

Marcos Garcia Todorov

Controle H_∞ de Sistemas Lineares com Infinitos Saltos Markovianos via Realimentação de Saída

Petrópolis, RJ - Brasil

Março de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

CONTROLE H_∞ DE SISTEMAS LINEARES COM INFINITOS SALTOS
MARKOVIANOS VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Marcos Garcia Todorov

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DE
FORMAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS DO LABORATÓRIO NACIONAL
DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MODELAGEM
COMPUTACIONAL.

Aprovada por:

Prof. Marcelo Dutra Fragoso, Ph.D.
(Presidente)

Prof. Jack Baczynski, D.Sc.

Prof. Renato Portugal, D.Sc.

Prof. João Bosco Ribeiro do Val, Ph.D.

PETRÓPOLIS, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2007

TODOROV, MARCOS GARCIA

Controle H_∞ de Sistemas Lineares
com Infinitos Saltos Markovianos via
Realimentação de Saída [Petrópolis] 2007

V, 78 p. 29,7 cm (MCT/LNCC, M.Sc.,
Modelagem Computacional, 2007)

Dissertação – Laboratório Nacional de
Computação Científica, LNCC

1. Controle H_∞
2. Sistemas lineares com saltos Markovianos
3. Realimentação de saída
4. Desigualdades matriciais lineares

I. MCT/LNCC II. Título (série)

Agradecimentos

Ao amor e suporte incondicionais da minha família, onde sempre encontrei o carinho de que precisava.

Ao prof. Marcelo Fragoso, meu orientador, que com seu incentivo e confiança foi sem dúvida o maior responsável pelo sucesso deste trabalho. Agradeço sobretudo pelo fato de que, mesmo em seu período de férias, ele tenha estado inteiramente presente na escrita da tese.

Aos professores Jack Baczynski, João Bosco R. do Val e Renato Portugal, que gentilmente aceitaram fazer parte da banca. Seus comentários e palavras de incentivo foram um importante diferencial neste trabalho.

Aos amigos Saul, Julio Cezar e Albino, pelos excelentes seminários de que pude participar. Fica aqui o convite para que assistam aos meus próprios seminários, como retribuição pelo aprendizado que recebi.

Às amigas e companheiras de sala, Eliane, Cláudia e Patrícia, pelos conselhos e experiência que me passaram ao longo desses dois anos.

Ao LNCC, que me acolheu ainda durante a graduação. Agradeço sobretudo ao prof. Elson Toledo, que sempre esteve ao meu lado e me permitiu amadurecer a ponto de enfrentar este desafio.

A você, Aline, que esteve junto comigo a cada segundo e fez esses últimos anos realmente valerem a pena. Espero que você seja tão feliz em sua nova carreira quanto eu me sinto neste momento.

Resumo da Dissertação apresentada ao MCT/LNCC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE H_∞ DE SISTEMAS LINEARES COM INFINITOS SALTOS
MARKOVIANOS VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Marcos Garcia Todorov

Março / 2007

Orientador: Marcelo Dutra Fragoso

Modelagem Computacional

Este trabalho trata do problema de controle H_∞ de uma classe de sistemas lineares com saltos Markovianos (MJLS) a tempo contínuo, onde a cadeia de Markov toma valores em um conjunto infinito enumerável. Um *bounded real lemma* (que chamamos JBRL) é desenvolvido, estabelecendo que a factibilidade de um conjunto infinito de desigualdades matriciais lineares (LMIs) interconectadas é necessária e suficiente para que um dado sistema seja estocasticamente estável (SS) e atenda a um desempenho H_∞ prescrito. O problema H_∞ estudado consiste na atenuação do efeito que perturbações estocásticas de energia finita causam na saída de um sistema, *no pior caso*. Neste problema, conhecido na literatura como *disturbance attenuation* (DA), assumimos ainda que o controlador somente tem acesso ao processo de saltos e a uma saída do sistema. Os controladores de interesse devem garantir que tanto a estabilidade (SS) quanto um desempenho H_∞ sejam observados no sistema em malha fechada – donde as condições impostas pelo JBRL são determinantes para a existência de soluções. Um importante aspecto dessa nova abordagem é que ferramentas tão fundamentais quanto o Complemento de Schur ou o Lema da Projeção, p.ex., não podem mais ser usados para manipular os conjuntos de LMIs infinitamente acopladas – tal dificuldade é contornada pela introdução de versões estendidas desses resultados, no início do trabalho. Um dos principais resultados (Teorema 5) caracteriza a existência de soluções através de dois problemas LMI complementares, um dos quais torna possível o *design* computacional de controladores. Por fim, são apresentados algoritmos para a construção prática de controladores, ótimos ou sub-ótimos, dando origem a um conjunto de ferramentas que, especialmente no caso em que a cadeia de Markov é finita, podem ser implementadas computacionalmente de maneira imediata. Mesmo no caso finito, os resultados da tese são mais fortes do que os de Farias *et al.* [1].

Abstract of Dissertation presented to MCT/LNCC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

OUTPUT FEEDBACK H_∞ CONTROL OF INFINITE MARKOV JUMP LINEAR SYSTEMS

Marcos Garcia Todorov

March / 2007

Advisor: Marcelo Dutra Fragoso

Computational Modeling

This work addresses the H_∞ control problem for a class of continuous-time Markov jump linear systems (MJLS), in which the Markov chain takes values in an infinite countable set. A *bounded real lemma* (which we call JBRL) is developed, stating that the existence of solutions to an infinite set of interconnected linear matrix inequalities (LMIs) is both necessary and sufficient for a given system being stochastically stable (SS) and meeting a prescribed H_∞ performance level. The H_∞ control problem considered here consists on the attenuation of the *worst-case* effect that finite-energy stochastic disturbances cause at a system's output. In this setting, which is referred to in the literature as the *disturbance attenuation* (DA) problem, it is also assumed that the controller has only access to the jump process and an output of the system. The only controllers of interest must then guarantee that, both, stability (SS) and an H_∞ performance level are satisfied on the closed-loop system – yielding that the conditions on which the JBRL is stated are determinant for the existence of admissible controllers. A salient feature, which distinguishes our approach from previous ones, is that tools as fundamental as Schur Complements or the Projection Lemma, for example, can no longer be employed to work out the infinitely coupled LMIs which come up – such drawback is overcome by the introduction of extended versions of these tools, in the beginning of the dissertation. One of the main results (Teorema 5) characterizes the existence of admissible controllers by means of two complementary LMI problems, one of which is rather amenable for the computational design of controllers. At the end, we present some algorithms for the practical construction of either optimal or sub-optimal controllers, giving rise to a collection of tools which, especially in the finite case, may be computationally solved in a straightforward manner. Even in the finite case, the result here improves the ones in Farias *et al.* [1].

Lista de símbolos

DA	Atenuação de perturbação (do inglês <i>Disturbance Attenuation</i>)
JBRL	<i>Jump-Bounded Real Lemma</i>
LMI	Desigualdade matricial linear (do inglês <i>Linear Matrix Inequality</i>)
MJLS	Sistema linear com saltos Markovianos (do inglês <i>Markov Jump Linear System</i>)
SS	Estabilidade estocástica (do inglês <i>Stochastic Stability</i> ; cf. p. 26)
\mathfrak{C}	Transformação de congruência, do tipo $\mathfrak{C}(H, L) = L^*HL$ (cf. p. 11)
$\mathbb{H}_{\text{sup}}^{m,n}$	Espaço de Banach de dimensão infinita (cf. p. 10)
\mathbb{P}	Medida de probabilidade
\mathcal{R}, \mathcal{N}	Imagem e núcleo de aplicação linear, respectivamente
\mathcal{S}	Espaço de estados da cadeia de Markov, $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots\}$
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espaço de probabilidade completo
θ, θ_t	Processo de Markov (cf. p. 24)
\otimes	Produto de Kronecker
$\mathbb{I}, \mathbf{1}$	Funções indicadoras (cf. p. 12)
x_{zs}, x_{zi}	Respostas <i>zero-state</i> e <i>zero-input</i> , resp. (cf. a Definição 1 na página 25)
\gg, \ll	Positividade e negatividade uniformes, respectivamente (cf. p. 11)

Sumário

1	Introdução	p. 1
1.1	Descrição do trabalho	p. 4
2	Preliminares	p. 10
2.1	Notação	p. 10
2.2	Resultados auxiliares	p. 12
2.2.1	Prova do <i>Complemento de Schur Uniforme</i> , Teorema 1	p. 15
2.2.2	Prova do <i>Lema da Projeção Uniforme</i> , Lema 1	p. 19
3	Descrição dos modelos e resultados auxiliares	p. 24
4	<i>Bounded real lemma</i>	p. 30
4.1	Preliminares	p. 30
4.2	O <i>Bounded Real Lemma</i>	p. 31
5	Controle H_∞	p. 42
5.1	Descrição do problema	p. 42
5.2	Caracterização de soluções	p. 44
5.3	Construção de controladores	p. 57
5.4	Simulações	p. 63
6	Conclusão	p. 67
6.1	Trabalhos futuros	p. 69
	Referências Bibliográficas	p. 71

1 Introdução

Uma questão inerente à modelagem matemática de uma grande variedade de processos (incluindo processos físicos, químicos, biológicos, econômicos, e industriais, entre outros) consiste em como tratar, de maneira adequada, as incertezas que se tem acerca do fenômeno de interesse. Tais incertezas têm, minimamente, duas possíveis fontes: podem ser devidas, por um lado, a uma observação imprecisa e/ou a um conhecimento incompleto do processo em questão ou, por outro lado, às restrições de ordem prática de que somos obrigados a lançar mão quando da descrição matemática do problema. No contexto da teoria de sistemas e controle, em particular – onde, baseado em tais condições adversas, o *projeto* de controladores é muitas vezes o principal objetivo a ser alcançado – pode-se afirmar que o tratamento adequado de incertezas na modelagem é questão decisiva na solução de problemas.

Um tipo de incerteza de particular interesse neste trabalho é a ocorrência de variações *abruptas* na estrutura de um sistema. Em uma situação prática temos que tal fenômeno pode se verificar, por exemplo, devido à ocorrência de falhas em um dado processo (como o rompimento de uma linha de transmissão em um sistema de energia elétrica, a quebra repentina de alguma máquina ou componente em um processo industrial, ou a falha de um operador humano em um sistema de aviação), ou devido a súbitas mudanças ambientais (como a perda de sinal em um enlace *wireless*, devido à chuva ou obstrução do meio, ou a contaminação de um rebanho ou plantação por determinado microorganismo). É então evidente que, neste contexto, um tratamento adequado da ocorrência de fenômenos abruptos na modelagem – bem como no subsequente projeto de controladores – pode ser, entre outras coisas, a chave para se estudar sistemas com maior tolerância a falhas ou maior robustez às condições adversas do meio ambiente.

Matematicamente, uma maneira natural de se descrever a variação abrupta da estrutura de um dado sistema dinâmico a tempo contínuo é através da ação de *switching* (chaveamento): assume-se que o sistema possui um conjunto bem definido de diferentes

regimes (modos) de operação, e certa lei que determina em qual destes ele se encontra a cada instante de tempo. Em particular, sempre que cada um dos modos de operação apresentar uma dinâmica linear e o processo de *switching* for aleatório, governado por uma cadeia de Markov [2], diremos que o modelo em questão é um *sistema linear com saltos Markovianos* (ou MJLS, do inglês *Markov Jump Linear System*). Este tipo de sistema é o objeto de estudo do presente trabalho.

Os MJLS constituem uma importante classe de sistemas híbridos (veja [3], [4], [5], ou [6]), ao lado dos sistemas chaveados (*switched systems*; veja [6], [7], [8]), que tem sido extensivamente estudada nas últimas décadas. Desde os trabalhos históricos de autores como Krasovskii e Lidskii [9], Florentin [10], Swarder [11] e Wonham [12], ainda na década de 60, uma grande variedade de questões foi abordada na literatura – dentre essas, podemos destacar os problemas de estabilidade [13, 14, 15, 16] e estabilização robusta [17, 18, 19, 20, 21]; a introdução e o estudo de noções de estabilizabilidade, controlabilidade, observabilidade e detectabilidade [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]; os problemas de controle LQ/ H_2 [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35] e controle H_∞ [36, 37, 38, 39, 1], bem como a fusão dessas abordagens [40]; sistemas com retardo (*delay*) [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47]; e filtragem [48, 49, 50, 51]. Alguns exemplos de aplicações dos MJLS, bem como um grande número de referências, pode ser encontrada em [52, 53, 54, 55, 56, 57] e nos livros [58] e [59].

As primeiras referências a tratar do caso *infinito* (em que a cadeia de Markov associada ao sistema corresponde a um conjunto infinito contável) foram [60] e [61]. Um importante aspecto dessa classe de sistemas corresponde ao fato de que, diferente do que ocorre no caso *finito* (em que a cadeia de Markov é um conjunto finito), neste caso os conceitos de estabilidade na média quadrática (MSS) e estabilidade estocástica (SS) não são mais equivalentes [62]. Dentre a grande quantidade de questões teóricas que se encontram em aberto no contexto de sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo contínuo (com especial atenção ao caso infinito), destacamos aqui a falta de um *bounded real lemma* e, conseqüentemente, de uma teoria de controle H_∞ por realimentação de saída. Estas questões são a principal motivação do presente trabalho.

A teoria de controle H_∞ representa, atualmente, uma das mais importantes abordagens para a análise e síntese de sistemas de controle – seja no domínio da frequência, em que foi originalmente proposta [63, 64], seja no contexto mais atual de espaço de estados. Esta segunda forma recebeu grande atenção a partir do final dos anos 80 [65, 66, 67], pois

foi a que possibilitou que problemas não-lineares [68, 69], variantes no tempo e/ou em horizonte finito [70, 71, 72, 73], em dimensão infinita [74], ou mesmo em um ambiente estocástico [75, 76] fossem tratados de forma conveniente. No caso dos MJLS, as primeiras referências ao problema H_∞ foram [36], [37] e [38]. Outras referências são: [39], em que o caso infinito via *state-feedback* (realimentação de estado) foi tratado; e [77], relativo ao problema de controle H_∞ de sistemas não-lineares com saltos Markovianos. Em sistemas de tempo discreto destacamos ainda [61], [78], e o capítulo 7 de [58].

Neste trabalho é tratado o problema de controle H_∞ de uma classe de sistemas lineares com infinitos saltos Markovianos. Inspirada em [75], a presente abordagem tem como uma de suas características marcantes a introdução de um novo *bounded real lemma* na literatura, através do estudo cuidadoso de um problema de controle ótimo em horizontes finito e infinito. É interessante mencionar aqui que, mesmo se reduzido ao caso em que o espaço de estados da cadeia de Markov é finito, a prova desse resultado ainda se encontrava ausente na atual literatura de sistemas em tempo contínuo [79]. Em contraste ao principal resultado de Seiler e Sengupta, [80], que tratou do problema em tempo discreto e no caso finito, o assim batizado *Jump-Bounded Real Lemma* (JBRL) fornece a caracterização da existência de soluções para o problema de controle através da factibilidade de um conjunto de LMIs *infinitamente* acopladas, o que constitui um novo tipo de abordagem na literatura dessa classe de sistemas (MJLS) – cujo potencial para aplicações é explorado ainda neste trabalho.

A caracterização por conjuntos infinitamente acoplados de LMIs é também inovadora no tratamento do problema de controle por realimentação de saída em horizonte infinito [81], que é a questão abordada em seguida. Apesar do trabalho de Farias *et al.* [1] ter tratado – no caso em que o espaço de estados da cadeia de Markov é finito – de um problema deste tipo, é possível observar que apenas condições suficientes foram obtidas para o problema de controle. Além disso, nota-se que uma hipótese um tanto restritiva, relacionada ao processo de saltos (que foi utilizada inicialmente por Wonham [12]), é naturalmente herdada de [36]. Com base no JBRL, no entanto, no presente trabalho não somente é relaxada a hipótese de Wonham, mas também são estabelecidas condições suficientes e *necessárias* à existência de soluções para o problema de controle. Com isto é possível apresentar (por uma abordagem inteiramente diferente daquela empregada em [1]) uma mais completa caracterização das soluções do problema, onde a noção de projeções desempenha um papel central (tal como em, p.ex., [82, 75]), combinada à abordagem de [83, 73].

As questões de *design* (projeto) de controladores são também tratadas, via uma abordagem de programação convexa. A caracterização mais cuidadosa das soluções, no entanto, nos permite estabelecer um procedimento mais completo do que o de [1], onde a existência de soluções pode, alternativamente, ser checada antes que se proceda ao projeto propriamente dito. Essa solução intermediária, se encontrada, é de fato parte da solução total do problema de *design* – o que indica que o procedimento aqui proposto é mais flexível, e portanto mais apropriado para aplicações, do que aquele apresentado em [1].

1.1 Descrição do trabalho

O capítulo 2 apresenta, em duas partes separadas, a notação adotada no decorrer do trabalho e uma série de resultados auxiliares que serão úteis posteriormente. Embora todos os resultados desse capítulo sejam contribuições originais da tese – destinados principalmente à manipulação de problemas LMI infinitamente acoplados, como os que surgem no capítulo 5 – sobressaem-se o *Complemento de Schur Uniforme* (Teorema 1) e o *Lema da Projeção Uniforme* (Lema 1), pelo fato de desempenharem o mesmo papel central que suas versões clássicas [84, 82], porém neste contexto mais amplo (veja também a Nota 2).

Dois modelos de fundamental importância para este trabalho são introduzidos no capítulo 3. O primeiro deles consiste em um MJLS com condições iniciais aleatórias – cujo espaço de estados da cadeia de Markov é um conjunto infinito enumerável – sujeito a uma perturbação aditiva $v \in L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+)$ (i.e., uma perturbação estocástica de energia finita) e com uma saída z ; apenas para ilustrar o problema, o sistema é do tipo:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta_t}x(t) + B_{\theta_t}v(t) \\ z(t) = C_{\theta_t}x(t) + D_{\theta_t}v(t), \end{cases}$$

onde, para um dado instante de tempo $t \geq 0$, $x(t)$ é o processo de estado e θ_t é o processo de saltos, modelado através de uma cadeia de Markov. Seguindo uma terminologia usual na literatura de MJLS, a noção de estabilidade adotada neste trabalho corresponde à de *estabilidade estocástica* (SS, do inglês *stochastic stability*), um tipo de estabilidade interna “em um sentido L_2 ” – sua definição é também situada no capítulo 3. Adicionalmente, a relação entre SS e a existência e unicidade da solução de uma equação de Lyapunov em espaço de Banach é destacada, de acordo com um importante resultado de Fragoso e Baczynski [85] – esses resultados preliminares serão de grande importância para o trabalho. O segundo modelo é então apresentado como uma versão mais completa

do sistema acima, na qual estão presentes as noções de *controle* e *observações parciais* – a serem exploradas no capítulo 5.

No capítulo 4 é desenvolvido um *bounded real lemma* para a classe de MJLS introduzida no capítulo anterior. O principal resultado, Lema 3, se propõe a desempenhar o mesmo papel que outros *bounded real lemmata* têm em diferentes cenários – veja [86, 75, 87, 88, 80], por exemplo. O assim batizado JBRL (do inglês *Jump-Bounded Real Lemma*) estabelece que a existência de soluções para um conjunto *infinito* de desigualdades matriciais lineares (LMIs) interconectadas é condição necessária e suficiente para que um dado sistema seja estocasticamente estável (SS) e atenda a um desempenho H_∞ prescrito, o que representa uma contribuição original deste trabalho. Uma descrição resumida da idéia por trás da prova desse importante resultado é apresentada a seguir.

Em primeiro lugar, notamos que para a prova do Lema 3 é de fundamental importância o estudo de um problema de *controle ótimo*: o de minimizar um funcional sujeito a uma restrição nas variáveis do sistema. Essa idéia foi largamente explorada em [75] e dá origem à maior parte dos resultados auxiliares à prova. Basicamente, definimos um funcional $v \mapsto \gamma^2 \|v\|_T^2 - \|z\|_T^2$, que atribui um *custo* (ponderado pelo parâmetro γ) à relação entre entrada (v) e saída (z). A idéia por trás do problema de controle ótimo é então de *caracterizar, através da escolha de $v \in L_2^{nv}(\mathbb{R}_+)$ que minimiza o funcional, qual a pior perturbação que pode afetar o sistema para um dado horizonte de tempo T e um certo parâmetro γ* . Apesar de todas as questões técnicas associadas a este problema, temos intuitivamente que um candidato a mínimo, v_T , deve ser tal que a norma $\|v_T\|_T$ é relativamente pequena para $\|z_T\|_T$ relativamente grande (onde z_T é a saída correspondente à entrada v_T). Isto é, espera-se que o sistema seja mais *sensível* à ação de v_T , de maneira que o ganho $\frac{\|z\|_T}{\|v\|_T}$ é máximo para essa entrada e sua respectiva saída.

Após mostrarmos que o problema de controle ótimo é bem definido, é estabelecido no Lema 6 que v_T , a solução ótima, *é uma realimentação estática do estado do sistema* onde o ganho de *feedback* depende da solução de uma equação diferencial de Riccati em espaço de Banach de dimensão infinita (cuja existência e unicidade foi estabelecida em [89]). Tal caracterização do mínimo nos permite então estabelecer a Proposição 6, que é a ferramenta que torna possível o tratamento do problema de horizonte infinito, $T \rightarrow \infty$. Desse limite decorre que existe uma solução para determinada equação algébrica de Riccati (ARE) em um espaço de Banach de dimensão infinita, o que parece ser um resultado novo na literatura. A partir desse último resultado auxiliar, a prova do *bounded*

real lemma é então obtida através de uma análise de pequenas perturbações na ARE, essencialmente inspirada na abordagem adotada em [75].

O problema de controle H_∞ é objeto de estudo do capítulo 5. Apenas para referência, o sistema de que tratamos é do tipo

$$\Sigma_u : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta_t}x(t) + B_{\theta_t}v(t) + G_{\theta_t}u(t) \\ z(t) = C_{\theta_t}x(t) + D_{\theta_t}v(t) + H_{\theta_t}u(t) \\ y(t) = \Gamma_{\theta_t}x(t) + L_{\theta_t}v(t), \end{cases}$$

onde x e θ são os processos de estado e de saltos, respectivamente. O problema pode ser resumido como segue. Deseja-se caracterizar uma classe de controles, u , que garantam a estabilidade do sistema em malha fechada, assim como um nível prescrito de atenuação do efeito causado pelas perturbações v em uma saída de erro, z , *no pior caso*. Assumimos que, em um dado instante $t \geq 0$, o controlador somente pode ter acesso ao processo de saltos, θ_t , e à medição do sistema, $y(t)$. O diagrama de blocos do sistema em malha fechada é tal como mostrado na figura abaixo.

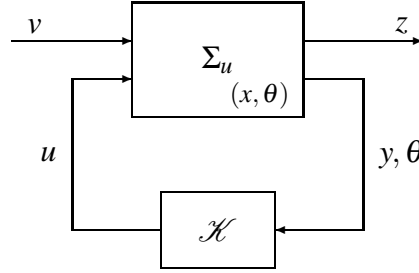


Figura 1.1: Diagrama de blocos do sistema de controle

Em seguida, é escolhida como *admissível* uma classe de controladores dinâmicos estaticamente dependentes do processo de saltos (i.e., controladores sem memória de $\{\theta_\tau\}_{\tau < t}$ a qualquer instante de tempo $t > 0$, analogamente a Σ_u). Neste ponto, o JBRL (Lema 3) é empregado e demonstra-se, na Proposição 8, que um dado controlador admissível \mathcal{K} realiza o tipo de controle desejado se e somente se houver determinada solução para um problema LMI do tipo:

$$\begin{aligned} &\text{Encontre} && P \ll 0, \\ &\text{tal que} && \mathcal{M}^0 + (\mathcal{H} \mathcal{P})^* \mathcal{K} \mathcal{J} + \mathcal{J}^* \mathcal{K}^* (\mathcal{H} \mathcal{P}) \gg 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $\mathcal{P} = \mathcal{P}(P)$, e onde \ll e \gg são desigualdades matriciais *uniformes e limitadas*, introduzidas no capítulo 2. Neste ponto fica evidente a importância do Lema da Projeção Uniforme (Lema 1). Através dele é possível, de maneira imediata, estabelecer um resultado alternativo: que a existência de soluções admissíveis para o problema de controle depende da factibilidade de um problema *projetado*,

$$\begin{array}{l} \text{Encontre} \\ \text{tal que} \end{array} \quad \begin{array}{l} P \ll 0, \\ \mathcal{M}^0 \gg 0 \quad \text{sobre} \quad \mathcal{N}(\mathcal{I}) \cup \mathcal{N}(\mathcal{H}\mathcal{P}), \end{array}$$

onde $\mathcal{P} = \mathcal{P}(P)$; note que \mathcal{H} , que é desconhecido *a priori*, é eliminado neste segundo problema. No entanto, uma vez que o conjunto $\mathcal{N}(\mathcal{H}\mathcal{P})$ depende da variável de decisão, P , é estabelecido a partir da Proposição 9 que a existência de soluções admissíveis para o problema de controle depende, na verdade, de *dois* problemas LMI: um na variável P e outro na sua inversa, $S = P^{-1}$. Esta caracterização, frequentemente encontrada na literatura de outras classes de sistemas (veja, p.ex., [75, 87, 1]), é o ponto de partida para uma série de manipulações algébricas que nos permitem estabelecer a Proposição 10. Nela encontramos que, ao contrário do que se observa em outros tipos de sistema, na classe de MJLS aqui estudada *há uma grande dificuldade em se expressar a caracterização do problema de controle através dos blocos diagonais-superiores de P e S* . Isto é, escrevendo $P = (P_1, P_2, \dots)$ e sua inversa, $S = (S_1, S_2, \dots)$, sob a forma

$$P_i = \begin{bmatrix} X_i & P_{2i} \\ P_{2i}^* & P_{3i} \end{bmatrix}, \quad S_i = \begin{bmatrix} Y_i & S_{2i} \\ S_{2i}^* & S_{3i} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{I},$$

com $X = (X_1, X_2, \dots)$ e $Y = (Y_1, Y_2, \dots)$ de dimensões $n \times n$, observa-se que um acoplamento do tipo $X = (Y - S_2 S_3^{-1} S_2^*)^{-1}$ deve ser satisfeito por qualquer par (P, S) . Ora, esta condição não só tornaria o problema não-linear (e não-convexo) como também corresponderia a um requisito muito conservador a ser exigido das soluções do problema (no sentido de que se esperaria uma relação muito íntima entre as variáveis de decisão).

