



FACULDADE IBMEC SÃO PAULO
Programa de Mestrado Profissional em Economia

Bruno Testa

**COMPARAÇÃO ENTRE DESEMPENHOS DE HEDGE DE OPÇÕES EXÓTICAS
NOS MODELOS DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA E LOCAL**

São Paulo

2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Bruno Testa

**Comparação entre desempenhos de hedge de opções
exóticas nos modelos de volatilidade estocástica e local**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia da Faculdade Ibmec São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Orientador: Prof. Dr. Antonio Zoratto Sanvicente – Ibmec São Paulo

**São Paulo
2009**

Testa, Bruno

Comparação entre desempenhos de hedge de opções exóticas nos modelos de volatilidade estocástica e local / Bruno Testa; Orientador Prof. Dr. Antonio Zoratto Sanvicente – São Paulo: Ibmec São Paulo, 2009.

43 f.

Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Economia. Área de concentração: Finanças) – Faculdade Ibmec São Paulo.

1. Apreçamento de opções 2. Desempenho de hedge 3. Volatilidade estocástica 4. Volatilidade local

FOLHA DE APROVAÇÃO

Bruno Testa

Comparação entre desempenhos de hedge de opções exóticas nos modelos de volatilidade estocástica e local

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Ibmec São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Banca Examinadora

Prof. Dr. Antonio Zoratto Sanvicente
Orientador

Instituição: Ibmec São Paulo

Assinatura: _____

Prof. Dr. Paulo Beltrão Fraletti

Instituição: Ibmec São Paulo

Assinatura: _____

Prof. Dr. Marcos Eugênio da Silva

Instituição: USP

Assinatura: _____

RESUMO

TESTA, Bruno. **Comparação entre desempenhos de hedge de opções exóticas nos modelos de volatilidade estocástica e local.** São Paulo, 2009. 43 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade Ibmec São Paulo, São Paulo, 2009.

Nesta dissertação, utiliza-se o desempenho de hedge para comparar modelos de apreçamento de opções. O modelo de volatilidade estocástica proposto por Heston (1993) e o modelo de volatilidade local de Dupire (1994) são comparados usando dados do mercado brasileiro de opções sobre a taxa de câmbio entre Real e Dólar americano. Com preço fortemente dependente da dinâmica futura da volatilidade da variação da taxa de câmbio, os alvos de hedge neste estudo são opções forward start. A calibração dos modelos e o cálculo do hedge para todos os dias do período analisado (entre junho de 2002 e setembro de 2008) permitem que se conclua que o modelo de volatilidade local apresentou desempenho superior.

Palavras-chave: Apreçamento de opções; Desempenho de hedge; Volatilidade estocástica; Volatilidade local

ABSTRACT

TESTA, Bruno. **Comparing hedge performance of exotic options under stochastic and local volatility models.** São Paulo, 2009. 43 p. Dissertation (Master's Degree) – Faculdade Ibmec São Paulo, São Paulo, 2009.

In this dissertation, hedge performance is used to compare option pricing models. The stochastic volatility model proposed by Heston (1993) and Dupire's (1994) local volatility model are compared using data from the Brazilian market of options on the exchange rate between the American dollar and the Brazilian real. Forward start options are the hedge targets in this work as their prices depend strongly on the future dynamics of the exchange rate variation volatility. Model calibration and hedge evaluation on all days within analysis (between June 2002 and September 2008) lead to the conclusion that the local volatility model performed better.

Keywords: Option pricing; Hedge performance; Stochastic volatility; Local volatility

Sumário

I. Introdução e Revisão da Literatura.....	8
II. Justificativa e Objetivos.....	10
III. Descrição dos Modelos.....	12
IV. Descrição dos Dados.....	14
V. Métodos.....	16
V.1. Apreçamento de opções.....	16
V.1.1. Apreçamento de opções regulares no modelo de Heston (volatilidade estocástica).....	18
V.1.2. Apreçamento de opções forward start no modelo de Heston (volatilidade estocástica).....	20
V.1.3. Apreçamento de opções regulares e forward start no modelo de Dupire (volatilidade local).....	22
V.2. Calibração dos modelos.....	23
V.3. Hedge.....	26
VI. Resultados.....	32
VI.1. Calibração dos modelos de volatilidade.....	32
VI.1. Desempenho do hedge das opções forward start.....	36
VII. Conclusões.....	39
VIII. Referências Bibliográficas.....	41

Lista de ilustrações

Ilustração 1: Superfície de volatilidade local $\sigma(S,t)$ resultado da composição linear por partes de polinômios de quinto grau em S.....	26
Ilustração 2: Volatilidade instantânea do modelo de Heston, calibrada com os preços de mercado.....	33
Ilustração 3: Raiz quadrada dos erros quadráticos médios de apreçamento.....	34
Ilustração 4: Superfície de volatilidade (modelo de volatilidade estocástica) calibrada para o dia 05-Sep-2008.....	35
Ilustração 5: Superfície de volatilidade (modelo de volatilidade local) calibrada para o dia 04-Sep-2008.....	35

Lista de tabelas

Tabela 1: Dados, fontes e períodos disponíveis.....	14
Tabela 2: Métodos de apreçamento utilizados.....	17
Tabela 3: Restrições dos parâmetros.....	24
Tabela 4: Parâmetros calibrados.....	33
Tabela 5: Resultados do hedge de delta.....	36
Tabela 6: Resultados do hedge de delta e vega.....	37
Tabela 7: Resultados de hedge com número de instrumentos diferentes.....	38

I. Introdução e Revisão da Literatura

Desde o artigo de Black e Scholes (1973) sobre apreçamento de opções, diversas extensões de seu modelo surgiram através da introdução de modificações nas “condições ideais” supostas por esses autores. Dentre essas condições, a premissa sobre o comportamento do preço do ativo-objeto ao longo do tempo foi modificada por diversos pesquisadores na busca de um modelo que se aproximasse mais dos fatos estilizados da realidade.

Merton (1973) incluiu a possibilidade de que o movimento browniano geométrico tivesse volatilidade instantânea como função determinística do tempo. Já o modelo proposto por Heston (1993) introduziu volatilidade instantânea estocástica obedecendo ao processo de raiz quadrada anteriormente proposto por Cox, Ingersoll e Ross (1985). A apresentação do modelo veio acompanhada de uma fórmula fechada para o apreçamento de opções europeias regulares, o que tornou o modelo mais atraente que outros modelos de volatilidade estocástica previamente existentes. Dupire (1994) apresentou um modelo determinístico para a volatilidade (ela passava a ser função do tempo e do preço do ativo-objeto), que era capaz de se ajustar melhor aos dados de mercado que os modelos estocásticos de poucos parâmetros.

Paralelamente à busca de modelos adequados para a incerta evolução dos preços de ativos financeiros, permanece a tarefa de escolher entre os diversos modelos disponíveis. Comparações entre modelos alternativos foram feitas por pesquisadores como Merton (1976) e Rubinstein (1985). Mais recentemente, Bakshi, Cao e Chen (1997) promoveram um detalhado estudo de modelos incluindo separadamente e em conjunto: volatilidade estocástica, juros estocásticos e saltos no preço do ativo-objeto.

A pesquisa conduzida por Bakshi, Cao e Chen utilizou três óticas distintas. Sob a primeira ótica, compararam-se os parâmetros estruturais implícitos nos modelos com os valores estimados com as séries de tempo correspondentes. A segunda ótica focalizou sua atenção nos erros de precificação desses modelos fora da amostra; assim sendo, modelos que sofrem de “overfitting” são penalizados quando julgados dessa maneira. A última ótica empregada nessa pesquisa foi a

comparação entre os erros de hedge com opções regulares. Sob essa última ótica, se conclui que o modelo de Black e Scholes não produz erros de hedge superiores aos dos modelos mais elaborados, a não ser quando se compara o hedge de opções extremamente dentro do dinheiro.

A conclusão a que chegam Bakshi, Cao e Chen, de que os modelos têm pouca influência sobre os erros de hedge, pode estar muito ligada à natureza (regular) das opções avaliadas, ao ativo-objeto (S&P500) e ao período de seu estudo. Se essa fraca sensibilidade dos erros de hedge ao modelo de precificação vale também quando se apreçam opções exóticas é ainda uma questão a ser respondida. Este trabalho propõe comparar os desempenhos, em termos de eficácia de hedge, de opções exóticas nos modelos de Dupire (volatilidade local) e Heston (volatilidade estocástica).

