

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

HUGO LEONARDO DA SILVA BELISARIO

# **Ciclos Limite para a Equação de Abel Generalizada**

Goiânia  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



## Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás – UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações – BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**       **Dissertação**       **Tese**

### 2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor:	Hugo Leonardo da Silva Belisário			
CPF:		E-mail:	<a href="mailto:hugo_matematic@yahoo.com.br">hugo_matematic@yahoo.com.br</a>	
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não				
Vínculo Empregatício do autor:	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – IFGoiás. Campus de Inhumas.			
Agência de fomento:	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico	Sigla:	CNPq	
País:	Brasil	UF:	DF      CNPJ:	33.654.831/0001-36
Título:	Ciclos Limites para a Equação de Abel Generalizada.			
Palavras-chave:	Equação de Abel, aplicação de Poincaré, estabilidade de órbitas periódicas, ciclo limite, 16º problema de Hilbert.			
Título em outra língua:	Limit cycles for generalized Abel equation.			
Palavras-chave em outra língua:	Abel equation, Poincaré map, stability of periodic orbits limit cycle, 16th Hilbert problem.			
Área de concentração:	Análise			
Data defesa: (dd/mm/aa)	30/10/2009.			
Programa de Pós-Graduação:	Instituto de Matemática e Estatística – Mestrado em Matemática.			
Orientador:	Ronaldo Alves Garcia.			
CPF:		E-mail:	<a href="mailto:ronaldo.a.garcia@uol.com.br">ronaldo.a.garcia@uol.com.br</a>	
Co-orientador(a):				
CPF:		E-mail:		

### 3. Informações de acesso ao documento:

Liberção para disponibilização?<sup>1</sup>       total       parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: \_\_\_\_\_

Outras restrições: \_\_\_\_\_ Gostaria que não fosse divulgado os anexos.

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 02/12/2009

Assinatura do autor

<sup>1</sup> Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

HUGO LEONARDO DA SILVA BELISARIO

# **Ciclos Limite para a Equação de Abel Generalizada**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Análise.

**Orientador:** Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia

Goiânia  
2009

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
GPT/BC/UFG**

B431c Belisario, Hugo Leonardo da Silva.  
Ciclos limite para a equação de Abel generalizada  
[manuscrito] / Hugo Leonardo da Silva Belisário. - 2009.  
xv, 69 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Matemática e Estatística, 2009.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras e tabelas.

1. Equação de Abel 2. Ciclos limite 3. Aplicação de  
Poincaré. I. Título.

CDU:517.911

HUGO LEONARDO DA SILVA BELISARIO

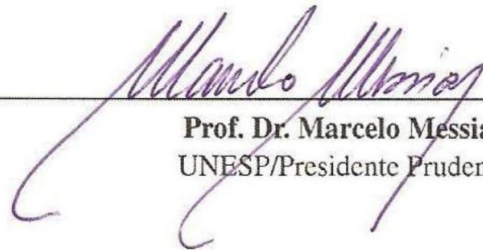
# Ciclos Limite para a Equação de Abel Generalizada

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 30 de outubro de 2009, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



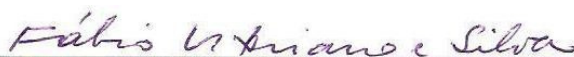
---

**Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia**  
Instituto de Matemática e Estatística – UFG  
Presidente da Banca



---

**Prof. Dr. Marcelo Messias**  
UNESP/Presidente Prudente



---

**Prof. Dr. Fábio Vitoriano e Silva**  
Instituto de Matemática e Estatística – UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Hugo Leonardo da Silva Belisario**

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás, na extinta extensão de Rialma. Durante a graduação, foi monitor das disciplinas de Geometria Analítica e Equações Diferenciais Aplicadas e pesquisador do CNPq em um trabalho de iniciação científica sobre estabilidade assintótica de uma classe de equações diferenciais. Durante o mestrado, na UFG, foi bolsista do CNPq. Atualmente é professor de matemática no IFG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Campus de Inhumas.

Dedico este trabalho às mulheres da minha vida: Maria Angelina, minha mãe e Gleiceanne, minha esposa.



---

## **Agradecimentos**

---

Primeiramente ao Criador pelo dom da vida e pela beleza de toda a criação, que nos faz querer entendê-la.

Aos meus pais, pelo estímulo e apoio desde a primeira hora; pela paciência e sensatez com que sempre me ajudaram.

À minha esposa, pelo companheirismo, paciência e compreensão reveladas ao longo destes meses.

Aos meus familiares e amigos que sempre me apoiaram e acreditaram nessa conquista.

Aos professores de toda a minha vida, da pré-escola à pós-graduação, que me inspiraram e incentivaram.

Ao Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia, pela orientação, disposição e paciência durante a elaboração deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro recebido durante a realização deste trabalho.

Aquele que pode digerir um segundo ou terceiro fluxo, uma segunda ou terceira diferença, não precisa, creio eu, ter relutância em face de qualquer questão sobre a Divindade.

**George Berkeley,**  
*História da Matemática.*

---

## Resumo

---

BELISÁRIO, Hugo Leonardo da Silva. **Ciclos limite para a equação de Abel generalizada**. Goiânia, 2009. 69p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho realizamos um estudo sobre as equações do tipo

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^n a_i(t)x^i, \quad (\text{A})$$

onde  $a_i \in C^1$ ,  $i = 0, \dots, n$  e  $0 \leq t \leq 1$ . Uma equação da forma (A) é denominada equação de Abel generalizada. Nosso estudo se refere ao problema proposto por C. Pugh: existe um número natural  $N$  dependendo apenas de  $n$ , tal que a equação (A) possui no máximo  $N$  ciclos limites?

Inicialmente estudamos o problema de C. Pugh para  $n = 1$  e  $n = 2$ , para os quais a equação (A) possui, no máximo, um e dois ciclos limite, respectivamente. Para  $n = 3$ , A. Lins Neto mostra que, se  $a_3(t)$  não muda de sinal em  $[0, 1]$ , então a equação (A) possui no máximo três ciclos limite. Além disso A. Lins Neto mostra que, dado um número natural  $l$ , é possível construir uma equação da forma (A) com  $n = 3$  que possui no mínimo  $l$  ciclos limites. Ainda para  $n = 3$ , A. Gasull e J. Llibre estudam o problema de C. Pugh considerando que  $a_2(t)$  não muda de sinal em  $[0, 1]$ , e M. J. Álvarez, A. Gasull e H. Giacomini também estudam o problema de C. Pugh considerando que existem números reais  $a$  e  $b$  tais que  $aa_3(t) + ba_2(t)$  não muda de sinal em  $[0, 1]$  e  $a_1(t) = a_0(t) = 0$ . Além destes resultados, estudamos alguns resultados mais gerais estudados por A. Gasull e A. Guillamon.

### Palavras-chave

Equação de Abel, aplicação de Poincaré, estabilidade de órbitas periódicas, ciclo limite, 16º problema de Hilbert.

---

## Abstract

---

BELISÁRIO, Hugo Leonardo da Silva. **Ciclos limite para a equação de Abel generalizada**. Goiânia, 2009. 69p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we conducted a study on the equations of the type

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^n a_i(t)x^i, \quad (\text{A})$$

where  $a_i \in C^1$ ,  $i = 0, \dots, n$  and  $0 \leq t \leq 1$ . An equation of the form (A) is called a generalized Abel equation. Our study refers to the problem proposed by C. Pugh: There is a natural number  $N$  depending only on  $n$ , such that the equation (A) has at most  $N$  limit cycles?

Initially we study the problem of C. Pugh for  $n = 1$  and  $n = 2$ , for which the equation (A) has at most one and two limit cycles, respectively. For  $n = 3$ , A. Lins Neto shows that if  $a_3(t)$  does not change sign on  $[0, 1]$ , then the equation (A) has at most three limit cycles. Also A. Lins Neto shows that, given a natural number  $l$ , it is possible to construct an equation of the form (A) with  $n = 3$  that has at least  $l$  limit cycles. Still for  $n = 3$ , A. Gasull and J. Llibre study the problem of C. Pugh considering that  $a_2(t)$  does not change sign on  $[0, 1]$ , and M. J. Alvarez, A. Gasull and H. Giacomini also study the problem of C. Pugh considering that there are real numbers  $a$  and  $b$  such that  $aa_3(t) + ba_2(t)$  does not change sign on  $[0, 1]$  and  $a_1(t) = a_0(t) = 0$ . Besides this, we study some more general results studied by A. Gasull and A. Guillamon.

### Keywords

Abel equation, Poincaré map, stability of periodic orbits, limit cycle, 16 Hilbert problem.

---

# Sumário

---

Lista de Figuras	<b>10</b>
Lista de Tabelas	<b>11</b>
1 Caracterização do Problema	<b>12</b>
2 Generalidades	<b>17</b>
2.1 Definições	17
2.2 Resultados Preliminares	18
2.2.1 Construção de Funções	18
2.2.2 Equivalências	21
2.2.3 Estabilidade e Aplicação de Poincaré	24
2.2.4 Alguns Resultados Sobre Fluxos Planares	31
3 Resultados	<b>35</b>
3.1 Um caso particular	35
3.2 A equação de Ricatti	36
3.3 A equação de Abel	38
3.4 Resultados mais gerais	57
Referências Bibliográficas	<b>68</b>
Índice Remissivo	<b>69</b>

---

## Lista de Figuras

---

1.1	Solução Periódica.	12
2.1	Aplicação de Poincaré.	17
2.2	Ciclos limite estável, instável e semi-estável, respectivamente.	18
2.3	O ângulo formado entre $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{d\phi}{dt}$ nos casos em que $B(t) \geq 0$ e $B(t) \leq 0$ , respectivamente.	23
2.4	Retratos de fase de (2.28) na vizinhança de $x_0^*$ para $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ respectivamente.	30
2.5	Retratos de fase de (2.28) na vizinhança de $x_0^*$ para $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ respectivamente.	31
2.6	O conjunto $\tilde{Q}$ .	33
3.1	Possíveis retratos de fase para a equação (3.11) com $A(t) \geq 0$ , $A(t) \not\equiv 0$ e $c > 0$ .	42
3.2	Comparando $x(t)$ e $\bar{x}(t)$ . Casos (2.1) e (2.2) respectivamente.	49
3.3	Comparando $x(t)$ com $\bar{x}(t)$ , para $0 \neq x_0 > \frac{a}{b}$ . Caso (3.1).	49
3.4	Comparando $x(t)$ com $\bar{x}(t)$ , para $x_0 > \frac{a}{b} > 0$ . Caso (3.2).	50
3.5	Comparando $x(t)$ com $\bar{x}(t)$ , para $x_0 > \frac{a}{b} > 0$ e $x(t)$ com $\hat{x}(t)$ , para $x_0 < 0$ . Caso (3.3).	51

---

## Lista de Tabelas

---

- 3.1 Distribuição dos ciclos limite da equação (3.11), contando multiplicidades, em cada região do plano ( $x < 0$ ,  $x = 0$  e  $x > 0$ ) considerando  $A(t) \leq 0$  ou  $A(t) \geq 0$  tal que  $A(t) \neq 0$ . 40
- 3.2 Distribuição dos ciclos limite da equação (3.11), contando multiplicidades, em cada região do plano ( $x < 0$ ,  $x = 0$  e  $x > 0$ ), considerando  $B(t) \leq 0$  ou  $B(t) \geq 0$  tal que  $B(t) \neq 0$ . 44
- 3.3 Informações sobre o único ciclo limite não nulo de (3.16), considerando  $aA(t) + bB(t) \leq 0$  ou  $aA(t) + bB(t) \geq 0$  tal que  $aA(t) + bB(t) \neq 0$ . 46

## Caracterização do Problema

Neste trabalho nos propomos a estudar o seguinte problema, proposto inicialmente por C. Pugh (citado em [5]):

Sejam  $a_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$  funções de classe  $C^1$ . Considere a equação diferencial,

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j = S(t, x), \quad (1.1)$$

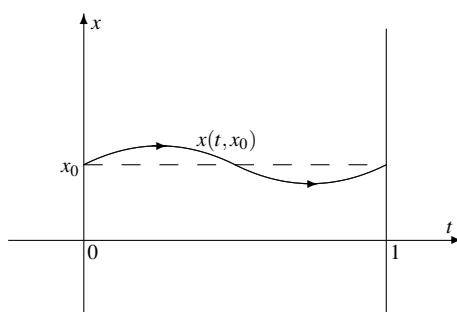
onde  $0 \leq t \leq 1$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

A equação (1.1) é chamada de **Equação de Abel Generalizada**. Particularmente, a equação (1.1) é chamada de **Equação Afim** se  $n = 1$ , **Equação de Ricatti** se  $n = 2$  e de **Equação de Abel** se  $n = 3$ .

Uma solução completa de (1.1) é uma função  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça a equação (1.1).

Utilizaremos a notação  $x(t, x_0)$  para designar a solução do problema de Cauchy formado pela equação (1.1) e a condição inicial  $x(0) = x_0$ .

Dizemos que uma solução de (1.1) é **fechada** ou **periódica** se esta for completa e  $x(1, x_0) = x_0$ .



**Figura 1.1:** Solução Periódica.

A motivação para estudar tais soluções é que se  $a_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$  forem funções periódicas de período 1, a equação (1.1) é equivalente ao campo de



vetores  $X(t, x) = \left( 1, \sum_{i=0}^n a_i(t)x^i \right)$  no cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  e as soluções fechadas de (??) são equivalentes a órbitas fechadas do campo de vetores no cilindro.

Uma solução periódica isolada no conjunto de todas as soluções periódicas de (1.1) é chamada de **ciclo limite**.

O problema consiste na seguinte pergunta: sob quais hipóteses sobre as funções  $a_i, i = 0, \dots, n$ , é possível encontrar um número inteiro  $N$  dependendo apenas de  $n$ , tal que a equação (1.1) possua no máximo  $N$  ciclos limite ou que todas as suas soluções sejam periódicas?

O problema acima foi motivado pela segunda parte do 16º Problema de Hilbert que consiste em:

Seja o campo de vetores,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  são polinômios de grau  $n$ . Existe uma cota superior para o número de ciclos limite do campo acima dependendo apenas de  $n$ ?

Em coordenadas polares temos,

$$x = r\cos(\theta) \text{ e } y = r\sin(\theta).$$

Daí o sistema (1.2) fica,

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \cos(\theta)P(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)Q(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos(\theta)Q(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - \sin(\theta)P(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}{r} \end{cases}. \quad (1.3)$$

Suponha que  $\frac{d\theta}{dt}$  dependa somente de  $\theta$  isto é,  $\frac{d\theta}{dt} = f(\theta)$  onde  $f(\theta)$  não se anula. Assim temos,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{f(\theta)} \frac{dr}{dt} = \sum_{i=0}^n a_i(\theta)r^i, \quad (1.4)$$

onde  $a_i(\theta) = \frac{1}{f(\theta)} \sum_{j=0}^i k_j \cos^j(\theta) \sin^{i-j}(\theta)$ .

Uma solução de (1.2) é periódica se, e somente se sua correspondente  $r(\theta, r_0)$  em (1.4) for tal que  $r(2\pi, r_0) = r_0$ .

Em [4], Niels Henrik Abel estudou as seguintes equações:

$$dy + (p + qy + ry^2)dx = 0 \quad (1.5)$$

e

$$(y + s)dy + (p + qy + ry^2)dx = 0, \quad (1.6)$$

onde  $p$ ,  $q$ ,  $r$  e  $s$  são funções na variável  $x$ .

Ele mostrou que estas equações podem ser reduzidas as equações

$$dz + (P + Qz^2)dx = 0 \quad (1.7)$$

e

$$zdz + (P + Qz)dx = 0 \quad (1.8)$$

respectivamente, onde  $P$  e  $Q$  são funções na variável  $x$ .

Para transformar (1.5) em (1.7) Abel utilizou duas mudanças de coordenadas diferentes.

A primeira consiste em fazer  $y = z + r'$ , desta forma temos

$$dy = dz + dr',$$

que aplicando em (1.5) nos dá

$$\begin{aligned} dz + dr' + (p + q(z + r') + r(z + r')^2)dx &= 0 \\ dz + dr' + (p + qr' + qz + rz^2 + 2rr'z + rr'^2)dx &= 0 \\ dz + \left( \frac{dr'}{dx} + p + qr' + rr'^2 \right) dx + (q + 2rr')zdx + rz^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

A seguir, basta fazer  $q + 2rr' = 0$  ou seja,  $r' = -\frac{q}{2r}$ .

A segunda consiste em fazer  $y = zr'$ , desta forma temos

$$dy = zdr' + r'dz$$

que aplicando em (1.5) nos dá

$$\begin{aligned} r'dz + (zdr' + p + q(zr') + r(zr')^2)dx &= 0 \\ r'dz + (zdr' + p + qr'z + rr'^2z^2)dx &= 0 \\ dz + \frac{p}{r'}dx + \left( \frac{1}{r'} \frac{dr'}{dx} + q \right) zdx + rr'z^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Para concluir, basta fazer  $\frac{1}{r'} \frac{dr'}{dx} + q = 0$  ou seja,  $r' = e^{-\int_{x_0}^x q dt}$ .

Para transformar (1.6) em (1.8) Abel utilizou a mudança de coordenadas  $y = \alpha + \beta z$ , desta forma temos

$$dy = d\alpha + z d\beta + \beta dz$$

que aplicando em (1.6) nos dá

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta z + s)(d\alpha + zd\beta + \beta dz) + (p + q(\alpha + \beta z) + r(\alpha + \beta z)^2)dx = 0 \\ \left(z + \frac{\alpha + s}{\beta}\right)dz + \frac{(\alpha + s)\frac{d\alpha}{dx} + q + q\alpha + r\alpha^2}{\beta^2}dx + \\ \frac{\beta\left(\frac{d\alpha}{dx} + q + 2r\alpha\right) + (\alpha + s)\frac{d\beta}{dx}}{\beta^2}zdx + \left(\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dx} + r\right)z^2dx = 0. \end{aligned}$$

Para concluir, basta fazer

$$\alpha + s = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dx} + r = 0,$$

ou seja

$$\alpha = -s \quad \text{e} \quad \beta = e^{-\int_{x_0}^x \beta dt}.$$

Observe que a equação (1.7) pode ser reescrita na forma

$$\frac{dz}{dx} = -P - Qz^2,$$

ou seja, na forma (1.1).

Já a equação (1.8) podemos reescrevê-la na forma

$$\frac{dz}{dx} = -Q - P\frac{1}{z},$$

onde, aplicando a mudança de coordenadas  $w = \frac{1}{z}$ , temos

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = w^2(-Q - Pw) = -Qw^2 - Pw^3,$$

ou seja, também podemos escrever (1.8) na forma (1.1). Este é o motivo pelo qual denominamos a equação (1.1) de Equação de Abel Generalizada.

O Capítulo 2 inicia-se com uma seção dedicada a conceitos básicos, que se farão necessárias para o bom entendimento deste trabalho. A segunda seção é dedicada a vários resultados considerados preliminares e que serão ferramentas úteis na demonstração dos resultados obtidos no Capítulo 3.

Vamos ao Capítulo 3. Iniciamos este capítulo com o estudo do problema de C. Pugh para a subclasse mais trivial das equações generalizadas de Abel, o caso  $n = 1$ . Na segunda seção apresentamos um resultado obtido por Lins Neto em [5], o Teorema 3.1, que resolve definitivamente o problema proposto por C. Pugh para o caso em que  $n = 2$  (Equação de Ricatti).

---

Na terceira seção, estudamos o caso  $n = 3$  com base em [5], [2] e [6]. Neste caso é possível, em casos particulares, garantir que (1.1) possui no máximo três ciclos limite contando multiplicidades, sob as hipóteses dos Teoremas 3.10, 3.3 e 3.4, no máximo um ciclo limite não nulo, sob as hipóteses do Teorema 3.5 e Corolário 3.7 e no máximo quatro ciclos limite não nulos, sob as hipóteses do Teorema 3.8. Além destes resultados, as Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, trazem resultados sobre localização, estabilidade e existência destes ciclos limite.

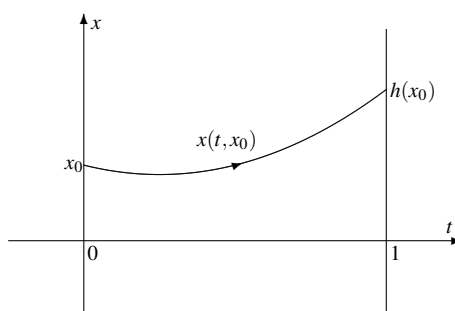
Na última seção, partimos para alguns casos mais gerais do problema proposto, considerando  $n \geq 3$ . Com base em resultados estudados em [1], sob algumas hipóteses, é possível encontrar as cotas do problema estudado (Teoremas 3.11 e 3.12). Os resultados mais interessantes deste estudo são a Proposição 3.9 e a parte *ii*) do Teorema 3.12 que mostram que é possível construir equações de Abel generalizadas para um valor de  $n \geq 4$  dado, que possuem no mínimo uma quantidade  $l$  de ciclos limite. A proposição 3.9 é uma generalização do mesmo resultado obtido por Lins Neto em [5] para  $n = 3$ .

