UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL: INDÍCIOS DE FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM E DO PENSAMENTO ALGÉBRICOS

Tatiane Déchen

SÃO CARLOS/SP
2008

TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL: INDÍCIOS DE FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM E DO PENSAMENTO ALGÉBRICOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL: INDÍCIOS DE FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM E DO PENSAMENTO ALGÉBRICOS

Tatiane Déchen

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação, Área de Concentração: Processos de Ensino e de Aprendizagem. Orientadora: Profa. Dra. Cármen Lúcia Brancaglion Passos.

SÃO CARLOS/SP
2008

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

D277te

Déchen, Tatiane.
Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de álgebra na 6ª série do ensino fundamental : indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos / Tatiane Déchen. -- São Carlos : UFSCar, 2008.
126 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2008.

1. Atividade exploratorio-investigativa. 2. Matemática – ensino. 3. Comunicação na educação. 4. Ensino de álgebra. I. Título.

CDD: 371.1 (20ª)

BANCA EXAMINADORA

Profª Drª Cármen Lúcia Brancaglion Passos

Profª Drª Regina Celia Grando

Profª Drª Maria do Carmo de Sousa

Dedico este trabalho

aos meus pais, Jurandir e Helena Neide;

às minhas irmãs, Viviane e Stefanie; e

às minhas sobrinhas, Emmanuelle e Sofia.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, pela força e pela luz nos momentos de mais esta etapa, principalmente nos mais atribulados.

À minha família, apoio indispensável e que fez tudo sempre ser possível.

À minha orientadora, Profª Drª Cármen Lucia Brancaglion Passos, por acreditar, incentivar e ajudar a realizar mais um sonho de minha vida.

À Profª Drª Maria do Carmo de Sousa e à Profª Drª Regina Célia Grando, pelas contribuições e pelos ensinamentos. Obrigada por ajudarem a tornar-me pesquisadora.

Aos professores, funcionários e colegas do PPGE, que acompanharam e contribuíram para esta conquista.

A todos da EE Professora Juvelina de Oliveira Rodrigues, amigos verdadeiros que me apoiaram incondicionalmente, por acreditarem na realização desta pesquisa. Aos meus alunos, razão pela qual amo minha profissão, por compreenderem minhas ausências.

Às professoras do GCEEM, por participarem deste momento.

À professora parceira, por abrir suas salas de aula e pelos momentos de reflexão que contribuíram para a riqueza dos resultados.

À escola e aos alunos que participaram deste estudo, pela disponibilidade e pelo empenho que demonstraram.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, por oferecer o programa Bolsa Mestrado, ajuda financeira necessária nessa caminhada.

Aos meus amigos e amigas, pelas palavras de incentivo e de afeto.

A todos aqueles que, de certa forma, incentivaram, desejaram e contribuíram para esta conclusão.

A todas as pessoas não mencionadas anteriormente, cuja ajuda foi indispensável para a conclusão desta investigação, muito obrigada!

RESUMO

A presente pesquisa, de caráter qualitativo, teve origem com a prática docente da pesquisadora, nos desafios encontrados no ensino de álgebra e nos estudos realizados a respeito das investigações matemáticas como uma metodologia potencialmente motivadora e de resultados positivos em relação ao desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos. Com o objetivo principal de identificar indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos de alunos que estão iniciando a aprendizagem nesse tema, foram observadas a dinâmica e as comunicações que ocorreram no desenvolvimento de tarefas exploratório-investigativas em duas turmas de 6ª série do Ensino Fundamental em uma escola particular da cidade de Americana - SP. A pesquisa foi feita em parceria com uma professora que, além de possuir experiência docente, já havia pesquisado e trabalhado com atividades exploratório-investigativas. Pesquisadora e professora parceira construíram as tarefas desenvolvidas durante a investigação com a colaboração dos participantes do Grupo Colaborativo de Estudos em Educação Matemática (GCEEM), do qual ambas fazem parte. Diante dos dados da pesquisa, um segundo objetivo foi estabelecido: identificar algumas potencialidades e limites da utilização de tarefas exploratório-investigativas no atual contexto educacional. Com o foco na dinâmica da aula, na comunicação proporcionada por tarefas exploratório-investigativas e no ensino da álgebra, foi possível aprofundar a análise da primeira tarefa, em que os alunos eram levados a explorar uma situação e analisar uma regularidade. Nas trocas de idéias entre os alunos, com a professora e nos registros feitos durante o desenvolvimento da tarefa, foi possível identificar os indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos. Os dados foram coletados e analisados, segundo diversos referenciais teóricos sobre investigações matemáticas, comunicação e ensino de álgebra. Para construir a análise dos objetivos traçados, primeiramente buscou-se identificar e analisar as comunicações dos alunos e da professora, tanto a oral como a escrita, ocorridas durante a realização da tarefa. Os dados analisados foram agrupados em três blocos: (1) O movimento da aula investigativa e os indícios do pensamento e da linguagem algébricos. (2) Os movimentos da sala de aula que geraram conflitos e dificuldades. (3) O conflito entre o pensamento e a linguagem. Durante a análise notou-se que as dificuldades encontradas pelos alunos tiveram origem na falta de conceitos — principalmente o de variável — e na diferente linguagem usada pela professora. Foi possível observar que os alunos, ainda com o pensamento aritmético, foram induzidos a usar a linguagem simbólica — usada pela professora — sem antes desenvolver os conceitos necessários. Pôde-se ainda perceber alguns limites dentro do contexto educacional, como o tempo necessário para dar significado aos conceitos. Ao identificar os indícios, ficou claro que é preciso que os alunos sintam necessidade de usar a álgebra simbólica — pensar cientificamente — para resolver problemas, ou seja, precisam ser estimulados para que a álgebra tenha significado.

Palavras-chave: Atividade exploratório-investigativa; comunicação — aula de Matemática; ensino de álgebra.

ABSTRACT

The following research, qualitative in nature, originated with the practice of teacher researcher, the challenges encountered in teaching algebra and studies undertaken in respect of investigations mathematical as a methodology potentially motivating and positive results in relation to the development of language and the algebraic thinking. With the main objective of identifying evidence of formation and development of language and algebraic thinking of students who are starting to learn this subject, were the dynamics and communications that occurred in the development of exploratory-investigative tasks into two classes of 6th grade of Education Essential in a private school in the city of Americana - SP. The research was done in partnership with a teacher, who has teaching experience, had already researched and worked with exploratory-investigative activities. Researcher and teacher partner built the tasks undertaken during the investigation with the cooperation of the participants in the Collaborative Group for Research in Mathematics Education (GCEEM), of which both are members. Given the data of the search, a second goal was set: to identify some strengths and limits the use of exploratory-investigative tasks in the current educational context. With the focus on the dynamics of the classroom, in the statement provided by exploratory-investigative tasks and the teaching of algebra, it was possible to analyze further the first task, in which students had to explore a situation and analyze a regular basis. In exchanges of ideas among students, with the teacher and the records made during the development of the task, it was possible to identify the signs of formation and development of language and algebraic thinking. The data were collected and analyzed, according to various benchmarks theoretical research on mathematics, communication and teaching of algebra. To build the analysis of the goals outlined, first trying to identify and analyze the communications of the students and teacher at both the oral and written, during the completion of the task. Data were grouped into three blocs: (1) The movement of classroom research and evidence of language and algebraic thinking. (2) The movement of the classroom that led to conflicts and difficulties. (3) The conflict between the thought and language. During the review it was noted that the difficulties encountered by students originated in the absence of concepts - particularly that of variable - and the different language used by the teacher. It was possible to see that students, even with the thought arithmetic, were induced to use symbolic language - used by the teacher - without first developing the concepts needed. We could still see some limits within the educational context, such as the time required to give meaning to the concepts. By identifying the evidence, it became clear that students need to feel that to use the algebra symbolic is necessary- think scientifically - to solve problems, in another words, to be encouraged so that the algebra has meaning.

Keywords: Activity-exploratory research, communication - teaching of Mathematics; teaching of algebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ensinar Matemática no Ensino Fundamental tem sido cada vez mais desafiante, principalmente em relação à álgebra, como mostram alguns pesquisadores. Esse desafio se transformou em angústia na prática docente da pesquisadora, iniciada em 2004. Mesmo tendo investigado durante a graduação alguns aspectos sobre processo de ensino e aprendizagem da álgebra, na ação docente percebeu que a maioria dos seus alunos não conseguia resolver diferentes situações-problema que envolvessem o mesmo princípio algébrico, ou seja, os alunos não transportavam os conceitos para novas situações desconhecidas, o que demonstrava que não haviam aprendido.

Os estudos realizados sobre o ensino da álgebra revelaram que muitas das dificuldades demonstradas pelos alunos surgem porque a álgebra simbólica é introduzida já pronta. Os alunos não percebem a lógica do contexto. Como professora, a pesquisadora percebeu que, mesmo tentando mudar os problemas propostos, os alunos tinham dificuldade em entender, por exemplo, uma equação que parecia simples. As dúvidas e dificuldades, com o passar do tempo, tornavam-se recorrentes, principalmente ao montar expressões com a linguagem simbólica.

Na busca por metodologias de ensino que desenvolvessem com sucesso também o pensamento algébrico, a pesquisadora conheceu as Investigações Matemáticas (IM). Em estudo preliminar realizado sobre essa temática deparou-se com várias experiências com aulas exploratório-investigativas que contribuíam para a promoção de aprendizagens significativas dos estudantes bem como para o desenvolvimento de certo entusiasmo pela Matemática.

O contato com as investigações matemáticas foi aprofundado com a participação — desde o seu início, em 2005 — em um grupo de estudos chamado Grupo Colaborativo de Estudos em Educação Matemática (GCCEM)[1]. O grupo teve origem no interesse de uma professora em encontrar parceria para sua pesquisa de mestrado, que tinha relação com as investigações matemáticas, e, mais ainda, em trazer para a Diretoria de Ensino de Americana uma experiência colaborativa que permitisse transformações em sua prática pedagógica, como as que já havia vivenciado com a sua participação em outro grupo de estudos, o Grupo de Sábado (GdS)[2].

Os professores que fazem parte de um grupo com tais características percebem que seus conhecimentos são valorizados, pois podem sentir que estão em um ambiente onde se

---

[1] Este grupo é composto por professores de matemática da rede pública de Americana e região, interessados em: aprimorar seus conhecimentos, compartilhar experiências de ensino-aprendizagem e buscar fundamentos teóricos para compreender a própria prática. No período de 2005 a 2007, o grupo se reunia na Diretoria de Ensino de Americana - SP. A partir de 2008 as reuniões acontecem nas casas de seus integrantes. O grupo estuda a possibilidade de voltar a reunir-se na Diretoria, a fim de facilitar o interesse de novos participantes.

[2] O Grupo de Sábado (GdS) é um grupo de pesquisa e estudos em Educação Matemática que se reúne quinzenalmente, aos sábados, na FE/Unicamp, para refletir, investigar e escrever sobre a prática docente em Matemática nas escolas.

desenvolvem profissionalmente, e não apenas recebem formação, como possivelmente acontece quando realizam um curso de formação continuada.

Com essas experiências, a pesquisadora teve interesse em pesquisar mais a fundo as contribuições que as investigações matemáticas trazem para o ensino da álgebra, focando o movimento e as comunicações que elas promovem em sala de sala.

As tarefas exploratório-investigativas com conteúdo algébrico podem ser significativas para o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos, pois permitem, por exemplo, que os alunos tenham contato com a análise de padrões — possam prever — e com as generalizações.

Para poder aprofundar os estudos sobre as tarefas exploratório-investigativas, proporcionando uma nova comunicação nas aulas de Matemática, que permitisse a melhor compreensão da álgebra, a presente pesquisa foi iniciada.

Os principais referenciais sobre investigações matemáticas foram: Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), Cunha (1998), Brocardo (2001), Fonseca (2000). Os autores defendem que a realização de tarefas de investigação é potencializadora do desenvolvimento da capacidade de reflexão dos alunos sobre a sua própria experiência matemática. No entanto, exige uma formação matemática sólida do professor. Salientam ainda que a atividade de investigação é caracterizada por vários processos matemáticos, como, por exemplo, a coleta e a organização dos dados, a formulação de conjecturas e a posterior verificação de sua validade.

Segundo os estudos realizados, uma investigação matemática deverá ter um caráter desafiador e aberto; possibilitar que os alunos apresentem várias formas de explorar e investigar o problema; possuir etapas e características específicas que a diferem de outras metodologias, como por exemplo, a resolução de problemas.

Nesta pesquisa, optamos por observar e analisar as comunicações que ocorrem durante esse tipo de tarefa. Os dados levaram à seguinte questão: *Quais indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico são revelados por estudantes de 6ª série a partir da comunicação estabelecida em sala de aula?*

O objetivo principal foi identificar indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos por alunos. Com a análise dos dados pudemos propor um segundo objetivo: identificar algumas potencialidades e limites da utilização de tarefas exploratório-investigativas no atual contexto educacional.

A escolha da 6ª série para desenvolver as tarefas exploratório-investigativas foi feita por ser esta tradicionalmente a série em que se inicia o ensino da álgebra simbólica. A proposta de pesquisa foi apresentada ao grupo de estudos (GCEEM) com a intenção de que a parceria para a pesquisa pudesse acontecer com uma dessas professoras e de que, ainda, todas participassem do processo de escolha e elaboração das tarefas. Três tarefas puderam ser escolhidas e elaboradas, em conjunto com os integrantes do grupo (GCEEM), para fazer parte desta pesquisa.

A partir disso estabeleceu-se parceria com a professora Lis — a mesma que iniciou o grupo — que, na época, lecionava álgebra em quatro turmas de 6ª série de uma escola particular e, além de ter experiência docente, já havia estudado e desenvolvido atividades exploratório-investigativas. Ressalta-se que essas características foram um diferencial no desenvolvimento das tarefas e nos dados revelados nesta pesquisa.

As tarefas foram desenvolvidas em duas turmas de 6ª série de uma escola particular. É importante observar que a 6ª série é formada por alunos com idade entre 11 e 12 anos que chegam com o pensamento puramente aritmético, fortemente trabalhado nas séries anteriores. Os alunos dessas turmas não tinham experiência com tarefas exploratório-investigativas. No entanto, o uso da letra para representar um número desconhecido não era algo totalmente novo. Como a escola dividia a disciplina de Matemática em Álgebra e Geometria, cujos professores eram diferentes, os alunos já estavam passando por situações — descritas pelos próprios alunos, mais tarde — que envolviam letras, na aula de Geometria.

As três tarefas desenvolvidas foram: (Tarefa 1) A LANCHONETE DO ALAN XONETE, (Tarefa 2) CUBOLINO E SEUS CUBOS e (Tarefa 3) A MÁQUINA MÁGICA.

O problema de pesquisa levou a um trabalho de caráter qualitativo, além da perspectiva interpretativa para conduzi-la. Para a interpretação foi necessária a descrição detalhada do que aconteceu. Isso exigiu que a pesquisadora observasse e registrasse dados, por meio de gravações, transcrições e diário de campo, para obter detalhes para a análise das interações.

Para compor o material de análise foram utilizadas também as fotocópias dos relatórios elaborados pelos alunos e de uma “carta” também escrita por eles, em que relataram a experiência vivida com as atividades exploratório-investigativas com conteúdo algébrico.

Ao iniciar a análise dos dados da primeira tarefa, perceberam-se alguns indícios do desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos. Além disso, mesmo com a nova dinâmica e com a comunicação proporcionada, ainda foram encontradas algumas dificuldades. Optamos por aprofundar a análise dos dados da primeira tarefa, dada a riqueza das comunicações nela processadas. As demais tarefas não constituíram objeto de análise nesta pesquisa. Na primeira tarefa foram utilizadas 5 aulas de 50 minutos em cada turma.

Para a análise dos dados foram definidos como principais referenciais sobre a comunicação na aula de Matemática: Boavida (2005a, 2005b), Menezes (2004, 2000a, 2000b), Ponte et al. (2007), Alro e Skovsmose (2006); e sobre o ensino de álgebra: Lins e Gimenez

(1997), Souza e Diniz (1994), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Scarlassari (2007), Branco (2008), Caraça (1998).

Diante dos diversos estudos realizados, constatou-se a importância de proporcionar aos alunos o desenvolvimento da comunicação oral e escrita, além da argumentação. A comunicação é uma forma de interação social entre indivíduos, ligada à linguagem que, no caso da Matemática, possui um código próprio que permite comunicar idéias com precisão, clareza e economia — por isso a necessidade da álgebra simbólica. Ensinar e aprender Matemática compreende atos de comunicação que envolvem principalmente os professores e os alunos; não é apenas um meio para ensinar e aprender, mas um componente intrínseco do fazer Matemática, reconhecendo o valor da linguagem natural e das interações sociais na construção do conhecimento. A linguagem usada, ou seja, a forma como é feita a negociação de significados, e a interação entre os alunos e o professor determinam a comunicação que irá acontecer.

Em relação à aprendizagem da álgebra, os estudos revelam que os professores têm dificuldade em evitar que o ensino da álgebra se resuma apenas à mecanização por exercício ou a problemas de aplicação. Sugerem mudanças: adotar uma estratégia de introdução dos símbolos e do seu uso em contextos significativos, em que os alunos aprendam de forma natural o poder matemático da simbolização e da formalização. Os estudos mostraram, ainda, a importância de conhecer os conceitos que envolvem a álgebra. Esses conceitos auxiliaram na identificação dos indícios de formação da linguagem e do pensamento algébrico, assim como das potencialidades e dos dilemas vividos durante atividades exploratório-investigativas com conteúdo algébrico.

Para identificar os indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico revelados por estudantes de 6ª série a partir da comunicação estabelecida em sala de aula, foram levadas em consideração a transformação e a articulação entre o raciocínio da contagem, do pensamento algébrico e da linguagem utilizada pelos alunos e pela professora.

Nos capítulos que seguem será possível perceber que, num primeiro momento desta pesquisa foi realizada a revisão dos trabalhos existentes sobre investigações matemáticas; das razões pelas quais a dinâmica dessas atividades traz benefícios para a aprendizagem da Matemática; e de sua potencialidade como atividade motivadora. No primeiro capítulo, procuramos apresentar de forma breve tais observações. No entanto, com a análise dos dados também será percebido que, em contextos diferentes dos apresentados pelos estudos sobre o tema, os resultados são diferentes — existem alguns limites que não são referidos.

No segundo capítulo, apresentaremos a importância da comunicação nas aulas de Matemática, mostrando que a dinâmica das aulas investigativas ajuda a desenvolver o processo de comunicação necessário para que os alunos aprendam Matemática.

Para entender melhor esse processo em relação à álgebra, no terceiro capítulo faremos um breve estudo sobre o ensino desse conteúdo. A principal intenção foi entender como tornar significativa a linguagem da álgebra. Alguns estudos mostraram que é necessário entender melhor o seu desenvolvimento histórico e os conceitos que envolvem a álgebra simbólica.

No quarto capítulo descreveremos a metodologia desenvolvida, as opções teórico-metodológicas, a construção dos dados e o modo como foram analisados.

O capítulo cinco trará a apresentação dos dados e sua análise, mostrando os indícios de formação da linguagem e do pensamento algébricos e as dificuldades e os conflitos vividos pelos alunos e pela professora durante o desenvolvimento da tarefa exploratório-investigativa. Optamos por agrupar alguns dados em três blocos, chamados de *Blocos de análise*, construídos de forma de forma descritiva e analítica. Os blocos de análise foram constituídos da seguinte forma: (1) **O movimento da aula investigativa e os indícios do pensamento e da linguagem algébricos.** (2) **Os movimentos da sala de aula que geraram conflitos e dificuldades.** (3) **O conflito entre o pensamento e a linguagem.**

Ao final do capítulo apresentaremos também uma pequena análise de um relato escrito pela professora parceira, fruto de uma situação vivida em aula e que a fez refletir sobre o processo de resolução utilizado pelos alunos.

A presente pesquisa teve intenção de contribuir para os estudos sobre as investigações matemáticas e o ensino da álgebra. Nesse sentido, trazemos observações importantes como, por exemplo, a respeito da diferença entre o foco da professora (algébrico) e o de seus alunos (aritmético), que gerou conflitos, e da falta de conceitos que envolve o uso da álgebra simbólica, o que torna difícil a aprendizagem desse conteúdo. As observações feitas puderam mostrar a dificuldade de trabalhar o pensamento científico (variação), mesmo mudando a metodologia e a dinâmica da aula de Matemática.

1 AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

É importante esclarecer inicialmente que investigação, no campo da Matemática, tem o mesmo sentido do termo investigar: averiguar, pesquisar, ou seja, encontrar meios para descobrir o que não se sabe. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) descrevem que, para os matemáticos profissionais, "investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades" (p. 13). Mesmo sabendo que o trabalho dos alunos é muito diferente daquele dos matemáticos profissionais, as atividades proporcionadas pelo professor, por meio de problemas apropriados, permitem que os alunos realizem um trabalho criativo e independente. Essas atividades possuem características próprias, que serão descritas ao longo deste capítulo.

Antes de continuar discorrendo sobre as investigações matemáticas é importante também deixar clara a diferenciação entre *atividade* e *tarefa*, para que possamos entender melhor as referências a esses termos, relacionando-os corretamente ao que estará sendo abordado nesta pesquisa. Baseado no estudo de Lamonato (2007), pudemos constatar que, para que tarefa e atividade sejam significativas, é necessário levar em consideração seu caráter relacional e suas conexões com outros aspectos da educação matemática.

A *atividade* é intrínseca à Matemática, quando pensada no sentido de "fazer Matemática", como referem Christiansen e Walther (1986), citados por Lamonato (2007). Pensada nesse sentido, a atividade é que assegura a participação ativa do aluno; é ele, em atividade, que permite o processo de aprendizagem em Matemática.

A *tarefa* é entendida como o que é proposto aos alunos para que, então, desenvolvam a ação, ou seja, a atividade. "A tarefa é a proposta feita pelo professor que torna-se objeto para a atividade dos alunos, que por sua vez, ocorre a partir de ações desenvolvidas na interação entre os alunos ou entre estes e o professor." (LAMONATO, 2007, p.74).

Então, ao considerarmos as investigações matemáticas, vamo-nos referir à *atividade* como sendo o trabalho que as tarefas exploratório-investigativas proporcionam e, ao descrevermos o que foi proposto pela professora para a realização desta pesquisa, vamo-nos referir à *tarefa*.

Diante dos resultados de diversos estudos (BROCARDO, 2001; CASTRO, 2004; FONSECA, 2000) mostrando as contribuições da abordagem exploratório-investigativa para a construção do conhecimento, também consideramos importante esclarecer algumas justificativas apresentadas por diferentes pesquisadores para a integração das investigações matemáticas no currículo de Matemática. Goldenberg (1999, p. 37), por exemplo, indica as seguintes razões: a) aquela relacionada com a natureza da própria ciência: necessidade de se conhecer uma parte do corpo dos resultados, bem como saber como se pensa matematicamente a respeito dele, ou seja, conhecer os modos de pensar — "hábitos matemáticos de pensamento"; b) a segunda razão refere-se ao fato de que as investigações motivam os alunos; c) finalmente, o terceiro motivo: porque elas desenvolvem capacidades que contribuem para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitam a aprendizagem. Jaworski (1994) e Pirie (1987) argumentam na mesma direção; contudo, a segunda autora acrescenta uma quarta razão, ligada ao estabelecimento de um ambiente de aprendizagem "vivo", em que os alunos participam ativamente, uma vez que numa investigação os alunos terão que convencer a si e aos seus colegas das suas descobertas.

Estudos portugueses, como o de Cunha (1998), revelaram que as investigações nas aulas de Matemática motivam os alunos, ajudam a desenvolver capacidades de ordem superior, em particular, o raciocínio e a perspicácia, além de trazerem contribuições significativas para que os alunos percebam a Matemática como uma ciência em evolução e construção. As mudanças de concepções relativas à Matemática são também destacadas por Segurado (1997), que acrescenta ainda o desenvolvimento de um espírito investigativo, de uma maior autonomia no trabalho e a valorização e o reconhecimento das interações entre os alunos. A realização de tarefas de investigação é ainda potencializadora do desenvolvimento da capacidade de reflexão dos alunos sobre a sua própria experiência matemática, como revelado no estudo de Mendes (1997). Por outro lado, dada a natureza das investigações matemáticas, em particular o seu grau de abertura, propor aos alunos tarefas de investigação coloca novos desafios ao professor, sobretudo quanto ao planejamento. A necessidade de uma formação matemática sólida parece imprescindível, como ressaltado por Goldenberg (1999).

A busca por conceituar investigação matemática tem sido feita por vários autores. Vários estudos mostram que, na tentativa de definir em que se constitui uma investigação matemática, os autores têm recorrido à análise das diferenças e semelhanças entre resolução de problemas e investigações matemáticas.

Ernest (1996) enfatiza que um primeiro aspecto a ser considerado é que na resolução de problemas as questões estão formuladas no início, enquanto nas investigações esse será o primeiro passo a ser desenvolvido pelo estudante. Uma outra distinção entre resolução de problemas e investigações matemáticas relaciona-se com os seus objetivos, isto é, num problema procura-se atingir algo que não é imediatamente acessível e, nas investigações, o objetivo é a própria exploração. Para esse autor, a exploração de uma investigação é um processo divergente, enquanto a resolução de problemas é um processo convergente. O autor destaca ainda que, embora haja características comuns às duas, ou seja, tanto a resolução de problemas como as investigações matemáticas podem ser entendidas como uma abordagem pedagógica, os papéis do professor e dos alunos são diferentes. Numa abordagem de resolução de problemas, ao professor cabe colocar o problema e, ao aluno, a tarefa de encontrar um caminho que o conduza à solução. Embora o aluno possa ter alguma criatividade, o professor pode controlar tanto o conteúdo quanto o modo de ensinar e estabelecer estratégias a seguir. Porém, numa abordagem pedagógica de investigação matemática, o professor poderá escolher a situação inicial, mas é o aluno quem deverá formular questões, definindo seus próprios problemas dentro da situação proposta; ou seja, é o aluno quem coloca as questões e estabelece os objetivos, o que torna impossível o estabelecimento de estratégias prévias pelo professor diante de muitas possibilidades. Assim, as relações de poder que ocorrem na aula de Matemática podem alterar-se.

Brocardo (2001) salienta que a atividade de investigação é caracterizada por vários processos matemáticos que não podem ser seguidos de forma linear e ordenada. Segundo a autora, a coleta e a organização dos dados, a formulação de conjecturas e posterior verificação de sua validade, bem como a prova são fases do processo investigativo que devem ser percorridas tanto num sentido como noutro, sendo fundamental analisar as interações entre elas. A expressão *não linearidade* é usada por essa autora para resumir a característica da investigação matemática.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas, havendo assim uma relação estreita entre problemas e investigação, e deverá ter um caráter desafiador, aberto e um ponto de partida pouco definido, no qual os alunos apresentam várias formas de explorar e investigar o problema, sendo a primeira tarefa delinear a questão a ser explorada, de forma que todos entendam o que lhes foi proposto. O professor escolhe a situação de partida ou aprova uma situação escolhida ou sugerida pelo aluno, que define seus próprios problemas dentro da situação, enquanto na resolução de problemas o professor formula o problema e deixa o método de solução em aberto; o aluno encontra seu próprio caminho para resolvê-lo (ERNEST, 1991 apud FONSECA, 2000, p. 16).

Fonseca (2000) considera que os alunos realizam uma investigação quando o contexto é uma situação que leva à escolha de um objetivo resultante da exploração da situação e escolhem o método de solução, caso exista. Dentro dessa idéia, a autora reconhece dois tipos de investigação matemática que podem ser desenvolvidos em aula: um em que os alunos procuram um objetivo implícito na apresentação do problema e outro de “problemas abertos”, em que o aluno escolhe o objetivo ou, quando o objetivo é claro, ele escolhe o método. A investigação a ser desenvolvida dependerá da situação escolhida pelo professor.

Para que esse tipo de abordagem aconteça, é preciso estar ciente de que ela demanda uma nova dinâmica durante as aulas de Matemática. Para esclarecer sobre essa dinâmica, precisamos antes conhecer as etapas de uma investigação.

1.1 Etapas de uma investigação matemática e suas características

Ponte et al. (2003) apresentam as seguintes etapas para uma aula de investigação matemática, podendo haver algumas adaptações, conforme o conteúdo programático e a necessidade da turma em que será trabalhada:

(a) preparação, por parte do professor, de uma atividade exploratória e inquiridora para os alunos;

(b) introdução da atividade e arranque da sua realização pelos alunos;

(c) realização, em grupo, da atividade e da elaboração do relatório da atividade desenvolvida;

(d) socialização e discussão coletiva dos resultados produzidos pelos grupos.

Na introdução da atividade, o professor faz sua apresentação para os alunos, tendo o cuidado de esclarecer e orientá-los na realização das investigações matemáticas.

Em sua maioria as investigações matemáticas são realizadas em pequenos grupos, nos quais os alunos inicialmente exploram e formulam as questões investigativas. Em seguida, organizam os dados e constroem conjecturas, fase em que o professor deve dar suporte para que os alunos sejam estimulados a prosseguir com elas. Os alunos, então, realizam testes, refinam e sistematizam as conjecturas, constroem justificativas, argumentações ou demonstrações, visando validar os resultados encontrados e, por fim, organizam e escrevem um relatório da investigação.

Em relação às características de cada etapa, começando pela (a) preparação, destacamos que o professor tem que ter clareza de que o problema que ele irá propor deverá ter enunciado e objetivos pouco precisos, mas que deverá ter alguma intenção; por exemplo, se será uma investigação numérica, algébrica ou geométrica.

Durante a próxima etapa, ao (b) apresentar a atividade, o professor deve prestar atenção ao modo como fará isso para que seus alunos a compreendam e se envolvam, o que poderá ser feito de várias formas. Como argumentado por Lamonato (2007), a tarefa apresentada e a forma de o fazer é que determinam a atividade do aluno, e cabe ao professor procurar promover oportunidades que viabilizem a aprendizagem.

Na etapa em que os alunos (c) realizam a atividade, pretende-se que eles adquiram uma atitude investigativa e, para isso, professor e aluno assumem uma nova postura. O professor precisa desenvolver um ambiente, uma dinâmica para uma aula investigativa, deixando de ser o agente centralizador, passando a ser um conselheiro e um coordenador. Ele deverá tornar-se um questionador e um ouvinte, evitando intervir inoportunamente, para que os alunos desenvolvam o seu próprio pensamento, apresentem argumentações que podem ser plausíveis ou não. Ao professor cabe responder às questões feitas pelos alunos com outras questões, para que os alunos realmente investiguem. Quando o professor encontrar alunos com dificuldade, independentemente de estarem chegando a um resultado certo ou errado, deverá instigá-los a pensar ou dar algumas pistas de estratégias, tomando o cuidado para não dar opiniões concretas. E, ainda, deverá encorajar a interação entre alunos, incentivar a recolha e o registro dos dados e estimular a troca de idéias, a comunicação do que o aluno observou e dos resultados que encontrou, além da argumentação (FONSECA, 2000). Em relação ao professor, Goldenberg (1999, p. 46) ressalta:

> Os professores precisam de ter boas bases matemáticas, para além de sensibilidade pedagógica, para poderem decidir quando é que uma investigação deve prosseguir e quando é que provavelmente será mais frutuoso pôr termo à investigação em curso de modo a permitir passar a outra. Um professor que não tenha tais bases pode interromper cedo demais uma investigação, não sendo capaz de reconhecer a importância da matemática que espreita nas descobertas ou métodos dos alunos; [...] Finalmente, sem um bom entendimento da matemática, muitos professores tendem a concentrar-se na própria investigação, em vez de verem a reflexão sobre a investigação e a abstração que dela se retira, como é seu objectivo.

A respeito da intervenção do professor, Alro e Skovsmose (2006) aconselham cautela, por parte do professor, ao questionar sobre o que os alunos fizeram, para não dar a impressão de estar intervindo para controlar a situação ou usando as críticas ao trabalho para avaliar. Quando necessário, deve introduzir uma idéia diferente, negociando ou desafiando os alunos, mas também tomando cuidado para não desafiar demais, ao mesmo tempo que não deve deixá-los muito soltos. Quando o professor age dessa forma, ele leva os alunos a perceberem novas perspectivas.

A última etapa (d), de socialização e discussão dos resultados, é mais importante em uma investigação, pois é quando acontece o confronto de idéias e opiniões, em que os alunos terão que argumentar para toda a turma; a validação dos resultados; a formulação de novas conjecturas; o estabelecimento de conexões; e a melhor compreensão da matemática envolvida. Nessa etapa é o professor quem orienta e coordena a socialização, devendo ter conhecimento do que seus alunos desenvolveram durante a investigação, para poder destacar as diferenças, mas sempre valorizando todos os trabalhos.

Os registros também requerem atenção, pois deverão ser feitos desde o início da investigação e de forma clara, para que possam ser lidos, revistos e compreendidos para a escrita do relatório e também para a apresentação. Os alunos devem receber sempre essas orientações, para que o relatório possa ser compreendido por quem vai ler. O professor deve levá-los a atentar para que não deixem de expor o ponto de partida; a descrição de como desenvolveram a investigação — podendo usar tabelas, desenhos, esquemas... —; os resultados e suas explicações; observações, quando acharem necessário; e também exemplo e validação dos resultados, quando houver. O professor pode passar para seus alunos orientações por escrito sobre o que poderia constar no relatório, pois é natural que os alunos aleguem dificuldade, uma vez que não estão habituados a elaborar relatórios na aula de Matemática.

Diante dessas informações, é possível perceber que a comunicação é essencial para que a abordagem das explorações e das investigações matemáticas tenha sucesso. Caberá aos alunos comunicar-se para obter informações e também trocar, aperfeiçoar e avaliar as idéias. A função do professor será incentivar não só o interesse por esse tipo de tarefa, mas também o tipo de comportamento e o ambiente da aula. Com o tempo, esse tipo de comportamento vai-se tornando natural, com alunos mais questionadores (FONSECA, 2000).

1.2 Por que investigar na aula de Matemática?

As investigações matemáticas possibilitam que os alunos "façam" Matemática e se envolvam no pensamento matemático, e não apenas reproduzam procedimento, como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 23):

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

Numa aula com investigações matemáticas, não se espera que os alunos alcancem resultados considerados "certos", mas que explorem as possibilidades, formulem conjecturas e as justifiquem. Mesmo com tantos motivos para a realização de investigações, nem tudo pode ser aprendido dessa forma, e por isso o professor não se limita a elas, continuando a dar lugar para os exercícios, os problemas e os projetos, tendo o desafio de incluir, ainda, as investigações no currículo (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). O importante é lembrar que não podemos sempre apresentar aos alunos as técnicas e pedir para que as usem; eles também precisam descobri-las, criando uma postura investigativa, o que não impede que, depois de compreendê-las, ele passe a memorizá-las.

Segundo Castro (2004, p. 34), "as aulas investigativas supõem o envolvimento dos alunos com tarefas investigativas que permita a eles realizar atividade matemática".

Ao final da atividade, é realizada a socialização entre os grupos, promovendo a discussão, a negociação, a validação e a refutação dos resultados, quando necessário. Estudos realizados também no Brasil (CASTRO, 2004; LIMA, 2006) têm mostrado que durante esse processo ocorrem comunicação de idéias e tipos de argumentação que promovem tanto a aprendizagem dos alunos quanto o desenvolvimento profissional do professor.

Goldenberg (1999) relata que, para começar com atividades desse tipo, é conveniente estimular os alunos, propondo atividades de exploração, para que eles possam experimentar essa nova postura.

Estudo de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 20), que teve como foco o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de tarefas de caráter exploratório-investigativas, apresentou indícios de que se trata de um contexto rico e desafiador de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. Segundo os autores, o aluno passou a constituir-se em sujeito de conhecimento, isto é, “alguém que sente o prazer de participar da produção/criação das idéias matemáticas”. Para os autores, as aprendizagens do professor foram no sentido de ele poder encontrar nas investigações matemáticas um modo significativo de ensinar, compreender, trabalhar e estabelecer relação com a Matemática, levando os alunos a se interessarem pelas aulas de Álgebra.

Neste capítulo procuramos mostrar o que é e como se desenvolve uma investigação matemática e, ainda, como essa metodologia de ensino pode promover o ensino de álgebra.

No capítulo seguinte, trataremos da comunicação nas aulas de Matemática e nas investigações matemáticas. Para isso analisaremos o ponto de vista de alguns estudiosos, que entendem que a comunicação também é o mecanismo usado pelos alunos e pelo professor para compreender a Matemática. Apresentaremos também como os autores entendem linguagem e interação social, fatores que envolvem a comunicação nas aulas de Matemática.

2 COMUNICAÇÃO

Segundo estudo de Menezes (2004), a comunicação é tema recente na Educação Matemática e por isso seu conceito ainda está em definição.

Ao buscar a definição de comunicação em um dicionário, encontra-se: “tornar comum; fazer saber; transmitir, difundir; estabelecer comunicação, entendimento, convívio” (FERREIRA, 2005); e imaginamos que, para haver comunicação, basta que pessoas se reúnam e estabeleçam contato uns com os outros. Mas, ao pensarmos na comunicação na escola e na aula de Matemática, tradicionalmente vem a idéia de *transmissão*, mesmo sabendo que muitos outros tipos de comunicação acontecem, não necessariamente ligados ao ensino-aprendizagem.

No Brasil, esse tema, também ligado ao sentido da argumentação, embora esta não seja o objeto deste trabalho, volta a ser debatido após muitos anos de ensino tradicional e também após a superação das abordagens decorrentes do Movimento Matemática Moderna, que privilegiava o pensamento científico e tecnológico; preocupava-se excessivamente com formalizações; dava ênfase à teoria dos conjuntos, às estruturas algébricas, à topologia, etc; e, conseqüentemente, ocasionava o abandono do raciocínio dedutivo, demonstrativo e lógico (BRASIL, 1998; NASSER E TINOCO, 2001).

O Movimento da Matemática Moderna apresentava a estrutura pronta, e seu foco era o fazer. Os alunos não recebiam explicações, apenas treinavam, o que fazia com que a comunicação fosse truncada. Um exemplo disso pode ser observado num livro didático[3] do início da década de 1980. Mesmo sendo uma nova edição, que eliminou os espaços em branco para que o livro se tornasse não-consumível, ainda traz muitos exercícios e testes e apresenta a definição seguida de exemplos e vários exercícios de repetição.

O capítulo intitulado “Cálculo algébrico” exemplifica bem esta afirmação. Ele se inicia lembrando a definição de expressão numérica e expressão contendo variáveis (“letras representando números”) e dá alguns exemplos, como: “10 ... o número dez; 3x ... o triplo do número x” (ibidem, p. 31). E define, então, que “estas expressões são estudadas na parte da Matemática chamada *Álgebra* e são denominadas *expressões algébricas*.”(ibidem, p.31) Em seguida classifica as expressões, novamente iniciando com exemplos e mostrando quais são expressões racionais, expressões racionais inteiras, expressões racionais fracionárias e expressões irracionais. Após tais definições, traz “Valor numérico” e começa considerando uma expressão, onde mostra a substituição do “x” da mesma expressão por quatro números reais. Em seguida, há uma lista de sete exercícios, seguidos de dez outros exercícios de reforço, cuja grande maioria

---

[3] IEZZI, G. DOLCE, O. MACHADO, A. **Matemática e realidade: 7ª série**. São Paulo: Atual, 1984.

(14) começa com “calcule” (valor numérico), enquanto os demais são de classificação das expressões ou de representação escrita com símbolos. O professor, via de regra, seguia a ordem estabelecida no livro didático.