Uma importante simplificação no problema é introduzida neste ponto. Ela consiste na restrição do conjunto de controladores admissíveis a uma classe de controles *full-order*, isto é, uma classe de controladores que possuem o mesmo número de variáveis de estado que o sistema em malha aberta, Σ_u . Esta estratégia, que foi empregada em diversos trabalhos (veja [1, 21] para exemplos de MJLS e [75, 83] para exemplos sem saltos), pode ser resumida como segue. Supondo que a variável de Lyapunov, $P = (P_1, P_2, \dots)$, pode ser

escrita sob a forma

$$P_i = \begin{bmatrix} X_i & Y_i^{-1} - X_i \\ Y_i^{-1} - X_i & X_i - Y_i^{-1} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{S},$$

deve-se resolver dois problemas: primeiro, mostrar que a existência de alguma variável com essa estrutura garante a factibilidade do problema de controle e, segundo, estabelecer quais condições permitem caracterizar tais X e Y (esses problemas são resolvidos na Proposição 11).

O problema que consideramos em seguida, e que serviu de motivação para um dos principais resultados deste trabalho (Teorema 5), é o de *investigar se as condições (suficientes) estabelecidas na Proposição 11 são também necessárias para a existência de soluções para o problema de controle*. O Lema 8, cuja principal fonte de inspiração foi [83, Theorem 4], é uma importante ferramenta neste ponto. São estabelecidas condições necessárias para a existência de soluções do problema de controle, através da seguinte heurística: ao invés de eliminar a variável \mathcal{K} do problema (1.1) através da noção de projeções (ou do Lema 1, como foi descrito anteriormente), fazê-lo através (i) da restrição da LMI em (1.1) a subespaços de dimensões inferiores (através de transformações de congruência), e (ii) da introdução de variáveis de folga (funções afins de \mathcal{K}) naquele problema. Vale adiantar que, diferente do que foi feito através do Lema 1, neste caso não se perde toda a informação sobre \mathcal{K} (parte dela fica contida nas variáveis de folga) – esse fato possibilita a solução do problema de *design*, mais adiante.

O Teorema 5 encerra um conjunto de condições equivalentes à existência de soluções para o problema de controle em questão. Um ponto marcante é que *a caracterização das soluções se dá de duas formas alternativas, ambas as quais se expressam através de problemas LMI*. A prova desse resultado é consequência direta da relação entre os resultados anteriores, e se dá através de simples argumentos de projeção (através do Lema 1). Um resultado prático que decorre imediatamente desse teorema é o Algoritmo 1, que provê (especialmente no caso finito) *duas* diferentes soluções computacionais para o problema de existência de compensadores, em termos de problemas LMI.

Com esse resultado de caracterização (Teorema 5), são consideradas as questões de projeto de controladores. Para isso, são estabelecidas no Teorema 6 as fórmulas para construção de um controlador sub-ótimo de ordem igual à do sistema em malha aberta, em uma técnica que é essencialmente uma extensão daquela usada em [1, Theorem 4.2].

Através desse resultado é possível enunciar os algoritmos 2 e 3 que permitem, de duas maneiras diferentes, expressar o problema de construção de controladores através da solução de LMIs. Um fator de interesse prático neste ponto é que toda solução factível do problema de existência (toda solução obtida através do Algoritmo 1) é parte da solução do problema de *design*, o que é uma característica bastante modular dos procedimentos aqui propostos.

O problema de síntese H_∞ ótima – aquele de encontrar, explicitamente, um controlador capaz de garantir que o menor nível de perturbação possível seja alcançado – é tratado em seguida. O procedimento bissecional apresentado no Algoritmo 4 (*γ -iteration*) é largamente conhecido na literatura de controle H_∞ (veja, p.ex., [90] ou [58, *Algorithm 8.9*]), e tem a função de ilustrar como os resultados do trabalho podem ser empregados para resolver o problema de otimização em questão. Por fim, o último item do capítulo 5 apresenta alguns experimentos que ilustram os resultados obtidos.

Sumarizando, este trabalho é organizado como segue: o capítulo 2 introduz a notação adotada e certos resultados auxiliares; no capítulo 3 são apresentados os modelos básicos, junto a alguns resultados relevantes da literatura e a definição de estabilidade estocástica. O capítulo 4 é inteiramente dedicado ao *bounded real lemma* (Lema 3). No capítulo 5 o problema H_∞ é estudado e uma solução é proposta por meio de LMIs. Finalmente, a conclusão do trabalho é apresentada no capítulo 6, juntamente a algumas indicações de trabalhos futuros. Convém mencionar aqui que os principais resultados desse trabalho de tese foram aceitos para apresentação (ver [79] e [81]).

2 Preliminares

Neste capítulo é estabelecida a notação adotada ao longo do trabalho, além de uma série de resultados auxiliares – alguns dos quais são novos na literatura – que serão úteis em determinadas passagens.

2.1 Notação

Com relação ao espaço das n -uplas sobre o corpo dos complexos, \mathbb{C}^n , denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$ o produto interno canônico e sua norma induzida, respectivamente. Isto é, para $x, y \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle x, y \rangle := x^*y, \quad \|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad (2.1)$$

onde x^* é o conjugado transposto de qualquer $x \in \mathbb{C}^n$. Denotamos ainda por $\mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ o espaço de Banach de todas as matrizes complexas $M \in \mathbb{C}^{n \times m}$, equipado com a norma de matrizes induzida de \mathbb{C}^n em \mathbb{C}^m ,

$$\|M\| := \sup_{z \in \mathbb{C}^m} \{\|Mz\|; \|z\| = 1\}, \quad (2.2)$$

e $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n) \equiv \mathbb{M}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ abreviadamente. Para uso posterior, definimos ainda $\mathbb{M}(\mathbb{C}^{n*}) = \{U \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n); U^* = U\}$ e $\mathbb{M}(\mathbb{C}^{n+}) = \{U \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^{n*}); U \geq 0\}$.

Como é usualmente definido na literatura de sistemas lineares com infinitos saltos Markovianos – veja [61, 62, 16] por exemplo – definimos um espaço de Banach de dimensão infinita tal como $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{m,n}$, o espaço composto por todas as coleções infinitas de matrizes com tamanhos uniformes, do tipo $H = (H_1, H_2, \dots)$, onde $H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ para qualquer $i \in \mathcal{S} := \{1, 2, \dots\}$, e tais que $\|H\|_{\text{sup}} := \sup_{i \in \mathcal{S}} \|H_i\| < \infty$. Escrevemos ainda $\mathbb{H}_{\text{sup}}^n$ no lugar de $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{n,n}$, tal como antes, e definimos $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}$ (resp. $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{n+}$) como o subespaço (subconjunto) de $\mathbb{H}_{\text{sup}}^n$ cujos elementos $H = (H_1, H_2, \dots)$ exibem a propriedade adicional de que $H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^{n*})$ (resp. $H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^{n+})$) para todo $i \in \mathcal{S}$, que denotamos abrevia-

damente $H = H^*$. Em seguida, definimos $\tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n+}$ como o conjunto de todas as coleções infinitas de matrizes com tamanhos uniformes e *uniformemente positivas* $H \gg 0$, i.e., tais que $H = (H_1, H_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n+}$ com $H_i \geq \varepsilon I_n$ sobre todo $i \in \mathcal{S}$ e algum $\varepsilon > 0$ independente de i (por simplicidade, escrevemos simplesmente que $H_i \gg 0$), onde I_n é a matriz identidade em $\mathbb{C}^{n \times n}$. De maneira análoga, dizemos que $L \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ (ou que L é *uniformemente negativa*, $N \ll 0$) sempre que $-L \gg 0$. Neste caso, escrevemos que $L_i \ll 0$ para todo $i \in \mathcal{S}$.

Para $H \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{p,m}$ e $L \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n,p}$ tem-se que $\|HL\|_{\text{sup}} \leq \|H\|_{\text{sup}}\|L\|_{\text{sup}}$, donde $HL := (H_1L_1, H_2L_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n,m}$. Mais ainda, para todo $F \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{\ell,m}$ é fácil provar que $[H F] := ([H_1 F_1], [H_2 F_2], \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{(p+\ell),m}$ (o análogo valendo para concatenação bloco-vertical ou bloco-diagonal). Denotamos a matriz zero em $\mathbb{C}^{\ell \times m}$ ou $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{m,\ell}$ por $0_{\ell \times m}$, o mesmo valendo para as matrizes identidade $I_\ell \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ e $I_\ell \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\ell+}$. Sempre que o tamanho de qualquer dessas matrizes não tiver importância ou puder ser facilmente deduzido pelo contexto, ele será omitido. Adicionalmente, definimos $\text{Her}(H) := H + H^*$ e $\mathfrak{C}(H, L) = L^*HL$. O produto de Kronecker de matrizes complexas é denotado por \otimes , de maneira usual (cf. [91]); isto é, se $M \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e $N \in \mathbb{C}^{p \times q}$, com

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nm} \end{bmatrix},$$

então

$$M \otimes N = \begin{bmatrix} M_{11}N & \dots & M_{1m}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1}N & \dots & M_{nm}N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{np \times mq}. \quad (2.3)$$

Finalmente, a imagem e o núcleo de uma dada matriz complexa $M \in \mathbb{C}^{n \times m}$ são denotadas $\mathcal{R}(M)$ e $\mathcal{N}(M)$, respectivamente (veja a Proposição 2 para uma extensão ao caso infinito).

Com respeito ao conjunto infinito enumerável \mathcal{S} considere duas seqüências infinitas $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots)$, onde $(m_i, n_i) \in \{1, 2, \dots, M\}^2$ para algum inteiro $M < \infty$ e todo $i \in \mathcal{S}$. Assim, definimos o espaço de Banach de dimensão infinita $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}}$ de todas as coleções infinitas de matrizes, as quais correspondem a objetos da forma $H = (H_1, H_2, \dots)$ tais que $H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^{m_i}, \mathbb{C}^{n_i})$ para todo $i \in \mathcal{S}$, onde $\|H\|_{\text{sup}} := \sup_{i \in \mathcal{S}} \|H_i\| < \infty$. Também definimos os conjuntos $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{\mathbf{n}*}, \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\mathbf{n}+} \subset \mathbb{H}_{\text{sup}}^{\mathbf{n}, \mathbf{n}}$ de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, onde $H \gg 0$ mais uma vez significa positividade uniforme, $H \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\mathbf{n}+}$.

Em particular, sempre que $\mathbf{m} = (m, m, \dots)$ e $\mathbf{n} = (n, n, \dots)$ temos simplesmente $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \equiv \mathbb{H}_{\text{sup}}^{m, \mathbf{n}} \equiv \mathbb{H}_{\text{sup}}^{m, n}$.

Com relação a objetos aleatórios, fixamos um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado com uma filtração contínua à direita $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ sobre $t \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$. Adicionalmente, escrevemos $E(\cdot)$ para a esperança matemática e definimos L_2^n como o espaço de todas as variáveis aleatórias de segunda ordem, do tipo $(\Omega, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{C}^n$. Para um dado $T > 0$, definimos também o espaço $L_2^n(T)$ de todos os processos $y = \{(y(t), \mathcal{F}_t); t \in [0, T], y(\cdot) \in \mathbb{C}^n\}$ tais que a norma $\|y\|_T := (\int_0^T E[\|y(t)\|^2] dt)^{1/2}$ é finita. Escrevemos ainda que $y \in L_2^n(\mathbb{R}_+)$ sempre que o limite $\|y\|_{\mathbb{R}_+} := \lim_{T \rightarrow \infty} \|y\|_T$ for bem definido. Finalmente, $\mathbb{I}_\Gamma(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \{0, 1\}$ e $\mathbf{1}_{\{Y\}} : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \{0, 1\}$ são funções indicadoras para algum intervalo $\Gamma \subset \mathbb{R}_+$ e algum evento $Y \in \mathcal{F}$, respectivamente.

2.2 Resultados auxiliares

Esta seção introduz algumas ferramentas independentes que serão necessárias mais adiante, incluindo versões estendidas do Complemento de Schur e do Lema da Projeção.

A seguinte proposição estabelece, em particular, que se a positividade uniforme da identidade é preservada em $\tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n+}$ sob a aplicação de uma transformação de congruência, então tanto esse conjunto quanto $\tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ são invariantes com respeito à aplicação de tal transformação. Este simples teste será de grande utilidade no decorrer do trabalho.

Proposição 1 *Suponha que $Q = (Q_1, Q_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{m, n}$ é tal que $Q^*Q \gg 0$. Então as seguintes afirmativas são verdadeiras:*

- (i) $X \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n+}$ implica em $Q^*XQ \gg 0$;
- (ii) $X \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ implica em $Q^*XQ \ll 0$;

Prova: Em primeiro lugar provemos (i). Da hipótese, temos que existe $\eta > 0$ tal que $Q_i^*Q_i \geq \eta I$ para todo $i \in \mathcal{S}$. Adicionalmente, uma vez que $X \gg 0$ deve existir $\varepsilon_0 > 0$ tal que $X_i \geq \varepsilon_0 I_n$ para $i \in \mathcal{S}$. Assim:

$$Q_i^*X_iQ_i \geq \varepsilon_0 Q_i^*Q_i \geq (\varepsilon_0 \eta)I = \varepsilon I, \quad (2.4)$$

para algum $\varepsilon > 0$ adequado, e

$$\|Q_i^* X_i Q_i\| \leq \|Q_i\|^2 \|X_i\| \leq \|Q\|_{\text{sup}}^2 \|X\|_{\text{sup}},$$

de onde o resultado segue. Para provar (ii) basta trocar X por $-X$. ■

Nota 1 *Um aspecto marcante da prova acima corresponde à necessidade de se garantir que a uniformidade das desigualdades é preservada junto com a limitação na norma. De fato, isto traz à tona dois importantes problemas que surgem quando o espaço de estados da cadeia de Markov é assumido infinito, vis-à-vis o caso finito. É importante frisar que esta idéia estará presente em todas as provas apresentadas no decorrer desta seção. $\nabla\nabla$*

O seguinte teorema representa uma importante ferramenta para o desenvolvimento desse trabalho. Sua prova é apresentada na subseção 2.2.1.

Teorema 1 *(Complemento de Schur Uniforme) Dados $U = (U_1, U_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{D^*}$, $V = (V_1, V_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{q,p}$ e $W = (W_1, W_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{q^*}$, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

- (i) $\begin{bmatrix} U & V \\ V^* & W \end{bmatrix} \gg 0$;
- (ii) $U \gg 0$ e $W - V^* U^{-1} V \gg 0$;
- (iii) $W \gg 0$ e $U - V W^{-1} V^* \gg 0$.

Além disso, o mesmo vale se trocarmos \gg por \ll .

A seguinte proposição introduz as noções de *imagem* e *núcleo* de aplicações lineares para coleções infinitas de matrizes, além de definir o que mais tarde chamaremos a “base ortonormal” de um dado espaço.

Proposição 2 *Seja $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{p,\ell}$ tal que $p_i := \dim(\mathcal{N}(\Psi_i)) \geq 1$ para todo $i \in \mathcal{S}$. Então, para $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$, existe $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{\mathbf{p},p}$ tal que, para qualquer $i \in \mathcal{S}$,*

- (i) $\mathcal{N}(\Phi_i) = \{0\}$ e $\mathcal{R}(\Phi_i) = \mathcal{N}(\Psi_i)$;
- (ii) $\Phi_i^* \Phi_i = I_{p_i}$;

mais ainda, escrevemos simbolicamente que $\mathcal{N}(\Psi) = \mathcal{R}(\Phi)$ e dizemos que tal Φ é uma base ortonormal para estes espaços.

Prova: Primeiramente note que, para todo $i \in \mathcal{S}$, tem-se $p_i \leq \min\{\ell, p\}$. Defina $\Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,1} & \dots & \phi_{i,p_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p \times p_i}$, onde o conjunto $\{\phi_{i,j}\}_{j=1}^{p_i} \subset \mathbb{C}^p$ forma uma base ortonormal para $\mathcal{N}(\Psi_i)$. Então (i) decorre imediatamente, e temos que

$$\Phi_i^* \Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,1}^* \phi_{i,1} & \dots & \phi_{i,1}^* \phi_{i,p_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{i,p_i}^* \phi_{i,1} & \dots & \phi_{i,p_i}^* \phi_{i,p_i} \end{bmatrix} = I_{p_i}, \quad (2.5)$$

de onde a prova está completa. ■

O seguinte corolário segue imediatamente desses dois resultados.

Corolário 1 *Seja $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots) \in \mathbb{H}_{sup}^{p,\ell}$ tal que $\dim(\mathcal{N}(\Psi_i)) \geq 1$ para todo $i \in \mathcal{S}$. Então as seguintes afirmativas são equivalentes, para todo $U = (U_1, U_2, \dots) \in \mathbb{H}_{sup}^{p*}$, $V = (V_1, V_2, \dots) \in \mathbb{H}_{sup}^{q,p}$ e $W = (W_1, W_2, \dots) \in \mathbb{H}_{sup}^{q*}$:*

(i) $\begin{bmatrix} U & V \\ V^* & W \end{bmatrix} \gg 0$ em $\mathcal{N}([\Psi \ 0])$;

(ii) $U - VW^{-1}V^* \gg 0$ em $\mathcal{N}(\Psi)$, e $W \gg 0$;

Prova: Do Teorema 1 temos que a limitação na norma do lado esquerdo de cada uma dessas expressões é equivalente; portanto apenas resta provar que a uniformidade das desigualdades é preservada.

Seja Φ uma base ortonormal para $\mathcal{N}(\Psi)$, como na última proposição. Então (ii) é equivalente à existência de algum $\varepsilon > 0$ tal que $W_i > \varepsilon I$ para todo $i \in \mathcal{S}$ e

$$0 < \Phi_i^* (U_i - \varepsilon I - V_i W_i^{-1} V_i^*) \Phi_i = \Phi_i^* (U_i - V_i W_i^{-1} V_i^*) \Phi_i - \varepsilon I, \quad (2.6)$$

o que equivale à seguinte desigualdade, de acordo com o Teorema 1:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \Phi_i^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Phi_i^* U_i \Phi_i & \Phi_i^* V_i \\ V_i^* \Phi_i & W_i \end{bmatrix} \\
&> \varepsilon \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} \Phi_i^* \Phi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_i^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente note que tal condição corresponde a (i), pois $\mathcal{R} \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \mathcal{N} \begin{bmatrix} \Psi_i & 0 \end{bmatrix}$ em todo $i \in \mathcal{S}$:

$$\begin{bmatrix} \Phi_i^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i - \varepsilon I & V_i \\ V_i^* & W_i - \varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0.$$

■

A seguinte extensão do *Lemma* 3.1 de [82] constitui uma ferramenta de grande importância no desenvolvimento do capítulo 5. Sua prova é apresentada na subseção 2.2.2.

Lema 1 (*Lema da Projeção Uniforme*) Assuma $N = (N_1, N_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{p,q}$, $M = (M_1, M_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{p,r}$, e $H = (H_1, H_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{p,*}$. Então a LMI

$$H + N^* X^* M + M^* X N \gg 0 \tag{2.7}$$

possui ao menos uma solução $X \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{q,r}$ se e só se H for uniformemente positiva em $\mathcal{N}(N) \cup \mathcal{N}(M)$.

2.2.1 Prova do Complemento de Schur Uniforme, Teorema 1

Para facilitar a apresentação esta prova foi dividida em duas partes. A primeira parte é enunciada através do seguinte lema.

Lema 2 Dados $U = (U_1, U_2, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{p,+}$, $V = (V_1, V_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{q,p}$ e $W = (W_1, W_2, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{q,+}$, as seguintes afirmativas são equivalentes:

$$(i) \begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \geq \varepsilon I, \text{ para todo } i \in \mathcal{S} \text{ e algum } \varepsilon > 0;$$

$$(ii) U_i \geq \mu I \text{ e } W_i - V_i^* U_i^{-1} V_i \geq \mu I, \text{ para todo } i \in \mathcal{S} \text{ e algum } \mu > 0;$$

$$(iii) W_i \geq \nu I \text{ e } U_i - V_i W_i^{-1} V_i^* \geq \nu I, \text{ para todo } i \in \mathcal{S} \text{ e algum } \nu > 0;$$

Prova: Assuma (ii). Assim, definindo $X = -U^{-1}V \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{q,p}$ temos que, para todo $i \in \mathcal{S}$,

$$\mu I \leq \begin{bmatrix} U_i & 0 \\ 0 & W_i - V_i^* U_i^{-1} V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_i^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_i \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Note que $\begin{bmatrix} I & X_i \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -X_i \\ 0 & I \end{bmatrix}$; então a expressão acima se reescreve

$$\begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \geq \mu \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X_i^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X_i \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Em seguida defina

$$f_i(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X_i^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \|u - X_i v\|^2 + \|v\|^2; \quad (2.10)$$

então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para todo $i \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} v \neq 0 &\Rightarrow f_i(u, v) \geq \|v\|^2 > \varepsilon_1 (\|u\|^2 + \|v\|^2) & \forall u \in \mathbb{C}^p, \\ v = 0 &\Rightarrow f_i(u, v) = \|u\|^2 > \varepsilon_1 (\|u\|^2 + \|v\|^2) & \forall u \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Isto é, para uma escolha apropriada de $\varepsilon > 0$ e todo $i \in \mathcal{S}$,

$$\begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \geq \mu \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X_i^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} > (\mu \varepsilon_1) I = \varepsilon I, \quad (2.11)$$

e (i) segue.

Agora assumamos (i). Então é imediato que, para algum $\varepsilon > 0$ e todo $i \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_i & 0 \\ 0 & W_i - V_i^* U_i^{-1} V_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_i^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &\geq \varepsilon \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_i^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_i \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tal como antes, temos então que $g_i(u, v) := \|u + X_i v\|^2 + \|v\|^2 > \mu(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ para todo $(u, v) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ diferente de zero, de onde (ii) segue.

A fim de provar a equivalência entre (i) e (iii), basta notar que

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i & V_i^* \\ V_i & U_i \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

e a Proposição 1 garante que a transformação de congruência acima preserva a positividade uniforme. Trocando (U, V, V^*, W) por (W, V^*, V, U) no início da prova temos então que o resultado segue imediatamente. \blacksquare

Note que no lema acima foi apenas provado que a existência de limitantes inferiores uniformes para alguma matriz em blocos se estende para cada um dos seus complementos de Schur, e vice-versa. Para completar a prova do Teorema 1, a seguir, resta provar que limitantes (superiores) na norma também podem ser incluídos nas relações de equivalência.

Prova do Teorema 1: Suponha que (ii) é verdade. Então do Lema 2 temos a positividade uniforme em (i) garantida, e apenas resta provar que a limitação na norma é preservada. Da igualdade em (2.8) temos que

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \right\| &= \left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X_i^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i & 0 \\ 0 & W_i - V_i^* U_i^{-1} V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq \left\| \begin{bmatrix} I & -X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\|^2 \left\| \begin{bmatrix} U_i & 0 \\ 0 & W_i - V_i^* U_i^{-1} V_i \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mas note que, da definição,

$$\left\| \begin{bmatrix} I & -X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\| := \sup \left\{ \left\| \begin{bmatrix} I & -X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|; \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1 \right\},$$

de maneira que x e y são tais que $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$. Logo:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} I & -X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|^2 &= \|x - X_i y\|^2 + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|X_i y\|)^2 + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\|X_i\| + \|X_i\|^2 \|y\|^2 \\ &\leq 1 + 2\|x\|\|y\|\|X_i\| + \|X_i\|^2 \|y\|^2 \leq 1 + 2\|X_i\| + \|X_i\|^2 \\ &\leq (1 + \|X\|_{\text{sup}})^2. \end{aligned}$$

Além disso, uma vez que $X_i = -U_i^{-1}V_i$, deve existir algum $\varepsilon_0 > 0$ finito para o qual

$$\|X_i\| \leq \|U_i^{-1}\| \|V_i\| < \varepsilon_0 \|V\|_{\text{sup}},$$

pois $U \in \widehat{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{p+}$ implica na existência de limitantes positivos $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tais que

$$\varepsilon_1 I \leq U_i \leq \varepsilon_2 I \quad \Rightarrow \quad U_i^{-1} \leq \varepsilon_1^{-1} I.$$

De maneira semelhante temos que, para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ na fronteira da hiperesfera unitária e $i \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} U_i & 0 \\ 0 & W_i - V_i^* U_i^{-1} V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|^2 &= \|U_i x\|^2 + \|(W_i - V_i^* U_i^{-1} V_i) y\|^2 \\ &\leq \|U\|_{\text{sup}}^2 + \|W - V^* U^{-1} V\|_{\text{sup}}^2 \\ &\leq (\|U\|_{\text{sup}} + \|W - V^* U^{-1} V\|_{\text{sup}})^2. \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (2.13) segue então que

$$\left\| \begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \right\| \leq (1 + \varepsilon_0 \|V\|_{\text{sup}})^2 (\|U\|_{\text{sup}} + \|W - V^* U^{-1} V\|_{\text{sup}})$$

para todo $i \in \mathcal{S}$, o que nos leva a (i).

Assumindo agora que vale (i), a relação (2.8) estabelece que

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} U_i & 0 \\ 0 & W_i - V_i^* U_i^{-1} V_i \end{bmatrix} \right\| &= \left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_i^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq \left\| \begin{bmatrix} I & X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\|^2 \left\| \begin{bmatrix} U_i & V_i \\ V_i^* & W_i \end{bmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (2.14)$$

para qualquer $i \in \mathcal{S}$, e como $\left\| \begin{bmatrix} I & X_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\|^2 \leq (1 + \|X\|_{\text{sup}})^2$, a condição (ii) é garantida.

A equivalência entre (i) e (iii) é provada com o auxílio da Proposição 1, de maneira análoga ao efetuado no Lema 2. Finalmente, note que essa prova se estende trivialmente ao caso negativo, uma vez que um dado $Q \ll 0$ se e só se $-Q \gg 0$. ■

2.2.2 Prova do Lema da Projeção Uniforme, Lema 1

A seguinte extensão do resultado apresentado no Teorema 1 será necessária nesta subseção. A idéia é transpor tal resultado para o contexto de *matrizes infinitas* (veja a seção 2.1).

Proposição 3 *Sejam $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ e $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)$ tais que $(p_i, q_i) \in \{1, 2, \dots, M\}^2$ para algum inteiro $M < \infty$ e todo $i \in \mathcal{S}$. Então as seguintes afirmativas são equivalentes para todo $U = (U_1, U_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{\mathbf{p}^*}$, $V = (V_1, V_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$ e $W = (W_1, W_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{\mathbf{q}^*}$:*

- (i) $\begin{bmatrix} U & V \\ V^* & W \end{bmatrix} \gg 0$;
- (ii) $U \gg 0$ e $W - V^*U^{-1}V \gg 0$;
- (iii) $W \gg 0$ e $U - VW^{-1}V^* \gg 0$.

Prova: A prova é imediata. Simplesmente note que tanto a Proposição 1 quanto o Lema 2, assim como o Teorema 1, podem ser estendidos ao caso em que m, n, p e q são substituídos pelas seqüências arbitrárias e limitadas de inteiros $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ e \mathbf{q} respectivamente, por provas análogas. ■

Com este resultado é possível proceder à prova do principal resultado desta seção.

