

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Identificação de Dimensões Fractais a partir de uma
Analogia Dinâmica**

Por

Marcelo Miranda Barros

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

IDENTIFICAÇÃO DE DIMENSÕES FRACTAIS A PARTIR DE
UMA ANALOGIA DINÂMICA

Marcelo Miranda Barros

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO
NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQU-
SITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Luiz Bevilacqua, Ph.D

(Presidente)

Prof. Augusto César Noronha Rodrigues Galeão, D.Sc.

Prof. Elson Magalhães Toledo, D.Sc.

Prof. Ricardo Eduardo Musafir, D.Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
MARÇO DE 2007

Miranda Barros, Marcelo

B277c Identificação de dimensões fractais a partir de uma analogia dinâmica /
Marcelo Miranda Barros. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Compu-
tação Científica, 2007.

XV, 70 p. : il.; 29 cm

Orientador: Luiz Bevilacqua

Dissertação (M.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica,
2007.

1. FRACTAIS , 2. Dimensão fractal, 3. Estruturas fractais , 4. Curvas
no plano, 5. Dimensão dinâmica I. Bevilacqua, Luiz. II. LNCC/MCT. III.
Título.

CDD 514.742

“Não existe nenhum caminho lógico para a descoberta das leis do Universo - o único caminho é o da intuição.”

Albert Einstein

Agradecimentos

Primeiramente e principalmente gostaria de agradecer ao professor Luiz Bevilacqua pela atenção, paciência, ensinamentos e oportunidades.

Gostaria de agradecer ao professor e colega Eduardo Garcia (Bidu) pelo apoio e horas de conversas. Ao professor Elson Toledo pelo incentivo à pesquisa. À minha família, pela compreensão e amor incondicionais. Aos companheiros do LNCC pelo apoio, onde estão incluídos estudantes, secretárias, vigilantes, bibliotecários, faxineiros entre outros que trabalham para manter o LNCC um excelente ambiente de trabalho.

Gostaria de agradecer em especial aos companheiros, Leandro Gazoni, Leonardo Goliatt e Sebastian Giusti.

À FAPERJ, pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

IDENTIFICAÇÃO DE DIMENSÕES FRACTAIS A PARTIR DE UMA ANALOGIA DINÂMICA

Marcelo Miranda Barros

Março, 2007

Orientador: Luiz Bevilacqua, Ph.D

Diversas áreas do conhecimento têm utilizado a geometria fractal para melhor entender muitos objetos e fenômenos naturais. Objetos irregulares com padrão auto-similar – onde as partes se assemelham ao todo – podem ser melhor compreendidos através de dimensões fractais que fornecem como o valor de uma propriedade varia dependendo da resolução, ou escala, em que o objeto é observado ou medido. Apresentamos uma nova abordagem para calcular dimensões fractais através de características físicas. Neste trabalho busca-se uma caracterização da dinâmica de estruturas lineares com geometria fractal. Trata-se os elementos de uma sequência geradora de um fractal como estruturas. Osciladores harmônicos simples são construídos com tais estruturas. A variação do período de vibração desses osciladores com uma determinada medida de comprimento nos fornece uma dimensão fractal. A técnica foi testada para a família de curvas contínuas e auto-similares no plano, onde está incluída a clássica triádica de Koch. Mostramos que essa dimensão dinâmica pode ser relacionada à dimensão de Hausdorff-Besicovitch. Com geometria aleatória, a técnica além de fornecer a dimensão fractal, identifica a aleatoriedade. Um novo tipo de fractal é apresentado. A idéia é usar mais de um gerador no processo de geração de um fractal para obter os fractais mistos.

Abstract of Dissertation presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.)

IDENTIFICATION OF FRACTAL DIMENSIONS FROM A DYNAMICAL ANALOGY

Marcelo Miranda Barros

October, 2007

Advisor: Luiz Bevilacqua, Ph.D

Several areas of knowledge use fractal geometry to help to understand natural objects and phenomena. Irregular self-similar — in which parts resemble the whole — objects may be better understood through fractal dimensions which provide how a property varies with resolution or scale. We present a new approach to calculate fractal dimensions that, instead of the frequently used methods based on covering, seeks geometry information from physical characteristics. Here, we treat the elements of a fractal sequence as structures. Imposing constraints on the structures, we build simple harmonic oscillators. The variation of the period of these oscillators with respect to a determined measure of length provides a fractal dimension. This technique was tested for a family of continuous self-similar plane curves, including the classical Koch triadic. We show that this dynamical dimension may be related to Hausdorff-Besicovitch dimension. With random geometry, the technique besides providing a fractal dimension, identifies randomness. A new kind of fractal is also presented. The idea is to use more than one generator in the generation process of a fractal to obtain mixed fractals.

Sumário

1	Introdução	1
2	Geometria fractal	4
2.1	O comprimento da costa de um país	6
2.2	Auto-similaridade	8
2.3	Dimensões Fractais	10
2.3.1	Dimensão de auto-similaridade	13
2.3.2	Dimensão de capacidade	15
2.3.3	Dimensão de Hausdorff-Besicovitch	16
2.3.4	Dimensão de contagem de caixas	18
2.3.5	Dimensão de agrupamento ou dimensão de massa	18
2.3.6	Dimensão fractal através da relação de escala	22
3	Dimensão Fractal Dinâmica	23
3.1	Introdução	23
3.2	Problema direto	26
3.2.1	Experimentos computacionais	36
3.3	Curvas com formação aleatória	40
3.3.1	Experimentos computacionais	40
3.4	Problema inverso	42
3.4.1	Experimentos computacionais	49

4	Fractais Mistos	54
4.1	Experimentos computacionais	57
4.1.1	Problema direto	57
4.1.2	Problema inverso	58
5	Conclusões e perspectivas	60
	Referências Bibliográficas	63
	Apêndice	
A		65

Lista de Figuras

Figura

2.1	Uma curva irregular sendo aproximada por duas unidades de medida diferentes ϵ_1 e ϵ_2 , onde $\epsilon_1 < \epsilon_2$	7
2.2	Medidas dos comprimentos de algumas costas em diferentes escalas, realizadas por Richardson (1961). Figura retirada de Mandelbrot (1977).	8
2.3	Processos de geração de fractais geometricamente auto-similares. De cima para baixo: conjunto de Cantor, triádica de Koch e triângulo de Sierpinski.	9
2.4	Processo de formação da curva triádica de Koch.	11
2.5	Processo de formação do conjunto de Cantor.	11
2.6	Um quadrado visto em diferentes resoluções é também um objeto auto-similar.	13
2.7	Avaliação da dimensão de auto-similaridade para algumas geometrias clássicas.	14
2.8	Processo de geração de um fractal que se desenvolve com figuras planas.	14
2.9	Cobertura do objeto S com bolas de raio r	15
2.10	Processo de encaixotamento da triádica de Koch. O número de caixas de tamanho ϵ necessárias para cobrir o objeto é $N = 39$	18

2.11	<i>Viscous fingering</i> radiais em uma célula de Hele-Shaw. (a) Ar deslocando glicerol. (b) Água deslocando um fluido não-Newtoniano de alta viscosidade. Essa estrutura é fractal com $D_a = 1,70 \pm 0,05$. Figura retirada de (Feder, 1988).	19
2.12	Agrupamento resultante de um DLA bidimensional com 50.000 partículas. $D_a = 1,71$. Figura retirada de Feder (1988).	20
2.13	Configuração do ar deslocando um líquido epoxy em um meio poroso bi-dimensional que consiste de esferas de vidro de 1,6 mm em uma camada entre duas placas de vidro de 40 cm de diâmetro. O centro de injeção está perto do centro da placa. (a) $t = 2$ s depois do início da injeção. (b) $t = 3,9$ s. (c) $t = 17,2$ s. (d) $t = 19,1$ s. Figura retirada de Feder (1988).	20
2.14	Definição do comprimento característico R_0 para o cálculo da dimensão de agrupamento. Cobertura de um termo do processo de geração da triádica de Koch, com uma circunferência de raio R . . .	21
3.1	Exemplos de fractais gerados a partir de processos iterativos, onde $N_k = p^k$ e $\lambda_k = L_0 q^{-k}$	25
3.2	Três primeiras iterações do processo que dá origem à triádica de Koch tratadas como estruturas.	27
3.3	Configuração da estrutura deformada após a ação de solicitações externas.	29
3.4	Distribuição do esforço momento fletor ao longo do segmento genérico de nós $i - 1$ e i	29
3.5	Variação do período de vibração com o comprimento dos elementos ao longo das iterações, para a triádica de Koch. Inclinação das retas que passam pelos pontos correspondentes às iterações mais avançadas.	36
3.6	Variação da razão D_{as}^{aprox}/D_{as} ao longo das iterações para a triádica de Koch.	37

3.7	Variação do período de vibração com o comprimento dos elementos para a triádica de Koch, com a massa na extremidade variando proporcionalmente ao comprimento total das estruturas. Inclinação das retas que passam pelos pontos correspondentes às iterações mais avançadas.	38
3.8	Processo de formação da quadrática de Koch.	39
3.9	Variação do período de vibração com o comprimento dos elementos ao longo das iterações, para a quadrática de Koch. Inclinação das retas que passam pelos pontos correspondentes às iterações mais avançadas.	39
3.10	Exemplo de 4 realizações da triádica de Koch aleatória, cada uma em uma iteração.	40
3.11	Variação do período com o comprimento dos elementos para uma realização do problema de geometria aleatória da triádica de Koch. Inclinações das retas que minimizam a soma dos erros ao quadrado.	41
3.12	Variação do erro a cada duas iterações consecutivas de uma realização do problema da triádica de Koch aleatória.	41
3.13	Variação do período com o comprimento dos elementos para 5 realizações da triádica de Koch aleatória, para o caso do período de vibração da rotação e do deslocamento horizontal da massa m	42
3.14	Processo de eliminação de uma curva que dá origem a uma sequência de subconjuntos da estrutura original.	43
3.15	Processo de eliminação gerando uma sequência de “sub-estruturas” da curva inicial.	44
3.16	Variação do período de vibração com a componente do comprimento da curva na horizontal para o problema inverso, para $b_m = (1/3)^m$	50
3.17	Variação do período de vibração com a componente do comprimento da curva na horizontal, com $b_m = (1/2)^m$	50

3.18	Variação do período de vibração com a componente horizontal do comprimento das estruturas formadas com a triádica de Koch, com a massa na extremidade variando proporcionalmente ao comprimento total das estruturas.	51
3.19	Variação do período com a componente horizontal do comprimento, considerando a energia elástica armazenada devido ao momento fletor e ao esforço cortante.	52
3.20	Variação do período com a componente horizontal do comprimento, considerando a energia elástica armazenada devido ao momento fletor, ao esforço cortante e ao esforço normal.	52
3.21	Variação do período de vibração com a componente do comprimento da curva na horizontal para o problema inverso, tomando como geometria base a quadrática de Koch, com $b_m = (1/1, 3)^m$	53
4.1	Processo de geração do fractal misto triádica-quadrática de Koch.	54
4.2	Variação do período com o comprimento dos elementos para as iterações ímpares da curva mista triádica-quadrática de Koch.	57
4.3	Variação do período com o comprimento dos elementos para as iterações pares da curva mista triádica-quadrática de Koch.	57
4.4	Variação do período com o comprimento da projeção horizontal da curva para 12 subconjuntos na oitava iteração do fractal misto triádica-quadrática, com $L_i = L_{i-1}/2$ isto é, $b_i = 1/2^i$	58
A.1	Média e diferença entre ordenadas $y_k^{(i-1)}$ e $y_k^{(i)}$	66
A.2	Termo de ordem $k + 1$ sobreposto ao termo de ordem k	68

Lista de Tabelas

Tabela

3.1	Inclinações (D_d) das retas que passam pelos dois pontos que correspondem às iterações mais avançadas no gráfico da Figura 3.5. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridade (D_{as}^{aprox}) a partir das equações (3.22) e (3.32).	37
3.2	Dimensões fractais dinâmicas (D_d) para a triádica de Koch com a massa na extremidade variando proporcionalmente ao comprimento total das estruturas e as correspondentes aproximações para as dimensões de auto-similaridade.	38
3.3	Inclinações (D_d) das retas que passam pelos dois pontos que correspondem às iterações mais avançadas no gráfico da Figura 3.9. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridades (D_{as}^{aprox}) a partir das equações (3.22) e (3.32).	39
3.4	Inclinações (D_d) das retas que minimizam a soma dos quadrados dos erros da distância entre as retas e os pontos correspondentes do gráfico da Figura 3.11. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridade a partir das equações (3.22) e (3.32).	40
3.5	Inclinações (D_d) das retas que minimizam a soma do erro ao quadrado da distância entre os pontos dos gráficos e suas respectivas aproximações lineares no gráfico da Figura 3.16. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridade (D_{as}^{aprox}) utilizando as equações (3.48), (3.57) e (3.58).	50

3.6	Inclinações (D_d) das retas que minimizam o erro quadrático da distância entre os pontos dos gráficos e suas respectivas aproximações lineares no gráfico da Figura 3.17. Aproximação para o valor da dimensão fracionária (D_{as}^{approx}).	51
3.7	Dimensões fractais dinâmicas para o problema inverso da triádica de Koch com a massa na extremidade variando proporcionalmente ao comprimento total das estruturas e as correspondentes aproximações para as dimensões de auto-similaridade.	51
3.8	Inclinações (D_d) das retas que minimizam o erro quadrático da distância entre os pontos dos gráficos e suas respectivas aproximações lineares no gráfico da Figura 3.21. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridade (D_{as}^{approx}) utilizando as equações (3.48), (3.57) e (3.58).	53
4.1	Dimensão fractal dinâmica para as iterações ímpares da curva mista triádica-quadrática, obtida da inclinação da reta que minimiza a soma dos quadrados dos erros na Figura 4.2. Aproximações para a dimensão de auto-similaridade	58
4.2	Dimensão fractal dinâmica para as iterações pares da curva mista triádica-quadrática, obtida da inclinação da reta que minimiza a soma dos quadrados dos erros na Figura 4.3. Aproximações para a dimensão de auto-similaridade	58
4.3	Dimensões fractais dinâmicas e suas respectivas aproximações para a dimensão de auto-similaridade para o problema inverso do fractal misto triádica-quadrática de Koch.	59

Capítulo 1

Introdução

A geometria fractal tem sido muito utilizada como ferramenta para nos ajudar a melhor compreender fenômenos e objetos naturais. A essência da geometria fractal está na auto-similaridade — propriedade de objetos cujas partes se assemelham e representam o todo de alguma forma —, que é percebida atualmente nos mais variados ramos das ciências. Aplicações podem ser encontradas em áreas como psiquiatria (Yeragani et al., 2002; Kleszczewski et al., 2000), fisiologia (Bassingthwaite et al., 1994), geografia (Gao e Xia, 1996), física (Gouyet, 1996), química (Rothschild, 1998) e outras diversas. Edgar (1990), Barnsley (1988) e Falconer (1990) abordam a face formal-matemática dos fractais.

Benoit Mandelbrot percebeu algo em comum entre os conjuntos considerados como “monstros” pelos matemáticos do século 19, tais como os conjuntos criados por Cantor e Peano, e algumas aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento. O algo comum é a auto-similaridade. Os primeiros livros que tratam dos então denominados fractais foram de Mandelbrot (1975, 1977), que trazem diversas possíveis aplicações da geometria fractal.

As dimensões fractais trazem a informação de como varia uma propriedade como função da escala. Diversas técnicas para calcular tais dimensões foram desenvolvidas até o momento, dentre as quais podemos citar duas aplicadas a casos práticos: contagem de caixas (box-counting) e dimensão de massa ou de agrupamento (cluster dimension), (Feder, 1988).

Neste trabalho propomos uma nova técnica, que ao contrário da maioria das técnicas existentes baseadas na geometria, baseia-se em características mecânicas. Além de obter-se uma caracterização fractal de propriedades físicas, esta caracterização conseqüentemente traz informação da geometria. Os resultados trazem boas aproximações para a dimensão de Hausdorff-Besicovitch (Falconer, 1990), utilizada como referência até o momento. A nova técnica abre também caminho para a análise de características físicas, medidas através de experimentos, para obter informação sobre a geometria do objeto.

Basicamente a técnica consiste em tratar sequências de curvas fractais contidas no plano como estruturas de barras com restrições e, através da variação de respostas dinâmicas dessas estruturas com uma certa medida de escala, obter dimensões fractais. As estruturas, modeladas ainda de forma simplificada, são incitadas a se moverem em movimento harmônico simples e, então, os períodos desses osciladores são calculados e relacionados com alguma medida de comprimento das estruturas. A técnica foi testada para curvas simples, como a triádica de Koch e suas variações. Os resultados são motivadores e direcionam à extensão para geometrias mais complexas. A técnica foi testada também para uma variação da triádica de Koch, gerada de forma aleatória e os resultados trazem informação adicional à dimensão fractal, caracterizando se a geometria do objeto foi gerada de forma aleatória ou determinística.

Uma nova forma de gerar fractais é também apresentada. Usualmente, a geração de fractais é feita através de processos iterativos, tomando uma geometria base chamada de geradora, e colocando-a em tamanho reduzido no lugar de cada elemento da iteração anterior, $k - 1$, para dar origem à iteração k . Chamamos de *fractal misto* o fractal que usa mais de um gerador em seu processo de geração. Apresentamos um exemplo de fractal misto e aplicamos a técnica dinâmica também nesse fractal.

Este trabalho é apresentado como segue: no capítulo 2 é feita uma breve introdução à geometria fractal; são definidas algumas dimensões fractais e, algu-

mas técnicas utilizadas em casos práticos são colocadas. No capítulo 3 é apresentado o desenvolvimento analítico da abordagem dinâmica proposta, dividida em problema direto e problema inverso, com seus experimentos computacionais. No Capítulo 4 apresenta-se os fractais mistos e uma definição de dimensão fractal de auto-similaridade para fractais mistos. Utiliza-se a técnica dinâmica para extrair dimensões fractais de um fractal misto particular. Finalizando, o capítulo 5 discute os resultados e identifica possíveis caminhos de investigação.

Capítulo 2

Geometria fractal

As formas da natureza atraem o homem que, investiga, compreende e aprende. Geometria é o nome dado ao estudo das formas da natureza (do grego *γεωμετρία*; geo = terra, metria = medida). A geometria teve seu início formal com a organização nos estudos de Euclides (aprox. 300 a.C.), de onde surgiram as idéias abstratas de pontos, retas e planos. Porém, atualmente, a ferramenta desenvolvida por Euclides em sua forma clássica, não tem sido suficiente para atender à nossa imensa e crescente exigência, em termos de modelos de fenômenos naturais. Alguns exemplos de problemas que não foram bem compreendidos com o uso da geometria Euclideana são: o deslocamento de fluidos em meios porosos altamente heterogêneos, a geometria das ramificações do pulmão e sinais biológicos variáveis no tempo como as taxas respiratórias e o encadeamento de impulsos nervosos.

Uma alternativa à geometria Euclideana, relativamente nova, pois teve seu início no século XX, é a geometria fractal. A forma como estávamos acostumados a entender o mundo, utilizando a idéia do Cálculo que vê os fenômenos como sendo suaves, não tem sido útil para nos ajudar a entender muitas das artimanhas criadas pela natureza. Mandelbrot (1977) escreveu: “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, um latido não é contínuo nem o relâmpago viaja em linha reta.” Muitos fenômenos naturais “incompreensíveis”, podem agora ser melhor compreendidos com a nova ferramenta chamada de geometria fractal.

Para definir um fractal vamos nos basear na definição de Mandelbrot (1975).