O tema comunicação voltou a ser discutido, mais especificamente, em 1980, depois que o *Nacional Council of Teachers of Mathematics* — NCTM — dos Estados Unidos apresentou recomendações para o ensino de Matemática, ajudando a compreender a importância de aspectos sociais, antropológicos, lingüísticos, além de cognitivos na aprendizagem da Matemática (BRASIL, 1998). O NCTM publicou dois documentos que marcaram o reconhecimento da necessidade de intensificar o estudo das questões comunicativas: em 1996, o *Yearbook* (ELLIOTT e KENNEY, 1996), dedicado inteiramente à comunicação matemática, e, em 1998, o livro *Language and communication and the mathematics classroom* (STEINBRING, BUSSI e SIERSPINSKA, 1998), em que foram publicados 20 trabalhos de investigação sobre esta problemática (MENEZES, 2004).

Apesar de ser muito comum encontrar em documentos oficiais e em planejamentos dos professores, como objetivo das aulas de matemática, “desenvolver o raciocínio lógico”, constata-se que os alunos pouco trabalham com atividades desse tipo, como afirmam Nasser e Tinoco (2001).

As referidas autoras ressaltam que “...a realidade hoje mostra que a maioria dos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando estuda os diversos conteúdos da matemática” (p. 1). As autoras constatam que os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas idéias e ainda resolvem listas de exercícios, repetem modelos e aplicam fórmulas, sem que o conteúdo estudado faça sentido algum. Segundo Alro e Skovsmose (2006), os padrões de comunicação entre professor e alunos tornaram-se repetitivos, o que pode ser explicado pelas formas de organização da sala de aula, caracterizada como tradicional.

Os autores exemplificam uma aula com essas características: primeiro, o professor apresenta algumas idéias e técnicas matemáticas; logo após, os alunos fazem exercícios de aplicação das técnicas e, por fim, o professor corrige. Pode ainda haver variações de tempo gasto com cada parte, e os alunos podem apresentar pequenos seminários ou exercícios resolvidos. Para os autores, é necessário vencer um aspecto do ensino tradicional, que chamam de paradigma do exercício, pois ele exerce influência nos padrões de comunicação entre professor e aluno. Esse tipo de aula é em grande parte baseado em livros-texto, o que reduz a comunicação, para aqueles que vivenciam a prática em sala de aula, a elementos preestabelecidos.

Outro fato que ocorre hoje é a freqüência com que os alunos não se comprometem com sua própria aprendizagem, agindo como se não fosse também sua responsabilidade avaliar, justificar e dar coerência ao seu raciocínio ou analisar criticamente o que ouvem dos outros (BOAVIDA, 2005a). A aprendizagem é influenciada pelas atitudes e pela atenção dada pelo aluno, e não simplesmente pelas tarefas propostas pelo professor. As atitudes de interesse, de motivação; a reflexão sobre o que fez ou deixou de fazer em uma atividade são características que influenciam a aprendizagem (LAMONATO, 2007).

No entanto, mudar tal situação é uma tarefa complexa, pois o professor terá um desafio muito grande para ensinar os alunos a agir de forma diferenciada, uma vez que ele mesmo terá que mudar sua postura de professor, pois terá que ajustar as dinâmicas estabelecidas em sala de aula, de modo a promover outro tipo de comunicação nas aulas de matemática. As perguntas feitas por ele deverão ter o propósito de estimular o pensamento dos alunos e provocar a troca de idéias entre eles. É preciso também propor atividades que desenvolvam habilidades de comunicação e argumentação, de acordo com o nível de maturidade e de experiência dos alunos, de forma que o ensino e a linguagem utilizados estejam no mesmo nível de raciocínio dos alunos. "A habilidade de argumentar deve ser 'construída' ao longo dos anos de escolaridade, através de atividades variadas como jogos, problemas, desafio, ou simplesmente exigindo justificativas para todas as respostas." (NASSER E TINOCO, 2001, p. 9). Nesse sentido, as autoras defendem que tal habilidade deve ser desenvolvida desde os anos iniciais, por meio de simples conversas ou de questões matemáticas que permitam que os alunos defendam suas idéias.

No mesmo sentido, Alro e Skovsmose (2006, p. 103) constataram em seu estudo que o professor, num diálogo[4] investigativo, deve propor questões que estejam "à altura das habilidades e experiências dos alunos no assunto", uma vez que uma tarefa proposta pode acabar sendo muito difícil ou muito fácil. O objetivo é que os alunos a recebam e a aceitem como um desafio.

Em nossa pesquisa, observamos um exemplo disso com as professoras do grupo (GCEEM), que participaram do planejamento da tarefa descrita no presente estudo: aceitaram a proposta de estudar mais a fundo a abordagem investigativa, motivadas pela busca de promover outro tipo de comunicação, outra dinâmica de aula, em que seus alunos participassem mais.

2.1 A comunicação na aula de Matemática nas investigações matemáticas

A comunicação na aula de Matemática pode ser pensada em função do "instrumento" pelo qual os alunos aprendem matemática. Todo processo de aprendizagem começa em algum lugar e alguma coisa deve ser conhecida previamente. Quando há mais de um indivíduo envolvido na aprendizagem, é muito importante compartilhar o que se sabe. A maneira pela qual se compartilha

---

[4] Entendemos diálogo no mesmo sentido de Alro e Skovsmose (2006), "como uma conversação que visa à aprendizagem" e que possui preocupações com aspectos comunicativos.

o conhecimento — de forma oral ou escrita —, gerando novas perspectivas, é que dá idéia da comunicação em uma sala de aula. A comunicação torna-se parte importante para o ensino de Matemática, pois é ela que vai permitir que as idéias sejam compartilhadas e mais bem compreendidas. "A comunicação matemática na sala de aula é, pois, um indicador da natureza do processo de ensino-aprendizagem e, simultaneamente, uma condição para o seu desenvolvimento." (FONSECA, 2000, p. 44).

A importância de proporcionar a todos os alunos o desenvolvimento da comunicação e da argumentação e o dever de fazê-lo são referidos desde o início da escolaridade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) já traziam diversas orientações no sentido de criar condições e desenvolver a habilidade de argumentar na aula de Matemática, expressas por meio dos objetivos para o Ensino Fundamental, alguns dos quais pretendiam que os alunos fossem capazes de:

> - Posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
> - Utilizar as diferentes linguagens — verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal — como meio para produzir, expressar e comunicar idéias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
> - Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (p.6-7)

Ainda nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), encontramos outro objetivo para o Ensino Fundamental ligado ao tema em questão, agora visando a construção da cidadania:

> - [Levar ao aluno a] comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relação entre ela e diferentes representações matemáticas. (p.48)

Ao tratar da seleção de conteúdos, esse documento também se refere, mesmo que indiretamente, a atividades que desenvolvam a comunicação. Por exemplo, quando indica que a Lógica, embora não se constitua como assunto a ser estudado especificamente, deve ser integrada aos conteúdos, justificando que "é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio de uma demonstração formal." (p. 49).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) abordam o assunto também em seus princípios norteadores, cujo objetivo é adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, e explicita que o ensino de Matemática deve desenvolver capacidades de "observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa.” (p. 56).

As referências ao raciocínio lógico e à comunicação estão fortemente ligadas à importância de aprender matemática com compreensão (BOAVIDA, 2005b), levando o aluno a relacionar observações do mundo real com representações e estas com princípios e conceitos matemáticos (BRASIL, 1998). “Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a ‘falar’ e a ‘escrever’ sobre Matemática...” (p. 57).

As professoras do grupo (GCEEM), assim como a professora parceira desta pesquisa, foram ou estão sendo formadas ou influenciadas por tais referenciais — Proposta Curricular da Secretaria de Estado da Educação, PCN, NCTM, Resolução de Problemas —, já que não seguem apenas um livro didático, mas usam-no como apoio, buscam outras metodologias, compartilham experiências e por isso comprometem-se com a nova abordagem na busca por resultados positivos.

O livro didático, embora tenha sofrido mudanças, ainda não está de acordo com as recomendações dos últimos anos. Um livro que chegou a uma escola estadual, em Santa Bárbara d’Oeste, interior de São Paulo, para ser usado a partir de 2008 é um exemplo, além de outros, de que, ainda chega às escolas a influência da década de 1990. Comparado com o exemplo anterior, o livro[5] dos mesmos autores e de mesmo nome, também de 7ª série[6], inicia o assunto com o seguinte problema “Num campo de futebol, a medida do comprimento tem 42 metros a mais que a largura. Quais são essas medidas, sabendo que o perímetro do campo é de 356 metros?” (p. 162). O livro apenas indica que esse tipo problema será resolvido com as equações e explica como representar o comprimento e a largura (usando x). Em seguida relembra que na série anterior “recorremos às letras para representar números e escrever simbolicamente expressões matemáticas”, mas agora, além de comparar expressão literal e expressão algébrica, também apresenta casos envolvendo a Geometria (área, perímetro e ângulo suplementar). O valor numérico também é explicado com exemplo de perímetro. Os exercícios são poucos e, além de “represente” e “calcule”, o livro também propõe problemas envolvendo área e perímetro.

Esse livro é um exemplo da influência das Propostas Curriculares, da década de 1990, que evidenciam a relação entre álgebra simbólica e geometria. Mas isso ainda gera dificuldade, pois confunde o pensamento dos alunos, que apenas visualizam o que acontece nas expressões, mas não se preocupam com a construção da linguagem e dos conceitos (SCARLASSARI, 2007, p. 26).

---

[5] IEZZI, G. MACHADO, M. **Matemática e realidade: 7ª série**. São Paulo: Atual, 2005.
[6] 5ª edição, adotada na escola em que a pesquisadora é professora para o triênio 2008,2009 e 2010.

As mudanças verificadas no livro didático ocorreram principalmente devido às exigências feitas pelo Governo para que esses livros pudessem participar do processo de escolha do livro didático para as escolas. Os livros deveriam estar atentos às recomendações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Esse documento, quando trata das indicações para o ensino da álgebra no quarto ciclo (7ª e 8ª séries) refere como desejável que o professor proponha situações que permitam identificar e generalizar as propriedades das operações aritméticas e o estabelecimento de fórmulas, como a da área do triângulo. O documento também menciona o aperfeiçoamento da linguagem algébrica por meio do cálculo de áreas. Por isso encontramos algumas mudanças no livro descrito anteriormente, mas ainda não aquelas relacionadas com o desenvolvimento da comunicação na aula de Matemática.

Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita do aluno é um objetivo importante que os professores devem levar em conta, mas o que ocorre é que nem todos o fazem, e nem da mesma forma, pois algumas vezes é valorizado apenas um aspecto desses objetivos.

A comunicação é uma forma de interação social entre indivíduos (MENEZES, 2000b). Ela está obviamente ligada à linguagem — tema há mais tempo presente nos estudos sobre Educação Matemática —, que pode ser vista como um meio de comunicação e é um aspecto central das atividades humanas. Para Menezes (2000b), a linguagem da Matemática é um meio de comunicação com um código próprio. Utilizada por uma determinada comunidade, possui registros orais e escritos e pode ter diversos níveis, como por exemplo, a utilizada por "matemáticos profissionais" ou aquela usada numa simples troca de idéias durante uma aula. Apesar de algumas semelhanças com a linguagem natural, as principais diferenças entre esta e a linguagem matemática residem no fato de que parte desta última somente é aprendida e usada na escola e, por isso, muitas vezes é considerada abstrata e de difícil compreensão.

A linguagem simbólica no Ensino Fundamental tem sido muitas vezes apresentada sem relação com as outras ciências, e por isso o pensar cientificamente não faz sentido, o que leva a supor ser interessante proporcionar aos alunos atividades que estimulem o desenvolvimento das idéias e maior precisão da linguagem matemática.

Segundo Menezes (2000a), a comunicação é essencial à vida dos seres humanos em comunidade e, em particular, na vivência escolar. Ensinar e aprender compreendem atos de comunicação que envolvem principalmente os professores e os alunos.

A comunicação não é apenas um meio para ensinar e aprender, mas também é um objetivo desse ensino, pois é esperado que nossos alunos adquiram tal habilidade quando passarem pelo processo escolar. O autor destaca a importância da comunicação na aula de Matemática, que dispõe de uma linguagem própria, que permite comunicar idéias com precisão, clareza e economia

— por isso a necessidade da álgebra simbólica. Nesse processo, é grande, portanto, a importância do professor, por ser o principal responsável pela organização do discurso da aula — aquele que faz questões, estimula a discussão e a troca de idéias.

Boavida (2005b) apresenta a comunicação matemática como um componente intrínseco do fazer Matemática, reconhecendo o valor da linguagem natural e das interações sociais na construção do conhecimento; reconhecendo, ainda, que interação na aprendizagem significa comunicação e incentivando a pensar como é que devemos promover a comunicação na aula de Matemática. Quando falamos em comunicação matemática, assumimos que ser ela uma interação social, em que os participantes trocam e discutem idéias, influenciando uns aos outros, o que é essencial no processo da educação.

Esta perspectiva sobre comunicação na aula de matemática apresentada neste capítulo presidiu a pesquisa aqui relatada e as atividades investigativas propostas, que tentaram proporcionar a dinâmica necessária no processo de comunicação.

Pensar na comunicação em sala de aula, implica pensar na linguagem usada que, como destaca Menezes (2000b), é resultante do cruzamento da linguagem da matemática com uma linguagem natural. O autor ainda cita Usiskin (1996), que defende que a linguagem matemática assume diversos componentes: linguagem escrita, linguagem oral e linguagem pictórica.

> Na verdade, a linguagem matemática dispõe de um conjunto de símbolos próprios, codificados, e que se relacionam segundo determinadas regras, que supostamente são comuns a uma certa comunidade e que as utiliza para comunicar. Porque os falantes são dotados da capacidade de falar, a linguagem da matemática dispõe de um registro oral e, assim, podemos falar de uma linguagem matemática oral. Esta linguagem utiliza a língua natural como língua suporte. Embora com diferenças, a linguagem escrita da matemática tem um carácter mais universalizante do que a linguagem oral. Usiskin (1996) sustenta que a matemática possui também uma forma de expressão pictórica, através, por exemplo, de gráficos, diagramas, barras de Cuisenaire ou desenhos. (MENEZES, 2000b, p. 3)

A prática do professor é construída tendo como base suas concepções. A linguagem presente na sala de aula, assim como a linguagem matemática utilizada pelo professor, sofre influência de suas concepções, de suas aprendizagens anteriores e da formação que recebeu. Um exemplo disso pode ser observado quando os alunos estão aprendendo a racionalizar frações. Os alunos raramente relacionam o conceito de frações equivalentes para efetuar a racionalização, uma vez que o professor também não faz essa relação, o que leva a supor que o professor também não tenha aprendido tal relação anteriormente.

Para o professor, o processo de comunicar suas idéias, seja oralmente ou por escrito, está ligado à forma como ele entende a utilização da linguagem própria da Matemática, o que se reflete diretamente no conhecimento matemático dos alunos. Por isso é necessário um tempo para que ambos negociem as estratégias a serem usadas durante as aulas de Matemática (PONTE et al., 2007).

> É ao escrever e falar sobre a Matemática, usando a linguagem não só para expressar os seus pensamentos, mas também para partilhar significados, para compreender os argumentos dos outros alunos e do professor, que os alunos desenvolvem a sua capacidade de comunicação matemática. (p. 46)

Menezes (2000b) destaca que “na aula, professor e alunos desempenham papéis diferenciados, para os quais contribuem formas de agir deliberadas, que variam consoante o modelo de ensino/aprendizagem preferido.” (p. 4). As formas de agir e, portanto, a linguagem da aula são também influenciadas pelo tipo de atividades propostas.

Outro ponto destacado por Ponte et al. (2007) e Menezes (2000b) é o papel central que a linguagem exerce no processo de avaliação escrita ou oral; é por meio das respostas dos alunos que o professor vai avaliar seu trabalho, seja individual ou em grupo.

Na presente pesquisa, evidenciamos o que os autores relatam no momento em que a professora parceira escreveu uma reflexão sobre o ocorrido durante a atividade investigativa. Tal reflexão se tornou a expressão de seu pensamento e, posteriormente, ela pôde compartilhar com seus alunos os significados de sua reflexão. O capítulo 5 relatará com mais detalhes essa experiência.

2.2 Comunicação: linguagem e interação social

Ponte et al. (2007) salientam a importância da linguagem no processo de comunicação:

> A linguagem oral (complementada pela linguagem corporal) serve de suporte ao pensamento, sendo através dela que se desenvolve o essencial do ensino-aprendizagem da Matemática. No entanto, a linguagem escrita (incluindo todo o tipo de registros escritos, simbólicos e representações icónicas) é uma forma de comunicação que tem um papel complementar fundamental no ensino-aprendizagem desta disciplina. A utilização das linguagens oral e escrita é um meio importante para que os alunos possam reflectir sobre a sua compreensão da Matemática, ajudando-os a fazer conexões e a clarificar os conceitos matemáticos. (p.45)

Os autores constataram que os alunos, ao interagir com suas idéias, comunicando-se matematicamente, usam os conhecimentos anteriores para adquirir novos, e isso faz com que compreendam melhor. Mas é o professor quem os incentiva para que isso aconteça, proporcionando situações em que ocorram processos de comunicação e registro escrito, que também servem de apoio à reflexão e ajudam na construção do conhecimento.

A comunicação também é o mecanismo usado pelos alunos e pelo professor para compreender a Matemática. Para que isso aconteça, como destacam Ponte et al. (2007), os alunos precisam sentir-se à vontade para participar da aula, mas também devem saber fazer isso de forma adequada. Ao expor suas idéias, alunos e professor entendem melhor o que o outro está pensando, negociam significados matemáticos e, assim, a linguagem usada é adequada matematicamente, o que incentiva a generalização de resultados. Construir um significado compreendido por todos implica que ele seja gerado durante o processo de comunicação e interação social.

> Neste processo de construção do conhecimento matemático é também fundamental que os alunos possam envolver-se em momentos efectivos de discussão, regulada directa ou indirectamente pelo professor, em que tenham oportunidade de argumentar, defendendo as suas posições, bem como de questionar e apresentar argumentos contra as ideias dos outros (e do próprio professor). A discussão, ao pressupor uma certa igualdade de papéis, envolve os alunos (e o professor) numa partilha de significados e ideias matemáticas construídos e partilhados oralmente na sala de aula, valorizando a argumentação, quer na defesa das ideias matemáticas quer na construção de exemplos ou contra exemplos, com o objectivo de confirmar ou infirmar relações matemáticas, quer na apresentação de conjecturas e de estratégias de resolução de problemas quer na exploração de novos caminhos. (PONTE et al. 2007, p. 47)

No estudo de Menezes (2004), encontramos seis meios de comunicação matemática definidos por Pirie (1998): a “linguagem ordinária ou natural”, usada no dia-a-dia, através da sua língua materna (linguagem informal); a “linguagem verbal matemática”, forma de comunicação oral e escrita, que usa o conhecimento escolar, a matemática escrita (linguagem oral mais formal e escrita informal); a “linguagem simbólica”, meio objetivo de comunicar-se, faz uso da linguagem escrita formal da Matemática, considerada imposta aos alunos pelo professor; as “representações visuais”, comunicação por meio de gráficos, diagramas, esquemas ou outros elementos visuais, usados para mostrar relações ou apoiar resoluções.

O tipo de linguagem que mais ocorreu durante a comunicação analisada por esta pesquisa foi a “linguagem verbal matemática”. Os alunos utilizavam o conhecimento da matemática que haviam aprendido na escola tanto para comunicar-se verbalmente quanto para escrever os resultados da tarefa. Outra linguagem comumente usada pelos alunos foram as “representações visuais”, em que desenhavam o esquema descrito na tarefa, quando estavam explorando e entendendo, e posteriormente, quando explicavam suas resoluções. A professora foi quem utilizou mais a “linguagem simbólica”, pois queria que seus alunos chegassem a utilizá-la também.

Os dois últimos meios de comunicação são definidos pelo que é comunicado e não mais pela forma. São eles “compreensões não ditas, mas partilhadas” e a “linguagem quase-matemática”.

> A comunicação designada por *compreensões não ditas, mas partilhadas* ocorre quando os alunos conversam sobre o que lhes é familiar e, dessa forma, partilham significados. Para um observador exterior, a conversa pode não fazer qualquer sentido, porque muitas das compreensões compartilhadas pelos alunos envolvidos na conversa não são verbalizadas, pois, por um lado, os alunos dificilmente conseguem pôr por palavras os seus entendimentos e, por outro, podem achar desnecessário a sua verbalização – havendo, assim, uma certa economia do discurso – sem que isso afecte a sua comunicação. (MENEZES, 2004, p. 126, grifo do autor)

A “linguagem quase-matemática” faz uso de vocabulário dos alunos e símbolos não convencionais, que normalmente são refinados pelo professor (formulações “pouco ortodoxas”). Todas essas formas de linguagem é que tornam a comunicação possível, e Menezes (2004) ressalta que, quanto mais diversas ocorrerem, mais rica será a comunicação. No entanto, esse meio de comunicação não ocorreu nesta pesquisa.

Na sala de aula, é por meio da linguagem que alunos e professores se envolvem, mas a comunicação que irá ocorrer, segundo Pimm (1994a), citado por Menezes (2004), será por quatro “canais fundamentais”, que envolvem atividades de ler e escrever, ouvir e discutir.

Após esclarecer um pouco sobre comunicação e linguagem na Educação Matemática, Menezes (2004) destaca outro termo que vem sendo usado: o discurso, entendido como a linguagem em ação, ou seja, a linguagem nas interações ocorridas na aula, em que o conhecimento é construído. Fonseca (2000) também comenta sobre o discurso na comunicação da sala de aula, ressaltando que é o modo como ele é conduzido pelo professor que determina o conhecimento e as formas de pensar que são valorizadas como processos de construção e validação do conhecimento matemático. São as tarefas propostas e o ambiente criado por elas que irão determinar o discurso do professor e dos alunos em uma aula. A autora acredita, ainda, que é a natureza do discurso que determina, na maioria das vezes, o que é aprendido em Matemática pelos alunos.

A professora parceira e as outras integrantes do grupo de estudos passaram a dar maior importância à linguagem nas interações na aula de matemática, observando o modo como conduziam a linguagem durante as aulas. Foi esse movimento que levou as integrantes do grupo de estudos a acreditar na potencialidade das investigações matemáticas para o início da aprendizagem em álgebra.

A interação é outro conceito encontrado na comunicação, pois a forma como aquela ocorre mostra, além do bom relacionamento entre os envolvidos, as oportunidades de aprendizagem que são oferecidas aos alunos. “Dentro das interacções sociais que ocorrem na sala de aula, as interacções verbais representam uma fatia importante, tanto em termos quantitativos como qualitativos, o que resulta da transversalidade da comunicação na actividade educativa.” (MENEZES, 2004, p. 128).

A valorização da comunicação como o modo como os alunos aprendem se deu ao considerar que o envolvimento ativo do aluno no discurso da aula contribui para a construção do conhecimento e das regras matemáticas. Ao estudar a comunicação, acabamos valorizando o estudo do uso da linguagem em contexto escolar (MENEZES, 2004).

Em Ponte et al. (2007), encontramos duas perspectivas sob as quais a comunicação, principalmente a comunicação matemática, deve ser levada em conta. A primeira é olhar a comunicação como organização e transmissão de informações e a outra é considerá-la um processo de interação social, ambas ligadas ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Na comunicação como transmissão, a Matemática é tida como um conjunto de verdades. Centrada no diálogo entre professor e alunos, o professor organiza sua fala para reforçar um conteúdo a ser transmitido, certificando-se de que a mensagem foi transferida por meio de perguntas aos alunos, que geram respostas que mostram a aquisição do conhecimento. Esse procedimento assemelha-se ao que descrevemos anteriormente como diálogo em uma aula tradicional.

Em outra perspectiva, a comunicação como um processo de interação social passa a acontecer quando a Matemática passa a ser vista como "uma construção cultural partilhada pelos intervenientes e as aulas são caracterizadas pelos processos de interacção social entre o professor e os alunos no contexto escolar" (PONTE et al., 2007). Isso propicia a negociação de significados num discurso que tem a intenção de promover a compreensão da Matemática.

> Os novos significados e as novas formas de compreensão são construídos e reconstruídos através de processos individuais de gerar sentido e processos sociais de interacção das mensagens, das pessoas e dos contextos culturais da sala de aula. A aprendizagem converte-se, assim, num processo de interacção e reflexão, onde o professor não se limita à transmissão de um conhecimento matemático estabelecido e objectivamente codificado, mas empenha-se na organização de um conjunto de tarefas diversificadas e não rotineiras que promovam uma variedade de estratégias de resolução de problemas pelos alunos e os levem a partilhar as suas ideias, com vista à negociação de conceitos matemáticos e à construção de novos conhecimentos. (PONTE et al., 2007, p.43)

No estudo de Menezes (2004) encontramos um exemplo sobre a concepção de três professores e de como estes, por meio de um trabalho colaborativo sobre a comunicação matemática, fazem evoluir essa comunicação — de um processo de transmissão de conhecimento para um processo reflexivo — meio pelo qual se manifesta o conhecimento. Dessa forma, os professores passam a rever seus conceitos sobre a didática da Matemática.

Ao encarar a aprendizagem e a comunicação como processos de interação social, Ponte et al. (2007) fazem um estudo mais detalhado sobre a comunicação ligada à aprendizagem de conceitos e de procedimentos matemáticos, considerando a negociação de significados como uma atividade cognitiva interativa e complexa.

Sabendo que a comunicação é um meio de regulação do processo de ensino-aprendizagem, o professor pode usá-la de várias formas e com vários objetivos, inclusive para promover o maior envolvimento de seus alunos no decorrer da aula ou para inibir participações inoportunas. Isso permite que ele tenha um certo controle sobre o que ocorre na aula, percebendo a evolução ou as dificuldades de seus alunos; mas para isso é necessário dar voz aos alunos, o que pode significar a real oportunidade para que aprendam Matemática. A identificação das dificuldades dos alunos por meio das questões colocadas pelo professor também é referida no estudo de Fonseca (2000), que indica que o professor ajuda os alunos a desenvolver a capacidade de comunicação, ao exercer seu papel de condutor do discurso que ocorre na aula.

Novamente encontramos em Ponte et al. (2007) o alerta para que os professores sejam capazes de formular questões não apenas de verificação, mas também interessantes; é necessário que tenham um bom conhecimento sobre o assunto tratado, para assim melhor conduzir a comunicação na aula de matemática.

Em Martinho e Ponte (2005) também encontramos, como dois aspectos essenciais da comunicação na aula de Matemática, a interação entre os participantes da aula e a negociação de significados, ou seja, a forma como trocam os conceitos e os processos matemáticos. Segundo os autores, esses aspectos só ocorrem em função do tipo de aula proporcionado, uma vez que as interações na sala de aula envolvem principalmente professor e aluno. Quando a interação e a negociação de significados ficam concentradas na figura do professor, que expõe a matéria e resolve exercícios, as perguntas partem quase sempre dele mesmo, que as reponde de maneira breve e precisa. Há ainda as interações entre os alunos, que são menos formais, mas essenciais, pois assim começam a defender seu ponto de vista, ou seja, a dar o seu significado ao que está sendo estudado. Isso, porém, só vai ocorrer se o ambiente criado na aula permitir.

Nesse ponto entra novamente a participação decisiva do professor, pois é ele quem vai determinar sua postura de facilitador dos processos de argumentação e comunicação de idéias, como confirma Menezes (2000b):

> A qualidade do trabalho desenvolvido por uma turma, e consequentemente o tipo de linguagem e a qualidade da comunicação, dependem, em grande medida, da forma como o professor organiza as situações de ensino/aprendizagem, da forma como organiza o trabalho dos alunos, de como os orienta e das tarefas que apresenta. (p. 5)

Ao professor cabe a formulação e a seleção de atividades; a criação de um ambiente em que os alunos se sintam à vontade; e a escolha do discurso que ele, professor, utiliza, ou seja, a forma como se comunica pelas questões que apresenta para sua classe, o que determina, além das respostas, o seu conteúdo (MARTINHO E PONTE, 2005; MENEZES, 2000b). "Segundo Sadker e Sadker (1982), o questionamento permite ao professor detectar dificuldades de aprendizagem, ter *feed-back* sobre aprendizagens anteriores, motivar o aluno e ajudá-lo a pensar" (MENEZES, 2000b, p. 6).

Para Menezes (2000b), ao invés de impor suas idéias, o professor deve apoiar e coordenar os alunos quando tentam expor diferentes pontos de vista, fazendo perguntas para que todos compreendam as diferentes perspectivas e tomando o cuidado de não avaliar ou constranger algum aluno durante esse processo. Alro e Skovsmose (2006) observam que talvez possa ser difícil para os alunos expressar suas idéias matemáticas ou o seu ponto de vista, e é o professor quem pode atuar como um facilitador, ao fazer perguntas de caráter investigativo, procurando entender a forma como o aluno interpretou o que lhe foi sugerido e, ainda, reforçando sua autoconfiança.

Diante disso, percebemos que o professor é quem determina a dinâmica na sala de aula, fazendo com que a atividade seja comunicativa e estimulante e permitindo que as interações ajudem o aluno em sua aprendizagem.

Alro e Skovsmose (2006), em seu estudo sobre diálogo e aprendizagem em Educação Matemática, levantam a hipótese de que a qualidade da comunicação em sala de aula influencie a qualidade da aprendizagem de Matemática e afirma que tal qualidade pode ser expressa em termos de relações interpessoais, uma vez que aprender é uma experiência que ocorre em contextos sociais,ou seja, o contexto afeta a aprendizagem. Os autores vinculam a qualidade de comunicação à existência de diálogo e recorrem a Freire (1972) para destacar a importância das relações interpessoais para o diálogo, que acreditam ser uma forma de interação rica em nuances e qualidades. Alro e Skovsmose (2006) também fazem uso do argumento de Rogers (1994) para expressar que o preparo do aluno para a democracia se dá num modo centrado em pessoas, num ambiente de confiança mútua, em que a responsabilidade pelos processos de aprendizagem é de todos, ao contrário do modo tradicional, que induz à obediência a estruturas de poder e controle, em que o professor detém o conhecimento e o aluno o capta e obedece as regras ditadas para a sala de aula. Os autores descrevem que o que ocorre na maioria das salas de aula é a prática do absolutismo burocrático, ou seja, aquele que ocorre quando os erros dos alunos são tratados como absolutos, pois são indicados pelo professor sem explicação ou argumentação, e as correções não são contextualizadas.

Para Alro e Skovsmose (2006), os professores não colocam em prática outras formas de ensino por causa do engessamento do sistema escolar pelo absolutismo burocrático, que está embutido nas estruturas básicas de comunicação. Alguns professores podem sentir essa divisão, a de educar os alunos para serem abertos e críticos e, ao mesmo tempo, serem impelidos a seguir um livro ou obrigados a preparar seus alunos para testes ou provas.

Nesse sistema, a comunicação que ocorre é uma relação desigual entre professor e alunos, em que o professor pergunta, o aluno responde e o professor avalia sua resposta. O professor espera os alunos adivinharem a resposta e então formula outra pergunta, cuja resposta ele sempre sabe. Esse tipo de comunicação pode levar os alunos a aceitarem que toda questão em Matemática terá uma resposta certa, o que em conseqüência, leva os alunos a não assumirem a responsabilidade pelo processo de aprendizagem.

Para superar o absolutismo burocrático, professor e alunos precisam identificar e avaliar suas perspectivas. O professor precisa mudar de atitude, mas, além disso, é necessário mudar também a lógica escolar. Entretanto, os autores também fazem as seguintes ponderações: existem outros padrões de comunicação; nem sempre o absolutismo burocrático aparece nas aulas de Matemática tradicionais.

Mudar essa lógica escolar para tentar superar o absolutismo burocrático exige muito mais do que a mudança de atitude, mas, para começar a mudar, é preciso começar a desafiá-la, iniciando uma nova de perspectiva. Esse desafio pode ser apresentado pelas investigações matemáticas, pois esse tipo de aula permite aos alunos e aos professores mudar a perspectiva da aula tradicional, proporcionando dinâmicas que podem romper com essa tradição.

Os autores (ALRO e SKOVSMOSE, 2006) comentam que, no ensino tradicional, a resolução de exercícios está em sua maioria associada à Matemática pura ou a semi-realidades, o que justifica um certo padrão dominante de comunicação entre professor e alunos. “O absolutismo burocrático e a metafísica da semi-realidade caminham lado-a-lado” (p. 55). Mas ressaltam que essa metafísica permeia toda a forma de comunicação e são exercícios baseados em dados da vida real, por exemplo, que dão oportunidades de desafiar o absolutismo burocrático, pois tornam relevantes questionamentos sobre as informações.

Para tentar abandonar o paradigma do exercício, Alro e Skovsmose (2006) argumentam que devemos entrar em um ambiente de aprendizagem diferente, que chamam de “cenários para investigação”. Nesse cenário, de natureza aberta, o professor pode substituir os exercícios e minimizar algumas rotinas escolares e os alunos podem participar do processo de investigação. “Um cenário serve como um convite para que os alunos se envolvam em um processo de investigação. Contudo, um cenário somente se torna acessível se os alunos de fato aceitam o convite.” (p. 57). Segundo os autores, a aceitação pelos alunos dependerá da natureza do convite, do professor e deles mesmos.

Dar oportunidade para que os alunos exponham suas idéias é apenas parte do processo de aprendizagem, que pode também estar relacionado com experiências, reflexões e aprendizagens anteriores.

Gomes (2007, p. 46) ressalta que nos Standards[7] (APM, 1991, p. 7) que, de certo modo, influenciaram os Parâmetros Curriculares Nacionais, há indicação da necessidade de buscar, nas aulas de matemática, “promover capacidades individuais para explorar, conjecturar, refinar e

[7] ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (APM). **Normas para o currículo e avaliação em Matemática escolar**. Tradução portuguesa da edição original de 1989 (Standards, NCTM). Lisboa: APM, 1991.

consolidar as idéias do pensamento matemático do aluno" e afirma que ações nesse sentido contribuem para que o aluno aprenda a comunicar-se e a raciocinar matematicamente. A mesma autora lembra-nos que os referenciais curriculares nacionais indicam como um dos objetivos da matemática escolar desenvolver no educando a capacidade de "comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas" (BRASIL, 1998, p. 51). Diante desses indicativos, não podemos discordar de Gomes (2007, p. 46), quando afirma que

> a comunicação é o meio através do qual se ensina e aprende e, ao mesmo tempo, a finalidade desse mesmo ensino, visto que se presume que os alunos desenvolvam, no decorrer de sua escolaridade, competências comunicativas. No caso da matemática, competências que possibilitem a resolução de problemas e a investigação por meio do pensamento e do raciocínio matemáticos.

A comunicação na aula de matemática pode evoluir de tal modo que poderá levar à construção de argumentações partilhadas, isto é, os alunos e os professores partilham as formas como encaram os conceitos e os processos matemáticos, fazendo os ajustes necessários. Martinho e Ponte (2005, p. 3) ressaltam que, ao aprender matemática num ambiente de comunicação de idéias, ocorre a construção progressiva de significados através dos quais o aluno realiza uma apropriação pessoal do conhecimento matemático "estabelecido dinamicamente na tensão entre novos conteúdos e conhecimentos anteriores".

O estudo de Fonseca (2000) também traz observações sobre a comunicação defendida pelas normas NCTM (1991). O documento dá ênfase ao desenvolvimento da comunicação como objetivo para o ensino da Matemática, pois, ao aprender a comunicar-se matematicamente, o aluno vai refinando e consolidando o seu pensamento matemático. Isso acarreta a aquisição de competências para resolver diversas situações, o desenvolvimento e o refinamento da argumentação matemática, além de possibilitar que os alunos consigam se expressar matematicamente, seja de forma oral ou escrita, fazendo uso da linguagem matemática e fazendo conexões desta com outras áreas do conhecimento.

O interesse pela comunicação, assim como a necessidade de criar na aula de matemática condições favoráveis ao envolvimento dos alunos em experiências de aprendizagem cujo foco é a explicação e a fundamentação de raciocínios; a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações; e a formulação, a avaliação e a prova de conjecturas tem sido objeto de vários estudos contemporâneos na área da Educação Matemática. Alguns dos motivos pelos quais tais estudos estão sendo desenvolvidos foram aqui enunciados anteriormente: a valorização do raciocínio matemático em diferentes formas e a valorização da comunicação como processo de interação social e de desenvolvimento da aprendizagem.

Mesmo consciente da importância da comunicação na aula de Matemática, percebemos, observando a prática de alguns professores, que atividades que envolvam tais habilidades têm sido muito pouco desenvolvidas. Alro e Skovsmose (2006) vão no mesmo sentido, ao indicar que não encontram nas pesquisas sobre o tema essa conduta como algo natural do professor. “A estrutura de comunicação entre professor e aluno (assim como entre alunos) que predomina é a do jogo-de-perguntas, do explicar-o-jeito-certo-de-fazer e do corrigir erros” (p. 73).

Procurando novas abordagens para a sala de aula, estudamos as investigações matemáticas e vimos, nas atividades investigativas, uma possibilidade de promover um contexto favorável para que ocorram questionamentos e comunicações significativas.

As características de tais atividades vão ao encontro das necessidades que descrevemos para o desenvolvimento da comunicação e da argumentação. Como descrito por Menezes (2000b), tarefas que contenham questões abertas, com um certo grau de familiaridade, mas que mantêm a incerteza em relação à solução e permitem várias soluções e, ainda, quando possível são acompanhadas material concreto para manipulação, contribuem para a qualidade da comunicação. De acordo com o capítulo anterior, esse tipo de atividade pode ajudar a desenvolver o raciocínio e a autonomia, pois os alunos participam mais ativamente. Exige-se, porém, uma nova postura do professor.

Nessa perspectiva, Gomes (2007, p. 45), pesquisou investigações matemáticas nas aulas de jovens e adultos e defende que a:

> matemática, quando desenvolvida de maneira a propiciar a criticidade, é uma importante ciência que contribui na formação de sujeitos. Trabalhar em defesa do direito à matematização do jovem e do adulto da EJA é um dever da educação, da educação pública, da escola pública e, principalmente, uma obrigação social. Nesse sentido, comunicar-se matematicamente passa a ser essencial na aprendizagem. Afinal, o ato de comunicar-se significa multiplicar os sentidos enquanto nos multiplicamos como pessoas, por meio da(o): divisão, multiplicação, transporte, confusão, disseminação e, acima de tudo, por meio da tradução da fala, da linguagem e da escritura.

Para a referida autora, em aulas de matemática com abordagens exploratório-investigativas o “ato de comunicar-se impõe princípios de luta e de direito à educação de jovens e adultos em situação de exclusão social, de vulnerabilidade ou de marginalização social” (p. 45) e possibilita o desenvolvimento de estratégias de resolução através da argumentação.

Para Alro e Skovsmose (2006), é por meio do diálogo investigativo coletivo que os alunos são estimulados a expressar suas idéias e seus entendimentos; e, assim, a aprendizagem pode acontecer.

Para o professor, isso se torna mais visível quando este sente necessidade de mudança em sua prática docente, quando tem consciência de que precisa assumir uma posição diferente. É preciso repensar o que fazemos em aula, assim como o antes e o depois dela, oportunidade que o grupo de estudos oferece. O que ocorre, muitas vezes, é que, mesmo insatisfeitos, alguns professores têm receio de tentar uma nova postura ou, quando tentam, não conseguem desenvolvê-la como esperavam e passam a trabalhar como antes, voltando a assumir uma postura de controle, em que ele é o detentor do saber. Como salientam Alro e Skovsmose (2006), deixar o paradigma do exercício é também deixar a zona de conforto, ou seja, abandonar a comodidade da certeza e entrar numa zona de risco. Realizar uma investigação é deixar-se levar pela curiosidade, exigindo uma postura de mente aberta e curiosa (LINDFORS, 1999, apud ALRO e SKOVSMOSE, 2006). Nesse caso, os alunos precisam ser convidados para o novo cenário, o que pode significar que alunos e professor precisam preparar ou identificar o cenário juntos, pois os participantes da investigação são também responsáveis pela forma como a desenvolvem e pelo que podem aprender com elas.