II. Justificativa e Objetivos

A pesquisa proposta visa comparar modelos amplamente aceitos pela comunidade acadêmica e de profissionais utilizando evidências dos últimos anos do mercado brasileiro de opções sobre a taxa de câmbio entre Real e Dólar americano. Com a crescente sofisticação desse mercado, as opções exóticas ganham cada vez mais relevância para ambas as comunidades. A atenção será focalizada em opções *forward start*. Esse tipo de contrato exótico dá ao titular o direito de receber uma opção regular em uma data acordada entre as partes negociantes. O preço de exercício da opção regular é determinado no momento de sua entrega e tipicamente os contratos estabelecem que esse seja tal que a opção regular esteja *at-the-money* no momento de sua entrega.

Pretende-se investigar se o modelo é irrelevante, se um modelo se sobressai sempre, ou se existem características das opções ou condições de mercado que alteram o resultado da comparação entre os modelos.

Continuamente ajustado, o hedge eficaz de um fluxo de caixa condicionado ao comportamento do preço de um ativo deixa o investidor que o realiza protegido em relação a variações aleatórias do preço desse ativo e produz perdas e ganhos líquidos iguais a zero. As perdas e os ganhos se afastam de zero quando o hedge não é continuamente ajustado ou quando o modelo utilizado não descreve bem a realidade. Assim, não basta que um modelo possa ser ajustado para produzir preços semelhantes aos observados no mercado; é necessário que, além disso, implique dinâmica verossímil para as variáveis aleatórias modeladas.

A medição de perdas e ganhos com o hedge de opções *forward start* realizada neste estudo usa uma amostra dos últimos anos de negócios com opções regulares no mercado escolhido. Além das opções regulares, estão incluídos no estudo contratos de opções *forward start* com vencimento dentro do período analisado. Empregam-se opções *forward start* dentro do dinheiro, fora do dinheiro e *at-the-money*. Para cada dia da amostra, os modelos comparados são ajustados de modo a refletirem os preços observados no mercado. Os modelos ajustados são utilizados para diariamente computar as sensibilidades do preço de opções *forward start* às variáveis modeladas, o que ditará as quantidades do ativo-objeto e de

opções regulares que devem ser compradas e vendidas para a realização do hedge de uma opção *forward start*. A média e o desvio padrão dos ganhos e perdas (em termos absolutos) com as compras e vendas efetuadas para proteção de todas as opções *forward start* do estudo são computados permitindo que se use a estatística t para determinar se são significativamente diferentes nos dois modelos, seguindo os procedimentos descritos por Engle e Rosenberg (1998).

Diferentemente das opções regulares, estas opções exóticas possuem valor esperado fortemente dependente de um subconjunto da dinâmica futura da volatilidade da variação de preço do ativo-objeto. Seu valor presente depende da expectativa atual para a evolução da volatilidade no intervalo compreendido entre a data de determinação do preço de exercício e a data de vencimento. As derivadas dos preços dessas opções em relação ao preço do ativo-objeto contêm informação sobre as diferentes dinâmicas que os modelos impõem ao preço do ativo-objeto e à volatilidade de sua variação. Portanto, é razoável supor que o desempenho de hedge dessas opções seja sensível ao modelo de apreçamento o que, juntamente com a forte sensibilidade do preço dessas opções ao modelo, justifica as comparações propostas.

III. Descrição dos Modelos

O modelo de volatilidade estocástica de Heston (1993) estende o modelo de Black e Scholes ao impor que o comportamento dinâmico do preço do ativo-objeto é regido pelas equações:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dz_1(t) \quad (1)$$

$$dv(t) = \kappa [\theta - v(t)]dt + \sigma \sqrt{v(t)}dz_2(t) \quad (2)$$

Nessas equações:

$S(t)$ é o preço do ativo-objeto em um dado instante de tempo t
 μ indica a tendência esperada da variação do preço do ativo-objeto
 $v(t)$ é a variância instantânea da variação do preço do ativo-objeto
 $z_1(t)$ e $z_2(t)$ são processos de Wiener com correlação ρ
 θ é a média para a qual tende $v(t)$
 κ indica a velocidade de reversão de $v(t)$ para a média θ
 σ indica quão volátil é a volatilidade instantânea

Heston (1993) mostra que a correlação (ρ) está associada ao terceiro momento da distribuição de probabilidades da variação do preço do ativo-objeto, enquanto a volatilidade da volatilidade (σ) é ligada ao quarto momento da distribuição. A solução em forma fechada para o preço de opções regulares é obtida através da inversão de funções características de probabilidades de exercício neutras a risco.

A equação (2) segue o processo de Cox, Ingersoll e Ross (1985) já mencionado na introdução. Além dos parâmetros desse processo (θ , κ e σ), são parâmetros do modelo de Heston (1993) a correlação ρ e a tendência μ . Como o preço das opções não depende de μ , são quatro os parâmetros que devem ser ajustados para que o modelo reflita os preços de mercado. Um grau de liberdade adicional nesse processo é o ajuste da condição inicial da variância instantânea:

$v(0)$.

Já o modelo de volatilidade local de Dupire (1994) impõe ao preço do ativo-objeto comportamento dado pela equação:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(S, t)S(t)dz(t) \quad (3)$$

Nessa equação:

$S(t)$ é o preço do ativo-objeto em um dado instante de tempo t

μ indica a tendência esperada da variação do preço do ativo-objeto

$z(t)$ é um processo de Wiener

$\sigma(S,t)$ é a volatilidade instantânea da variação do preço do ativo-objeto e é uma função determinística do preço do ativo-objeto e do tempo

Semelhantemente ao que se faz no processo de calibração do modelo de Heston (1993), tomam-se os preços de mercado como alvos em torno dos quais se deseja produzir preços de opções. Neste caso, em vez de ajustar um conjunto discreto de parâmetros, ajustamos a função $\sigma(S,t)$. Diferentemente da maioria dos modelos e graças à flexibilidade proporcionada por $\sigma(S,t)$, o modelo de volatilidade local permite que qualquer conjunto de preços de mercado de opções regulares seja perfeitamente ajustado. Contrastando com essa evidente vantagem, uma escolha de $\sigma(S,t)$ extremamente ajustada aos preços de mercado normalmente implica em dinâmicas para $S(t)$ menos críveis que em modelos com pior ajuste de preços. Assim, é conveniente que a quantidade de parâmetros presentes em $\sigma(S,t)$ seja parcimoniosamente definida.

IV. Descrição dos Dados

Os dados necessários para se atingir os objetivos desta pesquisa foram compilados a partir das fontes oficiais para a taxa de câmbio (Banco Central do Brasil) e os preços de opções e contratos futuros (BM&F). Os dados brutos têm periodicidade diária e são publicados nos sites que essas fontes mantêm na internet. Na Tabela 1, pode-se observar que o período de análise possível, dado pela intersecção dos períodos disponíveis, tem início em 03/06/2002. O fim do período de análise é 05/09/2008.

Tabela 1: Dados, fontes e períodos disponíveis.

Dado	Fonte	Período disponível
Preços negociados de opções sobre taxa de câmbio de reais por dólar	BM&F	Desde 03/06/2002*
Preços negociados de contratos futuros de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia	BM&F	Desde 03/06/2002*
Preços negociados de contratos futuros de taxa de câmbio de reais por dólar	BM&F	Desde 03/06/2002*
Taxa de câmbio de reais por dólar	Banco Central do Brasil	Desde 01/02/1999
Taxa de juros SELIC apurada diariamente	Banco Central do Brasil	Desde 04/06/1986

* Apesar de estarem disponíveis dados desde 18/10/1999, apenas a partir de 03/06/2002 os resumos diários das negociações na BM&F passaram a ter a especificação atual.

Algumas medidas foram tomadas para a redução de problemas de sincronismo entre os diferentes dados utilizados. No caso de opções e futuros, foram

descartados os preços de contratos com horário de último negócio distante do horário de fechamento do pregão. Já para as taxas de câmbio, foram utilizadas as taxas diárias de fechamento.

Para cada data de negociação histórica, foram compilados as taxas negociadas e o número de dias úteis até o vencimento para cada contrato disponível de futuros de taxa de câmbio e juros. Para uma determinada data de negociação, a taxa de câmbio de fechamento e as taxas negociadas dos futuros constituem as variáveis de mercado que, em conjunto com os parâmetros específicos de cada modelo de volatilidade, nos permitem apreçar fluxos de caixa condicionados ao comportamento do ativo-objeto pesquisado. Para as opções compilaram-se os mesmos dados dos contratos futuros (preço e vencimento), adicionando-se apenas as informações específicas de cada série negociada (preço de exercício e tipo de opção). No caso das taxas de câmbio foi utilizada a média entre as taxas de compra e de venda divulgada pelo Banco Central do Brasil para o fechamento PTAX e para o fechamento do mercado interbancário de câmbio. A taxa de juros de curto prazo utilizada foi a SELIC e as taxas de juros de longo prazo são obtidas a partir dos contratos futuros de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia.

