

Laboratório Nacional de Computação Científica
Coordenação de Formação de Recursos Humanos

Solução Numérica de Equações
Diferenciais para Precificação de Opções

Julio Cezar Alves Thomaz

Petrópolis, Dezembro de 2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA
PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Julio Cezar Alves Thomaz

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DE
FORMAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS DO LABORATÓRIO NACIONAL
DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc

Prof. Marcelo Dutra Fragoso, Ph.D.

Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc

Prof. Saulo Pomponet Oliveira, Ph.D.

PETROPOLIS, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2005

THOMAZ, JULIO CEZAR ALVES

Solução Numérica de Equações Diferenciais para Precificação de Opções [Petropolis] 2005

IX, 107 p. 29,7 cm (MCT/LNCC, M.Sc., Modelagem Computacional, 2005)

Tese - Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC

1. Método de Elementos Finitos 2. Mercado de Opção 3. Precificação 4. Metodos Variacionais 5. Inequação Parabolica

I. MCT/LNCC II. Título (série)

*Aquele que duvida e não investiga
torna-se não só infeliz, mas também
injusto.*

Pascal

Agradecimentos

Primeiramente a Deus acima de todas as coisas, pois sem ele não somos nada.

Principalmente aos meus pais, que tanto colaboraram para todas as minhas vitórias. Sou muito grato pela paciência e amor em todas as horas de dificuldades.

Como também não posso deixar de agradecer, em especial, ao meu orientador, Prof. Dr. Abimael Fernando Dourado Loula, que sempre esteve presente, entre uma reunião e outra, para sanar minhas dúvidas, com ensinamentos, incentivos e paciência, transmitiu-me todo um apoio a este trabalho e à minha formação. Ao Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso, pela ajuda nos conceitos da teoria de base estocástica deste trabalho. Agradeço mais uma vez ao dois pela orientação, e por toda a confiança em mim depositada, e espero corresponder à altura.

Eu também agradeço os amigos de cursos pela ajuda através do tempo, em meio aos caos e confusão, estavam sempre a me dar ajuda e palavras amigas. Em especial aos amigos da 1A23, Anderson Fernandes P. dos Santos, Maicon Ribeiro Correa e Wanderson Rodrigues Bispo.

Aos professores em geral do LNCC, pelas atenções em sanar minhas dúvidas que surgiram no desenvolver dos cursos. Ao pessoal da secretaria meus agradecimentos pela paciência e por todo o esforço exigidos.

Finalmente, agradeço os seguintes amigos que uma hora ou outra me deram apoio e ajuda necessária, são eles: Carla Simone Ribeiro Machado, Carlos Alves Costa, Savano Souza Pereira, Simone Piobelli Sutter Carneiro.

A todos, e a muitos outros que não estão citados nestas páginas, o meu amplo agradecimento e perdão por não mencionar, por todo o apoio que me foi dado.

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro do CNPq, na concessão de bolsas.

Resumo da Tese apresentada à MCT/LNCC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA
PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Julio Cezar Alves Thomaz

Dezembro /2005

Orientador: Abimael Fernando Dourado Loula

Modelagem Computacional

A formulação do problema de precificação de opções, envolve uma parte significativa da teoria de processos estocásticos (incluindo equações diferenciais estocásticas). O objetivo desse trabalho é a análise numérica do modelo de Black e Scholes para precificação de opções Européias e Americanas. São apresentadas formulações de equações e inequações variacionais parabólicas associadas a esta modelagem. Após uma breve introdução de alguns conceitos sobre a teoria financeira, base econômica e estatística, apresenta-se o modelo de Black e Scholes para o prêmio de opções Européias e sua generalização para os contratos de opções Americanas. Também são modelados contratos de opções Européias e Americanas onde o investidor tem o direito de negociar dois ativos subjacentes, resultando em modelos bidimensionais também aproximados por métodos de elementos finitos. Por fim apresentam-se resultados numéricos de simulações para opções Européias e Americanas, em uma e duas dimensões.

Abstract of Thesis presented to MCT/LNCC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

NUMERICAL SOLUTION OF EQUATIONS FOR OPTIONS PRICING

Julio Cezar Alves Thomaz

December /2005

Advisor: Abimael Fernando Dourado Loula

Computational Modelling

Options pricing problems involve a great part of the theory of stochastic processes (including stochastic differential equations). The objective of this work is the numerical analysis of Black and Scholes model for the European and American options. Variational formulation are presented for parabolic equations and inequations involved in the model. After a brief introduction of some concepts on option pricing, we present the Black and Scholes model for the prize of European options and its extension to American options. European and American options in which investor has the right to negotiate two underlying assests, resulting in two dimensions models, are also solved by methods of finite elements. Numerical results corresponding to simulations of both European and American options in one and two dimensions, are presented.

Sumário

1	Introdução	1
2	Fundamentos em Finanças	7
2.1	Mercado Financeiro	7
2.1.1	Mercado de Capitais e suas Modalidades Operacionais	7
2.2	Mercado de Opções	9
2.2.1	Tipo e Estilo de Opção	11
2.2.2	O Prêmio	12
2.3	Variáveis Básicas da Precificação de Opção	14
2.4	Teoria Estocástica	19
2.4.1	Processo de Markov	19
2.4.2	Processos Estocásticos e Movimento Browniano	19
2.4.3	Lema de Itô	21
2.5	Princípio da Ausência de Arbitragem	23
2.6	Resultados Gerais na Precificação	25
3	Modelo de Black e Scholes	32
3.1	Hipóteses do Modelo	32
3.2	Modelo Unidimensional	33
3.2.1	Opções Européias	33
3.2.1.1	Condição de Contorno	36
3.2.1.2	Solução Analítica	37
3.2.1.3	Formulação Variacional	41
3.2.2	Opções Americanas	45
3.2.2.1	Teoria Básica de Modelagem em Opções Americanas	45
3.2.2.2	Problema de Fronteira Livre	51
3.2.2.3	Formulação Variacional	52
3.2.2.4	Existência e Unicidade de Solução	55
3.3	Modelo Bidimensional	56
3.3.1	Opções Européias	57
3.3.2	Opções Americanas	62
4	Métodos Numéricos	67
4.1	Problemas Unidimensionais	67
4.1.1	Opção Européia	67

4.1.1.1	Aproximação por Elementos Finitos	68
4.1.1.2	Aproximação no Tempo	70
4.1.1.3	Análise Numérica - Opções Europeias	71
4.1.2	Opções Americanas	71
4.1.2.1	Método de Elementos Finitos	73
4.1.2.2	Análise Numérica - Opções Americanas	74
4.2	Problemas Bidimensionais	74
4.2.1	Opções Europeias	74
4.2.2	Opções Americanas	76
4.3	Solução dos Problemas Algébricos	79
5	Resultados Numéricos	81
5.1	Estudo de Truncamento do Domínio	82
5.2	Estudos de Convergência	88
5.3	Validação do Modelo	92
5.4	Simulações de opções Europeias e Americanas	95
6	Conclusão	101
	Referências Bibliográficas	103
	Apêndices	105
A	Coefficiente de Correlação	105

Capítulo 1

Introdução

Os derivativos são os mais sofisticados instrumentos financeiros. Pode se também dizer que são os mais intrincados, misteriosos e até mesmo os mais arriscados. Os derivativos são tão antigos que não têm um inventor conhecido. O uso dos derivativos surgiu da necessidade de reduzir a incerteza. Derivativos são instrumentos financeiros sem valor próprio. Tanto que este tipo de contrato financeiro tem esse nome por derivarem seu valor de algum outro ativo, exatamente o motivo pelo qual servem para minimizar o risco de flutuações inesperadas de preços.

Os derivativos se apresentam em duas modalidades: como contratos a termo (contratos de entregas futuras a preços especificados) e como contratos de opções que fornecem a um lado a oportunidade de comprar ou vender para o outro lado a um preço prefixado. Por mais sofisticado que pareçam esse contratos financeiros provavelmente seu papel na administração do risco surgiu, há varios séculos, no campo. No século XII, os vendedores nas feiras medievais assinavam contratos, denominados *Lettres de faire*, prometendo a entrega futura dos itens vendidos. No século XVII, os senhores feudais Japoneses vendiam seu arroz para entrega futura em um mercado chamado *Cho-ai-mai* sob contratos que os protegiam dos mau tempo ou da guerra.

De acordo com P. L. Bernstein[1], no livro I da política Aristóteles descreveu uma opção como “*um dispositivo financeiro que envolve um princípio de aplicação universal*”. Grande parte da famosa febre das Tulipas da Holanda no século XVII envolveu a comercialização de opções de compra e venda de Tulipas, em vez das

próprias Tulipas. Em muitos aspectos, tais contratos de opções eram tão sofisticados quanto os atuais. Os revendedores de Tulipas compravam opções de compra quando queriam a garantia de poder aumentar seus estoques enquanto os preços estivessem subindo. Essas opções davam ao revendedor o direito, mas não a obrigação, de solicitar ao outro lado a entrega de Tulipas a um preço prefixado. Os plantadores que buscassem proteção contra preço em queda compravam opções de venda que lhes davam o direito de vender para o outro lado a um preço prefixado. O outro lado dessas opções, os vendedores, assumiam esse risco em troca dos prêmios que presumivelmente compensariam os vendedores de opções de compra pelo risco de aumento dos preços, e os vendedores de opções de venda pelo risco de queda dos preços.

Qual é o Prêmio justo para uma opção no Mercado de Capitais? Quanto vale um contrato de opção? Como decidir quanto pagar por uma opção de compra ou de venda, e por que esses valores mudam com o tempo? As respostas a estas perguntas se tornam mais claras se examinarmos um exemplo apresentado no livro de P. L. Bernstein[1] de uma opção amplamente negociada no mercado financeiro Americano envolvendo ações. Em 6 de junho de 1995, quando a ação da AT&T estava sendo vendida por \$ 50,00 dólares, uma opção à venda oferecia ao seu detentor o direito de comprar a ação da AT&T por \$ 50,25 dólares até 15 de outubro de 1995. A ação estava sendo transacionada por menos que o preço de exercício, isto é \$ 50,25. Se a ação permanece abaixo do preço de exercício durante o tempo de vencimento, esta opção não teria valor e seu detentor perderia todo o prêmio pago por ela. Contudo, aquele prêmio era tudo que o comprador da opção arriscava e tudo que o vendedor da opção poderia esperar ganhar. Se a ação da AT&T subisse além do preço de exercício, antes de 15 de outubro, em uma quantia superior ao prêmio da opção, esta geraria lucro. De fato, o lucro potencial da opção seria ilimitado.

A opção sobre a ação da AT&T estava sendo vendida por \$ 2,50 em 6 de junho de 1995. Mas por que o prêmio tinha o valor de \$ 2,50? Para responder essa pergunta podem ser utilizados modelos matemáticos, que levam em conta a incerteza e não apenas a intuição.

O primeiro esforço de aplicação da matemática, em vez da intuição, na avaliação

de uma opção foi realizada por Louis Bachelier ainda em 1900. Nas décadas de 1950 e 1960, alguns outros pesquisadores também realizaram diversas tentativas. O enigma foi enfim resolvido no final da década de 1960 por um estranha trinca. Todos os seus integrantes com menos de trinta anos. Fischer Black, Myron Scholes e Robert C. Merton, brilhantes inovadores em finanças além de suas contribuições específicas à teoria das opções.

A história Começa em 1965, quando Black fez amizade com um colega chamado Jack Treynor. Na época Black estudava economia nas horas vagas sob a orientação de Franco Modigliani, do MIT, futuro ganhador do prêmio nobel de economia. Treynor mostrou a Black seu antigo trabalho em um modelo para explicar como os mercados equilibram risco e retorno. Sendo Black um crente incondicional do livre mercado, decidiu aplicar as idéias de Treynor à avaliação de opções e, para ajudar nesse trabalho, aceitou o conselho de Traynor de aderir a um *workshop* de finanças no MIT. Três anos depois, Black continuava ajustando equações que se recusavam a fornecer uma resposta adequada. A análise de Treynor de como as flutuações do mercado influenciam a avaliação dos papéis individuais simplesmente não solucionava o problema. A essa altura, Black e Scholes começaram a trabalhar juntos. Quanto mais analisavam juntos as equações, mas claro ficava que a resposta não tinha nenhuma relação com o modelo de Treynor de risco e recompensa. No ano de 1970, Scholes contou a Merton as dificuldades que ele e Black estavam tendo. O problema despertou imediatamente o interesse de Merton. Em pouco tempo, ele resolveu o dilema dos colegas, mostrando que eles estavam no caminho certo por motivos que eles próprios haviam ignorado. O modelo matemático foi então concluído.

Apesar da aparência algébrica complexa, as idéias básicas por trás do modelo são fáceis de entender. O valor de uma opção depende de quatro elementos: tempo, preço, taxa de juros e volatilidade. Esses elementos aplicam-se tanto às opções de venda como às opções de compras. Dentre esses o mais decisivo é o quarto elemento: a volatilidade esperada do ativo subjacente. Como a ação da AT&T no exemplo citado, vendida a \$ 50,00 dólares, enquanto o detentor da opção tinha o direito de compra-la a \$ 50,25 em qualquer momento entre 6 de junho e 15 de outubro de 1995. A probabilidade de que o preço da ação da AT&T possa subir - ou cair - é

irrelevante. A única coisa que importa é até onde o preço da ação pode ir, e não a direção em que se move. A noção de que a direção da mudança de preço é irrelevante para a avaliação de uma opção é tão antiintuitiva que explica em parte a demora de Black e Scholes em alcançar a resposta que procuravam. Mas eles decifram o enigma devido à natureza assimétrica da própria opção: o potencial de perda do investidor limita-se ao prêmio, enquanto o potencial de lucro é ilimitado.

Se a ação da AT&T cair para 45, 40 ou mesmo 20 dólares durante a vigência da opção, o detentor da opção de compra não perderá mais de \$ 2,50. Entre \$ 50,25 e \$ 52,75, o detentor ganhará menos de \$ 2,50. Acima de \$ 52,75, o potencial de lucro é infinito, pelo menos em teoria. Com todas as variáveis incluídas, o modelo de Black-Scholes indica que a opção da AT&T valia \$ 2,50 em junho de 1995, porque os investidores esperavam que a ação da empresa variasse em uma extensão de cerca de 10%, ou cinco pontos, em cada direção durante os quatro meses de existência da opção. A volatilidade é sempre o fator determinante. Os negociantes de opções entendem tais diferenças. O que quer que faça uma ação se mover é o que importa, pois ações que tendem a cair com rapidez, também tendem a subir rapidamente. Os compradores de opções estão atrás de ações instáveis, os investidores que vendem opções gostam de ações estáveis.

Black e Scholes reuniram suas idéias sobre a avaliação das opções em um artigo enviado em outubro de 1970 ao *Journal of Political Economy*, uma prestigiosa revista publicada pela Universidade de Chicago. Os editores rejeitaram prontamente o artigo, alegando que Black e Scholes puseram nele finanças demais e economia de menos. *A Review of Economics and Statistics* de Harvard foi igualmente rápida em devolver o artigo. Nenhuma das publicações sequer se deu ao trabalho de pedir a um revisor que o examinasse. O artigo veio enfim a ser publicado na edição de maio-junho de 1973 do *Journal of Political Economy* [2], mas somente depois da recomendação de dois influentes professores da Universidade de Chicago. O artigo se revelou um dos mais notáveis trabalhos de pesquisas já publicados no campo da economia ou das finanças. Muitos trabalhos baseados na metodologia de Black e Scholes surgiram em seguida, entre os mais importantes destacamos os seguintes. Merton [3] estendeu o modelo de Black e Scholes para ações com pagamento de

dividendos, e mostrou que uma opção de compra Americana, onde a ação subjacente não paga dividendos, pode ser avaliada como se fosse uma opção de compra Européia, ou seja, o exercício antecipado nunca será ótimo. Cox & Ross [4] estenderam o modelo de Black e Scholes para ativos subjacentes que seguem outros processos estocásticos que não o Movimento Geométrico Browniano, como por exemplo, um processo de Poisson.

Ainda existia uma questão. Como avaliar uma opção Americana que pode ser exercida antecipadamente? Nenhuma solução analítica foi encontrada. Então métodos numéricos ou de aproximação deveriam ser utilizados. Brennan & Schwartz [5] aplicaram métodos de diferenças finitas para resolver a equação diferencial parcial para uma opção Americana. Diferentemente, Cox, Ross & Rubinstein [6] utilizaram um processo discreto no tempo e binomial no espaço para aproximar um processo contínuo e calcular o preço de uma opção Americana. Duffie [7] apresenta um algoritmo de diferenças finitas de Crank-Nicholson, para o cálculo de debêntures (*bonds*) e opções sobre estas debêntures. Hull e White [8] sugerem alterações no esquema de diferenças finitas explícito, similares ao apresentado por Courtadon [9], de forma a assegurar que opções possuam probabilidades positivas, em uma alusão ao modelo trinomial. Segundo Hull [10], os métodos de diferenças finitas são muito usados na avaliação de derivativos exóticos, opções sobre debêntures e taxas de juros, opções Européias e Americanas. Porém, eles se tornam muito complicados e “caros” computacionalmente com o aumento de variáveis que determinam o valor da opção, pois a malha torna-se multidimensional.

No Brasil encontram-se diversos trabalhos sobre o assunto de precificação de opções. Não se pode deixar de citar a tese de mestrado de Oliveira[11] que propõe e analisa métodos numéricos aplicados a problemas de precificação de opções. Com uma abordagem essencialmente matemática do tema, embora os resultados procurados tenham como origem dificuldades da prática financeira.

Mais recentemente a comunidade acadêmica e o mercado têm-se preocupado com o tempo de processamento de diversos métodos numéricos usados em finanças. É necessário que esses métodos sejam rápidos e precisos. É claro que nem sempre é possível encontrar métodos numéricos que possuam essas características. Trabalhos

atuais na literatura são Marozzi, Choi e Chen [12] que tem como foco examinar a aplicação de funções de base radiais ou *Radial Basis Functions* (RBF) para o problema de precificação de opções que dão direito a negociação de um ou dois ativos subjacentes, e Song Wang [13] em 2004, onde o método de volumes finitos é aplicado ao problema de avaliação dos contratos de opções.

No presente trabalho, é apresentado o modelo de Black e Sholes que serve essencialmente para avaliação de opções Europeias e suas generalizações para opções Americanas, que são modeladas por uma inequação parabólica. São estudados os contratos de opções que dão direito de compra ou de venda de um ou dois ativos utilizando soluções numéricas. Vale ressaltar a abordagem essencialmente de modelagem computacional. Porém, não deixa de haver uma preocupação em buscar resultados aplicáveis ao problemas de interesse essencialmente econômico. Assim, o trabalho enfoca especialmente a aplicação de métodos numéricos a problemas de precificação de contratos de opções de estilo Europeu ou Americano.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2, são apresentados os conceitos de finanças da teoria de economia e alguns conceitos da teoria de estatística, de forma a estabelecer definições que sejam relevantes no contexto da modelagem financeira. A formulação matemática do modelo de Black e Sholes é apresentada no capítulo 3, juntamente com a formulação de suas generalizações para contrato de opções que dão direito a negociação de dois ativos subjacentes. Já o capítulo 4 contempla a construção e obtenção de soluções aproximadas. Por fim, os capítulos 5 e 6, apresentam resultados numéricos e conclusão, respectivamente.

Capítulo 2

Fundamentos em Finanças

A base teórica do problema de modelagem abordado nesse trabalho provém da teoria de finanças e da teoria estatística. Desta forma, antes de iniciar o estudo da modelagem do problema de precificação de opções, faz-se uma rápida abordagem de alguns conceitos da teoria de finanças e da teoria estatística.

2.1 Mercado Financeiro

Entende-se por mercado financeiro o conjunto de instituições financeiras que são responsáveis pela captação de poupança e concessão de crédito. Desta forma, pode-se afirmar que o Mercado Financeiro transfere as poupanças das unidades econômicas superavitárias para as deficitárias. Essas transferências dão origem ao que o Mercado Financeiro denomina de *spread*, que é a diferença entre a taxa de captação dos recursos e a taxa de empréstimo desses recursos. Em suma, o *spread* é a remuneração do intermediário financeiro pelo pagamento ao serviço prestado.

O mercado financeiro se subdivide em quatro mercados: **Crédito**, **Cambial**, **Monetário** e **Capitais**, cada qual com características próprias. Apenas o último aqui será abordado.

2.1.1 Mercado de Capitais e suas Modalidades Operacionais

O mercado de capitais é o conjunto de operações de médio prazo (1 a 3 anos), longo (acima de 3 anos) ou indeterminado (permanente). Os recursos destinam-se em

geral, ao financiamento de capital fixo das empresas, tendo como intermediários as instituições financeiras não bancárias (Corretoras, Bancos de Investimentos, entre outros). A médio e a longo prazo, financia capital de giro para as empresas e habitação para pessoa física.

No mercado de capitais brasileiro, as bolsas de valores operam com as seguintes modalidades operacionais: **Mercado à Vista** e os **Mercados de Derivativos** (*Mercado Futuro, Mercado a Termo e Mercado de Opções*). Os derivativos são utilizados para proteger os produtores e os investidores de oscilações indesejáveis no preço de mercadorias no mercado à vista. Por exemplo, preços de mercadorias agrícolas ou de ativos financeiros (moeda, taxa de juros, ações, índice de bolsa, etc) que se movem por vários motivos: políticos, econômicos, climáticos, etc. Assim, uma das funções do mercado de derivativo é permitir ao produtor, ao industrial, ao comerciante, ao importador ou exportador negociar no presente a compra ou venda de mercadorias ou ativos financeiros em uma data futura. Essa negociação implica em contratos a termo, futuro e opções, que são modalidades operacionais dos derivativos, padronizados em datas de liquidação (exercício), na quantidade negociada ou na qualidade do produto negociado. As normatizações são de responsabilidade das bolsas que negociam os derivativos e das instituições reguladoras do mercado que também são responsáveis pela regulamentação das margens de garantias a serem depositadas pelos compradores e vendedores descobertos. Nos mercados de derivativos, as intervenções em uma operação são feitas pelo *Produtor, Hedger e Especulador*.

O **produtor** agrícola ao vender no presente a sua safra para data futura quer garantir no presente o preço da produção futura. Este preço irá cobrir os seus custos e despesas de produção, incluindo sua margem de lucro. Desta forma, o produtor garante um preço mínimo. Se no futuro o preço da mercadoria for maior que o preço acertado no contrato vendido pelo produtor no passado, este deixa de ganhar, mas não perde. Quando vendeu no passado, se protegeu contra as oscilações indesejáveis de preço no mercado.

O “**hedger**” quer garantir no presente, o preço no futuro de um produto que comprou do produtor. Ao comprar um contrato futuro de uma mercadoria agrícola o hedger também estará se protegendo contra a alta de preços da mercadoria que

irá necessitar no futuro.

O **especulador** não deseja possuir o produto comprado relativo ao contrato futuro, ele deseja apenas tirar proveito das oscilações dos preços. Desta forma, o produtor ou o hedger poderão transferir os seus riscos para o especulador.

É lógico que quem vende a futuro uma mercadoria agrícola ou um ativo financeiro acredita que os preços lhe satisfazem e que o preço da mercadoria ou do ativo financeiro no futuro estará menor que a venda a futuro realizada no momento presente. O comprador a futuro espera o contrário, isto é, que os preços no momento presente são menores que os preços da mercadoria ou do ativo financeiro no futuro.

As operações com derivativos são realizadas nas Bolsas de Mercadorias, onde são negociados basicamente contratos com derivativos de produtos agrícolas e/ou minerais (soja, café, gado, açúcar, prata, ouro), além dos ativos financeiros como taxa de juros, dólar americano, moedas em geral, e outros. Já nas Bolsas de Valores são negociados não só derivativos sobre as ações como também sobre os índices das bolsas. As operações com os contratos de derivativos são realizadas nas modalidades de contratos a termo, contratos futuros e contratos de opções que são válidos para as negociações com mercadorias e ativos financeiros.

2.2 Mercado de Opções

Depois deste breve apanhado sobre o mercado financeiro brasileiro, comenta-se sobre o mercado de opções, para compreender melhor os fenômenos que regem a modelagem do prêmio da opção. O mercado de opções é aonde não se negociam os ativos subjacentes (ações) e sim os direitos sobre estes. São direitos de uma parte comprar (ou vender) à outra, até determinada data, uma quantidade de ativos a um preço predeterminado. Neste mercado, podem ser negociadas opções de compra e opções de venda de ativos subjacente (por exemplo, ações). Segundo Hull [10], definem-se:

1. **Opções de Compra de Ações:** Nas opções de compra, o *Titular* (comprador da opção), tem o direito, se desejar, de comprar do *Lançador* (vendedor de

opções), exigindo que este lhe venda um lote padrão de determinada ação, a um preço por ação previamente estipulado até uma data prefixada.

2. **Opções de Venda de Ações:** Nas opções de venda, o *Titular* (vendedor da opção) tem o direito, se desejar, de vender ao *Lançador* (comprador da opção), exigindo que este lhe compre, um lote padrão de determinada ação, a um preço por ação previamente estipulado até uma data prefixada.

Verifica-se que o comprador de opções, tem os direitos, e paga ao vendedor de opções (*Lançador*), que tem as obrigações, o valor pago por este direito, se denomina de “**Prêmio**”. O máximo que o Titular pode perder é o prêmio pago, porque se o mercado não lhe for favorável, este não exerce seu direito e perde o prêmio.

Se o Lançador está coberto¹ e exercido² não tem o que temer, porque este tem as ações para entregar ao Titular. No entanto, o Lançador que está descoberto tem que depositar duas vezes o valor do prêmio do dia da operação ou 10% do prêmio à vista da ação (o que for maior), como garantia da operação. Se for exercido, terá que comprar as ações no mercado à vista, para honrar seu compromisso frente ao Titular.