Num sentido intuitivo, o adjetivo *fractal* indica uma figura geométrica ou um objeto natural que dispõe de duas características:

- (1) suas partes têm a mesma forma ou estrutura do todo. Esses elementos característicos cobrem uma ampla gama de escalas e podem estar ligeiramente deformados.
- (2) sua forma é extremamente irregular, interrompida ou fragmentada, qualquer que seja a escala de observação.

Vamos diferenciar dois tipos de fractais: conjuntos fractais e fractais naturais. Os conjuntos fractais serão definidos de forma rigorosa enquanto que os fractais naturais servirão para designar um padrão natural que é suficientemente representável por um conjunto fractal. Entre os conjuntos fractais podem estar incluídos, por exemplo, curvas descontínuas ou curvas contínuas não diferenciáveis em nenhum ponto do domínio. Entre os fractais naturais estão: o relevo da superfície da Terra e o padrão de ramificações da árvore arterial do pulmão (Bassingthwaight et al., 1994). A palavra fractal cunhada por Mandelbrot vem do latim *fractus*, que além de significar “quebrado” ou “partido”, também significa “irregular”.

A geometria fractal explora um padrão encontrado na natureza. O padrão da auto-similaridade. Tomemos uma couve flor como exemplo. Visualmente nota-se que à medida em que cortamos galhos dos galhos, as estruturas maiores são similares, ou semelhantes, às menores. Não são de fato iguais, mas, similares entre si. Isto é, o galho maior é “parecido” com os galhos menores. Dizemos então que a auto-similaridade é uma propriedade de objetos onde as partes são “cópias” do objeto como um todo, de tamanho reduzido.

Tomemos o problema de calcular o comprimento da costa de um país. Esse problema não é tão simples como calcular o comprimento de um círculo. Veremos que a costa de um país não possui um valor fixo para o seu comprimento. O valor do comprimento medido varia como função da escala do mapa, ou, da resolução do aparelho de medida.

Características de muitos objetos¹ naturais são diferentes quando observadas em diferentes escalas. Isto acontece porque quanto mais de perto se observa os objetos naturais, mais detalhes são revelados e os valores medidos das propriedades conseqüentemente são alteradas. Levantemos uma questão: Qual é o aumento no comprimento da costa de um país quando usamos um mapa maior ou melhoramos a resolução do aparelho de medida ? A resposta a este questionamento está no número real que relaciona de forma linear o logaritmo da propriedade de um objeto com o logaritmo da escala em que essa propriedade está sendo medida, denominado *dimensão fractal*.

2.1 O comprimento da costa de um país

Para calcular valores aproximados de propriedades globais de um objeto, como por exemplo o comprimento de uma curva, costumamos somar a contribuição das partes que o constituem. Se forem necessárias N unidades de medida ϵ para cobrir uma curva, o comprimento L da curva pode ser aproximado por:

$$L(\epsilon) = N(\epsilon)\epsilon. \quad (2.1)$$

A Figura 2.1 ilustra uma curva sendo aproximada por duas unidades de medida diferentes. Note-se que, como $\epsilon_1 < \epsilon_2$, então:

$$L(\epsilon_1) = N_1(\epsilon_1)\epsilon_1 > N_2(\epsilon_2)\epsilon_2 = L(\epsilon_2).$$

Isto é, à medida em que diminui-se a unidade de medida utilizada, o comprimento medido tende a aumentar.

Richardson (1962) estudou as variações nas aproximações dos comprimentos das costas de vários países e notou que, de maneira geral, o comprimento segue

¹ A palavra objeto representará as estruturas no espaço e os processos no tempo de “coisas” ou fenômenos observados na natureza. Entre eles podemos citar: estruturas como as árvores, os rios, as montanhas, as plantas, as ramificações dos dendritos das células nervosas, o cérebro, e processos como a variação do nível do mar, as taxas de trocas gasosas nos pulmões, a taxa de batimentos cardíacos etc. Bassingthwaight et al. (1994) e Feder (1988) estudaram alguns dos exemplos de aplicações citados.

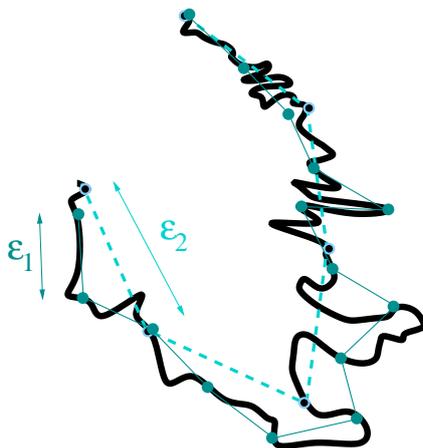


Figura 2.1: Uma curva irregular sendo aproximada por duas unidades de medida diferentes ϵ_1 e ϵ_2 , onde $\epsilon_1 < \epsilon_2$.

uma lei de potência da seguinte forma:

$$L(\epsilon) = N(\epsilon)\epsilon = A\epsilon^{1-D}, \quad (2.2)$$

onde A é uma constante. Isto ocorre para um amplo espectro de escalas, indo de dezenas de quilômetros a metros. Note-se, pela equação (2.2) que: se $D = 1$, L não é função de ϵ . Entretanto para $D \neq 1$, L é função de ϵ . O valor D representa a dimensão da curva, que para a teoria da geometria fractal pode assumir um valor fracionário. A geometria fractal completa a geometria Euclideana no sentido de permitir valores reais, não apenas inteiros, para dimensões de objetos.

A Figura 2.2 mostra o comprimento das costas de alguns países como função da unidade de medida. Reescrevendo a equação (2.2) da seguinte forma

$$\log L = (1 - D) \log \epsilon + \log A,$$

obtem-se as inclinações das retas mostradas na Figura 2.2, dadas por $1 - D$. Note-se que, para uma curva clássica como um círculo, o comprimento não se altera quando a unidade de medida está abaixo de um determinado valor $\bar{\epsilon}$, isto é, quando $\epsilon \leq \bar{\epsilon}$. Neste caso, $D = 1$. Para as outras curvas, nota-se que o comprimento aumenta à medida em que diminui-se a unidade de medida, isto é, a medida do comprimento é uma função da unidade de medida e não possui um valor constante, pelo menos

no intervalo de escalas apresentado no gráfico.

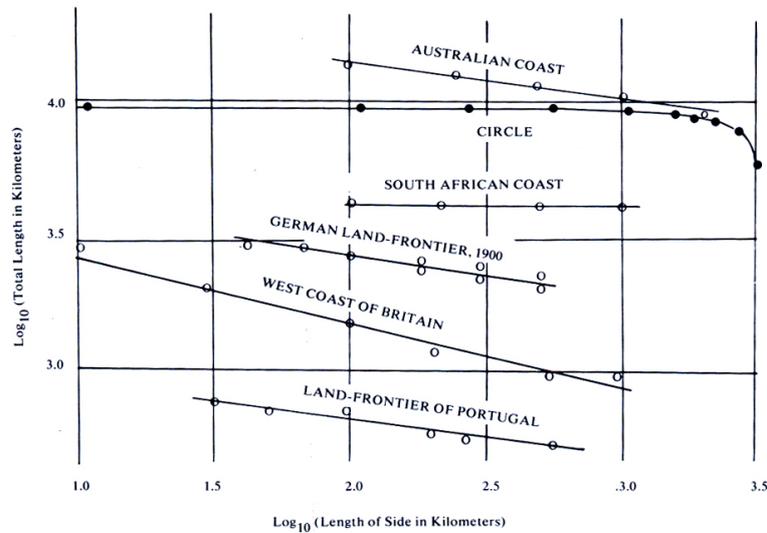


Figura 2.2: Medidas dos comprimentos de algumas costas em diferentes escalas, realizadas por Richardson (1961). Figura retirada de Mandelbrot (1977).

Após esse exemplo de aplicação, vamos explorar um pouco mais a idéia de auto-similaridade para em seguida abordar algumas dimensões fractais.

2.2 Auto-similaridade

Podemos distinguir objetos com auto-similaridade de dois tipos: exata ou estatística. Podemos construir objetos geometricamente auto-similares onde as peças menores são cópias idênticas do objeto como um todo. Esse tipo de auto-similaridade é chamada de exata. Alguns processos de geração de objetos geometricamente auto-similares estão mostrados na Figura 2.3.

Matematicamente, a auto-similaridade é representada pela relação de proporcionalidade entre a propriedade $P(r)$, medida na escala r , e o valor $P(ar)$ medido em uma resolução maior, obtida quando $0 < a < 1$,

$$P(ar) = kP(r), \quad (2.3)$$

onde k é uma constante que pode depender de a . Para uma ampla gama de problemas, a propriedade varia com a escala de acordo com uma lei de potência,

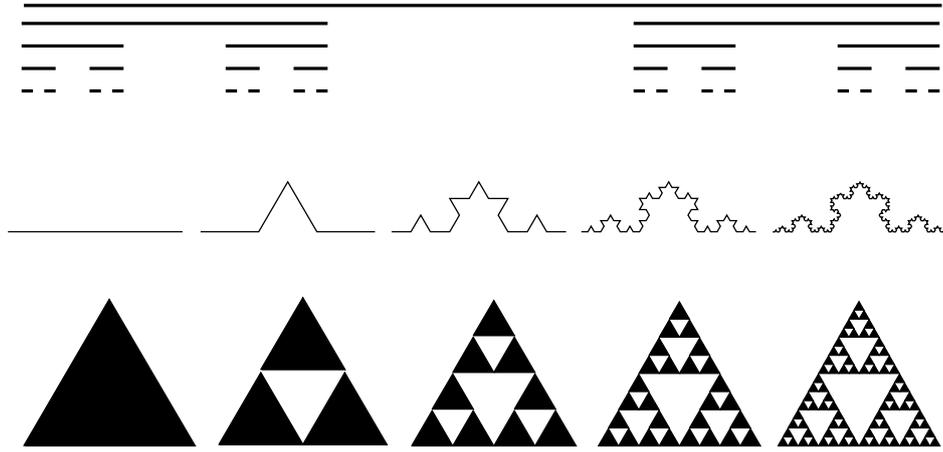


Figura 2.3: Processos de geração de fractais geometricamente auto-similares. De cima para baixo: conjunto de Cantor, triádica de Koch e triângulo de Sierpinski.

isto é:

$$P(r) = Ar^\alpha, \quad (2.4)$$

onde α é um número real. Neste caso, $k = a^\alpha$.

A partir da expressão (2.4) pode-se obter uma expressão adimensional, que relaciona a razão entre dois valores da propriedade em escalas diferentes e a razão entre essas duas escalas, fornecendo:

$$\log \left[\frac{P(ar)}{P(r)} \right] = \alpha \log[a], \quad (2.5)$$

onde $\alpha = b - D$, sendo b uma constante inteira que depende da unidade de medida que é utilizada ($b = 1$ quando usa-se retas, $b = 2$ quando usa-se planos e $b = 3$ quando usa-se sólidos) e D é um número real. Logo, de posse do valor de D , pode-se obter o valor de uma propriedade a partir da escala de observação ou da resolução do aparelho de medida. Além disso, o gráfico de $\log[P(ar)/P(r)]$ como função de $\log[a]$ é uma reta com inclinação $\alpha = b - D$.

Portanto, a auto-similaridade dá origem a uma propriedade de escala, onde o valor medido depende da escala de observação. O número real que relaciona a propriedade à escala é denominado *dimensão fractal* e será representado por D .

Para os objetos naturais, as partes menores não são cópias idênticas do objeto

como um todo. Normalmente são “parecidos” ao todo. Esses objetos costumam ser estatisticamente auto-similares, isto é, uma propriedade estatística, por exemplo a função distribuição de probabilidades de uma variável aleatória, observada em uma escala é proporcional à mesma propriedade observada em outra escala. Neste trabalho não serão tratados objetos estatisticamente auto-similares. Em (Bassingthwaite et al., 1994) estão diversos exemplos desse tipo de auto-similaridade em sistemas biológicos.

2.3 Dimensões Fractais

Uma definição de um conjunto fractal foi dada por Mandelbrot (1977): “Um fractal é por definição um conjunto cuja dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente sua dimensão topológica.” A definição apresentada por Mandelbrot requer a definição de conjunto, de dimensão de Hausdorff-Besicovitch e de dimensão topológica. Por simplicidade, utilizaremos inicialmente a definição de fractal dada no início do capítulo 2.

Vamos determinar a medida usual de comprimento de dois conjuntos auto-similares, gerados através de processos iterativos. O primeiro exemplo é a curva chamada triádica de Koch, formada através do seguinte processo iterativo: inicie com um segmento de reta. Para obter a iteração seguinte, particione cada segmento de reta da iteração anterior em três segmentos de igual comprimento. Retire o segmento central e adicione dois segmentos também com o mesmo comprimento de forma a criar um pedaço de triângulo equilátero no centro. A Figura 2.4 ilustra esse processo.

A curva de Koch é obtida quando $k \rightarrow \infty$. Na iteração k , o número de elementos de comprimento $\lambda_k = L_0 3^{-k}$ é dado por $N_k = 4^k$. Então, o comprimento total da curva na iteração k é dado por $L_k = N_k \lambda_k = L_0 (4/3)^k$. Quando $k \rightarrow \infty$, o comprimento $L_k \rightarrow \infty$.

O conjunto de Cantor obtido também através de um processo iterativo, é ilustrado na Figura 2.5. Na iteração k , o número de elementos de comprimento

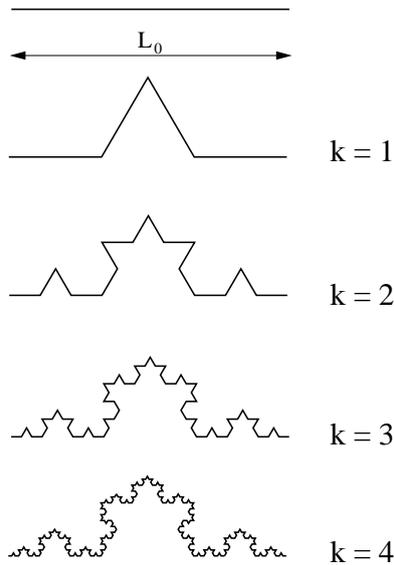


Figura 2.4: Processo de formação da curva triádica de Koch.

$\lambda_k = L_0 3^{-k}$ é dado por $N_k = 2^k$. Então, a soma dos comprimentos dos segmentos na iteração k é dado por $L_k = N_k \lambda_k = L_0 (2/3)^k$. Quando $k \rightarrow \infty$, o comprimento $L_k \rightarrow 0$.

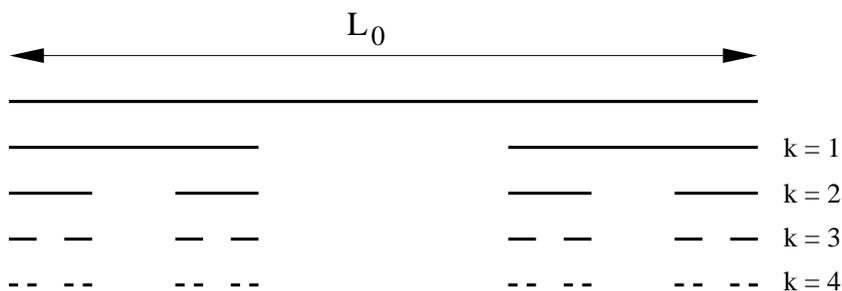


Figura 2.5: Processo de formação do conjunto de Cantor.

Para o comprimento da curva de Koch e do conjunto de Cantor da forma usual, obtemos os valores ∞ e 0 , respectivamente. Estes valores não fornecem informação satisfatória para diferenciarmos estas curvas de outras geradas também através de processos iterativos, e que também forneçam os valores 0 ou ∞ como resultado para o valor do comprimento. Então, vejamos uma informação quantitativa que podemos obter desses conjuntos.

Vamos calcular uma dimensão D desses conjuntos a partir da equação (2.4), onde $\alpha = b - D$. Primeiramente vamos reescrever a equação (2.4), que descreve

como a propriedade P varia com a escala r da seguinte forma:

$$P(r) = Ar^{b-D} = (Br^{-D})(Cr^b) = N(r)\epsilon(r), \quad (2.6)$$

onde $A = BC$, B e C são constantes e o número de unidades de medida $\epsilon(r) = Cr^b$ vistas na escala r é dado por:

$$N(r) = Br^{-D}. \quad (2.7)$$

Utilizando a expressão (2.7), pode-se obter o número de unidades de medida necessárias para cobrir a triádica de Koch, se esta for observada utilizando a resolução $r = 1/3^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, dado por:

$$N\left(\frac{1}{3^n}\right) = B\left(\frac{1}{3^n}\right)^{-D}, \quad (2.8)$$

mas, ao mesmo tempo, é fácil perceber que o número de elementos encontrados utilizando a resolução $1/3^n$ é também dado por:

$$N\left(\frac{1}{3^n}\right) = 4^n. \quad (2.9)$$

Então, igualando as expressões (2.8) e (2.9) e tomando dois valores quaisquer para n , obtém-se a dimensão

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}. \quad (2.10)$$

Para o conjunto de Cantor podemos escolher a mesma resolução $r = 1/3^n$ e é também fácil notar que o número de elementos encontrados nesta resolução é $N(1/3^n) = 2^n$. Então, seguindo o mesmo processo, obtém-se a dimensão do conjunto de Cantor, que assume o seguinte valor fracionário:

$$D = \frac{\log 2}{\log 3}. \quad (2.11)$$

Seguindo a mesma idéia para um quadrado, ilustrado na Figura 2.6, obtemos

a seguinte dimensão:

$$D = 2. \tag{2.12}$$

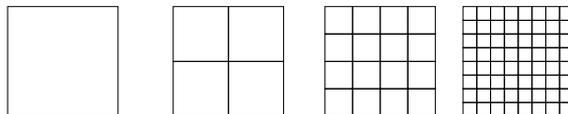


Figura 2.6: Um quadrado visto em diferentes resoluções é também um objeto auto-similar.

Substituindo os valores das dimensões (2.10), (2.11) e (2.12) na equação (2.4), com $\alpha = b - D$, nota-se que o valor da área de um quadrado, não é alterado, quando muda-se a resolução ou, neste caso, o valor de n . Entretanto, para a triádica de Koch e para o conjunto de Cantor, os comprimentos variam com a resolução ou escala, neste caso, com n . Quando $D = b$, a propriedade não varia com a resolução ou escala. Se $D < b$, a propriedade diminui com a diminuição da escala e se $D > b$, a propriedade aumenta com a diminuição da escala.

Vamos agora estudar algumas definições de dimensões e alguns métodos para calcular dimensões para casos práticos.

2.3.1 Dimensão de auto-similaridade

Se o objeto em questão é geometricamente auto-similar, isto é, as partes são cópias idênticas do todo, podemos obter uma dimensão fractal chamada de *dimensão de auto-similaridade*. Seja $N(r)$ o número de partes idênticas encontradas utilizando a resolução r . A dimensão de auto-similaridade D_{as} pode ser obtida da expressão:

$$N(r) = \left(\frac{r}{L_0} \right)^{-D_{\text{as}}}. \tag{2.13}$$

Explicitando D_{as} , obtém-se:

$$D_{\text{as}} = -\frac{\log N(r)}{\log(r/L_0)}, \tag{2.14}$$

onde L_0 é um comprimento de referência tal que $L_0 \geq r$ para todo r .

Considere uma reta. Se for observada na resolução $r = L_0/N$, onde o comprimento total é igual a L_0 , obtém-se N elementos de igual comprimento. De acordo com a equação (2.14), pode-se obter a dimensão fracionária de auto-similaridade de uma reta, que fornece $D_{as} = 1$. Da mesma forma, pode-se fazer o cálculo para um quadrado ou para um cubo, tal como ilustra a Figura 2.7.