V. Métodos

Para que seja possível comparar o desempenho de hedge de opções *forward start* nos dois modelos de volatilidade em estudo é necessário, em um primeiro estágio, identificar diariamente os parâmetros que permitem que os preços dos modelos se aproximem mais dos observados no mercado. Aos procedimentos utilizados para a determinação desses parâmetros dos modelos, se dá o nome de **calibração**. Prosseguindo-se no objetivo do estudo, pode-se calcular e comparar os ganhos e perdas que seriam obtidos ao utilizarem-se os modelos previamente calibrados para construir um portfolio protegido de incertezas. Tal portfolio é composto de uma opção *forward start* e seu hedge. A construção desse portfolio, seu ajuste dinâmico e os métodos para comparação do desempenho desse processo são o último passo para a obtenção dos resultados deste estudo. Comum aos procedimentos de calibração e hedge é a necessidade de apreçar fluxos de caixa condicionados ao comportamento da taxa de câmbio. Apesar de demandar desenvolvimento específico para cada modelo de volatilidade e para cada tipo de opção diferente, os aspectos gerais do apreçamento de opções são reaproveitados em cada caso.

V.1. Apreçamento de opções

Nos dois modelos de volatilidade estudados e no apreçamento das opções regulares e *forward start* deve-se conhecer a taxa de juros doméstica (r) e o cupom cambial (d) que fazem parte da paridade coberta de juros:

$$F(t) = S(t_0)e^{r(t_0,t) - d(t_0,t)} \quad (4)$$

Nessa equação: $S(t_0)$ é a taxa de câmbio à vista em t_0 , $F(t)$ é a taxa de câmbio a termo em função do prazo e $r(t_0,t)$ e $d(t_0,t)$ são as taxas de juros que vigoram entre t_0 e t . Excetuando-se o viés de convexidade gerado pelos ajustes diários dos contratos futuros, as variáveis $F(t)$ e $r(t_0,t)$ podem ser diretamente observadas na compilação

descrita no capítulo sobre os dados da pesquisa. Como os modelos de volatilidade em estudo não incorporam juros estocásticos, o viés de convexidade, dependente da correlação entre o ativo-objeto e a taxa de juros, não faz parte do apreçamento que se apresenta. Assim, a obtenção de $d(t_0, t)$ se faz diretamente a partir de $F(t)$ e $r(t_0, t)$, para todo t que seja vencimento dos futuros de taxa de câmbio e juros. Para $S(t_0)$ utiliza-se a taxa de fechamento divulgada pelo Banco Central e dessa forma o cupom cambial obtido não incorpora eventuais distorções que decorreriam da utilização da taxa PTAX como base para obtenção de $d(t_0, t)$. No apreçamento das opções estudadas são necessárias taxas de juros para vencimentos em que não existem futuros disponíveis e, nesses casos, lança-se mão de uma regra de interpolação para as taxas r e d . Utilizou-se como regra a manutenção da taxa a termo implícita nas duas observações que ladeiam um vencimento para o qual se deseja determinar a taxa à vista.

De posse de valores de r , d , S e um conjunto finito de parâmetros específicos de um dos modelos de volatilidade, apreçaram-se as opções por dois métodos de acordo com o caso em questão conforme a Tabela 2.

Tabela 2: Métodos de apreçamento utilizados

Tipo de opção	Modelo	
	Dupire (volatilidade local)	Heston (volatilidade estocástica)
Regular	Monte Carlo	Integração numérica
<i>Forward start</i>	Monte Carlo	Monte Carlo

Com exceção do apreçamento das opções regulares no modelo de Heston (volatilidade estocástica) que apresenta solução em forma fechada e pode ser resolvido por integração numérica, o apreçamento das opções estudadas requer grande esforço computacional. A escolha por Monte Carlo em detrimento dos métodos de diferenças finitas se faz em razão da importância neste estudo da estabilidade da solução, especialmente na presença de perturbações, utilizadas para que se computem as medidas de risco. Lawson e Morris (1978) apontam para a

difícil relação entre acurácia e estabilidade dos algoritmos de diferenças finitas. Como a medição do desempenho do hedge pode ser fortemente afetada por medidas de risco inconsistentes, a capacidade do método de Monte Carlo de ganhar acurácia sem perda de estabilidade é uma vantagem crucial sobre os métodos de diferenças finitas.

V.1.1. Apreçamento de opções regulares no modelo de Heston (volatilidade estocástica)

A solução para o preço da opção de compra é apresentada por Heston (1993) como a combinação linear de duas integrais da parte real de funções complexas:

$$C = SP_1 - KP(t, T)P_2 \quad (5)$$

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln \kappa} f_j}{i\phi} \right] d\phi \quad (6)$$

Nas equações, C é o preço da opção, S é o preço do ativo-objeto, K é o preço de exercício da opção, P(t, T) é o valor presente de \$1 na data T à taxa livre de risco, κ é a velocidade de reversão à média e Φ é o argumento das funções características f_j , mencionadas no capítulo com a descrição dos modelos, com solução:

$$f_j(x, v, t; \phi) = e^{C(T-t; \phi) + D(T-t; \phi)v + i\phi x} \quad (7)$$

$$C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2\ln \left[\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right] \right\} \quad (8)$$

$$D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right] \quad (9)$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d} \quad (10)$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)} \quad (11)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = k\theta, b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, b_2 = \kappa + \lambda, x = \ln(S) \quad (12)$$

Além da dependência esperada dos parâmetros dos processos estocásticos do modelo, as funções características dependem de λ , o preço de mercado do risco de volatilidade. O autor sugere que λ seja extraído do preço de qualquer derivativo e usado no apreçamento dos demais. Entretanto, aqui faz-se diferente pois, resulta imediato de (12) que, para qualquer conjunto de valores atribuídos a $\theta, \kappa, \sigma, \rho, v(0)$ e λ , é possível encontrar um novo conjunto de valores que não alteram f_j e que apresentam λ igual a zero. Assim, sem perda de generalidade, ao apreçar-se com o modelo de Heston aplicam-se as seguintes transformações que levam à redução de um grau de liberdade no espaço paramétrico:

$$\theta' = \theta \frac{\kappa}{\kappa + \lambda}, \kappa' = \kappa + \lambda, \sigma' = \sigma, \rho' = \rho, v'(0) = v(0), \lambda' = 0 \quad (13)$$

Qualquer conjunto $\theta, \kappa, \sigma, \rho, v(0)$ e λ é substituído por $\theta', \kappa', \sigma', \rho', v'(0)$ e λ' e assim não é necessário que se determine o preço de mercado do risco de volatilidade.

O autor realça que o integrando é suave, decai rapidamente e a integral sempre converge. Entretanto, Lord e Kahl (2006) esclarecem que, para quase qualquer escolha de parâmetros do modelo, descontinuidades aparecem no integrando desde que o vencimento da opção apreçada supere um dado limiar. Os autores sugerem uma formulação alternativa para o integrando e provam que é equivalente e livre das descontinuidades da formulação original. No apreçamento das opções regulares segue-se a formulação sugerida por Lord e Kahl (2006), em que as funções características apresentam solução idêntica exceto por (8), que é substituída por:

$$C(\tau, \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2\ln \left[\frac{1 - g^{-1}e^{-d\tau}}{1 - g^{-1}} \right] \right\} \quad (14)$$

V.1.2. Apreçamento de opções *forward start* no modelo de Heston (volatilidade estocástica)

Embora o apreçamento de opções *forward start* no modelo Heston tenha sido resolvido em fórmula fechada por Kruse e Nögel (2005), o fato de a solução adicionar um novo nível de integração às já complexas integrais de Heston faz com que Broadie e Kaya (2006) sugiram que a escolha da simulação de Monte Carlo para esse problema seja mais adequada.

A utilização do método de Monte Carlo para o apreçamento das opções *forward start* no modelo de Heston exige atenção sobre a discretização do processo descrito pelas equações (1) e (2). A variância do estimador de Monte Carlo para o preço das opções é controlável através do aumento do número de trajetórias simuladas e de diversas técnicas de redução de variância. O viés do estimador, entretanto, não é afetado por essas técnicas e depende de quão fielmente a discretização reproduz a dinâmica do processo simulado. Apesar de que parte do viés pode ser reduzida com o refinamento da partição do intervalo de tempo, essa opção implica aumento do tempo de execução do algoritmo e sua utilização deve ser feita em conjunto com a escolha de eficientes esquemas de discretização.