Segundo Lemgruber [14] no começo do século XX, teve início a *Associação dos Corretores de Opções de Compra e Venda* com o objetivo de promover uma reunião entre compradores e vendedores de opções. Na Associação, se algum corretor necessitasse de uma opção entrava em contato com alguma corretora associada que, logo em seguida, tentaria encontrar dentre os seus associados algum que estivesse pronto a lançar uma opção do tipo procurada. Não existindo nenhum vendedor para o tipo de opção desejada, a própria corretora lançaria uma opção igual à procurada pelo associado, cobrando junto a este um preço apropriado. Este tipo de negociação, fora de alcance das Bolsas de Valores é conhecido como Mercado de Balcão (*over the counter market*). Porém, a associação não foi capaz de contornar o problema de criar um mecanismo para garantir que o vendedor de uma opção honrasse sua parte no contrato caso a opção viesse a ser exercida.

¹Margem de garantia depositada na CVM.

²Exercício da opção, isto é, venda do ativo subjacente em uma determinada data.

A *Chicago Board of Trade* criou em abril de 1973 uma nova bolsa, a *Chicago Board Options Exchange*, para a negociação de opções de ações. A partir desta época, os mercados de opções tiveram sua popularidade aumentada e novas bolsas de negociação de opções foram criadas. Nos anos 80, desenvolveram-se os mercados de opções de taxa de câmbio, de índices de ações e de contratos futuros.

No Brasil, a principal bolsa que negocia opções é a Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F), localizada em São Paulo, que atualmente negocia opções sobre o ouro disponível, café e outros. Em segundo, vem a Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) que negocia opções sobre determinadas ações.

2.2.1 Tipo e Estilo de Opção

Como foi mencionado anteriormente existem dois tipos de opções: de **Compra** (*Call*) e de **Venda** (*Put*). As opções podem ser de estilo **Americano**, **Europeu** e outros que não são tratados neste trabalho. A denominação de opção Americana ou Européia nada tem a ver com a localização geográfica, o fato é que as opções Americanas podem ser exercidas a qualquer hora, até a data de vencimento, enquanto que as opções Européias, só podem ser exercidas na data de vencimento. A maior parte das opções negociadas em bolsas são do estilo Americano. Do ponto de vista matemático as opções Européias são em geral mais fáceis de serem analisadas do que as Americanas, como será visto a seguir.

Opções Européias

São contratos de opções que contêm uma cláusula para efeito de prazo de exercício do direito do comprador, onde tal direito somente poderá ser realizado na data de vencimento ou expiração do contrato de opção. Como exemplos de opções do tipo Europeu tem-se os antigos contratos de taxas de câmbio de compra e de venda sobre taxa de câmbio de Reais por Dólar Comercial, os de Reais por dólar flutuante e os de venda sobre Depósitos Interfinanceiros (DI) de um dia, todos negociados na BM&F.

Opções Americanas

São aqueles contratos de opções em que o comprador pode exercer o seu direito a qualquer momento, desde a data em que foi lançada a opção até a sua data de vencimento. Este tipo de opção é mais utilizado pelas bolsas que negociam contratos de opções. Pode-se citar como exemplos do tipo Americano, os contratos de Opções de Venda sobre Futuro Cambial de Café Arábica, da BM&F, cujas opções poderão ser exercidas pelos titulares a partir do primeiro dia útil seguinte à data de abertura da posição até a data de vencimento.

Quando dividendos são esperados não se pode afirmar que uma opção de compra Americana não será exercida antecipadamente. Às vezes, é ideal exercer uma opção de compra Americana imediatamente antes de uma data ex-dividendo³, pois o dividendo fará com que o preço da ação seja reduzido, tornando a opção menos atrativa. Assim pode-se dizer que nunca é ideal exercer uma opção de compra em outros momentos. Caso o dividendo seja suficientemente grande e a opção de compra esteja *dentro do preço*, poderá ser interessante abandonar o valor-tempo remanescente da opção para evitar os efeitos adversos do dividendo sobre o preço da ação.

Na prática, as opções de compra costumam ser exercidas antecipadamente, imediatamente antes do término da data ex-dividendo.

2.2.2 O Prêmio

Um dos pontos mais importantes relativo às opções, é como seriam cotadas numa situação de equilíbrio com o preço e as características do ativo subjacente. As opções, como outro ativo qualquer, serão cotadas de acordo com as forças de oferta e demanda para a referida opção no mercado. Entretanto, ao estar o prêmio de uma opção diretamente relacionado com o preço do ativo subjacente, é possível que a opção seja cotada como uma função do preço do ativo subjacente. O valor da opção, prêmio, é a quantia paga pelo titular que adquiriu o direito de exercer a opção no prazo de exercício.

Os termos *preço da opção* ou *prêmio* são intercambiáveis. O preço é expresso de

³Dia posterior ao pagamento de dividendo de uma ação.

várias formas, sendo que a principal tem sido como um percentual por unidade do ativo subjacente, ou como um valor em centavos, ou outra unidade de divisa por unidade do ativo subjacente da opção.

O comprador de uma opção está exposto a muito menos risco de preço do que o vendedor ou lançador da opção. O risco do comprador da opção está limitado ao prêmio pago no ato da compra, ao passo que o risco do vendedor é proporcional ao potencial movimento de preço do ativo subjacente da opção. Isto é diferente da negociação de futuros onde os riscos do comprador e do vendedor são simétricos.

Do ponto de vista teórico, no preço de uma opção ou prêmio estão embutidos dois elementos: o valor intrínseco (I) e o valor temporal (T).

Valor Intrínseco

É a quantia de uma opção que geralmente está *dentro do preço* (*in the money*). Uma opção está *dentro do preço* se existe algum lucro que o tomador ou comprador pode realizar imediatamente ao exercer a opção do tipo Americano. O lucro é derivado da diferença entre o preço de mercado do ativo subjacente da opção (S) e o preço de exercício da opção (E).

Vale dizer que uma opção de compra (*Call*) tem valor intrínseco quando o preço de exercício é menor que o preço do ativo subjacente ($E < S$), enquanto que, para opções de venda (*Put*) quando o preço de exercício for maior que o preço do ativo subjacente ($E > S$). Portanto, a opção tem valor intrínseco quando houver lucro em qualquer uma das referidas situações. Pode-se observar que se o preço de exercício de uma opção de compra (ou de venda) for igual ao preço de mercado, o valor intrínseco será zero ($E = S$). Isto ocorre quando a opção alcança o nível *at the money*, que é o mesmo que uma opção sem valor. Uma opção geralmente será vendida pelo menos ao seu valor intrínseco. Como pode ser observado na Tabela 2, verifica-se de forma resumida a classificação da situação da opção segundo os valores do preço do ativo (S) e o preço de exercício (E).

Por conseguinte o preço de venda, ou valor total, de uma opção geralmente excede seu valor intrínseco. Isto é verdadeiro para opções do tipo Americano porque o valor temporal é sempre mantido positivo para cima até a data de expiração. Entretanto,

isto é duvidoso para opções Europeias, visto que o seu valor pode não aumentar ao aproximar-se o tempo de expiração, dado que ele somente pode ser exercido na data de vencimento. Isto é, uma opção Europeia pode estar *in the money* antes da expiração. Contudo, próximo da data de expiração a opção poderá estar *out of the money*.

Tabela 1 - Terminologia básica de opções

Situação	Opção de compra	Opção de venda
Dentro do Preço (<i>In the money</i>)	$(S) > (E)$	$(S) < (E)$
Sem Valor (<i>At the money</i>)	$(S) = (E)$	$(S) = (E)$
Fora do Preço (<i>Out of the money</i>)	$(S) < (E)$	$(S) > (E)$

Nota: Preço do Ativo (S) e preço de exercício (E)

Fonte: Bolsa de Mercadorias & Futuros - BM&F.

2.3 Variáveis Básicas da Precificação de Opção

Antes de iniciar a modelagem matemática do problema de precificação de opções, ainda se faz necessário estudar a influência de algumas variáveis sobre o valor dos contratos de opções.

O preço das opções depende de duas variáveis: do **preço do ativo subjacente** (*Underlying Asset Price*) e do **preço de exercício** (*Strike ou Exercise price*). Porém, essas duas variáveis isoladamente não são suficientes para determinar o prêmio justo a ser pago por uma opção. Como saber qual a maneira mais precisa de determinar o preço de uma opção, usualmente denominados de prêmio? O processo de avaliação poderá ser similar, respeitando apenas ao tipo (se opção de Compra ou se opção de Venda), e ainda, sobre qual estilo a mesma está referenciada. De qualquer forma, para ambos os tipos, serão necessárias “*informações*” que a priori o investidor tenha conhecimento ou, em função de sua estratégia, poderão ser estimadas.

As variáveis a seguir podem ser encontradas em qualquer modelo de avaliação do valor de uma opção. Seguindo o estudo apresentado em Hull [15], faz-se para cada variável considerações sobre sua influência no prêmio, dado que as demais variáveis

do modelo permanecem fixas.

1. **Preço do Ativo Subjacente (S)** - *Underlying Asset Price*: é o preço do ativo sobre o qual a opção de compra (ou de venda) é referenciada em dado momento.

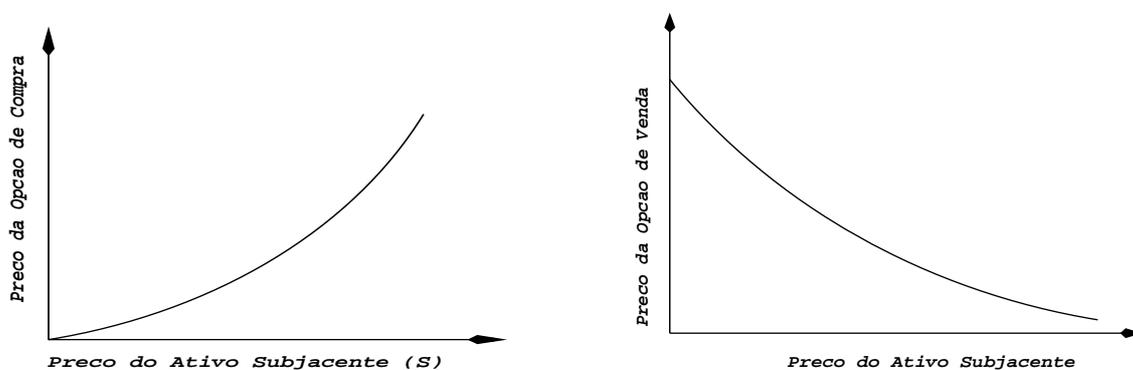


FIGURA 2.1: Variação do Prêmio dado variação no Preço do Ativo Subjacente

A figura(2.1) demonstra intuitivamente o que ocorre na prática do mercado, pois para valores altos no preço do ativo subjacente as opções de compra tendem a ficar mais valorizadas, já as opções de venda tendem a uma desvalorização, dado que o preço de exercício (E) é mantido fixo nos contratos de opções.

2. **Preço do Exercício (E)** - *Strike* ou *Exercise Price*: é o preço pelo qual o comprador da opção pode exercê-la.

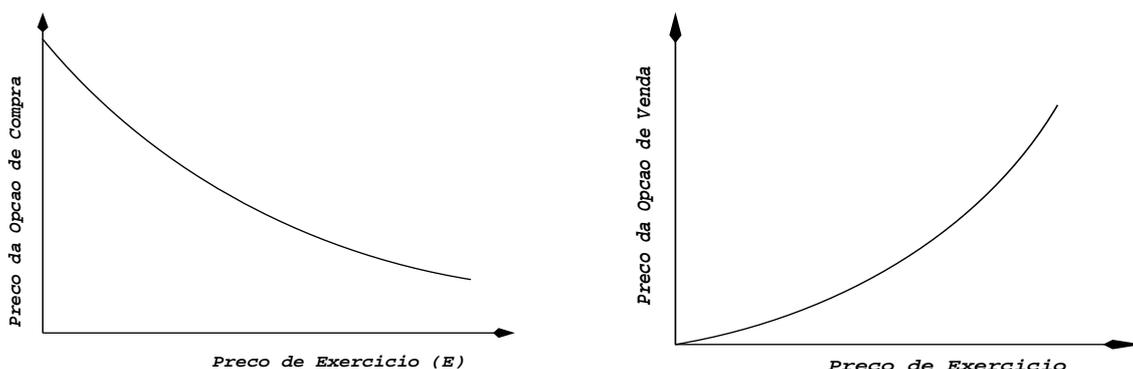


FIGURA 2.2: Variação do Prêmio dado variação no Preço do Exercício

Se a opção for exercida em alguma época no futuro, o retorno de uma opção de compra será a quantidade que o valor do ativo subjacente excede o preço de exercício. As opções de compra, portanto, têm mais valor quando aumenta o preço do ativo subjacente, e menos valor quando aumenta o preço de exercício. Para uma

opção de venda, o retorno do exercício é quanto o preço de exercício excede o preço do ativo subjacente. Então, as opções de venda comportam-se diferentemente das opções de compra quando aumenta o preço do ativo subjacente ou quando aumenta o preço de exercício, como é apresentado na figura(2.2).

3. Tempo até o Vencimento (T) - *Tempo até o Exercício* ou *time to Expiration*: é a data de vencimento da opção, ou seja, a data até a qual o comprador pode exercer seu direito de comprar (ou vender) o ativo subjacente da opção, de acordo com o preço estabelecido (preço de exercício). Evidentemente, quanto mais distante estiver a data de vencimento da opção, maior será o direito concedido e, conseqüentemente, maiores possibilidades existem de que a opção ofereça condições para o exercício.

Tanto as opções de compra como as opções de venda Americanas tornam-se mais valiosas conforme aumenta o prazo para o vencimento. Para se observar este fato, supõem-se que duas opções diferem entre si apenas no que se refere à data de vencimento. O titular de uma opção de longa duração tem as mesmas oportunidades de exercício que o titular de uma opção de curta duração - e outras mais. A opção de longa duração, por conseguinte, deve sempre valer, pelo menos, tanto quanto a opção de curta duração, uma ilustração desta observação é apresentado na figura(2.3).

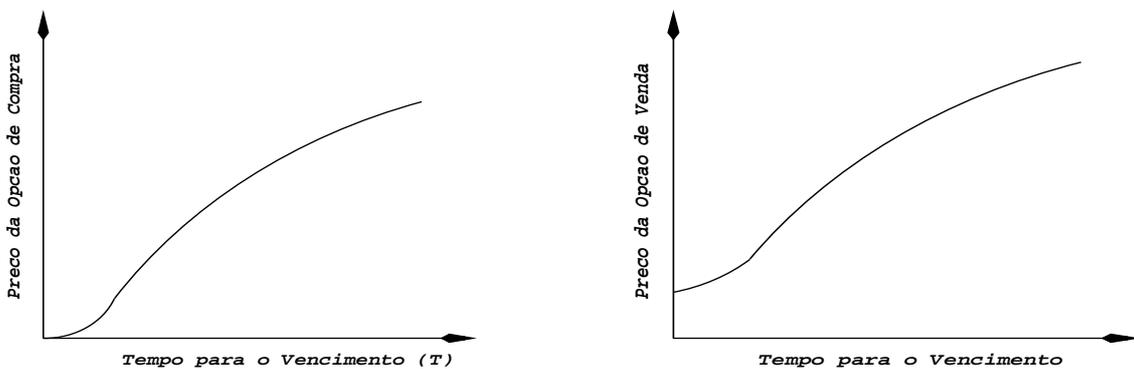


FIGURA 2.3: Variação do Prêmio dado variação do Tempo até o Vencimento

Observa-se que as opções de compra e venda Européias não se tornam necessariamente mais valiosas à medida que aumenta o tempo para o seu vencimento. Isso porque não é verdade que o titular de uma opção Européia de longa duração tenha as mesma oportunidades de exercício que o titular de uma de curta duração. O

titular de uma opção Européia de longa duração só pode exercê-la no vencimento. Exemplificando: duas opções Européias de compra de uma ação, uma com a data de vencimento em 1 mês e a outra em 2 meses. Supondo que um dividendo muito grande seja esperado em 6 semanas e que ele cause uma queda no preço da ação, é provável que isso faça com que a opção de curta duração tenha um valor maior do que a opção de longa duração

4. **Taxas de Juros (r) - Interest Rates:** influem na determinação do preço a ser pago (prêmio) pela aquisição da opção. O impacto da taxa de juros no preço das opções é ponto de grandes discussões. Existem bens muito sensíveis às variações das taxas de juros (por exemplo ações), de tal forma, aumentos nas taxas provocam uma queda no preço de mercado dos ativos subjacentes e vice-versa. O que se pode dizer é que quanto maior o patamar das taxas de juros, maior será o valor (prêmio) de uma opção de compra e menor será o de uma opção de venda.

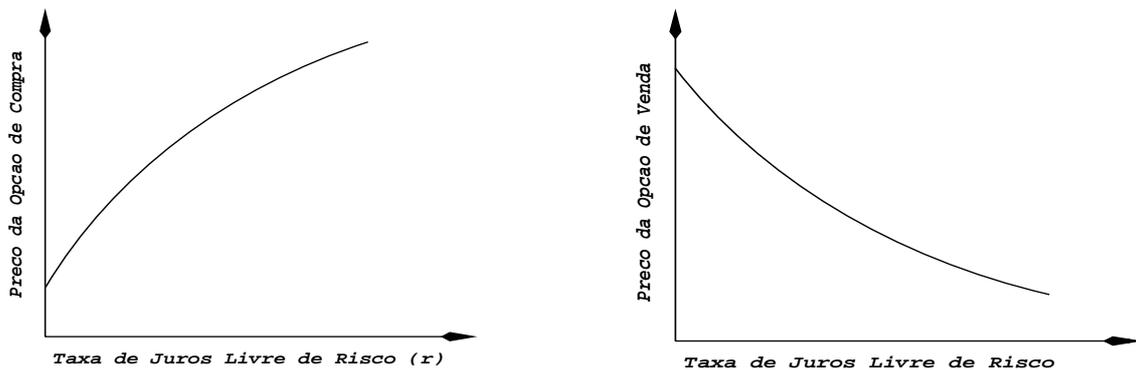


FIGURA 2.4: Variação do Prêmio dado variação do Taxas de Juros

A taxa de juros livre de risco afeta o preço de uma opção de maneira menos clara. Com a expansão da taxa de juros na economia, tende a aumentar a taxa de crescimento esperada para o preço do ativo subjacente. Todavia, diminui o valor atual de quaisquer fluxos de caixa a serem recebidos pelo titular da opção no futuro. Esses dois efeitos tendem a diminuir o valor de uma opção de venda. Logo, o preço de uma opção de venda recua à medida que se eleva a taxa de juros livre de risco. No caso das opções de compra, o primeiro efeito tende a aumentar seu preço e o segundo, a diminui-lo. O primeiro efeito prevalece sobre o segundo, isto é, o preço das opções de compra sempre aumentam com a taxa de juros livre de risco. Essas

teorias pressupõem mudanças em outras variáveis. Na prática, quando crescem as taxas de juros diminuem os preços das opções de venda e aumentam os preços das opções de compra, como pode ser visto na figura(2.4).

5. **Volatilidade (σ^2) - *Volatility*:** Os mercados de opções, como os mercados futuros, jogam com a incerteza em relação ao nível de preço de mercado do ativo subjacente para uma determinada data futura. Esta incerteza é medida pelo grau de volatilidade do preço de mercado. Em outras palavras, é o movimento que sofre o preço do ativo subjacente com o passar do tempo. Quanto maior a expectativa de grandes movimentos no preço, maior a probabilidade da opção de ser exercida obtendo-se um ganho e, portanto, mais valorizada estará esta opção, seja de compra ou de venda. Afinal, alta volatilidade não pressupõe variação apenas numa direção.

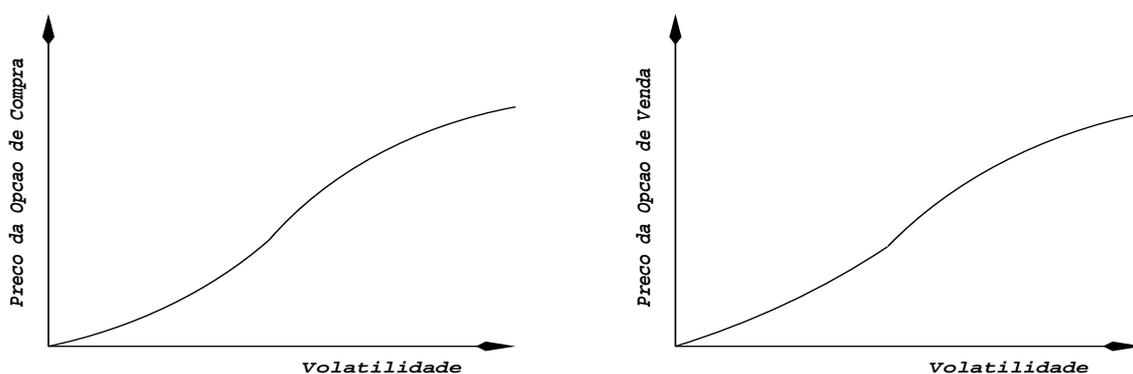


FIGURA 2.5: Variação do Prêmio dado variação da Volatilidade

Em geral, a volatilidade do preço de um ativo subjacente é a medida da incerteza quanto às oscilações futuras em seu preço. Quanto maior a volatilidade, maior a possibilidade do ativo subjacente (ação) ter um desempenho tanto bom quanto ruim. Para o detentor de um ativo subjacente, as duas coisas tendem a se compensar. O mesmo não é válido para o titular de uma opção de compra ou de venda. O primeiro beneficia-se com elevações de preço, mas terá risco limitado se o preço cair, já que o máximo que poderá perder será o prêmio. O segundo beneficia-se com quedas de preço, mas terá risco limitado se ele subir. Assim, os valores das opções de compra e de venda crescem à medida que aumenta a volatilidade.

2.4 Teoria Estocástica

Dada a necessidade de teoria estatística na modelagem matemática do problema de precificação de opções, serão apresentados alguns conceitos de probabilidade e de processo estocástico relevantes no contexto da modelagem financeira.

2.4.1 Processo de Markov

Processo de Markov é um tipo de processo estocástico onde somente o valor presente de uma variável é relevante para prever o futuro. A vantagem do processo de Markov é que ele simplifica a análise dos processos estocásticos.

Geralmente os preços das ações são estimados usando o Processo de Markov. Por exemplo, suponha que o preço de uma ação da IBM hoje custe \$ 100,00. Se o preço desta ação segue um processo de Markov, nossas previsões sobre a flutuação futura dos preços desta ação não devem levar em conta a flutuação ocorrida semana passada, mês passado ou no ano passado. A única informação importante que temos para avaliar esta ação é seu preço atual, ou seja, \$100,00. Normalmente os preços futuros são expressos em termos de distribuições de probabilidades. A propriedade do processo de Markov nos diz que a distribuição de probabilidades dos preços em qualquer tempo no futuro depende única e exclusivamente do preço atual da ação.

A propriedade do processo de Markov para os preços das ações é consistente com a *Forma Fraca da Eficiência de Mercado*, que diz que o preço atual de uma ação já reflete plenamente todas as informações que estão contidas na sequência histórica do preço. Daí segue que não existe nenhum benefício em se prever as movimentações futuras no preço das ações baseadas em séries históricas dos preços, ou seja, admite-se como válido o processo de Markov.

2.4.2 Processos Estocásticos e Movimento Browniano

Um processo estocástico é uma variável que evolui no decorrer do tempo de forma incerta ou parcialmente aleatória. O preço de fechamento de uma ação é um exemplo de processo estocástico que flutua aleatoriamente, como pode ser visto na Fig. 2.6, que apresenta a história de valor diário do fechamento da ação BANESPA PN de

11/7/2003 a 15/12/2004. Verifica-se que ao longo do tempo, esta ação apresenta uma taxa de retorno esperada positiva, compensando os acionistas que investiram nesta ação. Os processos estocásticos podem ser contínuos ou discretos, dependendo da variável tempo ser considerada contínua ou discreta, respectivamente.

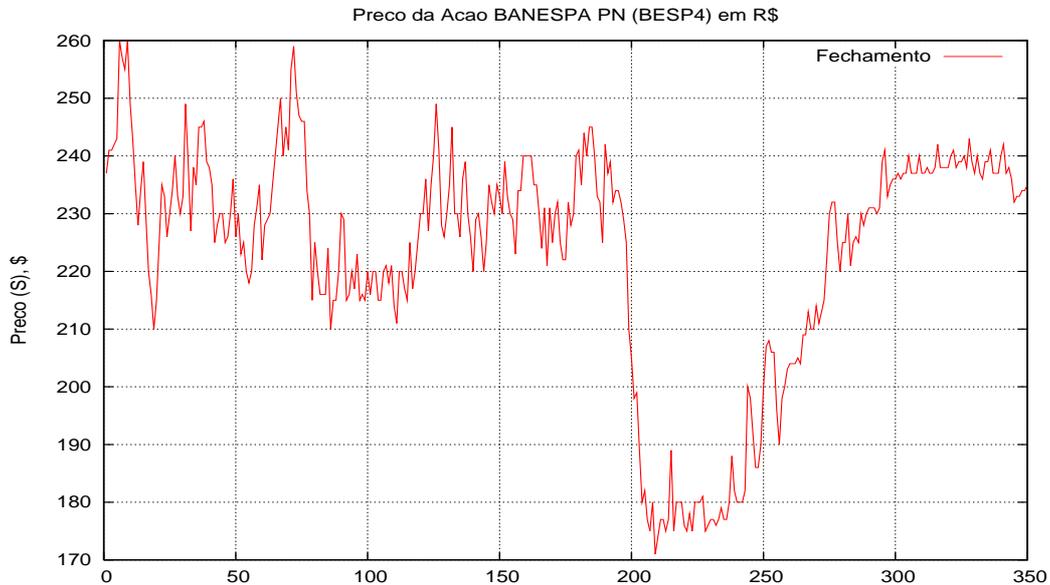


FIGURA 2.6: Valor diário dos fechamentos da ação BANESPA PN (11/7/2003 a 15/12/2004)

Um movimento Browniano, ou processo de Wiener, é um processo estocástico contínuo que apresenta três importantes propriedades:

1. É um processo de Markov, ou seja, a distribuição de probabilidades dos valores futuros do processo dependem somente do seu valor atual;
2. Possui incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidade da variação do processo em um intervalo de tempo, é independente de qualquer outro intervalo de tempo (que não sobreponha o primeiro);
3. As variações de um processo, em um intervalo de tempo finito, seguem uma distribuição Normal, com variância que cresce linearmente com o intervalo de tempo.