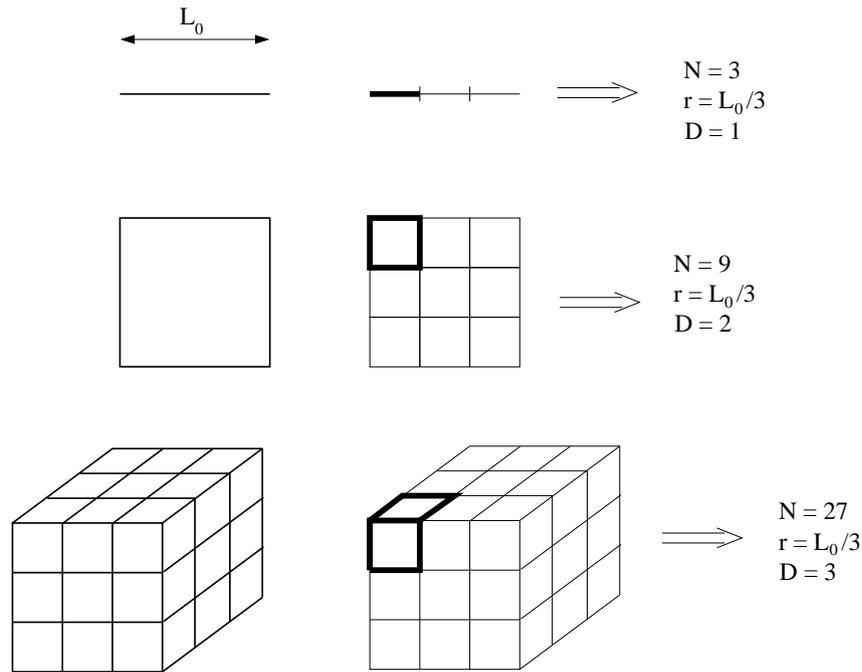


Figura 2.7: Avaliação da dimensão de auto-similaridade para algumas geometrias clássicas.

Tome agora o objeto cujo processo de formação está mostrado na Figura 2.8. Parte-se de um quadrado preenchido de lado 1. A geometria base utilizada ao longo das iterações, chamada de geradora é composta de 5 unidades de tamanho $1/3$. Então, pela expressão (2.14) obtém-se a dimensão de auto-similaridade

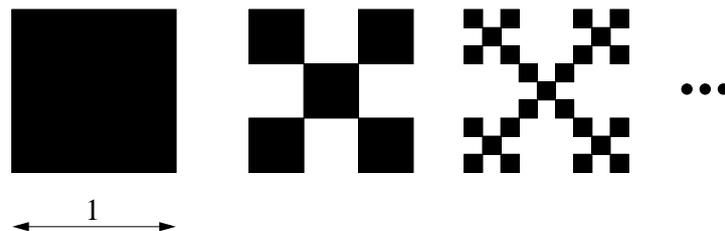


Figura 2.8: Processo de geração de um fractal que se desenvolve com figuras planas.

$$D_{\text{as}} = -\frac{\log 5}{\log(1/3)} \approx 1,464973.$$

Para a triádica de Koch,

$$D_{\text{as}} = -\frac{\log 4}{\log(1/3)} \approx 1,261859.$$

É interessante notar que a disposição dos elementos do gerador não influencia na dimensão de auto-similaridade. Isto é, qualquer fractal cujo processo de geração utilize um gerador com 4 elementos de comprimento reduzido pelo fator 3 tem a mesma dimensão fractal de auto-similaridade da triádica de Koch.

2.3.2 Dimensão de capacidade

A dimensão de auto-similaridade requer que as partes do objeto em uma escala sejam idênticas ao todo. Assim, a dimensão de auto-similaridade só pode ser utilizada quando o objeto for geometricamente auto-similar. Uma dimensão que pode ser utilizada em objetos que não sejam auto-similares é a dimensão de capacidade, que é uma forma mais geral da dimensão de auto-similaridade.

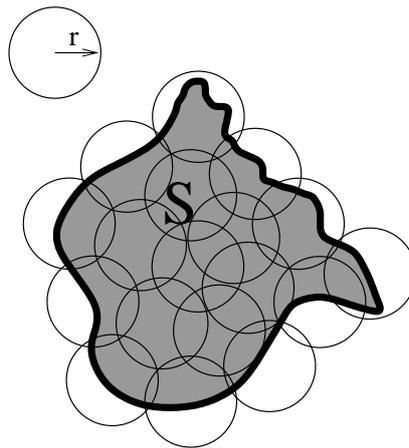


Figura 2.9: Cobertura do objeto S com bolas de raio r .

A idéia consiste em cobrir o objeto com bolas. A Figura 2.9 ilustra uma possível cobertura do objeto S . Seja $N(r)$ o número mínimo de bolas abertas

(Falconer (1990)) de raio r necessárias para cobrir o objeto S . A dimensão de capacidade, D_c , do objeto é o valor limite da razão $\log N(r)/\log(1/r)$ quando r fica cada vez mais próximo de zero, isto é:

$$D_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log \left(\frac{1}{r}\right)}. \quad (2.15)$$

Calculemos então a dimensão de capacidade para a triádica de Koch. O número mínimo de bolas necessárias para cobrir a triádica de Koch pode ser dado como função de n , $n = 1, 2, 3, \dots$, da seguinte forma:

$$N\left(\frac{1}{3^n}\right) = 4^n. \quad (2.16)$$

Então, substituindo (2.16) em (2.15) obtém-se a dimensão fractal de cobertura para a triádica de Koch

$$D_c = \frac{\log 4}{\log 3}, \quad (2.17)$$

onde $r = 1/3^n$ e fazer $r \rightarrow 0$ é equivalente a fazer $n \rightarrow \infty$.

2.3.3 Dimensão de Hausdorff-Besicovitch

Um fractal é um conjunto definido em um espaço métrico. Um espaço métrico tem uma função que define a distância entre quaisquer dois pontos no espaço. O diâmetro de um conjunto é definido como a distância entre os pontos mais distantes no conjunto (Barnsley, 1988; Edgar, 1990). Uma medida exterior é uma função não negativa definida sobre todos os subconjuntos de um conjunto, tal que a medida de uma união (infinita enumerável) de subconjuntos é menor ou igual à soma das medidas daqueles conjuntos (Halmos, 1950). Cubra o objeto com uma união de subconjuntos A_i cada um com diâmetro menor ou igual a r . A medida exterior de Hausdorff de dimensão s , $H(s, r)$, é o valor mínimo entre todos os cobrimentos, da soma dos diâmetros desses subconjuntos elevados à potência s , isto é:

$$H(s, r) = \inf \left[\sum_i (\text{diam} A_i)^s \right].$$

No limite $r \rightarrow 0$, existe um único valor de $s = D_H$, que é definida como dimensão de Hausdorff-Besicovitch (Barnsley, 1988; Edgar, 1990; Falconer, 1990), tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} H(s, r) \rightarrow \infty \quad \forall \quad s < D_H, \quad (2.18)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} H(s, r) \rightarrow 0 \quad \forall \quad s > D_H, \quad (2.19)$$

$$(2.20)$$

e $\lim_{r \rightarrow 0} H(s, r)$ existe para $s = D_H$.

Vamos calcular a dimensão de Hausdorff-Besicovitch D_H para a triádica de Koch. O cobrimento mínimo do termo de ordem k consiste de bolas com diâmetro $\lambda_k = (L_0/3)^k$. Então

$$H(s, 3^{-k}) = \sum_1^{N_k} L_0 \left(\frac{1}{3} \right)^{ks} = L_0 \left(\frac{4}{3^s} \right)^k$$

O limite $r = (1/3)^k \rightarrow 0$ é equivalente a $k \rightarrow \infty$. Seja $D_H = \log 4 / \log 3$. Se $s < D_H$, então $H \rightarrow \infty$ e se $s > 0$, então $H \rightarrow 0$. A medida salta de zero a infinito quando s é igual a $\log 4 / \log 3$. De acordo com a definição da dimensão de Hausdorff-Besicovitch, $s = D_H = \log 4 / \log 3 \approx 1,261859$ é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch da triádica de Koch.

Em casos práticos como os problemas naturais, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é de difícil aplicação. Os problemas naturais são aleatórios e possuem comprimentos característicos, como o tamanho do átomo ou molécula, não fazendo sentido o limite $r \rightarrow 0$. Além disso, encontrar uma cobertura para casos aleatórios não é tão simples quanto para um caso determinístico tal como a triádica de Koch. Para tratar de problemas naturais existem algumas abordagens alternativas.

Vejamos então algumas abordagens úteis para casos práticos.

2.3.4 Dimensão de contagem de caixas

A dimensão de capacidade pode ser utilizada de forma alternativa onde, ao invés de bolas, vamos cobrir um objeto contido no conjunto \mathbb{R}^2 com uma malha quadrada e contar qual o número mínimo de “caixas” necessárias para cobrir o objeto. A Figura 2.10 ilustra uma cobertura da triádica de Koch. A malha quadrada tem tamanho ϵ e $N(\epsilon) = 39$. Faz-se o mesmo procedimento para caixas menores de tamanho $\epsilon/2$. E assim, diminuindo o tamanho das caixas pela metade, pode-se fazer o gráfico que relaciona $\log N(\epsilon) \times \log \epsilon$.

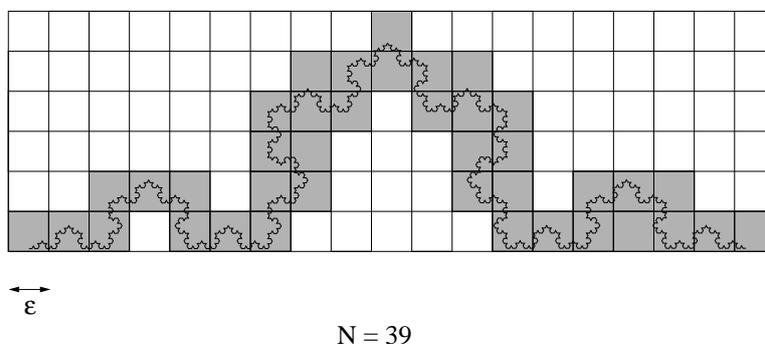


Figura 2.10: Processo de encaixotamento da triádica de Koch. O número de caixas de tamanho ϵ necessárias para cobrir o objeto é $N = 39$.

Pode-se definir a dimensão de contagem de caixas, D_{cc} , da seguinte forma:

$$D_{cc} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(2^{-n})}{\log 2^n},$$

onde $N(2^{-n})$ é o número de caixas necessárias para cobrir o objeto e a malha tem resolução 2^{-n} , sendo n inteiro.

Um tratamento mais rigoroso dessas dimensões, do ponto de vista matemático pode ser visto em (Falconer, 1990).

2.3.5 Dimensão de agrupamento ou dimensão de massa

Problemas físicos em geral têm um comprimento característico mínimo, como o raio, R_0 , de um átomo ou molécula. Portanto, não faz sentido para um caso prá-

tico, fazer o comprimento característico tender a zero, como é definida a dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

Tomemos um problema de mecânica dos fluidos denominado *viscous fingering*. Viscous fingering é o nome dado à interface instável que surge quando um fluido menos viscoso é injetado em um meio contendo um fluido mais viscoso, entre duas placas planas paralelas muito próximas (célula de Hele-Shaw). A Figura 2.11 (Feder, 1988) mostra o resultado de dois experimentos sob estas condições com o fluido menos viscoso sendo injetado no centro.

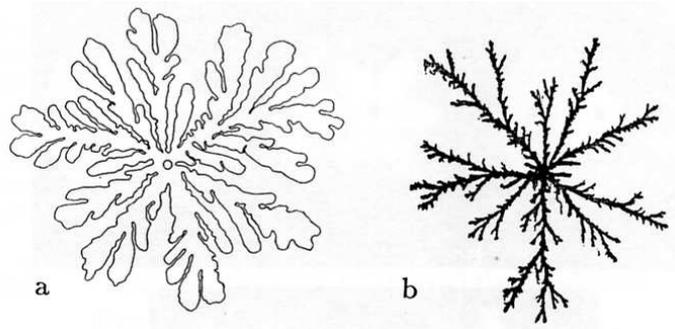


Figura 2.11: *Viscous fingering* radiais em uma célula de Hele-Shaw. (a) Ar deslocando glicerol. (b) Água deslocando um fluido não-Newtoniano de alta viscosidade. Essa estrutura é fractal com $D_a = 1,70 \pm 0,05$. Figura retirada de (Feder, 1988).

Feder (1988) concluiu que se for colocado um meio poroso aleatório artificial, com esferas de vidro, entre duas placas de uma célula de Hele-Shaw, sob certas condições, a configuração do fluido que desloca se assemelha à configuração de um DLA (do inglês *diffusion-limited aggregation*). O processo DLA representa um problema no qual partículas são soltas para se moverem aleatoriamente até encontrar a “superfície” de um agrupamento (cluster). O cluster é composto inicialmente por uma partícula. Então é liberada uma partícula e assim que ela encostar no agrupamento ela se torna parte dele. É então liberada outra partícula para se mover aleatoriamente até tocar no agrupamento e fazê-lo crescer de mais uma partícula. E assim sucessivamente. A Figura 2.12 mostra uma configuração atingida após a liberação de 50.000 partículas (Feder, 1988). A condição inicial foi de haver apenas uma partícula no centro, de onde foram agregando as outras que se deslocavam em movimento aleatório. Feder (1988) conclui que a dimensão de agrupamento

definida a seguir coincide para o problema de um DLA e para o meio poroso aleatório artificial. A Figura 2.13 mostra o resultado de um experimento de um fluido com baixa viscosidade deslocando outro com alta viscosidade em um meio poroso aleatório artificial, também retirada de (Feder, 1988).

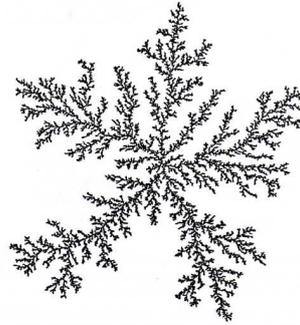


Figura 2.12: Agrupamento resultante de um DLA bidimensional com 50.000 partículas. $D_a = 1,71$. Figura retirada de Feder (1988).

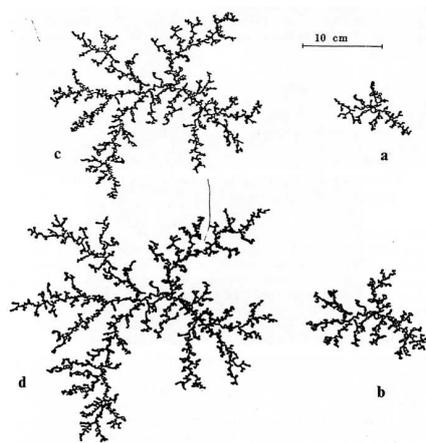


Figura 2.13: Configuração do ar deslocando um líquido epoxy em um meio poroso bi-dimensional que consiste de esferas de vidro de 1,6 mm em uma camada entre duas placas de vidro de 40 cm de diâmetro. O centro de injeção está perto do centro da placa. (a) $t = 2$ s depois do início da injeção. (b) $t = 3,9$ s. (c) $t = 17,2$ s. (d) $t = 19,1$ s. Figura retirada de Feder (1988).

Vamos definir a dimensão de agrupamento, muito utilizada para os tipos de problemas apresentados nesta seção. Seja N o número de moléculas ou partículas contidas numa cobertura de raio R . Então podemos relacionar N e R da seguinte forma:

$$N(R) = \rho \left(\frac{R}{R_0} \right)^{D_a}, \quad N \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

onde $R_0 \leq R$ para todo R é um raio de referência, por exemplo, o diâmetro das partículas. A densidade, representada por ρ depende de como as partículas estão agrupadas. Nesta relação *número-raio*, D_a é a *dimensão de agrupamento*. Se todas as partículas têm a mesma massa pode-se interpretar N como a massa e ρ como a densidade e, então, a dimensão de agrupamento pode ser chamada de dimensão de massa.

Vamos agora calcular a dimensão de agrupamento para a triádica de Koch. Podemos considerar R_0 como sendo o menor raio de circunferência que cobre o menor elemento, como ilustrado na Figura 2.14. Desta forma podemos calcular, utilizando a equação (2.21), a dimensão fractal de agrupamento para a triádica de Koch:

$$16 = 1 \left(\frac{9R_0}{R_0} \right)^{D_a} \Rightarrow D_a = \frac{\log 4}{\log 3}$$

onde foi considerado $\rho = 1$.

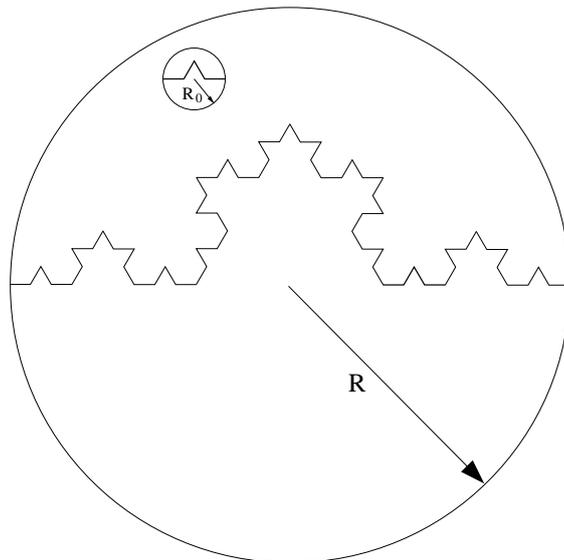


Figura 2.14: Definição do comprimento característico R_0 para o cálculo da dimensão de agrupamento. Cobertura de um termo do processo de geração da triádica de Koch, com uma circunferência de raio R .

2.3.6 Dimensão fractal através da relação de escala

Na seção 2.2 foi visto que uma propriedade de um sistema $P(r)$ pode variar com a escala de observação r de acordo com uma lei de potência, equação (2.4), como consequência da auto-similaridade. De fato, a dimensão fractal é baseada na auto-similaridade. Assim, de posse de medidas de uma propriedade em escalas diferentes, o valor de $\alpha = b - D$ na expressão (2.4) pode ser estimado. Se soubermos qual a dimensão da unidade de medida que está sendo utilizada para medir, b , onde $b = 1$ quando utiliza-se retas e $b = 2$ quando utiliza-se planos, pode-se obter uma dimensão fractal do sistema, dada por $D = b - \alpha$.

Esta forma de obter características fractais tem sido muito utilizada em problemas fisiológicos como pode ser visto em (Bassingthwaighte et al., 1994).

Capítulo 3

Dimensão Fractal Dinâmica

3.1 Introdução

No capítulo anterior foi apresentada a idéia de dimensão fractal e algumas abordagens alternativas à dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

Cada definição de dimensão fornece um tipo de informação a respeito do objeto em estudo. Então, um dado objeto tem várias dimensões fractais, que podem ser iguais ou diferentes, dependendo do objeto e da própria definição da dimensão. Para a triádica de Koch todas as dimensões vistas coincidem e valem $D = \log 4 / \log 3 \approx 1,261859$.

As dimensões de contagem de caixas e a de agrupamento ou de massa, têm sido muito utilizadas em casos práticos (Feder, 1988; Kleszczewski et al., 2000; Revista Ciência Hoje). Tais dimensões podem ser obtidas a partir de uma imagem do objeto sob estudo. Uma outra forma prática de calcular dimensões, também vista na seção anterior, utiliza resultados de dados experimentais obtidos em várias escalas (Bassingthwaight et al., 1994).