## Generalidades

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados utilizados no decorrer deste trabalho. Na primeira seção trazemos as definições e na segunda seção vários resultados considerados preliminares.

### 2.1 Definições

**Definição 2.1.** Sejam  $\Sigma_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$ ,  $\Sigma_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = 1\}$  e  $U$  o subconjunto aberto de  $\Sigma_0$  tal que,  $(0, x_0) \in U$  se, e somente se  $x(t, x_0) \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$ . Definimos a Aplicação de Poincaré associada à equação (1.1)  $h : U \subset \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$  como segue, se  $x_0 \in U$  então  $h(x_0) = x(1, x_0)$ .



**Figura 2.1:** Aplicação de Poincaré.

Observe que, se  $x(t, x_0)$  é uma solução periódica de (1.1), então temos  $h(x_0) = x_0$ .

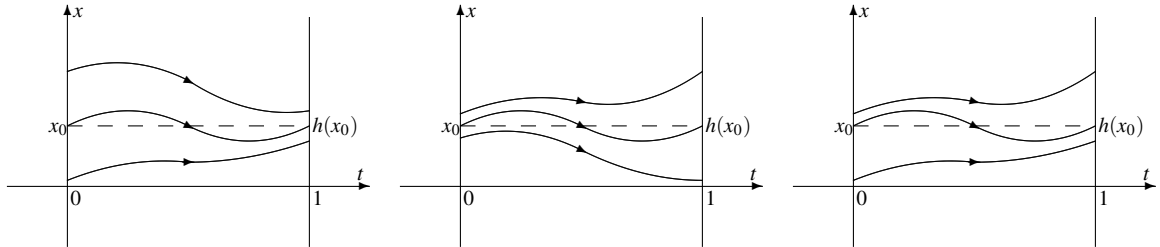
**Definição 2.2.** A multiplicidade de um ciclo limite  $x(t, x_0)$  é a multiplicidade algébrica de  $x_0$  como zero da função  $h(x_0) - x_0$ .

**Definição 2.3.** Dizemos que um ciclo limite  $x(t, x_0)$  de (1.1) é,

- (a) **Estável** se existe  $\varepsilon > 0$  tal que,  $|h(y) - x_0| < |y - x_0|$  para todo  $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ ;

(b) **Instável** se existe  $\varepsilon > 0$  tal que,  $|h(y) - x_0| > |y - x_0|$  para todo  $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ ;

(c) **Semi-Estável** se existe  $\varepsilon > 0$  tal que,  $|h(y) - x_0| > |y - x_0|$  para todo  $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$  e  $|h(y) - x_0| < |y - x_0|$  para todo  $y \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$  ou o contrário.



**Figura 2.2:** Ciclos limite estável, instável e semi-estável, respectivamente.

**Definição 2.4.** Um ciclo limite  $x(t)$  de (1.1) é dito **Hiperbólico** se  $\frac{dh}{dx_0}(x(0)) \neq 1$

Em particular, se  $\frac{dh}{dx_0}(x(0)) < 1$ , podemos aplicar o teorema do valor médio e concluir que  $x(t)$  é estável. Por outro lado, se  $\frac{dh}{dx_0}(x(0)) > 1$ , então  $x(t)$  é instável. Veremos na Proposição 2.14 que as condições acima são equivalentes a dizer que, se  $\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t)) dt < 0$ , então  $x(t)$  é estável e se  $\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t)) dt > 0$ , então  $x(t)$  é instável. Além disso, veremos que um ciclo limite é hiperbólico se  $\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t)) dt \neq 0$ .

## 2.2 Resultados Preliminares

Esta seção, dedicada a resultados necessários no desenvolvimento deste trabalho, está dividida em quatro subseções: a primeira traz dois Lemas estudados em [5] que serão utilizados na demonstração do Lema 3.10; a segunda trata de algumas mudanças de coordenadas e equações equivalentes à equação generalizada de Abel; a terceira subseção trata da aplicação de Poincaré e da estabilidade de órbitas periódicas e na última subseção falamos sobre alguns resultados conhecidos para fluxos planares que serão utilizados neste estudo.

### 2.2.1 Construção de Funções

Nesta seção apresentamos dois lemas que serão utilizados na demonstração do Lema 3.10. Seja  $g$  uma função real, denotaremos por  $j^n(g)$  o polinômio de Taylor da função  $g$  em  $x = 0$  de grau  $n$  e por  $J^n$  ao conjunto de todos os polinômios em  $x$  de grau menor ou igual a  $n$ .

**Lema 2.5.** *Sejam  $g_0, g_1, \dots, g_n$  funções reais analíticas definidas em todo o intervalo  $(-\delta, \delta)$  para algum  $\delta > 0$ . Suponha que  $j^n(g_k) = x^k$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Então existe uma combinação linear  $g = \sum_{i=0}^n a_i g_i$  com pelo menos  $n$  raízes  $x_1, \dots, x_n$  tais que  $x_l \in (0, \delta)$  e  $\frac{dg}{dx}(x_l) \neq 0$  para todo  $l = 1, \dots, n$ .*

*Prova.* Iremos construir uma sequência de funções  $G_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, n$ , com  $G_l = \sum_{i=0}^l (-1)^i \varepsilon_i g_{n-i}$  onde  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , será escolhido de maneira que  $G_l$  possui no mínimo  $l$  raízes  $x_{i,l}$  com  $\frac{dG_l}{dx}(x_{i,l}) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, l$ .

Como  $j^n(g_k) = x^k$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$  temos que para cada  $g_k$  existe um número real  $\theta_k > 0$  tal que  $g_k(x) > 0$  para  $0 < x \leq \theta_k$ . Escolha  $\delta_0$  tal que  $0 < \delta_0 < \min\{\theta_k : k = 0, 1, \dots, n\}$ , logo  $g_k(x) > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , para  $0 < x \leq \delta_0$ .

Escolhendo  $\varepsilon_0 = 1$  temos  $G_0 = g_n$  que é uma função positiva em  $[0, \delta_0]$ . Escolheremos  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  de maneira que  $G_1(\delta_0) > 0$ . Como  $j^{n-1}(G_1) = -\varepsilon_1 x^{n-1}$ , existe um  $\delta_1 > 0$  tal que  $G_1(x) < 0$  para  $x \in (0, \delta_1]$  e logo  $G_1$  possui uma raiz  $x_{1,1} \in (\delta_1, \delta_0)$ . Calculando  $\frac{dG_1}{dx}(x_{1,1})$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dG_1}{dx}(x_{1,1}) &= -\varepsilon_1 \frac{dg_{n-1}}{dx}(x_{1,1}) + O((x_{1,1})^{n-1}) \\ &= -\varepsilon_1(n-1)(x_{1,1})^{n-2} + O((x_{1,1})^{n-1}). \end{aligned}$$

Logo podemos escolher  $\delta_0$  tão pequeno que  $\frac{dG_1}{dx}(x_{1,1}) \neq 0$ .

Considere que  $G_1(x)$  possui uma raiz  $x_{1,1}$  tal que  $\frac{dG_1}{dx}(x_{1,1}) \neq 0$  e que  $G_1(\delta_1) < 0$ . Podemos escolher  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  tão pequeno que  $G_2(x) \approx G_1(x)$  para  $x \in [\delta_1, \delta_0]$  e assim teremos uma raiz  $x_{1,2} \in (\delta_1, \delta_0)$  de  $G_2(x)$  tal que  $\frac{dG_2}{dx}(x_{1,2}) \neq 0$ . Como  $j^{n-2}(G_2) = \varepsilon_2 x^{n-2}$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $G_2(x) > 0$  para  $x \in (0, \delta_2]$  e logo  $G_2$  possui uma raiz  $x_{2,2} \in (\delta_2, \delta_1)$ . Calculando  $\frac{dG_2}{dx}(x_{2,2})$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dG_2}{dx}(x_{2,2}) &= \varepsilon_2 \frac{dg_{n-2}}{dx}(x_{2,2}) + O((x_{2,2})^{n-2}) \\ &= \varepsilon_2(n-2)(x_{2,2})^{n-3} + O((x_{2,2})^{n-2}). \end{aligned}$$

Logo podemos escolher  $\delta_1$  tão pequeno que  $\frac{dG_2}{dx}(x_{2,2}) \neq 0$ .

Considere que  $G_l(x)$ ,  $l+1 < n$ , possui  $l$  raízes  $x_{i,l}$  tais que  $\frac{dG_l}{dx}(x_{i,l}) \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, l$ , e que  $(-1)^l G_l(\delta_l) > 0$ . Podemos escolher  $\varepsilon_{l+1} < \varepsilon_l$  tão pequeno que  $G_{l+1}(x) \approx G_l(x)$  para  $x \in [\delta_l, \delta_0]$  e assim teremos  $l$  raízes  $x_{i,l+1} \in (\delta_l, \delta_0)$  de  $G_{l+1}(x)$  tais que  $\frac{dG_{l+1}}{dx}(x_{i,l+1}) \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, l$ . Como  $j^{n-(l+1)}(G_{l+1}) = (-1)^{l+1} \varepsilon_{l+1} x^{n-(l+1)}$ , existe  $\delta_{l+1} > 0$  tal que  $(-1)^{l+1} G_{l+1}(x) > 0$  para  $x \in (0, \delta_{l+1}]$  e logo  $G_{l+1}$  possui uma raiz

$x_{l+1,l+1} \in (\delta_{l+1}, \delta_l)$ . Calculando  $\frac{dG_{l+1}}{dx}(x_{l+1,l+1})$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dG_{l+1}}{dx}(x_{l+1,l+1}) &= \varepsilon_{l+1} \frac{dg_{n-(l+1)}}{dx}(x_{l+1,l+1}) + O((x_{l+1,l+1})^{n-(l+1)}) \\ &= \varepsilon_{l+1}(n-(l+1))(x_{l+1,l+1})^{n-(l+2)} + O((x_{l+1,l+1})^{n-l+1}). \end{aligned}$$

Logo podemos escolher  $\delta_l$  tão pequeno que  $\frac{dG_{l+1}}{dx}(x_{l+1,l+1}) \neq 0$ .

Considere que  $G_{n-1}(x)$ , possui  $n-1$  raízes  $x_{i,n-1}$  tais que  $\frac{dG_{n-1}}{dx}(x_{i,n-1}) \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ , e que  $(-1)^{n-1}G_{n-1}(\delta_{n-1}) > 0$ . Podemos escolher  $\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$  tão pequeno que  $G_n(x) \approx G_{n-1}(x)$  para  $x \in [\delta_{n-1}, \delta_0]$  e assim teremos  $n-1$  raízes  $x_{i,n} \in (\delta_{n-1}, \delta_0)$  de  $G_n(x)$  tais que  $\frac{dG_n}{dx}(x_{i,n}) \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ . Como  $j^1(G_n) = (-1)^n \varepsilon_n + (-1)^{n-1} \varepsilon_{n-1} x$ , existe  $\delta_n > 0$  tal que  $(-1)^n G_n(x) > 0$  para  $x \in (0, \delta_n]$  e logo  $G_n$  possui uma raiz  $x_{n,n} \in (\delta_n, \delta_{n-1})$ . Calculando  $\frac{dG_n}{dx}(x_{n,n})$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dG_n}{dx}(x_{n,n}) &= (-1)^{n-1} \varepsilon_{n-1} \frac{dg_1}{dx}(x_{n,n}) + (-1)^n \varepsilon_n \frac{dg_0}{dx}(x_{n,n}) + O(x_{n,n})^1 \\ &= (-1)^{n-1} \varepsilon_{n-1} + O(x_{n,n})^1. \end{aligned}$$

Logo podemos escolher  $\delta_{n-1}$  tão pequeno que  $\frac{dG_n}{dx}(x_{n,n}) \neq 0$ . □

**Observação 2.6.** No Lema 2.5 podemos substituir a suposição  $j^n(g_k) = x^k$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$  por

$$j^n(g_k) = \sum_{l=0}^{n-k} c_{k,l} x^{k+l}, \quad k = 0, \dots, n, \quad c_{k,l} \in \mathbb{R}, l = 0, \dots, n-k \quad e \quad c_0 > 0.$$

Vejam os exemplos de funções como as estudadas no Lema 2.5.

**Exemplo 2.7.** O exemplo mais trivial das funções estudadas no Lema 2.5 são as funções  $g_k(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

**Exemplo 2.8.** Um exemplo de funções como as da Observação 2.6 são as funções  $g_k(x) = \text{sen}^k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Observe que,

$$\frac{d^i g_k}{dx^i} = \frac{k!}{(k-i)!} \text{sen}^{k-i}(x) \cos^i(x) + O((\text{sen}(x))^{k-i+2}),$$

logo as funções  $g_k$  são da forma dada na Observação 2.6.



**Lema 2.9.** *Seja  $Y$  uma família de funções reais analíticas definidas em  $[-1, 1]$  de dimensão  $n + 1$ . Defina  $\tau : Y \rightarrow J^n$  por  $\tau(f) = j^n(H_f)$  em  $x = 0$ , onde*

$$H_f(x) = x^{-n}W_f(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{(1-xA(t))^\alpha} dt,$$

para uma função contínua  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e um número real  $\alpha$  dado.

Se  $\tau$  é sobrejetora, então existe  $f \in Y$  tal que  $W_f(x)$  possui  $n$  raízes  $x_1, \dots, x_n$  com  $\frac{dW_f}{dx}(x_i) \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

*Prova.* Como  $\tau$  é sobrejetora existem funções  $f_0, \dots, f_n \in Y$  tais que  $\tau(f_k) = x^k$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Defina  $g_k(x) = H_{f_k}(x)$ , pelo Lema 2.5, existe uma combinação linear  $g(x) = \sum_{j=0}^n a_j g_j(x)$  que possui no mínimo  $n$  raízes  $x_1, \dots, x_n \in (0, \delta)$  com  $\frac{dg}{dx}(x_i) \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Escolhendo  $f(t) = \sum_{j=0}^n a_j f_j(t)$ , teremos  $H_f(x) = g(x)$  e portanto  $x_1, \dots, x_n \in (0, \delta)$  serão as raízes desejadas de  $W_f(x) = x^n g(x)$ .  $\square$

## 2.2.2 Equivalências

Nesta subseção apresentamos quatro resultados estudados por A. Gasull e J. Llibre em [2], sendo que o Lema 2.11 apresentado aqui é uma generalização do resultado estudado em [2] para  $n = 3$ . Os resultados estudados nesta seção serão utilizados nas demonstrações dos Teoremas 3.3 e 3.4.

**Proposição 2.10.** *Toda equação de Abel,*

$$\frac{dx}{dt} = a_3(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t), \quad (2.1)$$

com uma solução periódica  $x_1(t)$ , pode ser escrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x. \quad (2.2)$$

*Prova.* Aplicando a mudança de variáveis  $y(t) = x(t) - x_1(t)$  em (2.1) temos,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \\ &= a_3(t)(x^3 - x_1^3) + a_2(t)(x^2 - x_1^2) + a_1(t)(x - x_1) \\ &= a_3(t)(x^3 - x_1^3) + a_2(t)(x + x_1)(x - x_1) + a_1(t)(x - x_1) \\ &= a_3(t)((y + x_1)^3 - x_1^3) + a_2(t)((y + x_1) + x_1)y + a_1(t)y \\ &= a_3(t)(y^3 + 3y^2x_1 + 3yx_1^2 + x_1^3 - x_1^3) + a_2(t)(y + 2x_1)y + a_1(t)y \\ &= a_3(t)y^3 + (3x_1 + a_2)y^2 + (3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_1)y \\ &= A(t)y^3 + B(t)y^2 + C(t)y, \end{aligned}$$

onde  $A(t) = a_3(t)$ ,  $B(t) = 3x_1(t) + a_2(t)$  e  $C(t) = 3(x_1(t))^2 + 2a_2(t)x_1(t) + a_1(t)$ .  $\square$

**Lema 2.11.** *No estudo da quantidade de ciclos limite de (1.1) podemos considerar  $-a_{2j}$  no lugar de  $a_{2j}$  para todo  $j = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$ , ou  $-a_{2j+1}$  no lugar de  $a_{2j+1}$  para todo  $j = 0, \dots, [\frac{n-1}{2}]$ .*

*Prova.* Aplicando em (1.1) a mudança de variáveis

$$y(t) = -x(t), \quad (2.3)$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\frac{dx}{dt} = -\sum_{j=0}^n a_j(t)x^j \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} a_j(t)(-x)^j = \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} a_j(t)y^j, \end{aligned} \quad (2.4)$$

logo podemos considerar  $-a_{2j}$  no lugar de  $a_{2j}$  para todo  $j = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$ .

Aplicando em (2.4) a mudança de variáveis

$$y(s) = y(1-t),$$

temos,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = -\frac{dy}{dt} = -\sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} a_j(t)y^j = \sum_{j=0}^n (-1)^j a_j(t)y^j.$$

logo podemos considerar  $-a_{2j+1}$  no lugar de  $a_{2j+1}$  para todo  $j = 0, \dots, [\frac{n-1}{2}]$ .  $\square$

**Lema 2.12.** *As soluções de (2.2) nas regiões  $x > 0$  e  $x < 0$  podem ser estudadas na região  $y = \frac{1}{x^2} > 0$  como soluções das equações diferenciais (2.5) e (2.6), respectivamente.*

$$\frac{dy}{dt} = -2A(t) - 2B(t)y^{\frac{1}{2}}(t) - 2C(t)y(t), \quad (2.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = -2A(t) + 2B(t)y^{\frac{1}{2}}(t) - 2C(t)y(t). \quad (2.6)$$

*Prova.* Basta aplicar em (2.2) a mudança de variáveis  $y = \frac{1}{x^2}$  pois teremos,

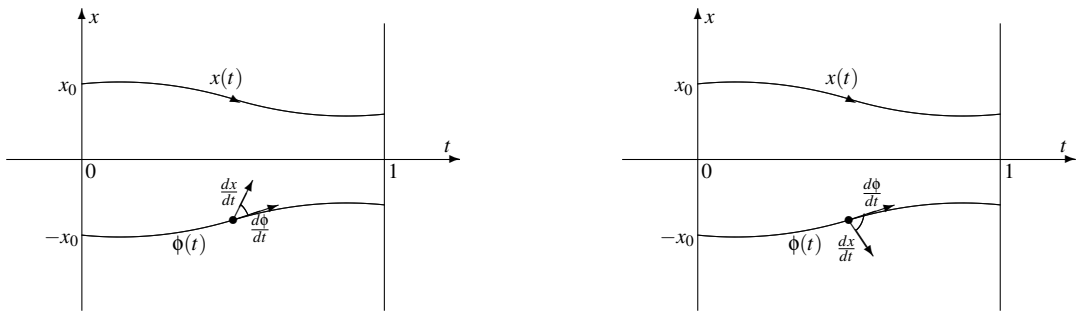
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{-2}{x^3} \frac{dx}{dt} \\ &= -2A(t) - 2B(t)\frac{1}{x} - 2C(t)\frac{1}{x^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Observe que,

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

o que substituindo em (2.7) conclui a demonstração.  $\square$

**Lema 2.13.** *Considere em (2.2)  $B(t) \geq 0$  ou  $B(t) \leq 0$  tal que  $B(t) \not\equiv 0$  e  $x(t) = x(t, x_0)$  uma solução, então o fluxo de (2.2) intercepta a curva  $\phi(t) = -x(t, x_0)$  formando com  $\frac{d\phi}{dt}$  um ângulo agudo positivo ou negativo, respectivamente.*



**Figura 2.3:** O ângulo formado entre  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{d\phi}{dt}$  nos casos em que  $B(t) \geq 0$  e  $B(t) \leq 0$ , respectivamente.

*Prova.* Por (2.2) temos  $\frac{dx}{dt} = A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)$ .

Os vetores tangentes da curva  $(t, -x(t))$  são

$$(1, -A(t)(x(t))^3 - B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t)).$$

O campo de vetores (2.2) em  $(t, -x(t))$  é dado por

$$(1, -A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t)).$$

Como  $B(t) \geq 0$  ou  $B(t) \leq 0$  é tal que  $B(t) \not\equiv 0$  temos

$$-A(t)(x(t))^3 - B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t) \leq -A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t)$$

ou

$$-A(t)(x(t))^3 - B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t) \geq -A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t),$$

respectivamente. Nas inequações acima a desigualdade estrita vale para algum  $t \in [0, 1]$ . Logo o Lema é válido.  $\square$

### 2.2.3 Estabilidade e Aplicação de Poincaré

Nesta subseção apresentamos cinco resultados sobre a estabilidade das soluções da equação de Abel.

A proposição seguinte foi citada em [2], mas a demonstração apresentada aqui pode ser encontrada em [3].

**Proposição 2.14.** *Seja  $h(x_0)$  a aplicação de Poincaré associada à equação,*

$$\frac{dx}{dt} = S(t, x),$$

onde  $S \in C^3$  é de período 1 em relação a  $t$  e  $t \in [0, 1]$ . Temos,

$$\begin{aligned} i) \quad \frac{dh}{dx_0}(x_0) &= e^{\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t, x_0)) dt}, \\ ii) \quad \frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0) &= \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[ \int_0^1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0)) e^{\int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) ds} dt \right]; \\ iii) \quad \frac{d^3 h}{dx_0^3}(x_0) &= \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0)}{\frac{dh}{dx_0}(x_0)} \right)^2 + \int_0^1 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(t, x(t, x_0)) e^{2 \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) ds} dt \right]. \end{aligned}$$

*Prova.* Pela definição 2.1, temos  $h(x_0) = x(1, x_0)$ , logo  $\frac{dh}{dx_0}(x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(1, x_0)$ ,  $\frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0) = \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(1, x_0)$  e  $\frac{d^3 h}{dx_0^3}(x_0) = \frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3}(1, x_0)$ .

