais adiante no Capítulo 3, pois partiremos agora para a descrição clássica da oscilação paramétrica.

## 1.4 Oscilação Paramétrica

Assim como na amplificação laser é preciso um meio de ganho inserido em uma cavidade Ótica, no OPO é preciso colocar o cristal não-linear, responsável pela amplificação paramétrica, dentro de uma cavidade para que haja oscilação. Ao longo deste trabalho abordaremos diversos problemas baseados na dinâmica de um OPO triplamente ressonante, antes porém faz-se necessário uma breve revisão das características clássicas deste dispositivo.

A dinâmica dos campos intracavidade pode ser modelada através de equações de movimento construídas a partir da interação não linear descrita na seção anterior, onde a influência dos modos transversais está contida na constante de acoplamento entre estes modos. Contabilizando as mudanças sofridas pelos campos em uma volta completa na cavidade Ótica, figura 1.18, mantendo-se apenas os termos proporcionais à constante de acoplamento, temos

$$A_{p,\sigma}(2L_o) = t_1^p A_{p,\sigma}^{(in)} + [r_1^p r_2^p A_{p,\sigma}(0) - ir_1^p r_2^p (g_{\sigma,\beta,\eta}^p)^* A_{i,\eta}(0) A_{s,\sigma}(0) e^{-i\Delta ka} - ir_1^p r_2^p r_2^p (g_{\sigma,\beta,\eta}^p)^* A_{i,\eta}(0) A_{s,\beta}(0) e^{-i\Delta kl_c + 3\Delta k_0 a}] e^{-2ik_p[2a+n_\sigma l_c]} \quad (1.114)$$

$$A_{s,\beta}(2L_o) = t_1^s A_{s,\beta}^{(in)} + [r_1^s r_2^s A_{s,\beta}(0) - ir_1^s r_2^s g_{\beta,\eta,\sigma}^s A_{i,\eta}^*(0) A_{p,\sigma}(0) e^{-i\Delta ka} - ir_1^s r_2^s r_2^p g_{\beta,\eta,\sigma}^s A_{i,\eta}^*(0) A_{p,\sigma}(0) e^{-i\Delta kl_c + 3\Delta k_0 a}] e^{-2ik_s[2a+n_s l_c]} \quad (1.115)$$

$$A_{i,\eta}(2L_o) = [r_1^i r_2^i A_{i,\eta}(0) - ir_1^i r_2^i g_{\eta,\beta,\sigma}^i A_{s,\beta}^*(0) A_{p,\sigma}(0) e^{-i\Delta ka} - ir_1^i r_2^s r_2^p g_{\eta,\beta,\sigma}^i A_{s,\beta}^*(0) A_{p,\sigma}(0) e^{-i\Delta kl_c + 3\Delta k_0 a}] e^{-2ik_i[2a+n_\eta l_c]} \quad (1.116)$$

onde  $j = s, i, p$ ,  $L_o = L + (n-1)l_c$  é o comprimento ótico da cavidade,  $r_{1(2)}^j$  a refletividade dos espelhos de entrada e saída,  $t_1^j$  a transmitância do espelho de entrada e  $A_{s,\beta}^{(in)}$  e  $A_{p,\sigma}^{(in)}$  os campos de injeção e bombeamento, respectivamente, figura 1.18.

Para que seja possível acoplar tanto o feixe de bombeamento para dentro da cavidade quanto os feixes gerados pela amplificação paramétrica para fora, sem que a eficiência do



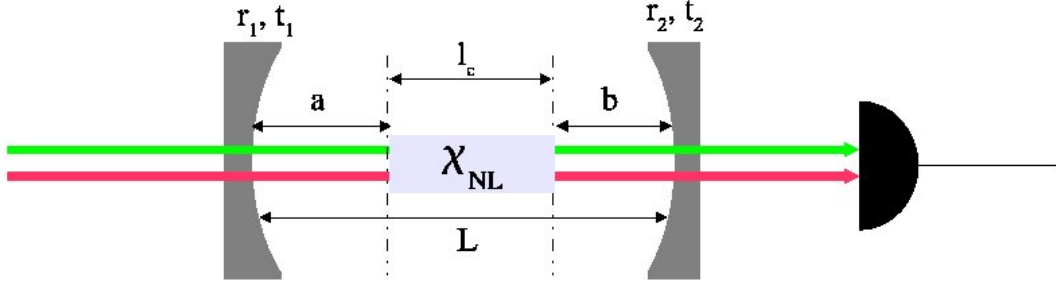


Figura 1.18: *Cavidade do OPO.*  $r_{1(2)}$  e  $t_{1(2)}$  são, respectivamente, os coeficientes de reflexão e transmissão do espelho 1(2).

processo seja prejudicada, a cavidade deve ser composta por espelhos com um coeficiente de reflexão bem próximos da unidade. Isso nos permite fazer a seguinte aproximação

$$r = \sqrt{1 - t^2} \approx 1 - \frac{t^2}{2} \Rightarrow r_1 r_2 \approx \left(1 - \frac{t_1^2}{2}\right) \left(1 - \frac{t_2^2}{2}\right) \approx 1 - \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (1.117)$$

onde  $t_{1(2)}$  é o coeficiente de transmissão e  $T_{1(2)}$  é a transmitância dos espelhos.

Uma cavidade ótica, assim como uma corda vibrante com extremos fixos, impõe restrições às frequências que podem ressoar dentro dela. A frequência fundamental de uma cavidade é  $\omega_c = \pi c/L_o$ , dada em termos do seu comprimento ótico e da velocidade da luz  $c$ . Para um campo de frequência angular  $\omega$  *quase* ressonante com a cavidade

$$2kL_o = 2m\pi + \Delta\phi \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = (\omega - \omega_c)\tau. \quad (1.118)$$

onde  $\tau$  é o tempo de percurso do campo dentro da cavidade e  $\Delta\phi$  é o desacordo de fase entre o campo e a cavidade.

Após isso, basta efetuar a derivada "coarse grain"<sup>22</sup> para obter as equações que regem a dinâmica dos campos dentro da cavidade Ótica. Para facilitar o tratamento e ao mesmo tempo preparar o caminho para a descrição quântica do OPO, podemos re-escrever as amplitudes dos campos em termos de uma amplitude complexa,  $\alpha_\beta = |\alpha_\beta|e^{-i\theta_\beta}$ , cujo seu módulo ao quadrado representa a intensidade de um dado modo. Estas novas variáveis relacionam-se com as amplitudes lentamente variáveis,  $A_{j,\beta}$ , através da relação a seguir

$$\alpha_{j,\beta} = -i\sqrt{\frac{2n_j\epsilon_0 c\tau_j}{\hbar\omega_j}} A_{j,\beta}, \quad j = p, s, i. \quad (1.119)$$

<sup>22</sup>Esse procedimento consiste em subtrair o campo inicial do campo que completou uma volta completa na cavidade, dividindo o resultado pelo tempo de percurso  $\tau$ .

Nas novas variáveis, a constante de acoplamento é dada por

$$\begin{aligned} \chi_{\beta,\eta,\sigma}^{ef} = & \chi \sqrt{\frac{\hbar\omega_p\omega_s\omega_i}{2\epsilon_0cn_pn_sn_i\tau_p\tau_s\tau_i}} \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right) \\ & \times e^{-i[2\Delta k_0a+\Delta kl_c/2]} \cos(\Delta k_0a + \Delta kl_c/2) \\ & \times \int_0^{l_c} \Lambda_{\beta,\eta,\sigma}(z)e^{-i\Delta kz} dz. \end{aligned} \quad (1.120)$$

As equações de movimento para os modos de um OPO são

$$\dot{\alpha}_{p,\sigma} = \mu_p\alpha_{p,\sigma}^{(in)} - (\gamma_p + i\Delta_p)\alpha_{p,\sigma} + \chi_{\sigma,\beta,\eta}\alpha_{s,\beta}\alpha_{i,\eta} \quad (1.121)$$

$$\dot{\alpha}_{s,\beta} = \mu_s\alpha_{s,\beta}^{(in)} - (\gamma_s + i\Delta_s)\alpha_{s,\beta} - \chi_{\beta,\eta,\sigma}\alpha_{i,\eta}^*\alpha_{p,\sigma} \quad (1.122)$$

$$\dot{\alpha}_{i,\eta} = -(\gamma_i + i\Delta_i)\alpha_{i,\eta} - \chi_{\eta,\beta,\sigma}\alpha_{s,\beta}^*\alpha_{p,\sigma}. \quad (1.123)$$

com  $\gamma_j$ ,  $\Delta_j$  e  $\mu_j$  ( $j = p, s, i$ ) dados por

$$\gamma_j = \frac{T_{1j} + T_{2j}}{2\tau} \quad (1.124)$$

$$\Delta_j = \omega_j - \omega_c \quad (1.125)$$

$$\mu_j = \frac{\sqrt{T_j}}{\tau} \quad (1.126)$$

são as taxas de decaimento dos campos dentro da cavidade, as dessintonias entre os campos e a cavidade e os acoplamentos dos campos de injeção e bombeamento para dentro da cavidade.

## 1.5 O OPO-UFF e a Oscilação de Modos Espaciais de Ordem Superior

Com o financiamento do primeiro Instituto do Milênio, nos foi dada a oportunidade de adquirir os equipamentos necessários à montagem do LOQ, Laboratório de Ótica Quântica da Universidade Federal Fluminense [57]. A partir do recebimento desses recursos pudemos montá-lo do zero, comprando uma mesa Ótica TMC [59] e o laser Diabolo [58] da fábrica alemã Innolight. Este é um laser de Nd:YAG que fornece dois comprimentos de onda, o fundamental em  $1064nm$ , e o segundo harmônico em  $532nm$  através de uma cavidade de dobramento interna. Um dos primeiros objetivos foi a construção e montagem do OPO-UFF, o primeiro OPO do estado do Rio de Janeiro, o qual ficou sob minha responsabilidade.

Constituído por dois espelhos esféricos de raio  $R = 13mm$  e reflectâncias de 92%

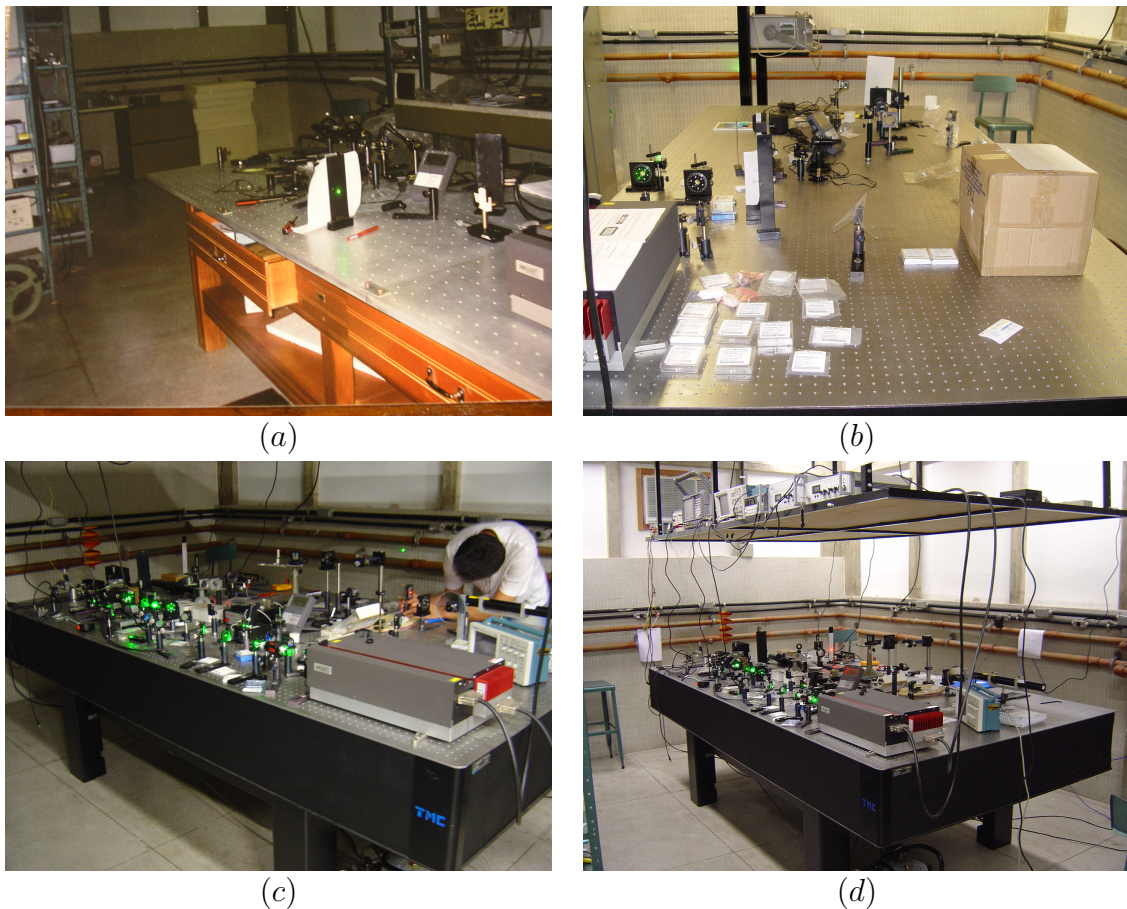


Figura 1.19: O LOQ-UFF em quatro épocas diferentes. Em (a) vemos como ele era antes da chegada dos equipamentos e em (b) após a chegada do laser Diabolo e da mesa TMC. Em (c) vemos o LOQ na mesma época em que observamos a primeira oscilação do OPO-UFF e em (d) o LOQ como ele está atualmente, em pleno funcionamento.

em  $532\text{ nm}$  e 99,9% em  $1024\text{ nm}$ , o OPO-UFF é um OPO de cavidade simétrica, figura 1.20. Na época possuíamos dois cristais KTP ( $\text{KTiOPO}_4$  - Fosfato de Titanil Potássio), que apresentam um casamento de fase tipo II, com os quais conseguimos as primeiras operações OPO.

Fixado um dado comprimento de onda, uma cavidade Ótica Fabry-Perot<sup>23</sup>, assim como a corda vibrante de extremos fixos, possui picos de ressonância em comprimentos específicos. Se o comprimento da cavidade for um múltiplo semi-inteiro de comprimentos de onda do campo,  $L_{cav} = n\lambda/2$ , um pico de ressonância é observado. Tal comportamento, em função do comprimento da cavidade, frequência do campo e reflectância dos espelhos, é descrito pela função de Airy [51],

$$T = \frac{1}{1 + B \sin^2(2\omega l/c)} \quad (1.127)$$

<sup>23</sup>A escolha deste interferômetro como cavidade ótica se ceu pela sua praticidade e razoável estabilidade.

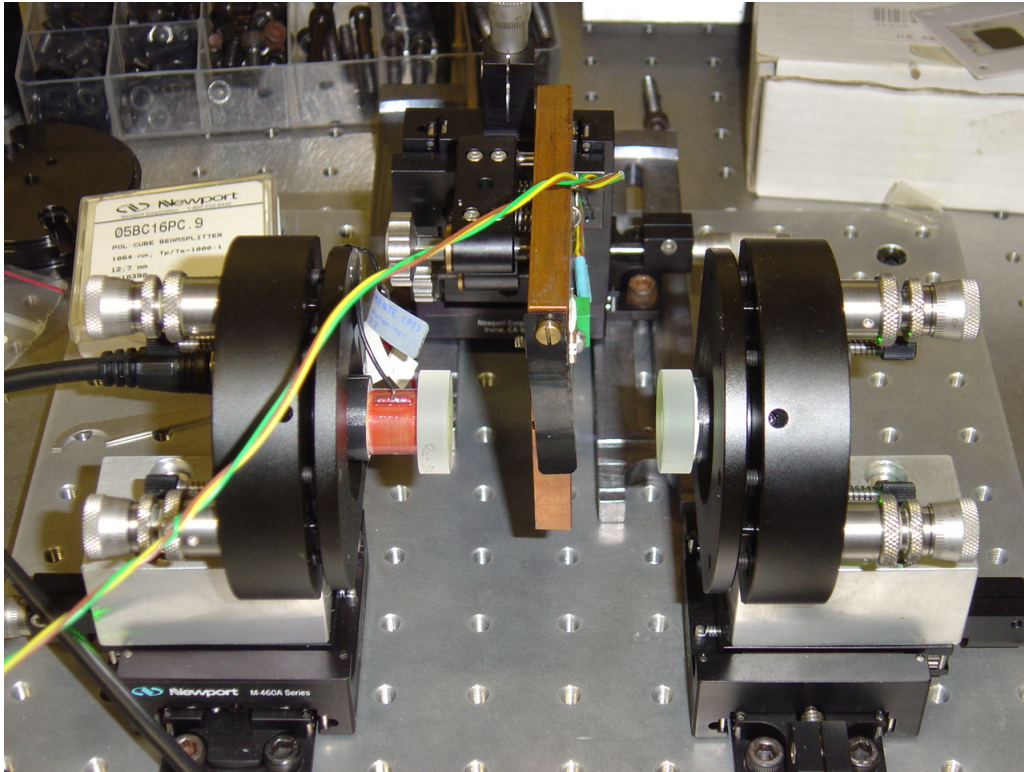


Figura 1.20: Cavity Fabry-Perot do OPO-UFF, dentro o cristal não-linear. Inicialmente trabalhamos com uma configuração próxima à da confocalidade.

onde  $T$  é a transmitância  $B = 4R/(1 - R)^2$ . Na figura 1.21 podemos ver a curva de Airy para dois comprimentos de onda diferentes. Por outro lado se fixado o tamanho da cavity e variarmos a frequência do campo incidente, é fácil mostrar que o intervalo entre os picos de ressonância, ou intervalo espectral livre FSR<sup>24</sup>, é dado por  $FSR = c/2l$ . Apenas frequências múltiplas desse parâmetro podem oscilar dentro da cavity. É

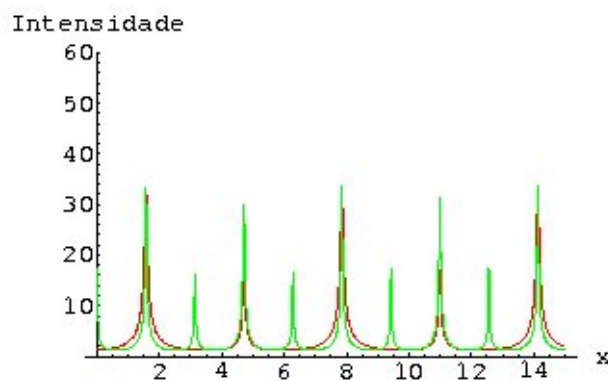


Figura 1.21: A curva verde corresponde a um dado comprimento de onda e a curva vermelha a um comprimento de onda duas vezes maior.

comum aproximarmos os picos da curva de Airy com uma Lorentziana, este procedimento

<sup>24</sup>Do inglês *Free Spectral Range* - FSR.



nos ajuda a interpretar o papel das perdas provocadas pelas transmitâncias dos espelhos da cavidade:

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_c}{\gamma}\right)^2}, \quad (1.128)$$

Vemos que a largura da Lorentziana esta ligada com o  $\gamma$  da cavidade, que por sua vez representa as perdas relativas à transmitância dos espelhos da cavidade.

Como os espelhos têm transmitâncias diferentes para  $532nm$  e  $1064nm$ , os feixes de bombeamento e convertidos "veem" cavidades com perdas diferentes, conseqüentemente a largura dos seus picos de ressonância são diferentes. Somado a isto, a alta qualidade dos cristais utilizados, com boas susceptibilidade de segunda ordem e a alta potência contínua do laser Diabolo ( $\sim 1W$ ), permitiram excitar uma verdadeira fauna de modos convertidos, figura 1.22. Após atingirmos a operação OPO, nos concentramos na extensão do traba-

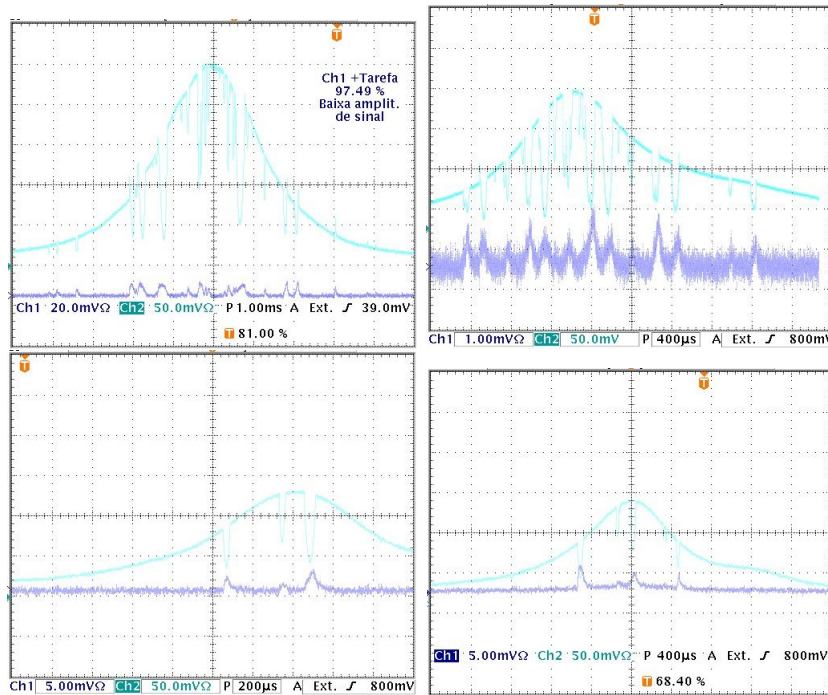


Figura 1.22: Primeiros picos observados na operação do OPO-UFF. Em azul claro (escuro) vemos o(s) pico(s) de ressonância do(s) feixe(s) de bombeamento (convertidos). Note que ops vales na curva do feixe de bombeamento coincidem com os picos de ressonância dos feixes convertidos, isto ocorre devido ao favorecimento do processo de transferência de energia bombeamento  $\rightarrow$  convertidos. Em (a) vemos os picos obtidos com o cristal Altechna<sup>®</sup>, de comprimento  $7\text{ mm}$ , e em (b), (c) e (d) os picos obtidos com o cristal Litton, de  $10\text{ mm}$  de comprimento. Os cristais, na época em que foram adquiridos os dados, apresentavam limiares de oscilação de  $10mW$  e  $13mW$ , respectivamente.

lho realizado na USP [28]. Este trabalho [60] demonstrou a transferência do momento angular orbital do feixe de bombeamento para um dos feixes convertidos utilizando um cristal KTP. Nosso objetivo foi bombear o OPO-UFF com um modo LG num regime de

potência bem acima do limiar de oscilação para observar a excitação de modos espaciais de ordem superior. Utilizando o laser de Nd:YAG Lightwave 142 NPRO, também operando a  $532nm$ , bombeamos um cristal KTP de  $7mm$ , à temperatura ambiente, com um modo LG de primeira ordem produzido com a técnica dos conversores astigmáticos descrita anteriormente. O esquema experimental está mostrado na figura 1.23.

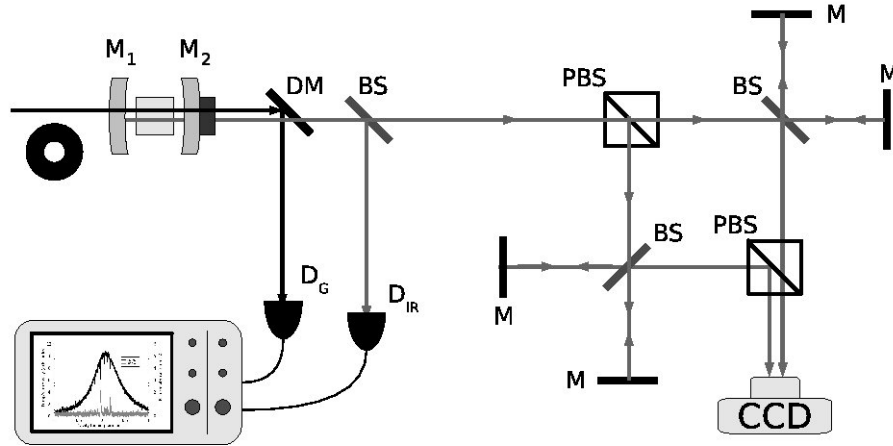


Figura 1.23: Esquema do experimento que mediu a produção de modos espaciais de ordem superior. (P)BS são divisores de feixes (não)polarizados e DM é um espelho dicróico.

Como podemos ver nas duas primeiras linhas da figura 1.24, os dados confirmam as conclusões do trabalho anterior [28]. Devido à anisotropia da cavidade gerada pela birrefringência do cristal, o momento angular orbital não é transferido para o feixe sinal, isto é, aquele com a polarização ortogonal à do feixe de bombeamento. Nas linhas 3, 4 e 5 da figura (1.24) vemos a oscilação dos modos de ordem superior. Em todos os três resultados o feixe sinal permanece no modo fundamental. Na linha três vemos que o MAO é parcialmente transferido ao feixe complementar visto que há bifurcações no seu padrão de auto-interferência. Além disso, através de um cálculo computacional, reproduzimos esse padrão de interferência com uma superposição desbalanceada de modos  $LG^{\pm}$ , dando maior peso ao modo  $LG^{+1}$  que é o modo com mesma helicidade do modo de bombeamento. Na linha 4 vemos um modo HG de segunda ordem rodado de  $45^{\circ}$ , mostrando que para essa configuração de cavidade não foi possível a transferência de MAO para o feixe complementar. Já na linha 5 da figura (1.24) não foi possível reproduzir computacionalmente a imagem obtida com uma simples superposição de amplitudes de modos LG de primeira ordem com modos HG de segunda ordem. Por outro lado as imagens da linha 5, intensidade e padrão de interferência, foram bem reproduzidas somando-se as intensidades dos modos LG e HG. Uma provável explicação para isto seria que, neste caso, os modos LG e HG tivessem oscilando com frequências diferentes.

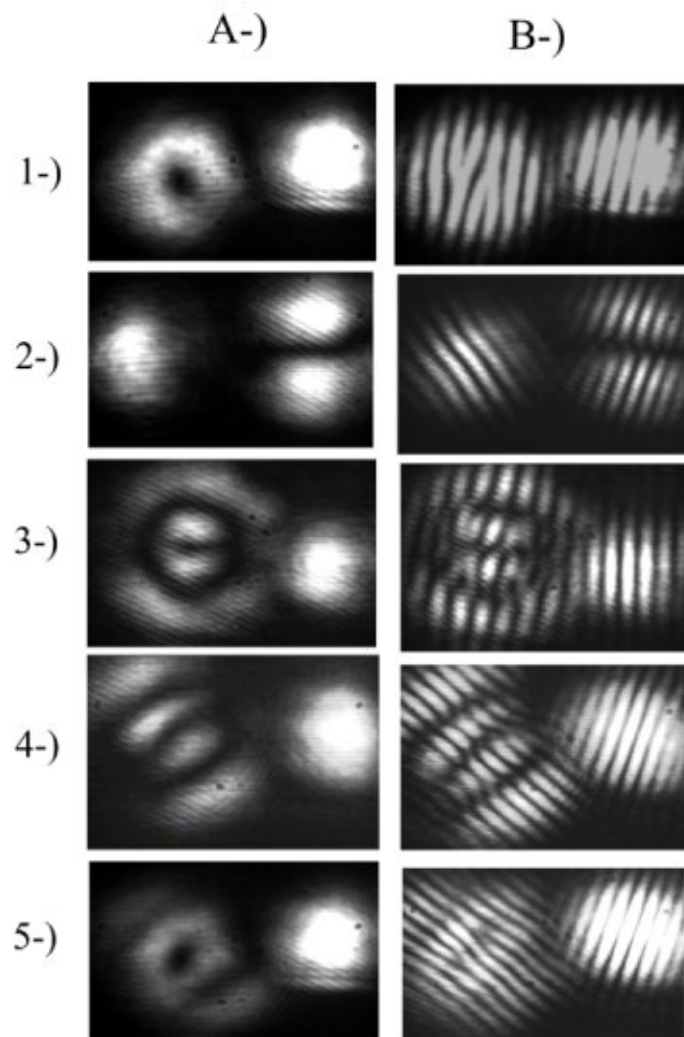


Figura 1.24: Imagens obtidas com a câmera CCD representada na figura (1.23). Na coluna A vemos os perfis de intensidade e na coluna B as auto-interferências dos feixes convertidos para a verificação dos seus momentos angulares orbitais.

## *2 Conjugação de Fase Geométrica em um Oscilador Paramétrico Ótico com Momento Angular Orbital*

"Educar uma criança não é como encher um vaso, é como acender uma fogueira."  
(Michel de Montaigne)

Neste Capítulo mostraremos um dos trabalhos desenvolvidos durante o período de tese no grupo de Ótica Quântica da UFF. Neste trabalho estudamos as propriedades clássicas de feixes gerados por um OPO quando injetamos um feixe auxiliar que porta momento angular orbital. Vamos descrever a dinâmica do OPO quando o feixe auxiliar é submetido a transformações adiabáticas que descrevem trajetórias fechadas sobre a esfera de Poincaré. Veremos que esta representação sugere a existência de uma simetria entre os feixes gerados na conversão paramétrica. Por fim sugerimos que esta simetria gera um efeito de memória no sistema, que pode ser detectado pela interferência mútua dos feixes convertidos em um experimento proposto por nós [33].

### **2.1 Representação Espinorial dos Modos Transversais de Primeira Ordem**

Vimos na seção 1.2.5 do Capítulo 1 que os modos transversais de primeira ordem podem ser descritos por uma representação tipo esfera de Poincaré, onde suas coordenadas



cartesianas são os parâmetros de Stokes (1.72):

$$p_1 = \frac{I_{HG_{0^\circ}} - I_{HG_{90^\circ}}}{I_{HG_{0^\circ}} + I_{HG_{90^\circ}}}, \quad (2.1)$$

$$p_2 = \frac{I_{HG_{45^\circ}} - I_{HG_{135^\circ}}}{I_{HG_{45^\circ}} + I_{HG_{135^\circ}}}, \quad (2.2)$$

$$p_3 = \frac{I_{LG_+} - I_{LG_-}}{I_{LG_+} + I_{LG_-}}. \quad (2.3)$$

Na base de Laguerre-Gauss, qualquer modo normalizado de primeira ordem pode ser escrito como.

$$\psi(\vec{r}) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \psi_+(\vec{\rho}, z) + e^{i\phi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \psi_-(\vec{\rho}, z), \quad (2.4)$$

onde  $\psi_{\pm}$  são os modos de primeira ordem, soluções da equação paraxial em coordenadas cilíndricas,  $\vec{\rho}$  e  $z$ , e  $\theta$  e  $\phi$  são as coordenadas angulares sobre a superfície da esfera. Os modos espaciais de primeira ordem constituem um espaço vetorial análogo ao espaço de Hilbert para uma partícula de spin 1/2 da mecânica quântica. Assim sendo, é útil representar esses modos por espinores do tipo:

$$|\theta, \phi\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ e^{i\phi} \text{sen}\frac{1}{2}\theta \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Neste sentido, qualquer transformação de modo sem perdas pode ser descrito por uma operação unitária. Na representação espinorial da equação anterior há uma arbitrariedade na escolha da fase global do espinor. Fizemos essa escolha de tal maneira que o espinor tenha componentes reais no Pólo Norte da esfera de Poincaré. Juntamente com essa escolha, a condição de normalização torna possível representar um determinado modo espacial com apenas dois parâmetros  $\theta$  e  $\phi$ . Em termos dessas coordenadas angulares, os parâmetros de Stokes tomam a forma simples mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{sen}\theta \cos\phi, \\ p_2 &= \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \\ p_3 &= \cos\theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.2 Dinâmica de Modos Transversais

Estamos interessados em um regime de operação do OPO onde o feixe de bombeamento está no modo  $TEM_{00}$  e os feixes convertidos nos modos de Laguerre-Gauss  $LG_{\pm}$ . É sabido que, em cavidades confocais, modos espaciais de paridades diferentes não são

degenerados em frequência [62]. Com a ajuda de um PZT, podemos ajustar o comprimento da cavidade para selecionar qual dos dois grupos, modos pares ou modos ímpares, participarão do processo paramétrico. Além disso, através de um sistema que controla a temperatura do cristal não-linear, podemos alterar o seu índice de refração de maneira que os picos de ressonância da cavidade para os feixes convertidos e de bombeamento sejam coincidentes. Desta forma, vamos escrever o campo de bombeamento,  $E_p(\vec{r})$ , como

$$E_p(\vec{r}) = \alpha_p \psi_{00}(\vec{\rho}, z) , \quad (2.7)$$

onde  $\alpha_p$  é a sua amplitude e  $\psi_{00}(\vec{\rho}, z)$  é o perfil espacial do modo  $TEM_{00}$ . Por outro lado, os campos convertidos  $E_j(\vec{r})$  ( $j = s, i$ ) devem ser escritos como a combinação linear de modos  $LG_{\pm}$  a seguir,

$$E_j(\vec{r}) = \alpha_{j-} \psi_{-}(\vec{\rho}, z) + \alpha_{j+} \psi_{+}(\vec{\rho}, z) \quad , \quad (2.8)$$

onde  $\alpha_{\pm}^j$  são as variáveis dinâmicas correspondentes às amplitudes complexas intracavidade dos modos. Dada a ortonormalidade dos modos espaciais  $\psi_{\pm}(\vec{\rho}, z)$ , qualquer ponto na esfera de Poincaré pode ser representado pela intensidade  $I_j = |\alpha_{j-}|^2 + |\alpha_{j+}|^2$  e o seu espinor correspondente  $|\theta, \phi\rangle_j$ .

Vamos considerar a dinâmica de um OPO onde o feixe auxiliar que será injetado na cavidade foi preparado em um ponto arbitrário da esfera de Poincaré, e as amplitudes que o descrevem na base  $LG$  são  $\alpha_{s+}^{(in)}$  e  $\alpha_{s-}^{(in)}$ . O feixe de bombeamento é preparado no modo  $TEM_{00}$  com uma amplitude  $\alpha_p^{(in)}$  que consideraremos real. Assim as equações movimento para as amplitudes complexas são:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_p}{dt} &= -(\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_p - \chi(\alpha_{s+}\alpha_{i-} + \alpha_{s-}\alpha_{i+}) + \eta_p\alpha_p^{(in)} , \\ \frac{d\alpha_{s+}}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_{s+} + \chi\alpha_{i-}^*\alpha_p + \eta_s\alpha_{s+}^{(in)} , \\ \frac{d\alpha_{s-}}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_{s-} + \chi\alpha_{i+}^*\alpha_p + \eta_s\alpha_{s-}^{(in)} , \\ \frac{d\alpha_{i+}}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_{i+} + \chi\alpha_{s-}^*\alpha_p , \\ \frac{d\alpha_{i-}}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_{i-} + \chi\alpha_{s+}^*\alpha_p , \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $\kappa_p$  e  $\Delta_p$  são, respectivamente, a taxa de decaimento da cavidade e a dessintonia para o campo de bombeamento;  $\kappa$  e  $\Delta$  são os parâmetros correspondentes para os campos convertidos, e as constantes  $\eta_j = \sqrt{T_j}/\tau_j$  ( $j = p, s$ ) são os acoplamentos para o interior da cavidade.  $T_j$  e  $\tau_j$  são, respectivamente, o coeficiente de transmissão do espelho de entrada

e o tempo de ida e volta dos campos dentro da cavidade. A troca de energia dentro do cristal não-linear é regido pelo acoplamento  $\chi$ , que é proporcional à susceptibilidade não-linear de segunda ordem do cristal e à integral de recobrimento dos modos espaciais (1.106).

### 2.2.1 Análise da Dinâmica sem Injeção de Sinal

Antes de partirmos para a análise do OPO injetado, é interessante considerar primeiro o caso não injetado,  $\alpha_{s\pm}^{(in)} = 0$ , ressonante,  $\Delta = \Delta_p = 0$ .

As soluções estacionárias podem ser obtidas substituindo as derivadas temporais em (2.9) por zero. Isto nos fornece as seguintes equações algébricas para os modos  $\alpha_{s+}$  e  $\alpha_{i-}$ :

$$\begin{aligned}\kappa\alpha_{s+} &= \chi\alpha_{i-}^*\alpha_p, \\ \kappa\alpha_{i-} &= \chi\alpha_{s+}^*\alpha_p.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Como as equações de movimento são invariantes por permutação dos índices  $+ \leftrightarrow -$ , estes resultados também se aplicam às amplitudes  $\alpha_{s-}$  e  $\alpha_{i+}$ .

Escrevendo as amplitudes complexas na representação polar, encontramos as relações entre as amplitudes,

$$\begin{aligned}|\alpha_{s+}| &= |\alpha_{i-}|, \\ |\alpha_{s-}| &= |\alpha_{i+}|,\end{aligned}\quad (2.11)$$

a as fases,

$$\phi_{s+} + \phi_{i-} = \phi_p, \quad (2.12)$$

$$\phi_{s-} + \phi_{i+} = \phi_p. \quad (2.13)$$

Das equações (2.11), concluímos que sinal e complementar têm a mesma intensidade estacionária

$$I = |\alpha_{j+}|^2 + |\alpha_{j-}|^2, \quad (2.14)$$

com  $j = s, i$ .

A equação para a solução estacionária para o campo de bombeamento é dada por

$$\kappa_p\alpha_p + \chi(\alpha_{s+}\alpha_{i-} + \alpha_{s-}\alpha_{i+}) = \eta_p\alpha_p^{(in)}. \quad (2.15)$$

Substituindo os resultados para as fases e intensidades dos convertidos na equação ante-

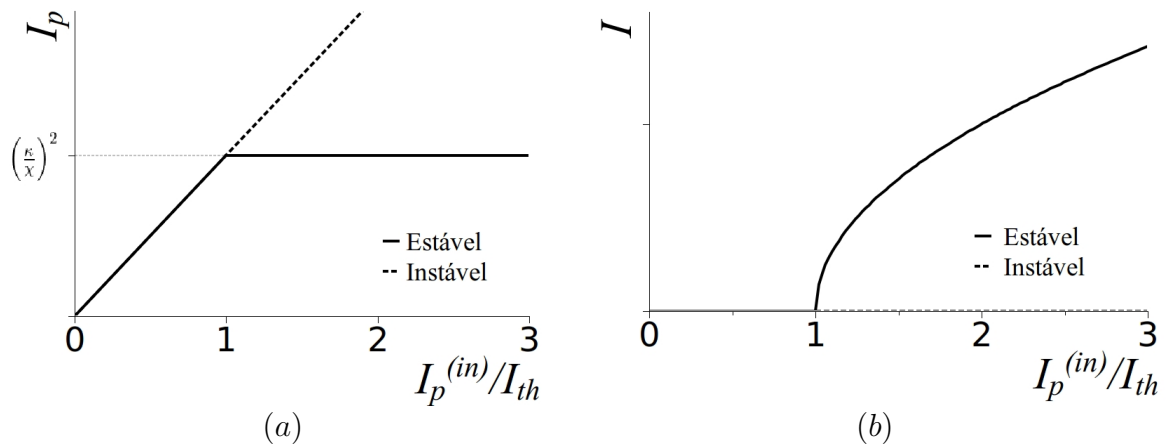


Figura 2.1: (a) intensidade do feixe de bombeamento transmitida pela cavidade OPO em função da intensidade de entrada. (b) intensidade dos feixes convertidos gerados pelo OPO em função da intensidade de entrada.

rior, obtemos

$$(\kappa_p | \alpha_p | + \chi I) e^{i\phi_p} = \eta_p \alpha_p^{(in)} \quad . \quad (2.16)$$

A expressão dentro do parênteses, no lado esquerdo da equação (2.16) é um número real, isto fixa o valor da fase de  $\alpha_p$  como sendo  $\phi_p = 0$ , uma vez que  $\alpha_p^{(in)}$  foi suposto real. Com isso, das equações (2.10), podemos facilmente obter as soluções estacionárias

$$I_p = \left( \frac{\eta_p}{\kappa_p} \right)^2 I_p^{(in)} \quad \text{e} \quad I_p = \left( \frac{\kappa}{\chi} \right)^2 \quad . \quad (2.17)$$

Abaixo do limiar, quando não há uma quantidade macroscópica de energia nos campos, apenas a primeira solução é possível. Acima do limiar ambas são possíveis, porém apenas a segunda é estável. A figura 2.1 ilustra o comportamento da intensidade do feixe de bombeamento transmitida pela cavidade do OPO. Resolvendo a equação (2.16) para a intensidade estacionária dos campos sinal e complementar obtemos,

$$I = |\alpha_{j+}|^2 + |\alpha_{j-}|^2 = \frac{\kappa_p}{\chi} \left( \frac{\eta_p \alpha_{in}^p}{\kappa_p} - \frac{\kappa}{\chi} \right) \quad , \quad (2.18)$$

onde  $j = s, i$ . A figura 2.1b ilustra o comportamento da intensidade dos feixes convertidos gerados pelo OPO.

É instrutivo olhar para o estado estacionário em termos da representação de Poincaré dos modos transversais. Para isto vamos escrever as amplitudes complexas dos modos

como:

$$\begin{aligned}
\alpha_{s+} &= \sqrt{I} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi_{s+}} , \\
\alpha_{s-} &= \sqrt{I} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi_{s-}} , \\
\alpha_{i+} &= \sqrt{I} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi_{i+}} , \\
\alpha_{i-} &= \sqrt{I} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi_{i-}} .
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Em termos da equação (2.5), a menos de uma fase global, o espinor para o campo sinal é  $|\varphi_s\rangle = |\theta, \phi\rangle$ , enquanto o do campo complementar é  $|\varphi_i\rangle = |\pi - \theta, \phi\rangle$ . Os parâmetros de Stokes correspondentes são:

$$\begin{aligned}
p_1^s &= p_1^i = \operatorname{sen}\theta \cos\phi , \\
p_2^s &= p_2^i = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi , \\
p_3^s &= -p_3^i = \cos\theta ,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde  $\phi \equiv \phi_-^s - \phi_+^s = \phi_-^i - \phi_+^i$ . Vemos que os parâmetros de Stokes dos campos sinal e complementar correspondem a pontos sobre a esfera de Poincaré simetricamente dispostos em relação ao plano equatorial, como descrito na figura 2.2. Como  $\theta$  e  $\phi$  não estão fixos, são livres para difundir e os estados estacionários para os campos convertidos podem cair em qualquer par de pontos sobre a esfera, respeitando esta simetria. Fisicamente, isso significa que sinal e complementar têm a mesma distribuição de intensidade, o que otimiza a sobreposição espacial, mas helicidades opostas, conservando o momento angular orbital (MAO). Sabemos pelo teorema de Noether que leis de conservação estão intimamente ligadas às simetrias do sistema [69]. Nas equações dinâmicas (2.9) assumimos implicitamente que a cavidade e o cristal do OPO possuem simetria cilíndrica. A principal anisotropia presente em um OPO é a birrefringência do cristal. Na referência [28], a transferência de MAO para o feixe complementar foi observada pela primeira vez na operação de um OPO tipo II bombeado por um modo de Laguerre-Gauss. Para um OPO tipo II, sinal e complementar têm polarizações ortogonais, de modo que os efeitos do astigmatismo induzido pela birrefringência do cristal impedem a transferência de MAO para o feixe sinal. De fato, como discutido em [28], um astigmatismo dependente da birrefringência provocará uma separação de frequências entre os modos transversais que conservam o momento angular. Por este motivo, iremos propor mais adiante uma configuração experimental baseada em um OPO tipo I, onde sinal e complementar têm a mesma polarização e nele é possível atingir uma quase-degenerescência dos modos sinal e complementar.

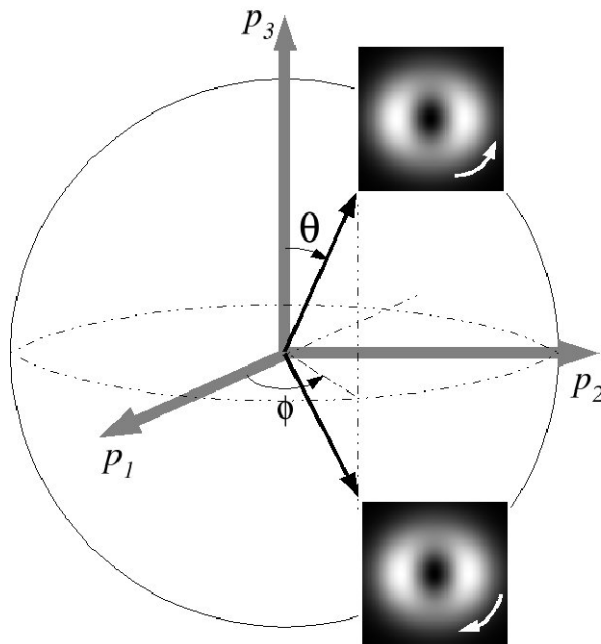


Figura 2.2: Correlações impostas pela otimização da sobreposição espacial e conservação do momento angular orbital. Sinal e complementar são representados por dois pontos na esfera de Poincaré alinhados simetricamente em relação ao plano equatorial.

Podemos construir uma imagem física da representação de Poincaré que nos permite inferir algumas das características principais da evolução do sistema quando forem adicionados ruídos. A adição do ruído quântico deverá levar os campos convertidos ao longo de trajetórias aleatórias na esfera de Poincaré, analogamente à trajetória aleatória delineada pelo fasor do campo elétrico no plano complexo, em uma representação geométrica da difusão de fase de um laser. Baseados nesta analogia, podemos pensar nas trajetórias aleatórias pela esfera de Poincaré como uma espécie de *difusão de modo*. No caso de um OPO injetado, o campo auxiliar forçará um funcionamento estável em um determinado ponto da esfera, evitando assim a difusão de modo mencionada acima.

### 2.2.2 Análise da Dinâmica com Injeção de Sinal

Vamos considerar agora uma injeção de sinal preparada em uma superposição arbitrária de modos de primeira ordem representados na esfera de Poincaré pelos ângulos polar e azimutal  $\theta_0$  e  $\phi_0$ , como mostrado na figura 2.2. O sinal injetado é então representado pelas seguintes amplitudes:

$$\alpha_{s+}^{(in)} = \sqrt{I_s^{in}} \cos \frac{\theta_0}{2} \quad , \quad (2.21)$$

$$\alpha_{s-}^{(in)} = \sqrt{I_s^{in}} \sin \frac{\theta_0}{2} e^{i\phi_0} \quad , \quad (2.22)$$

onde o espinor correspondente é  $|\theta_0, \phi_0\rangle$ .

