Lucas Spillere Barchinski

O Teorema Espectral para Operadores Normais

Florianópolis

Março de 2009

Lucas Spillere Barchinski

O Teorema Espectral para Operadores Normais

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Orientador:
Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis

Março de 2009

Dissertação de Mestrado sob o título *O Teorema Espectral para Operadores Normais*, defendida por Lucas Spillere Barchinski e aprovada em 17 de março de 2009, em Florianópolis, Estado de Santa Catarina, pela comissão examinadora constituída pelos doutores:

Prof. Dr. Ruy Exel Filho
Orientador

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Danilo Royer
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Henrique Bursztyn
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Agradecimentos

Primeiramente devo agradecer à minha namorada Carina, por toda compreensão, apoio e amor incondional em todos os momentos, tornando-se essencial na construção deste trabalho. Aguentar um maluco como eu não é fácil.

Devo agradecer também à minha família por sempre me apoiar(exceto na escolha do curso de Matemática) em todas as decisões e "financiar"meus estudos. Quando voltava para casa, recarregava todas as minhas energias. Apesar da máxima de que parente a gente não escolhe, a aleatoriedade me presenteou com uma família maravilhosa.

Agradeço imensamente o Professor Ruy Exel, por acreditar na minha pessoa, e por todas as horas dedicadas à minha dissertação. É um profissional cujo conhecimento me impressiona, e de uma didática invejável, até mesmo para os doutores de Educação.

Agradeço a todos os outros professores que participaram de minha vida acadêmica. Em especial ao professor Pinho, pelo convívio no PET e pelas melhores piadas sem graça que eu já tive o prazer de ouvir, ao professor Waldir Quandt, pela orientação em meu TCC, ao professor Aldrovando pela parceria e troca de idéias, ao professor Danilo pelas diversas vezes que me auxiliou e também ao professor e amigo Ruy Charão, pelo excelente curso de análise e pelas horas dedicadas às minhas dúvidas.

Agradeço os amigos da graduação Leonardo (Nadinho), Guilherme (Siri), Felipe (Vargas), Fábio (Poncho), Pati, Girico, Japa, Guerreiro, Paola, Déia, Fabi, Rô, Léo (Salsicha), Heloísa, Paulo, Asteroide, Viviam, Mateus, Baga, Leôncio, Galelli, Sabiá, Jonatan, Harley, Karla, Ju Paz, Dayvidson, Vivi, Márian, Ju Zachi, Aline, Ana Beatriz e todos os outros que sempre fizeram da minha vida uma aventura. Aos amigos Eneílson e Graciele por todos os momentos que passamos juntos, sejam de estudos ou de diversão (muito poucos, não sobrava tempo pra diversão). Também aos amigos do mestrado: Rodrigo, Grasielli, Márcio, Gilberto (os 2), Felipe (os 2), Alisson, Altemir, João Nilton, Maicon, Edson, Monique, Alda, Jucavo, Boava, Daiane, Fabiano, Carlinha, André, Leonardo e a todos os outros que talvez eu tenha esquecido.

Agradeço o apoio financeiro do CNPq.

Resumo

O objetivo deste trabalho é demonstrar, de maneira mais simples e rápida do que os tradicionais livros que tratam do assunto, o teorema espectral para operadores normais. Para tal fim, trabalharemos com a C^*-álgebra originada pelo duplo comutante do conjunto $\{T, T^*\}$. Também, usaremos o conjunto das funções Borel mensuráveis, ao invés do L^∞ a fim de simplificar tal estudo.

Abstract

The goal of this work is to demonstrate, in a simpler and faster way than traditional books that address the topic, the spectral theorem for normal operators. To this end, we work with the C^*-algebra generated by the double commutant of the set $\{T, T^*\}$. Also, we'll use the set of the Borel measurable functions, instead of L^∞, to simplify our study.

Sumário

Introdução

Percebendo a necessidade de um texto mais simples sobre o teorema espectral para operadores normais, decidimos montar uma estrutura relativamente simples e que possa ser compreendida integralmente por qualquer estudante que tenha concluído um curso introdutório de análise funcional.

No capítulo 2 apresentaremos o duplo comutante do conjunto $\{T, T^*\}$, onde T é um operador normal, e provaremos que tal conjunto é uma C^*-álgebra comutativa. Utilizando os polinômios complexos de duas variáveis, provaremos o teorema do mapeamento espectral para operadores normais, e assim construiremos uma extensão contínua definida no conjunto das funções contínuas no espectro de T e com contradomínio no espaço dos operadores lineares limitados de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

No capítulo 3 apresentaremos o conceito de medida espectral, e construiremos uma tal medida utilizando a extensão obtida no capítulo 2. Neste capítulo utilizaremos alguns fatos de teoria da medida, sendo que tais fatos estão explorados no apêndice.

No capítulo 4 construiremos o conceito de integração espectral, que atua nas funções limitadas Borel mensuráveis e que produz operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. A construção segue os passos tradicionais da construção da integral de Lebesgue, porém estaremos usando medidas espectrais ao invés de medidas positivas.

Finalmente, no capítulo 5, demonstraremos o teorema espectral para operadores normais, que é o principal objetivo deste trabalho.

1 Conceitos Básicos

Para que a leitura posterior deste trabalho seja feita de maneira mais rápida, decidimos expor aqui os conceitos básicos que serão usados neste trabalho. Tais definições, proposições, lemas e teoremas podem ser encontrados em [10].

Definição 1.1 *Uma álgebra normada é um espaço vetorial normado A sobre o corpo dos números complexos, com a seguinte estrutura adicional: existe uma multiplicação $A \times A \to A$ denotada por $(x, y) \to xy$ que satisfaz as seguintes condições, para todo $x, y, z \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$:*

(i.) $(xy)z = x(yz)$*;*

(ii.) $(\alpha x + y)z = \alpha xz + yz$, $z(\alpha x + y) = \alpha zx + zy$*;*

(iii.) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Definição 1.2 *Uma álgebra de Banach é uma álgebra normada que é completa como um espaço normado.*

Uma álgebra normada (ou de Banach) A é dita unital se tem a identidade multiplicativa, isto é, se existe um elemento, que será denotado por 1, tal que $1x = x1 = x$, $\forall x \in A$.

Se A é uma álgebra normada, e se B é um subespaço vetorial que é fechado sobre a multiplicação, então B é uma álgebra normada (com a estrutura induzida por A) e será chamada sub-álgebra normada de A. Segue-se de um teorema conhecido de análise funcional, que uma sub-álgebra normada B de uma álgebra de Banach A é uma álgebra de Banach, se e somente se, B é um subespaço fechado de A.

Exemplo 1.3 *Seja $C(X)$ o espaço vetorial das funções complexas contínuas em um espaço de Hausdorff compacto X. Se considerarmos a norma do supremo, tal espaço* *torna-se um espaço de Banach. Se além disso, definirmos a multiplicação de funções por $(fg)(x) = f(x)g(x)$, temos agora uma álgebra de Banach comutativa unital, sendo a identidade multiplicativa dada pela função $f(x) = 1,\ \forall\ x \in X$.*

Exemplo 1.4 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Então $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, a álgebra de todos os operadores lineares limitados em $\mathcal{H}$, é uma álgebra de Banach unital, com respeito a norma definida por:*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

A identidade multiplicativa é dada pelo operador identidade I.

Definição 1.5 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach unital, com a identidade multiplicativa 1 (assumiremos que $A \neq \{0\}$, ou equivalentemente, $1 \neq 0$). Dizemos que um elemento $x \in \mathcal{A}$ é inversível em $\mathcal{A}$, se existe um elemento - que é necessariamente único e será denotado por x^{-1} - tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.*

Denotaremos o conjunto de todos os elementos inversíveis de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

Proposição 1.6 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach unital. Se $x \in \mathcal{A}$ e $\|1 - x\| < 1$, então $x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ e*

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - x)^n,$$

sendo que estamos usando a convenção de que $y^0 = 1,\ \forall\ y \in \mathcal{A}$.
Em particular, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| > \|x\|$, então $(x - \lambda 1)$ é inversível e

$$(x - \lambda)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Demonstração: Da definição de álgebra de Banacah, temos que $\|(1-x)^n\| \leq \|1-x\|^n$. Assim, visto que $\|1-x\| < 1$, temos que a série que representa x^{-1} converge absolutamente. Como $\mathcal{A}$ é completo, esta série converge. Seja $\{s_N = \sum_{n=0}^{N}(1 - x)^n : N \in \mathbb{N}\}$ as somas parciais da série, e s o limite. Note que

$$(1 - x)s_N = s_N(1 - x) = s_{N+1} - 1.$$

Tomando o limite quando $N \to \infty$ na expressão acima, temos que $(1-x)s = s(1-x) = s - 1$. Assim, $xs = sx = 1$.
Ainda, suponha que $|\lambda| > \|x\|$. Note que $\left\|1 - (1 - \frac{x}{\lambda})\right\| = \left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$. Logo, pela primeira parte desta demonstração, temos que $(1 - \frac{x}{\lambda})$ é inversível, e

$$(x-\lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}\left(1 - \tfrac{x}{\lambda}\right)^{-1} = -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

■

Proposição 1.7 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach unital, $x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ e $y \in \mathcal{A}$. Então as afirmações abaixo são equivalentes:*

(i) xy é inversível;

(ii) yx é inversível;

(iii) y é inversível.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que xy é inversível. Note que $yx = x^{-1}(xy)x$. Assim, $(yx)^{-1} = x^{-1}(xy)^{-1}x$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que yx é inversível. Note que $y = (yx)x^{-1}$. Assim, $y^{-1} = x(yx)^{-1}$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponha que y é inversível. Note que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. ■

Proposição 1.8 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach unital. Então $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ é um conjunto aberto em $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Dado $x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, tome $r = \frac{1}{\|x^{-1}\|}$. Assim, se $y \in B(x,r)$ (onde $B(x,r)$ denota a bola de centro x e raio r), temos que

$$\|1 - x^{-1}y\| = \|x^{-1}(x-y)\| \leq \|x^{-1}\|\|x-y\| < 1.$$

Assim, pela proposição 1.6 temos que $x^{-1}y \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ e, pela proposição 1.7, temos que $y = x(x^{-1}y)$ é inversível. Logo, $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ é aberto. ■

Definição 1.9 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach unital, e $x \in \mathcal{A}$. Então o espectro de x é o conjunto definido por*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda 1) \textit{ não é inversível}\},$$

e o raio espectral de x é definido por

$$r(x) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Observação 1.10 *A definição de raio espectral só faz sentido se o espectro é um conjunto limitado não vazio. Mas este é exatamente o caso. De fato, seja $\lambda \in \sigma(x)$. Note que, em vista da proposição 1.6, devemos ter $|\lambda| \leq \|x\|$. Assim, $r(x) \leq \|x\|$. O fato do espectro ser não vazio será demonstrado posteriormente.*

Definição 1.11 *O conjunto resolvente de x é definido por*

$$\rho(x) = \mathbb{C} - \sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda 1) \text{ é inversível}\},$$

e a aplicação

$$\rho(x) \ni \lambda \overset{R_x}{\mapsto} (x - \lambda 1)^{-1} \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$$

é chamada de função resolvente de x.

Definição 1.12 *Suponha que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach unital e que $\mathcal{B}$ é uma sub-álgebra de Banach unital de $\mathcal{A}$. Suponha agora que $x \in \mathcal{B}$. Assim, para qualquer sub-álgebra de Banach $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ definimos o resolvente de x em $\mathcal{C}$ por*

$$\rho_{\mathcal{C}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\ z \in \mathcal{C} \text{ tal que } z(x - \lambda) = (x - \lambda)z = 1_{\mathcal{A}}\},$$

e o espectro de x em $\mathcal{C}$ por $\sigma_{\mathcal{C}}(x) = \mathbb{C} - \rho_{\mathcal{C}}(x)$.