Andersen (2007) propõe dois esquemas de discretização de alta eficiência computacional em comparação aos anteriormente descritos na literatura. As duas variantes propostas são idênticas quanto à discretização do processo do ativo-objeto e diferem apenas na discretização do processo de sua variância. Nesta pesquisa, segue-se a aproximação designada como Quadrático-Exponencial para o comportamento da variância. Apesar dessa discretização não reproduzir exatamente a dinâmica da variância, que segue uma distribuição qui-quadrado não central, Andersen (2007) mostra que a aproximação é superior à simulação da distribuição exata, já que é muito mais veloz. Assim, dado um tempo fixo de execução, a aproximação de Andersen (2007) acabará sendo mais precisa que a simulação da distribuição exata do processo da variância, já que a última deverá utilizar uma partição muito menos refinada para poder ter um tempo de execução comparável. Broadie e Kaya (2006) propõem técnicas de simulação da distribuição exata que não são tão mais lentas, porém sofrem de deficiências que as tornam inferiores para o cálculo de sensibilidades, pois exigem um número diferente de incrementos

aleatórios para diferentes parâmetros do modelo. A utilização de um conjunto diferente de incrementos aleatórios conduziria à perda de estabilidade no cálculo das medidas de risco, o que leva à escolha da aproximação Quadrático-Exponencial para o processo da variância definida pelas seguintes equações:

$$\hat{V}(t + \Delta) = a(b + Z_v)^2, \psi \leq 1.5 \quad (15)$$

$$\hat{V}(t + \Delta) = \Psi^{-1}(U_v; p, \beta), \psi > 1.5 \quad (16)$$

$$\Psi^{-1}(u) = \Psi^{-1}(u; p, \beta) = 0, 0 \leq u \leq p \quad (17)$$

$$\Psi^{-1}(u) = \Psi^{-1}(u; p, \beta) = \beta^{-1} \ln\left(\frac{1-p}{1-u}\right), p < u \leq 1 \quad (18)$$

$$b^2 = 2\psi^{-1} - 1 + \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \geq 0 \quad (19)$$

$$a = \frac{m}{1 + b^2} \quad (20)$$

$$m = \theta + (\hat{V}(t) - \theta)e^{-\kappa\Delta} \quad (21)$$

$$\psi = \frac{s^2}{m^2} \quad (22)$$

$$s^2 = \frac{\hat{V}(t)\sigma^2 e^{-\kappa\Delta}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\Delta}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa\Delta})^2 \quad (23)$$

Nessas equações, t é um instante de tempo, Δ é o intervalo de tempo entre dois instantes adjacentes, \hat{V} é o estimador da variância instantânea em um dado instante de tempo, U_v é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre 0 e 1,

e Z_v é uma variável com distribuição normal padrão, obtida fazendo-se $Z_v = N^{-1}\left(\frac{U_v}{v}\right)$.

Das equações se conclui que, para qualquer valor de ψ , tanto na aproximação quadrática da equação (15) como na exponencial da equação (16), é necessária a utilização de uma e apenas uma amostra de uma distribuição uniforme. Essa característica alicerça uma propriedade importante desta discretização, notadamente ausente da discretização proposta por Broadie e Kaya (2006): a utilização dos

mesmos incrementos aleatórios para qualquer estado definido pelos parâmetros do modelo. A discretização utilizada para o processo do ativo-objeto é a discretização central descrita por Andersen (2007), um procedimento mais simples que o adotado para a variância, com uma única forma funcional, que é independente dos parâmetros do modelo.

V.1.3. Apreçamento de opções regulares e *forward start* no modelo de Dupire (volatilidade local)

Diferentemente do problema da discretização do modelo de Heston, a discretização do modelo de Dupire não conta com uma distribuição de probabilidades única e conhecida da qual se possam amostrar os incrementos de preço do ativo-objeto. Para cada forma funcional de $\sigma(S,t)$ existe uma distribuição diferente para os incrementos de S . Nessa situação permanecem úteis os métodos tradicionais de discretização usando a expansão de Itô-Taylor de primeira e segunda ordem. Escolhe-se por apreçar as opções utilizando a expansão de primeira ordem que, apesar de ser uma aproximação mais distante, é significativamente mais veloz ao não necessitar do cálculo das derivadas de $\sigma(S,t)$. Assim pode-se utilizar uma partição mais refinada do intervalo de tempo do que seria possível ao utilizar-se uma expansão de segunda ordem para um mesmo tempo de execução. O esquema de discretização com aproximação em primeira ordem, conhecido como esquema de Euler, é definido para o modelo de Dupire pela equação:

$$\ln(S(t + \Delta)) = \ln(S(t)) + \left(r - d - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta + \sigma Z_v \sqrt{\Delta} \quad (24)$$

Na equação, S é a taxa de câmbio, t é um instante de tempo, r é a taxa de juros doméstica, d é a taxa de cupom cambial, Δ é o intervalo de tempo entre dois instantes adjacentes, σ é a função de volatilidade instantânea da equação (3) e Z_v é uma variável com distribuição normal padrão.

V.2. Calibração dos modelos

Segue diretamente da definição dada para os procedimentos de calibração de um modelo que esse é o problema inverso do apreçamento de opções. Enquanto o problema direto (o do apreçamento) conta com a favorável propriedade de apresentar soluções únicas, o problema inverso não necessariamente admite soluções e, quando as admite, essas não são obrigatoriamente únicas. Faz-se necessário recorrer a algoritmos de otimização que devem buscar soluções que minimizem uma função objetivo decrescente nos erros de apreçamento do modelo. A minimização dessas funções pode ser realizada por um núcleo comum de calibração que explora o espaço de parâmetros específico de cada modelo e busca minimizar sua função objetivo. A construção desse núcleo segue Kilin (2006) ao aliar um algoritmo de programação não linear clássico a um algoritmo genético.

Os algoritmos clássicos de programação não-linear apresentam dificuldade ao lidar com mínimos locais e com valores iniciais distantes da solução. Os algoritmos genéticos lidam robustamente com esse tipo de problema, mas podem apresentar insatisfatória velocidade de convergência para espaços de parâmetros de grandes dimensões. Como o problema de ajustar modelos de volatilidade aos preços observados é sujeito aos pontos fracos dessas duas classes de algoritmos, a utilização desses algoritmos isoladamente nem sempre será satisfatória. Uma alternativa proposta por Kilin (2006) é que se encadeiem os algoritmos de modo que a solução parcial dada por um sirva de ponto de partida para o outro. O início do processo de otimização se dá pelo algoritmo genético de evolução diferencial desenvolvido por Storn e Price (1995). Por ser robusto a parâmetros iniciais distantes do ótimo, esse algoritmo é usado inicialmente e sua saída é usada como parâmetro inicial para o algoritmo de otimização por regiões de confiança. Este é um clássico algoritmo de programação não-linear que foi utilizado em lugar do algoritmo de Levenberg-Marquardt, sugerido por Kilin (2006), por apresentar mais flexibilidade na definição das restrições do problema.

A otimização por regiões de confiança permite a utilização de restrições de desigualdade que devem ser impostas aos parâmetros dos dois modelos estudados. Para o modelo de volatilidade estocástica são impostas as restrições óbvias para σ ,

$v(0)$, ρ e θ :

Tabela 3: Restrições dos parâmetros do modelo de Heston (volatilidade estocástica).

Parâmetro	Restrição
σ	> 0
$v(0)$	> 0
ρ	$\in [-1,1]$
θ	> 0

Para o modelo de volatilidade local, a única restrição é a de que a função $\sigma(S,t)$ assumam valores sempre positivos, independentemente dos parâmetros. Além de permitir as desigualdades implícitas nos modelos a serem calibrados, os algoritmos de região de confiança conferem robustez à otimização ao ajustarem o tamanho dos passos de otimização de acordo com a qualidade da aproximação local da função objetivo. Diferentemente dos algoritmos de região de confiança em que a robustez adicional não reduz a velocidade de convergência, os algoritmos genéticos (entre eles a evolução diferencial) apresentam ganhos de robustez com perda de velocidade de convergência e vice-versa. Os parâmetros que controlam o algoritmo genético escolhido são o tamanho da população, um parâmetro de escala (F) e a taxa de *crossover*. Esses parâmetros permitem que se determine quanto da robustez será trocada por velocidade de convergência. Aumentando a população adiciona-se robustez em detrimento de velocidade e o mesmo ocorre ao diminuir-se o fator de escala sobre os passos evolutivos (F) ou ao diminuir-se a taxa de *crossover*.