Prova do Lema 1: A prova de necessidade é imediata. Simplesmente assumamos que exista tal X e note que (2.7) deve valer, em particular, no conjunto indicado.

A prova de suficiência é, embora mais extensa, semelhante à do *Lemma 3.1* em [82]. As maiores diferenças são (i) que o Complemento de Schur *Uniforme* é necessário, no lugar do usual, e (ii) que agora é necessário provar que as transformações de congruência com que nos deparamos preservam a uniformidade das desigualdades matriciais, o que é feito com o auxílio das proposições 1 e 2.

Note que, para qualquer $i \in \mathcal{S}$ e um par (M_i, N_i) correspondente, temos que $\mathbb{C}^p = \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{W}_{i}$, onde

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_{1i} &= \mathcal{N}(M_i) \cap \mathcal{N}(N_i), & \mathbb{W}_{3i} &= \mathcal{N}(M_i)^\perp \cap \mathcal{N}(N_i), \\ \mathbb{W}_{2i} &= \mathcal{N}(M_i) \cap \mathcal{N}(N_i)^\perp, & \mathbb{W}_{4i} &= \mathcal{N}(M_i)^\perp \cap \mathcal{N}(N_i)^\perp. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Logo, é possível definir matrizes complexas W_{1i}, W_{2i}, W_{3i} e W_{4i} de dimensões adequadas como bases ortonormais (veja a Proposição 2) de cada um desses espaços; isto é,

$$\mathcal{R}(W_{i\iota}) = \mathbb{W}_{i\iota} \quad \text{com} \quad W_{i\iota}^* W_{i\iota} = I_{\dim(\mathbb{W}_{i\iota})}, \quad \text{para todo } \iota \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Em seguida, definindo $T = (T_1, T_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^p$ por $T_i = [W_{1i} \ W_{2i} \ W_{3i} \ W_{4i}]$, $i \in \mathcal{S}$, temos que $T^*T = I_p \gg 0$; assim, segue da Proposição 1 que (2.7) é equivalente a

$$T^*HT + (NT)^*X^*(MT) + (MT)^*X(NT) \gg 0. \quad (2.16)$$

Note que, para qualquer $i \in \mathcal{S}$, tem-se que $[W_{1i} \ W_{2i}]$ e $[W_{3i} \ W_{4i}]$ são bases ortonormais para $\mathcal{N}(M_i)$ e $\mathcal{N}(N_i)$, respectivamente. Então existem matrizes $[Q_{1i} \ Q_{2i}]$ e $[R_{1i} \ R_{2i}]$, cada qual com posto coluna completo, tais que $M_i T_i = [0 \ 0 \ Q_{1i} \ Q_{2i}]$ e $N_i T_i = [0 \ R_{1i} \ 0 \ R_{2i}]$, para $i \in \mathcal{S}$.

Para simplificar a notação é conveniente definir

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ \Pi_2^* & \Pi_5 & \Pi_6 & \Pi_7 \\ \Pi_3^* & \Pi_6^* & \Pi_8 & \Pi_9 \\ \Pi_4^* & \Pi_7^* & \Pi_9^* & \Pi_{10} \end{bmatrix} := T^*HT \\ \text{e} \quad (MT)^*X(NT) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1^* \\ Q_2^* \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & R_1 & 0 & R_2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{X}_{11} & 0 & \mathcal{X}_{12} \\ 0 & \mathcal{X}_{21} & 0 & \mathcal{X}_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde introduzimos as matrizes infinitas (veja a seção 2.1) $Q_1 = (Q_{11}, Q_{12}, \dots)$, $R_1 = (R_{11}, R_{12}, \dots)$, etc, com cada partição conforme T . Agora, deve-se reconhecer que a existência de tal X satisfazendo (2.7) é equivalente à existência de $\mathcal{X}_{11}, \mathcal{X}_{12}, \mathcal{X}_{21}$ e \mathcal{X}_{22}

adequados tais que

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ \Pi_2^* & \Pi_5 & \Pi_6 + \mathcal{X}_{11}^* & \Pi_7 + \mathcal{X}_{21}^* \\ \Pi_3^* & \Pi_6^* + \mathcal{X}_{11} & \Pi_8 & \Pi_9 + \mathcal{X}_{12} \\ \Pi_4^* & \Pi_7^* + \mathcal{X}_{21} & \Pi_9^* + \mathcal{X}_{12}^* & \Pi_{10} + \mathcal{X}_{22} + \mathcal{X}_{22}^* \end{bmatrix} \gg 0, \quad (2.17)$$

pois $X = \left(\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1 & \mathcal{Q}_2 \end{bmatrix}^\dagger \right)^* \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} \\ \mathcal{X}_{21} & \mathcal{X}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}^\dagger$ é uma solução adequada para (2.7) sempre que tal quadra $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{11}, \mathcal{X}_{12}, \mathcal{X}_{21}, \mathcal{X}_{22})$ existir; note que, como o conjunto das colunas de cada uma das matrizes indicadas é linearmente independente, temos que todas as inversas à esquerda, $(\cdot)^\dagger$, são bem definidas.

Temos, da Proposição 3, que (2.17) é equivalente às duas seguintes relações serem satisfeitas:

$$\Upsilon(\mathcal{X}_{11}) := \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \\ \Pi_2^* & \Pi_5 & \Pi_6 + \mathcal{X}_{11}^* \\ \Pi_3^* & \Pi_6^* + \mathcal{X}_{11} & \Pi_8 \end{bmatrix} \gg 0, \quad (2.18)$$

$$\Pi_{10} + \mathcal{X}_{22} + \mathcal{X}_{22}^* - \begin{bmatrix} \Pi_4 \\ \Pi_7 + \mathcal{X}_{21}^* \\ \Pi_9 + \mathcal{X}_{12} \end{bmatrix}^* \Upsilon(\mathcal{X}_{11})^{-1} \begin{bmatrix} \Pi_4 \\ \Pi_7 + \mathcal{X}_{21}^* \\ \Pi_9 + \mathcal{X}_{12} \end{bmatrix} \gg 0. \quad (2.19)$$

Portanto resta apenas provar que a condição *necessária*, enunciada no começo da prova, garante a existência de um \mathcal{X}_{11} adequado que resolva (2.18), uma vez que para toda escolha em \mathcal{X}_{12} , \mathcal{X}_{21} e \mathcal{X}_{11} sempre existirá algum \mathcal{X}_{22} , limitado, tal que (2.19) é satisfeita. Da Proposição 3, tem-se que (2.18) se verifica se e somente se

$$\Pi_1 \gg 0 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \Pi_5 & \Pi_6 + \mathcal{X}_{11}^* \\ \Pi_6^* + \mathcal{X}_{11} & \Pi_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Pi_2^* \\ \Pi_3^* \end{bmatrix} \Pi_1^{-1} \begin{bmatrix} \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix} \gg 0,$$

isto é, se e só se

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_5 - \Pi_2^* \Pi_1^{-1} \Pi_2 & \Pi_6 - \Pi_2^* \Pi_1^{-1} \Pi_3 + \mathcal{X}_{11}^* \\ 0 & (\Pi_6 - \Pi_2^* \Pi_1^{-1} \Pi_3)^* + \mathcal{X}_{11} & \Pi_8 - \Pi_3^* \Pi_1^{-1} \Pi_3 \end{bmatrix} \gg 0. \quad (2.20)$$

Se restringirmos a busca por \mathcal{X} através da escolha $\mathcal{X}_{11} = -(\Pi_6 - \Pi_2^* \Pi_1^{-1} \Pi_3)^*$, então a condição acima é satisfeita se e somente se a seguinte valer

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_5 - \Pi_2^* \Pi_1^{-1} \Pi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_8 - \Pi_3^* \Pi_1^{-1} \Pi_3 \end{bmatrix} \gg 0, \quad (2.21)$$

o que equivale a

$$\begin{cases} \Pi_1 \gg 0, \\ \Pi_5 - \Pi_2^* \Pi_1^{-1} \Pi_2 \gg 0, \end{cases} \quad \text{junto a} \quad \begin{cases} \Pi_1 \gg 0, \\ \Pi_8 - \Pi_3^* \Pi_1^{-1} \Pi_3 \gg 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Consideremos a primeira condição, por exemplo. Da Proposição 3 ela pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_2^* & \Pi_5 \end{bmatrix} \gg 0. \quad (2.23)$$

Agora, uma vez que $\Pi = T^* H T$, pode ser facilmente provado que essa condição é equivalente a H ser uniformemente positiva sobre $\mathcal{N}(M)$, o que faz parte da hipótese:

$$\begin{bmatrix} W_{1i} & W_{2i} \end{bmatrix}^* H_i \begin{bmatrix} W_{1i} & W_{2i} \end{bmatrix} \gg 0 \quad (2.24)$$

para todo $i \in \mathcal{S}$; a prova se encerra se repararmos que a segunda condição em (2.22) é analogamente equivalente a $H \gg 0$ sobre $\mathcal{N}(N)$. ■

A seguir é colocada uma consideração final sobre este capítulo, no sentido de contemplar a aplicabilidade de alguns dos resultados obtidos.

Nota 2 (i) *Pela prova da Proposição 3 temos que cada um dos resultados acima pode ser estendido para o contexto mais geral de matrizes infinitas de maneira direta. No entanto, embora cada um desses resultados pudesse ter sido formalmente estabelecido nesse contexto mais geral (de onde um conjunto de ferramentas mais fortes seria – formalmente – estabelecido), essas extensões não seriam de nenhum uso imediato para os fins deste trabalho. Portanto, a fim de manter a complexidade notacional tão pequena quanto possível, foi decidido apresentar nesta seção apenas o essencial de resultados auxiliares;*

(ii) *Deve-se notar que cada um dos resultados acima vale igualmente quando \mathcal{S} não é restrito a um conjunto infinito enumerável. Por exemplo, se considerarmos \mathcal{S} como um intervalo de \mathbb{R} (não necessariamente limitado), os mesmos resultados po-*

dem ser obtidos por provas bastante parecidas. Como uma consequência imediata pode-se considerar o caso em que A, B, C e/ou D são funções do tempo com um limitante superior na norma. Tais resultados seriam úteis, por exemplo, no contexto de sistemas variantes no tempo (como em, por exemplo, [88] ou [83]).

▽▽

3 Descrição dos modelos e resultados auxiliares

Neste capítulo serão apresentados os modelos básicos de que estaremos tratando no decorrer do trabalho, além de alguns resultados auxiliares que serão necessários mais adiante.

Considere um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado com uma filtração contínua à direita $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ sobre $t \in \mathbb{R}_+$. Sobre esta, considere um processo de Markov homogêneo $\theta = \{(\theta_t, \mathcal{F}_t), t \in \mathbb{R}_+\}$, com trajetórias contínuas à direita e espaço de estados infinito contável $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots\}$, tal que:

$$\mathbb{P}(\theta_{t+dt} = j | \theta_t = i) = \begin{cases} \lambda_{ij}dt + o(dt), & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}dt + o(dt), & i = j, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $0 \leq \lambda_{ij}$ para $i \neq j$, e $0 \leq \lambda_i := -\lambda_{ii} = \sum_{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}} \lambda_{ij} \leq \rho$ para algum $\rho < \infty$ e todo $i \in \mathcal{S}$. Assuma ainda que $\theta_0 : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ é uma variável aleatória com distribuição π_0 . O exemplo a seguir ilustra como θ pode se apresentar para diferentes valores de $\Lambda := [\lambda_{ij}]$, no caso particular em que $\mathcal{S} = \{1, 2\}$.

Exemplo 1 *Seja a cadeia de Markov a tempo contínuo com espaço de estados binário $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ e taxa de transição*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > 0$. A Figura 3.1 ilustra algumas realizações do processo θ para diferentes valores de β_1 e β_2 , onde fica evidente a seguinte propriedade da cadeia de Markov: um aumento da taxa de transição leva a saltos mais freqüentes (switching mais rápido), enquanto sua diminuição torna a ocorrência de saltos menos freqüente (switching mais lento). ▽▽▽

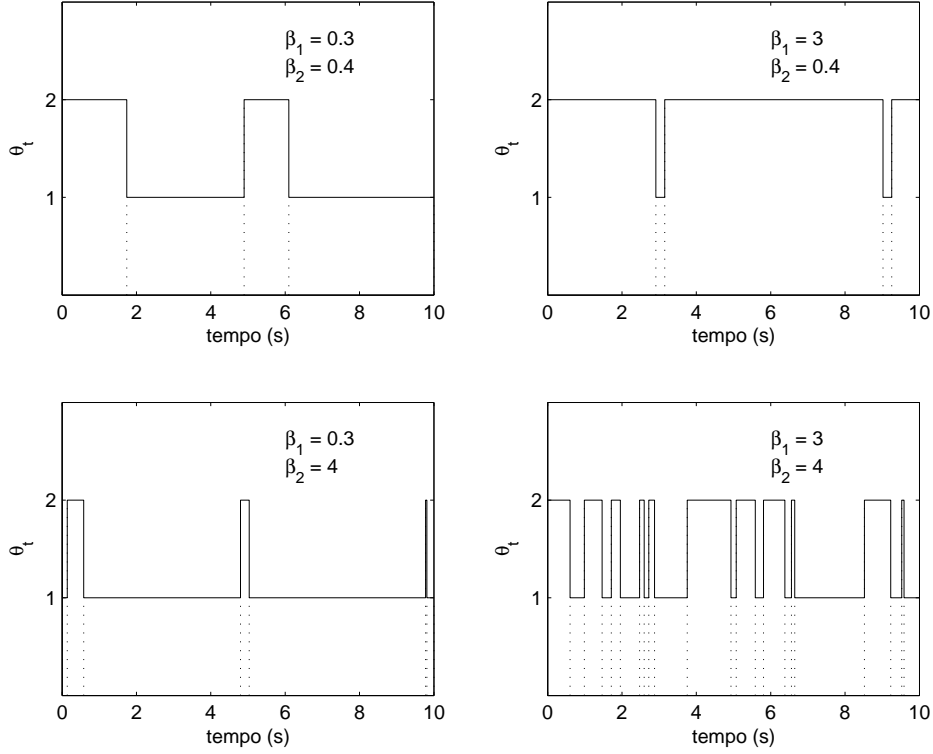


Figura 3.1: Realizações do processo de saltos binário para diferentes valores de Λ

Com o processo θ assim definido, considere a equação diferencial estocástica

$$\dot{x}(t) = A_{\theta_t}x(t) + B_{\theta_t}v(t), \quad x(0) = x_0 \in L_2^n, \quad (3.3a)$$

sobre $t \in \mathbb{R}_+$, junto à relação algébrica

$$z(t) = C_{\theta_t}x(t) + D_{\theta_t}v(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.3b)$$

onde $A = (A_1, A_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^n$ da mesma forma que $B \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, n}$, $C \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n, n_z}$ e $D \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, n_z}$. O sistema assim definido será o objeto de estudo do capítulo 4, onde denotaremos por x a variável de estado e por (x, θ) uma variável de estado aumentada, com condição inicial (x_0, θ_0) . O processo aleatório z corresponde à saída do sistema, quando excitado pelo sinal de entrada $v \in L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+)$. Explicitando a dependência de x nas condições iniciais (x_0, θ_0) , bem como na entrada v , por $x(\cdot) = x(\cdot, x_0, \theta_0, v)$, colocamos a seguinte definição.

Definição 1 Para uma condição inicial $x(0) = 0$ e $\theta_0 \sim \pi_0$ arbitrário, definimos a resposta “zero-state” de (3.3) como $x_{zs}(\cdot) = x(\cdot, 0, \theta_0, v)$. Por outro lado, para condições iniciais arbitrárias mas uma entrada identicamente nula, temos a resposta “zero-input”, $x_{zi}(\cdot) = x(\cdot, x_0, \theta_0, 0)$. ∇

Toda questão relacionada a *estabilidade* no presente trabalho será no seguinte sentido de estabilidade interna.

Definição 2 O sistema (3.3) é dito estocasticamente estável (SS) se, para toda condição inicial $x_0 \in L_2^n$ e distribuição inicial π_0 , tivermos que $\|x_{zi}\|_{\mathbb{R}_+} < \infty$. ∇

O exemplo a seguir ilustra um aspecto bastante peculiar dos MJLS: que a estabilidade do sistema depende não somente da matriz $A = (A_1, A_2, \dots)$, mas também das propriedades do processo de saltos (veja [29], [58] e [16] para uma discussão mais extensa nesse aspecto).

Exemplo 2 Considere novamente a cadeia de Markov a tempo contínuo com espaço de estados binário $\mathcal{S} = \{1, 2\}$, mas taxa de transição dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}, \quad \beta > 0, \quad (3.4)$$

juntamente aos sistemas

$$\Sigma_M : \quad \dot{x}_M(t) = M_{\theta_t} x_M(t) \quad (3.5)$$

e

$$\Sigma_N : \quad \dot{x}_N(t) = N_{\theta_t} x_N(t), \quad (3.6)$$

onde $M = (M_1, M_2)$ e $N = (N_1, N_2)$ são dadas por

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uma realização particular do processo de estado de Σ_M , $x_M = \begin{bmatrix} x_M^{(1)} \\ x_M^{(2)} \end{bmatrix}$, é mostrada na Figura 3.2, para $\beta = 1.5$ e uma dada amostra de θ .

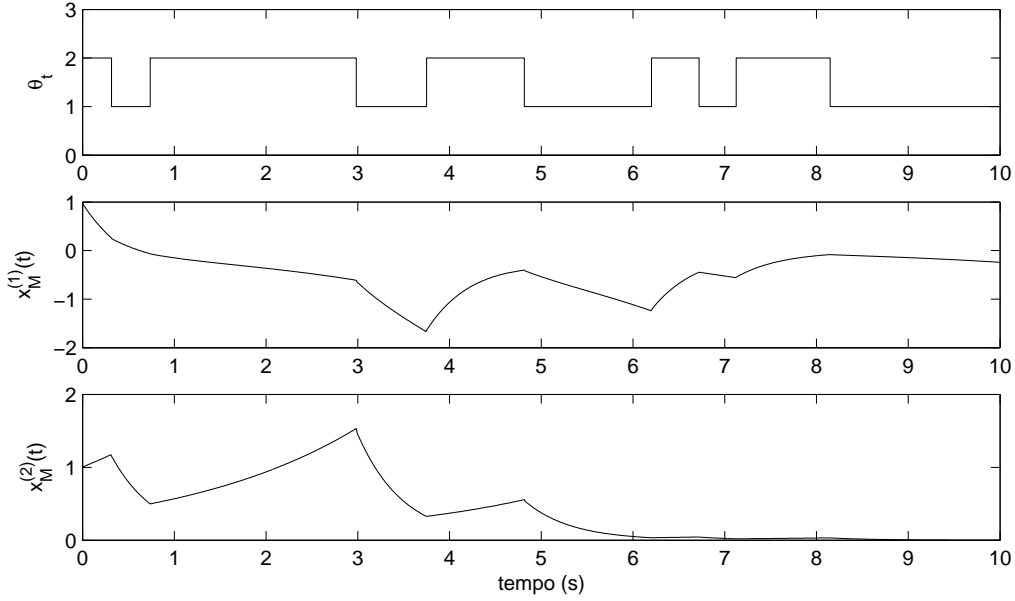


Figura 3.2: Realização dos processos θ e x_M , para $\beta = 1.5$

A fim de traçar conclusões acerca da estabilidade dos sistemas, considere a Figura 3.3 a seguir. É mostrado como a média de 50 diferentes realizações dos processos de estado (x_M e x_N) se comportam em um horizonte de tempo de 45 segundos, para duas diferentes taxas do processo de saltos: $\beta = 0.03$ e $\beta = 1.5$. Através dessas simulações é possível verificar o que foi afirmado nos Exemplos 4.1 e 4.2 de [16]: embora as matrizes M_1 e M_2 sejam instáveis (no sentido de que parte dos seus autovalores está contida no semiplano complexo direito), a estabilidade do sistema Σ_M depende de uma alta taxa de transições de θ (mais especificamente, $\beta > 1.34$). Por outro lado, embora tanto N_1 quanto N_2 sejam estáveis (com espectros inteiramente contidos no semiplano lateral esquerdo), a estabilidade de Σ_N depende de uma taxa relativamente baixa de transições do processo de saltos ($\beta \leq 0.04$, segundo [16]). Com isto verificamos experimentalmente que, de fato, a estabilidade individual de cada um dos modos não é condição necessária – ou sequer suficiente – para que se verifique a estabilidade do sistema correspondente. $\nabla\nabla\nabla$

Um outro importante aspecto da estabilidade de (3.3) é sumarizado como segue.

Nota 3 Em [16, Theorem 5.2] foi provado que a estabilidade no sentido SS para o sistema (3.3) é equivalente ao processo x pertencer a $L_2^n(\mathbb{R}_+)$ sempre que $v \in L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+)$. Neste caso, uma vez que C e D são limitados é fácil provar que $z \in L_2^{n_z}(\mathbb{R}_+)$; isto é, a estabilidade SS implica em um tipo de estabilidade L_2 externa (no sentido entrada-saída) para essa classe de sistemas. $\nabla\nabla$

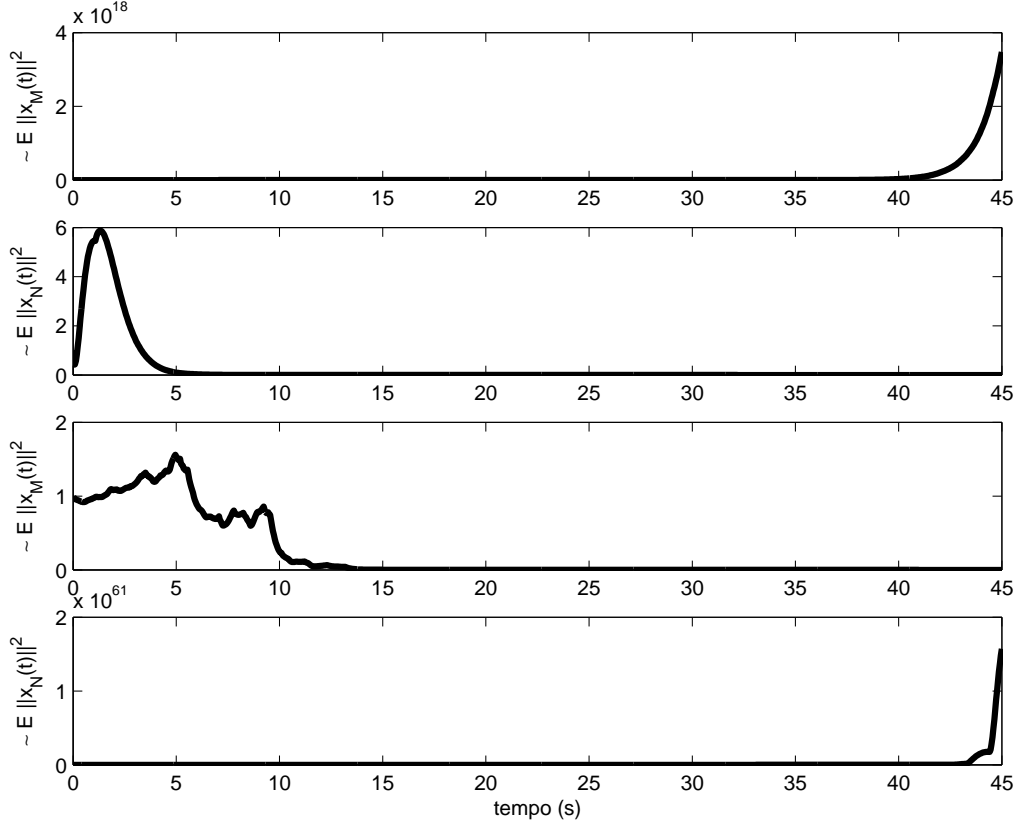


Figura 3.3: Valores médios aproximados de $\|x_M(t)\|^2$ e $\|x_N(t)\|^2$ para $\beta = 0.03$ (metade superior) e $\beta = 1.5$ (metade inferior)

Para $P = (P_1, P_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}$, considere o operador $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots)$ dado por

$$\mathcal{T}_i(P) = A_i^* P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} P_j, \quad i \in \mathcal{S}. \quad (3.7)$$

O principal resultado de [85] estabelece o importante papel que \mathcal{T} (que é hermitiano e limitado na norma $\|\mathcal{T}(\cdot)\| := \sup_{i \in \mathcal{S}} \|\mathcal{T}_i(\cdot)\|$, cf. [16]) desempenha na caracterização da SS do sistema (3.3), que é aqui reproduzido na forma dos teoremas a seguir. Eles estabelecem que a estabilidade estocástica de (3.3) depende da existência e unicidade de soluções para um conjunto infinito enumerável de equações de Lyapunov interconectadas.

Teorema 2 *Se o sistema (3.3) é SS, então para todo $Q \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n+}$ existe um único $P \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ tal que*

$$\mathcal{T}(P) - Q = 0. \quad (3.8)$$

Prova: Veja o Teorema 8 em [85]. ■

Teorema 3 *Caso exista $Q \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n+}$ tal que (3.8) é satisfeita para algum $P \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$, então o sistema (3.3) é SS.*

Prova: Veja o Teorema 7 em [85]. ■

Nota 4 *A caracterização da estabilidade interna do sistema (3.3) através de equações de Lyapunov tem o mesmo papel que aquela classicamente estabelecida no caso linear (veja o capítulo 4 de [92] para mais detalhes). Em particular, os resultados do próximo capítulo dependem fortemente dos teoremas 2 e 3.* ▽▽

A fim de introduzir o modelo que será estudado no capítulo 5 é necessário estabelecer noções precisas de *controle* e *observações parciais* no sistema (3.3). Para tanto, suponha que o processo de saltos, θ_t (tal como definido anteriormente), é conhecido para todo $t \in \mathbb{R}_+$, e considere a equação diferencial estocástica

$$\dot{x}(t) = A_{\theta_t}x(t) + B_{\theta_t}v(t) + G_{\theta_t}u(t), \quad x(0) = x_0 \in L_2^n, \quad (3.9a)$$

sobre $t \in \mathbb{R}_+$, juntamente às relações algébricas estocásticas de saída

$$z(t) = C_{\theta_t}x(t) + D_{\theta_t}v(t) + H_{\theta_t}u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.9b)$$

$$y(t) = \Gamma_{\theta_t}x(t) + L_{\theta_t}v(t), \quad (3.9c)$$

onde $A = (A_1, A_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^n$ da mesma forma que $B \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, n}$, $G \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_u, n}$, $C \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n, n_z}$, $D \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, n_z}$, $H \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_u, n_z}$, $\Gamma \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n, n_y}$ e $L \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, n_y}$. Neste caso, tanto z quanto y são saídas do sistema, representando sinais de *erro* e *medição*, respectivamente. O primeiro (z) representa uma saída que é adversamente perturbada da origem e que, juntamente ao processo x , somente pode ser observada através da medição y . O papel que a ação de controle (u) irá desempenhar neste problema será estabelecido no capítulo 5, mais adiante.