Com esta escolha para a injeção, as equações dinâmicas são simplificadas pela definição de um novo conjunto de amplitudes transformadas  $\alpha_j$  e  $\alpha'_j$  ( $j = s, i$ ) dadas por:

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \cos \frac{\theta_0}{2} \alpha_{s+} + \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-i\phi_0} \alpha_{s-} , \\ \alpha_i &= \sin \frac{\theta_0}{2} e^{i\phi_0} \alpha_{i+} + \cos \frac{\theta_0}{2} \alpha_{i-} , \\ \alpha'_s &= -\sin \frac{\theta_0}{2} \alpha_{s+} + \cos \frac{\theta_0}{2} e^{-i\phi_0} \alpha_{s-} , \\ \alpha'_i &= \cos \frac{\theta_0}{2} e^{i\phi_0} \alpha_{i+} - \sin \frac{\theta_0}{2} \alpha_{i-} .\end{aligned}\quad (2.23)$$

Estas novas variáveis nos permitem reescrever as equações dinâmicas com um único termo de injeção:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_p}{dt} &= - (\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_p - \chi (\alpha_s \alpha_i + \alpha'_s \alpha'_i) \\ &\quad + \eta_p \alpha_p^{in} ,\end{aligned}\quad (2.24)$$

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = - (\kappa + i\Delta)\alpha_s + \chi \alpha_i^* \alpha_p + \eta_s \sqrt{I_s^{in}} ,\quad (2.25)$$

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = - (\kappa + i\Delta)\alpha_i + \chi \alpha_s^* \alpha_p ,\quad (2.26)$$

$$\frac{d\alpha'_s}{dt} = - (\kappa + i\Delta)\alpha'_s + \chi \alpha_i'^* \alpha_p ,\quad (2.27)$$

$$\frac{d\alpha'_i}{dt} = - (\kappa + i\Delta)\alpha'_i + \chi \alpha_s'^* \alpha_p .\quad (2.28)$$

Isto simplifica consideravelmente a solução estacionária, que pode ser facilmente encontrada a partir do seguinte sistema algébrico:

$$\alpha_p = -\frac{\chi}{\kappa_p} (\alpha_s \alpha_i + \alpha'_s \alpha'_i) + \frac{\eta_p}{\kappa_p} \alpha_p^{in} ,\quad (2.29)$$

$$\alpha_s = \frac{\chi}{\kappa} \alpha_i^* \alpha_p + \frac{\eta_s}{\kappa} \sqrt{I_s^{in}} ,\quad (2.30)$$

$$\alpha_i = \frac{\chi}{\kappa} \alpha_s^* \alpha_p ,\quad (2.31)$$

$$\alpha'_s = \frac{\chi}{\kappa} \alpha_i'^* \alpha_p ,\quad (2.32)$$

$$\alpha'_i = \frac{\chi}{\kappa} \alpha_s'^* \alpha_p ,\quad (2.33)$$

onde, por conveniência, assumimos  $\Delta_p = \Delta = 0$ . Uma algebrização rápida das equações

anteriores nos fornece

$$\alpha'_s \left( 1 - \frac{\chi^2}{\kappa^2} |\alpha_p|^2 \right) = 0 \quad , \quad (2.34)$$

$$\alpha_s \left( 1 - \frac{\chi^2}{\kappa^2} |\alpha_p|^2 \right) = \frac{\eta_s}{\kappa} \sqrt{I_s^{in}} \quad . \quad (2.35)$$

Para o OPO não injetado ( $I_s^{in} = 0$ ) soluções não nulas para  $\alpha_{s(i)}$  e  $\alpha'_{s(i)}$  são possíveis somente se  $|\alpha_p|^2 = \kappa^2/\chi^2$ , que é o valor conhecido para o feixe de bombeamento acima do limiar. No caso injetado no entanto, podemos ver a partir da equação (2.35) que esta condição não permanece válida, de modo que apenas  $\alpha_s$  e  $\alpha_i$  podem assumir valores não nulos.

As novas equações de movimento são então,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_p}{dt} &= -(\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_p - \chi\alpha_s\alpha_i + \eta_p\alpha_p^{in} \quad , \\ \frac{d\alpha_s}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_s + \chi\alpha_i^*\alpha_p + \eta_s\sqrt{I_s^{in}} \quad , \\ \frac{d\alpha_i}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_i + \chi\alpha_s^*\alpha_p \quad . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Considerando que os campos estão em ressonância com a cavidade, zerando as derivadas temporais nestas últimas equações, podemos facilmente calcular que a solução estacionária é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{\eta_s\kappa\sqrt{I_s^{in}}}{(\kappa^2 - \chi^2|\alpha_p|^2)} \quad , \\ \alpha_i &= \frac{\eta_s\chi\sqrt{I_s^{in}}\alpha_p}{(\kappa^2 - \chi^2|\alpha_p|^2)} \quad . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para podermos evidenciar a dependência da solução estacionária com as coordenadas na esfera de Poincaré do campo auxiliar, precisamos voltar à base de Laguerre-Gauss original invertendo as equações (2.23). Os campos sinal e complementar resultantes são então dados por

$$\begin{aligned} E_s(\vec{r}) &= \frac{\eta_s\kappa\sqrt{I_s^{in}}}{(\kappa^2 - \chi^2|\alpha_p|^2)} \times \\ &\quad \left[ \cos \frac{\theta_0}{2} \psi_+(\vec{\rho}, z) + e^{i\phi_0} \sin \frac{\theta_0}{2} \psi_-(\vec{\rho}, z) \right] \quad , \\ E_i(\vec{r}) &= \frac{\eta_s\chi\sqrt{I_s^{in}}\alpha_p}{(\kappa^2 - \chi^2|\alpha_p|^2)} e^{-i\phi_0} \times \\ &\quad \left[ \sin \frac{\theta_0}{2} \psi_+(\vec{\rho}, z) + e^{i\phi_0} \cos \frac{\theta_0}{2} \psi_-(\vec{\rho}, z) \right] \quad . \end{aligned} \quad (2.38)$$



A partir dessas amplitudes, fica claro que o campo sinal dentro da cavidade corresponde ao espinor  $|\theta_0, \phi_0\rangle$ , enquanto o campo complementar corresponde a  $|\pi - \theta_0, \phi_0\rangle$ . A mesma correlação foi prevista para o funcionamento do OPO sem injeção, porém agora, a injeção do campo auxiliar no OPO inibe a difusão dos espinores. Sinal e complementar agora funcionam em pontos estáveis na esfera de Poincaré. Isto também pode ser explicitado pelos parâmetros de Stokes dos feixes convertidos, que podem ser facilmente calculados a partir das definições (2.1), (2.2) e (2.3):

$$\begin{aligned} p_1^s &= p_1^i = \sin \theta_0 \cos \phi_0 , \\ p_2^s &= p_2^i = \sin \theta_0 \sin \phi_0 , \\ p_3^s &= -p_3^i = \cos \theta_0 . \end{aligned} \tag{2.39}$$

A solução para a amplitude do modo de bombeamento  $|\alpha_p|$  é dada pela raiz do polinômio de quinto grau,

$$b^2 |\alpha_p| + (|\alpha_p| - a) \left( |\alpha_p|^2 - \frac{\kappa^2}{\chi^2} \right)^2 = 0 , \tag{2.40}$$

onde  $a = \eta_p |\alpha_p^{in}| / \kappa_p$ , e  $b = \eta_s \kappa |\alpha_s^{in}| / (\chi \sqrt{\kappa \kappa_p})$ . Não há algoritmo para se encontrar tais raízes analiticamente, porém no Capítulo 5 mostraremos que, para alguns regimes de operação, podemos encontrar expressões analíticas aproximadas para o estado estacionário do feixe de bombeamento. Na análise de estabilidade feita no Apêndice B mostramos que as soluções estáveis devem ter  $|\alpha_p| < \kappa / \chi$ .

## 2.3 Proposta Experimental para a Conversão Adiabática de Modos Espaciais e a Conjugação da Fase Geométrica

Nesta seção vamos descrever o experimento proposto para a observação das previsões feitas com o modelo descrito anteriormente. Como sinal e complementar têm os mesmos valores para os parâmetros de Stokes  $p_1$  e  $p_2$ , e sinais opostos para  $p_3$ , uma transformação adiabática cíclica realizada sobre o modo do feixe auxiliar fará com que eles efetuem caminhos fechados em sentidos contrários sobre a esfera de Poincaré, figura (2.3). Essas transformações no modo de injeção equivalem a uma variação lenta o suficiente dos parâmetros  $\theta$  e  $\phi$  nas equações (2.21) e (2.22) para que seja possível considerar o sistema aproximadamente estacionário a cada instante ao longo da trajetória, permitindo que a simetria entre sinal e complementar seja respeitada.

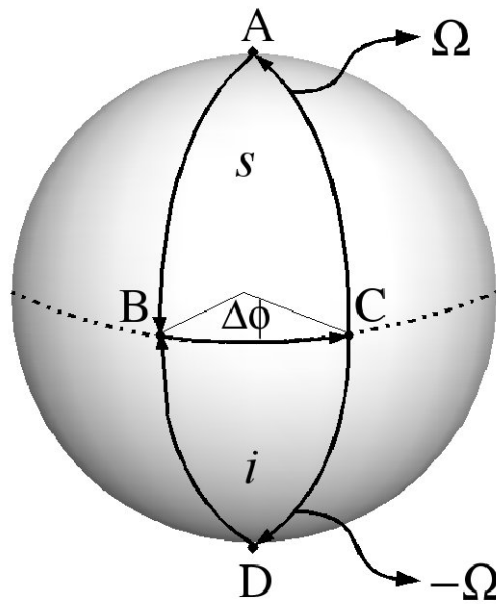


Figura 2.3: Representação de Poincaré das transformações realizadas nos feixes sinal e complementar.

Como mencionamos anteriormente, num OPO tipo I podemos evitar os efeitos astigmáticos da cavidade e medir a fase ganha pelos feixes convertidos pela simples observação do padrão de interferência dos feixes convertidos. Caso sinal e complementar não sejam degenerados em frequência, ainda assim poderíamos medir a fase geométrica com um detector de resposta rápida e um analisador de espectro. Neste caso, como não há uma imagem de interferência fixa que possa ser detectada com uma câmera CCD, a medida da fase seria feita através da construção de um mapa de batimento entre sinal e complementar.

Vamos considerar o esboço do experimento mostrado na fig. 2.4(a). O laser da figura fornece dois comprimentos de onda, um bombeará o OPO (VIS) e o outro será usado como feixe auxiliar (IR). Antes de ser enviado ao OPO, o feixe auxiliar passa por um sistema de preparação de modos montado em um interferômetro de Sagnac para garantir que ambos os feixes tenham a mesma fase dinâmica. Através deste preparador de modos podemos escolher em que ponto da esfera de Poincaré estará localizado o feixe auxiliar. Modificando adiabaticamente a configuração dos componentes óticos do sistema de preparação de modos, podemos guiar os feixes sinal e complementar através de caminhos arbitrários na esfera de Poincaré. Para garantir o caráter adiabático das transformações, os parâmetros do sistema de preparação de modos devem ser alterados em uma escala de tempo bem maior do que o tempo de vida médio dos feixes convertidos dentro da cavidade,  $2\pi/\kappa$ . Após saírem do OPO, sinal e complementar pode ser separados do feixe de

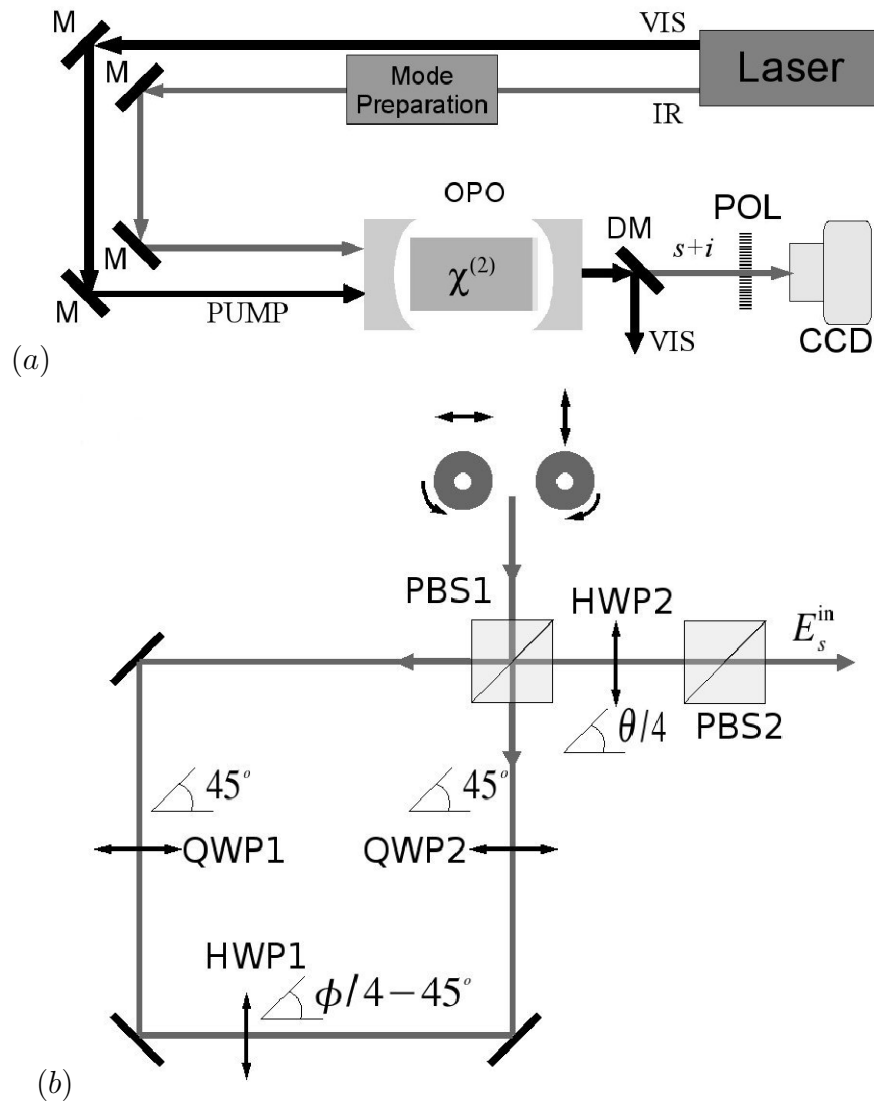


Figura 2.4: Em (a) a configuração experimental proposta para medir a conjugação da fase geométrica. M = espelho, DM = espelho dicrômico e POL = polarizador. Em (b) mostramos o sistema de preparação de modos, PBS = divisor de feixes polarizador, QWP = lâminas  $\lambda/4$  e HWP = lâminas  $\lambda/2$ .

bombeamento por um espelho dicrômico (DM) e detectados com a câmera CCD. No caso de um OPO tipo II, supondo que seja possível resolver os problemas da cavidade astigmática, poderíamos medir a fase geométrica ganha pelos campos com o mesmo arranjo experimental, e a adição de um polarizador (POL) na frente da câmera CCD orientado a  $45^\circ$  com respeito às polarizações dos convertidos, seria capaz de medir a fase geométrica ganha pelos campos.

O sistema de preparação de modos pode ser visto na figura 2.4(b). Dois modos de Laguerre-Gauss com helicidades opostas e polarizações ortogonais são enviados para um interferômetro Sagnac<sup>1</sup> com um divisor de feixes polarizador (PBS) como porta de

<sup>1</sup>a escolha deste interferômetro se deu pela sua alta estabilidade.

entrada/saída, um conjunto de três lâminas birrefringentes, duas lâminas  $\lambda/4$  e uma  $\lambda/2$  introduzem uma fase entre os dois modos  $LG_{\pm}$  que pode ser facilmente controlada pela orientação relativas das lâminas de retardo. As lâminas de quarto de onda são orientadas a  $45^{\circ}$  com relação ao eixo horizontal. Por motivos que serão explicados na próxima seção, a orientação variável da lâmina de meia onda será escrita como  $\phi/4 - 45^{\circ}$ . Com esta configuração, a fase relativa entre os feixes contra-propagantes na saída do sistema de preparação de modos será de  $\phi$ . Após sair do interferômetro Sagnac, este feixe será enviado a uma segunda lâmina de meia-onda, cuja orientação  $\theta/4$  também será variável. O perfil resultante do feixe após passar por um outro divisor de feixes polarizador será,

$$E_s^{in} = \sqrt{I_s^{in}} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \psi_+(\vec{\rho}, z) + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \psi_-(\vec{\rho}, z) \right], \quad (2.41)$$

que corresponde ao espinoir  $|\theta, \phi\rangle$ . Este perfil é equivalente à amplitude da injeção dada pelas equações 2.21 e 2.22. Assim, vemos que o campo de injeção pode ser preparado em qualquer ponto sobre a esfera de Poincaré pela orientação adequada das lâminas de meia-onda, e mais ainda, pode ser continuamente variado ao longo de um caminho qualquer na esfera.

## 2.4 Evolução Adiabática do Campo de Injeção

Vamos considerar um campo auxiliar com intensidade fixa  $I_s^{in}$  e um espinoir variável no tempo  $|\varphi_{in}(t)\rangle = U(t)|0, 0\rangle$ , sob a ação do operador de evolução unitário  $U(t)$  e partindo do pólo norte da esfera de Poincaré. As amplitudes complexas do campo de injeção acoplados às equações dinâmicas serão

$$\alpha_+^{s(in)}(t) = \sqrt{I_s^{in}} \langle 0, 0 | \varphi_{in}(t) \rangle, \quad (2.42)$$

$$\alpha_-^{s(in)}(t) = \sqrt{I_s^{in}} \langle \pi, 0 | \varphi_{in}(t) \rangle, \quad (2.43)$$

onde supomos que a variação temporal será bem mais lenta que  $2\pi/\kappa$ . As evoluções unitárias na esfera de Poincaré serão representadas por diferentes formas do operador  $U(t)$ . Rotações no sentido anti-horário de um ângulo  $\theta = \omega t$  em torno do eixo que passa pelo centro da esfera e cruzando o equador no ângulo azimutal  $\phi$ , figura 2.5, são representadas por:

$$C(\omega t, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{2}\omega t & -i e^{-i\phi} \sin \frac{1}{2}\omega t \\ -i e^{i\phi} \sin \frac{1}{2}\omega t & \cos \frac{1}{2}\omega t \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Rotações no sentido anti-horário por um ângulo  $\phi = \omega t$  em torno do eixo polar, figura

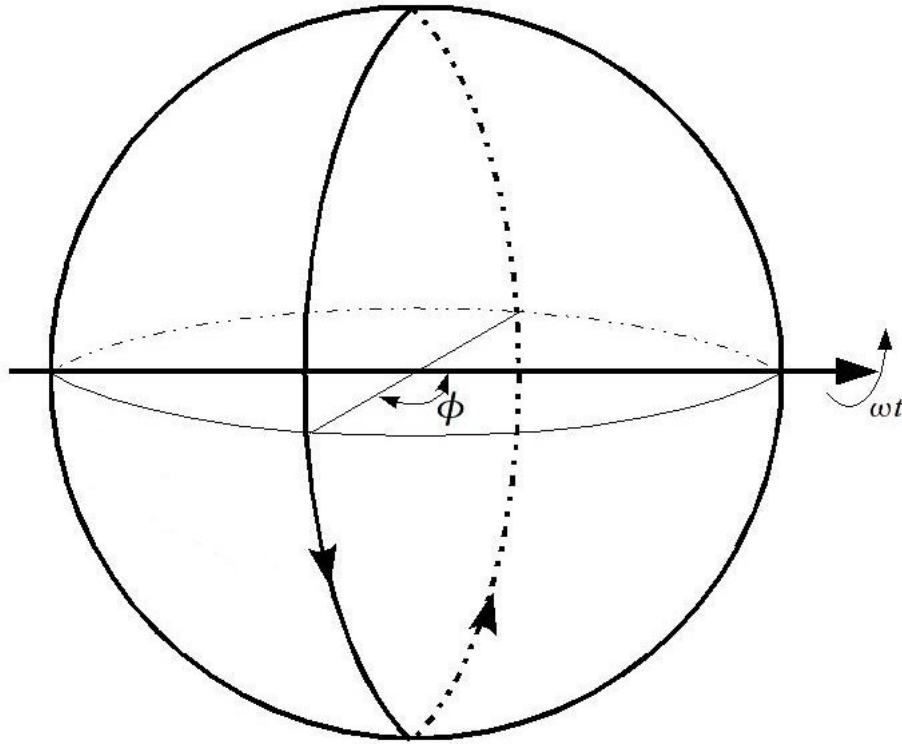


Figura 2.5: Efeito produzido pelo operador  $C(\omega t, \phi)$  para  $\phi = \pi/2$ .

2.6, são representadas por:

$$R(\omega t) = \begin{bmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Na referência [61] N. Mukunda e R. Simon consideram a evolução de um vetor de estado  $|\varphi(t)\rangle$  ao longo de um caminho  $C_0$  num espaço de Hilbert parametrizado por  $t$ , partindo do tempo  $t_1$  até o tempo  $t_2$ . O fator de fase global adquirido ao longo de  $C_0$  é dado por  $\gamma_{tot} = \arg[\langle\varphi(t_1)|\varphi(t_2)\rangle]$ . Eles identificaram a contribuição para o fator de fase global, que é invariante por transformações de calibre do tipo

$$|\varphi'(t)\rangle = e^{i\alpha(t)}|\varphi(t)\rangle. \quad (2.46)$$

Esta contribuição invariante é dada por,

$$\gamma_{inv}[C_0] = \arg[\langle\varphi(t_1)|\varphi(t_2)\rangle] - \text{Im} \int_{t_1}^{t_2} dt \langle\varphi(t)|\dot{\varphi}(t)\rangle, \quad (2.47)$$

onde o ponto em  $|\dot{\varphi}(t)\rangle$  indica diferenciação em relação ao tempo. Para qualquer caminho  $C'_0$ , obtido a partir de  $C_0$  pela transformação de calibre 2.46, temos  $\gamma_{inv}[C'_0] = \gamma_{inv}[C_0]$ . Em seu trabalho, Mukunda e Simon chamam a segunda parcela do lado direito da equação

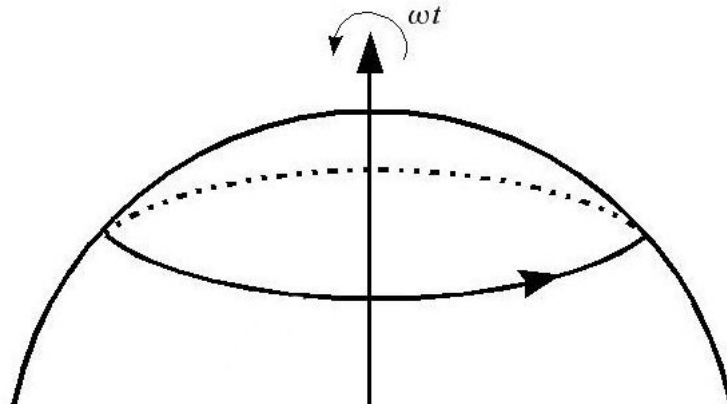


Figura 2.6: Efeito produzido pelo operador  $R(\omega t)$ .

2.47 de *fase dinâmica*, e a contribuição invariante por transformações de calibre de *fase geométrica*.

Os operadores de evolução dados pelas equações (2.44) e (2.45) serão usados para descrever as operações experimentais para executar as conversões de modo desejadas. Portanto, é importante avaliar a fase dinâmica dada por estas operações, a fim de identificar corretamente a contribuição de fase invariante. Considerando um espinor inicial arbitrário  $|\varphi(0)\rangle = |\theta_0, \phi_0\rangle$ , a evolução da fase sob a ação de  $C(\omega t, \phi)$  é

$$\gamma_{dyn}(C) = \text{Im} \int_0^t dt \langle \varphi(0) | C^\dagger \dot{C} | \varphi(0) \rangle = -\frac{\omega t}{2} \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0). \quad (2.48)$$

É fácil ver que qualquer evolução com um operador  $C$  começando dos pólos ( $\theta_0 = 0$  ou  $\pi$ ) terá uma contribuição nula para a fase dinâmica. A partir de qualquer ponto sobre a esfera, a contribuição dinâmica também será nula para geodésicas sobre um dos grandes círculos que passem pelo ponto inicial e pelos pólos ( $\phi - \phi_0 = \pm\pi/2$ ).

Para a atuação de  $R(\omega t)$ , os mesmos cálculos fornecem,

$$\gamma_{dyn}(R) = \text{Im} \int_0^t dt \langle \varphi(0) | R^\dagger \dot{R} | \varphi(0) \rangle = -\frac{\omega t}{2} \cos \theta_0. \quad (2.49)$$

Neste caso, a contribuição dinâmica é zero apenas para trajetórias sobre o equador ( $\theta_0 = \pi/2$ ). Note que a partir da equação (2.49), para um dado sentido de rotação (digamos  $\omega > 0$ , por exemplo) no pólo norte, esta fase dinâmica será oposta à adquirida no pólo sul. Como veremos em breve, isso será útil para a compensação da fase dinâmica em uma das evoluções cíclicas que consideraremos.

Vamos considerar dois tipos de evolução cíclica, ambas com início a partir do pólo norte da esfera de Poincaré. No primeiro caminho, o feixe de injeção segue o caminho

$ABCA$ , como mostrado na figura 2.3, correspondendo a um ângulo sólido  $\Omega = \Delta\phi$  na esfera de Poincaré, onde  $\Delta\phi$  é o ângulo azimutal que corresponde à parte do caminho que passa sobre o equador da esfera. Por este caminho a contribuição dinâmica é igual a zero e a fase adquirida pela injeção será  $\gamma_{in} = -\Delta\phi/2$ . Durante a evolução temporal da injeção, o feixe sinal é levado adiabaticamente através do mesmo caminho e adquire a mesma fase, enquanto o feixe complementar segue o caminho simétrico  $DBCD$ , de modo que ele adquire a mesma fase, porém com sinal trocado,  $\gamma_i = -\gamma_s = \Delta\phi/2$ . Assim, a diferença de fase entre os feixes convertidos é  $\Delta\phi$ , e pode ser medida pela mudança no seu padrão de interferência mútua. Em termos do arranjo experimental da figura 2.4(b), em  $t = 0$  a lâmina de meia-onda no interior do interferômetro de Sagnac (HWP1) é orientada em  $\phi = 0$  e a lâmina de meia-onda fora do interferômetro (HWP2) é orientada em  $\theta = 0$ . A evolução ao longo do caminho  $AB$  é realizada ao girarmos HWP2 até  $\theta = \pi/2$ , que é representada pela ação do operador unitário  $C(\pi/2, \pi/2)$  em  $|\varphi_{in}(0)\rangle$  (lembrando que o ângulo de rotação da lâmina de onda é, na verdade,  $\theta/4$ ). O caminho  $BC$  é percorrido ao girarmos HWP1 por um ângulo  $\Delta\phi/4$ , o que é descrito por  $R(\Delta\phi)$ . Por último, a evolução pelo caminho  $CA$  é feita pela rotação de HWP2 de volta a  $\theta = 0$ , que corresponde à ação de  $C(-\pi/2, \pi/2 + \Delta\phi)$ . Assim, o espinor que representa o modo injetado ao final do processo é

$$|\varphi_{in}(t)\rangle = C(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \Delta\phi)R(\Delta\phi)C(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|0, 0\rangle = e^{-i\Delta\phi/2}|0, 0\rangle. \quad (2.50)$$

Consideremos agora o caminho passando por  $ABDCA$  mostrado na figura 2.3, correspondente ao ângulo sólido  $\Omega = 2\Delta\phi$ . O campo injetado deverá agora adquirir uma fase  $\gamma_s = -\Delta\phi$ , enquanto o feixe complementar, percorrendo o caminho  $DBACD$ , deverá adquirir fase conjugada  $\gamma_i = -\gamma_s = \Delta\phi$ . Agora, a diferença de fase entre os feixes convertidos deverá ser  $2\Delta\phi$ . Em termos experimentais, começaremos mais uma vez com HWP1 em  $\phi = 0$  e HWP2 em  $\theta = 0$ . O caminho  $ABD$  é percorrido pela rotação de HWP2 até  $\theta = \pi$ , o que significa uma rotação real da placa de onda por um ângulo de  $\pi/4$ . O operador correspondente a esta ação é dado por  $C(\pi, \pi/2)$ . O caminho de volta ao Pólo Norte, através de  $DCA$  é percorrido pela ação de  $C(-\pi, \Delta\phi + \pi/2)$ . Para isso, primeiro rodamos HWP1 de um ângulo  $\Delta\phi/4$ , que corresponde à ação de  $R(\Delta\phi)$  sobre  $|\pi, 0\rangle$ . Em seguida, HWP2 é girado de volta para  $\theta = 0$  com HWP1 fixa, o que corresponde à ação de  $C(-\pi, \pi/2 + \Delta\phi)$  sobre  $|\pi, 0\rangle$ .

De acordo com a equação (2.49), a rotação de HPW1, quando o feixe auxiliar está no pólo sul da esfera, introduz uma fase dinâmica  $\exp(i\Delta\phi/2)$ . Esta fase é oposta à adquirida quando HPW1 é girada, do mesmo ângulo, quando o feixe auxiliar estiver sobre o pólo

norte. Assim, podemos compensar esta fase dinâmica através de uma nova rotação de HWP1 do mesmo ângulo, na *mesma direção*, quando  $|\varphi_{in}\rangle$  estiver de volta no pólo norte. Com isso HPW1 teria uma orientação final de  $\Delta\phi/2$ . O espinor que representaria o campo de injeção no final do processo seria,

$$|\varphi_{in}(t)\rangle = R(\Delta\phi)C(-\pi, \frac{\pi}{2} + \Delta\phi)R(\Delta\phi)C(\pi, \frac{\pi}{2})|0, 0\rangle = e^{-i\Delta\phi}|0, 0\rangle. \quad (2.51)$$

Alternativamente, a fase dinâmica adquirida no pólo sul pode ser compensada por uma variação adequada do comprimento do interferômetro de Sagnac. Este ajuste poderia ser monitorado pelo padrão de interferência da outra porta de saída do divisor de feixes PBS2.

## 2.5 Resultados Numéricos

Vamos agora descrever a evolução temporal de um OPO ressonante ( $\Delta = \Delta_p = 0$ ), sob a ação das operações unitárias consideradas na seção anterior. Isto será feito através da integração numérica das equações dinâmicas (2.9), com o tempo expresso em unidades de  $1/\kappa$  e o acoplamento não-linear  $\chi$  expresso em unidades de  $\kappa$ . Usamos um valor típico de  $\chi/\kappa = 0,01$ , e consideramos uma cavidade de boa qualidade para os campos convertidos  $\kappa_p = 10\kappa$ .

Definimos os parâmetros de bombeamento e injeção, respectivamente, como:

$$\mu_0 = \frac{\eta_p \chi}{\kappa \kappa_p} \alpha_p^{in} \quad (2.52)$$

e

$$\mu_1 = \frac{\eta_s \chi}{\kappa \sqrt{2\kappa \kappa_p}} \sqrt{I_s^{in}}, \quad (2.53)$$

onde  $\mu_0 = 1$  representa o limiar do OPO não injetado. Para fins da integração numérica, consideramos que os campos de injeção e bombeamento eram constantes ( $\mu_0 = 2$  e  $\mu_1 = 1.5$ ) enquanto o espinor  $|\varphi_{in}(t)\rangle$  seguia uma evolução unitária cíclica partindo do pólo norte da esfera de Poincaré. Vamos supor que todas as transformações ocorrem em uma escala temporal  $\kappa t \gg 1$ , de modo que a OPO pode seguir adiabaticamente o feixe injetado.

Consideremos a trajetória *ABCA*. Primeiro, no intervalo  $0 < \kappa t < 100$ , as equações dinâmicas eram integradas com todos os parâmetros fixos até que o sistema atingisse o estado estacionário. Então, no intervalo  $100 < \kappa t < 200$  o feixe de injeção era conduzido pela evolução unitária  $C(\omega t, 0)$  (rotação de HWP2), até o ponto *B* no equador. No



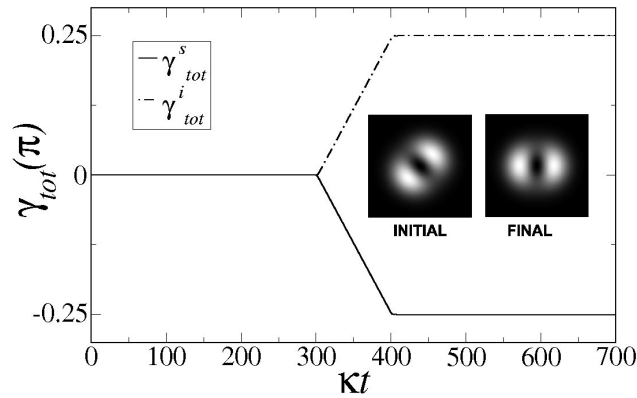


Figura 2.7: Evolução das fases totais dos feixes sinal e complementar, em unidades de  $\pi$ , calculada a partir da integração numérica das equações dinâmicas. A inserção mostra os padrões de interferência calculados antes e depois da evolução cíclica ao longo do trajeto ABCA.

intervalo  $200 < \kappa t < 300$  efetuávamos na injeção a evolução unitária  $R(\omega, t)$  até o ponto  $C$  (rotação de HPW1). Por último, no intervalo de  $300 < \kappa t < 400$ , o feixe de injeção era conduzido de volta ao pólo norte pela ação de  $C(-\omega t, \pi/2)$  (rotação de HWP2 no sentido contrário). Como discutido anteriormente, não existe fase dinâmica para este ciclo. Na figura 2.7 mostramos a evolução da fase total,

$$\gamma_{tot}^j = \arg[\langle \varphi^j(0) | \varphi^j(t) \rangle] \quad (j = s, i) \quad (2.54)$$

para sinal e complementar. A conjugação de fase é evidente a partir da simetria entre as duas curvas. Um cálculo simples mostra que o padrão de interferência entre sinal e complementar é girado por um ângulo igual à metade da respectiva variação de fase, que neste caso é igual a  $\pi/4$ .

Para a trajetória  $ABDCA$ , as equações dinâmicas são novamente integradas com todos os parâmetros fixos no intervalo  $0 < \kappa t < 100$  até que o sistema atinja o estado estacionário. Então, no intervalo  $100 < \kappa t < 200$  a injeção é conduzida pela evolução unitária  $C(\omega t, 0)$  até atingir o pólo sul  $D$ , passando pelo ponto  $B$  no equador. Para voltarmos ao pólo norte por um caminho diferente, HWP1 deve ser rodado antes de HWP2 ser trazido de volta à sua orientação inicial. Como dissemos antes, esta operação com HPW1 não altera o modo injetado, mas introduz uma fase dinâmica que tem de ser compensada no final do processo. Portanto, para  $200 < \kappa t < 300$  a injeção segue a evolução unitária  $R(\omega t)$  até  $\omega t = \pi/2$ . Por último, no intervalo  $300 < \kappa t < 400$ , a injeção é levada de volta ao pólo norte pela ação da  $C(-\omega t, \pi/2)$ . O ciclo completo, que inclui um quarto da esfera de Poincaré, corresponde a um ângulo sólido  $\Omega = \pi$ . Conforme discutimos anteriormente, a fase dinâmica adquirida no pólo sul ainda deve ser compensada para que

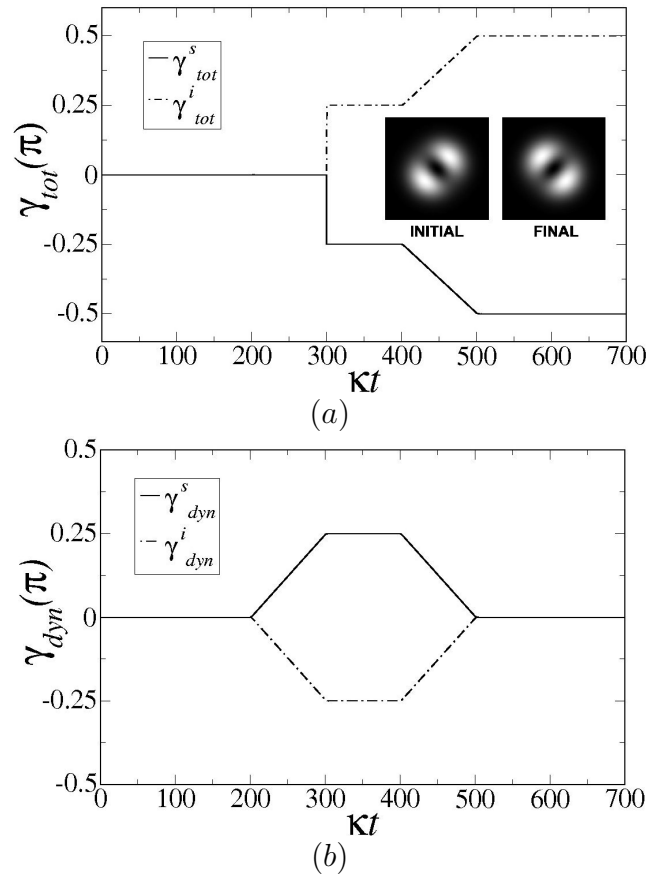


Figura 2.8: Em (a) mostramos a evolução das fases totais de sinal e complementar, também em unidades de  $\pi$ , calculadas a partir da integração numérica das equações dinâmicas. A inserção no gráfico mostra os padrões de interferência mútua calculados antes e depois da evolução cíclica ao longo do caminho ABDCA. Em (b) mostramos a evolução temporal das fases dinâmicas de sinal e complementar calculadas a partir da integração numérica das equações dinâmicas.

o resultado destas operações seja de fato somente uma fase geométrica. Através de uma nova rotação de HWP1 no mesmo sentido, que corresponde a uma última ação de  $R(\omega t)$ , até  $\omega t = \pi/2$  durante  $400 < \kappa t < 500$ , descontamos a fase dinâmica neste processo.

Na figura 2.8(a) mostramos a evolução temporal da fase total  $\gamma_{tot}^j$  para os campos sinal e complementar. Novamente a conjugação de fase está evidenciada pela simetria entre as duas curvas. A rotação correspondente no padrão de interferência na imagem inserida no gráfico em 2.8(a) também confirma este resultado. Na figura 2.8(b) mostramos a evolução da fase dinâmica. Nela podemos ver tanto o seu surgimento, durante o intervalo  $200 < \kappa t < 300$  quanto a sua compensação durante  $400 < \kappa t < 500$ , confirmando assim nossas expectativas.

### 3 *Ótica Quântica de Feixes com MAO*

"Insanidade é repetir as mesmas aes e esperar resultados diferentes"

Na maioria dos livros texto de ótica quântica é comum encontrarmos uma descrição do processo de quantização do campo eletromagnético baseada na decomposição do campo em uma base de ondas planas. No entanto, como o objetivo deste trabalho é estudar as propriedades de um OPO, é mais conveniente abordar a quantização do campo eletromagnético usando uma base de modos normais de uma cavidade ótica. É disso que tratará a seção 3.1, juntamente com alguns exemplos de estados do campo eletromagnético. em seguida de uma rápida descrição da conversão paramétrica descendente e da transferência de espectro angular da luz neste processo. Terminaremos este capítulo com a descrição, no contexto da transferência de espectro angular, de um experimento onde se mostrou a conservação do momento angular orbital da luz.

#### 3.1 Quantização dos Modos Espaciais do Campo Eletromagnético

O processo de quantização parte das equações de Maxwell na ausência de cargas e correntes livres [63, 64, 65]:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.4)$$

onde  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\mu_0$  a permeabilidade magnética e  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica, ambas do vácuo. Quando não há fontes (cargas e/ou correntes) as equações de Maxwell são invariantes sob transformações de calibre. No calibre de Coulomb,  $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$  ambos os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  podem ser determinados pelo potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  através das relações,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (3.5)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Introduzindo as equações (3.5) e (3.6) na equação (3.4), encontramos uma equação de onda para o potencial vetor,

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (3.7)$$

Podemos escrever o potencial vetor como uma soma de dois termos complexos,  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^+(\vec{r}, t) + \vec{A}^-(\vec{r}, t)$ , com  $(\vec{A}^-)^* = \vec{A}^+$ . Se fizermos uma separação de variáveis na equação de onda, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a parte temporal de  $\vec{A}^+$  é da forma  $e^{-i\omega t}$ . Como estamos lidando com um campo proveniente de uma cavidade ótica, cujo eixo de simetria está alinhado paralelamente ao eixo  $z$  de um sistema de coordenadas cartesiano, é possível decompor  $\vec{A}^+(\vec{r}, t)$  em termos dos modos normais desta cavidade,

$$\vec{A}^+(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, l, \sigma} \alpha_{\vec{k}, l, \sigma} \hat{e}_\sigma f_l(\vec{\rho}, z) e^{i(kz - \omega_k t)}. \quad (3.8)$$

A equação anterior é uma expansão em série de Fourier<sup>1</sup>, onde  $\alpha_{\vec{k}}$  são os coeficientes de Fourier<sup>2</sup>, a base de funções é dada por  $\hat{e}_\sigma f_l(\vec{\rho}, z) \exp[i(kz - \omega_k t)]$ ,  $\hat{e}_\sigma$  são os versores que representaram a polarização do campo e  $l$  é o conjunto de índices que caracterizam os modos da cavidade,  $f_l(\vec{\rho}, z)$ . Para propagação em regime paraxial podemos utilizar a família de modos de Laguerre-Gauss,

$$LG_{p,l} = \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(z)(p+|l|)!}} \left[ \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \times \quad (3.9)$$

$$\times \exp\left\{ i \left[ \frac{kr^2}{2R(z)} - (2p+|l|+1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) + l\phi \right] \right\}, \quad (3.10)$$

<sup>1</sup>Método comumente utilizado na Física matemática, leva o nome de seu inventor François Marie Charles Fourier (Besançon, 7 de Abril de 1772 – Paris, 10 de Outubro de 1837) [68].

<sup>2</sup>No espaço livre os coeficientes de Fourier são constantes.

ou a família de Hermite-Gauss,

$$HG_{n,m} = \frac{A_{n,m}}{w(z)} H_n \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_m \left( \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ i \left[ \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} - (n + m + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \right] \right\}. \quad (3.11)$$

Os modos da cavidade devem satisfazer a relação de completeza,

$$\sum_l f_l(\vec{\rho}, z) f_l(\vec{\rho}', z) = \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \quad (3.12)$$

e ortonormalidade,

$$\int d\vec{\rho} f_l^*(\vec{\rho}, z) f_{l'}(\vec{\rho}, z) = \delta_{ll'}. \quad (3.13)$$

Pelas equações 3.5 e 3.6 podemos escrever os campos elétrico e magnético como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}, l} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}\epsilon_0}} \left[ \hat{e}_\sigma a_{\vec{k}, l, \sigma}(t) f_l(\vec{\rho}, z) e^{ikz} - c.c \right], \quad (3.14)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}, l} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}\epsilon_0}} \left[ \frac{\vec{k} \times \hat{e}_\sigma}{|\vec{k}|} a_{\vec{k}, l, \sigma}(t) f_l(\vec{\rho}, z) e^{ikz} - c.c \right]. \quad (3.15)$$

onde  $a_{\vec{k}, l, \sigma}(t) = \alpha_{\vec{k}, l, \sigma} e^{-i\omega_{\vec{k}} t}$ .

O Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  do campo eletromagnético é dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[ \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 + \frac{|\vec{B}(\vec{r}, t)|^2}{\mu_0} \right]. \quad (3.16)$$

Se usarmos as relações de completeza e ortonormalidade expostas anteriormente, podemos re-escrevê-lo como

$$\mathcal{H} = 2 \sum_{\vec{k}, l, \sigma} \omega_{\vec{k}}^2 |a_{\vec{k}, l, \sigma}(t)|^2 \quad (3.17)$$

que expressa a energia do campo como uma soma sobre todos os modos.

Caminhando em direção à quantização do campo, seria interessante escrevermos  $\mathcal{H}$  em termos de variáveis canonicamente conjugadas  $q_{\vec{k}, l, \sigma}(t)$  e  $p_{\vec{k}, l, \sigma}(t)$ , definidas por

$$q_{\vec{k}, l, \sigma}(t) = \left[ a_{\vec{k}, l, \sigma}(t) + a_{\vec{k}, l, \sigma}^*(t) \right] \quad (3.18)$$

$$p_{\vec{k}, l, \sigma}(t) = -i\omega \left[ a_{\vec{k}, l, \sigma}(t) - a_{\vec{k}, l, \sigma}^*(t) \right], \quad (3.19)$$

o que nos leva a uma relação do tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} q_{\vec{k},l,\sigma}(t) = p_{\vec{k},l,\sigma}(t) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{\vec{k},l,\sigma}(t) = -\omega^2 q_{\vec{k},l,\sigma}(t). \quad (3.21)$$

Em termos destas novas variáveis, podemos escrever o Hamiltoniano do campo eletromagnético como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},l,\sigma} \left[ p_{\vec{k},l,\sigma}^2(t) + \omega^2 q_{\vec{k},l,\sigma}^2(t) \right]. \quad (3.22)$$

Este é o Hamiltoniano de um sistema de osciladores harmônicos independentes, um para cada modo do campo eletromagnético. Classicamente, o estado do campo pode ser completamente determinado pelo conjunto de variáveis  $(\{q_{\vec{k},l,\sigma}(t)\}, \{p_{\vec{k},l,\sigma}(t)\})$  e a sua dinâmica pelas equações de Hamilton<sup>3</sup> [69]

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\vec{k},l,\sigma}} = \frac{\partial q_{\vec{k},l,\sigma}}{\partial t}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{\vec{k},l,\sigma}} = -\frac{\partial p_{\vec{k},l,\sigma}}{\partial t}. \quad (3.24)$$

A quantização canônica consiste na aplicação do princípio da correspondência, que significa associar às variáveis dinâmicas operadores auto-adjuntos definidos em um espaço de Hilbert<sup>4</sup> [43, 65, 66]. Ao longo deste texto representaremos esses operadores no espaço de Hilbert com um chapéu em cima da variável dinâmica em questão. Assim  $\hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}$  e  $\hat{p}_{\vec{k},l,\sigma}$  são, respectivamente, os operadores associados às variáveis  $q_{\vec{k},l,\sigma}$  e  $p_{\vec{k},l,\sigma}$ . De acordo com os postulados da mecânica quântica, cada par de variáveis dinâmicas canonicamente conjugadas deve ter o seu comutador igual à  $i\hbar$ , enquanto operadores que representem modos distintos devem comutar. Sendo assim, podemos escrever as seguintes relações de comutação

$$\left[ \hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}(t), \hat{p}_{\vec{k}',l',\sigma'}(t) \right] = i\hbar \delta_{ll'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.25)$$

$$\left[ \hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}(t), \hat{q}_{\vec{k}',l',\sigma'}(t) \right] = 0, \quad (3.26)$$

$$\left[ \hat{p}_{\vec{k},l,\sigma}(t), \hat{p}_{\vec{k}',l',\sigma'}(t) \right] = 0. \quad (3.27)$$

Os postulados da mecânica quântica nos dizem que toda informação disponível a respeito de um sistema quântico está contida no seu vetor de estado  $|\psi\rangle$  e as grandezas físicas ob-

<sup>3</sup>Sir William Rowan Hamilton (4 de Agosto 1805 – 2 de Setembro 1865) [71].

<sup>4</sup>David Hilbert (Königsberg, 23 de janeiro de 1862 — Göttingen, 14 de fevereiro de 1943) [73].

serváveis são representadas por operadores auto-adjuntos, ambos definidos em um espaço de Hilbert. Os resultados da medida de um observável  $O$  será um dos autovalores do operador  $\hat{O}$ . Como o resultado de uma tal medida é incerto, apenas a probabilidade de se obter um dado resultado pode ser predita. O valor esperado da medida deste observável  $\hat{O}$  é dado pelo produto escalar do vetor  $\hat{O}|\psi\rangle$  com  $\langle\psi|$ , que é o Hermitiano conjugado do vetor de estado<sup>5</sup>, ou seja,  $\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$ . Apesar dos espectros de autovalores de  $\hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}(t)$  e  $\hat{p}_{\vec{k},l,\sigma}(t)$  serem contínuos, e consequentemente os de  $\hat{A}(\vec{r},t)$ ,  $\hat{E}(\vec{r},t)$  e  $\hat{B}(\vec{r},t)$  também o serem, veremos que o espectro de  $\hat{\mathcal{H}}$  é discreto.

Assim, o operador Hamiltoniano do campo eletromagnético é dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},l,\sigma} \left[ \hat{p}_{\vec{k},l,\sigma}^2(t) + \omega^2 \hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}^2(t) \right]. \quad (3.28)$$

Aqui é importante ressaltar dois pontos. O primeiro é que enquanto os operadores  $\hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}(t)$  e  $\hat{p}_{\vec{k},l,\sigma}(t)$ , e os operadores de campo  $\hat{A}(\vec{r},t)$ ,  $\hat{E}(\vec{r},t)$  e  $\hat{B}(\vec{r},t)$  são variáveis dinâmicas,  $\vec{r}$  e  $t$  são apenas parâmetros do sistema. O segundo é que a associação das variáveis dinâmicas clássicas a operadores em um espaço de Hilbert pode ser ambígua quando estes operadores não comutam. Não é muito claro se  $qp$  deve ser associado a  $\hat{q}\hat{p}$ ,  $\hat{p}\hat{q}$ ,  $(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})/2$  ou alguma outra forma. Contudo, não há ambiguidade no Hamiltoniano do campo eletromagnético escrito em termos dos operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$ .