A função objetivo é específica para cada um dos modelos e é normalmente o quadrado da distância euclidiana entre os preços observados e os preços teóricos gerados por um conjunto de parâmetros. No caso do modelo de volatilidade estocástica computam-se os preços teóricos utilizando-se a solução em forma fechada obtida por Heston. Já para o modelo de volatilidade local é necessário que se aponte inicialmente a impossibilidade prática de utilizar-se o método de

calibração original de Dupire (2004) com árvores trinomiais. Como apontado por Berestycki, Busca e Florent (2002), para a aplicação da fórmula proposta por Dupire (2004) seriam necessários infinitos contratos disponíveis em um espaço contínuo de preços de exercício e vencimentos. Além disso, os autores apontam que o método de Dupire (2004) é pouco robusto a formas funcionais alternativas para a interpolação dos preços e que esses problemas levaram à publicação de outros métodos mais robustos para a calibração desse modelo. Adota-se a sugestão de Berestycki, Busca e Florent (2002), que defendem uma calibração da volatilidade local através da otimização de uma função objetivo definida pelo quadrado da distância euclidiana entre os inversos multiplicativos das volatilidades implícitas de mercado e as volatilidades implícitas geradas pelo modelo. Restringe-se que a volatilidade instantânea seja sujeita a uma forma funcional suave e assim define-se um conjunto de instantes de tempo em que a volatilidade local em função do preço de exercício obedece a um polinômio de quinto grau. Os diferentes polinômios são compostos linearmente por partes como função do tempo. O resultado de uma tal composição pode ser observado na ilustração que se segue:

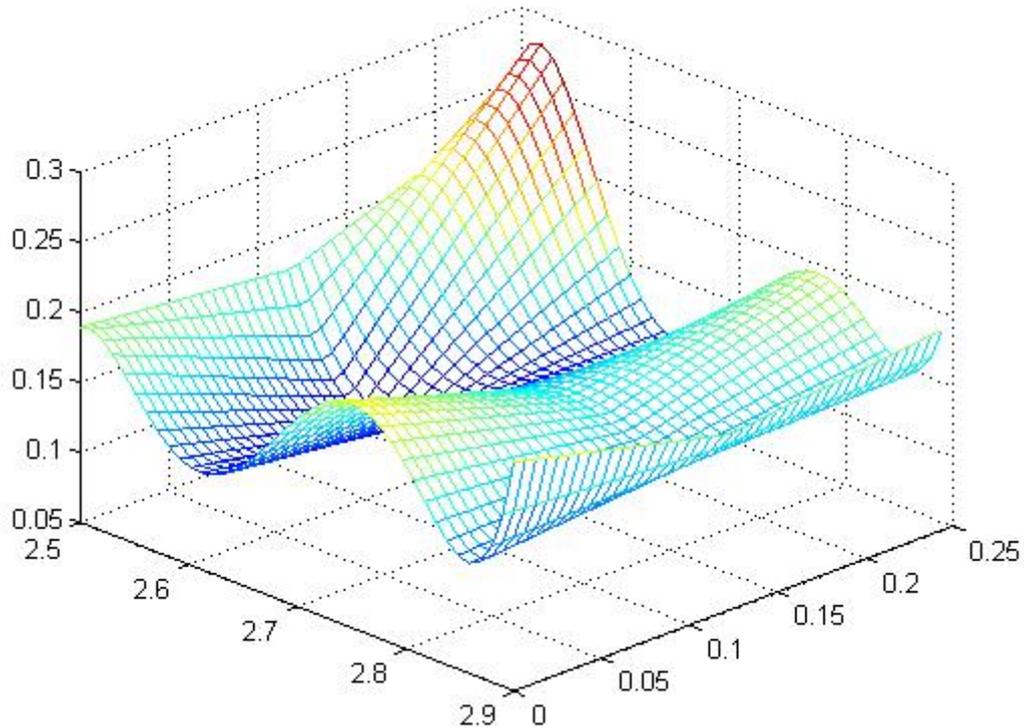


Ilustração 1: Superfície de volatilidade local $\sigma(S,t)$ resultado da composição linear por partes de polinômios de quinto grau em S

Na ilustração, a volatilidade instantânea anualizada é a quantidade registrada no eixo z. No eixo x estão registrados os intervalos de tempo em fração de ano e no eixo y registra-se a taxa de câmbio.

V.3. Hedge

O desempenho de hedge que se pretende comparar é definido pela média do valor absoluto dos ganhos e perdas durante o período de hedge de uma opção. Financiando-se e aplicando à taxa de livre de risco é possível construir um portfólio que replique o fluxo de caixa que a opção alvo do hedge produz. Esse portfólio replicante deve ser ajustado dinamicamente de maneira a permanecer localmente equivalente à opção alvo do hedge. Para que o portfólio replicante seja localmente equivalente à opção, não basta que possua o mesmo valor que a opção; é

necessário que as derivadas do preço da opção em relação aos fatores de incerteza sejam iguais às derivadas do valor do portfólio replicante. Assim, após movimentações pequenas nos fatores de incerteza, o portfólio replicante mantém-se com valor próximo ao preço da opção. Se o ajuste fosse feito de maneira contínua e o modelo descrevesse corretamente a natureza das incertezas, o portfólio replicante alcançaria o valor de exercício da opção no instante do vencimento. Dessa maneira, o lançador de uma opção que utilizasse o prêmio para construir um portfólio de acordo com essa estratégia obteria lucro total igual a zero. O mesmo se pode dizer do titular de uma opção que construísse um portfólio com sinal invertido ao do replicante. Se a natureza *ad hoc* da função de volatilidade local do modelo de Dupire tornasse a dinâmica do ativo-objeto implícita por esse modelo menos crível e útil para o hedge de opções *forward start*, se esperaria que a média do valor absoluto dos ganhos e perdas do hedge fosse maior nesse modelo. Em contrapartida, se a impossibilidade de ajustar completamente os preços de mercado observados tornasse o modelo de Heston menos adequado para apreçar e gerenciar o risco de opções *forward start*, se esperaria o resultado inverso.

No modelo de volatilidade local, apenas o preço do ativo-objeto é incerto, e no modelo de volatilidade estocástica o ativo-objeto tem preço e volatilidade incertos. Como nos dois modelos em análise o número de fatores incertos é diferente, utiliza-se a sugestão de Bakshi, Cao e Chen (1997) para a realização de comparações entre os desempenhos. Esses autores notam que os modelos com menos fatores de incerteza seriam prejudicados por utilizarem um hedge com menos instrumentos. Levando em conta a possibilidade de favorecimento dos modelos com mais parâmetros aleatórios, Bakshi, Cao e Chen (1997) propõem que se definam estratégias alternativas em que os modelos com menos fatores usam o mesmo número de instrumentos de hedge que os modelos com mais fatores. É seguida aqui a sugestão desses autores e, no caso do modelo de volatilidade local, além de computarem-se as derivadas do preço das opções em relação ao preço do ativo-objeto, utilizam-se as derivadas dos preços das opções em relação aos parâmetros não aleatórios da função determinística de volatilidade local.

À primeira derivada do preço das opções em relação ao ativo-objeto chama-se *delta*, e à primeira derivada do preço das opções em relação à volatilidade, *vega*.

No caso do modelo de Dupire podem se definir como vega, alvo de hedge, as derivadas dos preços das opções em relação aos parâmetros da função de volatilidade local. Para a análise do desempenho de hedge definem-se duas estratégias de hedge que são comparadas nos dois modelos: hedge de delta e hedge de delta e vega. O hedge de delta é realizado de maneira direta, comprando-se ou vendendo-se unidades do ativo-objeto até que o delta total do portfólio seja zero. Para o hedge de delta e vega, elimina-se inicialmente o vega através da compra ou venda de contratos de opção regular. Após isso, o delta, recém alterado pela primeira etapa do hedge, é eliminado com a compra ou venda de unidades do ativo-objeto.

Para que se possa caracterizar se os desempenhos de hedge nos dois modelos são estatisticamente diferentes, faz-se necessário investigar o comportamento assintótico dessas grandezas. Hayashi e Mykland (2005) deduzem que o limite do processo dos erros de hedge de opções européias (dependentes e independentes de trajetória) é assintoticamente gaussiano, mesmo quando não se conhece o verdadeiro processo. Anteriormente, e com efeito semelhante, Engle e Rosenberg (1998) compararam modelos com volatilidade variante no tempo usando a estatística t para estabelecer a significância da diferença dos erros absolutos de hedge.

Com a intenção de estabelecer comparações estatisticamente significativas entre as medições de erros absolutos de hedge são utilizadas 2790 opções *forward start*. Entre as opções alvo de hedge metade corresponde a opções de compra e a outra metade a opções de venda. Semelhantemente, um terço das opções está at-the-money e o restante se divide igualmente entre opções dentro do dinheiro e fora do dinheiro. As datas de determinação do preço de exercício e os vencimentos dos contratos são espalhados por todo o período da amostra de maneira uniforme e em intervalos de 50 dias úteis. Assim, existem opções com tempo inicial de determinação do preço de exercício variando de 50 até 1500 dias úteis; e há opções com vencimento variando de 100 até 1500 dias úteis. Essa quantidade e variedade de opções permite que se possam comparar subconjuntos do total de opções que incluam muitas centenas de opções. Testa-se em separado o desempenho de hedge das opções de compra e venda, a fim de cumprir o objetivo de avaliar se

certas características das opções são relevantes para determinar a superioridade de um dos modelos no desempenho de hedge. Com o mesmo propósito, também são feitos testes separados para opções de acordo com *moneyness* e prazo.