Os referidos autores argumentam que o convite precisa ser feito em cooperação investigativa — por meio da manifestação de possibilidades que surgem em um cenário para investigação —, que é vista “como parte essencial do desenvolvimento de certas qualidades de comunicação e de aprendizagem Matemática.” (p. 59).

Mas, infelizmente, muitos professores não se sentem seguros ou não sabem como começar ou continuar quando um cenário novo é apresentado. Eis alguns exemplos de obstáculos à cooperação investigativa observados por Alro e Skovsmose (2006): os alunos não colocam suas idéias, pois esperam os comandos do professor, já que estão acostumados a esperar a resposta correta dele; os alunos não expressam sua idéia na presença do professor para evitar expor-se, em uma forma de auto-censura; alunos que têm mais interesse e não sentem vergonha para expressar-se acabam por desfavorecer os que ficam mais calados.

Compartilhando dos trabalhos desenvolvidos no GCEEM, isso se evidencia. Se o professor não tem quem o apóie no desenvolvimento de novas estratégias de ensino e em novas metodologias, na discussão sobre as dificuldades encontradas e nas reflexões decorrentes dessa nova postura, ele facilmente desiste, pois é muito mais difícil lidar com situações que ele não consegue antecipar, como ocorre em situações de aulas com investigações matemáticas, do que propor em sua aula exercícios para consolidar as definições matemáticas apresentadas e assim controlar o que ocorre.

Segundo Boavida (2005a), muitos estudos que analisaram práticas do professor associadas à exploração e à discussão de atividades de investigação matemática, ressaltam com freqüência as dificuldades, os dilemas, as tensões, os desafios ou as situações problemáticas imprevisíveis que os professores experimentaram e ainda a preocupação de não causar aos alunos situações de frustração ou constrangimento diante da classe. Um dos dilemas vividos pelo professor é saber quando e como deverá intervir quando os alunos estão realizando uma atividade ou, ainda, como solucionar uma dificuldade relacionada ao conteúdo matemático ou ao funcionamento desse tipo de aula. Para o professor assumir essa nova postura, ele necessitará "...de grande flexibilidade, significativo investimento pessoal e um leque de competências mais amplo do que requer do professor dito 'tradicional'". (p. 8) Tal exigência parece ser a mesma que o professor terá para desenvolver uma dinâmica de aula que estimule a comunicação na aula de matemática.

Mesmo partindo do pressuposto de que as investigações matemáticas promovem um novo cenário, um novo tipo de comunicação, e que isso possibilita a qualidade na aprendizagem, a pesquisa de campo mostrou-nos que, quando se trata do início do pensamento e da linguagem algébrica, podem-se encontrar algumas dificuldades.

Neste capítulo procuramos discorrer sobre a comunicação na aula de Matemática nas investigações matemáticas; o que a envolve; e o que é importante para que ela ocorra. Procuramos também esclarecer como desenvolver a comunicação e a troca de idéias em uma aula com tais características.

Para compreender melhor as dificuldades que podem ser encontradas, o próximo capítulo esclarecerá alguns conceitos que envolvem o ensino de álgebra, necessários para realizar a análise da presente pesquisa.

3 SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA

A álgebra levou muito tempo para ser conhecida da forma como é hoje, embora o pensamento algébrico estivesse presente na construção da Matemática. O ensino da álgebra apresenta-se cada vez mais desafiante e com muitos fracassos, o que a está transformando em uma forma de exclusão, já que as pessoas, por terem dificuldades em compreendê-la, acabam sendo barradas em diversas situações.

Durante as aulas de Matemática os professores possuem certa dificuldade em evitar que o ensino da álgebra se resuma apenas à mecanização por exercício ou a problemas de aplicação. Como afirmam Lins e Gimenez (1997), há uma cristalização do que se deve ensinar na escola, e os professores parecem estar submetidos a uma pressão dos currículos tradicionais. Dessa forma, o ensino de álgebra apresenta-se fragmentado, fazendo com que os alunos sintam dificuldades em questões — em que estão presentes numa variedade de representações simbólicas, algébricas, gráficas e geométricas — que envolvam relações e dependências entre variáveis, padrões e regularidades. Alguns exemplos dessas dificuldades têm a ver com o uso de letras para representar variáveis: os alunos não conseguem ver uma letra representando um número desconhecido e não percebem o sentido de uma expressão algébrica. Outra dificuldade é traduzir informação da linguagem natural para a linguagem algébrica. Muitas dessas dificuldades surgem pelo fato de o ensino da álgebra, em muitos casos, ser reduzido aos seus aspectos transformistas, dando ênfase à linguagem algébrica, e não aos significados representados pelos símbolos. Tais dificuldades podem ser explicadas, pois, durante séculos, a álgebra foi ensinada e ainda é vista como um conjunto de regras de transformação de expressões (monômios, polinômios, frações algébricas, expressões com radicais) e de processos de resolução de equações e sistemas de equações (PONTE, 2005).

Segundo Souza e Diniz (1994), tradicionalmente o primeiro contato dos alunos com a álgebra é quando letras são usadas para representar números, o que ocorre normalmente na sexta série. Nesse contato com a álgebra, as letras são apresentadas contendo um valor numérico — sempre determinado. Além disso, ainda há sempre uma única solução. As autoras afirmam que, na sétima série, o contato com a álgebra pode ser considerado como abstrato, pois as letras passam a ser consideradas apenas letras e passam a ser manipuladas juntamente com os símbolos, para que sejam ensinadas as regras da álgebra. Assim como ocorre na passagem da sexta para a sétima série, nas séries seguintes o ensino da álgebra continua de certo modo fragmentado, enfatizando ora um aspecto, ora outro, de forma desarticulada; ou seja, não há preocupação com a articulação entre eles.

Uma solução apontada por Ponte (2005) para mudar esse quadro é adotar uma estratégia de introdução dos símbolos e do seu uso em contextos significativos, em atividades que mostrem de forma natural o poder matemático da simbolização e da formalização.

Para entender melhor o que quer dizer “poder” da álgebra, é necessário buscar um pouco sobre o seu surgimento. Um pequeno olhar sobre a história da álgebra revela que ela demorou muito tempo para se desenvolver. “A humanidade levou muitos séculos para criar uma linguagem simbólica: uma linguagem matemática simbólica que, libertada das palavras, volta-se para expressar o pensamento matemático” (ARAÚJO, 1999). A demora e a dificuldade encontradas durante séculos para superar os desafios até chegar à linguagem simbólica são desconhecidas pelos alunos, que acabam não sabendo da relevância desse conteúdo.

Em seu estudo, Scarlassari (2007) descreve um pouco sobre a invenção da álgebra, mostrando que ela não teve início com os símbolos, mas que eles fizeram parte do processo para facilitar a comunicação matemática e a resolução de problemas.

Segundo Araújo (1999), a álgebra surgiu da procura de solucionar problemas de ordem prática, como divisão de terras e heranças, estudo do movimento ou dos astros, ou mesmo problemas internos à própria Matemática.

A linguagem hoje usada na álgebra sofreu modificações ao longo dos séculos, vindas da necessidade de criar uma linguagem única — o uso de fórmulas — que pudesse ser usada por todos nas diferentes áreas de conhecimento, por isso se tornou “poderosa” como pensamento científico.

Outro “poder” importante é o uso da letra, pois o aparecimento da variável letra só foi possível depois de muitos conflitos e negociações entre as civilizações. A importância de comentar isso deve-se ao fato de os alunos também passarem pelos conflitos que a humanidade sofreu para chegar de fato ao entendimento da linguagem simbólica da álgebra. Um exemplo disso são as resoluções dos problemas na forma aritmética. Como os alunos conseguem achar a solução dessa forma, não tem sentido complicar usando a linguagem formal da álgebra, o que causa conflitos na aula de Matemática quando a intenção do professor é que os alunos usem a linguagem formal.

Scarlassari (2007) descreve as fases — diferentes linguagens — que a álgebra desenvolveu para chegar à linguagem atual e sugere que os alunos poderiam passar por todas elas, para o seu desenvolvimento em sala de aula.

A primeira fase é caracterizada pela ausência de símbolos matemáticos — a Álgebra Retórica. A segunda é a Álgebra Sincopada, caracterizada por usar algumas palavras abreviadas para expressar quantidades e operações. Essas duas fases fazem parte do que a autora chama de álgebra não-simbólica.

Sobre a segunda fase, a história da álgebra nos revela que foi Diofanto o primeiro a criar abreviaturas para representar a incógnita. Um exemplo utilizado por Diofanto é a letra “sigma” do alfabeto grego. Outro exemplo de linguagem sincopada registrado na história é o do povo egípcio que, na necessidade de superar o número natural, utilizou a palavra “aha” para escrever um número desconhecido — registro encontrado no papiro de Rhind, do século XVIII a.C.

Os indícios do desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico que puderam ser observados na presente pesquisa correspondem aos descritos nessas fases pertencentes à álgebra não-simbólica. Como será possível ver em alguns exemplos, os alunos da 6ª série expressaram as resoluções das tarefas na forma retórica, sincopada ou, ainda, na forma pictórica (figura).

E, finalmente, ocorreu a terceira fase, a Álgebra Simbólica, caracterizada pela utilização de símbolos. Somente com a linguagem simbólica é possível fazer generalizações a partir de fórmulas e expressões. Em seu estudo, Scarlassari (2007) defende que, ao trabalhar a idéia de movimento, variável, campo de variação ou conjunto universo com a linguagem algébrica, os alunos seriam capazes de construir uma linguagem mais sintética e, então, chegar a símbolos parecidos com os usados na linguagem simbólica. Foi Viète (1540-1603) quem contribuiu para essa fase, quando introduziu as vogais para representar uma quantidade supostamente desconhecida ou variável e consoantes, para representar parâmetros.

Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) “embora a linguagem ordinária ou retórica seja um meio de comunicação de idéias, a matemática desenvolveu historicamente sua própria linguagem, notadamente escrita e simbólica, para comunicar suas idéias e conceitos.” (p. 6). Diante disso, é preciso considerar os dois níveis em que a linguagem Matemática opera: o *semântico* e o *sintático*. No semântico, “as notações e símbolos matemáticos são tratados com significados claros e relativamente precisos, guardando, assim, alguma semelhança com a linguagem retórica ou ordinária”. E, no sintático, “as regras e os procedimentos podem ser operados sem referência direta a seus significados” (ibidem, p. 6). Os autores alertam que é preciso trabalhar os dois níveis em sala de aula, para que não haja perda do poder matemático para os alunos.

Pode-se dizer que a álgebra é uma linguagem da Matemática que possui símbolos e regras, utilizados para expressar fatos genéricos, e quatro funções, quais sejam: a álgebra como generalizadora da aritmética; como estudo de processos para a resolução de problemas; como expressão das variações de grandezas; e como estudo de estruturas matemáticas (SOUZA e DINIZ, 1994).

O ensino da álgebra centrado na linguagem formal — manipulação dos símbolos — interfere diretamente na aprendizagem, pois gera as dificuldades dos alunos. Muitas vezes eles entendem o problema, mas não a linguagem formal utilizada. É por isso que os alunos, principalmente quando estão iniciando na álgebra simbólica, tendem a querer chegar à resposta certa sem se preocupar com a linguagem a ser utilizada para expressar seu raciocínio. Diante disso, torna-se muito importante que os professores incentivem seus alunos a expressar os problemas aritméticos numa linguagem mais rigorosa (SCARLASSARI, 2007).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam alguns elementos que permitem repensar a educação algébrica elementar. Para isso, fazem uma análise comparativa entre as concepções de educação algébrica manifestadas ao longo da história do ensino da Matemática e distinguem três grandes correntes: (a) a *lingüístico-pragmática*, em que prevalece a crença de que, com a aquisição, mesmo mecânica, de técnicas necessárias ao "transformismo algébrico", bastaria para o aluno adquirir a capacidade de resolver problemas; (b) a *fundamentalista-estrutural*, caracterizada pelo período do Movimento da Matemática Moderna, em que prevalece a crença de que, se o aluno dominasse as propriedades estruturais das operações, poderia aplicá-las nos diferentes contextos que estivessem subjacentes; (c) a *fundamentalista-analógica*, que tenta sintetizar as duas primeiras, pois procura recuperar o valor instrumental da álgebra e manter seu caráter fundamentalista (justificação), baseando-se, na maioria dos casos, em recursos analógicos geométricos (visuais).

Miorim, Miguel e Fiorentini (1993, p. 37) afirmam que, para estar próximo de construir um referencial para uma efetiva educação algébrica, é necessário refletir sobre quais seriam os elementos caracterizadores do pensamento classificado como algébrico; autores apontam: "a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, as tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização". Assim, definem o pensamento algébrico como um tipo especial que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, mas também em outras áreas do conhecimento.

Os mesmos autores, em outro estudo, lembram-nos que nem sempre esses elementos se revelam no enunciado de uma situação-problema, mas sim no modo como se busca resolvê-la (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993). Alguns dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico estarão presentes, por exemplo, quando a percepção da estrutura de um problema exigir um alto nível de abstração, uma vez que isso só é possível quando se deixa de levar em consideração a natureza dos elementos envolvidos, para voltar a atenção à forma como os elementos são operados e às propriedades invariantes das operações. “O modo como buscamos caracterizar o pensamento algébrico nos leva, portanto, a pensar que ele é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento.” (ibidem, p. 88).

Segundo os autores, o pensamento algébrico pode expressar-se por meio da linguagem natural; da linguagem aritmética; da linguagem geométrica; ou de uma linguagem específica, criada para esse fim, isto é, usando uma linguagem algébrica de natureza estritamente simbólica.

Ao estudar um pouco sobre a história da álgebra, vimos que o pensamento algébrico já se manifestava antes de sua formalização. Como exemplo, temos a afirmação de Caraça (1998):

> [...] o homem na sua necessidade de *lutar* contra a natureza e no seu desejo de a dominar, foi levado, naturalmente, à observação e ao estudo dos fenômenos, procurando descobrir as suas *causas* e o seu *encadeamento*.
> Os resultados desse estudo, lentamente adquiridos e acumulados, vão constituindo o que, no decurso dos séculos da vida consciente da Humanidade, se pode designar pelo nome de *Ciência*. (p.101, grifos do autor)

Segundo o estudo de Scarlassari (2007), “a linguagem é desenvolvida a partir da interação social, e, assim sendo, não é possível aprendê-la sozinho, a criança precisa estar inserida num meio que possibilite o seu desenvolvimento.” (p. 51). A linguagem matemática precisa ser desenvolvida na convivência e na comunicação com adultos e outras crianças. Para que ocorra a efetiva construção do pensamento algébrico e, assim, aprendizagem significativa, a nova linguagem tem que ter um sentido; o aluno precisa ser levado a ter necessidade de utilizá-la. “O conhecimento algébrico é produzido a partir de conhecimentos já existentes, é um produto cultural e social no qual o aluno sente interesse em ampliar e aprofundar o que já sabe.” (ibidem, p. 52).

Em seu estudo, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) defendem que o ensino-aprendizagem da álgebra e o trabalho com esse tipo de pensamento devem começar desde as séries iniciais, visando “desenvolver a capacidade de perceber regularidades e de captar e expressar retoricamente, ou de forma semiconcisa, a estrutura subjacente às situações-problema, através do processo de generalização.” (p.89). Os autores também ressaltam que a primeira etapa deve ser o trabalho com situações-problema, realizado de forma a garantir a prática dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Refletir sobre situações-problema de naturezas diversas e analisá-las possibilitará a construção de uma linguagem simbólica significativa para o aluno.

Ponte (2005), no mesmo sentido, afirma que, por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, é possível alcançar os objetivos do estudo da álgebra. Segundo o autor, esse tipo de pensamento vai além da manipulação de símbolos: diz respeito também ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo das variações (NCTM, 2000)[8].

O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico, com funções e com outras estruturas matemáticas e de usá-las na interpretação e na resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

> Ou seja, no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objectos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações de modo geral e abstracto tanto quanto possível. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este pensamento é o estudo de padrões e regularidades. (PONTE, 2005, p. 37)

Outra consideração importante é que os conceitos algébricos, entendidos como conceitos científicos, são de um nível de pensamento matemático diferente dos conceitos aritméticos. Para que um aluno possa desenvolver os conceitos algébricos, faz-se necessário que seus conceitos aritméticos estejam bem desenvolvidos. Mas podem acontecer situações em que, ao estabelecer certos conceitos algébricos, o aluno possa ampliar o desenvolvimento de conceitos aritméticos, por estabelecer relações que antes não eram possíveis.

No sentido de tornar o pensamento algébrico uma orientação transversal do currículo, Kaput e Blanton (2005), citados por Ponte (2005), sugerem que isso significa:

- promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure, sempre que possível, a generalização;
- tratar os números e operações algebricamente — prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objetos formais para o pensamento algébrico;
- promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1° ciclo.

Com isso, podemos supor que, se a álgebra for apresentada como um conjunto de regras e métodos a serem decorados sem relação com significados, não será efetivamente entendida pelos alunos. Uma das sugestões para que seja ensinada de modo a dar uma oportunidade estimulante e produtiva para aprender álgebra é envolver os alunos em situações que busquem padrões e relações, e estabeleçam generalizações sustentadas por um raciocínio plausível (NODDINGS, 2005).

Para compreender melhor e ser possível identificar os indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico dos alunos no movimento ocorrido nas aulas do presente estudo, é necessário definir alguns conceitos envolvidos, como o de variável, campo de variação, incógnita, equação, generalização, operacionalidade e movimento regular. Para isso baseamo-nos no estudo de Scarlassari (2007), Branco (2008) e Caraça (1998).

---

[8] NCTM (2000), *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

A variável é um conceito cuja aprendizagem é um processo difícil e lento, diz respeito ao movimento da vida — fluência —, limitado dentro de um campo de variação que, por sua vez, depende do contexto com o qual se está trabalhando; é um número qualquer de determinado conjunto, mas não é especificamente nenhum dos números desse conjunto.

Do ponto de vista dessa teoria, a variável é a expressão de um pensamento; é entender o movimento. O seu conceito explicita a fluência pela variável; permite expressar o pensamento algébrico, o que não é estático ou fixo como o pensamento aritmético; possibilita o desenvolvimento da ciência em geral, pois permite, por exemplo, a compreensão de que alguns fatores se modificam regularmente, quando existe a variação em outros fatores, o que significa que o pensamento algébrico é expresso de uma outra forma. Pensar algebricamente é pensar o movimento; é como pensar na quantidade sem estar preso a sua representação – entender o número em movimento.

Conforme Caraça (1998, p. 120), a variável "[...] é, afinal, o símbolo da vida *colectiva* do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela". O mesmo autor destaca seu caráter contraditório e a fluência desse conceito:

> A variável é, portanto, uma entidade que, dizendo respeito a um nível de isolado — o conjunto — superior ao do número, é, ela própria, de uma natureza superior. [...] no entanto, o caráter contraditório do conceito – a variável *é* e *não é* cada um dos elementos do conjunto — deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu caráter essencial — síntese do *ser e não ser* — ela sai fora daquele quadro de ideias que quer ser na Realidade uma permanência e irrompe ligada à corrente de pensamento que, expressa ou tacitamente, vê na *fluência* a primeira das suas características. (p.120, grifos do autor)

Para o autor, esse é um dos conceitos mais difíceis para os alunos, uma vez que, dependendo da situação, a variável pode representar diferentes papéis: como elemento genérico de um conjunto; como variável dependente ou independente; como parâmetro; como incógnita, entre outros. Para Scarlassari (2007, p. 18), "na álgebra simbólica, ela pode ser representada por qualquer letra do alfabeto e pode aparecer de três formas: como parâmetro, incógnita (que é a mais utilizada nas salas de aula) e como variável propriamente dita".

Mas o que pode acontecer é que o primeiro contato dos alunos com a álgebra seja com as equações, o que pode levá-los a acreditar ser a variável uma incógnita, ou seja, um valor a ser determinado. Por isso é sugerido que os alunos tenham contato com as generalizações de padrões e seqüências, observando regularidades e manipulando expressões para concluir os resultados. A justificativa é que, por esse caminho, os alunos talvez possam entender melhor o aparecimento de símbolos como variáveis, favorecendo a aprendizagem da linguagem algébrica.

No presente estudo, veremos que o fato de os alunos não compreenderem o conceito de variação dificultou a compreensão da linguagem algébrica.

O conceito de incógnita, como descrito anteriormente, é um dos papéis assumidos pela variável, e por isso esta se torna problemática para os alunos, uma vez que eles estão com o pensamento aritmético — pensam no estático, e não no movimento. O que acontece geralmente é que, ao começar a ensinar equação, é como se se conseguisse regularizar um movimento qualquer da vida a partir da aritmética e, por isso, chega-se à equação, vista como um movimento regular. Generalizar é isto: é captar a regularidade, perceber que é possível escrever de uma forma sintética, na linguagem formal, possibilitando fazer previsão onde o aluno tem contato com as abstrações aritméticas. Assim foi feito na tarefa que será descrita mais adiante neste estudo.

Operacionalidade, segundo Scarlassari (2007), é entendida como a relação da aritmética com suas operações, com seus símbolos e com suas propriedades, como base do pensamento algébrico. Sem saber os conceitos aí envolvidos, os alunos terão dificuldades em relação à sintaxe ou aos procedimentos operacionais, e não nos significados das operações (semântica).

No estudo de Branco (2008), encontramos equação como uma identidade aritmética com um número desconhecido. A autora relata que o conceito de equação exige a compreensão de vários aspectos, tais como o significado de igual e do número desconhecido. Por isso, justifica-se que seja feito um trabalho pré-algébrico em relação às equações, como aconselham os PCN (BRASIL, 1998). Tal documento sugere que o trabalho de pré-álgebra seja desenvolvido no terceiro ciclo, "em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações." (p. 84).

Branco (2008) justifica a importância dos padrões e das regularidades na Matemática por ser esta baseada na análise de padrões numéricos de forma ou movimento, entre outros. "Os padrões são usados em aplicações matemáticas para explicar e prever fenômenos naturais que se adaptem ao padrão." (p. 9). Outra razão para essa importância reside no fato de considerar-se o descobrimento de regularidades como objetivo da Matemática

Segundo a autora, o estudo de padrões e regularidades também é defendido pelo NCTM (1991), por entender que tal estudo possa ajudar a compreender o conceito de função e possa constituir uma base para o trabalho posterior com símbolos e expressões algébricas. A autora ressalta, ainda, a contribuição desse tipo de estudo para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

3.1 Padrões na Matemática

O padrão na Matemática insere o movimento regular. É o tipo de movimento (fluência) pelo qual é possível perceber primeiro que existe regularidade — passo inicial para chegar à fórmula (generalização). Perceber a regularidade só é possível depois da observação do movimento. Como Caraça (1998) descreve: “A observação mostra que há certos fenômenos que apresentam regularidades, isto é, comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam as mesmas.” (p. 112).

Para chegar à fórmula, são utilizados antes os conhecimentos aritméticos — pensamento aritmético —, descobre-se um padrão aritmético. Então é que se avança, entendendo o movimento regular. Depois de entender como o padrão funciona, é possível algebrizar, chegando à álgebra simbólica. “A existência de regularidades é extremamente importante porque permite a *repetição* e *previsão*, desde que se criem as condições iniciais convenientes; ora, *repetir* e *prever* é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a Natureza.” (CARAÇA, 1998, p. 112, grifos do autor).

Ao observar os movimentos da vida, percebemos que existem alguns com os quais não é possível fazer isso, uma vez que não são regulares.

A importância de tais considerações reside no fato de a professora parceira deste estudo ter formação matemática e, por essa razão, seu foco, assim como o das professoras do grupo de estudos (GCEEM), será padrão. Isso justifica a escolha das tarefas desenvolvidas com seus alunos: padrão no movimento regular como primeiro contato dos alunos com a necessidade de generalizar.

Alguns investigadores têm defendido nos últimos anos que a aprendizagem matemática necessita que o aluno tenha contato com tarefas diversificadas e significantes, que promovam o envolvimento ativo e a reflexão. Uma das perspectivas usadas pelos professores para proporcionar esse tipo de contexto de aprendizagem é a ciência dos padrões, que pode contribuir para aumentar a compreensão e a motivação nas aulas de Matemática.

Na Matemática é muito comum ter como objetivo descobrir e revelar padrões, descobrir regularidades, o que se revela um instrumento poderoso de atividade matemática, uma vez que a sua procura é indispensável para conjecturar e generalizar (VALE e PIMENTEL, 2005). “A procura e identificação de padrões utilizam e enfatizam a exploração, investigação, conjectura e prova, desafiando os alunos a recorrer às suas destrezas de pensamento de ordem superior.” (p. 15).

Vale e Pimentel (2005) comentam que são várias as referências à importância dos padrões, pois a procura por eles é parte crucial na resolução de problemas e no trabalho investigativo. Salientam que é importante começar com tarefas de reconhecimento de padrões para que os alunos se acostumem com esse tipo de pensamento.

Tais tarefas têm-se manifestado úteis na introdução à álgebra. “No caminho para a álgebra, descrita como expressão da generalidade, a primeira fase pela qual o aluno passa é sempre ‘ver’ e isto significa compreender mentalmente um padrão ou uma relação” (VALE e PIMENTEL, 2005, p. 15).

Para as referidas autoras, tarefas que envolvem a procura de padrões permitem:

- contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática por parte dos alunos;
- experimentar o poder e a utilidade da Matemática e desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos;
- evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo;
- promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, tornando-os bons solucionadores de problemas e pensadores abstratos;
- melhorar a compreensão do sentido de número, da álgebra e de conceitos geométricos.

E ressaltam que, para que isso possa acontecer, é preciso dar as seguintes oportunidades para os alunos:

- transferir padrões concretos, pictóricos e simbólicos de uma representação para outra;
- averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade;
- descobrir o padrão numa seqüência;
- descrever o padrão oralmente e por escrito;
- continuar uma seqüência;
- prever termos numa seqüência;
- generalizar;
- construir uma seqüência.

Com base nisso, as autoras fizeram algumas pesquisas sobre a utilização de tarefas com padrões e constataram que a maioria dos alunos em formação inicial, ao ter contato com atividades que requeriam, além do reconhecimento, também generalizações, utilizava uma abordagem numérica. Com isso, as pesquisadoras reforçam o incentivo à aplicação de atividades em que o aluno possa olhar o problema de vários modos e mobilizar seus conhecimentos de qualquer natureza. Ao integrar-se esse tipo de atividade no currículo, permite-se também desenvolver a capacidade dos alunos de se comunicar matematicamente e, assim, melhorar o desempenho nas aulas de Matemática.

As investigações matemáticas constituem um percurso importante para que os alunos compreendam os aspectos essenciais da álgebra, uma vez que permitem o contato com várias experiências algébricas informais que envolvem a análise de padrões e as relações numéricas, sua representação e generalização por meio de diferentes processos (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003).

As considerações feitas neste capítulo, principalmente em relação aos conceitos que envolvem a álgebra, auxiliaram na identificação dos indícios de formação da linguagem e do pensamento algébrico, assim como das potencialidades e dos dilemas vividos durante atividades exploratório-investigativas com conteúdo algébrico.

No próximo capítulo, metodologia, serão descritas as opções feitas para que a presente pesquisa se desenvolvesse. Será possível conhecer melhor quem são os sujeitos e a professora parceira da pesquisa e entender como foi estruturada a análise dos dados.

4 METODOLOGIA

A pesquisa de campo teve início não somente devido ao interesse da pesquisadora em buscar outros meios que pudessem melhorar a aprendizagem de seus alunos em Álgebra, mas também pelo envolvimento do grupo de estudos (GCEEM) nessa busca. Foi compartilhando experiências que professora e pesquisadora propuseram ao grupo a elaboração das tarefas, que foram planejadas durante as reuniões do grupo, proporcionando a todas as professoras participantes a possibilidade de elaborar e/ou adaptar tarefas exploratório-investigativas. O desenvolvimento da pesquisa de campo apresentada pretende contribuir para a comunicação nas aulas de Matemática, identificando indícios dessas comunicações ao propor tarefas exploratório-investigativas e, assim, mostrar que, mesmo quando muda a metodologia e, portanto, a comunicação que ocorre na aula de Matemática, ainda existe dificuldade para que os alunos passem a pensar algebricamente (generalização) e a expressar o pensamento usando a linguagem algébrica.

Como foi explicado, o tema escolhido para essas tarefas foi a Álgebra, identificando também indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos que estão iniciando esse tema.

Neste capítulo serão apresentadas as opções metodológicas, justificando e explicando a escolha dos participantes. Também é explicada a escolha da metodologia de caráter qualitativo, em que foi realizado este estudo de uma realidade específica para responder à questão e alcançar os objetivos desta pesquisa.

4.1 Questão e objetivos da pesquisa

A presente pesquisa foi sendo construída tendo como objeto de estudo aulas exploratório-investigativas sobre conteúdo algébrico. Partindo do pressuposto de que a realização de atividades investigativas pode ser uma alternativa para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica do aluno e tendo como foco o movimento da sala de aula proporcionado por esse tipo de atividade e os indícios de formação do pensamento e da linguagem da Álgebra nesse movimento, a seguinte questão foi formulada:

Quais indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico são revelados por estudantes de 6ª série a partir da comunicação estabelecida em sala de aula?

Como principal objetivo, temos:

- ✓ Identificar indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos de alunos.

E como segundo objetivo:

- ✓ Identificar algumas potencialidades e limites da utilização de tarefas exploratório-investigativas no atual contexto educacional.

4.2 Opções metodológicas

Tendo em vista os objetivos traçados, optou-se por analisar a primeira tarefa, dada a sua riqueza nas comunicações processadas.

A escolha por desenvolver as tarefas em turmas de 6ª série justifica-se por ser nesta fase que se dá o ensino da álgebra simbólica, na escrita e na linguagem formal, como explicitado nos objetivos do ensino da Matemática para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 67). De acordo com esse documento, o ensino de Matemática deve visar o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da exploração de situações de aprendizagem que deveriam levar o aluno a:

> - reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema a favorecer as possíveis soluções;
> - traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar o significado das letras;
> - utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.

É importante destacar que a 6ª série é caracterizada por alunos com idade entre 11 e 12 anos que chegam com o pensamento puramente aritmético, com o raciocínio na contagem, pois esse foi fortemente trabalhado nas séries anteriores, focadas no sistema de numeração e nas operações. O início da 6ª série também é assim. No caso das turmas pesquisadas, eles haviam estudado até então o conjunto dos números inteiros e dos números racionais, com o foco aritmético e de forma linear, em que sempre encontravam uma resposta numérica particular, ou seja, em que não havia a necessidade de fórmulas. Com o raciocínio ainda na contagem, os alunos têm dificuldade de pensar a variação e, por conseqüência, torna-se difícil entender o uso da letra para representar a variação na Matemática. Tal dificuldade poderá ser observada na análise dos dados.

A professora parceira nesta investigação, como foi descrito anteriormente, é integrante de um grupo de estudos, GCEEM, vinculado a uma Diretoria de Ensino de uma cidade do interior de São Paulo, cujos trabalhos, na época da elaboração do projeto desta pesquisa, foram dirigidos às aulas de investigação matemática na sala de aula. Ressalta-se que as tarefas desenvolvidas durante a investigação foram construídas com a colaboração dos participantes do grupo referido. A professora parceira foi quem organizou o calendário para o desenvolvimento das tarefas com seus alunos, para melhor adequação ao planejamento da escola.

A pesquisa de campo foi realizada em uma escola particular da cidade de Americana, no interior do estado de São Paulo. É interessante destacar que, em uma escola desse tipo, iniciar uma nova abordagem não é considerado fácil. Para ser possível, é necessária também a aprovação da direção e da coordenação da escola, que possuem uma postura mais rígida a respeito do cumprimento do conteúdo programado.

O primeiro contato com a direção da escola foi feito pela professora parceira. Após a resposta positiva, pesquisadora e professora elaboraram uma carta de apresentação aos pais, em que justificavam não só a iniciativa de desenvolver tarefas exploratório-investigativas, mas também os objetivos da pesquisa. A carta, ainda, descrevia melhor as atividades investigativas e as fases que as envolvem, salientando que o desenvolvimento das tarefas não iria interferir ou atrasar o conteúdo programático da escola, fator decisivo e condição imposta pela direção e pela coordenação da escola para que a pesquisa pudesse ser realizada. A carta aos pais também continha o pedido para que assinassem a autorização para que a pesquisadora pudesse utilizar em seu projeto de mestrado na Universidade Federal de São Carlos, as imagens dos alunos — fotográficas ou gravadas em vídeo. O cronograma e a carta foram apresentados à coordenação no dia em que a pesquisadora foi à escola para se apresentar.

Apresentada à direção, a pesquisadora propôs que fosse realizado um contrato de pesquisa entre as partes envolvidas, em que ela se comprometia em manter sigilo do nome da escola, dos professores e dos alunos, evitando qualquer constrangimento para todos e, também, em divulgar aos professores, à coordenação e à direção da Escola os resultados obtidos. A divulgação seria feita pela entrega de um exemplar de sua dissertação para compor o acervo da Biblioteca da Escola.

Ao estudar a questão colocada nesta pesquisa no ambiente natural dos participantes, pode-se caracterizá-la como uma investigação qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1999), são estas as principais características da investigação qualitativa: (1) a fonte dos dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal para recolhimento dos dados; (2) os dados recolhidos são descritivos; (3) o investigador interessa-se mais pelos processos do que pelos resultados; (4) a análise dos dados tende a ser feita de uma forma indutiva; (5) é dada maior importância, pelo investigador, à compreensão do significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Embora possam não estar presentes todas as características citadas em um estudo, são elas que determinam em grande parte o tipo de investigação que será realizada.

Na pesquisa qualitativa as questões orientam-se para a compreensão da situação no seu acontecer, no seu processo de desenvolvimento. Para isso, o pesquisador vai a campo, observa, entra em contato com as pessoas envolvidas, recolhe os dados e o material produzido ou relacionado a elas e então é que surgem outras questões que levarão à análise dos dados.

O problema de pesquisa levou a um trabalho de caráter qualitativo, pois houve a necessidade de imersão da pesquisadora no contexto, além da perspectiva interpretativa para conduzir a pesquisa. Para a interpretação — feita a partir da realidade observada e de dados não constituídos de forma quantitativa —, foi necessária a descrição detalhada do que aconteceu. Isso exigiu que a pesquisadora observasse e registrasse (gravações, transcrições, diário de campo) para ter maior riqueza de detalhes para a análise das interações, o que vai ao encontro das características apontadas por Bogdan e Biklen (1999).

Outro aspecto importante é que a grande massa de dados – quantidade relativamente grande de informações – foi quebrada em partes menores. relacionadas entre si, para que a análise pudesse ser feita num processo de ordenação: os dados foram organizados em três partes para possibilitar sua interpretação e as conclusões a partir deles.

A pesquisadora assumiu um duplo papel em determinados momentos, pois foi, embora somente durante a aplicação das tarefas, também professora, junto com a professora parceira.

Os acontecimentos durante as tarefas foram registrados em áudio e no diário de campo da pesquisadora, tendo as apresentações recebido registro em foto e vídeo. A pesquisadora contou com uma filmadora e dois gravadores, porém o material registrado por estes, posicionados nos grupos, não pôde ser aproveitado devido à baixa qualidade do áudio, o que, segundo acredita a pesquisadora, foi determinado pela acústica do prédio. Dessa forma, os diálogos que puderam ser transcritos durante a realização da tarefa pelos grupos foram aproveitados das gravações em vídeo, assim como as transcrições das apresentações; estas, porém, contaram também com a ajuda de um gravador em alguns casos, uma vez que este estava posicionado mais próximo aos alunos que faziam as apresentações. A esses dados, somaram-se os registros no diário de campo da pesquisadora.

Para compor o material de análise, os registros escritos, ou seja, os relatórios dos grupos sobre cada tarefa foram fotocopiados. Também foi possível ter acesso a uma "carta" escrita pelos alunos, em que relataram, a pedido, a experiência vivida: deveriam contar para um "ET" o que são investigações matemáticas, do que gostaram, do que não gostaram e o que aprenderam. A carta foi solicitada após o desenvolvimento das três tarefas e possibilitou evidenciar também a dificuldade que os alunos sentiram em relação à linguagem: embora tivessem demonstrado gostar das atividades, classificaram-nas como "complicadas", ou seja, acharam difícil a linguagem usada.

Na primeira tarefa foram utilizadas 5 aulas de 50 minutos, totalizando um pouco mais de 4 horas para a realização, a apresentação e a sistematização da tarefa.

4.2.1 A professora parceira

Um dos instrumentos para a realização desta pesquisa foi a entrevista semi-estruturada realizada com a professora parceira, com quem também, durante o estudo de campo, aconteceram vários encontros para a preparação das tarefas e a reflexão sobre o desenvolvimento destas com os alunos. Esses momentos foram fundamentais para compreender a complexidade de sua prática docente.

A professora parceira, além de integrante do GCEEM, foi quem manifestou interesse em formar esse grupo, para encontrar professores que pudessem fazer parte de sua pesquisa de mestrado na época. A pesquisa teve relação com as investigações matemáticas, o que caracteriza essa professora como uma pessoa que já conhecia, havia estudado e aplicado tarefas exploratório-investigativas.

Na época em que a produção dos dados foi realizada — primeiro semestre de 2007 —, a professora ainda estava afastada de suas aulas da escola da rede estadual de ensino, para poder dedicar-se ao mestrado, concluído no mês junho. Contudo, continuava lecionando em uma escola particular em quatro turmas de 6ª série. Nesta escola a disciplina de Matemática era dividida em duas partes: quatro aulas de Álgebra e duas de Geometria; o ano letivo compunha-se de trimestres. A professora assumiu, então, 16 aulas de Álgebra (duas turmas no período da manhã e duas no período da tarde). As tarefas foram aplicadas em duas turmas de 6ª série (C e D) do período da tarde, escolhidas considerando o horário mais conveniente para a pesquisadora. Feito o planejamento da escola, ficou estabelecido que a pesquisa poderia ser realizada no segundo trimestre — início no mês de maio.

O fato de a professora parceira — identificada, neste texto, com o nome fictício de Lis — já ter experiência com tarefas exploratório-investigativas merece ser destacado neste trabalho e determinou que sua a trajetória profissional fosse aqui apresentada, com dados descritos a partir da entrevista realizada em julho de 2007.

A professora Lis, na época, estava com 35 anos. Começou a lecionar em 1992, tendo, então, 15 anos de experiência no magistério, iniciada ainda quando cursava a graduação. Sua formação foi sempre em escola pública e, ainda no ensino médio, não pensava em fazer um curso superior. Depois de receber incentivo, em especial de dois professores de Matemática, acabou prestando o vestibular para o curso de licenciatura em Matemática. Graduou-se na Unicamp e levou seis anos para terminar o curso.

Quando estava no último ano, em 1995, a Faculdade de Educação ofereceu um curso de especialização, chamado Ciência, Arte e Prática Pedagógica, que durou dois anos, ao final dos quais cinco dos professores de Matemática participantes do curso, que seguiram uma mesma linha de pesquisa para fazer a monografia, foram convidados pelos professores coordenadores da especialização para transformar as suas monografias num livro, publicado em 2001, com o título *Por trás da porta, que Matemática acontece?*.

A professora relatou ter sido esse o curso que a formou realmente como professora, pois na graduação havia visto muito pouco da prática de um professor. Abaixo está um trecho da entrevista em que ela descreve essa experiência.