Por razões operacionais, será mais conveniente lidarmos com operadores não-Hermitianos definidos por

$$\hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}(t) = \frac{1}{2\hbar\omega} \left[ \omega \hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}(t) + i \hat{p}_{\vec{k},l,\sigma}(t) \right], \quad (3.29)$$

$$\hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}^\dagger(t) = \frac{1}{2\hbar\omega} \left[ \omega \hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}(t) - i \hat{p}_{\vec{k},l,\sigma}(t) \right]. \quad (3.30)$$

Seus comutadores, obtidos através dos comutadores de  $\hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}(t)$  e  $\hat{p}_{\vec{k},l,\sigma}(t)$  (3.25,3.26,??), são

$$\left[ \hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}(t), \hat{a}_{\vec{k}',l',\sigma'}^\dagger(t) \right] = \delta_{ll'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.31)$$

$$\left[ \hat{q}_{\vec{k},l,\sigma}(t), \hat{a}_{\vec{k}',l',\sigma'}(t) \right] = 0, \quad (3.32)$$

$$\left[ \hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}^\dagger(t), \hat{a}_{\vec{k}',l',\sigma'}^\dagger(t) \right] = 0. \quad (3.33)$$

Ao olharmos as equações (3.18) e (3.19) é imediata a identificação entre os coeficientes de Fourier  $a_{\vec{k},l,\sigma}(t)$  e  $a_{\vec{k},l,\sigma}^*(t)$  e os operadores de criação e aniquilação  $\hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}(t)$  e  $\hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}^\dagger(t)$ ,

---

<sup>5</sup> $|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi|$ .

portanto é de se esperar que ambos, operadores e coeficientes de Fourier, possuam a mesma dependência temporal<sup>6</sup>,

$$\hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}(t) = \hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}(0)e^{-i\omega t} \quad e \quad \hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}^\dagger(t) = \hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}^\dagger(0)e^{-i\omega t}. \quad (3.34)$$

O que nos leva a concluir que o produto destes dois operadores, em qualquer ordem, é independente do tempo. Visto que não há ambiguidade no ordenamento dos operadores da expressão (3.28), podemos usá-la para obter o Hamiltoniano do campo em termos de  $\hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}(t)$  e  $\hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}^\dagger(t)$ .

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},l,\sigma} \hbar\omega \left[ \hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}^\dagger(t) \hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}(t) + \frac{1}{2} \right], \quad (3.35)$$

onde usamos o comutador (3.31) para escrever o operador Hamiltoniano em ordem normal<sup>7</sup>.

Aqui podemos identificar no fator  $\hbar\omega/2$  o primeiro indício da natureza quântica da radiação eletromagnética [74]. Comumente relacionado às flutuações de energia do vácuo, e diretamente ligado ao princípio da incerteza de Heisenberg<sup>8</sup>, este fator reflete o fato de que mesmo no estado fundamental o campo eletromagnético, assim como um oscilador harmônico, possui meio quantum de energia em cada um dos seus modos. Esta energia de ponto zero é responsável por muitos efeitos interessantes como o efeito Casimir, o deslocamento de Lamb e a emissão espontânea. Este último fenômeno é o elemento fundamental da conversão paramétrica descendente, o coração de um OPO, que pode ser interpretada como uma emissão estimulada pelas flutuações de vácuo [74]. Se não houver limite superior para as frequências do campo, a soma de todos esses termos diverge. Esta é uma das dificuldades da Eletrodinâmica Quântica, que até hoje não deu um significado físico satisfatório a essa questão. Esta energia infinita não pode ser detectada experimentalmente, já que os aparelhos de medida detectam apenas diferenças de energia a partir do estado fundamental do campo. Também é possível interpretar a energia de ponto zero como uma consequência da associação direta dos operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$  com as variáveis dinâmicas  $q$  e  $p$ , quando o único guia para isto é o princípio da correspondência. Este princípio exige que os resultados fornecidos pela teoria quântica correspondam à teoria clássica apenas no limite clássico, ou seja, quando os números quânticos do sistema são suficientemente grandes. Neste limite  $\hbar\omega/2$  pode ser desprezado frente ao valor de  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$  na

<sup>6</sup>Isto é válido na representação de Heisenberg.

<sup>7</sup>O ordenamento normal consiste em escrever, obedecendo as relações de comutação, os operadores de criação à esquerda e os operadores de aniquilação à direita.

<sup>8</sup>Werner Karl Heisenberg (Würzburg, 5 de Dezembro de 1901 — Munique, 1 de Fevereiro de 1976)[75].



equação (3.35), o que nos leva a re-escrever o Hamiltoniano como,

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, l, \sigma} \hbar \omega \left[ \hat{n}_{\vec{k}, l, \sigma}(t) \right] \quad (3.36)$$

onde  $\hat{n}_{\vec{k}, l, \sigma}(t) = \hat{a}_{\vec{k}, l, \sigma}^\dagger(t) \hat{a}_{\vec{k}, l, \sigma}(t)$  é conhecido como operador número, seus auto-valores corresponderem ao número de quanta de um determinado modo.

### 3.1.1 Estados de Fock

Os auto-estados do operador número são conhecidos como os estados de Fock<sup>9</sup> e formam uma base do espaço de estados do campo eletromagnético. Sua equação característica é dada por

$$\hat{n}_{\vec{k}, l, \sigma} |n_{\vec{k}, l, \sigma}\rangle = n_{\vec{k}, l, \sigma} |n_{\vec{k}, l, \sigma}\rangle, \quad (3.37)$$

onde cada modo  $\vec{k}, l, \sigma$  representa um subespaço vetorial do espaço de Hilbert do campo. O espaço de fase do sistema completo pode ser representado pelo produto tensorial de todos os auto-estados  $|n_{\vec{k}, s}\rangle$  do Hamiltoniano (3.36),

$$|\{n\}\rangle = \prod_{\vec{k}, l, \sigma}^{\otimes} |n_{\vec{k}, l, \sigma}\rangle, \quad (3.38)$$

onde  $\{n\} = n_{\vec{k}1, l1, \sigma1}, n_{\vec{k}2, l2, \sigma2}, n_{\vec{k}3, l3, \sigma3}, \dots$ . O estado em que todos os modos estão desocupados é o estado de vácuo  $|\{0\}\rangle = |vac\rangle$ . Com a ajuda do operador de criação  $\hat{a}_{\vec{k}, l, \sigma}^\dagger(t)$  podemos construir qualquer um dos estado de Fock através da expressão a seguir.

$$|\{n\}\rangle = \prod_{\vec{k}, l, \sigma}^{\otimes} \left[ \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n_{\vec{k}, l, \sigma}}}{\sqrt{n_{\vec{k}, l, \sigma}!}} \right] |vac\rangle. \quad (3.39)$$

Dado que os estados de Fock são uma base ortonormal, por serem simultaneamente auto-estados do operador número e do Hamiltoniano do campo, podemos representar quaisquer estados e operadores usando a sua relação de completza

$$\hat{\mathcal{I}} = \sum_{\{n\}} |\{n\}\rangle \langle \{n\}|. \quad (3.40)$$

e ortonormalidade

$$\langle \{n\} | \{m\} \rangle = \prod_{\vec{k}, l, \sigma} \delta_{n_{\vec{k}, l, \sigma}, m_{\vec{k}, l, \sigma}}. \quad (3.41)$$

---

<sup>9</sup>Vladimir Aleksandrovich Fock (22 de dezembro de 1898 à 27 de dezembro de 1974) físico russo com trabalhos fundamentais em mecânica quântica e eletrodinâmica quântica [76].

Tomemos como exemplo o operador densidade, que é o objeto apropriado para tratar sistemas que não podem ser descritos por um estado quântico puro, mas sim por uma mistura estatística<sup>10</sup> de estados quânticos  $|\psi_i\rangle$  com probabilidades  $p_i$ , ou seja,

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (3.42)$$

que é a média, no *ensemble* de estados  $|\psi_i\rangle$ , dos operadores de projeção. Para representarmos o operador densidade na base de Fock multiplicamos  $\hat{\rho}$ , em ambos os lados, pelo operador identidade (3.40), obtendo assim,

$$\hat{\rho} = \sum_{\{n\}} \sum_{\{m\}} \langle\{m\}|\hat{\rho}|\{n\}\rangle |\{m\}\rangle\langle\{n\}| \quad (3.43)$$

### 3.1.2 Estados Coerentes

Os estados coerentes surgiram no estudo do oscilador harmônico quântico por Schrödinger em 1926 [77], aos quais se referiu como estados de incerteza mínima. Porém foi com os trabalhos do também ganhador do prêmio Nobel Roy J. Glauber<sup>11</sup> [78, 79, 80, 81, 82, 83, 84] que a importância dos estados coerentes foi reconhecida para o tratamento quântico da coerência ótica. Estes estados são a representação mais próxima do comportamento clássico da luz. Eles são a maneira mais adequada de representar a luz produzida por fontes coerentes como lasers e osciladores paramétricos óticos.

A definição formal de um estado coerente é através do operador de aniquilação. Diz-se que um estado coerente é um auto-vetor à direita deste operador,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.44)$$

como  $\hat{a}_{\vec{k},l,\sigma}$  não é Hermitiano, os auto-valores  $\alpha_{\vec{k},l,\sigma}$  são em geral complexos. Não há uma prova formal da existência de estados não-triviais definidos por esta equação de auto-valores. No entanto, há uma descrição destes estados em termos dos estados de Fock,

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.45)$$

Note que se  $\alpha = 0$  obtemos o estado de vácuo e se  $\alpha \neq 0$  a probabilidade de encontrarmos

<sup>10</sup>Esta é a realidade na grande maioria dos casos, dificilmente lidamos com um sistema em um estado puro.

<sup>11</sup>O termo *estado coerente* é devido a ele.

$n$  fótons neste estado é

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (3.46)$$

que é uma distribuição de Poisson com parâmetro  $|\alpha|^2$ , ou seja, o número médio de fótons deste estado é igual a  $|\alpha|^2$ .

Também podemos gerar um estado coerente a partir de um estado de vácuo com o auxílio do operador deslocamento<sup>12</sup>  $D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ ,

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|vac\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|vac\rangle. \quad (3.47)$$

Se calcularmos a variância de um dado observável num estado de vácuo e num estado coerente, veremos que os resultados são iguais. Esta é a origem da nomenclatura *estado de incerteza mínima* citada anteriormente.

É sabido que os estados coerentes não são ortogonais entre si. Através do uso da sua representação em estados de Fock, equação (3.45), podemos obter,

$$|\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle| = e^{-|\alpha_1 - \alpha_2|^2}. \quad (3.48)$$

Apesar disto podemos usa-los como uma base para representar um estado quântico qualquer através do operador identidade  $\hat{\mathcal{I}}$  escrito em termos dos estados coerentes,

$$|\psi\rangle = \hat{\mathcal{I}}|\psi\rangle = \left[ \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha \right] |\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle d^2\alpha, \quad (3.49)$$

onde o domínio de integração se estende por todo o plano complexo.

Ao lidarmos com uma base não ortogonal precisamos tomar cuidado com a interpretação das projeções feitas através dos produtos escalares do tipo  $\langle\alpha|\psi\rangle$ . Lembremos que o produto escalar  $\langle n|\psi\rangle$  entre um estado  $|\psi\rangle$  e um estado de Fock  $|n\rangle$  é usualmente associado à amplitude de probabilidade de se encontrar  $n$  fótons no estado  $|\psi\rangle$ . Devido à ortogonalidade dos estados de Fock, as probabilidades  $|\langle n|\psi\rangle|^2$  para diferentes  $n$ 's é mutuamente excludente e normaizada à unidade. Já no caso dos estados coerentes, devido à sua não ortogonalidade, a probabilidade  $|\langle\alpha|\psi\rangle|^2$  não representa eventos mutuamente excludentes e não está normalizada à unidade,

$$\int |\langle\alpha|\psi\rangle|^2 d^2\alpha = \langle\psi|\left(\int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha\right)|\psi\rangle = \pi. \quad (3.50)$$

O fato da integral acima não ser normalizada implica na classificação da base de estados

---

<sup>12</sup>É fácil mostrar que o operador deslocamento é um operador unitário,  $D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = \hat{\mathcal{I}}$ , e que  $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha)$ .

coerentes como uma base *super-completa*. A segunda igualdade da equação anterior nos dá uma idéia do grau de recobrimento dos estados coerentes. Note que este recobrimento só é significativo para estados coerentes vizinhos, equação (3.48), estados coerentes associados a  $\alpha$ 's significativamente diferentes são praticamente ortogonais. Consequentemente  $|\langle \alpha | \psi \rangle|^2 d^2 \alpha$  associados a  $\alpha$ 's apreciavelmente diferentes fazem o papel de probabilidades mutuamente excludentes.

A relação de completeza dos estados coerentes

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha, \quad (3.51)$$

assim como no caso dos estados de Fock, também pode ser usada para representar um operador arbitrário  $\hat{A}$  do espaço de Hilbert do sistema. Por isso basta multiplicarmos, por ambos os lados, o operador identidade na base de estados coerentes,

$$\hat{A} = \frac{1}{\pi^2} \int \int \langle \alpha | \hat{A} | \alpha' \rangle |\alpha\rangle\langle\alpha'| d^2\alpha d^2\alpha'. \quad (3.52)$$

### 3.1.3 Estados Comprimidos

Os estados comprimidos são uma classe mais geral de estados de incerteza mínima. Nesses estados, sem violarmos o princípio de incerteza de Heisenberg, podemos ter a variância de um dado observável menor do que a que teríamos em um estado coerente.

Definindo as quadraturas de amplitude  $X$  e fase  $Y$  do campo eletromagnético como correspondentes às variáveis posição (parte real) e momento (parte imaginária) do oscilador harmônico, podemos escrever um modo do campo como

$$\vec{E}(t) = \mathcal{E}\hat{\epsilon}(ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) \quad (3.53)$$

$$= 2\mathcal{E}\hat{\epsilon} \left[ \hat{X} \cos(-i\omega t) + \hat{Y} \sin(i\omega t) \right], \quad (3.54)$$

onde,

$$\hat{X} = [\hat{a} + \hat{a}^\dagger] \quad (3.55)$$

$$\hat{Y} = -i[\hat{a} - \hat{a}^\dagger]. \quad (3.56)$$

As variâncias de  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$ , para estados coerentes, são  $(\Delta X)^2 = (\Delta Y)^2 = 1$ . Implicando na relação de incerteza  $\Delta X \Delta Y = 1$ . Se agora relaxarmos a exigência de que as variâncias devam ser iguais, permitindo por exemplo que  $\Delta X < 1 < \Delta Y$ , mantendo a relação de incerteza mínima, estaremos lidando com os *estados comprimidos*.

Processos paramétricos de 2<sup>a</sup> ordem são fontes de estados comprimidos [112]. Em termos dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$  um processo paramétrico degenerado deste tipo tem um Hamiltoniano de interação entre os campos, via meio não-linear, do tipo

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = i\hbar(\chi a^{\dagger 2} - \chi^* a^2), \quad (3.57)$$

onde  $\chi$  é proporcional à susceptibilidade do meio. A evolução temporal do sistema é obtida através da atuação do operador de evolução temporal sobre o seu estado inicial, assim, na representação de interação, teremos:

$$|\psi(t)\rangle = e^{(\chi a^{\dagger 2} - \chi^* a^2)t} |vac\rangle, \quad (3.58)$$

que nos leva à definir o operador unitário de compressão

$$S(\xi) = \exp \left[ \frac{1}{2} (\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2}) \right], \quad (3.59)$$

onde  $\xi = r e^{i\theta}$ ,  $r$  é chamado de parâmetro de compressão e  $\theta$  define a direção de compressão no espaço de fase do campo. A aplicação do teorema de Backer-Hausdorf [65] leva diretamente a

$$S^\dagger(\xi) a S(\xi) = a \cosh(r) - a^\dagger e^{i\theta} \sinh(r) \quad (3.60)$$

$$S^\dagger(\xi) a^\dagger S(\xi) = a^\dagger \cosh(r) - a e^{-i\theta} \sinh(r). \quad (3.61)$$

Se definirmos novas quadraturas,  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$ , rodadas em relação às antigas,  $X$  e  $Y$ , de  $\theta/2$ , teremos

$$\hat{Q} + i\hat{P} = (\hat{X} + i\hat{Y}) e^{-i\theta/2}, \quad (3.62)$$

e veremos que

$$S^\dagger(\xi)(\hat{Q} + i\hat{P})S(\xi) = \hat{Q} e^{-r} + i\hat{P} e^r. \quad (3.63)$$

Há basicamente três tipos de estados comprimidos. O vácuo comprimido

$$|\xi\rangle = S(\xi)|vac\rangle, \quad (3.64)$$

em que comprime-se o vácuo dando-lhe energia suficiente para que seu número médio de fótons seja  $\langle \hat{N} \rangle = \sinh^2 r$ .

O estado comprimido coerente

$$|\xi, \alpha\rangle = D(\alpha)S(\xi)|vac\rangle, \quad (3.65)$$

onde primeiro comprime-se o estado de vácuo, deslocando-o em seguida de modo que  $\langle \hat{N} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r$ .

E o estado coerente comprimido

$$|\alpha, \xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)|vac\rangle, \quad (3.66)$$

no qual comprime-se um estado coerente previamente deslocado do vácuo.

É possível mostrar que o valor esperado das variâncias de  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  são

$$\left(\Delta\hat{Q}\right) = e^{-2r}, \quad (3.67)$$

$$\left(\Delta\hat{P}\right) = e^{2r}. \quad (3.68)$$

Note que temos  $\Delta\hat{Q}\Delta\hat{P} = 1$  seja qual for o valor de  $r$ . A diferença entre estados coerentes e estados comprimidos é a forma da região de incerteza no espaço de fase. Enquanto os estados coerentes têm essa região simétrica, os estados comprimidos têm uma região de incerteza comprimida<sup>13</sup> em uma direção, e esticada na direção ortogonal à primeira, com uma área de incerteza igual para os dois estados, figura Referênciasfig:squeezed.

## Estados Comprimidos Multi-Modo

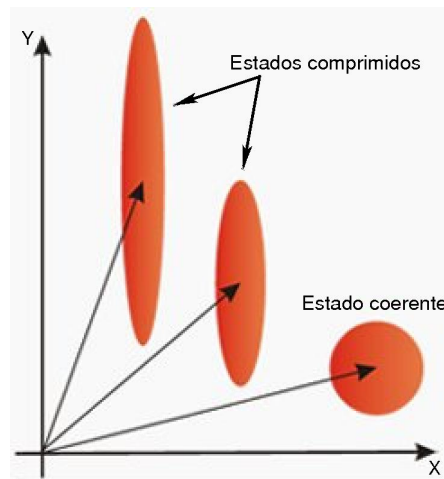
Quando temos um processo paramétrico não-degenerado, como no caso de um OPO com casamento de fase tipo II, o operador de compressão não é mais o apresentado anteriormente. Neste caso incluímos a correlação entre os modos através do produto dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$  dos pares correlacionados.

$$S(\xi) = \exp(\xi^* a_1 a_2 - \xi a_1^\dagger a_2^\dagger) \quad (3.69)$$

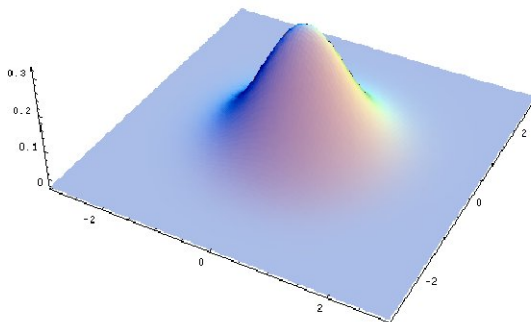
Como veremos mais adiante, feixes com MAO produzidos por tais processos apresentam fortes correlações espaciais.

---

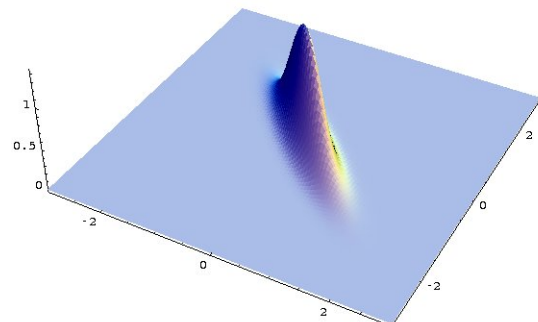
<sup>13</sup>Daí o nome *estados comprimidos*.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.1: (a) diferença, no espaço de fase, entre as regiões de incerteza geradas por estados comprimidos e estados coerentes. (b) exemplo de uma distribuição de quasi-probabilidade de um estado comprimido.

## 3.2 Conversão Paramétrica Descendente

Nesta seção apresentaremos a descrição quântica do processo paramétrico visto na seção 1.3. A conversão paramétrica descendente [85] consiste na geração simultânea de dois fótons de frequências  $\omega_s$  e  $\omega_i$  a partir de um fóton de frequência  $\omega_p$ . O processo está sujeito a dois vínculos, a conservação de energia  $\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i$  e a conservação do momento linear do fóton  $\hbar\vec{k}_p = \hbar\vec{k}_s + \hbar\vec{k}_i$ .

No jargão da Ótica Quântica a conservação do momento linear do fóton neste processo também é conhecida como condição de casamento de fase. Como mencionamos anteriormente, no casamento de fase tipo I as polarizações de sinal e complementar são iguais e ortogonais à do bombeamento, e no casamento de fase tipo II as polarizações de bombeamento e complementar são iguais e ortogonais à do sinal. A conservação do momento linear não fixa os valores individuais de  $\vec{k}_s$  e  $\vec{k}_i$ , isto gera um conjunto de cones de luz centrados na direção de propagação do feixe de bombeamento, na figura 3.2a vemos os cones do processo paramétrico do tipo I. O mesmo ocorre no processo do tipo II, porém como sinal e complementar têm polarizações ortogonais, a birrefringência do cristal separa os cones em dois conjuntos, um para cada polarização, figura 3.2b.

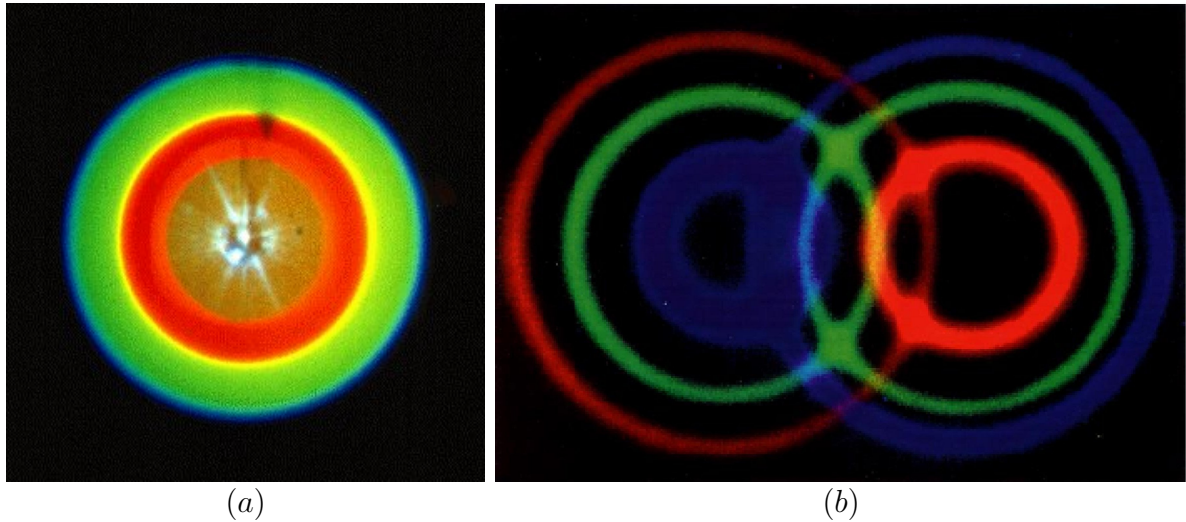


Figura 3.2: Representação dos cones de emissão espontânea de CPD. Em (a) vemos o cone de um casamento de fase tipo I e em (b) um casamento de fase tipo II.

A polarização não-linear do cristal até a segunda ordem é dada por [86]

$$P_i(\vec{r}, t) = \int \chi_{ijk}^{(1)}(t') E_j(\vec{r}, t - t') dt' + \int \int \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\vec{r}, t - t') E_k(\vec{r}, t - t'') dt' dt''. \quad (3.70)$$

A energia total do processo é dada pela soma da energia do campo livre com a energia



de interação entre os campos,

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (3.71)$$

onde a energia de interação não-linear, dentro de um cristal de volume  $V$ , é dada por

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{P}_{NL} d\vec{r} \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V d\vec{r} E_i(\vec{r}, t) \int \int \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\vec{r}, t - t') E_k(\vec{r}, t - t'') dt' dt''. \quad (3.73)$$

A dinâmica quântica do sistema é descrita pelo operador evolução temporal  $\hat{U}(t, t_0)$ . Na representação de interação este operador depende apenas do Hamiltoniano de interação, que por sua vez é proporcional à susceptibilidade de segunda ordem. Em geral  $\chi_{ijk}^{(2)}$  é muito pequena comparada à susceptibilidade de primeira ordem, isto nos permite dar um tratamento perturbativo à dinâmica do sistema, considerando a expansão do operador de evolução até a primeira ordem:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \hat{H}_I(\tau) \right\} |\psi(t_0)\rangle \approx \left[ 1 + \hat{U}_1(t, t_0) \right] |\psi(t_0)\rangle, \quad (3.74)$$

com

$$\hat{U}_1(t, t_0) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \hat{H}_I(\tau). \quad (3.75)$$

Como estamos supondo um  $\chi_{ijk}^{(2)}$  pequeno, é razoável supor que a eficiência do processo seja tal que o feixe de bombeamento praticamente não é afetado. Isto posto, se o estado inicial deste feixe for um estado coerente podemos substituir os operadores de aniquilação referentes ao feixe de bombeamento pelo seu *espectro angular*<sup>14</sup>  $\alpha(\vec{k}_p)$  na descrição da dinâmica do processo paramétrico [88]. Além disso, vamos supor também que na detecção dos feixes convertidos utilizaremos filtros de interferência de modo que os feixes poderão ser considerados monocromáticos, o que nos permite considerar  $\omega_p, \omega_s, \omega_i$  constantes. Levando em conta essas as aproximações, chegaremos ao vetor de estado que descreve o processo paramétrico descendente<sup>15</sup>.

$$|\psi(t)\rangle = \left[ \beta_0 + \beta_1 \int d\vec{k}_s \int d\vec{k}_i \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \frac{\text{sen} [(\omega_s + \omega_i - \omega_p)(t - t_0)/2]}{(\omega_s + \omega_i - \omega_0)/2} \hat{a}_{\vec{k}_s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_i}^\dagger \right] |vac\rangle, \quad (3.76)$$

<sup>14</sup>O espectro angular de um feixe é a transformada de Fourier da sua distribuição de amplitude.

<sup>15</sup>O leitor interessado nos pormenores da dedução da equação (3.76) é remetido às referências [87, 97].

onde  $|\beta_0|^2 \gg |\beta_1|^2$  e  $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  é dado pela expressão

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \int d\vec{k}_p \alpha(\vec{k}_p) \mathcal{E}(\omega_p) \mathcal{E}^*(\omega_s) \mathcal{E}^*(\omega_i) \prod_{m=x,y,z} \text{sinc} \left[ \left( \vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p \right)_m \frac{L_m}{2} \right], \quad (3.77)$$

onde  $\mathcal{E}(\omega) = i\sqrt{\hbar/2\epsilon_0\omega\vec{k}}$  e  $L_m$  são as dimensões do cristal.

No capítulo anterior vimos que, segundo a teoria clássica, o processo paramétrico não ocorre sem a participação de um segundo feixe. A expressão anterior mostra que mesmo iluminando o cristal com apenas o feixe de bombeamento é possível que dois novos feixes sejam gerados sem a participação de um feixe auxiliar. Dado que a eficiência do processo é baixa, no espaço livre este fenômeno só é observado no regime de contagens de fótons. Para melhorar a eficiência do processo podemos usar o feixe auxiliar como uma espécie de semente que estimula o processo de geração de fótons gêmeos. Num OPO, graças à retroalimentação fornecida pela cavidade, é possível gerar um fluxo macroscópico de fótons gêmeos, os feixes gêmeos, nos quais podemos medir correlações espaciais de intensidade e fase.

### 3.2.1 Transferência de Espectro Angular na Conversão Paramétrica Descendente Espontânea

Em 1998 C.H. Monken, P.H. Souto Ribeiro e S. Pádua [88] desenvolveram uma teoria capaz de dar conta das propriedades espaciais dos feixes gerados na CPD. Eles mostraram pela primeira vez que a informação contida no espectro angular do feixe de bombeamento pode ser transferida para as correlações espaciais de intensidade dos feixes convertidos. Desde então inúmeros trabalhos sobre o assunto vêm sendo publicados, [90, 91, 93, 94, 95, 96, 97]. Nesta seção apresentaremos breves descrições da teoria da transferência de espectro angular na CPD e de um trabalho [91] realizado em conjunto com o Laboratório de Ótica Quântica da Universidade federal do Rio de Janeiro [89] que versa sobre a conservação do momento angular orbital na conversão paramétrica descendente estimulada.

Os vetores de onda dos feixes envolvidos no processo de conversão paramétrica podem ser representados como uma soma de componentes transversas e longitudinais  $\vec{k} = \vec{q} + k_z \hat{z}$ . A monocromaticidade, garantida pelos filtros de interferência na frente dos detectores, nos permite assumir como constante a componente longitudinal  $\vec{k}_z$  dos vetores de onda. Se os feixes estiverem bem colimados,  $|\vec{q}| \ll |\vec{k}|$ , e considerarmos as dimensões transversais  $(L_x, L_y)$  do cristal muito maiores do que o inverso do módulo dos vetores de onda

transversais, e o contrário para  $L_z$  comparado aos vetores de onda longitudinais, as funções *sinc* contidas em  $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  podem ser aproximadas para,

$$\text{sinc} \left[ \left( \vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p \right)_j \frac{L_j}{2} \right] \approx \delta(\vec{q}_s + \vec{q}_i - \vec{q}_p) \quad j = x, y, \quad (3.78)$$

$$\text{sinc} \left[ \left( \vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p \right)_z \frac{L_z}{2} \right] \approx 1, \quad (3.79)$$

permitindo que a própria função  $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  possa ser escrita como

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \simeq \alpha(\vec{q}_s + \vec{q}_i). \quad (3.80)$$

Desta forma o estado dos fótons produzidos na CPD espontânea, equação (3.76) se reduz a [88],

$$|\psi\rangle = \beta_0 |vac\rangle + \beta'_1 \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_i \alpha(\vec{q}_s + \vec{q}_i) |1\rangle_{\vec{q}_s} |1\rangle_{\vec{q}_i}. \quad (3.81)$$

Podemos ver claramente na expressão anterior que o espectro angular do feixe de bombeamento é transferido para o estado quântico dos feixes convertidos. Além disso, se  $\alpha(\vec{q}_s + \vec{q}_i)$  não puder ser escrito como um produto de duas funções, uma relativa ao feixe sinal e outra relativa ao feixe complementar, dizemos que os feixes convertidos estão emaranhados.

Como a observação destes processos se dá no regime de contagem de fótons, precisamos olhar a taxa de coincidências entre os feixes convertidos para observarmos a transferência de espectro angular do feixe de bombeamento para os feixes sinal e complementar. Esta taxa de coincidências é proporcional à função de correlação de segunda ordem, que por sua vez é o produto das intensidades do feixe sinal e do feixe complementar em ordem normal. Escrevendo o operador campo elétrico como

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}) = \int d\vec{q} \hat{a}(\vec{q}) e^{i(\vec{q} \cdot \vec{\rho} + \sqrt{k^2 - q^2} z)}, \quad (3.82)$$

e lembrando que o espectro angular do feixe de bombeamento é a transformada de Fourier da sua distribuição de amplitude  $f(\vec{\rho})$ , podemos escrever a taxa de coincidências como

$$C(\vec{r}_s, \vec{r}_i) \propto \left| \int d\vec{\rho} f(\vec{\rho}) \exp \left( -i \frac{k_p}{2Z_0} |\vec{R} - \vec{\rho}|^2 \right) \right|^2, \quad (3.83)$$

onde

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{k_s}{k_p} \frac{1}{z_s} + \frac{k_i}{k_p} \frac{1}{z_i}. \quad (3.84)$$

e

$$\vec{R} = \frac{Z_0 k_s}{z_s k_p} \vec{\rho}_s + \frac{Z_0 k_c}{z_i k_b} \vec{\rho}_c. \quad (3.85)$$

A equação (3.83) descreve a propagação do perfil do feixe de bombeamento desde o plano do cristal até o plano  $z = Z_0$  onde estão os detectores, nos permitindo escrever

$$C(\vec{r}_s, \vec{r}_i) \propto \left| f(\vec{R}, Z_0) \right|^2, \quad (3.86)$$

que nada mais é do que a descrição da difração de Fresnel<sup>16</sup> [40, 98] desde o cristal até o plano dos detectores.

Vemos que qualquer modulação espacial de amplitude impressa no feixe de bombeamento, antes deste passar pelo cristal, será transmitida aos feixes sinal e complementar por intermédio da interação dentro do cristal.

### 3.2.2 Transferência de Espectro Angular na Conversão Paramétrica Descendente Estimulada

Na CPD espontânea apenas a soma das fases dos feixes convertidos está bem definida,  $\vec{k}_s + \vec{k}_i = \vec{k}_p$ , sendo a fase individual de cada um deles livre para difundir. Já no processo estimulado o feixe auxiliar, responsável pelo aumento da emissão de fótons gêmeos, transfere coerência [92, 102, 103] aos feixes convertidos. Apresentaremos aqui um trabalho feito em colaboração com o Laboratório de Ótica Quântica da UFRJ onde mostramos a transferência de momento angular orbital, tanto do feixe de bombeamento quanto do feixe auxiliar, para os feixes sinal e complementar assim como a conjugação de fase do feixe complementar [91]. Este trabalho não foi desenvolvido durante o período da tese, mas será apresentado aqui por questões de completeza e por sua relação com os trabalhos que compõem o corpo da tese.

O primeiro experimento a testar a conservação de MAO na conversão paramétrica descendente [100] verificou que se observássemos os fótons individualmente, em consequência da difusão de fase dos feixes convertidos, não havia conservação de MAO. Somente quando olhamos as correlações de segunda ordem (coincidências) é que observamos a transferência e conservação do momento angular orbital entre os feixes envolvidos no processo [101]. Na referência [96] vemos que isto é uma implicação direta da transferência de espectro angular do feixe de bombeamento para os feixes convertidos através da interação paramétrica dentro do cristal.

---

<sup>16</sup>Augustin-Jean Fresnel (Broglie, 10 de Maio 1788 – Ville-d’Avray, 14 de Julho 1827)

Fazendo as mesmas considerações feitas no tratamento da CPD espontânea, considerando agora um campo adicional  $E_s$  em perfeito casamento de modo e frequência com o feixe sinal, podemos escrever o estado final do processo paramétrico como [102]

$$|\psi\rangle = \alpha|vac\rangle + \beta \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_i \alpha_p(\vec{q}_s + \vec{q}_i) |1\rangle_{\vec{q}_i} \hat{a}_s^\dagger |\alpha_s(q_s)\rangle, \quad (3.87)$$

onde  $\alpha_s(q_s)$  é o espectro angular do feixe auxiliar.

De posse do estado da equação (3.87) podemos calcular a intensidade do feixe complementar na posição  $\vec{r}_i$ ,

$$I(\vec{r}_i) = \langle \psi | \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_i) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_c) | \psi \rangle. \quad (3.88)$$

Seguindo o procedimento utilizado para o caso espontâneo, obtemos [93] uma intensidade dada por,

$$I(\vec{r}_i) \propto \int d\vec{\rho} |f_p(\vec{\rho})|^2 + \left| \int d\vec{\rho} f_p(\vec{\rho}) f_s^*(\vec{\rho}) \exp\left(i\frac{k_c}{2z}|\vec{\rho}_i - \vec{\rho}|^2\right) \right|^2. \quad (3.89)$$

A primeira parcela da equação anterior refere-se ao processo espontâneo, que depende apenas do perfil de intensidade do feixe de bombeamento no plano do cristal. A segunda parcela representa a contribuição do processo estimulado, dependendo das distribuições de amplitude do feixe de bombeamento e do complexo conjugado da distribuição de amplitude do feixe auxiliar. Além de ter a sua taxa de geração aumentada, as propriedades transversais do feixe complementar também são afetadas pela atuação do feixe auxiliar, no limite de Fraunhofer<sup>17</sup> [40, 104] seu espectro angular é a convolução dos espectros angulares dos feixes de bombeamento e auxiliar.

Em geral o perfil transversal de amplitudes dos feixes envolvidos na CPD tem uma envoltória gaussiana. Se os feixes bombeamento e auxiliar tiverem seus diâmetros muito diferentes, podemos considerar constante o de maior diâmetro deixando no integrando da equação (3.89) apenas o feixe de menor diâmetro. Se supormos que a distribuição de amplitudes do feixe auxiliar é constante frente a do feixe de bombeamento, teremos

$$I(\vec{r}_i) \propto \left| \int d\vec{\rho} f_p(\vec{\rho}) e^{i\left(|\vec{\rho}_i - \vec{\rho}|^2 \frac{k_i}{2z}\right)} \right|^2, \quad (3.90)$$

se o contrário for feito,

$$I(\vec{r}_i) \propto \left| \int d\vec{\rho} f_s^*(\vec{\rho}) e^{i\left(|\vec{\rho}_i - \vec{\rho}|^2 \frac{k_i}{2z}\right)} \right|^2. \quad (3.91)$$

---

<sup>17</sup>Joseph von Fraunhofer (Straubing na Bavaria, 6 de Março de 1787 – Munique, 7 de Junho de 1826)

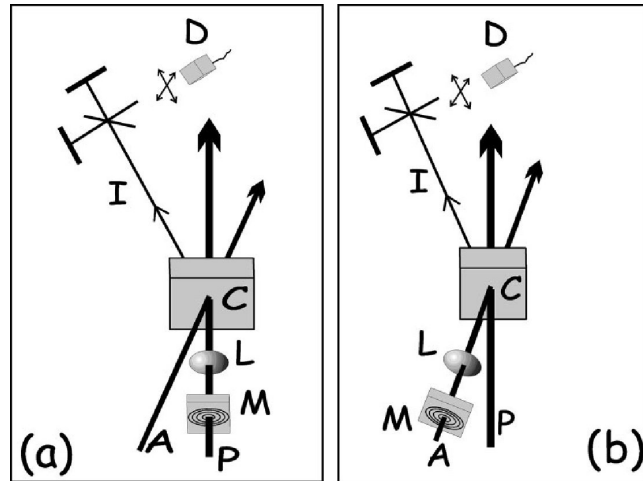


Figura 3.3: Produção do modo de Laguerre-Gauss. Em (a) no feixe de bombeamento e em (b) no feixe auxiliar.

Em ambos os casos desprezamos a contribuição do processo espontâneo por esta ser muito menor do que a contribuição do processo estimulado. Vemos que, nos dois casos, a distribuição de intensidade do feixe complementar é dada pelo perfil de intensidade propagado ora do feixe de bombeamento, ora do feixe auxiliar. Note que no caso em que fizemos  $f_p(\vec{\rho})$  constante temos a propagação do complexo conjugado da distribuição de amplitude do feixe auxiliar, que é a manifestação da conjugação de fase inerente ao processo [91].

As medidas de transferência de MAO foram feitas com um cristal de  $\beta$ -Borato de Bário (BBO) com  $3mm$  de espessura, cortado para fornecer um casamento de fase tipo II. Para o bombeamento foi utilizado um laser de He-Cd com  $200 mW$  de potência, operando em regime contínuo com um comprimento de onda de  $442 nm$ . O comprimento de onda dos feixes sinal e complementar, numa operação não-degenerada, era de  $845 nm$  e  $925 nm$ , respectivamente. Como feixe auxiliar foi utilizado um laser de diodo, CW, operando em torno de  $845 nm$  com potência de  $150 mW$  e polarização vertical, a mesma do feixe sinal.

Utilizando o método holográfico descrito na seção 1.2.6 preparamos os feixes no modo  $LG_0^{+1}$  e via interferometria medimos a helicidade  $l$  dos feixes. Na figura 3.3 temos o esquema de preparação dos modos  $LG$  tanto no feixe de bombeamento quando no feixe auxiliar. O feixe complementar é enviado para um interferômetro de Michelson para a observação de sua helicidade. Obstruindo-se um dos braços medimos o perfil de intensidade do feixe. Quando bombeávamos o cristal com o modo  $LG$  observávamos, no feixe complementar, o perfil de intensidade mostrado na figura 3.4a). No caso em que o feixe auxiliar estava no modo  $LG$  observávamos o perfil de intensidade da figura 3.4b). Em ambos os casos o feixe complementar possuía o perfil de intensidade de um modo Laguerre-Gauss.

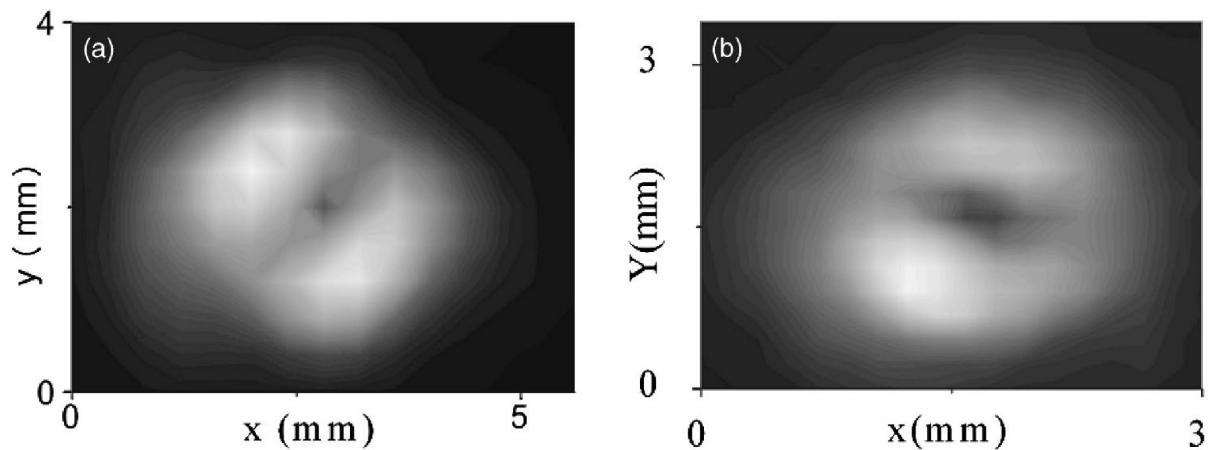


Figura 3.4: Perfil de intensidade do feixe complementar quando, a) o bombeamento é preparado no modo de Laguerre, e b) o feixe auxiliar é preparado no modo de Laguerre.

Com o feixe de bombeamento preparado no modo  $LG_0^{+1}$  obtivemos o padrão de interferência mostrado na figura 3.5a), observamos que a helicidade do feixe complementar tem módulo 1, e a mesma configuração de bifurcações obtidas na interferência do feixe de bombeamento, quando este estava no modo  $LG_0^{+1}$ . Podemos, portanto, concluir que o MAO foi transferido do bombeamento para o complementar. Quando preparamos o feixe auxiliar no modo  $LG_0^{+1}$ , observamos os resultados mostrados na figura 3.5b). Nesta configuração observamos um padrão de interferência diferente. A disposição das bifurcações está invertida, com a bifurcação da esquerda apontando para cima, enquanto a bifurcação da direita aponta para baixo. Isto nos leva a concluir que  $l_i = -1$ .

Vemos que em ambos os casos os resultados indicam que os feixes obedecem ao vínculo

$$l_p = l_s + l_i, \quad (3.92)$$

indicando que o MAO foi conservado.

As figuras 3.5c) e 3.5d) foram tratadas em um software de tratamento de imagens, a partir dos dados brutos detectados, com o objetivo de facilitar a sua comparação com as simulações mostradas em 3.5e) e 3.5f). As simulações da auto-interferência dos modos  $LG_0^{+1}$  e  $LG_0^{-1}$  confirmam a conservação do MAO.

A baixa visibilidade das imagens obtidas pode ser explicada pela existência de diversas fontes de ruído no laboratório. Dentre as que mais prejudicaram os resultados destacamos o longo tempo necessário para se obter as imagens. Como trabalhávamos no regime de contagem de fótons, precisávamos percorrer uma matriz  $20 \times 20$  para gerar as figuras 3.5a) e 3.5b). Gastando 10 segundos em cada ponto, levávamos pouco mais do que 1

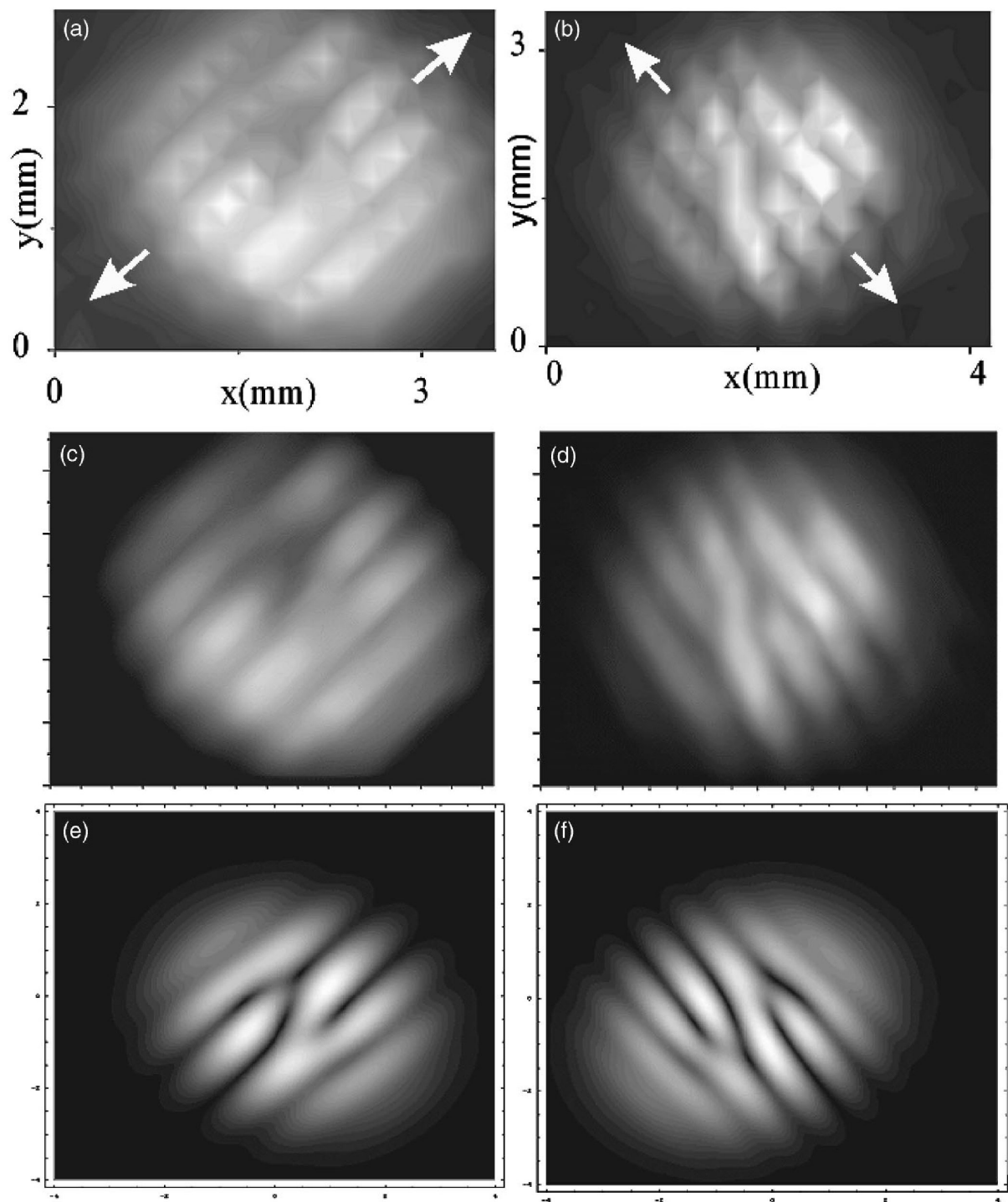


Figura 3.5: Interferência do feixe complementar. a) bombeamento operando no modo de  $LG$ , b) Auxiliar operando no modo de  $LG$ . Em c) e d) reproduzimos, respectivamente a) e b) com tratamento de imagem para melhor visualização. e) e f) são simulações teóricas par os casos a) e b).



hora para percorrer toda a matriz. Mesmo tomando o cuidado para que não houvesse desalinhamentos acidentais, flutuações térmicas do laboratório podem ter gerado uma flutuação na fase do interferômetro.