Neste capítulo apresentamos uma nova abordagem para obter informações de objetos fractais. Ela se baseia em características dinâmicas do objeto fractal, que é tratado como uma estrutura dinâmica. Esta nova dimensão será denominada *Dimensão Fractal Dinâmica*.

O que denominamos *problema direto* consiste em tratar cada elemento de uma sequência iterativa que gera um fractal, como por exemplo a triádica de Koch,

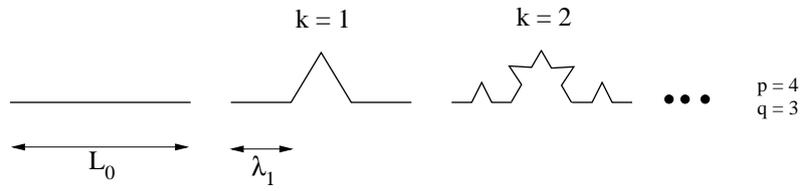
como uma estrutura. Em cada estrutura é colocada uma massa em uma das extremidades. São impostas restrições às estruturas de modo a permitir que a massa se mova em movimento harmônico simples, tal como o problema massa mola. Cada estrutura tem um período natural de vibração na direção de cada grau de liberdade (Meirovitch, 1975). A variação do período de vibração da massa na extremidade dessas estruturas com relação ao comprimento dos elementos, λ_k , do termo de ordem k da sequência iterativa, devidamente normalizados e apresentados em escala logarítmica, fornece para uma curva no plano com três graus de liberdade, três dimensões fractais dinâmicas.

O *problema inverso* consiste em tomar uma certa iteração do processo de geração de um fractal e eliminar partes desse conjunto tratando os subconjuntos como estruturas, e de forma similar ao problema direto, obter-se osciladores harmônicos simples. Através da variação do período de vibração com a componente horizontal do comprimento dos subconjuntos fractais, obtém-se também dimensões fractais dinâmicas. Portanto, essencialmente, a *Dimensão Fractal Dinâmica* dá a informação de como varia o período de vibração com uma certa medida de comprimento da estrutura.

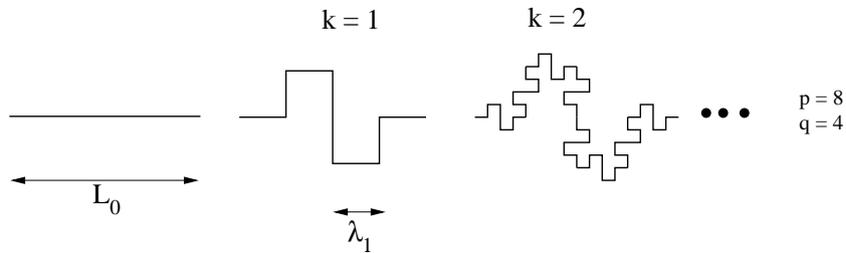
Neste trabalho será abordada uma família particular de fractais, onde cada membro é uma sequência gerada através do seguinte processo iterativo: inicie com um segmento de reta de comprimento $\lambda_0 = L_0$. Para $k = 1, 2, \dots$, cada segmento na iteração $k - 1$ dará origem a p segmentos de comprimento λ_{k-1}/q na iteração k , onde p e q são números inteiros. Para gerar um fractal genuíno, esse processo segue *ad infinitum*, $k \rightarrow \infty$. Alguns exemplos de sequências que estão incluídas nessa família estão apresentadas na Figura 3.1.

Para essa família de sequências que dão origem a conjuntos fractais, o número de elementos N_k , de mesmo comprimento λ_k , varia em função da iteração k da seguinte forma:

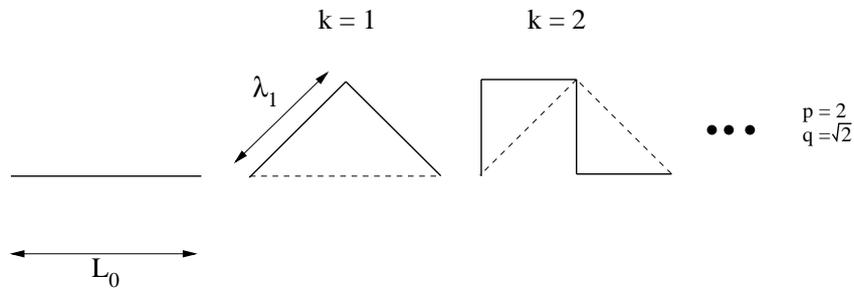
$$N_k = p^k, \tag{3.1}$$



(a) Processo de geração da triádica de Koch.



(b) Processo de geração da quadrática de Koch.



(c) Processo de geração do dragão de Harter-Heighway.

Figura 3.1: Exemplos de fractais gerados a partir de processos iterativos, onde $N_k = p^k$ e $\lambda_k = L_0 q^{-k}$.

e o comprimento dos elementos é dado por:

$$\lambda_k = L_0 \left(\frac{1}{q} \right)^k. \quad (3.2)$$

As equações (3.1) e (3.2) podem ser reescritas de uma outra forma:

$$\log N_k = k \log p \quad (3.3)$$

$$\log \lambda_k = \log L_0 - k \log q. \quad (3.4)$$

Eliminando k nas equações (3.3) e (3.4) obtém-se:

$$\log N_k = -D_{\text{as}} \log \left(\frac{\lambda_k}{L_0} \right), \quad (3.5)$$

onde $D_{\text{as}} = \frac{\log p}{\log q}$ é a dimensão fractal de auto-similaridade. Para a família de fractais auto-similares, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch coincide com a dimensão de auto-similaridade (Falconer, 1990).

3.2 Problema direto

Tomemos uma sequência incluída na família auto-similar descrita em 3.1, que dá origem à triádica de Koch. O processo de formação da triádica de Koch está apresentado na Figura 2.4.

Para efeito de estudo, cada geometria da sequência que gera a triádica de Koch será tratada como uma estrutura de barra (Oden, 1967). Então, às barras podemos associar propriedades materiais e usar leis físicas que permitem prever comportamentos quando são submetidas a ações de forças externas.

As estruturas serão tratadas como barras contidas no plano, com comportamento elástico-linear. Isso corresponde a assumir que quando forem impostas solicitações externas (forças ou deslocamentos) sobre a estrutura retirando da configuração de equilíbrio estático, forças restauradoras (elásticas) atuarão em sentido contrário aos deslocamentos a fim de recolocar a estrutura na posição de equilíbrio, que acontece quando cessa-se as solicitações externas (elasticidade). A relação entre o deslocamento e a força se dá de forma linear, isto é, para o caso de apenas um grau de liberdade como um problema massa mola simples, $F = -ku$ (relação linear), onde F representa a força, u o deslocamento e k a constante de rigidez da mola. Em uma extremidade da estrutura, todo tipo de movimento será restrito. Na outra extremidade será colocada uma massa m , que restrita a um movimento no plano tem 3 graus de liberdade: deslocamentos nas direções, horizontal e vertical, e rotação. A massa do arame deve ser muito inferior à massa m , a fim de ser desconsiderada. A Figura 3.2 ilustra os três primeiros elementos da sequência sendo tratados como estruturas de barras, com as restrições descritas.

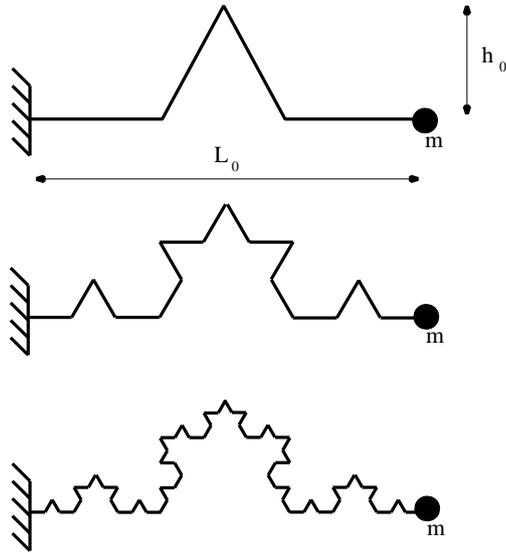


Figura 3.2: Três primeiras iterações do processo que dá origem à triádica de Koch tratadas como estruturas.

O problema direto em questão consiste em determinar o período de vibração na direção de cada grau de liberdade. O sistema de equações diferenciais lineares que governa o movimento da massa m para os três graus de liberdade, obtido a partir da segunda lei de Newton é dado por:

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) = F(t)$$

onde M é a matriz de massa, K a matriz de rigidez, $F(t)$ o vetor de forças externas e U o vetor de deslocamentos. Em forma explícita tem-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_k & 0 & 0 \\ 0 & m_k & 0 \\ 0 & 0 & m_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_k \\ \ddot{u}_k \\ \ddot{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_{11})_k & (k_{12})_k & (k_{13})_k \\ (k_{21})_k & (k_{22})_k & (k_{23})_k \\ (k_{31})_k & (k_{32})_k & (k_{33})_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_\theta(t) \\ f_u(t) \\ f_v(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O sub-índice k indica a iteração da estrutura que está sendo considerada. Como a massa m_k dá uma medida de dificuldade de impor uma aceleração à mesma, \bar{m}_k dá uma medida de dificuldade em impor uma aceleração angular à massa.

A matriz de rigidez K depende tanto de características físicas quanto geométricas da estrutura. Os termos de K dão a informação de como é a relação linear entre as forças externas e os deslocamentos quando os demais deslocamentos são nulos e o sistema está em equilíbrio estático (sem movimento). Os deslocamentos se relacionam com a força a relação entre eles é representada como Define-se definir a matriz de flexibilidade Γ como sendo a inversa de K , isto é,

$$\Gamma K = K \Gamma = I$$

onde I é a matriz identidade. Pode-se calcular a matriz de flexibilidade a partir da energia de deformação armazenada na estrutura. A energia de deformação, ou energia interna, para a estrutura de barra na iteração k , é dada por:

$$W_k = \int_0^{L_t} \frac{[M_k(s)]^2}{2EI_k} ds. \quad (3.7)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, I_k o momento de inércia da seção transversal da estrutura na iteração k e $M_k(s)$ a função que descreve como varia o esforço interno momento fletor ao longo da estrutura na iteração k (Süssekind, 1977; Oden, 1967). Por simplicidade, foi considerada somente a energia armazenada pelo momento fletor, M_k , isto é, foi desconsiderada a energia armazenada pelos esforços, normal e cisalhante. Posteriormente veremos através de experimentos computacionais, como os resultados seriam alterados se fossem incluídos tais esforços.

A função $M_k(s)$ ao longo de toda a curva pode ser reescrita como a soma das funções $M_k^{(i-1,i)}(s)$ em cada elemento $(i-1, i)$ para $i = 1, \dots, N_k$, isto é, $M_k(s) = \sum_{i=1}^{N_k} M_k^{(i-1,i)}(s)$. Então,

$$W_k = \int_0^{L_t} \frac{[M_k(s)]^2}{2EI_k} ds = \frac{1}{2EI_k} \sum_{i=1}^{N_k} \int_0^{\lambda_k} \left[M_k^{(i-1,i)}(s) \right]^2 ds. \quad (3.8)$$

Quando as imposições sobre a estrutura são como as da Figura 3.3, um momento juntamente com uma força horizontal e uma força vertical, a distribuição

do momento fletor no elemento $(i - 1, i)$ é dado por:

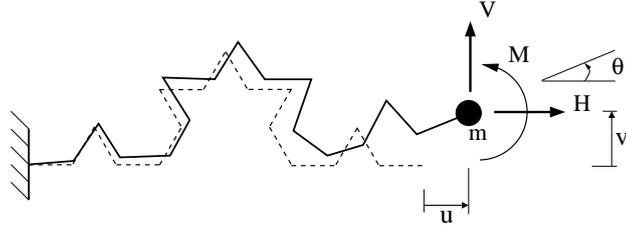


Figura 3.3: Configuração da estrutura deformada após a ação de solicitações externas.

$$M_k^{(i-1,i)}(s) = M + H \left[\frac{(y_k^{(i)} - y_k^{(i-1)})s}{\lambda_k} + y_k^{(i-1)} \right] + V \left[\frac{(x_k^{(i)} - x_k^{(i-1)})s}{\lambda_k} + x_k^{(i-1)} \right]. \quad (3.9)$$

Os valores $x_k^{(i-1)}$, $x_k^{(i)}$ e $y_k^{(i-1)}$, $y_k^{(i)}$ correspondem respectivamente às abscissas e às ordenadas dos nós do elemento $(i - 1, i)$, como ilustra a Figura 3.4.

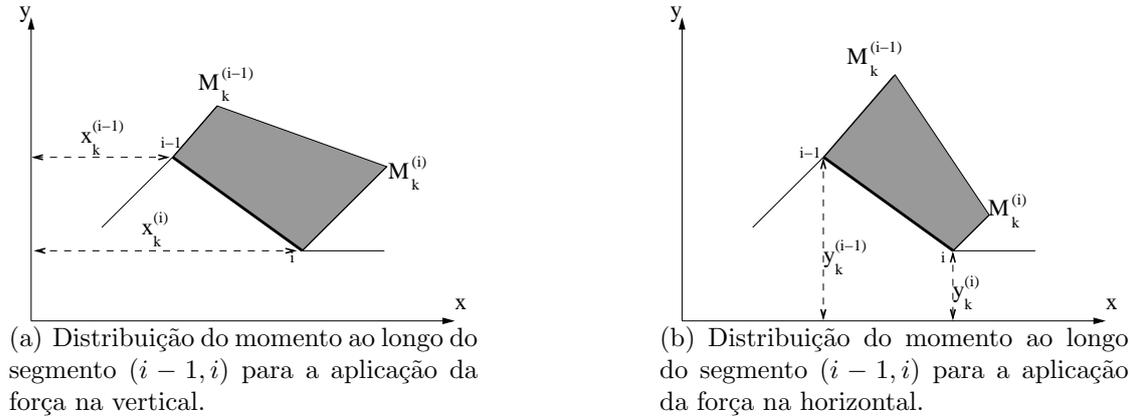


Figura 3.4: Distribuição do esforço momento fletor ao longo do segmento genérico de nós $i - 1$ e i .

Substituindo (3.9) em (3.8), obtém-se a energia de deformação como função das solicitações externas M , H e V :

$$\begin{aligned}
W_k &= \frac{1}{2EI_k} \sum_{i=1}^{N_k} \int_0^{\lambda_k} \left\{ M + H \left[\frac{(y_k^{(i)} - y_k^{(i-1)})s}{\lambda_k} + y_k^{(i-1)} \right] + V \left[\frac{(x_k^{(i)} - x_k^{(i-1)})s}{\lambda_k} + x_k^{(i-1)} \right] \right\}^2 ds \\
&= \frac{\lambda_k}{2EI_k} \sum_{i=1}^{N_k} \left\{ M^2 + \frac{1}{3}H^2 \left[(y_k^{(i-1)})^2 + (y_k^{(i-1)}y_k^{(i)}) + (y_k^{(i)})^2 \right] + \right. \\
&+ \frac{1}{3}V^2 \left[(x_k^{(i-1)})^2 + (x_k^{(i-1)}x_k^{(i)}) + (x_k^{(i)})^2 \right] + MH \left[y_k^{(i-1)} + y_k^{(i)} \right] + \\
&+ \left. MV \left[x_k^{(i-1)} + x_k^{(i)} \right] + \frac{1}{3}HV \left[y_k^{(i)}x_k^{(i)} + y_k^{(i-1)}x_k^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(y_k^{(i-1)}x_k^{(i)} + x_k^{(i-1)}y_k^{(i)} \right) \right] \right\} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Segundo o teorema de Castigliano (Oden, 1967), aplicável a estruturas elástico-lineares de barras, a taxa de variação instantânea da energia de deformação com relação a uma determinada força concentrada fornece o deslocamento do ponto de aplicação da força na respectiva direção, isto é:

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \Delta_i$$

onde F_i e Δ_i representam as forças e os deslocamentos pontuais, respectivamente.

Utilizando o teorema de Castigliano na expressão da energia, equação (3.10), obtém-se a rotação e os deslocamentos, horizontal e vertical, na iteração k como função das solicitações:

$$\begin{aligned}
\theta_k &= \frac{\partial W_k}{\partial M} = \frac{\lambda_k}{EI_k} \sum_{i=1}^{N_k} \left[M + \frac{H}{2} (y_k^{(i-1)} + y_k^{(i)}) + \frac{V}{2} (x_k^{(i-1)} + x_k^{(i)}) \right] \\
u_k &= \frac{\partial W_k}{\partial H} = \frac{\lambda_k}{EI_k} \sum_{i=1}^{N_k} \left\{ \frac{M}{2} (y_k^{(i-1)} + y_k^{(i)}) + \frac{H}{3} \left[(y_k^{(i-1)})^2 + y_k^{(i-1)}y_k^{(i)} + (y_k^{(i)})^2 \right] + \right. \\
&+ \left. \frac{V}{3} \left[y_k^{(i)}x_k^{(i)} + y_k^{(i-1)}x_k^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(y_k^{(i-1)}x_k^{(i)} + x_k^{(i-1)}y_k^{(i)} \right) \right] \right\} \quad (3.11) \\
v_k &= \frac{\partial W_k}{\partial V} = \frac{\lambda_k}{EI_k} \sum_{i=1}^{N_k} \left\{ \frac{M}{2} \left[x_k^{(i-1)} + x_k^{(i)} \right] + \frac{H}{3} \left[y_k^{(i)}x_k^{(i)} + y_k^{(i-1)}x_k^{(i-1)} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{2} \left(y_k^{(i-1)}x_k^{(i)} + x_k^{(i-1)}y_k^{(i)} \right) \right] + \frac{V}{3} \left[(y_k^{(i-1)})^2 + y_k^{(i-1)}y_k^{(i)} + (y_k^{(i)})^2 \right] \right\},
\end{aligned}$$

que pode ser reescrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (\gamma_{11})_k & (\gamma_{12})_k & (\gamma_{13})_k \\ (\gamma_{21})_k & (\gamma_{22})_k & (\gamma_{23})_k \\ (\gamma_{31})_k & (\gamma_{32})_k & (\gamma_{33})_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ H \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_k \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

onde

$$(\gamma_{11})_k = \frac{\lambda_k}{EI_k} N_k \quad (3.13)$$

$$(\gamma_{12})_k = \frac{\lambda_k}{EI_k} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_k} \left(y_k^{(i-1)} + y_k^{(i)} \right)$$

$$(\gamma_{13})_k = \frac{\lambda_k}{EI_k} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_k} \left(x_k^{(i-1)} + x_k^{(i)} \right)$$

$$(\gamma_{21})_k = (\gamma_{12})_k$$

$$(\gamma_{22})_k = \frac{\lambda_k}{EI_k} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_k} \left[\left(y_k^{(i-1)} \right)^2 + y_k^{(i-1)} y_k^{(i)} + \left(y_k^{(i)} \right)^2 \right] \quad (3.14)$$

$$(\gamma_{23})_k = \frac{\lambda_k}{EI_k} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_k} \left[y_k^{(i-1)} x_k^{(i-1)} + y_k^{(i)} x_k^{(i)} + \frac{1}{2} \left(y_k^{(i-1)} x_k^{(i)} + x_k^{(i-1)} y_k^{(i)} \right) \right]$$

$$(\gamma_{31})_k = (\gamma_{13})_k$$

$$(\gamma_{32})_k = (\gamma_{23})_k$$

$$(\gamma_{33})_k = \frac{\lambda_k}{EI_k} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_k} \left[\left(x_k^{(i-1)} \right)^2 + x_k^{(i-1)} x_k^{(i)} + \left(x_k^{(i)} \right)^2 \right].$$

Em forma reduzida pode-se escrever:

$$\Gamma F = U, \quad (3.15)$$

onde $\Gamma = [(\gamma_{ij})_k]$ é a matriz de flexibilidade, F é o vetor de forças e U o vetor de deslocamentos.