Nota 5 *A hipótese de que o estado da cadeia de Markov é conhecido a todo instante de tempo será de suma importância no desenvolvimento do capítulo 5, uma vez que as leis de controle lá estabelecidas dependerão de θ_t para todo $t \in \mathbb{R}_+$.* ▽▽

4 Bounded real lemma

Neste capítulo será estabelecido um *bounded real lemma* para a classe de sistemas introduzida no capítulo anterior. É provado que a existência de soluções para um conjunto infinito de desigualdades matriciais lineares (LMIs) interconectadas é condição necessária e suficiente para que um dado sistema seja estocasticamente estável (SS) e atenda a um desempenho H_∞ prescrito.

4.1 Preliminares

Considere o modelo Σ , conforme definido no capítulo anterior:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta_t}x(t) + B_{\theta_t}v(t), & x(0) = x_0 \in L_2^n \\ z(t) = C_{\theta_t}x(t) + D_{\theta_t}v(t), & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde θ representa o processo de Markov com gerador infinitesimal Λ definido por (3.1) e condição inicial aleatória $\theta_0 \sim \pi_0$.

Caso Σ seja estável no sentido SS podemos associar a esse sistema um *operador de perturbação*, $\mathbb{L} : L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2^{n_z}(\mathbb{R}_+)$, da seguinte forma:

$$\mathbb{L}v(t) = C_{\theta_t}x_{z\mathcal{S}}(t) + D_{\theta_t}v(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.2)$$

Comparando com (4.1) temos que $z(\cdot) = \mathbb{L}v(\cdot)$ sempre que $x_0 = 0$. Definimos a norma desse operador da maneira usual:

$$\|\mathbb{L}\| = \sup_{v \in L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+), \|v\|_{\mathbb{R}_+} \neq 0} \frac{\|\mathbb{L}v\|_{\mathbb{R}_+}}{\|v\|_{\mathbb{R}_+}}. \quad (4.3)$$

Nota 6 Repare que a hipótese de estabilidade SS garante, conforme apontado na Nota 3, que esse operador é limitado com respeito à norma (4.3). $\nabla\nabla$

O seguinte funcional será de grande importância em nosso desenvolvimento. Ele depende das condições iniciais (x_0, θ_0) , da perturbação v , de um tempo terminal $T > 0$ e de um nível de atenuação de perturbação prescrito $\gamma > 0$:

$$\mathfrak{J}_T^\gamma(x_0, \theta_0, v) = \int_0^T E[\gamma^2 \|v(t)\|^2 - \|z(t)\|^2] dt. \quad (4.4)$$

Nota 7 Embora o sistema Σ possua condições iniciais aleatórias, note que o funcional acima está igualmente definido sobre condições iniciais determinísticas (que são um caso particular). Isto é, podemos naturalmente pensar, por exemplo, em um custo do tipo $\mathfrak{J}_T^\gamma(\beta, i, v)$ para qualquer vetor $\beta \in \mathbb{C}^n$ e todo $i \in \mathcal{S}$; esse fato será largamente explorado mais adiante. $\nabla\nabla$

Note que o funcional acima atribui um custo para cada perturbação $v \in L_2^{n_v}(T)$ que se considere. Admitindo $\gamma > 0$ suficientemente grande, temos que o custo correspondente a uma perturbação à qual o sistema é relativamente *insensível* (isto é, para a qual o ganho de v para z é relativamente pequeno) será maior do que aquele associado a uma perturbação à qual o sistema seja mais *sensível* (isto é, para a qual o ganho de v para z seja maior). Logo, faz sentido nos perguntarmos se as piores perturbações que podem afetar o sistema (para as quais o ganho entrada-saída é máximo) correspondem a mínimos do funcional, e qual o papel que γ desempenha nesse problema.

4.2 O Bounded Real Lemma

A maior parte dos resultados auxiliares ao JBRL, Lema 3, diz respeito ao funcional de custo definido acima. O primeiro teorema que estabelecemos é o seguinte:

Teorema 4 Para qualquer condição inicial (x_0, θ_0) e todo $v \in L_2^{n_v}(T)$, bem como $T > 0$ e $P = (P_1, P_2, \dots) : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}$ continuamente diferenciável, o funcional de custo definido em (4.4) pode ser escrito sob a forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_T^\gamma(x_0, \theta_0, v) &= E \langle x_0, P_{\theta_0}(0)x_0 \rangle - E \langle x(T), P_{\theta_T}(T)x(T) \rangle \\ &+ \int_0^T E \left\{ \langle x(t), \dot{P}_{\theta_t}(t)x(t) \rangle + \left\langle \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, M_{\theta_t}^\gamma(P(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\rangle \right\} dt, \quad (4.5) \end{aligned}$$

onde, para $m = n + n_v$, definimos $M^\gamma(P) = (M_1^\gamma(P), M_2^\gamma(P), \dots)$ através das seguintes

matrizes $m \times m$

$$M_i^\gamma(P) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i(P) - C_i^* C_i & G_i(P) \\ G_i(P)^* & H_i^\gamma \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

com $G_i(P) = P_i B_i - C_i^* D_i$ e $H_i^\gamma = \gamma^2 I_{n_v} - D_i^* D_i$ para qualquer $i \in \mathcal{S}$.

Prova: Considere a seguinte função de Lyapunov:

$$F(t, x(t)) = \sum_{j \in \mathcal{S}} \text{tr}(P_j(t) Q_j(t)) = \sum_{j \in \mathcal{S}} E \{ \langle x(t), P_j(t) x(t) \rangle \mathbf{1}_{\{\theta_t=j\}} \}, \quad (4.7)$$

onde $Q_j(t) := E[x(t)x(t)^* \mathbf{1}_{\{\theta_t=j\}}]$, $j \in \mathcal{S}$. Considere ainda as funções \mathcal{F}_t -mensuráveis $f_j(t, x(t)) = \langle x(t), P_j(t) x(t) \rangle$ e $F_j(t, x(t)) = E[f_j(t, x(t)) \mathbf{1}_{\{\theta_t=j\}}]$, cuja diferencial se escreve:

$$dF_j(t, x(t)) = E \{ df_j(t, x(t)) \mathbf{1}_{\{\theta_t=j\}} \} + E \{ f_j(t, x(t)) d\mathbf{1}_{\{\theta_t=j\}} \}. \quad (4.8)$$

A fim de calcular a primeira diferencial no lado direito da expressão acima iremos proceder da seguinte maneira, onde $\delta f_j(t, x(t); dx(t))$ denota a primeira variação Gâteaux de f_j na direção $(0, dx(t))$, calculada em $(t, x(t))$:

$$\begin{aligned} df_j(t, x(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} f_j(t, x(t)) dt + \delta f_j(t, x(t); dx(t)) \\ &= \{ \langle x(t), \dot{P}_j(t) x(t) \rangle + \langle A_j x(t) + B_j v(t), P_j(t) x(t) \rangle \\ &\quad + \langle P_j(t) x(t), A_j x(t) + B_j v(t) \rangle \} dt. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Com relação ao segundo termo no lado direito de (4.8) temos que:

$$\begin{aligned} E[f_j(t, x(t)) d\mathbf{1}_{\{\theta_t=j\}}] &= E[f_j(t, x(t)) \mathbf{1}_{\{\theta_{t+dt}=j\}} - f_j(t, x(t)) \mathbf{1}_{\{\theta_t=j\}}] \\ &= E \{ f_j(t, x(t)) [\mathbb{P}(\theta_{t+dt} = j | \theta_t) - \mathbb{P}(\theta_t = j | \theta_t)] \} \\ &= E \{ \lambda_{\theta_t, j} f_j(t, x(t)) dt + o(dt) \}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

assumindo $j \neq \theta_t$. No entanto, para $j = \theta_t$ temos que $\mathbb{P}(\theta_{t+dt} = j | \theta_t) - \mathbb{P}(\theta_t = j | \theta_t) = 1 + \lambda_{\theta_t, \theta_t} dt + o(dt) - 1$, e portanto (4.10) vale para todo $j \in \mathcal{S}$.

Somando a expressão (4.8) para todo $j \in \mathcal{S}$ e eliminando os termos $o(dt)$ decorre, uma vez que a seqüência de somas parciais $\sum_{j=1}^M F_j(t, x(t))$ converge uniformemente para um limite em $[0, T]$, que

$$\begin{aligned} dF(t, x(t)) &= E \langle x(t), \dot{P}_{\theta_t} x(t) \rangle dt \\ &\quad + E \left\langle \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{\theta_t}^* P_{\theta_t} + P_{\theta_t} A_{\theta_t} + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{\theta_t, j} P_j & P_{\theta_t} B_{\theta_t} \\ B_{\theta_t}^* P_{\theta_t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt, \end{aligned} \quad (4.11)$$

e o resultado segue em se integrando ambos os lados da expressão acima e combinando a (4.4). ■

O principal resultado deste capítulo (JBRL) é apresentado a seguir.

Lema 3 (Jump-Bounded Real Lemma) *O sistema Σ é SS com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$ se e somente se existir $P = (P_1, P_2, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ tal que $M^\gamma(P) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{m+}$.*

A próxima proposição prova o teorema acima em uma direção, i.e., estabelece uma relação entre SS com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$ e a existência de algum $P \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ tal que $M^\gamma(P) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{m+}$.

Proposição 4 *O sistema Σ é SS com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$ sempre que existir $P \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ tal que $M^\gamma(P) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{m+}$.*

Prova: Da hipótese temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $M_i^\gamma(P) \geq \varepsilon^2 I$ para todo $i \in \mathcal{S}$. Logo, escolhendo qualquer $0 < \tilde{\varepsilon}^2 < \varepsilon^2$ teremos as desigualdades estritas $M_i^\gamma(P) - \tilde{\varepsilon}^2 I > 0$, donde o primeiro bloco diagonal $[M_i^\gamma(P) - \tilde{\varepsilon}^2 I]_{11} = \mathcal{F}_i(P) - C_i^* C_i - \tilde{\varepsilon}^2 I_n > 0$ para todo $i \in \mathcal{S}$. Assim, definindo $\mathcal{R}_i = \mathcal{F}_i(P) - C_i^* C_i - \tilde{\varepsilon}^2 I_n > 0$, $i \in \mathcal{S}$, decorre que existe $-P \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n+}$ tal que

$$\mathcal{F}_i(-P) + (\mathcal{R}_i + C_i^* C_i + \tilde{\varepsilon}^2 I_n) = 0, \quad i \in \mathcal{S}, \quad (4.12)$$

onde $\mathcal{R}_i + C_i^* C_i + \tilde{\varepsilon}^2 I_n > \tilde{\varepsilon}^2 I_n$, de onde segue a estabilidade SS de Σ , de acordo com o Teorema 3. Além disso tem-se, para tais γ e P , que

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_T^\gamma(0, \theta_0, v) &= \int_0^T E[\gamma^2 \|v(t)\|^2 - \|(\mathbb{L}v)(t)\|^2] dt \\ &= -E\langle x(T), P_{\theta_T} x(T) \rangle + \int_0^T E \left\langle \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, M_{\theta_t}^\gamma(P) \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt \\ &\geq 0 + \varepsilon^2 \int_0^T E[\|v(t)\|^2] dt, \end{aligned} \quad (4.13)$$

que é estritamente positivo sempre que $\|v\|_{\mathbb{R}_+} \neq 0$. Por fim, fazendo $T \rightarrow \infty$ decorre que $\gamma^2 \|v\|_{\mathbb{R}_+}^2 > \|\mathbb{L}v\|_{\mathbb{R}_+}^2$ para qualquer $v \in L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+)$ com $\|v\|_{\mathbb{R}_+} \neq 0$, donde concluímos que $\|\mathbb{L}\| < \gamma$. ■

Para provar a segunda parte do JBRL, Lema 3, primeiro serão estabelecidos alguns resultados intermediários.

A seguinte proposição especializa o principal resultado de [89] para que seja utilizado aqui. São estabelecidas a existência e unicidade de soluções para as equações diferenciais

em espaço de Banach de que estaremos tratando em seguida.

Proposição 5 *Existem funções $X = (X_1, X_2, \dots)$ e $Y = (Y_1, Y_2, \dots)$ de $(-\infty, T]$ em $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}$ tais que, para qualquer $i \in \mathcal{S}$ e todo $0 < T < \infty$,*

$$\dot{X}_i + \mathcal{F}_i(X) - C_i^* C_i = 0, \quad X_i(T) = 0, \quad (4.14)$$

e

$$\dot{Y}_i + \mathcal{F}_i(Y) - C_i^* C_i - G_i(Y) R_i^{-1} G_i(Y)^* = 0, \quad Y_i(T) = 0, \quad (4.15)$$

onde $R = (R_1, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v+}$ e $R_i > 0$, $i \in \mathcal{S}$. Além disso, as únicas soluções são continuamente diferenciáveis.

Prova: É suficiente provar a existência (com as propriedades indicadas) de Y , uma vez que (4.15) se reduz a (4.14) quando B e D são identicamente zero. A equação (4.15) pode ser escrita como

$$\dot{Y}_i + Y_i \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^* Y_i + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} Y_j + \tilde{Q}_i - Y_i B_i R_i^{-1} B_i^* Y_i = 0, \quad (4.16)$$

onde $\tilde{A}_i = A_i + \frac{1}{2} \lambda_{ii} I + B_i R_i^{-1} D_i^* C_i$ e $\tilde{Q}_i = -C_i^* (I + D_i R_i^{-1} D_i^*) C_i$ para $i \in \mathcal{S}$. Mais ainda, tem-se que $\tilde{A} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^n$ e $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots) = \tilde{Q}^*$.

Os resultados de existência e unicidade de Y seguem então pelo mesmo procedimento apresentado na prova do *Theorem 4.1* em [89]. ■

O lema a seguir estabelece que o custo associado a qualquer perturbação em $L_2^{n_v}(T)$ e condição inicial fixada pode ser inferiormente limitado de maneira uniforme.

Lema 4 *Supondo SS do sistema Σ com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$ tem-se, para qualquer condição inicial $(\beta, i) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{S}$ e todo $T > 0$, que existe uma constante finita $c > 0$ tal que*

$$\mathfrak{J}_T^\gamma(\beta, i, v) \geq -c \|\beta\|^2 \quad \forall v \in L_2^{n_v}(T). \quad (4.17)$$

Prova: Com base na Proposição 5 escolha $X_T = (X_{T,1}, X_{T,2}, \dots) : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}$ satisfazendo (4.14) sobre todo $[0, T]$, de tal forma que o funcional de custo na forma do Teorema 4, considerando $X_T(\cdot)$ no lugar de $P(\cdot)$, se escreve

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_T^\gamma(\beta, i, v) &= \langle \beta, X_{T,i}(0) \beta \rangle + \int_0^T \{ E \langle G_{\theta_t}(X_T)^* x(t), v(t) \rangle \\ &\quad + \langle v(t), G_{\theta_t}(X_T)^* x(t) \rangle + \langle v(t), H_{\theta_t}^\gamma v(t) \rangle \} dt. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Podemos facilmente remover o último termo de dentro da integral, escrevendo $\mathfrak{J}_T^\gamma(0, i, v)$ sob a mesma forma e lembrando que $x(\cdot) = x_{zi}(\cdot) + x_{zs}(\cdot)$. Resulta então que

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_T^\gamma(\beta, i, v) &= \mathfrak{J}_T^\gamma(0, i, v) + \langle \beta, X_{T,i}(0)\beta \rangle \\ &\quad + \int_0^T E \{ \langle G_{\theta_t}(X_T)^* x_{zi}(t), v(t) \rangle + \langle v(t), G_{\theta_t}(X_T)^* x_{zi}(t) \rangle \} dt. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Defina $v_0(\cdot) = v(\cdot)\mathbb{I}_{[0,T]}(\cdot)$. Escolhendo então $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon^2 < \gamma^2 - \|\mathbb{L}\|^2$ tem-se

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_T^\gamma(0, i, v) &\geq \gamma^2 \|v_0\|_{\mathbb{R}_+}^2 - \|\mathbb{L}v_0\|_{\mathbb{R}_+}^2 \geq (\gamma^2 - \|\mathbb{L}\|^2) \|v_0\|_{\mathbb{R}_+}^2 \\ &\geq \varepsilon^2 \int_0^\infty E[\|v_0(t)\|^2] dt = \int_0^T E\langle \varepsilon v(t), \varepsilon v(t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (4.20)$$

e assim, completando quadrados, podemos eliminar um termo quadrático:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_T^\gamma(\beta, i, v) &\geq \langle \beta, X_{T,i}(0)\beta \rangle + \int_0^T E\{ \langle \varepsilon v(t), \varepsilon v(t) \rangle \\ &\quad + \langle \varepsilon^{-1} G_{\theta_t}(X_T)^* x_{zi}(t), \varepsilon v(t) \rangle + \langle \varepsilon v(t), \varepsilon^{-1} G_{\theta_t}(X_T)^* x_{zi}(t) \rangle \\ &\quad + \|\varepsilon^{-1} G_{\theta_t}(X_T)^* x_{zi}(t)\|^2 - \|\varepsilon^{-1} G_{\theta_t}(X_T)^* x_{zi}(t)\|^2 \} dt \\ &\geq \langle \beta, X_{T,i}(0)\beta \rangle - \varepsilon^{-2} \int_0^T E[\|G_{\theta_t}(X_T)^* x_{zi}(t)\|^2] dt. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Em seguida procuremos por limitantes uniformes para $X_T(\cdot)$ sobre todo $[0, T]$. Pela homogeneidade de (4.14) temos que $X_T(t) = X_{T-t}(0)$ para qualquer $t \in [0, T]$, levando a

$$\langle \beta, X_{T,i}(t)\beta \rangle = \langle \beta, X_{T-t,i}(0)\beta \rangle = \mathfrak{J}_{T-t}^\gamma(\beta, i, 0) = -\|z\|_{T-t}^2 \leq 0. \quad (4.22)$$

O limitante inferior pode ser obtido como segue: primeiro note que, para v identicamente zero, temos que $z(s) = C_{\theta_s} x_{zi}(s)$ para $s \in [0, T]$, donde

$$\begin{aligned} E[\|z(s)\|^2] &= \sum_{j \in \mathcal{S}} E[\|C_{\theta_s} x_{zi}(s)\|^2 \mathbf{1}_{\{\theta_s=j\}}] \leq \sum_{j \in \mathcal{S}} E[\|C_j\|^2 \|x_{zi}(s)\|^2 \mathbf{1}_{\{\theta_s=j\}}] \\ &\leq \|C\|_{\sup}^2 \sum_{j \in \mathcal{S}} E[\|x_{zi}(s)\|^2 \mathbf{1}_{\{\theta_s=j\}}] = \|C\|_{\sup}^2 E[\|x_{zi}(s)\|^2], \end{aligned} \quad (4.23)$$

e portanto existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$\int_0^{T-t} E[\|z(s)\|^2] ds \leq \|C\|_{\sup} \int_0^\infty E[\|x_{zi}(s)\|^2] ds \leq c_0 \|C\|_{\sup} \|\beta\|^2, \quad (4.24)$$

diretamente da hipótese de SS. Juntando os resultados segue que, para qualquer $\beta \in \mathbb{C}^n$,

$$0 \geq \langle \beta, X_{T,i}(t)\beta \rangle \geq -c_0 \|C\|_{\sup} \|\beta\|^2. \quad (4.25)$$

De maneira análoga a (4.23) decorre, sempre omitindo a dependência temporal de $X_T(\cdot)$, que $E[\|G_{\theta_t}(X_T)^*x_{zi}(t)\|^2] \leq \|G(X_T)\|_{\text{sup}}^2 E[\|x_{zi}(t)\|^2]$. Como $\|G_j(X_T)\| = \|X_{T,j}B_j - C_j^*D_j\| \leq \|X_{T,j}\| \|B_j\| + \|C_j\| \|D_j\|$, segue de (4.25) que, para todo $t \in [0, T]$,

$$\|G(X_T(t))\|_{\text{sup}} \leq c_0 \|C\|_{\text{sup}} \|B\|_{\text{sup}} + \|C\|_{\text{sup}} \|D\|_{\text{sup}} \quad (4.26)$$

e assim, mais uma vez usando a hipótese de SS,

$$\begin{aligned} \int_0^T E[\|G_{\theta_t}(X_T)^*x_{zi}(t)\|^2] dt &\leq \|C\|_{\text{sup}}^2 (c_0 \|B\|_{\text{sup}} + \|D\|_{\text{sup}})^2 \|x_{zi}\|_{\mathbb{R}_+}^2 \\ &\leq c_0 \|C\|_{\text{sup}}^2 (c_0 \|B\|_{\text{sup}} + \|D\|_{\text{sup}})^2 \|\beta\|^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Substituindo (4.25) e (4.27) de volta em (4.21) vem o resultado,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_T^\gamma(\beta, i, v) &\geq -\{c_0 \|C\|_{\text{sup}} + \varepsilon^{-2} c_0 \|C\|_{\text{sup}}^2 (c_0 \|B\|_{\text{sup}} + \|D\|_{\text{sup}})^2\} \|\beta\|^2 \\ &\geq -c \|\beta\|^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

para alguma constante $c > 0$ convenientemente escolhida. ■

O seguinte lema garante a positividade uniforme do segundo bloco diagonal da matriz $M^\gamma(\cdot)$ definida em (4.6), que é obviamente uma condição necessária para que o Lema 3 se verifique.

Lema 5 *Suponha que o sistema Σ é SS com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$. Então $H^\gamma = (H_1^\gamma, H_2^\gamma, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n_v+}$.*

Prova: Note que $\|H^\gamma\|_{\text{sup}} = \sup_{i \in \mathcal{S}} \|\gamma^2 I_{n_v} - D_i^* D_i\| \leq \gamma^2 + \|D\|_{\text{sup}}^2$; portanto, falta somente provar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $H_i^\gamma \geq \varepsilon^2 I_{n_v}$ para todo $i \in \mathcal{S}$. Em primeiro lugar, provemos por contradição que $H_i^\gamma \geq 0$ sobre $i \in \mathcal{S}$; isto é, suponha que exista $\mu \in \mathbb{C}^{n_v}$, $\tilde{\mu} := \|\mu\|$, tal que $\langle \mu, H_i^\gamma \mu \rangle < -\alpha$ para algum $i \in \mathcal{S}$ e $\alpha > 0$.

Tome mais uma vez o único $X_T : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_*}$ que satisfaz (4.14) para todo $i \in \mathcal{S}$. Assim, omitindo sua dependência no tempo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_T^\gamma(0, i, v) &= \int_0^T E\{\langle x_{zs}(t), G_{\theta_t}(X_T)v(t) \rangle + \langle G_{\theta_t}(X_T)v(t), x_{zs}(t) \rangle \\ &\quad + \langle v(t), H_{\theta_t}^\gamma v(t) \rangle\} dt. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Considerando $v_\delta(\cdot) = \mu_{\mathbb{I}_{[0,\delta]}(\cdot)}$ no lugar de v temos que, para todo $t \in [0, \delta)$,

$$\begin{aligned}
& E\{\langle x_{zs}(t), G_{\theta_t}(X_T)v(t) \rangle + \langle G_{\theta_t}(X_T)v(t), x_{zs}(t) \rangle\} \\
&= \sum_{j \in \mathcal{S}} E\{\langle x_{zs}(t), G_{\theta_t}(X_T)\mu \rangle + \langle G_{\theta_t}(X_T)\mu, x_{zs}(t) \rangle\} \mathbf{1}_{\{\theta_t=j\}} \\
&\leq \sum_{j \in \mathcal{S}} 2\|E[x_{zs}(t)\mathbf{1}_{\{\theta_t=j\}}]\| \|G_j(X_T)\mu\| \leq 2\tilde{\mu}\|G(X_T)\|_{\text{sup}}\|E[x_{zs}(t)]\| \\
&\leq 2\tilde{\mu}(c_0\|B\|_{\text{sup}} + \|D\|_{\text{sup}})\|C\|_{\text{sup}}\|E[x_{zs}(t)]\|, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

onde empregamos (4.26) para obter a última desigualdade. Voltando a (4.29) e usando a hipótese de negatividade em H_i^γ teremos que, para algum $\kappa > 0$ adequado,

$$\tilde{\mathfrak{J}}_T^\gamma(0, i, v_\delta) \leq \int_0^\delta \{\kappa\|E[x_{zs}(t)]\| - \alpha\} dt. \tag{4.31}$$

Uma vez que as trajetórias de θ são contínuas à direita, segue que $E[x_{zs}(t)]$ também é contínua em $t = 0^+$. Tendo em mente que $x_{zs}(0) = 0$, decorre que o lado direito da expressão acima é portanto negativo em se tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Mas isso contradiz o lema anterior, donde se conclui que $H_i^\gamma \geq 0$ para qualquer $i \in \mathcal{S}$.

Finalmente, considere $0 < \varepsilon < \gamma$ e $\tilde{\gamma} = (\gamma^2 - \varepsilon^2)^{1/2}$, de tal forma que $\|\mathbb{L}\| < \tilde{\gamma} < \gamma$. Repetindo os passos anteriores desde o começo com $\tilde{\gamma}$ no lugar de γ concluimos que $H_i^{\tilde{\gamma}} = (\gamma^2 - \varepsilon^2)I_{n_v} - D_i^*D_i \geq 0$ para todo $i \in \mathcal{S}$, donde

$$H_i^\gamma = \gamma^2 I_{n_v} - D_i^*D_i \geq \varepsilon^2 I_{n_v} \tag{4.32}$$

segue imediatamente. ■

Em seguida estabelecemos um resultado que relaciona a minimização do funcional de custo $\tilde{\mathfrak{J}}_T^\gamma(x_0, \theta_0, \cdot)$ a uma perturbação específica v_T , para uso posterior.

Lema 6 *Suponha que o sistema Σ é SS com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$ e denote como P_T a solução de (4.15) com H^γ no lugar de R . Assim, definindo $K(P_T) = (K_1(P_T), K_2(P_T), \dots)$ com $K_i(P_T) = -(H_i^\gamma)^{-1}G_i(P_T)^*$ sobre $i \in \mathcal{S}$, temos que:*

(i) *A perturbação estocástica $v_T(\cdot) := K_{\theta(\cdot)}(P_T)x(\cdot)$ é tal que*

$$v_T = \arg \min_{v \in \mathfrak{D}} \tilde{\mathfrak{J}}_T^\gamma(x_0, \theta_0, v), \tag{4.33}$$

onde \mathfrak{D} é o domínio de $\tilde{\mathfrak{J}}$ com relação ao seu último argumento;

(ii) O custo mínimo associado é dado por

$$\tilde{\mathfrak{J}}_T^\gamma(x_0, \theta_0, v_T) = E \langle x_0, P_{T, \theta_0}(0)x_0 \rangle, \quad (4.34)$$

e, obviamente, $\tilde{\mathfrak{J}}_T^\gamma(x_0, \theta_0, v_T) \leq \tilde{\mathfrak{J}}_T^\gamma(x_0, \theta_0, v)$ para qualquer $v \in L_2^{n_v}(T)$.