A conservação do momento angular orbital também pode ser interpretada como uma consequência da conjugação de fase que ocorre na conversão paramétrica estimulada [91]. É fácil ver, pela equação (1.65) e pela figura ??, que um modo  $LG_0^{-1}$  corresponde à conjugação da fase azimutal de um modo  $LG_0^{+1}$ .

## 4 *Teoria Quântica dos Osciladores Paramétricos Óticos*

"O sonho de um careta é a realidade de um maluco."

*(Bob Marley)*

Muitos experimentos da ótica quântica empregam cavidades óticas para aumentar os campos envolvidos<sup>1</sup>. Em sistemas isolados a evolução temporal é descrita pelo Hamiltoniano total do sistema, contudo mesmo uma cavidade com um alto fator de qualidade não é capaz de isolar a dinâmica que ocorre em seu interior do ambiente externo. Os espelhos, por serem imperfeitos, acoplam os modos do campo eletromagnético dentro da cavidade com o seu exterior e é este acoplamento o responsável tanto pelo escoamento de energia de dentro da cavidade quanto pela inserção de flutuações do ambiente externo para dentro da cavidade. Por outro lado, no sistema em que estamos interessados, o OPO, este acoplamento é tipicamente fraco quando comparado aos acoplamentos que ocorrem dentro da cavidade. Veremos a seguir que estes dois regimes dinâmicos distintos são ingredientes fundamentais para o tratamento quântico do OPO apresentado aqui.

### 4.1 Dinâmica de Sistemas Quânticos Dissipativos

O oscilador harmônico quântico amortecido e o decaimento espontâneo de um átomo excitado são dois dos pilares da ótica quântica. O segundo está na base da conversão paramétrica descendente, vista no capítulo anterior. A partir do primeiro, o oscilador amortecido, descreve-se a dinâmica de um modo do campo eletromagnético em uma cavidade com espelhos imperfeitos. Em ambos, a dissipação desempenha um papel fundamental.

---

<sup>1</sup>A importância da utilização de cavidades na geração de estados quânticos pode ser ilustrada na conversão paramétrica descendente. Para se obter um estado comprimido intenso podemos aumentar a não-linearidade do meio responsável pela criação dos pares de fótons. Se o meio não-linear for colocado dentro de uma cavidade com um alto fator de qualidade, os fótons convertidos irão estimular o processo, aumentando o acoplamento não-linear mesmo que a susceptibilidade de segunda ordem seja pequena.

Em geral modela-se a dissipação de um sistema através do acoplamento deste com um reservatório que possui muitos graus de liberdade, do qual se tem apenas uma descrição estatística. Há muitas técnicas para se tratar sistemas quânticos dissipativos, nesta seção apresentaremos um resumo da teoria quântica da dissipação baseada no operador densidade na representação de interação.

Para modelar a interação do sistema  $S$  com o reservatório em equilíbrio térmico  $R$  partiremos do Hamiltoniano total

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \quad (4.1)$$

onde  $\hat{H}_S$  e  $\hat{H}_R$  são os Hamiltonianos de  $S$  e  $R$ , respectivamente, e  $H_{SR}$  o Hamiltoniano de interação. Na representação de interação, a equação de movimento do operador densidade total,  $\hat{\rho}_{SR}$ , é dada pela equação de von Neumann<sup>2</sup>:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SR}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[ \hat{H}_{SR}(t), \hat{\rho}_{SR}(t) \right]. \quad (4.2)$$

Esta equação pode ser integrada formalmente para obtermos,

$$\hat{\rho}_{SR}(t) = \hat{\rho}_{SR}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left[ \hat{H}_{SR}(t'), \hat{\rho}_{SR}(t') \right]. \quad (4.3)$$

Nada impede que iteremos a equação anterior para obter uma série recursiva de Dyson<sup>3</sup>, porém, como dito no início deste capítulo, a interação através dos espelhos entre o OPO e o ambiente fora da cavidade é fraca. Isto nos permite escrever o operador densidade total como  $\hat{\rho}_{SR}(t) = \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_R(0) + O(\hat{H}_{SR})$ . Truncando a série após o termo de primeira ordem estaremos fazendo uma aproximação conhecida como aproximação de Born<sup>4</sup>.

Como  $R$  está em equilíbrio térmico e possui muitos graus de liberdade, existirão duas escalas de tempo bastante distintas na dinâmica do sistema conjunto: uma escala de tempo lenta para a dinâmica do sistema  $S$ , e uma escala de tempo rápida que domina o decaimento das funções de correlação do reservatório. Portanto, é de se esperar que as mudanças imprimidas em  $R$  por  $S$  sejam rapidamente apagadas. Este é o mecanismo por trás da aproximação de Markov<sup>5</sup>, a qual nos permite substituir  $\hat{\rho}_{SR}(t')$  por  $\hat{\rho}_{SR}(t)$  na equação de movimento do operador densidade do sistema completo.

<sup>2</sup>John von Neumann (28 de dezembro de 1903, Budapest – 8 de fevereiro de 1957, Washington D.C.) [105].

<sup>3</sup>Freeman John Dyson (15 de dezembro de 1923, Crowthorne, Berkshire) [108].

<sup>4</sup>Max Born (11 de dezembro de 1882, Breslau — 5 de janeiro de 1970, Göttingen) [106]. [109]

<sup>5</sup>Andrei Andreyevich Markov (14 de Junho de 1856, Ryazan, Rússia - 20 de Julho de 1922, São Petersburgo, Rússia) [107].

Assumindo que a interação é ligada no instante  $t = 0$  e que não há correlações entre  $S$  e  $R$  até este instante, o operador densidade total pode ser fatorado, em  $t = 0$ , da forma  $\hat{\rho}_{SR}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_R(0)$ . Como estamos interessados somente na dinâmica do OPO, precisamos tomar o traço parcial de  $\hat{\rho}_{SR}$  em relação às variáveis de  $R$  para obtemos a Equação Mestra do sistema para  $\hat{\rho}_S$ ,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2}Tr_R \int_0^t dt' \left[ \hat{H}_{SR}(t), \left[ \hat{H}_{SR}(t'), \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_R(0) \right] \right]. \quad (4.4)$$

A equação anterior é um resultado geral<sup>6</sup> para qualquer sistema quântico dissipativo que satisfaça as hipóteses acima. Como estamos interessados em descrever a dinâmica dos campos de um oscilador paramétrico ótico,  $\hat{H}_S$  é a soma do Hamiltoniano do campo eletromagnético no espaço livre, equação (3.36), com o Hamiltoniano que descreve a interação dos campos com o cristal não-linear. Na aproximação de onda girante<sup>7</sup> [65], podemos escrevê-lo como

$$\hat{H}_S(t) = \sum_{j=p,s,i} \hbar\omega_j \hat{a}_j^\dagger(t) \hat{a}_j(t) + i\hbar\chi \left( \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_p - \hat{a}_s \hat{a}_i \hat{a}_p^\dagger \right) + i\hbar \left( \mathcal{E}_{in} e^{-i\omega_p t} \hat{a}_p^\dagger - \mathcal{E}_{in}^* e^{i\omega_p t} \hat{a}_p \right), \quad (4.5)$$

onde  $\chi$  leva em conta a não-linearidade do cristal e as integrais de recobrimento, e a parcela contendo  $\mathcal{E}_{in}$  dá conta da injeção de energia, através do modo de bombeamento, para dentro da cavidade.

Para o tratamento da dinâmica do OPO é conveniente modelarmos o reservatório como sendo um conjunto de osciladores harmônicos em equilíbrio térmico. Sendo assim, seu Hamiltoniano é dado por

$$\hat{H}_R(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar\omega_j \hat{r}_j^\dagger(t) \hat{r}_j(t), \quad (4.6)$$

onde  $\omega_j$ ,  $\hat{r}_j$  e  $\hat{r}_j^\dagger$  são, respectivamente, a frequência, o operador de aniquilação e o operador de criação do modo  $j$  do reservatório. Como vamos supor que o reservatório está em equilíbrio térmico, seu estado físico, dado pelo operador densidade  $\hat{\rho}_R(t)$ , deve ser descrito

<sup>6</sup>Para uma discussão mais detalhada da dedução da equação anterior, o leitor é remetido ao Capítulo 1 da referência [109].

<sup>7</sup>A aproximação de onda girante é uma aproximação usada em óptica atômica e ressonância magnética. Nesta aproximação, os termos de um Hamiltoniano que oscilam rapidamente são desprezados. Esta aproximação é válida quando a frequência do campo eletromagnético aplicada esta próxima da frequência de ressonância atômica e intensidade do campo aplicado é baixa.

pelo operador térmico [112]

$$\hat{\rho}_R = \prod_{\vec{k}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{k_B T}\right) \right] \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{\vec{k}} \hat{r}_{\vec{k}}^\dagger \hat{r}_{\vec{k}}}{k_B T}\right), \quad (4.7)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann<sup>8</sup> e  $T$  é medido em Kelvins<sup>9</sup>. O número médio de fótons de tal estado é dado pela distribuição de Bose<sup>10</sup>. Supondo que a temperatura típica de um laboratório seja  $T = 293K$ , é fácil mostrar que, nesta temperatura, o número médio de fótons térmicos na faixa do infravermelho próximo ( $\lambda = 1000nm$ ) é praticamente zero.

Por fim resta definir como é a interação do OPO com o reservatório. Essa interação é dada por um Hamiltoniano de troca,

$$\hat{H}_{SR}(t) = \sum_{j=p,s,i} \hbar \left[ \hat{a}_j(t) \hat{\Gamma}_j^\dagger(t) + \hat{a}_j^\dagger(t) \hat{\Gamma}_j(t) \right], \quad (4.8)$$

onde  $\Gamma_j(t) = \sum_n g_{j,n} \hat{r}_n(t)$  são os operadores do reservatório e  $g_{j,n}$  as constantes de acoplamento entre o reservatório e os campos produzidos pelo OPO.

Como há muitos graus de liberdade no reservatório, podemos considerar que ele possui um contínuo de modos, descritos por uma densidade de modos<sup>11</sup>  $\eta(\omega)$ , e escrever a equação de movimento do operador densidade dos campos  $p$ ,  $s$  e  $i$ , adotando a convenção de soma sobre índices repetidos, como,

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S}{\partial t} = \gamma_j \left( 2\hat{a}_j \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \right) + \chi \left[ \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_p - \hat{a}_s \hat{a}_i \hat{a}_p^\dagger, \hat{\rho} \right] + \mathcal{E} \left[ \hat{a}_p^\dagger - \hat{a}_p, \hat{\rho} \right]. \quad (4.9)$$

onde  $\gamma_j = \eta^2(\omega) g_j^2(\omega)$  tem o mesmo papel da taxa de decaimento calculada na descrição clássica do OPO no Capítulo 1. Uma vez que o número de médio de fótons térmicos na faixa de comprimento de onda de interesse é praticamente nulo, consideramos  $T = 0$  na equação anterior.

## 4.2 Mapeamento no Espaço de Fase

Na mecânica clássica, podemos associar a dinâmica de um sistema à dinâmica de uma distribuição que evolui no espaço de fase. Para um sistema com um único grau de liberdade, o espaço de fase é constituído de duas variáveis conjugadas, tais como posição

<sup>8</sup>Ludwig Eduard Boltzmann (20 de Fevereiro de 1844 em Viena — 5 de Setembro de 1906 em Duino, Itália) [113]

<sup>9</sup>William Thomson, 1º barão Kelvin, (26 de junho de 1824 – 17 de dezembro de 1907).

<sup>10</sup>Satyendra Nath Bose (Calcutá, Índia, 1 de Janeiro de 1894 - 4 de Fevereiro de 1974) [111].

<sup>11</sup>Esta densidade de modos surge quando substituímos  $\sum_n \rightarrow \int \frac{d\omega}{2\pi} \eta(\omega)$  e  $g_{j,n} \rightarrow g_j(\omega)$  na definição de  $\Gamma_j(t)$ .

e momento, no caso de uma partícula em uma dimensão. Na Mecânica Quântica, no entanto, o princípio da incerteza de Heisenberg torna delicada a noção de espaço de fase de um sistema porque uma partícula não pode ter posição e momento simultaneamente determinados. No entanto, existe uma abordagem "tipo" espaço de fase na Mecânica Quântica, onde funções distribuições de quasiprobabilidade desempenham um papel análogo ao das distribuições do espaço de fase clássico.

A utilidade destas distribuições não se limita a uma mera ferramenta que facilita os cálculos, elas também podem fornecer *insights* sobre a conexão entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Clássica, pois nos permitem expressar as médias quânticas em uma forma bastante similar às clássicas. Classicamente, a média de uma função  $A(q, p)$  da posição e do momento linear de um sistema de partículas é calculado por

$$\langle A \rangle_C = \int dq \int dp A(q, p) P_C(q, p), \quad (4.10)$$

onde  $P_C(q, p)$  é a distribuição de propabilidades do sistema e as integrações se estendem por todo o espaço de fase. Já num sistema quântico as médias em geral são calculadas com o auxílio do operador densidade

$$\langle A \rangle_Q = Tr(\hat{A}\hat{\rho}), \quad (4.11)$$

onde o operador  $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$  corresponde<sup>12</sup> à função clássica da posição e do momento. Dada a regra de correspondência entre as variáveis clássicas e os operadores quânticos, podemos definir uma uma função de quasiprobabilidade  $P_Q(q, p)$  e reescrever a equação anterior como,

$$\langle A \rangle_Q = \int dq \int dp A(q, p) P_Q(q, p). \quad (4.12)$$

A primeira distribuição de quasiprobabilidade foi proposta por Wigner<sup>13</sup> [116] no intuito de reformular a Mecânica Quântica de Schrödinger descrevendo os estados no espaço de configurações. Apesar de ter sido proposta num contexto não relativístico, a distribuição de Wigner se presta a inúmeras aplicações na Ótica Quântica, na Química Quântica e, é claro, também na Mecânica Estatística [117]. Diversas distribuições de quasiprobabilidade foram propostas no contexto da Ótica Quântica, sendo a  $P$  de Glauber [79] e Sudarshan<sup>14</sup> [119] a mais difundida de todas, exibindo invariância relativística.

Muitas outras distribuições foram propostas no contexto da Ótica Quântica, onde a

<sup>12</sup>É importante lembrar que tal regra de correspondência não está definida de maneira única.

<sup>13</sup>Eugene Paul Wigner (Budapeste, 17 de Novembro de 1902 — Princeton, 1 de Janeiro de 1995) [115].

<sup>14</sup>Ennackal Chandu George Sudarshan (16 de setembro, 1931, Pallam, Kerala, Índia) [118].

diferença entre elas repousa no ordenamento dos operadores de criação e aniquilação. As distribuições  $P$  se propõem a calcular médias em ordem normal, a de Wigner em ordem simétrica e a  $Q$  de Husimi [127] em ordem anti-normal. As distribuições quânticas no espaço de fase apresentam características bem diferentes das distribuições clássicas. Por exemplo, a função de Wigner pode assumir valores negativos e a  $P$  de Glauber-Sudarshan pode ser singular. Apesar da distribuição  $Q$  ser sempre positiva, ela nem sempre fornece uma representação do operador densidade cujos autovalores fornecidos sejam maiores ou iguais a zero. É comum associar a estes comportamentos "patológicos" estados genuinamente quânticos. Em particular utiliza-se a  $P$  de Glauber-Sudarshan como um divisor entre "os mundos" clássico e quântico, classificando como clássicos os estados em que esta distribuição é positiva e bem comportada. Em contrapartida, a distribuição  $P$  – *positiva* proposta por Drummond, Gardiner e Walls [120, 121] se propõe a sempre fornecer um operador densidade positivo semi-definido.

As distribuições de quasiprobabilidade, da mesma maneira que suas análogas clássicas, também podem ser usadas como uma alternativa para descrever a dinâmica do sistema quântico. Após a escolha da regra de correspondência entre as variáveis clássicas e os operadores quânticos podemos converter a equação (4.4) em uma equação de movimento para a distribuição de quasiprobabilidade no espaço de fase. Introduzindo a notação  $\mathcal{P}_\zeta$  para representar  $P_Q$ , onde  $-1 \leq \zeta \leq 1$  define o ordenamento dos operadores;  $\zeta = 1$  corresponde ao ordenamento normal e portanto às distribuições  $P$ ,  $\zeta = 0$  ao ordenamento simétrico (distribuição de Wigner) e  $\zeta = -1$  ao ordenamento anti-simétrico (Husimi). Baseados neste formalismo, podemos estabelecer a seguinte regra de correspondência para os produtos entre os operadores de campo e o operador densidade [122, 123]:

$$\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \longleftrightarrow \left( \alpha^* + \frac{1-\zeta}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \mathcal{P}_\zeta(\alpha, \alpha^*) \quad (4.13)$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{\rho} \longleftrightarrow \left( \alpha^* - \frac{1+\zeta}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \mathcal{P}_\zeta(\alpha, \alpha^*) \quad (4.14)$$

$$\hat{\rho}\hat{a} \longleftrightarrow \left( \alpha - \frac{1+\zeta}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \mathcal{P}_\zeta(\alpha, \alpha^*) \quad (4.15)$$

$$\hat{a}\hat{\rho} \longleftrightarrow \left( \alpha + \frac{1-\zeta}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \mathcal{P}_\zeta(\alpha, \alpha^*). \quad (4.16)$$

No caso da distribuição  $P$  – *positiva* devemos substituir  $\alpha^*$  por uma outra amplitude complexa  $\alpha^+$  independente de  $\alpha$  [120, 121].

Seguindo o procedimento anterior, que esta contido na referência [126], chegaremos à

seguinte equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_\zeta(\vec{\alpha}, t) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \alpha_i} A(\vec{\alpha}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} D_{ij}(\vec{\alpha}, t) - \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} O_{ijk}(\vec{\alpha}, t) + \dots \right] \mathcal{P}_\zeta(\vec{\alpha}, t), \quad (4.17)$$

que é análoga à expansão de Kramers-Moyal para a equação mestra clássica. No caso em que esta equação se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_\zeta(\vec{\alpha}, t) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \alpha_i} A_i(\vec{\alpha}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} D_{ij}(\vec{\alpha}, t) \right] \mathcal{P}_\zeta(\vec{\alpha}, t), \quad (4.18)$$

com uma matriz  $\mathbf{D}$  positiva definida, obtemos a equação de Fokker-Planck [124]. Os termos com derivadas parciais de primeira ordem são associados a forças de arraste,  $\mathbf{A}$  é chamada de matriz de arraste, e os termos com derivadas parciais de segunda ordem são associados à difusão do sistema, onde  $\mathbf{D}$  é chamada de matriz de difusão. Em geral o arraste determina a evolução da parte determinística do sistema,  $\langle \alpha \rangle$ , enquanto que a difusão dita a dinâmica das correlações do sistema. A solução de uma equação de Fokker-Planck é uma função positiva [125] e portanto pode ser associada com uma função densidade de probabilidade bem definida no espaço dos  $\alpha$ 's. Existem muitos métodos para se encontrar sua solução [124], em particular quando tivermos um arraste linear e uma matriz de difusão constante, a solução será uma Gaussiana.

Ao abordarmos a dinâmica do OPO nos capítulos subsequentes, exploraremos a conexão entre a equação de Fokker-Planck (EFP) para  $\mathcal{P}_\zeta$  e as equações diferenciais estocásticas para as amplitudes complexas  $\alpha$  [126], dadas por

$$d\alpha_j = A_j(\vec{\alpha}, t) dt + B_{jk}(\vec{\alpha}, t) dW_k(t), \quad (4.19)$$

onde  $\mathbf{B}$  é tal que  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{D}$ , e  $d\mathbf{W}$  são incrementos de Wiener<sup>15</sup> que representam ruídos gaussianos.

### 4.3 As Equações dinâmicas do OPO

Consideraremos um OPO com três modos, como descrito no Capítulo 1, com frequências  $\omega_p$ ,  $\omega_s$  e  $\omega_i$ , onde, pela conservação da energia,  $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ , bombeado por um campo externo,  $\mathcal{E}_p$ , com frequência  $\omega_p$ . Como vimos na seção anterior, seu Hamiltoniano (4.1) dá origem à equação mestra (4.4). Para garantir que encontremos uma EFP genuína

<sup>15</sup>Também conhecidos como processos de Wiener, ou movimento Browniano, são um caso particular do processo de Markov.



<sup>16</sup> usaremos a representação  $P - positiva$ , que expande o espaço de fase do sistema para seis variáveis independentes,  $\alpha_j$  e  $\alpha_j^+ \neq \alpha_j^*$ . Assim a EFP que descreve a dinâmica do OPO é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_p} [i\omega_p \alpha_p + \gamma_p \alpha_p + \chi \alpha_s \alpha_i - \mathcal{E}_p e^{-i\omega_p t}] + \frac{\partial}{\partial \alpha_p^+} [-i\omega_p \alpha_p^+ + \gamma_p \alpha_p^+ + \chi \alpha_s^+ \alpha_i^+ - \mathcal{E}_p^* e^{i\omega_p t}] \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_s} [i\omega_s \alpha_s + \gamma_s \alpha_s - \chi \alpha_p \alpha_i^+ - \mathcal{E}_s e^{-i\omega_s t}] + \frac{\partial}{\partial \alpha_s^+} [-i\omega_s \alpha_s^+ + \gamma_s \alpha_s^+ - \chi \alpha_p^+ \alpha_i - \mathcal{E}_s^* e^{-i\omega_s t}] \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_i} [i\omega_i \alpha_i + \gamma_i \alpha_i - \chi \alpha_p \alpha_s^+] + \frac{\partial}{\partial \alpha_i^+} [-i\omega_i \alpha_i^+ + \gamma_i \alpha_i^+ - \chi \alpha_p^+ \alpha_s] \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_s \partial \alpha_i} (\chi \alpha_p) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_s^+ \partial \alpha_i^+} (\chi \alpha_p^+) \right\} P(\alpha, \alpha^+, t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde os  $\gamma_i$  representam as taxas de decaimento da cavidade para cada frequência.

De posse de uma EFP genuína, podemos seguir o procedimento contido na referência [126] e chegar às equações estocásticas de Itô que descrevem a dinâmica das amplitudes complexas:

$$\begin{aligned} d\alpha_p &= (\mathcal{E}_p - \gamma_p \alpha_p - \chi \alpha_s \alpha_i) dt \\ d\alpha_p^+ &= (\mathcal{E}_p^* - \gamma_p \alpha_p^+ - \chi \alpha_s^+ \alpha_i^+) dt \\ d\alpha_s &= (-\gamma_s \alpha_s + \chi \alpha_i^+ \alpha_p) dt + (\chi \alpha_p)^{1/2} dW_s \\ d\alpha_s^+ &= (-\gamma_s \alpha_s^+ + \chi \alpha_i \alpha_p^+) dt + (\chi \alpha_p^+)^{1/2} dW_s^+ \\ d\alpha_i &= (-\gamma_i \alpha_i + \chi \alpha_s^+ \alpha_p) dt + (\chi \alpha_p)^{1/2} dW_i \\ d\alpha_i^+ &= (-\gamma_i \alpha_i^+ + \chi \alpha_s \alpha_p^+) dt + (\chi \alpha_p^+)^{1/2} dW_i^+, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde os incrementos de Wiener devem satisfazer às condições abaixo:

$$\begin{aligned} \overline{dW_s} = \overline{dW_i} = \overline{dW_s dW_s} = \overline{dW_i dW_i} &= 0, \\ \overline{dW_s dW_i} = \overline{dW_s^+ dW_i^+} &= dt, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde  $dW$  obedece a uma estatística Gaussiana e a barra superior indica a média.

Note que estas equações são muito parecidas com as equações (1.121) obtidas no tratamento clássico do OPO. De fato, se tomarmos as médias das equações (4.21), levando em conta as (4.22), vamos obter exatamente as equações (1.121), como era de se esperar. Os termos de ruído que aparecem nas equações (4.21) representam as flutuações do vácuo responsáveis pela conversão paramétrica descendente espontânea que ocorre no cristal

---

<sup>16</sup>Equação em que as ordens das derivadas espaciais vão somente até segunda ordem e sua matriz de difusão é uma matriz positiva semi-definida.

não-linear.

No próximo capítulo abordaremos um trabalho realizado no grupo de Ótica Quântica da UFF utilizando o formalismo descrito neste capítulo.

## 5 *Dinâmica Quântica de um Oscilador Paramétrico Ótico com Injeção de Sinal*

"R's vezes os melhores nadadores morrem afogados e os melhores cavaleiros caem dos cavalos."

*(Provérbio chinês)*

Neste capítulo vamos descrever um trabalho teórico [129] desenvolvido durante o período da tese dentro do grupo de Ótica Quântica da UFF. Analisaremos a dinâmica quântica de um OPO não degenerado quando injetamos um feixe auxiliar, de mesma frequência e comprimento de onda do feixe sinal, dentro da cavidade. A partir das equações de movimento completas, na representação  $P$ -positiva, fizemos as análises do regime estacionário e do ruído quântico através de uma expansão perturbativa que nos permitiu encontrar soluções analíticas, tanto no regime clássico quanto no regime quântico. Com este tratamento, encontramos regimes de operação em que os feixes produzidos pelo OPO eram relativamente intensos e mostravam correlações quânticas do tipo EPR.

### 5.1 Equações de Movimento e Série Perturbativa

Acrescentando o termo de injeção<sup>1</sup> no Hamiltoniano (4.1), podemos facilmente deduzir o conjunto de equações de Itô-Langevin para o OPO com sinal injetado seguindo o

---

<sup>1</sup>O termo de injeção tem a mesma forma do termo que representa o bombeamento do OPO na equação (4.1).

formalismo apresentado no capítulo 4 (4.21):

$$\begin{aligned}
d\alpha_p &= (\mathcal{E}_p - \gamma_p \alpha_p - \chi \alpha_s \alpha_i) dt \\
d\alpha_p^+ &= (\mathcal{E}_p^* - \gamma_p \alpha_p^+ - \chi \alpha_s^+ \alpha_i^+) dt \\
d\alpha_s &= (\mathcal{E}_s - \gamma \alpha_s + \chi \alpha_i^+ \alpha_p) dt + (\chi \alpha_p)^{1/2} dW_s \\
d\alpha_s^+ &= (\mathcal{E}_s^* - \gamma \alpha_s^+ + \chi \alpha_i \alpha_p^+) dt + (\chi \alpha_p^+)^{1/2} dW_s^+ \\
d\alpha_i &= (-\gamma \alpha_i + \chi \alpha_s^+ \alpha_p) dt + (\chi \alpha_p)^{1/2} dW_i \\
d\alpha_i^+ &= (-\gamma \alpha_i^+ + \chi \alpha_s \alpha_p^+) dt + (\chi \alpha_p^+)^{1/2} dW_i^+, \tag{5.1}
\end{aligned}$$

onde os incrementos de Wiener satisfazem as mesmas condições (4.22). Como estamos interessados em campos eletromagnéticos com frequências próximas (quasi-degenerados), podemos considerar  $\gamma_i = \gamma_s = \gamma$ , arbitrar  $\mathcal{E}_p$  como real e considerar uma fase relativa  $\phi$  entre  $E_p$  e  $\mathcal{E}_s$ . Como estamos considerando que todos os modos estão em ressonância com a cavidade, se definirmos as quadraturas de amplitude e fase dos campos como

$$\begin{aligned}
X_j &= (e^{-i\theta_j} \alpha_j + e^{i\theta_j} \alpha_j^+) \\
Y_j &= \frac{1}{i} (e^{-i\theta_j} \alpha_j - e^{i\theta_j} \alpha_j^+) , \quad j = p, s, i , \tag{5.2}
\end{aligned}$$

com  $\theta_p = 0$ ,  $\theta_s = \phi$  and  $\theta_i = -\phi$ , podemos considerar reais os modos de bombeamento e sinal.

Se quisermos estudar a dinâmica do OPO em termos dos objetos acessíveis experimentalmente, é conveniente escrevermos suas equações de movimento em termos das quadraturas dos campos. Antes porém, vamos redefinir os parâmetros do sistema. Chamaremos de  $\gamma_r = \gamma_p/\gamma$  a razão entre as taxas de decaimento da cavidade e reescalonaremos o tempo em função da taxa de decaimento dos feixes convertidos,  $\tau = \gamma t$ . De posse destes novos parâmetros, podemos definir um novo conjunto de quadraturas:

$$\begin{aligned}
x_p &= g \sqrt{2\gamma_r} X_p & , & & y_p &= g \sqrt{2\gamma_r} Y_p, \\
x_j &= g X_j & , & & y_j &= g Y_j, \quad (j = s, i) , \tag{5.3}
\end{aligned}$$

onde  $g = \chi/(\gamma\sqrt{2\gamma_r})$  é um parâmetro adimensional.

As equações de movimento para as novas quadraturas são as seguintes:

$$\begin{aligned}
dx_p &= -\gamma_r [x_p - 2\mu_p + (x_s x_i - y_s y_i)] d\tau, \\
dy_p &= -\gamma_r [y_p + (x_s y_i + y_s x_i)] d\tau, \\
dx_s &= \left[ -x_s + 2\mu_s + \frac{1}{2} (x_p x_i + y_p y_i) \right] d\tau + \frac{g}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{x_p + iy_p} dw_s + \sqrt{x_p - iy_p} dw_s^+ \right], \\
dy_s &= \left[ -y_s + \frac{1}{2} (x_i y_p - y_i x_p) \right] d\tau - i \frac{g}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{x_p + iy_p} dw_s - \sqrt{x_p - iy_p} dw_s^+ \right], \\
dx_i &= \left[ -x_i + \frac{1}{2} (x_p x_s + y_p y_s) \right] d\tau + \frac{g}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{x_p + iy_p} dw_i + \sqrt{x_p - iy_p} dw_i^+ \right], \\
dy_i &= \left[ -y_i + \frac{1}{2} (x_s y_p - y_s x_p) \right] d\tau - i \frac{g}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{x_p + iy_p} dw_i - \sqrt{x_p - iy_p} dw_i^+ \right], \quad (5.4)
\end{aligned}$$

onde  $\mu_p = E_p \chi / (\gamma \gamma_p)$  e  $\mu_s = E_s \chi / (\gamma \sqrt{\gamma \gamma_p})$  são os termos de bombeamento e injeção, e  $dw_p = \sqrt{2\gamma} dW_p$  e  $dw_j = e^{-i\phi} \sqrt{\gamma} dW_j$  (com  $j = s, i$ ) os novos incrementos de Wiener. Para o OPO padrão, sem injeção,  $\mu_p = 1$  indica o limiar para oscilação,  $E_p = \gamma \gamma_p / \chi$ . Embora não haja mais um limiar bem definido devido à presença do sinal injetado, por questões de praticidade continuaremos usando este jargão quando nos referirmos ao regime de operação do OPO.

Escrevendo as equações de movimento nestas novas variáveis é possível procurar soluções através de uma série perturbativa tendo  $g$  como parâmetro de expansão [130, 131]:

$$\begin{aligned}
x_j &= \sum_{n=0}^{\infty} g^n x_j^{(n)}, \\
y_j &= \sum_{n=0}^{\infty} g^n y_j^{(n)}, \quad (5.5)
\end{aligned}$$

onde  $j = p, s, i$ .

Esta técnica é conhecida como *método dos diagramas estocásticos* [130]. Como o próprio nome diz, introduzindo formalmente esta expansão nas equações de movimento (5.4) é possível identificar uma hierarquia quando agrupamos termos de mesma potência em  $g$ . Conforme a ordem vai aumentando, vemos que as ordens superiores dependem das soluções das ordens inferiores. A solução de ordem zero são as equações clássicas (1.121) do OPO e a primeira ordem as equações de movimento das flutuações em torno dos valores médios. Estas últimas também são conhecidas como *as equações linearizadas do OPO*. E por fim, as ordens superiores são correções não-lineares para as flutuações.

## 5.2 Soluções Estacionárias para as Quadraturas de Amplitude

Como dito anteriormente, para estudarmos as propriedades quânticas do OPO através de uma abordagem perturbativa, precisamos primeiro encontrar as soluções estacionárias para as suas equações clássicas. Em termos das variáveis reescaladas, este problema se resume a encontrar a solução do sistema não-linear algébrico de equações a seguir:

$$\begin{aligned} 0 &= x_p^{(0)} + x_s^{(0)} x_i^{(0)} - 2\mu_p, \\ 0 &= -x_s^{(0)} + \frac{1}{2} x_p^{(0)} x_i^{(0)} + 2\mu_s, \\ 0 &= -x_i^{(0)} + \frac{1}{2} x_p^{(0)} x_s^{(0)}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde  $y_p^{(0)} = y_s^{(0)} = y_i^{(0)} = 0$  em consequência das transformações feitas em (5.2) e porque o termo de bombeamento do OPO é real.

Podemos encontrar facilmente as soluções para  $x_s^{(0)}$  e  $x_i^{(0)}$  em função de  $x_p^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} x_s^{(0)} &= \frac{8\mu_s}{(2 - x_p^{(0)})(2 + x_p^{(0)})} \\ x_i^{(0)} &= \frac{4\mu_s x_p^{(0)}}{(2 - x_p^{(0)})(2 + x_p^{(0)})}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Já no caso de  $x_p^{(0)}$ , as soluções serão a interseção entre o polinômio de quinta ordem e uma função linear,  $P_5(x) = f(x)$ , ou seja

$$(2\mu_p - x) \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)^2 = 2\mu_s^2 x. \quad (5.8)$$

Note que se  $\mu_s = 0$  obtemos as soluções estacionárias do OPO sem injeção,  $x_p^{(0)} = 2\mu_p$  para o regime abaixo do limiar e  $x_p^{(0)} = \pm 2$  para o regime acima do limiar.

Segundo a Teoria de Galois<sup>2</sup> [132], não existe uma fórmula para as raízes de uma equação polinomial de quinta ordem (ou maior) em termos dos coeficientes do polinômio, usando somente as operações algébricas usuais<sup>3</sup> e a aplicação de radicais<sup>4</sup>. Para contornarmos esta dificuldade, vamos procurar as soluções aproximadas para os regimes abaixo ( $\mu_p < 1$ ), acima ( $\mu_p > 1$ ) e no limiar ( $\mu_p = 1$ ).

<sup>2</sup>Évarist Galois (Bourg-la-Reine, 25 de outubro de 1811 - Paris, 31 de maio de 1832).

<sup>3</sup>Adição, subtração, multiplicação, divisão.

<sup>4</sup>Raízes quadradas, cúbicas, etc.

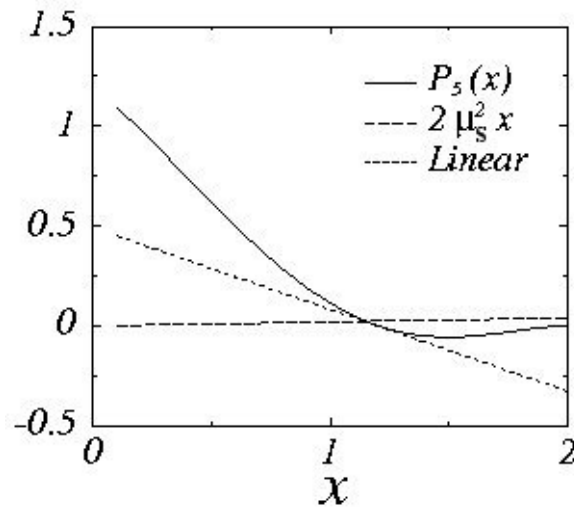


Figura 5.1: Podemos ver que a aproximação linear no regime abaixo do limiar é bastante satisfatória. Nesta figura  $\mu_p = 0,6$  e  $\mu_s = 0,2$ .

Ao analisarmos graficamente o comportamento das soluções da equação  $P_5(x) = f(x)$  em função de  $\mu_p$  vimos que, abaixo do limiar, seria possível substituir  $P_5(x)$  por uma aproximação linear a partir da sua expansão em série de Taylor em torno de  $x = 2\mu_p$ , figura 5.1.

A análise gráfica para o regime acima do limiar indicava que uma aproximação quadrática seria o mais adequado, novamente expandimos  $P_5(x)$  em série de Taylor, porém agora em torno de  $x = 2$  que é o valor estacionário de  $x_p$  para o caso não injetado, figura 5.2.

A interseção entre a aproximação linear de  $P_5(x)$  e a função  $f(x) = 2\mu_s x$  nos forneceu a seguinte solução estacionária para  $x_p^{(0)}$ :

$$x_p^{(0)} = 2\mu_p \left[ 1 - \frac{2\mu_s^2}{(1 - \mu_p^2)^2 + 2\mu_s^2} \right]. \quad (5.9)$$

Para o regime acima do limiar, onde aproximamos  $P_5(x)$  pela parábola mostrada na figura 5.2, obtivemos duas soluções estacionárias para  $x_p^{(0)}$ ,

$$x_p^{(0)} = 2 \pm \frac{\mu_s^2}{2(\mu_p - 1)} \left[ \sqrt{1 + \frac{8(\mu_p - 1)}{\mu_s^2}} - 1 \right], \quad (5.10)$$

A análise de estabilidade feita no Apêndice B mostra que apenas uma destas soluções, a com o sinal negativo, é estável.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, no limiar aproximamos  $P_5(x)$  por um polinô-

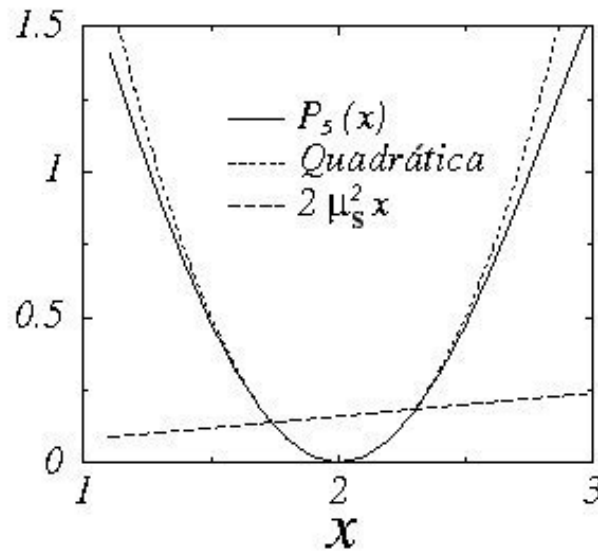


Figura 5.2: Vemos que a aproximação quadrática neste regime,  $\mu_p = 2$  e  $\mu_s = 0,2$ , é praticamente indistinguível de  $P_5(x)$ .

mio de grau 3 e calculamos o valor estacionário de  $x_p^{(0)}$ , porém, para nossa surpresa, a aproximação de quarta ordem forneceu uma expressão extremamente simples para  $x_p^{(0)}$  no limiar.

$$x_p^{(0)} = 2 - (2\mu_s)^{2/3}. \quad (5.11)$$

A figura 5.3 mostra a interseção entre a solução quártica com a reta  $f(x)$  e a interseção que fornece a solução estacionária exata.

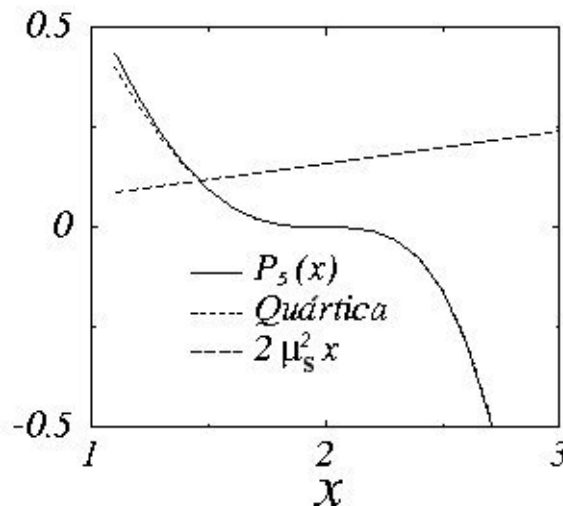


Figura 5.3: Vemos que a diferença entre as duas interseções é praticamente nula.

Na figura 5.4 comparamos as soluções estacionárias aproximadas para a quadratura de amplitude do modo de bombeamento com a solução numérica obtida através da integração



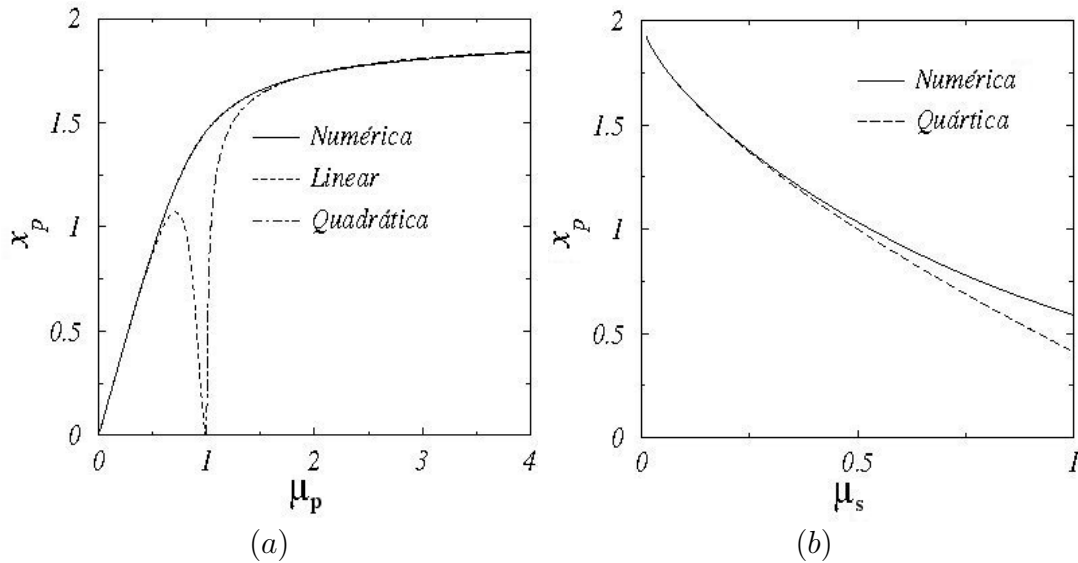


Figura 5.4: Em (a) vemos a quadratura de amplitude do modo de bombeamento,  $x_p^{(0)}$ , em função do parâmetro de bombeamento  $\mu_p$  enquanto o parâmetro de injeção era mantido constante ( $\mu_s = 0, 2$ ). Em (b) mostramos a mesma quadratura agora em função de  $\mu_s$  no limiar ( $\mu_p = 1$ ).

das equações de movimento clássicas. As soluções aproximadas para a quadratura  $x_p^{(0)}$ , vistas na figura 5.4(a), mostram uma excelente concordância com os resultados numéricos dentro dos respectivos regimes de aproximação. Note que não há mais uma transição abrupta no limiar como ocorre no OPO não injetado. Ao invés deste comportamento, observamos que o valor estacionário de  $x_p^{(0)}$  se aproxima assintoticamente de 2, o valor estacionário para o caso não injetado. Já na figura 5.4(b) comparamos a aproximação quártica no limiar ( $\mu_p = 1$ ) com a solução numérica da equação (5.8). A concordância é muito boa para valores do parâmetro de injeção até quase  $\mu_p/4$ .

### 5.3 Flutuações Quânticas, Correlações e Espectros de Ruído

De posse das soluções clássicas estacionárias, podemos agora obter as equações dinâmicas para a ordem seguinte da série perturbativa (5.5). As equações para as flutuações

são,

$$\begin{aligned}
dx_p^{(1)} &= -\gamma_r \left[ x_p^{(1)} + x_s^{(0)} x_i^{(1)} + x_i^{(0)} x_s^{(1)} \right] d\tau, \\
dy_p^{(1)} &= -\gamma_r \left[ y_p^{(1)} + x_s^{(0)} y_i^{(1)} + x_i^{(0)} y_s^{(1)} \right] d\tau, \\
dx_s^{(1)} &= \left[ -x_s^{(1)} + \frac{1}{2} x_p^{(0)} x_i^{(1)} + \frac{1}{2} x_i^{(0)} x_p^{(1)} \right] d\tau + \sqrt{x_p^{(0)}} dw_{xs}, \\
dy_s^{(1)} &= \left[ -y_s^{(1)} + \frac{1}{2} x_i^{(0)} y_p^{(1)} - \frac{1}{2} x_p^{(0)} y_i^{(1)} \right] d\tau - i\sqrt{x_p^{(0)}} dw_{ys}, \\
dx_i^{(1)} &= \left[ -x_i^{(1)} + \frac{1}{2} x_p^{(0)} x_s^{(1)} + \frac{1}{2} x_s^{(0)} x_p^{(1)} \right] d\tau + \sqrt{x_p^{(0)}} dw_{xi}, \\
dy_i^{(1)} &= \left[ -y_i^{(1)} + \frac{1}{2} x_s^{(0)} y_p^{(1)} - \frac{1}{2} x_p^{(0)} y_s^{(1)} \right] d\tau - i\sqrt{x_p^{(0)}} dw_{yi},
\end{aligned} \tag{5.12}$$

onde:

$$dw_{x_j}(\tau) = \frac{dw_j(\tau) + dw_j^+(\tau)}{\sqrt{2}}, \tag{5.13}$$

$$dw_{y_j}(\tau) = \frac{dw_j(\tau) - dw_j^+(\tau)}{\sqrt{2}}, \tag{5.14}$$

com  $j = s, i$  e correlações dadas por  $\langle dw_{j_s} dw_{j'_i} \rangle = \delta_{jj'} d\tau$ .

Experimentalmente as quantidades de interesse são os espectros dos ruídos fora da cavidade. Portanto é interessante analisarmos o problema no espaço de frequências, através da transformada de Fourier dos ruídos. Para tal utilizaremos as forças de Langevin  $\xi(\tau)$  definidas de modo que  $dw_\lambda(\tau) = \xi_\lambda(\tau) d\tau$  ( $\lambda = x_s, x_i, y_s, y_i$ ).