Dado $z(t)$, um processo de Wiener Δz , uma variação de $z(t)$, e Δt um intervalo de tempo qualquer, tem-se:

1. $\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$, onde ε_t é uma variável aleatória que segue uma distribuição Normal padrão, com média 0 (zero) e desvio padrão 1 (um);
2. A variável aleatória ε_t não é correlacionada serialmente, ou seja, $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$ para $t \neq 0$.

Quando o intervalo de tempo Δt torna-se infinitesimalmente pequeno, pode-se representar a variação de um processo de Wiener, dz , em tempo contínuo como:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}. \quad (2.1)$$

Um movimento Browniano com tendência é uma extensão do processo acima, sendo representado pela seguinte equação estocástica:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz, \quad (2.2)$$

onde α é o parâmetro de tendência (ou crescimento), σ é o parâmetro de variância, x é o processo estocástico, como, por exemplo, o preço de uma ação. Para qualquer intervalo de tempo Δt , a variação em x , possui distribuição Normal, com esperança $E(\Delta x) = \alpha \Delta t$, e a variância $Var(\Delta x) = \sigma^2 \Delta t$. Um Movimento Geométrico Browniano com tendência é definido pela equação abaixo:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz. \quad (2.3)$$

2.4.3 Lema de Itô

Um processo estocástico contínuo $x(t)$, é chamado de processo de Itô, quando é representado pela equação:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (2.4)$$

onde $a(x, t)$ é função não-aleatória de tendência, $b(x, t)$ é a função não-aleatória da variância, $z(t)$ é um processo de Wiener, e t é o tempo. Observa-se que o Movimento Geométrico Browniano é um caso especial do processo de Itô, onde $a(x, t) = \alpha x$ e $b(x, t) = \sigma x$.

Dada uma função $F(x, t)$, diferenciável no mínimo duas vezes em x , e uma vez em t , o lema de Itô mostra que a mesma segue o seguinte processo:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} dz. \quad (2.5)$$

Este lema é a base de fórmulas e métodos de precificação de derivativos, pois $F(x, t)$ pode ser o preço de um contrato futuro, ou o preço de uma opção de compra (ou venda).

Enquanto parece razoável que o preço de uma ação siga um processo de Markov, e tenha incrementos independentes, não é razoável admitir que as variações do preço sigam uma distribuição Normal, afinal o preço de uma ação não pode ser inferior a zero. Assim, pode-se supor que os preços de uma ação sigam uma distribuição Lognormal, ou seja, as variações no logaritmo do preço seguem uma distribuição Normal.

Desta forma, sendo S o processo Geométrico Browniano que descreve o preço da ação, e $F(S)$ igual a $\log S$ (log ou ln representam neste trabalho o logaritmo natural), tem-se, pelo lema de Itô:

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dz, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = \frac{-1}{S^2}, \quad (2.7)$$

$$dF = \left[0 + \alpha S \frac{1}{S} + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \frac{-1}{S^2} \right] dt + \sigma S \frac{1}{S} dz. \quad (2.8)$$

Assim, baseado nos resultados obtidos e na análise do movimento Browniano, tem-se que dentro do intervalo de tempo T , a variação em $\log S$ segue uma distribuição Normal com média $\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$, e a variância $\sigma^2 T$.

A versão discreta da equação estocástica pode ser escrita da seguinte forma:

$$\log\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t, \quad (2.9)$$

ou

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{[(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t]}. \quad (2.10)$$

Pois Δz é um processo de Wiener ($\Delta z = \varepsilon_t\sqrt{\Delta t}$), ε_t é uma variável aleatória que segue uma distribuição Normal padrão,

$$\Delta F = F_{t+\Delta t} - F_t = \log S_{t+\Delta t} - \log S_t = \log\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)$$

e ΔF , Δt e Δz , são as versões discretas de dF , dt e dz , respectivamente.

Em um ambiente neutro ao risco (ou risco-neutro), onde a taxa de retorno de todos os ativos é igual a taxa de juros livre de riscos, a tendência α é igual à taxa de juros livre de riscos r .

2.5 Princípio da Ausência de Arbitragem

Este princípio é fundamental no desenvolvimento de fórmulas para avaliação de derivativos, como será visto neste trabalho. Antes de discutir sobre a ausência de arbitragem, tem-se a seguinte pergunta. *O que é arbitragem?* Arbitragem é nada mais nada menos que a obtenção de lucros com as diferenças de preço quando o mesmo título, moeda ou *commodity* é negociado em dois ou mais mercados. Por exemplo, um arbitrador compra simultaneamente um contrato de ouro no mercado de Nova York e vende um contrato de ouro no mercado de Chicago, obtendo um lucro, pois naquele momento, há um diferencial de preço entre os dois mercados.

Os modelos de Precificação de opções, baseam-se no princípio de não-arbitragem, que estabelece a não existência de oportunidade de arbitragem sem riscos em um mercado ideal. Esta hipótese justifica-se pelo fato de que tais oportunidades são detectadas rapidamente em um mercado competitivo, de modo que todos os agentes vão querer usufruir delas, fazendo com que os preços dos ativos envolvidos subam

e que a arbitragem deixe de existir. O princípio da ausência de arbitragem diz que dois substitutos perfeitos, que são negociados livremente, devem ser vendidos pelo mesmo preço, na ausência de fricções (como custos de transação, limites na venda a descoberto, impostos, etc). Este conceito é também conhecido como a lei do preço único.

Outras formas de descrever o princípio da ausência de arbitragem, conforme o livro de Chriss [16] é que não há cenário onde um conjunto de ativos é precificado de tal forma que a compra e/ou venda simultânea destes ativos possam resultar em lucro sem risco. Verifica-se em Harrison e Kreps [17] que em um mercado no qual os preços dos ativos são descritos por um processo estocástico que atende a certas condições de regularidade, a ausência de oportunidades de arbitragem é equivalente à existência de uma medida de probabilidade q equivalente⁴ a p , tal que todos os preços descontados são q -martingales⁵. Isso quer dizer que vale:

$$C = e^{-rT} \int_0^{\infty} h(S_T) q_{t,T} dS_T$$

onde $h(S_T)$ é o *payoff*, ou seja, o preço de um derivativo qualquer (C) é o valor da esperança matemática do *payoff*, com relação à densidade condicional ($q_{t,T}$) do preço da ação no vencimento (S_T) sob a medida q , chamada de medida martingale equivalente. Vale notar que isso não implica que os preços reais dos ativos sejam martingales⁶. Na verdade, a maioria dos preços dos ativos apresenta um *drift* positivo, ou seja, seus valores crescem em média ao longo do tempo. De outra forma, S é usualmente um sub-martingale: $E_p(S_j/F_i) > S_i$ para $j \geq i$. A densidade q é conhecida na literatura de finanças por três nomes: “Probabilidade Neutralizadora do Preço da Incerteza”, “*State Price Density*” e “Medida Martingale Equivalente”.

Um estudo mais aprofundado sobre a medida martingale equivalente na teoria de arbitragem pode ser encontrado nos livros de Duffie [7], Neftci [18], e Elliott [19].

⁴Duas medidas p e q são equivalente se elas operam no mesmo espaço amostral e $P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0$, onde A é qualquer evento no espaço amostral.

⁵um processo S é uma martingale com relação a uma medida q e uma filtração (F_i) se $E_q(S_j|F_i) = S_i$, para todo $j \geq i$.

⁶Martingale - $E[X_{n+1}/X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x] = x$, isto é, o valor esperado de X_{n+1} dado os valores passados e presentes de X_0, \dots, X_n são iguais ao valor presente de X_n .

2.6 Resultados Gerais na Precificação

Aqui serão seguidos os princípios e resultados do artigo de Robert C. Merton [3], que traz informação sobre propriedades e condições que devem ser satisfeitas pelos prêmios de opções Americanas ou Européias, tanto de compra como de venda.

Seja $c(S, \tau, E)$ o prêmio de uma opção de compra Européia com preço de exercício E com tempo de expiração de τ anos, no instante presente a ação custa S . A mesma opção do estilo Americana é representada por $C(S, \tau, E)$.

Seja $p(S, \tau, E)$ o prêmio de uma opção de venda Européia com preço de Exercício E que vence dentro de τ anos, no instante presente a ação custa S . Já para o estilo de opção Americana representa-se por $P(S, \tau, E)$ o prêmio.

O valor pago pelo compromisso assumido pelo vendedor da opção, o prêmio, não pode ser negativo em qualquer circunstância, logo

$$c(S, \tau, E) \geq 0, \quad C(S, \tau, E) \geq 0.$$

Na determinação do lucro gerado ao exercer uma opção de compra Européia (ou Americana), tem-se

- $S > E$ o comprador exerce a opção, pagando E (preço de exercício) pela ação objeto, e em seguida vende a mesma no mercado por S , valor da ação, obtendo um lucro de $(S - E)$;
- $S < E$ neste caso o comprador desiste de exercer a opção, assim não obtém lucro.

Assim, verifica-se que o exercício da opção gera ao comprador um lucro igual a

$$\max\{S - E, 0\} \triangleq (S - E)^+ \quad (\text{por definição}).$$

Proposição 2.6.1 *O preço de uma opção de compra na data de vencimento ($\tau = 0$)*

equivale ao lucro por esta gerado.

$$c(S, \tau = 0, E) = (S - E)^+$$

$$C(S, 0, E) = (S - E)^+$$

Demostração Assumindo que $c(S, 0, E) < (S - E)^+$, pode-se comprar a opção e exercê-la no ato, gerando um lucro instantâneo de $(S - E)^+ - c(S, 0, E) > 0$. Logo dado a Não Arbitragem tem-se que $c(S, 0, E) \geq (S - E)^+$. Por outro lado se $c(S, 0, E) > (S - E)^+$, pode-se vender uma opção, recebendo $c(S, 0, E)$. Se $S > E$, compra-se a ação subjacente por S e vende-se ao valor de E ao comprador de opção, obtendo assim um lucro de $c(S, 0, E) - (S - E)^+ > 0$. Agora se $S < E$, o comprador não exerce a opção e perde o prêmio para o vendedor. Deste modo fica garantido, de qualquer forma, um lucro imediato do investidor. Também pela condição de não arbitragem tem-se que $c(S, 0, E) \leq (S - E)^+$. Logo pode-se concluir que

$$c(S, 0, E) = (S - E)^+.$$

Analogamente, no caso de opções Americanas tem-se

$$C(S, 0, E) = (S - E)^+.$$

Proposição 2.6.2 $C(S, \tau, E) \geq (S - E)^+$

Demostração Tem-se que $C(S, \tau, E) \geq (S - E)^+$ para $S \leq E$. Agora supondo que $S > E$ dado, existir τ^* tal que $C(S, \tau^*, E) < (S - E)^+ = S - E$. Assim pode-se comprar um opção por $C(S, \tau^*, E)$, e exercê-la imediatamente, gerando um lucro de $(S - E)^+$, verifica-se que têm-se um lucro instantâneo gerado de $L = S - E - C(S, \tau^*, E) > 0$. Assim, têm-se que $C(S, \tau^*, E) \geq (S - E)^+$ para $S > E$. Logo para todo os S .

Proposição 2.6.3 Se $\tau_1 \geq \tau_2$, tem-se

$$c(S, \tau_1, E) \geq c(S, \tau_2, E), \quad C(S, \tau_1, E) \geq C(S, \tau_2, E).$$

Proposição 2.6.4 $C(S, \tau, E) \geq c(S, \tau, E)$.

Proposição 2.6.5 Se $E_1 > E_2$, tem-se

$$c(S, \tau, E_1) \leq c(S, \tau, E_2), \quad C(S, \tau, E_1) \leq C(S, \tau, E_2).$$

Agora pensando em uma ação como sendo uma opção Americana com vencimento ilimitado que gera um lucro de $S = (S - 0)^+$ no exercício, ou seja, qualquer ação equivale a uma opção perpétua ($\tau \rightarrow \infty$) com preço de exercício igual a zero ($E = 0$), logo $S = c(S, \infty, 0)$. Assim pode-se estabelecer um limite superior para uma opção de compra.

Proposição 2.6.6 $C(S, \tau, E) \leq S$ e $c(S, \tau, E) \leq S$.

Demonstração Para todo τ e para todo $E > 0$, tem-se:

$$S = C(S, \infty, 0) \geq C(S, \tau, 0) \geq C(S, \tau, E).$$

Logo $C(S, \tau, E) \leq S$

Corolário 2.6.0.1 $c(0, \tau, E) = C(0, \tau, E) = 0$.

Demonstração Pela proposição anterior tem-se que: $S = 0$, $c(0, \tau, E) \leq 0$, porém tem-se que $C(0, \tau, E) \geq 0$, logo para $S = 0$ encontra-se $c(0, \tau, E) \geq 0$. Desta forma, conclui-se que $c(0, \tau, E) = 0$, da mesma forma $C(0, \tau, E) = 0$.

Teorema 2.6.1 O prêmio de opções de compra com preço de exercício E satisfazem para todo S , e t a seguinte desigualdade

$$c(S, \tau, E) \geq (S - EP(\tau))^+,$$

$$C(S, \tau, E) \geq (S - EP(\tau))^+,$$

onde $P(\tau)$ é o preço de um título que paga uma unidade monetária ao final de τ anos.

Demonstração Suponha que $c(S, \tau, E) + EP(\tau) < S$, vendendo a descoberto uma ação custe S^* , comprando a opção e E títulos, obtem-se um lucro de $L = S - c(S, \tau, E) - EP(\tau) > 0$. Ao final de τ anos, supondo que a ação custe S^* , a opção e o título comprados rendem o valor de $(S^* - E) + E \geq S^*$, suficientes para comprar uma ação e fechar posições em descoberto.

Assim, garante-se no mínimo o lucro L inicial sem imobilização de capital. Portanto, $c(S, \tau, E) + EP(\tau) \geq S$, ou seja, $c(S, \tau, E) \geq S - EP(\tau)$, dado que $c(S, \tau, E) \geq 0$, tem-se,

$$c(S, \tau, E) \geq (S - EP(\tau))^+.$$

Para o caso das opções Americanas, tem-se: $C(S, \tau, E) \geq (S - EP(\tau))^+$, dado a proposição 2.6.4.

Corolário 2.6.1.1 $C(S, \infty, E) = c(S, \infty, E) = S$.

Demonstração Pelo Teorema 2.6.1 e pela proposição 2.6.6, tem-se:

$$(S - EP(\tau))^+ \leq c(S, \tau, E) \leq S,$$

$$(S - EP(\tau))^+ \leq C(S, \tau, E) \leq S,$$

Como o limite para $\tau \rightarrow \infty$ de $(S - EP(\tau))^+$ é igual a S , o mesmo ocorre com $c(S, \tau, E)$ e $C(S, \tau, E)$.

Teorema 2.6.2 Uma opção de compra Americana nunca é exercida antes do vencimento, ou seja, seu prêmio é idêntico ao de uma opção Européia.

$$c(S, \tau, E) = C(S, \tau, E).$$

Demonstração Um investidor comprou por $C(S, \tau, E)$ uma opção de compra Americana, com vencimento de τ anos. Supondo que falte um período de $\tau^* < \tau$ anos para o vencimento, quando o preço da ação vale S^* . Se $S^* < E$, a opção não seria exercida, logo pode-se assumir que $S^* > E$. O exercício prematuro da opção após τ^* anos rende $S^* - E$. Uma alternativa é não exercer a opção, vendendo a descoberto uma ação e comprando E títulos que vencem em τ^* anos. O rendimento que é gerado nesta operação é de $S - EP(\tau^*) \geq S - E$, maior ou igual ao exercício prematuro. Após τ^* anos, se a ação está valendo \bar{S} , tem-se que a opção gera o lucro de $(\bar{S} - E)^+$, que somado ao rendimento de E , gerado pelo título, e descontadas as despesas de \bar{S} para comprar uma ação, e fechar a posição descoberta, tem-se um saldo de $(\bar{S} - E)^+ + E - \bar{S} = (E - \bar{S})^+ \geq 0$.

Portanto, as operações acima levam a um rendimento maior ou igual ao exercício da opção após τ^* anos, de modo que a opção não é exercida neste instante. Como τ^* foi arbitrado, tem-se que o exercício prematuro da opção não acontece em nenhum instante anterior ao vencimento.

Observação: Pelo fato de que

$$(S^* - E)^+ < (S^* - EP(\tau^*))^+ \leq C(S^*, \tau^*; E),$$

também é preferível fechar a posição tomada na opção, vendendo uma opção Americana com mesmo preço de exercício com vencimento em $\tau - \tau^*$ anos.

Considerando agora as opções de venda, representadas por $p(S, \tau; E)$ quando do tipo Europeu e por $P(S, \tau; E)$ quando do tipo Americano. Alguns resultados são análogos aos obtidos para opções de compra:

$$p(S, \tau; E), \quad P(S, \tau; E) \geq 0$$

$$p(S, 0; E) = P(S, \tau; E) = (E - S)^+$$

$$P(S, \tau; E) \geq p(S, \tau; E)$$

$$P(S, \tau; E) \geq (E - S)^+$$

Seja $B'(\tau)$ o valor presente de \$ 1 em τ anos, segundo a taxa de juros para empréstimos, ou seja, os agentes do mercado podem tomar emprestado uma quantia $SB'(\tau)$ e pagar S ao final de τ anos.

O importante resultado a seguir relaciona explicitamente opções de compra e opções de venda do estilo Europeu:

Teorema 2.6.3 *Se $B'(\tau) = P(\tau)$, vale a seguinte igualdade*

$$p(S, \tau, E) = c(S, \tau, E) - S + EP(\tau).$$

Demonstração *Verifica-se que $p(S, \tau, E) + S - EB'(\tau) \leq c(S, \tau, E)$ supondo que esta desigualdade não seja válida, pode-se vender uma opção de compra A com o preço de exercício E e vencimento em τ anos, comprar uma opção de venda B com o mesmo preço de exercício e data de vencimento, comprar uma ação e tomar emprestado uma quantia de $EB'(\tau)$ para pagamento de τ anos. Produzindo assim um lucro de $L = c(S, \tau, E) - p(S, \tau, E) - S + EB'(\tau) > 0$, ao final de τ anos, tem-se duas situações:*

- $S > E$: *A opção A será exercida e a opção B não será exercida, vende-se a ação por E e com esta quantia paga-se o empréstimo tomado inicialmente;*
- $S < E$: *Neste caso a opção A não será exercida e a B será exercida, vende-se a ação por E e novamente liquidam-se as dividas.*
- $S = E$: *Ambas não são exercidas e o empréstimo será pago pela venda das ações.*

Em qualquer caso anteriormente citado, as operações são concluídas sem lucro ou prejuízo, garantindo o lucro inicial de L sem imobilização de capital portanto, tem-se:

$$p(S, \tau, E) + S - EB'(\tau) \geq c(S, \tau, E),$$

$$p(S, \tau, E) \geq c(S, \tau, E) - S + EP(\tau).$$

Do mesmo modo, pode-se verifica que

$$p(S, \tau, E) \leq c(S, \tau, E) - S + EP(\tau).$$

Corolário 2.6.3.1 $p(0, \tau, E) = EP(\tau)$.

Corolário 2.6.3.2 $p(S, \tau = \infty, E) = 0$.

Capítulo 3

Modelo de Black e Scholes

Neste capítulo é apresentado o modelo de precificação de opções Europeias desenvolvido por Black e Scholes[2], e sua generalização para o caso do problema de precificação de opções Americanas que é formulado como uma inequação variacional. Para todos os casos são estudadas as opções que dão direito a negociar um ou dois ativos subjacentes.

3.1 Hipóteses do Modelo

As Hipóteses essenciais do modelo de Black-Scholes para a obtenção do prêmio de uma opção são as seguintes:

H1. As transações ocorrem continuamente e os ativos negociados são totalmente divisíveis;

Isto equivale a dizer que as variáveis preço e tempo são contínuas.

H2. A taxa de juros sem riscos (r) vigente no mercado é constante;

Esta taxa de juros refere-se ao retorno de um título sem riscos.

H3. O Ativo Subjacente (ação-objeto) não paga dividendo ou similares;

Essa hipótese pode ser substituída por uma mais fraca, de que os dividendos são constantes e conhecidos ao longo do tempo.

H4. Não há custos de transação na compra e venda de ativos;

H5. Não há oportunidade de arbitragem sem riscos;

H6. A tomada e concessão de empréstimos são irrestritas e realizadas à mesma

taxa (r);

H7. Não há restrição para a venda a descoberto;

As Hipóteses H4 a H7 estão relacionadas ao princípio de não arbitragem.

H8. O preço da ação segue um Movimento Browniano Geométrico da forma:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX$$

$$S(0) = S_0$$

sendo μ o retorno esperado da ação, e σ a variância do retorno constante.

3.2 Modelo Unidimensional

Black e Scholes idealizaram um portfolio de ações e opções imune as variações de preços, de modo que o risco fosse nulo. Em seguida, considerando que este portfolio deve ter o retorno igual à taxa de juros (r), deduziram uma equação diferencial para o prêmio da opção.

3.2.1 Opções Europeias

Seja $V(S, t)$ o prêmio da opção no instante t , quando a ação custa $S = S(t)$. Supondo que V satisfaz as condições do Lema de Itô ¹ tem-se

$$V(S, t) = V(S(0), t = 0) + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t} dt + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} d < S, S > .$$

¹**Lema de Itô:** seja $X = X(t)$ um semi-martingale contínuo e $F = F(X, t)$ uma função de classe \mathcal{C}^2 . Tem-se que F satisfaz:

$$F(X, t) = F(X(0), 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t} dt + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} d < X, X >$$

Como $\langle S, S \rangle$ é a variação quadrática de $S(t)$, dado por

$$\langle S, S \rangle \triangleq \int_0^t (\sigma S)_S^2 dS = (\sigma S)^2 t$$

tem-se

$$V(S, t) - V(S(0), t = 0) = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t} dt + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt.$$

Considerando que $dS = \mu S dt + \sigma S dX$, resulta

$$V(S, t) - V(S(0), t = 0) = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t} dt + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial S} \mu S dt + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dX + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt,$$

$$V(S, t) - V(S(0), t = 0) = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dX + \int_0^t \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt.$$

Pode-se então escrever

$$dV(S, t) = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt. \quad (3.1)$$

Admite-se V deve ser de classe \mathcal{C}^2 , com a primeira e segunda derivadas em relação a S limitador. Seja

$$\Pi = V - \Delta \cdot S$$

o valor do portfolio, formado pela venda de uma opção e compra de Δ ações. Considerando que o incremento do valor do portfolio em um espaço-tempo é dado por

$$d\Pi = dV - \Delta \cdot dS, \quad (3.2)$$

mantendo-se fixa a razão Δ , e substituindo (3.1) em (3.2), tem-se

$$d\Pi = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt - \Delta dS.$$

Considerando que $dS = \mu S dt + \sigma S dX$, obtem-se

$$d\Pi = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt - \Delta (\mu S dt + \sigma S dX),$$

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \Delta \mu S \right) dt.$$

Pode-se eliminar a componente aleatória nesse processo estocástico, escolhendo-se

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

O que reduz, o portfolio à componente determinística,

$$d\Pi = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt.$$

Donde se obtém

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (3.3)$$

De acordo com as hipóteses (H2, H4 a H7) de Black e Scholes, o portfolio deverá ter o mesmo retorno que a taxa de juros (r). Sendo o retorno do portfolio constante e igual a r , seu valor Π satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{d\Pi}{dt} = r\Pi. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.3), encontra-se

$$r\Pi = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Como $\Pi = V - \Delta S = V - S(\partial V)/(\partial S)$, tem-se

$$r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t},$$

ou

$$rV - r \frac{\partial V}{\partial S} S = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

E por fim, deduz-se a **Equação Diferencial Parcial de Black-Scholes**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0, \quad (3.5)$$

O parâmetro Δ , que corresponde à derivada do prêmio com respeito ao preço do

ativo subjacente, tem grande importância prática. Já que este mede a sensibilidade do prêmio de um derivativo com respeito a variação do preço do ativo subjacente no mercado.

3.2.1.1 Condição de Contorno

Este estudo sobre condição de contorno está baseado em Oliveira [11]. No dia a dia do mercado, não existe a necessidade de se obter o prêmio, quando o preço do ativo subjacente (ação) assume valores extremos, dado que em geral estes limites inferior e superior, têm probabilidades desprezíveis de ocorrência.

Porém, matematicamente, faz-se necessário considerar condições de contorno adequadas. Consideramos inicialmente o limite inferior $S = 0$. Como foi visto no corolário 2.6.0.1, verificou-se que a condição de contorno em $S = 0$, para $c(S, t)$ é

$$c(0, t) = 0. \quad (3.6)$$

Utilizando a hipótese **H2** de Black-Scholes e o corolário 2.6.3.1, obtém-se a condição de contorno para a opção de venda Européia:

$$p(0, t) = Ee^{-r(T-t)}. \quad (3.7)$$

Admite-se que o domínio da variável preço não é limitado superiormente, e portanto deve-se verificar o comportamento de c quando S tende ao infinito ($S \rightarrow \infty$). Dado que o preço ($S = S(t)$) é um semi-martingale contínuo, suas trajetórias são contínuas quase sempre, ou seja, S é contínua em relação a t quase sempre. Logo, se $S \rightarrow \infty$ a opção não pode ser limitada no tempo pela data de vencimento, ou seja, deve-se ter $T \rightarrow \infty$. De fato, se $T \in \mathbb{R}$, existiria

$$\bar{t} \in [0, T] \quad \text{tal que} \quad \lim_{t \rightarrow \bar{t}} S(t) = \infty,$$

contradizendo a continuidade de $S(t)$. Assim, somente faz sentido calcular limites quando $S \rightarrow \infty$ em opções perpétuas.