Como  $x(t, x_0)$  é a solução do problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = S(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (2.8)$$

então,

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t S(s, x(s, x_0)) ds.$$

Derivando em relação a  $x_0$ , temos

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0) = 1 + \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) \frac{\partial x}{\partial x_0}(s, x_0) ds. \quad (2.9)$$

Fazendo  $z(t) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0)$  em (2.9), temos

$$z(t) = 1 + \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) z(s) ds, \quad (2.10)$$

onde para  $t = 0$  temos  $z(0) = 1$ . Derivando (2.10) em relação a  $t$  obtemos o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0))z(t) \\ z(0) = 1 \end{cases},$$

cujas solução é

$$z(t) = e^{\int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) ds}.$$

Portanto, temos

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(1, x_0) = z(1) = e^{\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t, x_0)) dt}.$$

Derivando (2.9) em relação a  $x_0$ , temos

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(t, x_0) = \int_0^t \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0)) \left( \frac{\partial x}{\partial x_0}(s, x_0) \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(s, x_0) \right) ds. \quad (2.11)$$

Fazendo  $w(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(t, x_0)$  em (2.11), temos

$$w(t) = \int_0^t \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0)) (z(s))^2 + \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) w(s) \right) ds, \quad (2.12)$$

onde para  $t = 0$  temos  $w(0) = 0$ . Derivando (2.12) em relação a  $t$  obtemos o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t, x_0))w(t) + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0))(z(t))^2 \\ w(0) = 0 \end{cases},$$

cujas solução pelo método de “variação de parâmetros” é

$$w(t) = z(t) \int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0)) z(s) ds.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0) &= \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(1, x_0) = w(1) = z(1) \int_0^1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0)) z(s) ds \\ &= \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[ \int_0^1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0)) e^{\int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) ds} dt \right]. \end{aligned}$$

Derivando (2.11) em relação a  $x_0$  temos

$$\frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3}(t, x_0) = \int_0^t \left( \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^3 + 3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3} \right) ds. \quad (2.13)$$

Fazendo  $u(t) = \frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3}(t, x_0)$  em (2.13), temos

$$u(t) = \int_0^t \left( (z(s))^3 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + 3z(s)w(s) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + u(s) \frac{\partial S}{\partial x} \right) ds, \quad (2.14)$$

onde para  $t = 0$  temos  $u(0) = 0$ . Derivando (2.14) em relação a  $t$  obtemos o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t, x_0))u(t) + \left( 3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0))z(t)w(t) + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(t, x(t, x_0))(z(t))^3 \right) \\ u(0) = 0 \end{cases},$$

cuja solução pelo método de “variação de parâmetros” é

$$u(t) = z(t) \left[ 3 \int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0))w(s)ds + \int_0^t \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(s, x(s, x_0))(z(s))^2 ds \right]. \quad (2.15)$$

Considerando a função  $M(t) = \frac{3}{2} \left[ \frac{w(t)}{z(t)} \right]^2$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= 3 \left[ \int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0))z(s)ds \right] \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0))z(t) \\ &= 3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \left[ z(t) \int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0))z(s)ds \right] \\ &= 3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0))w(t), \end{aligned}$$

o que substituindo em (2.15), obtemos

$$u(t) = z(t) \left[ M(t) + \int_0^t \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(s, x(s, x_0))(z(s))^2 ds \right].$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^3 h}{dx_0^3}(x_0) &= \frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3}(1, x_0) = u(1) = z(1) \left[ M(1) + \int_0^1 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(s, x(s, x_0))(z(s))^2 ds \right] \\ &= \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0)}{\frac{dh}{dx_0}(x_0)} \right)^2 + \int_0^1 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(t, x(t, x_0))e^{2 \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0))ds} dt \right], \end{aligned}$$

que conclui a demonstração desta proposição.  $\square$

O Lema a seguir também foi estudado em [2] e será útil na demonstração de alguns resultados do Capítulo 3.

**Lema 2.15.** *A primeira derivada da aplicação de Poincaré associada a uma órbita*

periódica de (2.2) é dada por,

$$e^{\int_0^1 C(t)dt} \quad \text{se } x(t) \equiv 0. \quad (2.16)$$

ou

$$e^{-\int_0^1 (B(t)x(t)+2C(t))dt} = e^{\int_0^1 (A(t)(x(t))^2-C(t))dt} \quad \text{se } x(t) \not\equiv 0. \quad (2.17)$$

*Prova.* Aplicando o item *i*) da Proposição 2.14, temos,

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2+2B(t)x(t)+C(t))dt}, \quad (2.18)$$

então para  $x(t) \equiv 0$  temos,

$$\frac{dh}{dx_0}(0) = e^{\int_0^1 C(t)dt}.$$

Para  $x(t) \not\equiv 0$  podemos reescrever (2.2) como segue,

$$\frac{dx}{x(t)} = A(t)(x(t))^2 + B(t)x(t) + C(t),$$

que integrando no intervalo  $[0, 1]$  temos,

$$\ln(x(t)) \Big|_0^1 = \int_0^1 (A(t)(x(t))^2 + B(t)x(t) + C(t))dt,$$

logo,

$$\int_0^1 (A(t)(x(t))^2 + B(t)x(t) + C(t))dt = 0. \quad (2.19)$$

Multiplicando (2.19) por  $-2$  e adicionando a  $\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2 + 2B(t)x(t) + C(t))dt$  temos,

$$\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2 + 2B(t)x(t) + C(t))dt = \int_0^1 (A(t)(x(t))^2 - C(t))dt.$$

Multiplicando (2.19) por  $-3$  e adicionando a  $\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2 + 2B(t)x(t) + C(t))dt$  temos,

$$\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2 + 2B(t)x(t) + C(t))dt = -\int_0^1 (B(t)x(t) + 2C(t))dt.$$

Daí,

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{-\int_0^1 (B(t)x(t)+2C(t))dt} = e^{\int_0^1 (A(t)(x(t))^2-C(t))dt}.$$

Concluimos a demonstração.  $\square$

a próxima proposição foi estudada em [6] e será utilizada na demonstração do Teorema 3.5.

**Proposição 2.16.** *Considere em  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  a equação diferencial*

$$\frac{dx}{dt} = f(t)P(x), \quad (2.20)$$

com  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$ . Suponha que a equação  $P(x) = 0$  tenha  $n$  soluções,  $x_1, \dots, x_n$ , logo  $x_i(t) = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são soluções periódicas de (2.20). Se  $\int_0^1 f(t)dt = 0$ , então todas as soluções de (2.20) são periódicas, caso contrário, os únicos ciclos limite são  $x_i(t)$ , para  $i = 1, \dots, n$  e além disso se  $x_i$  tem multiplicidade 1 então  $x_i(t)$  é hiperbólico e sua estabilidade é determinada pelo sinal de  $\frac{dP}{dx}(x_i) \int_0^1 f(t)dt$ .

*Prova.* Uma solução  $x = x(t)$  de (2.20) com condição inicial  $x(0) \neq x_i$  para  $i = 1, \dots, n$  satisfaz a equação

$$\varphi(x(t)) := \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{du}{P(u)} = \int_0^t f(s)ds. \quad (2.21)$$

Como  $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{P(x)}$ , temos que  $\frac{d\varphi}{dx} \neq 0$  se  $x \neq x_i$ . Isto implica que  $\varphi(x)$  é injetora.

Se  $\int_0^1 f(t)dt = 0$ , por (2.21) temos  $\varphi(x(0)) = 0 = \varphi(x(1))$  e como  $\varphi(x)$  é injetora só podemos ter  $x(0) = x(1)$ , logo toda solução de (2.20) é periódica.

Se  $\int_0^1 f(t)dt \neq 0$ , então teremos  $\varphi(x(0)) = 0 \neq \int_0^1 f(t)dt = \varphi(x(1))$  e daí só podemos ter  $x(0) \neq x(1)$ , logo  $x(t)$  não é periódica o que implica que as soluções  $x_i(t)$  são os únicos ciclos limite de (2.20). Além disso, pela Proposição 2.14 temos,

$$\frac{dh}{dx_0}(x_i) = e^{\int_0^1 \frac{\partial(f(t)P(x))}{\partial x}(x_i)dt} = e^{\frac{dP}{dx}(x_i) \int_0^1 f(t)dt}.$$

Seja  $x_i$  uma raiz de  $P(x)$  de multiplicidade igual a um, então  $\frac{dP}{dx}(x_i) \neq 0$  e  $\frac{dP}{dx}(x_i) \int_0^1 f(t)dt \neq 0$  o que implica que  $\frac{dh}{dx_0}(x_i) \neq 1$ , portanto  $x_i(t)$  é hiperbólico.  $\square$

A seguir apresentamos dois lemas estudados em [1] que serão úteis na demonstração do Teorema 3.11.

**Lema 2.17.** *Considere as funções  $\Phi, \Psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas como*

$$\Phi(x_0) := (n - m) \int_0^1 a_n(t)(x(t, x_0))^{n-1}(t)dt + (1 - m) \int_0^1 a_1(t)dt \quad (2.22)$$

e

$$\Psi(x_0) := (m - n) \int_0^1 a_m(t)(x(t, x_0))^{m-1}(t)dt + (1 - n) \int_0^1 a_1(t)dt, \quad (2.23)$$

onde  $x(t, x_0) = x(t)$  é solução de uma equação generalizada de Abel na forma

$$\frac{dx}{dt} = a_n(t)x^n + a_m(t)x^m + a_1(t)x, \quad (2.24)$$



tal que  $x(0) = x_0$ . Seja  $h(x_0)$  a aplicação de Poincaré associada à equação (2.24). Se  $x(t)$  for uma solução periódica, então temos,

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = \begin{cases} e^{\Phi(x_0)} = e^{\Psi(x_0)}, & \text{se } x_0 \neq 0, \\ e^{\int_0^1 a_1(t)dt}, & \text{se } x_0 = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

*Prova.* Pela Proposição (2.14) temos que

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\int_0^1 na_n(t)x^{n-1}dt + \int_0^1 ma_m(t)x^{m-1}dt + \int_0^1 a_1(t)dt}. \quad (2.26)$$

Se  $x_0 = 0$  temos  $x(t) \equiv 0$  então

$$\frac{dh}{dx_0}(0) = e^{\int_0^1 a_1(t)dt}.$$

Usando as equações (2.22) e (2.23) podemos reescrever (2.26) na forma

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\Phi(x_0) + mZ(x_0)} = e^{\Psi(x_0) + nZ(x_0)}, \quad (2.27)$$

onde

$$Z(x_0) := \int_0^1 a_n(t)x^{n-1}dt + \int_0^1 a_m(t)x^{m-1}dt + \int_0^1 a_1(t)dt.$$

Se  $x_0 \neq 0$  temos  $x(t) \neq 0$  daí

$$\frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt} = a_n(t)x^{n-1} + a_m(t)x^{m-1} + a_1(t),$$

que integrando no intervalo  $[0, 1]$  temos

$$\ln(x(1)) - \ln(x(0)) = \int_0^1 a_n(t)x^{n-1}dt + \int_0^1 a_m(t)x^{m-1}dt + \int_0^1 a_1(t)dt = Z(x_0),$$

e como  $x(t)$  é periódica temos que  $Z(x_0) = 0$  o que substituindo em (2.27) conclui a demonstração.  $\square$

O Lema a seguir foi estudado em [1] apenas para  $k = 0$ . O que apresentamos aqui é uma generalização deste resultado.

**Lema 2.18.** *Considere a família a um parâmetro de equações diferenciais*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \varepsilon x^{2k+1}, \quad (2.28)$$

onde  $f$  é periódica de período 1 na variável  $t$ ,  $k$  é um número inteiro não negativo e  $f(t, 0) \equiv 0$ . Suponha que para  $\varepsilon = 0$  a equação (2.28) possui um ciclo limite não nulo semi-estável  $x(t)$  tal que  $x(0) = x_0^*$ . Então, para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno e com o

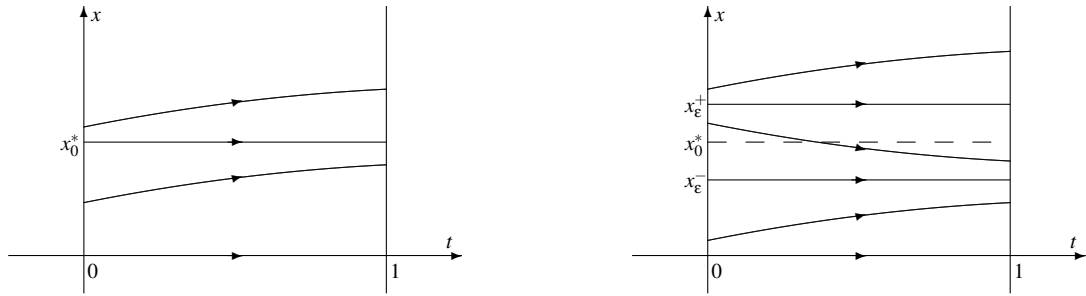
sinal apropriado, a equação (2.28) possui no mínimo dois ciclos limite numa pequena vizinhança de  $x(t)$ .

*Prova.* Defina  $D_\varepsilon(x_0) = h_\varepsilon(x_0) - x_0$  onde  $h_\varepsilon(x_0)$  é a aplicação de Poincaré associada à equação (2.28).

Vamos dividir esta demonstração em dois casos,

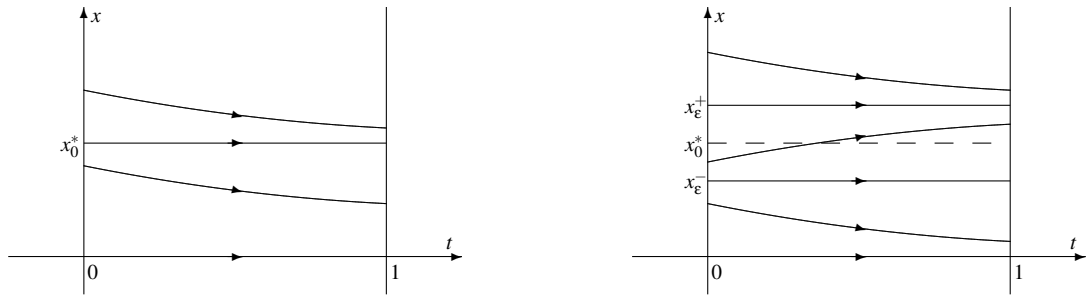
CASO 1.  $x_0^* > 0$ ,

- (1) Suponha que  $x(t)$  é estável na região  $\{(t, x) \in \mathcal{S} : x < x(t)\}$  e instável na região  $\{(t, x) \in \mathcal{S} : x > x(t)\}$ . Isto implica que  $D_0(x_0) > 0$  em uma vizinhança de  $x_0^*$ . Tome então dois números  $x_1 < x_0^* < x_2$  tais que  $D_0(x_1) > 0$  e  $D_0(x_2) > 0$ . Pela continuidade das soluções de (2.28) em relação ao parâmetro  $\varepsilon$  temos que existe um  $\delta > 0$  tal que para  $0 < |\varepsilon| < \delta$  temos  $D_\varepsilon(x_1) > 0$  e  $D_\varepsilon(x_2) > 0$ . Para  $\varepsilon < 0$ , pelo fluxo de (2.28) teremos  $D_\varepsilon(x_0^*) < 0$ , pois  $x(t) > 0$  o que implica em  $\varepsilon(x(t))^{2k+1} < 0$ , pelo teorema de Bolzano a função  $D_\varepsilon$  possui duas raízes  $x_\varepsilon^+$  e  $x_\varepsilon^-$  tais que  $x_1 < x_\varepsilon^- < x_0^* < x_\varepsilon^+ < x_2$ . Ou seja, as soluções de (2.28)  $x_\varepsilon^-(t)$  e  $x_\varepsilon^+(t)$  tais que  $x_\varepsilon^-(0) = x_\varepsilon^-$  e  $x_\varepsilon^+(0) = x_\varepsilon^+$ , são periódicas;



**Figura 2.4:** Retratos de fase de (2.28) na vizinhança de  $x_0^*$  para  $\varepsilon = 0$  e  $\varepsilon \neq 0$  respectivamente.

- (2) Suponha que  $x(t)$  é instável na região  $\{(t, x) \in \mathcal{S} : x < x(t)\}$  e estável na região  $\{(t, x) \in \mathcal{S} : x > x(t)\}$ . Isto implica que  $D_0(x_0) < 0$  em uma vizinhança de  $x_0^*$ . Tome então dois números  $x_1 < x_0^* < x_2$  tais que  $D_0(x_1) < 0$  e  $D_0(x_2) < 0$ . Pela continuidade das soluções de (2.28) em relação ao parâmetro  $\varepsilon$  temos que existe um  $\delta > 0$  tal que para  $0 < |\varepsilon| < \delta$  temos  $D_\varepsilon(x_1) < 0$  e  $D_\varepsilon(x_2) < 0$ . Para  $\varepsilon > 0$ , pelo fluxo de (2.28) teremos  $D_\varepsilon(x_0^*) > 0$ , pois  $x(t) > 0$  o que implica em  $\varepsilon(x(t))^{2k+1} > 0$ , pelo teorema de Bolzano a função  $D_\varepsilon$  possui duas raízes  $x_\varepsilon^+$  e  $x_\varepsilon^-$  tais que  $x_1 < x_\varepsilon^- < x_0^* < x_\varepsilon^+ < x_2$ . Ou seja, as soluções de (2.28)  $x_\varepsilon^-(t)$  e  $x_\varepsilon^+(t)$  tais que  $x_\varepsilon^-(0) = x_\varepsilon^-$  e  $x_\varepsilon^+(0) = x_\varepsilon^+$ , são periódicas.



**Figura 2.5:** Retratos de fase de (2.28) na vizinhança de  $x_0^*$  para  $\varepsilon = 0$  e  $\varepsilon \neq 0$  respectivamente.

CASO 2.  $x_0^* < 0$ ,

A demonstração deste caso é semelhante à do caso anterior. Basta aplicar a mudança de variáveis  $y(t) = -x(t)$ .  $\square$

## 2.2.4 Alguns Resultados Sobre Fluxos Planares

Os resultados apresentados nesta subseção foram estudados em [6] e serão utilizados na demonstração do Teorema 3.5.

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (2.29)$$

de classe  $N \geq 1$ , e seja  $L$  um arco da órbita associada a solução  $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$  para  $t \in [0, \tau]$ . Para algum  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno considere  $\Sigma_t = \{(\alpha(t, n), \beta(t, n)) : |n| < \varepsilon\}$  uma parametrização local para um conjunto de seções transversais a  $L$  em cada ponto  $(\varphi(t), \psi(t))$  para  $t \in [0, \tau]$  onde  $(\alpha(t, 0), \beta(t, 0)) = (\varphi(t), \psi(t))$  e  $\Delta(0, 0)\Delta(\tau, 0) > 0$  para

$$\Delta(t, n) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dt} & \frac{d\psi}{dt} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial n}(t, n) & \frac{\partial \beta}{\partial n}(t, n) \end{vmatrix}. \quad (2.30)$$

O fluxo de (2.29) define uma aplicação de Poincaré entre  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_\tau$  que relaciona, pelo fluxo, um ponto de  $\Sigma_0$  a um ponto de  $\Sigma_\tau$  (quando possível).

**Proposição 2.19.** *Seja  $H$  a aplicação de Poincaré descrita acima, então a derivada de  $H$  em  $p = (\alpha(0, 0), \beta(0, 0)) = (\varphi(0), \psi(0))$  é dada por,*

$$H'(p) = \frac{\Delta(0, 0)}{\Delta(\tau, 0)} \exp \left( \int_0^\tau \operatorname{div}(P(\varphi(t), \psi(t)), Q(\varphi(t), \psi(t))) dt \right).$$

Em [7], [8] e [3], encontramos subsídios para demonstrar este resultado. Utilizaremos esta proposição para demonstrar o seguinte resultado.

**Corolário 2.20.** *Considerando a equação (2.2) na forma do sistema diferencial*

$$X(t, x) = (\dot{t}, \dot{x}) = (1, A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)), \quad (2.31)$$

Seja  $(t, \gamma(t))$  uma solução de (2.31) definida em  $[0, 1]$ . Então, para alguma função  $g(t, x) \in C^1$  tal que  $g(t, x) \neq 0$  para  $(t, x) \in \mathcal{S}$  a derivada da aplicação de Poincaré entre  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$  onde  $\Sigma_t = \{(t, \gamma(t) + n) : n \in \mathbb{R}\}$  no ponto  $(0, \gamma(0))$  é dado por

$$H'(0, \gamma(0)) = \frac{|g(0, \gamma(0))|}{|g(1, \gamma(1))|} \exp \left( \int_0^{\tau_g} \operatorname{div}(|g(t(s), \gamma(t(s)))|(X(t(s), \gamma(t(s)))))) ds \right)$$

sendo  $\tau_g$  um número real positivo e  $t(s)$  uma função crescente dependente de  $g$ .