Definindo a transformada de Fourier como

$$\tilde{f}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\Omega\tau} f(\tau), \tag{5.15}$$

as forças de Langevin, no espaço de frequências,  $\xi_j(\Omega)$ , terão médias e correlações dadas por

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\xi}_{x_j}(\Omega) \rangle &= \langle \tilde{\xi}_{y_j}(\Omega) \rangle = 0 \\
\langle \tilde{\xi}_{n_s}(\Omega) \tilde{\xi}_{n'_i}(\Omega') \rangle &= \delta_{nn'} \delta(\Omega + \Omega'), \quad \text{com } n = x, y.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Devido à linearidade do sistema de equações para os ruídos, ele pode ser facilmente

resolvido no espaço de frequências. Tomando a transformada de Fourier de (5.12), obtemos

$$\begin{aligned}
(\gamma_r + i\Omega)\tilde{x}_p(\Omega) &= x_j^{(0)}\tilde{x}_{j'}(\Omega) + x_{j'}^{(0)}\tilde{x}_j(\Omega) \\
(\gamma_r + i\Omega)\tilde{y}_p(\Omega) &= x_j^{(0)}\tilde{y}_{j'}(\Omega) + x_{j'}^{(0)}\tilde{y}_j(\Omega) \\
(1 + i\Omega)\tilde{x}_j(\Omega) &= \frac{1}{2} \left[ x_p^{(0)}\tilde{x}_{j'}(\Omega) + x_{j'}^{(0)}\tilde{x}_p(\Omega) \right] + \sqrt{x_p^{(0)}}\tilde{\xi}_{xj}(\Omega) \\
(1 + i\Omega)\tilde{y}_j(\Omega) &= \frac{1}{2} \left[ x_{j'}^{(0)}\tilde{y}_p(\Omega) - x_p^{(0)}\tilde{y}_{j'}(\Omega) \right] - i\sqrt{x_p^{(0)}}\tilde{\xi}_{yj}(\Omega),
\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde novamente  $j = s, i$ .

Separadamente, sinal e complementar não possuem uma relação de fase bem definida, porém como podemos ver nas equações anteriores, os ruídos destes modos possuem correlações. Veremos mais adiante que, quando tratados conjuntamente, sinal e complementar apresentam uma redução do ruído na diferença de quadraturas de amplitude e soma de quadraturas de fase, e um excesso de ruído nas outras combinações. Para mostrar este efeito vamos definir as seguintes quadraturas combinadas,

$$x_{\pm} = \frac{x_s \pm x_i}{\sqrt{2}}, \quad y_{\pm} = \frac{y_s \pm y_i}{\sqrt{2}}. \tag{5.18}$$

Introduzindo estas novas quadraturas nas equações (5.17), obteremos as seguintes equações algébricas para as flutuações quânticas combinadas no espaço de frequências,

$$\begin{aligned}
[A(\Omega) + i\Omega]\tilde{x}_+(\Omega) &= E(\Omega)\tilde{x}_-(\Omega) + \sqrt{\frac{x_{0s}}{2}} \left[ \tilde{\xi}_{xj}(\Omega) + \tilde{\xi}_{xj'}(\Omega) \right], \\
[B(\Omega) + i\Omega]\tilde{x}_-(\Omega) &= E(\Omega)\tilde{x}_+(\Omega) + \sqrt{\frac{x_{0s}}{2}} \left[ \tilde{\xi}_{xj}(\Omega) - \tilde{\xi}_{xj'}(\Omega) \right], \\
[C(\Omega) + i\Omega]\tilde{y}_+(\Omega) &= E(\Omega)\tilde{y}_-(\Omega) - i\sqrt{\frac{x_{0s}}{2}} \left[ \tilde{\xi}_{yj}(\Omega) + \tilde{\xi}_{yj'}(\Omega) \right], \\
[D(\Omega) + i\Omega]\tilde{y}_-(\Omega) &= E(\Omega)\tilde{y}_+(\Omega) - i\sqrt{\frac{x_{0s}}{2}} \left[ \tilde{\xi}_{yj}(\Omega) - \tilde{\xi}_{yj'}(\Omega) \right],
\end{aligned} \tag{5.19}$$

tendo definido

$$\begin{aligned}
A(\Omega) &= 1 - \frac{x_{0s}}{2} + \left( \frac{x_{1s} + x_{2s}}{2} \right)^2 \frac{\gamma_r}{\gamma_r + i\Omega} \\
B(\Omega) &= 1 + \frac{x_{0s}}{2} + \left( \frac{x_{1s} - x_{2s}}{2} \right)^2 \frac{\gamma_r}{\gamma_r + i\Omega} \\
C(\Omega) &= 1 + \frac{x_{0s}}{2} + \left( \frac{x_{1s} + x_{2s}}{2} \right)^2 \frac{\gamma_r}{\gamma_r + i\Omega} \\
D(\Omega) &= 1 - \frac{x_{0s}}{2} + \left( \frac{x_{1s} - x_{2s}}{2} \right)^2 \frac{\gamma_r}{\gamma_r + i\Omega} \\
E(\Omega) &= \left( \frac{x_{1s}^2 - x_{2s}^2}{4} \right) \frac{\gamma_r}{\gamma_r + i\Omega} .
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Usando os resultados anteriores, podemos calcular os espectros de ruído intracavidade das quadraturas combinadas. Estes espectros, que são a contribuição de primeira ordem da expansão perturbativa, têm a seguinte forma:

$$\langle \tilde{y}_+(\Omega) \tilde{y}_+(\Omega') \rangle = -x_p^{(0)} \delta(\Omega + \Omega') \frac{|D(\Omega) + i\Omega|^2 - |E(\Omega)|^2}{|[C(\Omega) + i\Omega][D(\Omega) + i\Omega] - E^2(\Omega)|^2} \tag{5.21}$$

e

$$\langle \tilde{x}_-(\Omega) \tilde{x}_-(\Omega') \rangle = -x_p^{(0)} \delta(\Omega + \Omega') \frac{|A(\Omega) + i\Omega|^2 - |E(\Omega)|^2}{|[A(\Omega) + i\Omega][B(\Omega) + i\Omega] - E^2(\Omega)|^2}, \tag{5.22}$$

para as quadraturas que apresentam compressão de ruído e,

$$\langle \tilde{x}_+(\Omega) \tilde{x}_+(\Omega') \rangle = x_p^{(0)} \delta(\Omega + \Omega') \frac{|B(\Omega) + i\Omega|^2 - |E(\Omega)|^2}{|[A(\Omega) + i\Omega][B(\Omega) + i\Omega] - E^2(\Omega)|^2}, \tag{5.23}$$

e

$$\langle \tilde{y}_-(\Omega) \tilde{y}_-(\Omega') \rangle = x_p^{(0)} \delta(\Omega + \Omega') \frac{|C(\Omega) + i\Omega|^2 - |E(\Omega)|^2}{|[C(\Omega) + i\Omega][D(\Omega) + i\Omega] - E^2(\Omega)|^2}. \tag{5.24}$$

Note que os espectros são diferentes, o que indica que a compressão de ruído se dá de maneira distinta entre as quadraturas  $x_-$  e  $y_+$ .

O espectro fora da cavidade, na representação  $P$  – *positiva*, pode ser obtido através do formalismo de *input-output* [63]. Obtendo assim, a seguinte expressão para o espectro fora da cavidade:

$$V_{jk}^{out}(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') = \delta_{jk} \delta(\Omega + \Omega') + 2\sqrt{\gamma_j \gamma_k} \langle \Delta X_j(\Omega) \Delta X_k(\Omega') \rangle_P. \tag{5.25}$$

Usando esta relação, podemos encontrar os espectros de compressão que poderão ser comparados com as simulações das equações de movimento completas. Na figura 5.5 vemos que os resultados analíticos com as duas aproximações, linear para as soluções

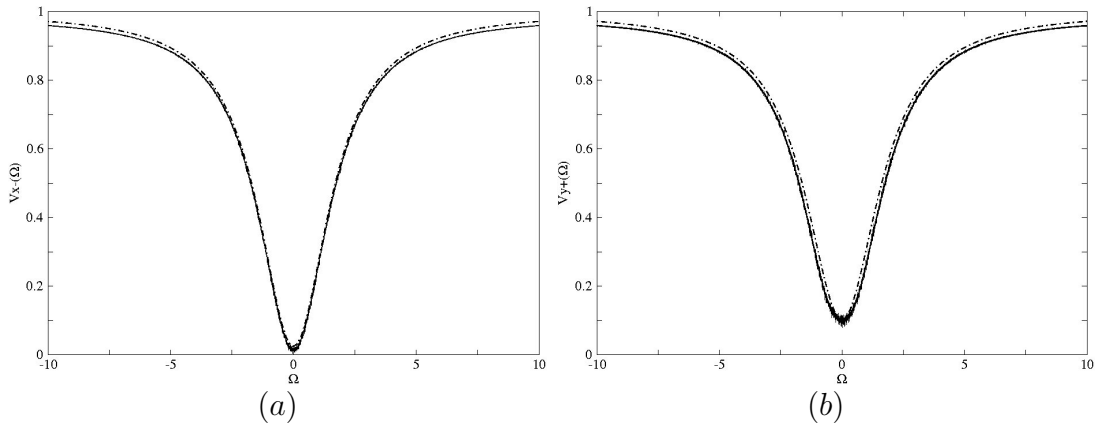


Figura 5.5: Espectros de ruído abaixo do limiar para as quadraturas  $x_-$  em (a) e  $y_+$  em (b). As curvas tracejadas são os resultados analíticos, enquanto as curvas cheias foram obtidas pela integração estocástica das equações completas. As frequências estão em unidades de  $\gamma$  e os parâmetros de bombeamento e injeção foram, respectivamente,  $\mu_p = 0,6$  e  $\mu_s = 0,2$ .

estacionárias e primeira ordem na teoria de perturbação, descrevem bem os espectros de ruído abaixo do limiar mesmo quando usamos valores de  $\mu_p$  e  $\mu_s$  no limite de validade de (5.9).

Acima do limiar, não percebemos uma mudança significativa entre os espectros de ruído para a quadratura  $x_-$ , figura 5.6(a). Já no caso da quadratura  $y_+$ , vemos que a compressão de ruído sofre uma forte degradação em torno da frequência ótica. Das equações (5.19) e (5.20) vemos que sem injeção  $E(\Omega) = D(\Omega) = 0$  e assim há compressão de ruído perfeita para  $y_+$  em torno da frequência ótica, ao passo que para  $y_-$  há uma grande quantidade de ruído em torno da mesma frequência. Este excesso de ruído em  $y_-$  é geralmente associado a difusão de fase do OPO. Com a injeção de sinal,  $y_+$  e  $y_-$  se acoplam dando origem a um excesso de ruído em  $y_+$  para  $\Omega = 0$  que pode ser interpretado como uma "contaminação" da dinâmica de  $y_+$  por parte da difusão de fase. Além disso, a largura desse pico de ruído no espectro de  $y_+$  pode ser explicado pela relação entre a difusão de fase e o nível de bombeamento do OPO. Quanto mais alto este nível mais lenta é a difusão, o que gera um pico cada vez mais estreito no espectro de  $y_+$ . Apesar de não podermos comparar diretamente as quadraturas  $x_-$  e  $y_+$ , respectivamente, com a diferença de intensidades e a soma das fases, é importante notar que um comportamento semelhante foi observado na referência [133], onde também é previsto a degradação da compressão de ruído na soma das fases.

Em ambos os casos, abaixo e acima do limiar, as aproximações feitas para o estado estacionário do OPO concordam com os resultados das simulações estocásticas. Passaremos

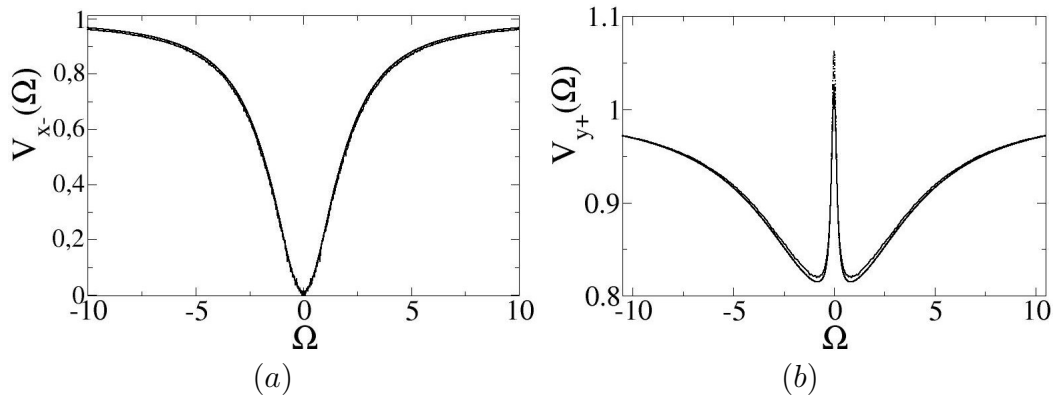


Figura 5.6: Espectros de ruído acima do limiar para as quadraturas  $x_-$  em (a) e  $y_+$  em (b). As curvas tracejadas são os resultados analíticos, enquanto as curvas cheias foram obtidas pela integração estocástica das equações completas. As frequências estão em unidades de  $\gamma$  e os parâmetros de bombeamento e injeção foram, respectivamente,  $\mu_p = 2, 0$  e  $\mu_s = 0, 2$ .

agora para à análise das correlações entre as quadraturas do OPO através dos critérios de emaranhamento para variáveis contínuas.

## 5.4 Emaranhamento e Paradoxo EPR

Dizemos que um sistema quântico está emaranhado quando não podemos fatorar sua matriz densidade em um produto de matrizes correspondentes aos componentes do sistema. Nesta seção usaremos dois testes para analisar esta propriedade. Um deles é conhecido como *critério de Duan* [134], e se propõe a constatar a inseparabilidade de um sistema com variáveis contínuas, que é o caso das quadraturas do OPO, em função das suas variâncias. Este critério garante a inseparabilidade do sistema se as variâncias das quadraturas combinadas violarem a seguinte desigualdade,

$$V_{x_-} + V_{y_+} \geq 2. \quad (5.26)$$

O segundo, que chamaremos de *critério EPR*, foi proposto M. D. Reid em [135] e baseia-se na hipótese de que a correlação entre os feixes convertidos permitiria inferir os resultados para um dos feixes, medindo-se o seu parceiro. Podemos analisar os ruídos nos campos sinal e complementar no domínio das frequências e no domínio das quadraturas. Para acessarmos o domínio das quadraturas, precisamos definir

$$\begin{aligned} x_j(\theta) &= x_j \cos \theta + y_j \sin \theta, \\ y_j(\theta) &= -x_j \sin \theta + y_j \cos \theta, \quad (j = s, i), \end{aligned} \quad (5.27)$$

como sendo as quadraturas rodadas no espaço de fase. Experimentalmente o ângulo  $\theta$  é a fase relativa entre o oscilador local e o feixe analisado na detecção homodina. Baseados nesta forma de representar as quadraturas, a hipótese de M. D. Reid de que é possível inferir os resultados relacionados a um feixe medindo-se o seu parceiro, pode ser representada por:

$$x_s^{inf} = qx_i(\theta), \quad (5.28)$$

onde  $q$  é um multiplicador de Lagrange que será ajustado para maximizar a precisão da determinação de  $x_s$ . O erro médio entre a estimativa  $x_s^{inf}$  e os valores verdadeiros  $x_s$  são dados por:

$$V^{inf}[x_s] = \langle [x_s - x_s^{inf}]^2 \rangle \quad (5.29)$$

$$= \langle [x_s - qx_i(\theta)]^2 \rangle \quad (5.30)$$

Para calcularmos o valor de  $q$  que minimiza o erro na estimativa de  $X_s$ , resolvemos a equação  $\frac{\partial}{\partial q} V^{inf}[x_s] = 0$  para  $q$ , o que nos leva a:

$$q = \frac{\langle x_s x_i(\theta) \rangle}{\langle [x_i(\theta)]^2 \rangle}. \quad (5.31)$$

Podemos minimizar ainda mais esse erro ajustando a quadratura mais correlacionada com  $x_s$ ,  $\theta = 0$ , o que nos leva a:

$$\begin{aligned} V^{inf}[x_s(\Omega)] &= V_{x_s}^{out}(\Omega) - \frac{|V_{x_s, x_i}^{out}(\Omega)|^2}{V_{x_i}^{out}(\Omega)}, \\ V^{inf}[y_s(\Omega)] &= V_{y_s}^{out}(\Omega) - \frac{|V_{y_s, y_i}^{out}(\Omega)|^2}{V_{y_i}^{out}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde as variâncias para as quadraturas do feixe complementar podem ser obtidas pela simples troca dos índices  $s \leftrightarrow i$ .

Como  $\hat{X}_j$  e  $\hat{Y}_j$  são operadores canonicamente conjugados, o produto das suas variâncias obedece a relação de incerteza de Heisenberg,  $V(\hat{X}_j)V(\hat{Y}_j) \geq 1$ . Assim sendo, encontraremos correlações do tipo EPR se

$$V^{inf}[x_j(\Omega)] V^{inf}[y_j(\Omega)] \leq 1. \quad (5.33)$$

Usando a correção de primeira ordem 5.19 da teoria de perturbação, no espaço de frequências, podemos calcular as correlações requeridas pelo critério EPR para o teste de emaranhamento. Parte delas já foi calculada na seção anterior, restando apenas fornecer

as correlações cruzadas

$$\langle \tilde{x}_+(\Omega)\tilde{x}_-(\Omega') + \tilde{x}_-(\Omega)\tilde{x}_+(\Omega') \rangle = \frac{x_{0s}\delta(\Omega + \Omega') \operatorname{Re}\{E^*(\Omega) [B(\Omega) - A(\Omega)]\}}{|[A(\Omega) + i\Omega][B(\Omega) + i\Omega] - E^2(\Omega)|^2} \quad (5.34)$$

$$\langle \tilde{y}_+(\Omega)\tilde{y}_-(\Omega') + \tilde{y}_-(\Omega)\tilde{y}_+(\Omega') \rangle = \frac{x_{0s}\delta(\Omega + \Omega') \operatorname{Re}\{E^*(\Omega) [C(\Omega) - D(\Omega)]\}}{|[C(\Omega) + i\Omega][D(\Omega) + i\Omega] - E^2(\Omega)|^2}, \quad (5.35)$$

para calcularmos as variâncias de  $x_s$  e  $y_s$ ,

$$\begin{aligned} V^{inf}[y_s(\Omega)] &= \frac{1}{2} \left\{ [V_{y_+}^{out}(\Omega) + V_{y_+,y_-}^{out}(\Omega) + V_{y_-,y_+}^{out}(\Omega) + V_{y_-}^{out}(\Omega)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{|V_{y_+}^{out}(\Omega) - V_{y_+,y_-}^{out}(\Omega) + V_{y_-,y_+}^{out}(\Omega) - V_{y_-}^{out}(\Omega)|^2}{V_{y_+}^{out}(\Omega) - V_{y_+,y_-}^{out}(\Omega) - V_{y_-,y_+}^{out}(\Omega) + V_{y_-}^{out}(\Omega)} \right\}, \\ V^{inf}[x_s(\Omega)] &= \frac{1}{2} \left\{ [V_{x_+}^{out}(\Omega) + V_{x_+,x_-}^{out}(\Omega) + V_{x_-,x_+}^{out}(\Omega) + V_{x_-}^{out}(\Omega)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{|V_{x_+}^{out}(\Omega) - V_{x_+,x_-}^{out}(\Omega) + V_{x_-,x_+}^{out}(\Omega) - V_{x_-}^{out}(\Omega)|^2}{V_{x_+}^{out}(\Omega) - V_{x_+,x_-}^{out}(\Omega) - V_{x_-,x_+}^{out}(\Omega) + V_{x_-}^{out}(\Omega)} \right\}, \quad (5.36) \end{aligned}$$

e analogamente para as quadraturas do feixe complementar.

Na figura 5.7 mostramos a soma dos ruídos e o produto das variâncias inferidas para  $\mu_s = 0, 2$ , operando abaixo de limiar com  $\mu_p = 0, 6$ . Os valores-limite para a violação do comportamento clássico (1 para o critério EPR e 2 para o critério de Duan) são indicados na figura pelas linhas tracejadas. Para  $\theta = 0$  há violação, em quase a toda faixa de frequências, dos dois critérios, figura 5.7(a). Na figura 5.7(b) mostramos a frequência zero dos critérios como uma função de  $\theta$ . Neste caso, o critério EPR é mais restritivo e é interessante observar que existem quadraturas em que apenas um dos critérios é satisfeito.

Na figura 5.8 mostramos a soma dos ruídos e o produto das variâncias inferidas novamente para  $\mu_s = 0, 2$ , porém agora operando acima do limiar ( $\mu_p = 2$ ). Para  $\theta = 0$  há violação, em quase toda faixa de frequências, dos dois critérios, figura 5.8(a). Na figura 5.8(b) mostramos a frequência zero dos critérios de emaranhamento como uma função de  $\theta$ . Novamente, o critério EPR é mais restritivo. Além disso, a violação do comportamento clássico ocorre em um intervalo de quadraturas mais reduzido do que no regime abaixo do limiar. Em ambos os casos, o intervalo é bastante estreito, mostrando que seria preciso um controle considerável do oscilador local para se observar experimentalmente este efeito.

Através das equações (5.7) e (5.9) podemos calcular as intensidades estacionárias do estado estacionário  $I_j = x_j^2$  ( $j = 1, 2$ ) e avaliar o ganho nas intensidades dos feixes convertidos em função da injeção do feixe auxiliar. Para  $\mu_s = 0, 1$  vemos pouca diferença entre o caso não injetado,  $I_s = 0, 088$  e  $I_i = 0, 028$ . Já no caso em que  $\mu_s = 0, 2$ , intensidades são consideravelmente maiores,  $I_s = 0, 28$  e  $I_i = 0, 072$ , enquanto ainda há



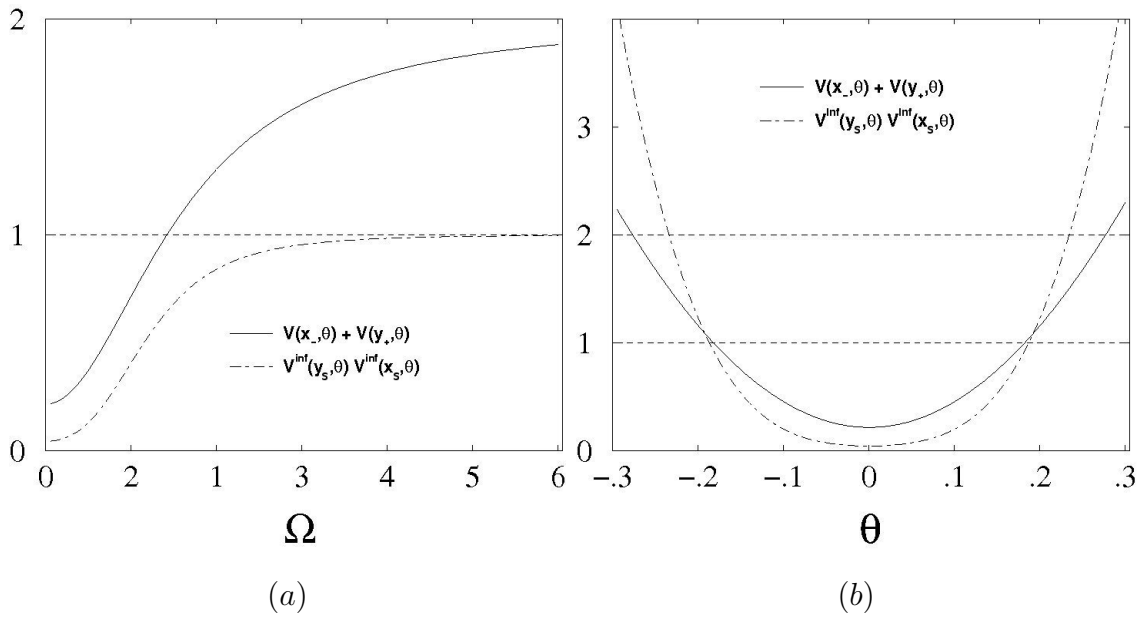


Figura 5.7: Em (a) os espectros dimensionais dos critérios de Duan e EPR, avaliados abaixo do limiar de operação ( $\mu_p = 0,6$  e  $\mu_s = 0,2$ ) para  $\theta = 0 rad$ , obtidos com teoria de perturbação de primeira ordem. As frequências  $\Omega$  são expressas em unidades de  $\gamma$ . Em (b) os espectros dimensionais dos critérios de Duan e EPR na frequência zero em função de  $\theta$ , sob as mesmas condições.

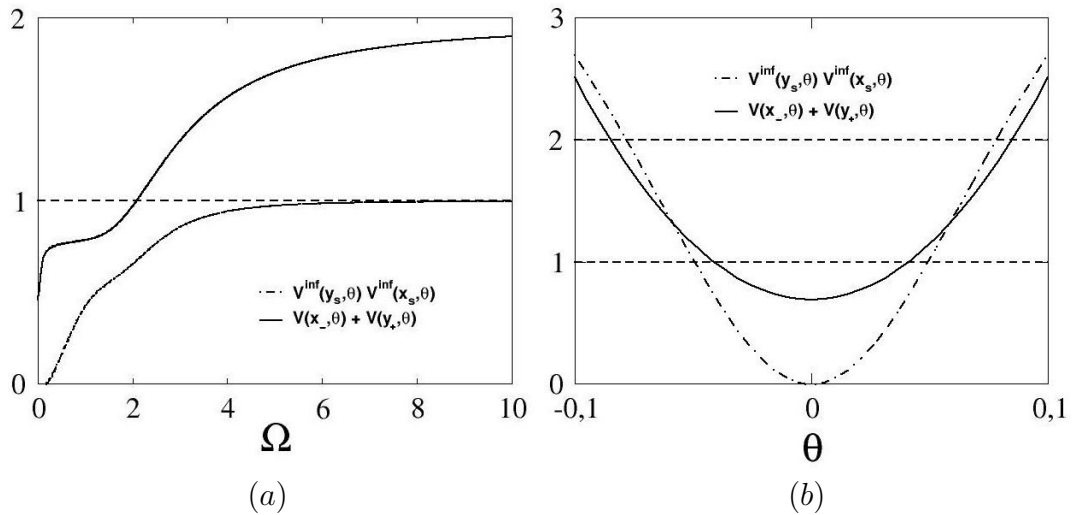


Figura 5.8: Em (a) os espectros dimensionais dos critérios de Duan e EPR, avaliados acima do limiar de operação ( $\mu_p = 2$  e  $\mu_s = 0,2$ ) para  $\theta = 0 rad$ , obtidos com teoria de perturbação de primeira ordem. As frequências  $\Omega$  são expressas em unidades de  $\gamma$ . Em (b) os espectros dimensionais dos critérios de Duan e EPR na frequência zero em função de  $\theta$ , sob as mesmas condições.

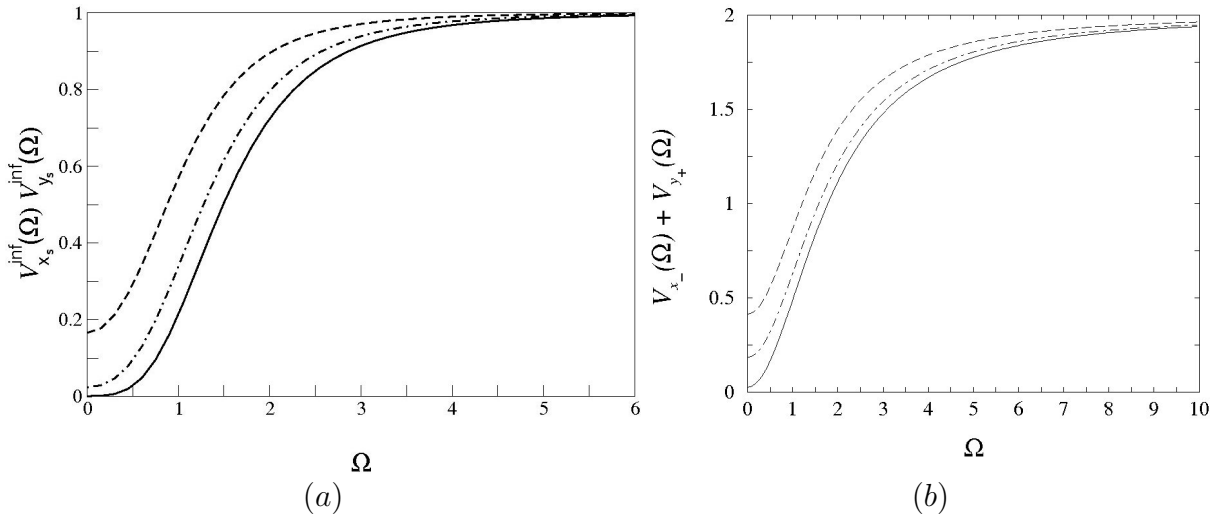


Figura 5.9: Espectros adimensionais dos critérios EPR (a) e Duan (b) abaixo do limiar de operação ( $\mu_p = 0,6$ ) para  $\theta = 0\text{ rad}$ , obtidos com a primeira ordem perturbativa.  $\mu_s = 0$  (linha sólida),  $\mu_s = 0,1$  (ponto-linha tracejada) e  $\mu_s = 0,2$  (linha tracejada). Novamente as frequências são expressas em unidades de  $\gamma$ .

uma significativa violação do limite clássico. Na figura 5.9 mostramos os dois critérios abaixo do limiar ( $\mu_p = 0,6$ ) para diferentes níveis injeção, permitindo uma avaliação do efeito da mesma.

Embora os valores das intensidades normalizadas não pareçam tão impressionantes, em termos experimentais elas representam campos intensos. Por exemplo, vamos considerar um OPO com um espelho  $R_{\text{M\AA X}}^5$  para os campos convertidos e um coeficiente de transmissão  $T_p = 2\gamma_p\tau$  para o campo de bombeamento e outro espelho com um coeficiente de transmissão comum  $T = 2\gamma\tau$  para sinal e complementar e  $R_{\text{M\AA X}}$  para o feixe de bombeamento, onde  $\tau$  é o tempo de ida e volta na cavidade. É conveniente expressar as potências envolvidas no processo em termos da potência de limiar  $P_{lim}$ . Nestes termos, a potência do feixe de bombeamento é simplesmente  $P_p = \mu_p^2 P_{lim}$ , potência de injeção é dada por  $P_{inj} = \mu_s^2 P_{lim}(\gamma_s/\gamma_p)$  e as potências de saída do feixes convertidos  $P_j^{out} = x_j^2 P_{lim}(\gamma_s/\gamma_p)$ . Se considerarmos uma potência de limiar  $P_{lim} = 20\text{mW}$ , que é um valor experimental bastante razoável, e os parâmetros usados para os cálculos no regime abaixo do limiar,  $\mu_p = 0,6$  e  $\mu_s = 0,2$ , obtemos  $P_p = 7,2\text{mW}$ ,  $P_{inj} = 1,6\text{mW}$ ,  $P_s^{out} = 5,6\text{mW}$  e  $P_i^{out} = 1,4\text{mW}$ .

<sup>5</sup>Espelhos  $R_{\text{M\AA X}}$  são espelhos altamente refletivos com coeficiente de reflexão maior que 99,99%.

## 6 *Conclusões*

Leaves are falling all around, It's time I was on my way.  
 Thanks to you, I'm much obliged for such a pleasant stay.  
 But now it's time for me to go. The autumn moon lights my way.  
 For now I smell the rain, and with it pain, and it's headed my way.  
 Sometimes I grow so tired, but I know I've got one thing I got to do...

*Led Zeppelin — Ramble On*

No Capítulo 2 foi estudada a dinâmica clássica de um oscilador paramétrico ótico com injeção de um feixe auxiliar inicialmente preparado em um modo transversal com momento angular orbital. Usando a representação de Poincaré para modos espaciais de primeira ordem, mostramos que há uma simetria entre os feixes produzidos pelo OPO. Também apresentamos a evolução adiabática e a conjugação de uma fase geométrica que surge quando o feixe auxiliar percorre caminhos fechados na esfera de Poincaré. Um aspecto interessante no nosso modelo é que a memória da evolução adiabática fica registrada na imagem de um padrão de interferência que pode ser facilmente obtido através do experimento proposto para medir tais efeitos. Nos últimos anos muitos estudos sobre a distribuição espacial do ruído quântico da luz foram feitos para aplicação em medidas de posicionamento de alta precisão. Acreditamos que nossos resultados podem servir como uma ferramenta adicional para este campo. A investigação do efeito no domínio quântico fica como perspectiva para um trabalho futuro.

No Capítulo 5 mostramos como um sinal injetado em um dos modos gerados por um oscilador paramétrico ótico não-degenerado pode ser utilizado para aumentar a intensidade dos modos convertidos. Graças à injeção, os campos gerados pelo OPO abaixo do limiar de oscilação são agora macroscópicos, em vez de apenas flutuações como no caso não-injetado. Usando uma expansão perturbativa das equações de movimento, analisamos os efeitos da injeção sobre as propriedades quânticas do sistema, mostrando através da violação dos critérios de Duan [134] e EPR [135] que, apesar da degradação produzida pela injeção, ainda há um alto grau de emaranhamento entre os feixes produzidos pelo OPO injetado. Estes resultados sugerem que este dispositivo pode ser bastante útil para produção de emaranhamento de variáveis contínuas e estados EPR em feixes intensos.

## APÊNDICE A – Como Gerar as Máscaras

A rotina computacional para gerar as matrizes que serviram de base para a confecção das máscaras espirais foi escrita na plataforma matemática *Maple*<sup>TM</sup>.

### A.0.1 Rotina

```
#####parametros da mascara#####
#
p:=2: #carga topologica (> 0):
n:=5: #numero de voltas das zonas escuras:
step:=0.1: #passo
arq:='D:L-G1.ps': #nome do arquivo de saida
c1:="%!":
c2:="%0":
c3:"300 500 translate": # origem no centro do papel
c4:"0.00002 setlinewidth stroke": # espessura da linha
c5:"0 0 moveto":
c6:"fill":
#
#
#####
fopen(arq,WRITE) :
fprintf(arq,"%s\n",c1) :
fprintf(arq,"%s\n",c2) :
fprintf(arq,"%s\n",c3) :
fprintf(arq,"%s\n",c4) :
fprintf(arq,"%s\n",c5) :
s := p/Pi :
```

```

rmax := evalf(Re(sqrt(s * 2 * n * Pi - 1))) :
for j from 1 to p do
phi := Pi/p :
res := -1 :
while res < 0 do
r := evalf(Re(sqrt(s * phi - 1)))/rmax :
Lx := evalf(r * cos(phi + j * 2/s)) :
Ly := evalf(r * sin(phi + j * 2/s)) :
fprintf(arq, "%f %f lineto \n", Lx * 200, Ly * 200) :
#lprint(phi, r * delta, Lx, Ly);
delta := evalf(step/sqrt(s4/(4 * (r2 + 0.0000001)) + r2)) :
phi := evalf(phi + delta) :
res := evalf(phi - 2 * n * Pi) :
od :
while phi > 0 do
delta := evalf(step/sqrt(s4/(4 * (r2 + 0.0000001)) + r2)) :
phi := evalf(phi - delta) :
r := evalf(Re(sqrt(s * phi)))/rmax :
Lx := evalf(r * cos(phi + j * 2/s)) :
Ly := evalf(r * sin(phi + j * 2/s)) :
fprintf(arq, "%f %f lineto\n", Lx * 200, Ly * 200) :
#lprint(phi, r * delta, Lx, Ly);
od :
fprintf(arq, "%s\n", c6) :
fprintf(arq, "%s\n", c5) :
od :
fprintf(arq, "stroke\n") :
fprintf(arq, "showpage") :
fclose(arq) :
fclose(arq) :

```

## *APÊNDICE B - Análise de Estabilidade das Soluções Estacionárias do OPO Injetado*

Vamos agora apresentar uma análise linear da estabilidade para os estados estacionários do Capítulo 5. Vamos considerar pequenos desvios valores médios estacionários das variáveis dinâmicas do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\delta x_j &= x_j^{(0)} - \langle x_j \rangle \\ \delta y_j &= y_j^{(0)} - \langle y_j \rangle \quad ,\end{aligned}\tag{B.1}$$

com  $j = 0, 1, 2$ . A partir da média das equações de movimento quânticas, podemos escrever equações para  $\delta x_j$  e  $\delta y_j$ . As equações de movimento linearizadas são, então, obtidas pela manutenção de termos até primeira ordem nestes desvios. Definindo o vetor coluna

$$\delta \vec{x} = \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \delta \vec{y} = \begin{bmatrix} \delta y_0 \\ \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{bmatrix} \quad ,\tag{B.2}$$

podemos escrever as equações linearizadas em uma forma compacta:

$$\delta \dot{\vec{x}} = \mathbf{M}_x \delta \vec{x} \quad \text{and} \quad \delta \dot{\vec{y}} = \mathbf{M}_y \delta \vec{y} \quad ,\tag{B.3}$$

onde

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} -\gamma_r & -\gamma_r x_{2s} & -\gamma_r x_{1s} \\ x_{2s}/2 & -1 & x_{0s}/2 \\ x_{1s}/2 & x_{0s}/2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} -\gamma_r & -\gamma_r x_{2s} & -\gamma_r x_{1s} \\ x_{2s}/2 & -1 & -x_{0s}/2 \\ x_{1s}/2 & -x_{0s}/2 & -1 \end{bmatrix} \quad .\tag{B.4}$$

Estas soluções estacionárias são estáveis se todos os autovalores de  $\mathbf{M}_x$  e  $\mathbf{M}_y$  têm partes reais negativas. As equações seculares para os autovalores  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  são portanto:

$$\begin{aligned}\lambda_x^3 + c_1\lambda_x^2 + c_2\lambda_x + c_3 &= 0 \\ \lambda_y^3 + d_1\lambda_y^2 + d_2\lambda_y + d_3 &= 0 ,\end{aligned}\tag{B.5}$$

onde

$$\begin{aligned}c_1 &= d_1 = 2 + \gamma_r , \\ c_2 &= d_2 = 1 - x_{0s}^2/4 + 2\gamma_r + \frac{\gamma_r}{2}(x_{1s}^2 + x_{2s}^2) , \\ c_3 &= \gamma_r [1 - x_{0s}^2/4 + (x_{1s}^2 + x_{2s}^2)/2 + x_{0s}x_{1s}x_{2s}/2] , \\ d_3 &= \gamma_r [1 - x_{0s}^2/4 + (x_{1s}^2 + x_{2s}^2)/2 - x_{0s}x_{1s}x_{2s}/2] .\end{aligned}\tag{B.6}$$

De acordo com o critério Routh-Hurwitz [136], todos os autovalores têm partes reais negativas se, e somente se, os coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  são todos positivos e os determinantes  $H_1 = c_1$ ,  $H_2 = c_1c_2 - c_3$ ,  $H_3 = c_3H_2$ ,  $G_1 = d_1$ ,  $G_2 = d_1d_2 - d_3$  e  $G_3 = d_3G_2$ , também são positivas.

Neste ponto, é útil escrever todas as condições em termos dos parâmetros de sistema e  $x_p^{(0)}$ . Após uma cuidadosa inspeção das condições acima, partindo do estado estacionário dado pelas equações 5.7 e um pouco de álgebra, podemos reduzir o conjunto de critérios de Routh-Hurwitz a uma única condição:

$$(1 - x_{0s}^2/4) [2\mu_1^2 + (1 - x_{0s}^2/4)^2] > 0 .\tag{B.7}$$

Portanto, podemos ver claramente que qualquer solução estacionária com  $x_p^{(0)} > 2$  é instável. Na prática, isto significa que a solução estacionária abaixo do limiar é estável e apenas a solução,

$$x_p^{(0)} = 2 - \frac{\mu_s^2}{2(\mu_p - 1)} \left[ \sqrt{1 + \frac{8(\mu_p - 1)}{\mu_s^2}} - 1 \right] ,\tag{B.8}$$

obtida com a aproximação quadrática acima do limiar são estáveis. Contrastando com o que acontece no caso não-injetado, em que há uma instabilidade no limiar de oscilação.

## *ANEXO A - Trabalhos Publicados*



# Transfer of orbital angular momentum in a multimode parametric oscillator

B. Coutinho dos Santos,<sup>1</sup> A. Z. Khoury,<sup>1,\*</sup> and J. A. O. Huguenin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física–Universidade Federal Fluminense, 24210-346 Niterói-RJ, Brazil

<sup>2</sup>Departamento de Ciências Exatas–EEIMVR–Universidade Federal Fluminense, 27250-125 Volta Redonda-RJ, Brazil

\*Corresponding author: khoury@if.uff.br

Received May 20, 2008; revised September 3, 2008; accepted October 7, 2008; posted October 24, 2008 (Doc. ID 96281); published November 24, 2008

We investigate the transfer of orbital angular momentum (OAM) in a type-II optical parametric oscillator (OPO). We produce different kinds of transverse modes on the downconverted beams by pumping the OPO with a first-order Laguerre–Gaussian beam well above threshold. Different operation regimes are attained showing a rich variety of transverse modes bearing OAM. © 2008 Optical Society of America  
OCIS codes: 190.4970, 270.1670, 030.4070, 190.4420.

Optical parametric oscillators (OPOs) are recognized as a robust source of continuous variables entanglement [1,2]. Besides the usual quadrature correlations, OPOs can also generate quantum correlations in polarization [3] and spatial degrees of freedom of the downconverted fields [4]. Quantum noise squeezing has already been observed in several Hermite–Gaussian [ $HG_{m,n}(x,y)$ ] transverse modes with an optical parametric amplifier [5].

Spatial modes carrying orbital angular momentum (OAM) have attracted great attention recently owing to their potential applications to quantum information transmission and processing. The OAM is associated with phase singularities in the wavefront. Laguerre–Gaussian  $LG_p^l(r,\phi)$  beams are examples of possible carriers of orbital angular momentum, where  $l$  is the topological charge and  $p$  is the radial index [6].  $LG$  modes can be produced from a standard Gaussian mode by diffraction on specially designed amplitude or phase masks [7–9].

The role of OAM in nonlinear optical processes has been investigated in many experiments. Interesting studies were made in the second harmonic generation [10]. Conservation of OAM in parametric downconversion (PDC) was discussed both in the spontaneous [11–15] and in the stimulated cases [16]. However, little attention has been given to the role played by the OAM in OPOs [17,18]. In [17] Martinielli *et al.* demonstrated the transference of OAM from the pump to one of the downconverted beams using an  $LG$  mode to pump a type-II OPO. It was observed that cavity and anisotropy effects play an important role in the transverse mode dynamics. In particular, owing to the type-II geometry, it was shown that OAM could be transferred from the pump to the downconverted beam (idler) having the same polarization as the pump but not to the one having the orthogonal polarization (signal). The reason for this behavior was clarified in that same work, where the interplay between crystal birefringence and astigmatism was invoked as a crucial effect. In the present work we further explore the transference of OAM from the pump to the parametric downconverted beams in a type-II OPO. With a higher pump inten-

sity we could produce a richer collection of oscillating modes.

In our OPO a 7-mm-long KTP crystal, cut for type-II noncritical phase matching for 532–1064 nm downconversion at room temperature, is inserted in a symmetric optical cavity. The experimental setup is shown in Fig. 1. The cavity is made by two identical spherical mirrors  $M_1$  and  $M_2$ , with curvature  $R_m = 13$  mm. The mirrors have high reflectance for the IR ( $R=99.8\%$  at 1064 nm) and a  $R=92\%$  reflection coefficient at the pump wavelength at 532 nm.  $M_2$  is mounted on a linear translation stage, which allows for a coarse variation of the cavity length ( $\sim 10$  mm). This mirror is also controlled by a piezoelectric actuator (PZT) providing a fine cavity tuning.

The OPO is pumped by the second harmonic of a Nd:YAG laser (Lightwave 142). The  $HG_{00}$  generated by the laser is converted into a nearly Hermite–Gaussian beam  $HG_{01}$  by a misaligned Mach–Zehnder interferometer and then to an  $LG$  mode by an astigmatic mode converter [19]. We could achieve 140 mW power in the Laguerre–Gaussian ( $LG_0^1$ ) pump beam. The green light coming from the cavity through mirror  $M_2$  is filtered by a dichroic mirror (DM) and detected by a photodiode ( $D_G$ ). The low transmission coefficient at 1064 nm in  $M_2$  gives a sufficient signal to detect part of the IR output power reflected by a 10/90 beam splitter (BS) with a InGaAs photodiode ( $D_{IR}$ ) and to capture the transverse profile with a CCD camera.

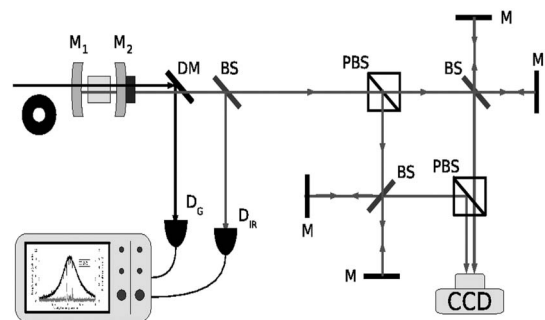


Fig. 1. Experimental setup.

After the BS, the signal and idler beams are separated by a polarizing beam splitter (PBS). Following the convention for type-II OPOs, the idler and the pump beams have the same polarization. The signal beam is the one whose polarization is perpendicular to the pump–idler polarization. The idler beam is transmitted by the cube (horizontal polarization), while the signal is reflected (vertical polarization). Each downconverted beam is sent into a Michelson interferometer made by a nonpolarizing 50/50 beam splitter and two flat mirrors. The outputs of the two interferometers are recombined in a second PBS and sent onto a CCD camera. With this apparatus we can observe either the intensity profile of the signal and idler beams or their interference patterns.

In the nearly confocal configuration the threshold power for the  $LG_0^1$  pump is around 26 mW. With the 140 mW Laguerre–Gaussian pump, we could excite many different transverse modes as the cavity was tuned with the PZT. Since the cavity mirrors reflectivity was considerably larger for the IR than for the visible radiation, the cavity resonances were much narrower for the downconverted beams when compared to the pump resonance. In Fig. 2 a cavity scan is presented, showing the pump and downconverted resonances. The OPO oscillation peaks coincide with the pump depletion dips.

For a given cavity length, the pump power as well as the cavity alignment were stable over a few minutes, so that we could consistently register the output image of signal and idler, together with their self-interference patterns. Several images were obtained for different cavity lengths as the PZT voltage was slowly varied. These images are shown in Fig. 3.

The idler beam has the extraordinary polarization (the same as the pump) and appears on the left in the intensity and interference images. In images 1 and 2 we have results similar to those presented in [17]. In image 1-A we have the standard result showing the transfer of OAM. The  $LG_0^1$  mode oscillates on the idler beam, as shown by the topological defects in the interference pattern 1-B, while the signal beam (ordinary polarization) oscillates in the fundamental transverse mode. In images 2-A and 2-B the higher-order transverse mode appears on the ordinary polarization but as a first order Hermite–Gaussian mode, without transfer of OAM. In this situation the idler beam oscillates in the  $HG_{00}$  mode.

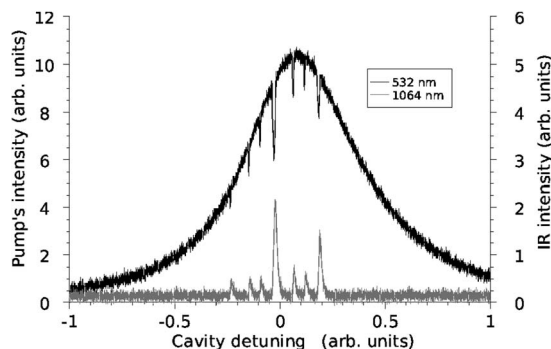


Fig. 2. Pump and downconverted resonances for the confocal configuration.