Se $F(t) = (f_\theta(t), 0, 0)$, onde

$$f_\theta(t) = (k_{11})_k \theta_k + (k_{12})_k u_k + (k_{13})_k v_k - \frac{1}{(\gamma_{11})_k} \theta_k, \quad (3.16)$$

a equação do movimento, (3.6), na direção de θ fica na seguinte forma:

$$\bar{m}_k \ddot{\theta}_k + \frac{1}{(\gamma_{11})_k} \theta_k = 0$$

que representa um oscilador harmônico simples unidimensional, com frequência natural de vibração T_k^θ dada por:

$$T_k^\theta = \frac{2\pi}{w_k^\theta}, \quad (3.17)$$

onde a frequência angular, w_k^θ , é dada por:

$$(w_k^\theta)^2 = \frac{1}{\bar{m}_k (\gamma_{11})_k}. \quad (3.18)$$

Logo, correlacionando as equações (3.13), (3.17) e (3.18), o período de vibração pode ser colocado como função de λ_k da seguinte forma:

$$(T_k^\theta)^2 = 4\pi^2 \bar{m}_k \frac{\lambda_k N_k}{EI_k}$$

A força $f_\theta(t)$ é uma força de controle externa que pode ser interpretada como uma reação de apoio que restringe o movimento da massa m .

Para tornar a equação do período adimensional podemos dividi-la por um período de referência $(T_0^\theta)^2 = 4\pi^2 \bar{m}_0 L_0 / EI_0$, onde \bar{m}_0 é uma massa de referência, I_0 é um momento de inércia de referência e L_0 é o comprimento do segmento que dá início ao processo de geração do fractal, ver Figura 3.2, que fornece:

$$\left(\frac{T_k^\theta}{T_0^\theta} \right)^2 = \frac{\bar{m}_k I_0}{\bar{m}_0 I_k} N_k \frac{\lambda_k}{L_0}. \quad (3.19)$$

Vamos assumir que a massa e o momento de inércia da seção transversal variam de acordo com as seguintes leis de potência:

$$I_k = I_0 \left(\frac{\lambda_k}{L_0} \right)^\gamma, \quad (3.20)$$

e

$$\bar{m}_k = \bar{m}_0 \left(\frac{L_k}{L_0} \right)^\nu, \quad (3.21)$$

onde L_k é o comprimento total do k -ésimo termo da sequência, dado por $L_k = N_k \lambda_k$.

Segundo a relação (3.20), para $\gamma = 1$ o momento de inércia diminui proporcionalmente ao comprimento dos elementos, isto é, a resistência da seção transversal à rotação diminui linearmente com o comprimento dos elementos, que pode representar uma diminuição da seção transversal com o aumento das iterações. Se $\nu = 1$ na relação (3.21), a massa na extremidade será proporcional ao comprimento total da estrutura, representando de certa forma a massa total da estrutura. Se $\gamma = 0$ e $\nu = 0$, então o momento de inércia e a massa permanecerão constantes com o avanço das iterações.

Substituindo as expressões (3.20) e (3.21) em (3.19) obtém-se o período natural normalizado

$$\left(\frac{T_k^\theta}{T_0^\theta} \right)^2 = \left(\frac{\lambda_k}{L_0} \right)^{1+\nu-\gamma} N_k^{1+\nu},$$

mas, pela equação (3.5), $\log N_k = -D_{\text{as}} \log(\lambda_k/L_0)$. Então:

$$\log \left(\frac{T_k^\theta}{T_0^\theta} \right) = D_d \log \left(\frac{\lambda_k}{L_0} \right),$$

onde $D_d = 1/2[(1 + \nu)(1 - D_{\text{as}}) - \gamma]$ é uma dimensão fractal, que descreve como varia o período de vibração com o comprimento dos elementos. A esta dimensão fractal D_d , daremos o nome de *Dimensão Fractal Dinâmica*.

Para o caso onde o momento de inércia e a massa permanecem constantes ($\gamma = \nu = 0$) em todas as iterações, tem-se:

$$D_d = \frac{1}{2}(1 - D_{\text{as}}). \quad (3.22)$$

Esta dimensão fractal foi obtida a partir do período natural de vibração do deslocamento angular (θ_k) das estruturas no ponto onde foi colocada a massa.

Estudemos agora o período natural de vibração do deslocamento da massa na direção horizontal.

Se o vetor de forças F for dado por $F(t) = (0, f_k^u(t), 0)$ onde

$$f_k^u(t) = (k_{21})_k \theta_k + (k_{22})_k u_k + (k_{23})_k v_k - \frac{1}{(\gamma_{22})_k} u_k, \quad (3.23)$$

o movimento na direção horizontal u é governado pela seguinte equação

$$m_k \ddot{u}_k + \frac{1}{(\gamma_{22})_k} u_k = 0$$

que representa o movimento de um oscilador harmônico simples unidimensional com período de vibração T_k^u dado por

$$T_k^u = \frac{2\pi}{w_k^u}, \quad (3.24)$$

onde

$$(w_k^u)^2 = \frac{1}{m_k (\gamma_{22})_k}. \quad (3.25)$$

Com as equações (3.14), (3.24) e (3.25) obtemos o período de vibração dado por:

$$(T_k^u)^2 = 4\pi^2 m_k \frac{\lambda_k N_k \Omega_k^u h_0^2}{EI_k}, \quad (3.26)$$

onde

$$\Omega_k^u = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \alpha_k^{(i)} \quad (3.27)$$

e

$$\alpha_k^{(i)} = \frac{1}{3} \left[\left(z_k^{(i-1)} \right)^2 + z_k^{(i-1)} z_k^{(i)} + \left(z_k^{(i)} \right)^2 \right], \quad (3.28)$$

com $z_k^{(j)} = y_k^{(j)} / h_0$, $j = 0, 1, \dots, N_k$.

A razão entre o período, equação (3.26), e um período de referência $(T_0^u)^2 = 4\pi^2 m_0 L_0 h_0^2 / EI_0$, fornece a seguinte relação adimensional:

$$\left(\frac{T_k^u}{T_0^u}\right)^2 = \frac{m_k I_0}{m_0 I_k} N_k \frac{\lambda_k}{L_0} \Omega_k^u, \quad (3.29)$$

onde m_0 é uma massa de referência, I_0 é um momento de inércia de referência e L_0 é o comprimento que dá início ao processo iterativo de geração do fractal.

Substituindo as expressões (3.20) e (3.21) em (3.29) obtém-se o período natural normalizado:

$$\left(\frac{T_k^u}{T_0^u}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_k}{L_0}\right)^{1+\nu-\gamma} N_k^{1+\nu} \Omega_k^u,$$

mas, pela equação (3.5), $N_k = -D_{\text{as}} \log(\lambda_k/L_0)$. Logo:

$$\log\left(\frac{T_k^u}{T_0^u}\right) = D_{\text{d}} \log\left(\frac{\lambda_k}{L_0}\right) + \frac{1}{2} \log \Omega_k^u, \quad (3.30)$$

onde

$$D_{\text{d}} = \frac{1}{2} [(1 + \nu)(1 - D_{\text{as}}) - \gamma] \quad (3.31)$$

é a dimensão fractal dinâmica para o período do deslocamento na horizontal.

Se a sequência de osciladores tem característica fractal simples, isto é, apresenta apenas uma dimensão fractal constante ao longo das escalas, então é necessário que o gráfico $\log(T_k/T_0) \times \log(\lambda_k/L_0)$ se aproxime de uma reta de inclinação D_{d} , i.e., $\Omega_k^u \rightarrow_{k \rightarrow \infty} C_1$ constante. No apêndice A está a prova de que isso de fato ocorre.

Para o caso onde o momento de inércia e a massa permanecem constantes ($\gamma = \nu = 0$) em todas as iterações, tem-se

$$D_{\text{d}} = \frac{1}{2}(1 - D_{\text{as}}). \quad (3.32)$$

De forma similar, para o deslocamento vertical v chega-se à seguinte expres-

são para o período como função do comprimento dos elementos:

$$\log\left(\frac{T_k^v}{T_0^v}\right) = D_d \log\left(\frac{\lambda_k}{L_0}\right) + \frac{1}{2} \log \Omega_k^v,$$

onde

$$\Omega_k^v = \frac{1}{N_k} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_k} \left[\left(\frac{x_k^{(i-1)}}{L_0} \right)^2 + \frac{x_k^{(i-1)} x_k^{(i)}}{L_0^2} + \left(\frac{x_k^{(i)}}{L_0} \right)^2 \right],$$

e $\Omega_k^v \rightarrow_{k \rightarrow \infty} C_2$, constante.

3.2.1 Experimentos computacionais

Nesta seção confirmaremos os resultados obtidos na seção 3.2 através de experimentos computacionais. Em todos os resultados apresentados neste trabalho estão os períodos de vibração da massa m nas direções dos três graus de liberdade. O resultado apresentado na Figura 3.5 corresponde ao período de vibração normalizado $\log(T_k/T_0)$ como função do comprimento dos elementos normalizado $\log(\lambda_k/L_0)$ para as 9 primeiras iterações do processo de geração da triádica de Koch. A seção transversal e a massa foram mantidas constantes em todos os osciladores.

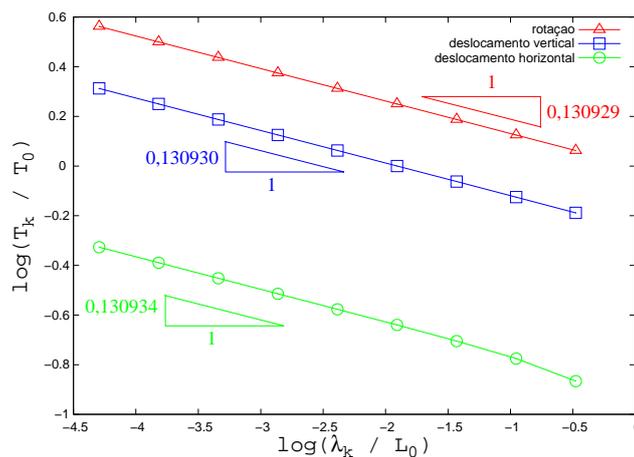


Figura 3.5: Variação do período de vibração com o comprimento dos elementos ao longo das iterações, para a triádica de Koch. Inclinação das retas que passam pelos pontos correspondentes às iterações mais avançadas.

De acordo com a análise, os pontos para os casos de deslocamentos tendem assintoticamente para a reta de inclinação $(D_{as} - 1)/2$ à medida em que as iterações avançam. Para o caso da rotação, a inclinação é uma aproximação de $(D_{as} - 1)/2$.

A Tabela 3.1 apresenta os valores numéricos das inclinações das retas que passam pelos pontos correspondentes às iterações mais avançadas e conseqüentemente suas melhores aproximações para as dimensões fracionárias de auto-similaridade

D_{as}^{aprox} .

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{aprox}
Rotação	-0,130929	1,261859
Deslocamento vertical	-0,130930	1,261860
Deslocamento horizontal	-0,130934	1,261869

Tabela 3.1: Inclinações (D_d) das retas que passam pelos dois pontos que correspondem às iterações mais avançadas no gráfico da Figura 3.5. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridade (D_{as}^{aprox}) a partir das equações (3.22) e (3.32).

Como foi visto, para a triádica de Koch, $D_{as} = \log 4 / \log 3 \approx 1,261859507$.

Nos resultados apresentados foi considerada somente a energia de deformação armazenada pelo esforço interno momento fletor.

O gráfico 3.6 mostra como variou a razão D_{as}^{aprox}/D_{as} , das inclinações a cada duas iterações consecutivas.

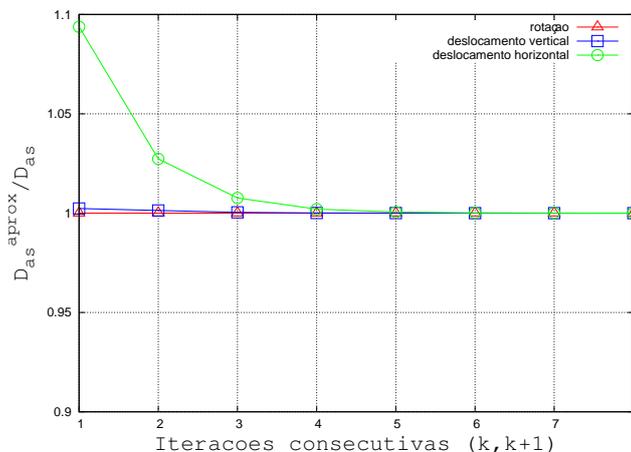


Figura 3.6: Variação da razão D_{as}^{aprox}/D_{as} ao longo das iterações para a triádica de Koch.

A Figura 3.7 mostra como varia o período com o comprimento dos elementos ao longo das iterações para a massa m_k variando proporcionalmente com o comprimento total das estruturas para a triádica de Koch. A Tabela 3.2 apresenta as dimensões fractais dinâmicas obtidas com as inclinações das retas que passam pelos dois pontos correspondentes às iterações mais avançadas; suas respectivas aproximações para a dimensão de auto-similaridade são obtidas através da expressão (3.31), com $\nu = 1$ e $\gamma = 0$.

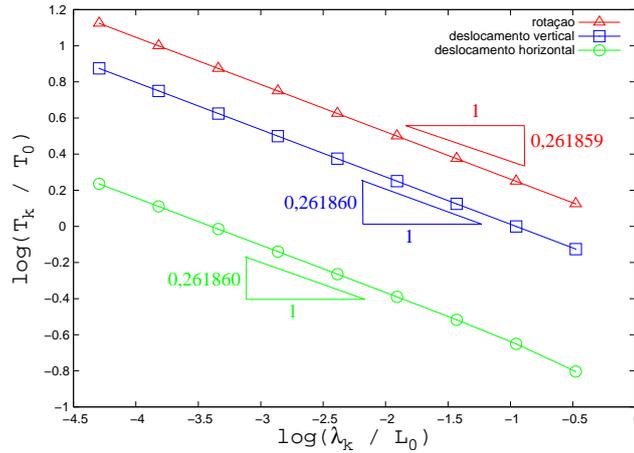


Figura 3.7: Variação do período de vibração com o comprimento dos elementos para a triádica de Koch, com a massa na extremidade variando proporcionalmente ao comprimento total das estruturas. Inclinação das retas que passam pelos pontos correspondentes às iterações mais avançadas.

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{aprox}
Rotação	-0.261859	1.261859
Deslocamento vertical	-0.261860	1.261860
Deslocamento horizontal	-0.261860	1.261860

Tabela 3.2: Dimensões fractais dinâmicas (D_d) para a triádica de Koch com a massa na extremidade variando proporcionalmente ao comprimento total das estruturas e as correspondentes aproximações para as dimensões de auto-similaridade.

Considerando como geometria de referência a quadrática de Koch, cujo processo de formação está na Figura 3.8. Os resultados da variação dos períodos de vibração (T_k/T_0) com o comprimento dos elementos (λ_k/L_0) para as 7 primeiras iterações estão na Figura 3.9. As inclinações das retas que passam pelos dois pontos

correspondentes às iterações mais avançadas (D_d) e suas respectivas aproximações (D_{as}^{aprox}) para a dimensão de auto-similaridade estão na Tabela 3.3.

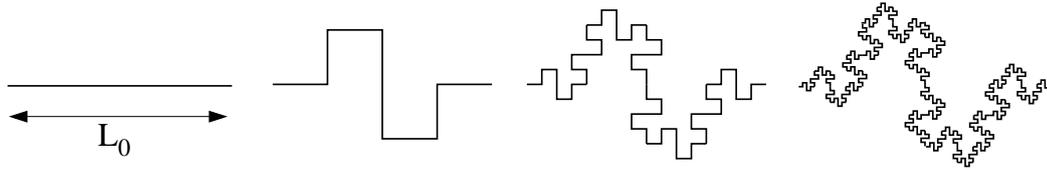


Figura 3.8: Processo de formação da quadrática de Koch.

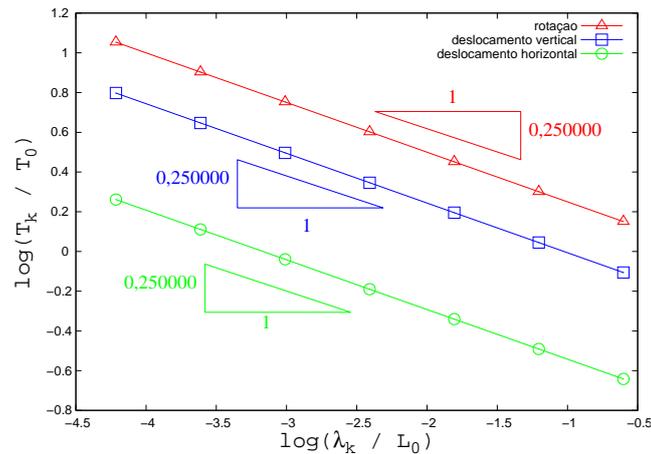


Figura 3.9: Variação do período de vibração com o comprimento dos elementos ao longo das iterações, para a quadrática de Koch. Inclinação das retas que passam pelos pontos correspondentes às iterações mais avançadas.

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{aprox}
Rotação	-0,250000	1,500000
Deslocamento vertical	-0,250000	1,500000
Deslocamento horizontal	-0,250000	1,500000

Tabela 3.3: Inclinações (D_d) das retas que passam pelos dois pontos que correspondem às iterações mais avançadas no gráfico da Figura 3.9. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridades (D_{as}^{aprox}) a partir das equações (3.22) e (3.32).

O valor exato da dimensão de auto-similaridade para a quadrática de Koch pode ser obtida pela expressão (2.14) e fornece como resultado:

$$D_{as} = -\frac{\log 8}{\log 1/4} = 1,5.$$

3.3 Curvas com formação aleatória

Tomemos a curva triádica de Koch, com a geração da geometria de forma aleatória. Isto é, para cada elemento da iteração anterior gera-se quatro elementos, da mesma forma como foi feito para a triádica com geração determinística, porém, o triângulo formado pode ser construído para um lado ou para o outro lado do segmento de reta da iteração anterior, de maneira aleatória. No caso determinístico os triângulos são sempre gerados para o mesmo lado.

3.3.1 Experimentos computacionais

A Figura 3.10 mostra 4 gerações distintas nas 4 primeiras iterações.



Figura 3.10: Exemplo de 4 realizações da triádica de Koch aleatória, cada uma em uma iteração.

Para os experimentos realizados, é importante ressaltar que, a curva na iteração k não teve origem na curva de iteração $k-1$, isto é, são duas gerações aleatórias distintas, em iterações distintas.

Na Figura 3.11 está o resultado de uma realização e na Tabela 3.4 a inclinação das retas que minimizam a soma dos quadrados dos erros da distância entre as retas e os respectivos pontos do gráfico. O gráfico 3.12 mostra como variou a razão

$$D_{as}^{\text{aprox}}/D_{as}.$$

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{aprox}
Rotação	-0.130929	1.261859
Deslocamento vertical	-0.129795	1.259590
Deslocamento horizontal	-0.130555	1.261111

Tabela 3.4: Inclinações (D_d) das retas que minimizam a soma dos quadrados dos erros da distância entre as retas e os pontos correspondentes do gráfico da Figura 3.11. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridade a partir das equações (3.22) e (3.32).