*Prova.* Como  $g(t, x)$  não se anula em  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  o sistema (2.31) é equivalente a

$$\bar{X}(t, x) = |g(t, x)|X(t, x) = |g(t, x)| (1, A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)), \quad (2.32)$$

Como  $(t, \gamma(t))$  é uma solução de (2.31) então existe uma função  $t(s)$  e um número real positivo  $\tau_g$  tal que  $(t(s), \gamma(t(s)))$  seja uma solução de (2.32) no intervalo  $[0, \tau_g]$  de forma que teremos  $t(0) = 0$  e  $t(\tau_g) = 1$ . Aplicando a Proposição 2.19 para calcular a derivada da aplicação de Poincaré entre as seções transversais  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$  onde  $\Sigma_{t(s)} = (\alpha(s, n), \beta(s, n)) = (t(s), \gamma(t(s)) + n)$  no ponto  $(0, \gamma(0))$  temos

$$H'(0, \gamma(0)) = \frac{|\Delta(t(0), 0)|}{|\Delta(t(\tau_g), 0)|} \exp \left( \int_0^{\tau_g} \operatorname{div}(\bar{X}(t(s), \gamma(t(s)))) ds \right) \quad (2.33)$$

De (2.30) temos,

$$\Delta(t, n) = \begin{vmatrix} |g(t, x)| & (A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

daí

$$\Delta(t(0), 0) = \Delta(0, 0) = |g(0, \gamma(0))|$$

e

$$\Delta(t(\tau_g), 0) = \Delta(1, 0) = |g(1, \gamma(1))|,$$

substituindo os dados acima e (2.32) em (2.33) concluímos a demonstração.  $\square$

**Corolário 2.21.** *Considere a equação diferencial (2.2) na forma do sistema diferencial (2.31) e seja  $g(t, x) \in C^1$  uma função de período 1 em  $t$  que não se anula em  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ . Seja  $K$  uma região conexa de  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  difeomorfa ao cilindro, suponha que  $\operatorname{div}(|g(t, x)|X(t, x))$  não muda de sinal em  $K$  e se anula apenas em um conjunto de medida nula não invariante pelo fluxo de (2.31). Então (2.2) possui no máximo um cilo limite completamente contido em  $K$  e quando este existe é hiperbólico.*

*Prova.* Seja  $x(t)$  um ciclo limite de (2.2) completamente contido em  $K$ . Então a curva  $(t(s), x(t(s)))$  é uma solução de (2.32), definida em  $[0, \tau_g]$ . Usando o Corolário 2.20 e a periodicidade de  $g(t, x)$  (pois,  $|g(0, x(0))| = |g(1, x(1))|$ ) temos

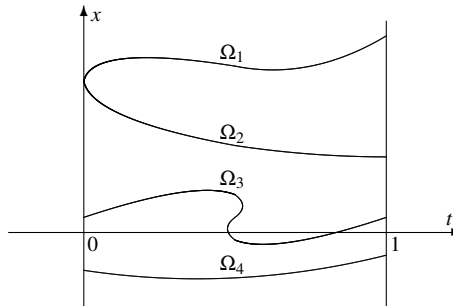
$$H'(0, x(0)) = \exp \left( \int_0^{\tau_g} \operatorname{div}(|g(t(s), \gamma(t(s)))|(X(t(s), \gamma(t(s)))) ds \right) \neq 1. \quad (2.34)$$

Pela Definição 2.1 é possível observar que a aplicação  $h(x)$  relacionada com (2.2) se comporta como a aplicação  $H(t, x)$  relacionada com (2.31). Logo podemos estudar a estabilidade de (2.2) através de (2.34). Suponha que (2.2) possua em  $K$  mais de um ciclo limite. Como  $\operatorname{div}(|g(t, x)|X(t, x))$  não muda de sinal em  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  e se anula apenas em um conjunto de medida nula que não é invariante pelo fluxo de (2.31), concluímos que todos eles têm a mesma estabilidade o que não é possível. Logo existe no máximo um ciclo limite completamente contido em  $K$ .  $\square$

**Teorema 2.22.** *Considere a equação de Abel (2.2) na forma do sistema diferencial (2.31). Suponha que existe um número real  $w$  e uma função real  $f(t, x) \in C^1$  de período 1 em  $t$ , que se anula apenas em um subconjunto de medida nula de  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  tais que a função,*

$$M_w(t, x) = \langle \nabla f(t, x), X(t, x) \rangle + wf(t, x)\operatorname{div}(X(t, x)),$$

*não muda de sinal em  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  e se anula apenas em um conjunto  $N$  de medida nula tal que o conjunto  $N \setminus Q$  não é invariante pelo fluxo de (2.31), sendo  $Q$  o conjunto de pontos  $(t, x) \in S$  tais que  $f(t, x) = 0$ . Sejam  $\Omega_i$ ,  $i \in I$ , onde  $I$  é um conjunto de índices, subconjuntos conexos de  $Q$  tais que os conjuntos  $\Omega_i \cap \Sigma_0$  e  $\Omega_i \cap \Sigma_1$  são unitários e para  $i \neq j$  se tenha  $(\Omega_i \cap \Omega_j) \cap \{(0, 1) \times \mathbb{R}\} = \emptyset$ . Seja o conjunto  $\tilde{Q} = \{\Omega_i : i \in I\}$ , suponha que o conjunto  $\tilde{Q}$  tenha  $K_1 \in \mathbb{N}$  elementos e que  $K_2 \leq K_1$  destes elementos sejam invariantes pelo fluxo de (2.31).*



**Figura 2.6:** O conjunto  $\tilde{Q}$ .

*Então a equação (2.2) possui no máximo  $K_1 + K_2 + 1$  ciclos limite e cada ciclo limite ou é um elemento de  $\tilde{Q}$  ou não intercepta nenhum elemento de  $\tilde{Q}$ . Além disso os ciclos*

limite de (2.2) não pertencentes a  $\tilde{Q}$  são hiperbólicos e sua estabilidade é dada pelo sinal constante da função  $wf(t, x)M_w(t, x)$  ao longo de sua trajetória.

*Prova.* Seja  $\Omega_i(s) = (t(s), \omega_i(s))$  uma parametrização de cada  $\Omega_i \in \tilde{Q}$ . Observe que a função  $M_w(\Omega_i(s)) = \langle \nabla f(t(s), \omega_i(s)), X(t(s), \omega(s)) \rangle$  não muda de sinal, o que significa que o fluxo de  $X(t, x)$  atravessa a curva  $\Omega_i(s)$  em um único sentido. Como  $f(t, x)$  é periódica em  $t$  então cada curva  $\Omega_i(s)$  também é periódica, o que implica que ou  $\Omega_i(t)$  é um ciclo limite de (2.2) ou não intercepta nenhum dos ciclos limite de (2.2).

Podemos dividir  $S \setminus \tilde{Q}$  em  $K_1 + 1$  regiões conexas difeomorfas ao cilindro onde a função  $g(t, x) = |f(t, x)|^{\frac{1}{w}}$  é sempre positiva, aplicando o Corolário 2.21 em cada uma destas regiões concluímos que existem no máximo  $K_1 + 1$  ciclos limite em  $S \setminus \tilde{Q}$  todos hiperbólicos e a estabilidade de cada um é dada pelo sinal de

$$\begin{aligned}
div(|g(t, x)|X(t, x)) &= div(|f(t, x)|^{\frac{1}{w}}X(t, x)) \\
&= div(|f(t, x)|^{\frac{1}{w}}, |f(t, x)|^{\frac{1}{w}}(A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t))) \\
&= \frac{\partial(|f(t, x)|^{\frac{1}{w}})}{\partial t} + \frac{\partial(|f(t, x)|^{\frac{1}{w}}(A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)))}{\partial x} \\
&= \frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}\sigma(f)\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}\sigma(f)\frac{\partial f}{\partial x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx) \\
&\quad + |f|^{\frac{1}{w}}(3Ax^2 + 2Bx + C) \\
&= \sigma(f)\frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx)\right) \\
&\quad + w\frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}\sigma(f)f(t, x)div(X(t, x)) \\
&= \sigma(f)\frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}(\langle \nabla f(t, x), X(t, x) \rangle + wf(t, x)div(X(t, x))) \\
&= \sigma(f(t, x))\frac{1}{w}|f(t, x)|^{\frac{1}{w}-1}M_w(t, x)
\end{aligned}$$

onde  $\sigma f(t, x)$  é o sinal de Como  $\tilde{Q}$  possui  $K_2$  elementos invariantes pelo fluxo de (2.2) o número máximo de ciclos limite de (2.2) é  $K_1 + K_2 + 1$ .  $\square$

## Resultados

O objetivo deste capítulo é realizar um estudo sobre a quantidade de ciclos limite da equação generalizada de Abel 1.1. No ano de 1980, A. Lins Neto em [5] apresentou uma construção em que dado um número natural  $l$  é possível se obter uma equação de Abel ( $n = 3$ ) possuindo no mínimo  $l$  ciclos limite; em 2006 A. Gasull e A. Guillamon apresentaram em [1] uma generalização da equação construída por A. Lins Neto, para  $n > 3$ .

### 3.1 Um caso particular

O caso mais simples a ser estudado é a equação (1.1) quando  $n = 1$ . Assim, temos o seguinte problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + a_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

onde  $t \in [0, 1]$  e  $a_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1$  são funções contínuas de período 1.

Pela proposição 2.14 temos que

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\int_0^1 a(t)dt}.$$

Vamos resolver o problema de Cauchy (3.1) usando o método de “variação de parâmetros” (vide [3], [8] ou [7]). Este método consiste em fazer a seguinte mudança de coordenadas

$$x(t) = c(t)e^{\int_0^t a_1(s)ds}, \quad (3.2)$$

onde  $c(t)$  é uma função derivável em  $[0, 1]$ . Como  $x(0) = x_0$ , por (3.2) temos que  $c(0) = x_0$

e derivando (3.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dc}{dt} e^{\int_0^t a_1(s) ds} + c(t) a_1(t) e^{\int_0^t a_1(s) ds} \\ a_1(t) c(t) e^{\int_0^t a_1(s) ds} + a_0(t) &= \frac{dc}{dt} e^{\int_0^t a_1(s) ds} + c(t) a_1(t) e^{\int_0^t a_1(s) ds} \\ \frac{dc}{dt} &= a_0(t) e^{-\int_0^t a_1(s) ds}, \quad c(0) = x_0,\end{aligned}$$

cujas solução é

$$c(t) = x_0 + \int_0^t a_0(r) e^{-\int_0^r a_1(s) ds} dr.$$

De onde concluímos que a solução de (3.1) é

$$x(t) = \left[ x_0 + \int_0^t a_0(r) e^{-\int_0^r a_1(s) ds} dr \right] e^{\int_0^t a_1(s) ds}. \quad (3.3)$$

Fazendo  $x(0) = x(1)$  em (3.3) temos a seguinte equação

$$\begin{aligned}x_0 = x(0) = x(1) &= x_0 e^{\int_0^1 a_1(s) ds} + e^{\int_0^1 a_1(s) ds} \int_0^1 a_0(r) e^{-\int_0^r a_1(s) ds} dr \\ &= Ax_0 + B,\end{aligned}$$

ou

$$(1 - A)x_0 = B,$$

onde  $A = e^{\int_0^1 a_1(s) ds} = \frac{dh}{dx_0}(x_0)$  e  $B = e^{\int_0^1 a_1(s) ds} \int_0^1 a_0(r) e^{-\int_0^r a_1(s) ds} dr$ .

Podemos concluir então que,

- i) Se  $1 - A \neq 0$ , então (3.1) possui um único ciclo limite em  $x_0 = \frac{B}{1-A}$  e este é hiperbólico;
- ii) Se  $1 - A = 0$  e  $B = 0$ , então todas as soluções de (3.1) são periódicas;
- iii) Se  $1 - A = 0$  e  $B \neq 0$ , então (3.1) não possui órbita periódica.

## 3.2 A equação de Ricatti

**Teorema 3.1** (Equação de Ricatti). *A equação,*

$$\frac{dx}{dt} = a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t), \quad (3.4)$$

onde  $t \in [0, 1]$  e  $a_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2$  são funções contínuas de período 1, possui no máximo dois ciclos limite.



*Prova.* Suponha que (3.4) possui duas soluções fechadas  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ . Aplicaremos em (3.4) a mudança de variáveis,

$$y = y(t, x) = \frac{x(t) - x_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)}. \quad (3.5)$$

A mudança acima transforma respectivamente as soluções  $x_1$  e  $x_2$  em  $y_1(t) \equiv 0$  e  $y_2(t) \equiv 1$  e a equação (3.4) em,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\frac{d(x-x_1)}{dt}(x_2-x_1) - \frac{d(x_2-x_1)}{dt}(x-x_1)}{(x_2-x_1)^2} \\ &= \frac{(a_2(x^2-x_1^2) + a_1(x-x_1))(x_2-x_1) - (a_2(x_2^2-x_1^2) + a_1(x_2-x_1))(x-x_1)}{(x_2-x_1)^2} \\ &= \frac{a_2x^2x_2 - a_2x_1^2x_2 + a_1xx_2 - a_1x_1x_2 - a_2x^2x_1 + a_2x_1^3 - a_1xx_1 + a_1x_1^2}{(x_2-x_1)^2} \\ &\quad + \frac{-a_2xx_2^2 + a_2xx_1^2 - a_1xx_2 + a_1xx_1 + a_2x_1x_2^2 - a_2x_1^3 + a_1x_1x_2 - a_1x_1^2}{(x_2-x_1)^2} \\ &= \frac{a_2(x^2x_2 - x_1^2x_2 - x^2x_1 - x_2^2x + x_1^2x + x_2^2x_1)}{(x_2-x_1)^2} \\ &= \frac{a_2(x_2-x_1)(x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2)}{(x_2-x_1)^2} \\ &= \frac{a_2(x_2-x_1)(x-x_2)(x-x_1)}{(x_2-x_1)^2} = a_2(x_2-x_1) \left( \frac{x-x_1}{x_2-x_1} - 1 \right) \left( \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) \\ &= a_2(x_2-x_1)(y-1)y \\ &= \lambda(t)y(y-1), \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $\lambda(t) = a_2(t)(x_2(t) - x_1(t))$ . Por (3.5) observamos que uma solução  $x(t)$  de (3.4) é fechada se, e somente se, a solução correspondente  $y(t)$  de (3.6) é fechada.

Aplicando em (3.6) a seguinte mudança de variáveis,

$$z(t) = \frac{y(t) - 1}{y(t)}. \quad (3.7)$$

Temos,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\frac{d(y-1)}{dt}y - \frac{d(y)}{dt}(y-1)}{y^2} = \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\lambda(t)y(y-1)}{y^2} = \frac{\lambda(t)(y-1)}{y} = \lambda(t)z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Observamos que (3.7) leva a solução  $y_1 \equiv 0$  de (3.6) na “solução”  $z_1 \equiv \infty$  de (3.8) e a solução  $y_2 \equiv 1$  de (3.6) na solução  $z_2 \equiv 0$  de (3.8), além disso, por (3.7) temos que uma

solução  $y(t)$  de (3.6) é fechada se, e somente se, a solução correspondente  $z(t)$  é fechada.

A solução geral de (3.8) é

$$z(t) = \exp\left(\int_0^t \lambda(s) ds\right) \cdot z_0, \quad (3.9)$$

onde  $z(0) = z_0$  é uma condição inicial dada.

Seja,  $z(t)$  uma solução fechada de (3.8), aplicando (3.9) temos,

$$\begin{aligned} z(0) &= z(1) \\ z_0 &= \exp\left(\int_0^1 \lambda(s) ds\right) \cdot z_0 \\ z_0 \left(1 - \exp\left(\int_0^1 \lambda(s) ds\right)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, se  $z(t)$  é fechada temos  $z(t) \equiv 0$  ou  $\int_0^1 \lambda(s) ds = 0$ . Na primeira hipótese concluímos que as únicas “soluções” de (3.8) (e consequentemente de (3.4) e (3.6)) são  $z_1$  e  $z_2$  ( $x_1$  e  $x_2$  para (3.4) e  $y_1$  e  $y_2$  para (3.6)) já na segunda hipótese concluímos que todas as soluções de (3.8) (e consequentemente de (3.4) e (3.6)) são fechadas.  $\square$

### 3.3 A equação de Abel

Nesta seção passamos ao caso  $n = 3$ . Estudaremos a equação

$$\frac{dx}{dt} = a_3(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t). \quad (3.10)$$

Pela Proposição 2.10 temos que se (3.10) possui uma solução periódica  $x_1(t)$ , então pode ser escrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x. \quad (3.11)$$

O primeiro resultado que apresentamos aqui foi estudado por Lins Neto em [5].

**Teorema 3.2.** *A equação de Abel (3.10), com  $a_3(t) \geq 0$  e  $a_3(t) \not\equiv 0$ ,  $t \in [0, 1]$ , possui no máximo três ciclos limite.*

*Prova.* Suponha que (3.10) possua pelo menos quatro soluções fechadas:  $x_1(t) < x_2(t) < x_3(t) < x_4(t)$ . Aplicando a mudança de variáveis (3.5) em (3.10), as soluções  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , são transformadas respectivamente em  $y_1 \equiv 0 < y_2 \equiv 1 < y_3 < y_4$  e (3.10)

é transformada em,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{\frac{d(x-x_1)}{dt}(x_2-x_1) - \frac{d(x_2-x_1)}{dt}(x-x_1)}{(x_2-x_1)^2} \\
&= \frac{(a_3(x^3-x_1^3) + a_2(x^2-x_1^2) + a_1(x-x_1))(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^2} \\
&\quad - \frac{(a_3(x_2^3-x_1^3) + a_2(x_2^2-x_1^2) + a_1(x_2-x_1))(x-x_1)}{(x_2-x_1)^2} \\
&= \frac{(a_3(x^3-x_1^3) + a_2(x^2-x_1^2))(x_2-x_1) - (a_3(x_2^3-x_1^3) + a_2(x_2^2-x_1^2))(x-x_1)}{(x_2-x_1)^2} \\
&= \frac{a_3(x^3-x_1^3) + a_2(x^2-x_1^2) - a_3(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)(x-x_1) - a_2(x_2+x_1)(x-x_1)}{x_2-x_1} \\
&= (a_3(x^2+xx_1+x_1^2) + a_2(x+x_1) - a_3(x_2^2+x_2x_1+x_1^2) - a_2(x_2+x_1)) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\
&= y(a_3x^2 - a_3x_2^2 + a_3xx_1 - a_3x_2x_1 + a_2x - a_2x_2) \\
&= y(x-x_2)(a_3x + a_3x_1 + a_3x_2 + a_2) \\
&= y(x-x_2) \frac{x_2-x_1}{x_2-x_1} (a_3x + a_3x_1 + a_3x_2 + a_2) \\
&= y(y-1)(x_2-x_1)(a_3(x-x_1) + 2a_3x_1 + a_3x_2 + a_2) \\
&= y(y-1)(a_3(x_2-x_1)(x-x_1) + (x_2-x_1)(2a_3x_1 + a_3x_2 + a_2)) \\
&= y(y-1)(ay+b) = a(t)y^3 + (b(t)-a(t))y^2 - b(t)y, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

onde  $a(t) = a_3(t)(x_2(t) - x_1(t))^2 \geq 0$  (e  $\neq 0$ ) e  $b(t) = (x_2(t) - x_1(t))(2a_3(t)x_1(t) + a_3(t)x_2(t) + a_2(t))$ . Como já havíamos observado antes (na prova do Teorema 3.1), por (3.5) segue que uma solução  $x(t)$  de (3.10) é fechada se, e somente se, a solução correspondente  $y(t)$  de (3.12) é fechada. Portanto  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , são todas fechadas. Aplicando em (3.12) a seguinte mudança de variáveis,

$$z = -\ln \frac{y}{y-1}, \quad y > 1, \tag{3.13}$$

temos,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{y(y-1)} = ay + b. \tag{3.14}$$

Por (3.13) observamos que uma solução  $y(t)$  de (3.12), tal que  $y(t) > 1$  para todo  $t \in [0, 1]$ , é fechada se, e somente se, sua correspondente  $z(t)$  é fechada.

Como  $z_i(t) = -\ln \frac{y_i(t)}{y_i(t)-1}$ ,  $i = 3, 4$ , são soluções fechadas de (3.14), temos,

$$\begin{aligned}
0 &= (z_4(1) - z_3(1)) - (z_4(0) - z_3(0)) \\
&= \int_0^1 \left( \frac{dz_4}{dt} - \frac{dz_3}{dt} \right) dt = \int_0^1 a(y_4(t) - y_3(t)) dt > 0.
\end{aligned}$$

Uma contradição. □

Os próximos dois resultados foram obtidos por A. Gasull e J. Llibre em [2].