> *[...]o processo que a gente viveu depois da especialização, foram dois anos que a gente se reunia, quase todo sábado, às vezes sábado sim, sábado não, à vezes num dia de semana que dava certo, a gente se reunia pra reescrever, ler e discutir os textos da monografias que a gente já tinha feito, pra poder transformar isso em livro. Esse tempo, assim, esses dois anos foi muito rico, porque foi um refletir sobre o que você já tinha feito, sobre o que você já tinha escrito, e agora o que significa aquilo que fiz? [...] até chegar o lançamento do livro e tal.. e, essa vivência, assim, principalmente esses dois anos depois da especialização, me fizeram perceber que não dava pra seguir a profissão só em sala de aula, a gente passa a sentir necessidade dessa troca de experiência, dessa reflexão compartilhada que não é igual a uma reflexão que você tem sozinho, na sua sala de aula, na escola, que às vezes é muito difícil você ter com quem conversar, com quem trocar idéia.*[Trecho da entrevista, 10/07/2007]

Após esse curso, a professora passou a buscar outros e, sempre que tinha oportunidade, cursava-os. Um dos cursos que surgiram foi *on-line*, oferecido pela Unesp (a distância), e outro foi promovido pela USP, além de vários outros, a maioria oferecidos pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Entre idas e vindas, reencontrava os professores da especialização e, como já pensava em algo para o mestrado, decidiu começar a participar do Grupo de Sábado[9] no início de 2003.

A professora continuou a participar das reuniões do Grupo de Sábado e, em 2004, teve muito contato com as investigações matemáticas. Nessa mesma época, Juliana Facanali Castro (CASTRO, 2004) terminava sua pesquisa de mestrado – primeira dissertação da FE/Unicamp que teve como foco as investigações matemáticas.

---

[9] O Grupo de Sábado (GdS) é um grupo de pesquisa e estudos em educação matemática que se reúne quinzenalmente, aos sábados, na FE/Unicamp, para refletir, investigar e escrever sobre a prática docente em matemática nas escolas. Foi criado em 1999 e é formado por professores de matemática e polivalentes das redes pública e particular da região de Campinas, por futuros professores, mestrandos e doutorandos da Faculdade de Educação da Unicamp e pelos Profs. Dr. Dario Fiorentini e Dra. Dione Lucchesi de Carvalho, ambos do Departamento de Ensino e Práticas Culturais (DEPRAC) da FE/Unicamp.

No final de 2004, um aluno da graduação de Matemática da Unicamp realizou uma pesquisa de iniciação científica com os seus alunos. Os resultados dessa pesquisa originaram um artigo; e Lis foi uma das autoras: “Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico” (FIORENTINI, FERNANDES e CRISTOVÃO, 2005). Depois disso, encantou-se pelas investigações e assim escreveu um projeto de pesquisa, envolvendo o projeto Letramento, para reforço escolar, da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, ambientado na sala de informática.

Embora a princípio o projeto não contemplasse as investigações, a professora relata que já estava encantada com elas. Ao participar da entrevista do processo seletivo para o mestrado, foi questionada sobre a possibilidade de trabalhar com as investigações e com letramento. Foi também questionada se seria possível trabalhar com o projeto Números em Ação[10] e, ao mesmo tempo, introduzir um pouco de investigações matemáticas. Sua tarefa seria investigar o efeito destas no trabalho com esses alunos.

Depois de aceitar a proposta e ingressar no mestrado, a professora Lis solicitou a Bolsa Mestrado, oferecida pelo Estado de São Paulo, e fez a opção por trabalhar na Diretoria de Ensino[11], por achar que teria mais tempo para observar e analisar o que acontecia nas salas de aula do Projeto Letramento. Lis relata que esses planos foram modificados:

> *No fim, eu busquei montar um grupo de estudos pra me aproximar das professoras, porque, como eu não tinha mais as salas de aula do letramento, que eu era professora do letramento, por isso a motivação de fazer a pesquisa. Então quando eu fui pra Diretoria eu quis montar esse grupo [GCEEM], conversei com a dirigente e tal, pra poder me aproximar das professoras de uma forma mais natural, não ter que chegar numa escola e falar assim, aí, “posso fazer uma pesquisa com seus professores?” e depois o professor ser obrigado a abrir a porta da sala de aula. A intenção era captar professores que dessem aula no letramento, tanto que as primeiras orientações que eu participei tentando convidar os professores foram as do letramento, mas eles não apareceram, não freqüentaram esse grupo; nenhum deles se inscreveu no grupo. E aí que eu conheci as professoras da Recuperação de Ciclo e aí o projeto acabou virando para Recuperação de Ciclo. [Trecho da entrevista, 10/07/2007]*

Após esse relato, a professora discorreu um pouco sobre as investigações matemáticas: inicialmente afirmou que não aconselharia uma pessoa, sozinha, sem ter com quem refletir e trocar idéias, a começar a aplicar em sua sala de aula as investigações matemáticas, porque, caso o fizesse, após uma ou duas vezes acharia uma metodologia ruim, que não funciona. Lis destacou que muitas vezes as diferentes metodologias que o professor utiliza fracassam. Entretanto, ela apresentou uma importante reflexão sobre o motivo que pode contribuir para esse fracasso: *O que a gente tem percebido é que não é a metodologia em si, não são as metodologias que não*

---

[10] Outro projeto da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

[11] Essa opção permite ao professor afastar-se da sala de aula e cumprir parte das horas trabalhando na Diretoria de Ensino.

funcionam, o que falta é um apoio mesmo para o professor, é ter com quem trocar idéias e tal. Isso pode tê-la influenciado para a criação do grupo de estudo. Lis defende que o grupo é a base para o professor mudar sua tática e de forma consciente, refletindo sobre as coisas que não dão certo. Citou também o privilégio que tem agora por participar dos dois grupos.

A professora resume as investigações como uma metodologia de ensino interessante, que muda a dinâmica da sala de aula, muda a relação de poder — aquela em que o professor parece ser detentor de todo o saber — mudança complicada e que precisa do apoio citado para acontecer.

A professora Lis contou ainda que sua primeira experiência com as investigações foi acompanhada e desenvolvida junto com o aluno de graduação que realizou o trabalho de iniciação científica. Lis participou do processo de elaboração da tarefa, mas foi o graduando quem trouxe a idéia para o Grupo de Sábado (GdS), tendo ela participado de dois momentos: a reelaboração da tarefa, junto com o grupo GdS, e depois a troca de idéias com o graduando. As tarefas foram aplicadas em duas turmas e foi possível perceber que, durante as investigações, alunos que "não faziam nada" estavam produzindo, o que a fez mudar seu olhar para os alunos, e também passar a valorizar as investigações.

> *Eu tava encantada assim, enquanto professora, enquanto... é ... conhecendo ali, porque eu fiz uma oficina com a Juliana e falei "nossa, que legal isso, né? o aluno poder descobrir, poder... é ... investigar realmente, sem ficar recebendo só do professor. Mas, sentir assim na pele, foi junto com ele [graduando] e a partir daí é que eu comecei a trabalhar.*[Trecho da entrevista, 10/07/2007]

Foi a partir de então que a professora Lis passou a desenvolver, sozinha, com suas turmas, outras tarefas com caráter de investigação matemática. Eram tarefas já prontas, que ia adaptando o trabalho com seus alunos. Ela relatou que foi depois do GCEEM e do mestrado que sentiu, mesmo, como era preparar uma tarefa desde o início, o que diz não ser fácil.

Refletindo sobre o momento da realização desta pesquisa, em que estava participando como professora parceira da escolha, do preparo e da adaptação das tarefas, comparando-o com o momento em que realizou a escolha das tarefas para a sua pesquisa, tendo o GCEEM como contexto, Lis destacou que percebeu mudanças no grupo, agora mais participativo. Segundo ela, esse fato decorre das diferenças de dinâmicas estabelecidas no grupo: na época do seu mestrado, era ela que trazia tudo pronto (tarefas) e também o conceito de investigação ainda era novo para os integrantes do grupo. Comparando o grupos GCEEM e o GdS, ela ressalta que ambos têm um processo parecido, mas há um processo de amadurecimento também, pois o trabalho no Grupo de Sábado parecia fluir mais, talvez por ter mais pessoas e, ainda, pessoas que desenvolviam algum tipo de pesquisa e que já levavam a idéia para o grupo. E descreve o seguinte:

> *Então não é que nem a gente fez aqui no GCEEM, de falar assim "gente, vamos sentar e começar uma tarefa", isso não acontece no grupo de sábado, a gente não começa do zero. Então dá essa impressão de que lá produz, que flui mais, por quê? Porque ela já vem pronta. Então o quebrar a cabeça mesmo, o idealizar, vem de uma pessoa, não tem jeito, né? O grupo ali, o que é que ele faz? Ele amplia o olhar dessa pessoa, ele faz ela perceber onde ela pode melhorar e tal, para criar essa tarefa e torná-la mais investigativa. Mas a concepção inicial ela nasce de uma cabeça, ou no máximo duas ali que já estão pensando num assunto, pensando num tema. Mas eu acho que é muito rico esse processo. Eu penso que ele, assim, faz com que os envolvidos mudem também a sua concepção do que é participar, ali dentro do grupo, eu acho que muda bastante.* [Trecho da entrevista, 10/07/2007]

4.2.2 As tarefas desenvolvidas

Os trabalhos foram desenvolvidos junto com a professora parceira em duas classes de 6ª série em um colégio particular em Americana, interior do Estado de São Paulo, no total três atividades (Anexos A, B e C). Nesta investigação, apenas a tarefa A LANCHONETE DO ALAN XONETE (Anexo A) foi descrita e analisada, como consta no capítulo 5.

A elaboração das tarefas deu-se em conjunto com as professoras que participam do grupo GCEEM. Primeiramente, a pesquisadora apresentou ao grupo seu projeto e sua intenção de acompanhar turmas que estivessem iniciando o conteúdo algébrico. Pouco depois as professoras do grupo tiveram suas aulas atribuídas e a parceria pôde ser estabelecida. A professora parceira foi quem assumiu turmas de sexta série, que também tinham horário compatível com a pesquisadora.

Antes de iniciar a elaboração das tarefas no grupo, a pesquisadora sugeriu um texto para ser discutido em um dos encontros, para que todas tivessem idéia do que seria considerado argumentação na aula de Matemática (BOAVIDA, 2005a), pois esse era o foco inicial do projeto da pesquisa. Para os encontros em que seriam determinadas as tarefas, a professora parceira e a pesquisadora solicitaram a todas as professoras do grupo que trouxessem materiais (livros, apostilas, artigos...) para que pudessem ter idéias. Essas contribuições foram compartilhadas no grupo, buscando que as tarefas e suas questões pudessem promover comunicações, troca de idéias e argumentações nas aulas, e, ainda, que os alunos pudessem escrever uma possível regra (fórmula), usando a linguagem formal da álgebra. Fica evidente, portanto, que as tarefas não foram escolhidas aleatoriamente, e sim planejadas, pensando no seu melhor aproveitamento.

Para a primeira tarefa foram feitas adaptações de uma atividade — trazida para o grupo pela professora parceira — originalmente com o mesmo nome; a segunda teve inspiração em uma atividade de observação de regularidades, mas foi o grupo quem a elaborou; e a terceira foi aplicada como a original (FIORENTINI, FERNANDES E CRISTOVÃO, 2005), salvo algumas alterações que facilitassem a interpretação das questões para os alunos de 6ª série.

Durante as atividades a professora pesquisadora atuou como observadora, responsável pelos registros dos acontecimentos em sala, e também como orientadora apenas no desenvolvimento da atividade, auxiliando a professora da turma quando muitos alunos solicitavam ajuda ao mesmo tempo. Assim, a professora parceira foi a responsável pelas orientações iniciais e pelo fechamento das atividades durante e após as apresentações finais.

Nos encontros do GCEEM que aconteceram durante a realização da pesquisa, professora e pesquisadora compartilharam os resultados obtidos, levando para o grupo suas observações e as produções dos alunos, e puderam discutir a respeito. No entanto, a análise trazida neste estudo não teve a participação direta do grupo.

4.3 Análise dos dados

Para realizar a análise e buscar os indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico revelados por estudantes de 6ª série a partir da comunicação estabelecida em sala de aula, a abordagem feita buscou mostrar a transformação e a articulação entre o raciocínio da contagem, do pensamento algébrico e da linguagem.

O fator determinante para isso foi a identificação dos indícios da álgebra simbólica – questão variável-letra –, mostrando a dificuldade no processo de construção do pensamento e da linguagem algébrica. Isso foi motivado por terem as tarefas como ponto de partida a variável-letra (n): apesar de propor uma dinâmica e uma comunicação diferentes, utilizou a linguagem simbólica e formal sem passar pelas outras linguagens e sem ter os conceitos definidos, "dando um salto no processo de aprendizagem" (SCARLASSARI, 2007, p. 42), pois, mesmo mudando o tipo de tarefa para abordar o tema, o ponto de partida continuou o mesmo. Parte dos conflitos vividos foram foi justificada por isto: a falta de conceitos para o processo de construção do pensamento e da linguagem algébrica.

Para os alunos das turmas pesquisadas, o uso da letra para representar um número desconhecido não era algo totalmente novo. Como descrito anteriormente, as aulas de Matemática da escola em que as tarefas foram realizadas eram divididas entre dois professores, um de Álgebra e outro de Geometria. No período em que a tarefa 1 foi desenvolvida, os alunos já estavam passando por situações — descritas pelos próprios alunos, mais tarde — que envolviam letras, na aula de Geometria. Eles estavam estudando ângulos complementares e suplementares, e havia situações em que tinham que descobrir, por exemplo, o ângulo que, junto com outro ângulo conhecido, os fazia suplementares. O ângulo a ser descoberto era chamado de x. A professora de Geometria já montava esse tipo de conta na forma de uma equação e, como foi percebido pela pesquisadora depois da descrição dos alunos, ela indicava como deveriam escrever a resolução na forma de equação, uma vez que eles entendiam o porquê de fazer a conta, como no exemplo dado, de subtração entre o ângulo de 180 graus e o ângulo conhecido. Professora parceira e pesquisadora consideraram que isso possa ter colaborado para as dificuldades encontradas pelos alunos, além de prejudicar a explicação de outro método para resolver equação, diferente daquele usado pela professora de Geometria.

Dentro desse movimento, no que envolvia a situação da pesquisa, foi possível perceber um grande limite nesse tipo de abordagem: a negociação entre as professoras e também com a escola. A escola adotava um livro didático que trazia Álgebra e Geometria juntas e pedia que ele fosse usado. Como o ritmo das duas disciplinas não era o mesmo, a professora de Geometria acabava avançando mais e por isso já utilizava conceitos que deveriam ter sido vistos em Álgebra antes. A professora Lis viveu o dilema de não poder estender as tarefas, por ter que cumprir o cronograma curricular que a escola determinava.

Para construir a análise dos objetivos traçados, primeiramente buscou-se identificar e analisar as comunicações dos alunos e da professora, tanto a oral como a escrita, ocorridas durante a realização da tarefa. Durante essa etapa foi possível identificar e analisar alguns processos (ou procedimentos) matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem a tarefa algébrica.

Durante a análise foi constatada a existência, em alguns momentos da tarefa, entre outros indícios, do que Alro e Skovsmose (2006) chamam de padrões de comunicação, os quais favorecem o trabalho dos alunos. Os alunos ficam mais interessados na perspectiva do outro, e isso foi revelado nas perguntas que os alunos faziam. “Essas perguntas conduzem a explicações, questões hipotéticas, delineamento de idéias matemáticas e confirmação.” (p. 89). São exemplos de perguntas feitas pelos alunos “mas como você fez?”, “como escreve?”, “e agora?”, “como chegou?”, “por quê?”.

Ao identificar e analisar as comunicações que ocorreram, percebeu-se que os dados evidenciavam, dentro do movimento da atividade investigativa, os indícios do desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico. Para que a análise, então, pudesse mostrar tais indícios de maneira mais clara, optou-se por agrupar alguns dados em três blocos, que foram chamados de *Blocos de análise*. Os blocos foram construídos, como foi definido anteriormente, em uma abordagem qualitativa. Durante a sua construção optou-se por fazê-la de forma descritiva e analítica.

A intenção, ao montar os blocos, além dos objetivos traçados, foi agrupar o movimento de sala de aula (enquanto aconteceu), percebendo quão difícil é ensinar a pensar algebricamente e mostrando os conflitos que são gerados nesse processo e também nas aulas investigativas, o que foi revelado pelos dados durante a análise.

Dentro dos blocos é possível observar as diferentes comunicações que ocorreram: os diálogos[12] dos alunos enquanto desenvolviam a tarefa e quando apresentavam para a turma; o diálogo entre os alunos e a professora, também durante a apresentação; e a escrita, tanto dos relatórios quanto das cartas.

Os blocos de análise foram constituídos da seguinte forma:

(1) **O movimento da aula investigativa e os indícios do pensamento e da linguagem algébricos,** em que o foco foi mostrar os indícios da formação do pensamento e também da linguagem algébrica no movimento da aula. A linguagem não chegou a ser desenvolvida de maneira formal, pois os alunos ainda tinham o raciocínio com o foco aritmético. Os dados puderam mostrar que os alunos começaram a perceber a necessidade da generalização, primeiro passo para também desenvolver a linguagem algébrica. A falta de linguagem e de conceitos, como os de movimento, de variável e de campo de variação, dificultou tal desenvolvimento.

(2) **Os movimentos da sala de aula que geraram conflitos e dificuldades, cujo** foco foi mostrar os conflitos vividos pela professora durante a sistematização da tarefa, causados pela diferença do pensamento e da linguagem usados por ela e aqueles usados pelos alunos. Dentro desses conflitos foi possível observar as dificuldades em relação à álgebra, geradas nesse movimento e apresentadas pelos alunos.

(3) **O conflito entre o pensamento e a linguagem:** a intenção foi mostrar o conflito ocorrido devido aos diferentes caminhos utilizados pelos alunos para tentar chegar à álgebra simbólica, evidenciando, ainda, o conflito — sentido pelos alunos de 6ª série nessa fase do ensino de álgebra — entre o pensamento e a linguagem.

Apesar de alguns dados terem sido colocados em diferentes blocos, ainda foi possível observar, no âmbito geral, que os indícios do desenvolvimento e da linguagem algébricos foram recorrentes.

Ao final do próximo capítulo apresentaremos também uma pequena análise da comunicação da professora com ela mesma, na forma de um relato escrito pela professora parceira, depois que uma situação vivida em aula a fez refletir sobre o processo de resolução da tarefa utilizado pelos alunos.

Neste capítulo apresentamos as escolhas feitas a respeito da metodologia desta pesquisa. No próximo, descreveremos o início do "Projeto Investigações Matemáticas" — nome dado pela

---

[12] Na presente pesquisa, chamaremos de "turnos" as falas transcritas. Os turnos serão referidos seguindo a numeração de cada caixa de diálogo.

professora parceira para iniciar as atividades exploratório-investigativas com seus alunos; conheceremos a tarefa “A LANCHONETE DO ALAN XONETE”; e apresentaremos a análise dos dados que, como descrito anteriormente, foi estruturada em blocos para que pudéssemos identificar os indícios da linguagem e do pensamento algébrico.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Os dados foram analisados tomando como referência estudos relacionados às investigações matemáticas, à comunicação que ocorre na aula de Matemática com atividades desse tipo e ao ensino de álgebra, procurando indícios do desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes nas diferentes comunicações ocorridas. Como exemplo dessas comunicações, será possível observar: aquela ocorrida entre os alunos em diferentes momentos da tarefa; entre a professora e os alunos; a comunicação escrita pelos alunos no relatório da tarefa e na carta sobre a experiência com as atividades investigativas; e a da professora com ela mesma, por meio da escrita de um relato com suas reflexões.

Os diálogos registrados que constam na análise são, na grande maioria, provenientes das discussões geradas na finalização da tarefa 1, durante as apresentações dos alunos. Pudemos observar também esses indícios por meio do registro escrito pelos alunos em grupos e dos diálogos com a professora.

A análise foi estruturada em blocos que permitiram a identificação dos diferentes indícios. Alguns momentos vividos durante a tarefa foram agrupados, levando em consideração aspectos semelhantes em diferentes fases da atividade.

No primeiro bloco de análise tivemos a intenção de destacar o movimento da aula investigativa e os indícios do pensamento algébrico evidenciados nesse movimento. No segundo bloco a intenção foi mostrar as dificuldades também ali vividas, tanto pelos alunos em sua aprendizagem como pela professora, para estabelecer uma comunicação que promova a negociação de significados e a compreensão da Matemática. No terceiro bloco o objetivo foi evidenciar o conflito vivido pelos alunos entre o pensamento e a linguagem que utilizam.

Como justificado pelo referencial do presente estudo, a comunicação que ocorre na aula de Matemática e que depende da interação entre os alunos e o professor é importante para uma efetiva aprendizagem. Como salientado por Ponte et al. (1997), “ela é imprescindível para que os alunos possam exprimir as suas idéias e confrontá-las com as dos seus colegas. A comunicação oral é determinante no que os alunos aprendem acerca da disciplina, quer sobre os conteúdos, quer sobre a própria natureza da Matemática.” (p. 84).

Ponte et al. (1997) lembram que a comunicação é normalmente analisada por meio do discurso dos diversos intervenientes, que em uma sala de aula são o professor e os alunos. O discurso pode ser de forma oral, escrito ou gestual e está presente em todas as atividades de ensino-aprendizagem, seja de uma forma ou de outra.

Na comunicação ocorrida durante a realização das tarefas exploratório-investigativas, foi possível observar em alguns momentos o que é comentado por Alro e Skovsmose (2006). Segundo os autores, alguns padrões de comunicação favorecem o trabalho dos alunos, pois estes ficam mais interessados na perspectiva do outro, o que foi visto nas perguntas que os alunos faziam. “Essas perguntas conduzem a explicações, questões hipotéticas, delineamento de idéias matemáticas e confirmação.” (p. 89).

No entanto, apenas a troca de idéias não garante a apropriação dos conceitos envolvidos. Entender a linguagem e a escrita da álgebra simbólica torna-se ainda difícil para alunos que pensam aritmeticamente. Essa dificuldade é natural, pois estes ainda não sentem que a aritmética seja insuficiente para resolver os problemas propostos pela escola. Os alunos ainda não entendem o princípio fundamental da álgebra – a variação. Para os alunos que estão na fase inicial do desenvolvimento do pensamento algébrico, a linguagem formal da álgebra ainda não tem sentido.

Um dos focos deste trabalho é o movimento da sala de aula proporcionado por atividades investigativas; nesse movimento, a professora exerce um papel importante, pois é ela quem proporciona a nova dinâmica da aula para ensinar álgebra. Pudemos conhecer no capítulo anterior um pouco mais sobre a professora parceira, a fim de compreendermos a comunicação que ela estabelece com os alunos e com ela mesma.

Em seguida será possível conhecer como foi a introdução do chamado “Projeto Investigações matemáticas” nas turmas de 6ª série e, então, conhecer a primeira tarefa.

5.1 Iniciando o projeto “Investigações matemáticas”

As atividades foram iniciadas no dia 25 de abril de 2007 (duas aulas da 6ªC e duas aulas na 6ªD) e, para introduzi-las, a professora explicou aos alunos que estariam iniciando um novo projeto, chamado “Investigações matemáticas”, e que, durante esse projeto, outra professora estaria participando das aulas como pesquisadora. A professora adotou o nome “Projeto Investigações matemáticas”, pois a escola desenvolve vários projetos ao longo do ano letivo, ou seja, os alunos já estavam acostumados com essa dinâmica. Explicou que seriam no total três atividades, programadas no conteúdo previsto para ser trabalhado durante o trimestre, e que teriam um diferencial, pois estariam sendo gravadas e filmadas, fato que os alunos não estranharam e com o qual também não se incomodaram durante o desenvolvimento das atividades. A pesquisadora também teve a oportunidade de apresentar-se e explicar sua intenção de acompanhar e registrar os momentos do projeto.

A professora, então, explicou a respeito das investigações, que demandariam uma nova dinâmica da aula, em que, ao invés de esperarem a explicação do professor, eles deveriam agir como investigadores, descobrir as coisas, criar os próprios caminhos para representar o que estariam pensando, ou seja, os alunos adotariam uma postura diferente da de costume nas aulas de Matemática.

Esclareceu também que todas as tarefas possuíam fases: exploração e desenvolvimento da tarefa; elaboração do relatório com os resultados a que conseguiriam chegar; e apresentação.

Para a primeira tarefa, que teve início naquele mesmo dia, deu-se a divisão em grupos. Lis explicou que cada grupo deveria definir de início quais seriam os dois redatores — embora todos devessem efetuar os registros no caderno — e os dois relatores, que iriam explicar para a classe, numa apresentação, o que o grupo produziria, ressaltando que deveriam ter cuidado na escolha, em razão da grande responsabilidade da apresentação; que teriam dois dias para desenvolvê-la: duas aulas daquele mesmo dia e mais duas aulas na próxima semana, perfazendo, então, quatro aulas ao todo.

A professora ressaltou que, se o trabalho não fosse terminado em sala, deveria ser terminado em casa; por exemplo, passar a limpo o relatório ou preparar o cartaz da apresentação. Depois esclareceu sobre como os alunos seriam avaliados no trimestre, em que uma das notas seria atribuída pela participação no Projeto Investigações matemáticas. As notas das atividades seriam divididas entre relatório e apresentação, e eles teriam uma nota final do projeto pela média das três atividades.

A primeira turma em que o projeto foi apresentado foi a 6ªD. A professora orientou que formariam 8 grupos, pois a classe contava com 31 alunos nesse dia. Já na 6ªC havia um total de 27 alunos, e deveriam formar 7 grupos. Em ambas as salas um dos grupos ficaria com 3 alunos. Após se arranjarem em grupo, a folha da atividade foi distribuída. Na 6ªD apenas um aluno se recusou a sentar em grupo, e assim, nessa turma, dois grupos ficaram com 3 alunos.

5.1.1 Tarefa 1: “A LANCHONETE DO ALAN XONETE”

A primeira atividade foi adaptada com a intenção de que os alunos tivessem o primeiro contato com a nova dinâmica de aula, e pudessem explorar, levantar conjecturas e testá-las. Essa atividade pode parecer que não tem um caráter aberto, pois todos deveriam chegar a uma possível regra. No entanto, além de proporcionar aos alunos o contato com tarefas exploratório-investigativas, como indicado por Goldenberg (1999), para que os alunos vivenciem a nova postura, ela pode ser considerada aberta, uma vez que a “regra” encontrada pelos grupos não é única, pois pode ser pensada de maneiras diferentes, ou seja, os alunos podem usar diferentes estratégias e escritas.

Essa tarefa proporcionou também o contato com a letra nas aulas de álgebra, apesar de os alunos já terem esse contato nas aulas de Geometria, como explicado anteriormente, e a oportunidade de introduzir pela primeira vez os conceitos de incógnita, variável e equação, e possíveis métodos para a resolução de uma equação do primeiro grau.

Os alunos receberam uma folha contendo o seguinte:

Instruções:

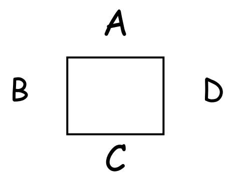
Os grupos serão constituídos por quatro pessoas, de tal forma que sejam divididas as obrigações de cada um: - Dois Redatores: responsáveis pela redação final do registro a ser entregue.

- Dois Relatores: serão dois membros do grupo, responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe. Apesar da divisão acima, todos deverão participar das etapas de produção do estudo.

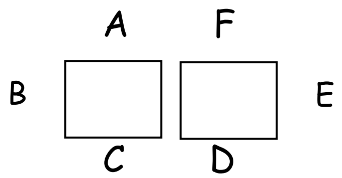
A LANCHONETE DO ALAN XONETE

Obs.: Deixe por escrito o raciocínio de cada questão de forma clara.

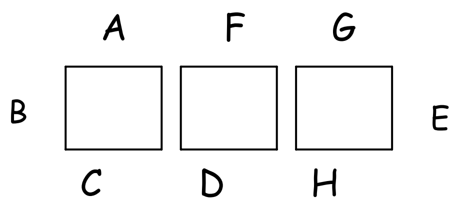
Sexta feira passada, após a aula, quatro amigos, Aderbal, Belinda, Crisóstomo e Dráusio, foram comer umas pizzas e tomar um guaraná na lanchonete do Alan Xonete. Lá chegando, o garçom Edgar Som já havia separado uma mesa para os quatro amigos se sentarem:



A conversa ia animada quando chegaram Eliziário e Flausino. Edgar apressou-se e ajeitou mais uma mesa ao lado da primeira, ficando assim a disposição:



Era dia de reunião da turma para descansar e passar bons momentos brincando e conversando e logo chegaram Griselda e Hortênsia. Nosso amigo Edgar Som correu a colocar uma nova mesa ao lado das duas anteriores e avisou ao Falco Zinheiro, o cozinheiro, para preparar mais duas pizzas. Veja a nova disposição das mesas:



a) A turma esperava mais companheiros, logo chegaram Izilda e Jocasta e mais uma mesa foi colocada. Faça o desenho representando a nova quantidade de mesas e seus ocupantes, sempre respeitando a mesma disposição das pessoas à sua volta.

b) Desenhe a representação das mesas quando chegaram Kreiton e Lisaldo.

c) Se forem colocadas 6, 7, 8, 9... mesas, quantas pessoas podem ser acomodadas, usando-se a mesma disposição?

d) E se forem colocadas 100 mesas?

e) E se forem colocadas n mesas? Teste a regra que você inventou para 15 mesas e 18 mesas.

f) Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 30 pessoas? E para acomodar 50 pessoas?

g) Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?

Os alunos começaram a ler e iniciaram a atividade com pouca solicitação de intervenção da professora para tirar dúvidas. Alguns manifestaram dificuldade em explicar os procedimentos que estavam utilizando e a professora Lis ressaltou que esse era um dos propósitos da atividade e os estimulou a explicar o que estavam fazendo, quer por meio de um desenho, por escrito ou por um algoritmo. Professora e pesquisadora tiraram as dúvidas dos grupos, incentivando os que estavam ainda dispersos.

5.1.2 Bloco de análise 1: O movimento da aula investigativa e os indícios do pensamento e da linguagem algébricos

Nesse primeiro bloco tem-se como foco o movimento da aula proporcionado pelas investigações, permitindo o aparecimento dos indícios da formação do pensamento e da linguagem algébricos. Nesse movimento, em geral é possível observar os alunos construindo uma linguagem matemática, ainda que não cheguem à linguagem algébrica formal, uma vez que estão no processo de resolução da tarefa por tentativa, com o raciocínio na contagem.

Os dados evidenciaram alguns padrões de comunicação que podem favorecer o trabalho dos alunos: os alunos interessam-se pela perspectiva um do outro, fazem perguntas investigativas; tais perguntas conduzem a explicações, a questões hipotéticas, ao delineamento de idéias matemáticas e à confirmação; os alunos fazem muitas perguntas para confirmações recíprocas; complementam meias-falas um do outro e demonstram respeito mútuo (ALRO E SKOVSMOSE, 2006).

Esses padrões de comunicação puderam ser observados na transcrição das falas das alunas de um dos grupos, formado por Pa, Isa, Re e Mari, que aconteceram durante o desenvolvimento da tarefa 1. Na resolução da questão **(f)** **(***Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 30 pessoas? E para acomodar 50 pessoas?*) ocorreram esses padrões em todos os turnos do quadro 1.

1Pa: *Olha, as pessoas vão duas em cada mesa mais duas na ponta... faz o desenho pra você ver...*
2Isa: *12 e 12...*
3Pa: *Vai dar 24.*
4Mari: *Não é 12 é 14.*
5Pa: *Mas você falou 12.*
...
6Pa: *'Peraí', olha...* [e faz o desenho das mesas]

[Enquanto isso Isa faz os cálculos]
[7]Isa: *Bom, 12 vezes 2 dá 24.. 24 mais 2...*
[8]Mari: *Gente, é 14!*
[9]Isa: *Então vai dar certo, Mari.*
[10][Pa está calculando e Isa avisa] Isa: *está certo! O da Mari está certo.*
[11]Pa: *É, vai dar 14* [mesas].
[12]Isa: *É, então vai dar 14.. mais 14.. mais dois.. 30. Agora nós já 'sabe'. E agora para acomodar 50 pessoas?*
[Depois de discutirem, o que não foi possível ouvir na gravação]
[13]Mari : *Vai dar 24.. é...porque 24 com 24 mais 2... é.. é 24.*
[14]Isa: *É, está certo.*

Quadro 1

A discussão que o grupo fez a respeito da questão **(g)** (*Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?*) mostra a interação social na construção do conhecimento e o valor da linguagem para a aprendizagem (Quadro 2). Nesse quadro observamos o grupo fazendo cálculo mental falado. As alunas usam não apenas o conhecimento da Matemática que aprenderam na escola, mas também o que aprenderam fora dela.

As alunas estão se comunicando matematicamente, interagindo, trocando idéias, influenciando e argumentando para convencer o outro, o que mostra a comunicação como componente intrínseca do fazer Matemática, como defendido no estudo de Boavida (2005b). E os alunos continuaram:

[1]Isa: *50 vezes 2 é 100, então é 48.*
[2]Re [questiona]: *Mas tem dois que sobra, não é?*
[3]Isa: *Então vai dar 48, porque 48 vezes 2, do 50 mais os dois que vai sobrar vai dar 100.*
[4][Isa começa a fazer o algoritmo, mas apaga, parecendo perdida. Olha para Re, que mostra seu cálculo.]
[5]Isa [olha e diz]: *Não, assim vai passar, a gente quer 100 pessoas, entendeu?*
[6][Então Isa testa também os cálculos de Re e percebe que vão passar 4 e diz que vai ter que ser 50.]
[7]Re: *Então faz 100 dividido por dois.*
[Elas fazem os cálculos.]
[8]Pa: *Vai passar*.
[9]Mari: *É 49.*
[10]Isa: *Mas como você fez?*
[11]Mari: *Olha, se for 50, 50 mais 50 vai dar 100, mas ainda tem duas pessoas.*
[12]Isa: *Então é 48!*
[13]Mari: *Não, é 49.*
[14]Isa: *Tem que fazer a conta.*
[15]Mari: *Eu pensei em 49 porque tem só duas pessoas na ponta.*
[16]Isa: *é 48, 49 vai dar...*
[17]Mari: *é 49 porque olha... 49 vezes 2 vai dar 98, mais uma de cada ponta é 100.*
[18]Pa: *É, vai dar certinho.*
[19]Isa [faz os cálculos com 48 e diz]: *Mas eu não entendi ainda.*
[20]Mari: *Não entendeu?*

[21]Isa: *Não entendi essa.*
[22]Mari: *Olha só, 50 mais 50 vai dar 100, não vai? Só que ainda vão ter mais duas pessoas. Então 49 vezes 2 mais as duas...*
[23]Isa [interrompe]: *Não entendi ainda.*
[Mari começa de novo, mas Pa toma a vez]
[24]Pa: *2 vezes 50 dá 100, então você diminui 1, 2 vezes 49... diminui 1 do 50 deu 49... aí você coloca 2 vezes 49 aí vai dar... vai dar 98. Você tira os dois da ponta aí depois você coloca, mais 2 que vai dar o resultado certinho, vai dar 100 exato.*
[25]Isa: *É, então tenho que colocar aqui* [apontando para sua folha; depois começa a ver como as colegas escreveram para poder registrar também] *Então na f) como escreve?*
[Mari vai falando e Isa escrevendo o algoritmo. Ao final Isa exclama]
[26]Isa: *Acabamos! Agora vou procurar entender esse negócio.*

Quadro 2

Provavelmente a aluna Isa relacionou o número de pessoas citado no enunciado da questão a partir da idéia de "dobro", como pode ser observado no turno (fala) 1.

Ainda no quadro 2, fica evidente que as alunas estão no foco aritmético e não chegam ao foco algébrico, pois, apesar de observar o movimento regular, não chegam a uma fórmula. Elas chegam por tentativas ao resultado esperado. Entendemos que, mesmo admitindo um "método" para isso (pegar a metade e diminuir), o que pode ser o início de uma generalização, as alunas percebem a regularidade, ou seja, elas começam a pensar algebricamente — evidenciam esse raciocínio — no movimento possibilitado pela tarefa.

Esse fato observado diferencia-se dos encontrados na pesquisa de Ponte (2005) a respeito do ensino da álgebra. Os dados da presente pesquisa evidenciaram que pode não bastar apenas trabalhar com as regularidades: é preciso também entender os conceitos envolvidos. A aluna Isa não entende a tentativa de generalização das colegas, ou seja, a passagem do movimento regular para o que podemos chamar de "método" ou procedimento que levaria à construção da linguagem algébrica.

Na maioria dos turnos relacionados à fala de Isa, pode-se perceber o interesse dela em compreender o que foi feito, principalmente no turno 26, quando ela, após acompanhar o procedimento realizado no grupo, revela que *"agora vou procurar entender esse negócio"*, indicando que não basta apresentar a solução encontrada se não houver compreensão. O interesse também se deu pelo fato de ela ter sido escolhida pelo grupo como a responsável para apresentar para a classe toda os procedimentos utilizados. Toda a preocupação verificada indica seu comprometimento com a tarefa.

A comunicação entre as alunas do grupo revela não apenas o comprometimento da aluna Isa, mas o envolvimento das demais componentes do grupo em auxiliá-la na compreensão da tarefa. Tal envolvimento pôde ser observado em outros grupos também, o que mostra que esse tipo de atividade realmente promove o envolvimento dos alunos com sua aprendizagem nas aulas de Matemática, como destacado no trabalho de Castro (2004, p. 34): "Aulas investigativas supõem o envolvimento dos alunos com tarefas investigativas que permitam a eles realizar atividade matemática, ou seja, com a realização de investigações matemáticas." E ainda, para Abrantes et al. (1999), citado por Castro (2004, p. 35):

> Favorecem o envolvimento do aluno com o trabalho e conseqüentemente facilitam uma aprendizagem significativa; fornecem múltiplos pontos de entrada para alunos de diferentes níveis de competências matemáticas e embora lidando com aspectos complexos do pensamento, reforçam as aprendizagens mais elementares (p. 1).