Admite-se que $c_\infty(S, t)$ seja uma opção perpétua de compra Européia e $p_\infty(S, t)$

uma opção perpétua de venda Européia. Pelo corolário 2.6.1.1 e o 2.6.3.2, tem-se que

$$c_{\infty}(S, t) = S \quad \text{e} \quad p_{\infty}(S, t) = 0.$$

Supondo que nas situações em que $S \gg 0$ o prêmio de uma opção arbitrária se aproxima do prêmio de uma opção perpétua, pode ser deduzir que

$$\lim_{S \rightarrow \infty} c(S, t) = \lim_{S \rightarrow \infty} c_{\infty}(S, t) \approx S, \quad (3.8)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} p(S, t) = \lim_{S \rightarrow \infty} p_{\infty}(S, t) \approx 0. \quad (3.9)$$

Portanto, pode-se usar a relação existente entre S e t , como uma fonte de informação sobre a solução, apesar do problema estar na forma de equação determinística em que S não depende de t . Conclui-se que $p(S, t) \rightarrow 0$ quando $S \rightarrow \infty$ não parece óbvio se S e t são tratadas como variáveis independentes.

3.2.1.2 Solução Analítica

Um dos pontos muito criticados do artigo de Black e Scholes [2], foi a resolução da equação (3.5). O livro de Wilmott [20] apresenta uma dedução mais clara para a solução analítica, desta equação, que será apresentada a seguir.

Solução Analítica - Opções de Compra

De acordo com o modelo de Black e Scholes o preço de uma opção Européia de compra $c(S, t)$ é a solução da equação

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0, \quad S > 0, \quad 0 < t < T, \quad (3.10)$$

Com “condição final” ou no vencimento,

$$c(S, T) = (S - E)^+$$

e condições de contorno

$$c(0, t) = 0; \quad \lim_{S \rightarrow \infty} c(S, t) \approx S.$$

Na equação (3.10) observa-se que cada vez que “ c ” é diferenciado com respeito a “ S ” é multiplicado por “ S ”. Observa-se, também que esta equação está claramente na forma *backward*, com dados finais apresentados em $t = T$.

Fazendo uma mudança na variável temporal, onde por definição ($\tau \triangleq T - t$), transforma-se (3.10) em um *Problema Canônico*, isto é, um problema de valor inicial, dado por

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc, \quad S > 0, \quad \tau > 0, \quad (3.11)$$

com condição inicial,

$$c(S, 0) = (S - E)^+,$$

e condições de contorno,

$$c(0, T - \tau) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} c(S, T - \tau) \approx S.$$

Pode-se também dizer que τ é por definição o tempo que falta para o vencimento da opção. Embora o problema acima não necessite da condição $\tau < T$, o modelo pressupõe que o prêmio seja calculado até este limite.

Pela transformação logarítmica ($x = \ln(S/E)$), obtem-se uma equação com coeficientes constantes. Desta forma, fazendo a substituição $S = Ee^x$ na equação (3.11) obtem-se

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial c}{\partial x} - rc, \quad x \in R, \quad \tau > 0 \quad (3.12)$$

com condição inicial,

$$c(S, 0) = (Ee^x - E)^+$$

e condições de contorno,

$$c(0, T - \tau) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} c(S, T - \tau) \approx Ee^x.$$

Uma forma de adimensionalizar o problema é redefinir o tempo, dividindo por $\sigma^2/2$, e a variável dependente, dividindo por E . Para isso, basta utilizar as transformações abaixo

$$S = Ee^x, \quad \tau = \frac{(T-t)}{\sigma^2/2}, \quad c(S, t) = Ev(x, \tau),$$

para se obter

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (K_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - K_1 v; \quad x \in R, \quad \tau > 0 \quad (3.13)$$

com condição inicial,

$$v(x, 0) = (e^x - 1)^+$$

e condições de contorno,

$$v(0, T - \tau) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} v(S, T - \tau) \approx e^x,$$

onde

$$K_1 = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Visando uma forma ainda mais simples, introduz-se a mudança de variável,

$$v(x, t) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau),$$

com α e β constantes, resultando

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [2\alpha - (k_1 - 1)] \frac{\partial u}{\partial x} + [-\beta + \alpha^2 + \alpha(k_1 - 1) - K_1] u. \quad (3.14)$$

Escolhendo

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k_1 - 1) \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2,$$

anulam-se os coeficientes que multiplicam os termos em “ $\partial u/\partial x$ ” e “ u ” na equação

(3.14) reduzindo-se o modelo de Black e Scholes a sua forma mais simples

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0, \quad (3.15)$$

$$u(x, 0) = \left(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} \right)^+.$$

O problema (3.15) tem solução única dada por

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} + e^{\frac{1}{2}(k_1-1)s} \right]^+ e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds.$$

Calculando-se a integral obtém-se

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(d_1) + e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x\frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau} N(d_2)$$

onde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\pi} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\pi},$$

e

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds,$$

é a função distribuição acumulada para a distribuição Normal.

Retornando a variável $c(S, t)$, tem-se:

$$c(S, t) = SN(D_1) - Ee^{-r(T-t)}N(D_2) \quad (3.16)$$

com

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \text{e} \quad D_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

Solução Analítica - Opções de Venda

No caso de opção de venda pode-se usar o mesmo raciocínio da opção de compra. Denota-se $p = p(S, t)$ a solução da equação de Black-Scholes que representa o prêmio de uma opção Europeia de venda com data de vencimento T e preço de exercício E .

De mesma forma, pode-se definir a “condição final” ou no vencimento,

$$p(S, T) = (E - S)^+$$

e as condições de contorno

$$p(0, t) = Ee^{-r(T-t)}; \quad \lim_{S \rightarrow \infty} p(S, t) \approx 0.$$

Assim, $p(S, t)$ é solução da seguinte equação

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} - rS \frac{\partial p}{\partial S} + rp; \quad S > 0, \quad 0 < t < T \quad (3.17)$$

com “condição final”,

$$p(S, T) = (E - S)^+$$

e condições de contorno

$$p(0, t) = Ee^{-r(T-t)}; \quad \lim_{S \rightarrow \infty} p(S, t) \approx 0.$$

Resolvendo esse problema análogo ao caso de uma opção de Européia de compra, chega-se a

$$p(S, t) = -SN(-D_1) + Ee^{-r(T-t)}N(-D_2) \quad (3.18)$$

Observação: Existe uma relação das soluções para a opção de compra e de venda conhecida como *Put-Call Parity Formula*, que surge da utilização do Teorema 2.6.3 adicionado à hipótese H2.

$$p(S, t) = c(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)} \quad (3.19)$$

3.2.1.3 Formulação Variacional

Conforme apresentado anteriormente o problema matemático associado ao modelo de Black e Scholes de precificação de opções está definido em um domínio ilimitado $\Omega_\infty = [0, \infty]$. Visando a construção de solução aproximadas, faz-se ne-

cessário o truncamento domínio Ω_∞ em um domínio limitado $\Omega = [0, S_{max}]$, onde S_{max} é o maior valor que o ativo subjacente possa ter no mercado à vista. Segundo Oliveira[11] deve-se adotar S_{max} suficientemente grande e levando-se em consideração a precisão da aproximação e os custos computacionais decorrentes. Tem-se observado que valores de S_{max} entre $1,5E$ e $3E$ apresentam bons resultados. Uma questão em aberto é determinar S_{max} em função dos parâmetros da equação e do erro máximo admitido.

Normalmente são usadas condições de contorno de Dirichlet no conjunto limitado Ω . Para opções de venda têm sido usadas

$$p(0, t) = Ee^{-r(T-t)} \quad \text{e} \quad p(S_{max}, t) = 0, \quad (3.20)$$

resultantes de (3.7) e (3.9). Para o caso de opção de compra, condições de contorno de Dirichlet, no conjunto limitado Ω , provêm de (3.6) para $S = 0$ e da fórmula de paridade (3.19) e combinada com a condição de contorno para as opções de venda (3.20) para $S = S_{max}$ suficientemente grande, resultando

$$c(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad c(S_{max}, t) = S_{max} - Ee^{-r(T-t)}. \quad (3.21)$$

Existem outras maneiras de se lidar com as condições de contorno associadas no domínio truncado. Topper [21] sugere a condição de contorno de Neumann

$$\frac{\partial c(S_{max}, t)}{\partial S} = 1, \quad (3.22)$$

que resulta de (3.21) derivada com respeito ao preço em $S = S_{max}$ suficientemente grande. São também utilizadas condições de contorno de Robim [21]. No capítulo 4 será feito um estudo numérico ilustrando o efeito do truncamento do domínio associado a condições de contorno de Dirichlet e Neumann

O modelo de Black e Scholes para a opção de venda, no domínio limitado Ω , consite na equação diferencial

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} - r \frac{\partial p}{\partial S} S + rp = 0, \quad (3.23)$$

com condição inicial,

$$p(S, 0) = (E - S)^+,$$

condições de contorno,

$$p(0, T - \tau) = Ee^{-r\tau} \quad \text{e} \quad p(S_{max}, T - \tau) = 0.$$

Por simplicidade esta apresentação será limitada as condições de contorno de Dirichlet para a formulação variacional, denota-se o conjunto de funções admissíveis

$$U_\tau = \{v \in H^1(\Omega); v(0) = Ee^{-r\tau}, v(S_{max}) = 0\},$$

e o espaço das variações admissíveis

$$U_0 = \{v \in H^1(\Omega), v(0) = v(S_{max}) = 0\}.$$

Definindo o seguinte produto interno em $L^2(\Omega)$,

$$(u, v) \triangleq \int_0^{S_{max}} u(x)v(x) dx,$$

multiplicando a equação (3.23) por uma uma função teste v e integrando entre 0 e S_{max} , encontra-se:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}, v\right) - r \left(S \frac{\partial p}{\partial S}, v\right) + r(p, v) = 0, \quad \forall v \in U_0(\Omega_1).$$

Considerado que

$$\frac{1}{2}S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S} \left[S^2 \frac{\partial p}{\partial S} \right] - S \frac{\partial p}{\partial S},$$

resulta

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial S} \left[S^2 \frac{\partial p}{\partial S} \right], v\right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial p}{\partial S}, v\right) + r(p, v) = 0. \quad (3.24)$$

Usando a integração por parte no segundo termo na equação (3.24), e dado que $v \in U_0(\Omega)$, obtem-se

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v \right) + \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial p}{\partial S}, S \frac{\partial v}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial p}{\partial S}, v \right) + r(p, v) = 0$$

Desta forma, o Problema de precificação de opções de venda pode ser assim formulado

PROBLEMA EV: Para $\tau \in [0, T]$ encontrar $p(\tau) \in U_\tau$ tal que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v \right) + a(p, v) = 0, \quad \forall v \in U_0,$$

satisfazendo a condição inicial

$$(p(S, 0), v) = ((E - S)^+, v), \quad \forall v \in U_0,$$

com $a(\cdot, \cdot) : U_\tau \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$a(p, v) = \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial p}{\partial S}, S \frac{\partial v}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial p}{\partial S}, v \right) + r(p, v).$$

Verifica-se a existência e unicidade da solução da formulação variacional pelo teorema de J. L. Lions que é apresentado em Brezis[22]. No próximo capítulo serão apresentadas as aproximações por elementos finitos para o *PROBLEMA EV*.

Observação: Usando-se as condições de contorno de Neumann (3.22), define-se o espaço

$$U_\tau^* = \{v \in H^1(\Omega); v(0) = 0\},$$

e o Problema de precificação de opções de compra fica formulado como

PROBLEMA EV*: Para $\tau \in [0, T]$ encontrar $c(\tau) \in U_\tau^*$ tal que

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \tau}, v \right) + a(c, v) = f(v), \quad \forall v \in U_\tau^*,$$

satisfazendo a condição inicial

$$(c(S, 0), v) = ((E - S)^+, v), \quad \forall v \in U_\tau^*,$$

com

$$a(c, v) = \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial c}{\partial S}, S \frac{\partial v}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial c}{\partial S}, v \right) + r(c, v)$$

e

$$f(v) = \frac{1}{2} \sigma^2 S_{max}^2 v(S_{max}).$$

onde $f(v)$ é um funcional linear associado a uma carga pontual em $S = S_{max}$, resultante da condição de contorno de Neumann que nesta formulação variacional é satisfeita de forma natural.

3.2.2 Opções Americanas

Será feita uma abordagem matemática deste problema seguindo o livro de Wilmott, Dewynne e Howison [20]. Como mencionado no primeiro capítulo, as opções Americanas podem ser exercidas a qualquer instante após o lançamento pelo titular, resultando, portanto, em um problema de fronteira livre.

3.2.2.1 Teoria Básica de Modelagem em Opções Americanas

Antes da data de exercício com certeza ocorrem variações no valor do ativo subjacente (S) no mercado à vista. Considerando que o prêmio de uma opção de venda Européia é menor que seu valor intrínseco tem-se

$$p(S, t) < \max\{E - S, 0\}. \quad (3.25)$$

Supondo que a opção pode ser exercida em qualquer tempo antes da data de exercício, então surge uma boa oportunidade de arbitragem que pode ser caracterizada como: adquirindo a opção pelo valor P , exercendo esta opção, vendendo a ação por E , e recuperando a ação no mercado à vista por S . O portfolio livre de risco é formado assumindo o valor de $E - P - S$. Naturalmente, é de se esperar que cada

oportunidade não dure muito tempo, dado que o valor da opção é impulsionado para cima, devido a lei da oferta e demanda. Assim, conclui-se que cada exercício quando é permitido mostra, ao contrário da desigualdade (3.25),

$$V(S, t) \geq \max\{S - E, 0\}, \quad (3.26)$$

sinalizando que o valor de uma opção de venda Americana deve ser diferente da sua correspondente opção Européia.

A precificação de opções Americanas pode ser apresentada como um **Problema de Fronteira Livre**. Dado que em cada tempo t há um valor de S que marca a fronteira entre duas regiões: uma onde se deve manter a opção, isto é, não exercer o direito de compra (ou venda) do ativo subjacente, e a outra onde se deve exercer este direito. Denota-se esta fronteira por $S_f(t)$, cujo valor não é conhecido. Pode-se dizer que existe uma falta de informação comparado com um caso correspondente de opções Européias, já que é conhecido o valor da condição de contorno aplicada no caso de opções Européias, como foi visto anteriormente. Esta situação de não termos informação sobre a condição de contorno é comum em alguns problemas da física, como um exemplo pode-se citar “*O Problema de Obstáculo*”, ver Glowinski[23].

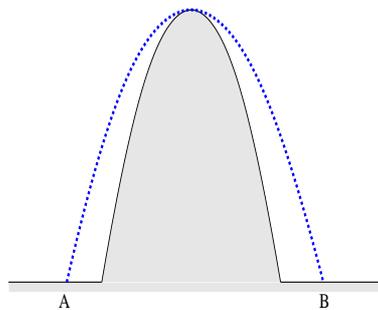


FIGURA 3.1: **Problema de obstáculo:** A corda é fixada em A e B e deve passar uniformemente sobre o obstáculo que está entre os pontos.

Simplificadamente, um problema de obstáculo apresenta-se quando uma corda elástica é fixada nas duas extremidades, A e B, passando sobre um objeto saliente entre os dois extremos (como pode ser visto na Figura 3.1). Pode-se verificar que não se conhece *à priori* a região de contato entre a corda e o obstáculo. Mas admite-se

que a corda deve satisfazer duas restrições. A primeira é que o obstáculo jamais pode exercer uma força negativa sobre a corda, isto é, o obstáculo apenas pode empurrar a corda e não puxar. A segunda restrição é que a corda encosta continuamente no obstáculo. Isto é um tanto óbvio. Exceto em pontos onde a corda desgarra do contato com o obstáculo. Combinando a primeira restrição com a equação de deslocamento da corda, tem-se que a curvatura da corda é negativa ou igual a zero. Em resumo tem-se as seguintes hipóteses:

- A corda deve estar acima ou sobre o obstáculo;
- A corda deve ter curvatura zero ou negativa;
- A corda deve ser contínua;
- A inclinação da corda deve ser contínua;

Dentro destas restrições demonstra-se que existe solução única para este problema do obstáculo.

Em problemas de precificação de opção Americanas, admitem-se restrições similares a estas do problema do obstáculo, ou sejam:

- O prêmio deve ser maior do que o valor intrínseco (*Payoff*);
- A equação de Black-Scholes é substituída por uma inequação;
- O valor da opção deve ser uma função contínua de S ;
- O delta da opção (sua inclinação) deve ser contínua;

A primeira destas restrições diz que o lucro da arbitragem, obtido pelo exercício antecipado deve ser menor ou igual a zero. Não significa que o exercício antecipado nunca deva ocorrer, e sim que a oportunidade de arbitragem não deva existir. Assim o prêmio é o mesmo, ou, maior que o valor intrínseco. A opção deve ser exercida, satisfazendo apropriadamente a equação de Black-Scholes. Combinando os dois casos pode-se produzir uma inequação para a equação de Black-Scholes, a qual é a segunda restrição citada anteriormente. Existe algumas características interessantes desta desigualdade que serão citadas mais adiante.

A terceira restrição, o valor da opção é contínuo, segue de uma simples arbitragem. Se houver uma descontinuidade no valor da opção em função de S , e se esta descontinuidade persistir para mais do que um tempo infinitesimal, um portfolio das opções somente faria um lucro livre de risco com probabilidade 1 (um) se o preço do ativo for igual ao valor em que ocorreu a descontinuidade.

Como no problema do obstáculo, não se sabe a posição de S_f , e deve-se impor duas condições em S_f . O valor da opção é determinado extraordinariamente se S_f for especificado. Já a segunda condição em S_f é que o delta da opção deve também ser contínuo, a quarta restrição citada anteriormente.

Considere a opção de venda Americana, com valor $P(S, t)$. Tem-se que esta opção tem um limite do exercício quando $S = S_f(t)$, ou seja, a opção deve ser exercida se $S < S_f(t)$ e mantida caso contrário. Supondo que $S_f(t) < E$, a inclinação do valor intrínseco ($\max\{E - S, 0\}$) no ponto de contato é igual a -1 . Considere as três possibilidades para a inclinação da opção (Δ), $\partial P/\partial S$, em $S = S_f(t)$:

- $\frac{\partial P}{\partial S} < -1$
- $\frac{\partial P}{\partial S} > -1$
- $\frac{\partial P}{\partial S} = -1$

Verifica-se que as duas primeiras são incorretos. Suponha primeiramente que $\frac{\partial P}{\partial S} < -1$. Então para os incrementos de S até $S_f(t)$, $P(S, t)$ está a abaixo do valor intrínseco, desde que sua inclinação é mais negativa, como visto na Figura 3.2 (A), contradizendo o limite de arbitragem $P(S, t) \geq \max\{S - E, 0\}$, sendo impossível tal suposição para $\partial P/\partial S$. Agora supondo que $\frac{\partial P}{\partial S} > -1$, como se pode ver na Figura 3.2 (B). O valor da opção com esta inclinação seria subótima, no sentido que não fornece a opção seu valor máximo consistente com a estratégia de *hedging* livre de risco e a constante de arbitragem dada por $P(S, t) \geq \max\{S - E, 0\}$. Há dois aspectos a serem considerados. Um é a estratégia baseada na arbitragem em *hedging*, que é como anteriormente foi procedido, levando a equação de Black-Scholes. A outra é a **estratégia de exercício**, que seria: o *Titular* deve decidir-se, em princípio, de que modo exclusivamente S deveria baixar antes que exerça a opção. A base

desta decisão é dada na escolha da estratégia que deve maximizar uma medida de aproximação do valor da opção para o *Titular*. A opção deve satisfazer a equação diferencial parcial com $P(S_f(t), t) = E - S_f(t)$ como uma das condições de contorno, assim a escolha de $S_f(t)$ afeta o valor de $P(S, t)$ para todos valores grandes de S . No caso que é visto na Figura 3.2 (A) o valor de $S_f(t)$ é desfavorável e o lucro de arbitragem é possível para S maiores que $S_f(t)$. Se $\partial p/\partial S > -1$ em $S = S_f(t)$, o valor da opção próximo de $S = S_f(t)$ pode ser aumentado para escolher um valor menor de S_f . Assim, verifica-se que o valor do exercício move acima do valor intrínseco e $\partial p/\partial S$ decresce. Desta forma a opção é sem valor (*misvalued*). Em realidade, tem-se incrementos positivos no valor de $P(S, t)$ com o passar do tempo seguindo a equação diferencial parcial para todos os valores de S maiores do que $S_f(t)$, e decrescimento de S menores que $S_f(t)$. Chegando a um ponto *crossover* entre as duas possibilidades incorretas de $\partial p/\partial S$, o qual simultaneamente maximiza o lucro do lançador e o titular e evita a arbitragem. Isto produz uma condição de contorno como sendo $\partial p/\partial S = -1$ em $S = S_f(t)$. Deve-se reforçar que este argumento, não é apenas uma derivação formal da segunda condição de contorno. Tal derivação pode ser extraída da linguagem de controle estocástico, de problemas de parada ótima, ou de teoria dos jogos.

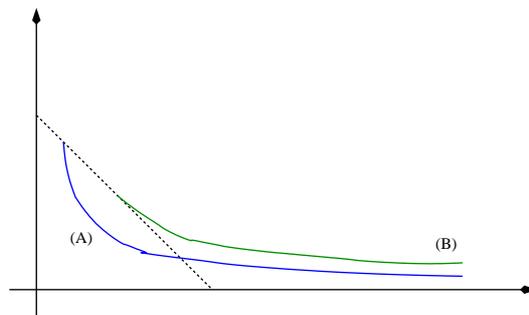


FIGURA 3.2: Preço de exercício (A) baixo, (B) alto.

Uma segunda, mais heurística, derivação para uma condição de igualdade, basease, outra vês, no argumento de arbitragem, considerando o valor de uma opção de venda Americana $P(S, t)$. Supõe-se que S é proximo de S_f . Agora considera-se um portfolio simples, ao longo do tempo com um ativo e uma opção de venda qualquer,

definido como:

$$\Pi = P + S.$$

A variação do preço deste portfolio em relação a uma variação pequena no tempo (dt), é dada por

$$d\Pi = dP + dS.$$

Desde que $P = E - S$ para $S < S_f$, porém reduzindo S , tem-se:

$$d\Pi = 0, \quad \text{para } S < S_f.$$

Já para aumentos nos valores do ativo subjacente S , tem-se:

$$d\Pi = \left(\sigma S \frac{\partial P}{\partial S} + \sigma S \right) + O(dt),$$

onde $O(dt)$ constante de sobra do termo de acumulação de dS , e os termos restantes para o Lema de Itô aplicado para P . Assim

$$E[d\Pi] = \frac{1}{2} \sigma S \left(\frac{\partial P}{\partial S} + 1 \right) E[|dx|] = \sqrt{\frac{2dt}{\Pi}} \sigma S \left(\frac{\partial P}{\partial S} + 1 \right) + O(dt). \quad (3.27)$$

Conclui-se que

$$\frac{\partial P}{\partial S} = -1, \quad (3.28)$$

para que o gradiente $\partial P / \partial S$ seja contínuo em $S = S_f$.

Finalmente, retornando à segunda restrição apresentada anteriormente na página 45, que a “inequação” satisfaz as hipóteses de Black-Scholes. Recalculando a equação diferencial parcial de Black-Scholes seguindo a forma de um argumento de arbitragem. Este argumento é somente e parcialmente válido para opções Americanas, porém o parentesco entre a arbitragem e as hipóteses de Black-Scholes persiste, resultando agora em inequação.

Foi estabelecido anteriormente um portfolio (Π), com exatamente a mesma escolha do delta para o caso de opções Européia. Entretanto, no caso Americano isto não é suficiente para a opção ser segura, mesmo de longa e curta duração; deve

existir um tempo de forma que seja otimizado para o exercício da opção. Assim, o titular de uma opção pode estar diante do exercício. A arbitragem não longo conduz a um valor único para o retorno sobre o portfolio, somente para uma inqueação. Nós não dizemos que o retorno do portfolio não pode ser maior do que o retorno de um depósito de banco. Para uma opção Americana de venda, a inequação é

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0. \quad (3.29)$$

A inequação aqui apresentada seria um *igualdade* para uma opção Européia. Quando é ótimo manter a opção pode ser modelada pela igualdade, isto é, a equação de Black e Scholes é válida e a restrição eq.(3.25) deve ser satisfeita. Do contrário, isto é, o exercício ótimo da opção, tem-se somente a inequação (3.29) e a eq.(3.25) é satisfeita - o obstáculo é a solução.

3.2.2.2 Problema de Fronteira Livre

Anteriormente foi apresentada uma formulação do problema de opção Americana do ponto de vista do exercício prematuro, agora far-se-á uma formulação como um problema de fronteira livre.

Se em algum instante $t^* < T$ o preço do ativo subjacente é de $S^* < E(1 - e^{-r(T-t)})$, a opção deve ser imediatamente exercida, pois o rendimento L gerado pelo exercício prematuro satisfaz: $L = E - S^* > E(e^{-r(T-t^*)}) > p^*(S^*, t)$, em que $p^*(S^*, t)$ é o preço de venda Européia com preço de exercício E e vencimento em $T - t^*$ anos. Como qualquer portfolio tem rendimento $(E - S)^+$ em $t = T$ e tem o mesmo valor presente que esta opção Européia, tem-se que nenhum portfolio representa uma alternativa melhor que o exercício prematuro. Observando que neste caso o prêmio $P(S^*, t^*)$ deve valer $E - S^*$ para que não haja arbitragem.