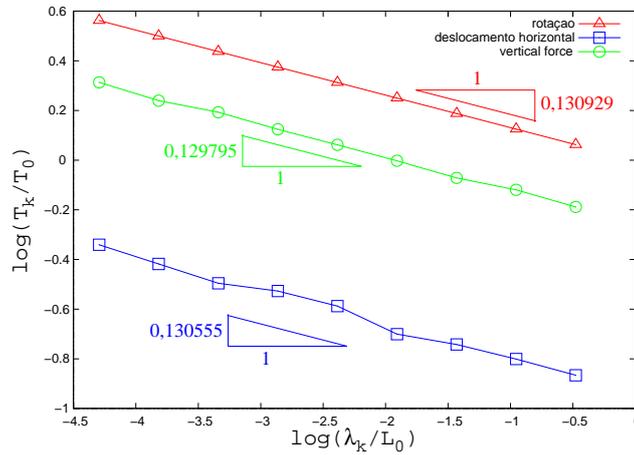


Figura 3.11: Variação do período com o comprimento dos elementos para uma realização do problema de geometria aleatória da triádica de Koch. Inclinações das retas que minimizam a soma dos erros ao quadrado.

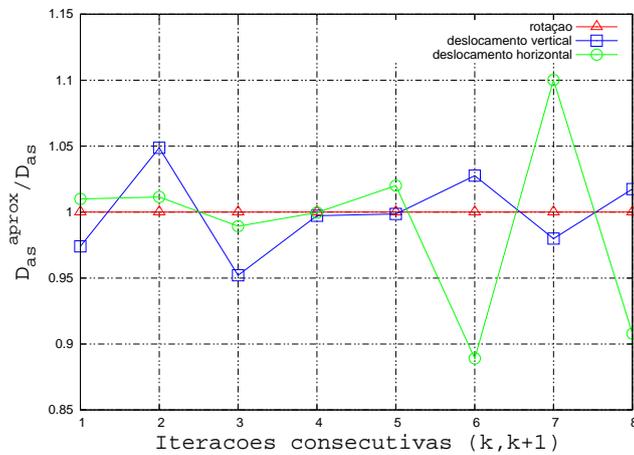


Figura 3.12: Variação do erro a cada duas iterações consecutivas de uma realização do problema da triádica de Koch aleatória.

Para o caso do período natural de vibração na direção da rotação da massa m foi colocado como solicitação externa um momento M . Dessa forma, o esforço interno momento fletor, é constante ao longo da estrutura. Logo, o período que depende da energia interna que por sua vez depende da distribuição do momento interno, dependerá do comprimento total da estrutura. Quando a solicitação é uma força que corresponde aos casos dos períodos de vibração dos deslocamentos horizontal e vertical, a distribuição do momento interno varia linearmente ao longo dos elementos, e depende das ordenadas ou abcissas de cada elemento. Logo, para realizações distintas, no caso do momento, o período é o mesmo pois o comprimento

total das estruturas permanece o mesmo, enquanto que para as forças as abcissas e ordenadas são diferentes em cada realização gerando como resultado energias distintas e conseqüentemente períodos distintos.

As Figuras 3.13(a) e 3.13(b) mostram 5 realizações para o caso da aplicação do momento e da força horizontal. Pelo gráfico nota-se que o resultado para o momento coincide em todas as realizações. Já para o caso da força horizontal, o resultado apresenta oscilações em torno da reta de inclinação D_a .

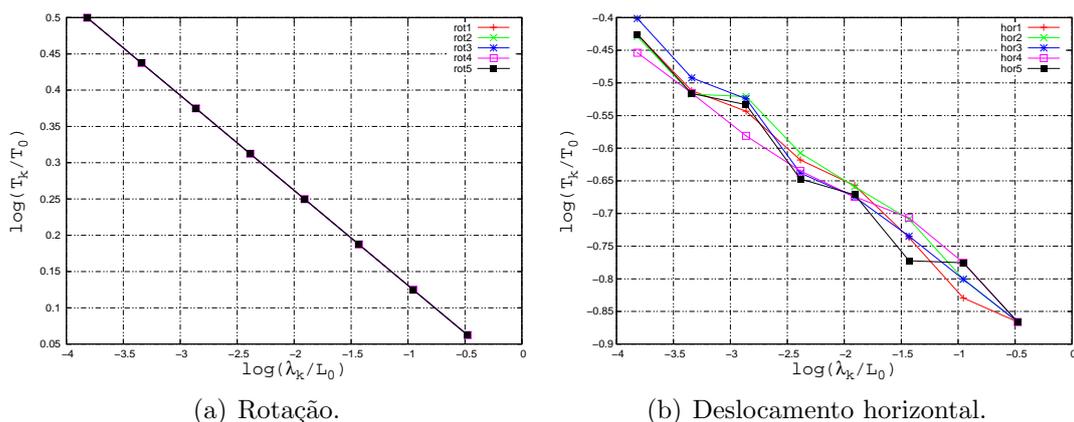


Figura 3.13: Variação do período com o comprimento dos elementos para 5 realizações da triádica de Koch aleatória, para o caso do período de vibração da rotação e do deslocamento horizontal da massa m .

Além da obtenção da dimensão fractal dinâmica, que pode ser útil como aproximação para a dimensão de Hausdorff, nota-se uma informação qualitativa a partir do gráfico 3.13(b). As oscilações mostram que a seqüência de estruturas tiveram a geração da geometria de forma aleatória.

3.4 Problema inverso

Mais potencialmente aplicável a diversos problemas práticos é o problema inverso. Para o problema direto conhecia-se a geometria, impunha-se solicitações externas (forças ou deslocamentos) e determinava-se a resposta (período de vibração). No problema inverso, o desafio é: dada uma curva, com características fractais ou não, deseja-se saber se ela é um fractal ou não e se for, qual é sua dimensão. A idéia básica do problema inverso consiste em obter informações de

seqüências de subconjuntos do conjunto sob estudo. Por exemplo, pode-se obter subconjuntos de uma dada curva da forma como ilustra a Figura 3.14.

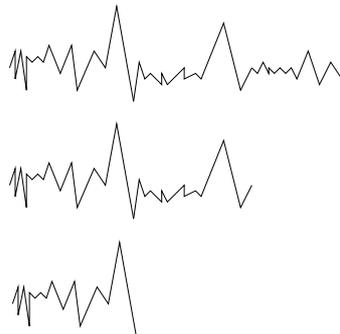


Figura 3.14: Processo de eliminação de uma curva que dá origem a uma seqüência de subconjuntos da estrutura original.

Neste trabalho trataremos os subconjuntos como estruturas, como no problema direto. Similarmente ao problema direto, imporemos restrições e calcularemos a variação do período de vibração da massa na extremidade das “sub-estruturas” na direção de cada grau de liberdade. De posse da variação do período de vibração dessas sub-estruturas com a componente horizontal do comprimento das curvas, deseja-se obter uma caracterização fractal de sua resposta dinâmica.

A Figura 3.15 ilustra o processo de eliminação da triádica de Koch.

Como feito para o problema direto, serão tratados três casos de solicitações externas: momento, força na horizontal e força na vertical.

Após a m -ésima eliminação, a energia de deformação na estrutura, considerando somente a energia elástica devida à ação do momento fletor, é dada por:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_0^{L_{t_m}} \frac{M_m^2(s)}{EI_m} ds \quad (3.33)$$

$$= \frac{1}{2EI_m} \sum_{i=1}^{N_m} \int_0^{\lambda_m} (M_m^{(i-1,i)})^2(s) ds. \quad (3.34)$$

Note-se que o comprimento dos elementos λ_m não é alterado no processo de eliminação, isto é, $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = \dots = \lambda_n$. Será representado então por $\lambda_k = L_0 q^{-k}$.

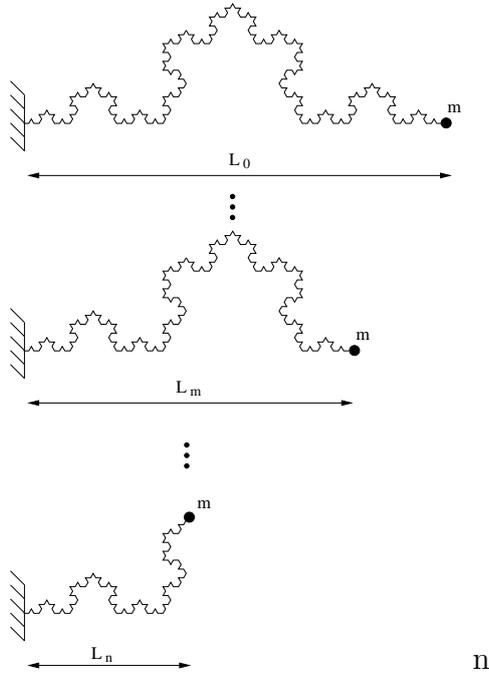


Figura 3.15: Processo de eliminação gerando uma seqüência de “sub-estruturas” da curva inicial.

Sob essas hipóteses, se a única solicitação for o momento, M , pela equação da energia de deformação (3.34), obtém-se:

$$W_m^M = \frac{1}{2EI_m} M^2 N_m \lambda_k.$$

Assim como para o problema direto, o sistema de equações que governa o movimento da massa m é dado pela expressão (3.6). Se $F = (f_\theta(t), 0, 0)$ e $f_\theta(t)$ for dado por (3.16), o período natural de vibração da massa na extremidade da estrutura, para o grau de liberdade rotação, é dado por:

$$T_m^\theta = \frac{2\pi}{w_m^\theta}, \tag{3.35}$$

onde

$$w_m^\theta = \frac{1}{\bar{m}_m (\gamma_{11})_m}, \tag{3.36}$$

e, pelo teorema de Castigliano pode-se obter $(\gamma_{11})_m$ da seguinte forma:

$$\theta_m = \frac{\partial W_m^M}{\partial M} = (\gamma_{11})_m M = \frac{N_m \lambda_k}{EI_m} M. \quad (3.37)$$

Correlacionando (3.35), (3.36) e (3.37), obtém-se o período dado por:

$$(T_m^\theta)^2 = 4\pi^2 \frac{m_m N_m \lambda_k}{EI_m}. \quad (3.38)$$

Dividindo a expressão anterior por um período de referência $(T_0^\theta)^2 = 4\pi^2 \frac{m_0 N_0 \lambda_k}{EI_0}$ obtém-se a seguinte relação adimensional

$$\left(\frac{T_m^\theta}{T_0^\theta}\right)^2 = \frac{m_m}{m_0} \frac{N_m}{N_0} \frac{I_0}{I_m}.$$

Se a massa e o momento de inércia variam de acordo com as seguintes leis de potência

$$m_m = m_0 \left(\frac{N_m}{N_0}\right)^\nu \quad (3.39)$$

e

$$I_m = I_0 \left(\frac{N_m}{N_0}\right)^{-\gamma}, \quad (3.40)$$

de forma que a massa diminua com o comprimento total ao passo que a inércia aumente como o mesmo. Com isso, obtém-se:

$$\left(\frac{T_m^\theta}{T_0^\theta}\right)^2 = \left(\frac{N_m}{N_0}\right)^{\nu+1-\gamma}. \quad (3.41)$$

Por outro lado, como L_m é um subconjunto de L_0 , L_m pode ser obtido através de uma mudança de escala,

$$L_m = b_m L_0. \quad (3.42)$$

A relação entre o número de elementos e a componente do comprimento na horizontal, antes das eliminações é dada por

$$N_0 = \left(\frac{L_0}{\lambda_k} \right)^{D_{\text{as}}} . \quad (3.43)$$

Será assumido que o número de elementos na eliminação m se relaciona com a respectiva componente do comprimento na horizontal da seguinte forma

$$N_m = \left(\frac{L_m}{\lambda_k} \right)^{D_{\text{as}}} . \quad (3.44)$$

que ocorre de fato para um tipo particular de eliminações. No caso da triádica de Koch, quando $b_m = (1/3)^m$. Substituindo (3.42) em (3.44),

$$N_m = \left(\frac{L_0 b_m}{\lambda_k} \right)^{D_{\text{as}}} . \quad (3.45)$$

Portanto (3.45) sobre (3.43) fornece

$$\frac{N_m}{N_0} = (b_m)^{D_{\text{as}}} . \quad (3.46)$$

Substituindo (3.46) em (3.41), obtém-se o período de vibração normalizado como função de b_m ,

$$\log \left(\frac{T_m^\theta}{T_0^\theta} \right) = \frac{D_{\text{as}}}{2} (\nu + 1 - \gamma) \log b_m . \quad (3.47)$$

Se a massa e o momento de inércia não variam com as eliminações ($\nu = \gamma = 0$), a expressão (3.47) é dada por:

$$\log \left(\frac{T_m^\theta}{T_0^\theta} \right) = \frac{D_{\text{as}}}{2} \log b_m . \quad (3.48)$$

A energia de deformação armazenada na estrutura devido à flexão, para o caso da aplicação da força horizontal, equação (3.34), é dada por:

$$W_m = \frac{1}{2EI_m} \sum_{i=1}^{N_m} \int_0^{\lambda_k} (M_m^{(i-1,i)})^2 (s) ds,$$

e $M_m^{(i-1,i)}$ pode ser expressado na seguinte forma:

$$M_m^{(i-1,i)} = H \left[y_m^{(i-1)} + \left(\frac{y_m^{(i)} - y_m^{(i-1)}}{\lambda_k} \right) s \right].$$

Então,

$$W_m = \frac{1}{2EI_m} \sum_{i=1}^{N_m} \int_0^{\lambda_k} H^2 \left[y_m^{(i-1)} + \left(\frac{y_m^{(i)} - y_m^{(i-1)}}{\lambda_k} \right) s \right]^2 ds \quad (3.49)$$

$$= \frac{H^2 \lambda_k h_0^2}{2EI_m} \sum_{i=1}^{N_m} \frac{1}{3} \left[\frac{\left(y_m^{(i-1)} \right)^2}{h_0^2} + \frac{y_m^{(i-1)} y_m^{(i)}}{h_0^2} + \frac{\left(y_m^{(i)} \right)^2}{h_0^2} \right] \quad (3.50)$$

$$= \frac{H^2 \lambda_k h_0^2 N_m \Omega_m^u}{2EI_m}, \quad (3.51)$$

onde

$$\Omega_m^u = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_m^{(i)},$$

e

$$\alpha_m^{(i)} = \frac{1}{3} \left[\frac{\left(y_m^{(i-1)} \right)^2}{h_0^2} + \frac{y_m^{(i-1)} y_m^{(i)}}{h_0^2} + \frac{\left(y_m^{(i)} \right)^2}{h_0^2} \right].$$

Pelo teorema de Castigliano,

$$u = \frac{\partial W_m}{\partial H} = \frac{H \lambda_k N_m h_0^2}{EI_m} \Omega_m^u. \quad (3.52)$$

Tomando $F = (0, f_u(t), 0)$ e $f_u(t)$ dada por (3.23) na expressão da dinâmica da massa m , a equação do movimento na direção u corresponde a um oscilador harmônico simples unidimensional, com período natural de vibração dado por:

$$T_m^u = \frac{2\pi}{\omega_m^u}$$

onde

$$w_m^u = \frac{1}{m_m(\gamma_{22})_m}$$

e

$$(\gamma_{22})_m = \frac{N_m h_0^2}{EI_m} \lambda_k \Omega_m^u.$$

Então,

$$(T_m^u)^2 = \frac{4\pi m_m \lambda_k N_m h_0^2 \Omega_m^u}{EI_m}.$$

Dividindo por um período de referência $(T_0^u)^2 = \frac{4\pi^2 m_0 \lambda_k N_0 h_0^2 \Omega_0^u}{EI_0}$, tem-se:

$$\left(\frac{T_m^u}{T_0^u}\right)^2 = \frac{m_m}{m_0} \frac{N_m}{N_0} \frac{I_0}{I_m} \frac{\Omega_m^u}{\Omega_0^u}. \quad (3.53)$$

Se a massa e o momento de inércia variam de acordo com as equações (3.39) e (3.40), então a equação (3.53) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\left(\frac{T_m^u}{T_0^u}\right)^2 = \left(\frac{N_m}{N_0}\right)^{\nu+1-\gamma} \frac{\Omega_m^u}{\Omega_0^u} = \left(\frac{N_m}{N_0}\right)^{\nu+1-\gamma} \frac{L_m^2}{L_0^2} R_{m,0}^u, \quad (3.54)$$

onde

$$R_{m,0}^u = \frac{\Omega_m^u}{L_m^2} \frac{L_0^2}{\Omega_0^u}. \quad (3.55)$$

Usando as relações (3.46) e (3.42) em (3.54), obtém-se

$$\left(\frac{T_m^u}{T_0^u}\right)^2 = b_m^{D_{as}(\nu+1-\gamma)} b_m^2 R_{m,0}^u.$$

Portanto,

$$\log\left(\frac{T_m^u}{T_0^u}\right) = \left[1 + \frac{D_{as}}{2}(\nu+1-\gamma)\right] \log b_m + \frac{1}{2} \log R_{m,0}^u. \quad (3.56)$$

Se a massa e o momento de inércia são mantidos constantes, a equação (3.56) é dada por:

$$\log \left(\frac{T_m^u}{T_0^u} \right) = \left[1 + \frac{D_{as}}{2} \right] \log b_m + \frac{1}{2} \log R_{m,0}^u. \quad (3.57)$$

De maneira análoga, obtemos o período de vibração do deslocamento na vertical:

$$\log \left(\frac{T_m^v}{T_0^v} \right) = \left[1 + \frac{D_{as}}{2} (\nu + 1 - \gamma) \right] \log b_m + \frac{1}{2} \log R_{m,0}^v. \quad (3.58)$$

onde T_m^v e T_0^v são os períodos de vibração na direção vertical, na m -ésima eliminação e para a estrutura antes das eliminações, respectivamente. $R_{m,0}^v$ é dado por

$$R_{m,0}^v = \frac{\Omega_m^v L_0^2}{L_m^2 \Omega_0^v}, \quad (3.59)$$

e

$$\Omega_m^v = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \frac{1}{3} \left[\frac{\left(x_k^{(i-1)} \right)^2}{h_0^2} + \frac{x_k^{(i-1)} x_k^{(i)}}{h_0^2} + \frac{\left(x_k^{(i)} \right)^2}{h_0^2} \right].$$

3.4.1 Experimentos computacionais

A curva triádica de Koch foi também utilizada para testar a análise desenvolvida, agora para o problema inverso. A Figura 3.16 apresenta os resultados com $b_m = (1/3)^m$ para os três graus de liberdade da massa m_k , rotação, deslocamento horizontal e deslocamento vertical, tendo como estrutura inicial a 9ª iteração do processo de geração da triádica de Koch.

A massa foi considerada constante e a energia elástica considerada advém apenas do momento fletor.

A Tabela 3.5 mostra as inclinações das retas que minimizam a soma dos quadrados do erros e suas respectivas aproximações para a dimensão de auto-similaridade através das expressões (3.48), (3.57) e (3.58).

A Figura 3.17 apresenta os resultados para $b_m = (1/2)^m$. A Tabela 3.6 mostra as inclinações das retas que minimizam a soma dos quadrados dos erros e

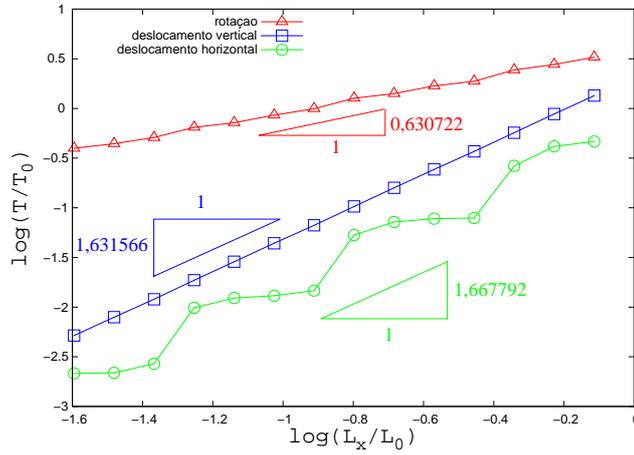


Figura 3.16: Variação do período de vibração com a componente do comprimento da curva na horizontal para o problema inverso, para $b_m = (1/1, 3)^m$.