Em cada dia da amostra, para cada modelo, estratégia e opção alvo de hedge, encontram-se as quantidades de ativo-objeto e opções regulares que deveriam ser negociadas para que o portfolio replicante continuasse localmente equivalente ao alvo do hedge. Também devem ser computados diariamente os valores financeiros que seriam provenientes das compras e vendas anteriormente determinadas. Como o portfolio replicante inicia com um saldo equivalente ao preço da opção alvo do hedge, qualquer saldo negativo é financiado à taxa livre de risco e inversamente remuneram-se saldos positivos à mesma taxa. Além dos valores financeiros que seriam fruto do rebalanceamento do hedge, devem ser computados os valores devidos ou recebidos no caso de exercício das opções regulares presentes no portfolio replicante. A diferença entre os valores absolutos obtidos usando os dois modelos é usada para determinar a superioridade de um modelo em relação a outro. Como descrito por Engle e Rosenberg (1998), aplica-se a estatística *t* para se estabelecer se essa diferença é estatisticamente significativa. Em caso positivo, o modelo com o maior erro absoluto médio é considerado inferior. A estatística *t* é calculada conforme as equações:

$$t = \frac{\bar{D}}{s/\sqrt{n}} \quad (25)$$

$$D = |H_A| - |H_B| \quad (26)$$

Nessas equações, H_A e H_B são os erros de hedge das opções nos dois modelos testados, D é a diferença entre os erros absolutos, s é a variância amostral de D , n é o número de elementos na amostra e t tem a distribuição de Student com $n - 1$ graus de liberdade. O erro de hedge H é definido para o hedge de delta pelas equações:

$$H = \sum_{i=1}^n h(t_0 + i\Delta t) \quad (27)$$

$$h(t + \Delta t) = X_s(t)e^{d(t, t+\Delta t)\Delta t} S(t + \Delta t) + X_r(t)e^{r(t, t+\Delta t)\Delta t} - FS(S, t + \Delta t) \quad (28)$$

$$X_s(t) = - \frac{\partial (FS(S, t) + SX_s(t - \Delta t))}{\partial S}, t > t_0 \quad (29)$$

$$X_s(t_0) = - \frac{\partial FS(S, t)}{\partial S} \quad (30)$$

$$X_r(t) = - (X_s(t) - X_s(t - \Delta t))S(t), t > t_0 \quad (31)$$

$$X_r(t_0) = - FS(S, t_0) \quad (32)$$

Nas equações, S é o preço do ativo-objeto, t é um instante de tempo, Δt é o intervalo entre uma operação de hedge e outra, t_0 é o instante inicial do período de hedge, n é o número de intervalos Δt nesse período, h(t) é o erro de hedge em um dado instante, H é o erro total de hedge no período, FS é o preço da opção *forward start*, $X_r(t)$ é quantidade de reais em caixa no instante t e $X_s(t)$ é a quantidade de unidades do ativo-objeto possuídas no instante t. O desempenho do hedge de delta e vega é similar, bastando que se adicionem, às definições de h e X_r , vetores $X_o(t,k)$ e $O(t,k)$ análogos aos escalares $X_s(t)$ e S(t) contendo as quantidades de opções regulares possuídas em um dado instante e seus preços. O índice k desses vetores identifica uma opção no conjunto de opções utilizadas no hedge. Na equação (33), a seguir, v é a volatilidade instantânea da variação da taxa de câmbio e i é a opção utilizada no instante t para realizar o hedge de vega:

$$X_o(t, i) = - \frac{\partial (FS(S, v, t) + \tilde{X}_o(t - \Delta t)\tilde{O})}{\partial v} \bigg/ \frac{\partial O(t, i)}{\partial v} \quad (33)$$

As equações (34) e (35) substituem as definições (28) e (31) do hedge de delta e concluem a definição do hedge de vega:

$$h(t + \Delta t) = X_s(t)e^{d(t, t+\Delta t)\Delta t}S(t + \Delta t) + \tilde{X}_o(t)\tilde{O}(t + \Delta t) + X_r(t)e^{r(t, t+\Delta t)\Delta t} - FS(S, t + \Delta t) \quad (34)$$

$$X_r(t) = - (X_s(t) - X_s(t - \Delta t))S(t) - (\tilde{X}_o(t) - \tilde{X}_o(t - \Delta t))\tilde{O}(t), t > t_0 \quad (35)$$

As derivadas parciais indicadas nas equações (29), (30) e (33) são calculadas numericamente e isso exige que os preços das opções sejam recalculados muitas vezes, com a aplicação de deslocamentos infinitesimais a partir dos parâmetros

originalmente calibrados. Para um conjunto de 2790 opções sob hedge em um período de 1500 dias úteis, produz-se a necessidade de milhões de apereçamentos de opções. A isso se devem os já mencionados altos requisitos de estabilidade e desempenho dos métodos de apereçamento.

VI. Resultados

Os resultados da pesquisa se dividem em dois grupos principais. Primeiramente, foram obtidos os resultados da calibração dos modelos para todos os dias da amostra, para que depois fossem obtidos os resultados referentes ao hedge das opções *forward start*.

VI.1. Calibração dos modelos de volatilidade

Os resultados da calibração dos modelos de volatilidade consistem do conjunto dos parâmetros calibrados para cada dia da amostra. A simples apresentação dessa lista de parâmetros é desnecessária, sendo mais útil focalizar resultados que se obtém apreçando opções com esse conjunto de parâmetros. Apresentam-se a seguir informações consolidadas sobre a distância entre os preços gerados com os modelos calibrados e os preços observados no mercado. Antes, porém, é interessante mostrar a evolução ao longo do período da amostra de uma quantidade que depende da calibração do modelo de Heston: $\sqrt{v(0)}$. A raiz-quadrada da variância instantânea inicial, a volatilidade instantânea, apresentou valores extremos entre o final de 2002 e o início de 2003, como se esperaria dadas as excepcionais variações da taxa de câmbio que se observaram no período e conforme se observa na ilustração que segue:

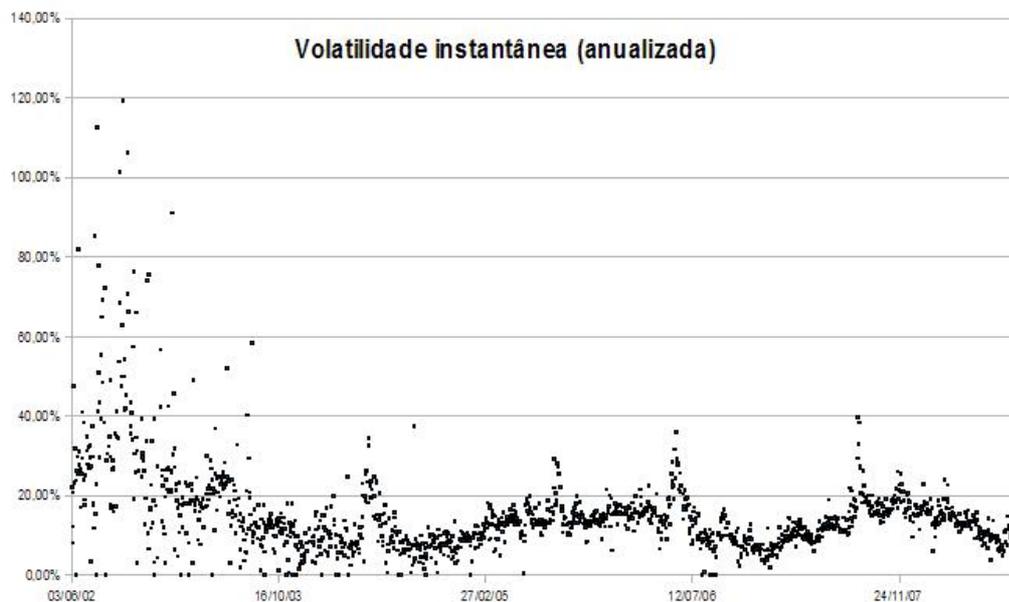


Ilustração 2: Volatilidade instantânea do modelo de Heston, calibrada com os preços de mercado.

Uma descrição dos outros parâmetros calibrados é apresentada na tabela a seguir com as médias e erros padrões dos resultados da calibração.