Prova: De acordo com a positividade de $(H_i^\gamma)^* = H_i^\gamma$ sobre todo $i \in \mathcal{S}$ (Lema 5), podemos definir o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\theta_t}^\gamma} = \langle \cdot, H_{\theta_t}^\gamma \cdot \rangle$ e a norma induzida pelo mesmo, $\|\cdot\|_{H_{\theta_t}^\gamma}$. Então a prova vem facilmente, uma vez que se escreva o custo em uma forma mais adequada. Do Teorema 4:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathfrak{J}}_T^\gamma(x_0, \theta_0, v) \\ &= E \langle x_0, P_{\theta_0}(0)x_0 \rangle - E \langle x(T), P_{\theta_T}(T)x(T) \rangle \\ & \quad + \int_0^T E \{ \langle x(t), [\dot{P}_{\theta_t} + \mathcal{T}_{\theta_t}(P) - C_{\theta_t}^* C_{\theta_t}]x(t) \rangle + \langle G_{\theta_t}(P)^* x(t), v(t) \rangle \\ & \quad + \langle v(t), G_{\theta_t}(P)^* x(t) \rangle + \langle v(t), H_{\theta_t}^\gamma v(t) \rangle \} dt \\ &= E \langle x_0, P_{\theta_0}(0)x_0 \rangle - E \langle x(T), P_{\theta_T}(T)x(T) \rangle + \int_0^T E \{ \|v(t) - K_{\theta_t}(P)x(t)\|_{H_{\theta_t}^\gamma}^2 \\ & \quad + \langle x(t), [\dot{P}_{\theta_t} + \mathcal{T}_{\theta_t}(P) - C_{\theta_t}^* C_{\theta_t} - G_{\theta_t}(P)(H_{\theta_t}^\gamma)^{-1} G_{\theta_t}(P)^*]x(t) \rangle \} dt. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Uma vez que o custo associado a um dado conjunto de argumentos é independente de uma escolha particular em P (pela sua própria definição), é possível considerar a expressão anterior com P_T (a solução de (4.15) com $R = H^\gamma$) no lugar de P . Assim:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{J}}_T^\gamma(x_0, \theta_0, v) &= E \langle x_0, P_{T, \theta_0}(0)x_0 \rangle + \int_0^T E \{ \|v(t) - K_{\theta_t}(P_T)x(t)\|_{H_{\theta_t}^\gamma}^2 \} dt \\ &\geq E \langle x_0, P_{T, \theta_0}(0)x_0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.36)$$

e a igualdade vale somente se $v(t) = v_T(t) = K_{\theta_t}(P_T)x(t)$ para quase todo $t \in [0, T]$, de onde segue (i) e (ii). ■

A seguinte proposição garante que P_T , a solução de (4.15) sobre $[0, T]$, é ao mesmo tempo limitada e monótona. Esse resultado será de grande importância no problema de horizonte infinito, $\lim_{T \rightarrow \infty} P_T$.

Proposição 6 *Assuma que o sistema Σ é SS com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$ e considere $P_T : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}$, a solução de (4.15) com $R = H^\gamma$. Então as seguintes afirmativas valem para todo $t \in [0, T]$:*

(i) Para todo $i \in \mathcal{S}$ existe uma constante $c > 0$ tal que

$$-cI_n \leq P_{T,i}(t) \leq 0. \quad (4.37)$$

(ii) Para todo $0 < \tilde{T} < T$ e $i \in \mathcal{S}$ temos que $P_{\tilde{T},i}(t) \geq P_{T,i}(t)$.

(iii) O limite $P = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T(t)$ existe e é tal que $P \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n-}$.

Prova: Esta prova depende do resultado de otimalidade obtido no lema anterior. Simplesmente tome qualquer par $(\beta, i) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{S}$ junto a $t \in [0, T]$, e escreva

$$\begin{aligned} \langle \beta, P_{T,i}(t)\beta \rangle &= \langle \beta, P_{T-t,i}(0)\beta \rangle = \mathfrak{J}_{T-t}^\gamma(\beta, i, v_{T-t}) \\ &\leq \mathfrak{J}_{T-t}^\gamma(\beta, i, 0) = -\int_0^{T-t} E[\|z(s)\|^2] ds \leq 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde $v_{(\cdot)}$ é tal como definido em (4.33). Por outro lado, foi provado no Lema 4 que $\langle \beta, P_{T-t,i}(0)\beta \rangle = \mathfrak{J}_{T-t}^\gamma(\beta, i, v_{T-t}) \geq -c\|\beta\|^2 = \langle \beta, -cI_n, \beta \rangle$, de onde (4.37) segue.

Para a prova de (ii) defina $\tilde{v}(\cdot) = v_{\tilde{T}-t}(\cdot)\mathbb{I}_{[0, \tilde{T}-t]}(\cdot) \in L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+)$. O resultado segue imediatamente das relações

$$\begin{aligned} \langle \beta, P_{T,i}(t)\beta \rangle &= \langle \beta, P_{T-t,i}(0)\beta \rangle = \mathfrak{J}_{T-t}^\gamma(\beta, i, v_{T-t}) \\ &\leq \mathfrak{J}_{T-t}^\gamma(\beta, i, \tilde{v}) = \mathfrak{J}_{\tilde{T}-t}^\gamma(\beta, i, v_{\tilde{T}-t}) - \int_{\tilde{T}-t}^{T-t} E[\|z(s)\|^2] ds \\ &\leq \mathfrak{J}_{\tilde{T}-t}^\gamma(\beta, i, v_{\tilde{T}-t}) = \langle \beta, P_{\tilde{T},i}(t)\beta \rangle. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Por fim, temos que (iii) é simplesmente uma importante consequência de (i) e (ii) e do fato de $\mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}$ ser um espaço completo. De fato:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{T-t}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T(0), \quad (4.40)$$

que é independente de t . Finalmente, a negatividade e a limitação na norma seguem de (4.37). ■

Note que o item (iii) da proposição, quando considerado junto ao problema de horizonte finito (4.15), implica que para todo $i \in \mathcal{S}$ as equações algébricas de Riccati

$$\mathcal{F}_i(P) - C_i^* C_i - G_i(P)(\gamma^2 I_{n_v} - D_i^* D_i)^{-1} G_i(P)^* = 0 \quad (4.41)$$

tenham uma solução $P \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n-}$. Com isto é possível, imediatamente após o seguinte lema, apresentar a prova do principal resultado desse capítulo.

Lema 7 Sejam $\tilde{C}^\varepsilon = (\tilde{C}_1^\varepsilon, \tilde{C}_2^\varepsilon, \dots)$ e $\tilde{D} = (\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \dots)$, onde $\tilde{C}_i^\varepsilon := [C_i^* \quad \varepsilon I_n]^*$ e $\tilde{D}_i := [D_i^* \quad 0_{n_v \times n}]^*$, para todo $i \in \mathcal{S}$ e para $\varepsilon > 0$. Então o operador de perturbação $\tilde{\mathbb{L}}^\varepsilon : v \mapsto \tilde{z}^\varepsilon$, correspondente ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta_i} x(t) + B_{\theta_i} v(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ \tilde{z}^\varepsilon(t) = \tilde{C}_{\theta_i}^\varepsilon x(t) + \tilde{D}_{\theta_i} v(t) \end{cases} \quad (4.42)$$

com $x(0) = x_0 \in L_2^n$ é tal que, para alguma constante $\kappa > 0$,

$$\|\tilde{\mathbb{L}}^\varepsilon\|^2 \leq \|\mathbb{L}\|^2 + \kappa \varepsilon^2, \quad (4.43)$$

onde a norma de $\tilde{\mathbb{L}}^\varepsilon$ é definida de forma análoga à de \mathbb{L} .

Prova: Segundo a definição temos que, para qualquer $v \in L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+)$ e todo $t > 0$,

$$\|\tilde{\mathbb{L}}^\varepsilon v(t)\|^2 = \|\mathbb{L}v(t)\|^2 + \varepsilon^2 \|x_{zs}(t)\|^2. \quad (4.44)$$

Integrando em todo \mathbb{R}_+ e tomando o valor esperado decorre então que

$$\|\tilde{\mathbb{L}}^\varepsilon v\|_{\mathbb{R}_+}^2 = \|\mathbb{L}v\|_{\mathbb{R}_+}^2 + \varepsilon^2 \|x_{zs}\|_{\mathbb{R}_+}^2 \leq (\|\mathbb{L}\|^2 + c^2 \varepsilon^2) \|v\|_{\mathbb{R}_+}^2 \quad (4.45)$$

para alguma constante $c > 0$ (veja [16, Theorem 5.2], conforme apontado na Nota 3). O resultado segue então imediatamente de (4.3), *mutatis mutandis*. ■

Prova do Lema 3: Ainda nos resta provar a contrapartida da Proposição 4. Para tanto, note primeiramente que, para algum $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequenos, temos do lema anterior que

$$\|\mathbb{L}\| < \gamma \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{\mathbb{L}}^{\tilde{\varepsilon}}\| < \gamma_\varepsilon, \quad (4.46)$$

onde $^1 \tilde{\varepsilon} = (\varepsilon^2 + \delta^2)^{1/2}$ e $\gamma_\varepsilon = (\gamma^2 - \varepsilon^2)^{1/2}$. Assim, considerando γ_ε no lugar de γ , os resultados anteriores estabelecem que $0 < \tilde{H}_i^{\gamma_\varepsilon} := \gamma^2 I_{n_v} - \tilde{D}_i^* \tilde{D}_i - \varepsilon^2 I_{n_v}$ para todo $i \in \mathcal{S}$, e portanto existe $\tilde{P} = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n-}$ tal que

$$\mathcal{F}_i(\tilde{P}) - (\tilde{C}_i^{\tilde{\varepsilon}})^* \tilde{C}_i^{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{G}_i^{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{P})(\gamma^2 I_{n_v} - \tilde{D}_i^* \tilde{D}_i - \varepsilon^2 I_{n_v})^{-1} \tilde{G}_i^{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{P})^* = 0, \quad (4.47)$$

onde $(\tilde{C}_i^{\tilde{\varepsilon}})^* \tilde{C}_i^{\tilde{\varepsilon}} = C_i^* C_i + \tilde{\varepsilon}^2 I_n$, $\tilde{G}_i^{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{P}) = \tilde{P}_i B_i - (\tilde{C}_i^{\tilde{\varepsilon}})^* \tilde{D}_i = \tilde{P}_i B_i - C_i^* D_i = G_i(\tilde{P})$, e $\tilde{D}_i^* \tilde{D}_i = D_i^* D_i$. Logo (4.47) pode ser escrita como (note que $\mathcal{F}(\cdot)$ é homogêneo):

$$\mathcal{F}_i(-\tilde{P}) + \{C_i^* C_i + \tilde{\varepsilon}^2 I_n + G_i(\tilde{P})(H_i^{\gamma_\varepsilon})^{-1} G_i(\tilde{P})^*\} = 0, \quad (4.48)$$

¹note que $\tilde{\varepsilon}$ é ligeiramente maior do que ε , enquanto γ_ε é ligeiramente menor do que γ .

de onde decorre que \tilde{P} na verdade pertence a $\tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$, diretamente do Teorema 2. Além disso, a expressão acima estabelece que

$$\mathcal{T}_i(\tilde{P}) - C_i^* C_i - \varepsilon^2 I_n - G_i(\tilde{P})(H_i^\gamma - \varepsilon^2 I_{n_v})^{-1} G_i(\tilde{P})^* = \delta^2 I_n > 0, \quad (4.49)$$

e como $H_i^\gamma - \varepsilon^2 I_{n_v} > 0$ para todo $i \in \mathcal{S}$, segue do Complemento de Schur que este $\tilde{P} \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ é tal que $M^\gamma(\tilde{P}) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{m+}$, concluindo a prova. ■

Encerramos o presente capítulo com a seguinte proposição. Nela, o resultado do Lema 3 é apresentado de uma maneira ligeiramente diferente – a qual será mais adequada para os fins do capítulo seguinte. A principal inovação em relação ao resultado anterior se expressa por uma dependência afim nas matrizes do sistema (A , B , C , e D).

Proposição 7 *O sistema Σ é SS com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$ se e somente se existir $P = (P_1, P_2, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ tal que, para todo $i \in \mathcal{S}$,*

$$\begin{bmatrix} A_i^* P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} P_j & P_i B_i & C_i^* \\ B_i^* P_i & \gamma^2 I_{n_v} & D_i^* \\ C_i & D_i & I_{n_z} \end{bmatrix} \gg 0. \quad (4.50)$$

Prova: O resultado decorre diretamente do Complemento de Schur Uniforme, Teorema 1, junto ao Lema 3 acima. ■

5 Controle H_∞

Neste capítulo será estudado o controle H_∞ de uma classe de sistemas lineares com saltos Markovianos sujeitos a perturbações aditivas de energia finita. Partindo do JBRL (Lema 3) estabelecido no capítulo anterior, condições equivalentes à existência de compensadores H_∞ sub-ótimos são estabelecidas em termos da factibilidade de desigualdades matriciais lineares (LMIs) interconectadas. Em seguida, são apresentados algoritmos para o *design* de controladores ótimos e sub-ótimos, na seção 5.3. Algumas simulações dos resultados obtidos são apresentadas ao final do capítulo.

5.1 Descrição do problema

Considere o sistema Σ_u , conforme definido no capítulo 3:

$$\Sigma_u : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta_t}x(t) + B_{\theta_t}v(t) + G_{\theta_t}u(t), & x_0 \in L_2^n, \\ z(t) = C_{\theta_t}x(t) + D_{\theta_t}v(t) + H_{\theta_t}u(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ y(t) = \Gamma_{\theta_t}x(t) + L_{\theta_t}v(t), \end{cases} \quad (5.1)$$

onde θ é o processo de Markov definido por (3.1), com gerador infinitesimal Λ e condição inicial $\theta_0 \sim \pi_0$. Assuma ainda que $A = (A_1, A_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^n$ da mesma forma que $B \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, n}$, $G \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_u, n}$, $C \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_z, n}$, $D \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, n_z}$, $H \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_u, n_z}$, $\Gamma \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n, n_y}$ e $L \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, n_y}$.

Dizemos que $x(t)$ é a variável de estado para um dado $t \in \mathbb{R}_+$ e que $(x(t), \theta_t)$ é uma variável de estado aumentada. Tal como antes, assumimos que $v \in L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+)$ é qualquer perturbação estocástica de energia finita atuando no sistema; a estrutura específica do sinal de controle n_u -dimensional, u , será definida mais adiante.

Como descrito anteriormente, os sinais z e y são as saídas de *erro* e *medição* do sistema Σ_u , respectivamente. O primeiro representa uma saída que é adversamente perturbada da origem, e que deve ser feita relativamente insensível a perturbações na entrada

(v), através da ação de controle. Adicionalmente, nesse modelo os processos x e z somente podem ser observados através da medição y (que sem qualquer perda de generalidade não é diretamente alimentada por u), o que faz de Σ_u um modelo bastante geral – tanto por razões teóricas quanto práticas.

Para atender às especificações H_∞ de um sistema de controle podemos naturalmente formular a seguinte pergunta sobre Σ_u : *como caracterizar uma classe de controladores (sub-ótimos) \mathcal{K} que, além da estabilidade do sistema em malha fechada, garantem que o efeito causado pelas perturbações de entrada (v) no sinal de erro (z) seja, no pior caso, menor do que algum nível desejado?* A medida de *performance* que adotaremos no presente trabalho será do tipo $\|\mathbb{L}\| < \gamma$, onde \mathbb{L} representa um operador que relaciona entrada e saída (perturbação e erro, respectivamente – de maneira semelhante a (5.4)), e γ é o nível de desempenho a ser alcançado.

Na presente abordagem são *admissíveis* os compensadores dinâmicos que relacionam o processo aumentado de medição (y, θ) a políticas de controle u de acordo com o seguinte modelo:

$$\mathcal{K} : \begin{bmatrix} \dot{x}_{\mathcal{K}}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{\theta_t}^{11} & \mathcal{K}_{\theta_t}^{12} \\ \mathcal{K}_{\theta_t}^{21} & \mathcal{K}_{\theta_t}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{K}}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

com $x_{\mathcal{K}}(0) = 0 \in \mathbb{C}^k$. Tal compensador é completamente definido através da matriz $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{(k+n_y), (k+n_u)}$, onde \mathcal{K}_i é a matriz que pré-multiplica o vetor $\begin{bmatrix} x_{\mathcal{K}}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ no lado direito de (5.2), quando $i = \theta_t$. Por essa razão, denotamos ao mesmo tempo o sistema e a matriz em questão sem qualquer confusão.

É possível incorporar ambos os sistemas, Σ_u e \mathcal{K} , em um sistema de *malha fechada* $\Sigma_{\mathcal{K}}$ cuja variável de estado aumentada é dada por $(\hat{x}(t), \theta_t) = (x(t), x_{\mathcal{K}}(t), \theta_t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$. Definindo $\hat{n} = n + k$ e $\hat{x}_0 = (x_0, 0)$ temos então que as equações de estado e saída para este sistema \hat{n} -dimensional podem ser escritas como uma instância de (3.3):

$$\Sigma_{\mathcal{K}} : \begin{cases} \hat{x}(t) = \hat{A}_{\theta_t} \hat{x}(t) + \hat{B}_{\theta_t} v(t), & \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ z(t) = \hat{C}_{\theta_t} \hat{x}(t) + \hat{D}_{\theta_t} v(t), & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $\hat{A} = (\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{\hat{n}}$, $\hat{B} = (\hat{B}_1, \hat{B}_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, \hat{n}}$, $\hat{C} = (\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{\hat{n}, n_z}$, $\hat{D} =$

$(\hat{D}_1, \hat{D}_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_v, n_z}$ e, para $i \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i + G_i \mathcal{K}_i^{22} \Gamma_i & G_i \mathcal{K}_i^{21} \\ \mathcal{K}_i^{12} \Gamma_i & \mathcal{K}_i^{11} \end{bmatrix}, & \hat{B}_i &= \begin{bmatrix} B_i + G_i \mathcal{K}_i^{22} L_i \\ \mathcal{K}_i^{12} L_i \end{bmatrix}, \\ \hat{C}_i &= \begin{bmatrix} C_i + H_i \mathcal{K}_i^{22} \Gamma_i & H_i \mathcal{K}_i^{21} \end{bmatrix}, & \hat{D}_i &= D_i + H_i \mathcal{K}_i^{22} L_i, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= A_i^0 + \hat{G}_i \mathcal{K}_i \hat{\Gamma}_i, & \hat{B}_i &= B_i^0 + \hat{G}_i \mathcal{K}_i \hat{L}_i, \\ \hat{C}_i &= C_i^0 + \hat{H}_i \mathcal{K}_i \hat{\Gamma}_i, & \hat{D}_i &= D_i^0 + \hat{H}_i \mathcal{K}_i \hat{L}_i, \end{aligned}$$

com

$$\begin{bmatrix} A_i^0 & B_i^0 & \hat{G}_i \\ C_i^0 & D_i^0 & \hat{H}_i \\ \hat{\Gamma}_i & \hat{L}_i & \star \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_i & 0 & B_i & 0 & G_i \\ 0 & 0_k & 0_{k \times n_v} & I_k & 0 \\ \hline C_i & 0_{n_z \times k} & D_i & 0 & H_i \\ \hline 0 & I_k & 0 & \star & \star \\ \Gamma_i & 0 & L_i & \star & \star \end{array} \right].$$

Note que esse sistema é um caso particular daquele tratado nos capítulos anteriores. Logo, se $\Sigma_{\mathcal{K}}$ é SS podemos redefinir de agora em diante o operador de perturbação $\mathbb{L} : L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2^{n_z}(\mathbb{R}_+)$ como segue:

$$\mathbb{L}v(t) = \hat{C}_{\theta_t} \hat{x}_{z_s}(t) + \hat{D}_{\theta_t} v(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5.4)$$

onde \hat{x}_{z_s} é a resposta às condições iniciais $(0, \theta_0) \in \mathbb{C}^{\hat{n}} \times \mathcal{S}$. A norma do operador é aquela induzida de $L_2^{n_v}(\mathbb{R}_+)$ em $L_2^{n_z}(\mathbb{R}_+)$, tal como definida em (4.3).

Para uso posterior introduzimos ainda a seguinte definição.

Definição 3 Um compensador $\mathcal{K} \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{(k+n_y), (k+n_u)}$ tal como (5.2) é dito sub-ótimo de nível γ sempre que o sistema em malha fechada, $\Sigma_{\mathcal{K}}$, for estável no sentido SS e $\|\mathbb{L}\| < \gamma$, de acordo com (4.3). ∇

5.2 Caracterização de soluções

Nesta seção serão apresentadas condições que relacionam a existência de controladores sub-ótimos de um dado nível γ à factibilidade de desigualdades matriciais lineares. O principal resultado (Teorema 5) se aplica ao caso *full-order*, onde é provado que a

existência de soluções para o problema H_∞ é caracterizada pela factibilidade de dois diferentes conjuntos de LMIs. Os resultados obtidos serão de fundamental importância para a seção seguinte, cujo objeto será a síntese de tais controladores.

Uma vez que $\Sigma_{\mathcal{K}}$ é um caso especial de (3.3), é possível adaptar o JBRL para esta nova situação, na forma do seguinte corolário.

Corolário 2 *O sistema $\Sigma_{\mathcal{K}}$ é SS com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$ se e somente se existir $P = (P_1, P_2, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\hat{n}-}$ tal que, sobre todo $i \in \mathcal{S}$,*

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_i^* P_i + P_i \hat{A}_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} P_j & P_i \hat{B}_i & \hat{C}_i^* \\ \hat{B}_i^* P_i & \gamma^2 I_{n_v} & \hat{D}_i^* \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i & I_{n_z} \end{bmatrix} \gg 0. \quad (5.5)$$

Prova: O resultado segue imediatamente da Proposição 7. ■

A seguinte proposição estabelece que um dado compensador \mathcal{K} garante a estabilidade (SS) do sistema $\Sigma_{\mathcal{K}}$ junto a um desempenho γ se e somente se determinada LMI possui uma solução na variável P . É importante ressaltar que *qualquer* controlador admissível deve satisfazer tal condição a fim de resolver o problema H_∞ .

Proposição 8 *Dado um compensador \mathcal{K} e um desempenho $\gamma > 0$ a ser alcançado, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

- (i) *O sistema $\Sigma_{\mathcal{K}}$ é SS com $\|\mathbb{L}\| < \gamma$;*
- (ii) *Existe $P = (P_1, P_2, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\hat{n}-}$ tal que*

$$\mathcal{M}^0 + (\mathcal{H} \mathcal{D})^* \mathcal{K} \mathcal{J} + \mathcal{J}^* \mathcal{K}^* (\mathcal{H} \mathcal{D}) \gg 0, \quad (5.6)$$

onde $\mathcal{M}^0 = (\mathcal{M}_1^0, \mathcal{M}_2^0, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{(\hat{n}+n_v+n_z)^*}$, com

$$\mathcal{M}_i^0 = \begin{bmatrix} P_i A_i^0 + (A_i^0)^* P_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} P_j & P_i B_i^0 & (C_i^0)^* \\ (B_i^0)^* P_i & \gamma^2 I_{n_v} & D_i^* \\ C_i^0 & D_i & I_{n_z} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{S},$$

e $\mathcal{P} \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{(\hat{n}+n_v+n_z)^*}$, $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{(\hat{n}+n_v+n_z), (k+n_u)}$ e $\mathcal{J} \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{(\hat{n}+n_v+n_z), (k+n_y)}$ dados por

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_v} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} \hat{G}^* & 0_{(k+n_u) \times n_v} & \hat{H}^* \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} & \hat{L} & 0_{(k+n_y) \times n_z} \end{bmatrix}.$$

Prova: A prova se baseia em simples manipulações na expressão (5.5), que é equivalente à condição (i) acima (Corolário 2). Reescrevendo (5.5) na forma

$$\mathcal{M}_i^0 + \text{Her} \begin{bmatrix} P_i \hat{G}_i \mathcal{K}_i \hat{\Gamma}_i & P_i \hat{G}_i \mathcal{K}_i \hat{L}_i & 0_{\hat{n} \times n_z} \\ 0_{n_v \times \hat{n}} & 0_{n_v} & 0_{n_v \times n_z} \\ \hat{H}_i \mathcal{K}_i \hat{\Gamma}_i & \hat{H}_i \mathcal{K}_i \hat{L}_i & 0_{n_z} \end{bmatrix} \gg 0$$

temos que algum $P = (P_1, P_2, \dots) \ll 0$ satisfaz essa condição sobre $i \in \mathcal{S}$ se e somente se $\mathcal{M}^0 + \text{Her}\{(\mathcal{H} \mathcal{P})^* \mathcal{K} \mathcal{J}\} \gg 0$ é satisfeita, o que equivale a (ii). ■

A seguinte proposição estabelece que a existência de pelo menos um compensador sub-ótimo de nível γ depende da factibilidade de dois conjuntos específicos de desigualdades matriciais.

Proposição 9 *A existência de um compensador sub-ótimo de nível γ , tal como \mathcal{K} , é equivalente às seguintes condições serem satisfeitas para algum $P = (P_1, P_2, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\hat{n}-}$:*

- (i) $\mathcal{M}^0 \gg 0$ em $\mathcal{N}(\mathcal{J})$;
- (ii) $\mathcal{P}^{-1} \mathcal{M}^0 \mathcal{P}^{-1} \gg 0$ em $\mathcal{N}(\mathcal{H})$.