Proposição 1.13 *Seja A uma álgebra de Banach unital. Então a aplicação $h : \mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathcal{G}(\mathcal{A})$ dada por $h(x) = x^{-1}$ é contínua.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ e $\lim x_n = y \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Devemos mostrar que $\lim {x_n}^{-1} = y^{-1}$.
Primeiramente, assuma que $y = 1$; temos que existe um natural N tal que $\|1 - x_n\| < \frac{1}{2}$ para todo $n > N$. Assim,

$$\|{x_n}^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (1 - x_n)^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|1 - x_n\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2,$$

para todo $n > N$. Desta forma,

$$\|{x_n}^{-1} - 1\| = \|{x_n}^{-1}(1 - x_n)\| \leq \|{x_n}^{-1}\|\|1 - x_n\| \leq 2\|1 - x_n\|$$

para todo $n > N$, donde $\lim {x_n}^{-1} = 1$.
Agora, suponha $y \neq 1$. Pela proposição 1.7, temos que $y^{-1}x_n \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, e ainda $\lim y^{-1}x_n = \lim y^{-1} \lim x_n = 1$. Logo, pelo feito acima,

$$\lim(y^{-1}x_n)^{-1} = \lim {x_n}^{-1}y = 1 \text{ e } \lim {x_n}^{-1} = y^{-1}.$$ ■

Corolário 1.14 *A função resolvente de x é contínua.*

Demonstração: Note que a função resolvente de x é a composição das funções contínuas $g : \rho(x) \to \mathcal{G}(\mathcal{A})$ dada por $g(\lambda) = x - \lambda$ e $h : \mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathcal{G}(\mathcal{A})$ dada por $h(x) = x^{-1}$. ■

Lema 1.15 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach qualquer e $x \in \mathcal{A}$, então $\rho(x)$ é aberto em $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Defina $g : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ por $g(\lambda) = x - \lambda$. Note que g é contínua e, pela proposição 1.8, $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ é aberto. Logo, $\rho(x) = g^{-1}(\mathcal{G}(\mathcal{A}))$ é aberto. ■

Proposição 1.16 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach unital, e $x \in \mathcal{A}$. Então,*

(a) $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} \|R_x(\lambda)\| = 0$*; e*

(b) $R_x(\lambda) - R_x(\mu) = (\lambda - \mu)R_x(\lambda)R_x(\mu),\ \forall\ \lambda, \mu \in \rho(x)$*;*

(c) a função resolvente é fracamente analítica, ou seja, se $\phi \in \mathcal{A}^*$ (onde $\mathcal{A}^*$ é o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em $\mathcal{A}$), então a aplicação $\phi \circ R_x$ é uma função analítica definida no aberto $\rho(x)$. Ainda, temos que

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \phi \circ R_x(\lambda) = 0.$$

Demonstração:

(a) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $|\lambda| > \|x\| + 1$. Assim,

$$\|R_x(\lambda)\| = \|(x - \lambda)^{-1})\| = \left\| -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{|\lambda^n||\lambda|} \leq \frac{1}{|\lambda|} \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|x\|}{\|x\| + 1} \right)^n}^{(\star)}$$

Note que $(\star)$ converge para algum $c > 0$. Assim, $\|R_x(\lambda)\| \leq \frac{c}{|\lambda|}$, $\forall\ |\lambda| > \|x\| + 1$ e, portanto, $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \|R_x(\lambda)\| = 0$.

(b) Sejam $\lambda, \mu \in \rho(x)$. Então,

$$(\lambda - \mu)R_x(\lambda)R_x(\mu) = (\lambda - \mu)(x - \lambda)^{-1}(x - \mu)^{-1} =$$
$$R_x(\lambda)((x - \mu) - (x - \lambda))R_x(\mu) = R_x(\lambda) - R_x(\mu).$$

(c) Seja $\phi \in \mathcal{A}^*$ um funcional linear contínuo qualquer em $\mathcal{A}$. Se $\mu \in \rho(x)$ e λ está suficientemente perto de μ, então $\lambda \in \rho(x)$, pois $\rho(x)$ é aberto. Assim, utilizando o item (b) desta proposição, temos

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\mu}\left(\frac{\phi\circ R_x(\lambda) - \phi\circ R_x(\mu)}{\lambda - \mu}\right) &= \lim_{\lambda\to\mu}\left(\frac{\phi[R_x(\lambda) - R_x(\mu)]}{\lambda - \mu}\right)\\ &= \lim_{\lambda\to\mu}\left(\frac{(\lambda - \mu)\phi[R_x(\lambda)R_x(\mu)]}{\lambda - \mu}\right)\\ &= \lim_{\lambda\to\mu}\phi[R_x(\lambda)R_x(\mu)]\\ &= \phi(R_x(\mu)^2).\end{aligned}$$

Ainda, pela continuidade de ϕ e de R_x, e pelo item (a) desta proposição, temos que

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\phi\circ R_x(\lambda) = 0$$

■

Proposição 1.17 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach qualquer, e $x \in \mathcal{A}$, então $\sigma(x)$ é um subconjunto compacto não-vazio de $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\rho(x) = \mathbb{C}$. Então, dado $\phi \in \mathcal{A}^*$, temos que $\phi\circ R_x$ é uma função diferenciável em todo $\mathbb{C}$ que se anula no infinito. Logo, temos pelo teorema de Liouville (ver [1], página 122) que $\phi\circ R_x(\lambda) = 0$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$. Note que se $x, y \in \mathcal{A}$ com $x \neq y$, temos por Hahn-Banach que existe $\psi \in \mathcal{A}^*$ tal que $\psi(x) \neq \psi(y)$. Assim, visto que ϕ foi arbitrário, temos que $R_x(\lambda) = 0$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$. Mas como $R_x(\lambda) \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, temos um absurdo! Portanto, $\sigma(x)$ é não vazio. Ainda, pela observação 1.10, temos que $\sigma(x)$ é um conjunto limitado e, visto que pelo lema 1.15 $\rho(x)$ é aberto, temos que $\sigma(x)$ é fechado. Logo, $\sigma(x)$ é compacto. ■

Lema 1.18 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e $x \in \mathcal{A}$. Então o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe. Ainda, se $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, então $R_x(\lambda)$ existe e é dado pela série*

$$R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

Demonstração: Seja $a = \inf\limits_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Para mostrar que o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe, basta mostrarmos que $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq a$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^m\|^{\frac{1}{m}} \leq a + \varepsilon$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, escreva $n = pm + q$ onde $0 \leq q \leq (m-1)$. Então, visto que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, $\forall\ x, y \in \mathcal{A}$, temos

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x^{pm}x^q\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^m\|^{\frac{p}{n}} \cdot \|x\|^{\frac{q}{n}} \leq (a+\varepsilon)^{\frac{mp}{n}} \|x\|^{\frac{q}{n}} = (a+\varepsilon)^{\frac{n-q}{n}} \|x\|^{\frac{q}{n}}.$$

Como $(n-q)/n \to 1$ e $q/n \to 0$ quando $n \to \infty$, devemos ter $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq a + \varepsilon$. Visto que ε foi arbitrário, temos que $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq a$.
Ainda, note que se $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda^{-n-1}x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |\lambda|^{-1-\frac{1}{n}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} < |\lambda|^{-1}|\lambda| = 1.$$

Assim, pelo teste da raiz, concluímos que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}x^n$ converge absolutamente, e visto que $\mathcal{A}$ é completo, esta série converge. Multiplicando-se $(\lambda - x)$ pelo lado esquerdo e pelo lado direito da série, verifica-se que a série representa $R_x(\lambda)$. ■

Teorema 1.19 ***(Fórmula do Raio espectral)***- *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach unital e $x \in \mathcal{A}$. Então*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração: Pelo lema anterior, temos que $r(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Portanto, só nos resta mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$.
Fixe $\phi \in \mathcal{A}^*$. Então, pela proposição 1.16(c), $\phi \circ R_x$ é analítica quando $|\lambda| > r(x)$. Assim, $\phi \circ R_x$ possui uma série de Laurent para $|\lambda| > r(x)$. Usando a linearidade e a continuidade de ϕ, temos pelo lema anterior que $\phi \circ R_x(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}\phi(x^n)$, para $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Como a série de Laurent é unicamente determinada (ver [9], teorema 10.6), temos que

$\phi \circ R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}\phi(x^n)$, para $|\lambda| > r(x)$. Assim, $\lim_{n\to\infty} \|\lambda^{-n}\phi(x^n)\| = 0$ se $|\lambda| > r(x)$. Visto que ϕ foi arbitrário, segue do princípio da limitação uniforme (ver [10], página 21) que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|x^n\| \leq K|\lambda|^n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Então, $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq K^{\frac{1}{n}}|\lambda|$. Assim, concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x).$$

Portanto, $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. ■

Definição 1.20 *Uma C^*-álgebra é, por definição, uma álgebra de Banach A, que é equipada com uma involução $A \ni x \to x^* \in A$ que satisfaz as seguintes condições, para todo $x, y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$:*

(i) $(\alpha x + y)^* = \overline{\alpha}x^* + y^*$;

(ii) $(xy)^* = y^*x^*$;

(iii) $(x^*)^* = x$;

(iv) $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

O elemento x^* é chamado de adjunto do elemento x, e a aplicação $x \mapsto x^*$ é chamada de adjunção.

Exemplo 1.21 *Se definirmos a involução no exemplo 1.3 como sendo a conjugação complexa de funções, ou seja, $f^* = \overline{f}$, então $C(X)$ é uma C^*-álgebra. Da mesma forma, se a involução no exemplo 1.4 for dada pelo operador adjunto, ou seja, $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é o operador tal que para todo $x, y \in \mathcal{H}$*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle,$$

temos que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ também é uma C^*-álgebra.

Exemplo 1.22 *Se $\mathcal{A}$ é uma C^*-álgebra, e se B é uma sub-álgebra que é fechada (com respeito a norma) e é auto-adjunta ($B = B^*$), ou seja, é fechada sobre a aplicação $x \mapsto x^*$, então B tem uma estrutura de C^*-álgebra. Neste caso, dizemos que B é uma C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$.*

Proposição 1.23 *Se $\mathcal{A}$ é uma C^*-álgebra, então $\|x^*\| = \|x\|$, $\forall\ x \in \mathcal{A}$.*

Demonstração: Se $x = 0$, a demonstração é imediata. Suponha então que $x \neq 0$. Note que

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|x^*\|.$$

Analogamente, usando x^* no lugar de x, obtemos que $\|x^*\| \leq \|x\|$. Assim, $\|x^*\| = \|x\|$. ■

Proposição 1.24 *Seja $\mathcal{A}$ é uma C^*-álgebra. Então a adjunção é uma função contínua.*

Demonstração: Suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $x_n \to x$ em $\mathcal{A}$. Pela proposição acima, temos que que

$$\|x_n - x\| = \|(x_n - x)^*\| = \|{x_n}^* - x^*\|.$$

Assim, ${x_n}^* \to x^*$. ■

Definição 1.25 *Um elemento x de uma C^*-álgebra é dito auto-adjunto se $x = x^*$, normal se $xx^* = x^*x$ e unitário se $xx^* = x^*x = 1$.*

Proposição 1.26 *Qualquer elemento x de uma C^*-álgebra é unicamente expressível como $x = x_1 + ix_2$, onde x_1 e x_2 são auto-adjuntos.*

Demonstração: Tome $x_1 = \frac{x+x^*}{2}$ e $x_2 = \frac{x-x^*}{2i}$. A unicidade é imediata. ■

Lema 1.27 *Seja x um elemento auto-adjunto em uma C^*-álgebra. Então $r(x) = \|x\|$.*

Demonstração: Seja x auto-adjunto. Então $\|x^2\| = \|x^*x\| = \|x\|^2$. Vamos provar, por indução, que $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$. Para $n = 1$ o resultado é válido. Suponha que é válido para $k \in \mathbb{N}$. Então

$$\|x^{2^{(k+1)}}\| = \|(x^{2^k})^* x^{2^k}\| = \|x^{2^k}\|^2 = \|x\|^{2^{k+1}}.$$

Assim,

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|x\|. \qquad \blacksquare$$

Proposição 1.28 *Seja x um elemento normal em uma C^*-álgebra. Então $r(x) = \|x\|$.*

Demonstração: Suponha que x é normal. Visto que $(x^n)^* x^n = (x^* x)^n$, e usando o lema anterior temos:

$$r(x)^2 = \lim \|x^n\|^{\frac{2}{n}} = \lim \|(x^n)^* x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim \|(x^* x)^n\|^{\frac{1}{n}} = r(x^* x) = \|x^* x\| = \|x\|^2. \qquad \blacksquare$$

2 O Teorema do Mapeamento Espectral

No começo deste capítulo, estudaremos os Ideiais e suas propriedades, pois estes representam uma ferramenta essencial para o estudo deste trabalho. Após tal estudo, tomaremos um rumo diferente daqueles tomados em livros tradicionais (tais como em [10], por exemplo). Visto que posteriormente estaremos interessados em 2 operadores normais, tínhamos duas opções para analisar: definir um conceito de espectro com duas variáveis, ou usar os polinômios complexos que utilizam apenas uma variável. Como veremos no decorrer deste capítulo, a opção escolhida foi a segunda.

Definição 2.1 *Um subconjunto I de uma álgebra normada A é dito ser um ideal se as seguintes condições são satisfeitas, para quaisquer $x, y \in I$, $z \in A$, e $\alpha \in \mathbb{C}$:*

$$\alpha x + y,\ xz,\ zx \in I.$$

Um ideal próprio é um ideal que é distinto do ideal trivial A.
Um ideal maximal é um ideal próprio que não está estritamente contido em qualquer outro ideal próprio.