Tabela 4: Parâmetros calibrados

Parâmetro	Média	Erro padrão
$v(0)$	0,0400	0,0023
ρ	0,4200	0,0142
κ	12,5900	0,2449
σ	1,4100	0,0400
θ	0,1500	0,0180
$\sigma(S_{\text{mínimo}}, t_{\text{mínimo}})$	0,2205	0,0072
$\sigma(S_{\text{mínimo}}, t_{\text{máximo}})$	0,2634	0,0080
$\sigma(S_{\text{máximo}}, t_{\text{mínimo}})$	0,3322	0,0084
$\sigma(S_{\text{máximo}}, t_{\text{máximo}})$	0,2995	0,0085
$\sigma(S_{\text{médio}}, t_{\text{médio}})$	0,2353	0,0062

Os erros quadráticos médios diários entre os preços de mercado e os preços do modelo calibrado deixam claro que a forma funcional de $\sigma(S,t)$ não causou um “overfitting” do modelo de volatilidade local. O *boxplot* que segue exhibe a raiz quadrada dos erros quadráticos médios diários de apreçamento em termos de volatilidade implícita de Black-Scholes:

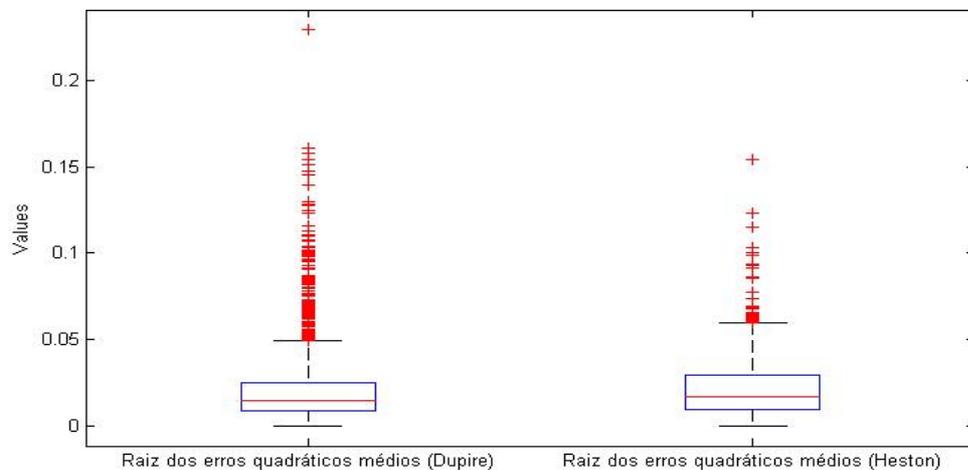


Ilustração 3: Raiz quadrada dos erros quadráticos médios de apreçamento

Apesar da superioridade do modelo de volatilidade local no ajuste dos preços de mercado, ao se observarem as superfícies de volatilidade obtidas nos dois modelos, verifica-se que o modelo de volatilidade estocástica produz superfícies mais suaves. As superfícies que seguem indicam a volatilidade implícita de Black-Scholes no eixo z como função de preço de exercício no eixo x e prazo em fração de ano no eixo y. As estrelas azuis e vermelhas representam as volatilidades implícitas das opções respectivamente de compra e venda, cujas cotações foram usadas na calibração da superfície.

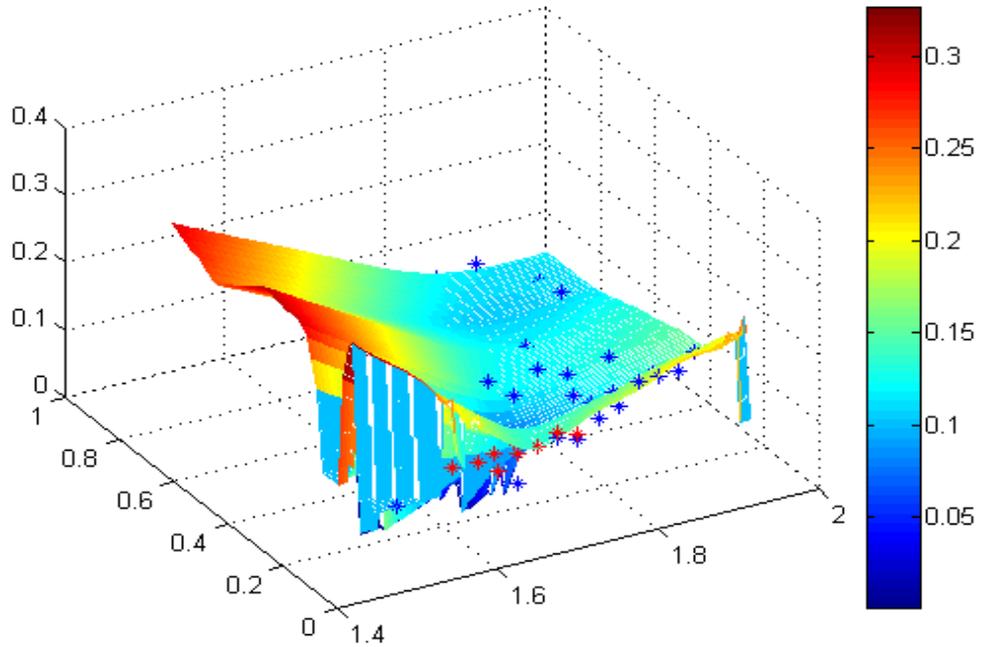


Ilustração 4: Superfície de volatilidade (modelo de volatilidade estocástica) calibrada para o dia 05-Sep-2008.

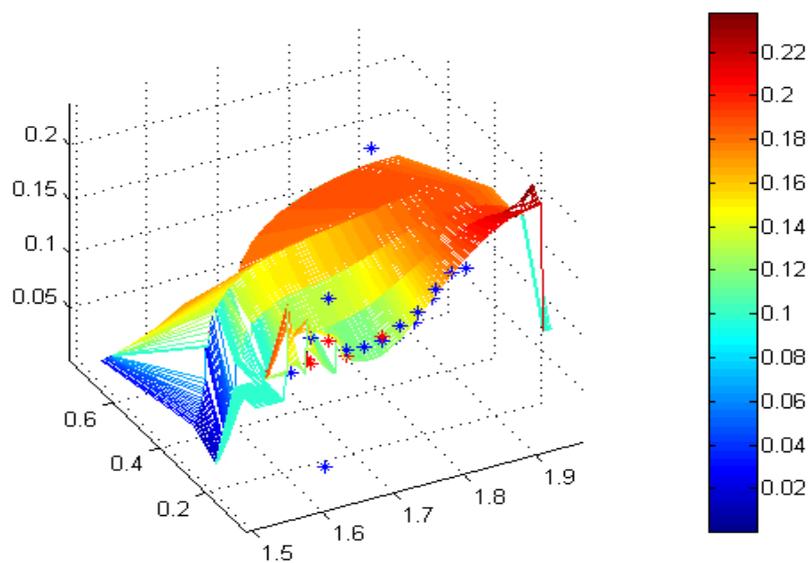


Ilustração 5: Superfície de volatilidade (modelo de volatilidade local) calibrada para o dia 04-Sep-2008.

VI.1. Desempenho do hedge das opções *forward start*

Os resultados dos erros de hedge são apresentados nas tabelas que seguem. Nessas tabelas estão dispostos os resultados para o hedge de delta e para o hedge de delta e vega. As diferenças dos erros absolutos são apresentadas em reais e são calculadas de acordo com a equação (26). A estatística segue a equação (25), sendo o modelo com o melhor desempenho o que teve média menor de erros absolutos.

Tabela 5: Resultados do hedge de delta

Categorias de opções (e quantidades)	Média da diferença dos erros absolutos	Estatística t	Modelo com melhor desempenho
Todas (2790)	0,31	51,93	Dupire (volatilidade local)
Opções de compra (1395)	0,38	48,54	Dupire (volatilidade local)
Opções de venda (1395)	0,25	27,90	Dupire (volatilidade local)
Opções dentro do dinheiro (930)	0,28	25,04	Dupire (volatilidade local)
Opções fora do dinheiro (930)	0,33	34,88	Dupire (volatilidade local)
Opções <i>at-the-money</i> (930)	0,33	31,23	Dupire (volatilidade local)
Opções com maior prazo (1404)	0,37	48,20	Dupire (volatilidade local)
Opções com menor prazo (1386)	0,26	28,29	Dupire (volatilidade local)

A divisão das opções em duas categorias de prazo é feita de modo a produzir dois conjuntos com número semelhante de opções; isso se consegue separando as opções com prazo inferior a 1100 dias úteis das opções com prazo mais longo. Os resultados apresentados indicam um desempenho claramente superior do modelo de volatilidade local no hedge de delta. Esse desempenho deixa de ser superior quando se acrescenta o hedge de vega, o que pode ser observado na tabela que

segue.