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{aprox}
Rotação	0.632631	1.265262
Deslocamento vertical	1.631077	1.262155
Deslocamentoa horizontal	1.635158	1.270316

Tabela 3.5: Inclinações (D_d) das retas que minimizam a soma do erro ao quadrado da distância entre os pontos dos gráficos e suas respectivas aproximações lineares no gráfico da Figura 3.16. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridade (D_{as}^{aprox}) utilizando as equações (3.48), (3.57) e (3.58).

suas respectivas aproximações, relativas à Figura 3.17.

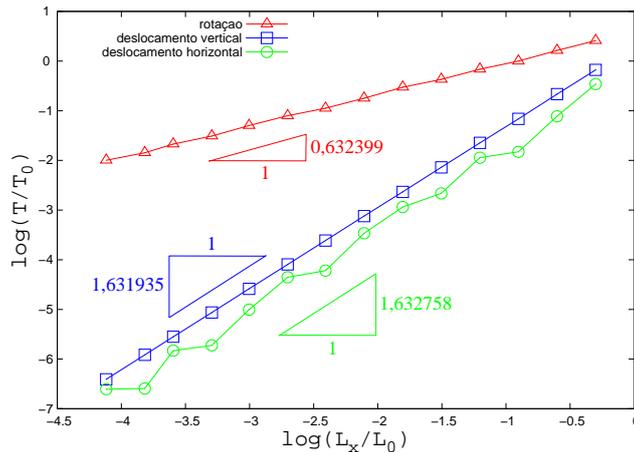


Figura 3.17: Variação do período de vibração com a componente do comprimento da curva na horizontal, com $b_m = (1/2)^m$.

A Figura 3.18 mostra como varia o período com a componente horizontal do comprimento ao longo das iterações para a massa variando proporcionalmente com

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{aprox}
Rotação	0.627073	1.254146
Deslocamento vertical	1.631130	1.262261
Deslocamento horizontal	1.622202	1.244404

Tabela 3.6: Inclinações (D_d) das retas que minimizam o erro quadrático da distância entre os pontos dos gráficos e suas respectivas aproximações lineares no gráfico da Figura 3.17. Aproximação para o valor da dimensão fracionária (D_{as}^{aprox}).

o comprimento total das estruturas, para $b_m = (1/1, 3)^m$. A Tabela 3.7 apresenta as dimensões fractais dinâmicas obtidas com as inclinações das retas que minimizam a soma dos quadrados dos erros; suas respectivas aproximações para a dimensão de auto-similaridade são obtidas através das expressões (3.47), (3.56) e (3.58), com $\nu = 1$ e $\gamma = 0$.

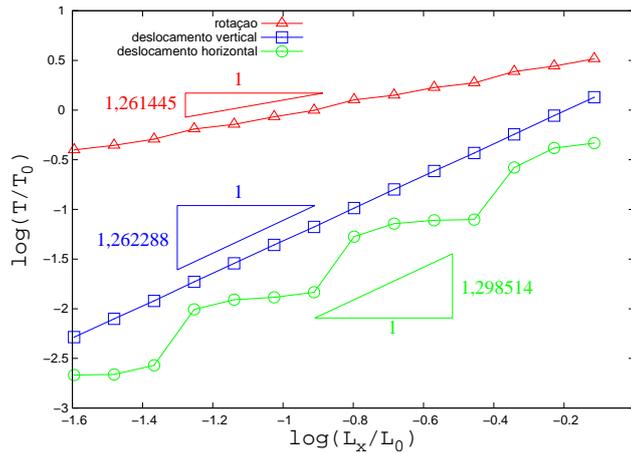


Figura 3.18: Variação do período de vibração com a componente horizontal do comprimento das estruturas formadas com a triádica de Koch, com a massa na extremidade variando proporcionalmente ao comprimento total das estruturas.

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{aprox}
Rotação	1.261445	1.261445
Deslocamento vertical	2.262288	1.262288
Deslocamento horizontal	2.298514	1.298514

Tabela 3.7: Dimensões fractais dinâmicas para o problema inverso da triádica de Koch com a massa na extremidade variando proporcionalmente ao comprimento total das estruturas e as correspondentes aproximações para as dimensões de auto-similaridade.

A análise desenvolvida considerou a energia elástica somente devida ao esforço momento fletor. Pela facilidade de implementação computacional para incluir os outros dois esforços, esforço cortante e esforço normal, apresentamos os resultados obtidos adicionando o esforço cortante, veja Figura 3.19, e adicionando os esforços cortante e normal, veja Figura 3.20. As eliminações seguiram a seguinte regra $L_m = L_{m-1}/1, 3$, ou, equivalentemente, $b_m = (1/1, 3)^m$. A massa foi considerada constante.

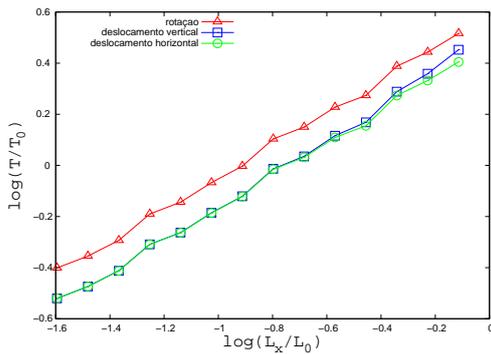


Figura 3.19: Variação do período com a componente horizontal do comprimento, considerando a energia elástica armazenada devido ao momento fletor e ao esforço cortante.

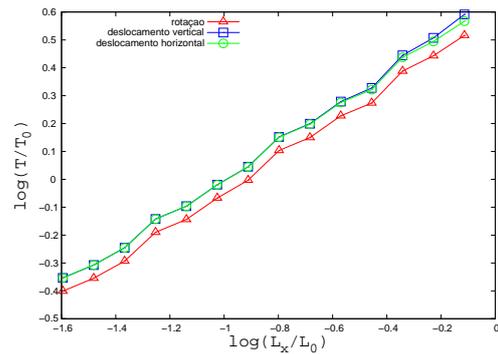


Figura 3.20: Variação do período com a componente horizontal do comprimento, considerando a energia elástica armazenada devido ao momento fletor, ao esforço cortante e ao esforço normal.

Vamos comparar os resultados das Figuras 3.19 e 3.20 com a Figura 3.16. O resultado para a solicitação do momento não se altera, pois quando a solicitação é somente um momento, o único esforço que se propaga ao longo da estrutura é o momento fletor. A diferença existe para os casos de solicitação de forças, que produzem uma distribuição de esforços internos — momento fletor, esforço cortante e esforço normal — ao longo da estrutura. É interessante notar que os períodos T_k/T_0 para os três casos variam com os comprimentos na horizontal L_x/L_0 de forma muito semelhante quando inclui-se os esforços cisalhante e normal.

Considerando a geometria da curva quadrática de Koch na sétima iteração, a Figura 3.16 apresenta os resultados para $b_m = (1/1, 3)^m$ com a energia devida ao momento fletor, somente.

A Tabela 3.8 mostra as inclinações das retas que minimizam a soma dos

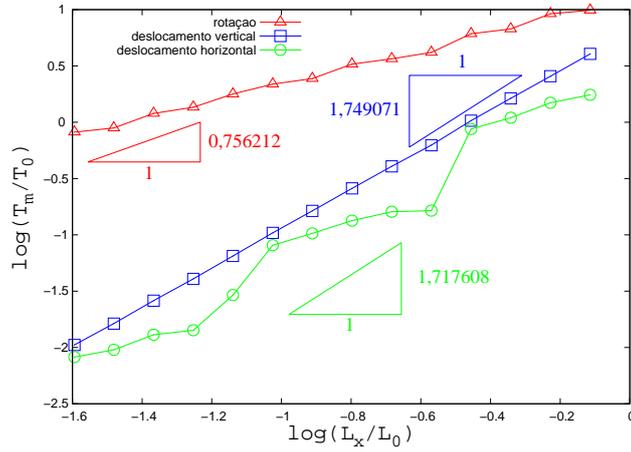


Figura 3.21: Variação do período de vibração com a componente do comprimento da curva na horizontal para o problema inverso, tomando como geometria base a quadrática de Koch, com $b_m = (1/1, 3)^m$.

quadrados dos erros e suas respectivas aproximações para a dimensão de auto-similaridade através das expressões (3.48), (3.57) e (3.58).

Solicitação	D_d	D_{as}^{aprox}
Momento	0.756212	1.512425
Força na vertical	1.749071	1.498143
Força na horizontal	1.717608	1.435216

Tabela 3.8: Inclinações (D_d) das retas que minimizam o erro quadrático da distância entre os pontos dos gráficos e suas respectivas aproximações lineares no gráfico da Figura 3.21. Aproximação para o valor da dimensão de auto-similaridade (D_{as}^{aprox}) utilizando as equações (3.48), (3.57) e (3.58).

Capítulo 4

Fractais Mistos

Neste capítulo apresenta-se uma nova forma de gerar fractais. Usualmente utiliza-se somente um gerador — estrutura base repetida sobre cada elemento da iteração anterior para dar origem à iteração seguinte — iterativamente para dar origem a um fractal. Pode-se gerar um fractal misto utilizando mais de um gerador no processo de geração do fractal.

Vamos criar um fractal misto alternando dois geradores, o gerador da triádica de Koch e o gerador da quadrática de Koch. Isto é, a primeira iteração usará como gerador a triádica de Koch, a segunda iteração usará como gerador a quadrática de Koch e assim por diante alternando a triádica e a quadrática, será obtido um fractal misto. A Figura 4.1 mostra as quatro primeiras iterações do fractal misto triádica-quadrática de Koch.

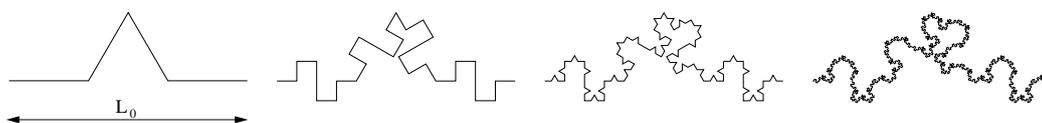


Figura 4.1: Processo de geração do fractal misto triádica-quadrática de Koch.

Vamos definir uma dimensão fractal para os fractais mistos baseada na dimensão de auto-similaridade. Vamos considerar a família de fractais tratada neste trabalho, onde o número de elementos de comprimento $\lambda_k = L_0 q^{-k}$ na iteração k é dado por $N_k = p^k$, com p e q inteiros. A dimensão de auto-similaridade para esta família pode ser dada pela seguinte expressão:

$$D_{\text{as}} = -\frac{\log N_k}{\log \left(\frac{\lambda_k}{L_0} \right)}.$$

Então, a dimensão fractal de auto-similaridade para um fractal misto, que alterne entre a triádica e a quadrática de Koch, será definida da seguinte forma:

$$D_{\text{as}}^{(tq)} = -\frac{\log N_k^{(tq)}}{\log \left(\frac{\lambda_k^{(tq)}}{L_0} \right)}, \quad (4.1)$$

onde o número de elementos na iteração k é dado por:

$$N_k^{(tq)} = (p^{(t)})^i (p^{(q)})^j, \quad (4.2)$$

e o comprimento dos elementos é dado por:

$$\lambda_k^{(tq)} = (q^{(t)})^{-i} (q^{(q)})^{-j}. \quad (4.3)$$

$p^{(t)}$ é o número de elementos do gerador da triádica de Koch e $p^{(q)}$ é o número de elementos do gerador da quadrática de Koch. O comprimento base é reduzido pelos fatores $q^{(t)}$ e $q^{(q)}$ para a triádica e para a quadrática, respectivamente. Os valores i e j são dados por:

$$\begin{aligned} i &= \text{INT} \left[\frac{k+1}{2} \right], \\ j &= \text{INT} \left[\frac{k}{2} \right], \end{aligned}$$

onde a função $\text{INT}[x]$ retorna a parte inteira do número racional x . As relações (4.2) e (4.3) podem ser escritas de outra forma:

$$\log N_k^{(tq)} = i \log p^{(t)} + j \log p^{(q)} \quad (4.4)$$

$$\log \left(\frac{\lambda_k^{(tq)}}{L_0} \right) = - (i \log q^{(t)} + j \log q^{(q)}) . \quad (4.5)$$

Então, utilizando a equação (4.1) e notando que $k = i + j$, a dimensão fractal do fractal misto triádica-quadrática de Koch pode ser obtida:

$$D_k^{(tq)} = \frac{k \log p^{(t)} + \text{INT}(k/2) (\log p^{(q)} - \log p^{(t)})}{k \log q^{(t)} + \text{INT}(k/2) (\log q^{(q)} - \log q^{(t)})} . \quad (4.6)$$

Note-se que essa dimensão depende da iteração k . Vamos estudar o comportamento dessa função. Para $k = 1$,

$$D_1^{(tq)} = D^{(t)} .$$

Para as iterações pares,

$$D^{(tq)} = \frac{\log p^{(t)} + \log p^{(q)}}{\log q^{(t)} + \log q^{(q)}} . \quad (4.7)$$

Para as iterações ímpares e $k > 1$,

$$D_k^{(tq)} = \frac{(k-1) \log p^{(t)} + (k-2) \log p^{(q)}}{(k-1) \log q^{(t)} + (k-2) \log q^{(q)}} . \quad (4.8)$$

Quando $k \rightarrow \infty$ a expressão (4.8) tende para a expressão (4.7), convergindo para uma dimensão única $D^{(tq)}$. Além disso, reescrevendo a expressão (4.7) de uma outra forma temos:

$$D^{(tq)} = \frac{D^{(t)} + (1 + \epsilon) D^{(q)}}{1 + (1 + \epsilon)} \approx \frac{1}{2} (D^{(t)} + D^{(q)}) \quad \text{para} \quad |\epsilon| \ll 1,$$

onde $\epsilon = \log q^{(q)} / \log q^{(t)} - 1$.

A dimensão fracionária do fractal misto triádica-quadrática, de acordo com

a equação (4.7) é:

$$D^{(tq)} \approx 1.39471. \quad (4.9)$$

4.1 Experimentos computacionais

4.1.1 Problema direto

Vamos estudar o comportamento dinâmico da sequência mista tratada como uma sequência de estruturas com uma massa na extremidade, da mesma forma como foi feito para a triádica e a quadrática de Koch no capítulo anterior. Nos resultados a seguir foi considerada massa constante, e somente a energia devida ao momento fletor. As Figuras 4.2 e 4.3 apresentam as variações dos períodos naturais de vibração com o comprimento dos elementos, das iterações ímpares e das iterações pares, respectivamente. As tabelas 4.1 e 4.2 apresentam as dimensões fractais dinâmicas, obtidas com a inclinação das retas que minimizam a soma dos quadrados dos erros, onde os erros são dados pela distância entre os pontos e as retas correspondentes. As aproximações para a dimensão fractal de auto-similaridade para o fractal misto utilizando a expressão $D_{as}^{aprox} = 1 - 2D_d$ obtida das expressões (3.22) e (3.32) são também apresentadas.

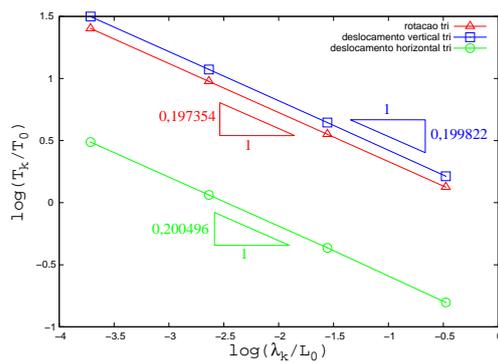


Figura 4.2: Variação do período com o comprimento dos elementos para as iterações ímpares da curva mista triádica-quadrática de Koch.

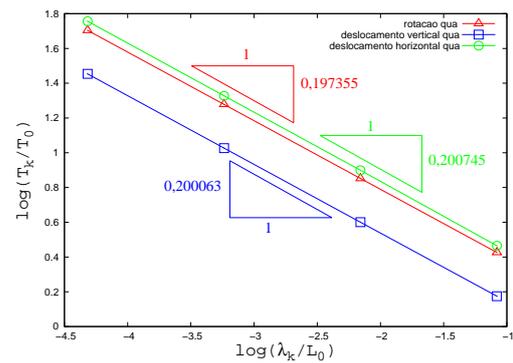


Figura 4.3: Variação do período com o comprimento dos elementos para as iterações pares da curva mista triádica-quadrática de Koch.

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{prox}
Rotação	-0.197354	1.394708
Desl. vertical	-0.199822	1.399644
Desl. horizontal	-0.200496	1.400992

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{prox}
Rotação	-0.197355	1.394710
Desl. vertical	-0.200063	1.400126
Desl. horizontal	-0.200745	1.401490

Tabela 4.1: Dimensão fractal dinâmica para as iterações ímpares da curva mista triádica-quadrática, obtida da inclinação da reta que minimiza a soma dos quadrados dos erros na Figura 4.2. Aproximações para a dimensão de auto-similaridade

Tabela 4.2: Dimensão fractal dinâmica para as iterações pares da curva mista triádica-quadrática, obtida da inclinação da reta que minimiza a soma dos quadrados dos erros na Figura 4.3. Aproximações para a dimensão de auto-similaridade

4.1.2 Problema inverso

Para o problema inverso do fractal misto triádica-quadrática de Koch considerando a massa constante, a estrutura na 8ª iteração, a energia armazenada somente pelo momento e as eliminações seguindo a seguinte regra $L_i = L_{i-1}/2, 0$ ou equivalentemente, $b_i = L_0/(2, 0)^i$, obtemos o resultado da Figura 4.4.

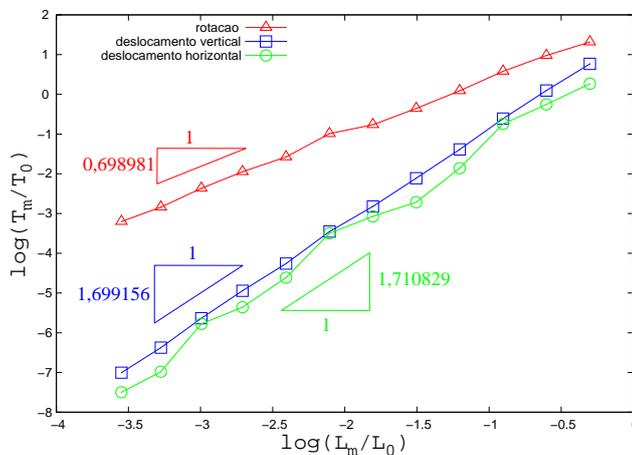


Figura 4.4: Variação do período com o comprimento da projeção horizontal da curva para 12 subconjuntos na oitava iteração do fractal misto triádica-quadrática, com $L_i = L_{i-1}/2$ isto é, $b_i = 1/2^i$.

As inclinações das retas que minimizam a soma dos quadrados dos erros entre as retas e seus pontos correspondentes, D_d e suas aproximações para a dimensão de auto-similaridade D_{as}^{prox} estão na tabela 4.3.