Proposição 2.2 *Se A é uma álgebra normada unital, então as seguintes condições são equivalentes em um ideal I:*

(i) I *é um ideal próprio;*

(ii) $I \cap \mathcal{G}(A) = \varnothing$ *(onde $\mathcal{G}(A)$ denota o conjunto dos elementos inversíveis de A);*

(iii) $1 \notin I$

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Se existisse $x \in I$ inversível, $1 = xx^{-1} \in I$ e, portanto, $y = y1 \in I$, $\forall y \in A$. Assim, teríamos $I = A$. Absurdo! Logo, $I \cap \mathcal{G}(A) = \varnothing$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ óbvio.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Se $1 \notin I$, $I \neq A$. Assim, temos que I é próprio. ■

Proposição 2.3 *O fecho de um ideal próprio em uma álgebra de Banach unital também é um ideal próprio. Ainda, todo ideal maximal em uma álgebra de Banach unital é fechado.*

Demonstração: Seja I um ideal próprio em uma álgebra de Banach unital $\mathcal{A}$. Visto que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ é aberto e como pela proposição anterior que $I \cap \mathcal{G}(\mathcal{A}) = \varnothing$, temos que $\overline{I} \cap \mathcal{G}(\mathcal{A}) = \varnothing$. Logo, $\overline{I}$ é próprio.

Ainda, se I é maximal, visto que $I \subset \overline{I}$, temos que $I = \overline{I}$. ■

Proposição 2.4 *Seja I um ideal em uma álgebra A, D o conjunto dos ideais em A/I e F o conjunto dos ideais em A que contém I. Então a aplicação $\pi^{-1} : D \to F$(onde π é a aplicação quociente) é uma aplicação injetiva.*

Demonstração: Seja $J \in D$. É facil de ver que $\pi^{-1}(J)$ é um ideal em A. Ainda, visto que $\dot{0} \in J$, temos que se $x \in I$, então $\pi(x) = \dot{x} = \dot{0} \in J$. Logo, $\pi^{-1}(J) \supset I$. Suponha agora, que $\pi^{-1}(J) = \pi^{-1}(K)$(onde J e K são ideais em A/I). Se, sem perda de generalidade, $\dot{x} \in J$, temos que $x \in \pi^{-1}(J) = \pi^{-1}(K)$. Logo, $\dot{x} \in K$. Assim, concluímos que $J = K$. ■

Na verdade, a aplicação π^{-1} definida na proposição acima é uma aplicação bijetiva, porém a sobrejetividade será desnecessária neste trabalho.

Proposição 2.5 *Seja A uma álgebra de Banach comutativa unital e $x \in A$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) x não é inversível;

(ii) existe um ideal maximal I em A tal que $x \in I$.

Demonstração: $(ii) \Rightarrow (i)$ Visto que I é próprio, temos pela proposição 2.2 que x não é inversível.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que x não é inversível. Então, $I_0 = \{ax : a \in A\}$ é um ideal em A. Note que I_0 é próprio, pois $I_0 \neq A$(visto que $1 \notin I_0$). Considere o conjunto $H = \{I : I \text{ é } \textit{um ideal próprio},\ x \in I\}$. A operação de inclusão define uma ordem parcial em H e já vimos que H é não-vazio. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia (conjunto totalmente ordenado) em H. Desta forma, vamos provar que $J = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ é uma cota superior para $\mathcal{C}$. Primeiramente J é um ideal, pois dados $a, b \in J$, $c \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que $a \in I_a$ e $b \in I_b$, para alguns $I_a, I_b \in \mathcal{C}$. Visto que $\mathcal{C}$ é uma cadeia, $I_a \subset I_b$ ou $I_b \subset I_a$. Suponha, sem perda de generalidade, que $I_a \subset I_b$. Assim, $a \in I_b$ e, visto que I_b é um ideal, temos que $\alpha a + b,\ ca,\ ac \in I_b \subset J$. Logo, J é um ideal. Também, visto que cada $I \in \mathcal{C}$ é próprio, temos pela proposição 2.2 que $1 \notin I$. Assim, $1 \notin J$ e, portanto, J é próprio. Assim, pelo lema de Zorn, H possui um elemento maximal. ■

Proposição 2.6 *As seguintes condições em uma álgebra de Banach comutativa unital são equivalentes:*

(i) A *é simples, ou seja, o único ideal próprio em* A *é o ideal trivial* $\{0\}$*;*

(ii) $A = \mathbb{C}1_A$*.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: Seja $x \in A$. Visto que o espectro é não-vazio, escolha $\lambda \in \sigma(x)$. Assim, $x - \lambda 1$ não é inversível, e portanto, o ideal $I = \{a(x - \lambda 1) : a \in A\} \neq A$, visto que $1 \notin I$. Pela hipótese, concluímos que $I = \{0\}$, ou seja, $x = \lambda 1$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Como o único elemento não-inversível de $\mathbb{C}$ é zero, (i) é trivial. ■

Definição 2.7 *Um homomorfismo complexo em uma álgebra de Banach comutativa* A *é uma aplicação* $\phi : A \to \mathbb{C}$ *que satisfaz as seguintes condições para todo* $x, y \in A$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$*:*

(i) $\phi(\alpha x + y) = \alpha\phi(x) + \phi(y)$*;*

(ii) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$*;*

(iii) ϕ *não é identicamente nulo.*

A coleção de todos os homomorfismos complexos em A é chamado de espectro de A, e será denotado por $\hat{A}$.

Para álgebras de Banach unitais, a condição (iii) da definição acima é equivalente à afirmação que $\phi(1) = 1$. De fato, se ϕ não é identicamente nulo, então existe $x \in A$ tal que $\phi(x) \neq 0$. Assim, $\phi(x) = \phi(x)\phi(1)$ e, simplificando ambos os lados por $\phi(x)$, temos que $\phi(1) = 1$. A recíproca é imediata.

Proposição 2.8 *Seja A uma álgebra de Banach comutativa unital. Então a aplicação $K : \hat{\mathrm{A}} \to J$ (onde J é o conjunto de todos os ideais maximais em A), definida por $K(\phi) = ker(\phi)$, é uma bijeção.*

Demonstração: Seja $\phi \in \hat{A}$ e defina $I = ker(\phi)$. Claramente I é um ideal, e visto que ϕ não é identicamente nulo, $I \neq A$. Logo, I é próprio. Seja $\mathcal{J}$ um ideal próprio em A tal que $I \subsetneq \mathcal{J}$. Seja $x \in \mathcal{J}$ tal que $\phi(x) \neq 0$. Assim,

$$\phi(x - \phi(x)1) = \phi(x) - \phi(x)\phi(1) = 0$$

Logo, $x - \phi(x)1 \in I \subset \mathcal{J}$. Também $\phi(x)1 = x - (x - \phi(x)1) \in \mathcal{J}$. Logo, $1 = \frac{1}{\phi(x)}\phi(x)1 \in \mathcal{J}$. Absurdo! Portanto, I é maximal.
Suponha agora que I é maximal. Então somente dois ideais contém I: o próprio I e A. Visto que há uma correspondência injetiva entre ideais em A/I e ideais em A que contêm I, os ideais em A/I são os triviais. Como A/I é uma álgebra de Banach (pois A é Banach e pela proposição 2.3 I é fechado), temos pela proposição 2.6, temos que $A/I = \mathbb{C}1$, ou seja, para cada $\dot{x} \in A/I$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\dot{x} = \lambda 1$. Desta forma, definimos a aplicação $g : A/I \to \mathbb{C}$ definida por $g(\dot{x}) = \lambda$. Utilizando também a função $f : A \to A/I$ dada por $f(x) = \dot{x}$, definimos a função

$$\begin{aligned} \Theta_I : A &\to \mathbb{C} \\ x &\to \lambda \end{aligned}$$

que é a composição $\Theta_I = g \circ f$. É fácil verificar que Θ é um homorfismo complexo. Também, se $x \in A$

$$\Theta(x) = 0 \Leftrightarrow g(\dot{x}) = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0 \Leftrightarrow x \in I,$$

ou seja, $ker(\Theta) = I$.
Suponha agora que exista Ψ tal que $ker(\Theta) = ker(\Psi)$. Se $y \in ker(\Theta)$, então $y \in ker(\Psi)$. Se $\Theta(y) \neq 0$, então, visto que $\Theta(y - \Theta(y)1) = 0$, temos que:

$$0 = \Psi(y - \Theta(y)1) = \Psi(y) - \Theta(y)\Psi(1) \Longrightarrow \Theta(y) = \Psi(y).$$

Logo, $\Theta = \Psi$. Portanto, para um ideal maximal dado, existe um único homomorfismo complexo Θ tal que $I = ker(\Theta)$. ■

Definição 2.9 *Para cada $x \in A$, definimos a função $\hat{x} : \hat{A} \to \mathbb{C}$ dada por $\hat{x}(\phi) = \phi(x)$.*

Proposição 2.10 *Seja A uma álgebra de Banach comutativa unital. Então, $\hat{x}(\hat{A}) = \sigma(x)$.*

Demonstração: Seja $x \in A$ e $\phi \in \hat{A}$. Assim, $x - \phi(x)1 \in ker(\phi)$. Então, pela proposição acima, $x - \phi(x)1$ pertence à algum ideal maximal I. Logo, pela proposição 2.5, $x - \phi(x)1$ não é inversível e, portanto, $\phi(x) \in \sigma(x)$.
Reciprocamente, seja $\lambda \in \sigma(x)$. Então, pela proposição 2.5, temos que $x - \lambda 1 \in I$, para algum ideal maximal I. Assim, pela proposição 2.8, temos que existe um funcional ϕ tal que $x - \lambda 1 \in ker(\phi)$, ou seja, $\hat{x}(\phi) = \phi(x) = \lambda$. ■

Corolário 2.11 *Seja A uma álgebra de Banach comutativa. Se $\phi \in \hat{A}$, então $\|\phi\| \leq 1$.*

Demonstração: Pela proposição acima, $|\phi(x)| \leq r(x)$ e visto que $r(x) \leq \|x\|$(onde $r(x)$ é o raio espectral de x), o corolário segue. ■

Proposição 2.12 *Seja A uma álgebra de Banach comutativa unital, e $x \in A$. Então a expressão*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

define uma aplicação $A \ni x \overset{\exp}{\to} e^x \in \mathcal{G}(A)$ com as seguintes propriedades:

(i) $e^{x+y} = e^x e^y$, $\forall\ x, y \in A$;

(ii) Para cada $x \in A$ fixado, a aplicação $\mathbb{R} \ni t \to e^{tx} \in \mathcal{G}(A)$ define um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo multiplicativo $\mathcal{G}(A)$.

Demonstração: Visto que $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{x^n}{n!} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{n!}.$$

Como a série da direita converge, temos pelo teste da comparação que a série que representa a exponencial converge absolutamente, e visto que A é completo, tal série converge.
Ainda, sejam $x, y \in A$. Como A é comutativa, obtemos do teorema binomial que

$$(x+y)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{x^j}{j!} \frac{y^k}{k!}.$$

Assim,

$$e^{x+y}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n}\frac{x^j}{j!}\frac{y^k}{k!}\right)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\right)=e^xe^y.$$

Em particular, tomando $y=-x$, temos que $e^xe^{-x}=e^0=1$. Logo, $e^x\in\mathcal{G}(A)$ para todo $x\in A$.
Ainda, sejam $s,t\in\mathbb{R}$. Desta forma, $e^{(s+t)x}=e^{sx+tx}=e^{sx}e^{tx}$. ■

Proposição 2.13 *Seja A uma C^*-álgebra comutativa unital. Se $\phi\in\hat{A}$, então $\phi(a^*)=\overline{\phi(a)}$.*

Demonstração: Caso (1): a é auto-adjunto.
Defina $u(t)=e^{ita}$, $\forall\ t\in\mathbb{R}$. Pela proposição 1.24, temos que a adjunção é uma função contínua, e portanto temos:

$$(e^{ita})^*=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ita)^n}{n!}\right)^*=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(ita)^n}{n!}\right)^*=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ita)^n}{n!}=e^{-ita}=(e^{ita})^{-1}$$

Assim, visto que e^{ita} é unitário, temos que $\|e^{ita}\|=1$. Agora, tomando $\phi\in\hat{A}$, visto que $\|\phi\|\leq 1$, temos que:

$$|e^{it\phi(a)}|=|\phi(e^{ita})|\leq 1,\ \forall\ t\in\mathbb{R}.$$

Visto que $e^t=|e^{t+is}|$ e que Re$(it\phi(a))=$Im$(t\phi(a))$, $\forall s,t\in\mathbb{R}$, concluímos que $\phi(a)\in\mathbb{R}$. Logo, $\phi(a)=\overline{\phi(a)}$.
Caso (2): $a\in A$ qualquer.
Temos que a pode ser escrito como $a=a_1+ia_2$, com a_1 e a_2 auto-adjuntos. Assim,

$$\phi(a^*)=\phi(a_1^*-ia_2^*)=\underbrace{\phi(a_1)}_{\in\mathbb{R}}-i\underbrace{\phi(a_2)}_{\in\mathbb{R}}=\overline{\phi(a_1)+i\phi(a_2)}=\overline{\phi(a)}.$$

■

A partir de agora, tomaremos um caminho diferente dos livros que tratam deste assunto. Trabalharemos com a C^*-álgebra gerada pelo duplo comutante do conjunto $\{T,T^*\}$, ao invés da $C^*\{1,T\}$. Tal procedimento tornará mais simples as demonstrações, como veremos a seguir. Sugerimos ao leitor, que compare as demonstrações aqui exibidas, com as demonstrações em [10], por exemplo.