Em particular, tem-se para $S^* = 0$: $P(0, t^*) = E$ utilizando o argumento de arbitragem, pode-se verificar que $P(S, t) \geq (E - S)^+ = 0, \forall S \geq E$. Verifica-se que para cada instante t os preços que levam ao exercício prematuro formam um intervalo de $[0, S_f]$, cujo limitante superior será denominado **ponto ótimo de exercício**.

O ponto S_f separa o domínio em um segmento onde a opção é exercida e outro

em que é conveniente exercê-la posteriormente. Assim, o problema de precificação de opções Americanas pode ser visto como um **problema de fronteira livre** em que a fronteira livre é dada por $S_f = S_f(t)$.

Pode-se formular o **problema de fronteira livre**, em duas regiões bem definidas, uma onde deve-se exercer a opção

$$P(S, t) = (E - S)^+, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0; \quad 0 \leq S \leq S_f,$$

outra onde não é ótimo o exercício da opção

$$P(S, t) > (E - S)^+, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0; \quad S_f \leq S \leq \infty.$$

Tem-se duas condições de interface entre as duas regiões no ponto $S_f = S_f(t)$ que devem ser respeitadas

$$P(S_f(t), t) = (E - S_f(t))^+, \quad \frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1.$$

Além da condição no vencimento,

$$P(S, T) = (E - S)^+,$$

e das condições de contorno,

$$P(0, t) = Ee^{-r(T-t)}, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0.$$

3.2.2.3 Formulação Variacional

Matematicamente, o modelo de Black e Scholes para a opção Americana de venda, no domínio limitado Ω pode ser formalmente apresentado como

PROBLEMA A: Para $\tau \in [0, T]$ encontrar $P(S, \tau) \in K$ satisfazendo

$$P(S, \tau) = (E - S)^+; \quad 0 \leq S \leq S_f,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rS \frac{\partial P}{\partial S} + rP \geq 0; \quad 0 \leq S \leq S_f, \quad (3.30)$$

e

$$P(S, \tau) > (E - S)^+; \quad S_f \leq S \leq S_{max},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rS \frac{\partial P}{\partial S} + rP = 0; \quad S_f \leq S \leq S_{max}, \quad (3.31)$$

condições de interface entre as duas regiões

$$P(S_f, T - \tau) = (E - S_f)^+, \quad \frac{\partial P}{\partial S}(S_f, T - \tau) = -1,$$

condição inicial,

$$P(S, 0) = (E - S)^+,$$

e condições de contorno,

$$P(0, T - \tau) = Ee^{-r\tau}, \quad P(S_{max}, T - \tau) = 0.$$

Definido-se o subconjunto das funções limitadas inferiormente por $g(S)$ que é o valor intrínseco (Payoff), no caso de opções de venda $g(S) = (E - S)^+$, para compra $g(S) = (S - E)^+$, como

$$K = \{v \in U_\tau; v(S, \tau) \geq g(S) \text{ q.s. em } \Omega\}, \quad (3.32)$$

multiplicando (3.30) e (3.31) por $(v - P)$, onde v é uma função teste em K , e somando-as tem-se

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, (v - P) \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}, (v - P) \right) - r \left(S \frac{\partial P}{\partial S}, (v - P) \right) + r(P, (v - P)) dS \geq 0. \quad (3.33)$$

Considerando que

$$\frac{1}{2}S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S} \left[S^2 \frac{\partial P}{\partial S} \right] - S \frac{\partial P}{\partial S},$$

resulta

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, (v - P) \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial S} \left[S^2 \frac{\partial P}{\partial S} \right], (v - P) \right) - \\ & - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial P}{\partial S}, (v - P) \right) + r(P, (v - P)) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Usando a integração por parte no segundo termo na equação (3.34), e considerando a condição de contorno

$$(v - P) \Big|_{S_{max}}^0 = 0,$$

obtem-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, v - P \right) + \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial P}{\partial S}, S \frac{\partial}{\partial S} (v - P) \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial P}{\partial S}, v - P \right) + \\ & + r(P, v - P) \geq 0 \end{aligned}$$

Deste modo, o problema de precificação de opções Americanas de venda é formado como

PROBLEMA AV: Para todo $\tau \in (0, T]$, encontrar $P = P(\tau) \in K$ satisfazendo à inequação variacional

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, v - P \right) + a(P, v - P) \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (3.35)$$

e a condição inicial

$$(P(S, 0), v) = ((E - S)^+, v), \quad \forall v \in K,$$

com

$$a(P, v) = \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial P}{\partial S}, S \frac{\partial v}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial P}{\partial S}, v \right) + r(P, v). \quad (3.36)$$

Essa formulação será utilizada para construção de aproximações por elementos finitos. Antes, porém, serão apresentados resultados fundamentais sobre existência e unicidade de solução para inequações parabólicas aplicáveis ao PROBLEMA AV.

3.2.2.4 Existência e Unicidade de Solução

Verifica-se a existência e a unicidade da solução para a inequação variacional parabólica das opções Americanas usando o teorema de *J. L. Lions* que é apresentado em Brezis [22]. Para tanto demonstra-se que a forma bilinear, Eq. (3.36), satisfaz as propriedades seguintes.

i. Continuidade:

$$|a(\tau; u, v)| \leq M \|u\|_1 \|v\|_1 \text{ q.t.p. } \tau \in [0, T] \forall u, v \in U_0$$

ii. Coercividade:

$$|a(\tau; v, v)| \geq \alpha \|v\|_1^2 - C \|v\|^2 \text{ q.t.p. } \tau \in [0, T] \forall v \in U_0$$

onde α , M e C são constantes positivas.

A primeira propriedade se verifica aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na Eq. (3.36), encontrando:

$$\begin{aligned} |a(P, v)| &\leq \frac{\sigma^2}{2} \left\| S \frac{\partial P}{\partial S} \right\| \left\| S \frac{\partial v}{\partial S} \right\| + (r - \sigma^2) \left\| S \frac{\partial P}{\partial S} \right\| \|v\| + r \|P\| \|v\| \\ &\leq \max \left\{ \frac{\sigma^2}{2}, (r - \sigma^2), r \right\} \left(\left\| S \frac{\partial P}{\partial S} \right\| + \|P\| \right) \\ &\quad \left(\left\| S \frac{\partial v}{\partial S} \right\| + \|v\| \right) \\ &\leq C_1 \max \left\{ \frac{\sigma^2}{2}, (r - \sigma^2), r \right\} \left(\left\| S \frac{\partial P}{\partial S} \right\|^2 + \|P\|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\left\| S \frac{\partial v}{\partial S} \right\|^2 + \|v\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Definindo

$$\|P\|_1^2 = \left\| S \frac{\partial P}{\partial S} \right\|^2 + \|P\|^2,$$

$$\|v\|_1^2 = \left\| S \frac{\partial v}{\partial S} \right\|^2 + \|v\|^2$$

encontra-se

$$|a(P, v)| \leq \beta \|P\|_1 \|v\|_1,$$

onde

$$\beta = C_1 \max \left\{ \frac{\sigma^2}{2}, (r - \sigma^2), r \right\},$$

donde se conclui é que a primeira propriedade é satisfeita. Agora a segunda propriedade será verificada.

$$a(v, v) = \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial v}{\partial S}, S \frac{\partial v}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial v}{\partial S}, v \right) + r(v, v)$$

como $(S \frac{\partial v}{\partial S}, v) = -\frac{1}{2} \|v\|^2$, resulta

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \frac{\sigma^2}{2} \left\| S \frac{\partial v}{\partial S} \right\|^2 + (r - \sigma^2) \frac{1}{2} \|v\|^2 + r \|v\|^2 \\ a(v, v) &= \frac{\sigma^2}{2} \left\| S \frac{\partial v}{\partial S} \right\|^2 + \frac{3r}{2} \|v\|^2 - \frac{\sigma^2}{2} \|v\|^2 \\ a(v, v) &\geq \min \left\{ \frac{\sigma^2}{2}, \frac{3r}{2} \right\} \left(\left\| S \frac{\partial v}{\partial S} \right\|^2 + \|v\|^2 \right) - \frac{\sigma^2}{2} \|v\|^2, \end{aligned}$$

donde se obtem

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_1^2 - C \|v\|^2,$$

com

$$\alpha = \min \left\{ \frac{\sigma^2}{2}, \frac{3r}{2} \right\}, \quad C = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Portanto as condições (i) e (ii) do teorema de J. L. Lions são satífetas. Desta forma, pode-se dizer que existe solução única para a inequação variacional parabólica para precificação de uma opção Americana.

3.3 Modelo Bidimensional

É análogo ao caso de uma dimensão, porém, aqui a opção negociada dá como direito de negociar comprando (ou vendendo) **dois** ativos subjacentes em conjunto a um preço e a uma data futura predeterminada. Assim pode-se dizer que se tem uma opção em duas dimensões.

3.3.1 Opções Europeias

Seja $V(S_1, S_2, t)$ o prêmio da opção no instante t , quando o ativo subjacente 1 custa $S_1 = S_1(t)$ e o ativo subjacente 2 custa $S_2 = S_2(t)$. Seja também a taxa de juros (r) fixa.

Os preços das ações seguem Movimentos Browniano Geométricos, dados por

$$\begin{cases} dS_1 = \mu S_1 dt + \sigma_1 S_1 dX_1 \\ dS_2 = \mu S_2 dt + \sigma_2 S_2 dX_2 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Estocástico}$$

onde σ_i^2 é a volatilidade do preço do ativo (S_i), dX_i movimento Browniano, e μ , retorno esperado do ativo. Usando série de Taylor obtemos

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2 \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} dS_1^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} dS_1 dS_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} dS_2^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sendo que o processo de Wiener dX_i , $i = 1, 2$ satisfaz

$$E(dX_i) = 0 \quad E(dX_i)^2 = dt \quad E(dX_1 dX_2) = \rho_{12} dt$$

onde $\rho_{12} = \text{corr}(S_1 S_2)$ e $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$. Como $dS_i = \sigma_i S_i dX_i + \mu S_i dt$ $i = 1, 2$, resulta

$$\begin{aligned} dS_1^2 &= \sigma_1^2 S_1^2 dX_1^2 = \sigma_1^2 S_1^2 dt \\ dS_2^2 &= \sigma_2^2 S_2^2 dX_2^2 = \sigma_2^2 S_2^2 dt \\ dS_1 dS_2 &= \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 dX_1 dX_2 = \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \rho_{12} dt \end{aligned}$$

que substituídos na eq.(3.37), fornece

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} (S_1 \sigma_1 dX_1 + \mu S_1 dt) + \frac{\partial V}{\partial S_2} (S_2 \sigma_2 dX_2 + \mu S_2 dt) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 dt + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \rho_{12} dt + \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 dt \right). \end{aligned}$$

Pode-se então escrever

$$dV = \sigma_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} dX_1 + \sigma_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} dX_2 + \left(\mu S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \mu S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \right) dt, \quad (3.38)$$

onde V satisfaz as condições do Lema de Itô.

Seja $\Pi = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2$ o valor do portfólio. Mantendo fixas as razões Δ_1 e Δ_2 o incremento do valor do portfólio no espaço-tempo é dado por

$$d\Pi = dV - \Delta_1 dS_1 - \Delta_2 dS_2. \quad (3.39)$$

Substituindo (3.38) na (3.39) e utilizando os movimentos Brownianos que regem os preços das ações, tem-se

$$d\Pi = \sigma_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} dX_1 + \sigma_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} dX_2 + \left(\mu S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \mu S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \right) dt - \Delta_1 (\mu S_1 dt + \sigma_1 S_1 dX_1) - \Delta_2 (\mu S_2 dt + \sigma_2 S_2 dX_2).$$

Reorganizando os termos da equação, tem-se

$$d\Pi = \sigma_1 S_1 \left(\frac{\partial V}{\partial S_1} - \Delta_1 \right) dX_1 + \sigma_2 S_2 \left(\frac{\partial V}{\partial S_2} - \Delta_2 \right) dX_2 + \left(\mu S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \mu S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} - \Delta_1 \mu S_1 - \Delta_2 \mu S_2 \right) dt.$$

Pode-se eliminar as componentes aleatórias deste processo estocástico escolhendo,

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S_1}; \quad \Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2}.$$

Assim, o portfólio torna-se completamente determinístico, ou seja,

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \right) dt,$$

ou na forma diferencial,

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}. \quad (3.40)$$

De acordo com as hipóteses **H2** e **H4** a **H7** de Black e Scholes, o portfolio deverá ter o mesmo retorno que a taxa de juros r . Assim sendo, o retorno do portfolio Π satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\Pi}{dt} = r\Pi. \quad (3.41)$$

Substituindo (3.41) em (3.40), encontra-se

$$r\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}$$

como

$$\Pi = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2 = V - \frac{\partial V}{\partial S_1} S_1 - \frac{\partial V}{\partial S_2} S_2$$

chega-se

$$r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S_1} S_1 - \frac{\partial V}{\partial S_2} S_2 \right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}.$$

Desta forma tem-se a **Equação Diferencial Parcial de Black-Scholes em duas dimensões**

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \\ + r \frac{\partial V}{\partial S_1} S_1 + r \frac{\partial V}{\partial S_2} S_2 - rV = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

A equação aqui apresentada contém a correlação entre os dois ativos subjacentes que a opção dá direito de negociar, que na formulação variacional por simplificação da modelagem será tratada como zero, fazendo como que não exista dependência entre os ativos subjacentes.

Formulação Variacional

Visando a construção da formulação variacional, é necessário a aproximação do domínio $\Omega_\infty = [0, \infty] \times [0, \infty]$ por um domínio limitado $\Omega = [0, S_1^{max}] \times [0, S_2^{max}]$, onde S_1^{max} e S_2^{max} são os maiores valores dos ativos subjacentes (S_2) e (S_1) no mercado à vista, respectivamente.

Supondo que a covariância entre S_1 e S_2 é igual a zero, implica que a correlação de S_1 e S_2 também será igual a zero ($cov(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow \rho_{S_1 S_2} = 0$). Desta forma, não existe dependência linear entre S_1 e S_2 e (3.42) reduz-se a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S_2^2} + r \frac{\partial v}{\partial S_1} S_1 + r \frac{\partial v}{\partial S_2} S_2 - rv = 0. \quad (3.43)$$

Como no caso unidimensional faz-se a transformada na variável temporal, $\tau = T - t$. Deste modo, um problema de valor inicial para opções Européia de venda é expresso por

PROBLEMA 2E: Para todo $\tau \in (0, T]$, encontrar $p \in W$ tal que

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1^2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_2^2} - r \frac{\partial p}{\partial S_1} S_1 - r \frac{\partial p}{\partial S_2} S_2 + rp = 0, \quad (3.44)$$

com condição inicial,

$$p(S_1, S_2, 0) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

condição de contorno,

$$p(S_1, S_2, T - \tau) = \bar{p}(S_1, S_2) = (Ee^{-r\tau} - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+, \quad \forall (S_1, S_2) \in \partial\Omega.$$

Definindo o conjunto de funções admissíveis,

$$W = \{v \in H^1(\Omega) ; v(S_1, S_2) = \bar{p}(S_1, S_2) \text{ em } \partial\Omega\},$$

e o espaço das variações admissíveis,

$$W_0 = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ em } \partial\Omega\},$$

multiplicando a equação (3.44) por v e integrando no domínio Ω , obtém-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v\right) &- \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(S_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1^2}, v\right) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(S_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_2^2}, v\right) - r \left(\frac{\partial p}{\partial S_1} S_1, v\right) - \\ &- r \left(\frac{\partial p}{\partial S_2} S_2, v\right) + r(p, v) = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1^2} &= \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{\partial}{\partial S_1} \left[S_1^2 \frac{\partial p}{\partial S_1} \right] - \sigma_1^2 S_1 \frac{\partial p}{\partial S_1}, \\ \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_2^2} &= \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial}{\partial S_2} \left[S_2^2 \frac{\partial p}{\partial S_2} \right] - \sigma_2^2 S_2 \frac{\partial p}{\partial S_2}, \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v\right) &- \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial S_1} \left[S_1^2 \frac{\partial p}{\partial S_1} \right], v\right) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial S_2} \left[S_2^2 \frac{\partial p}{\partial S_2} \right], v\right) - \\ &- (r - \sigma_1^2) \left(\frac{\partial p}{\partial S_1} S_1, v\right) - (r - \sigma_2^2) \left(\frac{\partial p}{\partial S_2} S_2, v\right) + r(p, v) = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Usando integração por partes no segundo e no terceiro termo da equação (3.46), e dado que $v \in W_0(\Omega)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v\right) &+ \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(S_1 \frac{\partial p}{\partial S_1}, S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1}\right) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(S_2 \frac{\partial p}{\partial S_2}, S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2}\right) - \\ &- (r - \sigma_1^2) \left(S_1 \frac{\partial p}{\partial S_1}, v\right) - (r - \sigma_2^2) \left(S_2 \frac{\partial p}{\partial S_2}, v\right) + r(p, v) = 0. \end{aligned}$$

Desta forma o problema de precificação de opções de venda em duas dimensões pode ser formulado como segue

PROBLEMA 2EV: Para $\tau \in [0, T]$, encontrar $p(\tau) \in W$ satisfazendo a equação variacional

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v\right) + a(p, v) = 0 \quad \forall v \in W_0 \quad (3.47)$$

e condição inicial,

$$(p(S_1, S_2, 0), v) = ((E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+, v) \quad \forall v \in W_0$$

onde a forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : W \times W_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} a(p, v) &= \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(S_1 \frac{\partial p}{\partial S_1}, S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1} \right) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(S_2 \frac{\partial p}{\partial S_2}, S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} \right) - \\ &\quad - (r - \sigma_1^2) \left(S_1 \frac{\partial p}{\partial S_1}, v \right) - (r - \sigma_2^2) \left(S_2 \frac{\partial p}{\partial S_2}, v \right) + r(p, v). \end{aligned}$$

Como no caso unidimensional, tem-se a existência e unicidade da solução da formulação variacional pelo teorema de J. L. Lions que é apresentado em Brezis[22].

3.3.2 Opções Americanas

No caso da modelagem matemática da precificação de opções Americanas em duas dimensões, segue-se a mesma idéia apresentada para uma dimensão. Verifica-se que este problema pode ser formulado como um *Problema de Fronteira Livre* da seguinte maneira dividindo em duas regiões, um onde deve-se exercer a opção

$$P(S_1, S_2, t) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1 \partial S_2} + r \frac{\partial P}{\partial S_1} S_1 \\ &+ r \frac{\partial P}{\partial S_2} S_2 - rP \leq 0, \quad 0 \leq S_1 \leq S_{1f}, \quad 0 \leq S_2 \leq S_{2f}, \end{aligned}$$

outra onde não é ótimo o exercício da opção

$$P(S_1, S_2, t) > (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1 \partial S_2} + r \frac{\partial P}{\partial S_1} S_1 \\ &+ r \frac{\partial P}{\partial S_2} S_2 - rP = 0, \quad S_{1f} \leq S_1 \leq \infty, \quad S_{2f} \leq S_2 \leq \infty. \end{aligned}$$

As condições de interface entre as duas regiões no ponto S_f são

$$\begin{aligned} P(S_{1f}(t), S_{2f}(t), t) &= (E - \text{Min}\{S_{1f}(t), S_{2f}(t)\})^+, \\ \frac{\partial P}{\partial n}(S_{1f}(t), S_{2f}(t), t) &= -1. \end{aligned}$$

A condição de tempo final ou no vencimento é

$$P(S_1, S_2, T) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

e condição de contorno,

$$P(S_1, S_2, t) = (Ee^{-r(T-t)} - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+, \quad \forall (S_1, S_2) \in \partial\Omega_\infty.$$

Formulação Variacional

Como no caso da opção Européia faz-se uma transformada para um problema de valor inicial e assume-se que a covariância entre S_1 e S_2 é igual a zero, desta forma a correlação de S_1 e S_2 também será igual a zero,

$$\text{cov}(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow \rho_{S_1 S_2} = 0.$$

O problema de opções Americanas de venda bidimensional pode ser expresso por

PROBLEMA 2A: Para $\tau \in [0, T]$, encontrar $P \in Y$ tal que, na região onde deve-se realizar o exercício da opção

$$P(S_1, S_2, \tau) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} - r \frac{\partial P}{\partial S_1} S_1 - r \frac{\partial P}{\partial S_2} S_2 + \\ + rP \geq 0, \quad \tau > 0, \quad 0 \leq S_1 \leq S_{1f}, \quad 0 \leq S_2 \leq S_{2f}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

e na região onde o exercício da opção não é ótimo,

$$P(S_1, S_2, \tau) > (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} - r \frac{\partial P}{\partial S_1} S_1 - r \frac{\partial P}{\partial S_2} S_2 + \\ + rP = 0, \quad \tau > 0, \quad S_{1f} \leq S_1 \leq S_1^{max}, \quad S_{2f} \leq S_2 \leq S_2^{max}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

com condições de interface entre as duas regiões,

$$\begin{aligned} P(S_{1f}, S_{2f}, T - \tau) &= (E - \text{Min}\{S_{1f}, S_{2f}\})^+, \\ \frac{\partial P}{\partial n}(S_{1f}, S_{2f}, T - \tau) &= -1, \end{aligned}$$

condição inicial,

$$P(S_1, S_2, 0) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

e condição de contorno,

$$P(S_1, S_2, T - \tau) = (Ee^{-r(T-t)} - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+, \quad \forall (S_1, S_2) \in \partial\Omega.$$

Definindo-se o subconjunto das funções limitadas inferiormente por $g(S)$ que é o valor intrínseco (Payoff), no caso de opções de venda $g(S) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+$, para compra $g(S) = (\text{Min}\{S_1, S_2\} - E)^+$, como

$$Y = \{v \in W ; v(S_1, S_2, \tau) \geq g(S_1, S_2) \quad \text{q.s. em } \Omega\},$$

obeserva-se que a soma das integrais no domínio Ω do produto da equação (3.48) e (3.49) por $v - P$, onde v é uma função teste de Y , é dada pela inequação

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, (v - P) \right) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2}, (v - P) \right) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2}, (v - P) \right) \\ - r \left(\frac{\partial P}{\partial S_1} S_1, (v - P) \right) - r \left(\frac{\partial P}{\partial S_2} S_2, (v - P) \right) \\ + r(P, (v - P)) \geq 0. \end{aligned}$$

Considerando que

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} = \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{\partial}{\partial S_1} \left[S_1^2 \frac{\partial P}{\partial S_1} \right] - \sigma_1^2 S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} = \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial}{\partial S_2} \left[S_2^2 \frac{\partial P}{\partial S_2} \right] - \sigma_2^2 S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2}$$

resulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, (v - P) \right) &- \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial S_1} \left[S_1^2 \frac{\partial P}{\partial S_1} \right], (v - P) \right) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial S_2} \left[S_2^2 \frac{\partial P}{\partial S_2} \right], (v - P) \right) \\ &- (r - \sigma_1^2) \left(\frac{\partial P}{\partial S_1} S_1, (v - P) \right) - (r - \sigma_2^2) \left(\frac{\partial P}{\partial S_2} S_2, (v - P) \right) \\ &+ r(P, (v - P)) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Usando a integração por partes no segundo e terceiro termo na equação (3.50), e dado que $v, P \in Y$, e

$$\frac{\partial p}{\partial S_1}(v - P) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial S_2}(v - P) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, v - P \right) &+ \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(S_1^2 \frac{\partial P}{\partial S_1}, \frac{\partial}{\partial S_1}(v - P) \right) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(S_2^2 \frac{\partial P}{\partial S_2}, \frac{\partial}{\partial S_2}(v - P) \right) - \\ &- (r - \sigma_1^2) \left(S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1}, v - P \right) - (r - \sigma_2^2) \left(S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2}, v - P \right) \\ &+ r(P, v - P) \geq 0 \end{aligned}$$

Desta forma o problema de precificação de opções de venda Americanas bidimensional pode ser formulado como

PROBLEMA 2AV: Para $\tau \in [0, T]$ encontrar $P(\tau) \in Y$ satisfazendo a inequação variacional

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, v - P \right) + a(P, v - P) \geq 0, \quad v \in Y$$

e a condição inicial

$$P(S_1, S_2, 0) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

com

$$\begin{aligned} a(P, v) &= \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1}, S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1} \right) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2}, S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} \right) - \\ &- (r - \sigma_1^2) \left(S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1}, v \right) - (r - \sigma_2^2) \left(S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2}, v \right) \\ &+ r(P, v) = 0. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Como no caso unidimensional, dado que a forma bilinear tem as mesmas propriedades, de continuidade e de coercividade, a existência e unicidade da solução do **PROBLEMA 2AV** são também assegurados pelo teorema de J. L. Lions.

Capítulo 4

Métodos Numéricos

São apresentadas aproximações por elementos finitos no domínio espacial e por diferenças finitas no domínio temporal para os problemas de precificação de opções Europeias e americanas em uma e duas dimensões.