**Teorema 3.3.** *Seja a equação de Abel (3.11), suponha que  $A(t) \neq 0$  e não muda de sinal (isto é,  $A(t) \geq 0$  ou  $A(t) \leq 0$ ). Então podemos afirmar,*

i) *A soma das multiplicidades de todos os ciclos limite de (3.11) é no máximo 3;*

ii) *Considerando  $c = \int_0^1 C(t)dt$  e  $d = \int_0^1 B(t)e^{\int_0^t C(s)ds}dt$ , a tabela 3.1 mostra uma distribuição mais precisa dos ciclos limite de (3.11).*

	$c < 0$				$c = 0$					$c > 0$			
	$A(t) \leq 0$			$A(t) \geq 0$	$A(t) \leq 0$		$d = 0$	$A(t) \geq 0$		$A(t) \leq 0$	$A(t) \geq 0$		
	$d < 0$	$d = 0$	$d > 0$		$d < 0$	$d > 0$		$d < 0$	$d > 0$		$d < 0$	$d = 0$	$d > 0$
$x > 0$	0	0	2	1	0	1	0	1	0	1	2	0	0
$x = 0$	1	1	1	1	2	2	3	2	2	1	1	1	1
$x < 0$	2	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	2

**Tabela 3.1:** *Distribuição dos ciclos limite da equação (3.11), contando multiplicidades, em cada região do plano ( $x < 0$ ,  $x = 0$  e  $x > 0$ ) considerando  $A(t) \leq 0$  ou  $A(t) \geq 0$  tal que  $A(t) \neq 0$ .*

*Prova.* Considere o caso  $A(t) \geq 0$  ( $A(t) \leq 0$ ). Temos,

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}(A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x) = 6A(t),$$

daí pela Proposição 2.14 obtemos que  $\frac{d^3 h}{dx_0^3}(x_0) > 0$  ( $\frac{d^3 h}{dx_0^3}(x_0) < 0$ ) para qualquer  $x_0$  para o qual  $h(x_0)$  esteja definido.

Suponha que  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$  sejam zeros da função  $h(x_0) - x_0$ , contando multiplicidades. Pelo Teorema de Rolle existem  $y_1, y_2$  e  $y_3$  com

$$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq x_4,$$

tais que  $y_1, y_2$  e  $y_3$  sejam zeros de  $\frac{dh}{dx_0} - 1$ , contando multiplicidades. Aplicando novamente o Teorema de Rolle existem  $z_1$  e  $z_2$  com

$$y_1 \leq z_1 \leq y_2 \leq z_2 \leq y_3,$$

tais que  $z_1$  e  $z_2$  sejam zeros de  $\frac{d^2h}{dx_0^2}$ , contando multiplicidades. E novamente pelo Teorema de Rolle existe  $w_1$  com  $z_1 \leq w_1 \leq z_2$ , tal que  $w_1$  seja zero de  $\frac{d^3h}{dx_0^3}$ . Uma contradição, logo vale a afirmação *i*) do Teorema.

Para demonstrar a afirmação *ii*) iremos estudar o número de zeros, contando multiplicidades, da função

$$f(x_0) = h(x_0) - x_0.$$

Para  $x(t) \equiv 0$  temos  $f(0) = h(0) - 0 = 0$ ,  $\frac{df}{dx_0}(0) = \frac{dh}{dx_0}(0) - 1 = e^c - 1$  e  $\frac{d^2f}{dx_0^2}(0) = \frac{d^2h}{dx_0^2}(0) = 2e^c d$ .

Para  $x(t) \not\equiv 0$  temos

$$\frac{df}{dx_0} = \frac{dh}{dx_0} - 1, \quad \frac{d^2f}{dx_0^2} = \frac{d^2h}{dx_0^2} \quad \text{e} \quad \frac{d^3f}{dx_0^3} = \frac{d^3h}{dx_0^3}.$$

Além disso, pelo Lema 2.15

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx_0}(x_0) &= \frac{dh}{dx_0}(x_0) - 1 = e^{\int_0^1 (A(t)(x(t))^2 - C(t)) dt} - 1 \\ &= e^{\int_0^1 A(t)(x(t))^2 dt} e^{-c} - 1 \quad \text{se } x(t) \not\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

e pela Proposição 2.14

$$\frac{d^3f}{dx_0^3}(x_0) = \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\frac{d^2h}{dx_0^2}(x_0)}{\frac{dh}{dx_0}(x_0)} \right)^2 + 6 \int_0^1 A(t) e^{2 \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) ds} dt \right] > 0.$$

Iremos dividir a demonstração desta segunda parte do teorema em dois casos.

CASO 1.  $A(t) \geq 0$  e  $A(t) \not\equiv 0$ ,

Para  $x(t) \not\equiv 0$  temos  $\int_0^1 A(t)(x(t))^2 dt > 0$  daí,

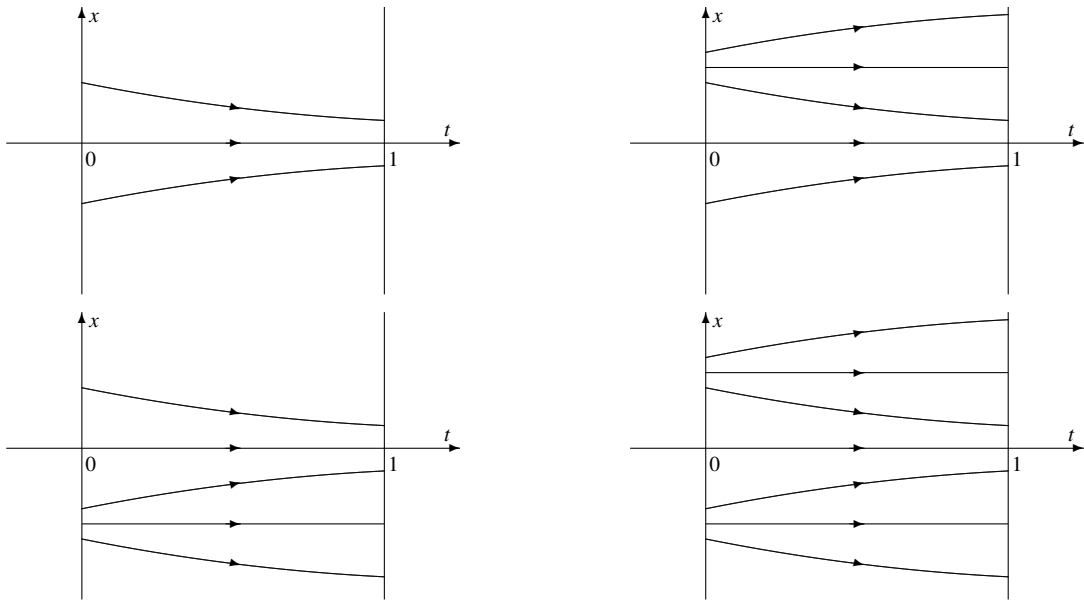
$$e^{\int_0^1 A(t)(x(t))^2 dt} > 1.$$

(1) Se  $c < 0$ ,

$$\frac{df}{dx_0}(0) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{df}{dx_0}(x_0) > 0 \quad \text{se } x(t) \not\equiv 0.$$

Portanto  $f(x)$  é uma função estritamente crescente nas regiões  $x < 0$  e  $x > 0$  o que garante a existência de, no máximo, um ciclo limite em cada uma destas regiões, contando multiplicidades (a multiplicidade é garantida pelo fato de que  $\frac{df}{dx_0}(x_0) \neq 0$ ).

O ciclo limite  $x(t) \equiv 0$  também possui multiplicidade igual a 1 (pois,  $\frac{df}{dx_0}(0) \neq 0$ ). Na figura 3.1 estão representados todos os retratos de fase possíveis para este caso;



**Figura 3.1:** Possíveis retratos de fase para a equação (3.11) com  $A(t) \geq 0$ ,  $A(t) \not\equiv 0$  e  $c > 0$ .

(2) Se  $c = 0$  e  $d < 0$ ,

$$\frac{df}{dx_0}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{df}{dx_0}(x_0) > 0 \quad \text{se} \quad x(t) \neq 0.$$

Quanto as regiões  $x < 0$  e  $x > 0$  é possível obter os mesmos resultados do item (1). No entanto, suponha que exista um ciclo limite  $x_1(t) < 0$ . Como  $\frac{df}{dx_0}(0) = 0$  e  $\frac{d^2f}{dx_0^2}(0) = 2d < 0$  então o ciclo limite  $x(t) \equiv 0$  é instável considerando-se apenas a região  $x < 0$ . Neste caso teremos  $\frac{df}{dx_0}(x_1(0)) \leq 0$ , o que é uma contradição. Logo a equação não possui ciclo limite em  $x < 0$  e possui no máximo um, contando multiplicidade, na região  $x > 0$ .

Já em  $x = 0$ , temos  $\frac{df}{dx_0}(0) = 0$  e  $\frac{d^2f}{dx_0^2}(0) < 0$  o que permite que a multiplicidade de  $x(t) \equiv 0$  seja no máximo dois;

(3) Se  $c = d = 0$ ,

$$\frac{df}{dx_0}(0) = 0, \quad \frac{d^2f}{dx_0^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3f}{dx_0^3}(0) > 0$$

e

$$\frac{df}{dx_0}(x_0) > 0 \quad \text{se} \quad x(t) \neq 0.$$

Neste caso também podemos obter os mesmos resultados do item (1). Mas, se supormos que existem dois ciclos limite  $x_1(t) > 0$  e  $x_2(t) < 0$ , como  $x(t) \equiv 0$  é

instável, teremos  $\frac{df}{dx_0}(x_1(0)) \leq 0$  e  $\frac{df}{dx_0}(x_2(0)) \leq 0$ , o que é uma contradição. Logo não existem ciclos limite em  $x < 0$  e  $x > 0$ .

Na região  $x = 0$ , como  $\frac{df}{dx_0}(0) = 0$ ,  $\frac{d^2f}{dx_0^2}(0) = 0$  e  $\frac{d^3f}{dx_0^3}(0) > 0$ , pelo teorema de Rolle a multiplicidade de  $x(t) \equiv 0$  é no máximo três;

(4) Se  $c = 0$  e  $d > 0$ ,

Semelhante ao item (2);

(5) Se  $c > 0$  e  $d < 0$ ,

$$\frac{df}{dx_0}(0) > 0, \quad \frac{d^2f}{dx_0^2}(0) < 0, \quad \frac{df}{dx_0}(x_0) = e^{\int_0^1 A(t)(x(t))^2 dt} e^{-c} - 1 \text{ se } x(t) \not\equiv 0$$

e

$$\frac{d^3f}{dx_0^3}(x_0) > 0.$$

Na região  $x < 0$  suponha que exista um ciclo limite  $x_1(t)$  e que não haja outro entre  $x_1(t)$  e  $x(t) = 0$ . Como  $x(t) \equiv 0$  é instável, teremos  $\frac{df}{dx_0}(x_1(0)) \leq 0$  como  $\frac{df}{dx_0}(0) > 0$  então existem pontos entre  $x_1(0)$  e 0 onde a função  $\frac{df}{dx_0}$  é estritamente crescente, ou seja existe  $y_1$ ,  $x_1(0) \leq y_1 < 0$  tal que  $\frac{d^2f}{dx_0^2}(y_1) > 0$  e como  $\frac{d^2f}{dx_0^2}(0) < 0$  existe  $y_2$ ,  $y_1 \leq y_2 < 0$  tal que  $\frac{d^3f}{dx_0^3}(y_2) < 0$ . Contradição, logo não existe ciclo limite na região  $x < 0$ .

Na região  $x > 0$  o número máximo de ciclos limite é dois, contando multiplicidades, pois o número máximo de ciclos limite é três e já conhecemos um ( $x(t) \equiv 0$ ).

Pelo fato de  $\frac{df}{dx_0}(0) > 0$  a multiplicidade de  $x(t) \equiv 0$  é um;

(6) Se  $c > 0$  e  $d = 0$ ,

$$\frac{df}{dx_0}(0) > 0, \quad \frac{d^2f}{dx_0^2}(0) = 0, \quad \frac{df}{dx_0}(x_0) = e^{\int_0^1 A(t)(x(t))^2 dt} e^{-c} - 1 \text{ se } x(t) \not\equiv 0$$

e

$$\frac{d^3f}{dx_0^3}(x_0) > 0.$$

Suponha que  $x_1(t) < 0$  ( $x_2(t) > 0$ ) seja um ciclo limite e que não hajam outro ciclo limite entre  $x_1(t)$  e  $x(t) \equiv 0$  ( $x(t) \equiv 0$  e  $x_2(t)$ ). Como  $x(t) \equiv 0$  é instável temos  $\frac{df}{dx_0}(x_1(0)) \leq 0$  e ( $\frac{df}{dx_0}(x_2(0)) \leq 0$ ), então existe  $y_1$ ,  $x_1(0) \leq y_1 < 0$  ( $y_2$ ,  $0 < y_2 \leq x_2(0)$ ) tal que  $\frac{d^2f}{dx_0^2}(y_1) > 0$  ( $\frac{d^2f}{dx_0^2}(y_2) < 0$ ), daí existe  $z_1$ ,  $y_1 \leq z_1 < 0$  ( $z_2$ ,  $0 < z_2 \leq y_2$ ) tal que  $\frac{d^3f}{dx_0^3}(z_1) < 0$  ( $\frac{d^3f}{dx_0^3}(z_2) < 0$ ). Contradição, logo não existem ciclos limite nas regiões  $x < 0$  e  $x > 0$ .

A multiplicidade do ciclo limite  $x(t) \equiv 0$  é igual a um (pois,  $\frac{df}{dx_0}(0) > 0$ ).

(7) Se  $c > 0$  e  $d > 0$ ,

Semelhante ao item (5).

CASO 2.  $A(t) \leq 0$  e  $A(t) \not\equiv 0$ ,

Pelo Lema 2.11 temos que a demonstração deste caso é semelhante à do caso anterior. Basta aplicar a mudança de variáveis  $y(t) = -x(t)$ .  $\square$

**Teorema 3.4.** *Seja a equação de Abel (3.11), suponha que  $B(t) \not\equiv 0$  e não muda de sinal (isto é,  $B(t) \geq 0$  ou  $B(t) \leq 0$ ). Então podemos afirmar,*

i) *A soma das multiplicidades de todos os ciclos limite de (3.11) é no máximo 3;*

ii) *A Tabela 3.2 mostra uma distribuição mais precisa dos ciclos limite de (3.11).*

	$c < 0$		$c = 0$	$c > 0$	
	$B(t) \leq 0$	$B(t) \geq 0$		$B(t) \leq 0$	$B(t) \geq 0$
$x > 0$	1	2	1	2	1
$x = 0$	1	1	2	1	1
$x < 0$	2	1	1	1	2
A soma das multiplicidades é no Máximo	3	3	3	3	3

**Tabela 3.2:** *Distribuição dos ciclos limite da equação (3.11), contando multiplicidades, em cada região do plano ( $x < 0$ ,  $x = 0$  e  $x > 0$ ), considerando  $B(t) \leq 0$  ou  $B(t) \geq 0$  tal que  $B(t) \not\equiv 0$ .*

*Prova.* Pela Proposição 2.14 e Lema 2.12, temos

$$\frac{d^2h}{dy_0^2}(y(0)) = \frac{\frac{dh}{dx_0}(y(0))}{2} \int_0^1 B(t)(y(t))^{-\frac{3}{2}} e^{\int_0^t (-B(s)(y(s))^{-\frac{1}{2}} - 2C(s)) ds} dt \neq 0$$

ou

$$\frac{d^2h}{dy_0^2}(y(0)) = -\frac{\frac{dh}{dx_0}(y(0))}{2} \int_0^1 B(t)(y(t))^{-\frac{3}{2}} e^{\int_0^t (B(s)(y(s))^{-\frac{1}{2}} - 2C(s)) ds} dt \neq 0.$$

Aplicando o teorema de Rolle à igualdade acima, concluímos que existem no máximo dois ciclos limite, contando multiplicidades, em cada uma das regiões  $x < 0$  e  $x > 0$ .

Observe que,  $y = x^{-2}$  ( $y_0 = x_0^{-2}$ ) implica em  $\frac{dy}{dx} = -2x^{-3}$  ( $\frac{dy_0}{dx_0} = -2x_0^{-3}$ ) e  $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^{-4}$  ( $\frac{d^2y_0}{dx_0^2} = 6x_0^{-4}$ ). Além disso,

$$\frac{d^2f}{dx_0^2} = \frac{d^2h}{dx_0^2} = \frac{d^2h}{dy_0^2} \left( \frac{dy_0}{dx_0} \right)^2 + \frac{dh}{dx_0} \frac{d^2y_0}{dx_0^2}.$$



Dividiremos esta demonstração em dois casos,

CASO 1.  $B(t) \geq 0$  e  $B(t) \neq 0$ ,

(1) Se  $c < 0$ ,

$$\frac{df}{dx_0}(0) < 0, \quad \frac{df}{dx_0}(x_0) > 0 \text{ se } x_0 < 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2f}{dx_0^2}(x_0) > 0 \text{ se } x_0 > 0.$$

Dos dados acima concluímos que o número máximo de ciclos limite, contando multiplicidades, é igual a dois em  $x > 0$ , um em  $x = 0$  e também um em  $x < 0$ . Agora suponha que existam três ciclos limite  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$  tais que  $x_1(t) < 0 < x_2(t) < x_3(t)$ , aplicando o Lema 2.13 juntamente com as informações acima, concluímos que  $x_1$  e  $x_3$  não podem coexistir. Logo existem no máximo três ciclos limite;

(2) Se  $c = 0$ ,

$$\frac{df}{dx_0}(0) = 0, \quad \frac{df}{dx_0}(x_0) \begin{cases} > 0, \text{ se } x_0 < 0 \\ < 0, \text{ se } x_0 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{d^2f}{dx_0^2}(x_0) > 0 \text{ se } x_0 \geq 0.$$

Os dados acima indicam a existência de no máximo um ciclo limite em cada uma das regiões  $x > 0$  e  $x < 0$  e que a multiplicidade de  $x(t) \equiv 0$  é no máximo igual a dois. Suponha que existam dois ciclos limite  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  tais que  $x_1(t) < 0 < x_2(t)$ , pelos dados acima teremos  $x_1(t)$  instável e  $x_2(t)$  estável, aplicando o Lema 2.13 concluímos que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  não podem coexistir. Logo existem no máximo três ciclos limite;

(3) Se  $c > 0$ ,

Semelhante ao item (1).

CASO 2.  $B(t) \leq 0$  e  $B(t) \neq 0$ ,

Pelo Lema 2.11 temos que a demonstração deste caso é semelhante à do caso anterior. Basta aplicar a mudança de variáveis  $y(s) = -x(1-t)$ .  $\square$

Os próximos três resultados foram estudados em [6].

**Teorema 3.5.** *Considere a seguinte equação de Abel*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x^3 + B(t)x^2. \quad (3.16)$$

*Suponha que existem dois números reais  $a$  e  $b$  tais que  $aA(t) + bB(t) \neq 0$  e não muda de sinal em  $[0, 1]$  (isto é,  $aA(t) + bB(t) \leq 0$  ou  $aA(t) + bB(t) \geq 0$ ). Nestas condições podemos afirmar,*

- i) A equação (3.16) possui no máximo um ciclo limite não nulo e quando este ciclo limite existe é hiperbólico;
- ii) Considerando  $l(t) = \frac{aA(t)+bB(t)}{b}$  quando  $b \neq 0$ , a tabela 3.3 mostra uma localização mais precisa deste ciclo limite, além de trazer informações sobre existência e estabilidade.

				Estabilidade	Existência	Região
$ab < 0$	$l(t) \leq 0$	$\int_0^1 A(t)dt < 0$		Estável	Não garantida	$x < \frac{a}{b}$
		$\int_0^1 A(t)dt > 0$	$\int_0^1 B(t)dt < 0$	Instável	Não garantida	$x > 0$
			$\int_0^1 B(t)dt > 0$	Instável	$\exists$	$\frac{a}{b} < x < 0$
	$l(t) \geq 0$	$\int_0^1 A(t)dt < 0$	$\int_0^1 B(t)dt < 0$	Estável	$\exists$	$\frac{a}{b} < x < 0$
			$\int_0^1 B(t)dt > 0$	Estável	Não garantida	$x > 0$
		$\int_0^1 A(t)dt > 0$		Instável	Não garantida	$x < \frac{a}{b}$
$b = 0$				Vide Tabela 3.1		
$\int_0^1 A(t)dt = 0$				$\nexists$		
$\int_0^1 B(t)dt = 0$				$\nexists$		
$a = 0$				Vide Tabela 3.2		
$ab > 0$	$l(t) \leq 0$	$\int_0^1 A(t)dt < 0$	$\int_0^1 B(t)dt < 0$	Estável	Não garantida	$x < 0$
			$\int_0^1 B(t)dt > 0$	Estável	$\exists$	$0 < x < \frac{a}{b}$
		$\int_0^1 A(t)dt > 0$	$\int_0^1 B(t)dt < 0$	Instável	Não garantida	$x > \frac{a}{b}$
	$l(t) \geq 0$	$\int_0^1 A(t)dt < 0$	$\int_0^1 B(t)dt > 0$	Estável	Não garantida	$x > \frac{a}{b}$
		$\int_0^1 A(t)dt > 0$	$\int_0^1 B(t)dt < 0$	Instável	$\exists$	$0 < x < \frac{a}{b}$
			$\int_0^1 B(t)dt > 0$	Instável	Não garantida	$x < 0$

**Tabela 3.3:** Informações sobre o único ciclo limite não nulo de (3.16), considerando  $aA(t) + bB(t) \leq 0$  ou  $aA(t) + bB(t) \geq 0$  tal que  $aA(t) + bB(t) \neq 0$ .