Definição 2.14 *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, e se $C \subset B(\mathcal{H})$ é um conjunto qualquer de operadores, então o comutante de C é denotado pelo símbolo C', e é definido por*

$$C' = \{x' \in B(\mathcal{H}) : x'x = xx', \ \forall \ x \in C\}.$$

Lema 2.15 *Seja $C \subset B(\mathcal{H})$ um conjunto qualquer. Então, C' é uma álgebra de Banach.*

Demonstração: Sejam $x, y \in C'$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $s \in C$. Então, $(\alpha x + y)s = \alpha xs + ys = s\alpha x + sy = s(\alpha x + y)$. Logo, $\alpha x + y \in S'$ e assim, C' é um subespaço vetorial de $B(\mathcal{H})$. Ainda, sendo a multiplicação "herdada"de $B(\mathcal{H})$, temos: $(xy)s = x(ys) = x(sy) = (xs)y = (sx)y = s(xy)$. Assim, $xy \in C'$. Suponha agora, que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C'$ seja uma sequência convergindo para $x \in B(\mathcal{H})$. Como $x_n s \to xs$, $sx_n \to sx$ e visto que $x_n s = sx_n$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$, temos pela unicidade do limite (visto que $B(\mathcal{H})$ é Hausdorff), que $xs = sx$. Logo, C' é fechado. Portanto, C' é uma álgebra de Banach. ∎

Lema 2.16 *Seja $C \subset B(\mathcal{H})$ um conjunto tal que $C = C^*$. Então, $(C')^* = C'$.*

Demonstração: A demonstração é trivial. ∎

Lema 2.17 *Seja $C \subset B(\mathcal{H})$ um conjunto comutativo. Então, $C'' = (C')'$ é comutativo.*

Demonstração: Se C é comutativo, então $C \subset C'$. Assim, é claro que $C' \supset C''$ e que $C'' \subset C'''$. Logo, C'' é comutativo. ∎

Proposição 2.18 *Seja $B = \{T, T^*\}''$, onde T é um operador normal. Então, B é um C^*-álgebra comutativa unital que contém T e T^*.*

Demonstração: Seja $C = \{T, T^*\}$. É uma consequência imediata da definição de comutante de um conjunto, que $C \subset B$ e que $1 \in B$. Temos, pelo lema 2.15, que B é uma álgebra de Banach. Também, visto que $C^* = C$, temos pelo lema 2.16 que $B^* = B$. Logo, B é uma C^*-álgebra. Ainda, pelo lema 2.17, B é comutativo. ∎

Lema 2.19 *Suponha que $S \in B = \{T, T^*\}''$ seja inversível em $B(\mathcal{H})$. Então, $S^{-1} \in B$.*

Demonstração: Seja $U \in \{T, T^*\}'$. Desta forma, U comuta com S. Assim,

$$\begin{aligned} US &= SU \\ \Rightarrow USS^{-1} &= SUS^{-1} \\ \Rightarrow \quad U &= SUS^{-1} \\ \Rightarrow \ S^{-1}U &= US^{-1}. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.20 *Seja $S \in B = \{T, T^*\}''$. Então, $\sigma(S) = \sigma_B(S)$ (ver definição 1.12).*

Demonstração: Como $\rho_B(S) \subset \rho(S)$, temos que $\sigma_B(S) \supset \sigma(S)$. Também, pelo lema anterior, $\sigma_B(S) \subset \sigma(S)$. Logo, $\sigma(S) = \sigma_B(S)$. ■

Definição 2.21 *Seja $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ um conjunto de índices onde todos os a_{jk}'s são iguais a 0, exceto uma quantidade finita deles. Definimos então a função $f(z) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} z^j \overline{z}^k$ e o operador $f(T) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} T^j (T^*)^k$.*

Lema 2.22 *Sejam T um operador normal e $f(T)$ o operador definido acima. Então, $f(T) \in B = \{T, T^*\}''$.*

Demonstração: A demonstração é trivial. ■

Teorema 2.23 ***(Mapeamento Espectral)*** *- Sejam T um operador normal e $f(T)$ e $f(z)$ como na definição 2.21. Então, $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.*

Demonstração: Seja $B = \{T, T^*\}''$. Pela discussão acima, só precisamos mostrar que $\sigma_B(f(T)) = f(\sigma_B(T))$. Primeiramente, note que se $\psi \in \hat{B}$, então

$$\psi(f(T)) = \psi\left(\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_{jk} T^j T^{*k}\right) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_{jk} \psi(T)^j \overline{\psi(T)}^k = f(\psi(T)).$$

Seja $\lambda \in \sigma_B(f(T))$. Então, $f(T) - \lambda 1$ é não inversível. Então, pelas proposições 2.5 e 2.8, temos que existe $\phi \in \hat{B}$ tal que $f(T) - \lambda 1 \in ker(\phi)$, ou seja, $\lambda = \phi(f(T)) = f(\phi(T)) \in f(\sigma_B(T))$.

Suponha agora que $\lambda \in f(\sigma_B(T))$. Assim existe $\phi \in \hat{B}$ tal que $\lambda = f(\phi(T)) = \phi(f(T))$. Assim, $\phi(f(T) - \lambda) = 0$. Logo, $f(T) - \lambda$ é não inversível, ou seja, $\lambda \in \sigma_B(f(T))$. ■

Corolário 2.24 *Sejam $\{a_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ um conjunto de índices onde todos os a_{jk}'s são iguais a 0, exceto uma quantidade finita deles, T um operador normal e f definida a partir dos $\{a_{jk}\}$ como na definição 2.21. Então,*

$$\|f(T)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} \{|f(\lambda)|\}.$$

Demonstração: Temos que $f(T)$ é normal. Assim, pela proposição 1.28 e pelo teorema do mapeamento espectral temos que

$$\|f(T)\| = r(f(T)) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f(T))\} = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|f\|_{C(\sigma(T))},$$

onde $\|f\|_{C(\sigma(T))}$ indica a norma de f em $C(\sigma(T))$. ∎

Definição 2.25 *Sejam $\{a_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ um conjunto de índices onde todos os a_{jk}'s são iguais a 0, exceto uma quantidade finita deles. O conjunto $\mathcal{P} \subset C(\sigma(T))$ é o conjunto das funções f da forma $f(z) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} z^j \overline{z}^k$.*

Lema 2.26 *Suponha que $\sum_{j,k=0}^{M} a_{jk} z^j \overline{z}^k = \sum_{j,k=0}^{N} b_{jk} z^j \overline{z}^k$, $\forall z \in \sigma(T)$. Então, $\sum_{j,k=0}^{M} a_{jk} T^j (T^*)^k = \sum_{j,k=0}^{N} b_{jk} T^j (T^*)^k$.*

Demonstração: Suponha, sem perda de generalida, que $M \geq N$. Defina $g(z) = \sum_{j,k=0}^{M} (a_{jk} - b_{jk}) z^j \overline{z}^k$, sendo que $b_{jk} = 0$ se $j > N$ ou $k > N$. Assim,

$$\|\sum_{j,k=0}^{M} (a_{jk} - b_{jk}) T^j (T^*)^k\| = \sup_{z\in\sigma(T)} |g(z)| = 0.$$

∎

Definição 2.27 *Dada $f \in \mathcal{P}$, seja $f(z) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} z^j \overline{z}^k$ uma das representações de f. Definimos assim, o operador $f(T) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} T^j (T^*)^k$.*

Observação 2.28 *Em vista do lema 2.26, temos que o operador $f(T)$ está bem definido.*

Proposição 2.29 *A aplicação* $\pi' : \mathcal{P} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *dada por* $\pi'(f) = f(T)$ *é uma aplicação linear, multiplicativa, contínua e preserva a adjunção.*

Demonstração: A aplicação é claramente linear. Seja $f(z) = \sum_{i,j=0}^{M} a_{ij} z^i \overline{z}^j$ uma das representações de f e seja $g(z) = \sum_{k,l=0}^{N} b_{kl} z^k \overline{z}^l$ uma das representações de g. Assim,

$$\pi'(fg) = \pi'\left(\sum_{i,j=0}^{M}\sum_{k,l=0}^{N} a_{ij} b_{kl} z^{i+k} \overline{z}^{j+l}\right) = \sum_{i,j=0}^{M}\sum_{k,l=0}^{N} a_{ij} b_{kl} T^{i+k} T^{*j+l} =$$
$$= \sum_{i,j=0}^{M} a_{ij} T^i T^{*j} \sum_{k,l=0}^{N} b_{kl} T^k T^{*l} = \pi'(f)\pi'(g).$$

É fácil de ver que π' preserva a adjunção. Ainda, pelo corolário 2.24, temos que π' é contínua. ■

Proposição 2.30 π' *possui uma extensão linear, multiplicativa, que preserva a adjunção e contínua*

$$\pi : C(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

com norma $\|\pi\| = \|\pi'\|$.

Demonstração: O resultado segue imediatamente do teorema da extensão de operadores contínuos (ver [5], página 100), junto com o fato de que $\overline{\mathcal{P}} = C(\sigma(T))$ (ver proposição 6.34). ■

Temos em mãos portanto, a aplicação π que está definida em $C(\sigma(T))$. Nosso objetivo agora é estender tal aplicação para o conjunto das funções Borel mensuráveis limitadas (ver definição 3.2) definidas em $\sigma(T)$.

3 Medidas Espectrais

A palavra medida remete imediatamente ao conceito de integral. De fato, este é exatamente o propósito da medida espectral. Neste capítulo, defineremos tal medida para, no capítulo seguinte, definir um novo tipo de integral. Assumiremos ao longo deste capítulo, que o leitor tenha conhecimento de teoria da medida. Caso não seja este o caso, os principais resultados necessários estão no apêndice deste trabalho.

Se X é um espaço topológico compacto de Hausdorff, usaremos a notação $\mathcal{B}_X$ para denotar a σ-álgebra de Borel que é gerada pela classe de todos os abertos de X (ver definição 6.10).

Definição 3.1 *Considere o espaço mensurável $(X, \mathcal{B}_X)$ (ver definição 6.4) e o espaço topológico (Y, τ) (ver definição 6.1). Uma função $f : X \to Y$ é dita Borel mensurável, se $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}_X$ para todo $V \in \tau$.*

Definição 3.2 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e considere a topologia relativa à Σ (ver definição 6.2). Tome então o espaço mensurável $(\Sigma, \mathcal{B}_\Sigma)$. Definimos $B(\Sigma)$ como o conjunto das funções Borel mensuráveis limitadas em Σ.*

É fácil de verificar, que

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \Sigma} |f(t)|$$

define uma norma em $B(\Sigma)$.

Observação 3.3 *Se a involução em $B(\Sigma)$ for a conjugação complexa, verifica-se facilmente que $B(\Sigma)$ é uma C^*-álgebra comutativa unital.*

No resto deste capítulo Σ é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, e $\pi : C(\Sigma) \to B(\mathcal{H})$ é uma aplicação linear, multiplicativa, que preserva a adjunção e $\pi(1) = 1_{\mathcal{H}}$.

Proposição 3.4 *A aplicação π satisfaz*

(i) Se $f \in C(\Sigma)$, então $\sigma(\pi(f)) \subset \sigma(f)$;

(ii) $\|\pi(f)\| \leq \|f\|$.

Demonstração:

(i) Note que π leva elementos inversíveis em elementos inversíveis. Logo, $\sigma(\pi(f)) \subset \sigma(f)$.