Embora o grupo fosse formado por quatro alunas, após encerrarem a resolução das questões, subdividiram-se em 2 duplas: a aluna Re foi repassando as questões com a aluna Isa, enquanto as alunas Mari e Pa também fizeram a releitura das questões e das respostas a que haviam chegado, conferindo se estavam mesmo corretas. Não foi possível identificar na gravação o que falaram durante essa fase. Em seguida, as duplas voltam a interagir quando a aluna Isa participou que ainda estava com dificuldade em acompanhar o raciocínio das colegas nas questões (f) e (g). A aluna Pa foi quem se prontificou a explicar para ela, como pode ser observado no quadro 3:

[1]Isa: *Mas porque para 30 é 14? Se 2 vezes 15 é que é 30, quero saber por quê!* [2]Pa: *Se você pegar 2 vezes 15 vai dar 30, mais as duas da ponta vai dar 32 e eu quero saber o resultado que dê 30. Então você diminui 1. Então, olha, 14 mais 14 vai dar 28, mais os 2 vai dar 30, é por isso. Entendeu? Você pega a metade do número primeiro, testa e vê que a metade não vai dar e então você tira 1, aí você testa, entendeu?* [Isa começa a pensar nos cálculos, percebendo que 15 mais 15 vai dar 30] [3]Isa: *Aí com mais dois vai dar 32. Então o que você vai fazer?* [4]Isa: *É, eu sei que tem duas na ponta, não é?* [5]Pa: *É, que você tem que considerar. Aí você pega o 14. O 14 vai dar 28, mais 2 vai dar 30. Olha, tem que ser menos que a metade pra dar senão dá um número a mais por causa dos dois da ponta.* [6]Isa: *Para os outros é a mesma coisa?* [7] Pa: *É. Olha, é a mesma coisa pro 49 quando você quer achar pra 100. 2 vezes 50 daria 100, mais 2 seriam 102. Aí ela pegou o 49, que é 50 menos 1. Aí deu 49 vezes 2, 98, mais 2, 100, entendeu?* [8]Isa: *Ta, essa é a f), né?* [9]Pa: *É.* [10]Isa: *Ta*. [e anota a resposta] [Então vê que na g) ainda falta a outra resposta, para 50 pessoas, e Pa lê sua resposta] [11]Pa: *2 vezes 24 dá 48 mais 2 que dá 50.* [12]Isa: *Mas como chegou nesse 24?*

Quadro 3

Novamente se observa, no quadro 3, a tentativa da aluna Pa de generalizar (turno 2). No turno 6, pela pergunta da aluna Isa, podemos supor que a tarefa pôde proporcionar a necessidade da generalização, possibilitando a antecipação de resolução. A aluna Isa demonstrou entender que é uma regra que precisa ser generalizada, pois precisa "valer para os outros". No entanto, ela entendeu ainda apenas no foco aritmético, estava começando a perceber a necessidade de uma linguagem para todos, o que vimos ser o poder da álgebra simbólica. A aluna estava desenvolvendo o pensamento algébrico, mas ainda não tinha a linguagem escrita e simbólica. Ela expressou seus resultados com a representação dos algoritmos das operações e com o registro da regra usando palavras, o que é o início do desenvolvimento da linguagem escrita, pois historicamente a álgebra também era expressa dessa forma antes de chegar à sua forma simbólica. Embora no momento vivido pelas alunas Pa, Isa, Re e Mari elas escrevessem a regra usando palavras, fizeram uso da linguagem formal da Matemática.

As alunas usaram a linguagem que aprenderam na escola, ou seja, a *linguagem verbal matemática*, como definido por Menezes (2004). No entanto, ainda não entendiam os conceitos da álgebra envolvidos.

Ao ouvir a pergunta da aluna Isa (turno 12, quadro 3), a aluna Re toma para si a tentativa de sistematizar todo o procedimento de resolução da questão (turno 1, quadro 4), uma vez que a aluna Pa demonstrou estar inconformada com o fato. Mas a aluna Pa percebeu que a explicação ainda não era suficiente e tomou novamente para si a tentativa de fazer com que a aluna Isa entendesse (turno de 2, quadro 4).

[1]Re: *Olha, 25 não é a metade de 50? Só que com mais dois passa. Então você diminui 1, 24 vezes 2 é 48, mais dois dá 50.* [2]Pa [mostrando os cálculos]: *Olha aqui, você coloca 25, que é a metade do número. Mas 25 de cada lado dá 50, mais as duas da ponta vai dar 52, que não ia dar certo. Aí você pega o 24. Duas vezes 24 vai dar 48 que com mais dois vai dar 50, entendeu?*

Quadro 4

Após essa fala houve uma comunicação gestual entre as alunas. A aluna Isa balançou a cabeça afirmativamente. Entretanto, a aluna Pa não se convenceu de que a amiga tinha realmente entendido e repassou a explicação. A aluna Pa continuou auxiliando a aluna Isa, até que ela conseguisse entender, como pode ser observado nos turnos 1 a 6 do quadro 5.

[1]Pa: *Você sempre pega a metade e testa aí vê que não dá e diminui.* [2]Isa: *Deixa eu ver então se entendi.* [3]Pa: *Lá vai ela.* [4]Isa: *Pego a metade de 50 que é 25 aí vejo que passa e tenho que diminuir. Ah! Finalmente.* [5]Pa: *Isso, aí pega menos que a metade.* [6]Isa: *Então depois do 25 vem o 24. Por isso é o 24. Agora sim!* [7]E todas concluem: *Acabamos!*

Quadro 5

No turno 6 é possível interpretar que a aluna Isa ainda não entendeu, mas o que ficou expresso na gravação é que ela estava querendo dizer “depois” na ordem decrescente. A principal dificuldade era compreender o porquê do “tirar 1”.

A comunicação no grupo (Pa Isa, Re e Mari) é um exemplo do que ocorreu durante a realização da tarefa 1 e que fez com que pesquisadora e professora conversassem a respeito. Elas perceberam quanta discussão a tarefa 1 gerou, com os alunos envolvidos tentando explicar oralmente para elas e para os colegas, e como não é fácil fazer o outro entender como se pensa ou se entende algo, principalmente quando se trata de entender álgebra, pois a linguagem usada é diferente. Perceberam ser esse processo realmente complicado para os alunos que até aquele momento sempre tiveram regras ou exemplos a serem seguidos. Como no grupo das alunas Pa, Isa, Re e Mari, outros alunos também resolveram a tarefa 1 aritmeticamente, fazendo apenas os cálculos (algoritmos). Contudo, a generalização usando a linguagem simbólica mostrou-se muito difícil, pois ainda faltou compreender a necessidade de abandonar o número e encontrar algo para representar a variação.

As alunas do grupo (Pa, Isa, Re e Mari) perceberam que é possível prever, mas não chegaram a escrever de uma forma sintética, usando uma linguagem formal, como pode ser observado no relatório.

Antes de escrever o relatório a ser entregue, as alunas resolveram no rascunho. Durante essa fase a pesquisadora observou que elas recorriam ao desenho, fazendo quadradinhos para representar as mesas e bolinhas para pessoas. Em seguida, faziam a contagem para verificar o número de pessoas e mesas, o que evidenciou o raciocínio aritmético. No entanto, assim como em outros grupos, no relatório do grupo de Isa, Pa, Re e Mari o desenho apareceu apenas nas questões que o solicitavam (a) e (b).

Ao recorrerem à linguagem pictórica por meio das representações, foi que as alunas do referido grupo perceberam a regularidade. Logo após, chegaram à conclusão de que, para encontrar o número de pessoas, bastava fazer o algoritmo da multiplicação do número de mesas por 2, pois uma mesa ocupa duas pessoas, e, em seguida, somar 2 — que seriam as duas pessoas das pontas — ao resultado encontrado. No relatório entregue à professora, as alunas efetuaram os algoritmos da multiplicação e da adição, como explicado por elas durante a resolução a tarefa. As alunas perceberam que apenas fazendo os cálculos chegariam à resposta correta, pois no início haviam comprovado isso com o desenho e a contagem.

No relatório (figuras 1 e 2) podem-se ver as resoluções do grupo de Isa, Pa, Re e Mari. Esse grupo, como será possível observar nas transcrições das falas durante a apresentação (quadro 6), disse ter usado a regra [n x 2 + 2] (o x ainda era usado como representação da multiplicação), mas, como é possível verificar no relatório, apenas explicou a regra com palavras e usou a linguagem própria da Matemática, demonstrando ter superado a fase da contagem, mas não chegou à da representação algébrica.

A professora, ao ler o relatório, alertou o grupo para que tentassem escrever explicando como pensaram, acreditando que isso os ajudaria a desenvolver e compreender a linguagem algébrica futuramente em outros momentos escolares.

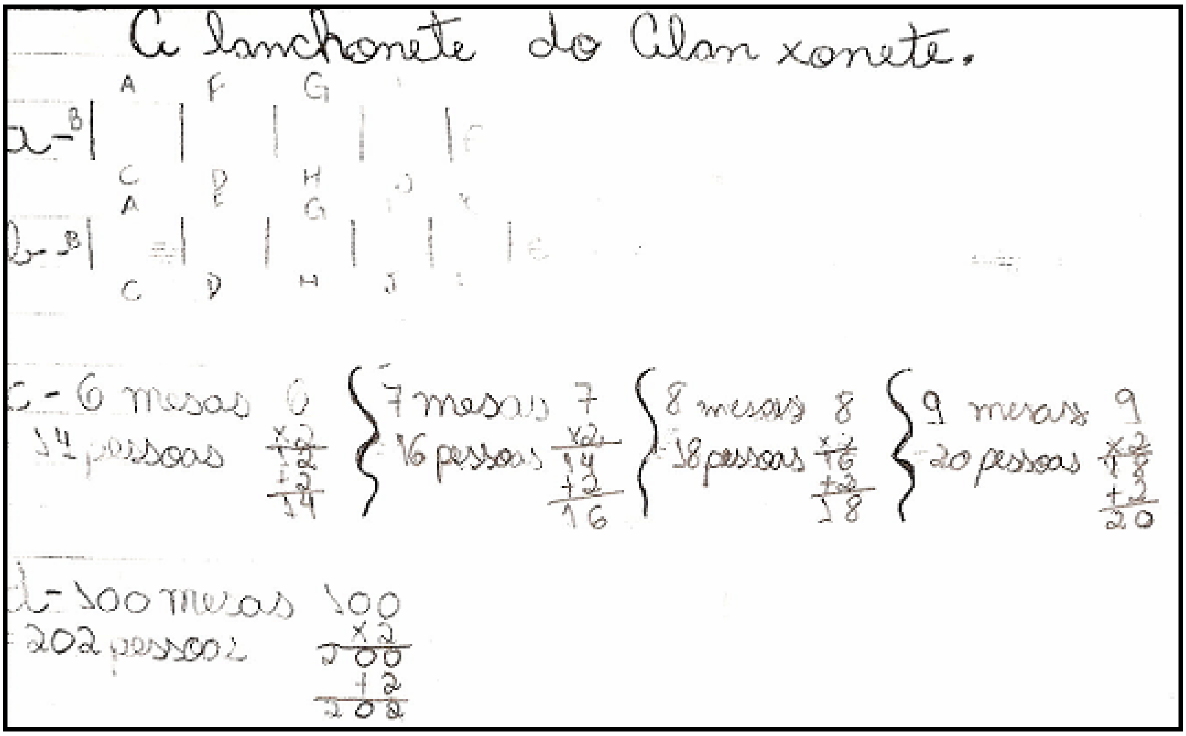
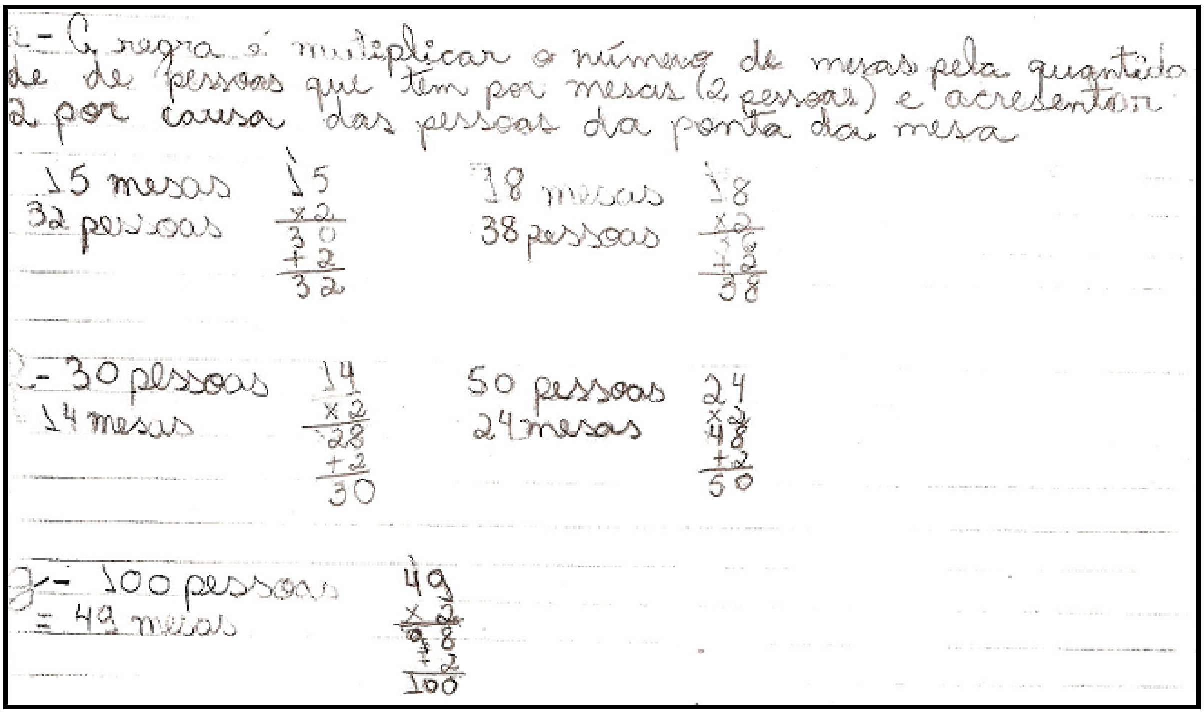


Figura 5.1: Relatório escrito pelo grupo Pa, Isa, Re e Mari – Parte 1.

Na questão (e) (*E se forem colocadas n mesas? Teste a regra que você inventou para 15 mesas e 18 mesas*), as alunas não consideraram o *n* e escreveram a regra descrevendo os cálculos que faziam para chegar ao resultado. Novamente, fomos levadas a supor que perceberam a regra, a necessidade de generalizar, mas não chegaram à linguagem simbólica. Notamos que o cálculo mental oral era diferente do escrito pelas alunas, pois o registro mostrado na figura 5.2 não é o registro do que elas pensaram, mas um cálculo para comunicar o resultado. O pensamento já estava na generalização, mas a linguagem que dominavam ainda não acompanhava esse tipo de pensamento. Os referenciais estudados indicam que isso pode fazer com que posteriormente sintam dificuldade de compreender os conceitos. As alunas apresentaram o tipo de comunicação comum nessa etapa, antes de ter a necessidade de uma linguagem universal.

Como apresentado na figura 5.2, nas questões f) (*Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 30 pessoas? E para acomodar 50 pessoas?*) e g) (*Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?*), as alunas desse grupo ficaram presas ao raciocínio da tentativa.

Ressalta-se que isso só ficou evidente pelos diálogos do grupo e depois, na apresentação. No relatório, elas resolveram essa dificuldade usando a regra que encontraram e utilizaram nas questões (c) e (d) para verificar que a resposta encontrada estava correta, mas não mostraram as tentativas nem descreveram como encontraram.


c - A regra é mutiplicar o número de mesas pela quantidade de de pessoas que tem por mesas (2 pessoas) e acrescentar 2 por causa das pessoas da ponta da mesa

15 mesas
32 pessoas

15 x 2 = 30; 30 + 2 = 32

18 mesas
38 pessoas

18 x 2 = 36; 36 + 2 = 38

e - 30 pessoas
14 mesas

14 x 2 = 28; 28 + 2 = 30

50 pessoas
24 mesas

24 x 2 = 48; 48 + 2 = 50

g - 100 pessoas
= 49 mesas

49 x 2 = 98; 98 + 2 = 100

Figura 5.2: Relatório escrito pelo grupo Pa, Isa, Re e Mari – Parte 2.

No momento da apresentação esse grupo não foi o primeiro. Após terem observado as apresentações anteriores, a aluna Pa admitiu ter usado a regra escrita na linguagem simbólica (turno 5, quadro 6), quando anteriormente só haviam resolvido as questões aritmeticamente e escrito a regra explicando o procedimento, como observado na figura 2.

As relatoras do grupo foram as alunas Pa e Isa. Elas apresentaram apenas a questão (g) (*Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?*), pois, no momento de sua apresentação, os alunos dos grupos que se sucederam ao primeiro expunham apenas o que achavam terem feito de forma diferente do que já havia sido apresentado. No turno 5 (quadro 6) é possível localizar o momento em que a aluna Pa admite ter usado a regra algébrica. Logo depois ela explica que a resolução dessa questão o grupo havia feito por tentativa (turno 7, quadro 6).

Acredita-se que a aluna admitiu ter usado a regra algébrica devido à explicação dada pelo outro grupo que a apresentou, que havia usado raciocínio igual ao seu para explicar a regra: primeiro multiplicavam o número de mesas por dois e depois somavam dois. No entanto, antes da apresentação, o grupo das alunas Pa, Isa, Re e Mari não chegou a tentar resolver para um número *n* de mesas.

[1]Pa: *A gente pensou pela metade, como o 50 não ia dar...*
[2]Isa [interrompe]: *Escreve isso.* [e faz o algoritmo na lousa]

$$\begin{array}{r} 50 \\ \underline{\times 2} \\ 100 \\ \underline{+2} \\ 102 \end{array}$$

[3]Pa: *A gente fez pela metade.. então seria 2 vezes 50, mas aí não ia dar porque tem ainda as duas pessoas das pontas.*
Isa: *Então ia passar, ia dar 102... então a gente pensou no 49.*
[Pa faz o outro algoritmo]

$$\begin{array}{r} 49 \\ \underline{\times 2} \\ 98 \\ \underline{+2} \\ 100 \end{array}$$

[4]Isa: *Aí deu 98. 98 mais 2 deu 100.*
[5]Pa: *A gente também usou a regra do n vezes 2 mais 2.*
[6]Lis: *Era isso que eu ia perguntar. Vocês também usaram a regra do n vezes 2 mais 2, mas, para fazer, aí vocês fizeram por tentativa?*
[7]Pa: *É, a gente foi tentando. Porque a gente pegou o 50 aí viu que não ia dar..*

Quadro 6

Pela fala transcrita no turno 5 (quadro 6) verifica-se que a aluna pode ter percebido ser possível escrever a regra na forma sintética, mas, mesmo assim, a linguagem ainda não acompanha seu pensamento, pois, embora admitindo a regra na forma sintética, em nenhum momento faz uso dela. As alunas desse grupo ainda se preocupavam apenas em chegar ao resultado correto, sem a preocupação com a linguagem usada para expressar esse resultado. A professora, tendo essa preocupação, insistiu (turno 6) para que falassem a regra, para que as alunas pudessem revelar se entenderam mesmo o que haviam feito e, assim, a turma também pudesse entender.

Depois de refletir sobre a apresentação dessas alunas, foi interpretado pela pesquisadora que elas poderiam ter aprendido durante as explicações dos outros grupos. A impressão foi de que ocorreu a troca de idéias durante as apresentações, proporcionado também a troca de significados, em que puderam compreender os argumentos de outros alunos, desenvolvendo sua capacidade de comunicação matemática, como indicado por Ponte et al. (2007).

No entanto, depois de observar a sistematização da tarefa feita pela professora e ainda observar a avaliação (prova escrita) realizada pelos alunos ao final das tarefas, ficou evidente que a troca de significados não havia ocorrido. A avaliação que os alunos fizeram envolvia situações que tinham relação ou eram semelhantes às tarefas investigativas. Observando as alunas do grupo Pa, Isa, Re e Mari, tanto durante a sistematização quanto durante a avaliação, pôde ser constatado que elas admitiram ter usado a regra pelo fato de esta expressar o mesmo raciocínio que haviam usado para resolver a tarefa. Isso não quer dizer que essa linguagem tivesse adquirido significado, pois elas compreenderam apenas para representar essa situação em particular.

A situação seguinte demonstra o que foi constatado. Após a explicação do quadro 6, o aluno Leo perguntou como o grupo havia encontrado o 49. Isa explicou que consideraram primeiro a metade, o 50, e testaram. Depois testaram o 49, porque viram que o 50 passava. A professora então questionou, incentivando as alunas a explicar o raciocínio que usaram, novamente perguntando “de onde tiraram” e “por quê” (turno 1, quadro 7).

1Lis: *A idéia de dividir, de onde vocês tiraram? Porque dividir por 2?* 2Pa: *Então, porque quanto mais aumentasse mais ia dar um resultado absurdo..* 3Isa: *Porque a mesa tem duas pessoas.* 4Lis: *Ah, tá. Dividiram por dois porque na verdade vocês usaram a lógica.* 5Isa: *Aí depois somou mais 2.*

Quadro 7

Com o diálogo do quadro 7, entendemos que, apesar da regra, as alunas usaram a lógica que compreenderam com o processo de tentativa para chegar ao resultado. A dificuldade gerada pela falta de compreensão do conceito ficou clara na transcrição da fala de Pa, depois da sistematização feita pela professora, que usou a linguagem formal da álgebra (verbal e escrita). Após a sistematização, a professora perguntou aos alunos o que acharam da tarefa. No quadro 8 é possível observar o diálogo da aluna Pa com a professora.

1Lis: *Fala, Pa.* 2Pa: *Eu achei assim, meio complicado também...* 3Lis: *O que foi mais complicado?* 4Pa: *Entender assim; vendo na lousa parecia fácil, aí depois isso era novidade...* [não é possível ouvir] 5Lis: *Então é na explicação que ficou complicado?* 6Pa: *Não, eu até entendi, mas no começo eu fiquei meio confusa.*

Quadro 8

A aluna Pa afirma que entendeu no turno 6, quando na verdade ela conseguiu concluir a tarefa. Contudo, ela ficou confusa com a linguagem falada e também escrita utilizada pela professora.

A professora, diante disso, foi percebendo a necessidade de enfatizar a expressão algébrica na forma como desejava que seus alunos escrevessem — com o rigor matemático conhecido de tarefas com características algébricas — e passou a insistir para o uso dessa linguagem, tanto a escrita quanto a falada. Porém, os alunos ainda não conseguiram acompanhar, ou seja, demonstraram dificuldade em construir a linguagem simbólica. Esse obstáculo pôde ser revelado na carta da aluna Isa e observado também na segunda tarefa, em que apenas entender a regularidade não bastava, pois a professora passou a acompanhar e insistir mais para que as alunas desse grupo expressassem uma regra de forma sintética.

Na carta escrita pela aluna Isa depois das três atividades ela expressa que achou complicado "dependendo do que está sendo falado". Isso mostra que em algumas situações ela entendia, mas, quando a situação mudava, ficava mais difícil.

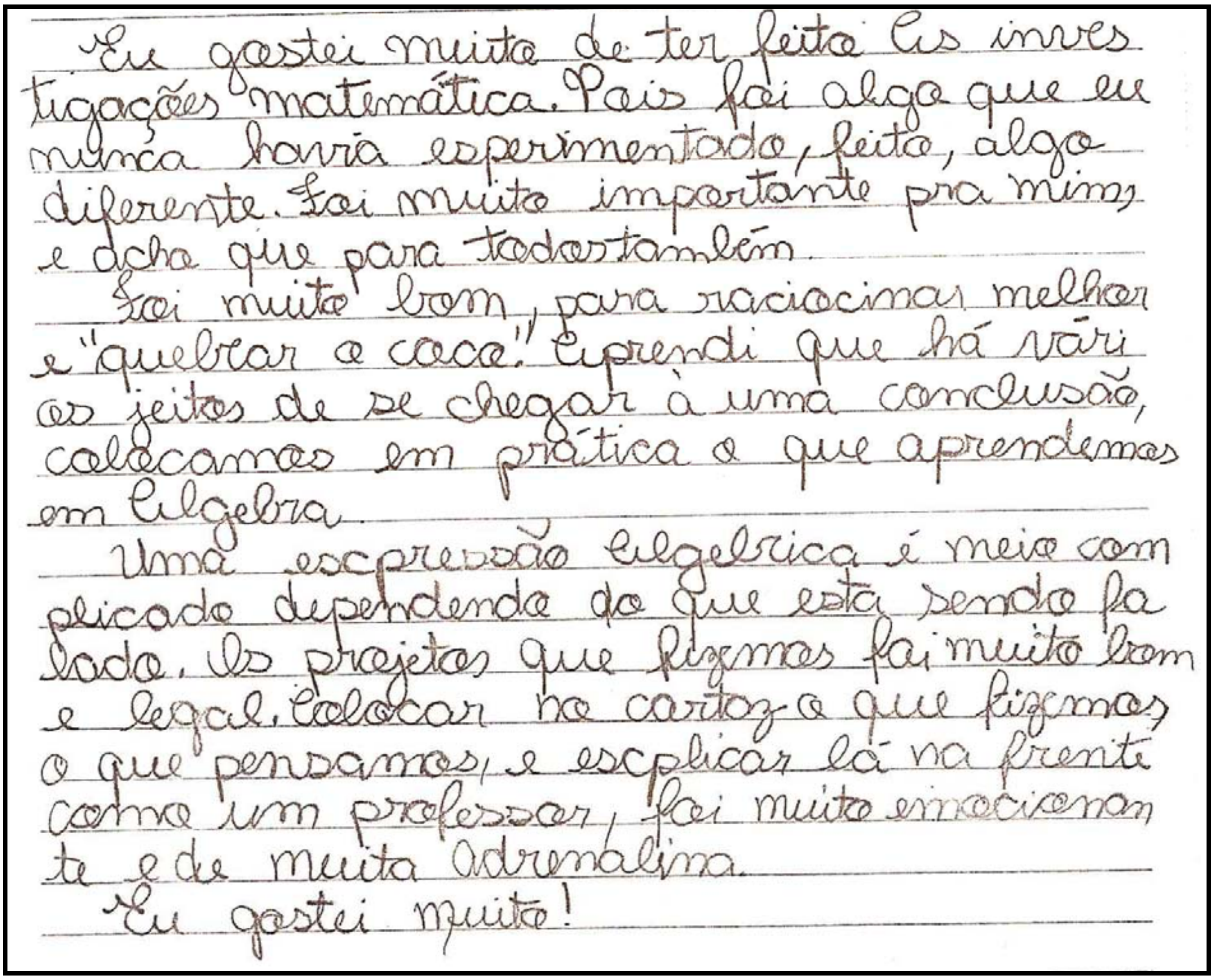

Eu gostei muito de ter feito as inves
tigações matemática. Pois foi algo que eu
nunca havia experimentado, feito, algo
diferente. Foi muito importante pra mim,
e acho que para todos também.
Foi muito bom, para raciocinar melhor
e "quebrar a cuca". Aprendi que há vári
os jeitos de se chegar à uma conclusão,
colocamos em prática o que aprendemos
em álgebra.
Uma escpressão álgebrica é meio com
plicado dependendo do que está sendo fa
lado. Os projetos que fizemos foi muito bom
e legal. Colocar no cartaz o que fizemos
o que pensamos, e escplicar lá na frente
como um professor, foi muito emocionan
te e de muita adrenalina.
Eu gostei muito!

Figura 5.3: Carta escrita pela aluna Isa

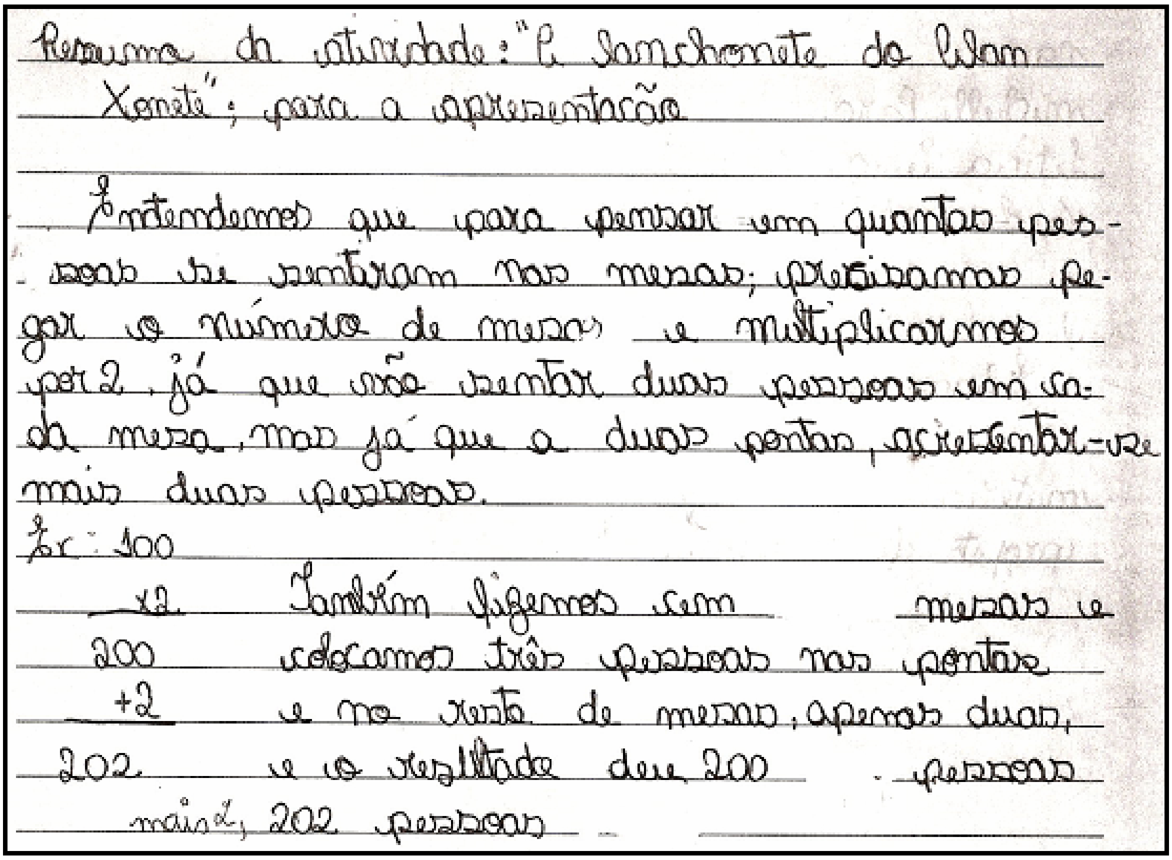
Outro grupo que enfrentou os mesmos desafios foi o das alunas Le, Ka e Mi. As alunas Le e Ka explicaram o caminho que usaram desde o início, quando tentaram achar o resultado pela representação (desenho). Explicaram também o erro que cometeram durante a resolução, mostrando que puderam refletir sobre os resultados, principalmente depois de assistirem às outras apresentações. A aluna Le explica isso quando descreve a resolução da questão (g) (*Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?*) nos turnos 1 e 2 (quadro 9). Quando questionada sobre a regra (turno 5) pela professora, a aluna afirmou ter feito a regra algébrica, mas, assim como no grupo anterior, as alunas deste grupo apenas representaram com palavras durante a resolução das questões.

[1]Le: *Então é só a g). A gente fez a mesma coisa, mas para comprovar, primeiro a gente fez 100 pessoas. A gente foi contando as mesas... É, a gente foi contando as mesas, aí a gente foi fazendo e viu que ia ficar muito grande, colocando A, B, C..., até dar 100. A gente pensou assim: 'ah, ta muito complicado!'. Então a gente fez dividir como ela fez* [se referindo à apresentação de Isa], *e a gente foi tentando. Então a gente chegou assim, a mesma coisa, a gente foi tentando* [monta o algoritmo na lousa] *A gente fez assim, 100 dividido por 2, dá 50, menos 2, dá 48. A gente fez assim...*
[Um aluno interrompe e diz que é menos 1, mas Le pede calma porque ela ainda vai explicar.]
[2]Le: *E deu errado, porque ia ficar faltando pessoas. Aí então a gente pensou a mesma coisa que eles, se sentam duas pessoas em cada mesa, vai ser uma pessoa. Então 50 menos 1 é 49. Aí a gente fez* [e monta na lousa] *49 vezes 2 dá 98 mais 2, que dá 100. E a gente fez esse para comprovar.*
[3]Lis: *Vocês chegaram a escrever uma regra?*
[4]Le: *Ahm, a gente fez 49 vezes 2 mais 2. E a de dividir, 100 dividido por 2 menos 2, é 49, só que menos 1* [ela se corrige]
[5]Lis: *Então a regra que vocês fizeram é n vezes 2 mais 2?*
[6]Le: *É, só que a gente fez menos 1 porque tem duas pessoas em cada mesa.*
[7]Lis: *Alguma pergunta, pessoal?*

Quadro 9

O grupo dessas alunas foi um dos últimos a apresentar. A pergunta da professora (turno 3, quadro 9) pode parecer ter induzido a aluna a admitir tal regra. Contudo, isso pode ser explicado pelo fato de os alunos já estarem familiarizados com a regra (n x 2 + 2) depois das apresentações anteriores. Isso explica o fato de a professora apenas confirmar com os alunos se utilizaram a mesma regra, uma vez que eles estavam apresentando somente as partes que acharam que tinha algo de diferente dos grupos anteriores.

Observando o relatório das alunas Le, Ka e Mi (figura 4 e 5), temos um exemplo em que apareceu uma explicação mais detalhada, mesmo com alguns erros, que consideramos ser de linguagem e não de raciocínio, uma vez que o aluno ainda não produziu o conhecimento. Os "erros", como já foi descrito no quadro 9, foram corrigidos durante a apresentação, mostrando que o grupo percebeu o que não estava correto, após a entrega do relatório e durante as outras apresentações. Isso significa que o momento de troca de idéias é muito importante para que os alunos reflitam também a respeito dos próprios resultados e para que eles mesmos consigam perceber o caminho correto. Mesmo assim as alunas ainda estavam "presas" aos resultados. Esse grupo também expressou a regra, escrevendo com palavras na linguagem matemática que aprenderam, sem usar a linguagem formal da álgebra. Elas também estavam deixando o raciocínio da contagem. As alunas conseguiram expressar oralmente o que pensaram, mas não chegaram a construir a linguagem simbólica, demonstrando o quanto é difícil essa construção.



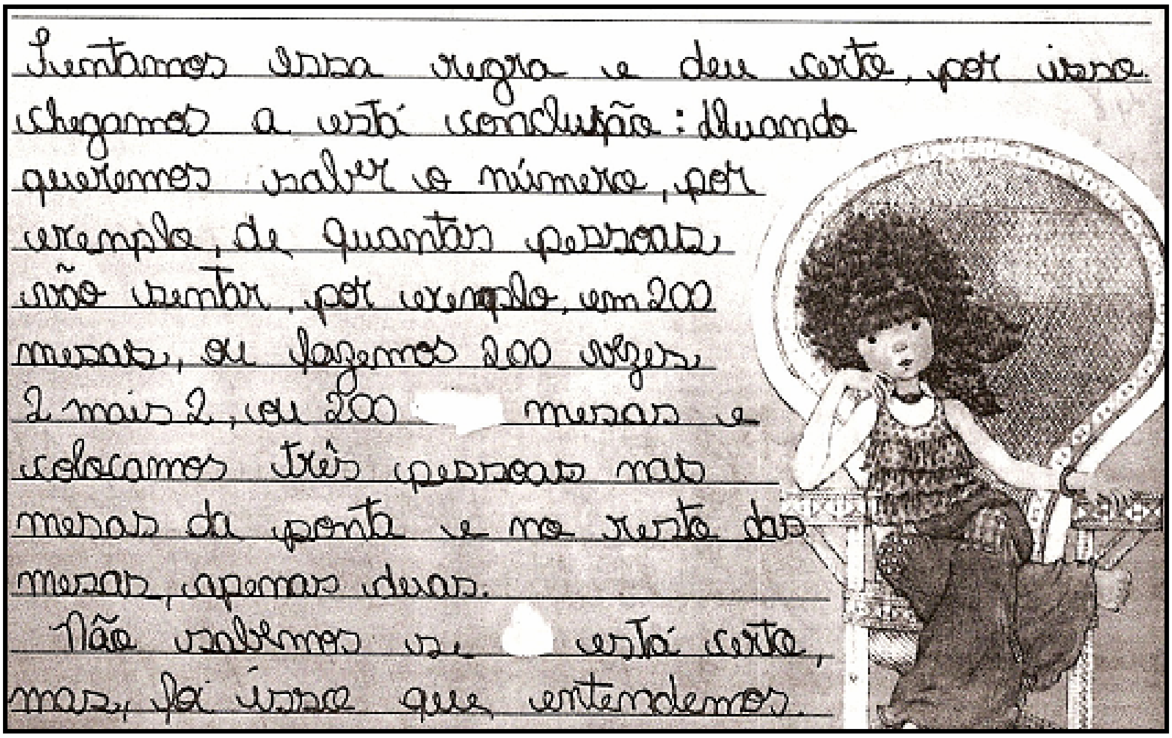
Resumo da atividade: "A Lanchonete do Sam Xeretê"; para a apresentação

Entendemos que para pensar em quantas pessoas se sentaram nas mesas; precisamos pegar o número de mesas e multiplicarmos por 2, já que vão sentar duas pessoas em cada mesa, mas já que a duas pontas, acrescentar-se mais duas pessoas.

Ex: 100
x2
200
+2
202

Também fizemos cem mesas e colocamos três pessoas nas pontas e no resto de mesas, apenas duas, e o resultado deu 200 pessoas mais 2, 202 pessoas

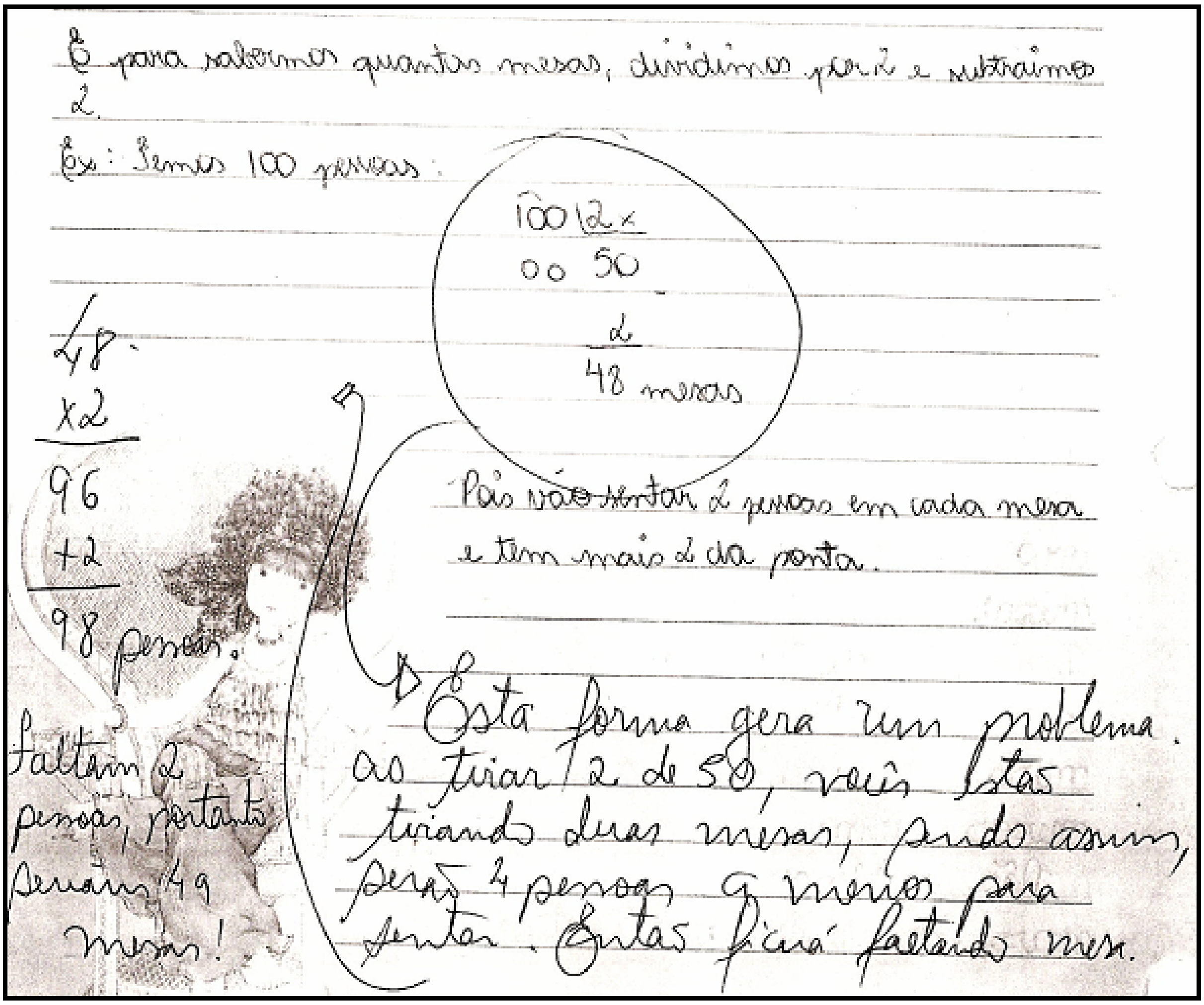
Figura 5.4: Relatório das alunas Le, Ka e Mi – Parte 1



Tentamos essa regra e deu certo, por isso chegamos a está conclusão: Quando queremos saber o número, por exemplo, de quantas pessoas vão sentar, por exemplo, em 200 mesas, ou fazemos 200 vezes 2 mais 2, ou 200 mesas e colocamos três pessoas nas mesas da ponta e no resto das mesas, apenas duas.