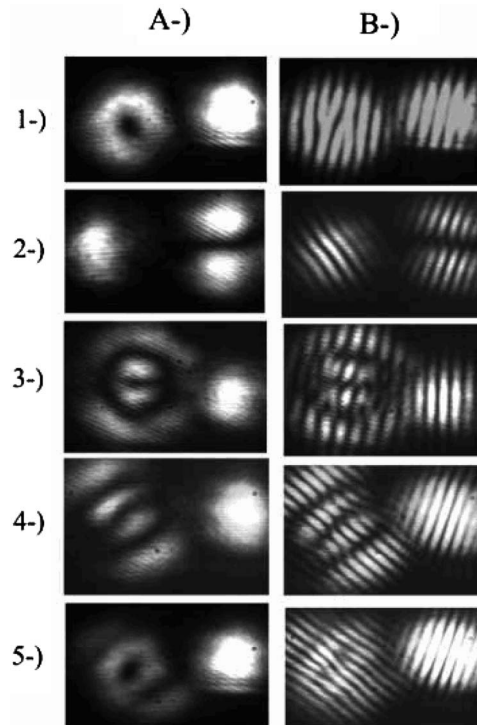


Fig. 3. Signal (right) and idler (left) beam profiles for confocal configuration is shown in column A for different resonances. Column B shows its respective self-interference patterns.

In cavity-free parametric downconversion, it has been shown that conservation of the topological charge is a consequence of the phase-matching condition [14–16,20]. Even the usual phase-matching picture, where signal and idler wave vectors add up to give the pump wave vector, allows for an intuitive view of the topological charge conservation between waves of different frequencies. In fact, for collinear downconversion (which is the case for a Fabry–Perot OPO), the charge conservation becomes clear when we project this vector addition on the azimuthal unit vector of the cylindrical coordinates system (with the  $z$  axis along propagation):  $k_\phi^s + k_\phi^i = k_\phi^p$ . For an optical vortice  $k_\phi = l/\rho$ , with  $\phi$  and  $\rho$  being the azimuthal and radial cylindrical coordinates, respectively, and  $l$  the topological charge. This relation leads to the phase-matching condition expressed in terms of the topological charges for signal, idler, and pump:  $l^s + l^i = l^p$ . Therefore, OAM conservation in an OPO depends on an interplay between phase matching and the boundary conditions imposed by the cavity. For the result shown in image 1-A, where orbital angular momentum is transferred from the pump to the idler beam, both conditions are fulfilled.

Our new results can be observed in images 3–5. While the signal beam remains in the fundamental  $HG_{00}$  mode, the idler beam oscillates in higher order transverse modes. In image 3-A we have partial transfer of OAM to the extraordinary polarization with the idler beam oscillating in a mixed  $LG$ – $HG$  mode. However, a vortex can be identified through the bifurcations in the center of the interference pattern 3-B, which indicate partial transfer of OAM to

the idler beam, with the same topological charge as the pump. In fact, we could reproduce both the intensity and interference profiles of images 3-A and 3-B by a computer calculation of an unbalanced superposition of the  $LG_1^{+1}$  and  $LG_1^{-1}$  amplitudes, with a higher weight for the  $LG_1^{+1}$  (same topological charge as the pump). Images 4-A and 4-B present a rotated second-order  $HG$  mode on the idler beam. In image 5-A we can observe a superposition between a  $LG_1^{+1}$  mode and a rotated  $HG_{02}$  mode for the idler beam. The vortex on the idler interference pattern 5-B is clear and shows the presence of OAM. We could not reproduce the profiles of images 5-A and 5-B with a simple amplitude superposition of the  $LG$  and  $HG$  modes. However, both profiles are well reproduced by adding up their intensities rather than their amplitudes. Probably, this means that the two transverse modes oscillate with different frequencies. A possible explanation for their simultaneous operation is the interesting cooperative effect predicted in [21].

In conclusion, we investigated the transfer of orbital angular momentum in a type-II optical parametric oscillator with a more powerful pump, so that a richer family of transverse modes could be excited in the downconverted fields. Such a multimode regime is of fundamental importance for the investigation of pattern formation in the quantum domain with potential applications to quantum imaging. Moreover, the orbital angular momentum can be used as an additional resource for implementation of quantum information protocols with optical parametric oscillators. The present work adds an important understanding of the orbital angular momentum dynamics in such devices.

Funding was provided by Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), and the Instituto do Milênio de Informação Quântica.

## References

1. S. L. Braunstein and P. van Loock, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 513 (2005).
2. Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, and K. C. Peng, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3663 (1992).
3. W. P. Bowen, R. Schnabel, H. A. Bachor, and P. K. Lam, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 093601 (2002).
4. N. Treps, N. Grosse, W. P. Bowen, C. Fabre, H. A. Bachor, and P. K. Lam, *Science* **301**, 940 (2003).
5. V. Delaubert, N. Treps, C. C. Harb, P. K. Lam, and H.-A. Bachor, *Opt. Lett.* **31**, 1537 (2006).
6. L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45**, 8185 (1992).
7. N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith, and A. G. White, *Opt. Lett.* **17**, 221 (1992).
8. G. F. Brand, *Am. J. Phys.* **67**, 55 (1999).
9. J. A. O. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, P. A. M. dos Santos, and A. Z. Khoury, *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 1883 (2003).
10. K. Dholakia, N. B. Simpson, M. J. Padgett, and L. Allen, *Phys. Rev. A* **54**, R3742 (1996).
11. J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett, *Phys. Rev. A* **59**, 3950 (1999).
12. H. H. Arnault and G. A. Barbosa, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 286 (2000).
13. A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, *Nature* **412**, 313 (2001).
14. G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner, *Opt. Commun.* **228**, 155 (2003).
15. C. I. Osorio, G. Molina-Terriza, and J. P. Torres, *Phys. Rev. A* **77**, 015810 (2008).
16. D. P. Caetano, M. P. Almeida, P. H. Souto Ribeiro, J. A. O. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. A* **66**, 041801 (2002).
17. M. Martinelli, J. A. O. Huguenin, P. Nussenzveig, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. A* **70**, 013812 (2004).
18. B. Coutinho dos Santos, C. E. R. Souza, K. Dechoum, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. A* **76**, 053821 (2007).
19. D. V. Petrov, F. Canal, and L. Torner, *Opt. Commun.* **143**, 265 (1997).
20. S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, R. S. Thebaldi, and C. H. Monken, *Phys. Rev. A* **69**, 023811 (2004).
21. A. Amon, M. Nizette, M. Lefranc, and T. Erneux, *Phys. Rev. A* **68**, 023801 (2003).



# Phase conjugation and adiabatic mode conversion in a driven optical parametric oscillator with orbital angular momentum

B. Coutinho dos Santos, C. E. R. Souza, K. Dechoum, and A. Z. Khoury  
*Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Boa Viagem 24210-346, Niterói-RJ, Brazil*  
 (Received 20 March 2007; published 16 November 2007)

We developed a theoretical model for the spatial mode dynamics of an optical parametric oscillator under injection of orbital angular momentum. This process is interpreted in terms of a Poincaré representation of first order spatial modes. The spatial properties of the down-converted fields can be easily understood from their symmetries in this geometric representation. By considering an adiabatic mode conversion of the injected signal, we calculate the evolution of the down-converted beams. A phase conjugation effect is predicted which is a consequence of the symmetry in the Poincaré sphere. We also propose an experiment to measure this effect.

DOI: [10.1103/PhysRevA.76.053821](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.053821)

PACS number(s): 42.65.Yj, 03.65.Vf

## I. INTRODUCTION

Orbital angular momentum exchange in parametric amplification and oscillation has attracted a significant attention recently, both for its fundamental aspects as well as for its potential applications to quantum information processing. The first attempt to observe the transfer of orbital angular momentum (OAM) from the pump beam to the down converted beams was made by Arlt *et al.* in the spontaneous process, where the far field did not show the typical profile of an optical vortex [1]. Later, this problem was elucidated by Mair *et al.* who investigated the same process in the photocount regime [2]. They were able to demonstrate that the coincidence counts between twin photons generated by spontaneous parametric down conversion was subjected to OAM conservation. A further insight is given in Ref. [3], where it was shown that parametric amplification in the stimulated process is also subjected to OAM conservation. There, an interpretation in terms of transverse phase conjugation was provided [4]. In Ref. [5], the macroscopic transfer of OAM from the pump beam to one of the down converted beams was demonstrated in the operation of an optical parametric oscillator (OPO) above threshold. In that case, cavity mode selection was shown to play a crucial role in the OAM exchange. Although it may seem that OAM conservation is a general feature of parametric down-conversion, in fact it is characteristic of the paraxial propagation limit [6].

An important feature of optical beams bearing OAM is the geometric phase, or Berry's phase [7], associated with cyclic transformations implemented with astigmatic mode converters [8,9], first predicted by van Enk [10], and then experimentally demonstrated by Galvez *et al.* [11]. This geometric phase is related to closed paths in a Poincaré sphere representation of optical beams [12], and is the orbital equivalent of Pancharatnam's phase which is associated with cyclic transformations on the polarization state of light [13].

The generation of discrete multidimensional entanglement by parametric down conversion with optical beams bearing OAM has been discussed in the literature [14–16]. In contrast to cavity free parametric down conversion, OPOs are an efficient source of continuous variable entanglement in the quadratures of intense optical beams [17,18]. Therefore,

parametric down conversion is a reliable source of quantum entanglement, while OAM may serve as an additional degree of freedom for quantum information processes. However, the properties of OAM in parametric oscillation has received little attention so far. In this article, we study the classical properties of the down converted beams generated by an injected OPO and demonstrate their symmetry properties in the Poincaré sphere [12]. We also describe the driven OPO dynamics when adiabatic mode conversions are performed in the seed beam and calculate a gauge invariant phase contribution for closed paths in the Poincaré sphere. We also propose an experimental setup for measuring this phase from the mutual interference between the down-converted beams. Our work opens the possibility for a future investigation in the quantum domain.

## II. POINCARÉ REPRESENTATION

It is well known that polarization states of a monochromatic light beam can be completely characterized by the Stokes parameters and mapped on the Poincaré sphere. As van Enk suggests in his paper [10], there is a correspondence between the polarization states and the first order transverse modes of the electromagnetic field. Based on this correspondence Padgett and Courtial propose a set of Stokes parameters and an equivalent Poincaré representation for the first order transverse modes [12].

$$p_1 = \frac{I_{HG_{0^\circ}} - I_{HG_{90^\circ}}}{I_{HG_{0^\circ}} + I_{HG_{90^\circ}}}, \quad (1)$$

$$p_2 = \frac{I_{HG_{45^\circ}} - I_{HG_{135^\circ}}}{I_{HG_{45^\circ}} + I_{HG_{135^\circ}}}, \quad (2)$$

$$p_3 = \frac{I_{LG_+} - I_{LG_-}}{I_{LG_+} + I_{LG_-}}, \quad (3)$$

are the Stokes parameters describing a spatial profile belonging to the subspace of first order transverse modes. In a mode decomposition of the beam profile,  $I_\beta$  is the square modulus

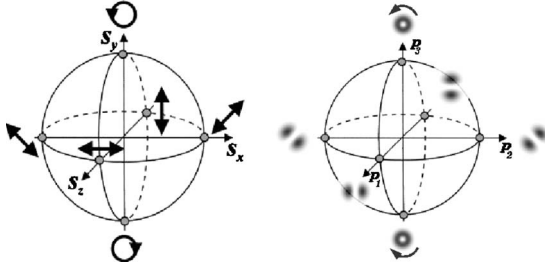


FIG. 1. Poincaré sphere for polarization states (left) and first order transverse modes (right). Notice the correspondence between circular polarization states and LG modes, placed on the poles, and linear polarization states and HG modes, placed on the equator.

of the coefficient of mode  $\beta$ . The first order modes are labeled so that  $LG_{\pm}$  represents the first order Laguerre-Gaussian (LG) mode with topological charge  $\pm 1$ , respectively.  $HG_{\alpha}$  represents a first order Hermite-Gaussian mode ( $TEM_{10}$ ) rotated by an angle  $\alpha$  around the propagation axis. In Fig. 1 we can see the Poincaré sphere for polarization states of a monochromatic beam and the equivalent representation for the first order transverse modes. The Cartesian coordinates on the sphere are the respective Stokes parameters.

In the LG basis, any normalized first order mode can be written as

$$\psi(\vec{r}) = \cos \frac{\theta}{2} \psi_+(\vec{\rho}, z) + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \psi_-(\vec{\rho}, z), \quad (4)$$

where  $\psi_{\pm}$  are the  $LG_{\pm}$  spatial functions of the cylindrical coordinates  $\vec{\rho}$  and  $z$ , and  $\theta$  and  $\phi$  are the angular coordinates on the surface of the Poincaré sphere. The first order spatial modes constitute a vector space homeomorphic to the Hilbert space of a single qubit in quantum mechanics. Therefore, it is useful to represent these modes by the spinors:

$$|\theta, \phi\rangle = \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{2} \theta \\ e^{i\phi} \sin \frac{1}{2} \theta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

In this sense, any lossless mode transformation can be mapped into a unitary operation on a qubit. This representation will be particularly useful to describe the adiabatic phase evolution in Secs. IV and VI.

In the definition of the spinor given by Eq. (5) there is a free choice for the global phase, which has been made in order to give a spinor with real components for the north pole of the Poincaré sphere. This choice, together with the normalization condition, makes it possible to represent a given spatial mode with only two parameters  $\theta$  and  $\phi$ . In terms of these angular coordinates, the Stokes parameters are simply given by

$$\begin{aligned} p_1 &= \sin \theta \cos \phi, \\ p_2 &= \sin \theta \sin \phi, \\ p_3 &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

### III. TRANSVERSE MODE DYNAMICS

#### A. Equations of motion

Let us consider a confocal resonator where even and odd modes are not frequency degenerate, i.e., they do not resonate at the same cavity length [19]. Therefore, for a given cavity tuning, we can only have one kind of transverse mode (even or odd) for each wavelength undergoing the nonlinear interaction. When the cavity length is scanned with a piezoelectric transducer (PZT), there will be positions where the  $TEM_{00}$  Airy peaks of the pump coincides with the  $TEM_{00}$  Airy peaks of signal and idler, these positions correspond to the usual OPO operation condition. However, there will also be positions on the cavity scan where a  $TEM_{00}$  Airy peak of the pump coincides with a  $TEM_{01/10}$  Airy peak of signal and idler. This last cavity tuning is the one we shall consider in our model. For this tuning, simultaneous operation of the three beams on the  $TEM_{00}$  mode is impossible. It is important to mention that the positions of the pump Airy peaks relative to those of signal and idler can be adjusted by controlling the crystal temperature.

We now derive the dynamical equations for an optical parametric oscillator (OPO) operating under cavity conditions such that the pump laser is matched to a  $TEM_{00}$  cavity mode and the down-converted beams are amplified with spatial profiles belonging to the first order modes subspace. As we mentioned above, this situation can be realized by a suitable tuning of the OPO cavity, combined with temperature control of the nonlinear crystal. Therefore, the intra cavity pump field  $E_p(\vec{r})$  can be written as

$$E_p(\vec{r}) = \alpha_p \psi_{00}(\vec{\rho}, z), \quad (7)$$

where  $\alpha_p$  is the pump amplitude and  $\psi_{00}(\vec{\rho}, z)$  is the  $TEM_{00}$  mode profile.

Now, let us decompose the intra cavity signal and idler fields  $E_j(\vec{r})$  ( $j=s, i$ ) into a linear superposition of first order LG modes:

$$E_j(\vec{r}) = \alpha_-^j \psi_-(\vec{\rho}, z) + \alpha_+^j \psi_+(\vec{\rho}, z), \quad (8)$$

where  $\alpha_{\pm}^j$  represent the dynamical variables corresponding to the complex amplitudes of the intra cavity modes. Alternatively, a given field structure can be represented by the intensity  $I_j = |\alpha_-^j|^2 + |\alpha_+^j|^2$  and the corresponding spinor  $|\theta, \phi\rangle_j$  which we shall use to describe the adiabatic phase evolution.

We will consider the dynamics of an injected OPO where two input fields are sent to the OPO cavity. The pump input is mode matched to the  $TEM_{00}$  mode and is described by the complex amplitude  $\alpha_{in}^p$ . We also assume an incoming seed at the signal field which is prepared in a spatial mode corresponding to a given point in the Poincaré sphere. The input seed is then described by two complex amplitudes  $\alpha_+^{s(in)}$  and  $\alpha_-^{s(in)}$  which are its components in the Laguerre-Gaussian basis.

In terms of the mode amplitudes, the dynamical equations for the injected OPO are [20]

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = -(\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_p - \chi(\alpha_+^s \alpha_-^i + \alpha_-^s \alpha_+^i) + \eta_p \alpha_{in}^p,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\alpha_+^s}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_+^s + \chi\alpha_-^{i*}\alpha_p + \eta_s\alpha_+^{s(\text{in})}, \\
 \frac{d\alpha_-^s}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_-^s + \chi\alpha_+^{i*}\alpha_p + \eta_s\alpha_-^{s(\text{in})}, \\
 \frac{d\alpha_+^i}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_+^i + \chi\alpha_-^{s*}\alpha_p, \\
 \frac{d\alpha_-^i}{dt} &= -(\kappa + i\Delta)\alpha_-^i + \chi\alpha_+^{s*}\alpha_p,
 \end{aligned} \tag{9}$$

where  $\kappa_p$  and  $\Delta_p$  are, respectively, the cavity damping rate and the frequency detuning for the pump field;  $\kappa$  and  $\Delta$  are, respectively, the common cavity damping rate and frequency detuning for the down-converted fields; and the constants  $\eta_j = \sqrt{T_j}/\tau_j$  ( $j=p, s$ ) are the coupling between the input fields and the fields inside the cavity.  $T_j$  and  $\tau_j$  are, respectively, the input mirror transmission coefficient and the cavity round trip time for each field. The nonlinear coupling constant  $\chi$  rules the energy exchange between pump and down-converted fields. It is proportional to the spatial overlap between the transverse modes and to the effective second-order nonlinear susceptibility of the crystal [20].

### B. Free running OPO

It is interesting to consider first the case of a free running OPO, for which we take  $\alpha_{\pm}^{s(\text{in})} = 0$ . For simplicity, we shall assume resonant operation ( $\Delta = \Delta_p = 0$ ). In this case, as shown in Appendix A, the steady state solution of the dynamical equations gives

$$\begin{aligned}
 |\alpha_+^s| &= |\alpha_-^i|, \\
 |\alpha_-^s| &= |\alpha_+^i|,
 \end{aligned} \tag{10}$$

The individual values of  $|\alpha_{\pm}^j|$  are not fixed by the dynamical equations. They depend on the initial conditions, more specifically on the initial value of the ratio between the intensities of the LG $_{\pm}$  modes in each down converted beam. However, the total signal and idler intensities are well defined and have the same value, as can be easily deduced from Eqs. (10). This *degeneracy* is reminiscent of the implicit symmetry assumed in the dynamical equations. If cavity and/or crystal anisotropies are considered, then a rather more complicated scenario shows up as discussed in Ref. [5].

Another degeneracy becomes evident when we consider the steady state values for the phases of the modes amplitudes. By taking  $\phi_{\text{in}}^p = 0$ , we arrive at

$$\begin{aligned}
 \phi^p &= 0, \\
 \phi_+^s + \phi_-^i &= 0, \\
 \phi_-^s + \phi_+^i &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Again, the individual values of  $\phi_{\pm}^s$  and  $\phi_{\pm}^i$  are not fixed by the dynamical equations and should also depend on the initial conditions.

Solving the steady state equations for the intracavity pump intensity  $I_p \equiv |\alpha_p|^2$  we obtain the usual clipping value

$$I_p = \left(\frac{\kappa}{\chi}\right)^2. \tag{12}$$

The stationary value of the total intensity in the LG $_{\pm}$  modes is given by

$$I = |\alpha_+^j|^2 + |\alpha_-^j|^2 = \frac{\kappa_p}{\chi} \left( \frac{\eta_p \alpha_{\text{in}}^p}{\kappa_p} - \frac{\kappa}{\chi} \right), \tag{13}$$

for  $j=s, i$ .

It is instructive to look at these degeneracies in terms of the Poincaré representation of transverse modes. Let us write the complex mode amplitudes as

$$\begin{aligned}
 \alpha_+^s &= \sqrt{I} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi_+^s}, \\
 \alpha_-^s &= \sqrt{I} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi_-^s}, \\
 \alpha_+^i &= \sqrt{I} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi_+^i}, \\
 \alpha_-^i &= \sqrt{I} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi_-^i}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

In terms of Eq. (5), apart from an overall phase factor, the spinor for the signal field is  $|\varphi_s\rangle = |\theta, \phi\rangle$ , while the one for the idler is  $|\varphi_i\rangle = |\pi - \theta, \phi\rangle$ . The corresponding Stokes parameters are

$$\begin{aligned}
 p_1^s &= p_1^i = \sin \theta \cos \phi, \\
 p_2^s &= p_2^i = \sin \theta \sin \phi, \\
 p_3^s &= -p_3^i = \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{15}$$

where  $\phi \equiv \phi_-^s - \phi_+^s = \phi_-^i - \phi_+^i$ . Therefore, the Stokes parameters of signal and idler fields correspond to points on the Poincaré sphere symmetrically disposed with respect to the equatorial plane, as described in Fig. 2. Since  $\theta$  and  $\Delta\phi$  are not fixed, they are free to diffuse and the steady state for the down converted fields can fall at any pair of points on the sphere, as far as they respect this symmetry. Physically, it means that signal and idler have the same intensity distribution, and therefore optimal spatial overlap, but opposite helicities due to OAM conservation.

Of course, conservation laws are connected to symmetries. In the dynamical equations (9) we have implicitly assumed that the OPO cavity and crystal present cylindrical symmetry. The main anisotropy present in an OPO is the crystal birefringence. In Ref. [5], the operation of a type-II OPO driven by a Laguerre-Gaussian pump was observed for the first time with transfer of OAM to the idler beam, but not to the signal. For a type-II OPO, signal and idler have orthogonal polarizations, and astigmatic effects induced by the crystal birefringence prevents the OAM transfer to the signal

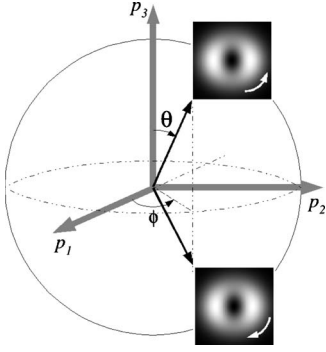


FIG. 2. Correlation imposed by optimal spatial overlap and orbital angular momentum conservation. Signal and idler are represented by two points on the Poincaré sphere symmetrically disposed with respect to the equatorial plane.

beam. In fact, as discussed in Ref. [5], a birefringence dependent astigmatism will cause a frequency split between transverse modes that conserve OAM. For this reason, we will propose an experimental setup based on a type-I OPO, where signal and idler have the same polarization. The model used here requires a sufficient cavity degeneracy (resonance split sufficiently smaller than the cavity linewidth) and this is why we propose the type I geometry where it is possible to attain quasidegenerate signal and idler spatial modes. In this case, the pump mode will not be significantly affected by the astigmatism, since no resonance split applies to a  $\text{TEM}_{00}$  mode.

The treatment of the nondeterministic dynamics with the addition of noise terms to the dynamical equations will be left for a future investigation. However, we can build a physical picture from the Poincaré representation which allows us to infer some of the main characteristics of the noisy evolution. In fact, the addition of noise should drive the down converted fields along random trajectories in the Poincaré sphere. This is analogous to the random trajectory delineated by the electric field phasor in a geometric representation of laser phase diffusion in the complex plane. In analogy, we can think of random trajectories in the Poincaré sphere as a *mode diffusion*. Of course, higher order modes may play an important role in the noisy evolution of the free running OPO, and a considerable improvement of the model might be necessary. However, in the case of an injected OPO, the seed field will force stable operation in a given point on the Poincaré sphere, thus avoiding the above mentioned mode diffusion. In this case, higher order modes may still contribute to noise but not to the macroscopic behavior of the amplified modes.

### C. Injected OPO

Let us now consider a signal seed prepared in an arbitrary superposition of first order modes represented on the Poincaré sphere by the polar and azimuth angles  $\theta$  and  $\phi$ , as shown in Fig. 2. The injected signal is then represented by the following amplitudes:

$$\alpha_+^{s(\text{in})} = \sqrt{I_s^{\text{in}}} \cos \frac{\theta_0}{2}, \quad (16)$$

$$\alpha_-^{s(\text{in})} = \sqrt{I_s^{\text{in}}} \sin \frac{\theta_0}{2} e^{i\phi_0}, \quad (17)$$

and its corresponding spinor is  $|\theta_0, \phi_0\rangle$ .

With this choice for the injection field, the dynamical equations are simplified by the definition of a new set of transformed amplitudes  $\alpha_j$  and  $\alpha'_j$  ( $j=s, i$ ) given by

$$\alpha_s = \cos \frac{\theta_0}{2} \alpha_+^s + \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-i\phi_0} \alpha_-^s,$$

$$\alpha_i = \sin \frac{\theta_0}{2} e^{i\phi_0} \alpha_+^i + \cos \frac{\theta_0}{2} \alpha_-^i,$$

$$\alpha'_s = -\sin \frac{\theta_0}{2} \alpha_+^s + \cos \frac{\theta_0}{2} e^{-i\phi_0} \alpha_-^s,$$

$$\alpha'_i = \cos \frac{\theta_0}{2} e^{i\phi_0} \alpha_+^i - \sin \frac{\theta_0}{2} \alpha_-^i. \quad (18)$$

The dynamical equations can be rewritten in terms of the transformed amplitudes and one can easily show that the steady state solutions for  $\alpha'_j$  vanish (see Appendix B). Therefore, only three complex amplitudes  $\alpha_p$ ,  $\alpha_s$ , and  $\alpha_i$  are left.

The new equations of motion are

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = -(\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_p - \chi\alpha_s\alpha_i + \eta_p\alpha_p^{\text{in}},$$

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_s + \chi\alpha_i^*\alpha_p + \eta_s\sqrt{I_s^{\text{in}}},$$

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_i + \chi\alpha_s^*\alpha_p. \quad (19)$$

The stationary behavior is obtained from the steady-state solutions of Eqs. (19). We shall consider, for simplicity, that the interacting fields are resonant with the optical cavity ( $\Delta = \Delta_p = 0$ ). By setting the time derivatives equal to zero in the dynamical equations, we arrive at a set of algebraic equations which can be solved for the steady-state amplitudes.

The steady-state solutions for the down-converted modes can be put in a simple form in terms of the pump mode steady-state solution,

$$\alpha_s = \frac{\eta_s\kappa\sqrt{I_s^{\text{in}}}}{(\kappa^2 - \chi^2|\alpha_p|^2)},$$

$$\alpha_i = \frac{\eta_s\chi\sqrt{I_s^{\text{in}}}\alpha_p}{(\kappa^2 - \chi^2|\alpha_p|^2)}. \quad (20)$$

These are the solutions for the transformed mode amplitudes. In order to evidence the dependence of the steady state solutions on the Poincaré sphere coordinates of the injected signal, we must transform back to the  $\text{LG}_{\pm}$  basis by inverting Eqs. (18) and using Eqs. (20). The resulting field amplitudes for signal and idler are



$$\begin{aligned}
 E_s(\vec{r}) &= \frac{\eta_s \kappa \sqrt{I_s^{\text{in}}}}{(\kappa^2 - \chi^2 |\alpha_p|^2)} \\
 &\times \left[ \cos \frac{\theta_0}{2} \psi_+(\vec{\rho}, z) + e^{i\phi_0} \sin \frac{\theta_0}{2} \psi_-(\vec{\rho}, z) \right], \\
 E_i(\vec{r}) &= \frac{\eta_s \chi \sqrt{I_s^{\text{in}}} \alpha_p}{(\kappa^2 - \chi^2 |\alpha_p|^2)} e^{-i\phi_0} \\
 &\times \left[ \sin \frac{\theta_0}{2} \psi_+(\vec{\rho}, z) + e^{i\phi_0} \cos \frac{\theta_0}{2} \psi_-(\vec{\rho}, z) \right]. \quad (21)
 \end{aligned}$$

From these amplitudes, it is clear that the intracavity signal field corresponds to the spinor  $|\theta_0, \phi_0\rangle$ , while the idler field corresponds to  $|\pi - \theta_0, \phi_0\rangle$ . The same correlation was predicted for the free running OPO, but now the injection seed drives the OPO operation and the spinors are no longer free to diffuse. Signal and idler now operate at stable points in the Poincaré sphere. This is also expressed by the Stokes parameters of the down-converted beams, which can be readily calculated from definitions (1)–(3):

$$\begin{aligned}
 p_1^s &= p_1^i = \sin \theta_0 \cos \phi_0, \\
 p_2^s &= p_2^i = \sin \theta_0 \sin \phi_0, \\
 p_3^s &= -p_3^i = \cos \theta_0. \quad (22)
 \end{aligned}$$

The solutions for the modulus  $|\alpha_p|$  of the pump mode amplitude are given by the roots of a fifth order polynomial

$$b^2 |\alpha_p| + (|\alpha_p| - a) \left( |\alpha_p|^2 - \frac{\kappa^2}{\chi^2} \right)^2 = 0, \quad (23)$$

where  $a = \eta_p |\alpha_p^{\text{in}}| / \kappa_p$ , and  $b = \eta_s \kappa |\alpha_s^{\text{in}}| / (\chi \sqrt{\kappa \kappa_p})$ .

There is no algorithm to find analytical expressions for the roots of a fifth order polynomial. However, simple approximate expressions can be given for some operation regimes of the OPO. In Ref. [21] these expressions are presented together with a linear stability analysis showing that the stable solutions satisfy  $|\alpha_p| < \kappa / \chi$ .

#### IV. ADIABATIC MODE CONVERSION AND PHASE CONJUGATION: AN EXPERIMENTAL PROPOSAL

Let us consider the injected OPO described above. A cyclic transformation performed adiabatically on the injection mode, equivalent to a slow variation of  $\theta$  and  $\phi$  in Eqs. (16) and (17), will cause the down converted beams to perform closed paths on the Poincaré sphere. Since signal and idler have the same values for the Stokes parameters  $p_1$  and  $p_2$ , and opposite signs of the  $p_3$ , they will perform symmetric paths with respect to the equator of the Poincaré sphere. Closed paths will be followed in opposite senses with respect to the unit vector normal to the sphere, as described in Fig. 3.

The idea is to drive the OPO adiabatically through a cyclic transformation during a time scale slow enough to consider the system approximately stationary at each moment. More precisely, we propose to inject a type-I OPO (to avoid

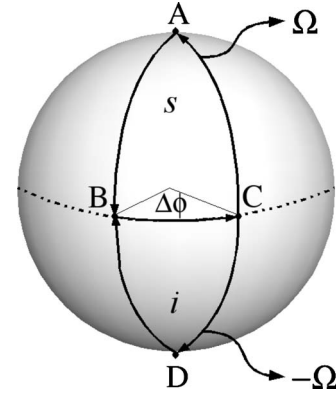


FIG. 3. Poincaré representation of the transformations performed on signal and idler beams.

astigmatic effects) with an optical beam initially prepared in a given point of the Poincaré sphere, and to modify the setup adiabatically in order to drive the OPO slowly through a cyclic evolution. In the case of frequency degeneracy, the relative phase acquired by the down-converted beams can then be measured by their mutual interference.

Nevertheless, frequency degeneracy, although experimentally desirable, is not strictly necessary. For a frequency non-degenerate type-I OPO, the equations of motion for signal and idler amplitudes are the same as those presented in the model, with the mode amplitudes distinguished by both, spatial and frequency labels. Therefore, all conclusions drawn in this work are not affected by this assumption. From the experimental point of view, the signal-idler interference would have to be measured as a spatial map of the beating between signal and idler. For example, with a small fast detector displaced across the beams and a spectrum analyzer. Of course, this is more difficult than a simple interference pattern acquisition, but is fairly feasible.

Consider, for example, the setup sketched in Fig. 4(a). A dual wavelength laser source provides both the OPO pump at the visible wavelength (VIS) and the injection seed at the infrared (IR). The injection beam is sent to a mode preparation setup where arbitrary modes on the Poincaré sphere can be produced. The mode preparation settings are then adiabatically varied in order to drive the OPO injection over a given path on the sphere. The adiabatic character of this evolution is important to ensure that the idler beam produced by the OPO preserves its symmetry in the Poincaré sphere with respect to the signal beam. Therefore, the mode preparation settings must be varied in a time scale much longer than the cavity lifetime  $2\pi/\kappa$  for the down-converted beams. At the OPO output, the IR beams are transmitted through a dichroic mirror (DM), where they are separated from the visible pump beam, and spatially interfere on the screen of a CCD camera. In the case of a type II OPO, the down-converted beams have orthogonal polarizations, so that a polarizer (POL) oriented at  $45^\circ$  with respect to their polarizations must be introduced in order to provide interference.

The mode preparation setup is described in Fig. 4(b). Two Laguerre-Gaussian modes with opposite helicities and orthogonal polarizations are sent to a phase shifter which con-



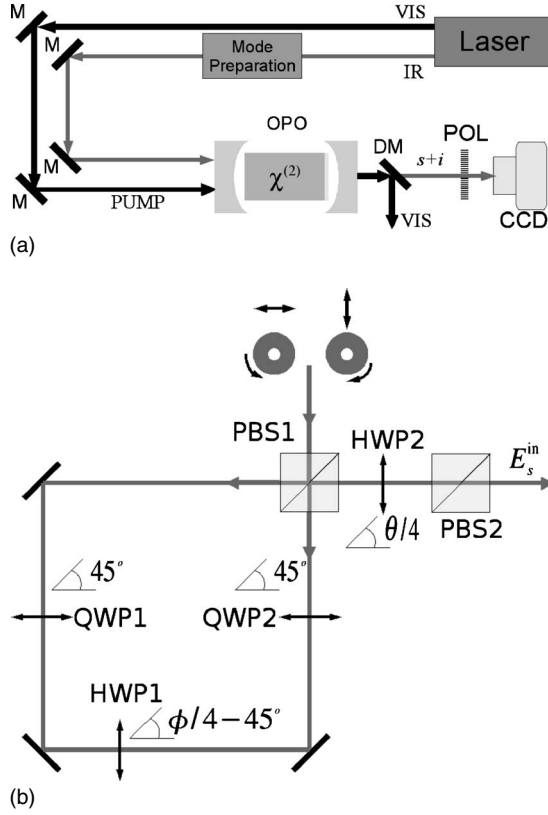


FIG. 4. (a) Proposed experimental setup for measuring the adiabatic phase conjugation.  $M$ =mirror;  $DM$ =dichroic mirror;  $POL$ =polarizer. (b) Mode preparation setup.  $PBS$ =polarizing beam splitter.

sists of a Sagnac interferometer with a polarizing beam splitter ( $PBS$ ) as the input-output port, two quarter-wave plates and one half-wave plate. The quarter-wave plates are oriented at  $45^\circ$  with respect to the horizontal axis. The orientation of the half-wave plate can be varied and it is convenient to write it as  $\phi/4 - 45^\circ$ . With this configuration, the relative phase between the counter-propagating beams in the output of the phase shifter is  $\phi$ . Finally, after recombining at the output of the Sagnac interferometer, the two phase shifted modes pass through a second half-wave plate at a variable orientation  $\theta/4$  and another polarizing beam splitter. The resulting field profile is

$$E_s^{\text{in}} = \sqrt{I_s^{\text{in}}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \psi_+(\vec{\rho}, z) + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \psi_-(\vec{\rho}, z) \right], \quad (24)$$

which corresponds to the spinor  $|\theta, \phi\rangle$  and is equivalent to the injection amplitudes given by Eqs. (16) and (17). Therefore, the injection field can be prepared at any point on the Poincaré sphere by proper orientation of the half wave plates, and can be continuously varied along any path in the sphere.

## V. GAUGE INVARIANT PHASE EVOLUTION

We consider an injected seed with fixed intensity  $I_s^{\text{in}}$  and a time varying spinor  $|\varphi_{\text{in}}(t)\rangle = U(t)|0, 0\rangle$ , following a unitary evolution  $U(t)$  and starting from the north pole of the

Poincaré sphere. The complex amplitudes of the seed to be plugged in the dynamical equations are

$$\alpha_+^{s(\text{in})}(t) = \sqrt{I_s^{\text{in}}} \langle 0, 0 | \varphi_{\text{in}}(t) \rangle, \quad (25)$$

$$\alpha_-^{s(\text{in})}(t) = \sqrt{I_s^{\text{in}}} \langle \pi, 0 | \varphi_{\text{in}}(t) \rangle, \quad (26)$$

where the time variation is supposed to be much slower than the cavity lifetime  $2\pi/\kappa$ , in such a way that the system follows an adiabatic evolution driven by the injected seed. Unitary evolutions on the Poincaré sphere are represented by different forms of the operator  $U(t)$ . Counterclockwise rotations by an angle  $\theta = \omega t$  around the axis passing through the center of the sphere and crossing the equator at the azimuthal angle  $\phi$  are represented by

$$C(\omega t, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{2} \omega t & -ie^{-i\phi} \sin \frac{1}{2} \omega t \\ -ie^{i\phi} \sin \frac{1}{2} \omega t & \cos \frac{1}{2} \omega t \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Counterclockwise rotations by an angle  $\phi = \omega t$  around the polar axis are represented by

$$R(\omega t) = \begin{bmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

In Ref. [22] Mukunda and Simon considered the evolution of a state vector  $|\varphi(t)\rangle$  along a path  $C_0$  in Hilbert space parametrized by  $t$ , from a starting time  $t_1$  until  $t_2$ . The overall phase factor acquired along  $C_0$  is  $\gamma_{\text{tot}} = \arg[\langle \varphi(t_1) | \varphi(t_2) \rangle]$ . They identified a contribution to the overall phase factor which is invariant under gauge transformations of the kind

$$|\varphi'(t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |\varphi(t)\rangle. \quad (29)$$

The gauge invariant phase contribution is given by the functional:

$$\gamma_{\text{inv}}[C_0] = \arg[\langle \varphi(t_1) | \varphi(t_2) \rangle] - \text{Im} \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \varphi(t) | \dot{\varphi}(t) \rangle, \quad (30)$$

where the dot in the second term indicates differentiation with respect to  $t$ . For any path  $C'_0$  obtained from  $C_0$  by the gauge transformation (29)  $\gamma_{\text{inv}}[C'_0] = \gamma_{\text{inv}}[C_0]$ . In their work, Mukunda and Simon called the second term in the right-hand side of Eq. (30) the *dynamical phase*, while the gauge invariant contribution was named the *geometric phase*. However, we shall avoid this denomination since, contrary to usual manifestations of geometric phase, there are no unconstrained degrees of freedom in the driven OPO.

The evolution operators given by Eqs. (27) and (28) will be used to describe the operations in the experimental setup to perform the desired mode conversions. Therefore, it is important to evaluate the dynamical phase given by these operations in order to correctly identify the invariant phase contribution. So, let us consider an arbitrary initial spinor  $|\varphi(0)\rangle = |\theta_0, \phi_0\rangle$ . The dynamical phase evolution under the action of  $C(\omega t, \phi)$  is

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{dyn}}(C) &= \text{Im} \int_0^t dt \langle \varphi(0) | C^\dagger \dot{C} | \varphi(0) \rangle \\ &= -\frac{\omega t}{2} \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0).\end{aligned}\quad (31)$$

It is easy to see that any evolution with an operator  $C$  starting from the poles ( $\theta_0=0$  or  $\pi$ ) gives zero dynamical contribution. Starting from any point on the sphere, the dynamical contribution also vanishes for geodesic trajectories lying on the great circle passing through the initial point and the poles ( $\phi - \phi_0 = \pm \pi/2$ ).

For the action of  $R(\omega t)$  the same calculation gives

$$\gamma_{\text{dyn}}(R) = \text{Im} \int_0^t dt \langle \varphi(0) | R^\dagger \dot{R} | \varphi(0) \rangle = -\frac{\omega t}{2} \cos \theta_0. \quad (32)$$

In this case, the dynamical contribution is zero only for trajectories lying on the equator ( $\theta_0 = \pi/2$ ). Notice from Eq. (32) that, for a given rotation sense ( $\omega > 0$ , for example) in the north pole, this dynamical phase will be opposite to the one acquired in the south pole. As we shall see shortly, this will be useful for dynamical phase compensation in one of the cyclic evolutions we consider.

Let us consider two kinds of cyclic evolutions, both starting from the north pole of the Poincaré sphere. In the first path, the injection seed follows the path  $ABCA$ , as shown in Fig. 3, corresponding to a solid angle  $\Omega = \Delta\phi$  in the Poincaré sphere, where  $\Delta\phi$  is the azimuthal angle enclosed by the path on the equator. For this path the dynamical contribution is zero and the phase acquired by the seed should be  $\gamma_{\text{in}} = -\Delta\phi/2$ . During the time evolution of the seed, the signal field is adiabatically driven through the same path and acquires the same phase, while the idler follows the symmetric path  $DBCD$ , so that it acquires the conjugate phase  $\gamma_i = -\gamma_s = \Delta\phi/2$ . Therefore, the phase difference between the down-converted beams is increased by  $\Delta\phi$  and can be measured by the change in their mutual interference pattern. It is interesting to interpret this evolution in terms of the mode preparation setup shown in Fig. 4(b). At  $t=0$  the half-wave plate inside the Sagnac interferometer (HWP1) is oriented at  $\phi = 0$  and the one outside the interferometer (HWP2) is oriented at  $\theta = 0$ . The evolution on path  $AB$  is implemented by rotating HWP2 until  $\theta = \pi/2$ , what is represented by the action of the unitary operator  $C(\pi/2, \pi/2)$  on  $|\varphi_{\text{in}}(0)\rangle$ . Notice that the actual rotation angle of the wave plate is  $\theta/4$ , as indicated in Fig. 4(b). Then, the evolution on path  $BC$  is performed by rotating HWP1 by an angle  $\Delta\phi/4$ , what is described by  $R(\Delta\phi)$ . Finally, the evolution on  $CA$  is performed by rotating HWP2 back to  $\theta = 0$ , which corresponds to the action of  $C(-\pi/2, \pi/2 + \Delta\phi)$ . Therefore, the spinor representing the final injected mode is

$$\begin{aligned}|\varphi_{\text{in}}(t)\rangle &= C\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) R(\Delta\phi) C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) |0,0\rangle \\ &= e^{-i\Delta\phi/2} |0,0\rangle.\end{aligned}\quad (33)$$

Now, consider the path passing through the sequence  $ABDCA$ , as shown in Fig. 3, corresponding to a solid angle  $\Omega = 2\Delta\phi$  in the Poincaré sphere. The seed and the signal field should now acquire a phase  $\gamma_s = -\Delta\phi$ , while the idler, following the symmetric path  $DBACD$ , should acquire the conjugate phase  $\gamma_i = -\gamma_s = \Delta\phi$ . Now, the phase difference between the down-converted beams is increased by  $2\Delta\phi$ . In terms of the experimental proposal, again starting with HWP1 at  $\phi = 0$  and HWP2 at  $\theta = 0$ , path  $ABD$  is implemented by rotating HWP2 until  $\theta = \pi$  (actual rotation of the wave plate by an angle  $\pi/4$ ). This is represented by the action of  $C(\pi, \pi/2)$ . The way back to the north pole through the path  $DCA$  is performed by the action of  $C(-\pi, \Delta\phi + \pi/2)$ . In order to do so, we first turn HWP1 by an angle  $\Delta\phi/4$ , what corresponds to the action of  $R(\Delta\phi)$  on  $|\pi, 0\rangle$ . According to Eq. (32), this introduces a dynamical phase  $\exp(i\Delta\phi/2)$ , which can be compensated at the end of the cyclic evolution. Then, HWP2 is rotated back to  $\theta = 0$  with HWP1 fixed, which corresponds to the action of  $C(-\pi, \pi/2 + \Delta\phi)$  on  $|\pi, 0\rangle$ .

Finally, the dynamical phase acquired when HWP1 is rotated by  $\omega t/4 = \Delta\phi/4$  on the south is opposite to the one acquired when it is rotated on the north pole by the same angle. Therefore, this dynamical phase can be compensated by a further rotation of HWP1 on the north pole by the same angle, in the *same* direction, giving a final orientation of HWP1 at  $\Delta\phi/2$ . Therefore, the spinor representing the final injected mode is

$$\begin{aligned}|\varphi_{\text{in}}(t)\rangle &= R(\Delta\phi) C\left(-\pi, \frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) R(\Delta\phi) C\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) |0,0\rangle \\ &= e^{-i\Delta\phi} |0,0\rangle.\end{aligned}\quad (34)$$

Alternatively, the dynamical phase acquired in the south pole can be compensated by a suitable adjustment of the length of the Sagnac interferometer. This adjustment could be monitored by a reference interference pattern on the other output port of PBS2.

## VI. NUMERICAL RESULTS

Now, let us investigate the time evolution of a resonant OPO ( $\Delta = \Delta_p = 0$ ) under the unitary operations considered above. This will be done by numerical integration of the dynamical equations (9), with time expressed in units of  $1/\kappa$  and the nonlinear coupling  $\chi$  expressed in units of  $\kappa$ . We used a typical value  $\chi/\kappa = 0.01$ , and considered a good quality cavity for the down converted fields so that  $\kappa_p = 10\kappa$ .

We now define the normalized pump and injection strengths as

$$\mu_0 = \frac{\eta_p \chi}{\kappa \kappa_p} \alpha_p^{\text{in}} \quad (35)$$

and

$$\mu_1 = \frac{\eta_s \chi}{\kappa \sqrt{2} \kappa \kappa_p} \sqrt{I_s^{\text{in}}}, \quad (36)$$

respectively. The noninjected OPO threshold is attained when  $\mu_0 = 1$ . In the numerical integration we considered the

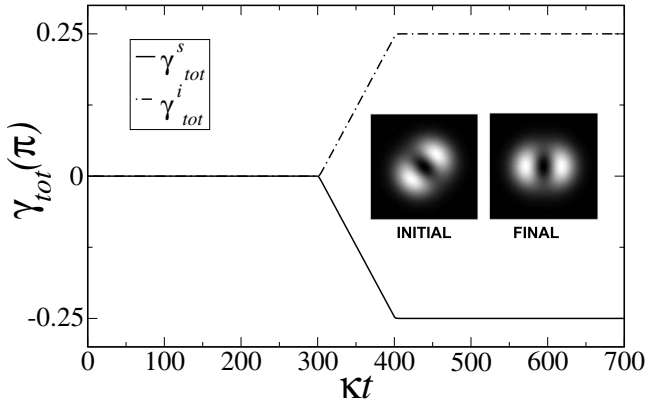


FIG. 5. Evolution of the total phase for signal and idler in units of  $\pi$  calculated from numerical integration of the dynamical equations. Time is expressed in terms of the dimensionless quantity  $\kappa t$ . The inset shows the calculated interference patterns before and after the cyclic evolution along path *ABCA*.

pump and injection strengths constant ( $\mu_0=2$  and  $\mu_1=1.5$ ) while the spinor  $|\varphi_{in}(t)\rangle$  follows a cyclic unitary evolution starting from the north pole. All transformations will be supposed to occur in a time scale  $\kappa t \gg 1$ , so that the OPO can adiabatically follow the injected seed.