**Observação 3.6.** Na tabela acima a informação “Não garantida” significa apenas que através do método utilizado não foi possível obter informações sobre a existência ou não deste ciclo limite.

*Prova.* Nesta demonstração não estudaremos os casos  $a = 0$  e  $b = 0$  pois estes casos podem ser encontrados nas Tabelas 3.1 e 3.2, pois se  $a = 0$  teremos satisfeitas as condições do Teorema 3.4 com  $C(t) \equiv 0$  ou seja,  $c = 0$  e se  $b = 0$ , teremos satisfeitas as condições dos Teorema 3.3 também com  $c = 0$ . Então estudaremos o caso em que  $ab \neq 0$ .

Aplicando o Teorema 2.22 com  $f(t, x) = x^2(bx - a)$  e  $w = -1$  temos

$$\begin{aligned} M_{-1}(t, x) &= \langle (0, 2x(bx - a) + bx^2), (1, A(t)x^3 + B(t)x^2) \rangle \\ &\quad - x^2(bx - a)(3A(t)x^2 + 2B(t)x) \\ &= (3bx^2 - 2ax)(A(t)x^3 + B(t)x^2) - (bx^3 - ax^2)(3A(t)x^2 + 2B(t)x) \\ &= x^3(A(t)(3bx^2 - 2ax - 3bx^2 + 3ax) + B(t)(3bx - 2a - 2bx + 2a)) \\ &= x^4(aA(t) + bB(t)). \end{aligned}$$

que se anula identicamente apenas sobre a solução  $x(t) = 0$  e como  $f(t, 0) = 0$  as condições do Teorema 2.22 são satisfeitas. Observe que  $\tilde{Q} = \{\Omega_1(t), \Omega_2(t)\}$  onde  $\Omega_1(t) = (t, 0)$  e  $\Omega_2(t) = (t, \frac{a}{b})$  e que apenas  $\Omega_1(t)$  é invariante pelo fluxo, pois  $\frac{d\Omega_2}{dt} \equiv 0$  e  $X(t, \Omega_2(t)) = \frac{a^2}{b^3}(aA(t) + bB(t))$ . Portanto pelo Teorema 2.22 temos que (3.16) possui no máximo três ciclos limite não nulos, cada um deles é hiperbólico sendo no máximo um ciclo limite em cada uma das três regiões de  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ :  $[0, 1] \times (-\infty, \frac{a}{b})$ ,  $[0, 1] \times (\frac{a}{b}, 0)$  e  $[0, 1] \times (0, \infty)$  se  $ab < 0$  ou  $[0, 1] \times (-\infty, 0)$ ,  $[0, 1] \times (0, \frac{a}{b})$  e  $[0, 1] \times (\frac{a}{b}, \infty)$  se  $ab > 0$ .

Podemos reescrever (3.16) nas duas seguintes formas

$$\frac{dx}{dt} = A(t)(x(t))^2 \left(x(t) - \frac{a}{b}\right) + \frac{aA(t) + bB(t)}{b}(x(t))^2,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{b}{a}B(t)(x(t))^2 \left(x(t) - \frac{a}{b}\right) + \frac{aA(t) + bB(t)}{a}(x(t))^3.$$

Seja a função  $l(t) = \frac{aA(t) + bB(t)}{b}$  observe que  $l(t) \leq 0$  ou  $l(t) \geq 0$ , temos

$$\frac{dx}{dt} = A(t)(x(t))^2 \left(x(t) - \frac{a}{b}\right) + l(t)(x(t))^2, \quad (3.17)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{b}{a}B(t)(x(t))^2 \left(x(t) - \frac{a}{b}\right) + \frac{b}{a}l(t)(x(t))^3. \quad (3.18)$$

Para demonstrar que (3.16) possui no máximo um ciclo limite não nulo iremos comparar as equações (3.17) e (3.18) com

$$\frac{dx}{dt} = A(t)(x(t))^2 \left(x - \frac{a}{b}\right) \quad (3.19)$$

e

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{b}{a}B(t)(x(t))^2 \left(x - \frac{a}{b}\right), \quad (3.20)$$

respectivamente.

Utilizaremos a Proposição 2.16 no estudo das soluções de (3.19) e (3.20).

Seja  $x_0(t) = 0$  solução de (3.16). Pela Proposição 2.14 temos

$$\frac{dh}{dx_0}(0) = e^0 = 1 \text{ e } \frac{d^2h}{dx_0^2}(0) = 2 \int_0^1 B(t)dt. \quad (3.21)$$

Sejam  $\bar{x}_0(t) = 0$  e  $\bar{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  soluções de (3.19). Pelas Proposição 2.14 temos

$$\frac{dh}{dx_0}(0) = e^0 = 1, \quad \frac{d^2h}{dx_0^2}(0) = -2\frac{a}{b} \int_0^1 A(t)dt \quad \text{e} \quad \frac{dh}{dx_0}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^2}{b^2} \int_0^1 A(t)dt. \quad (3.22)$$

Sejam  $\hat{x}_0(t) = 0$  e  $\hat{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  soluções de (3.20). Pela Proposição 2.14 temos

$$\frac{dh}{dx_0}(0) = e^0 = 1, \quad \frac{d^2h}{dx_0^2}(0) = \int_0^1 B(t)dt \quad \text{e} \quad \frac{dh}{dx_0}\left(\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{b} \int_0^1 B(t)dt. \quad (3.23)$$

Vamos dividir a demonstração do teorema em dois casos,

CASO 1.  $l(t) \geq 0$ ,

(1) Se  $\int_0^1 A(t)dt = 0$ , pela Proposição 2.16 todas as soluções de (3.19) são periódicas.

Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.17) e (3.19), respectivamente, tais que  $x(0) = \bar{x}(0) \neq 0$ . Como  $l(t) \geq 0$  temos  $\frac{dx}{dt} \geq \frac{d\bar{x}}{dt}$  e como  $l(t)$  não é identicamente nula em  $[0, 1]$  temos que  $x(1) > \bar{x}(1) = \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite.

Portanto o único ciclo limite de (3.17) é  $x(t) = 0$ .

(2) Se  $\int_0^1 B(t)dt = 0$ , pela Proposição 2.16 todas as soluções de (3.20) são periódicas.

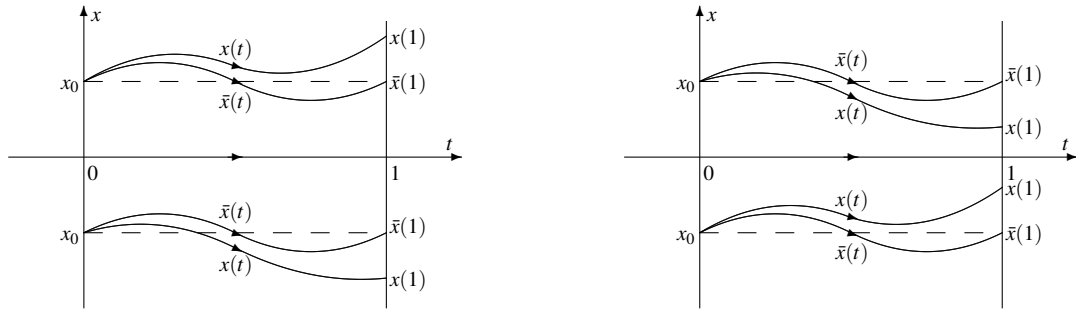
(2.1) Se  $\frac{a}{b} > 0$ , sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.18) e (3.20), respectivamente, tais que  $x(0) = \bar{x}(0) > 0$  ( $x(0) = \bar{x}(0) < 0$ ). Como  $l(t) \geq 0$ , temos  $\frac{dx}{dt} \geq \frac{d\bar{x}}{dt}$  ( $\frac{dx}{dt} \leq \frac{d\bar{x}}{dt}$ ) e como  $l(t)$  não é identicamente nula em  $[0, 1]$  temos que  $x(1) > \bar{x}(1) = \bar{x}(0) = x(0)$  ( $x(1) < \bar{x}(1) = \bar{x}(0) = x(0)$ ), logo  $x(t)$  não é um ciclo limite.

Portanto o único ciclo limite de (3.17) é  $x(t) = 0$ ;

(2.2) Se  $\frac{a}{b} < 0$ , sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.18) e (3.20), respectivamente, tais que  $x(0) = \bar{x}(0) < 0$  ( $x(0) = \bar{x}(0) > 0$ ). Como  $l(t) \geq 0$ , temos  $\frac{dx}{dt} \geq \frac{d\bar{x}}{dt}$  ( $\frac{dx}{dt} \leq \frac{d\bar{x}}{dt}$ ) e como  $l(t)$  não é identicamente nula em  $[0, 1]$  temos que  $x(1) > \bar{x}(1) = \bar{x}(0) = x(0)$  ( $x(1) < \bar{x}(1) = \bar{x}(0) = x(0)$ ), logo  $x(t)$  não é um ciclo limite.

Portanto o único ciclo limite de (3.17) é  $x(t) = 0$ ;

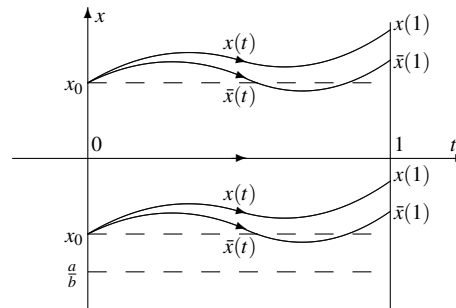
(3) Se  $\int_0^1 A(t)dt > 0$  e  $\int_0^1 B(t)dt \neq 0$ .



**Figura 3.2:** Comparando  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$ . Casos (2.1) e (2.2) respectivamente.

- (3.1) Se  $\frac{a}{b} < 0$ . Pela Proposição 2.16 e equação (3.22) os únicos ciclos limite de (3.19) são:  $\bar{x}_0(t) = 0$  o qual é semi estável, e  $\bar{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  que é instável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.17) e (3.19), respectivamente, tais que  $0 \neq x(0) = \bar{x}(0) > \frac{a}{b}$ . Como  $\bar{x}_0(t)$  é semi estável e  $\bar{x}_1(t)$  é instável temos que  $\bar{x}(1) > \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) > \bar{x}(1) > \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite.

Portanto (3.17) possui no máximo um ciclo limite não nulo e quando este existe é hiperbólico (instável) e pertence a região  $[0, 1] \times (-\infty, \frac{a}{b})$ ;

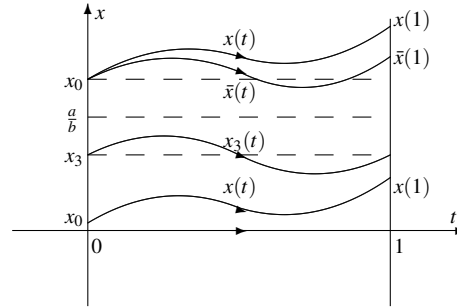


**Figura 3.3:** Comparando  $x(t)$  com  $\bar{x}(t)$ , para  $0 \neq x_0 > \frac{a}{b}$ . Caso (3.1).

- (3.2) Se  $\frac{a}{b} > 0$  e  $\int_0^1 B(t)dt > 0$ . Pela Proposição 2.16 e equação (3.22) os únicos ciclos limite de (3.19) são:  $\bar{x}_0(t) = 0$  o qual é semi estável, e  $\bar{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  que é instável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.17) e (3.19), respectivamente, tais que  $0 \neq x(0) = \bar{x}(0) > \frac{a}{b}$ . Como  $\bar{x}_0(t)$  é semi estável e  $\bar{x}_1(t)$  é estável temos que  $\bar{x}(1) > \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) > \bar{x}(1) > \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Suponha que (3.16) possui um ciclo limite  $x_3(t)$  tal que  $x_3(0) = x_3$  e  $0 < x_3 < \frac{a}{b}$ , ele será hiperbólico e o único ciclo limite em  $[0, 1] \times [0, \frac{a}{b}]$ . Por (3.21) temos que  $\frac{d^2h}{dx_0^2}(0) > 0$  o que implica que  $h(x)$  tem concavidade positiva em 0 ou seja

o ciclo limite  $x(t) = 0$  é instável em  $[0, 1] \times [0, \infty)$  o que implica que  $x_3(t)$  teria que ser semi-estável, o que é uma contradição. Logo o ciclo limite  $x_3(t)$  não existe.

Portanto (3.16) possui no máximo um ciclo limite não nulo e quando este existe é hiperbólico (instável) e está contido na região  $[0, 1] \times (-\infty, 0)$ ;



**Figura 3.4:** Comparando  $x(t)$  com  $\bar{x}(t)$ , para  $x_0 > \frac{a}{b} > 0$ . Caso (3.2).

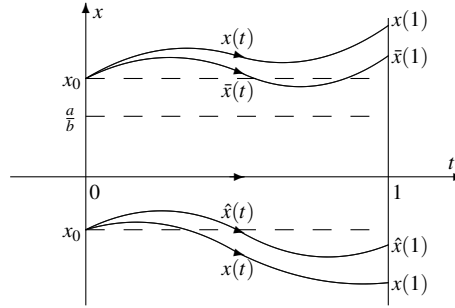
(3.3) Se  $\frac{a}{b} > 0$  e  $\int_0^1 B(t)dt < 0$ . Pela Proposição 2.16 e equação (3.22) os únicos ciclos limite de (3.19) são:  $\bar{x}_0(t) = 0$  o qual é semi estável, e  $\bar{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  que é instável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.17) e (3.19), respectivamente, tais que  $0 \neq x(0) = \bar{x}(0) > \frac{a}{b}$ . Como  $\bar{x}_0(t)$  é semi estável e  $\bar{x}_1(t)$  é estável temos que  $\bar{x}(1) > \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) > \bar{x}(1) > \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite.

Pela Proposição 2.16 e equação (3.23) os únicos ciclos limite de (3.20) são:  $\hat{x}_0(t) = 0$  o qual é semi estável, e  $\hat{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  que é instável. Sejam  $x(t)$  e  $\hat{x}(t)$  soluções de (3.17) e (3.20), respectivamente, tais que  $0 \neq x(0) = \hat{x}(0) < 0$ . Como  $\hat{x}_0(t)$  é semi estável e  $\hat{x}_1(t)$  é instável temos que  $\hat{x}(1) < \hat{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) < \hat{x}(1) < \hat{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite.

Portanto (3.16) possui um ciclo limite não nulo e este é hiperbólico (instável) e está contido na região  $[0, 1] \times (0, \frac{a}{b})$ .

(4) Se  $\int_0^1 A(t)dt < 0$  e  $\int_0^1 B(t)dt \neq 0$ .

(4.1) Se  $\frac{a}{b} > 0$ . Pela Proposição 2.16 e equação (3.22) os únicos ciclos limite de (3.19) são:  $\bar{x}_0(t) = 0$  o qual é semi estável, e  $\bar{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  que é estável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.17) e (3.19), respectivamente, tais que  $0 \neq x(0) = \bar{x}(0) < \frac{a}{b}$ . Como  $\bar{x}_0(t)$  é semi estável e  $\bar{x}_1(t)$  é estável temos que  $\bar{x}(1) > \bar{x}(0)$ .



**Figura 3.5:** Comparando  $x(t)$  com  $\bar{x}(t)$ , para  $x_0 > \frac{a}{b} > 0$  e  $x(t)$  com  $\hat{x}(t)$ , para  $x_0 < 0$ . Caso (3.3).

Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) > \bar{x}(1) > \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite.

Portanto (3.17) possui no máximo um ciclo limite não nulo e quando este existe é hiperbólico (estável) e pertence a região  $[0, 1] \times (\frac{a}{b}, \infty)$ ;

Observe que neste caso só podemos ter  $\int_0^1 B(t)dt > 0$ , pois caso contrário teríamos  $\int_0^1 l(t)dt = \int_0^1 (\frac{aA(t)+bB(t)}{b})dt = \frac{a}{b} \int_0^1 A(t)dt + \int_0^1 B(t)dt < 0$ , ou seja  $l(t) \leq 0$ .

- (4.2) Se  $\frac{a}{b} < 0$  e  $\int_0^1 B(t)dt > 0$ . Pela Proposição 2.16 e equação (3.22) os únicos ciclos limite de (3.19) são:  $\bar{x}_0(t) = 0$  o qual é semi estável, e  $\bar{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  que é estável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.17) e (3.19), respectivamente, tais que  $0 \neq x(0) = \bar{x}(0) < \frac{a}{b}$ . Como  $\bar{x}_0(t)$  é semi estável e  $\bar{x}_1(t)$  é estável temos que  $\bar{x}(1) > \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) > \bar{x}(1) > \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Suponha que (3.16) possui um ciclo limite  $x_3(t)$  tal que  $\frac{a}{b} < x_3(0) < 0$  teremos necessariamente que  $x_3(t)$  é estável mas temos também por (3.21) que  $\frac{d^2h}{dx_0^2}(0) > 0$  o que implica que  $h(x)$  tem concavidade positiva em 0 ou seja o ciclo limite  $x(t) = 0$  é estável em  $[0, 1] \times (-\infty, 0]$  o que implica que  $x_3(t)$  teria que ser instável, uma contradição, logo o ciclo limite  $x_3(t)$  não existe.

Portanto (3.16) possui no máximo um ciclo limite não nulo e quando este existe é hiperbólico (estável) e está contido na região  $[0, 1] \times (0, \infty)$ ;

- (4.3) Se  $\frac{a}{b} < 0$  e  $\int_0^1 B(t)dt < 0$ . Pela Proposição 2.16 e equação (3.22) os únicos ciclos limite de (3.19) são:  $\bar{x}_0(t) = 0$  o qual é semi estável, e  $\bar{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  que é estável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.17) e (3.19), respectivamente, tais que  $0 \neq x(0) = \bar{x}(0) < \frac{a}{b}$ . Como  $\bar{x}_0(t)$  é semi estável e  $\bar{x}_1(t)$  é estável temos que  $\bar{x}(1) > \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) > \bar{x}(1) > \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Pela Proposição 2.16 e equação (3.23) os únicos ciclos limite de (3.20) são:  $\hat{x}_0(t) = 0$  o qual é semi estável, e  $\hat{x}_1(t) = \frac{a}{b}$  que é estável. Sejam  $x(t)$  e  $\hat{x}(t)$

soluções de (3.17) e (3.20), respectivamente, tais que  $0 \neq x(0) = \hat{x}(0) > 0$ . Como  $\hat{x}_0(t)$  é semi estável e  $\hat{x}_1(t)$  é estável temos que  $\bar{x}(1) < \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) < \bar{x}(1) < \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite.

Portanto (3.16) possui um ciclo limite não nulo e este é hiperbólico (estável) e está contido na região  $[0, 1] \times (\frac{a}{b}, 0)$ .

CASO 2.  $l(t) \leq 0$ .

Aplicando em (3.16) a mudança de variáveis  $x(s) = x(1-t)$  temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{d(x(s))}{ds} \frac{ds}{dt} = -\frac{d(x(s))}{ds} \\ &= -A(s)x^3(s) - B(s)x^2(s). \end{aligned}$$

Logo temos  $l(s) \geq 0$ . Portanto a demonstração deste caso é semelhante à do caso anterior.  $\square$

**Corolário 3.7.** *Considere a equação de Abel (3.11). Suponha que  $\int_0^1 C(t)dt = 0$  e que existem dois números reais  $a$  e  $b$  tais que*

$$aA(t)e^{\int_0^t C(s)ds} + bB(t)$$

*não é identicamente nulo e também não muda de sinal para todo  $t \in [0, 1]$ . Nestas condições (3.11) possui no máximo um ciclo limite não nulo e quando este existe, é hiperbólico.*

*Prova.* Aplicando em (3.11) a mudança de coordenadas

$$y(t) = x(t)e^{-\int_0^t C(s)ds} \quad \text{ou} \quad x(t) = y(t)e^{\int_0^t C(s)ds},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} e^{-\int_0^t C(s)ds} - C(t)x(t)e^{-\int_0^t C(s)ds} \\ &= (A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)) e^{-\int_0^t C(s)ds} - C(t)x(t)e^{-\int_0^t C(s)ds} \\ &= (A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2) e^{-\int_0^t C(s)ds} \\ &= \left( A(t) \left( y(t)e^{\int_0^t C(s)ds} \right)^3 + B(t) \left( y(t)e^{\int_0^t C(s)ds} \right)^2 \right) e^{-\int_0^t C(s)ds} \\ &= \left( A(t) \left( e^{\int_0^t C(s)ds} \right)^3 y^3(t) + B(t) \left( e^{\int_0^t C(s)ds} \right)^2 y^2(t) \right) e^{-\int_0^t C(s)ds} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left( A(t)e^{3\int_0^t C(s)ds}y^3(t) + B(t)e^{2\int_0^t C(s)ds}y^2(t) \right) e^{-\int_0^t C(s)ds} \\
&= A(t)e^{2\int_0^t C(s)ds}y^3(t) + B(t)e^{\int_0^t C(s)ds}y^2(t).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Observe que a mudança de coordenadas aplicada em (3.11) conserva a quantidade de ciclos limite da equação pelo fato de  $\int_0^1 C(t)dt = 0$ , ou seja  $y(0) = x(0)$  e  $y(1) = x(1)$ .