Prova: (Necessidade) Suponha que exista tal \mathcal{K} . Então, a partir da última proposição, também existe $P \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\hat{n}-}$ tal que (5.6) é satisfeita. Do Lema 1, a condição (i) é simplesmente uma consequência desse fato junto à seguinte, para algum $\mu > 0$ e todo $i \in \mathcal{S}$:

$$y_i^* \mathcal{M}_i^0 y_i \geq \mu y_i^* y_i \quad \text{sempre que} \quad \mathcal{H}_i \mathcal{P}_i y_i = 0. \quad (5.7)$$

Note em seguida que a aplicação linear $\mathcal{N}(\mathcal{H}_i \mathcal{P}_i) \ni y_i \mapsto \mathcal{P}_i y_i = x_i \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_i)$ é uma bijeção entre os espaços $\mathcal{N}(\mathcal{H}_i \mathcal{P}_i)$ e $\mathcal{N}(\mathcal{H}_i)$. Assim, a condição acima vale se e só se

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_i^{-1} x_i)^* \mathcal{M}_i^0 (\mathcal{P}_i^{-1} x_i) &\geq \mu (\mathcal{P}_i^{-1} x_i)^* (\mathcal{P}_i^{-1} x_i) \\ &= \mu x_i^* \mathcal{P}_i^{-2} x_i \end{aligned} \quad (5.8)$$

se verifica para todo $x_i \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_i)$ e $i \in \mathcal{I}$. Além disso, assim como $P \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\hat{n}-}$ implica em $P^2 \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\hat{n}+}$, devem existir constantes positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tais que

$$\varepsilon_1 I \leq P^2 \leq \varepsilon_2 I \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_1^{-1} I \geq P^{-2} \geq \varepsilon_2^{-1} I, \quad (5.9)$$

isto é, $P^{-2} \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\hat{n}+}$. Então temos que a transformação de congruência $\mathfrak{C}(\cdot, \mathcal{P}^{-1})$ satisfaz as condições descritas na Proposição 1, de onde (5.8) implica que, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e todo $x_i \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_i)$,

$$(\mathcal{P}_i^{-1} x_i)^* \mathcal{M}_i^0(\mathcal{P}_i^{-1} x_i) \geq \mu x_i^* \mathcal{P}_i^{-2} x_i > \varepsilon x_i^* x_i,$$

o que corresponde à condição (ii), uma vez que a existência de um limitante superior para a norma de $\mathfrak{C}(\mathcal{M}^0, \mathcal{P}^{-1})$ é garantida pela Proposição 1.

(Suficiência) Como as condições (i)+(ii) são equivalentes a (i)+(5.7), para todo $i \in \mathcal{I}$, decorre que a existência de tal $P \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{\hat{n}-}$ garante (pelo Lema 1) a existência de \mathcal{K} tal que (5.6) é satisfeita. Logo, de acordo com a Proposição 8 temos que tal \mathcal{K} satisfaz a condição H_∞ desejada. ■

É possível notar que, embora a primeira condição da última proposição corresponda a um problema de factibilidade em LMIs, o mesmo não vale para a segunda condição. Além disso, mostraremos que as restrições em $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ e $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ podem ser expressadas de maneira mais simples. No que segue iremos apresentar o último resultado de maneira mais conveniente, com o auxílio do Corolário 1.

Proposição 10 Para $X = (X_1, X_2, \dots), Y = (Y_1, Y_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}, P_2 = (P_{21}, P_{22}, \dots), S_2 = (S_{21}, S_{22}, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{k,n}$ e $P_3 = (P_{31}, P_{32}, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^k$, sejam

$$P_i := \begin{bmatrix} X_i & P_{2i} \\ P_{2i}^* & P_{3i} \end{bmatrix}, \quad S_i := P_i^{-1} = \begin{bmatrix} Y_i & S_{2i} \\ S_{2i}^* & \star \end{bmatrix}.$$

Então:

(i) $\mathcal{M}^0 \gg 0$ em $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ se e somente se

$$\begin{bmatrix} A_i^* X_i + X_i A_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_{ij} X_j & X_i B_i & C_i^* \\ B_i^* X_i & \gamma^2 I_{n_y} & D_i^* \\ C_i & D_i & I_{n_z} \end{bmatrix} \gg 0$$

em $\mathcal{N} \left[\begin{array}{ccc} \Gamma_i & L_i & 0_{n_y \times n_z} \end{array} \right], \quad (5.10)$

(ii) $\mathcal{P}^{-1} \mathcal{M}^0 \mathcal{P}^{-1} \gg 0$ em $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ se e somente se

$$\begin{bmatrix} Y_i A_i^* + A_i Y_i + \lambda_{ii} Y_i + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} (S_i S_j^{-1} S_i)_{11} & Y_i C_i^* & B_i \\ & C_i Y_i & I_{n_z} & D_i \\ & B_i^* & D_i^* & \gamma^2 I_{n_v} \end{bmatrix} \gg 0$$

em $\mathcal{N} \left[\begin{matrix} G_i^* & H_i^* & 0_{n_u \times n_v} \end{matrix} \right]$, (5.11)

onde $(S_i S_j^{-1} S_i)_{11} = Y_i X_j Y_i + Y_i P_{2j} S_{2i}^* + S_{2i} P_{2j}^* Y_i + S_{2i} P_{3j} S_{2i}^*$.

Prova: Note primeiramente que $\mathcal{N}(\mathcal{J}_i)$ pode ser escrito como

$$\mathcal{N} \left[\begin{matrix} \hat{\Gamma}_i & \hat{L}_i & 0_{(k+n_y) \times n_z} \end{matrix} \right] = \mathcal{N} \left[\begin{matrix} 0 & I_k & 0 & 0 \\ \Gamma_i & 0 & L_i & 0_{n_y \times n_z} \end{matrix} \right] = \mathcal{R} \left[\begin{matrix} \Phi_{1i} & 0 \\ 0 & 0_k \\ \Phi_{2i} & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{matrix} \right],$$

sempre que $\mathcal{N} \left[\begin{matrix} \Gamma_i & L_i \end{matrix} \right] = \mathcal{R} \left[\begin{matrix} \Phi_{1i} \\ \Phi_{2i} \end{matrix} \right]$. Assim, uma vez que $(P_i A_i^0)_{11} = X_i A_i$, podemos reescrever a primeira condiçao da Proposiçao 9 como

$$\begin{aligned} 0 &\ll \begin{bmatrix} \Phi_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \\ \Phi_{2i} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A_i^* X_i + X_i A_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_{ij} X_j & X_i B_i & C_i^* \\ * & * & * \\ B_i^* X_i & \gamma^2 I_{n_v} & D_i^* \\ C_i & D_i & I_{n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \\ \Phi_{2i} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{1i} & 0 \\ \Phi_{2i} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A_i^* X_i + X_i A_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_{ij} X_j & X_i B_i & C_i^* \\ B_i^* X_i & \gamma^2 I_{n_v} & D_i^* \\ C_i & D_i & I_{n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{1i} & 0 \\ \Phi_{2i} & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de onde segue (i). Com relaçao a segunda condiçao da Proposiçao 9, temos que

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_i^{-1} \mathcal{M}_i^0 \mathcal{P}_i^{-1} \\ &= \mathfrak{C} \left(\begin{bmatrix} (A_i^0)^* P_i + P_i A_i^0 + \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_{ij} P_j & P_i B_i^0 & (C_i^0)^* \\ (B_i^0)^* P_i & \gamma^2 I_{n_v} & D_i^* \\ C_i^0 & D_i & I_{n_z} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_v} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} S_i (A_i^0)^* + A_i^0 S_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_{ij} S_i S_j^{-1} S_i & B_i^0 & S_i (C_i^0)^* \\ (B_i^0)^* & \gamma^2 I_{n_v} & D_i^* \\ C_i^0 S_i & D_i & I_{n_z} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, de maneira análoga ao que foi feito anteriormente temos

$$\mathcal{N}(\mathcal{H}_i) = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \hat{G}_i^* & 0_{(k+n_u) \times n_v} & \hat{H}_i^* \end{bmatrix} \right) = \mathcal{R} \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{1i} & 0 \\ 0 & I_{n_v} \\ \Psi_{2i} & 0 \end{bmatrix}$$

sempre que $\mathcal{R} \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{1i} \\ \Psi_{2i} \end{bmatrix} = \mathcal{N} \begin{bmatrix} \hat{G}_i^* & \hat{H}_i^* \end{bmatrix}$. Então a segunda condição da Proposição 9 se reescreve:

$$\begin{aligned} 0 &\ll \mathfrak{e} \left(\begin{bmatrix} S_i(A_i^0)^* + A_i^0 S_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_{ij} S_i S_j^{-1} S_i & B_i^0 & S_i(C_i^0)^* \\ (B_i^0)^* & \gamma^2 I_{n_v} & D_i^* \\ C_i^0 S_i & D_i & I_{n_z} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{1i} & 0 \\ 0 & I \\ \Psi_{2i} & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathfrak{e} \left(\begin{bmatrix} S_i(A_i^0)^* + A_i^0 S_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_{ij} S_i S_j^{-1} S_i & S_i(C_i^0)^* & B_i^0 \\ C_i^0 S_i & I_{n_z} & D_i \\ (B_i^0)^* & D_i^* & \gamma^2 I_{n_v} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{1i} & 0 \\ \Psi_{2i} & 0 \\ 0 & I_{n_v} \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Mas

$$\mathcal{R} \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{1i} \\ \Psi_{2i} \end{bmatrix} = \mathcal{N} \begin{bmatrix} \hat{G}_i^* & \hat{H}_i^* \end{bmatrix} = \mathcal{N} \begin{bmatrix} 0 & I_k & 0 \\ G_i^* & 0 & H_i^* \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} \Psi_{1i} & 0 \\ 0 & 0_k \\ \Psi_{2i} & 0 \end{bmatrix}$$

sempre que $\mathcal{N} \begin{bmatrix} G_i^* & H_i^* \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} \Psi_{1i} \\ \Psi_{2i} \end{bmatrix}$. Substituindo na expressão anterior vem então a equivalência com

$$\begin{aligned} 0 &\ll \mathfrak{e} \left(\begin{bmatrix} Y_i A_i^* + A_i Y_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_{ij} (S_i S_j^{-1} S_i)_{11} & \star & Y_i C_i^* & B_i \\ \star & \star & \star & \star \\ C_i Y_i & \star & I_{n_z} & D_i \\ B_i^* & \star & D_i^* & \gamma^2 I_{n_v} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi_{1i} & 0 \\ 0 & 0_{k \times n_v} \\ \Psi_{2i} & 0 \\ 0 & I_{n_v} \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathfrak{e} \left(\begin{bmatrix} Y_i A_i^* + A_i Y_i + \lambda_{ii} Y_i + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} (S_i S_j^{-1} S_i)_{11} & Y_i C_i^* & B_i \\ C_i Y_i & I_{n_z} & D_i \\ B_i^* & D_i^* & \gamma^2 I_{n_v} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi_{1i} & 0 \\ \Psi_{2i} & 0 \\ 0 & I_{n_v} \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

de onde (ii) decorre diretamente. ■

Nota 8 Apesar do último resultado se aplicar ao caso em que a ordem do compensador é qualquer (k arbitrário), ele apresenta duas dificuldades evidentes:

- (i) A relação (5.11) depende de cada entrada de S (e de P , por conseguinte) através do termo $S_i S_j^{-1} S_i$;
- (ii) A igualdade $S = P^{-1}$ estabelece que o acoplamento $X = (Y - S_2 S_3^{-1} S_2^*)^{-1}$ deve ser satisfeito, o que corresponde a uma condição não-linear e conservadora.

É importante frisar aqui que, caso $\mathcal{S} = \{1\}$, as condições da proposição acima se reduzem às de [93], [82] ou [94], por exemplo. Isto é, o resultado acima é consistente com a literatura. $\nabla\nabla$

Como ocorre freqüentemente na literatura, resultados mais convenientes podem ser conseguidos no caso *full-order*, quando $k = n$, através da parametrização

$$P_i = \begin{bmatrix} X_i & Y_i^{-1} - X_i \\ Y_i^{-1} - X_i & X_i - Y_i^{-1} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{S}. \quad (5.12)$$

Note que, neste caso, $S_i = \begin{bmatrix} Y_i & Y_i \\ Y_i & \star \end{bmatrix}$ e portanto

$$S_i S_j^{-1} S_i = \begin{bmatrix} Y_i Y_j^{-1} Y_i & \star \\ \star & \star \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Esse simples fato leva ao importante resultado que segue.

Proposição 11 *Existe um compensador sub-ótimo de nível γ e ordem $k = n$ tal como \mathcal{K} sempre que existirem $X = (X_1, X_2, \dots), Y = (Y_1, Y_2, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ tais que o seguinte conjunto de LMIs for satisfeito para todo $i \in \mathcal{S}$:*

$$\begin{bmatrix} A_i^* X_i + X_i A_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} X_j & X_i B_i & C_i^* \\ B_i^* X_i & \gamma^2 I_{n_v} & D_i^* \\ C_i & D_i & I_{n_z} \end{bmatrix} \gg 0$$

em $\mathcal{N} \left[\begin{array}{ccc} \Gamma_i & L_i & 0_{n_y \times n_z} \end{array} \right], \quad (5.14a)$

$$\begin{bmatrix} Y_i A_i^* + A_i Y_i + \lambda_{ii} Y_i & Y_i C_i^* & B_i & \underline{\lambda}_i' \otimes Y_i \\ C_i Y_i & I_{n_z} & D_i & 0 \\ B_i^* & D_i^* & \gamma^2 I_{n_v} & 0 \\ \underline{\lambda}_i \otimes Y_i & 0 & 0 & \mathbb{D}_i(Y) \end{bmatrix} \gg 0$$

em $\mathcal{N} \left[\begin{array}{ccc} G_i^* & H_i^* & 0_{n_u \times n_v} \quad 0_{n_u \times \infty} \end{array} \right], \quad (5.14b)$

e

$$\begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} \ll 0, \quad (5.14c)$$

onde $\underline{\lambda}_i = (\sqrt{\lambda_{i1}}, \dots, \sqrt{\lambda_{i,i-1}}, \sqrt{\lambda_{i,i+1}}, \dots)$, $\mathbb{D}_i(Y) := -\text{diag}(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots)$ para $i \in \mathcal{S}$, e $0_{\bullet \times \infty}$ é uma matriz de zeros com um número infinito de colunas.

Prova: A idéia por trás dessa prova é a de refinar o resultado anterior (Proposição 10) através da escolha de P como em (5.12). Note que (5.14c) implica em $X - Y^{-1} \ll 0$, e que

$$X - (Y^{-1} - X)(X - Y^{-1})^{-1}(Y^{-1} - X) = Y^{-1} \ll 0, \quad (5.15)$$

o que garante, segundo o Complemento de Schur Uniforme (Teorema 1), que esta escolha é tal que $P \ll 0$.

Uma vez que (5.10) depende somente do primeiro bloco diagonal de P esta condição permanece inalterada, (5.14a). Quanto a (5.11), temos sua equivalência com

$$\begin{bmatrix} Y_i A_i^* + A_i Y_i + \lambda_{ii} Y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i & Y_i C_i^* & B_i \\ C_i Y_i & I_{n_z} & D_i \\ B_i^* & D_i^* & \gamma^2 I_{n_v} \end{bmatrix} \gg 0$$

em $\mathcal{N} \begin{bmatrix} G_i^* & H_i^* & 0_{n_u \times n_v} \end{bmatrix}$ (5.16)

garantida por (5.13) para todo $i \in \mathcal{S}$. Do Corolário 1 temos que a relação acima vale se e só se

$$\begin{bmatrix} Y_i A_i^* + A_i Y_i + \lambda_{ii} Y_i + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{\infty} \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i & Y_i C_i^* & B_i & \sqrt{\lambda_{i1}} Y_i \\ C_i Y_i & I_{n_z} & D_i & 0 \\ B_i^* & D_i^* & \gamma^2 I_{n_v} & 0 \\ \sqrt{\lambda_{i1}} Y_i & 0 & 0 & -Y_1 \end{bmatrix} \gg 0$$

em $\mathcal{N} \begin{bmatrix} G_i^* & H_i^* & 0_{n_u \times n_v} & 0_{n_u \times n} \end{bmatrix}$. (5.17)

Agora repare que, para qualquer $N \in \mathcal{S}$,

$$\begin{bmatrix} Y_i A_i^* + A_i Y_i + \lambda_{ii} Y_i + \sum_{\substack{j=N \\ j \neq i}}^{\infty} \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i & Y_i C_i^* & B_i & (\underline{\lambda}_i^{N-1})' \otimes Y_i \\ C_i Y_i & I_{n_z} & D_i & 0 \\ B_i^* & D_i^* & \gamma^2 I_{n_v} & 0 \\ \underline{\lambda}_i^{N-1} \otimes Y_i & 0 & 0 & \mathbb{D}_i^{N-1}(Y) \end{bmatrix} \gg 0$$

em $\mathcal{N} \begin{bmatrix} G_i^* & H_i^* & 0_{n_u \times n_v} & 0_{n_u \times (N-1)n} \end{bmatrix}$

implica em

$$\begin{bmatrix} Y_i A_i^* + A_i Y_i + \lambda_{ii} Y_i + \sum_{\substack{j=N+1 \\ j \neq i}}^{\infty} \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i & Y_i C_i^* & B_i & (\underline{\lambda}_i^N)' \otimes Y_i \\ C_i Y_i & I_{n_z} & D_i & 0 \\ B_i^* & D_i^* & \gamma^2 I_{n_v} & 0 \\ \underline{\lambda}_i^N \otimes Y_i & 0 & 0 & \mathbb{D}_i^N(Y) \end{bmatrix} \gg 0$$

em $\mathcal{N} \begin{bmatrix} G_i^* & H_i^* & 0_{n_u \times n_v} & 0_{n_u \times Nn} \end{bmatrix}$, (5.18)

onde $\underline{\lambda}_i^N, \mathbb{D}_i^N(\cdot)$ são truncamentos de tamanho N para $\underline{\lambda}_i$ e $\mathbb{D}_i(\cdot)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_i^N &= (\sqrt{\lambda_{i1}}, \dots, \sqrt{\lambda_{i,i-1}}, \sqrt{\lambda_{i,i+1}}, \dots, \sqrt{\lambda_{iN}}) \\ \mathbb{D}_i^N(\cdot) &= -\text{diag}(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+i}, \dots, Y_N), \end{aligned}$$

de onde, por indução em N , decorre a expressão (5.14b).

Finalmente, temos que $P \ll 0$ se e somente se

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ Y & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X & Y^{-1} - X \\ Y^{-1} - X & X - Y^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & I \\ Y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} \ll 0, \quad (5.19)$$

pois a transformação de congruência indicada satisfaz as condições da Proposição 1. ■

Nota 9 Note que, no caso finito (em que $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$), temos que a restrição em (5.14b) passa a se expressar no conjunto $\mathcal{N} \begin{bmatrix} G_i^* & H_i^* & 0_{n_u \times n_v} & 0_{n_u \times (N-1)n} \end{bmatrix}$, para qualquer $i \in \mathcal{S}$; além disso, as noções de uniformidade e limitação na norma são trivialmente satisfeitas por quaisquer X e Y tais que $X_i < 0$ e $Y_i < 0$, de onde as desigualdades \gg e \ll podem ser interpretadas como $>$ e $<$, no sentido usual.

Note ainda que, neste caso, é necessário trocar $\underline{\lambda}_i$ por $\underline{\lambda}_i^N$ e $\mathbb{D}_i(\cdot)$ por $\mathbb{D}_i^N(\cdot)$ naquela expressão – o mesmo valendo para a desigualdade (5.20b), a seguir. ▽▽

Para provar a contrapartida do resultado acima estabelecemos primeiro o seguinte lema, com idéias semelhantes às de [83, Theorem 4].

Lema 8 *Suponha que exista um compensador sub-ótimo de nível γ e ordem $k = n$, tal como \mathcal{K} . Então existem $X = (X_1, X_2, \dots)$, $Y = (Y_1, Y_2, \dots) \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$, $J = (J_1, J_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_y, n}$, $F = (F_1, F_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n, n_u}$ e $U = (U_1, U_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_y, n_u}$ tais que, para todo $i \in \mathcal{S}$:*

$$\begin{bmatrix} \text{Her}(X_i A_i + J_i \Gamma_i) + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} X_j & X_i B_i + J_i L_i & (C_i + H_i U_i \Gamma_i)^* \\ (X_i B_i + J_i L_i)^* & \gamma^2 I_{n_v} & (D_i + H_i U_i L_i)^* \\ C_i + H_i U_i \Gamma_i & D_i + H_i U_i L_i & I_{n_z} \end{bmatrix} \gg 0, \quad (5.20a)$$

$$\begin{bmatrix} \text{Her}(A_i Y_i + G_i F_i) + \lambda_{ii} Y_i & B_i + G_i U_i L_i & (C_i Y_i + H_i F_i)^* & \underline{\lambda}'_i \otimes Y_i \\ (B_i + G_i U_i L_i)^* & \gamma^2 I_{n_v} & (D_i + H_i U_i L_i)^* & 0 \\ C_i Y_i + H_i F_i & D_i + H_i U_i L_i & I_{n_z} & 0 \\ \underline{\lambda}_i \otimes Y_i & 0 & 0 & \mathbb{D}_i(Y) \end{bmatrix} \gg 0, \quad (5.20b)$$

$$\begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} \ll 0. \quad (5.20c)$$

Prova: Da hipótese temos que existe $P = (P_1, P_2, \dots) \ll 0$ satisfazendo (5.5) para todo $i \in \mathcal{S}$. Introduzindo $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \end{bmatrix}$, explicitemos então a dependência afim de \hat{A} em \mathcal{K}^{11} :

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i + G_i \mathcal{K}_i^{22} \Gamma_i & G_i \mathcal{K}_i^{21} \\ \mathcal{K}_i^{12} \Gamma_i & 0_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_i^{11} \end{bmatrix} \\ &=: \hat{A}_i + \mathcal{J}' \mathcal{K}_i^{11} \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Em seguida, defina $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \end{bmatrix}'$ e repare que $\mathcal{N}(\text{diag}(\mathcal{J}, I_{n_v}, I_{n_z})) = \{0\}$, donde a positividade uniforme de (5.5) é preservada sob a aplicação de $\mathfrak{C}(\cdot, \text{diag}(\mathcal{J}, I_{n_v}, I_{n_z}))$.

Além disso, como $\mathcal{J} \mathcal{J} = 0$ a hipótese leva a

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}' (\hat{A}_i^* P_i + P_i \hat{A}_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} P_j) \mathcal{J} & * & * \\ \hat{B}_i^* P_i \mathcal{J} & \gamma^2 I_{n_v} & * \\ \hat{C}_i \mathcal{J} & \hat{D}_i & I_{n_z} \end{bmatrix} \gg 0. \quad (5.22)$$

Definindo $U := \mathcal{K}^{22}$, $J := XGU + P_2 \mathcal{K}^{12}$ e efetuando as operações indicadas, temos então imediatamente a equivalência entre (5.22) e (5.20a).

Para qualquer $i \in \mathcal{S}$ escreva P_i e $S_i = P_i^{-1}$ sob a seguinte forma particionada, a

qual implica em $Y_i = (X_i - P_{2i}P_{3i}^{-1}P_{2i}^*)^{-1}$ para todo $i \in \mathcal{S}$:

$$P_i = \begin{bmatrix} X_i & P_{2i} \\ P_{2i}^* & P_{3i} \end{bmatrix}, \quad S_i = \begin{bmatrix} Y_i & S_{2i} \\ S_{2i}^* & S_{3i} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Note agora que a transformação de congruência $\mathfrak{C}(\cdot, \text{diag}(S_i, I_{n_v}, I_{n_z}))$, que satisfaz todas as condições da Proposição 1 (veja a prova da Proposição 9), deixa (5.5) como

$$\begin{bmatrix} S_i \hat{A}_i^* + \hat{A}_i S_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} S_i S_j^{-1} S_i & * & * \\ \hat{B}_i^* & \gamma^2 I_{n_v} & * \\ \hat{C}_i S_i & \hat{D}_i & I_{n_z} \end{bmatrix} \gg 0; \quad (5.24)$$

por uma indução no Complemento de Schur Uniforme tal qual aquela feita na seqüência de (5.16) decorre então que (5.24) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} S_i \hat{A}_i^* + \hat{A}_i S_i + \lambda_{ii} S_i & * & * & * \\ \hat{B}_i^* & \gamma^2 I_{n_v} & * & * \\ \hat{C}_i S_i & \hat{D}_i & I_{n_z} & * \\ \underline{\lambda}_i \otimes S_i & 0 & 0 & \mathbb{D}_i(S) \end{bmatrix} \gg 0.$$

Agora, uma vez que $\mathcal{N}(\mathcal{J}) = \{0\}$, temos que a positividade uniforme não é afetada por $\mathfrak{C}\{\cdot, \text{diag}(\mathcal{J}, I_{n_v}, I_{n_z}, \text{diag}(\mathcal{J}, \dots))\}$; assim, definindo $F := UGY + \mathcal{K}^{21} S_2^*$ temos a última desigualdade reduzida a (5.20b) por essa transformação.

Para completar a prova, note que P_2 pode ser assumida invertível sem nenhuma perda de generalidade: dado o respectivo $P \ll 0$, sempre podemos introduzir uma perturbação $P \rightsquigarrow \tilde{P} \ll 0$ tal que \tilde{P}_2 é invertível e (5.5) continua a valer (uma vez que, para todo $i \in \mathcal{S}$, sempre existe \tilde{P}_{2i} invertível e arbitrariamente próxima de P_{2i} , decorre então que tal $\tilde{P} \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ é também bastante próxima de P). Em face disto, a transformação de congruência associada a $\begin{bmatrix} Y & I \\ -P_3^{-1} P_2^* Y & 0 \end{bmatrix}$ deixa $P_i \ll 0$ como (5.20c). ■

O teorema a seguir unifica os resultados obtidos até agora, estabelecendo condições equivalentes à existência de compensadores sub-ótimos de ordem $k = n$.

Teorema 5 (*Caracterização full-order*) *As seguintes afirmativas são equivalentes:*

- (i) *Existe um compensador sub-ótimo de nível γ e ordem $k = n$, tal como \mathcal{K} ;*
- (ii) *Existem $X, Y \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$ tais que (5.14) é satisfeita para todo $i \in \mathcal{S}$;*

(iii) *Existem* $X, Y \in \tilde{\mathbb{H}}_{\text{sup}}^{n-}$, $J \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_y, n}$, $F \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n, n_u}$ e $U \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_y, n_u}$ tais que (5.20) é satisfeita para todo $i \in \mathcal{S}$.

Além disso, dados quaisquer X e Y como em (ii) sempre existem J , F e U tais que (iii) é satisfeita.

Prova: Assuma que (ii) é verdade; então a Proposição 11 garante que (i) é satisfeita. Em seguida, note que (i) implica em (iii), de acordo com o Lema 8 (o fato de que tais X e Y satisfazendo (iii) podem ser escolhidos a partir da solução de (ii) será provado no final). Portanto resta apenas provar (iii) \Rightarrow (ii).

Assuma que (iii) é satisfeita. Como as relações (5.20c) e (5.14c) são idênticas, resta apenas provar que tais X e Y satisfazem (5.14a) e (5.14b), respectivamente. Para tanto, note primeiramente que (5.20a) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X_i A_i + A_i^* X_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} X_j & * & * \\ B_i^* X_i & \gamma^2 I & * \\ C_i & D_i & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & H_i^* \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} J_i \\ 0 \\ U_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_i & L_i & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \Gamma_i & L_i & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} J_i \\ 0 \\ U_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & H_i^* \end{bmatrix} \gg 0. \quad (5.25) \end{aligned}$$

Note em seguida que a transformação $\mathfrak{C} \left(\cdot, \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \right)$ deixa (5.20b) equivalente a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \text{Her}(A_i Y_i) + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i & * & * \\ C_i Y_i & I & * \\ B_i^* & D_i^* & \gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_i \\ H_i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i & 0 & U_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & L_i \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & L_i \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} F_i & 0 & U_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i^* & H_i^* & 0 \end{bmatrix} \gg 0. \quad (5.26) \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\mathcal{N} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & H_i^* \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_{H_i^*} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & L_i \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_{L_i} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

para bases ortonormais adequadas $\Psi_{H_i^*}$, Ψ_{L_i} . Através do Lema da Projeção Uniforme (Lema 1) podemos facilmente verificar então que a condição (ii) é satisfeita.