(ii) Suponha que $f = f^*$. Então, temos que $\pi(f) = \pi(f^*) = \pi(f)^*$. Visto que a norma de um elemento auto-adjunto em uma C^*-álgebra é igual a seu raio espectral (ver lema 1.27), usando (i) nós obtemos

$$\|\pi(f)\| = r(\pi(f)) \leq r(f) = \|f\|;$$

para uma $f \in C(\Sigma)$ geral, note que

$$\|\pi(f)\|^2 = \|\pi(f)^*\pi(f)\| = \|\pi(f^*f)\| \leq \|f^*f\| = \|f\|^2.$$

Assim, $\|\pi(f)\| \leq \|f\|$. ■

O que faremos a seguir é estender a aplicação π de $C(\Sigma)$ para $B(\Sigma)$. Estes resultados também se encontram em [12], na página 60.

Definição 3.5 *Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ definimos o funcional $\varphi_{\xi,\eta} : C(\Sigma) \to \mathbb{C}$ dado por*

$$\varphi_{\xi,\eta}(f) = \langle \pi(f)\xi, \eta \rangle.$$

Proposição 3.6 *Sejam $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Então, $\varphi_{\xi,\eta}$ é um funcional linear e contínuo em $C(\Sigma)$ e $\|\varphi_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$.*

Demonstração: Como π é linear, segue-se das propriedades de produto interno que $\varphi_{\xi,\eta}$ é linear. Ainda,

$$|\varphi_{\xi,\eta}(f)| = |\langle \pi(f)\xi, \eta \rangle| \leq \|\pi(f)\xi\|\|\eta\| \leq \|\pi(f)\|\|\xi\|\|\eta\| \leq \|f\|\|\xi\|\|\eta\|.$$

Assim $\varphi_{\xi,\eta}$ é contínuo e $\|\varphi_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. ■

Definição 3.7 *Seja $\phi \in C(X)^*$ (onde $C(X)^*$ é o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em $C(X)$). Se para toda $f \in C(X)$ tal que $f \geq 0$, temos que $\phi(f) \geq 0$, dizemos que ϕ é positivo, e denotaremos tal fato por $\phi \geq 0$.*

Teorema 3.8 ***(Teorema da representação de Riesz)*** *- Seja X um espaço de Hausdorff compacto, $\mathcal{B}_X$ a σ-álgebra de Borel e $M(X)$ o conjunto de todas as medidas complexas finitas definidas em X (ver definições 6.14 e 6.15) com a norma dada por $\|\mu\| = |\mu|(X)$ (ver observação 6.22). Então a aplicação $\mu \to \phi_\mu$, onde $\phi_\mu : C(X) \to \mathbb{C}$ é dada por*

$$\phi_\mu(f) = \int_X f \; d\mu,$$

define um isomorfismo isométrico entre $M(X)$ e $C(X)^*$. Ainda, $\varphi_\mu \geq 0 \Leftrightarrow \mu \geq 0$.

Visto que a demonstração deste teorema foge do objetivo do trabalho, não demonstraremos este fato. Para o leitor interessado a prova se encontra em ([9], teoremas 2.14 e 6.19).

Corolário 3.9 *Sejam $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, e $f \in C(\Sigma)$. Existe uma medida complexa finita $\mu_{\xi,\eta}$ em Σ tal que $\varphi_{\xi,\eta}(f) = \int_\Sigma f \; d\mu_{\xi,\eta}$.*

Definição 3.10 *Dada $g \in B(\Sigma)$ defina $\beta_g : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ por $\beta_g(\xi, \eta) = \int_\Sigma g \; d\mu_{\xi,\eta}$, onde a medida $\mu_{\xi,\eta}$ é a medida obtida no corolário acima.*

Proposição 3.11 *Nas condições da definição acima, $\beta_g : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear e*

$$|\beta_g(\xi, \eta)| \leq \|\xi\|\|\eta\|\|g\|_\infty, \; \forall \; \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Demonstração: Sejam $\xi, \xi_1, \xi_2, \eta, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. Note primeiramente que, pela definição de φ, temos $\varphi_{\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,\eta} = \alpha_1\varphi_{\xi_1,\eta} + \alpha_2\varphi_{\xi_2,\eta}$. Então, se $\mathcal{R}$ é o isomorfismo isométrico do qual trata o teorema da representação de Riesz, temos que

$$\mu_{\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,\eta} = \mathcal{R}(\varphi_{\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,\eta}) = \mathcal{R}(\alpha_1\varphi_{\xi_1,\eta} + \alpha_2\varphi_{\xi_2,\eta}) = \alpha_1\mu_{\xi_1,\eta} + \alpha_2\mu_{\xi_2,n}.$$

Assim,

$$\int_\Sigma g \; d\mu_{\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,\eta} = \alpha_1 \int_\Sigma g \; d\mu_{\xi_1,\eta} + \alpha_2 \int_\Sigma g \; d\mu_{\xi_2,\eta},$$

para toda $g \in B(\Sigma)$, ou seja, $\beta_g(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2, \eta) = \alpha_1\beta_g(\xi_1, \eta) + \alpha_2\beta_g(\xi_2, \eta)$. Analogamente, prova-se que $\beta_g(\xi, \gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2) = \overline{\gamma_1}\beta_g(\xi, \eta_1) + \overline{\gamma_2}\beta_g(\xi, \eta_2)$. Logo, β_g é uma forma sesquilinear em $\mathcal{H}$.

Ainda, para a medida complexa $\mu_{\xi,\eta}$, existe uma função (ver proposição 6.30) $h \in B(\Sigma)$ tal que $|h(x)| = 1, \ \forall \ x \in \Sigma$ e $d\mu_{\xi,\eta} = h \ d|\mu_{\xi,\eta}|$. Assim,

$$|\beta_g(\xi, \eta)| = \left|\int_\Sigma g \ d\mu_{\xi,\eta}\right| = \left|\int_\Sigma gh \ d|\mu_{\xi,\eta}|\right| \leq \int_\Sigma |g||h| \ d|\mu_{\xi,\eta}| \leq \|g\|_\infty \|\mu_{\xi,\eta}\| = \|g\|_\infty \|\|\varphi_{\xi,\eta}\|.$$

Note que na última passagem usamos o fato de que o isomorfismo do qual trata o teorema de Riesz é isométrico. Finalmente, usando a proposição 3.6 e o cálculo acima, temos que $\|\beta_g(\xi, \eta)\| \leq \|g\|_\infty \|\|\varphi_{\xi,\eta}\| \leq \|g\|_\infty \|\xi\|\|\eta\|$. ■

Corolário 3.12 *Seja $g \in B(\Sigma)$ e considere β_g como na definição 3.10. Então, existe um operador $\tilde{\pi}(g) \in B(\mathcal{H})$ tal que $\beta_g(\xi, \eta) = \langle\tilde{\pi}(g)\xi, \eta\rangle$, $\forall \ \xi, \eta \in \mathcal{H}$.*

Demonstração: O resultado segue imediatamente da proposição acima e do teorema de Riesz para operadores sesquilineares (ver [5], página 192). ■

Definição 3.13 *Através do raciocínio acima, definimos a aplicação que associa a cada $g \in B(\Sigma)$ o operador $\tilde{\pi}(g) \in B(\mathcal{H})$.*

Proposição 3.14 *Sejam $\varphi, \psi \in B(\Sigma)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\tilde{\pi}$ da definição 3.13. Então:*

i. $\tilde{\pi}(\alpha\varphi + \psi) = \alpha\tilde{\pi}(\varphi) + \tilde{\pi}(\psi)$

ii. $\tilde{\pi}(\varphi\psi) = \tilde{\pi}(\varphi)\tilde{\pi}(\psi)$

iii. $\tilde{\pi}(\overline{\varphi}) = \tilde{\pi}(\varphi)^*$

Demonstração:

i. A demonstração deste fato é imediata, visto que a integral é linear em $B(\Sigma)$ (ver proposição 6.31).

ii. Sejam $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ e $f, g \in C(\Sigma)$. Note que (ver teorema 6.32)

$$\int_\Sigma f \ d(g\mu_{\xi,\eta}) = \int_\Sigma fg \ d\mu_{\xi,\eta} = \langle\pi(fg)\xi, \eta\rangle = \langle\pi(f)\pi(g)\xi, \eta\rangle = \int_\Sigma f \ d\mu_{\pi(g)\xi,\eta}.$$

Assim, visto que o teorema da representação Riesz estabelece uma bijeção entre $C(\Sigma)^*$ e $M(\Sigma)$, devemos ter $g\mu_{\xi,\eta} = \mu_{\pi(g)\xi,\eta}$. Desta forma, se $\varphi \in B(\Sigma)$

$$\langle \tilde{\pi}(\varphi g)\xi, \eta \rangle = \int_\Sigma \varphi g \; d\mu_{\xi,\eta} = \int_\Sigma \varphi \; dg\mu_{\xi,\eta} = \int_\Sigma \varphi \; d\mu_{\pi(g)\xi,\eta} = \langle \tilde{\pi}(\varphi)\pi(g)\xi, \eta \rangle.$$

Logo, $\tilde{\pi}(\varphi g) = \tilde{\pi}(\varphi)\pi(g)$. Desta igualdade, temos

$$\int_\Sigma g d\varphi\mu_{\xi,\eta} = \int_\Sigma \varphi g d\mu_{\xi,\eta} = \langle \tilde{\pi}(\varphi g)\xi, \eta \rangle = \langle \tilde{\pi}(\varphi)\pi(g)\xi, \eta \rangle = \langle \pi(g)\xi, \tilde{\pi}(\varphi)^*\eta \rangle = \int_\Sigma g d\mu_{\xi,\tilde{\pi}(\varphi)^*\eta}.$$

Novamente, usando a bijetividade estabelecida pelo teorema da representação de Riesz, $\varphi\mu_{\xi,\eta} = \mu_{\xi,\tilde{\pi}(\varphi)^*\eta}$. Assim, dada $\psi \in B(\Sigma)$, temos

$$\langle \tilde{\pi}(\psi\varphi)\xi, \eta \rangle = \int_\Sigma \psi\varphi d\mu_{\xi,\eta} = \int_\Sigma \psi d\varphi\mu_{\xi,\eta} = \int_\Sigma \psi d\mu_{\xi,\tilde{\pi}(\varphi)^*\eta} = \langle \tilde{\pi}(\psi)\xi, \tilde{\pi}(\varphi)^*\eta \rangle = \langle \tilde{\pi}(\varphi)\tilde{\pi}(\psi)\xi, \eta \rangle.$$

Desta forma, visto que ξ, η foram arbitrários, temos que $\tilde{\pi}(\varphi\psi) = \tilde{\pi}(\varphi)\tilde{\pi}(\psi)$.

iii. Seja $\xi \in \mathcal{H}$. Então,

$$\langle \tilde{\pi}(\varphi)^*\xi, \xi \rangle = \langle \xi, \tilde{\pi}(\varphi)\xi \rangle = \overline{\langle \tilde{\pi}(\varphi)\xi, \xi \rangle} = \overline{\int_\Sigma \varphi \; d\mu_{\xi,\xi}} \overset{(\star)}{=} \int_\Sigma \overline{\varphi} \; d\mu_{\xi,\xi} = \langle \tilde{\pi}(\overline{\varphi})\xi, \xi \rangle.$$

Logo, $\tilde{\pi}(\overline{\varphi}) = \tilde{\pi}(\varphi)^*$. Note que em $(\star)$ usamos o fato de que $\mu_{\xi,\xi}$ é uma medida real. Para provar este fato, note que se $f \in C(X)$ tal que $f \geq 0$, então tomando $g = \sqrt{f}$ temos

$$\int_X f \; d\mu_{\xi,\xi} = \langle \tilde{\pi}(f)\xi, \xi \rangle = \langle \tilde{\pi}(g^*g)\xi, \xi \rangle = \langle \tilde{\pi}(g)^*\tilde{\pi}(g)\xi, \xi \rangle \geq 0.$$

Assim, pelo teorema da representação de Riesz, $\mu_{\xi,\xi} \geq 0$ e, portanto, real. ∎

Proposição 3.15 *A aplicação $\tilde{\pi}$ é uma extensão da aplicação π.*

Demonstração: Sejam $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ e $f \in C(\Sigma)$. Então,

$$\langle \tilde{\pi}(f)\xi, \eta \rangle = \beta_f(\xi, \eta) = \varphi_{\xi,\eta}(f) = \langle \pi(f)\xi, \eta \rangle.$$

Visto que a igualdade ocorre para quaisquer $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ fixados, temos que $\tilde{\pi}(f) = \pi(f)$. ∎