Tabela 6: Resultados do hedge de delta e vega

Categorias de opções (e quantidades)	Média da diferença dos erros absolutos	Estatística t	Modelo com melhor desempenho
Todas (2790)	5,83	36,96	Heston (volatilidade estocástica)
Opções de compra (1395)	10,00	38,97	Heston (volatilidade estocástica)
Opções de venda (1395)	1,67	17,55	Heston (volatilidade estocástica)
Opções dentro do dinheiro (930)	6,04	21,88	Heston (volatilidade estocástica)
Opções fora do dinheiro (930)	5,75	21,04	Heston (volatilidade estocástica)
Opções <i>at-the-money</i> (930)	5,71	21,08	Heston (volatilidade estocástica)
Opções com maior prazo (1404)	10,06	39,39	Heston (volatilidade estocástica)
Opções com menor prazo (1386)	1,55	17,61	Heston (volatilidade estocástica)

Os resultados obtidos para o hedge de delta e vega mostram que o modelo de volatilidade estocástica se sai melhor que o modelo de volatilidade local quando as fontes de risco do primeiro modelo são neutralizadas em primeira ordem. Um teste adicional poderá ser feito se os modelos forem comparados usando as configurações de hedge naturalmente identificadas com sua especificação. Assim, faz-se a comparação entre o hedge de delta no modelo de volatilidade local e o hedge de delta e vega no modelo de volatilidade estocástica. Em cada caso, as fontes de risco de cada modelo são eliminadas em primeira ordem, porém o número de instrumentos de hedge é diferente. Os resultados, que não confirmam a vantagem que o modelo de volatilidade estocástica poderia ter por usar mais instrumentos de hedge, são apresentados na tabela seguinte.

Tabela 7: Resultados de hedge com número de instrumentos diferentes

Categorias de opções (e quantidades)	Média da diferença dos erros absolutos	Estatística t	Modelo com melhor desempenho
Todas (2790)	0,63	33,37	Dupire (volatilidade local)
Opções de compra (1395)	0,69	26,12	Dupire (volatilidade local)
Opções de venda (1395)	0,58	21,23	Dupire (volatilidade local)
Opções dentro do dinheiro (930)	0,59	19,32	Dupire (volatilidade local)
Opções fora do dinheiro (930)	0,57	19,20	Dupire (volatilidade local)
Opções <i>at-the-money</i> (930)	0,73	19,66	Dupire (volatilidade local)
Opções com maior prazo (1404)	0,89	25,72	Dupire (volatilidade local)
Opções com menor prazo (1386)	0,37	33,04	Dupire (volatilidade local)

A superioridade do modelo de volatilidade local neste último teste indica que o hedge adicional de vega nesse modelo diminui seu desempenho, já que o hedge de delta isoladamente nesse modelo supera o desempenho do hedge de delta e vega no modelo de volatilidade estocástica; o modelo de volatilidade estocástica se sai melhor quando se compara o hedge de delta e vega nos dois modelos. Uma discussão sobre esse comportamento e sobre o significado dos resultados apresentados está nas conclusões a seguir.

VII. Conclusões

Os resultados apresentados indicam uma clara superioridade do modelo de volatilidade local sobre o modelo de volatilidade estocástica no desempenho de hedge de opções *forward start* para o período e o ativo-objeto estudados. O modelo de volatilidade estocástica foi superior apenas quando o hedge no modelo de volatilidade local eliminou os riscos de variação dos parâmetros estáticos do modelo. Seguindo Bakshi, Cao e Chen (1997), essa comparação foi adicionada ao conjunto de testes realizados para impedir que o modelo de volatilidade local fosse prejudicado por utilizar menos instrumentos de hedge que o modelo de volatilidade estocástica. Verifica-se, entretanto, que o desempenho de hedge no modelo de volatilidade local é superior ao obtido no modelo de volatilidade estocástica, mesmo quando se utilizam mais instrumentos de hedge no modelo de volatilidade estocástica. Uma explicação para a perda de desempenho de hedge no modelo de volatilidade local quando da utilização de mais instrumentos de hedge reside no fato desse procedimento não apresentar garantias de que ao invés de diminuir, irá aumentar os riscos de fontes não especificadas pelo modelo. De fato, apesar de imunizar em relação aos riscos de variação de preço do ativo-objeto, o hedge de delta e vega em um modelo com apenas uma fonte de risco aumenta o número de fluxos de caixa condicionados ao comportamento do preço do ativo-objeto. A existência de outras fontes de risco além da especificada faria com que os fluxos de caixa adicionados pelo hedge de vega aumentem a exposição a fontes não controladas pelo hedge de delta e vega, o que poderia diminuir o desempenho de hedge nesse caso.

A superioridade do modelo de volatilidade local neste estudo não significa que a dinâmica da volatilidade instantânea da variação da taxa de câmbio no período analisado foi fielmente descrita pela equação (3) de Dupire. Entretanto, condiz com os resultados de calibração e hedge apresentados que, por atribuir uma forma funcional flexível a $\sigma(S,t)$, o modelo de volatilidade local se beneficiou mais da informação que os preços das opções contêm sobre o processo de variação do preço do ativo-objeto.

Não se pode deixar de lado a possibilidade de que extensões mais atuais dos

modelos de volatilidade estocástica que incorporam saltos aleatórios sejam capazes de produzir resultados melhores. Adicionalmente, imagina-se que uma melhor compreensão da dinâmica do ativo-objeto estudado seria obtida ao testar-se o desempenho de hedge de outros tipos de opções, já que os resultados em tais testes não seriam necessariamente os mesmos.

VIII. Referências Bibliográficas

ANDERSEN, Leif B. G (2007). Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model. **SSRN**, disponível em: "<http://ssrn.com/abstract=946405>".

BAKSHI, Gurdip; CAO, Charles; CHEN, Zhiwu (1997). Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. **The Journal of Finance**, Vol. 52, No. 5, p. 2003-2049.

BERESTYCKI, H.; BUSCA, J.; FLORENT, I. (2002). Asymptotics and calibration of local volatility models. **Quantitative Finance Vol. 2**, Special issue on volatility modelling, 61–69.

BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **The Journal of Political Economy**, Vol. 81, No. 3, p. 637-654.

BROADIE, M.; KAYA, Ö. (2006). Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. **Operations Research**, vol. 54, no. 2.

COX, John C.; INGERSOLL, Jonathan E. Jr.; ROSS, Stephen A. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. **Econometrica**, Vol. 53, No. 2, p. 385-407.

DUPIRE, Bruno (1994). Pricing with a smile. **Risk Magazine**, Vol. 7, No.1, jan. 1994, p. 18-20.

ENGLE, Robert F.; ROSENBERG, Joshua V. (1998). Testing the Volatility Term Structure Using Option Hedging Criteria. **SSRN**, NYU Working Paper No. FIN-98-031, Março 1998, disponível em "<http://ssrn.com/abstract=1297078>".

HAYASHI, Takaki; MYKLAND, Per A. (2005). Evaluating Hedging Errors: An Asymptotic Approach. **Mathematical Finance**, Vol.15, No. 2, abr. 2005, p. 309-343.

HESTON, Steven L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. **The Review of Financial Studies**, Vol. 6, No. 2, p. 327-343.

KILIN, Fiodar (2006). Accelerating the calibration of stochastic volatility models. **SSRN**, disponível em "<http://ssrn.com/abstract=965248>".

KRUSE, S., NÖGEL, U., (2005). On the Pricing of Forward Starting Options in Heston's Model on Stochastic Volatility. **Finance and Stochastics**, Vol. 9, No. 2, abr. 2005, p. 233-250.

LAWSON, J.D.; MORRIS, J.LI. (1978). The extrapolation of first order methods for parabolic partial differential equations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, Vol. 15, No. 6, dez.1978, p. 1212-1224.

LORD, R; KAHL, C. (2006). Why the rotation count algorithm works. **SSRN**, Tinbergen Institute Discussion Paper No. 2006-065/2, jul. 2006, disponível em "<http://ssrn.com/abstract=921335>".

MERTON, Robert C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**, 4, p. 141-183.

MERTON, Robert C. (1976). The Impact on Option Pricing of Specification Error in the Underlying Stock Price Returns. **The Journal of Finance**, Vol. 31, No. 2, Papers and Proceedings of the Thirty-Fourth Annual Meeting of the American Finance Association Dallas, Texas, 28-30 de dezembro, 1975, p. 333-350.

RUBINSTEIN, Mark (1985). Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 Through August 31, 1978. **The Journal of Finance**, Vol. 40, No. 2, p. 455-480.

STORN, R.; PRICE, K. (1994). Differential Evolution - a Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces. **ICSI**, mar. 1995, Technical Report TR-95-012, disponível em "<http://www.icsi.berkeley.edu/~storn/tr-95-012.ps.gz>".

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)