Como

$$aA(t)e^{2\int_0^t C(s)ds} + bB(t)e^{\int_0^t C(s)ds}$$

também não é identicamente nula e não muda de sinal em  $[0, 1]$ , podemos aplicar o Teorema 3.5 em (3.24) de onde concluímos a demonstração deste corolário.  $\square$

**Teorema 3.8.** *Considere a equação de Abel (3.11). Suponha que existem três números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que  $aA(t) + bB(t)$  não é identicamente nulo e também não muda de sinal para todo  $t \in [0, 1]$ , e além disso,  $(bC(t) - cA(t))^2 + (aA(t) + bB(t))(cB(t) + aC(t)) < 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Então (3.11) possui no máximo quatro ciclos limite não nulos.*

*Prova.* Os casos  $a = 0$  ou  $b = 0$  já são garantidos pelos Teoremas 3.3 e 3.4. Consideraremos então  $ab \neq 0$  e aplicando o Teorema 2.22 em (3.11) com  $f(t, x) = bx^3 - ax^2 + cx$  e  $w = -1$  temos

$$\begin{aligned}
M_{-1}(t, x) &= \langle (0, 3bx^2 - 2ax + c), (1, A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x) \rangle \\
&\quad - x(bx^2 - ax + c)(3A(t)x^2 + 2B(t)x + C(t)) \\
&= x(3bx^2 - 2ax + c)(A(t)x^2 + B(t)x + C(t)) \\
&\quad - x(bx^2 - ax + c)(3A(t)x^2 + 2B(t)x + C(t)) \\
&= (3bA(t) - 3bA(t))x^5 + (3bB(t) - 2aA(t) - 2bB(t) + 3aA(t))x^4 \\
&\quad + (cA(t) - 2aB(t) + 3bC(t) - bC(t) + 2aB(t) - 3cA(t))x^3 \\
&\quad + (-2aC(t) + cB(t) + aC(t) - 2cB(t))x^2 + (cC(t) - cC(t))x \\
&= x^2((aA(t) + bB(t))x^2 + 2(bC(t) - cA(t))x - (cB(t) + aC(t))).
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= 4(bC(t) - cA(t))^2 + 4(aA(t) + bB(t))(cB(t) + aC(t)) \\
&= 4((bC(t) - cA(t))^2 + (aA(t) + bB(t))(cB(t) + aC(t))) < 0
\end{aligned}$$

logo  $M_{-1}(t, x)$  não muda de sinal em  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  e se anula apenas em  $x = 0$ . Pelo Teorema 2.22, temos que se  $a^2 - 4bc \leq 0$  então  $K_1 \leq 2$  e logo o número máximo de ciclos limite de

(3.11) é  $K_1 + K_2 + 1 \leq 5$  e como um destes é o próprio  $x(t) = 0$  temos no máximo quatro ciclos limite não nulos para (3.11).

Suponha agora que  $a^2 - 4bc > 0$  temos que  $\tilde{Q} = \{x_0(t), x^+(t), x^-(t)\}$  onde  $x_0(t) = 0$  e  $x^\pm(t) = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2b}$ . Se um dos valores  $x^+$  ou  $x^-$  for igual a zero então teremos  $K_1 = 2$  e  $K_1 + K_2 + 1 \leq 5$  e como um destes é o próprio  $x(t) = 0$  temos no máximo quatro ciclos limite não nulos para (3.11). Se nenhuma das curvas  $x^\pm(t)$  for solução de (3.11) então  $K_2 = 1$  e logo  $K_1 + K_2 + 1 \leq 4$  e logo o número máximo de ciclos limite não nulos de (3.11) é três.

Suponhamos agora que  $x^+(t)$  e  $x^-(t)$  são não nulas e que as duas são soluções de (3.11). Então temos

$$A(t)(x^+)^3 + B(t)(x^+)^2 + C(t)x^+ = 0$$

e

$$A(t)(x^-)^3 + B(t)(x^-)^2 + C(t)x^- = 0,$$

daí

$$A(t)(x^+)^2 + B(t)x^+ + C(t) = 0 \quad (3.25)$$

e

$$A(t)(x^-)^2 + B(t)x^- + C(t) = 0. \quad (3.26)$$

Subtraindo (3.26) de (3.25) temos

$$\begin{aligned} 0 &= A(t)((x^+)^2 - (x^-)^2) + B(t)(x^+ - x^-) \\ &= \frac{a\sqrt{a^2 - 4bc}}{b^2}A(t) + \frac{\sqrt{a^2 - 4bc}}{b}B(t) \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - 4bc}}{b^2}(aA(t) + bB(t)) \neq 0. \end{aligned}$$

daí concluímos que se uma das curvas  $x^+(t)$  e  $x^-(t)$  for uma solução de (3.11) então a outra não pode ser. Logo (3.11) possui no máximo cinco ciclos limite não nulos.

Podemos reescrever (3.11) como

$$\frac{dx}{dt} = x \left( A(t)x \left( x - \frac{a}{b} \right) + x l(t) + C(t) \right). \quad (3.27)$$

Observe que  $x^+ + x^- = \frac{a}{b}$  e  $(x - x^+)(x - x^-) = x^2 - xx^+ - xx^- + x^+x^-$ . Se  $x^+(t)$  (ou  $x^-(t)$ ) for uma solução periódica de (3.11) temos

$$x^+ \left( A(t)x^+ \left( x^+ - \frac{a}{b} \right) + x^+ l(t) + C(t) \right) = 0$$

$$\left( x^- \left( A(t)x^- \left( x^- - \frac{a}{b} \right) + x^- l(t) + C(t) \right) = 0 \right).$$

de onde tiramos que  $C(t) = A(t)x^+ \left( \frac{a}{b} - x^+ \right) - x^+ l(t)$  (ou  $C(t) = A(t)x^- \left( \frac{a}{b} - x^- \right) - x^- l(t)$ ).

Daí (3.27) fica,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left( A(t)x \left( x - \frac{a}{b} \right) + x l(t) + A(t)x^+ \left( \frac{a}{b} - x^+ \right) - x^+ l(t) \right) \\ &= x \left( A(t)x(x - x^+ - x^-) + A(t)x^+ x^- (x - x^+) l(t) \right) \\ &= x \left( A(t)(x^2 - xx^+ - xx^- + x^+ x^-) + (x - x^+) l(t) \right) \\ &= x \left( A(t)(x - x^+)(x - x^-) + (x - x^+) l(t) \right) \\ &= x(x - x^+) \left( A(t)(x - x^-) + l(t) \right) \\ &= x(x - x^-) \left( A(t)(x - x^+) + l(t) \right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Iremos comparar as soluções da equação (3.28) (ou (3.28)) com a equação

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(x - x^+)(x - x^-). \tag{3.29}$$

Vamos dividir a demonstração desta proposição em dois casos,

CASO 1.  $l(t) \geq 0$ ,

- (1) Se  $\int_0^1 A(t)dt = 0$ , pela Proposição 2.16 todas as soluções de (3.29) são periódicas. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.28) e (3.29), respectivamente, tais que  $x(0) = \bar{x}(0) \geq x^+$ . Como  $l(t) \geq 0$  temos  $\frac{dx}{dt} \geq \frac{d\bar{x}}{dt}$  e como  $l(t)$  não é identicamente nula em  $[0, 1]$  temos que  $x(1) > \bar{x}(1) = \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Portanto (3.28) possui no máximo quatro ciclos limite não nulos;
- (2) Se  $\int_0^1 A(t)dt \geq 0$ , pela Proposição 2.16 os únicos ciclos limite de (3.29) são:  $x_0(t) = 0$ ,  $x^+(t)$  e  $x^-(t)$ . Todos são hiperbólicos e cuja estabilidade é dada pelo sinal de  $x^+ x^- \int_0^1 A(t)dt$ ,  $x^+ \int_0^1 A(t)dt$  e  $-x^- \int_0^1 A(t)dt$ , respectivamente.
  - (2.1) Se  $x^+ > x^- > 0$ , então  $x_0(t) = 0$  e  $x^+(t)$  são instáveis enquanto  $x^-(t)$  é estável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.28) e (3.29), respectivamente, tais que  $x(0) = \bar{x}(0) > x^+$ . Como  $x^+(t)$  é instável temos que  $\bar{x}(1) > \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) > \bar{x}(1) > \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Portanto (3.28) possui no máximo quatro ciclos limite não nulos;
  - (2.2) Se  $x^+ > 0 > x^-$ , então  $x^+(t)$  e  $x^-(t)$  são instáveis enquanto  $x_0(t)$  é estável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.28) e (3.29), respectivamente, tais que  $x(0) = \bar{x}(0) > x^+$ . Como  $x^+(t)$  é instável temos que  $\bar{x}(1) > \bar{x}(0)$ . Além

disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) > \bar{x}(1) > \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Portanto (3.28) possui no máximo quatro ciclos limite não nulos;

(2.3) Se  $0 > x^+ > x^-$ , então  $x_0(t) = 0$  e  $x^-(t)$  são instáveis enquanto  $x^+(t)$  é estável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.28) e (3.29), respectivamente, tais que  $x(0) = \bar{x}(0) > 0$ . Como  $x_0(t)$  é instável temos que  $\bar{x}(1) > \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) > \bar{x}(1) > \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Portanto (3.28) possui no máximo quatro ciclos limite não nulos;

(3) Se  $\int_0^1 A(t)dt \leq 0$ , pela Proposição 2.16 os únicos ciclos limite de (3.29) são:  $x_0(t) = 0$ ,  $x^+(t)$  e  $x^-(t)$  todos hiperbólicos e cuja estabilidade é dada pelo sinal de  $x^+x^- \int_0^1 A(t)dt$ ,  $x^+ \int_0^1 A(t)dt$  e  $-x^- \int_0^1 A(t)dt$ , respectivamente.

(3.1) Se  $x^+ > x^- > 0$ , então  $x_0(t) = 0$  e  $x^+(t)$  são estáveis enquanto  $x^-(t)$  é instável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.28) e (3.29), respectivamente, tais que  $x^- > x(0) = \bar{x}(0) > 0$ . Como  $x^-(t)$  é instável temos que  $\bar{x}(1) < \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) < \bar{x}(1) < \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Portanto (3.28) possui no máximo quatro ciclos limite não nulos;

(3.2) Se  $x^+ > 0 > x^-$ , então  $x^+(t)$  e  $x^-(t)$  são estáveis enquanto  $x_0(t)$  é instável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.28) e (3.29), respectivamente, tais que  $0 > x(0) = \bar{x}(0) > x^-$ . Como  $x_0(t)$  é instável temos que  $\bar{x}(1) < \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) < \bar{x}(1) < \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Portanto (3.28) possui no máximo quatro ciclos limite não nulos;

(3.3) Se  $0 > x^+ > x^-$ , então  $x_0(t) = 0$  e  $x^-(t)$  são estáveis enquanto  $x^+(t)$  é instável. Sejam  $x(t)$  e  $\bar{x}(t)$  soluções de (3.28) e (3.29), respectivamente, tais que  $x^+ > x(0) = \bar{x}(0) > x^-$ . Como  $x^+(t)$  é instável temos que  $\bar{x}(1) < \bar{x}(0)$ . Além disso,  $l(t)$  é positiva e não identicamente nula em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x(1) < \bar{x}(1) < \bar{x}(0) = x(0)$ , logo  $x(t)$  não é um ciclo limite. Portanto (3.28) possui no máximo quatro ciclos limite não nulos.

CASO 2.  $l(t) \leq 0$ .

Aplicando em (3.11) a mudança de variáveis  $x(s) = x(1-t)$  temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{d(x(s))}{ds} \frac{ds}{dt} = -\frac{d(x(s))}{ds} \\ &= -A(s)x^3(s) - B(s)x^2(s) - C(t)x(s). \end{aligned}$$

Logo temos  $l(s) \geq 0$ . Portanto a demonstração deste caso é semelhante à do caso anterior.

Seguindo o mesmo raciocínio para o caso em que  $x^-(t)$  é a solução de (3.28) concluímos a demonstração.  $\square$

### 3.4 Resultados mais gerais

Nesta seção estudaremos dois casos da equação (1.1) para  $n \geq 3$ . Os resultados apresentados aqui foram estudados por A. Gasull e A. Guillamon em [1].

**Proposição 3.9.** *Sejam  $l, p > n > m \geq 2$ , então existem equações da forma*

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{\varepsilon}x^p + \varepsilon f(t)x^n + a(t)x^m + \delta x, \quad (3.30)$$

onde  $f$  e  $a$  são polinômios trigonométricos de período 1,  $|\tilde{\varepsilon}| \geq 0$  e  $|\delta| \geq 0$  que possuem no mínimo  $l$  ciclos limite.

*Prova.* Considere para  $t \in [0, 1]$  a equação

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t)x^n + a(t)x^m. \quad (3.31)$$

Escolha a função  $a(t)$  de forma que se tenha  $\int_0^1 a(t)dt = 0$  e defina  $A(t) = \int_0^t a(s)ds$ . Sejam  $\bar{A} = \max_{t \in [0,1]} |A(t)|$  e  $\phi(t, x, \varepsilon)$  as soluções de (3.31) tais que  $\phi(0, x, \varepsilon) = x$ .

Se  $\varepsilon = 0$  temos

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^m,$$

aplicando o método da separação de variáveis e trocando a variável  $t$  por  $s$ , temos

$$\frac{dx}{x^m} = a(s)ds,$$

que integrando em  $s \in [0, t]$  resulta em

$$\frac{(\phi(t, x, 0))^{1-m}}{1-m} - \frac{x^{1-m}}{1-m} = A(t)$$

daí,

$$\phi(t, x, 0) = x \left( \frac{1}{1 - (m-1)A(t)x^{m-1}} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad (3.32)$$

definida para  $x \in \left[0, \sqrt[m-1]{(m-1)\bar{A}}\right) = I$ , observe que  $\phi(t, x, 0)$  é tal que  $\phi(0, x, 0) = \phi(1, x, 0)$ .

Podemos escrever  $\phi(t, x, \varepsilon)$  como

$$\phi_\varepsilon(t, x) = \phi(t, x, \varepsilon) = \phi(t, x, 0) + \varepsilon W(t, x, 0) + \varepsilon^2 R(t, x, 0) \quad (3.33)$$

onde  $W(t, x, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(t, x, 0)$  e  $W(0, x, 0) = 0$ .

Fazendo  $W(1, x, 0) = W(x)$  e  $R(1, x, 0) = R(x)$ , temos

$$h_\varepsilon(x) = \phi(1, x, \varepsilon) = x + \varepsilon W(x) + \varepsilon^2 R(x). \quad (3.34)$$

Observe que se  $x_0 \in I$  é uma raiz de  $W(x)$  de multiplicidade 1, então para valores suficientemente pequenos de  $\varepsilon$  existe  $\bar{x}_0(\varepsilon) \in I$  próximo a  $x_0$  tal que  $\phi(t, \bar{x}_0(\varepsilon), \varepsilon)$  é um ciclo limite hiperbólico de (3.31). Assuma que, dado um número natural  $l$ , é possível escolher funções  $f(t)$  e  $a(t)$  de maneira que  $W(x)$ , como definida acima, possui  $l$  raízes de multiplicidade 1, este fato será demonstrado no Lema 3.10. Assim sendo, podemos escolher  $\varepsilon$  suficientemente pequeno tal que (3.31) possui no mínimo  $l$  ciclos limite. Para concluir esta demonstração é suficiente considerar a equação (3.30) como perturbação de (3.31), escolhendo  $f(t)$  e  $a(t)$  de forma que (3.31) possui  $l$  ciclos limite hiperbólicos, para  $\varepsilon$  e  $\delta$  suficientemente pequenos (3.30) preserva esta quantidade de ciclos limite.  $\square$

**Lema 3.10.** *Dado um número natural  $l$ , é possível escolher funções  $f(t)$  e  $a(t)$  de maneira que  $W(x)$ , como definida acima, possui  $l$  raízes de multiplicidade 1.*

*Prova.* O primeiro passo na demonstração deste lema é expressar a função  $W(t, x)$  em termos de  $f(t)$  e  $a(t)$ , por (3.31) e (3.33) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon f(t) \phi^n + a(t) \phi^m) \\ &= f(t) (\phi_0 + \varepsilon W + \varepsilon^2 R)^n + \varepsilon f(t) n (\phi_0 + \varepsilon W + \varepsilon^2 R)^{n-1} (W + 2\varepsilon R) \\ &\quad + a(t) m (\phi_0 + \varepsilon W + \varepsilon^2 R)^{m-1} (W + 2\varepsilon R) \\ &= f(t) (\phi_0(t, x))^n + a(t) m (\phi_0(t, x))^{m-1} W(t, x) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Se  $\varepsilon = 0$ , por (3.31) temos  $a(t) = \frac{1}{(\phi_0(t, x))^m} \frac{d\phi_0(t, x)}{dt}$ , daí

$$\frac{dW(t, x)}{dt} = f(t) (\phi_0(t, x))^n + m \frac{1}{\phi_0(t, x)} \frac{d\phi_0(t, x)}{dt} W(t, x),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{W(t,x)}{(\phi_0(t,x))^m} \right) &= \frac{1}{(\phi_0(t,x))^{2m}} \left( \frac{dW(t,x)}{dt} (\phi_0(t,x))^m - W(t,x) \frac{d\phi_0(t,x)}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\phi_0^{2m}} \left( \left( f(t)\phi_0^n + m \frac{1}{\phi_0} \frac{d\phi_0}{dt} W \right) \phi_0^m - m\phi_0^{m-1} \frac{d\phi_0}{dt} W \right) \\ &= f(t)(\phi_0(t,x))^{n-m}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Integrando (3.35) no intervalo  $[0, 1]$  e utilizando (3.32) temos

$$W(x) = W(1,x) = x^n \int_0^1 \frac{f(t)}{(1 - (m-1)A(t)x^{m-1})^{\frac{n-m}{m-1}}} dt. \quad (3.36)$$

Fazendo  $y = x^{m-1}$ ,  $\alpha = \frac{n-m}{m-1}$ ,  $a(t) = \frac{2\pi}{m-1} \cos(2\pi t)$  e  $H_f(x) = \frac{W(x)}{x^n}$  obtemos

$$H_f(y) = \int_0^1 \frac{f(t)}{(1 - \text{sen}(2\pi t)y)^\alpha} dt.$$

Fixando um valor para  $l$  e um polinômio  $p(y) = \sum_{i=0}^l b_i y^i$  onde  $b_i \in \mathbb{R}$ , para  $i = 0, 1, \dots, l$ . Iremos provar que existe uma função  $f(t)$  da forma

$$f(t) = \sum_{j=0}^l \beta_j f_j(t),$$

onde  $f_j(t) = \text{sen}^j(2\pi t)$ ,  $\beta_j \in \mathbb{R}$ , tal que

$$H_f(y) = p(y) + O(y^{l+1}). \quad (3.37)$$

A função  $H_f(y)$  é linear em relação a  $f$ . Podemos escrever

$$H_{f_j}(y) = \sum_{k=0}^l \frac{y^k}{k!} \frac{d^k H_{f_j}}{dy^k}(0) + O(y^{l+1}). \quad (3.38)$$

Por indução simples podemos mostrar que

$$\frac{d^k H_{f_j}}{dy^k}(y) = \begin{cases} \frac{\Sigma(\alpha+k-1)}{\Sigma(\alpha-1)} \int_0^1 \frac{\text{sen}^{j+k}(2\pi t)}{(1 - \text{sen}(2\pi t)y)^{\alpha+2}} dt, & \text{se } k \neq 0 \\ H_{f_j}(y), & \text{se } k = 0 \end{cases},$$

onde

$$\Sigma(\alpha+k) = \begin{cases} \alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+k) & \text{se } k > 1, \\ \alpha & \text{se } k = 1, \\ 1 & \text{se } k < 1. \end{cases}$$

que substituindo em (3.38) concluimos que

$$\begin{aligned} H_{f_j}(y) &= \sum_{k=0}^l y^k \binom{\alpha+k-1}{k} \int_0^1 \text{sen}^{j+k}(2\pi t) dt + O(y^{l+1}) \\ &= \sum_{k=0}^l c_{j,k} y^k + O(y^{l+1}), \end{aligned}$$

onde  $c_{j,k} = \binom{\alpha+k-1}{k} \int_0^1 \text{sen}^{j+k}(2\pi t) dt$ .

Assim, temos

$$H_f(y) = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_l] \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,l} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l,0} & c_{l,1} & \cdots & c_{l,l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^k \end{bmatrix} + O(y^{l+1}).$$

Seja a matriz  $C = (c_{j,k})_{j,k=0}^l$ , temos

$$\det(C) = \prod_{k=0}^l \binom{\alpha+k-1}{k} \det(G),$$

onde  $G = (g_{i,j})_{j,k=0}^l$  é tal que  $g_{i,j} = \int_0^1 \text{sen}^{j+k}(2\pi t) dt$ . Seja  $L$  o conjunto de todas as combinações lineares das funções  $f_0, f_1, \dots, f_l$ , a matriz  $G$  é a matriz do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ , logo  $g_{i,j} = \langle f_i, f_j \rangle$ , como  $\{f_0, f_1, \dots, f_l\}$  é uma base de  $L$  então  $\det(G) \neq 0$ .