Proposição 3.16 *Suponha que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\Sigma)$ é uma sequência uniformemente limitada, ou seja, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\| < \infty$, que converge pontualmente para $g \in B(\Sigma)$. Então, $\tilde{\pi}(g_n) \to \tilde{\pi}(g)$ na topologia fraca, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \tilde{\pi}(g_n)\xi, \eta \rangle = \langle \tilde{\pi}(g)\xi, \eta \rangle$, $\forall\ \xi, \eta \in \mathcal{H}$.*

Demonstração: Seja $s = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|$. Definimos então a função $f(z) = s$, $\forall z \in \Sigma$. Assim, $\|g_n(z)\| \leq f(z)$, $\forall z \in \Sigma$. Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ e sua medida complexa associada $\mu_{\xi,\eta}$, existe uma função $h \in B(\Sigma)$ tal que $|h(x)| = 1$, $\forall\ x \in \Sigma$ e $d\mu_{\xi,\eta} = h\ d|\mu_{\xi,\eta}|$. Logo, utilizando o teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver teorema 6.18), temos para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$:

$$\lim_{n\to\infty} \langle \tilde{\pi}(g_n)\xi, \eta\rangle = \lim_{n\to\infty} \beta_{g_n}(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} \int_\Sigma g_n\ d\mu_{\xi,\eta} = \lim_{n\to\infty} \int_\Sigma g_n h\ d|\mu_{\xi,\eta}| = \int_\Sigma gh\ d|\mu_{\xi,\eta}| =$$
$$\int_\Sigma g\ d\mu_{\xi,\eta} = \beta_g(x, y) = \langle \tilde{\pi}(g)x, y\rangle.$$

■

Definição 3.17 *Uma medida espectral em um espaço mensurável (X, B_X) é uma aplicação $E \to P(E)$ de B_X no conjunto das projeções de algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $P(\varnothing) = 0,\ P(X) = 1_{\mathcal{H}}$*;*

(ii) P *é enumeravelmente aditiva, ou seja, se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos com* $E = \coprod_{n=1}^{\infty} E_n$*(onde o símbolo* $\coprod$ *significa uma união disjunta), então* $P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$*, onde a série é interpretada na topologia fraca.*

Definição 3.18 *Considere o espaço mensurável $(\Sigma, \mathcal{B}_\Sigma)$. Definimos então a aplicação $P : \mathcal{B}_\Sigma \to B(\mathcal{H})$ dada por $P(E) = \tilde{\pi}(1_E)$ (onde 1_E denota a função característica do conjunto E).*

Observação 3.19 *Note que pela proposição 3.14, $P(E)$ é auto-adjunto e idempotente ($P(E)^2 = P(E)$), ou seja, $P(E)$ é uma projeção.*

Proposição 3.20 *Se P é a aplicação da definição 3.18, então P é uma medida espectral.*

Demonstração: i. $P(\varnothing) = \tilde{\pi}(1_\varnothing) = 0$;
ii. $P(\Sigma) = \tilde{\pi}(1_\Sigma) = \pi(1_\Sigma) = 1$;
iii. Seja $E = \coprod_{i\in\mathbb{N}} E_i \subset \Sigma$. Note que a sequência de funções $g_n : \Sigma \to \mathbb{R}$ dadas por $g_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}$ é uma sequência limitada ($\|g_n\|_\infty \leq 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$), e que converge pontualmente

para a função $g = 1_E$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ e $z \in \Sigma$, se $z \notin E$ o resultado é imediato. Se $z \in E$, então $z \in E_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Assim, visto que a união é disjunta, $|g_n(z) - g(z)| = 0 < \varepsilon$, $\forall\, n \geq j$. Logo, usando a proposição 3.16, temos que $\tilde{\pi}(g_n) \to \tilde{\pi}(g)$ na topologia fraca, ou seja, $\langle \tilde{\pi} \left(\sum_{i=1}^{N} 1_{E_i} \right) \xi, \eta \rangle \to \langle \tilde{\pi}(1_E)\xi, \eta \rangle$, $\forall\, \xi, \eta \in \mathcal{H}$. Usando este fato, temos:

$$\langle \left(\sum_{i=1}^{N} P(E_i) \right) \xi, \eta \rangle = \langle \left(\sum_{i=1}^{N} \tilde{\pi}(1_{E_i}) \right) \xi, \eta \rangle = \langle \tilde{\pi} \left(\sum_{i=1}^{N} 1_{E_i} \right) \xi, \eta \rangle \to \langle \tilde{\pi}(1_E)\xi, \eta \rangle = \langle P(E)\xi, \eta \rangle,$$

$\forall\, \xi, \eta \in \mathcal{H}$. Assim, $P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$. ■

4 Integração Espectral

Neste capítulo, usaremos uma construção semelhante a integral de Lebesgue. Porém, chamamos atenção ao fato de que o resultado da integração espectral será um operador em $B(\mathcal{H})$. O objetivo aqui é criar este conceito de integral para que possamos identificar qualquer operador normal com alguma integral deste tipo.

Novamente, neste capítulo, Σ é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Definição 4.1 *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função $s : X \to \mathbb{C}$ é dita simples, se a sua imagem consiste de um número finito de pontos.*

Se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são os valores distintos da função simples s e se $A_i = \{x : s(x) = \alpha_i\}$, então temos que

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i},$$

com os $A_i's$ dois a dois disjuntos e $X = \coprod_{i=1}^{n} A_i$. Claramente, uma função simples s é mensurável se, e somente se, cada A_i é mensurável.

Definição 4.2 *Definimos $S(\Sigma) = \{s : \Sigma \to \mathbb{C} : s \text{ é simples e mensurável}\}$.*

Definição 4.3 *Seja P uma medida espectral em um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$. Se $s : X \to \mathbb{C}$ é uma função simples mensurável e $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ como acima, definimos para cada $E \in \mathcal{B}$*

$$\int_E s \, dP = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i \cap E).$$

Proposição 4.4 *Nas condições da definição acima, se $I, J \in \mathcal{B}$ e $X = I \coprod J$, então,*

$$\int_X s\ dP = \int_I s\ dP + \int_J s\ dP.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}\int_I s\ dP + \int_J s\ dP &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i \cap I) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i \cap J) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P((A_i \cap I) \cup (A_i \cap J)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i) = \int_X s\ dP.\end{aligned}$$

■

Observação 4.5 *Indutivamente, temos que se $E_k \in \mathcal{B}$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$, e $X = \coprod_{k=1}^{n} E_k$, então*

$$\int_X s\ dP = \int_{E_1} s\ dP + \int_{E_2} s\ dP + ... + \int_{E_n} s\ dP.$$

Lema 4.6 *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ e $\{P_i : 1 \leq i \leq n\}$ uma família de projeções não-nulas ortogonais duas a duas em $B(\mathcal{H})$. Então,*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \right\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| := M.$$

Demonstração: Seja $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Tome $\xi_i = P_i(\xi), \forall\ 1 \leq i \leq n$. Então, $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n + \eta$ com $\xi_i \perp \xi_j$ (ou seja, $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = 0$) para $i \neq j$, e $\xi_i \perp \eta$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Assim,

$$\begin{aligned}\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \right) (\xi) \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(\xi), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(\xi) \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_i} \langle P_i(\xi), P_i(\xi) \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \|P_i(\xi)\|^2 \leq \\ &\leq M^2 \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2 \overset{(*)}{\leq} M^2 \|\xi\|^2 = M^2.\end{aligned}$$

Note que em $(*)$ usamos o fato de que, visto que os ξ_i's e η são dois a dois ortogonais, temos (ver [5], página 153)

$$\|\xi\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i + \eta\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2 + \|\eta\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2.$$

Ainda, suponha que o máximo dos $|\lambda_i|$ ocorra na $i_o-ésima$ posição. Assim, tomando $\omega \in Im(P_{i_o})$ (onde $Im(P_{i_o})$ é a imagem da aplicação P_{i_o}) com $\|\omega\| = 1$, temos:

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right)(\omega)\right\| = \|\lambda_{i_o}\omega\| = |\lambda_{i_o}|.$$

Logo, $\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right\| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|.$ ■

A utilidade deste lema, reside no fato de que se as condições da definição 3.17 são satisfeitas, então (usando a notação daquela definição) $\{P(E_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de projeções duas a duas ortogonais (ver [10], proposição 2.5.4).

Proposição 4.7 *Seja P uma medida espectral. A aplicação $\int : S(\Sigma) \to B(\mathcal{H})$ que leva s em $\int_\Sigma s\ dP$ é uma aplicação linear e contínua.*

Demonstração: Sejam $s, t \in S(\Sigma)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são os valores distintos de s, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ são os valores distintos de t, $A_i = \{x : s(x) = \alpha_i\}$ e $B_j = \{x : t(x) = \beta_j\}$, tomando $E_{ij} = A_i \cap B_j$, temos que $s + t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i + \beta_j)1_{E_{ij}}$. Assim,

$$\int_{E_{ij}} s + t\ dP = (\alpha_i + \beta_j)P(E_{ij})$$

e

$$\int_{E_{ij}} s\ dP + \int_{E_{ij}} t\ dP = \alpha_i P(E_{ij}) + \beta_j P(E_{ij}).$$

Visto que Σ é a união disjunta dos E_{ij}'s, usando a observação 4.5, temos que

$$\int_\Sigma s\ dP + \int_\Sigma t\ dP = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i P(E_{ij}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_j P(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i + \beta_j)P(E_{ij}) = \int_\Sigma s + t\ dP.$$

Note que não necessariamente as projeções $P(A_i)$ são não nulas. Porém, ainda podemos usar o lema anterior para concluir que

$$\left\| \int_\Sigma s \; dP \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i) \right\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| = \|s\|_{S(\Sigma)}.$$

Logo, a transformação é contínua e linear. ∎

Proposição 4.8 *Seja P uma medida espectral. Então, $\int$ possui uma extensão linear e contínua (que, por abuso de linguagem, denotaremos pelo mesmo símbolo)*

$$\int : B(\Sigma) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Usaremos a notação $\int(f) = \int f \; dP$.

Demonstração: O resultado segue imediatamente do teorema da extensão de operadores lineares contínuos (ver [5], página 100), junto com o fato de que $\overline{S(\Sigma)} = B(\Sigma)$ (ver proposição 6.36). ∎

5 O Teorema Espectral para Operadores Normais

Chagamos agora ao ponto principal deste trabalho. O que foi feito até aqui, simplesmente foi o desenvolvimento de ferramentas para que fosse possível demonstrar o teorema abaixo. No capítulo 3, usamos uma aplicação π geral para desenvolver o conceito de medida espectral. Porém, neste capítulo, estaremos usando exatamente a aplicação π da proposição 2.30.

Teorema 5.1 *Sejam $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador normal, e $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ tal que $f(\lambda) = \lambda$. Então existe uma medida espectral P em $\sigma(T)$ tal que*

$$T = \int_{\sigma(T)} f \; dP$$

Demonstração: Dado o operador normal T, sejam $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ e considere a medida espectral da definição 3.18. Primeiramente, note que para qualquer conjunto mensurável $E \subset \sigma(T)$, temos:

$$\mu_{\xi,\eta}(E) = \int_{\sigma(T)} 1_E \; d\mu_{\xi,\eta} = \beta_{1_E}(\xi, \eta) = \langle \tilde{\pi}(1_E)\xi, \eta \rangle = \langle P(E)\xi, \eta \rangle.$$

Seja $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ uma função simples mensurável com domínio $\sigma(T)$. Então

$$\int_{\sigma(T)} s \; d\mu_{\xi,\eta} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_{\xi,\eta}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle P(A_i)\xi, \eta \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i)\xi, \eta \right\rangle = \left\langle \left(\int_{\sigma(T)} s \; dP \right) \xi, \eta \right\rangle.$$

Assim, visto que $\overline{S(\Sigma)} = B(\Sigma)$ (ver proposição 6.36), podemos usar a continuidade do produto interno e da integral espectral para estender o resultado acima para qualquer função Borel mensurável limitada g, ou seja

$$\int_{\sigma(T)} g \; d\mu_{\xi,\eta} = \left\langle \left(\int_{\sigma(T)} g \; dP \right) \xi, \eta \right\rangle, \; \forall \; g \in B(\Sigma).$$

Como $\pi(f) = T$ (ver definição 2.27 e proposição 2.29), temos

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \pi(f)\xi, \eta \rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda \; d\mu_{\xi,\eta} = \left\langle \left(\int_{\sigma(T)} \lambda \; dP \right) \xi, \eta \right\rangle.$$

Visto que $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ foram arbitrários, temos que

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \; dP.$$

■

6 Apêndice

6.1 Topologia e Teoria da Medida

Definição 6.1 *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados de conjuntos abertos, que satisfazem:*

(i) $X, \varnothing \in \tau$;

(ii) Se $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \in \tau$;

(iii) Se $\{U_i : i \in I\} \subset \tau \Rightarrow \cup_{i\in I} U_i \in \tau$.