4.1 Problemas Unidimensionais

4.1.1 Opção Europeia

Considera-se inicialmente a equação de Black & Scholes como apresentada em (3.23),

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} - r \frac{\partial p}{\partial S} S + rp = 0$$

com condição inicial

$$p(S, 0) = (E - S)^+$$

e condição de contorno,

$$p(0, T - \tau) = Ee^{-r\tau} \quad \text{e} \quad p(S_{max}, T - \tau) = 0,$$

cuja forma variacional consiste em:

PROBLEMA EV: Para $\tau \in [0, T]$, encontrar $p \in U_\tau$ tal que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v \right) + a(p, v) = 0, \quad \forall v \in U_0,$$

com condição inicial

$$(p(S, 0), v) = ((E - S)^+, v), \quad \forall v \in U_0,$$

e $a(\cdot, \cdot) : U_\tau \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$a(p, v) = \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial p}{\partial S}, S \frac{\partial v}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial p}{\partial S}, v \right) + r(p, v).$$

4.1.1.1 Aproximação por Elementos Finitos

Seja $D_h \subset H^1(0, S_{max})$ um subespaço de elementos finitos lagrangiano de classe C^0 e grau k . A aproximação por elementos finitos do PROBLEMA EV, correspondente a opções Européias, consiste em

PROBLEMA Eh: Encontrar $p_h \in U_\tau^h = D_h \cap U_\tau$ tal que

$$\left(\frac{\partial p_h}{\partial \tau}, v_h \right) + a(p_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in U_0^h = D_h \cap U_0,$$

com condição inicial

$$(p_h(0), v_h) = ((E - S)^+, v_h), \quad \forall v_h \in U_0^h,$$

e

$$a(p_h, v_h) = \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial p_h}{\partial S}, S \frac{\partial v_h}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial p_h}{\partial S}, v_h \right) + r(p_h, v_h). \quad (4.1)$$

A ideia central deste método é construir uma partição do domínio em subregiões denominadas de **elementos**, estabelecer pontos nesta partição, denominados de **nós**, nos quais a solução aproximada será avaliada e construída com base de funções polinomiais em geral associadas a cada nó da partição e caracterizada por não se anularem apenas nos elementos adjacentes ao nó associado. A determinação de cada função de base é obtida pela imposição de um conjunto de restrições dos nós. Diz-se que a aproximação é conforme quando o conjunto $U_\tau^h \subset U_\tau$.

O método de elementos finitos introduz funções base com suporte “*compacto*”

localizados nos pontos nodais do elementos, assim tem-se:

$$p_h(S) = \sum_{i=1}^n p_i(t) N_i(S) \quad (4.2)$$

$$v_h = \sum_{i=2}^{n-1} v_i N_i(S). \quad (4.3)$$

Estas funções $\{N_i(S)\}_i^n$ são chamadas também funções de interpolação globais ou funções coordenadas associadas ao nó i , possuem a característica de valer um no nó i e zero nos demais. Observa-se que valores nodais $p_i(t)$ são dependentes do tempo.

Substituindo eq.(4.3), no problema variacional aproximado, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n v_i \left\{ \left(N_i, \frac{\partial p_h}{\partial \tau} \right) + a(N_i, p_h) \right\} = 0, \quad \forall v_i \in \mathbb{R},$$

como v_i é arbitrario, tem-se:

$$\left(N_i, \frac{\partial p_h}{\partial \tau} \right) + a(N_i, p_h) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Considerando (4.2), encontra-se:

$$\left(N_i, \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial \tau}(\tau) N_j(S) \right) + a \left(N_i, \sum_{j=1}^n p_j(\tau) N_j(S) \right) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial p_j}{\partial \tau}(\tau) (N_i, N_j(S)) + p_j(\tau) a(N_i, N_j(S)) \right\} = 0. \quad (4.4)$$

Definindo a matriz de “massa” M , como

$$M_{ij} = (N_i, N_j) = \int_0^{S_{max}} N_i(S) N_j(S) dS,$$

e a Matriz de “rigidez” K , como

$$K_{ij} = a(N_i, N_j) = \int_0^{S_{max}} \left(\frac{\sigma^2}{2} S N_{i,S} S N_{j,S} - (r - \sigma^2) S N_i N_{j,S} + r N_i N_j \right) dS,$$

e considerando os valores prescritos no contorno tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n-1} \left\{ M_{ij} \frac{\partial p_j}{\partial \tau}(\tau) + K_{ij} p_j(\tau) \right\} &= 0 - M_{i1} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} - M_{in} \frac{\partial p_n}{\partial \tau} - K_{i1} p_1 - K_{in} p_n \\ &= R_i(\tau), \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Deste modo o problema aproximado, corresponde ao sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem,

$$M \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \tau}(\tau) + K \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{R}(\tau),$$

que será resolvido pelo método de Euler implícito, apresentado a seguir

4.1.1.2 Aproximação no Tempo

Denota-se por $\partial_\tau p(\tau)$ a aproximação por diferenças finitas implícitas de primeira ordem para $\frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau)$. Dividindo o intervalo $[0, T]$ em sub-intervalos $[\tau_{m-1}, \tau_m]$, onde $\tau_m = m\Delta\tau$, $m = 0, 1, 2, \dots, m_{max}$ com $\tau_0 = 0$ e $\tau_{m_{max}} = T$, o esquema de Euler implícito, para aproximação do termo $\frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau)$ é dado por

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau_m) \approx \partial_\tau p^m = \frac{p^{m+1} - p^m}{\Delta\tau}.$$

Assim a aproximação por diferenças finitas consiste em

PROBLEMA Ehm : Para $m = 0, 1, 2, \dots$ encontrar $p_h^m \in U_\tau^h$ satisfazendo

$$(\partial_\tau p_h^m, v_h) + a(p_h^{m+1}, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in U_0^h,$$

e a condição inicial

$$(p_h^0, v_h) = ((E - S)^+, v_h), \quad \forall v_h \in U_0^h$$

com

$$a(p_h^{m+1}, v_h) = +\frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial p_h^{m+1}}{\partial S}, S \frac{\partial v_h}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial p_h^{m+1}}{\partial S}, v_h \right) + r(p_h^{m+1}, v_h).$$

Considerando a definição de $\partial_\tau p(\tau)$ e introduzindo as condições de contorno o *PROBLEMA Ehm* resulta no seguinte sistema de equações algébricas, para cada $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$(M + \Delta\tau K)\mathbf{P}^{m+1} = \Delta\tau\mathbf{R}^{m+1} - M\mathbf{P}^m,$$

M é a matriz de massa, K a matriz de rigidez, \mathbf{R}^{m+1} é o vetor de ações nodais no instante $m + 1$, resultando da imposição das condições de contorno, \mathbf{P}^m e \mathbf{P}^{m+1} são os valores nodais nos instantes m e $m + 1$, respectivamente.

4.1.1.3 Análise Numérica - Opções Europeias

A análise numérica detalhada de equações variacionais parabólicas pode ser encontrada em Thomé [24]. Verifica-se que para elementos lineares ($k = 1$) o problema semi-discreto apresenta a taxa de convergência do erro de discretização da ordem de h^2 na norma L^2 , ou seja

$$\|p(\tau) - p_h(\tau)\| \leq \tilde{C}h^2 \left(|p_0|_2 + \sup_{\tau \leq T} \left| \frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau) \right|_2 + \sup_{\tau \leq T} |p|_2 \right) + \tilde{C}_2 h^2 \sup_{\tau \leq T} |p|_2$$

sendo que esta estimativa apresenta taxas ótimas de convergência.

Já para o problema totalmente discreto usando o esquema de Euler implícito tem-se que o erro total na discretização, na norma L^2 , é da ordem de $h^2 + \Delta\tau$. Esta análise está fundamentada na coercividade da forma bilinear e na regularidade da solução exata $p(\tau)$.

4.1.2 Opções Americanas

Como foi apresentado anteriormente, o problema das opções Americanas é formulado como um **problema de fronteira livre**, da seguinte maneira:

PROBLEMA A: Para $\tau \in [0, T]$, encontrar $P(S, \tau) \in K$ satisfazendo

$$P(S, \tau) = (E - S)^+,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rS \frac{\partial P}{\partial S} + rP \geq 0; \quad 0 \leq S \leq S_f, \quad (4.5)$$

e

$$P(S, \tau) > (E - S)^+,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rS \frac{\partial P}{\partial S} + rP = 0; \quad S_f \leq S \leq S_{max}, \quad (4.6)$$

com condições de interface entre as duas regiões

$$P(S_f, T - \tau) = (E - S_f)^+, \quad \frac{\partial P}{\partial S}(S_f, T - \tau) = -1,$$

condição inicial,

$$P(S, 0) = (E - S)^+,$$

e condições de contorno,

$$P(0, T - \tau) = Ee^{-r\tau}, \quad P(S_{max}, T - \tau) = 0.$$

cuja forma variacional é dada por:

PROBLEMA AV: Para todo $\tau \in (0, T]$, encontrar $P(S, \tau) \in K$ satisfazendo à inequação variacional

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, v - P \right) + a(P, v - P) \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (4.7)$$

e a condição inicial

$$(P(S, 0), v) = ((E - S)^+, v) \quad \forall v \in K,$$

com

$$a(P, v) = \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial P}{\partial S}, S \frac{\partial v}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial P}{\partial S}, v \right) + r(P, v), \quad (4.8)$$

e K conforme definido anteriormente em (3.32).

4.1.2.1 Método de Elementos Finitos

Para construção de uma aproximação por elementos finitos, define-se a aproximação K_h para o conjunto K ,

$$K_h = \{v_h \in U_\tau^h; v_h(S_i) \geq g(S_i), i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (4.9)$$

ou seja, a restrição de desigualdade será verificada apenas no pontos nodais da malha de elementos finitos.

A aproximação de uma inequação variacional parabólica será semelhante ao caso de uma elíptica se considerarmos uma discretização no tempo, isto é, aproxima-se o domínio do tempo $[0, T]$ por uma partição $0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m_{max}} = T$ com intervalos uniformes de tempo $\Delta\tau$.

Utilizando aproximações $P : \tau \rightarrow K$ de $P : [0, T] \rightarrow K$, surgindo a aproximação do problema de opções Americanas de venda:

PROBLEMA Am: Para $m = 0, 1, 2, \dots$, encontrar $P^m \in K$ tal que,

$$\left(\frac{P^{m+1} - P^m}{\Delta\tau}, v - P^{m+1} \right) + a(P^{m+1}, v - P^{m+1}) \geq 0, \quad \forall v \in K$$

com condição inicial

$$(P^0, v) = (P(S, 0), v), \quad \forall v \in K$$

onde $a(\cdot, \cdot)$ é dado por:

$$\begin{aligned} a(P^{m+1}, v - P^{m+1}) &= \frac{\sigma^2}{2} \left(S \frac{\partial P^{m+1}}{\partial S}, S \frac{\partial v}{\partial S} - S \frac{\partial P^{m+1}}{\partial S} \right) \\ &\quad - (r - \sigma^2) \left(S \frac{\partial P^{m+1}}{\partial S}, v - P^{m+1} \right) \\ &\quad + r (P^{m+1}, v - P^{m+1}) \end{aligned}$$

Usando o *Método de Galerkin* tem-se o problema variacional aproximado no subespaço de dimensão finita. Ficando formulado da seguinte forma:

PROBLEMA Ahm: Para $m = 0, 1, 2, \dots$, encontrar $P^m \in K_h$ tal que, para todo

$v_h \in K_h$,

$$\left(\frac{P_h^{m+1} - P_h^m}{\Delta\tau}, v_h - P_h^{m+1} \right) + a(P_h^{m+1}, v_h - P_h^{m+1}) \geq 0 \quad (4.10)$$

com condição inicial

$$(P_h^0, v_h) = (P(S, 0), v_h), \quad \forall v_h \in K_h.$$

4.1.2.2 Análise Numérica - Opções Americanas

Apresentando-se a estimativa obtida por Johnson [25], embora este resultado tenha levado em consideração uma forma bilinear particular de um problema de obstáculo, os argumentos da demonstração sugerem que é possível generalizar o resultado sem perdas na ordem da estimativa.

A estimativa do erro para aproximação de uma inequação variacional parabólica assumindo regularidade sobre a solução exata é dada pelo teorema.

Teorema *Supondo P a solução da inequação (3.35), e P_h a solução do problema correspondente discreto, inequação (4.10). Então, existe uma constante C independente de $\Delta\tau$ e h tal que:*

$$\max_n \|P^n - P_h^n\|_0 + \left(\sum_{n=1}^N \|P^n - P_h^n\|_1^2 \Delta\tau \right)^{1/2} \leq C[(\log \Delta\tau^{-1})^{1/4} \Delta\tau^{3/4} + h] \quad (4.11)$$

4.2 Problemas Bidimensionais

4.2.1 Opções Européias

A equação de Black & Scholes em duas dimensões é dada pela equação (3.44), onde tem-se que $p(S_1, S_2, \tau)$ é o prêmio da opção no instante τ , quando as ações custam $S_1 = S_1(\tau)$ e $S_2 = S_2(\tau)$

PROBLEMA 2E: Para todo $\tau \in (0, T]$, encontrar $p \in W$ tal que

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1^2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_2^2} - r \frac{\partial p}{\partial S_1} S_1 - r \frac{\partial p}{\partial S_2} S_2 + rp = 0,$$

com condição de inicial,

$$p(S_1, S_2, 0) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

condição de contorno,

$$p(S_1, S_2, T - \tau) = \bar{p}(S_1, S_2) = (Ee^{-r\tau} - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+, \quad \forall (S_1, S_2) \in \partial\Omega.$$

cuja forma variacional é dada por

PROBLEMA 2EV: Para todo $\tau \in (0, T]$, encontrar $p \in W$ tal que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}, v \right) + a(p, v) = 0 \quad \forall v \in W_0$$

com condição inicial,

$$(p(S_1, S_2, 0), v) = ((E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+, v) \quad \forall v \in W_0$$

e

$$\begin{aligned} a(p, v) = & \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(S_1 \frac{\partial p}{\partial S_1}, S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1} \right) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(S_2 \frac{\partial p}{\partial S_2}, S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} \right) - \\ & - (r - \sigma_1^2) \left(S_1 \frac{\partial p}{\partial S_1}, v \right) - (r - \sigma_2^2) \left(S_2 \frac{\partial p}{\partial S_2}, v \right) + r(p, v). \end{aligned}$$

Método de Elementos Finitos

Seja D_h o subespaço de elementos finitos lagrangiano de classe C^0 e grau k . A aproximação por elementos finitos do PROBLEMA 2EV, consiste em

PROBLEMA 2Eh: Para $m = 0, 1, 2, \dots$, achar $p_h \in W^h = D_h \cap W$ tal que:

$$\left(\frac{\partial p_h}{\partial \tau}, v_h \right) + a(p_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in W_0^h = D_h \cap W_0, \quad (4.12)$$

com condição inicial

$$(p_h(0), v_h) = ((E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+, v_h) \quad \forall v_h \in W_0^h,$$

com $\tau \in [0, T]$, e $\frac{\partial p_h}{\partial \tau}$ a derivada de $p_h(\tau)$ em relação à variável τ . Lembrando-se que para cada $\tau \in [0, T]$, $\frac{\partial p_h}{\partial \tau} \in W^h$. O PROBLEMA 2Eh, é denominado de aproximação semi-discreta ou aproximação contínua no tempo, desde que a variável temporal não está sendo discretizada.

No problema totalmente discretizado usa-se diferença finita na discretização temporal, mais precisamente aplicou-se o esquema de *Euler implícito*, Primeiramente, divide-se o intervalo $[0, T]$ em sub-intervalos $[\tau_{m-1}, \tau_m]$, onde $\tau_m = m\Delta\tau$, $m = 1, \dots, m_{max}$ com $\tau_0 = 0$ e $\tau_{m_{max}} = T$. Além disso, seja $p^m = p(\tau_m)$. Logo o esquema de Euler Implícito, para aproximação do termo $p_\tau(\tau)$ é dado por:

$$\partial_\tau p^m = \frac{p^{m+1} - p^m}{\Delta\tau}$$

Logo, substituindo no problema variacional e usando o método de Galerkin, tem-se o problema totalmente discretizado da seguinte forma

PROBLEMA 2Ehm: Para $m = 0, 1, 2, \dots$, achar $p_h^m \in W^h$ tal que:

$$(\partial_\tau p_h^m, v_h) + a(p_h^{m+1}, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in W_0^h \quad (4.13)$$

com condição inicial

$$(p_h^0, v_h) = (p(S_1, S_2, 0), v_h), \quad \forall v_h \in W_0^h.$$

4.2.2 Opções Americanas

O problema de opções Americanas em duas dimensões, foi apresentado anteriormente como um *problema de Fronteira Livre* da seguinte forma:

PROBLEMA 2A: Para todo $\tau \in (0, T]$, encontrar $P \in Y$ tal que, na região onde deve-se realizar o exercício da opção

$$p(S_1, S_2, \tau) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} - r \frac{\partial P}{\partial S_1} S_1 - r \frac{\partial P}{\partial S_2} S_2 + \\ + rP \geq 0, \quad \tau > 0, \quad 0 \leq S_1 \leq S_{1f}, \quad 0 \leq S_2 \leq S_{2f}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

e na região onde o exercício da opção não é ótimo,

$$P(S_1, S_2, \tau) > (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} - r \frac{\partial P}{\partial S_1} S_1 - r \frac{\partial P}{\partial S_2} S_2 + \\ + rP = 0, \quad \tau > 0, \quad S_{1f} \leq S_1 \leq S_1^{max}, \quad S_{2f} \leq S_2 \leq S_2^{max}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

com condições de interface entre as duas regiões,

$$\begin{aligned} P(S_{1f}, S_{2f}, T - \tau) &= (E - \text{Min}\{S_{1f}, S_{2f}\})^+, \\ \frac{\partial P}{\partial n}(S_{1f}, S_{2f}, T - \tau) &= -1, \end{aligned}$$

condição inicial,

$$P(S_1, S_2, 0) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

e condição de contorno,

$$P(S_1, S_2, T - \tau) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+, \quad \forall (S_1, S_2) \in \partial\Omega.$$

Cuja forma variacional consiste em

PROBLEMA 2AV: Para $\tau \in [0, T]$, encontrar $P(\tau) \in Y$ satisfazendo a inequação variacional

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}, v - P \right) + a(P, v - P) \geq 0, \quad v \in Y$$

e a condição inicial

$$P(S_1, S_2, 0) = (E - \text{Min}\{S_1, S_2\})^+,$$

com

$$\begin{aligned} a(P, v) &= \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1}, S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1} \right) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2}, S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} \right) - \\ &- (r - \sigma_1^2) \left(S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1}, v \right) - (r - \sigma_2^2) \left(S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2}, v \right) \\ &+ r(P, v). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Método de Elementos Finitos

Para construção de uma aproximação por elementos finitos, define-se a aproximação Y_h para o conjunto Y ,

$$Y_h = \{v_h \in W^h; v_h(S_i) \geq g(S_i), i = 1, 2, \dots, n\},$$

ou seja, a restrição de desigualdade será verificada apenas no pontos nodais da malha de elementos finitos.

A aproximação de uma inequação variacional parabólica será semelhante ao caso de uma elíptica se considerarmos uma discretização no tempo, isto é, aproxima-se o domínio do tempo $[0, T]$ por uma partição $0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m_{max}} = T$ com intervalos uniformes de tempo $\Delta\tau$.

Assim a aproximação do problema de opções americanas de venda em duas dimensões é dada por

PROBLEMA 2Am: Para $m = 0, 1, 2, \dots$, encontrar $P^m \in Y$ tal que,

$$\left(\frac{P^{m+1} - P^m}{\Delta\tau}, v - P^{m+1} \right) + a(P^{m+1}, v - P^{m+1}) \geq 0$$

com condição inicial

$$(P^0, v) = (P(S_1, S_2, 0), v), \quad \forall v \in Y$$

Usando o *Método de Galerkin* tem-se o problema variacional aproximado no subespaço de dimensão finita. Ficando formulado da seguinte forma:

PROBLEMA 2Ahm: Para $m = 0, 1, 2, \dots$, encontrar $P \in Y_h$ tal que,

$$\left(\frac{P_h^{m+1} - P_h^m}{\Delta\tau}, v_h - P_h^{m+1} \right) + a(P_h^{m+1}, v_h - P_h^{m+1}) \geq 0 \quad (4.17)$$

com condição inicial

$$(P_h^0, v_h) = (P(S_1, S_2, 0), v_h), \quad \forall v_h \in Y_h.$$

4.3 Solução dos Problemas Algébricos

Apresenta-se agora os aspectos relativos à formulação dos algoritmos para solução numérica das equações e inequações variacionais parabólicas para os problemas de precificação de opções.

Em todas as implementações foram utilizados métodos iterativos, mas precisamente o método de sobre-relaxação sucessiva - $SOR(\omega)$, e para o problema de precificação de opções Americanas foi usado o método iterativo de Sobre-Relaxação Sucessiva - $SOR(\omega)$ com projeção sobre o convexo.

Método Iterativo de Sobre-Relaxação Sucessiva - $SOR(\omega)$

Nos métodos iterativos de solução de sistemas lineares $Ax = b$ em geral se calcula a norma do resíduo " $r = b - Ax$ " da solução aproximada e verifica se esta atingiu um valor que torna a solução aceitável, ou seja, a norma do resíduo é um critério de parada do método.

Na precificação de opções Europeias foi usado nas implementações o método de Sobre-Relaxação Sucessiva, sendo que este usa a idéia de que se a direção de p^m para p^{m+1} é uma boa direção para a qual se deve mover a solução, então é melhor mover em $\omega > 1$ vezes mais rápido nessa direção.

Neste método o ω é denominado parâmetro de relaxação. Verifica-se que na

construção do método toma-se uma combinação, ponderada apropriadamente, de $p_i^{m+1,(k+1)}$ e $p_i^{m+1,(k)}$, isto é,

$$p_i^{m+1,(k+1)} = (1 - \omega)p_i^{m+1,(k)} + \omega p_i^{m+1,(k+1)}$$

conduzindo a

$$p_i^{m+1,(k+1)} = (1 - \omega)p_i^{m+1,(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} p_j^{m+1,(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} p_j^{m+1,(k)} \right).$$

Para a precificação de opções Americanas, nas simulações computacionais para a solução do sistema (4.10), foi utilizado o método iterativo de Sobre-Relaxação sucessiva - SOR(ω) com projeção sobre o convexo a cada instante de tempo, ou seja

$$\tilde{P}_j^{m+1,(k+1)} = (1 - \omega)P_i^{m+1,(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} P_j^{m+1,(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} P_j^{m+1,(k)} \right]$$

$$P_j^{m+1,(k+1)} = \min \left[\tilde{P}_j^{m+1,(k+1)}, g(S_j) \right]$$

onde a_{ij} são os coeficientes da matriz do sistema de inequações (4.17) resultante da aproximação por elementos finitos com interpolante linear. No caso de opções de venda $g(S_j) = (E - S_j)^+$, para compra $g(S_j) = (S_j - E)^+$.

O método iterativo converge para $0 < \omega < 2$. Para $\omega = 1$ seria o equivalente ao método de Gauss-Seidel, $\omega < 1$ tem-se sub-relaxação e $\omega > 1$ tem-se sobre-relaxação.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados resultados de experimentos numéricos com o objetivo de ilustrar alguns aspectos importantes relativos à aplicação dos métodos numéricos no mercado financeiro, mas precisamente, ao uso de métodos de elementos finitos para solução numérica de equações e inequações correspondentes a precificação de opções Europeias e Americanas em uma e duas dimensões.

A primeira parte dos experimentos apresentados é destinada a estudos de convergência e validação da implementação computacional. A segunda parte se destina à validação do modelo. Por fim são apresentadas situações de aplicações a contratos de opções que apresentam direito de negociar dois ativos, ou sejam problemas em duas dimensões espaciais como apresentados anteriormente na modelagem do problema de precificação no capítulo 3.

Na solução das equações e inequações foram utilizados métodos iterativos, método de sobre relação sucessiva - $SOR(\omega)$, no caso de opções de estilo Europeu. Já para as opções do estilo Americano, modeladas por inequações, foi usado o método de sobre relação sucessiva - $SOR(\omega)$ com projeção sobre o conjunto de restrições (convexo), como foi apresentado no capítulo anterior. Em todas as simulações apresentadas usou-se o parâmetro de relação ω igual a 1.8, dado que apresentou menor custo computacional (menor número de iterações).

5.1 Estudo de Truncamento do Domínio

Exemplo 1: Condição de Contorno de Dirichlet

Para se tratar numericamente o problema de precificação de opção torna-se necessário truncar o domínio semi-inifito, onde está definido o problema contínuo, em um domínio finito. Este exemplo visa o estudo da influência deste truncamento em S_{max} no valor de uma opção européia previsto por aproximações via métodos de elementos finitos.

A aproximação mais comumente adotada é interromper o domínio em algum ponto, como descrito anteriormente no capítulo 3, colocando-se uma borda sobre o domínio onde a opção é intensamente “dentro do preço” e impondo-se uma condição de contorno aproximada nesta borda. Pode-se usar condição de contorno de Dirichlet

$$c(0, \tau) = 0, \quad c(S_{max}, \tau) = S_{max} - Ee^{-r(\tau)}. \quad (5.1)$$

O erro relativo para análise da influência da condição de contorno no valor da opção é definido

$$e_r = \frac{c_h^{m_{max}}(\bar{S}) - c(\bar{S}, \tau_{m_{max}})}{c(\bar{S}, \tau_{m_{max}})} [\%].$$

onde $c_h^{m_{max}}(\bar{S})$ é o valor aproximado da opção de compra Europeia e $c(\bar{S}, \tau_{m_{max}})$ a solução analítica (3.16) no tempo $\tau_{m_{max}} = m_{max} \times \Delta\tau$, $S = \bar{S}$ correspondente ao valor do ativo.

Os parâmetros usados são extraídos do livro do Hull [10], sendo eles: taxa de juros (r) igual a 10%/ano, volatilidade (σ) de 20%/ano, tempo de exercício de 0,5 ano e preço de exercício $R\$ 40,00$.