Grau de liberdade	D_d	D_{as}^{aprox}
Rotação	0.698981	1.397961
Deslocamento vertical	1.699156	1.398312
Deslocamento horizontal	1.710829	1.421658

Tabela 4.3: Dimensões fractais dinâmicas e suas respectivas aproximações para a dimensão de auto-similaridade para o problema inverso do fractal misto triádica-quadrática de Koch.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Essencialmente a dimensão fractal dinâmica é vista sob dois pontos de vista, que foram chamados de problema direto e problema inverso. Dado um processo iterativo de formação de um fractal, o problema direto consiste em tratar um número suficientemente grande de iterações como estruturas e obter a relação entre o período de vibração da massa colocada na extremidade da estrutura e o comprimento dos elementos na iteração correspondente, para um certo conjunto de restrições. Já o problema inverso consiste em: dada uma iteração suficientemente representativa do processo de formação de um fractal, através de eliminações de partes desse conjunto e tratando os sub-conjuntos obtidos como estruturas, obtemos como o período de vibração da massa colocada na extremidade dessas estruturas varia com a componente horizontal do comprimento da estrutura, para um certo conjunto de restrições.

A análise desenvolvida, assumindo a estrutura como elástica e linear e considerando somente a energia armazenada pelo momento fletor, mostrou que para a família sob estudo, de curvas auto-similares contidas no plano onde o número de elementos de comprimento $\lambda_k = L_0 q^{-k}$ é dado por $N_k = p^k$, com p e q inteiros, a dimensão fractal dinâmica pode ser relacionada à dimensão de auto-similaridade. Isso acontece tanto para o problema direto quanto para o problema inverso. Os resultados experimentais comprovaram a análise e se mostraram ótimas aproximações para a dimensão de auto-similaridade.

Foi explorada uma nova forma de gerar fractais, onde se usa mais de um gerador no processo de geração do fractal, dando origem aos chamados fractais mistos. Foi definida uma dimensão fractal para esses fractais e os resultados dos experimentos computacionais também estão de acordo com a análise. Os fractais mistos podem representar objetos naturais onde, para um determinado intervalo de escalas tem-se uma caracterização fractal e para outro intervalo de escalas tem-se outra caracterização fractal.

A análise considerando todas as formas energias elásticas não foi desenvolvida mas, os experimentos computacionais mostraram que se forem consideradas todas as energias elásticas, os pontos do gráfico $\log(T_k/T_0) \times \log(L_x/L_0)$, para a aplicação das forças têm comportamento qualitativo semelhante ao comportamento do gráfico correspondente à aplicação do momento.

O problema direto com geometria gerada de forma aleatória mostrou que além de fornecer uma boa aproximação para a dimensão de auto-similaridade é possível, através de algumas realizações do experimento, dizer se o fractal tem formação geométrica aleatória ou não.

Existe uma forma particular de eliminações em que os problemas direto e inverso são equivalentes. Para o caso da triádica de Koch, isso ocorre se $b_m = (1/3)^m$. A principal hipótese a ser questionada é (3.44), que é válida para o caso da triádica de Koch com $b_m = (1/3)^m$. Porém, seguindo outras leis para as eliminações, pode-se ter mais de uma estrutura possível para o mesmo L_m . Um do resultado de destaque é que mesmo os cortes com diferentes valores de b_m trazem boas aproximações para as dimensões fractais de auto-similaridade.

Outro ponto importante é a caracterização fractal de propriedades físicas.

Para essa nova abordagem dinâmica, pode-se concluir que o valor da dimensão não é único. Existe mais de um valor para a dimensão dinâmica. A quantidade de dimensões é igual ao número de graus de liberdade considerados. Ainda está em aberto a relação formal entre essas dimensões dinâmicas. Entretanto, quando são consideradas todas as formas de energia elástica, as três dimensões coincidem.

Uma idéia ainda inexplorada é colocar mais massas sobre a estrutura a fim de obter um espectro de informação ainda mais amplo, que pode ser útil no caso de multifractais.

A técnica apresentada abre caminho para a obtenção de dimensões fractais através de experimentos físicos em laboratório.

Por enquanto só foi abordada uma família simples de fractais mas, acreditamos que a extensão dessa técnica é possível e trará mais resultados interessantes. Também acreditamos que a extensão para curvas no espaço trará resultados similares.

Um outro desafio é a caracterização de superfícies fractais. Uma possibilidade para obter informações de superfícies fractais é movimentar um sistema massa mola sobre a superfície em determinada direção, e a com o período de vibração extrair informações sobre a superfície.

Analogias entre as leis físicas permitem o desenvolvimento de teorias e experimentos similares em outras áreas. O desenvolvimento pode ser alterado, por exemplo, para uma abordagem ainda mais simples que a abordagem dinâmica, baseando-se na propriedade flexibilidade da estrutura. Se a flexibilidade for calculada para cada elemento de uma sequência fracionária incluída na família tratada, da mesma forma como foi feito para o período, pode-se obter uma relação similar fornecendo resultados semelhantes. Podemos expandir essa idéia e utilizá-la em outras áreas, como a de meios porosos, onde a variável que fornecerá a dimensão é a permeabilidade; para a eletricidade, onde a variável será a resistência elétrica; para a termodinâmica e assim por diante. A essência da dimensão fractal dinâmica está na variação dos momentos de ordem arbitrária das curvas fractais.

Referências Bibliográficas

M. Barnsley. **Fractals Everywhere**. Academic Press, Inc., primeira edição edição, 1988.

J. B. Bassingthwaite, L. S. Liebovitch, e B. J. West. **Fractal Physiology**. Oxford University Press, primeira edição edição, 1994.

G. A. Edgar. **Measure, Topology and Fractal Geometry**. Springer-Verlag New York Inc., primeira edição edição, 1990.

K. Falconer. **Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications**. John Wiley & Sons, primeira edição edição, 1990.

J. Feder. **Fractals**. Plenum Press, segunda edição edição, 1988.

J. Gao e Z. Xia. Fractals in physical geography. **Progress in physical geography**, 20:178–191, 1996.

J. F. Gouyet. **Physics and Fractal Structures**. Springer-Verlag and Masson, primeira edição edição, 1996.

P. R. Halmos. **Measure Theory**. Van Nostrand, primeira edição edição, 1950.

T. Kleszczweski, W. Rutkiewicz, E. Kleszczewska, e B. M. Modzelewska. The fractal analysis of the eyeball movement in patients with diagnosed schizophrenia. In **Proceedings of the 22nd Annual EMBS International Conference**, páginas 3060–3063, Chicago IL, 2000.

B. B. Mandelbrot. **Les Objets Fractals**. Flammarion, quarta edição edição, 1975.

- B. B. Mandelbrot. **The Fractal Geometry of Nature**. W. H. Freeman and Company, terceira edição edição, 1977.
- L. Meirovitch. **Elements of Vibration Analysis**. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., primeira edição edição, 1975.
- J. T. Oden. **Mechanics of Elastic Structures**. McGraw-Hill Inc., primeira edição edição, 1967.
- Revista Ciência Hoje. A matemática do câncer, Novembro 2006. vol. 39, n. 232, p. 232-233.
- L. F. Richardson. The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. **General Systems Yearbook**, 6:139–187, 1962.
- W. G. Rothschild. **Fractals in Chemistry**. Hardcover, 1998.
- J. C. Süssekind. **Curso de Análise Estrutural - Vol. 1**. Editora Globo, primeira edição edição, 1977.
- V. K. Yeragani, V. Pesce, A. Jayaraman, e S. Roose. Major depression with ischemic heart disease: Effects of paroxetine and nortriptyline on long-term heart rate variability measures. **Dynamical Systems and Control**, 52:418–429, 2002.

Apêndice A

Proposição. *Para a família de estruturas onde $N_k = p^k$ e $\lambda_k = L_0 q^{-k}$, o gráfico de $\log(T_k^u/T_0) \times \log(\lambda_k/L_0)$ tende à reta de inclinação D_d , assintoticamente.*

Prova. Podemos escrever:

$$Y = \frac{1}{2}(1 - D)X + \frac{1}{2} \log \Omega_k^u$$

onde $Y = \log(T_k^u/T_0)$ e $X = \log(\lambda_k/L_0)$. Vamos mostrar que $\frac{d}{dX}(\log \Omega_k^u) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Dessa forma, quando $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{2}(1 - D).$$

Então:

$$\frac{d}{dX}(\log \Omega_k^u) = \frac{1}{\Omega_k^u} \frac{d\Omega_k^u}{dX} = \frac{1}{\Omega_k^u} \frac{d\Omega_k^u}{d\lambda_k} \frac{d\lambda_k}{dX} \quad (\text{A.1})$$

mas,

$$\frac{dX}{d\lambda_k} = \frac{d}{d\lambda_k} \left(\log \frac{\lambda_k}{L_0} \right) = \frac{1}{L_0} \frac{L_0}{\lambda_k} = \frac{1}{\lambda_k}$$

Pela expressão de Ω_k^u ,

$$\Omega_k^u = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{1}{3} \left[\left(z_k^{(i-1)} \right)^2 + z_k^{(i-1)} z_k^{(i)} + \left(z_k^{(i)} \right)^2 \right]$$

podemos reescrever:

$$\Omega_k^u = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \alpha_k^{(i)}$$

e notando que $|z_k^{(j)}| = |y_k^{(j)}/h_0| \leq 1$ e $\alpha_k^{(i)} \leq 1$, temos:

$$\Omega_k^u \leq \frac{1}{N_k} N_k [\max(\alpha_k)] = [\max(\alpha_k)] \leq 1$$

Vamos agora mostrar que:

$$\Delta\Omega_k^u = \Omega_{k+1} - \Omega_k = \lambda_k R_1(k, k+1) + \lambda_k^2 R_2(k, k+1).$$

onde R_1 e R_2 são finitos quando $k \rightarrow \infty$.

A equação (3.28) pode ser reescrita como

$$\alpha_k^{(i)} = \left(\bar{z}_k^{(i-1,i)}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\Delta z_k^{(i-1,i)}\right)^2 \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\bar{z}_k^{(i-1,i)} = \frac{1}{2} \left(z_k^{(i-1)} + z_k^{(i)}\right)$$

e

$$\Delta z_k^{(i-1,i)} = \frac{1}{2} \left(z_k^{(i)} - z_k^{(i-1)}\right).$$

Introduzindo a equação (A.2) na expressão de Ω_k^u , (3.27), obtém-se:

$$\Omega_k^u = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \left[\left(\bar{z}_k^{(i-1,i)}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\Delta z_k^{(i-1,i)}\right)^2 \right] \quad (\text{A.3})$$

Note-se que $|\bar{z}_k^{(i-1,i)}| \leq 1$ e $|\Delta z_k^{(i-1,i)}| \leq 1$. Pela Figura A.1 tem-se que:

$$\Delta y_k^{(i-1,i)} = \gamma_k^{(i-1,i)} \lambda_k \quad \text{com} \quad |\gamma_k^{(i-1,i)}| \leq 1.$$

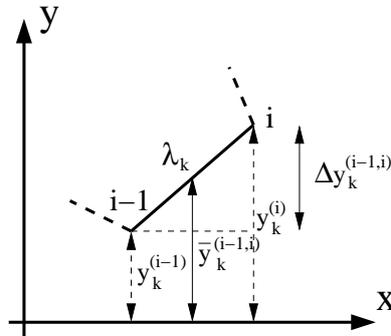


Figura A.1: Média e diferença entre ordenadas $y_k^{(i-1)}$ e $y_k^{(i)}$.

Então:

$$\Delta z_k^{(i-1,i)} = \frac{1}{2h_0} \Delta y_k^{(i-1,i)} = \frac{1}{2h_0} \gamma_k^{(i-1,i)} \lambda_k = \beta_k^{(i-1,i)} \lambda_k \quad (\text{A.4})$$

Introduzindo (A.4) em (A.3)

$$\Omega_k^u = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \left[\left(\bar{z}_k^{(i-1,i)} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\beta_k^{(i-1,i)} \lambda_k \right)^2 \right] \quad (\text{A.5})$$

Em forma vetorial podemos reescrever na forma

$$\Omega_k^u = \frac{1}{N_k} \left(\bar{\mathbf{z}}_k^T \bar{\mathbf{z}}_k + \frac{1}{3} \lambda_k^2 \beta_k^T \beta_k \right) \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\bar{\mathbf{z}}_k^T = \left[\bar{z}_k^{(0,1)} \bar{z}_k^{(1,2)} \dots \bar{z}_k^{(i-1,i)} \dots \bar{z}_k^{(N_k-1,N_k)} \right]$$

e

$$\beta_k^T = \left[\beta_k^{(0,1)} \beta_k^{(1,2)} \dots \beta_k^{(i-1,i)} \dots \beta_k^{(N_k-1,N_k)} \right]$$

De forma similar, o termo de ordem $k + 1$ pode ser obtido

$$\Omega_{k+1}^u = \frac{1}{N_{k+1}} \left(\bar{\mathbf{z}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{z}}_{k+1} + \frac{1}{3} \lambda_{k+1}^2 \beta_{k+1}^T \beta_{k+1} \right) \quad (\text{A.7})$$

Como as componentes de \mathbf{z}_{k+1} são proporcionais às ordenadas dos vértices da curva correspondente ao termo de ordem $k + 1$, pode-se escrever:

$$\mathbf{z}_{k+1}^T = \frac{1}{h_0} \left[y_{k+1}^{(0)} y_{k+1}^{(1)} \dots y_{k+1}^{(N_{k+1})} \right]$$

ou referindo ao termo precedente como ilustra a Figura A.2 tem-se:

$$\mathbf{z}_{k+1}^T = \frac{1}{h_0} \left[y_k^{(0)} y_k^{(0,1)} \dots y_k^{(0,p-1)} y_k^{(1)} y_k^{(1,0)} \dots y_k^{(1,p-1)} \dots y_k^{(N_k)} \right]$$

Na Figura A.2, $MN = \lambda_k$ e $Mp = pq = qr = rN = \lambda_{k+1}$. Note que

$$y_k^{(i)} = y_{k+1}^{(pi)} \quad \text{onde } i = 0, 1, \dots, N_k \quad (\text{A.8})$$

$$y_k^{(i,j)} = y_{k+1}^{(pi+j)}, \quad \text{onde } i = 0, 1, \dots, N_k - 1 \text{ e } j = 1, \dots, p - 1 \quad (\text{A.9})$$

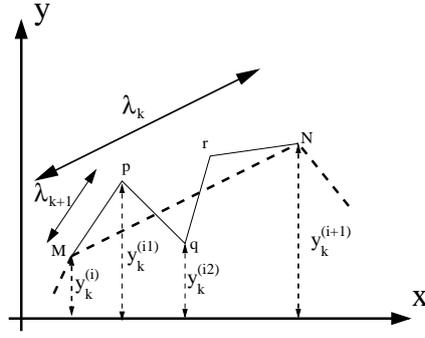


Figura A.2: Termo de ordem $k + 1$ sobreposto ao termo de ordem k .

representam respectivamente as ordenadas dos vértices da curva de ordem k na sequência e as ordenadas dos vértices adicionados à curva de ordem $k + 1$. É possível decompor o vetor \mathbf{z}_{k+1} da seguinte forma:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \frac{\mathbf{U}_1}{h_0} \left\{ y_k^{(0)} y_k^{(1)} \dots y_k^{(N_k)} \right\}^T + \frac{\mathbf{U}_2}{h_0} \left\{ y_k^{(0,1)} \dots y_k^{(0,p-1)} y_k^{(1,1)} \dots y_k^{(N_k-1,p-1)} \right\}^T$$

onde \mathbf{U}_1 e \mathbf{U}_2 são matrizes de zeros e uns de tamanhos $(N_{k+1} + 1) \times (N_k + 1)$ e $(N_{k+1} + 1) \times (p - 1)N_k$, respectivamente.

Com essa decomposição o vetor $\bar{\mathbf{z}}_{k+1}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{z}}_{k+1} = \mathbf{R}\bar{\mathbf{z}}_k + \mathbf{R}(\Delta\mathbf{z}_k) + \lambda_k \rho_{k+1}$$

onde $|\rho_{k+1}^{(i)}| \leq 1$ e \mathbf{R} é uma matriz de zeros e uns de ordem $N_{k+1} \times N_k$.

Utilizando a definição de Ω_{k+1} e lembrando que $\Delta\mathbf{z}_k = \lambda_k \beta_k$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Omega_{k+1}^u &= \frac{1}{N_{k+1}} (\bar{\mathbf{z}}_k^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{z}}_k + \lambda_k^2 \beta_k^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \beta_k) + \frac{2}{N_{k+1}} (\lambda_k \beta_k^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{z}}_k + \\ &+ \lambda_k \rho_{k+1}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{z}}_k + \lambda_k^2 \rho_{k+1}^T \mathbf{R} \beta_k) + \frac{1}{N_{k+1}} (\lambda_k^2 \rho_{k+1}^T \rho_{k+1}) + \frac{1}{3N_{k+1}} \lambda_{k+1}^2 \beta_{k+1}^T \beta_{k+1}, \end{aligned}$$

Lembrando que $|z_k^{(i)}| \leq 1$, $|\beta_k^{(i)}| \leq 1$, $|\beta_{k+1}^{(i)}| \leq 1$, $|\rho_{k+1}^{(i)}| \leq 1$, $N_{k+1} = pN_k$, $\lambda_{k+1} = \lambda_k/q$ e notando que $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = p\mathbf{I}_k$, onde \mathbf{I}_k é a matriz identidade de ordem N_k , obtém-se:

$$\Omega_{k+1} = \frac{1}{N_{k+1}} \left[p \left(\bar{\mathbf{z}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{z}}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{3} \lambda_k^2 \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}} \beta_{\mathbf{k}} \right) \right] + \lambda_k R_1(k, k+1) + \lambda_k^2 R_2(k, k+1)$$

onde $R_1(k, k+1)$ e $R_2(k, k+1)$ são dados por:

$$\begin{aligned} R_1(k, k+1) &= \frac{2}{N_{k+1}} (p \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{z}}_{\mathbf{k}} + \rho_{\mathbf{k}+1}^{\mathbf{T}} \mathbf{R} \bar{\mathbf{z}}_{\mathbf{k}}) \\ R_2(k, k+1) &= \frac{1}{N_{k+1}} \left[2 (\rho_{\mathbf{k}+1}^{\mathbf{T}} \mathbf{R} \beta_{\mathbf{k}}) + (\rho_{\mathbf{k}+1}^{\mathbf{T}} \rho_{\mathbf{k}+1}) + \frac{1}{3} (\beta_{\mathbf{k}+1}^{\mathbf{T}} \beta_{\mathbf{k}+1} + 2p \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}} \beta_{\mathbf{k}}) \right] \end{aligned}$$

são finitos para todo k . Obtém-se então:

$$\Omega_{k+1}^u = \Omega_k^u + \lambda_k R_1(k, k+1) + \lambda_k^2 R_2(k, k+1).$$

Logo,

$$\Delta \Omega_k^u = \Omega_{k+1}^u - \Omega_k^u = \lambda_k R_1 + \lambda_k^2 R_2.$$

Agora,

$$\Delta \lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\lambda_k}{q} + \lambda_k = \lambda_k (q^{-1} + 1).$$

Daí, segue-se que:

$$\frac{\Delta \Omega_k^u}{\Delta \lambda_k} = \frac{1}{q^{-1} + 1} (R_1 + \lambda_k R_2).$$

Logo

$$\lim_{\Delta_k \rightarrow 0} \frac{\Delta \Omega_k^u}{\Delta \lambda_k} = \frac{d\Omega_k^u}{d\lambda_k} = \frac{1}{q^{-1} + 1} R_1 \rightarrow \text{finito}$$

Portanto, pela equação (A.1), temos que $1/\Omega_k^u$ e $d\Omega_k^u/d\lambda_k$ são finitos e $d\lambda_k/dX = \lambda_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Logo, $\frac{d}{dX} (\log \Omega_k^u) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

□

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)