Nós dizemos que (X, τ) é um espaço topológico. Um conjunto F é dito fechado quando seu complementar $X - F$ é aberto.

Definição 6.2 *Se (X, τ) é um espaço topológico e $A \subset X$, a coleção $\tau' = \{G \cap A : G \in \tau\}$ é uma topologia em A chamada de topologia relativa à A.*

Definição 6.3 *Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de um conjunto X é dito ser uma $\sigma-$álgebra em X se $\mathcal{B}$ tem as seguintes propriedades:*

(i) $X \in \mathcal{B}$

(ii) Se $A \in \mathcal{B}$, então $A^c \in \mathcal{B}$, onde A^c é o complemento de A relativo a X.

(iii) Se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *e se $A_n \in \mathcal{B}$ para $n = 1, 2, 3, ...$, então $A \in \mathcal{B}$.*

Definição 6.4 *Se $\mathcal{B}$ é uma $\sigma-$álgebra em X, então $(X, \mathcal{B})$ é chamado de espaço mensurável, e os membros de $\mathcal{B}$ são chamados de conjuntos mensuráveis em X.*

Quando não houver a necessidade de se especificar a σ-álgebra definida em X, usaremos somente X ao invés de $(X, \mathcal{B})$ para identificar tal espaço mensurável.

Definição 6.5 *Seja X um espaço mensurável, Y um espaço topológico e f uma aplicação de X em Y. Se $f^{-1}(V)$ é um conjunto mensurável em X para todo aberto V em Y, dizemos que f é uma função mensurável.*

Proposição 6.6 *Sejam Y e Z espaços topológicos, X um espaço mensurável, $f : X \to Y$ uma função mensurável, e suponha $g : Y \to Z$ uma aplicação contínua. Defina $h = g \circ f$. Então $h : X \to Z$ é mensurável.*

Demonstração: Seja V um aberto em Z. Visto que g é contínua, temos que $g^{-1}(V)$ é aberto em Y. Ainda, como

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

e f é mensurável, temos que $h^{-1}(V)$ é mensurável. Logo, h é mensurável. ∎

Proposição 6.7 *Sejam u e v funções reais mensuráveis em um espaço mensurável X. Defina*

$$f(x) = (u(x), v(x))$$

para todo $x \in X$. Então $f : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é mensurável.

Demonstração: Se R é um retângulo aberto qualquer no plano, com lados paralelos aos eixos, então R é o produto cartesiano de dois segmentos I_1 e I_2, e

$$f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$$

que é mensurável, pois u e v são mensuráveis. Visto que todo aberto V no plano é uma união enumerável de tais retângulos R_i, e como

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i),$$

temos que $f^{-1}(V)$ é mensurável. ∎

Corolário 6.8 *Seja X um espaço mensurável. Então:*

(a) Se $f = u + iv$, onde u e v são funções reais mensuráveis em X, então f é uma função complexa mensurável em X.

(b) Se $f = u+iv$ é uma função complexa mensurável em X, então u, v e $|f|$ são funções reais mensuráveis em X.

(c) Se f e g são funções complexas mensuráveis em X, então $f+g$ e fg também o são.

(d) Se E é um conjunto mensurável em X e se 1_E é a função característica de E, então 1_E é uma função mensurável.

Demonstração: (a) segue das proposições 6.6 e 6.7.
(b) segue da proposição 6.6, com $g(z) = Re(z), Im(z)$ e $|z|$.
Se f e g são reais, (c) segue das proposições 6.6 e 6.7. O caso complexo de (c) segue dos itens (a) e (b) deste corolário.
(d) é imediata. ■

Teorema 6.9 *Se $\mathcal{F}$ é uma coleção qualquer de subconjuntos de X, existe uma menor(no sentido da inculsão de conjuntos) σ-álgebra M em X tal que $\mathcal{F} \subset M$.*

Demonstração: Ver [9], página 12. ■

Definição 6.10 *Seja X um espaço topológico. Pelo teorema acima, existe uma menor σ-álgebra $\mathcal{B}$ em X tal que todo conjunto aberto em X pertence a $\mathcal{B}$. Os membros de $\mathcal{B}$ são chamados de conjuntos Borelianos de X.*

Teorema 6.11 *Suponha que $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra em X e Y é um espaço topológico. Seja $f : X \to Y$.*

(a) Se Ω é a coleção de todos os conjuntos $E \subset Y$ tais que $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}$, então Ω é uma σ-álgebra em Y.

(b) Se f é mensurável e E é um conjunto Boreliano em Y, então $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}$.

(c) Se $Y = [-\infty, \infty]$ e $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{B}$ para todo número real α, então f é mensurável.

Demonstração: (a) segue das relações

$$f^{-1}(Y) = X, \qquad f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A),$$

$$\text{e} \qquad f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup ...) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup ....$$

Para provar (b), seja Ω como em (a); a mensurabilidade de f implica que Ω contem todos os conjuntos abertos em Y, e visto que Ω é uma σ-álgebra, Ω contém todos os Borelianos em Y.

Para provar (c), seja Ω a coleção de todos os conjuntos $E \subset [-\infty, \infty]$ tais que $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}$. Visto que Ω é uma σ-álgebra em $[-\infty, \infty]$, e visto que $(\alpha, \infty] \in \Omega$ para todo número real α, o mesmo é verdade para os conjuntos

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\infty, \alpha - \frac{1}{n}\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\alpha - \frac{1}{n}, \infty\right]^c$$

e $(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty]$.

Visto que todo conjunto aberto em $[-\infty, \infty]$ é união enumerável dos segmentos descritos acima, Ω contém todos os conjuntos abertos e, portanto, f é mensurável. ■

Proposição 6.12 *Se $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ é mensurável, para $n \in \mathbb{N}$ e*

$$g = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \qquad h = \limsup_{n \to \infty} f_n,$$

então g e h são mensuráveis.

Demonstração: $g^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} {f_n}^{-1}((\alpha, \infty])$. Assim, pelo item (c) do teorema acima, g é mensurável. O mesmo ocorre com inf no lugar de sup, e visto que

$$h = \inf_{k \geq 1} \{\sup_{i \geq k} f_i\},$$

temos que h é mensurável. ■

Corolário 6.13 *(a) O limite pontual de uma sequência convergente de funções complexas mensuráveis é mensurável.*

(b) Se f e g são mensuráveis(com imagem em $[-\infty, \infty]$), então $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ também são mensuráveis. Em particular, também são mensuráveis as funções

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{e} \quad f^- = \min\{f, 0\}.$$

Demonstração: Imediata. ■

Definição 6.14 *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Dizemos que $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ é uma medida positiva se:*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) μ *é enumeravelmente aditiva, no senso que sempre que $\{E_n : 1 \leq n < \infty\}$ é uma sequência de membros de $\mathcal{B}$ dois a dois disjuntos, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ é convergente para o limite $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$.*

Se $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ satisfaz as duas condições acima, dizemos que μ é uma medida complexa.

Um espaço de medida é uma tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$, consistindo de um espaço mensurável junto com uma medida positiva (ou uma medida complexa) definida neste espaço.

Definição 6.15 *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. A medida μ é dita finita se $\mu(X) < \infty$. O conjunto das medidas complexas finitas definidas em $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é denotado por $M(X)$.*

Definição 6.16 *Seja μ uma medida positiva. Definimos $L^1(\mu)$ como sendo a coleção de todas as funções complexas mensuráveis f em X tais que*

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Teorema 6.17 ***(Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue)*** *- Suponha que μ é uma medida positiva, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis em X e*

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq \infty$ *para todo* $x \in X$,

(b) $f_n(x) \to f(x)$ *pontualmente.*

Então f é mensurável, e

$$\int_X f_n \; d\mu \to \int_X f \; d\mu$$

Demonstração: Ver [9], página 21. ■

Teorema 6.18 ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** - *Suponha que μ é uma medida positiva e que f_n é uma sequência de funções complexas mensuráveis em X tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

exista para todo $x \in X$. Se há uma função $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \qquad (n = 1, 2, 3, ...; x \in X),$$

então $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demonstração: Ver [9], página 26. ■

Teorema 6.19 *Suponha que μ é uma medida positiva. Se $f_n : X \to [0, \infty]$ é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$ e*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in X)$$

então

$$\int_X f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \; d\mu.$$

Demonstração: Ver [9], página 22. ■

Teorema 6.20 *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Suponha que μ é uma medida positiva com $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(\mu)$, S é um conjunto fechado do plano complexo e*

$$A_E(f) = \tfrac{1}{\mu(E)} \int_E f \; d\mu$$

está em S para todo $E \in \mathcal{B}$ com $\mu(E) > 0$. Então $\mu(J) = 0$, onde $J = \{x \in X : f(x) \notin S\}$.

Demonstração: Ver [9], página 30. ■

Teorema 6.21 *Sejam $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, $g : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável, μ uma medida positiva e*

$$g\mu(E) = \int_E g \, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{B}$. Então $g\mu$ é uma medida positiva em $\mathcal{B}$, e

$$\int_X f \, dg\mu = \int_X fg \, d\mu$$

para toda função mensurável $f : X \to [0, \infty]$.

Demonstração: Seja $E = \coprod_{i=1}^{\infty} E_i$, com $E_i \in \mathcal{B}$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$. Observe que

$$1_E g = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{E_i} g$$

e que

$$g\mu(E) = \int_X 1_E g \, d\mu, \qquad g\mu(E_i) = \int_X 1_{E_i} g \, d\mu.$$

Assim, pelo teorema 6.19 temos que

$$g\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} g\mu(E_i).$$

Visto que $g\mu(\varnothing) = 0$, temos que $g\mu$ é uma medida.
Ainda, se $E \in \mathcal{B}$ temos que

$$\int_X 1_E \, dg\mu = g\mu(E) = \int_E g \, d\mu = \int_X 1_E g \, d\mu.$$

Então, para toda função simples mensurável s temos

$$\int_X s \, dg\mu = \int_X sg \, d\mu.$$

O caso geral segue do teorema da convergência monótona de Lebesgue. ■

Definição 6.22 *Seja μ uma medida complexa em um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$. Definimos então para cada $E \in \mathcal{B}$*

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : E = \coprod_{n=1}^{\infty},\ E_n \in \mathcal{B} \right\}.$$

A função $|\mu|$ é chamada de medida de variação total da medida μ.

Teorema 6.23 *A medida de variação total $|\mu|$ de uma medida complexa μ em $(X, \mathcal{B})$ é uma medida positiva.*

Demonstração: Claramente a imagem de $|\mu|$ está em $[0, \infty]$.
Seja $E = \coprod E_i$, com $E_i \in \mathcal{B},\ \forall\ i \in \mathbb{N}$. Para cada E_i tome um número real t_i tal que $t_i < |\mu|(E_i)$. Pela definição de supremo, existe uma partição A_{ij} de E_i tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{ij})| > t_i,\ (i = 1, 2, 3, ...).$$

Visto que $E = \coprod_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}$, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_i \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\mu(A_{ij})| \leq |\mu|(E).$$

Tomando o supremo do lado esquerdo da desigualdade acima, temos que

$$(*)\ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E).$$

Seja agora, $E = \coprod_{j=1}^{\infty} A_j$. Então, para cada j fixado, temos que $A_j = \coprod_{i=1}^{\infty} A_j \cap E_i$, e para cada i fixado $E_i = \coprod_{j=1}^{\infty} A_j \cap E_i$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i).$$

Visto que a desigualdade acima ocorre para qualquer partição de E, temos que

$$(**)\ |\mu|(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i).$$

De $(*)$ e $(**)$, temos que $|\mu|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i)$. ■

Teorema 6.24 *Se μ é uma medida complexa em X, então*

$$|\mu|(X) < \infty.$$

Demonstração: *Ver [9], página 119.* ■

Definição 6.25 *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço m ensurável. Se μ e λ são medidas complexas de mesmo domínio $\mathcal{B}$, nós definimos $\mu + \lambda$ e $c\mu$ por*

$$(\mu + \lambda)(E) = \mu(E) + \lambda(E)$$
$$(c\mu(E)) = c\mu(E),$$

onde $E \in \mathcal{B}$ e $c \in \mathbb{C}$ qualquer.

Observação 6.26 *É fácil de verificar que $\mu + \lambda$ e $c\mu$ são medidas complexas. Assim, o conjunto das medidas complexas definidas em $\mathcal{B}$ é um espaço vetorial. Também, se definirmos em $(X, \mathcal{B})$*

$$\|\mu\| = |\mu|(X)$$

temos que tal espaço vetorial, torna-se um espaço normado.