Finalmente provamos que quaisquer X e Y satisfazendo (i) podem ser inseridos em (iii) e uma tripla (J, F, U) apropriada sempre existirá. De fato, suponha que (ii) é satisfeita. Então decorre que (i) é verdade, e o Lema 8 garante que $U = \mathcal{K}_{22}$, $J = XGU + (Y^{-1} - X)\mathcal{K}^{12}$ e $F = U\Gamma Y + \mathcal{K}^{21}Y$ são tais que as LMIs (5.20a)–(5.20c) são satisfeitas para todo $i \in \mathcal{S}$, completando a prova. ■

Nota 10 As LMIs (5.20) coincidem com aquelas apresentadas no Theorem 4.2 de [1], na situação particular em que D e $\mathcal{K}^{22} = U$ são identicamente zero, todas as matrizes do sistema são reais, e o espaço de estados da cadeia de Markov é finito. Adicionalmente, note que pelo Teorema 5 tais condições são tanto suficientes quanto necessárias à existência de \mathcal{K} , face à classe de funções de Lyapunov levada em consideração. $\nabla\nabla$

Tendo em mente o resultado de caracterização acima (Teorema 5), apresentamos o seguinte algoritmo, como uma solução para o problema de *existência*. É importante ressaltar que cada um dos algoritmos de *design* que serão apresentados na seção seguinte (Algoritmos 2, 3 e 4) dependem, de alguma forma, do Algoritmo 1.

Algoritmo 1 (*Existência de compensadores*) A existência de pelo menos um compensador sub-ótimo de um dado nível $\gamma > 0$ é garantida pela solução de qualquer um dos seguintes problemas de factibilidade em conjuntos convexos:

e₁: Encontre $X = (X_1, X_2, \dots)$, $Y = (Y_1, Y_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}$, $J = (J_1, J_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_y, n}$, $F = (F_1, F_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n, n_u}$ e $U = (U_1, U_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_y, n_u}$ tais que (5.20) seja satisfeito para todo $i \in \mathcal{S}$;

e₂: Encontre $X = (X_1, X_2, \dots)$, $Y = (Y_1, Y_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n*}$ tais que (5.14) seja satisfeito para todo $i \in \mathcal{S}$;

Por outro lado, se for provado que qualquer um desses problemas não possui solução então não existe tal compensador na classe \mathcal{K} . ■

Finalmente, repare que o algoritmo acima é de interesse prático imediato no caso finito, uma vez que pode-se implementá-lo eficientemente através de uma série de *softwares* disponíveis (por exemplo, Matlab, ou algoritmos de pontos interiores; veja, por exemplo, [95], [96] e as respectivas referências). A seguinte nota encerra esta subseção com uma última consideração nesse sentido.

Nota 11 *Duas diferenças evidentes entre os procedimentos \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são o maior número de variáveis em \mathbf{e}_1 e as restrições projetivas em \mathbf{e}_2 . Uma questão de interesse seria a de determinar sob quais condições cada um desses aspectos é mais crítico, tendo em mente uma implementação prática.* $\nabla\nabla$

5.3 Construção de controladores

Nesta seção são apresentadas algumas ferramentas para a construção de controladores ótimos ou sub-ótimos de ordem igual à do sistema ($k = n$). O principal resultado teórico consiste no seguinte teorema, que estende um importante resultado de [1] para a classe de sistemas em questão (veja também [93]).

Teorema 6 *Suponha que X, Y, J, F e U satisfazendo as condições do Teorema 5 possam ser encontrados, para algum $\gamma > 0$. Então o seguinte compensador garante a estabilidade (SS) do sistema em malha fechada, $\Sigma_{\mathcal{K}}$, assim como um nível de atenuação de perturbação γ :*

$$\mathcal{K}^{12} = (Y^{-1} - X)^{-1} (J - XGU), \quad (5.28)$$

$$\mathcal{K}^{21} = (F - U\Gamma Y)Y^{-1}, \quad (5.29)$$

$$\mathcal{K}^{22} = U, \quad (5.30)$$

e, para todo $i \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i^{11} = & - (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} \left\{ X_i(A_i Y_i + G_i F_i) + (J_i - X_i G_i U_i) \Gamma_i Y_i + \tilde{A}_i^* \right. \\ & + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i - \tilde{C}_i^* (C_i Y_i + H_i F_i) - [X_i B_i + J_i L_i - \tilde{C}_i^* \tilde{D}_i] \times \\ & \left. \times (\gamma^2 I - \tilde{D}_i^* \tilde{D}_i)^{-1} [\tilde{B}_i - (C_i Y_i + H_i F_i)^* \tilde{D}_i]^* \right\} Y_i^{-1}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \\ \tilde{C}_i & \tilde{D}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_i \\ H_i \end{bmatrix} U_i \begin{bmatrix} \Gamma_i & L_i \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Prova: Primeiramente, note que tais X e Y (os quais são conhecidos, por hipótese) satisfazem as condições da Proposição 11, onde foi provado que $P = (P_1, P_2, \dots)$ dado por

$$P_i = \begin{bmatrix} X_i & Y_i^{-1} - X_i \\ Y_i^{-1} - X_i & X_i - Y_i^{-1} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{S}, \quad (5.33)$$

é solução de (5.6) para algum $\mathcal{K} \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{(k+n_y), (k+n_u)}$, com $k = n$. Portanto nos resta apenas apresentar explicitamente tal compensador \mathcal{K} .

Pelo Lema 8 temos que X, Y, J, F e U estão relacionados a \mathcal{K} através das expressões

$$J = XGU + P_2 \mathcal{K}^{12}, \quad F = UTY + \mathcal{K}^{21} S_2^*, \quad U = \mathcal{K}^{22}, \quad (5.34)$$

onde $P_2 = Y^{-1} - X$ e $S_2 = Y$, o que leva imediatamente a (5.28), (5.29) e (5.30). Logo, para completar a prova resta apenas apresentar \mathcal{K}^{11} que resolva a LMI (5.5). Pelo Teorema 1, no entanto, isto é equivalente a assegurar que $0 \ll N^\gamma(P) = (N_1^\gamma(P), N_2^\gamma(P), \dots)$, onde

$$\begin{aligned} N_i^\gamma(P) &:= \hat{A}_i^* P_i + P_i \hat{A}_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} P_j - \hat{C}_i^* \hat{C}_i \\ &\quad - (P_i \hat{B}_i - \hat{C}_i^* \tilde{D}_i) (\gamma^2 I - \tilde{D}_i^* \tilde{D}_i)^{-1} (\hat{B}_i^* P_i - \tilde{D}_i^* \hat{C}_i), \end{aligned} \quad (5.35)$$

para todo $i \in \mathcal{S}$, uma vez que (5.20a) garante que $\gamma^2 I - \tilde{D}_i^* \tilde{D}_i \gg 0$ (lembrando que $\tilde{D}_i := D_i + H_i U_i L_i$). Agora defina $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots)$ como

$$\mathfrak{R}_i = \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_i^{11} & \mathfrak{R}_i^{21*} \\ \mathfrak{R}_i^{21} & \mathfrak{R}_i^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_i & I \\ Y_i & 0 \end{bmatrix}^* N_i^\gamma(P) \begin{bmatrix} Y_i & I \\ Y_i & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

para $i \in \mathcal{S}$, com as dimensões de cada bloco de acordo com os de \hat{A}_i . Como a transformação de congruência acima satisfaz as condições da Proposição 1, temos que a positividade uniforme de \mathfrak{R}_i em $\{i \in \mathcal{S}\}$ é na verdade equivalente àquela de $N^\gamma(P)$.

O resto da prova será como segue. Primeiro, provaremos que $\mathfrak{R}^{11} \gg 0$ e $\mathfrak{R}^{22} \gg 0$ independentemente de qual escolha é feita sobre \mathcal{K}^{11} . Em seguida, mostraremos que é possível escolher \mathcal{K}^{11} de tal forma que todo o bloco \mathfrak{R}^{21} é zero, o que na verdade corresponderá a (5.31) (para todo $i \in \mathcal{S}$). Repare, no entanto, que $\mathfrak{R}^{21} = 0$ é uma condição

suficiente, mas não necessária (pois diferentes controladores poderiam ser propostos neste ponto).

Seguindo adiante, vamos definir $\mathcal{Y}_i = \begin{bmatrix} Y_i & I \\ Y_i & 0 \end{bmatrix}$ e calcular cada entrada de \mathfrak{R}_i separadamente. Temos que

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}_i^* P_i \hat{A}_i \mathcal{Y}_i \\ &= \mathcal{Y}_i^* \begin{bmatrix} X_i & Y_i^{-1} - X_i \\ Y_i^{-1} - X_i & X_i - Y_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i + G_i U_i \Gamma_i & G_i \mathcal{K}_i^{21} \\ \mathcal{K}_i^{12} \Gamma_i & \mathcal{K}_i^{11} \end{bmatrix} \mathcal{Y}_i \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_i & Y_i^{-1} - X_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{A_i + G_i(U_i \Gamma_i + \mathcal{K}_i^{21})\} Y_i & A_i + G_i U_i \Gamma_i \\ (\mathcal{K}_i^{12} \Gamma_i + \mathcal{K}_i^{11}) Y_i & \mathcal{K}_i^{12} \Gamma_i \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} A_i Y_i + G_i F_i & A_i + G_i U_i \Gamma_i \\ X_i(A_i Y_i + G_i F_i) + (J_i - X_i G_i U_i) \Gamma_i Y_i + (Y_i^{-1} - X_i) \mathcal{K}_i^{11} Y_i & X_i A_i + J_i \Gamma_i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_i^* P_j \mathcal{Y}_i &= \begin{bmatrix} Y_i & Y_i \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j & Y_j^{-1} - X_j \\ Y_j^{-1} - X_j & X_j - Y_j^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & I \\ Y_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y_i Y_j^{-1} Y_i & Y_i Y_j^{-1} \\ Y_j^{-1} Y_i & X_j \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{Y}_i^* \hat{C}_i^* \hat{C}_i \mathcal{Y}_i = \begin{bmatrix} (C_i Y_i + H_i F_i)^* (C_i Y_i + H_i F_i) & (C_i Y_i + H_i F_i)^* (C_i + H_i U_i \Gamma_i) \\ * & (C_i + H_i U_i \Gamma_i)^* (C_i + H_i U_i \Gamma_i) \end{bmatrix},$$

porque $\{C_i + H_i(U_i \Gamma_i + \mathcal{K}_i^{21})\} Y_i = C_i Y_i + H_i F_i$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_i^* P_i \hat{B}_i &= \begin{bmatrix} Y_i & Y_i \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i & Y_i^{-1} - X_i \\ Y_i^{-1} - X_i & X_i - Y_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i + G_i U_i L_i \\ \mathcal{K}_i^{12} L_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_i + G_i U_i L_i \\ X_i B_i + J_i L_i \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{Y}_i^* \hat{C}_i^* \tilde{D}_i = (\hat{C}_i \mathcal{Y}_i)^* \tilde{D}_i = \begin{bmatrix} (C_i Y_i + H_i F_i)^* \\ (C_i + H_i U_i \Gamma_i)^* \end{bmatrix} (D_i + H_i U_i L_i).$$

Substituindo os resultados acima na definição de \mathfrak{R} , obtemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_i^{\ell m} &= \text{Her}(\mathcal{Y}_i^* P_i \hat{A}_i \mathcal{Y}_i)_{\ell m} + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} (\mathcal{Y}_i^* P_j \mathcal{Y}_i)_{\ell m} - (\mathcal{Y}_i^* \hat{C}_i^* \hat{C}_i \mathcal{Y}_i)_{\ell m} \\ &\quad - \mathcal{Y}_i^* (P_i \hat{B}_i - \hat{C}_i^* \tilde{D}_i)_{\ell \bullet} (\gamma^2 I - \tilde{D}_i^* \tilde{D}_i)^{-1} (\hat{B}_i^* P_i - \tilde{D}_i^* \hat{C}_i)_{\bullet m}, \\ &\quad \text{onde } (\ell, m) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathfrak{R}_i^{11} &= A_i Y_i + Y_i A_i^* + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i + G_i F_i + F_i^* G_i^* - (C_i Y_i + H_i F_i)^* (C_i Y_i + H_i F_i) \\ &\quad - (B_i + G_i U_i L_i - (C_i Y_i + H_i F_i)^* (D_i + H_i U_i L_i)) (\gamma^2 I - \tilde{D}_i^* \tilde{D}_i)^{-1} \times \\ &\quad (B_i + G_i U_i L_i - (C_i Y_i + H_i F_i)^* (D_i + H_i U_i L_i))^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_i^{22} &= X_i A_i + A_i^* X_i + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} X_j + J_i \Gamma_i + \Gamma_i^* J_i^* - (C_i + H_i U_i \Gamma_i)^* (C_i + H_i U_i \Gamma_i) \\ &\quad - (X_i B_i + J_i L_i - (C_i + H_i U_i \Gamma_i)^* \tilde{D}_i) (\gamma^2 I - \tilde{D}_i^* \tilde{D}_i)^{-1} \times \\ &\quad (X_i B_i + J_i L_i - (C_i + H_i U_i \Gamma_i)^* \tilde{D}_i)^*,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_i^{21} &= X_i (A_i Y_i + G_i F_i) + (J_i - X_i G_i U_i) \Gamma_i Y_i + (Y_i^{-1} - X_i) \mathcal{K}_i^{11} Y_i \\ &\quad + (A_i + G_i U_i \Gamma_i)^* + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i - (C_i + H_i U_i \Gamma_i)^* (C_i Y_i + H_i F_i) \\ &\quad - \{X_i B_i + J_i L_i - (C_i + H_i U_i \Gamma_i)^* \tilde{D}_i\} (\gamma^2 I - \tilde{D}_i^* \tilde{D}_i)^{-1} \times \\ &\quad \{B_i + G_i U_i L_i - (C_i Y_i + H_i F_i)^* \tilde{D}_i\}^*.\end{aligned}$$

Conforme mencionado antes, temos por uma aplicação repetida do Complemento de Schur Uniforme (Teorema 1, no sentido de redução da dimensão) que (5.20a) e (5.20b) são equivalentes a $\mathfrak{R}^{11} \gg 0$ e $\mathfrak{R}^{22} \gg 0$, respectivamente, e independente de qual escolha é feita sobre \mathcal{K}^{11} .

Finalmente, temos que a única solução de \mathcal{K}^{11} para a equação algébrica $\mathfrak{R}_i^{21} = 0$ em $\{i \in \mathcal{S}\}$ é dada por (5.31), o que conclui a prova. \blacksquare

Nota 12 Suponha que D e $\mathcal{K}^{22} = U$ são identicamente zero. Então (5.31) se reduz a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_i^{11} &= -(Y_i^{-1} - X_i)^{-1} \{X_i (A_i Y_i + G_i F_i) + J_i \Gamma_i Y_i + A_i^* + \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i \\ &\quad - C_i^* (C_i Y_i + H_i F_i) - \gamma^{-2} (X_i B_i + J_i L_i) B_i^*\} Y_i^{-1},\end{aligned}\tag{5.37}$$

o que, junto a (5.28) e (5.29), coincide com [1, Theorem 4.2], caso as matrizes do sistema

sejam todas reais e o conjunto \mathcal{S} seja finito.

▽▽

Na seqüência serão apresentados vários algoritmos para o *design* de controladores, a fim de colocar os resultados anteriores em uma base mais prática. Deve ser notado que o conjunto de todos os resultados de *design* provê uma coleção de ferramentas que pode ser imediatamente implementada em *softwares* de programação convexa, pelo menos no caso em que a cadeia de Markov toma valores em um conjunto finito.

O próximo algoritmo estabelece uma possível maneira de se calcular um controlador de ordem $k = n$ tal como aquele apresentado no Teorema 6.

Algoritmo 2 (*Procedimento de design em dois passos*) Um compensador sub-ótimo de nível $\gamma > 0$ pode ser construído de acordo com o Teorema 6 pelos seguintes passos:

d₁: Resolva o problema de existência através de \mathbf{e}_1 ;

↔ Se tal solução não puder ser encontrada, então **pare**.

d₂: Com X, Y, J, F e U do passo anterior construa um compensador através das relações (5.28)–(5.31).

■

É possível, com o auxílio do Teorema 5, propor a seguinte alternativa ao Algoritmo 2. A principal vantagem aqui corresponde ao fato de que a existência de soluções depende da factibilidade de um problema de dimensão relativamente menor.

Algoritmo 3 (*Procedimento de design em três passos*) Um compensador sub-ótimo de um dado nível de atenuação de perturbação $\gamma > 0$ pode ser construído de acordo com o Teorema 6 pelos seguintes passos:

D₁: Resolva o problema de existência através de \mathbf{e}_2 ;

↔ Se tal solução não puder ser encontrada, então **pare**.

D₂: Com X e Y do passo anterior, encontre $J = (J_1, J_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_y, n}$, $F = (F_1, F_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n, n_u}$ e $U = (U_1, U_2, \dots) \in \mathbb{H}_{\text{sup}}^{n_y, n_u}$ tais que (5.20a) e (5.20b) são satisfeitas (pelo Teorema 5 temos que uma solução para este problema sempre existe);

D₃: Com X, Y, J, F e U obtidos dos passos anteriores, construa um compensador através das relações (5.28)–(5.31).

■

Uma extensão imediata dos resultados acima para o problema de síntese H_∞ -ótima – aquele de encontrar controladores que garantam o menor nível de atenuação de perturbação possível – é como segue. O próximo algoritmo estabelece, através de um procedimento bissecional (veja [90] ou [58, *Algorithm* 8.9], por exemplo), duas diferentes maneiras de encontrar controladores ótimos (no sentido H_∞), através da solução de cada um dos seguintes *programas semidefinidos* [97]:

$$\mathbf{SDP}_1 : \begin{array}{l} \text{minimize } \gamma \\ \text{sujeito a } (5.14), i \in \mathcal{S}, \quad \gamma > 0 \end{array}$$

e

$$\mathbf{SDP}_2 : \begin{array}{l} \text{minimize } \gamma \\ \text{sujeito a } (5.20), i \in \mathcal{S}, \quad \gamma > 0. \end{array}$$

Algoritmo 4 (*Otimização H_∞*) *Um controlador H_∞ -ótimo, que garante a estabilidade do sistema em malha fechada junto ao menor nível de atenuação de perturbação ($\gamma = \gamma_*$) que pode ser alcançado por (5.2) no caso $k = n$, pode ser construído, com precisão arbitrária $\varepsilon > 0$, de acordo com os seguintes passos (onde $\iota \in \{1, 2\}$):*

B₁^{sec}: *Faça $\gamma_{\min} = 0$ e escolha $\gamma_{\max} > 2\varepsilon$ tão grande que \mathbf{e}_ι seja factível para $\gamma = \gamma_{\max}$;*

B₂^{sec}: *Faça $\gamma \leftarrow (\gamma_{\min} + \gamma_{\max})/2$ e resolva o problema de existência através de \mathbf{e}_ι ;*

↔ Se uma solução para \mathbf{e}_ι puder ser encontrada, então faça $\gamma_{\max} \leftarrow \gamma$;

↔ senão, faça $\gamma_{\min} \leftarrow \gamma$;

B₃^{sec}: *Repita B₂^{sec} até que $(\gamma_{\max} - \gamma_{\min})/2 < \varepsilon$;*

Nesse ponto, note que $\gamma_ \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)$. Finalmente, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que os seguintes passos levam imediatamente ao controlador H_∞ -ótimo dado por (5.28)–(5.31):*

opt₁: ($\iota = 1$) *Execute \mathbf{d}_2 com $\gamma \approx \gamma_*$, X, Y, J, F e U obtidos por B_{1,2,3}^{sec}.*

opt₂: ($\iota = 2$) *Execute $\mathbf{D}_{2,3}$ com $\gamma \approx \gamma_*$, X e Y obtidos por B_{1,2,3}^{sec}.*

■

5.4 Simulações

A última seção deste capítulo ilustra algumas simulações dos resultados obtidos. Por razões de ordem prática, restringimo-nos a sistemas reais e escalares, cujo espaço de estados da cadeia de Markov é binário.

Exemplo 3 *Suponha que o sistema real e escalar*

$$\dot{x}(t) = -x(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \quad (5.38)$$

é perturbado como

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -x(t), & \theta_t = 1 \\ -x(t) + v(t), & \theta_t = 2, \end{cases}$$

onde θ é o processo de saltos binário (cf. o Exemplo 1) com taxa de transição dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}, \quad \beta > 0,$$

e $v \in L_2(\mathbb{R}_+)$ é uma perturbação estocástica de energia finita atuando no sistema. Suponha ainda que a saída do sistema (z) está sujeita a variações abruptas, do tipo:

$$z(t) = \begin{cases} 0, & \theta_t = 1 \\ x(t), & \theta_t = 2. \end{cases}$$

Através do JBRL (Lema 3) é possível avaliar o efeito que tais perturbações (v) causam na saída do sistema (z), no pior caso. De fato, tal problema corresponde a calcular $\|\mathbb{L}\|$ para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + b_{\theta_t} v(t) \\ z(t) = c_{\theta_t} x(t) \end{cases} \quad (5.39)$$

onde $b_1 = c_1 = 0$ e $b_2 = c_2 = 1$, o que pode ser conseguido através da minimização do parâmetro γ nas LMIs (4.50), para $i \in \{1, 2\}$. A dependência de $\|\mathbb{L}\|$ no parâmetro β é ilustrada na Figura 5.1, a seguir.

▽▽▽

Nota 13 *O resultado do experimento apresentado no exemplo anterior é consistente com*

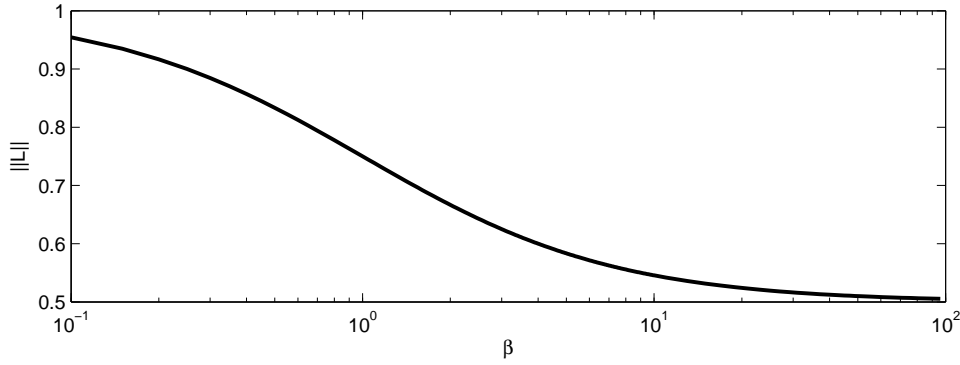


Figura 5.1: Dependência de $\|\mathbb{L}\|$ em relação a β , para o sistema (5.39)

aquele de [98, Example 1], onde foi mostrado que o sistema (5.39) é tal que

$$\|\mathbb{L}\| = \frac{1 + \beta/2}{1 + \beta}. \quad (5.40)$$

▽▽

Os exemplos seguintes mostram como o desempenho do sistema (5.39) pode ser melhorado através da política de controle (5.2).

Exemplo 4 Considere a seguinte versão parcialmente controlada do sistema (5.39):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + b_{\theta_t}v(t) + g_{\theta_t}u(t) \\ z(t) = c_{\theta_t}x(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (5.41)$$

onde $g_1 = 1$ e $g_2 = 0$, de tal forma que somente o primeiro modo do sistema pode ser diretamente controlado (ao passo que ambos os modos são totalmente observados). A Figura 5.2 mostra como tal ação de controle pode melhorar o desempenho do sistema (5.39), para diferentes valores do parâmetro β .

▽▽▽

Exemplo 5 Suponha agora que a versão controlada do sistema (5.39) apresentada no exemplo anterior é tal que o sinal de controle alimenta não somente a equação de estado mas também a saída (z) do sistema, tal como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + b_{\theta_t}v(t) + g_{\theta_t}u(t) \\ z(t) = c_{\theta_t}x(t) + g_{\theta_t}u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (5.42)$$

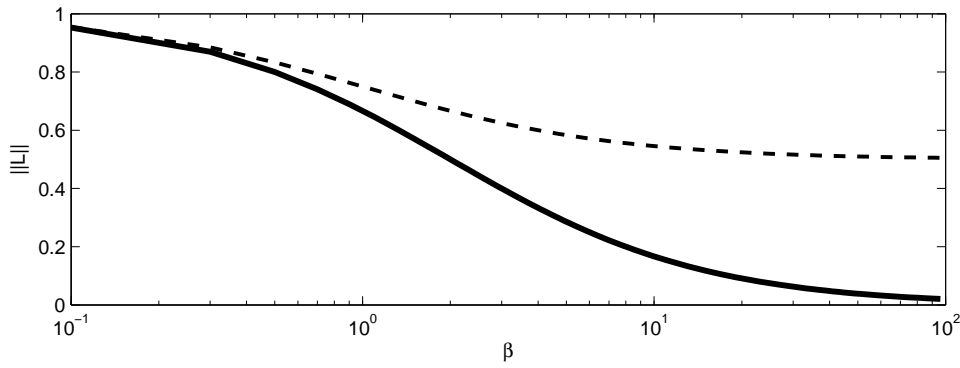


Figura 5.2: Desempenho do sistema (5.41) (curva cheia) em comparação ao desempenho do sistema (5.39) (curva tracejada)

onde novamente $g_1 = 1$ e $g_2 = 0$. Note que, neste caso, a ação de controle deve não somente favorecer a dinâmica do sistema (tal como antes), mas também deve ser tal que a saída não seja adversamente afetada. A Figura 5.3 mostra o que pode ser conseguido em vista dessa restrição. ▽▽▽

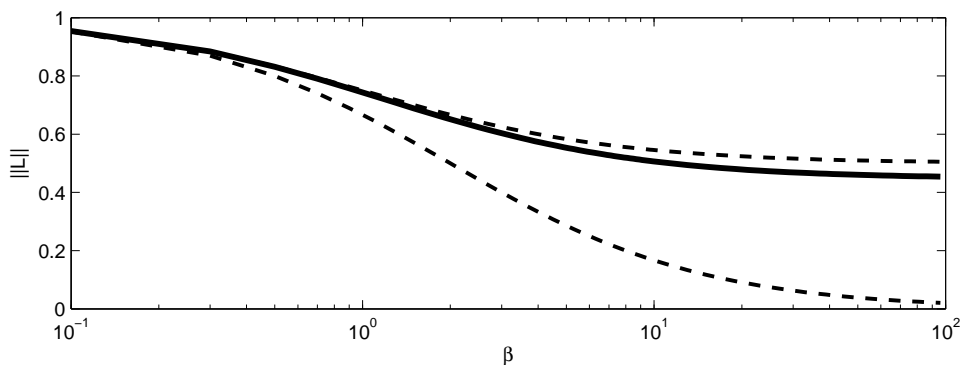


Figura 5.3: Desempenho do sistema (5.42) (curva cheia) em comparação aos desempenhos dos sistemas (5.39) e (5.41) (curvas tracejadas)

O último exemplo deste capítulo investiga como a não-observação total do estado do sistema (utilizada nos exemplos 4 e 5) pode afetar o desempenho do sistema controlado.