Nas Tabelas 2, 3 e 4 são apresentados os resultados para o valor do ativo (\bar{S}) igual a $R\$ 42,00$ e para diferentes valores de S_{max} , obtidos com interpolações lineares, quadráticas e cúbicas, respectivamente, utilizando $\Delta\tau$ igual 5×10^{-4} , com 1000 passos no tempo ($m = 1000$) e condição de contorno para S_{max} dada por (5.1). O resultado analítico dado por (3.16) é de $R\$ 4,759422387$.

Tabela 2 - Valor da opção aproximado por elementos finitos usando elementos lineares e seu erro relativo à solução analítica

S_{max}	N. Elementos	$c_h^{max}(\bar{S})$	e_r
45	45	4,60363	-3,273%
46	46	4,67969	-1,675%
47	47	4,72035	-0,820%
48	48	4,74054	-0,396%
49	49	4,74988	-0,200%
50	50	4,75392	-0,115%
60	60	4,75650	-0,061%
70	70	4,75650	-0,061%
80	80	4,75650	-0,061%
90	90	4,75650	-0,061%
100	100	4,75650	-0,061%

Tabela 3 - Valor da opção aproximado por elementos finitos usando elementos quadrático e seu erro relativo à solução analítica

S_{max}	N. Elementos	$c_h^{max}(\bar{S})$	e_r
45	45	4,60408	-3,263%
46	46	4,68056	-1,656%
47	47	4,72169	-0,792%
48	48	4,74233	-0,359%
49	49	4,75201	-0,155%
50	50	4,75628	-0,066%
60	60	4,75914	-0,006%
70	70	4,75914	-0,006%
80	80	4,75914	-0,006%
90	90	4,75914	-0,006%
100	100	4,75914	-0,006%

Tabela 3 - Valor da opção aproximado por elementos finitos usando elementos cúbicos e seu erro relativo à solução analítica

S_{max}	N. Elementos	$c_h^{m_{max}}(\bar{S})$	e_r
45	45	4,60408	-3,263%
46	46	4,68056	-1,656%
47	47	4,72169	-0,792%
48	48	4,74232	-0,359%
49	49	4,75201	-0,155%
50	50	4,75628	-0,066%
60	60	4,75914	-0,006%
70	70	4,75914	-0,006%
80	80	4,75914	-0,006%
90	90	4,75914	-0,006%
100	100	4,75914	-0,006%

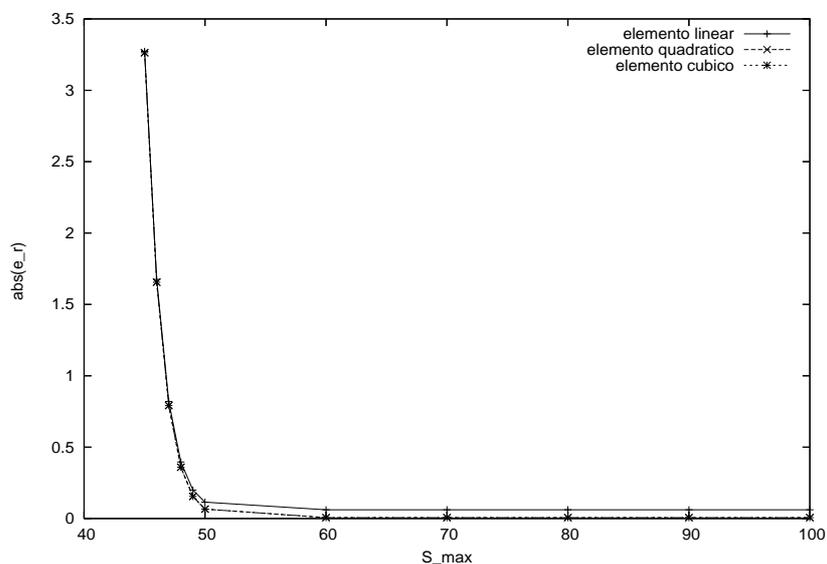


FIGURA 5.1: Análise do erro relativo absoluto para solução aproximada por elemento finito com elemento linear, quadrático e cúbico para a condição de contorno de Dirichlet

Observe que o valor do ativo R\$ 42,00 adotado, obviamente requer S_{max} maior do que R\$ 42,00. A escolha $S_{max} = R\$ 45,00$ é inadequada por estar muito próxima

do valor do ativo o que acarreta um erro relativo elevado em todos os três casos de interpolação considerados. Já para $S_{max} \geq R\$ 60,00$, ou seja, $S_{max} \geq 1.5E$, observa-se uma grande redução do erro relativo indicando que o truncamento do domínio pode ser feito com uma certa segurança para valores $S_{max} \geq 1.5E$. Na Figura 5.1, apresenta-se o gráfico para os erros relativos (com elementos lineares, quadrático e cúbico) onde se observa um comportamento assintótico conforme aumenta-se o valor de S_{max} . Basicamente o efeito do truncamento é desprezível para $S_{max} \geq 1.5E$.

É importante observar que os resultados apresentados nas *Tabelas 3 e 4*, correspondentes a interpolações lagrangianas quadráticas e cúbicas são mais precisos que os apresentados por Topper [21] na página 118, para o mesmo problema de opções Européia de compra, usando os mesmos parâmetros de modelagem e o método de colocação para a solução aproximada associada a uma interpolação cúbica de Hermite, com valor $e_r = -3,310\%$ para $S_{max} = 45$ e $e_r = -0,058\%$ para $S_{max} = 100$.

Exemplo 2: Condição de Contorno de Neumann

O mesmo estudo do efeito do truncamento do domínio foi realizado para a condição de contorno de Neumann dada por

$$c(0, t) = 0, \quad \frac{\partial c(S_{max}, \tau)}{\partial S} = 1 \quad (5.2)$$

para opções Européias, conforme apresentado no *PROBLEMA EV**.

Os resultados das simulações para o valor do ativo (S) igual a $R\$ 42,00$, e para diferentes valores de S_{max} , com interpolações lineares, quadráticas e cúbicas, são apresentados nas *Tabelas 5, 6 e 7*, respectivamente.

Observa-se que para $S_{max} \geq R\$ 60,00$, isto é, para $S_{max} \geq 1.5E$ o truncamento do domínio não influi significativamente no valor da opção. Observa-se ainda que condições de contorno de Dirichlet são mais robustas do que as condições de Neumann, conforme esperado. A partir de $S_{max} = R\$ 60,00$, com 60 elementos lineares, quadráticos, ou cúbicos, o truncamento não apresenta influência no valor da opção.

Tabela 5 - Valor da opção aproximado por elementos finitos usando elementos lineares e seu erro relativo à solução analítica

S_{max}	N. Elementos	$c_h^{max}(\bar{S})$	e_r
45	45	4,94990	4,002%
46	46	4,85165	1,937%
47	47	4,80048	0,862%
48	48	4,77562	0,340%
49	49	4,76432	0,102%
50	50	4,75952	0,002%
60	60	4,75650	-0,061%
70	70	4,75650	-0,061%
80	80	4,75650	-0,061%
90	90	4,75650	-0,061%
100	100	4,75650	-0,061%

Tabela 6 - Valor da opção aproximado por elementos finitos usando elementos quadrático e seu erro relativo à solução analítica

S_{max}	N. Elementos	$c_h^{max}(\bar{S})$	e_r
45	45	4,95562	4,122%
46	46	4,85669	2,044%
47	47	4,80482	0,954%
48	48	4,77936	0,419%
49	49	4,76762	0,172%
50	50	4,76251	0,065%
60	60	4,75914	-0,006%
70	70	4,75914	-0,006%
80	80	4,75914	-0,006%
90	90	4,75914	-0,006%
100	100	4,75914	-0,006%

Tabela 7 - Valor da opção aproximado por elementos finitos usando elementos cúbicos e seu erro relativo à solução analítica

S_{max}	N. Elementos	$c_h^{m_{max}}(\bar{S})$	e_r
45	45	4,95562	4,122%
46	46	4,85669	2,044%
47	47	4,80482	0,954%
48	48	4,77936	0,419%
49	49	4,76761	0,172%
50	50	4,76251	0,065%
60	60	4,75914	-0,006%
70	70	4,75914	-0,006%
80	80	4,75914	-0,006%
90	90	4,75914	-0,006%
100	100	4,75914	-0,006%

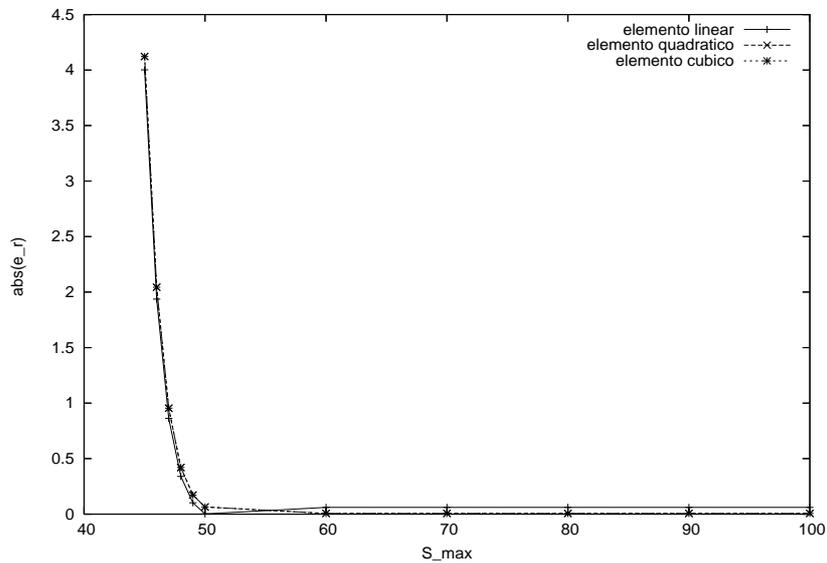


FIGURA 5.2: Análise do erro relativo absoluto para solução aproximada por elemento finito com elemento linear, quadrático e cúbico para a condição de contorno de Neumann

Neste exemplo destacar que os resultados apresentados nas Tabelas 6 e 7, correspondentes a interpolações lagrangianas quadraticas e cúbicas para alguns S_{max} são

mais precisos que os apresentados por Topper [21] na página 118, para o mesmo problema de opções Europeias de compra, usando os mesmos parâmetros de modelagem e o método de colocação para a solução aproximada associada a uma interpolação cúbica de Hermite, com por exemplo valores para o erro relativo $e_r = -0,058\%$ para $S_{max} = 100$.

5.2 Estudos de Convergência

Exemplo 3: Contrato de Opção de Compra

Para o problema de precificação de contratos de opção do estilo Europeu, usa-se a equação de Black & Scholes apresentada na equação (3.5). Para o caso de contratos de opções que dão direito a compra, Black e Scholes encontraram uma solução analítica para esta equação conforme apresentado em (3.16).

Este exemplo tem como objetivo verificar a convergência da solução numérica do problema variacional aproximado, apresentado no capítulo 4, para a solução analítica dada por (3.16).

A taxa de convergência esperada na norma $L^2([0, S_{max}])$, é da ordem de $h^2 + \Delta\tau$, para o problema totalmente discreto usando o esquema de Euler implícito na discretização temporal e o método de elementos finitos na discretização espacial.

Considera-se um contrato de opção de um ativo subjacente qualquer, de compra e estilo Europeu, onde sua volatilidade (σ) é de $30\%/ano$, sendo o preço de exercício (E) igual a $\$100,00$ e o tempo de vencimento de um ano, a taxa de juros (r) aplicada tem o valor de $13\%/ano$.

Usou-se o domínio truncado adequadamente, de acordo com o estudo anterior, no estudo da convergência h . Sendo $S_{max} = R\$ 150,00 = 1.5E$. Neste estudo foi usada a condição de contorno de Dirichlet dada por (3.21).

Foram realizadas discretizações por elementos finitos usando malhas refinadas gradativamente adotando-se 20, 40, 80 e 160 elementos (nel), para verificação da convergência do método. Adotou-se a relação de $\Delta\tau = O(h^2)$ variando-se a quantidade de passos no tempo, em 15, 60, 240 e 960.

A Figura 5.3 apresenta o gráfico de convergência para aproximação do prêmio do contrato de opção do estilo Europeu de compra na norma $\|c - c_h\|_{L^2}$. É confirmada a convergência com a taxa quadrática, como previsto na teoria, como se pode constatar pela inclinação da reta correspondente ao gráfico $-\log(nel) \times \log(erro)$ apresentado na Figura 5.3.

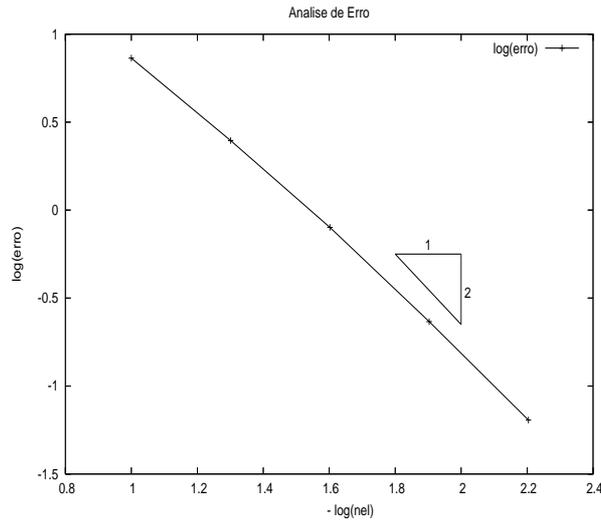


FIGURA 5.3: Análise de Convergência - Opção Europeia de Compra na norma $L^2([0, S_{max}])$

Exemplo 4: Contrato de Opção de Venda

Segue-se o estudo de convergência como no exemplo anterior. O objetivo deste exemplo também é verificar a convergência da solução numérica do problema aproximado para o contrato de opções que dá direito a venda de um ativo subjacente qualquer. Neste caso a solução analítica da equação diferencial passa a ser dada pela equação (3.18) e será usada a condição de contorno de Dirichlet dada por (3.20).

Consideramos um contrato de opção de estilo Europeu de um ativo subjacente qualquer, que dá direito a venda deste ativo no mercado financeiro com volatilidade (σ) de 40%/ano, preço de exercício (E) igual a \$100,00, tempo de vencimento de um ano, a taxa de juros (r) de 19%/ano. O domínio é truncado adequadamente de acordo com o estudo anterior (estudo de truncamento do domínio), sendo $S_{max} =$

R\$ 150,00 = 1.5E. A taxa de convergência esperada é a mesma do exemplo 1, ou seja da ordem de $h^2 + \Delta\tau$ na norma $L^2([0, S_{max}])$.

Foram realizadas discretizações por elementos finitos, usando malhas refinadas gradativamente adotando-se 20, 40, 80, 160 elementos (nel). Adotou-se a relação de $\Delta\tau = O(h^2)$ variando-se a quantidade de passos no tempo, em 15, 60, 240 e 960, respectivamente.

Na Figura 5.4 tem-se o gráfico de convergência para a aproximação do prêmio do contrato de opção do estilo Europeu que dá direito a venda de um ativo subjacente na norma $\|p - p_h\|_{L^2}$. Mais uma vez é obtida convergência com a taxa quadrática como previsto, como se pode verificar pela a inclinação do reta na Figura 5.4.

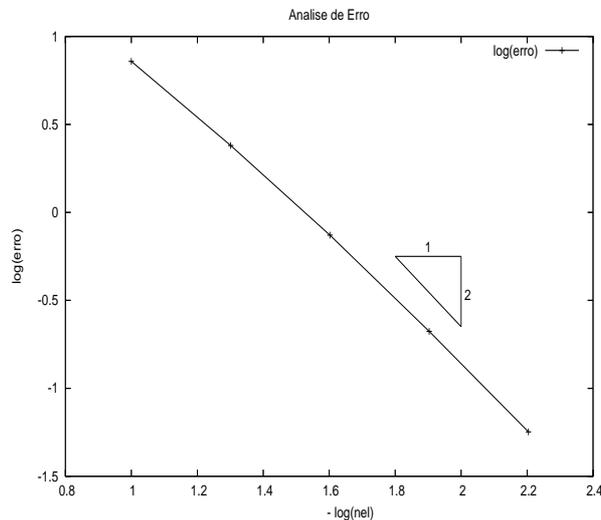


FIGURA 5.4: Análise de Convergência - Opção Européia de Venda na norma $L^2([0, S_{max}])$

É interessante destacar que com estes exemplos testou-se a convergência para os dois tipos de contratos de opções, tanto para as opções de compra, que dão direito ao investidor comprar ativos subjacentes no mercado financeiro, como contratos de opções de venda, sendo que ambos apresentaram convergência na taxa quadrática na norma L^2 como previsto pela análise numérica de problemas parabólicos.

Deve-se observar ainda que as taxas de convergência foram obtidas com malhas muito pouco refinadas, o que atesta as boas propriedades de estabilidade e precisão da formulação de elementos finitos adotada.

Exemplo 5: Simulação Computacional

Seja um contrato de opção de venda de um ativo subjacente fictício do mercado financeiro, do estilo Europeu com os seguintes parâmetros de modelagem: taxa de juros (r) igual a $19\%/ano$, volatilidade (σ) igual a $50\%/ano$, preço de exercício (E) igual a $\$50,00$ e tempo de exercício de $0,3$ ano.

Nesta simulação, como nas anteriores, foi realizada uma discretização por elementos finitos, usando uma malha de 30 elementos no domínio do preço, isto é, 30 elementos no domínio espacial. Na discretização temporal, adotou-se $\Delta\tau = 0,03$.

Usou-se o domínio truncado adequadamente, de acordo com o estudo de truncamento do domínio com $S_{max} = R\$ 100,00 = 2E > 1,5E$. Foi usada a condição de contorno de Dirichlet dada por (3.20).

O intuito desta simulação não é verificar a convergência, mas sim fazer uma comparação dos valores previstos pelo método de elementos finitos, segundo a teoria apresentada no capítulo anterior, com os valores da solução analítica dado pela equação (3.18).

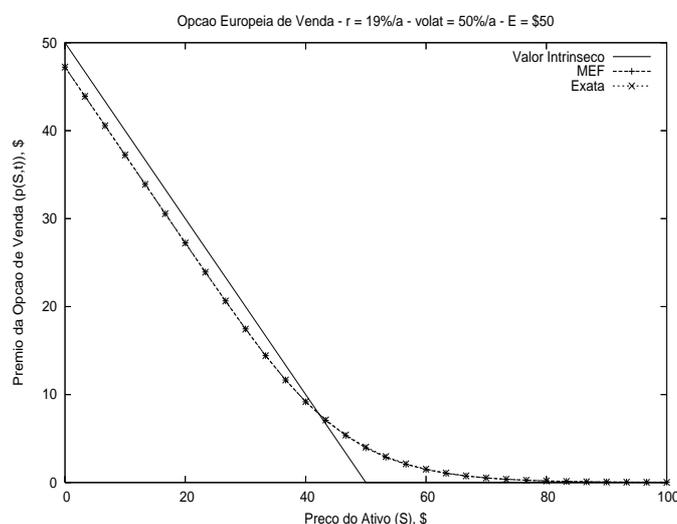


FIGURA 5.5: Comparação do Valor Intrínseco, Solução Exata e Aproximação por Elementos Finitos

Como pode ser visto na Figura 5.5, que apresenta as curvas dos valores obtidos pelo método de elementos finitos e a correspondente a solução analítica para o tempo $\tau = 0,3$ anos, há uma excelente proximidade entre a solução aproximada e a exata.

Não se percebe, visualmente, qualquer diferença entre elas.

Portanto o investidor, pode usar o gráfico da solução numérica para estimar o valor do prêmio dado o valor do ativo subjacente em um determinado instante de tempo. É bom lembrar que soluções analíticas existem apenas em situações simples, como no caso dos contratos de estilo Europeu em uma dimensão espacial. Contratos de opções Americanas, de maior interesse do investidor, não têm solução analítica mesmo em uma dimensão.

5.3 Validação do Modelo

Exemplo 6: Contrato de Opção de Compra da Telebrás

Neste exemplo faz-se um confronto da solução numérica do modelo matemático de Black e Sholes, apresentado no capítulo anterior, com dados do Mercado Financeiro (Mercado de Opções). Com este estudo pretendemos testar mais precisamente a validade do modelo computacional desenvolvido.

Os dados aqui considerados são do contrato de opções do estilo Europeu, que dá direito a compra do ativo subjacente ações da *Telebrás PN*, isto é, opções Europeias de compra das ações da *Telebrás PN*, negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA), com vencimento em junho de 1997. Os dados apresentados no *Apêndice C* da tese de mestrado de Rochman [26], encontram-se disponíveis no site da FGV-EAESP (<http://www.fgvsp.br/academico/producao/>).

Seguindo a idéia explorada nos primeiros exemplos sobre convergência do modelo, foram feitas simulações variando o número de pontos da malha de elementos finitos para analisar o comportamento do método numérico quando são mantidos fixos todos os parâmetros do problema de precificação de opção. Faz-se uma comparação com valores reais do mercado, e não mais com as soluções exatas do modelo de Black e Scholes apresentadas nas equações (3.16) e (3.18), para contratos de opções de compra e de venda, respectivamente.

No primeiro gráfico, Figura 5.6, tem-se um contrato de opção cujo preço de exercício é de R\$ 135, 00, com taxa de juros livre de risco de 21, 20%, correspondente

ao *CDI Over Médio*. A volatilidade implícita anual do período considerado foi de 45,32%ano.

Acompanhando as séries dos contratos de opções verifica-se que quando o tempo que falta para o vencimento da opção em ano é de 0,0437, tem-se que o ativo subjacente, a ação da *Telebrás PN*, estava com a cotação na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) de R\$ 146,70 e o prêmio da opção, valor de compra do título de opção, estava avaliado na BOVESPA em R\$ 14,10.

Utilizou-se na simulação elementos lineares, e malhas para o preço do ativo subjacente, com 10, 20, 25, 50, 100, 150, 200 elementos. Os domínios são truncados adequadamente. De acordo com o estudo de truncamento apresentado no primeiro exemplo, usou-se as condições de contorno de Dirichlet dada por (3.20). Adotou-se $\Delta\tau$ igual 87.4×10^{-5} para a primeira malha, isto é, para a malha de 10 elementos do ativo, ações *Telebrás PN*, mantendo-se $\Delta\tau = O(h^2)$ para as malhas subsequentes.

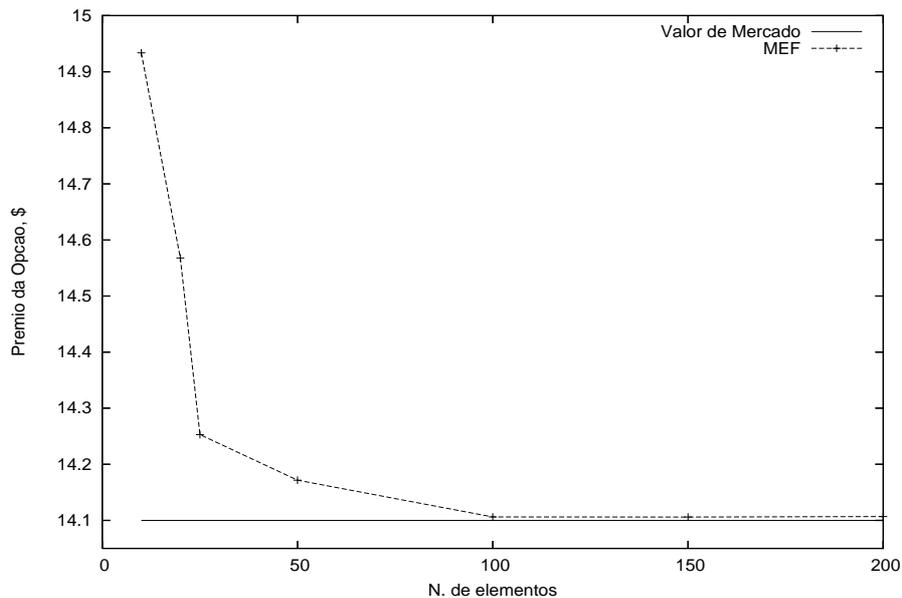


FIGURA 5.6: Convergência da previsão por elementos finitos para valor de mercado

Como pode ser verificado na Figura 5.6, com apenas 100 elementos do ativo subjacente já se encontra uma boa estimativa do valor de fechamento do mercado para o prêmio da opção de compra da *Telebrás PN*. Para 100 elementos obtve-se um valor aproximado de R\$ 14,1061 que difere em menos de um centavo do valor

de fechamento do mercado que é de R\$ 14,10.

Seguindo a mesma idéia do exemplo anterior analisa-se outro contrato de opção real do mercado financeiro, que também dá direito a compra da ação da *Telebrás PN* do estilo Europeu, cujo preço de exercício tem o valor de R\$ 100,00, a taxa de juros livre de risco aplicado estava em 22,12%ano. Também se adotou o *CDI Over Médio* como a taxa de juros. A volatilidade implícita anual considerada foi de 36,40%ano.

Acompanhando as séries dos contratos de opções verifica-se que quando o tempo restante até o vencimento em ano é de 0,1905, as ações da *Telebrás PN* (Tel4) estavam cotadas a R\$ 121,99 na bolsa de valores de São Paulo, BOVESPA, e o preço de mercado da opção era de R\$ 26,60.

Como no caso anterior foi utilizado o método dos elementos finitos, com elementos lineares e malhas com 10, 20, 25, 50, 100, 150, 200 elementos. Os domínios são truncados adequadamente. De acordo com o estudo de truncamento do domínio, apresentado primeiro exemplo, usou-se a condição de contorno de Dirichlet dada por (3.20). Sendo utilizado $\Delta\tau$ igual 3.81×10^{-3} para a primeira malha, isto é, para a malha de 10 elementos do ativo, mantendo-se $\Delta\tau = O(h^2)$ para as malhas subsequentes.