Definição 6.27 *Seja μ uma medida positiva em uma $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$, e seja λ uma medida arbitrária em $\mathcal{B}$(λ pode ser positiva ou complexa). Nós dizemos que λ é absolutamente contínua com respeito a μ, e escrevemos $\lambda \ll \mu$, se $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(E) = 0$. Ainda, se existe um conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ para todo $E \in \mathcal{B}$, nós dizemos que λ é concentrada em A. Isto é equivalente a hipótese que $\lambda(E) = 0$ sempre que $E \cap A = \varnothing$.*

Definição 6.28 *Suponha que λ_1 e λ_2 são medidas em $\mathcal{B}$, e suponha que exista um par de conjuntos disjuntos A e B tais que λ_1 é concentrada em A e λ_2 é concentrada em B. Então, nós dizemos que λ_1 e λ_2 são mutualmente singulares, e escrevemos $\lambda_1 \perp \lambda_2$.*

Teorema 6.29 *Sejam μ uma medida positiva finita e λ uma medida complexa em um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$.*

(a) Há um único par de medidas λ_a e λ_s em $\mathcal{B}$ tais que

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

Essas medidas são positivas, e $\lambda_a \perp \lambda_s$.

(b) (Radon-Nikodym) - Há uma única $h \in L^1(\mu)$ tal que

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu, \; \forall \; E \in \mathcal{B}.$$

Demonstração: Ver [9], página 124. ■

Proposição 6.30 *Seja μ uma medida complexa em um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$. Então existe uma função mensurável h tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$ e tal que*

$$d\mu = hd|\mu|.$$

Demonstração: Suponha que $|\mu|(E) = 0$ para algum $E \in \mathcal{B}$. Assim, pela definição de medida de variação total de uma medida, temos que $\mu(E) = 0$. Logo, $\mu \ll |\mu|$. Assim, visto que $\mu = \mu + 0$, o teorema 6.29 garante a existência de alguma $h \in L^1(|\mu|)$ tal que $d\mu = hd|\mu|$.
Seja $A_r = \{x : |h(x)| < r\}$, onde r é algum número positivo , e seja $A_r = \coprod_{j=1}^{\infty} E_j$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{E_j} h \, d|\mu| \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} r|\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r),$$

e pela definição de medida de variação total de uma medida, temos que $|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$. Se $r < 1$, então devemos ter $|\mu|(A_r) = 0$. Logo, $|h| \geq 1$ quase sempre.
Por outro lado, se $|\mu|(E) > 0$, usando o fato de que $d\mu = hd|\mu|$, temos que

$$\left| \tfrac{1}{|\mu|(E)} \int_E h \, d|\mu| \right| = \tfrac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1.$$

Aplicando agora o teorema 6.20 (com o disco unitário no lugar de S), concluímos que $|h| \leq 1$ quase sempre.

Seja $B = \{x \in X : |h(x)| \neq 1\}$. Acamos de mostrar que $|\mu|(B) = 0$; assim, basta definirmos $h(x) = 1, \ \forall \ x \in B$ para obtermos sa função desejada. ■

Proposição 6.31 *Seja X um espaço topológico e considere o espaço de medida $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$, onde μ uma medida complexa . Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e f, g são funções Borel mensuráveis limitadas, então*

$$\int_X (\alpha f + g) \ d\mu = \alpha \int_X f \ d\mu + \int_X g \ d\mu.$$

Demonstração: *A demonstração é trivial.* ■

Teorema 6.32 *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, onde μ uma medida complexa, $g : X \to \mathbb{C}$ uma função mensurável limitada e*

$$g\mu(E) = \int_E g \ d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{B}$. Então $g\mu$ é uma medida complexa em $\mathcal{B}$, e

$$\int_E f \ dg\mu = \int_E fg \ d\mu$$

para toda função mensurável limitada f.

Demonstração: A demonstração de que $g\mu$ é uma medida complexa segue o mesmo raciocínio que na demonstração do teorema 6.21.
Dividiremos esta demonstração em cinco passos:

1) Suponha primeiramente que $f : X \to \mathbb{R}$ limitada, $g : X \to [0, \infty)$ e μ é uma medida positiva. Temos que $f = f^+ - f^-$, sendo que f^+ e f^- são positivas. Assim,

$$\int_E f \ dg\mu = \int_E f^+ - f^- \ dg\mu = \int_E f^+ \ dg\mu - \int_E f^- \ dg\mu =$$
$$\int_E f^+ g \ d\mu - \int_E f^- g \ d\mu = \int_E fg \ d\mu.$$

2) Suponha agora $f : X \to \mathbb{C}$ limitada, e g e μ como acima. Temos que $f = u + iv$, com $u = Re(f)$ e $v = Im(f)$. Assim, usando o passo 1 acima

$$\int_E f \ dg\mu = \int_E u \ dg\mu + i \int_E v \ dg\mu = \int_E ug \ d\mu + i \int_E vg \ d\mu = \int_E fg \ d\mu.$$

3) Suponha $f : X \to \mathbb{C}$ limitada, $g : X \to \mathbb{R}$ limitada e μ como acima. Decomponha $g = g^+ - g^-$. Note que

$$g\mu(E) = \int_E g\ d\mu = \int_E g^+\ d\mu - \int_E g^-\ d\mu = g^+\mu(E) - g^-\mu(E),\ \forall\ E \in \mathcal{B}.$$

Assim,

$$\int_E f\ dg\mu = \int_E f\ dg^+\mu - \int_E f\ dg^-\mu = \int_E fg^+\ d\mu - \int_E fg^-\ d\mu = \int_E fg\ d\mu$$

4) Suponha $f : X \to \mathbb{C}$ limitada, $g : X \to \mathbb{C}$ limitada e μ como acima. Decomponha $g = a + ib$, com $a = Re(g)$ e $b = Im(g)$. Note que

$$g\mu(E) = \int_E g\ d\mu = \int_E a\ d\mu + i\int_E b\ d\mu = a\mu(E) + ib\mu(E),\ \forall\ E \in \mathcal{B}.$$

Assim,

$$\int_E f\ dg\mu = \int_E f\ da\mu + i\int_E f\ db\mu = \int_E fg\ d\mu.$$

5) Finalmente, sejam $f : X \to \mathbb{C}$ limitada, $g : X \to \mathbb{C}$ limitada e μ uma medida complexa. Pela proposição 6.30, existe h mensurável tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$ e $d\mu = hd|\mu|$. Note que

$$g\mu(E) = \int_E g\ d\mu = \int_E g\ dh|\mu| = \int_E gh\ d|\mu| = gh|\mu|(E),\ \forall\ E \in \mathcal{B}.$$

Assim,

$$\int_E f\ dg\mu = \int_E f\ dgh|\mu| = \int_E fgh\ d|\mu| = \int_E fg\ d\mu. \qquad \blacksquare$$

6.2 Teoremas de Densidade

Teorema 6.33 *(Teorema de Stone-Weierstrass) Seja $\mathcal{A}$ uma sub-álgebra auto-adjunta de $C(X)$, onde X é um espaço de Hausdorff compacto. Suponha que $\mathcal{A}$ satisfaça as seguintes condições:*

(i) $\mathcal{A}$ contem as funções constantes(ou equivalentemente, $\mathcal{A}$ é uma sub-álgebra unital de $C(X)$); e

(ii) $\mathcal{A}$ separa pontos em X, ou seja, se x, y são dois pontos distintos quaisquer em X, então existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Então, $\mathcal{A}$ é densa em $C(X)$.

Demonstração: Ver [10], página 234. ∎

Proposição 6.34 *Sejam $\Sigma \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e $\mathcal{P} \subset C(\Sigma)$ o conjunto das funções f da forma $f(z) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} z^j \overline{z}^k$. Então, $\mathcal{P}$ é densa em $C(\Sigma)$.*

Demonstração: Claramente $\mathcal{P}$ é uma sub-álgebra auto-adjunta de $C(\Sigma)$, e $1 \in \mathcal{P}$. Suponha agora, que $x, y \in X$ com $x \neq y$. Tomando a função identidade $f(x) = x$, que está em $\mathcal{P}$, temos que $f(x) \neq f(y)$. Logo, por Stone-Weierstrass, $\mathcal{P}$ é densa em $C(\Sigma)$. ∎

Lema 6.35 *Seja X um espaço topológico e seja $\mathcal{B}_X$ a σ-álgebra Boreliana de X. Se f é uma função Borel mensurável limitada em X com $f \geq 0$, então existe uma função simples g tal que $0 \leq g \leq f$ e*

$$\|f - g\|_\infty \leq \tfrac{\|f\|_\infty}{2}.$$

Demonstração: *Seja $c = \frac{\|f\|_\infty}{2}$, e defina $E = \{x : f(x) > c\}$. Assim, $g = c1_E$ é a função desejada.* ∎

Proposição 6.36 *Seja X um espaço topológico e seja $\mathcal{B}_X$ a σ-álgebra Boreliana de X. Se $f : X \to \mathbb{R}$ uma função Borel mensurável limitada em X, então existe uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples Borel mensuráveis que converge uniformemente para f.*

Demonstração: Só precisamos mostrar o resultado para o caso em que $f \geq 0$. Para o caso geral, escreva $f = f^+ - f^-$.
Seja $c = \|f\|_\infty$. Pelo lema anterior, existe uma função simples g_1 tal que

$$0 \leq g_1 \leq f$$

e

$$\|f - g_1\|_\infty \leq \tfrac{c}{2}.$$

Aplicando o lema para a função $f - g_1$, obtemos uma função simples g_2 tal que

$$0 \leq g_2 \leq f - g_1$$

e

$$\|(f - g_1) - g_2\|_\infty \leq \tfrac{\|f-g_1\|_\infty}{2} \leq \tfrac{c}{4}.$$

Indutivamente, nós obtemos uma função simples g_n tal que

$$0 \leq g_n \leq f - (g_1 + g_2 + ... + g_{n-1})$$

e

$$\|f - (g_1 + g_2 + ... + g_n)\|_\infty \leq \tfrac{c}{2^n}.$$

Assim, as funções $s_n = g_1 + g_2 + ... + g_n$ são as funções simples procuradas. ∎

Corolário 6.37 *Na proposição acima, se $f : X \to \mathbb{C}$ o resultado também é válido.*

Demonstração: Se $f = u + iv$, onde u e v são funções reais mensuráveis em X, basta aplicar o resultado acima para u e v. ∎

Conclusão

Ao realizar este trabalho, tivemos algumas dificuldades para contornar os problemas que se originaram a partir da escolha de nossa C^*-álgebra. Porém, o resultado foi muito satisfatório, e podemos perceber o quão simples ficou reduzido o texto.

Além de propiciar uma leitura mais rápida e esclarecedora sobre o assunto, tentamos ao máximo explicitar o objetivo de cada capítulo, a fim de o leitor entender perfeitamente o que se passa por trás do texto.

Finalmente, acreditamos que o objetivo do trabalho foi alcançado, e durante todo este caminho aprendemos vários conceitos importantes da parte introdutória da teoria de C^*-álgebras.

Referências

[1] AHLFORS, L. V. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* 3rd ed. New York: McGraw-Hill, c1979. 331p. ISBN: 0070006571.

[2] ARVESON, W. *An invitation to C* - Algebras.* New York: Springer-Verlag, 1976. 106p. ISBN: 0387901760.

[3] BERBERIAN, S. K. *Measure and integration.* New York: Macmillan; London: Collier-Macmillan, c1965. 312p. (A series of advanced mathematics texts) ISBN: 0828402418.

[4] FERNANDEZ, P. J. *Medida e integração.* Rio de Janeiro: IMPA, c1996. 198p. ISBN: 8524401052.

[5] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications.* New York: J. Wiley, 1989. 688p. (Wiley classics library) ISBN 0471504599.

[6] LIMA, E. L. *Curso de analise.* 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006- v1. (Projeto Euclides) ISBN: 8524401184.

[7] RUDIN, W. *Functional analysis.* New Delhi: Tata McGraw-Hill, c1973. 397p. ISBN: 0070542368.

[8] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis.* 2nd. ed. New York: McGraw-Hill; Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, c1964. 270p. ISBN: 0070542317.

[9] RUDIN, W. *Real and complex analysis.* New York: McGraw-Hill, c1966. 412p. ISBN: 0070542341.

[10] SUNDER, V. S. *Functional Analysis: Spectral Theory.* Basel:Birkhauser, 1998. 241p. (Birkhauser Advanced texts). ISBN: 3764358920.

[11] YOSHIDA, K. *Functional Analysis.* 5th ed. Berlin: Springer, 1978. 500p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 123) ISBN 3540068120.

[12] ARVESON, W. *A short course on spectral theory.* New York: Springer, c2002. 135p. ISBN: 0387953000.