Exemplo 6 Suponha agora que a versão controlada do sistema (5.39) apresentada no Exemplo 4 é tal que o segundo modo não é diretamente observado, e que a observação

do primeiro modo é adversamente perturbada pela entrada, como segue:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + b_{\theta_t}v(t) + g_{\theta_t}u(t) \\ z(t) = c_{\theta_t}x(t) \\ y(t) = g_{\theta_t}x(t) + g_{\theta_t}v(t) \end{cases} \quad (5.43)$$

com $g_1 = 1$ e $g_2 = 0$. A Figura 5.4 mostra que o desempenho alcançável em vista de tal perda de informação é bastante semelhante àquele do exemplo anterior. $\nabla\nabla\nabla$

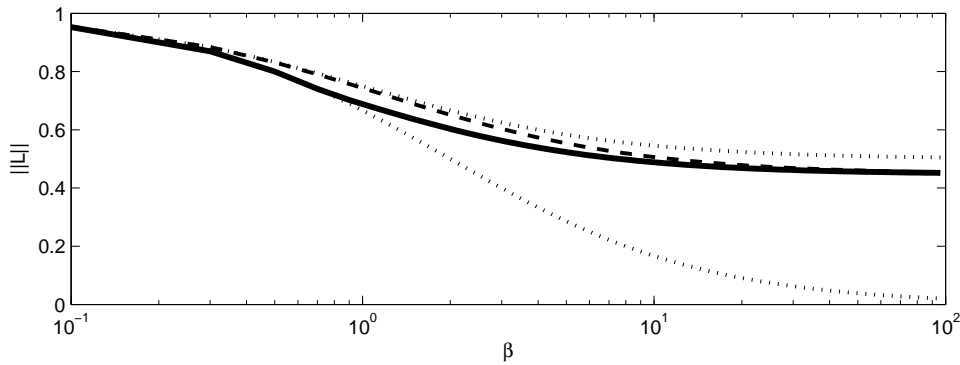


Figura 5.4: Desempenho do sistema (5.43) (curva cheia) em comparação ao desempenho do sistema (5.42) (curva tracejada) e dos sistemas (5.39) e (5.41) (curvas pontilhadas)

6 Conclusão

Neste trabalho foi tratado um problema de controle H_∞ para determinada classe de sistemas lineares com saltos Markovianos. Diferente dos resultados anteriores encontrados na literatura, a solução aqui proposta levou em consideração – simultaneamente – as seguintes complicações:

- que o espaço de estados da cadeia de Markov é um conjunto infinito enumerável;
- que o controlador somente tem acesso a uma saída do sistema, y , além do processo de saltos.

Outro importante diferencial deste trabalho é que foi buscada uma solução LMI *para o caso infinito*. Esta complicação adicional motivou o surgimento de uma das contribuições originais da tese:

- Um ferramental matemático foi desenvolvido, visando a manipulação das LMIs infinitamente acopladas que surgiram ao longo do trabalho. Dentre essas ferramentas, destacamos as versões estendidas do Complemento de Schur e do Lema da Projeção (para as versões usuais desses resultados veja [84] e [82], por exemplo).

Um dos principais resultados da tese foi apresentado no Lema 3. O *Jump-Bounded Real Lemma* (JBRL) é um resultado indispensável para o desenvolvimento de uma teoria H_∞ para a classe de sistemas levada em consideração, da mesma forma que outros *bounded real lemmata* desempenham um papel central em diferentes situações [75, 86, 87, 80]. Mais especificamente:

- O *bounded real lemma* desenvolvido no capítulo 4 estabelece que a existência de soluções para um conjunto *infinito* de desigualdades matriciais lineares (LMIs) interconectadas é condição necessária e suficiente para que um dado sistema seja estocasticamente estável (SS) e atenda a um desempenho H_∞ prescrito;

- Vale destacar que, mesmo no caso finito, o JBRL representa uma contribuição original do trabalho.

O capítulo 5 abordou o problema de controle em horizonte infinito, em quatro partes separadas. Na primeira delas foi apresentada uma descrição detalhada do problema de atenuação de perturbação (DA), juntamente com o tipo de política de controle denominada *admissível*. Com isto, na segunda parte do capítulo, a seguinte abordagem foi empregada:

- A caracterização de soluções para o problema de controle, que é objeto da seção 5.2, pode ser feita com o auxílio do JBRL desenvolvido no capítulo 4. Neste ponto fica evidente a utilidade daquele resultado (Lema 3), dada a sua potencialidade de aplicação imediata.

O principal resultado da seção 5.2, Teorema 5, pode ser destacado como segue:

- A caracterização da existência de soluções *full-order* (em que a ordem do controlador é igual à do sistema) para o problema de controle pode ser feita através de dois diferentes problemas LMI.

A conexão entre os problemas LMI apresentados no Teorema 5 é elucidada através do Lema da Projeção Uniforme (Lema 1). Enquanto o primeiro corresponde a um problema com menos variáveis a determinar, projetado nos núcleos de determinadas matrizes do sistema, o segundo consiste em um problema de maior dimensão, onde variáveis de folga também precisam ser determinadas. Além disso, foi provado que cada solução de um desses problemas é solução (parcial ou total) do outro. O resultado prático que decorre imediatamente desta caracterização é o Algoritmo 1, onde foi estabelecido que:

- o problema de existência de compensadores pode ser resolvido, especialmente no caso finito, em tempo polinomial (veja [99]), através de eficientes ferramentas de programação convexa, e de duas formas alternativas.

A terceira parte do capítulo 5 abordou o problema de projeto (ou *design*) de controladores. O principal resultado teórico da seção 5.3 pode ser descrito como segue:

- O Teorema 6 representa, mesmo quando restrito ao caso finito (e em que todas as matrizes do sistema sejam reais), uma extensão de [1, *Theorem 4.2*], para o caso $\mathcal{K}_{22} \neq 0$.

Por fim, a partir do Teorema 6 – que provê fórmulas explícitas para a construção de compensadores sub-ótimos – decorre o seguinte conjunto de aplicações:

- Algoritmo 2 – procedimento de *design* em dois passos; a partir da solução desse problema é possível construir imediatamente um controlador H_∞ -subótimo, com o auxílio das fórmulas (5.28)–(5.31).
- Algoritmo 3 – *design* em três passos; alternativamente ao anterior, permite que a existência de soluções para o problema de controle seja checada em um passo intermediário (em menor dimensão), antes que se proceda ao projeto propriamente dito.
- Algoritmo 4 – otimização H_∞ ; determina, através de um procedimento bissecional, um controlador H_∞ -ótimo para o problema.

6.1 Trabalhos futuros

Encerrando o trabalho, esta seção indica uma pequena amostra dos problemas que podem, futuramente, dar continuidade ao presente estudo.

- Uma questão imediata diz respeito à restrição $k = n$ (de que a ordem do controlador é igual à do sistema que se deseja controlar). Seria interessante propor uma solução para o caso $k < n$ (em que a ordem do controlador é menor do que a do sistema).
- A fim de melhor situar o trabalho em um contexto prático, dois aspectos poderiam ser investigados:
 - Determinar qual dos métodos propostos para o *design* de controladores é mais eficiente sob o ponto de vista computacional. (Note que esta questão pode ser crítica quando consideramos o procedimento *iterativo* do Algoritmo 4.) Caso o método em três passos ($t = 2$) seja mais eficiente, então o procedimento de *design* aqui proposto será capaz de determinar um controlador ótimo mais rapidamente do que o procedimento de [1].
 - Estudar o comportamento assintótico do Algoritmo 4 quando γ se aproxima de γ_* .

- Seria interessante tratar de problemas H_2 , H_2/H_∞ , ou filtragem, através das técnicas apresentadas (em particular, com o auxílio do Complemento de Schur Uniforme e do Lema da Projeção Uniforme). Tais soluções poderiam, mais uma vez, levar a resultados alternativos aos de [1].
- Pode-se estudar outras classes de sistemas (incorporando, p.ex., um ruído multiplicativo na equação de estado – tal como feito em [75, 21]) através de uma abordagem semelhante àquela aqui apresentada. No entanto, um diferente *bounded real lemma* deveria ser desenvolvido.
- No sentido de desenvolver uma teoria de controle *robusto* para a classe de sistemas considerada, uma questão interessante seria a de investigar a conexão entre a teoria H_∞ aqui apresentada e uma possível extensão da noção de *stability radii* (raios de estabilidade) para essa classe de sistemas, em vista de trabalhos como [100, 101, 19, 20, 88, 21, 102]. Um trabalho preliminar, que introduz a noção de raios de estabilidade para o caso em que o espaço de estados da cadeia de Markov é um conjunto infinito contável, se encontra sob preparação [103] – com alguns resultados originais já estabelecidos.

Referências Bibliográficas

- [1] FARIAS, D. P. de *et al.* Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 45, n. 5, p. 944–949, maio 2000.
- [2] KARLIN, S.; TAYLOR, H. M. *A Second Course on Stochastic Processes*. New York: Academic Press, 1981.
- [3] WITSENHAUSEN, H. S. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 11, n. 2, p. 161–167, abr. 1966.
- [4] BRANICKY, M. S.; BORKAR, V. S.; MITTER, S. K. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 43, n. 1, p. 31–45, jan. 1998.
- [5] BRANICKY, M. S. *Studies in hybrid systems: Modeling, analysis, and control*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, jun. 1995.
- [6] SAVKIN, A. V.; EVANS, R. J. *Hybrid Dynamical Systems: controller and sensor switching problems*. Boston: Birkhäuser, 2002. (Control Engineering).
- [7] LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. Boston: Birkhäuser, 2003.
- [8] LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 19, n. 5, p. 59–90, out. 1999.
- [9] KRASOVSKII, N. N.; LIDSKII, E. A. Analytical design of controllers in systems with random attributes. *Automation and Remote Control*, v. 22, p. 1021–1025, 1961.
- [10] FLORENTIN, J. J. Optimal control of continuous time Markov stochastic systems. *J. Electron. Contr.*, v. 10, p. 473–488, 1961.
- [11] SWORDER, D. D. Feedback control for a class of linear systems with jump parameters. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 14, p. 9–14, 1969.
- [12] WONHAM, W. M. On a matrix Riccati equation of stochastic control. *SIAM J. Control Optim.*, v. 6, p. 681–697, 1968.
- [13] MARITON, M. Almost sure and moments stability of jump linear systems. *Systems Control Lett.*, v. 11, n. 5, p. 393–397, nov. 1988.
- [14] FENG, X. *et al.* Stochastic stability properties of jump linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 37, n. 1, p. 38–53, jan. 1992.

- [15] COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D. Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 179, n. 1, p. 154–178, out. 1993.
- [16] FRAGOSO, M. D.; COSTA, O. L. V. A unified approach for stochastic and mean square stability of continuous-time linear systems with Markovian jumping parameters and additive disturbances. *SIAM J. Control Optim.*, v. 44, n. 4, p. 1165–1191, 2005.
- [17] COSTA, O. L. V.; BOUKAS, E. K. Necessary and sufficient conditions for robust stability and stabilizability of continuous-time linear systems with Markovian jumps. *J. Optim. Theory Appl.*, v. 99, n. 2, p. 359–379, nov. 1998.
- [18] BOUKAS, E. K.; SHI, P.; BENJELLOUN, K. On stabilization of uncertain linear systems with jump parameters. *International Journal of Control*, v. 72, n. 9, p. 842–850, jun. 1999.
- [19] BOUHTOURI, A. E.; HADRI, K. E. Robust stabilization of jump linear systems subject to structured uncertainties in the state and input matrices. *IMA J. Math. Control Inform.*, v. 17, p. 281–293, set. 2000.
- [20] FARIAS, D. P. de; GEROMEL, J. C.; VAL, J. B. R. do. A note on the robust control of Markov jump linear uncertain systems. *Optimal Control Appl. Methods*, v. 23, n. 2, p. 105–112, mar. 2002.
- [21] BOUHTOURI, A. E.; HADRI, K. E. Robust stabilization of jump linear systems with multiplicative noise. *IMA J. Math. Control Inform.*, v. 20, n. 1, p. 1–19, mar. 2003.
- [22] MARITON, M. On controllability of linear systems with stochastic jump parameters. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 31, n. 7, p. 680–683, jul. 1986.
- [23] JI, Y.; CHIZECK, H. J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 35, n. 7, p. 777–788, jul. 1990.
- [24] COSTA, E. F.; VAL, J. B. R. do. On the detectability and observability for continuous-time Markov jump linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, v. 41, n. 4, p. 1295–1314, 2002.
- [25] COSTA, E. F.; VAL, J. B. R. do. Weak detectability and the linear-quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems. *International Journal of Control*, v. 75, n. 16–17, p. 1282–1292, nov. 2002.
- [26] COSTA, E. F.; VAL, J. B. R. do; FRAGOSO, M. D. A new approach to detectability of discrete-time infinite Markov jump linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, v. 43, n. 6, p. 2132–2156, 2005.
- [27] COSTA, E. F.; VAL, J. B. R. do; FRAGOSO, M. D. On a detectability concept of discrete-time infinite Markov jump linear systems. *Stoch. Anal. Appl.*, v. 23, n. 1, p. 1–5, 2005.

- [28] COSTA, E. F.; MANFRIM, A. L. P.; VAL, J. B. R. do. Weak controllability and weak stabilizability concepts for linear systems with Markov jump parameters. In: *Proc. of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis: [s.n.], 2006. p. 905–910.
- [29] JI, Y.; CHIZECK, H. J. Jump linear quadratic Gaussian control: steady state solution and testable conditions. *Control Theory and Advanced Technology*, v. 6, n. 3, p. 289–319, 1990.
- [30] JI, Y.; CHIZECK, H. J. Jump linear quadratic Gaussian control in continuous time. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 37, n. 12, p. 777–788, dez. 1992.
- [31] BERNARD, F.; DUFOUR, F.; BERTRAND, P. On the JLQ problem with uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 42, n. 6, p. 869–872, jun. 1997.
- [32] COSTA, O. L. V.; VAL, J. B. R. do; GEROMEL, J. C. Continuous-time state feedback H_2 -control of Markovian jump linear systems via convex analysis. *Automatica*, v. 35, p. 259–268, 1999.
- [33] BOUKAS, E. K.; LIU, Z. K. Jump linear quadratic regulator with controlled jump rates. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 46, n. 2, p. 301–305, fev. 2001.
- [34] COSTA, O. L. V.; TUESTA, E. F. H_2 -control and the separation principle for discrete-time Markovian jump linear systems. *Math. Control Signals Systems*, v. 16, p. 320–350, 2004.
- [35] COSTA, E. F.; VAL, J. B. R. do. Stabilizability and positiveness of solutions to the jump linear quadratic problem and the coupled algebraic Riccati equation. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 50, n. 5, p. 691–695, maio 2005.
- [36] SOUZA, C. E. de; FRAGOSO, M. D. H_∞ control for linear systems with Markovian jumping parameters. *Control Theory and Advanced Technology*, v. 9, n. 2, p. 457–466, 1993.
- [37] PAN, Z.; BAŞAR, T. Zero-sum differential games with random structures and applications in H_∞ -control of jump linear systems. In: *6th International Symposium on Dynamic Games and Applications*. Quebec: [s.n.], 1994. v. 2, p. 466–480.
- [38] FRAGOSO, M. D.; VAL, J. B. R. do; PINTO JUNIOR, D. L. Jump linear H_∞ -control: the discrete-time case. *Control Theory and Advanced Technology*, v. 10, p. 1459–1474, 1995.
- [39] FRAGOSO, M. D.; NASCIMENTO, E. C. S.; BACZYNSKI, J. H_∞ control for continuous-time linear systems with infinite Markov jump parameters via semigroup. In: *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision & Control*. Sydney: [s.n.], 2000. v. 2, p. 1160–1165.
- [40] COSTA, O. L. V.; MARQUES, R. P. Mixed H_2/H_∞ control of discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 43, n. 1, p. 95–100, jan. 1998.

- [41] BENJELLOUN, K.; BOUKAS, E. K. Mean square stochastic stability of linear time-delay systems with Markovian jumping parameters. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 43, n. 10, p. 1456–1460, out. 1998.
- [42] SHI, P.; BOUKAS, E. K.; AGARWAL, R. K. Control of Markovian jump discrete-time systems with norm bounded uncertainty and unknown delay. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 44, n. 11, p. 2139–2144, nov. 1999.
- [43] BOUKAS, E. K.; LIU, Z. K. Robust H_∞ -control of discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 46, n. 12, p. 1918–1924, dez. 2001.
- [44] GAO, J.; HUANG, B.; WANG, Z. LMI-based robust H_∞ control of uncertain linear jump systems with time-delay. *Automatica*, v. 37, n. 7, p. 1141–1146, jul. 2001.
- [45] BOUKAS, E. K.; LIU, Z. K.; SHI, P. Delay-dependent stability and output feedback stabilisation of Markov jump system with time-delay.
- [46] WEI, G. *et al.* Robust H_∞ control of stochastic time-delay jumping systems with nonlinear disturbances. *Optimal Control Appl. Methods*, v. 27, n. 5, p. 255–271, set. 2006.
- [47] WU, J.; CHEN, T.; WANG, L. Delay-dependent robust stability and H_∞ control for jump linear systems with delays. *Systems Control Lett.*, v. 55, n. 11, p. 939–948, nov. 2006.
- [48] ACKERSON, G. A.; FU, K. S. On the state estimation in switching environments. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 15, n. 1, p. 10–17, fev. 1970.
- [49] DUFOUR, F.; BERTRAND, P. The filtering problem for continuous-time linear systems with Markovian switching coefficients. *Systems Control Lett.*, v. 23, n. 6, p. 453–461, dez. 1994.
- [50] ALLAM, S.; DUFOUR, F.; BERTRAND, P. Discrete-time estimation of a Markov chain with marked point process observations. Application to Markovian jump filtering. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 46, n. 6, p. 903–908, jun. 2001.
- [51] FRAGOSO, M. D.; ROCHA, N. C. S. Stationary filter for continuous-time Markovian jump linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, v. 44, n. 3, p. 801–815, 2005.
- [52] SWORDER, D. D.; ROGERS, R. O. An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 28, n. 10, p. 971–978, out. 1983.
- [53] MALHAMÉ, R.; CHONG, C. Y. Electric load model synthesis by diffusion approximation of a high-order hybrid-state stochastic system. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 30, n. 9, p. 854–860, set. 1985.

- [54] GRAY, W. S.; GONZÁLEZ, O. Modeling electromagnetic disturbances in closed-loop computer controlled flight systems. In: *Proc. of the 1998 American Control Conference*. Philadelphia: [s.n.], 1998. v. 1, p. 359–364.
- [55] NILSSON, J.; BERNHARDSSON, B. LQG control over a Markov communication network. In: *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision & Control*. San Diego: [s.n.], 1997. v. 5, p. 4586–4591.
- [56] VAL, J. B. R. do; BAŞAR, T. Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem. *J. Econom. Dynam. Control*, v. 23, n. 8, p. 1099–1131, ago. 1999.
- [57] SEILER, P.; SENGUPTA, R. An H_∞ approach to networked control. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 50, n. 3, p. 356–364, mar. 2005.
- [58] COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. New York: Springer-Verlag, 2005. (Probability and Its Applications).
- [59] MARITON, M. *Jump linear systems in automatic control*. New York: Marcel Dekker, 1990.
- [60] COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D. Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 40, n. 12, p. 2076–2088, dez. 1995.
- [61] COSTA, O. L. V.; VAL, J. B. R. do. Full information H_∞ control for discrete-time infinite Markov jump parameter systems. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 202, p. 578–603, set. 1996.
- [62] FRAGOSO, M. D.; BACZYNSKI, J. Stochastic versus mean square stability in continuous time linear infinite Markov jump parameter systems. *Stoch. Anal. Appl.*, v. 20, p. 347–356, 2002.
- [63] ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 26, n. 2, p. 301–320, abr. 1981.
- [64] FRANCIS, B. A. *A Course in H_∞ Control Theory*. New York: Springer-Verlag, 1987. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 88).
- [65] PETERSEN, I. R. Disturbance attenuation and H_∞ optimization: A design method based on the algebraic Riccati equation. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 32, n. 5, p. 427–429, maio 1987.
- [66] KHARGONEKAR, P. P.; PETERSEN, I. R.; ROTEA, M. A. H_∞ optimal control with state feedback. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 33, n. 8, p. 786–788, ago. 1988.
- [67] DOYLE, J. C. *et al.* State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.

- [68] HELTON, J. W.; JAMES, M. R. *Extending H_∞ control to nonlinear systems*. Philadelphia: SIAM, 1999. (Advances in design and Control).
- [69] PETERSEN, I. R.; ANDERSON, B. D. O.; JONCKHEERE, E. A. A first principles solution to the non-singular H_∞ control problem. *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, v. 1, n. 3, p. 171–185, 1991.
- [70] TADMOR, G. Worst-case design in the time domain: the maximum principle and the standard H_∞ control problem. *Math. Control Signals Systems*, v. 3, p. 301–324, 1990.
- [71] LIMEBEER, D. J. N. *et al.* A game theoretic approach to H_∞ control for time-varying systems. *SIAM J. Control Optim.*, v. 30, p. 262–283, 1992.
- [72] TADMOR, G. The standard H_∞ problem and the maximum principle: the general linear case. *SIAM J. Control Optim.*, v. 31, n. 4, p. 813–846, 1993.
- [73] SCHERER, C. W. Mixed H_2/H_∞ control for time-varying and linear parametrically-varying systems. *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, v. 6, n. 9/10, p. 929–952, 1996.
- [74] KEULEN, B. V. *H_∞ -control for distributed parameter systems: a state-space approach*. Basel: Birkhäuser, 1993.
- [75] HINRICHSEN, D.; PRITCHARD, A. J. Stochastic H^∞ . *SIAM J. Control Optim.*, v. 36, n. 5, p. 1504–1538, set. 1998.
- [76] ZHANG, W.; CHEN, B. State feedback H_∞ control for a class of nonlinear stochastic systems. *SIAM J. Control Optim.*, v. 44, n. 6, p. 1973–1991, 2006.
- [77] ALIYU, M.; BOUKAS, E. K. H_∞ control for Markovian jump nonlinear systems. In: *Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*. Florida: [s.n.], 1998. p. 766–771.
- [78] BOUKAS, E. K.; SHI, P. H_∞ -control for discrete-time linear systems with Markovian jump parameters. In: *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision & Control*. Florida: [s.n.], 1997. p. 4143–4148.
- [79] TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. Infinite Markov jump bounded real lemma. *Aceito para apresentação na American Control Conference (ACC'07)*, 2007.
- [80] SEILER, P.; SENGUPTA, R. A bounded real lemma for jump systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 48, n. 9, p. 1651–1654, set. 2003.
- [81] TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. Output feedback H_∞ control of continuous-time infinite Markovian jump linear systems via LMI methods. *Aceito para apresentação na European Control Conference (ECC'07)*, 2007.
- [82] GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, v. 4, n. 4, p. 421–448, 1994.

- [83] SCHERER, C. W. Mixed H_2/H_∞ control. In: ISIDORI, A. (Ed.). *Trends in Control, A European Perspective*. Berlin: Springer-Verlag, 1995. p. 173–216.
- [84] HORN, R. A.; JOHNSON, C. A. *Matrix analysis*. New York: Cambridge University Press, 1985.
- [85] FRAGOSO, M. D.; BACZYNSKI, J. Lyapunov coupled equations for continuous-time infinite Markov jump linear systems. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 274, p. 319–355, out. 2002.
- [86] GREEN, M.; LIMEBEER, D. J. N. *Linear Robust Control*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995. (Information and System Sciences).
- [87] SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. M. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. London: Taylor & Francis, 1997.
- [88] DRAGAN, V.; MOROZAN, T. Stability and robust stabilization to linear stochastic systems described by differential equations with Markovian jumping and multiplicative noise. *Stoch. Anal. Appl.*, v. 20, n. 1, p. 33–92, 2002.
- [89] FRAGOSO, M. D.; BACZYNSKI, J. On an infinite dimensional perturbed Riccati differential equation arising in stochastic control. *Linear Algebra and its Applications*, v. 406, p. 165–176, set. 2005.
- [90] BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; KABAMBA, P. A bisection method for computing the H_∞ norm of a transfer matrix and related problems. *Math. Control Signals Systems*, v. 2, n. 3, p. 207–219, set. 1989.
- [91] BREWER, J. W. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, v. 25, n. 9, p. 772–781, 1978.
- [92] CALLIER, F. M.; DESOER, C. A. *Linear System Theory*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [93] GAHINET, P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. *Automatica*, v. 32, n. 7, p. 1007–1014, jul. 1996.
- [94] IWASAKI, T.; SKELTON, R. E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, v. 30, n. 8, p. 1307–1317, 1994.
- [95] BOYD, S. *et al.* *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM, 1994. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- [96] RAMI, M. A.; GHAOUI, L. E. LMI optimization for nonstandard Riccati equations arising in stochastic control. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 41, n. 11, p. 1666–1671, nov. 1996.
- [97] VANDENBERGHE, L.; BOYD, S. Semidefinite programming. *SIAM Rev.*, v. 38, n. 1, p. 49–95, 1996.

- [98] TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. Output feedback robust stabilization of continuous-time infinite Markov jump linear systems. *submetido*, 2007.
- [99] NESTEROV, Y.; NEMIROVSKY, A. *Interior-point polynomial methods in convex programming*. Philadelphia: SIAM, 1994. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 13).
- [100] MOROZAN, T. Stability radii of some stochastic differential equations. *Stochastics and Stochastics Reports*, v. 54, p. 281–291, 1995.
- [101] MOROZAN, T. Parametrized Riccati equations for controlled linear differential systems with jump Markov perturbations. *Stoch. Anal. Appl.*, v. 16, n. 4, p. 661–682, 1998.
- [102] BOUHTOURI, A. E.; HADRI, K. E. Robust stabilization of discrete-time jump linear systems with multiplicative noise. *IMA J. Math. Control Inform.*, v. 23, n. 4, p. 447–462, 2006.
- [103] TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. Some issues on the stability radii of continuous-time Markov jump linear systems. *Em preparação*.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)