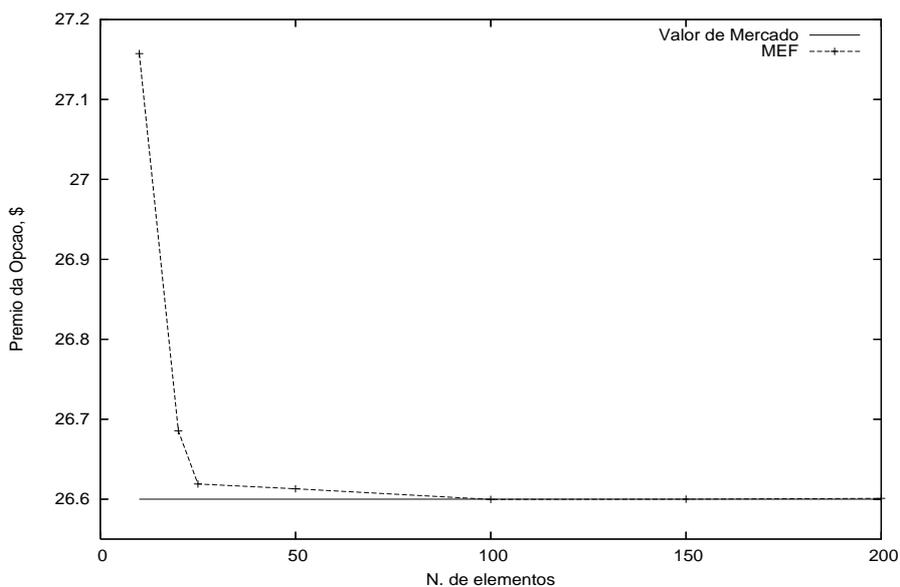


FIGURA 5.7: Comportamento do Método de Elementos Finitos

Para este contrato, assim como no anterior, com apenas 100 elementos, tem-se uma boa estimativa do valor de fechamento para a opção que dá direito a compra, como pode ser verificado no gráfico da Figura 5.7. Também neste caso, com apenas 100 elementos, o valor numérico encontrado $R\$ 26,5996$ apresenta uma diferença menor que um centavo para o valor de mercado que é de $R\$ 26,60$, como verificado na BOVESPA.

Destaca-se o bom desempenho do modelo na estimativa do valor de fechamento real no mercado financeiro. Porém observa-se que aqui se está fazendo experimentos com modelos que não levam em conta alguns fatores aleatórios do mercado, como crises econômicas, fusões de companhias e outros fatores que tenham influência direta na cotação dos ativos subjacentes. Fica assim uma ressalva, nem sempre o valor previsto vai estar próximo do valor de mercado, devido a fatores imprevisíveis na modelagem matemática do problema de precificação de contratos de opções.

5.4 Simulações de opções Européias e Americanas

Exemplo 7: Estudo Comparativo

Neste exemplo são apresentados resultados de simulações de dois contratos de opções de estilos diferentes, sendo um do estilo Europeu e o outro do estilo Americano. Os dois contratos dão direito a venda de um ativo subjacente negociado no mercado financeiro.

A idéia deste exemplo é apenas apresentar uma aplicação da modelagem computacional para os dois estilos de contratos de opções apresentados no terceiro capítulo, onde se apresentou a modelagem matemática desenvolvida por Black e Scholes para o problema de precificação de opções Européias e suas generalização para opções Americanas.

Os dois contratos foram simulados com iguais parâmetros de modelagem, quais sejam: taxa de juros (r) igual a $19\%/ano$, volatilidade (σ) de $50\%/ano$ e tempo de exercício de um ano. Os domínios foram truncados adequadamente, de acordo com o estudo de truncamento do domínio, apresentado nos exemplos 1 e 2.

Foi realizada uma discretização por elementos finitos, usando uma malha de 41 pontos no domínio do preço do ativo subjacente, isto é, 40 elementos no domínio espacial. Já no domínio temporal foram usados 30 passos no tempo.

Na Figura 5.8, constata-se o que anteriormente foi mencionado na teoria financeira para modelagem de opções, ou seja, o prêmio do contrato de opções Americanas é maior do que o prêmio do correspondente contrato de opções Européias com o mesmos parâmetros de modelagem. Observa-se o ponto 21 do preço do ativo subjacente (S), dado como o ponto ótimo para exercer a opção, que na modelagem matemática do problema de precificação de contratos de opções do estilo Americano é denominado como a fronteira livre (S_f). Para o investidor, verifica-se que sendo desejável exercer o direito de venda do ativo subjacente de um contrato de opções do estilo Americano, deve ser feito quando o ativo subjacente (S) tem seu valor no intervalo de $(0, S_f]$, dado que o prêmio é idêntico ao valor intrínseco.

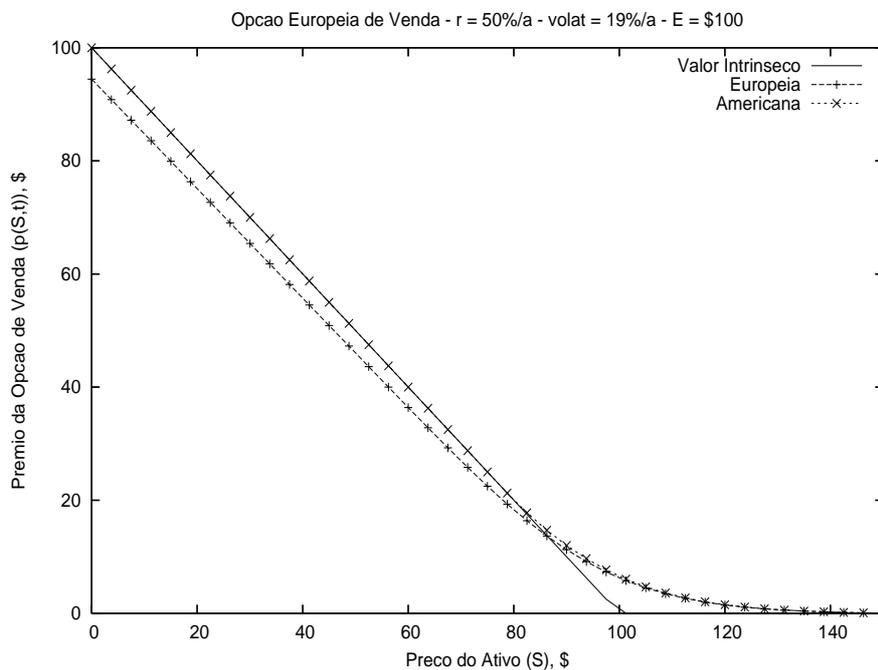


FIGURA 5.8: Opção de venda Americana e Européia

Exemplo 8: Opção de Venda Européia com dois Ativos

São apresentados resultados da simulação de um contrato de opção do estilo Europeu, que dá direito a venda de dois ativos subjacentes do mercado financeiro (modelo bidimensional).

Os parâmetros da modelagem matemática usados na simulação extraídos do artigo de Marcozzi [12], são: taxa de juros (r) de 10%/ano, a volatilidade (σ) de 30%/ano, o preço de exercício (E) de R\$ 100,00.

Como se está trabalhando com contratos de opções que dão direito de venda de dois ativos subjacentes, é necessário na modelagem o valor da correlação entre os dois ativos. Neste estudo admite-se que os ativos não são correlacionados.

Realizou-se uma discretização por elementos finitos, usando uma malha de 16×16 elementos quadriláteros e 200 passos no tempo.

Desta forma, simulou-se o mesmo contrato de opções apresentado no artigo de Marcozzi, e se chegou aos resultados apresentado nos gráficos das Figuras 5.9 e 5.10.

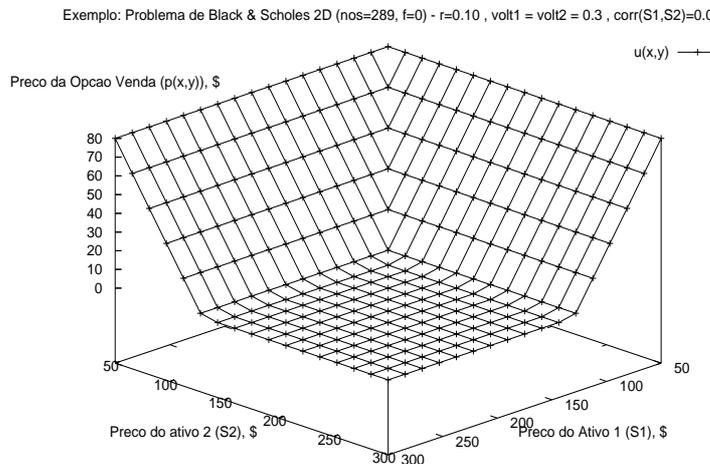


FIGURA 5.9: Valor Intrínseco

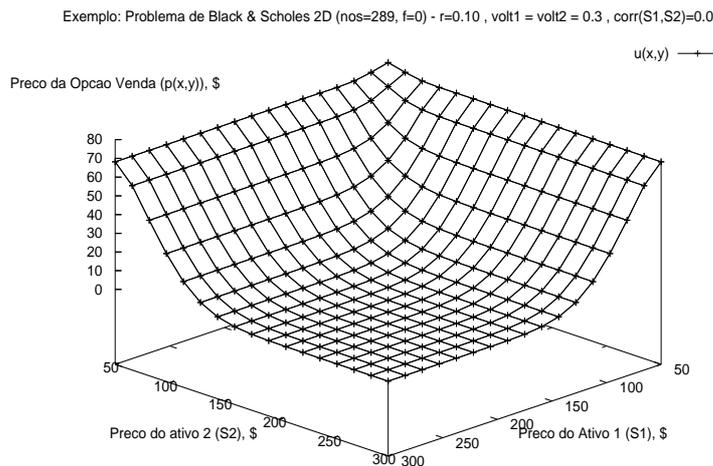


FIGURA 5.10: Valor na Data de Exercício

Esta simulação é apenas ilustrativa para o caso de modelagem em duas dimensões espaciais, isto é, contratos de opções que dão direitos a venda de dois ativos, usando método de elementos finitos. Foram obtidos resultados próximos dos apresentados no artigo de Marozzi, onde foi utilizado o método de *Radial Basis Functions* (RBF).

Exemplo 9: Opções de Venda Européia e Americana com dois ativos subjacentes

Considere dois contratos de opções do tipo de venda sendo um do estilo Europeu e outro do estilo Americano, com os mesmos parâmetros de modelagem: taxa de juros (r) igual a $10\%/ano$, volatilidade (σ) igual a $30\%/ano$, preço de exercício (E) de $R\$ 130,00$ e tempo para vencimento de um ano.

Neste exemplo se está interessado em apresentar uma aplicação da modelagem computacional introduzida nos capítulos anteriores, para opções de diferentes estilos (Europeu ou Americano) que dão direito a venda de dois ativos subjacentes.

Admite-se que não existe dependência entre os ativos subjacentes dos contratos de opções de venda. Desta forma a correlação é igual a zero, $\text{corr}(S_1, S_2) = 0$.

Realizou-se uma discretização por elementos finitos, com uma malha de 16×16

elementos quadrilaterais e 250 passos no tempo.

Os resultados encontrados na simulação são apresentados nas Figuras 5.11 e 5.12. No primeiro gráfico, Figura 5.11, são apresentados os valores para o instante de tempo de 6 meses para o vencimento dos contratos de opções, que apresenta o comportamento dos preços da opção para o conjunto de valores dos ativos subjacentes no decorrer do tempo de expiração. Já no segundo gráfico, Figura 5.12, tem-se o valor da simulação dos contratos de opções no instante de vencimento dos contratos de opções.

Analisando o comportamento do valor da opção verifica-se o deslocamento da região de contato da opção Americana com o *payoff* com o decorrer do tempo, como pode ser visualizado nas Figuras (5.11) e (5.12), onde ocorre uma variação no conjunto de pontos (S_f) que são pontos ótimos de exercícios, reduzindo o intervalo onde é favorável o exercício. Assim um investidor que possui uma opção de venda Americana querendo exercê-la, deve fazê-lo logo após o lançamento da opção no mercado, dado que se tem maior possibilidade de lucro.

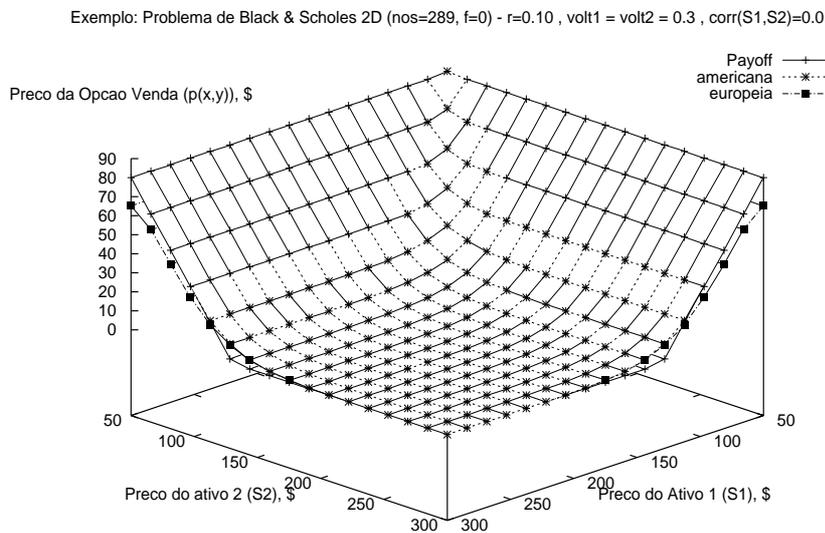


FIGURA 5.11: Opção Americana e Européia 2d ($\tau = 6$ meses)

Exemplo: Problema de Black & Scholes 2D (nos=289, f=0) - $r=0.10$, $\text{volt1} = \text{volt2} = 0.3$, $\text{corr}(S1,S2)=0.0$

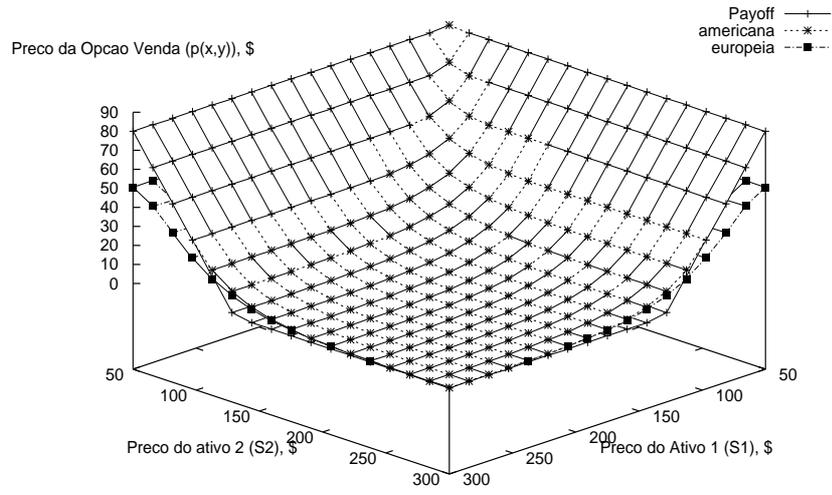


FIGURA 5.12: Opção Americana e Européia 2d (Valor na Data de Exercício, $\tau = 0$)

Capítulo 6

Conclusão

Foi apresentado um exemplo de aplicação do método dos elementos finitos a um problema de precificação de opções expresso matematicamente por uma equação ou inequação variacional parabólica, cujo operador diferencial guarda uma certa relação com o problema correspondente de difusão-convecção-reação com coeficientes variáveis.

Dado o avanço tecnológico, o acesso a informação cada vez mais rápido, a globalização e a sofisticação dos mercados financeiros, onde os derivativos de opções já existentes são adaptados às necessidades das empresas dando surgimento a contratos de opções mais sofisticados, onde em muitas ocasiões não se tem a solução analítica do modelo matemático, fica evidenciada a necessidade do uso de métodos numéricos a fim de obter uma aproximação da solução.

Na solução das equações (opções Europeias) ou inequações (opções Americanas) variacionais por métodos de elementos finitos, pode-se destacar a flexibilidade deste método em lidar com equações e inequações com coeficientes variáveis como ocorre na modelagem de opções.

Os resultados apresentados na aproximação por elementos finitos são satisfatórios como pode ser visto na Figura 5.5, onde os valores aproximados obtidos são próximos da solução analítica da equação de Black e Scholes (3.18). Foram considerados modelos matemáticos de opções Europeias e Americanas em uma e duas dimensões, bem como o estudo mais detalhado de aproximação por elementos finitos destes problemas.

Outro fato importante que pode ser destacado, são os resultados encontrados nas duas simulações do exemplo 6, onde os valores aproximados obtidos pelo método de elementos finitos são comparados com os valores de fechamentos reais do mercado de opções, na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). Estes resultados apresentaram uma diferença de menos de um centavo, para uma malha de 100 pontos nodais. Porém deve-se observar que nem sempre o valor numérico vai estar tão próximo do valor de mercado, devido a fatores não considerados na modelagem matemática do problema de precificação de opções, tais como crises financeiras e fatores aleatórios em geral.

Na modelagem de opções em duas dimensões, que dão direito de venda (ou compra) de **dois** ativos subjacentes, na simulação apresentada no exemplo 8, Figura 5.9 e Figura 5.10, foram encontrados valores próximos aos apresentados no artigo de Marozzi [12], com *Radial Basis Functions* (RBF). Já no Exemplo 9, verifica-se um deslocamento da região de contato da opção Americana com o *payoff* com o decorrer do tempo, como visto nas Figura 5.11 e Figura 5.12, onde ocorre uma variação no conjunto de pontos (S_f) que são pontos ótimos de exercícios. Neste caso, pode-se dizer que se o investidor que possui uma opção Americana querendo exercê-la prematuramente, deve fazer logo após o lançamento da opção no mercado, dado que se tem maior possibilidade de lucro, isto é, mais pontos da curva da opção Americana igual ao valor intrínseco (*payoff*).

A principal contribuição desta dissertação é a apresentação e implementação computacional de métodos numéricos, métodos de elementos finitos, para precificação de opções Européias e Americanas em uma e duas dimensões.

Este trabalho pode ser expandido para aplicações de métodos numéricos onde se tenha modelos mais realistas do mercado de opções. Um exemplo seria admitir que a volatilidade empregada no modelo de Black e Scholes não seja constante e sim proveniente de um modelo de volatilidade estocástica. Uma outra aplicação seria o modelo apresentado por Lisa Borland em [27], onde os ativos não seguem uma distribuição de probabilidade Normal. Tais aplicações ficam para trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] Peter L. Bernstein. *Desafio aos Deuses, A Fascinante História do Risco*. Editora Campus, 1996. segunda edição.
- [2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 4:323–338, 1973.
- [3] Robert C. Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141–183, 1973.
- [4] J. Cox and Ross S. The valuation of options for alternative stochastic process. *Journal of Financial Economics*, 3:145–166, 1976.
- [5] M. Brennan and E.S. Schwartz. Finite difference methods and the jump process arising in the pricing of contingent claims: A synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20:461–473, 1978.
- [6] J. Cox, Ross S., and M. Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229–263, 1979.
- [7] Darrell Duffie. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton, University Press, Princeton, 2nd. edition, 1996.
- [8] J. C. Hull and A. White. Valuing derivative securities using the explicit finite difference method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v.25, 1990.
- [9] G. Courtadon. An introduction to numerical methods in option pricing. In S. Figlewski, W.L. Silber, and M.G. Subrahmanyam, editors, *Financial Options: From Theory to Practice*, chapter 14, pages 538–573. Irwin Professional Publishing, Chicago, 1990.
- [10] J. C. Hull. *Options, Futures, and other Derivative Securities*. Prentice Hall, fourth edition, 1999.
- [11] Saulo P. Oliveira. Métodos numéricos para precificação de opções. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1997.
- [12] Michael D. Marcozzi, Seungmook Choi, and C. S. Chen. On the use boundary conditions for variational formulations arising in financial mathematics. *Applied Mathematics and Computation*, 124:197–214, 2001.

- [13] Song Wang. A novel fitted volume method for the black-scholes equation governing option pricing. *Institute of Mathematics and its Applications Journal of numerical Analysis*, 24(4):699–720, 2004.
- [14] Eduardo Facó Lemgruber. *Avaliação de contratos de opções*. Bolsa de Mercadorias & Futuros - BM&F, 1995.
- [15] John Hull. *Introdução aos Mercados Futuros e de Opções*. Bolsa de Mercadorias & Futuros - BM&F / Cultura Editores Associados, 1998. Quinta edição.
- [16] N. A. Chriss. *Black-Scholes and Beyond Option Pricing Models*. Irwin Professional Publishing, 1997.
- [17] J. M. Harrison and D. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20:381–408, 1979.
- [18] Salih N. Neftci. *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. Academic Press, second edition, 2000.
- [19] Robert J. Elliott and P. Ekkehard Kopp. *Mathematics of Financial Markets*. Springer, 1998.
- [20] Paul Wilmott, Jeff Dewynne, and Sam Howison. *Option Pricing, Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press., 2000.
- [21] Jürgen Topper. *Financial Engineering with Finite Elements*. Wiley Finance, 2005.
- [22] Haim Brézis. *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*. Alianza editorial, Madrid, 1984.
- [23] R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer Verlag, 1984.
- [24] V. Thomé. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Number 1054 in Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, 1984.
- [25] Claes Johnson. A convergence estimate for an approximation of a parabolic variational inequality. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13(4):599–606, 1976.
- [26] Ricardo Ratner Rochman. Análise de métodos numéricos para precificação de opções. Tese de Mestrado, Escola de Administração de Empresas de São Paulo - Fundação Getulio Vargas, 1998.
- [27] Lisa Borland. Option pricing formulas based on a non-gaussian stock price model. *Physical Review Letters*, 89(9):098701–1 – 098701–4, 2002.
- [28] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2000.

Apêndice A

Coeficiente de Correlação

Define-se como Coeficiente de Correlação entre S_1 e S_2 como sendo:

$$\rho_{S_1 S_2} = \frac{\text{cov}(S_1 S_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = E \left[\left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} \right) \left(\frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2} \right) \right]$$

onde verifica-se que ρ representa a dependência linear entre S_1 e S_2 , $E(\cdot)$ a média, e σ_i a variância de S_i , $i = 1, 2$.

Proposição A.0.1 S_1 e S_2 são variáveis aleatórias com variâncias finitas e positivas.

$$(0 < \sigma_1 < \infty, 0 < \sigma_2 < \infty)$$

i. $-1 \leq \rho(S_1 S_2) \leq 1$

ii. $\rho_{S_1 S_2} = 1$ se, e somente se, $P(S_2 = AS_1 + B) = 1, \forall A > 0 B \in R$

iii. $\rho_{S_1 S_2} = -1$ se, e somente se, $P(S_2 = AS_1 + B) = -1 \forall A < 0 B \in R$

Demonstração A.0.1 Como

$$0 \leq \left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} - \frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2} \right)^2$$

tem-se

$$\begin{aligned}
O &\leq E \left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} - \frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2} \right)^2 \\
&= E \left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} \right)^2 + E \left(\frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2} \right)^2 - \frac{2}{\sigma_1 \sigma_2} E[(S_1 - E(S_1))(S_2 - E(S_2))] \\
&\leq \frac{\text{var}(S_1)}{\sigma_1^2} + \frac{\text{var}(S_2)}{\sigma_2^2} - \frac{2\text{cov}(S_1, S_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = 1 + 1 - 2\rho_{S_1 S_2}
\end{aligned}$$

$$0 \leq 2 - 2\rho_{S_1 S_2} \rho_{S_1 S_2} \leq 1$$

Porém, tem-se que

$$\left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} + \frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2} \right)^2 \leq 0$$

onde encontra-se:

$$\begin{aligned}
O &\leq E \left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} + \frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2} \right)^2 \\
&= E \left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} \right)^2 + E \left(\frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2} \right)^2 + \frac{2}{\sigma_1 \sigma_2} E[(S_1 - E(S_1))(S_2 - E(S_2))] \\
&\leq \frac{\text{var}(S_1)}{\sigma_1^2} + \frac{\text{var}(S_2)}{\sigma_2^2} + \frac{2\text{cov}(S_1, S_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = 1 + 1 + 2\rho_{S_1 S_2}
\end{aligned}$$

$$0 \leq 2 + 2\rho_{S_1 S_2}$$

$$\rho_{S_1 S_2} \geq -1$$

Assim demonstra-se o item (i)

Agora, analisando o itens (ii) e (iii), tem-se:

Se $\rho = 1$

$$E \left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} - \frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2} \right)^2 = 0$$

$$P \left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} = \frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2} \right) = 1$$

$$S_2 = E(S_2) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(S_1 - E(S_1))$$

$$A = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad B = E(S_2) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}E(S_1)$$

Se $\rho = -1$

$$E\left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1} + \frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma_2}\right)^2 = 0$$

$$S_2 = E(S_2) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(S_1 - E(S_1))$$

Com probabilidade 1

$$A = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad B = E(S_2) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}E(S_1)$$

Por outro lado $P(S_2 = AS_1 + B) = 1 \quad \forall A \neq 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho(S_1 S_2) &= E\left[\left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1}\right)\left(\frac{AS_1 + B - AE(S_1) - B}{\sqrt{A^2\sigma_1^2}}\right)\right] \\ &= \frac{A}{|A|}E\left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sigma_1}\right)^2 = \frac{A}{|A|} = \text{Sinal}(A) = +A \text{ ou } -A \end{aligned}$$

Uma alta correlação entre S_1 e S_2 .

Se $\rho_{S_1 S_2}$ próximo de 1, significa que o valor de S_2 tende a acompanhar o de S_1
(Quanto maior S_1 , maior também é, geralmente, S_2)

Por outro lado, uma correlação negativa forte ($\rho_{S_1 S_2}$ próximo de -1) significa a tendência oposta, ou seja, quanto maior S_1 , menor S_2 , e vice-versa.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)