Let us consider trajectory *ABCA*. First, the dynamical equations are integrated with all parameters fixed in the interval  $0 < \kappa t < 100$  until the system reaches the steady state. Then, for  $100 < \kappa t < 200$  the injection seed is driven through the unitary evolution  $C(\omega t, 0)$  (rotation of HWP2) until it reaches point *B* in the equator. For  $200 < \kappa t < 300$  the injection seed follows the unitary evolution  $R(\omega t)$  (rotation of HWP1) until it reaches point *C*. Finally, for  $300 < \kappa t < 400$ , the injection seed is driven back to the north pole by the action of  $C(-\omega t, \pi/2)$  (backward rotation of HWP2). The complete cycle encloses one eighth of the Poincaré sphere, corresponding to a solid angle  $\pi/2$ . As discussed in Sec. V, there is no dynamical phase for this cycle. The evolution of the relative phase between the intracavity modes can be followed from their interference pattern. In Fig. 5 we plot the time evolution of the total phase

$$\gamma_{tot}^j = \arg[\langle \varphi^j(0) | \varphi^j(t) \rangle]$$

( $j=s, i$ ) for signal and idler. Phase conjugation is clear from the symmetry between the two curves. A simple calculation shows that the interference pattern between signal and idler is rotated by an angle equal to one half the variation of their relative phase, which in this case is equal to  $\pi/4$ . This is also confirmed by the numerical results, as displayed in the inset of Fig. 5.

For trajectory *ABDCA*, the dynamical equations are initially integrated with all parameters fixed in the interval  $0 < \kappa t < 100$  until the system reaches the steady state. Then, for  $100 < \kappa t < 200$  the injection seed is driven through the unitary evolution  $C(\omega t, 0)$  (rotation of HWP2) until it reaches the south pole *D*, passing through point *B* in the equator. In order to find the way back to the north pole through another point in the equator, HWP1 must be rotated

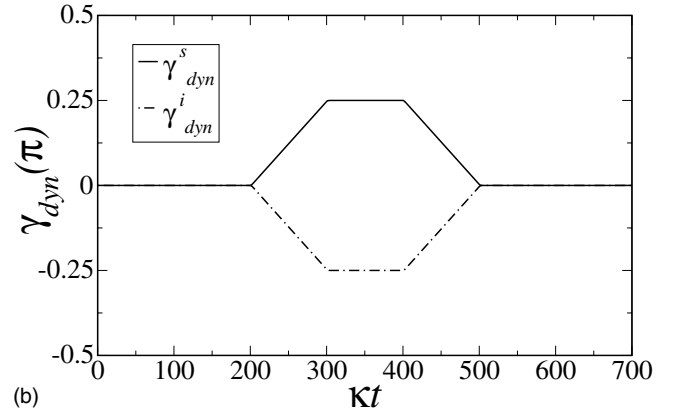
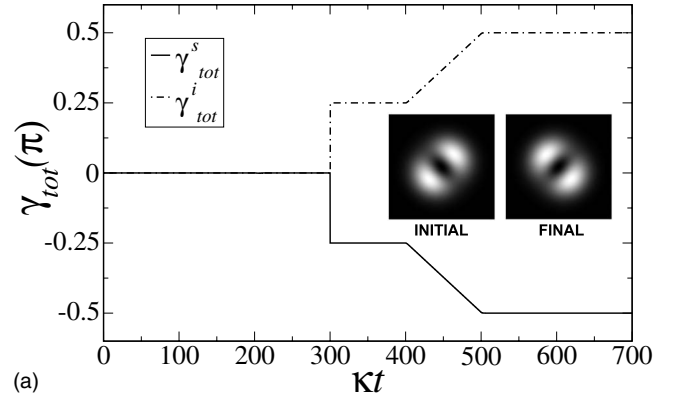


FIG. 6. (a) Evolution of the total phase for signal and idler in units of  $\pi$  calculated from numerical integration of the dynamical equations. Time is expressed in terms of the dimensionless quantity  $\kappa t$ . The inset shows the calculated interference patterns before and after the cyclic evolution along path *ABDCA*. (b) Time evolution of the dynamical phase for signal and idler calculated from numerical integration of the dynamical equations.

before HWP2 is brought back to its initial orientation. This operation does not change the injected mode but introduces a dynamical phase which has to be compensated at the end. Therefore, for  $200 < \kappa t < 300$  the injection seed follows the unitary evolution  $R(\omega t)$  until  $\omega t = \pi/2$ . Finally, for  $300 < \kappa t < 400$ , the injection seed is driven by the action of  $C(-\omega t, \pi/2)$  until it gets back to the north pole. The complete cycle encloses one quarter of the Poincaré sphere, corresponding to a solid angle  $\pi$ . Now, the dynamical phase acquired in the south pole has to be compensated. As we discussed in Sec. V, this can be done by further rotating HWP1 in the same sense, which corresponds to a last action of  $R(\omega t)$ , until  $\omega t = \pi/2$ . This operation is performed during  $400 < \kappa t < 500$ .

In Fig. 6(a) we plot the time evolution of the total phase  $\gamma_{tot}^j$  for signal and idler. Phase conjugation is again clear from the symmetry between the two curves. The corresponding rotation of the interference pattern is also confirmed, as displayed in the inset of Fig. 6(a). In Fig. 6(b), we plot the evolution of the dynamical phase. Both, its increase during  $200 < \kappa t < 300$  and its compensation during  $400 < \kappa t < 500$  are evidenced in the curves.

## VII. CONCLUSIONS

In conclusion, we studied the classical dynamics of an optical parametric oscillator injected with a signal seed initially prepared in a transverse mode carrying orbital angular momentum. Using the Poincaré sphere representation of first order spatial modes, we established a symmetry property between the down converted beams. We also calculated a gauge invariant phase evolution when closed paths in the Poincaré sphere are adiabatically performed on the injected beam preparation. We proposed an experimental setup for measuring this effect. One interesting aspect is the memory of the adiabatic evolution registered in the image of an interference pattern. The investigation of this effect in the quantum domain is left for a future work. In fact, there have been a number of recent studies on the spatial distribution of quantum noise in OPOs, with potential applications to high precision position measurements [23]. We believe that our results can serve as an additional tool for this field.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge financial support from the Brazilian funding agencies CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), and FAPERJ (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro). We also would like to thank P. H. Souto Ribeiro for fruitful discussions.

## Appendix A

We now proceed to derive the steady state solutions for the free-running OPO with  $\Delta_p = \Delta = 0$  and no injected signal ( $\alpha_{\pm}^{s(\text{in})} = 0$ ). By setting the left-hand side of Eqs. (9) equal to zero, we arrive at a set of algebraic equations for the mode amplitudes.

Let us first consider the two equations obtained for  $\alpha_+^s$  and  $\alpha_-^i$ :

$$\begin{aligned}\kappa\alpha_+^s &= \chi\alpha_-^{i*}\alpha_p, \\ \kappa\alpha_-^i &= \chi\alpha_+^{s*}\alpha_p.\end{aligned}\quad (\text{A1})$$

Writing the complex amplitudes in polar representation, one can trivially derive the relation between their absolute values,

$$|\alpha_+^s| = |\alpha_-^i|, \quad (\text{A2})$$

and phases,

$$\phi_+^s + \phi_-^i = \phi^p. \quad (\text{A3})$$

Similarly, the two equations obtained for  $\alpha_-^s$  and  $\alpha_+^i$  give

$$|\alpha_-^s| = |\alpha_+^i| \quad (\text{A4})$$

and

$$\phi_-^s + \phi_+^i = \phi^p. \quad (\text{A5})$$

From Eqs. (A2) and (A4) we conclude that signal and idler beams have the same steady state intensity

$$I = |\alpha_+^j|^2 + |\alpha_-^j|^2, \quad (\text{A6})$$

with  $j = s, i$ .

The steady state equation for the pumped mode amplitude is

$$\kappa_p\alpha_p + \chi(\alpha_+^s\alpha_-^i + \alpha_-^s\alpha_+^i) = \eta_p\alpha_{\text{in}}^p. \quad (\text{A7})$$

Substituting the previous results in the above equation we arrive at

$$(\kappa_p|\alpha_p| + \chi I)e^{i\phi^p} = \eta_p\alpha_{\text{in}}^p. \quad (\text{A8})$$

Since the phase of the input pump field is arbitrary, we may set  $\alpha_{\text{in}}^p$  real. Moreover, the expression inside the brackets in the left-hand side of Eq. (A8) is a real number, so that we finally find  $\phi^p = 0$ . This completes the demonstration of Eqs. (10) and (11).

Now, from Eqs. (A1), one can easily find that  $|\alpha_p| = \kappa/\chi$ , which demonstrates Eq. (12). Solving Eq. (A8) for the signal-idler steady state intensity we get

$$I_s = I_i = \frac{\kappa_p}{\chi} \left( \frac{\eta_p\alpha_{\text{in}}^p}{\kappa_p} - \frac{\kappa}{\chi} \right), \quad (\text{A9})$$

which is precisely Eq. (13).

This completes the steady state solutions of the dynamical equations for the free running OPO. Notice that these solutions fix the pump, signal, and idler steady state intensities, but the individual values of  $|\alpha_{\pm}^j|^2$  are left undetermined. This means that the dynamical equations do not fix the energy distribution between the two transverse modes in each down converted field. This distribution must be determined by the initial conditions and is free to diffuse under the action of noise. This *mode diffusion* admits a beautiful interpretation in the Poincaré sphere, as described in the text.

## Appendix B

In this Appendix we show that the transformed complex amplitudes  $\alpha'_s$  and  $\alpha'_i$ , given by Eqs. (18), both vanish. The transformed variables introduced by Eqs. (18) allow us to rewrite the dynamical equations with a single injection term:

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = -(\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_p - \chi(\alpha_s\alpha_i + \alpha'_s\alpha'_i) + \eta_p\alpha_p^{\text{in}}, \quad (\text{B1})$$

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_s + \chi\alpha_i^*\alpha_p + \eta_s\sqrt{I_s^{\text{in}}}, \quad (\text{B2})$$

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_i + \chi\alpha_s^*\alpha_p, \quad (\text{B3})$$

$$\frac{d\alpha'_s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha'_s + \chi\alpha_i'^*\alpha_p, \quad (\text{B4})$$

$$\frac{d\alpha'_i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha'_i + \chi\alpha_s'^*\alpha_p. \quad (\text{B5})$$



This substantially simplifies the steady state solution, which can be readily found from the following algebraic system:

$$\alpha_p = -\frac{\chi}{\kappa_p}(\alpha_s \alpha_i + \alpha'_s \alpha'_i) + \frac{\eta_p}{\kappa_p} \alpha_p^{\text{in}}, \quad (\text{B6})$$

$$\alpha_s = \frac{\chi}{\kappa} \alpha_i^* \alpha_p + \frac{\eta_s}{\kappa} \sqrt{I_s^{\text{in}}}, \quad (\text{B7})$$

$$\alpha_i = \frac{\chi}{\kappa} \alpha_s^* \alpha_p, \quad (\text{B8})$$

$$\alpha'_s = \frac{\chi}{\kappa} \alpha'_i{}^* \alpha_p, \quad (\text{B9})$$

$$\alpha'_i = \frac{\chi}{\kappa} \alpha'_s{}^* \alpha_p, \quad (\text{B10})$$

where we assumed  $\Delta_p = \Delta = 0$  for simplicity.

A straightforward algebra with the last four equations gives

$$\alpha'_s \left( 1 - \frac{\chi^2}{\kappa^2} |\alpha_p|^2 \right) = 0,$$

$$\alpha_s \left( 1 - \frac{\chi^2}{\kappa^2} |\alpha_p|^2 \right) = \frac{\eta_s}{\kappa} \sqrt{I_s^{\text{in}}}. \quad (\text{B11})$$

For the free-running OPO ( $I_s^{\text{in}} = 0$ ), nonvanishing solutions for  $\alpha_{s(i)}$  and  $\alpha'_{s(i)}$  are possible only if  $|\alpha_p|^2 = \kappa^2 / \chi^2$ , which is the well known clipped value for the pumped mode above threshold. Under signal injection, however, we can see from the second of Eqs. (B11) that this condition can no longer be valid, so that only  $\alpha_s$  and  $\alpha_i$  can assume nonvanishing values, while both amplitudes  $\alpha'_s$  and  $\alpha'_i$  vanish.

- 
- [1] J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett, *Phys. Rev. A* **59**, 3950 (1999).
- [2] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, *Nature (London)* **412**, 313 (2001).
- [3] D. P. Caetano, M. P. Almeida, P. H. Souto Ribeiro, J. A. O. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. A* **66**, 041801(R) (2002).
- [4] P. H. Souto Ribeiro, D. P. Caetano, M. P. Almeida, J. A. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 133602 (2001).
- [5] M. Martinelli, J. A. O. Huguenin, P. Nussenzeveig, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. A* **70**, 013812 (2004).
- [6] J. P. Torres, C. I. Osorio, and L. Torner, *Opt. Lett.* **29**, 1939 (2004); G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner, *Nature Phys* **3**, 305 (2007).
- [7] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **392**, 45 (1984).
- [8] M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. E. L. O. van der Veen, and J. P. Woerdman, *Opt. Commun.* **96**, 123 (1993).
- [9] E. Abramochkin and V. Volostnikov, *Opt. Commun.* **83**, 123 (1991).
- [10] S. J. van Enk, *Opt. Commun.* **102**, 59 (1993).
- [11] E. J. Galvez, P. R. Crawford, H. I. Sztul, M. J. Pysher, P. J. Haglin, and R. E. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 203901 (2003).
- [12] M. J. Padgett and J. Courtial, *Opt. Lett.* **24**, 430 (1999).
- [13] S. Pancharatnam, *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **44**, 247 (1956).
- [14] A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 240401 (2002).
- [15] S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, R. S. Thebaldi, and C. H. Monken, *Phys. Rev. A* **69**, 023811 (2004).
- [16] H. H. Arnaut and G. A. Barbosa, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 286 (2000).
- [17] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, and H. J. Kimble, *Appl. Phys. B: Photophys. Laser Chem.* **55**, 265 (1992); Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, and K. C. Peng, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3663 (1992).
- [18] W. P. Bowen, N. Treps, R. Schnabel, and P. K. Lam, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 253601 (2002); W. P. Bowen, R. Schnabel, P. K. Lam, and T. C. Ralph, *ibid.* **90**, 043601 (2003).
- [19] A. Yariv, *Quantum Electronics*, third ed. (John Wiley & Sons, New York, 1988).
- [20] C. Schwob, P. F. Cohadon, C. Fabre, M. A. M. Marte, H. Ritsch, A. Gatti, and L. Lugiato, *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **66**, 685 (1998).
- [21] B. Coutinho dos Santos, K. Dechoum, A. Z. Khoury, L. F. da Silva, and M. K. Olsen, *Phys. Rev. A* **72**, 033820 (2005).
- [22] N. Mukunda and R. Simon, *Ann. Phys. (N.Y.)* **228**, 205 (1993).
- [23] N. Treps, N. Grosse, W. P. Bowen, C. Fabre, H. A. Bachor, and P. K. Lam, *Science* **301**, 940 (2003).

# Quantum analysis of the nondegenerate optical parametric oscillator with injected signal

B. Coutinho dos Santos, K. Dechoum, A. Z. Khoury, and L. F. da Silva

*Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, Boa Viagem 24210-340, Niterói Rio de Janeiro, Brazil*

M. K. Olsen

*ARC Centre of Excellence for Quantum-Atom Optics, School of Physical Sciences, University of Queensland, Brisbane, Queensland 4072, Australia*

(Received 20 February 2005; revised manuscript received 14 June 2005; published 22 September 2005)

In this paper we study the nondegenerate optical parametric oscillator with injected signal, both analytically and numerically. We develop a perturbation approach which allows us to find approximate analytical solutions, starting from the full equations of motion in the positive- $P$  representation. We demonstrate the regimes of validity of our approximations via comparison with the full stochastic results. We find that, with reasonably low levels of injected signal, the system allows for demonstrations of quantum entanglement and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. In contrast to the normal optical parametric oscillator operating below threshold, these features are demonstrated with relatively intense fields.

DOI: [10.1103/PhysRevA.72.033820](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.033820)

PACS number(s): 42.65.Ky, 42.50.Dv, 42.50.Lc, 03.65.Ud

## I. INTRODUCTION

Intracavity parametric down-conversion is a relatively simple nonlinear optical process which can exhibit nonclassical behavior and allow for experimental tests of quantum mechanics. In the simplest case, that of degenerate down-conversion, a pump field at frequency  $\omega_c$  produces, via interaction with a nonlinear medium, a field at half this frequency. In the nondegenerate parametric oscillator (NOPO), considered in this article, two distinguishable down-converted fields are produced, either with orthogonal polarizations, or with different frequencies  $\omega_a$  and  $\omega_b$ , such that  $\omega_c = \omega_a + \omega_b$ . This latter case, with a coherent signal injected into the cavity at the frequency  $\omega_b$ , allows for increased conversion efficiency over the uninjected case, as well as a good degree of tunability. The injection of the signal field can be used, for example, to choose the frequency of a laser. Rather than producing an output field at either half or twice the frequency of the pump, an injected signal then allows for the production of a macroscopic field at the difference of the signal and pump frequencies, therefore making the system more versatile. As has been shown that measurements using light are not limited by the Rayleigh criterion, but by the inherent noise of the field [1–3], with amplitude squeezed fields allowing for higher sensitivity, parametric processes with injected signal may be suitable for the production of nonclassical light of a given frequency for measurement and spectroscopic purposes [4].

A number of theoretical analysis of the NOPO have been published over recent years. Among these, an early analysis by Björk and Yamamoto raised the possibility of the production of photon number states by using idler measurement feedback [5]. In a subsequent article the same authors investigated quadrature phase fluctuations in the same system [6], finding fluctuation levels below those of a coherent state. The authors discussed possible applications in optical communications and gravity wave detection and predicted that the suppression of fluctuations would be greatest close to the threshold pumping power. Reid and Drummond investigated

the correlations in the NOPO both above [7] and below threshold [8]. In the above threshold case, they studied the effects of phase diffusion in the signal and idler modes, beginning with the positive- $P$  representation equations of motion for the interacting fields [9]. Changing to intensity and phase variables, they were able to show that output quadratures could be chosen which exhibited fluctuations below the coherent state level and also Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) type correlations. In the below-threshold case, a standard linearized calculation was sufficient to obtain similar correlations. Su *et al.* [10] investigated the utility of the NOPO with polarization degeneracy and an optical system with four mirrors for quantum nondemolition measurements of the intensity difference of the two low-frequency modes. In the limit of a rapidly decaying pump mode, Kheruntsyan and Petrosyan were able to calculate exactly the steady-state Wigner function for the NOPO, showing clearly the threshold behavior and the phase diffusion above this level of pumping [11].

There are a smaller number of published theoretical investigations of the NOPO with injected signal (INOPO), but we can begin with a linearized analysis by Wong [12], which predicted that the amount of single-beam squeezing above threshold would be greater than without injection. Although not explicitly stated in the article, this is due to the fact that an injected signal stabilizes the phase diffusion considered by Reid and Drummond and also by Kheruntsyan and Petrosyan in the uninjected case. Harrison and Walls [13] studied possible quantum nondemolition measurements of the intensity difference of the two down-converted fields, considering injected signals at both the down-converted frequencies. Zhang *et al.* [14] used a linear fluctuation analysis to study the frequency degenerate but orthogonally polarized output fields of a pumped intracavity type-II crystal. Considering injected signals in both the down-converted fields, they found noise suppression in both combined quadratures and in the intensity difference of these two fields.

As far as noise reduction is concerned, experimental attention has been focused on the polarization-degenerate

NOPO. In an early experiment, noise reduction of 30% below the vacuum level in the intensity difference was measured in the two polarization-nondegenerate outputs of an uninjected NOPO operating above threshold [15]. Noise reduction in two-mode combined quadratures and the intensity difference of polarization nondegenerate outputs was measured by Peng *et al.* [16], again operating above threshold and without injection. Zhang *et al.* [17] used a polarization-nondegenerate OPO with injected seeds at both polarizations to measure squeezing in a combined quadrature and hence infer an EPR correlation [18] between spatially separated outputs. The production of quadrature entangled light and EPR states has been dealt with theoretically and experimentally in a NOPO operating below threshold, theoretically by using a linearized approximation with the intracavity pump field treated classically [19]. Noise reduction in the difference of the output intensities in both the degenerate and nondegenerate cases without injection has been calculated and measured for input powers up to 14 times the threshold value [20]. Recently, Guo *et al.* reported the design and construction of a compact and portable device using a polarization-nondegenerate NOPO with signal injection which can generate nonclassical light for over an hour [21].

There have also been a number of experimental and theoretical investigations of the tunability which the INOPO allows in laser operation, without considering the quantum properties of the output fields. An early demonstration of the ability to select a particular operating wavelength was reported by Boczar and Scharpf [22], who achieved pulsed laser operation at 486.1 nm with a pump wavelength of 354.7 nm and injection at 1312.2 nm. Smith *et al.* [23] developed a classical model of a pulsed INOPO operating inside a ring cavity and compared this to experimental results, finding reasonable agreement with their predictions for spatial beam quality, spectral performance and beam profiles. The ability to efficiently generate tunable frequencies in the mid infrared via injection seeding was demonstrated by Haidar and Ito [24], who also showed a noticeable narrowing of the signal linewidth due to the injection. Bapna and Dasgupta used a seed wave from a dye laser to increase the power and tune the frequency of the output of an INOPO operating in the pulsed regime [25]. What these investigations have shown is that injection can increase the conversion efficiency and stability as well as allowing a large degree of tunability, but they have not investigated the quantum properties of the resulting fields.

In this work our main interests are the effect of the injected signal on the quantum properties of the outputs and the change in threshold behavior as a result of the injection. To this end we will expand the full equations of motion in terms of a perturbation parameter. The zeroth order of this expansion describes the classical behavior while the first order may be thought of as describing linear quantum noise. We will first examine the classical properties of the system, finding approximate analytical solutions and demonstrating their regimes of validity. These will show that the signal and idler fields can be relatively intense at pumping values well below the standard uninjected threshold. We will then solve the first-order equations, the solutions of which allow us to calculate spectral variances outside the cavity. We compare

the results found in this manner with the predictions of stochastic integration, finding good agreement. Unlike the analysis of Ref. [7], we may use the normal amplitude variables as the injected signal provides a phase reference which prevents the phase diffusion found in that work. Finally, we will look at the utility of our injected system for the production of entangled states and a demonstration of the EPR correlations, finding that these are now possible with macroscopically intense fields.

## II. HAMILTONIAN AND STOCHASTIC EQUATIONS

The system we consider consists of three modes of the electromagnetic field which are coupled by a nonlinear crystal which is held inside an optical cavity. The three modes have frequencies  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ , and  $\omega_2$ , where, by energy conservation,  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ . We will consider the case of a strong external driving field  $\mathcal{E}_0$  at frequency  $\omega_0$ , and a generally much weaker injected field  $\mathcal{E}_1$  at frequency  $\omega_1$ . There is no input field at frequency  $\omega_2$ . The intracavity fields at frequency  $\omega_j$  are described by the bosonic operators  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$ , and  $\hat{a}_2$ . Following the usual terminology, we shall call the fields represented by these operators the pump, signal and idler, respectively. Each field is damped via the cavity output mirror, interacting with the reservoir fields, denoted by the bath operators  $\hat{\Gamma}_j$ . The effective second-order nonlinearity of the crystal is represented by the constant  $\chi$ .

The Heisenberg picture Hamiltonian which describes this system can be written as [26,27]

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i=0}^2 \hbar \omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + i\hbar \chi (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_0^\dagger) \\ & + i\hbar (\mathcal{E}_0 e^{-i\omega_0 t} \hat{a}_0^\dagger - \mathcal{E}_0^* e^{i\omega_0 t} \hat{a}_0) \\ & + i\hbar (\mathcal{E}_1 e^{-i\omega_1 t} \hat{a}_1^\dagger - \mathcal{E}_1^* e^{i\omega_1 t} \hat{a}_1) + \sum_{i=0}^2 (\hat{a}_i \hat{\Gamma}_i^\dagger + \hat{a}_i^\dagger \hat{\Gamma}_i). \end{aligned} \quad (1)$$

Although exact Heisenberg equations of motion can be found from this Hamiltonian, it is, at the very least, extremely difficult to solve nonlinear operator equations. We will therefore develop stochastic equations of motion in the positive- $P$  representation, which in principle gives access to any normally ordered operator expectation values which we may wish to calculate. To find the appropriate equations, we proceed via the master and Fokker-Planck equations. Using the standard techniques for elimination of the baths [28], we find the zero-temperature master equation for the reduced density operator.

The master equation may be mapped onto a Fokker-Planck equation [29] for the positive- $P$  pseudoprobability distribution of the six independent complex variables,  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)$ , whose correlations correspond to those of the normally ordered operators. Using the standard procedure we can derive the following Itô stochastic differential equations [30] in a rotating frame,

$$d\alpha_0 = (\mathcal{E}_0 - \gamma_0 \alpha_0 - \chi \alpha_1 \alpha_2) dt,$$

$$d\alpha_0^* = (\mathcal{E}_0^* - \gamma_0 \alpha_0^* - \chi \alpha_1^* \alpha_2^*) dt,$$

$$\begin{aligned}
 d\alpha_1 &= (\mathcal{E}_1 - \gamma_1\alpha_1 + \chi\alpha_2^+\alpha_0)dt + (\chi\alpha_0)^{1/2} dW_1, \\
 d\alpha_1^+ &= (\mathcal{E}_1^* - \gamma_1\alpha_1^+ + \chi\alpha_2\alpha_0^+)dt + (\chi\alpha_0^+)^{1/2} dW_1^+, \\
 d\alpha_2 &= (-\gamma_2\alpha_2 + \chi\alpha_1^+\alpha_0)dt + (\chi\alpha_0)^{1/2} dW_2, \\
 d\alpha_2^+ &= (-\gamma_2\alpha_2^+ + \chi\alpha_1\alpha_0^+)dt + (\chi\alpha_0^+)^{1/2} dW_2^+, \quad (2)
 \end{aligned}$$

where  $\gamma_i$  ( $i=0,1,2$ ) now represent the cavity damping rates at each frequency. In the above, the complex Gaussian noise terms are defined by the relations

$$\begin{aligned}
 \overline{dW_1} &= \overline{dW_2} = 0, \\
 \overline{dW_1 dW_2} &= \overline{dW_1^+ dW_2^+} = dt. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Note here that we are considering that the crystal is perfectly phase matched for the process of down-conversion with  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ .

Without loss of generality, we may consider the pump as a real field,  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^* = E_0$ , and the signal injection with a relative phase shift  $\phi$  so that  $\mathcal{E}_1 = E_1 e^{i\phi}$ . We therefore find it useful to define the field quadratures

$$X_k = (e^{-i\theta_k}\alpha_k + e^{i\theta_k}\alpha_k^+), \quad Y_k = \frac{1}{i}(e^{-i\theta_k}\alpha_k - e^{i\theta_k}\alpha_k^+), \quad (4)$$

with  $\theta_0=0$ ,  $\theta_1=\phi$ , and  $\theta_2=-\phi$ . We note here that, with these definitions, the pump and signal are both real in what follows.

For simplicity we will set  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,  $\gamma_r = \gamma_0/\gamma$ , and introduce a scaling parameter

$$g = \frac{\chi}{\gamma\sqrt{2\gamma_r}} \quad (5)$$

in the stochastic equations to make these amenable to perturbation theory [31]. We also introduce a scaled time  $\tau = \gamma t$ , and the scaled quadratures

$$\begin{aligned}
 x_0 &= g\sqrt{2\gamma_r}X_0, & y_0 &= g\sqrt{2\gamma_r}Y_0, \\
 x_1 &= gX_1, & y_1 &= gY_1, \\
 x_2 &= gX_2, & y_2 &= gY_2. \quad (6)
 \end{aligned}$$

In these new variables, the stochastic equations for the quadratures become

$$\begin{aligned}
 dx_0 &= -\gamma_r[x_0 - 2\mu_0 + (x_1x_2 - y_1y_2)]d\tau, \\
 dy_0 &= -\gamma_r[y_0 + (x_1y_2 + y_1x_2)]d\tau, \\
 dx_1 &= \left(-x_1 + 2\mu_1 + \frac{1}{2}(x_0x_2 + y_0y_2)\right)d\tau \\
 &\quad + \frac{g}{\sqrt{2}}(\sqrt{x_0 + iy_0} dw_1 + \sqrt{x_0 - iy_0} dw_1^+),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= \left(-y_1 + \frac{1}{2}(x_2y_0 - y_2x_0)\right)d\tau \\
 &\quad - i\frac{g}{\sqrt{2}}(\sqrt{x_0 + iy_0} dw_1 - \sqrt{x_0 - iy_0} dw_1^+), \\
 dx_2 &= \left(-x_2 + \frac{1}{2}(x_0x_1 + y_0y_1)\right)d\tau \\
 &\quad + \frac{g}{\sqrt{2}}(\sqrt{x_0 + iy_0} dw_2 + \sqrt{x_0 - iy_0} dw_2^+), \\
 dy_2 &= \left(-y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_0 - y_1x_0)\right)d\tau \\
 &\quad - i\frac{g}{\sqrt{2}}(\sqrt{x_0 + iy_0} dw_2 - \sqrt{x_0 - iy_0} dw_2^+), \quad (7)
 \end{aligned}$$

where  $\mu_0 = E_0\chi/\gamma\gamma_0$ ,  $\mu_1 = E_1\chi/\gamma\sqrt{2\gamma\gamma_0}$ ,  $dw_1 = e^{-i\phi}\sqrt{2\gamma}dW_1$ ,  $dw_1^+ = e^{i\phi}\sqrt{2\gamma}dW_1^+$ ,  $dw_2 = e^{i\phi}\sqrt{2\gamma}dW_2$ , and  $dw_2^+ = e^{-i\phi}\sqrt{2\gamma}dW_2^+$ . We note here that, in the normal case without signal injection,  $\mu_0=1$  would indicate the threshold for oscillation. Although there is no longer a true threshold once an injected signal is present, we will continue to use this well-known terminology.

### III. STEADY-STATE MEAN-VALUE SOLUTIONS

Although Eqs. (7) describe the full quantum-dynamical behavior of the system, they are very difficult to solve except by numerical simulation. While this is a very powerful technique, sometimes we can gain useful physical insights via approximate analytical solutions. In the present case we find it very useful to examine the classical behavior of the system, solving for the steady state of Eqs. (7) with the noise terms removed. This procedure leads us to the expressions

$$\begin{aligned}
 0 &= x_{0s} - 2\mu_0 + (x_{1s}x_{2s} - y_{1s}y_{2s}), \\
 0 &= y_{0s} + (x_{1s}y_{2s} + y_{1s}x_{2s}), \\
 0 &= -x_{1s} + 2\mu_1 + \frac{1}{2}(x_{0s}x_{2s} + y_{0s}y_{2s}), \\
 0 &= -y_{1s} + \frac{1}{2}(x_{2s}y_{0s} - y_{2s}x_{0s}), \\
 0 &= -x_{2s} + \frac{1}{2}(x_{0s}x_{1s} + y_{0s}y_{1s}), \\
 0 &= -y_{2s} + \frac{1}{2}(x_{1s}y_{0s} - y_{1s}x_{0s}) \quad (8)
 \end{aligned}$$

for the quadratures in the steady state. The solution for the  $y$  quadratures is  $y_{0s} = y_{1s} = y_{2s} = 0$ . Solving the above system for  $x_{1s}$  and  $x_{2s}$  in terms of  $x_{0s}$  we obtain

$$x_{1s} = \frac{8\mu_1}{4 - x_{0s}^2},$$



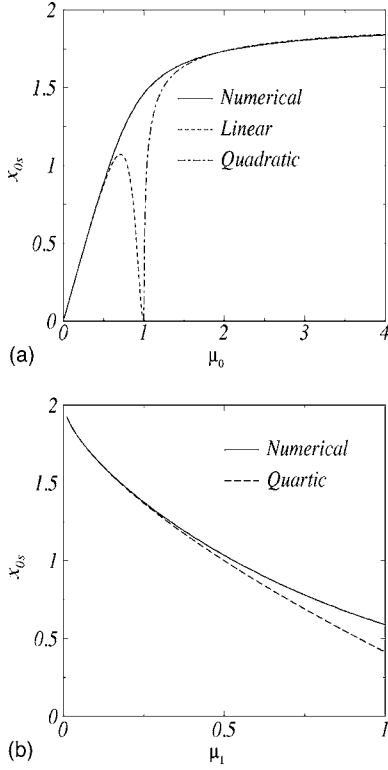


FIG. 1. (a) Dimensionless steady-state amplitude quadrature  $x_{0s}$  as a function of the dimensionless pump parameter  $\mu_0$ . Linear (dashed line) and quadratic (dot-dashed line) approximations are compared to the numerical calculation (solid line). The dimensionless injection parameter is  $\mu_1=0.2$ . (b) Dimensionless steady-state amplitude quadrature  $x_{0s}$  as a function of the dimensionless injection parameter  $\mu_1$ . The quartic approximation (dashed line) is compared to the numerical calculation (solid line). The dimensionless pump parameter is  $\mu_0=1$ .

$$x_{2s} = \frac{4\mu_1 x_{0s}}{4 - x_{0s}^2}. \quad (9)$$

In Appendix A we find a set of approximate solutions for  $x_{0s}$  valid below

$$x_{0s} = 2\mu_0 \left( 1 - \frac{2\mu_1^2}{(1 - \mu_0^2)^2 + 2\mu_1^2} \right) \quad (10)$$

at

$$x_{0s} = 2 - (2\mu_1)^{2/3}, \quad (11)$$

and above threshold ( $\mu_0 > 1$ )

$$x_{0s} = 2 - \frac{\mu_1^2}{2(\mu_0 - 1)} \left( \sqrt{1 + \frac{8(\mu_0 - 1)}{\mu_1^2}} - 1 \right). \quad (12)$$

In Fig. 1(a) we plot the steady-state intracavity pump quadrature amplitude, obtained numerically as a function of the pump input  $\mu_0$  for a fixed injection  $\mu_1$ . Instead of the abrupt transition at threshold, well known from classical analysis of the uninjected OPO, the steady-state amplitude quadrature asymptotically approaches the threshold value of  $x_{0s}=2$ . The solutions obtained from the linear and quadratic

approximations are also shown, demonstrating a good agreement with the numerical result well below and well above threshold, respectively.

In Fig. 1(b) we compare the approximate quartic solution at threshold, given by  $\mu_0=1$ , with the full numerical solution for  $x_{0s}$  as the injected signal, given by  $\mu_1$ , increases. We find excellent agreement for injected signal amplitudes up to around a quarter that of the pump.

#### IV. PERTURBATION APPROACH FOR QUANTUM FLUCTUATIONS

In this section we will go a step further by using a perturbation expansion of the positive- $P$  representation Eqs. (7). This allows us to include quantum effects in a systematic fashion [32]. We first introduce a formal perturbation expansion in powers of the parameter  $g$ ,

$$x_k = \sum_{n=0}^{\infty} g^n x_k^{(n)},$$

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} g^n y_k^{(n)}. \quad (13)$$

The series expansion written in this way has the property that the zeroth-order term corresponds to the classical field of order 1 in the unscaled quadrature, while the first-order term is related to quantum fluctuations of order  $g$ , and the higher order terms correspond to nonlinear corrections to the quantum fluctuations of order  $g^2$  and greater. The stochastic equations are then solved by the technique of matching powers of  $g$  in the corresponding time evolution equations. This technique can be employed diagrammatically, and so can be termed the ‘‘stochastic diagram’’ method [31]. (For related approaches using diagrams and Green’s functions; see Refs. [33,34].)

The zeroth-order terms correspond to the classical nonlinear equations of motion for the interacting fields, whose steady-state solutions were given in Sec. III. The first-order set of equations is then

$$dx_0^{(1)} = -\gamma_r(x_0^{(1)} + x_{1s}x_2^{(1)} + x_{2s}x_1^{(1)})d\tau,$$

$$dy_0^{(1)} = -\gamma_r(y_0^{(1)} + x_{1s}y_2^{(1)} + x_{2s}y_1^{(1)})d\tau,$$

$$dx_1^{(1)} = \left( -x_1^{(1)} + \frac{1}{2}x_{0s}x_2^{(1)} + \frac{1}{2}x_{2s}x_0^{(1)} \right) d\tau + \sqrt{x_{0s}} dw_{x_1},$$

$$dy_1^{(1)} = \left( -y_1^{(1)} + \frac{1}{2}x_{2s}y_0^{(1)} - \frac{1}{2}x_{0s}y_2^{(1)} \right) d\tau - i\sqrt{x_{0s}} dw_{y_1},$$

$$dx_2^{(1)} = \left( -x_2^{(1)} + \frac{1}{2}x_{0s}x_1^{(1)} + \frac{1}{2}x_{1s}x_0^{(1)} \right) d\tau + \sqrt{x_{0s}} dw_{x_2},$$

$$dy_2^{(1)} = \left( -y_2^{(1)} + \frac{1}{2}x_{1s}y_0^{(1)} - \frac{1}{2}x_{0s}y_1^{(1)} \right) d\tau - i\sqrt{x_{0s}} dw_{y_2}. \quad (14)$$

Note that we have defined new Wiener increments as  $dw_{x_1(y_1)}(\tau) = [dw_1(\tau) \pm dw_1^+(\tau)]/\sqrt{2}$  and  $dw_{x_2(y_2)}(\tau) = [dw_2(\tau) \pm dw_2^+(\tau)]/\sqrt{2}$ , with the correlations

$$\begin{aligned} \langle dw_{x_1} dw_{x_2} \rangle &= d\tau, \\ \langle dw_{y_1} dw_{y_2} \rangle &= d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

and with all other correlations vanishing. We note here that these Eqs. (14) are often used to predict squeezing in a linearized fluctuation analysis. They are nonclassical in the sense that they can describe states without a positive Glauber-Sudarshan  $P$  distribution [35], but correspond to a simple form of linear fluctuation which has a Gaussian quasiprobability distribution.

We now find it useful to introduce combined field quadratures which include both amplified modes of the system, as in two-mode approaches used previously [36]. This is useful here, because unlike the degenerate case, the signal and idler modes exhibit correlated quadrature noise statistics, even though there is no phase sensitivity to the noise if they are treated separately. However, the high degree of cross correlation found means that combined quadratures can present a high degree of noise suppression, which may be measured by homodyne techniques [37]. We define the two-mode quadratures as

$$x_{\pm} = \frac{x_1^{(1)} \pm x_2^{(1)}}{\sqrt{2}}, \quad y_{\pm} = \frac{y_1^{(1)} \pm y_2^{(1)}}{\sqrt{2}}. \quad (16)$$

Taking the steady-state solutions for the pumped field quadratures, we can write the following equations for the linear quantum fluctuations in the new quadratures,

$$\begin{aligned} dx_+ &= \{-Ax_+ + Ex_+\}d\tau + \sqrt{\frac{x_{0s}}{2}}(dw_{x_1} + dw_{x_2}), \\ dx_- &= \{-Bx_- + Ex_+\}d\tau + \sqrt{\frac{x_{0s}}{2}}(dw_{x_1} - dw_{x_2}), \\ dy_+ &= \{-Cy_+ + Ey_-\}d\tau - i\sqrt{\frac{x_{0s}}{2}}(dw_{y_1} + dw_{y_2}), \\ dy_- &= \{-Dy_- + Ey_-\}d\tau - i\sqrt{\frac{x_{0s}}{2}}(dw_{y_1} - dw_{y_2}), \end{aligned} \quad (17)$$

where we have defined

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{x_{0s}}{2} + \left( \frac{x_{1s} + x_{2s}}{2} \right)^2, \\ B &= 1 + \frac{x_{0s}}{2} + \left( \frac{x_{1s} - x_{2s}}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$C = 1 + \frac{x_{0s}}{2} + \left( \frac{x_{1s} + x_{2s}}{2} \right)^2,$$

$$D = 1 - \frac{x_{0s}}{2} + \left( \frac{x_{1s} - x_{2s}}{2} \right)^2,$$

$$E = (x_{1s}^2 - x_{2s}^2)/4. \quad (18)$$

These are linear coupled stochastic equations, and we may readily calculate the steady-state averages of the first-order corrections and use that to compute the fluctuations in the combined quadratures. These quantities correspond to the squeezed and antisqueezed combined quadratures obtained in the linearized theory.

## V. CORRELATIONS AND NOISE SPECTRA

In an experimental situation, the noise spectra outside the cavity are generally the quantities of interest. We will therefore proceed to analyze the problem in frequency space, via Fourier decomposition of the fields. The full nonlinear spectra can be found by Fourier transform of the results of stochastic integration of the full positive- $P$  representation equations, which must be performed numerically. However, we will also find it useful to calculate these spectra using our perturbation approach.

We define the Fourier transform as

$$\tilde{f}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\Omega\tau} f(\tau). \quad (19)$$

We also need to represent the white noise that drives the stochastic equations by its Fourier transform  $\xi_{x,y}(\Omega)$ , where the spectral moments of the stochastic processes are

$$\langle \xi_a(\Omega) \rangle = 0,$$

$$\langle \xi_{a1}(\Omega) \xi_{b2}(\Omega') \rangle = \delta_{ab} \delta(\Omega + \Omega'). \quad (20)$$

The first-order stochastic equations for the combined quadratures may now be rewritten in the frequency domain as

$$i\Omega \tilde{x}_+(\Omega) = -A\tilde{x}_+(\Omega) + E\tilde{x}_-(\Omega) + \sqrt{\frac{x_{0s}}{2}}[\xi_{x1}(\Omega) + \xi_{x2}(\Omega)],$$

$$i\Omega \tilde{x}_-(\Omega) = -B\tilde{x}_-(\Omega) + E\tilde{x}_+(\Omega) + \sqrt{\frac{x_{0s}}{2}}[\xi_{x1}(\Omega) - \xi_{x2}(\Omega)],$$

$$i\Omega \tilde{y}_+(\Omega) = -C\tilde{y}_+(\Omega) + E\tilde{y}_-(\Omega) - i\sqrt{\frac{x_{0s}}{2}}[\xi_{y1}(\Omega) + \xi_{y2}(\Omega)],$$

$$i\Omega \tilde{y}_-(\Omega) = -D\tilde{y}_-(\Omega) + E\tilde{y}_+(\Omega) - i\sqrt{\frac{x_{0s}}{2}}[\xi_{y1}(\Omega) - \xi_{y2}(\Omega)]. \quad (21)$$

Using the above results, we may now calculate the spectra of the squeezed and antisqueezed field quadratures. These

quantities are related in a simple manner to the spectra outside the cavity and, as will be shown below, allow for a measure of entanglement between the two modes.

The contribution from first-order perturbation theory is the usual linearized intracavity squeezing result, given in this case by

$$\langle \tilde{y}_+(\Omega) \tilde{y}_+(\Omega') \rangle = \frac{-x_{0s}(\Omega^2 + D^2 - E^2) \delta(\Omega + \Omega')}{\Omega^2(\Omega^2 + C^2 + D^2 + 2E^2) + (CD - E^2)^2} \quad (22)$$

and

$$\langle \tilde{x}_-(\Omega) \tilde{x}_-(\Omega') \rangle = \frac{-x_{0s}(\Omega^2 + A^2 - E^2) \delta(\Omega + \Omega')}{\Omega^2(\Omega^2 + A^2 + B^2 + 2E^2) + (AB - E^2)^2}, \quad (23)$$

while the complementary antisqueezed spectra are given by

$$\langle \tilde{x}_+(\Omega) \tilde{x}_+(\Omega') \rangle = \frac{x_{0s}(\Omega^2 + B^2 - E^2) \delta(\Omega + \Omega')}{\Omega^2(\Omega^2 + A^2 + B^2 + 2E^2) + (AB - E^2)^2} \quad (24)$$

and

$$\langle \tilde{y}_-(\Omega) \tilde{y}_-(\Omega') \rangle = \frac{x_{0s}(\Omega^2 + C^2 - E^2) \delta(\Omega + \Omega')}{\Omega^2(\Omega^2 + C^2 + D^2 + 2E^2) + (CD - E^2)^2}. \quad (25)$$

The external spectra are obtained in the positive- $P$  representation by the relation

$$V_{ij}^{out}(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') = \delta_{ij} + 2\sqrt{\gamma_i^{out} \gamma_j^{out}} \langle \Delta X_i(\Omega) \Delta X_j(\Omega') \rangle_P. \quad (26)$$

Using these results, we find that the external squeezing spectra for the combined quadratures  $y_+$  and  $x_-$  are different, and given by

$$V_{y_+}^{out}(\Omega) = 1 - \frac{2x_{0s}(\Omega^2 + D^2 - E^2)}{\Omega^2(\Omega^2 + C^2 + D^2 + 2E^2) + (CD - E^2)^2} \quad (27)$$

and

$$V_{x_-}^{out}(\Omega) = 1 - \frac{2x_{0s}(\Omega^2 + A^2 - E^2)}{\Omega^2(\Omega^2 + A^2 + B^2 + 2E^2) + (AB - E^2)^2}. \quad (28)$$

These results can now be compared with those found via stochastic integration of the full equations of motion. What we immediately see, as shown in Fig. 2 is that our approximation is a good representation for the noise spectrum of the combined quadratures in the region of small injected signal and pump intensity below the classical threshold ( $\mu_1=0$  and  $\mu_0=1$ ). We also note here that, for smaller values of  $\mu_0$  and  $\mu_1$ , the agreement between the approximate and numerical solutions improves, indicating that the parameter values used in the graphics are at the limit of validity of our approximations.

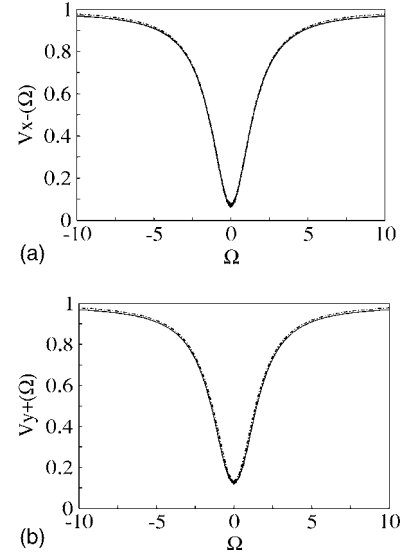


FIG. 2. Dimensionless noise spectra of (a)  $x_-$  and (b)  $y_+$ , for below-threshold operation with  $\mu_0=0.6$  and  $\mu_1=0.2$ . Frequencies ( $\Omega$ ) are expressed in units of the cavity damping rate for the down-converted fields ( $\gamma$ ). Solid lines are the spectra obtained from numerical simulations of the complete stochastic equations in the positive- $P$  representation. Dashed lines are the analytical results given by the first-order perturbation approach.

It is important to stress that to construct the linear noise spectrum in any region of the phase space one has to include the correct steady-state solutions [see Eqs. (9)–(12)] in the particular region. Also, above the classical threshold, where nonlinearities become important, we see that  $V_{x_-}(\Omega)$  does not change noticeably, while  $V_{y_+}(\Omega)$  is degraded and the first order approximation is no longer valid, as described in Fig. 3. The suitability of a linearized calculation for  $V_{x_-}(\Omega)$ , but not for  $V_{y_+}(\Omega)$ , is not surprising if we recall that, for a sufficiently injected OPO,  $\langle x_- \rangle \gg \sqrt{\langle (\delta x_-)^2 \rangle}$ . In this case, the fluctuations are much smaller than the steady state average and a linearized approach applies. However,  $\langle y_+ \rangle = 0$  so that nonlinear contributions of the fluctuations cannot be neglected. For the case of triple-resonance operation considered here the stochastic equations for  $x_-$  and  $y_+$  are decoupled, and each variable admits an independent treatment.

From numerical integration of the complete stochastic equations we find, similarly to the phase variance described previously in Ref. [7], that  $V_{y_+}(\Omega)$  becomes bifurcated and shows less absolute squeezing above the threshold. Even though our quadratures are not exactly comparable to the intensity difference and phase sum variables considered in that work, it is noticeable that they display similar behaviors.