Não sabemos se está certo, mas, foi isso que entendemos.

Figura 5.5: Relatório das alunas Le, Ka e Mi – Parte 2


E para sabermos quantas mesas, dividimos por 2 e subtraimos 2.

Ex: Temos 100 pessoas.

100 | 2 x
00 50
− 2
48 mesas

Pois vão sentar 2 pessoas em cada mesa e tem mais 2 da ponta.

48
x2
96
+2
98 pessoas.

faltam 2 pessoas, portanto serão 49 mesas!

Esta forma gera um problema. ao tirar 2 de 50, vocês estão tirando duas mesas, sendo assim, serão 4 pessoas a menos para sentar. Então ficará faltando mesa.

Figura 5.6: Relatório das alunas Le, Ka e Mi – Parte 3

No grupo formado pelos alunos BruGo, GabMa, Da e MariF também puderam ser observados aspectos semelhantes aos ocorridos nos dois grupos descritos anteriormente. As alunas BruGo e GabMa apresentaram a resolução da questão (g) (*Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?*). Começaram por colocar na lousa o algoritmo: 49 x 2 = 98 +2 = 100.

Um dos alunos da turma (Ti) foi o primeiro a questionar (turno 1, quadro 10), seguido de outro aluno (turno 3). A professora também fez uma pergunta para as alunas (turno 5). As questões do tipo "por quê" começaram a aparecer depois que a professora também questionou outros grupos, tentando fazer com que as alunas explicassem por que fizeram daquela forma, ou seja, como encontraram aquela regra.

A intervenção da professora tinha uma intenção: pretendia que as alunas que apresentavam contassem como fizeram, e não apenas revelassem os resultados (cálculos) encontrados. A intenção era que as alunas saíssem do foco aritmético e expressassem o pensamento, na tentativa de fazer a generalização, mesmo que da forma oral, com a linguagem que conheciam. O objetivo era que expressassem a regularidade, conseguindo sair do pensamento aritmético e passando para o pensamento algébrico.

[1]Ti: *Por que, como vocês chegaram nesse resultado?* [2]BruGo: *Porque a gente pegou 49 pessoas, ou melhor, 49 mesas vezes dois deu 98 mais duas mesas, que dá 100.* [3]Aluno: *Mas como você sabia que era 49?* [4]BruGo: *Porque a gente foi fazendo para 47, 48, 49...* [5]Lis: *Mas por que é que vai mais duas?* [6]BruGo: *Porque é a regra.* [7]Ti: *BruGo, mas de onde vocês tiraram essa regra?*

Quadro 10

Após o aluno Ti refazer sua pergunta (turno 7, quadro 10), outros alunos também fizeram outras perguntas. A aluna BruGo acabou ficando confusa e não conseguiu explicar. Depois que a professora pediu para que falassem um de cada vez, um aluno que levantou a mão conseguiu perguntar:

[1]LucVi: *O mais 2 ali* [do algoritmo : 49 x 2 = 98 + 2 = 100] *são duas mesas ou são dois lugares?*

Quadro 11

Como os alunos se agitaram e alguns riram por achar que o aluno estava querendo deixar o grupo em situação complicada, BruGo e GabMa tentaram se organizar. No relatório do grupo (BruGo, GabMa, Da e MariF) foram escritas as respostas com os cálculos errados, pois fizeram 48 x 2 = 98 + 2 = 100.

Isso fez com que a aluna BruGo se confundisse ainda mais quando tentou explicar, pois pegou esse algoritmo em suas folhas para fazer novamente na lousa. A aluna explicou que com o 48 não deu certo, ficando 98 e então acrescentou mais dois que seriam das duas pessoas do canto. Alguns alunos levantaram a mão e a professora Lis pediu para que o aluno Leo falasse; ele fez uma pergunta interessante (turno 1, quadro 12), pois relacionou, incorretamente, a propriedade aditiva e a multiplicativa, uma vez que pensou que somar duas vezes o número dois seria o mesmo que multiplicar por quatro.

A professora Lis, percebendo a confusão e, ainda, notando que a aluna BruGo não conseguia responder, fez uma pergunta para que o aluno Leo fizesse a relação com o problema (turno 2, quadro 12). As transcrições das falas que seguiram (turnos de 3 a 7, quadro 12) mostraram como os alunos já estavam fazendo relações com as apresentações dos demais grupos, ou seja, os cálculos que antes não estavam com o sentido muito claro começaram a ser incorporados pelos alunos a partir de então. Isso só foi possível pelo tipo de tarefa (exploratório-investigativa) e pela postura da professora.

1Leo: *Se vocês estão somando duas vezes o dois então não seria mais fácil fazer n vezes 4 e não duas vezes o 2*?   2Lis: *Mas se você fizesse n vezes 4 estaria contando quantas pessoas para cada mesa?*   3Ana: *BruGo, mas porque que você colocou o mais 2 e depois o mais dois de novo? Você colocou duas vezes...*   [BruGo pede para que espere e dá a palavra para LucVi]   4LucVi: *O mais dois dali seriam duas mesas, então a resposta não são 49 mesas? Mais duas mesas seriam 51 mesas.*   5BruGo: *Ah, então é lugares!*   6Vários alunos exclamam: *É lugares!*   7BruGo [apontando para o algoritmo: 49 x 2 = 98 +2 = 100]: *Ah, então esse daqui são lugares. Então são 49 mesas vezes dois lugares mais dois...*

Quadro 12

Em síntese, no quadro 12 é possível verificar que os alunos do grupo (BruGo, GabMa, Da e MariF) ainda continuaram com o pensamento aritmético. As alunas que apresentavam não conseguiram entender as questões formuladas pelos colegas e confundiram-se facilmente, o que dispersou a turma e fez com que a troca de idéias e as discussões ocorressem de forma desorganizada. Isso certamente impediu a apropriação de significados.

Entendemos que essa situação fez com a professora decidisse interromper a apresentação do grupo. Ela comentou com a turma que outros grupos poderiam explicar o ocorrido de outra forma, ou seja, de modo que todos compreendessem.

A dinâmica dessa fase da tarefa investigativa deu a oportunidade de a professora estabelecer a comunicação, como indicado por Ponte et al. (2007), quando os alunos começaram a se sentir a vontade para participar da aula. Eles ainda estavam aprendendo a fazer isso e, portanto, não entendiam muito bem os argumentos usados pelos colegas. Essa comunicação, como explicado por Martinho e Ponte (2005), pode evoluir de modo a levar à construção de argumentações, uma vez que num ambiente de comunicação de idéias ocorre a construção progressiva de significados.

A tarefa investigativa proporcionou o início dessa evolução. No entanto, o cronograma curricular previsto para as tarefas fez com que a professora não estendesse essa fase e fechasse a atividade. Ela tomou para si o papel de sistematizar os conceitos envolvidos na tarefa.

Como defendido no estudo de Scarlassari (2007), a falta de compreensão dos conceitos de movimento; variação e campo de variação; a variável como incógnita e equação pode ter influenciado os momentos de não-compreensão algébrica.

As alunas do primeiro grupo descrito neste bloco (Pa, Isa, Re e Mari), assim como na história do desenvolvimento da álgebra, perceberam a necessidade de generalizar. Elas iniciaram o processo de comunicação matemática usando a linguagem até então conhecida por elas e aprendida na escola. Assim como os matemáticos ao longo da história fizeram, segundo o estudo de Scarlassari (2007), elas resolveram a tarefa de forma aritmética, explicando com palavras. Talvez não claramente, mas chegaram a perceber a necessidade do pensamento científico, de uma linguagem única, principalmente quando necessitaram sistematizar e socializar os resultados — momento de validação do pensamento científico. No entanto, ainda não ficou claro como passar a usar as letras para representar números.

Esse conflito pode ser explicado naquele momento pela falta de conhecimento que os alunos tinham dos conceitos que envolvem a álgebra. As alunas do grupo (Pa, Isa, Re e Mari) ainda estavam iniciando o pensamento algébrico, usando a linguagem aritmética e palavras para expressar o pensamento, enquanto a professora desejava que seus alunos usassem a linguagem simbólica, a qual permite chegar às generalizações e às fórmulas.

Se naquele momento os alunos tivessem utilizado linguagem abreviada, poderiam ter chegado à sua própria linguagem sincopada, utilizando uma forma mais abreviada e concisa para escrever expressões algébricas ou equações. Posteriormente aceitariam a linguagem simbólica, usada hoje na Matemática, com mais tranqüilidade e sucesso. É nesse sentido que o estudo de Branco (2008) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) defendem um trabalho de pré-álgebra, pois entender esses conceitos passa pela compreensão de vários outros aspectos e, se isso não acontecer nos primeiros anos do Ensino Fundamental, provavelmente os alunos trabalharão com a linguagem simbólica de forma mecânica e sem significado.

Ponte (2005) defende que o estudo de regularidades para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico fará com que a álgebra tenha significado. No entanto, ao analisar a tarefa desenvolvida, foi percebido que trabalhar apenas com formas de representar padrões e regularidades não torna significativa a linguagem simbólica, mas sim o problema estudado.

5.1.3 Bloco de análise 2: Os movimentos da sala de aula que geraram conflitos e dificuldades

Na fase da socialização, o papel do professor também é importante, desde a orientação até a mediação entre os alunos. A tarefa 1 expôs a professora a novas situações, entre as inúmeras que poderiam acontecer nessa fase.Na apresentação dos alunos Ju e Lui (grupo Ju, Lui, Be e AnP), destacamos três dessas situações:

- diferentes resultados apresentados por um mesmo grupo – os alunos Ju e Lui fizeram resoluções diferentes e, embora fossem do mesmo grupo, apresentaram as duas versões;
- dificuldade de operacionalidade: os alunos Ju e Lui, em suas resoluções, apresentaram indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico, mas também dificuldades, principalmente em relação à operacionalidade, ligadas à idéia de variável;
- dispersão da turma, provocada por diferentes idéias matemáticas: - a turma se dispersou com as diferentes linguagens e só conseguia entender se o exemplo apresentado fosse parecido com o que haviam feito, ou seja, quando passava para o foco aritmético.

No início da apresentação, os alunos Ju e Lui explicaram como chegaram às respostas: ambos pensaram em multiplicar por dois, justificando que sentavam duas pessoas em cada mesa, “uma em cima e um embaixo” — essa expressão se deve ao desenho feito na lousa, em que as pessoas foram representadas uma em cima do quadrado que representava a mesa e a outra, embaixo —, e depois somar dois, pois sentavam mais duas pessoas, uma em cada ponta. Essa representação deixou claro o quanto a linguagem pictórica era forte para os alunos.

Mesmo sendo a apresentação em dupla, a aluna Ju foi quem dominou o discurso. Foi ela quem fez os algoritmos na lousa depois que uma aluna da sala solicitou o detalhamento do discurso. Embora para professora e para a pesquisadora a explicação dada pudesse parecer simples de entender, os alunos pediam exemplos, pois, para eles, ver os algoritmos e usar exemplos numéricos deixava a explicação clara. Isso demonstra que os alunos da turma tinham muito forte o pensamento aritmético. O exemplo dado pela aluna Ju para a turma pode ser observado no quadro 13.

6
x 2
12
[1]Ju: *Seis vezes dois porque vai ficar um em cima e um embaixo* [gesticulando, mostrando a figura das mesas que foi desenhada na lousa]
[2]Lui: *Aí tem as duas dos cantos.*
[3]Ju: *Isso, aí...* [e continua o algoritmo]
6
x 2
12
+2
14

Quadro 13

A aluna Ju, após o exemplo dado no quadro 13, fez o cálculo para o caso de serem sete mesas, explicando que continuaria assim se fossem dados outros números de mesas. Ela fez o mesmo tipo de cálculo também para apresentar a resolução da questão (d) (*E se forem colocadas 100 mesas?*). A próxima explicação dada pela aluna Ju, para a resolução questão (e) (*E se foram colocadas n mesas? Teste a regra que você inventou para 15 mesas e 18 mesas*), foi motivo de muita agitação na sala. Ju tinha clara a definição do número *n* como indicativo de qualquer número, pois havia repetido isso diversas vezes durante a resolução, como foi observado pela pesquisadora, e também voltou a repetir quando explicou a sua resposta para a turma.

No entanto, para os alunos, a regra algébrica explicada pela aluna não fazia sentido. Quando ela fazia o exemplo numérico, os alunos consideravam a regra correta, pois Ju fazia os mesmos cálculos — mesmo algoritmo — que eles haviam feito.

Pesquisadora e professora, após a aula das apresentações, refletiram que o conhecimento adquirido pelos alunos nas aulas de Geometria, que na escola é ministrada por outra professora, pode ter influenciado os grupos — que, a princípio, não usaram a regra algébrica — a expressar o entendimento de tal regra.

A afirmação dos alunos de terem entendido a regra parece ser devida ao raciocínio usado na resolução: primeiro multiplicavam por dois e depois somavam dois. Os demais alunos da turma haviam pensado da mesma forma que aqueles que escreveram a regra algebricamente, mas a grande maioria havia apenas efetuado os cálculos ou escrito como pensaram.

A professora Lis chegou a comentar com a pesquisadora em uma das aulas que o fato de os alunos estarem resolvendo equações na aula de Geometria pode ter interferido de forma negativa em suas aulas, o que pôde ser percebido principalmente quando explicou para a turma, durante a sistematização, a resolução da equação usando a *"idéia da balança"*: os alunos — a aluna Ju, por exemplo — reclamaram: *"O jeito que ela faz é mais fácil"*, referindo-se à resolução da professora de Geometria. A falta de comunicação e negociação entre as professoras foi notadamente o que causou para a professora Lis tal dificuldade, provocada também pelo contexto escolar, que pressionava as professoras a cumprirem o planejamento e o cronograma curricular estabelecido pela escola.[13]

Isso remete ao que Ponte et al. (1997) argumentam sobre a comunicação e a negociação de significados na aula de Matemática: embora a comunicação ocorra, há alguns fatores que colaboram para que se dê a negociação de significados. Entendemos que o confronto dos

---

[13] Ao analisar esse fato, é possível imaginar que, nas aulas de Geometria, ao resolver equações com alunos que ainda não tinham aprendido em álgebra, a professora provavelmente havia lhes indicado o método de resolução. Isso provavelmente faz com que os alunos pensem que é mais fácil, pois é só seguir o modelo e chegam à resposta correta.

diferentes objetivos dentro de uma sala de aula tenha sido o fator responsável pela dificuldade aqui relatada. A professora Lis parecia ter um objetivo definido: que seus alunos entendessem a álgebra, enquanto seus alunos queriam resolver o problema. O objetivo da professora de Geometria ainda parecia ser outro: ensinar o conteúdo de sua componente curricular. Se não ocorrerem a comunicação e a negociação entre as partes envolvidas no contexto da sala de aula, provavelmente será difícil acontecer uma aprendizagem significativa.

Na apresentação da aluna Ju, os alunos da turma não questionaram sua explicação aritmética da regra, mas ficaram muito confusos com a explicação algébrica. O *n* colocado por Ju gerou muitas dúvidas. No quadro 14 é possível observar como ela começou sua explicação, esclarecendo que o *n* é qualquer número e, portanto, qualquer número multiplicado 2 também resulta em qualquer número, que ela também chama de *n* (turnos 1 e 2, quadro 14). Esse erro — uso da mesma letra para representar diferentes quantidades — pode ser classificado como comum na 6ª série, e os alunos da turma não estranharam o resultado apresentado por Ju, pois, quando o aluno aprende aritmética, ele sabe que sempre vai operar com dois números que resultarão em um terceiro. Nesse caso, o terceiro número seria desconhecido. Como a aluna Ju havia chamado o primeiro número desconhecido de *n*, ela voltou a chamar o resultado de *n*.

Nesse momento conflituoso os alunos não chegaram a questioná-la. Mas o que deixou os alunos ainda mais confusos foi o resultado final apresentado pela aluna Ju: *n2*, como pode ser observado no quadro 14.

[1]Ju: *Na e) a gente tem o número n, n é qualquer número, então a gente multiplica o número n por dois* [e faz o algoritmo]

$$\begin{array}{r} n \\ \underline{\times\ 2} \\ n \end{array}$$

[2]Ju: *que vai dar um número n, e daí a gente soma mais dois que dará um número n e dois,*

$$\begin{array}{r} n \\ \underline{\times\ 2} \\ n \\ \underline{+\ 2} \\ n2 \end{array}$$

Quadro 14

Esse tipo de resposta apresentado pela aluna Ju é apontado por pesquisas (BOOTH, 1995 e ARAUJO, 1999, citados por SCARLASSARI, 2007) como falta de fechamento. O que ocorreu com a aluna Ju é comum em alunos que se iniciam na linguagem algébrica e não aceitam uma resposta que seja uma sentença aberta, acreditando que precisa haver uma resposta com um único termo. Isso acontece porque ainda estão no processo de aprendizagem que, se não for bem trabalhado, gerará futuras dificuldades. O ocorrido demonstrou que os alunos dessas 6ªs séries não estavam preparados para entender a linguagem algébrica.

O quadro abaixo permite compreender melhor o conflito operacional da aluna Ju: é possível comparar o que a aluna fez com o que era esperado, pela professora e pela pesquisadora, que os alunos fizessem.

O que foi feito	O que se esperava (professora/pesquisadora)
n x 2 n + 2 n2	n x 2 2n + 2 2n + 2

Quadro 15

Assim que Ju concluiu o algoritmo, enquanto continuou sua explicação (turno 1, quadro 15), o aluno Lui colocou o sinal de adição (+) muito pequeno entre o n e o 2, do resultado *n2*. Nesse momento, pesquisadora e professora perceberam que o aluno Lui havia escrito uma regra algébrica diferente. Mas ele não chegou a questionar o resultado anterior colocado pela aluna Ju, pois, como se observa no turno 3 do quadro 16, ele também tinha a idéia do *n* como sendo qualquer número. Como essa justificativa do *n* ainda não se mostrou suficiente para alguns alunos, um deles sugeriu que fizessem um exemplo (turno 4, quadro 16):

[1]Ju: *Ou seja, que seria, por exemplo, o número 50 mais 2, que daria 52.*
[2]Aluna: *Esse n eu não entendi.*
[3]Ju e Lui: *O n pode ser qualquer número.*
[Vários alunos falam ao mesmo tempo e um sugere]
[4]Aluno: *Faz um exemplo aí, então.*

Quadro 16

Entendemos que o pedido para fazer um exemplo demonstrou que os alunos estavam no foco aritmético e ainda não assimilavam o uso da letra. Isso mostrou a dificuldade de pensar a variação. No exemplo escrito na lousa pela aluna Ju, ela fez o algoritmo para o número de mesas igual a 50. O que até então todos os alunos entenderam (quadro 17).

  50
x 2
100

[1]Ju: *Cinqüenta vezes dois que daria cem, daí a gente acrescenta mais dois que daria* 102

50 x 2 100 + 2 102

Quadro 17

O que a aluna Ju explicou em seguida e que os alunos não entenderam foi interpretado durante a análise como se a aluna Ju tivesse transferido a lógica do sistema de numeração decimal para a álgebra, pois, após escrever o resultado 102, a aluna circulou os números 1 e 0 desse resultado e colocou a letra *n* logo abaixo, como explicou no turno 1 do quadro 15. Essa explicação dada por ela justifica a interpretação de sua regra algébrica ser *n2*, mas que só funciona para o caso de o resultado final terminar em 2, como no exemplo que ela deu no resultado da questão (d) (*E se forem colocadas 100 mesas?*).

Outra interpretação feita durante a análise, pensada como sendo a mais provável, é a possibilidade de a aluna Ju ter colocado o valor *n* seguido do número 2 representando o *n* como o resultado da multiplicação por 2, como ela explicou (quadro 14), e o 2 colocado na frente querendo dizer que era o resultado anterior somado com 2. Ela parecia não saber ou não associar que o registro de um número e uma letra juntos significa que eles estão se multiplicando, como observado na comparação do quadro 15.

Por não ter sido realizada uma entrevista com a aluna, não se pode ter certeza de como ela pensou. Isso remete à necessidade de serem realizados novos estudos em outros momentos.

O movimento da sala de aula provocado pela dinâmica da investigação possibilitou o compartilhamento e a discussão desse tipo de resultado, que gera conflitos e leva os alunos a acreditar que a álgebra é difícil.

Após colocar o exemplo descrito no quadro 17, a aluna Ju explicou o seu resultado (turno 1, quadro 18) e questionou mais de uma vez se a turma havia entendido, demonstrando certeza de que seus resultados estavam claros para ela (turnos 2 e 4) e que não haveria necessidade de mais explicações. As diversas manifestações dos alunos, como observado no turno 3 (quadro 18), mostraram que, para eles, o exemplo dado ainda não era suficiente para que entendessem aquela regra algébrica.

[1]Ju: *Esse 10 é o n mais o 2* [gesticulando, apontado com o pincel para o resultado] 50 x 2 100 + 2 102 n+

[2]Ju: *Entendeu?*
[3]Vários alunos se manifestam: *Não entendi!*
[4]Ju: *É o n mais 2. Alguém tem pergunta?Levanta a mão.*

Quadro 18

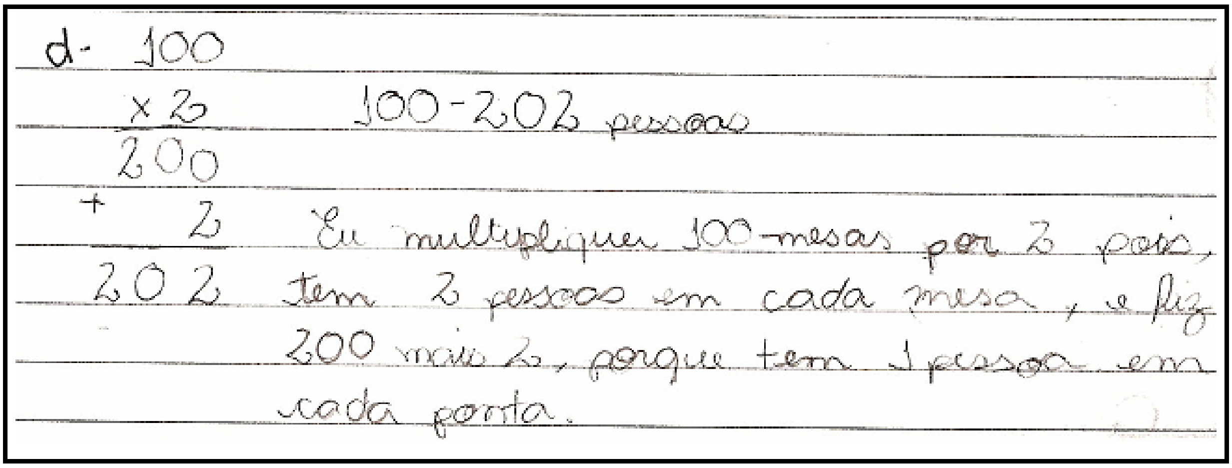
Interpretamos que o fato de a turma não ter entendido a explicação de Ju gerou grande agitação. Muitos falaram ao mesmo tempo e outros deixaram de prestar atenção no que acontecia, gerando ainda conversas paralelas.

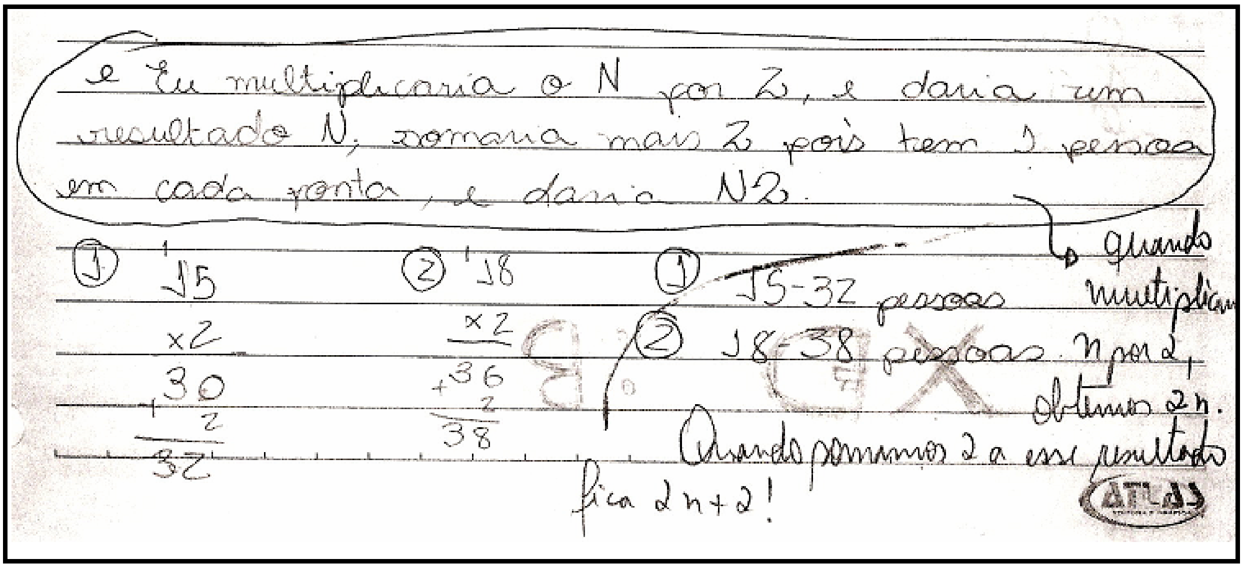
O desinteresse dessa turma pelo que estava ocorrendo passou a ser visível para a pesquisadora, cuja prática docente tem revelado que os alunos que, por exemplo, não entendem uma equação do 2º grau, dizem ser a Matemática difícil e acabam revelando desinteresse pela disciplina.

Entendemos que a aluna Ju mostrou, com sua explicação, ter dificuldade em relação à operacionalidade, pois ficou presa nos processos operacionais e não no seu significado. Usou a lógica da aritmética para a representação algébrica, dificuldade freqüentemente encontrada, como apontada no estudo de Scarlassari (2007).

Até aquele momento a professora Lis não havia se manifestado, apenas ouvia a apresentação do grupo. Somente no momento da agitação da turma é que a professora interferiu na aula, pedindo para os alunos se acalmarem. Foi então que a aluna Ju resolveu ler o texto do relatório, mostrando novamente que para ela sua explicação estava clara, e recorreu ao relatório para ter certeza de que tinha falado corretamente.

A aluna Ju, embora tivesse entregado as resoluções do grupo, fez questão de entregar as suas também. Entendemos que esse fato mostrou que, a realização da tarefa em grupo nem sempre significa que os alunos consigam chegar a um acordo, para apresentarem uma única versão. Percebemos que houve a discussão, mas não o acordo. A aluna Ju escreveu sua regra até chegar à representação (n2), como pode ser observado na próxima figura (Figura 5.7).





e Eu multiplicaria o N por 2, e daria um resultado N, somaria mais 2 pois tem 1 pessoa em cada ponta, e daria N2.

① 15 ×2 30 +2 32

② 18 ×2 36 +2 38

① 15-32 pessoas

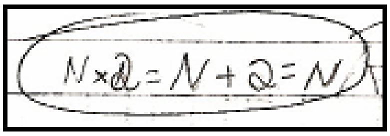
② 18-38 pessoas

quando multiplicamos n por 2, obtemos 2n. Quando somamos 2 a esse resultado fica 2n+2!

Figura 5.7: Relatório escrito pela aluna Ju – Parte 1.

Observando o comentário escrito pela professora, ao corrigir a tarefa, chegamos à conclusão de que, nesse momento, o que a professora escreveu no relatório ainda não fez sentido para a aluna Ju. A linguagem usada pela professora ainda não havia sido desenvolvida pela aluna, que havia demonstrado isso durante a socialização da tarefa.

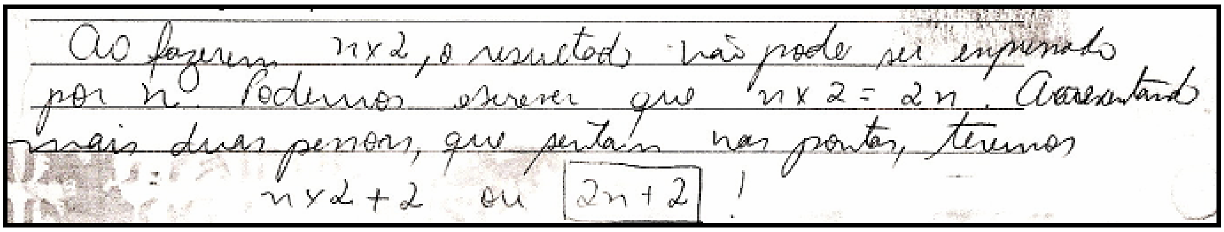
A aluna Ju não foi a única a apresentar esse tipo de dificuldade, usando a letra *n* para representar o resultado de uma operação. O outro grupo que apresentou a regra incorreta também relacionou o a letra *n* com a possibilidade de representar qualquer número.



$N \times 2 = N + 2 = N$

Figura 5.8: Resolução escrita pelo grupo JP, GaSa, MatLo, MatNu.

A professora também fez uma observação no relatório, corrigindo os alunos e chamando atenção para o que já havia observado durante a apresentação: escreveu que a regra apresentava um problema e completou:



Ao fazermos n×2, o resultado não pode ser expresso por n. Podemos escrever que n×2 = 2n. Acrescentando mais duas pessoas, que sentam nas pontas, teremos: n×2+2 ou $\boxed{2n+2}$!

Figura 5.9: Observação escrita pela professora Lis no relatório do grupo JP, GaSa, MatLo, MatNu.

A observação escrita parece muito simples para a professora ou para outra pessoa que já tenha o conhecimento da linguagem algébrica formal. Mas para os alunos essa linguagem ainda era complicada. A professora também observou para o grupo que achava normal esse tipo de problema acontecer, pois estavam iniciando a aprendizagem da álgebra. Contudo, é importante ressaltar que esse trabalho precisaria ainda de tempo para que os alunos se familiarizassem com essa linguagem.

No momento da apresentação, percebendo que a turma estava se dispersando, a professora passou a interagir na discussão: buscou chamar a atenção dos alunos, fazendo perguntas para que a turma tentasse compreender as diferentes perspectivas que estavam surgindo e, ainda, demonstrou ter cuidado para não avaliar o resultado. Procurou estabelecer a comunicação como um processo de interação, e não de transmissão de significados, como apontado por Ponte et al. (2007) e Menezes (2000b). A professora fez perguntas nesse sentido, mas ainda encontrou dificuldades em conduzir a intervenção. Isso provavelmente aconteceu justamente por causa da linguagem, dificuldade freqüentemente encontrada com alunos que se iniciam em álgebra.

Neste caso, a linguagem usada na explicação tinha o foco algébrico, para o qual a professora usou a linguagem adequada. No entanto, os alunos ainda estavam com o foco aritmético, o que fez com que achassem difícil a explicação, demonstrando que não entendiam ou não acompanhavam o raciocínio da professora quando deram respostas aleatórias — conflito entre pensamento e linguagem.

As perguntas que a professora passou a fazer, e não apenas nessa apresentação, deixaram claras que as hipóteses formuladas por ela eram derivadas de questões feitas por outros alunos ou só eram formuladas após ouvi-las, mesmo quando não eram dirigidas àqueles que apresentavam. Isso evidenciou o quanto a professora estava atenta ao movimento da sala de aula. Algumas dessas perguntas podem ser identificadas como as do mesmo sentido de "o que acontece se...". Com esse tipo de pergunta, os alunos passam a refletir sobre as possibilidades (ALRO e SKOVSMOSE, 2006, p. 93). Os alunos precisam também aprender a ouvir e a questionar para explorar o pensamento dos colegas, para que algumas idéias deixem de ser confusas e possam ser mais bem desenvolvidas.

Em alguns casos os alunos apenas conseguiram dizer que não entenderam; tiveram dificuldade em fazer perguntas que ajudassem a esclarecer — momento em que a intervenção da professora se fez necessária. Ela foi até a lousa para mostrar sobre o que estava perguntando, tentando fazer com que todos acompanhassem sua pergunta (quadro 19). Mostrou o algoritmo montado pela aluna Ju, descrito no quadro 14, o mesmo em que o aluno Lui colocou o sinal de + logo depois, entre o resultado *n2*.

[1]Lis: *Eu também tenho uma pergunta, então prestem atenção porque eu quero que todos entendam isso que eu estou perguntando. Ju e Lui, vocês falaram aqui, olha* [mostra o algoritmo colocado na lousa] *n vezes 2 e dá n; aí soma mais 2, e aí a Ju falou que dá n2 e Lui falou que é n+2. Então a regra final de vocês seria n+2?*

Quadro 19

A professora não obteve resposta dos dois alunos que estavam apresentando. Isso demonstrou que eles não haviam entendido a pergunta. A professora Lis resolveu, então, tentar de outra forma, pedindo para que eles escrevessem cada um a sua regra (quadro 20).

[1]Lis: *Olha, na letra e) tinha que escrever a regra, não era? Então, na letra e) como é que eu escrevo essa regra? Sem montar a conta* [algoritmo]*, a regra, como que ela fica, então?*

Quadro 20

A aluna Ju passou a escrever a regra em forma de texto, mas entendemos que a intenção da professora era que escrevessem apenas a regra algébrica. Por esse motivo, tentou fazer com que a aluna Ju fizesse isso, como observado no turno 1 do quadro 21. O aluno Lui disse a regra que ele usou e, então, Ju escreveu, ainda usando palavras, o que pode ser observado no turno 2 do quadro 21. Logo depois que a aluna Ju escreveu a sua regra, o aluno Lui escreveu a dele (turno 3, quadro 21). Só então a professora passou a falar para a turma toda, tentando perceber como interpretaram as respostas que os dois alunos haviam escrito na lousa, provocando o confronto das opiniões ou das idéias de representação expostas pelos alunos. Contudo, o seu foco continuou no simbólico, como observado no quadro 21, nos turnos de 4 a 12.

[1]Lis: *Não o texto, só a regra, só usando a letra, sem escrever com palavras.* [2]Ju [escreveu]: N multiplicado por 2 é igual a ... somo mais 2 e o resultado será N2. [3]Lui [escreveu]: N.2 + 2 [4]Lis: *Gente, olha só, a Ju diz que vai fazer o n multiplicado por dois é igual a alguma coisa, aí soma mais dois e o resultado é n2. Aí o Lui falou que a fórmula é n vezes dois mais 2. Isso daqui é a mesma coisa?* [5]Alguns alunos: *Não.* [6]Mari: *Talvez sim, ou não... será que...ah, é relativo, a frase é igual , mas o n2 não...* [7]Lis: *A frase que a Ju escreveu é igual ao que está escrito aqui?* [aponta para a escrita de Lui] [8]Mari: *É.* [9]Outros alunos: *Não.* [10]Lis: *n2 então não é o mesmo que está escrito aqui?* [aponta para a escrita de Lui] [11]Gab: *Não, porque aí está n2 e é n vezes dois mais dois.* [12]Lis: *O que que é n2 pra vocês?* [Alguns alunos falam ao mesmo tempo, entre eles um respondeu] [13]Aluno: *É o resultado.* [14]Lis: *Pessoal, então vocês concordam que se eu fizer o número n multiplicado por dois e somar mais dois o resultado é n2?*

Quadro 21

No relatório do grupo — que estava junto com a folha das resoluções da aluna Ju, conforme revela a figura 5.7 —, os alunos não chegaram a escrever a regra na escrita algébrica, como colocado pelo aluno Lui. As respostas continham os cálculos realizados e a explicação dada para realizá-las, o que pode ser observado na próxima figura (5.10).

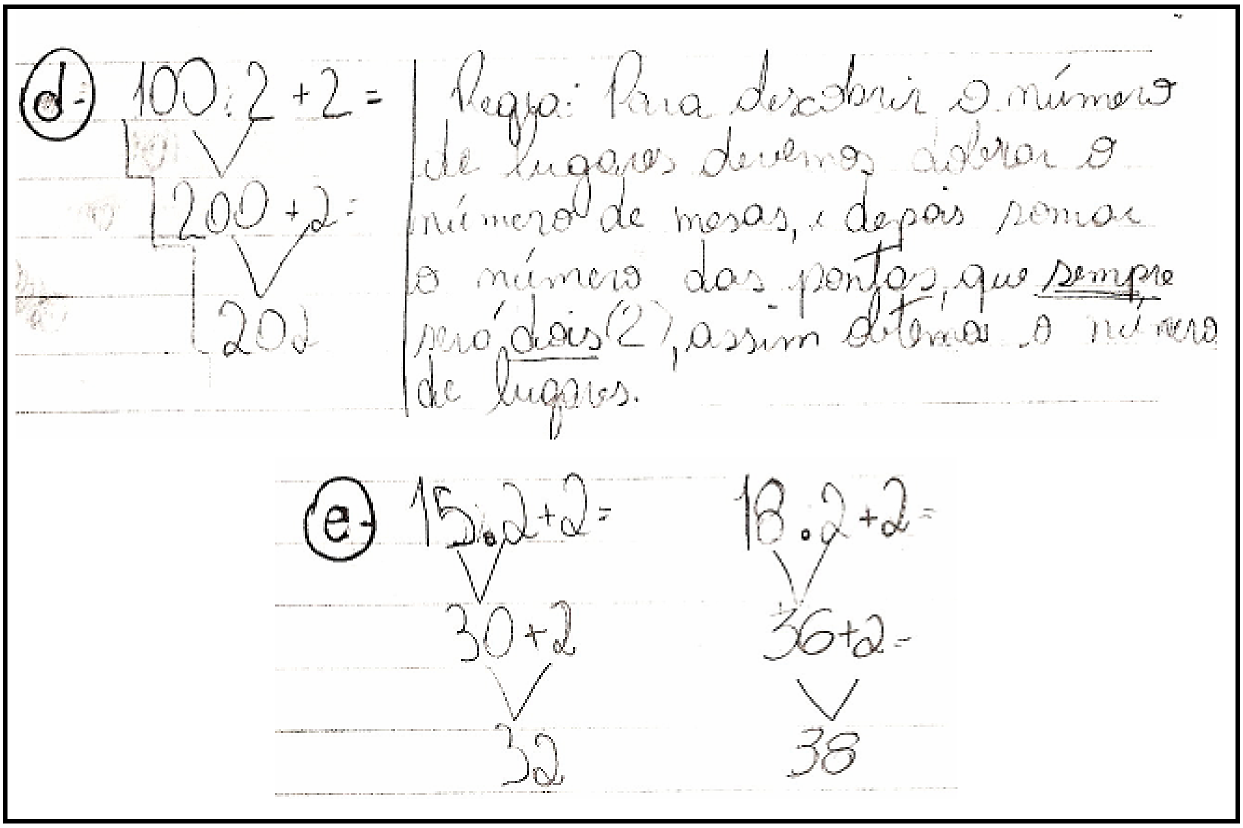


Figura 5.10: Relatório escrito pelo grupo do aluno Lui – Parte 1

Depois de a professora fazer a pergunta descrita no turno 14 (quadro 19), a maioria dos alunos respondeu afirmativamente. A professora Lis, então, continuou fazendo perguntas para tentar fazer com que eles entendessem o que ela desejava (quadro 22).