Portanto  $\det(C) \neq 0$  o que implica que o sistema

$$C^T X^T = B^T,$$

onde  $X = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_l]$  e  $B = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_l]$ , é sempre possível e determinado. Portanto é possível escolher  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l$ , tais que (3.37) seja satisfeita. Pelos Lemas 2.5 e 2.9 concluimos através de (3.37) a demonstração deste lema.  $\square$

**Teorema 3.11.** *Considere a equação de Abel generalizada,*

$$\frac{dx}{dt} = a_n(t)x^n + a_m(t)x^m + a_1(t)x, \quad (3.39)$$

onde  $n > m > 1$ , e  $a_n(t)$ ,  $a_m(t)$  e  $a_1(t) \in C^1$  de período 1. Suponha que  $a_n(t)$  ou  $a_m(t)$  não muda de sinal em  $[0, 1]$ . Então,

- i) Se  $n$  é ímpar, então (3.39) possui no máximo cinco ciclos limite. Além disso, em cada região  $\mathcal{D}^+ = \{(t, x) \in \mathcal{S} : x > 0\}$  e  $\mathcal{D}^- = \{(t, x) \in \mathcal{S} : x < 0\}$  ocorre exatamente uma



das seguintes possibilidades,

*i.i) A equação (3.39) não possui ciclos limite;*

*i.ii) A equação (3.39) possui um único ciclo limite e este é hiperbólico;*

*i.iii) A equação (3.39) possui um único ciclo limite e este é semi-estável;*

*i.iv) A equação (3.39) possui exatamente dois ciclos limite e estes são hiperbólicos.*

*ii) Se  $n$  é par, então (3.39) possui no máximo quatro ciclos limite. Além disso, em cada região  $\mathcal{D}^+$  e  $\mathcal{D}^-$  ocorre exatamente uma das possibilidades i.i) a i.iv), descritas no item anterior.*

*Prova.* Vamos dividir a demonstração deste teorema em dois casos,

CASO 1.  $n$  é ímpar,

(1) Se  $a_n(t) \geq 0$ . Sejam  $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$ , temos  $x(t, x_1) < x(t, x_2) < 0 < x(t, x_3) < x(t, x_4)$  o que implica em

$$\int_0^1 a_n(t)(x(t, x_1))^{n-1} dt > \int_0^1 a_n(t)(x(t, x_2))^{n-1} dt$$

e

$$\int_0^1 a_n(t)(x(t, x_3))^{n-1} dt < \int_0^1 a_n(t)(x(t, x_4))^{n-1} dt.$$

Logo por (2.22) temos

$$\Phi(x_1) > \Phi(x_2)$$

e

$$\Phi(x_3) < \Phi(x_4),$$

ou seja,  $\Phi(x)$  é uma função estritamente decrescente em  $\mathcal{D}^-$  e estritamente crescente em  $\mathcal{D}^+$ . Pelo Lema 2.17 temos  $\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\Phi(x_0)}$ , o que implica que  $\frac{dh}{dx_0}(x_0)$  é estritamente decrescente em  $\mathcal{D}^-$  e estritamente crescente em  $\mathcal{D}^+$ , como dois ciclos limite adjacentes possuem estabilidade diferentes, chegamos à conclusão de que em cada uma das regiões  $\mathcal{D}^-$  e  $\mathcal{D}^+$  a equação (3.39) possui no máximo três ciclos limite. Suponha que em uma das regiões  $\mathcal{D}^-$  e  $\mathcal{D}^+$  a equação (3.39) possui os três ciclos limite. Um deles será semi-estável, aplicando o Lema 2.18 é possível, para um  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, construir uma equação da forma (3.39) com quatro ciclos limite na mesma região, o que é uma contradição, pois vimos que (3.39) possui no máximo três ciclos limite em cada uma das regiões. Portanto concluímos que (3.39) possui no máximo dois ciclos limite em cada uma das regiões  $\mathcal{D}^-$  e  $\mathcal{D}^+$ . Assim sendo, vale o item i) e um dos subitens de i.i) a i.iv);

- (2) Se  $a_n(t) \leq 0$ . A demonstração deste item é semelhante à do item anterior, basta aplicar a mudança de variáveis  $y(s) = x(1 - t)$ ;
- (3) Se  $b_n(t) \geq 0$ . Sejam  $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$ , temos  $x(t, x_1) < x(t, x_2) < 0 < x(t, x_3) < x(t, x_4)$  o que implica em

$$\int_0^1 b_n(t)(x(t, x_1))^{n-1} dt > \int_0^1 b_n(t)(x(t, x_2))^{n-1} dt$$

e

$$\int_0^1 b_n(t)(x(t, x_3))^{n-1} dt < \int_0^1 b_n(t)(x(t, x_4))^{n-1} dt.$$

Logo por (2.23) temos

$$\Phi(x_1) < \Phi(x_2)$$

e

$$\Phi(x_3) > \Phi(x_4),$$

ou seja,  $\Phi(x)$  é uma função estritamente crescente em  $\mathcal{D}^-$  e estritamente decrescente em  $\mathcal{D}^+$ . Pelo Lema 2.17 temos  $\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\Phi(x_0)}$ , o que implica que  $\frac{dh}{dx_0}(x_0)$  é estritamente crescente em  $\mathcal{D}^-$  e estritamente decrescente em  $\mathcal{D}^+$ , como dois ciclos limite adjacentes possuem estabilidade diferentes, chegamos à conclusão de que em cada uma das regiões  $\mathcal{D}^-$  e  $\mathcal{D}^+$  a equação (3.39) possui no máximo três ciclos limite. Suponha que em uma das regiões  $\mathcal{D}^-$  e  $\mathcal{D}^+$  a equação (3.39) possui os três ciclos limite. Um deles será semi-estável, aplicando o Lema 2.18 é possível, para um  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, construir uma equação da forma (3.39) com quatro ciclos limite na mesma região, o que é uma contradição, pois vimos que (3.39) possui no máximo três ciclos limite em cada uma das regiões. Portanto concluímos que (3.39) possui no máximo dois ciclos limite em cada uma das regiões  $\mathcal{D}^-$  e  $\mathcal{D}^+$ . Assim sendo, vale o item *i*) e um dos subitens de *i.i*) a *i.iv*);

- (4) Se  $b_n(t) \leq 0$ . A demonstração deste item é semelhante à do item anterior, basta aplicar a mudança de variáveis  $y(s) = x(1 - t)$ .

CASO 2.  $n$  é par,

- (1) Se  $a_n(t) \geq 0$ . Sejam  $x_1 < x_2$ , temos  $x(t, x_1) < x(t, x_2)$  o que implica em

$$\int_0^1 a_n(t)(x(t, x_1))^{n-1} dt < \int_0^1 a_n(t)(x(t, x_2))^{n-1} dt.$$

Logo por (2.22) temos

$$\Phi(x_1) < \Phi(x_2),$$

ou seja,  $\Phi(x)$  é uma função estritamente crescente em  $\mathcal{S}$ . Pelo Lema 2.17 temos  $\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\Phi(x_0)}$ , para  $x_0 \neq 0$ , o que implica que  $\frac{dh}{dx_0}(x_0)$  é estritamente crescente em  $\mathcal{D}^- \cup \mathcal{D}^+$ , como dois ciclos limite adjacentes possuem estabilidade diferentes, chegamos à conclusão de que a equação (3.39) possui no máximo quatro ciclos limite  $x(t, x_1) < x(t, 0) < x(t, x_2) < x(t, x_3)$  ou  $x(t, x_1) < x(t, x_2) < x(t, 0) < x(t, x_3)$ , pois a estabilidade de  $x(t, 0)$  é dada pelo sinal de  $-\Phi(0)$ . Assim sendo, vale o item *ii*) e um dos subitens de *i.i*) a *i.iv*);

- (2) Se  $a_n(t) \leq 0$ . A demonstração deste item é semelhante à do item anterior, basta aplicar a mudança de variáveis  $y(s) = x(1 - t)$ ;
- (3) Se  $b_n(t) \geq 0$ . Sejam  $x_1 < x_2$ , temos  $x(t, x_1) < x(t, x_2)$  o que implica em

$$\int_0^1 b_n(t)(x(t, x_1))^{n-1} dt < \int_0^1 b_n(t)(x(t, x_2))^{n-1} dt.$$

Logo por (2.23) temos

$$\Phi(x_1) > \Phi(x_2),$$

ou seja,  $\Phi(x)$  é uma função estritamente decrescente em  $\mathcal{S}$ . Pelo Lema 2.17 temos  $\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\Phi(x_0)}$ , para  $x_0 \neq 0$ , o que implica que  $\frac{dh}{dx_0}(x_0)$  é estritamente decrescente em  $\mathcal{D}^- \cup \mathcal{D}^+$ , como dois ciclos limite adjacentes possuem estabilidade diferentes, chegamos à conclusão de que a equação (3.39) possui no máximo quatro ciclos limite  $x(t, x_1) < x(t, x_2) < x(t, 0) < x(t, x_3)$  ou  $x(t, x_1) < x(t, x_2) < x(t, 0) < x(t, x_3)$ , pois a estabilidade de  $x(t, 0)$  é dada pelo sinal de  $-\Phi(0)$ . Assim sendo, vale o item *ii*) e um dos subitens de *i.i*) a *i.iv*);

- (4) Se  $b_n(t) \leq 0$ . A demonstração deste item é semelhante à do item anterior, basta aplicar a mudança de variáveis  $y(s) = x(1 - t)$ .

O que conclui a demonstração. □

**Teorema 3.12.** *Considere a equação de Abel generalizada,*

$$\frac{dx}{dt} = a_n(t)x^n + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t), \quad (3.40)$$

onde  $a_n(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_1(t)$  e  $a_0(t) \in C^1$  são todas de período 1. Suponha que  $a_n(t)$  não muda de sinal em  $[0, 1]$ . Então,

- i) Se  $n \geq 3$  é ímpar, então (3.40) possui no máximo três ciclos limite contando multiplicidades;*
- ii) Se  $n \geq 4$  é par, seja  $l$  um número natural qualquer, existe uma equação do tipo (3.40) com no mínimo  $l$  ciclos limite.*

*Prova.* Seja  $n \geq 3$  um número natural ímpar, pela Proposição 2.14 temos,

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\int_0^1 (na_n(t)x^{n-1} + 2a_2(t)x + a_1(t))dt},$$

$$\frac{d^2h}{dx_0^2}(x_0) = \frac{dh}{dx_0}(x_0) \int_0^1 (n(n-1)a_n(t)x^{n-2} + 2a_2(t))e^{\int_0^t (na_n(s)x^{n-1} + 2a_2(s)x + a_1(s))ds} dt$$

e

$$\frac{d^3h}{dx_0^3}(x_0) = \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[ \left( \frac{d^2h}{dx_0^2}(x_0) \right)^2 + \int_0^1 n(n-1)(n-2)a_n(t)x^{n-3} e^{2\int_0^t (na_nx^{n-1} + 2a_2x + a_1)ds} dt \right]. \quad (3.41)$$

Vamos dividir a demonstração deste teorema em dois casos,

CASO 1.  $n \geq 3$  é ímpar,

- (1) Se  $a_n \geq 0$ , por (3.41) temos que  $\frac{d^3h}{dx_0^3} > 0$  pois,  $n-3$  é par. Suponha que  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$  sejam zeros da função  $h(x) - x$ , contando multiplicidades. Pelo Teorema de Rolle existem  $y_1, y_2$  e  $y_3$  com

$$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq x_4,$$

tais que  $y_1, y_2$  e  $y_3$  sejam zeros de  $\frac{dh}{dx_0} - 1$ , contando multiplicidades. Aplicando novamente o Teorema de Rolle existem  $z_1$  e  $z_2$  com

$$y_1 \leq z_1 \leq y_2 \leq z_2 \leq y_3,$$

tais que  $z_1$  e  $z_2$  sejam zeros de  $\frac{d^2h}{dx_0^2}$ , contando multiplicidades. E novamente pelo Teorema de Rolle existe  $w_1$  com  $z_1 \leq w_1 \leq z_2$ , tal que  $w_1$  seja zero de  $\frac{d^3h}{dx_0^3}$ . Uma contradição, logo (3.40) possui no máximo três ciclos limite;

- (2) Se  $a_n(t) \leq 0$ . A demonstração deste item é semelhante à do item anterior, basta aplicar a mudança de variáveis  $y(s) = x(1-t)$ .

Portanto o item *i*) do teorema é válido.

CASO 2.  $n \geq 4$  é par. Pela Proposição 3.9 existe uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y^3 + b(t)y^2, \quad (3.42)$$

onde  $a(t)$  e  $b(t)$  são polinômios trigonométricos, que possui no mínimo  $l$  ciclos limite hiperbólicos. Para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, a perturbação de (3.42)

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \sum_{p=4}^n b_p(t)y^p + a(t)y^3 + b(t)y^2 \quad (3.43)$$

onde  $b_n = 1$  e  $b_p(t)$ ,  $p = 4, \dots, n-1$  são funções contínuas, também possui no mínimo  $l$  ciclos limite. Aplicando em (3.43) a mudança de coordenadas  $x(t) = y(t) - k(t)$ , onde  $k(t)$  é de classe  $C^1$ , temos,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} - \frac{dk}{dt} = \varepsilon \sum_{k=4}^n b_p(t)(x+k)^p + a(t)(x+k)^3 + b(t)(x+k)^2 - \frac{dk}{dt} \\ &= \varepsilon x^n + \varepsilon \sum_{p=4}^{n-1} \left( \sum_{i=p}^n \binom{i}{p} (k(t))^{i-p} b_i(t) \right) y^p + a(t)(x+k)^3 + b(t)(x+k)^2 - \frac{dk}{dt} \\ &= \varepsilon x^n + \varepsilon \sum_{p=4}^{n-1} \left( \sum_{i=p}^n \binom{i}{p} (k(t))^{i-p} b_i(t) \right) y^p + a_3(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t). \end{aligned}$$

onde  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , são polinômios em  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $\frac{dk}{dt}$ ,  $k(t)$  e  $b_i(t)$ ,  $i = 4, \dots, n-1$ . Por exemplo,

$$a_3(t) = \varepsilon \sum_{i=4}^n \binom{i}{3} (k(t))^{i-3} b_i(t) + a(t).$$

Vamos procurar funções  $b_i(t)$  e  $k(t)$ ,  $i = 4, \dots, n-1$ , tais que,

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x^n + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t) \quad (3.44)$$

ou seja,

$$\sum_{i=p}^n \binom{i}{p} (k(t))^{i-p} b_i(t) \equiv 0 \quad \text{e} \quad a_3(t) \equiv 0. \quad (3.45)$$

Da primeira parte de (3.45), temos

$$b_p(t) = - \sum_{i=p+1}^n \binom{i}{p} (k(t))^{i-p} b_i(t),$$

ou seja,

$$b_{n-1}(t) = - \binom{n}{n-1} k(t),$$

$$\begin{aligned} b_{n-2}(t) &= - \binom{n-1}{n-2} k(t) b_{n-1}(t) - \binom{n}{n-2} (k(t))^2 \\ &= (k(t))^2 \binom{n}{n-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n-3}(t) &= -\binom{n-2}{n-3}k(t)b_{n-2}(t) - \binom{n-1}{n-3}(k(t))^2b_{n-1}(t) - \binom{n}{n-3}(k(t))^3 \\ &= -(k(t))^3\binom{n}{n-3}, \end{aligned}$$

e por indução concluímos que,

$$b_p(t) = (k(t))^{n-p}(-1)^p\binom{n}{n-p}. \quad (3.46)$$

para  $p = 4, \dots, n-1$ .

Aplicando (3.46) na segunda parte de (3.45) temos

$$\begin{aligned} a_3(t) &= \varepsilon \sum_{i=4}^n \binom{i}{3} (k(t))^{i-3} b_i(t) + a(t) = 0 \\ \varepsilon \sum_{i=4}^n (-1)^i \binom{i}{3} (k(t))^{i-3} (k(t))^{n-i} \binom{n}{n-i} &= -a(t) \\ \varepsilon \sum_{i=4}^n (-1)^i \binom{i}{3} (k(t))^{n-3} \binom{n}{n-i} &= -a(t) \\ (k(t))^{n-3} \left( \varepsilon \sum_{i=4}^n (-1)^i \binom{i}{3} \binom{n}{n-i} \right) &= -a(t) \\ k(t) &= \left( -\frac{a(t)}{\varepsilon \sum_{i=4}^n (-1)^i \binom{i}{3} \binom{n}{n-i}} \right)^{\frac{1}{n-3}}. \end{aligned}$$

A função acima está bem definida pois  $n$  é par. Em geral,  $k(t)$  como dado acima não é de classe  $C^1$ .

Vamos mostrar que é possível escolher  $a(t)$  de maneira que  $k(t)$  seja uma função de classe  $C^1$ .

Na equação (3.42), denote por  $t_1, \dots, t_r$  as raízes de  $a(t)$ . Escolha um natural  $N \geq 3$  e uma função crescente  $\psi(t) \in C^\infty$  definida em  $[0, 1]$ , satisfazendo  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(t_i) = t_i$ ,  $\psi(1) = 1$ ,  $\frac{d^j \psi}{dt^j}(t_i) = 0$  e  $\frac{d\psi}{dt}(t) \neq 0$  se  $t \neq t_i$ , para  $i = 1, \dots, r$  e  $j \in \mathbb{N}$ .

Aplicando a mudança de coordenadas  $t = \psi(s)$ , (3.42) fica

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = \frac{d\psi}{ds} \\ \frac{dx}{ds} = a(\psi(s)) \frac{d\psi}{ds} x^3 + b(\psi(s)) \frac{d\psi}{ds} x^2 \end{cases} \quad (3.47)$$

Observe que  $s_i = t_i$ , para  $i = 1, \dots, r$ , também são raízes de  $\hat{a}(s) = a(\psi(s)) \frac{d\psi}{ds}$ . Além disso a multiplicidade de cada  $s_i$  é “infinita” como raiz de  $\hat{a}(s)$ .

Cada órbita da equação

$$\frac{dx}{ds} = \hat{a}(s)x^3 + \hat{b}(s)x^2, \quad (3.48)$$

com  $\hat{b}(t) = a(\psi(t)) \frac{d\psi}{ds}$  restrita ao intervalo  $(s_i, s_{i+1})$  com  $i = 0, \dots, r+1$  e  $s_0 = 0$  e  $s_{r+1} = 1$ , coincide geometricamente com uma órbita de (3.47), portanto a equação (3.48) também possui  $l$  ciclos limites.

Substituindo a equação (3.42) por (3.48), a função

$$k(t) = \left( -\frac{\hat{a}(t)}{\epsilon \sum_{i=4}^n (-1)^i \binom{i}{3} \binom{n}{n-i}} \right)^{\frac{1}{n-3}}$$

é de classe  $C^1$ .

Portanto é possível construir uma equação do tipo (3.40) satisfazendo o item *ii*) deste teorema. □

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] GASULL, A; GUILLAMON, A. **Limit cycles for generalized Abel equations**. International Journal of Bifurcation and Chaos, 16(12):3737–3745, 2006.
- [2] GASULL, A; LLIBRE, J. **Limit cycles for a class of Abel equations**. Siam J. Math. Anal, 21(5):1235–1244, 1990.
- [3] HALE, J. K; KOÇAK, H. **Dynamics and Bifurcations**. Springer-Verlag, 1991.
- [4] HOLBOE, B. **Oeuvres Complètes de N. H. Abel**. Chez Chr Gröndahl, Imprimeur-Libraire, (Volume 2): 229-245, 1839. Disponível on-line: <http://books.google.com.br/books?id=yS4VAAAAQAAJ&dq=Oeuvres%20compl%C3%A8tes%20Niels%20Henrik%20Abel&lr=&pg=RA1-PA229#v=onepage&q=&f=false>, Acesso em: 24/09/2009.
- [5] LINS N., A. **On the number of solutions of the equation  $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j, 0 \leq t \leq 1$ , for which  $x(0) = x(1)$** . Inventiones Mathematicae, (59):67–76, 1980.
- [6] ÁLVAREZ, M. J; GASULL, A; GIACOMINI, H. **A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations**. Journal of Differential Equations, (234):161–176, 2007.
- [7] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer-Verlag, 1991.
- [8] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, IMPA, 1979.



---

# Índice Remissivo

---

## Abel

- equação de, [12](#), [38](#)
- equação Generalizada de, [12](#)
- N. H., [13](#)

## Aplicação de Poincaré, [17](#)

- derivada da, [24](#)

## C. Pugh

- Problema de, [12](#)

## Ciclo Limite, [13](#)

- estável, [17](#)
- hiperbólico, [18](#), [46](#)
- instável, [18](#)
- multiplicidade de um, [17](#)
- semi-estável, [18](#)

## Equação

- de Abel, [12](#), [21](#), [38](#)
- de Abel Generalizada, [12](#)
- de Ricatti, [12](#), [36](#)

## Equação Afim, [12](#), [35](#)

## Hilbert

- 16<sup>o</sup> problema, [13](#)

## Ricatti, equação de, [12](#), [36](#)

## Solução Periódica, [12](#)

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)