## VI. QUANTUM ENTANGLEMENT AND THE EPR PARADOX

Entanglement is a property found in quantum-mechanical systems and exists when the combined density matrix cannot be factorized into a product of the density matrices for the component subsystems. An entanglement criterion for continuous variables has been developed by Duan *et al.* [38]

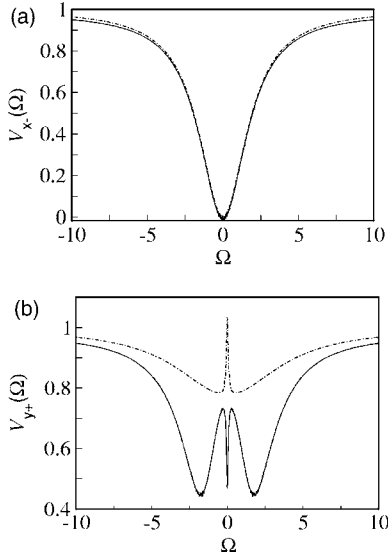


FIG. 3. Dimensionless noise spectra of (a)  $x_-$  and (b)  $y_+$ , for above-threshold operation with  $\mu_0=2$  and  $\mu_1=0.2$ . Frequencies ( $\Omega$ ) are expressed in units of the cavity damping rate for the down-converted fields ( $\gamma$ ). Solid lines are the spectra obtained from numerical simulations of the complete stochastic equations in the positive- $P$  representation. Dashed lines are the analytical results given by the first-order perturbation approach.

which are based on the inseparability of the system density matrix. We will briefly outline these criteria here and then apply them to our system. Following the treatment of Ref. [32], and noting the quadrature normalization used above [Eq. (16)], entanglement is guaranteed provided that the sum of the variances of these quadratures is less than 2.

A direct and feasible demonstration of the EPR correlations with continuous variables was first suggested by Reid [39]. The proposal was for an optical demonstration of the paradox via quadrature phase amplitudes, using nondegenerate parametric amplification. The quadrature phase amplitudes used have the same mathematical properties as the position and momentum originally used by EPR and, even though the correlations between these are not perfect, they are still entangled sufficiently to allow for an inferred violation of the uncertainty principle. An experimental demonstration of Reid's proposal by Ou *et al.* [40] soon followed, showing a clear agreement with quantum theory.

Let us calculate the correlations necessary for a demonstration of the EPR correlations. Following the approach of Reid [39], we assume that a measurement of the  $x_1$  quadrature, for example, will allow us to infer, with some error, the value of the  $x_2$  quadrature, and similarly for the  $y_j$  quadratures. This allows us to make linear estimates of the quadrature variances, which are then minimized to give the inferred output variances,

$$V^{inf}[x_1(\Omega)] = V_{x_1}^{out}(\Omega) - \frac{|V_{x_1 x_2}^{out}(\Omega)|^2}{V_{x_2}^{out}(\Omega)},$$

$$V^{inf}[y_1(\Omega)] = V_{y_1}^{out}(\Omega) - \frac{|V_{y_1 y_2}^{out}(\Omega)|^2}{V_{y_2}^{out}(\Omega)}. \quad (29)$$

The inferred variances for the  $j=2$  quadratures are simply found by swapping the indices 1 and 2. As the  $\hat{X}_j$  and  $\hat{Y}_j$  operators do not commute, the products of the variances obey a Heisenberg uncertainty relation, with  $V(x_j)V(y_j) \geq 1$ . Hence we find a demonstration of the EPR correlations whenever

$$V^{inf}[x_j(\Omega)]V^{inf}[y_j(\Omega)] \leq 1. \quad (30)$$

To first order in our perturbation approach, we may calculate all the correlations necessary to show the paradox. Again working with the frequency components and using the results of Eq. (21), we find the following correlations:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}_+(\Omega)\tilde{x}_-(\Omega') \rangle + \langle \tilde{x}_-(\Omega)\tilde{x}_+(\Omega') \rangle \\ = \frac{2x_{0s}E(B-A)\delta(\Omega+\Omega')}{\Omega^2(\Omega^2+A^2+B^2+2E^2)+(AB-E^2)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

and

$$\begin{aligned} \langle \tilde{y}_+(\Omega)\tilde{y}_-(\Omega') \rangle + \langle \tilde{y}_-(\Omega)\tilde{y}_+(\Omega') \rangle \\ = \frac{-2x_{0s}E(D-C)\delta(\Omega+\Omega')}{\Omega^2(\Omega^2+C^2+D^2+2E^2)+(CD-E^2)^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

which allows us to write the inferred variances as

$$\begin{aligned} V^{inf}[y_1(\Omega)] &= \frac{1}{2} \left\{ [V_{x_+}^{out}(\Omega) + V_{y_+ y_-}^{out}(\Omega) + V_{y_- y_+}^{out}(\Omega) + V_{y_-}^{out}(\Omega)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{|V_{y_+}^{out}(\Omega) - V_{y_+ y_-}^{out}(\Omega) + V_{y_- y_+}^{out}(\Omega) - V_{y_-}^{out}(\Omega)|^2}{V_{y_+}^{out}(\Omega) - V_{y_+ y_-}^{out}(\Omega) - V_{y_- y_+}^{out}(\Omega) + V_{y_-}^{out}(\Omega)} \right\}, \\ V^{inf}[x_1(\Omega)] &= \frac{1}{2} \left\{ [V_{x_+}^{out}(\Omega) + V_{x_+ x_-}^{out}(\Omega) + V_{x_- x_+}^{out}(\Omega) + V_{x_-}^{out}(\Omega)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{|V_{x_+}^{out}(\Omega) - V_{x_+ x_-}^{out}(\Omega) + V_{x_- x_+}^{out}(\Omega) - V_{x_-}^{out}(\Omega)|^2}{V_{x_+}^{out}(\Omega) - V_{x_+ x_-}^{out}(\Omega) - V_{x_- x_+}^{out}(\Omega) + V_{x_-}^{out}(\Omega)} \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

and similarly for the second mode. Using the solutions previously obtained, and following some algebra, we can calculate the product  $V^{inf}[y_1(\Omega)]V^{inf}[x_1(\Omega)]$ .

In order to provide a complete description of the entanglement properties of the injected OPO, we will consider both the EPR criterion established in terms of inferred variances and the Duan criterion. We shall develop our analysis both in frequency and quadrature domain. Arbitrary quadratures  $X(\theta)$  and  $Y(\theta)$  are given by a simple rotation transformation according to

$$\begin{aligned} X(\theta) &= X \cos \theta + Y \sin \theta, \\ Y(\theta) &= -X \sin \theta + Y \cos \theta. \end{aligned} \quad (34)$$

The noise and correlation spectra can then be easily calculated for any value of  $\theta$ .

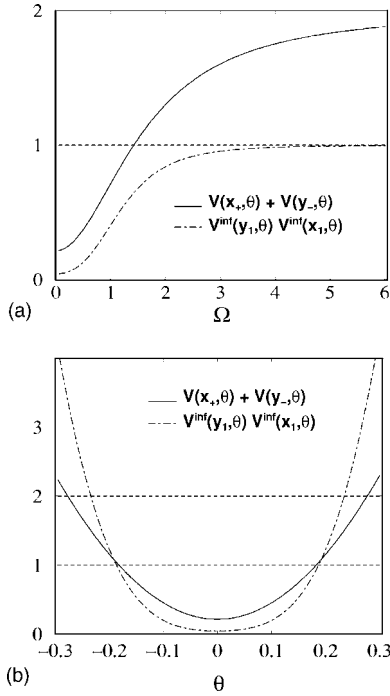


FIG. 4. (a) Dimensionless spectra of the Duan and EPR criteria, evaluated below threshold operation ( $\mu_0=0.6$  and  $\mu_1=0.2$ ) for  $\theta=0$  rad, obtained with first-order perturbation. Frequencies ( $\Omega$ ) are expressed in units of the cavity damping rate ( $\gamma$ ) for the down-converted fields. (b) Dimensionless spectra of the Duan and EPR criteria at zero frequency as a function of  $\theta$  (expressed in radians) under the same conditions as in (a).

In Fig. 4 we show the noise sum and the product of inferred variances for an injected OPO ( $\mu_1=0.2$ ) operating below threshold ( $\mu_0=0.6$ ). The limiting values for violation of classical behavior (1 for the EPR criterion and 2 for the Duan criterion) are also indicated. Since the linearized approach is valid in this regime, we used our analytical result in these curves. For  $\theta=0$  violation is obtained in most of the frequency range according to both criteria [Fig. 4(a)]. In Fig. 4(b) we plot the zero-frequency evaluation of the criteria as a function of  $\theta$ . In this case, the EPR criterion is more restrictive and it is interesting to observe that there exists a range of quadratures for which only one of the criteria is satisfied.

In Fig. 5 we show the noise sum and the product of inferred variances for an injected OPO ( $\mu_1=0.2$ ) operating above threshold ( $\mu_0=2$ ). Since the linearized approach does not apply to this condition, we used only numerical results in these curves. For  $\theta=0$  violation is obtained in most of the frequency range according to both criteria [Fig. 5(a)]. In Fig. 5(b) we plot the zero frequency evaluation of the criteria as a function of  $\theta$ . Again, the EPR criterion is more restrictive. Moreover, violation of classical behavior occurs in a quadrature range narrower than the one in Fig. 4(b). In both cases this quadrature range is quite narrow, which means that a considerable control of the local oscillator is required in order to render this effect experimentally observable.

In Fig. 6 we plot the two criteria below threshold ( $\mu_0=0.6$ ) for different injection levels. It allows for a comparison between the injected and the uninjected cases. Let us

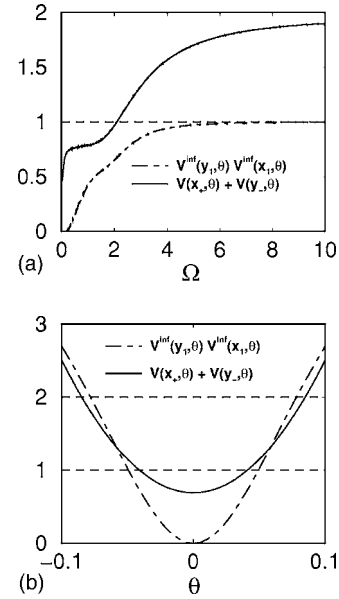


FIG. 5. (a) Dimensionless spectra of the Duan and EPR criteria, evaluated above threshold operation ( $\mu_0=2$  and  $\mu_1=0.2$ ) for  $\theta=0$  rad, obtained with numerical simulations of Eqs. (2). Frequencies ( $\Omega$ ) are expressed in units of the cavity damping rate ( $\gamma$ ) for the down-converted fields. (b) Dimensionless spectra of the Duan and EPR criteria at zero frequency as a function of  $\theta$  (expressed in radians) under the same conditions as in (a).

consider the intensities of the fields which are involved in this demonstration. The quadrature first-order steady-state values are as given previously, in Eqs. (9) and (10), from these we can calculate the normalized intensities of the down-converted fields  $I_j=x_{js}^2$  ( $j=1,2$ ). For  $\mu_1=0.1$  we see little difference from the uninjected result, but with intensities of  $I_{1s}=0.088$  and  $I_{2s}=0.028$ . Considering the case of  $\mu_1=0.2$ , we find that  $I_{1s}=0.28$  and  $I_{2s}=0.072$ , while a significant violation of the classical limit is predicted. Although these numbers in themselves do not seem very large, we point out that for typical experimental setups, this would be a truly intense field.

For example, let us consider an OPO with one input-output mirror with transmission coefficient  $T_0=2\gamma_0\tau$  for the pump field ( $R\sim 100\%$  for the down-converted fields) and another input-output mirror with a common transmission coefficient  $T=2\gamma\tau$  for signal and idler ( $R\sim 100\%$  for the pump field), where  $\tau$  is the cavity round trip time. It is convenient to express the powers involved in the OPO operation in terms of the threshold power  $P_{th}$ . The pump power is simply  $P_0=\mu_0^2P_{th}$ , the injection power is  $P_1=2\mu_1^2P_{th}(\omega_1/\omega_0)$  and the output powers of the down-converted fields are  $P_j^{out}=2x_{js}^2P_{th}(\omega_j/\omega_0)$ . If we consider  $P_{th}=20$  mW, which is a reasonable experimental value, and  $\omega_1\sim\omega_2\sim\omega_0/2$ , then our numerical example with  $\mu_0=0.6$  and  $\mu_1=0.2$  gives  $P_0=7.2$  mW,  $P_1=1.6$  mW,  $P_1^{out}=5.6$  mW, and  $P_2^{out}=1.4$  mW.

## VII. CONCLUSIONS

We have shown how an injected signal in one of the lower-frequency modes of the nondegenerate optical para-



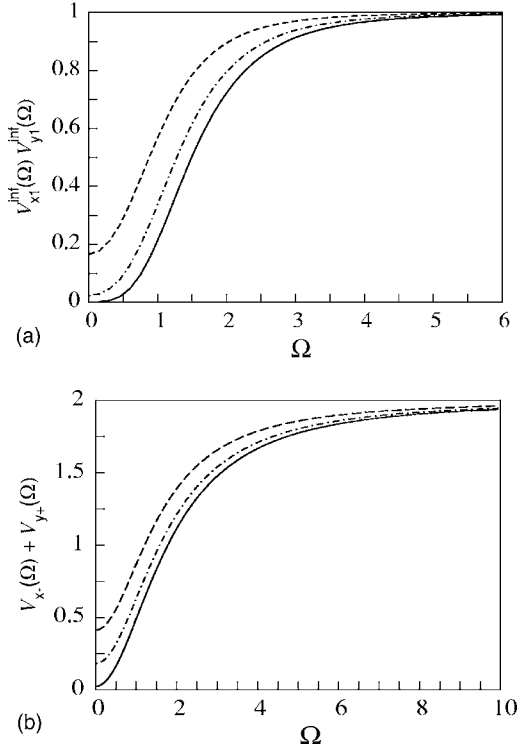


FIG. 6. Dimensionless spectra of the EPR (a) and Duan (b) criteria for  $\theta=0$  rad and below-threshold operation ( $\mu_0=0.6$ ), obtained with first-order perturbation.  $\mu_1=0$  (solid line), 0.1 (dot-dashed line), and 0.2 (dashed line). Frequencies ( $\Omega$ ) are expressed in units of the cavity damping rate for the down-converted fields ( $\gamma$ ).

metric oscillator can be used to increase the intensity of both low-frequency modes below the normal oscillation threshold, while not markedly degrading the quantum correlations. Using a perturbation expansion of the full quantum equations of motion, we have shown the effects of this injected signal on the quantum properties of the system. Our analysis shows that a high degree of entanglement and a good demonstration of the EPR correlations are possible with reasonable injection values. Moreover, the amplified fields in this case are now macroscopic, rather than being composed essentially of fluctuations as in previous experimental demonstrations of these qualities. In conclusion, we predict that this device may be useful for the production of continuous-variable entangled and EPR states with macroscopic intensities.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge financial support from the Brazilian agencies CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) and CAPES (Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) and the Australian Research Council.

#### APPENDIX A: APPROXIMATE STEADY STATE SOLUTIONS

To solve the steady-state equations for  $x_{0s}$ , we may write a fifth-order product,

$$P_5(x) = (2\mu_0 - x) \left( 1 - \frac{1}{4}x^2 \right)^2, \quad (\text{A1})$$

the solutions being found as the intersections of  $P_5(x)$  with the straight line  $f(x)=2\mu_1^2x$ , that is, as the real roots of the polynomial equation  $P_5(x)-f(x)=0$ . Setting  $\mu_1=0$  leads to the usual solutions for the noninjected OPO:  $x_{0s}=2\mu_0$ , which is the only stable solution below threshold ( $\mu_0 < 1$ ), and  $x_{0s} = \pm 2$ , which are the two stable solutions above threshold.

In order to find approximate analytical solutions for  $x_{0s}$ , we shall adopt the strategy of dividing the operation into three different regions, namely, below, above, and at threshold. In each regime we shall make a suitable approximation for  $P_5(x)$ , always assuming a weak injection ( $\mu_1 \ll 1$ ). For the below threshold regime, we can make a linear approximation for  $P_5(x)$  around  $2\mu_0$  by setting  $x=2\mu_0+\epsilon$  and keeping terms up to first order in  $\epsilon$ . Above threshold ( $\mu_0 > 1$ ), there may be up to three steady-state solutions for  $x_{0s}$ . However, as we will show in Appendix B, only the solution for which  $x_{0s} < 2$  is stable. Moreover, the shape of  $P_5(x)$  for above threshold operation suggests that a quadratic approximation can be employed around  $x=2$ . Therefore we will set  $x=2+\epsilon$  and keep terms up to second order in  $\epsilon$ . Finally, the shape of  $P_5(x)$  at threshold suggests a cubic approximation around  $x=2$ . However, as we will show, we found that a quartic approximation gives a simpler result.

In Fig. 7 we show a graphical representation of the steady-state solution for  $x_{0s}$  in each regime. In all cases, the full solution is found as the intersection of the full line representing  $P_5(x)$  with the long-dashed line of positive slope representing  $f(x)=2\mu_1^2x$ . The linear approximation corresponds to approximating  $P_5(x)$  by a tangent straight line and finding its intersection with  $f(x)$ . As can be seen from the graph in Fig. 7(a), the two intersections are in close proximity. This approximation gives the following solution for the steady-state amplitude of the pump field quadratures below threshold:

$$x_{0s} = 2\mu_0 \left( 1 - \frac{2\mu_1^2}{(1-\mu_0^2)^2 + 2\mu_1^2} \right). \quad (\text{A2})$$

To obtain solutions in the second, above-threshold region, we approximate  $P_5(x)$  by a tangent parabola as shown in Fig. 7(b). The two solutions for  $x_{0s}$  around  $x=2$  are then obtained as the intersections of  $f(x)$  with this parabola, the smaller of these being the only stable one. As can be seen from the figure, these approximate solutions are almost indistinguishable from the full solutions, found as the intersections of  $P_5(x)$  with  $f(x)$ . The stable approximate solution found in this case is then

$$x_{0s} = 2 - \frac{\mu_1^2}{2(\mu_0 - 1)} \left( \sqrt{1 + \frac{8(\mu_0 - 1)}{\mu_1^2}} - 1 \right). \quad (\text{A3})$$

Finally, the quartic approximation, valid at threshold ( $\mu_0 = 1$ ), gives a quite simple solution

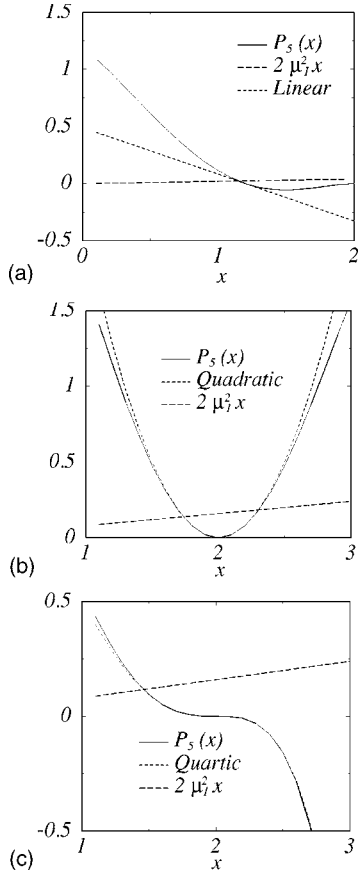


FIG. 7. Graphic representation of the steady-state solution for the dimensionless amplitude quadrature  $x_{0s}$ . (a) Below threshold ( $\mu_0=0.6$ ). A linear approximation (short-dashed) is used for the dimensionless polynomial  $P_5(x)$ . (b) Above threshold ( $\mu_0=2$ ). A quadratic approximation (short-dashed) is used for  $P_5(x)$ . (c) On threshold ( $\mu_0=1$ ). A quartic approximation (short-dashed) is used for  $P_5(x)$ . In all figures we considered  $\mu_1=0.2$ , the solid lines are the full evaluation of  $P_5(x)$ , and the long-dashed lines represent the dimensionless quantity  $2\mu_1^2 x$ .

$$x_{0s} = 2 - (2\mu_1)^{2/3}. \quad (\text{A4})$$

This solution for  $x_{0s}$  is shown in Fig. 7(c), as the intersection of the quartic approximation and  $f(x)$ . As can be seen, the fourth-order polynomial approximates  $P_5(x)$  very closely in this region.

## APPENDIX B: STABILITY ANALYSIS OF THE STEADY-STATE SOLUTIONS

We now present a linear stability analysis of the steady-state solutions of Sec. III. Let us consider small deviations of the dynamical variables from their steady state average values as follows:

$$\begin{aligned} \delta x_j &= x_{js} - \langle x_j \rangle, \\ \delta y_j &= y_{js} - \langle y_j \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B1}) \quad \text{and}$$

with  $j=0,1,2$ . From the average of Eqs. (7), we can write down the equations of motion for  $\delta x_j$  and  $\delta y_j$ . The linearized equations of motion are then obtained by keeping terms up to first order in these deviations. Defining the column vectors

$$\delta \vec{x} = \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \delta \vec{y} = \begin{bmatrix} \delta y_0 \\ \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B2})$$

we can write the linearized equations in a compact form:

$$\dot{\delta \vec{x}} = \mathbf{M}_x \delta \vec{x} \quad \text{and} \quad \dot{\delta \vec{y}} = \mathbf{M}_y \delta \vec{y}, \quad (\text{B3})$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_x &= \begin{bmatrix} -\gamma_r & -\gamma_r x_{2s} & -\gamma_r x_{1s} \\ x_{2s}/2 & -1 & x_{0s}/2 \\ x_{1s}/2 & x_{0s}/2 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{and } \mathbf{M}_y &= \begin{bmatrix} -\gamma_r & -\gamma_r x_{2s} & -\gamma_r x_{1s} \\ x_{2s}/2 & -1 & -x_{0s}/2 \\ x_{1s}/2 & -x_{0s}/2 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

These steady-state solutions are stable if all eigenvalues of  $\mathbf{M}_x$  and  $\mathbf{M}_y$  have negative real parts. We therefore arrive at the following secular equations for the eigenvalues  $\lambda_x$  and  $\lambda_y$ :

$$\begin{aligned} \lambda_x^3 + c_1 \lambda_x^2 + c_2 \lambda_x + c_3 &= 0, \\ \lambda_y^3 + d_1 \lambda_y^2 + d_2 \lambda_y + d_3 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

where

$$\begin{aligned} c_1 &= d_1 = 2 + \gamma_r, \\ c_2 &= d_2 = 1 - x_{0s}^2/4 + 2\gamma_r + \frac{\gamma_r}{2}(x_{1s}^2 + x_{2s}^2), \\ c_3 &= \gamma_r[1 - x_{0s}^2/4 + (x_{1s}^2 + x_{2s}^2)/2 + x_{0s}x_{1s}x_{2s}/2], \\ d_3 &= \gamma_r[1 - x_{0s}^2/4 + (x_{1s}^2 + x_{2s}^2)/2 - x_{0s}x_{1s}x_{2s}/2]. \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

According to the Hurwitz criterion [41], all eigenvalues have negative real parts if and only if the coefficients  $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2$ , and  $d_3$  are all positive and the Hurwitz determinants  $H_1 = c_1, H_2 = c_1 c_2 - c_3, H_3 = c_3 H_2, G_1 = d_1, G_2 = d_1 d_2 - d_3$ , and  $G_3 = d_3 G_2$ , are also positive.

At this point, it is useful to write all the conditions in terms of the system parameters and  $x_{0s}$ . From the steady state given by Eqs. (8) we have

$$x_{1s} = \frac{8\mu_1}{4 - x_{0s}^2} \quad (\text{B7})$$

$$x_{2s} = \frac{4\mu_1 x_{0s}}{4 - x_{0s}^2}. \quad (\text{B8})$$

After some straightforward algebra and careful inspection of the above conditions, one can reduce the whole Hurwitz criterion to a single condition:

$$(1 - x_{0s}^2/4)[2\mu_1^2 + (1 - x_{0s}^2/4)^2] > 0. \quad (\text{B9})$$

Therefore, it can be clearly seen that any steady-state solution with  $x_{0s} > 2$  is unstable. In practice, this means that all the physical solutions we find with injected signal are stable, in contrast to the uninjected case where there is an instability at the oscillation threshold.

---

[1] C. Fabre, J. Fouet, and A. Maître, *Opt. Lett.* **25**, 76 (2000).  
 [2] M. I. Kolobov and C. Fabre, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3789 (2000).  
 [3] N. Treps, U. Andersen, B. Buchler, P. K. Lam, A. Maître, H.-A. Bachor, and C. Fabre, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 203601 (2002).  
 [4] P. H. Souto Ribeiro, C. Schwob, A. Maître, and C. Fabre, *Opt. Lett.* **22**, 1893 (1997).  
 [5] G. Björk and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **37**, 125 (1988).  
 [6] G. Björk and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **37**, 1991 (1988).  
 [7] M. D. Reid and P. D. Drummond, *Phys. Rev. A* **40**, 4493 (1989).  
 [8] P. D. Drummond and M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **41**, 3930 (1990).  
 [9] S. Chaturvedi, P. D. Drummond, and D. F. Walls, *J. Phys. A* **10**, L187 (1977); P. D. Drummond and C. W. Gardiner, *ibid.* **13**, 2353 (1980).  
 [10] H. Su, W. Zhang, and S. Wang, *Phys. Lett. A* **270**, 296 (2000).  
 [11] K. V. Kheruntsyan and K. G. Petrosyan, *Phys. Rev. A* **62**, 015801 (2000).  
 [12] N. C. Wong, *Opt. Lett.* **16**, 1698 (1991).  
 [13] F. E. Harrison and D. F. Walls, *Opt. Commun.* **123**, 331 (1995).  
 [14] Y. Zhang, H. Su, C. Xie, and K. Peng, *Phys. Lett. A* **259**, 171 (1999).  
 [15] A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, and G. Camy, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2555 (1987).  
 [16] K. C. Peng, Q. Pan, H. Wang, H. Su, and C. D. Xie, *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **66**, 755 (1998).  
 [17] Y. Zhang, H. Wang, X. Li, J. Jing, C. Xie, and K. Peng, *Phys. Rev. A* **62**, 023813 (2000).  
 [18] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).  
 [19] C. Schori, J. L. Sørensen, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. A* **66**, 033802 (2002).  
 [20] A. Porzio, A. Chiummo, F. Sciarrino, and S. Solimato, *Opt. Lasers Eng.* **37**, 585 (2002).  
 [21] R. Guo, X. Jia, C. Xie, and K. Peng, *Opt. Commun.* **211**, 243 (2002).  
 [22] B. P. Boczar and W. J. Scharpf, *Appl. Opt.* **33**, 979 (1994).  
 [23] A. V. Smith, W. J. Alford, T. D. Raymond, and M. S. Bowers, *J. Opt. Soc. Am. B* **12**, 2253 (1995).  
 [24] S. Haidar and H. Ito, *Opt. Commun.* **171**, 171 (1999).  
 [25] R. C. Bapna and K. Dasgupta, *Opt. Laser Technol.* **33**, 125 (2001).  
 [26] R. Graham and H. Haken, *Z. Phys.* **210**, 276 (1968); R. Graham, *ibid.* **210**, 319 (1968); **211**, 469 (1968).  
 [27] K. J. McNeil and C. W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **28**, 1560 (1983).  
 [28] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics I* (Springer, Berlin, 1999).  
 [29] C. W. Gardiner, *Quantum Noise* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).  
 [30] L. Arnold, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications* (John Wiley and Sons, New York, 1974); C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, 1983).  
 [31] S. Chaturvedi and P. D. Drummond, *Eur. Phys. J. B* **8**, 251 (1999).  
 [32] K. Dechoum, P. D. Drummond, S. Chaturvedi, and M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **70**, 053807 (2004).  
 [33] L. I. Plimak and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **50**, 2627 (1994).  
 [34] O. Veits and M. Fleischhauer, *Phys. Rev. A* **55**, 3059 (1997).  
 [35] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963); E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).  
 [36] C. M. Caves and B. L. Schumaker, *Phys. Rev. A* **31**, 3068 (1985); B. L. Schumaker and C. M. Caves, *ibid.* **31**, 3093 (1985).  
 [37] H. J. Kimble, in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, edited by J. Dalibard, J. M. Raimond, and J. Zinn-Justin (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1992) p. 549.  
 [38] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000).  
 [39] M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **40**, 913 (1989).  
 [40] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, and K. C. Peng, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3663 (1992).  
 [41] H. Haken, *Synergetics: An Introduction*, 3rd ed. (Springer, Heidelberg, 1983).



## *Referências Bibliográficas*

- [1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Roger\\_Bacon](http://en.wikipedia.org/wiki/Roger_Bacon)
- [2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac\\_Newton](http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton)
- [3] [http://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan\\_Huygens](http://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens)
- [4] [http://en.wikipedia.org/wiki/James\\_Clerk\\_Maxwell](http://en.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell)
- [5] Schalow, A. L., Townes, C. H., *Physical Review*, v. **112**, p.1940, 1958.
- [6] Maiman, T. H., *Nature*, v. **187**, p.493, 1960.
- [7] Aspect, A., *et al*, *Physical Review Letters*, v. **49**, p.91, 1982.
- [8] Shikata, J., Sato, M., Taniuchi, T., Ito, H., *Optics Letters*, v. **24**, p.202-204, 1999.
- [9] Douillet, A., Tallet, A., Ressayre, E., Berre, M. L., *Physical Review A*, v. **63**, p.023814, 2001.
- [10] Douillet, A., Zondy, J. J., Santarelli, G, Makdissi, A., Clarion, A., *IEEE Transactionson Instrumentation and Measurement*, v. **50**, p.548-551, 2001.
- [11] Pettiaux, N.P., Mandel, P., Fabre, C., *Physical Review Letters*, v. **66**, p.1838-1841, 1991.
- [12] Wu, L. A., Kimble, H. J., Hall, J. L., Wu, H. F., *Physical Review Letters*, v. **57**, p.2520-2523.
- [13] Ou, Z., Y., Pereira, S. F., Kimble, H. J., Peng, K. C., *Physical Review Letters*, v. **68**, p. 3663-3666, 1992.
- [14] Furusawa, A., Sorensen, J. L., Braunstein, S. L., Fuchs, C. A., Kimble, H. J., Polzik, E. S., *Science*, v. **282**, p. 706-709, 1998.
- [15] Treps, N., Grosse, N., Bowen, W. P., Fabre, C., Bachor, H. A., Lam, P. K., *Science*, v. **301**, p. 940-943, 2003.
- [16] Jones, J.A., *et al*, *Nature*, v. **403**, p. 869, 2000.
- [17] Duan, L.M., *et al* *Science*, v. **292**, p. 1695, 2001.
- [18] Beth, R. A., *Phys. Rev*, v. **50**, p.115, 1936.
- [19] Jackson, J. D., *Classical Eletrodynamics*, Wiley, 1ª edição, EUA, 1962.
- [20] Allen, L., *et al*, *Physical Review A*, v. **45**, p.8185, 1992. DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185>

- [21] Souza, C.E.R., Borges, C.V.S., Khoury, A.Z., Huguenin, J.A.O., Aolita, L., Walborn, S.P., *Physical Review A*, v. **77**, No. 3., 2008. DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.77.032345>
- [22] Souza, C.E.R., Huguenin, J.A.O., Milman, Khoury, P. A.Z., *Physical Review Letters*, v. **99**, No. 16. (2007). DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.160401>
- [23] Padgett, M., Allen, L., *Contemporary Physics*, v. **41**, p. 275-285 (2000).
- [24] Dholakia, K., Simpson, N.B., Padgett, M.J., Allen, L., *Physical Review A*, v. **54**, No. 5. (1 November 1996), R3742. DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.54.R3742>
- [25] MAIR, J., *et al*, **Nature**, v. **412**, p 313, 2001.
- [26] BARNETT, S. M., *et al*, *The European Physical Journal D*, v. **22**, p. 513-519, 2003.
- [27] BLACK, E. D., *American Journal of Physics*, v. **69**, p. 79-87, 2001.
- [28] Martinelli, M., *et al*, *Physical Review A*, v. **70**, p. 13812, 2004.
- [29] ARLT, K., *et al*, *Physical Review A*, v. **59**, p. 3950-3952, 1999.
- [30] Caetano, D. P., *et al*, *Physical Review A*, v. **66**, p. 041801, 2002.
- [31] Souto Ribeiro, P. H. S., *et al*, *Physical Review Letters*, v. **87**, p. 133602, 2001.
- [32] Treps, N., *et al*, *Science*, v. **301**, p. 940-943, 2003.
- [33] Coutinho dos Santos, B. *et al*, *Physical Review A*, v. **76**, p. 053821, 2007.
- [34] Lax, M., Lousiell, W. H., McKnight, W. B., *Physical Review A*, v. **11**, p. 1365 (1975), DOI:<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.11.1365>.
- [35] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, ed. Academic Press, 4<sup>a</sup> edição, EUA, 1995.
- [36] Armstrong, J. A., Bloembergen, N., Ducuing, J., e Pershan, P. S., *Physical Review*, **127**, p. 1918 (1962).
- [37] Bass, M., Franken, P. A., Hill, A. E., Peters, C. W., e Weinreich, G., *Physical Review Letters*, v. **8**, p. 18 (1962).
- [38] Beijersbergen, M. W., *et al*, *Optics Communication*, v. **96**, p. 123 (1993).
- [39] Berry, M. V., *Proceedings Royal Society of London A*, v. **392**, p. 45 (1984).
- [40] Born, M., Wolf, E., *Principles of Optics*, Pergamon, EUA, 1980.
- [41] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 1<sup>a</sup> edição, 2000.
- [42] Caetano, D. P., *et al*, *Physical Review A*, 041801 (Rapid Communication) (2002).

- [43] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F., *Quantum Mechanics*, v. 1, ed. John Wiley & Sons, 1ª edição, França, 1977.
- [44] Padgett, M. J., Courtial, J., *Optics Letters*, v. **24**, p. 430 (1999).
- [45] Einstein, A., *Ann. Phys.*, v. **17**, p. 891 (1905).
- [46] Fontenelle, M. T., Davidovich, L., *Physical Review A*, v. **51**, p. 2560 (1995).
- [47] Fowles, G. R. *Introduction of Modern Optics*, Dover, EUA, 1989.
- [48] Galvez, E. J., *et al*, *Physical Review Letters*, v. **90**, 203901 (2003).
- [49] Guenther, R. D., *Modern Optics*, John Wiley & Sons, 1ª edição, EUA, 1990.
- [50] Hannay, J. H., *Journal of Physics A: Mathematical Generalizations*, v. **18**, p. 221 (1985).
- [51] Hecht, Eugene, *Optics*, Addison-Wesley Longman, 3ª edição, EUA, 1998.
- [52] Heckenberg, N. R., *et al*, *Optics Letters*, v. **17**, p. 221 (1992).
- [53] Martinelli, Marcelo. Com pressão de ruído quântico e efeitos transversos em osciladores paramétricos óticos. 2002. 230 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Departamento de Física, USP, São Paulo - SP, 2002.
- [54] Souza, Carlos Eduardo Rodrigues de. Fases Geométricas na Produção de Vórtices Óticos. 2006. 72 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Departamento de Física, UFF, Niterói - RJ, 2006.
- [55] Cordeiro, Cristiano Monteiro de Barros. Mistura de ondas para caracterização de redes em relevo e materiais fotossensíveis. 2003. 112 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Departamento de Física, Unicamp, Campinas - SP, 2003.
- [56] Huguenin, Jose Augusto Oliveira. Correlações espaciais e temporais na amplificação e oscilação paramétrica. 2006. 176 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Departamento de Física, UFF, Niterói - RJ, 2006.
- [57] <http://loq.if.uff.br/doku.php>
- [58] <http://www.lastek.com.au/content/view/84/1227/>
- [59] <http://www.techmfg.com/portals/optics.html?gclid=CKCkrYHP5JgCFcdM5QodgndreQ>
- [60] Santos, B. Coutinho dos; Khoury, A. Z.; Huguenin, J. A. O.; *Optics Letters*, p.2803-2805, 1 dez. 2008.
- [61] N. Mukunda and R. Simon, *Annals of Physics*, v. **228**, p. 205-268 (1993).
- [62] Yariv, A., *Quantum Electronics*, John Wiley & Sons, third ed. (1988).
- [63] Walls, Fd. F.; Milburn, G. J.. *Quantum Optics*. 1ª edição, New York: Springer-verlag, 1995. 351 p.

- [64] Kolobov, Mikhail I.; *Review Of Modern Physics*, USA, v. **71**, n. 5, p. 1539-1590, out. 1999. Disponível em: <<http://rmp.aps.org/>>. Acesso em: 20 fev. 2009.
- [65] Mandel, Leonard, *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, EUA, 1995.
- [66] Dirac, P. A. M., *Principles of Quantum Mechanics*, 4<sup>a</sup> edição, Oxford University Press, London, 1958.
- [67] [http://pt.wikipedia.org/wiki/Hermann\\_von\\_Helmholtz](http://pt.wikipedia.org/wiki/Hermann_von_Helmholtz)
- [68] [http://pt.wikipedia.org/wiki/Charles\\_Fourier](http://pt.wikipedia.org/wiki/Charles_Fourier)
- [69] Lemos, Nivaldo A., *Mecânica Analítica*, ed. Livraria da Física, 1<sup>a</sup> edição, São Paulo, 2004.
- [70] Lewis, G. N., *Nature*, v. **118**, p. 874 (1926).
- [71] [http://pt.wikipedia.org/wiki/William\\_Rowan\\_Hamilton](http://pt.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton)
- [72] [http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert\\_space](http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_space)
- [73] [http://en.wikipedia.org/wiki/David\\_Hilbert](http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert)
- [74] MILONNI, Peter W.. *The Quantum Vacuum*. New York: Academic, 1994.
- [75] [http://pt.wikipedia.org/wiki/Werner\\_Heisenberg](http://pt.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg)
- [76] [http://en.wikipedia.org/wiki/Vladimir\\_Fock](http://en.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Fock)
- [77] Schrödinger, E., *Naturwissenschaften*, **14**, p.664, 1926.
- [78] [http://en.wikipedia.org/wiki/Roy\\_Glauber](http://en.wikipedia.org/wiki/Roy_Glauber)
- [79] Roy J Glauber, *Physical Review Letters*, v. **10**, No. 3. (1963), p. 84-86. DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.84>
- [80] Roy J Glauber, *Physical Review*, v. **130**, No. 6., p. 2529-2539, (1963). DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.130.2529>
- [81] Glauber, Roy J., *Physical Review*, v. **131**, No. 6., p. 2766-2788, (1963). DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766>
- [82] Glauber, Roy J., *Physical Review*, v. **145**, No. 4., p. 1041, (1966). DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.145.1041>
- [83] Glauber, Roy J., *Physical Review*, v. **177**, p. 1882-1902 (1969). DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.177.1882>
- [84] Glauber, Roy J., *Review Modern Physics*, v. **78**, 1267 (2006). DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.78.1267>
- [85] Klyshko, D.N., *JETP*, v. **28**, p. 522 (1969).
- [86] Lang, L., PhD Thesis, University of Rochester, (1992).

- [87] Hong, C.K., Mandel, L., *Physical Review A*, v. **31**, n. 4, p. 2409 (1985).
- [88] Monken, C.H., Souto Ribeiro, P.H., Pádua, S., *Physical Review A*, v. **57**, p. 3123 (1998).
- [89] <http://omnis.if.ufrj.br/~phsr/qopt/por/index.php>
- [90] Fonseca, E.J.S. *et al*, *Physical Review A*, v. **60**, p. 1530 (1999).
- [91] Souto Ribeiro, P.H., *et al*, *Physical Review Letters*, v. **87**, p. 133602 (2001).
- [92] Souto Ribeiro, P.H., *et al*, *Physical Review A*, v. **51**, p. 1631 (1995).
- [93] Souto Ribeiro, P.H., *et al*, *Physical Review A*, v. **60**, p. 5074 (1999).
- [94] Arnault, H., Barbosa, G.A., *Physical Review Letters*, v. **85**, p. 286 (2000).
- [95] Caetano, D.P. , Souto Ribeiro, P.H., Pardal, J.T.C., Khoury, A.Z., *Physical Review A*, v. **68**, p. 023805, (2003).
- [96] Walborn, S.P., *et al*, *Physical Review A*, v. **69**, p. 023811 (2004).
- [97] Caetano, D.P., Transferência e Propagação do Espectro Angular da Luz em Processos de Conversão de Frequências. 2004. 152 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Departamento de Física, UFRJ, Rio de Janeiro - RJ, 2004.
- [98] [http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel\\_diffraction](http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_diffraction)
- [99] [http://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Jean\\_Fresnel](http://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Jean_Fresnel)
- [100] Arlt, J., *et al*, *Physical Review A*, v. **59**, p. 3950 (1999).
- [101] Mair, A., *et al*, *Nature* (London), v. **412**, p. 313 (2001).
- [102] Ou, Z.Y., *et al*, *Physical Review A*, v. **41**, p. 1597 (1990).
- [103] Wang, L.J., *et al*, *Journal of the Optical Society of America B*, v. **8**, 978 (1991).
- [104] [http://en.wikipedia.org/wiki/Fraunhofer\\_diffraction](http://en.wikipedia.org/wiki/Fraunhofer_diffraction)
- [105] [http://en.wikipedia.org/wiki/John\\_von\\_Neumann](http://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann)
- [106] [http://en.wikipedia.org/wiki/Max\\_Born](http://en.wikipedia.org/wiki/Max_Born)
- [107] [http://en.wikipedia.org/wiki/Andrey\\_Markov](http://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Markov)
- [108] [http://en.wikipedia.org/wiki/Freeman\\_Dyson](http://en.wikipedia.org/wiki/Freeman_Dyson)
- [109] Carmichael, Howard. *Statistical Methods in Quantum Optics*. Alemanha: Springer-verlag, 1999. 361 p.
- [110] van Kampen N.G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (3ed., Elsevier, 2007), ISBN 0444529659.
- [111] [http://en.wikipedia.org/wiki/Satyendra\\_Nath\\_Bose](http://en.wikipedia.org/wiki/Satyendra_Nath_Bose)

- [112] Scully, Marllan O.; Zubairy, M. Suhail. Quantum Optics. 1<sup>a</sup> edição Reino Unido: Cambridge University Press, 2002. 652 p.
- [113] [http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig\\_Boltzmann](http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Boltzmann)
- [114] [http://en.wikipedia.org/wiki/William\\_Thomson,\\_1st\\_Baron\\_Kelvin](http://en.wikipedia.org/wiki/William_Thomson,_1st_Baron_Kelvin)
- [115] [http://en.wikipedia.org/wiki/William\\_Thomson,\\_1st\\_Baron\\_Kelvin](http://en.wikipedia.org/wiki/William_Thomson,_1st_Baron_Kelvin)
- [116] Wigner, E. P., *Physical Review*, v. **40**, p. 749, 1932.
- [117] Hillery, M., O'Connell, R. F., Scully, M. O., Wigner, E. P., *Physics Reports*, v. **106**, p. 121-167, 1984.
- [118] [http://en.wikipedia.org/wiki/George\\_Sudarshan](http://en.wikipedia.org/wiki/George_Sudarshan)
- [119] Sudarshan, E. C. G., *Physical Review Letters*, v. **10**, p. 277-279 (1963)
- [120] Drummond, P. D., Gardiner, C. W., *Journal Physics A*, v. **13**, p. 2353, (1980).
- [121] Drummond, P. D., Gardiner, C. W., Wals, D. F., *Physical Review A*, v. **24**, p. 914, (1981).
- [122] Cahill, K. E., Glauber, R. J., *Physical Review*, v. **177**, p. 1857 (1969)
- [123] Cahill, K. E., Glauber, R. J., *Physical Review*, v. **177**, p. 1882 (1969).
- [124] Risken, H.. The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications. 2<sup>a</sup> edição Alemanha: Springer-verlag, 1989. 485 p.
- [125] Pawula, R.F., *Physical Review*, v. **162**, p. 186 (1967).
- [126] Gardiner, C. W.. Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and Natural Sciences. 2<sup>a</sup> edição, Alemanha: Springer-verlag, 2002. 444 p.
- [127] Husimi, K., *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, v. **22**, p. 264.
- [128] Coutinho dos Santos, B.; Souza, C. E. R.; Dechoum, K.; Khoury, A. Z.. *Physical Review A*, EUA, v. **76**, p.053821-1-053821-10, 16 nov. 2007.
- [129] Coutinho dos Santos, B.; Dechoum, K.; Fonseca, L.; Khoury, A. Z.; Olsen, M.O.. *Physical Review A*, Eua, v. **72**, p.033829-1-033829-11, 22 set. 2005.
- [130] Chaturvedi, S., Drummond, P.D.. *European Physics Journal B*, v. **8**, p. 251 (1999).
- [131] Dechoum, K., Drummond, P.D., Chaturvedi, S., Reid, M.D., *Physical Review A*, v. **70**, p. 053807 (2004).
- [132] [http://en.wikipedia.org/wiki/Galois\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Galois_theory)
- [133] Reid, M.D., Drummond, P.D., *Physical Review A*, v. **40**, p. 4493, (1989).
- [134] Duan, L.M., Giedke, G., Cirac, J.I., Zoller, P., *Physical Review Letters*, v. **84**, p. 2722 (2000).

- [135] Reid, M.D., *Physical Review A*, v. **40**, p. 913, (1989).
- [136] <http://mathworld.wolfram.com/Routh-HurwitzTheorem.html>
- [137] Huguenin, J. A. O., *et al*, *Journal of Optical Society of America A*, v. **20**, p. 1883 (2003).
- [138] Milonni, P. W., Eberly, J. H., *Lasers*, Wiley-Interscience, 1<sup>a</sup> edição, 1988.
- [139] Oemrawsingh, S. S. R., *et al*, *Applied Optics*, v. **43**, p. 688 (2004).
- [140] Siegman, A. E., *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, CA, EUA, 1986.
- [141] Padgett, M. J., Courtial, J., *Optics Letters*, v. **24**, p. 430 (1999).
- [142] Pancharatnam, S., *Proc. Ind. Acad. Sci.*, v. **44**, p. 47 (1956).
- [143] Petrov, D. V., Canal, F., Torner, L., *Optics Communications*, v. **143**, p. 265 (1997).
- [144] Ruffin, A. B., *et al*, *Physical Review Letters*, v. **83**, p. 3410 (1999).
- [145] Boyd, R. W., *Journal of Optical Society of America A*, v. **70**, p. 877-880 (1980).
- [146] Feng, S. and Winful, H. G., *Optics Letters*, v. **26**, p. 485 (2001).
- [147] Shen, Y., R., *The Principles of Nonlinear Optics*, John Wiley & Sons, 1<sup>a</sup> edição, 1984.
- [148] Kleinman, D. A., *Physical Review*, v. **126**, p. 1977 (1962).
- [149] Schwob, C., *et al.*, *Applied Physics B*, v. **66**, p. 685 (1998).
- [150] Luciano Fonseca da Silva, Antonio Zelaquett Khoury, and Kaled Dechoum, *Physical Review A*, v. **78**, 025803 (2008).
- [151] Marshall, T. W., Santos, E., *Foundations of Physics Letters*, v. **5**, p. 573 (1992).
- [152] Marshall, T. W., *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences*, v. **276**, p. 475 (1963).
- [153] Marshall, T. W., *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences*, v. **61**, p. 537 (1965).
- [154] van Enk, S. J., *Optics Communications*, v. **102**, p. 59 (1993).
- [155] Verdyen, J. T., *Lasers Electronics*, Prentice Hall, 3<sup>a</sup> edição, 1994.

"So Long, and Thanks for All the Fish"  
*The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)