1Lis: *Então esse n* [apontando para n2] *não é mais esse n* [apontando para N.2+2] 2Uma aluna exclama: *Ai, meu Deus!* 3Outros respondem: *Não* [e muitos falam ao mesmo tempo] 4Um aluno observa: *Então, porque o n que está lá... o n será mais dois* [lembrando o algoritmo de Ju em que o n . 2 = n]

Quadro 22

Os alunos continuaram muito agitados e alguns falavam ao mesmo tempo, repetindo a regra, que para eles estava clara: era só fazer “n vezes dois mais dois”, ou seja, eles sabiam que deveriam multiplicar por 2 o número de mesas e depois somar 2 ao resultado. Ressalta-se novamente que a intenção da professora se manteve: ela pretendia que eles entendessem a escrita algébrica correta dessa regra. A aluna Ju tentou falar outro exemplo, mas a professora Lis a interrompeu, seguindo com o seu objetivo, como observado quadro 23.

[1]Lis: *Pessoal, está completamente clara a regra. Isso eu não estou colocando em dúvida. O que eu estou questionando a vocês é o seguinte: se a regra é pegar o número, multiplicar por dois e depois pegar esse resultado e somar 2, será que essa regra* [N.2+2] *eu posso escrever também dessa forma* [N2]*? Quando eu coloco o n aqui* [N2] *e esse mesmo n aqui* [N.2+2] *não é o mesmo número?* [2]Alguns respondem: *É...* [3]Outros: *Não...* [4]Mari: *Para mim não, porque aquele lá é o resultado.* [5]Lis: *Então esse n não está sendo o mesmo n daqui?* [6]Alunos: *Não.* [7]Lis: *Mas será que, quando eu vou representar algebricamente, eu posso usar a mesma letra para um número e depois para esse número multiplicado por dois?* [8]Alguns respondem: *Pode.* [9]Lis: *A mesma letra?* [10]Alunos: *Pode.*

Quadro 23

Ficou claro que os alunos não entenderam a linguagem da professora com o foco simbólico. Para eles estava longe de ser simples, como era para a professora, que, nesse caso, o significado da mesma letra não poderia ser usado para representar números diferentes. As perguntas da professora eram complexas para quem ainda estava começando a desenvolver o pensamento algébrico. A regra estava clara para os alunos apenas no foco aritmético, e a passagem para o simbólico, como queria a professora, não estava acontecendo, pois faltava aos alunos o conceito mais importante: o de variação.

Isso nos remete ao que Ponte et al. (1997) dizem a respeito da negociação de significados. Considerando que, numa sala de aula, uma negociação é uma interação entre professor e alunos, os autores fazem algumas afirmações importantes e que pudemos identificar nos diálogos que sucederam até então. Para o professor, os conceitos matemáticos possuem significado muito rico, com ligações com outros conceitos e processos matemáticos, enquanto que para os alunos os conceitos matemáticos começam por não ter nenhum significado. Professor e alunos estão em busca da aprendizagem e, por isso, essa negociação é muito importante. Para que a negociação aconteça na sala de aula, professores e alunos precisam tornar seus próprios significados visíveis no processo.

É interessante ressaltar que a troca de idéias ocorrida durante a intervenção da professora Lis é um exemplo de uma reflexão decorrente de uma tarefa que, para os alunos, já estaria concluída. Essa dinâmica rompe com a tradicional correção de “lição de casa”, por exemplo, que muitas vezes tem apenas um papel burocrático: cumpre as normas da escola, o desejo dos pais de terem as tarefas dos alunos corrigidas, a cobrança da coordenação. A avaliação que a professora faz de seus alunos é muito maior do que se ela tivesse proposto uma avaliação escrita com resolução de questões com as mesmas características. A dinâmica da aula investigativa promove esse diferencial — a professora já estava avaliando os alunos.

Isso ficou comprovado durante a observação da pesquisadora, quando viu o quanto a professora Lis ficou angustiada por terem seus alunos, em média, apresentado um resultado baixo na avaliação escrita, proposta pela professora ao final do desenvolvimento das três tarefas exploratório-investigativas para cumprir com o que a escola determinava — que os alunos fizessem uma avaliação mensal.

A professora e seus alunos, no momento da troca de idéias, podiam conhecer melhor os significados que um e outro atribuíam, o que constitui uma fase importante na aprendizagem. Mas neste caso os focos diferentes da professora e dos alunos fizeram com que o significado ainda não fosse apropriado. Pelas respostas dos alunos é possível perceber que o que a professora falava ainda não tinha sentido para eles, causando a dispersão da turma. A professora passou, então, a usar exemplos, como os alunos haviam pedido anteriormente para o grupo que apresentava.

A professora usou como exemplo a questão (e) (*teste para 18 mesas*) para que os alunos percebessem o que estava querendo dizer anteriormente. É possível notar no turno 3 (quadro 24) que a professora mudou a resposta da aluna (turno 2) dada pelo princípio aditivo para o princípio multiplicativo, para que ficasse da mesma forma (ordem) que na regra colocada pelo aluno Lui (N.2+2). Em seguida, a professora fez o teste para a regra da aluna Ju (N2). No turno 9 (quadro 24), é possível observar que a professora induziu ao significado de que uma letra e um número escritos um ao lado do outro estão se multiplicando, o que poucos alunos manifestaram saber (turno 10). Ao analisar as possibilidades, observa-se que é possível que esse significado tenha sido compartilhado durante as resoluções, embora dificilmente isso deva ter ocorrido em todos os grupos, uma vez que nem todos chegaram a escrever uma regra algébrica. Outra possibilidade a considerar é que esse significado possa ter sido revelado aos alunos nas aulas de Geometria, o que também não pôde ser confirmado.

[1]Lis: *Vamos pensar aqui no exemplo... nessa questão pedia para pegar a fórmula, a regra que vocês criaram e testar para 18, não era isso? Se a gente testar essa regra aqui,* [de Lui] *para o 18, substituindo o n por 18, como é que fica?*
[2]Uma aluna responde: *18 mais 18 mais 2.*
[3] Lis: *18 vezes 2 mais 2. 18 vezes 2?*
[4]Alunos: *36.*
[5]Lis: *Mais 2.*
[6]Alunos: *38.*
[7]Lis: *38. Agora vamos testar nessa regra aqui* [N2]. *O n não é 18, não é para 18 que nós estamos testando?*
[8]Alunos: *É.*
[9]Lis: *Se eu escrever 18 e o dois do lado, aqui quando não tem nada entre a letra e o número é vezes, não é?*

10 Poucos alunos: *É.* 11 Lis: *18 vezes dois dá quanto?* 12 Alunos: *36.* 13 Lis: *então esse resultado é o mesmo desse resultado dessa aqui?* [aponta para o outro algoritmo] 14 Alunos: *Não.* 15 Uma aluna: *Então a fórmula não é a mesma.*

Quadro 24

Depois de, finalmente, uma aluna observar a diferença (turno 15, quadro 24) que a professora queria que percebessem, muitos alunos falaram ao mesmo tempo, mas não foi possível identificar se era sobre a discussão realizada. A aluna Ju ainda tentou explicar sua regra para a professora. Isso fez com que a pesquisadora entendesse que a aluna ainda não aceitava que pudesse estar incorreto, pois seus resultados não estavam, o que significou que a explicação da professora ainda não tinha sido suficiente — a linguagem usada não era clara para os alunos.

Para fechar a discussão, a professora falou com a turma novamente (turno 1, quadro 25), concluindo a regra correta. Devido à agitação dos alunos, depois de uma apresentação longa, a professora ia encerrar a apresentação (turno 2, quadro 25), mas o aluno Lui a avisou que ainda faltava apresentar as duas últimas questões.

1 Lis: *Pessoal, todo mundo concorda então que se a fórmula é n vezes dois mais dois, a resposta não pode ser só n2. Ou n.2+2 ou se eu colocar 2 vezes n, que é 2n, mais dois. Entenderam?* 2 Lis: *Pessoal, mais alguma pergunta? Esclareceu a diferença ali, de não poder ficar só n2? Tudo bem?* [Lui fala com ela] *Então ainda tem a f) e a g) que eles vão fazer.*

Quadro 25

Na continuação dessa apresentação, em que os alunos explicaram como encontraram o número de mesas quando era dado o número de pessoas, é possível verificar indícios de como surgiu a idéia — que gerou a reflexão colocada no relato da professora, apresentado no final desse capítulo, e que serviu de base para que ela fizesse a sistematização da tarefa — de fazer a operação inversa. É possível verificar também a importância da intervenção da professora para melhor organizar a apresentação e os tipos de perguntas feitas por ela.

O que ocorreu durante essa apresentação fez com que a professora assumisse uma postura diferente ao organizar as apresentações na outra turma. A professora alertou os alunos da outra turma para que evitassem alguns problemas. A intenção era que as apresentações não ficassem longas e cansativas. A professora Lis interveio de forma a propiciar que mais grupos pudessem expor e, assim, possibilitar mais significados com a troca de idéias. Isso demonstrou a aprendizagem da professora com o movimento da aula investigativa.

Nessa parte da apresentação o aluno Lui passou a falar mais, talvez por se sentir mais confiante depois de sua regra ter sido considerada a mais correta na discussão anterior (quadro 26).

[1]Ju: *Na f) está perguntando quantas mesas seriam necessárias para acomodar 30 pessoas.*
[2]Lui: *Agora ele não deu a mesa, é para descobrir a quantidade de mesas.*
[3]Ju: *É.*
[4]Lui: *Então nós vamos fazer a operação inversa.*
[5]Ju: *Então, 30...* [e vira para a classe esperando uma resposta]
[6]Lui: *Fazer o inverso, qual é o inverso de mais?*
[7]Alunos: *Menos.*
[Ju escreve 30 – 2]
[8]Lui: *E da multiplicação?*
[9]Alunos: *Dividir.*
[10]Ju: *Então dá quanto aqui?* [apontando para o 30 – 2]
[11]Alunos: *28.*
[12]Ju: *Então qual é o inverso da multiplicação?*
[13]Um aluno fala alto: *É divisão.*

Quadro 26

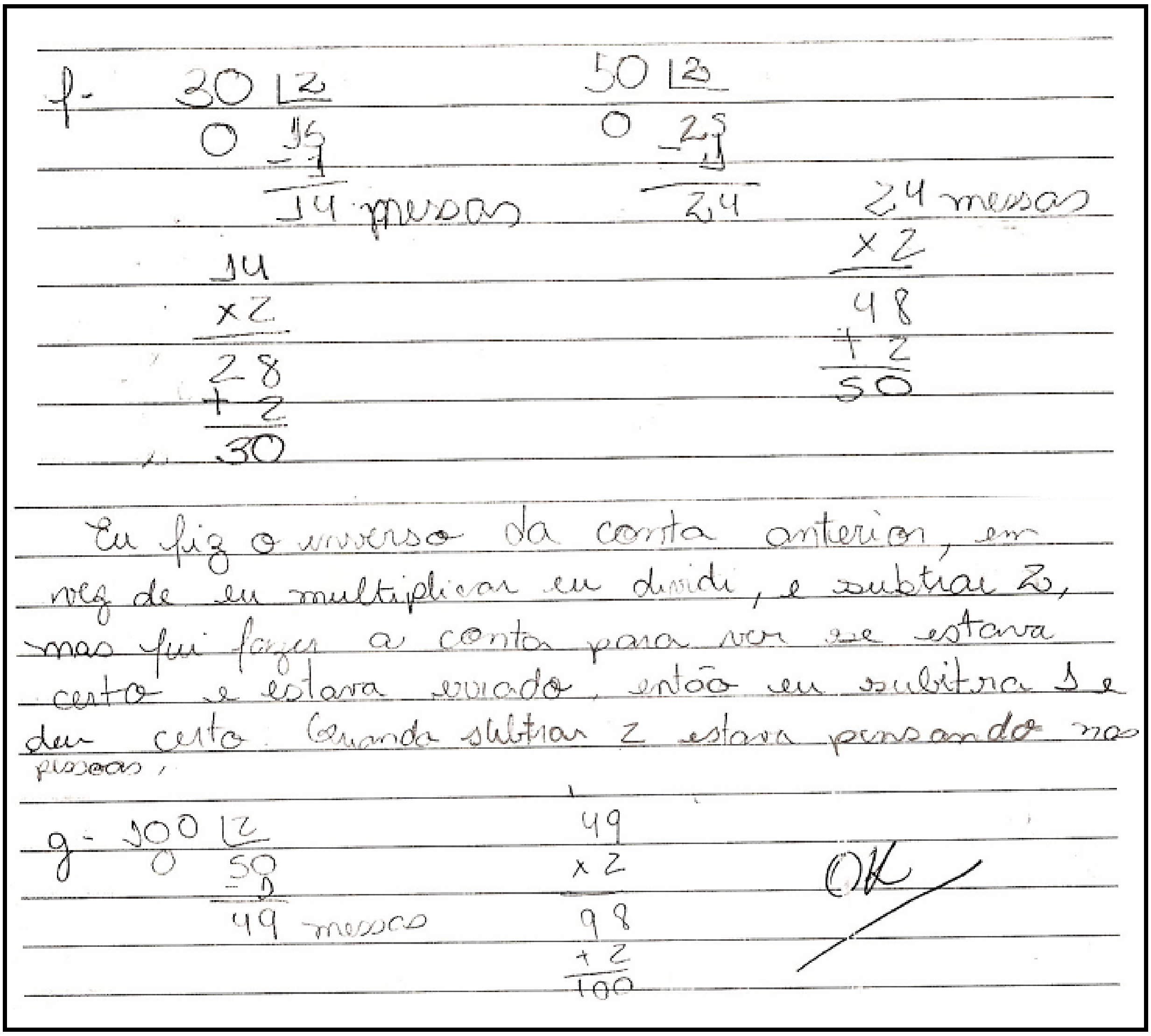
Nesse momento, a aluna Ju percebeu que algo estava errado e apagou o algoritmo. Mas entendemos que ela havia resolvido de forma diferente e, então, assumiu a explicação novamente. Observa-se no próximo quadro (quadro 27) que outro aluno sugeriu (turno 1, quadro 27) que se fizesse da maneira como a aluna Ju havia proposto. Isso deu mais segurança para que ela começasse a resolução novamente. A maioria dos alunos havia resolvido como a aluna Ju, e por isso a resposta dela foi aceita como correta (turno 3, quadro 27).

Os alunos Ju e Lui chegaram à mesma resposta, mas por caminhos diferentes. A confusão feita foi que ambos chamaram de "inverso" o caminho que utilizaram.

[1]Outro aluno da sala fala: *Primeiro faz a divisão!!*
[2]Ju: *Eu fiz assim..* [escreve na lousa o algoritmo da divisão 30 : 2] *primeiro faz a divisão, daí daria 15* [e confere nas suas folhas]
[3]Alguns alunos comentam: *Agora sim.*

Quadro 27

As resoluções de Ju e Lui podem ser observadas nas figuras seguintes. Primeiro a resolução da folha de Ju (figura 11):



f- 30 |2 = 0, 15 − 1 = 14 mesas

14 × 2 = 28 + 2 = 30

50 |2 = 0, 25 − 1 = 24

24 mesas × 2 = 48 + 2 = 50

Eu fiz o inverso da conta anterior, em vez de eu multiplicar eu dividi, e subtrai 2, mas fui fazer a conta para ver se estava certo e estava errado, então eu subtraí 1 e deu certo. Quando subtrai 2 estava pensando nas pessoas.

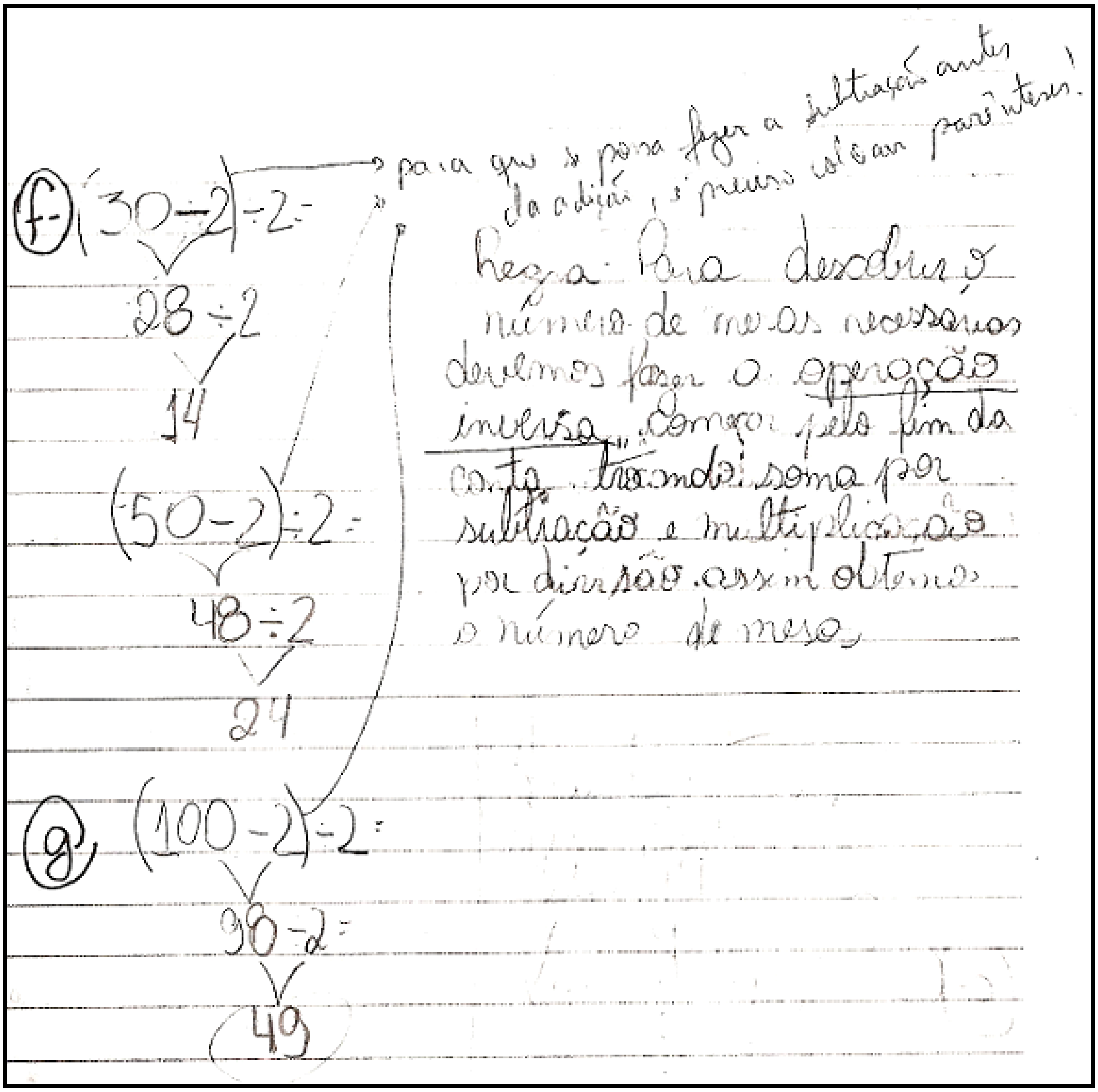
g- 100 |2 = 0, 50 − 1 = 49 messas

49 × 2 = 98 + 2 = 100

OK

Figura 5.11: Relatório escrito pela aluna Ju – Parte 2

Abaixo segue a resolução do aluno Lui (figura 12):


f- (30-2)÷2=
28÷2
14
(50-2)÷2=
48÷2
24
g (100-2)÷2=
98÷2=
49

para que se possa fazer a subtração antes da adição, é preciso colocar parênteses!

Regra: Para descobrir o número de mesas necessários devemos fazer a operação inversa, começar pelo fim da conta trocando soma por subtração e multiplicação por divisão assim obtemos o número de mesas

Figura 5.12: Relatório escrito pelo grupo do aluno Lui – Parte 2

No relatório de Lui é possível observar um tipo de “erro” comum que, se não lhe for dada atenção, resultará em dificuldades futuramente. O “erro” poderá tornar-se uma dificuldade relacionada à operacionalidade. O cálculo foi escrito na forma de uma expressão, resolvida na ordem em que os números apareciam. O aluno registrou o cálculo mental. Para a tarefa proposta era esse o caminho que levava à solução correta. No entanto, uma expressão desse tipo, isolada, estaria resolvida incorretamente. A professora fez o alerta em relação ao uso dos parênteses, mas ainda aconteceu esse tipo de falha na outra tarefa. Esse tipo de dificuldade, que também resulta do ensino focado na aritmética, é apresentado por Booth (1995), citado por Scarlassari (2007).

Nesse momento considerado importante, pois os diferentes resultados podiam gerar o confronto de idéias e novos significados, houve muita conversa devido à demora e aos diferentes resultados que não faziam sentido para os alunos. Um aluno questionou o processo de resolução da aluna Ju — *"porque tira 1"* —, e isso gerou várias perguntas ao mesmo tempo. Com a intervenção da professora foi possível explicar que o 1 que era subtraído representava 1 mesa. Isso porque 1 mesa é ocupada por duas pessoas. A princípio os alunos tentavam subtrair 2 do resultado da divisão, mas percebiam que não dava certo. Com a ajuda da professora puderam entender que, ao dividir o número de pessoas por 2, o resultado já significava o número de mesas. Então, para subtrair as duas pessoas das pontas, teriam que subtrair 1, ou seja, uma mesa que é ocupada por duas pessoas.

Foi justamente essa resolução da aluna Ju que gerou a dúvida da professora e fez com que esta refletisse e escrevesse o relato descrito no item 5.2. Embora a professora fosse experiente, o foco algébrico nas resoluções fez com que tivesse dificuldade em entender o caminho da aluna e ajudá-la a compreender por que não poderia tirar dois depois de dividir por dois. Isso mostra também o conflito entre a linguagem da professora e de seus alunos.

Houve ainda outras manifestações por parte dos alunos: um deles fez o processo por tentativas e outro explicou que primeiro tinha "tirado" dois e depois dividido por dois. A professora percebeu que o aluno Lui tinha usado procedimento semelhante à segunda manifestação e pediu para que ele explicasse para a turma, como pode ser observado no quadro 28.

[1]Lis continua: *Eles começaram dividindo, aí viram que complicava um pouco e depois vocês fizeram subtraindo primeiro... então falem para a classe o outro jeito.* [2]Lui: *O outro é pela inversa também, só que agora pega o 30, tirava 2, aí dava 28 e dividia por 2 que dá 14, o mesmo resultado da outra.* [3]Lis: *Alguém ainda não entendeu?* [4]Ju: *Alguém tem alguma pergunta?* [5]Lis: *Não? Então, obrigada pela apresentação.* [6]Alguns alunos observam: *Ainda falta a g) !*

Quadro 28

Embora no diálogo do quadro 28 não se observem manifestações, o conflito continuou. Mesmo depois da explicação, entendemos que a questão (g) (*Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?*) ainda gerou as mesmas dúvidas: aqueles que haviam primeiro dividido e depois subtraído 1 perguntaram por que Lui havia subtraído 2 e depois dividido por dois.

Os alunos que apresentavam falaram um após o outro e a turma não teve tempo para se concentrar, uma vez que estavam um pouco dispersos e cansados. Isso dificultou a tentativa de entender outro raciocínio usado e fez parecer complicada a fala dos alunos Lui e Ju. Os alunos manifestavam ser mais fácil a resolução igual à que haviam feito.

Naquele momento das apresentações, embora todos os esforços estivessem sendo feitos para que a dinâmica da aula investigativa pudesse acontecer como a professora havia planejado, os alunos foram se cansando da apresentação. O grande número de alunos e de grupos fez com que a dinâmica da aula investigativa não fluísse como descrita nos referenciais sobre as investigações matemáticas. A realidade revelou-se diferente das salas de aula portuguesas, onde ocorreram as investigações relatadas na maioria dos textos que compuseram o referencial para este trabalho. Isso mostra o conflito do movimento da aula investigativa vivido pela professora na presente pesquisa, o que parece ser um dos limites da utilização de tarefas exploratório-investigativas no atual contexto educacional.

Não obstante, esta tarefa pôde possibilitar o início do desenvolvimento do pensamento algébrico. Como foi possível observar, os alunos percebiam a regularidade e a necessidade da generalização, mas na socialização não foi necessário que todos entendessem os diferentes caminhos utilizados, pois muitos alunos ainda não sentiam necessidade de saber outro caminho utilizado se já sabiam um que levava à resposta correta. Para que isso acontecesse, seria necessário mais tempo para a negociação, desenvolvendo o pensamento científico (conceito de variação).

A dispersão e as dificuldades observadas podem ser explicadas quando nos lembramos do surgimento da álgebra simbólica, que veio da necessidade de uma linguagem universal para ser usada cientificamente, fruto de muita negociação entre aqueles que usavam linguagens diferentes. No caso dessas turmas de 6ª série, esse entendimento não aconteceu, o que se revelou principalmente quando se referiram à resolução da professora de Geometria. As professoras provavelmente estavam usando abordagens diferentes, o que também pode ter gerado dificuldades. Se as professoras tivessem conversado talvez isso pudesse ter sido diferente.

5.1.4 Bloco de análise 3: O conflito entre o pensamento e a linguagem

Para o terceiro bloco foi feita a análise do grupo dos alunos Vini, Juli, Lau e GaFri, mostrando mais nitidamente o conflito entre os diferentes caminhos utilizados para tentar chegar à álgebra simbólica e, ainda, o conflito que os alunos de 6ª série sentem entre o pensamento e a linguagem nessa fase do ensino de álgebra. Os alunos do referido grupo exploraram de maneiras diferentes a questão (f) **(***Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 30 pessoas? E para acomodar 50 pessoas?*), o que não havia ocorrido nos grupos analisados nos Blocos 1 e 2.

Assim como os outros alunos, esse grupo inicialmente fez os desenhos no rascunho. Usaram o processo da contagem para verificar os resultados. Isso ficou evidente na fala do aluno Vini (quadro 29), quando explicou para a pesquisadora o seu resultado da questão (f), dando ênfase ao ele que havia feito (grifo no turno 1), provavelmente tentando obter aprovação. Isso mostra a importância, para esses alunos, de chegar ao resultado correto — indício de que estão com o pensamento ainda aritmético, o que pode ser constatado no relatório deste grupo que, como outros, continha apenas os resultados numéricos.

[1]Vini: *Na f) a Juli, minha amiga, desenhou 30 "pontinhos" ... para colocar 30 pessoas... mas aí* ***eu*** *fiz a conta: 30 pessoas menos as 3 de cada lado, vai dar 24, e eu fiz dividido por 2 vai dar 12 mesas* [ele mostra as doze no meio] *e mais as duas de cada lado vai dar 14 mesas.*

Quadro 29

A fala de Vini remete, de certa forma e guardadas as devidas proporções, ao conflito que pode ter acontecido na história do desenvolvimento da álgebra simbólica: a aluna Juli parecia estar entendendo apenas com a representação pelo desenho e Vini já apontava o resultado pelos algoritmos, explicando e convencendo as colegas que inicialmente ainda conferiam o resultado encontrado por meio da contagem das pessoas no desenho.

Isso fez com que a professora pedisse para que o aluno Vini fosse explicar, mesmo depois da apresentação das alunas Juli e Lau, pois acreditou que, como havia argumentado para seu grupo, poderia fazer o mesmo com a turma, que teria as dúvidas esclarecidas.

A explicação do grupo de Vini, Juli, Lau e GaFri pode ser observada no quadro 30. Quando encontraram o número de mesas, o raciocínio usado foi o de tirar as pessoas e as mesas das pontas, dividir o resultado por dois e, então, somar as duas mesas das pontas, que haviam sido retiradas. Conforme foram apresentando, vários alunos já levantaram a mão. A professora Lis comentou para a classe que o raciocínio desse grupo era completamente diferente e pediu para que este explicasse desde o início e justificasse aquele procedimento, para que a turma pudesse compreender com clareza. As alunas Juli e Lau explicaram mais detalhadamente apenas a resolução da questão (f) (*Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 30 pessoas? E para acomodar 50 pessoas?*), uma vez que as anteriores tinham sido exploradas da mesma forma por outro grupo anteriormente.

[1]Juli: *Aqui são 30 pessoas, aí eu tirei 6 pessoas, porque são três da primeira mesa e três da segunda mesa, em três pessoas em cada uma.* [para mostrar esse cálculo Juli montou-o da seguinte forma: 30 - 3 <u>- 3</u> 24] [2]Lis: *Primeira e segunda mesa?* [3]Juli: *Primeira e última mesa.* [4]Lis: *A primeira e última?*

[5]Juli: *É. A gente tirou as três pessoas da primeira e da última mesa e deu 24. Daí a gente dividiu 24 por 2, porque 2 são as pessoas de cada mesa, uma em cima e um embaixo. Daí deu 12. Daí a gente somou mais dois porque são as duas mesas aqui e aqui* [gesticula para mostrar no desenho das mesas na lousa que são a primeira e a última mesa]. *Daí deu 14 mesas.* [6]Lis: *Pessoal, esclareceu? Quem não entendeu ainda levante a mão.* [7]Aluno: *Eu ainda não entendi nada...*

Quadro 30

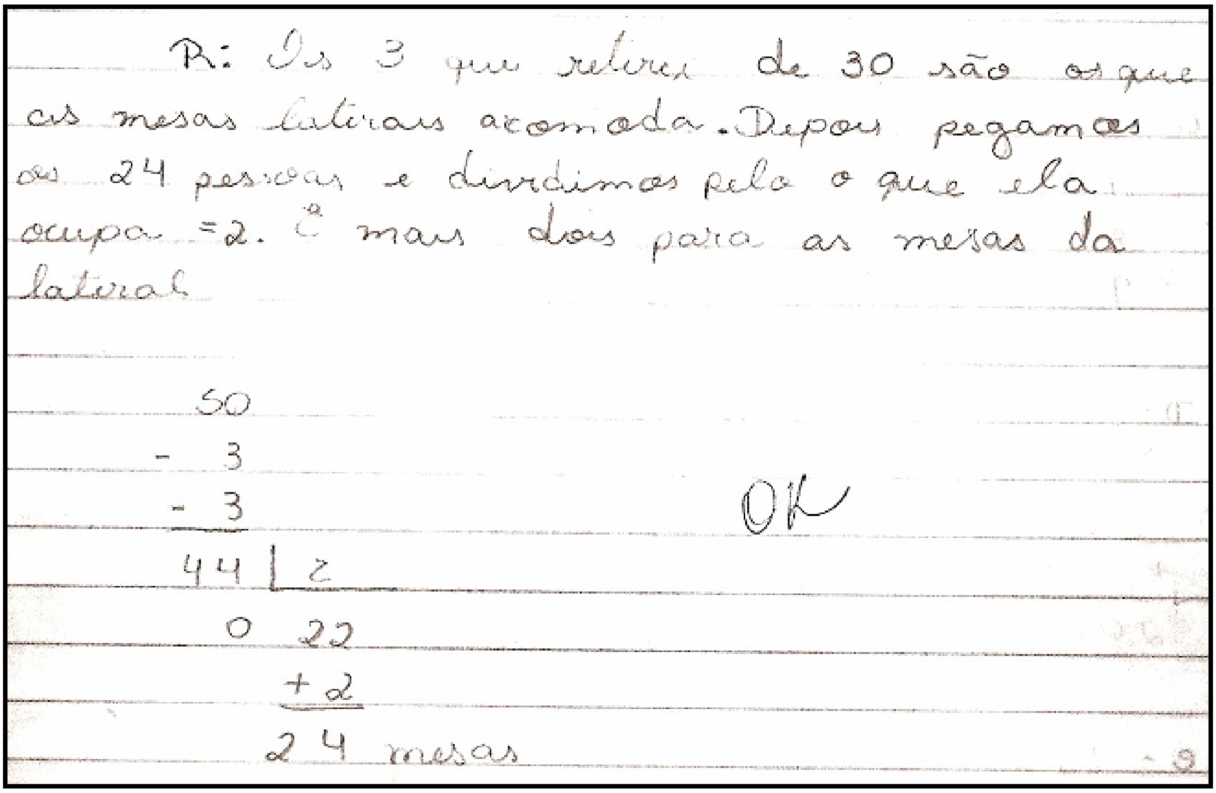
A professora então pediu para que o aluno Vini fosse até a lousa para explicar também e esclareceu que não estava criticando a apresentação das alunas, mas achava que talvez ele conseguisse esclarecer um pouco melhor para turma. A explicação do aluno Vini pode ser observada no turno 1 do quadro 31.

[1]Vini: *Aqui temos 30 pessoas, beleza? Aqui são as três pessoas que a gente está tirando do canto, certo?* [ele aponta o algoritmo 30 – 3 e vai mostrando também no desenho com bolinhas em volta dos quadrados que representam as mesas] *E aqui são as três pessoas que retiramos do outro canto* [novamente aponta para a o algoritmo, agora para o segundo — 3, e faz as bolinhas em volta do quadrado que representa a última mesa]. *Os três que a gente tirou são as três pessoas que a gente tirou de cada lado, de cada mesa. Então ficou 24 mesas, quer dizer, 24 pessoas. Essas 24 pessoas a gente dividiu por dois porque são 24 pessoas então dividiu por 2 porque tem uma de cada lado, que vai dar 12 pessoas..* [2]Lis: *12...?* [3]Vini: *12 mesas. A gente dividiu porque tem duas pessoas, uma de cada lado* [apontado para o desenho das mesas]. *Esse doze vai ser o tanto de mesas que vai dar mais dois, porque tem as duas mesas que ficam aqui do lado* [circulando as mesas dos cantos] *e então vai dar 14 mesas.* [4]Lis: *Esclareceu, pessoal?* [5]Alunos: *Sim.* [Lui levanta a mão] [6]Lis: *Fala, Lui.* [7]Lui: *De onde ele tirou o seis?*

Quadro 31

Os alunos que agora passaram a entender manifestaram-se, explicando ser das pontas, e gesticularam para tentar mostrar a disposição das três pessoas que ficam sentadas nas mesas dos cantos, o que revelou novamente ter sido válida a troca de idéias. O fato de gesticularem evidenciou que ainda estavam presos ao visual, ou seja, à representação pelo desenho — é o gesto como extensão do pensamento, o que significa que os alunos estavam construindo sua linguagem matemática, usando no momento a linguagem gestual, referente à pictórica.

Os alunos da turma compreenderam a idéia usada por Vini que, da mesma forma com que escreveu no relatório entregue pelo seu grupo, explicou-a aritmeticamente, como nos revela a figura 13:



R: Os 3 que retirei de 30 são os que as mesas laterais acomoda. Depois pegamos os 24 pessoas e dividimos pelo o que ela ocupa =2. E mais dois para as mesas da lateral

50
- 3
- 3
44 | 2
0 22
+ 2
24 mesas

OK

Figura 5.13: Relatório escrito pelo grupo Vini, Juli, Lau e GaFri.

Nas respostas das outras questões desta tarefa, este grupo também apresentou os algoritmos efetuados sem nenhuma referência à linguagem simbólica. No entanto, o aluno Vini foi um dos que demonstrou, ao final das investigações, ter passado do pensamento para a linguagem algébrica, embora no momento da tarefa 1 ainda estivesse em conflito: estava desenvolvendo o pensamento algébrico e ainda não tinha uma linguagem adequada para ele.

Essa percepção decorre de toda a produção do aluno Vini: a carta ao ET foi um dos instrumentos de avaliação para a professora, que buscava descobrir o que os alunos acharam e aprenderam com as investigações. Ali ficou evidente o quanto a experiência de ter passado pelas aulas investigativas foi marcante para o aluno, principalmente quando ele destacou outros fatores que marcaram a experiência, como o trabalho em grupo, a apresentação para a turma e a importância de prestar atenção às aulas.

Caro marciano,

Gostaria de falar sobre o
trabalho em que a professora
e a estudante Tatiane fizeram para
nós. Um trabalho que chama Investiga-
ção Matemática onde usamos 3 Tópicos:
- a lanchonete do Alan chonete
- cubolino e seus cubos
- a maquina mágica

O mais dificil foi trabalho
em grupo, a maioria não participava,
uma dica: escolha pessoas que colaboram

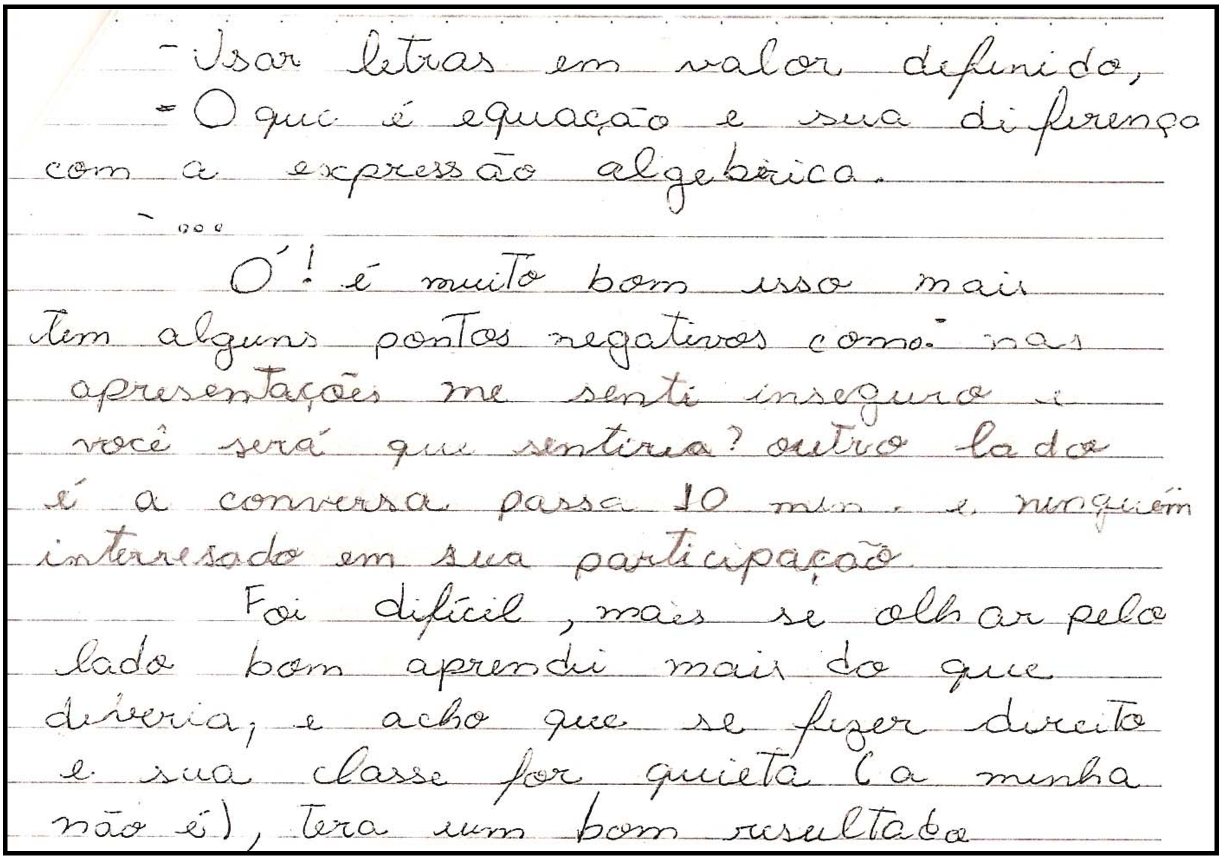
Uma investigação Matemática é
a penas as maneiras algebricas que
existem no problema

Faça um jeito para descobrir o
resultado mais não Tão facil mais
criativo, para mim o mais complicado
foi mais divertido.

Não aprendi não só matemática
mais Também fazer cartazes, prestar
mais atenção, um pouco mais de
respeito...

Se seguir estes passo você vai apren-
der que:

Figura 5.14: Carta escrita pelo aluno Vini – Parte 1.



- Usar letras em valor definido,
- O que é equação e sua diferença com a expressão algebrica.
- ...

O! é muito bom isso mais tem alguns pontos negativos como: nas apresentações me senti inseguro e você será que sentiria? outro lado é a conversa passa 10 min. e ninguém interresado em sua participação

Foi difícil, mais se olhar pelo lado bom aprendi mais do que deveria, e acho que se fazer direito e sua classe for quieta (a minha não é), tera um bom resultado

Figura 5.15: Carta escrita pelo aluno Vini – Parte 2.

O fato de o aluno ter descrito investigação matemática como *“maneiras algébricas”* (figura 5.14) pode ser explicado por ser esta a primeira experiência com tarefas exploratório-investigativas, cujo tema foi a álgebra.

A dificuldade descrita pelo aluno em ter a colaboração da turma na hora da socialização também foi sentida pela professora. É interessante notar como o fator tempo influenciou na dispersão da turma durante as apresentações. O aluno Vini descreveu exatamente o que aconteceu: os alunos ficaram cansados depois de algumas apresentações e dispersaram-se. A professora Lis não conseguiu fazer com que todos os grupos pudessem apresentar na turma de Vini. Ao todo foram formados sete grupos, o que significaria muito tempo para apresentar a mesma tarefa.

Apesar de tumultuadas as apresentações ocorridas nessa turma, pesquisadora e professora ficaram satisfeitas com os resultados apresentados, pois essa foi a primeira tarefa com abordagem investigativa dos alunos. A professora avaliou de forma positiva devido também ao trabalho coletivo, muito importante nas aulas de Matemática e, como destacado por Ponte et al. (1997), decisivo na negociação de significados matemáticos. Imprescindível na introdução de novos conceitos e idéias matemáticas, assim como foi feito no momento em que foi realizada a tarefa, o trabalho em grupo também se revelou importante para que os alunos se esforçassem mais para interagir com outros colegas. Mesmo tendo encontrado alguns problemas nesse sentido, a professora considerou que esse tipo de trabalho realmente foi bom para seus alunos aprenderem também a conviver melhor com seus colegas de turma. Essa importância também ficou evidenciada em outras cartas que os alunos escreveram após a realização do Projeto Investigações matemáticas.

É possível que uma análise mais pormenorizada das cartas indique outros dados e conduza à ampliação da pesquisa, possibilitando outro tipo de investigação. No entanto, isso só seria possível em outro momento, uma vez que não constituiu objetivo da presente pesquisa.

Além da convivência, a mudança de comportamento dos alunos foi destacada pela professora Lis quando, na entrevista realizada após a realização das tarefas, confirmou que os alunos não eram tão questionadores. Considerou que ainda podiam estar se adaptando a ela, professora nova para eles. Ainda assim, garantiu que passaram a perguntar mais após o desenvolvimento das tarefas:

> *[...] o questionar mais ficou muito mais vivo depois das investigações. Eu acho que eles aprenderam a questionar. Muitas vezes eles perguntavam, mas às vezes aquela era a pergunta assim "ai, eu não entendi!". Era mais difícil pra eles localizar o que eles não tinham entendido, coisa que eu acho que com a investigação ajudou-os a olharem e falar "não, eu não entendi essa parte, por que que você fez isso? Ou por que que você fez aquilo?". Eu acho que ajudou eles não só a perguntar, mas saber perguntar, saber o que perguntar, saber identificar onde está a dúvida. Eu acho que nesse sentido ajudou bastante.* [Trecho da entrevista, 10/07/2007]

A pesquisadora pôde observar que aconteceram importantes características de comunicação de um processo de aprendizagem investigativo, por meio do qual os alunos puderam examinar outras perspectivas e desenvolver a habilidade de refletir sobre elas, metas essenciais no desenvolvimento da comunicação na aula de Matemática, como afirmam Alro e Skovsmose (2006).

Desenvolver a comunicação é também desenvolver a linguagem nas aulas investigativas. Os alunos da professora Lis passaram a comunicar-se de outra forma, como observado por ela: tornaram-se mais questionadores, aprendendo a expor suas idéias. Também aprenderam a interpretar o que está sendo falado, para questionar mais exatamente o que não entenderam.

Em resumo, esse aprender a questionar aconteceu justamente diante do conflito entre o pensamento e a linguagem. Os alunos desenvolviam um pensamento, mas tinham dificuldade para expressá-lo ou não tinham ainda a linguagem necessária para isso. Os diferentes raciocínios usados também geraram esses conflitos — alunos que tinham encontrado a solução por determinado caminho não entendiam o outro caminho e nem percebiam a necessidade de entender outro.

5.2 A comunicação da professora com ela mesma

Na presente pesquisa, a professora parceira (Lis), intrigada sobre o processo de resolução utilizado pelos alunos numa situação de investigações nas aulas de Matemática, escreveu uma reflexão sobre o acontecimento, revelando o papel da comunicação de idéias matemáticas, que refletiu em aprendizagens dos alunos e também dela:

Aprendendo, com os alunos, uma nova relação matemática

Na equação 2n + 2 = 50, ao resolvermos pela inversa, não podemos fazer primeiro a divisão por 2?

O que aconteceria se começássemos dividindo? →

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{2n+2}{2} &= \frac{50}{2} \\ n + 1 &= 25 \\ n &= 25 - 1 \end{aligned}}$$

[...] Além dos desentendimentos, muitas situações de desacordo precisaram ser equacionadas e nesses momentos minha intervenção se fez necessária. Estas situações, porém, contribuíram para o envolvimento dos alunos nos processos de argumentação. Uma delas, que ocorreu em dois grupos, merece ser relatada:

Quando tentaram encontrar o número de mesas necessário para acomodar 50 pessoas, o grupo do Jordão, que já havia construído uma regra para encontrar o número de pessoas, a partir do número de mesas (2n+2) tentou fazer o caminho inverso e pensava da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l} 50 & 2 \\ \hline & 25 \end{array}$$

Porém, ao testarem, viam que a resposta estava incorreta, pois,

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{-\ 2} \\ 23 \end{array} \qquad 23 \, . \, 2 + 2 = 46 + 2 = 48 \text{ pessoas.}$$

Eu percebia que estava errado, mas não conseguia perceber por que a idéia de seguir pela operação inversa não dava certo. Como, naquele momento, não poderia parar para refletir, tentei explicar, usando o próprio raciocínio deles, como poderíamos resolver aquele problema, se poderiam subtrair pessoas de mesas, ou seja, eles sabiam que na conta

$$\begin{array}{l|l} 50 & 2 \\ \hline & 25 \end{array}$$
25 → 25 era o número de mesas, e na conta

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{-\ 2} \\ 23 \end{array}$$
- 2 → 2 era o número de pessoas

Eles ficaram confusos e então perguntei: Se querem descontar estas duas pessoas, que são aquelas que se sentarão nas pontas, quantas mesas precisam tirar?
Eles perceberam, então, que bastaria tirar uma mesa e, aí sim, o resultado seria correto.

$50 \,\llcorner 2$	25
$\quad 25$	$\underline{-1}$ (mesas = 2 pessoas)
	24

$24 \,.\, 2 + \underbrace{2}_{\text{pessoas das pontas}} = 50$

Isso foi ótimo para resolver o consenso, mas não foi suficiente para esclarecer minha própria dúvida. Conversando depois com a Tati, ela começou a falar que outro grupo explicava da seguinte forma o raciocínio:

50 pessoas – 6 pessoas que sentam nas mesas das pontas resulta 44 pessoas, que dividido por 2, resulta 22 mesas. Juntando com as 2 mesas das pontas seriam 24 (mas parece que o grupo não conseguia chegar nisso).

Foi depois, em casa, pensando sobre os dois episódios que percebi onde os alunos do primeiro grupo estavam errando. Na equação 2n + 2 = 50, primeiro teríamos que subtrair 2, para depois dividir por dois. Esta era a lógica que o grupo do segundo episódio utilizava.

Refletindo sobre essa "descoberta" com a Tati na sexta-feira, quando nos encontramos para discutir um texto sobre argumentação e analisar os resultados obtidos pelos alunos da Ju, percebi que aquele caminho não poderia mesmo ter sido outro, pois seria melhor respeitar o raciocínio dos próprios alunos do que tentar impor-lhes outro, mas percebi algo novo para mim: a relação entre a hierarquia das expressões numéricas e a hierarquia das equações: elas são opostas!

Isso, agora, parece óbvio, mas nunca fiz esta relação com meus alunos!

Percebi que, por ter respeitado o raciocínio dos alunos, terei, depois, fortes argumentos para explicar-lhes por que deixar a divisão para depois da soma ou subtração numa equação!

Fiquei feliz por perceber que pude, mais uma vez, aprender com meus alunos, mesmo eles estando em uma sexta série!

O relato escrito pela professora Lis mostra sua reflexão e a mudança que houve desde o Movimento da Matemática Moderna. Alguns professores hoje passam a refletir sobre o que fazem, a comunicação é diferente. Escrever sobre o acontecido, refletir sobre o vivido na sala de aula coloca a professora em movimento. A professora também está estabelecendo a comunicação de suas idéias na forma de um registro. Isso possibilita a comunicação com ela mesma e com os teóricos que ela tem estudado. Além disso, a reflexão nasceu também devido à troca de idéias entre professora e pesquisadora. O registro possibilitará que essa comunicação ocorra também com outros professores e influenciará na prática da professora a partir daquele momento.

A professora Lis escreveu o relato após a aula em que os alunos desenvolveram a primeira tarefa, momento em que a dúvida foi gerada, porém antes que ocorressem as apresentações dos alunos. A pesquisadora observou que a professora passou a adotar em suas falas o mesmo raciocínio que descreveu no relato, para poder explicar e interagir com os alunos.

O mesmo discurso foi usado pela professora, ao fazer a sistematização da tarefa, para explicar o método de resolução de equação também conhecido como "método da transposição de termos", que utiliza a passagem dos termos de um membro para outro, usando a operação inversa (FREITAS, 2002). A professora chamou esse método de "inversa". O trecho transcrito da fala da professora deixa claro como o raciocínio desenvolvido durante o relato passou a ser usado.

> *[...] ou posso resolver uma equação pela inversa, só que, se for pela inversa, eu não posso multiplicar primeiro, porque daí é o inverso da expressão numérica, primeiro eu vou fazer a soma, que vai virar subtração, depois a multiplicação que vai virar divisão... <u>Então tem que ser a operação inversa na ordem invertida</u>.* [Trecho da transcrição da sistematização, 08/05/2007, grifo da pesquisadora]

A dúvida que gerou a reflexão da professora aconteceu devido ao fato de os alunos chamarem de "inversa" outro método de resolução de equação conhecido como "balança", nome também adotado pela professora. Esse método é fundamentado nas propriedades da igualdade, em que é efetuada a mesma operação em ambos os termos da equação (FREITAS, 2002). O método da "balança" também foi explicado pela professora. "*...a idéia da balança, quando eu divido por dois, eu divido os dois lados por dois. Depois, se eu tenho um a mais aqui e eu quero eliminar esse um, então eu tiro um desse lado e tiro um do outro também.*" [Trecho da transcrição da sistematização, 08/05/2007].

Mesmo a professora Lis parecendo ter o domínio da linguagem formal, foi possível ver pelo seu relato que ela a princípio não conseguiu entender o pensamento dos alunos. Aparentemente, o pensamento da professora era algébrico, para entender o pensamento aritmético dos alunos. Ela teve dificuldade em perceber, pensando algebricamente, por que o que os alunos chamavam de "inversa" não dava certo ao subtrair 2: eles pensavam o que seria, para a professora, o método de efetuar a mesma operação em ambos os termos da equação — método da "balança", uma vez que a professora chamava de "inversa" o método de resolução da transposição de termos. No entanto, ela não estava pensando mais na equação, e era preciso entender o raciocínio deles.

Em nossa concepção, outro professor que não tivesse essa postura de refletir provavelmente agiria diferente. Um professor que não buscasse entender o que estava acontecendo e como os alunos estavam pensando poderia ter simplesmente determinado que os alunos deveriam primeiro subtrair para depois dividir, sem maiores explicações.

6 Algumas considerações

Os dados revelados durante o desenvolvimento da tarefa exploratório-investigativa levaram-nos à seguinte questão: *Quais indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico são revelados por estudantes de 6ª série a partir da comunicação estabelecida em sala de aula?*

A análise tornou possível perceber os indícios de formação da linguagem e do pensamento algébrico dos alunos no ambiente e no movimento proporcionados por tarefas exploratório-investigativas.

A tarefa proposta fez com que os alunos começassem a perceber a necessidade de fazer generalizações e de uma linguagem específica para isso. No entanto, por terem o raciocínio no foco aritmético, estavam ainda no processo da contagem, fazendo sucessivas tentativas para encontrar as soluções. Eles ainda se preocupavam muito mais com o resultado final, em encontrar a resposta correta. Essa preocupação é uma das conseqüências de um ensino de aritmética mais rigoroso.

Por estarem os alunos no início do desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico, os indícios revelados são os que envolvem a palavra ou o desenho (pictórico) – necessários para chegar à álgebra simbólica. Somente esta permite fazer generalizações e fórmulas.

Ao pensar na comunicação em uma aula de Matemática todos têm a certeza de que ela sempre ocorre mesmo em uma aula dita tradicional, porém, durante a atividade investigativa, a comunicação não ocorre da mesma forma: a aula investigativa pode proporcionar uma dinâmica diferente e uma comunicação que pode levar a novas aprendizagens. Os alunos observados neste estudo tornaram-se mais questionadores. O relacionamento tanto entre eles quanto com a professora também melhorou. Tudo isso só foi possível porque a professora também estava disposta a mudar sua postura, embora algumas questões não tivessem permitido as mudanças desejadas e possivelmente necessárias. Um exemplo é a separação da disciplina (Álgebra e Geometria) e a utilização de um livro didático único, o que desfaz a proposta pedagógica do livro adotado pela escola.

Também ficou evidente após as observações que o papel do professor é fundamental para que a comunicação aconteça e, ainda, para que seja valorizada. Durante o processo de comunicação o professor precisa escutar seus alunos e incentivá-los a explicar suas idéias. Para que a aprendizagem ocorra, é fundamental que os professores dêem oportunidade para que seus alunos explorem problemas, desenvolvam estratégias, discutam e argumentem, a fim de que passem a valorizar mais a Matemática. É claro que compete ao professor ter uma nova postura, desenvolvendo um ambiente que estimule a discussão em sala de aula.

As tarefas exploratório-investigativas propostas aos alunos de 6ª série permitiram que estes participassem ativamente das resoluções: puderam discutir e colocar questões para buscar compreender os argumentos e o raciocínio dos colegas, o que constituiu uma oportunidade importante de aprendizagem da Matemática. Este tipo de tarefa proporcionou um ambiente de sala de aula que os envolveu na atividade matemática e na troca de idéias e descobertas. Mesmo apresentando um problema clássico, que pode ser encontrado com outras histórias, o contexto foi diferente na tarefa proposta. A vontade da professora em transformá-lo e o fato de a turma ter aceitado a nova proposta possibilitaram muitas aprendizagens.

Os alunos se sentiram valorizados ao participarem das aulas, ao serem ouvidos pelos outros alunos e pela professora. Eles passaram a expor mais suas idéias. As cartas que escreveram mostraram o quanto eles gostaram desse tipo de atividade.

No caso da professora Lis, integrante de um grupo de estudos, seu papel foi particularmente diferente. Por isso foi importante conhecer mais sobre ela. Lis é uma professora que já tinha experiência com aulas investigativas, que estudou e escreveu sobre o assunto. Além disso, entre outras atividades, continua participando de grupos de estudos.

A professora tentou estabelecer uma comunicação diferente desde o início, quando aceitou e teve papel fundamental para a construção das tarefas junto com o grupo de estudos (GCEEM). Ainda estabeleceu a comunicação com ela mesma quando escreveu o relato a respeito da dificuldade que encontrou ao ajudar os alunos durante a tarefa. A colaboração da professora, compartilhando tudo o que aconteceu, foi essencial para a realização desta pesquisa.

Também o grupo de estudos, ao proporcionar que todas as professoras trabalhassem juntas, fez com que esta pesquisa contribuísse para ampliar o conhecimento das professoras envolvidas. A troca de idéias e de experiências em relação às tarefas exploratório-investigativas, de cuja escolha e elaboração elas participaram desde o início, tornou diferente o trabalho de levar a outros professores uma nova metodologia. É diferente do que a maioria dos professores conhece, pois não se limita a contar para o outro sobre o ocorrido e dizer que ele deveria fazer também.

As cartas escritas pelos alunos também tornaram possíveis outras considerações, pois evidenciaram alguns conflitos e dificuldades que os alunos sentiram: alguns demonstraram dificuldade em falar para a turma e em entender as explicações da professora. Isso fez com que os dados fossem analisados com um outro olhar.

Foi então que foram percebidos os diferentes focos da professora e seus alunos. A professora, que já tinha o conhecimento matemático, tinha o foco algébrico tanto do pensamento quanto da linguagem. Como os alunos tinham estudado sempre com o foco aritmético, a linguagem simbólica usada pela professora causou muita dúvida nos alunos, o que gerou o conflito para tentar entender e usar corretamente as letras na Matemática. As dificuldades que puderam ser notadas foram devidas provavelmente à falta dos conceitos que não foram trabalhados anteriormente para que a linguagem algébrica pudesse ser construída. O principal deles é o significado da variável. A falta da produção de significados das estruturas algébricas e de suas representações também foi o motivo das dificuldades de operacionalidade encontradas.

Na fase de elaboração do presente estudo, não houve preocupação em desenvolver tais significados: as professoras do grupo de estudos, ao pensar na tarefa a ser aplicada e adaptar as questões, pretendiam diversificar a prática de sala de aula e desenvolver o pensamento algébrico por meio da abordagem investigativa, estimulando a comunicação, a troca de idéias e argumentações para que o uso da letra tivesse significado para os alunos. Foi pensado o movimento regular, mas também não foi considerado que ele nem sempre existe; não foram levados em consideração outros tipos de movimentos para entender melhor a questão da fluência.

Apesar de todas as considerações feitas pelas professoras, ainda houve o conflito. Os alunos que estavam com o pensamento em resoluções aritméticas foram induzidos a ir para a linguagem estritamente formal, o que gerou muitos "não entendi" — nesse momento, os alunos esclareciam as dúvidas uns dos outros sempre com exemplos aritméticos. Isso nos leva a concluir que a falta de conceitos gerou os conflitos.

Os alunos encontraram dificuldades para entender e aceitar as respostas algébricas e para dar significados para as letras. Segundo o estudo realizado para o referencial desta pesquisa, isso acontece porque os alunos tiveram o contato com uso das letras nas aulas de Matemática sem antes compreender os conceitos relacionados à variável (movimento) e as diferentes linguagens que podem ser usadas para representá-la. Os autores lembram-nos que a variável é um conceito cuja aprendizagem é um processo difícil e lento, associado ao movimento da vida — fluência; e defendem que, trabalhando esse e outros conceitos envolvidos, os alunos seriam capazes de construir uma linguagem mais sintética, desenvolvendo símbolos parecidos com os usados na linguagem simbólica para, então, chegar à linguagem formal da álgebra.

O fato de as professoras, ao escolherem e elaborarem as tarefas, não levarem em consideração esses conceitos que envolvem a álgebra, e sim o trabalho com os padrões, é explicado pela formação que tiveram: todas aprenderam álgebra usando padrões. Por isso se torna relevante considerar que não é responsabilidade dos professores quando não proporcionam aos seus alunos o desenvolvimento do significado da variável — fluência.

Ainda puderam ser observados na análise dos dados alguns erros de representação numérica e algébrica e que não tinham sido vistos anteriormente. Quando as dificuldades foram se sobrepondo, a professora Lis passou a ser mais rigorosa no sentido de que os alunos usassem a linguagem simbólica. Isso pôde ser percebido pela pesquisadora durante as outras tarefas.

As cartas que a professora propôs que os alunos fizessem, com o intuito de saber o que eles tinham achado das tarefas, acabaram por mostrar-se um importante instrumento para a pesquisa. Uma análise pormenorizada dessas cartas proporcionaria ainda um outro olhar que, embora não seja objetivo deste estudo, poderá ser feito em outro momento, pois os dados possibilitam ainda outros olhares, dando abertura para novos estudos.

É interessante destacar ainda a comunicação com o grupo de estudos, para o qual foram levados as potencialidades, as dificuldades e os limites encontrados durante as tarefas. Compartilhar tudo isso faz com que as professoras também se sintam motivadas a buscar novas abordagens e, ainda, a superar algumas das dificuldades encontradas, uma vez que refletem e discutem sobre como aperfeiçoar as tarefas e a dinâmica que elas proporcionam.

As professoras puderam, com a experiência compartilhada, refletir também sobre o atual contexto educacional. Algumas dessas reflexões puderam ser apontadas durante a análise: o movimento da aula investigativa e a questão tempo. A dinâmica dessas aulas demanda um tempo maior, pois são vários os grupos formados e normalmente há apenas um professor para coordenar o trabalho. No caso desta pesquisa, a pesquisadora pôde ajudar a professora e a maior turma tinha 32 alunos, porém a realidade é ainda mais angustiante, pois as outras professoras têm em média 40 alunos, o que significa 10 grupos em uma atividade investigativa e cada uma delas trabalha sozinha. Coordenar 10 grupos apresentando a mesma tarefa seria naturalmente conflitante.

Depois de estudar sobre as investigações e ler a respeito de experiências vividas, ficou nítida a diferença entre a realidade que elas enfrentam e aquela encontrada nos referenciais. Isso também muda os resultados, pois o movimento é diferente, assim como os alunos, que estão iniciando essa abordagem e precisam de tempo para mudar a postura em sala de aula.

Há ainda a preocupação com o currículo escolar: todas as professoras se sentem pressionadas a cumpri-los, o que fica ainda mais evidente quando a escola não é pública. O material oferecido pela escola — neste caso era o livro didático — precisa ser usado, ainda que não totalmente. A nova abordagem é aceita, desde que não atrase ou que se deixe de cumprir o que a escola estabeleceu. Isso fez com que a professora Lis se sentisse um pouco decepcionada por ter-se esforçado para desenvolver da melhor forma possível as tarefas. Ela procurou avaliar os alunos não apenas em uma prova escrita, mas levando em consideração outros fatores, tanto dos relatórios como das apresentações. Ainda assim, foi cobrada pelo atraso no conteúdo.

A professora Lis ainda se deparou com o fato de a professora de Geometria, ao seguir o livro didático, ter trabalhado equações antes dela, o que fez com que ela deixasse de trabalhar com a idéia da "balança" para resolver equações, porque era com a idéia da "inversa" que a professora havia trabalhado. A falta de negociação entre as professoras não permitiu que fosse diferente.

Outra observação importante é a diferença dos objetivos e dos significados entre os envolvidos. A professora Lis tinha o objetivo de ensinar Álgebra e possibilitar que seus alunos aprendessem a generalizar e a resolver equações. Os significados eram claros para ela. Os alunos não viam a Matemática da mesma forma — tinham preocupação apenas em resolver as tarefas e encontrar a solução. Por outro lado, a professora de Geometria queria ensinar o conteúdo de Geometria, de maneira que para ela também tinha significado claro. Isso tudo gerou alguns dos conflitos observados na análise.

Essas e outras experiências e angústias, além de terem sido compartilhadas no grupo, foram também compartilhadas e discutidas com a pesquisadora nos momentos em que acompanhou a professora durante a pesquisa de campo. As considerações feitas também determinaram mudanças durante a tarefa: por exemplo, ao refletir e discutir sobre algum dos acontecimentos em uma das turmas, a professora mudou de atitude na outra.

Na análise dos dados algumas dessas discussões anteriores foram consideradas pela pesquisadora. Os resultados da análise desta pesquisa também serão apresentados e discutidos com as professores do grupo. Com certeza novas reflexões, aprendizagens e estudos surgirão.

As tarefas exploratório-investigativas revelaram-se um potencial para o desenvolvimento do pensamento e também da linguagem algébrica dos alunos, pois permitiram que estes observassem padrões e regularidades e pudessem explorá-los. Puderam continuar uma seqüência e prever termos, o que é o primeiro passo para chegar à generalização. Mas é preciso considerar que outros aspectos devem ser levados em conta para que surjam resultados ainda mais positivos. Os conceitos que fizeram falta para os alunos — variável, campo de variação, incógnita, equação, generalização — observados nesta pesquisa, precisam ser desenvolvidos desde os primeiros anos de escolaridade para que as tarefas investigativas levem os alunos a compreender os aspectos essenciais da álgebra. Trabalhar com regularidades sem os alunos saberem os conceitos não basta para a efetiva aprendizagem da álgebra.

A álgebra pode deixar de ser considerada difícil para professores e alunos a partir do momento em que se passa a motivar e valorizar mais nossos alunos, principalmente em relação à comunicação que se estabelece na sala de aula. Para isso é preciso, entre outras providências, desenvolver atividades que possibilitem a discussão, a troca de idéias, a exploração e a criação de significados pelos próprios alunos.

Acreditamos que este trabalho teve contribuição para o tema na área da Educação Matemática, pois evidenciou a diferença do contexto brasileiro em relação ao contexto que geralmente é descrito em pesquisas e no referencial sobre as investigações matemáticas. Esta pesquisa mostra que o contexto é diferente; que um professor, assim como esta pesquisadora, que conhece e gosta da proposta, quando vai tentar na prática, percebe que é diferente: a descrição da prática apresentada nos livros e nos artigos faz-se impossível na sala de aula de muitos professores como a pesquisadora e a professora Lis, seja em escolas públicas ou particulares.

Ao passar pela experiência de realizar esta pesquisa, pudemos perceber o quanto ela aproxima a teoria da prática. Muito do que se lê sobre Educação Matemática passou a fazer sentido na prática. E, como professora, fica impossível acomodar-se e não buscar novas metodologias visando melhorar a qualidade da educação. É angustiante perceber quantas falhas ainda temos e quanto o sistema precisa mudar para que tais melhorias sejam uma realidade.

Em relação ao ensino da álgebra, poderemos ter mais sucessos se, desde o início da escolarização, os alunos puderem ter contato com outras abordagens para desenvolver a aprendizagem tanto aritmética quanto algébrica; e, para isso, é importante que os professores tenham uma formação melhor, que lhes dê condições para oferecer tal oportunidade para os alunos.

Referências

ALRO, H. E.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática.** Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ARAUJO, E. A. **Influências das habilidades e das atitudes em relação á Matemática e a escolha profissional**. 1999. p. 232. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1999.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (APM). **Normas para o currículo e avaliação em Matemática escolar.** Tradução portuguesa da edição original de 1989 (Standards, NCTM). Lisboa: APM, 1991.

BOAVIDA, A. M. **A argumentação na aula de Matemática:** olhares sobre o trabalho do professor. In: XVI SIEM, 2005. Disponível em: <http://fordis.ese.ips.pt/siem/programa.asp>. Acesso em: 06 jun. 2006(a).

BOAVIDA, A. M. **A argumentação em Matemática - investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração**. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade Clássica de Lisboa, 2005(b).

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1999. (Colecção Ciências da Educação).

BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.** Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de Lisboa, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROCARDO, J. **As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano**. 2001. 621 p. Tese (Doutorado – Departamento de Educação), Universidade de Lisboa, 2001. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/jbrocardo/jbrocardo.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2006.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática**. 2004. 197 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 2004.

CUNHA, M. H. **Saberes profissionais de professores de matemática:** dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. 1998. 209 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 1998.

ERNEST, P. Investigações, Resoluções de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES et al. (Org). **Investigar para aprender matemáticas.** Lisboa: APM, 1996.

FERREIRA, A. B. DE H. **Miniaurélio:** o dicionário da língua portuguesa. Curitiba: Positivo, 2005.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso em: 10 ago. 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

FONSECA, H. **Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula**. 2000. 209 p. Tese (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2000. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/hfonseca/index.htm>. Acesso em: 26 abr. 2006.

FREITAS, M. A. **Equação do 1° grau:** métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio. 2002. p. 137. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Pontífica Universidade Católica, São Paulo, 2002.

GOLDENBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de matemática. In: ABRANTES et al. (Org). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. p. 35-49.

GOMES, A. A. M. **Aulas investigativas na educação de jovens e adultos (EJA):** o movimento de mobilizar-se e apropriar-se de saber(es) matemático(s) e profissional(is). 2007. 189 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade São Francisco, Itatiba, 2007.

JAWORSKI, B. **Investigating mathematics teaching:** a constructivist enquiry. London; Washington, D.C.: Falmer, 1994.

LAMONATO, M. **Investigando geometria:** aprendizagens de professoras da educação infantil. (Dissertação de mestrado em Educação) Universidade Federal de São Carlos - UFSCar. São Carlos, 2007.

LIMA, C. N. M. F. **Investigação da própria prática docente utilizando tarefas exploratório-investigativas em um ambiente de comunicação de idéias matemáticas no ensino médio.** 2006. 204 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade São Francisco, Itatiba, 2006.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

MARTINHO, M. H.; PONTE, J. P. DA. **Comunicação na sala de aula de Matemática:** práticas e reflexão de uma professora de Matemática. Disponível em: <http://fordis.ese.ips.pt/docs/siem/texto33.doc> Acesso: 10 out. 2007.

MENDES, E. J. **A actividade matemática escolar numa perspectiva investigativa e exploratória na sala de aula – implicações para a aprendizagem.** 1997. 247 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 1997.

MENEZES, L. Comunicação na aula de Matemática e desenvolvimento profissional dos professores. **Revista Millenium on.line**, n. 20, out. 2000. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/20_ect7.htm> Acesso: 10 out. 2007(a).

MENEZES, L. **Matemática, linguagem e comunicação**. **Revista Millenium on.line**, n. 20, out. 2000. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/20_ect7.htm> Acesso: 10 out. 2007(b).

MENEZES, L. **Investigar para ensinar matemática:** contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores. 2004. 696 p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2004.

MIORIN, M. A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Revista Zetetiké**, Campinas: v. 1-, n. 1, 1993.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. (Coord.). **Argumentação e provas no ensino de Matemática**. Instituto de Matemática/UFRJ - Projeto Fundão, 2001.

NODDINGS, N. Álgebra – um portal! Um mistério! **Educação em Matemática**: **Revista da associação de Professores de Matemática,** Lisboa, n.85, nov./dez., 2005.

PIRIE, S. **Mathematical investigations in your classrooms - a pack for teachers.** University of Oxford & University of Warwick, 1987.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. **Álgebra** no currículo escolar. **Educação em Matemática – Revista da Associação de Professores de Matemática,** Lisboa, n.85, Nov./Dez. , 2005.

PONTE, J. P. et al. **Investigando as aulas de investigações Matemáticas.** Disponível em: <http://membros.aveiro-digital.net/matematica/textos/textos.html>. Acesso em: 25 maio 2006.

PONTE, J. P. O. DA et al. A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. **Revista Portuguesa de Educação**, v. 20, n. 2, p.39-74, 2007.

PONTE, J. P. et al. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário, 1997.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. 135 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

SEGURADO, M. I. **A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo.** 1997. 154 p. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de Lisboa, Lisboa, 1997. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/msegurado/irene-tese.pdf >. Acesso em: 20 mai. 2006.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. **Álgebra:** das variáveis às equações e funções. São Paulo: CAEM, 1994.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal do currículo. **Educação em Matemática – Revista da associação de Professores de Matemática,** Lisboa n.85, nov./dez., 2005.

Anexos

Anexo A: Tarefa 1 — A LANCHONETE DO ALAN XONETE

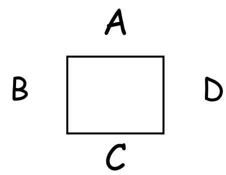
Instruções:
Os grupos serão constituídos por quatro pessoas, de tal forma que sejam divididas as obrigações de cada um: - Dois Redatores: responsáveis pela redação final do registro a ser entregue.

- Dois Relatores: serão dois membros do grupo, responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe. Apesar da divisão acima, todos deverão participar das etapas de produção do estudo.

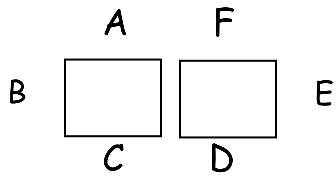
A LANCHONETE DO ALAN XONETE

Obs.: Deixe por escrito o raciocínio de cada questão de forma clara.

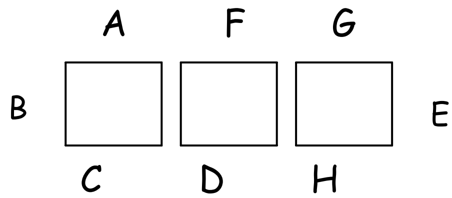
Sexta feira passada, após a aula, quatro amigos, Aderbal, Belinda, Crisóstomo e Dráusio, foram comer umas pizzas e tomar um guaraná na lanchonete do Alan Xonete. Lá chegando, o garçom Edgar Som já havia separado uma mesa para os quatro amigos se sentarem:



A conversa ia animada quando chegaram Eliziário e Flausino. Edgar apressou-se e ajeitou mais uma mesa ao lado da primeira, ficando assim a disposição?



Era dia de reunião da turma para descansar e passar bons momentos brincando e conversando e logo chegaram Griselda e Hortênsia. Nosso amigo Edgar Som correu a colocar uma nova mesa ao lado das duas anteriores e avisou ao Falco Zinheiro, o cozinheiro, para preparar mais duas pizzas. Veja a nova disposição das mesas:



a) A turma esperava mais companheiros, logo chegaram Izilda e Jocasta e mais uma mesa foi colocada. Faça o desenho representando a nova quantidade de mesas e seus ocupantes, sempre respeitando a mesma disposição das pessoas à sua volta.

b) Desenhe a representação das mesas quando chegaram Kreiton e Lisaldo.

c) Se forem colocadas 6, 7, 8, 9... mesas, quantas pessoas podem ser acomodadas, usando-se a mesma disposição?

d) E se forem colocadas 100 mesas?

e) E se foram colocadas n mesas? Teste a regra que você inventou para 15 mesas e 18 mesas.

f) Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 30 pessoas? E para acomodar 50 pessoas?

g) Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?

Anexo B: Tarefa 2 — Cubolino e seus cubos...

Atividade do Projeto: Investigações Matemáticas **- 6ª___ - Data:__/__/07**

Coordenador:**________________** ***Relatores:*****_________________**

Redator:____________________ **_________________**

Cubolino e seus cubos...

Organização para o desenvolvimento e apresentação da atividade

Vocês formarão grupos, constituídos por quatro pessoas, de tal forma que sejam divididas as obrigações de cada um:

- Coordenador: responsável pela organização do trabalho para apresentação (cartaz) e pela resolução de possíveis conflitos;

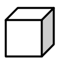
- Redator: responsável pela redação final do relatório a ser entregue.

- Dois Relatores: serão dois membros do grupo, responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe.

Apesar da divisão acima, todos deverão participar das etapas de produção do estudo.

A atividade...

Cubolino estava brincando com cubos e resolveu montar uma seqüência. Na primeira posição ele colocou 1 cubo. Em seguida ele pegou 6 cubos e ficou pensando em quantos cubos usaria e como os arrumaria para montar a segunda posição. Quando finalmente encontrou uma solução, seu irmãozinho passou engatinhando e desmanchou a seqüência. Cubolino ficou tão chateado que esqueceu a lógica que havia pensado. Vamos ajudá-lo a construir essa seqüência novamente!



?

1ª posição 2ª posição 3ª posição (...)

A) Para começar, montem e desenhem a 2ª posição.

B) Seguindo a lógica que vocês usaram, quantos cubos seriam necessários na terceira posição? Montem e desenhem.

C) Continuem a seqüência, desenhando até a 5ª posição.

D) Encontrem um jeito de explicar, por escrito, como seria a 10ª posição. Além disso, quantos cubos terá esta posição?

E) Agora encontrem um jeito de explicar, por escrito, como seria a 100ª posição. Quantos cubos terá esta posição?

F) Tentem agora escrever uma regra que possa representar o número de cubos ou a forma de uma posição qualquer (indefinida) na seqüência.

G) Testem a regra que encontraram utilizando as posições para as quais vocês já conhecem o número de cubos.

H) Justifiquem porque esta regra funciona, ou não funciona. Se não funcionar, tentem encontrar outra regra ou aperfeiçoar a mesma.

Bom Trabalho!!! Lis e Tatiane...

Anexo C: Tarefa 3 — A Máquina Mágica

Atividade do Projeto: Investigações Matemáticas **- 6ª___ - Data:__/__/07**

Coordenador:________________ ***Relatores:_________________***

Redator:____________________ _________________

A Máquina Mágica

A tarefa tem como objetivos:

- Valorizar o espírito colaborativo dos alunos;
- Propiciar ao aluno o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos de forma investigativa, por meio de explorações, descobertas, que instigam o aluno a levantar e formular conjecturas e a comunicar-se e argumentar matematicamente;
- Incentivar o aluno a utilizar-se da escrita na elaboração de relatórios, como forma de dar significado àquilo que sua equipe está descobrindo em suas investigações e da álgebra como expressão da variação de grandezas;
- Além dos relatórios escritos, as apresentações orais e a participação de cada aluno constituirão as formas de avaliação;
- Permitir à pesquisadora a coleta de dados para a análise das potencialidades e limites das Investigações Matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico e da capacidade de argumentação dos alunos.

Organização para o desenvolvimento e apresentação da atividade

Vocês formarão grupos, constituídos por quatro pessoas, de tal forma que sejam divididas as obrigações de cada um:

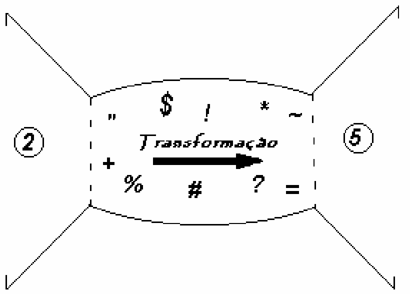
- Coordenador: responsável pela organização do trabalho para apresentação (cartaz) e pela resolução de possíveis conflitos;
- Redator: responsável pela redação final do relatório a ser entregue.
- Dois Relatores: serão dois membros do grupo, responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe.

Atenção: A elaboração do relatório é de responsabilidade do grupo. Os raciocínios e estratégias utilizados devem ser anotados com detalhes. Além disso, o capricho e os cuidados em sua versão final também são critérios de avaliação.

A Tarefa:

Hoje, vocês conhecerão a Máquina Mágica. Ela faz transformações de números escolhidos por nós em outros números. O seu mecanismo é simples: ela faz a mesma mágica para qualquer número que passar por ela. Além disso, ela é uma máquina especial: ela não possui um segredo único, isto é, existem vários truques de transformação. *Vocês seriam capazes de descobrir as mágicas dessa máquina? Desafio vocês a descobrí-las!*

Esta é a Máquina:



Parece estranha, mas o modo de operá-la é fácil: ao escolher o número 2, colocado ao lado esquerdo da máquina, ela o transforma no número 5 (lado direito da máquina).
Que tal? Muito complicado? Abaixo, encontram-se algumas questões para ajudá-los no entendimento da tarefa.

1. Descubram a mágica dessa máquina e, em seguida, façam um teste aplicando essa mágica para vários outros valores.

2. Com esta máquina, podemos transformar números negativos? E o zero? Justifiquem suas respostas.

3. Como foi comentado no início, se vocês analisarem a máquina com mais atenção, encontrarão outras mágicas possíveis para que ela transforme 2 em 5. Anotem todas as mágicas que encontrarem.

4. Escolham uma das mágicas que anotaram no item 3 e escrevam, com suas palavras e de forma clara, qual é o truque (regra) dessa mágica.

5. Testem a mesma mágica do item anterior, para um número “x”. Como ficaria o resultado da transformação? Procurem justificar os procedimentos e os caminhos que os levaram à resposta.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo