Laboratório Nacional de Computação Científica

Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

Sistemas com chaveamento

Por

Daniela Polessa Paula

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

JULHO DE 2009

SISTEMAS COM CHAVEAMENTO

Daniela Polessa Paula

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Marcelo Dutra Fragoso, Ph.D
(Presidente)

Prof. Eduardo Fontoura Costa, Ph.D

Prof. Jack Baczynski, D.Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
JULHO DE 2009

Paula, Daniela Polessa

P323s sistemas com chaveamento / Daniela Polessa Paula. Petropólis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2009.

xv, 104 p. : il.; 29 cm

Orientador: Marcelo Dutra Fragoso

Dissertação (M.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2009.

1. Markov, Processos de 2. Sistemas com chaveamento 3. Função comum de Lyapunov. I. Fragoso, Marcelo Dutra. II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD 519.233

-Mamãe, porque o céu é azul?

E a mãe, que não gostava que a filha ficasse sem respostas:

-O céu é formado por muitas gotinhas de água, como uma enorme piscina.

-Então posso mergulhar no céu?

-Claro!

Foi então que a mãe fechou os olhinhos da menina e rapidamente a criança começou a maquinar: conheceu anjos com rabo de peixe e peixes com asas de anjo.

A mãe, tomando sua filha no colo, fechou também seus olhos e seguiu com ela, brincando de fazer ciência.

Aos meus pais Sueli e Devanir.

Agradecimentos

Aos meus pais e amigos que me acompanharam todo esse tempo. Aos professores Nei Rocha, Eduardo Costa e Jack Baczynski pela leitura e sugestões valorosas.

Resumo da Dissertação apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SISTEMAS COM CHAVEAMENTO

Daniela Polessa Paula

Julho , 2009

Orientador: Marcelo Dutra Fragoso, Ph.D

Devido em parte, ao considerável corpo de resultados teóricos para Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLMS), tem havido recentemente uma intensa interação entre a teoria clássica de sistemas com chaveamento (switched systems) e a teoria de SLSM. Apesar do desenvolvimento dessas teorias terem acontecido essencialmente de maneira independentes, num sentido amplo SLMS pode ser visto como um sistema com chaveamento cujo mecanismo de chaveamento é estocástico. Motivados pela diversidade de métodos dessas teorias e sua enorme potencialidade no tratamento de sistemas que exigem comportamentos tolerantes a falhas (faz parte do que se denomina na literatura especializada como safety-critical and high integrity systems) é nossa intenção nesta dissertação fazer uma síntese dos métodos mais relevantes, contrapondo as duas teorias. Tendo em vista a enorme quantidade de resultados, focaremos apenas o problema de estabilidade.

Começaremos o estudo com critérios já conhecidos como a construção de uma função comum de Lyapunov para os sistemas e outros que dizem respeito à estabilidade em classes de subsistemas lineares que possuem certas particularidades como comutatividade e solubilidade da álgebra de Lie gerada pela coleção de matrizes. Em seguida, apresentaremos os conceitos de tempo médio de habitação, funções de Lyapunov por partes e os resultados sobre design de switch.

Através do estudo do tempo médio de habitação em sistemas lineares com matrizes estáveis e instáveis, juntamente com os critérios já estudados referentes às

classes de subsistemas para as quais é possível a construção de uma função comum de Lyapunov, chegamos a alguns resultados para estabilidade, que aplicamos ao caso de chaveamento Markoviano.

Abstract of Dissertation presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.)

SWITCH SYSTEMS

Daniela Polessa Paula

July, 2009

Advisor: Marcelo Dutra Fragoso, Ph.D

Due, in part, to the nowadays considerable body of theoretical results for Markov Jump Linear Systems (MJLS), there has been recently an intense interplay between the classical switch systems and MJLS theory. Although the development of these theories came up independently, in a broad way MJLS can be seen as a class of switch systems with a stochastic switching mecanism. Motivated by the diversity of methods of these theories and its potentiality in the treatment of systems with requires tolerance to failure (the so-called safety-critical and high-integrity systems), it is our intention in this dissertation to make up a synthesis of the most relevant methods, setting against the two theories. In view of the huge amount of results of these theories, we focus here just on the stability problem.

We begin presenting well known tools such as common Lyapunov functions and others which are related to involving classes of linear subsistems with certain particularities such as commutativity and solubility of Lie algebra. Rigth after, we present the concept of average dwell time, part Lyapunov functions and results about design of switch.

Using the average dwell time at the linear systems with stable and unstable systems with the rules already demonstrated we claim some results about stability that applied at linear systems with markovian switch.

Sumário

Lista de Figuras

Figura

Lista de Tabelas

Tabela

Capítulo 1

Introdução

Um *sistema com chaveamento* (switch) é normalmente descrito na literatura especializada por uma equação diferencial da forma:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$$

sendo $\{f_{\sigma(t)} : \sigma(t)\epsilon P\}$ uma família de funções suficientemente regulares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, parametrizadas por algum conjunto finito $\mathcal{P}$, onde:

- $\sigma(t) : [0, \infty) \to \mathcal{P}$ é uma *função constante por partes* denominada *sinal de chaveamento*.

Além de introduzir questões interessantes de um ponto de vista teorico, o chaveamento entre os elementos de uma família de subsistemas de um sistema pode modelar de forma adequada, por exemplo, *mudanças abruptas na estrutura do sistema*. Diversos sistemas dinâmicos são inerentemente vulneráveis a *mudanças abruptas em suas estruturas* devido, por exemplo, a *falhas* em componentes ou/e interconexões (as vezes denominado na literatura de comportamento de regime múltiplo, ver, p.ex., [73]. Isso acontece, por exemplo, em sistemas de manipuladores robóticos, em sistemas de controle de aviões, estruturas flexíveis de grande porte para estações espaciais (tais como antenas, aparatos solares,etc) e perda abrupta de sinais em comunicação sem fio (*wireless*), onde a falha de um atuador ou sensor é uma ocorrência bastante comum. Na economia essas mudanças recebem o nome de *volatilidade*. No estudo da dinâmica de populações, variação abrupta na *deriva genética* devido a perturbações de natureza ambientais é uma variável importante. Na área médica esse cenário é considerado, por exemplo, no desenvolvimento de técnicas digitais para o diagnóstico automático de eletrocardiogramas, onde uma *mudança abrupta* no rítmo do coração é um parâmetro importante (ver,p.ex.,[73]).

O problema de estabilidade em sistemas com chaveamento tem sido tratado na literatura especializada, basicamente através de duas abordagens:

- A que busca critérios para estabilidade em sistemas com *chaveamento arbitrário* como, por exemplo, a procura por uma *função comum de Lyapunov* para todos os subsistemas;

- A que através de *funções de Lyapunov por partes* estabelece, para certos sinais de chaveamento, o *tempo médio de habitação* que garante a estabilidade do sistema.

Para a primeira abordagem, no caso de sistemas lineares, a estabilidade pode ser garantida através de restrições sobre a família de matrizes que gera os subsistemas tais como serem *triangulares superiores* [7] ou *matrizes que comutam* [50] e, mais recentemente, a solubilidade da *álgebra de Lie* gerada pelas matrizes e critérios sobre os *operadores de brackets* (definição no apêndice), foram utilizados [2], [3], [1]. Alguns desses resultados possuem extensões para o caso de sistemas não-lineares, mas todos tratam de estabilidade diante de um chaveamento arbitrário fornecendo critérios apenas de suficiência para a estabilidade. A grande desvantagem é que critérios desse tipo restringem a análise apenas àqueles sistemas compostos por *subsistemas estáveis*.

É um fato bastante conhecido que subsistemas serem estáveis ou instáveis por si só não garante a estabilidade. Há casos em que é possível construir leis de chaveamento que desestabilizam um conjunto de subsistemas estáveis, mas que também podem estabilizar uma família de instáveis. A segunda maneira de se abordar o problema leva esses fatos em consideração. Nesse caso, há resultados para sistemas lineares com matrizes estáveis e instáveis que fazem uma análise, para determinadas classes de chaveamento, do tempo médio de habitação necessário para que se garanta a estabilidade, mas novamente fornecem *condições apenas suficientes* para estabilidade [44]. Uma solução para o problema de busca por condições necessárias e suficientes para estabilidade foi encontrada para sistemas de segunda ordem [70] e também para o caso em que a lei de chaveamento é um *processo Markoviano*, fazendo uso das relações entre as matrizes dos subsistemas e a matriz das taxas de transição do processo [45].

No caso em que o chaveamento é modelado por um processo de Markov, o sinal de chaveamento é descrito por:

- $\sigma(t) : [0, \infty) \to \mathcal{P}$ é uma *cadeia de Markov*.

Nesse caso, o vasto conjunto de resultados relevantes, disponível na literatura, tem se concentrado na análise da classe dos *sistemas lineares com saltos Markovianos* (SLSM). O tratamento do problema de estabilidade nesse cenário é feita, essencialmente através de:

- *Teoria de Operadores*, que permite a obtenção de resultados *espectrais*, assim como através de *funções de Lyapunov interconectadas*. Os resultados oferecem condições necessárias e suficientes.

O foco principal, que permeará grande parte desta dissertação, será uma discussão crítica sobre as duas abordagens que tratam do problema de estabilidade para os sistemas com chaveamento (equação (1.1), caracterizada acima através dos sinais de chaveamento ($\sigma(t) : [0, \infty) \to \mathcal{P}$ é uma *função constante por partes* ou uma cadeia de Markov). A motivação principal é contrapor as duas abordagens, que se distinguem pelo conjunto de resultados relevantes obtidos ao longo dos últimos 20 anos. Embora mais recentemente tenha havido um esforço para estender os resultados para o caso estocástico, a primeira abordagem concentra-se na análise de *chaveamento determinísticos*.

Neste trabalho, utilizamos a técnica de design atráves da aplicação dos conceitos de *tempo médio de habitação* e *funções de Lyapunov por partes* em sistemas com chaveamento Markoviano em dois casos: primeiramente, considerando o sistema composto por subsistemas estáveis, e no segundo caso, por subsistemas estáveis e instáveis. Dessa forma, conseguimos estabelecer hipóteses para estabilidade estocástica cujas interpretações, em certo sentido, se aproximam do tempo médio de habitação no caso dos sistemas determinísticos. Realizamos por fim, um estudo comparativo entre os resultados obtidos em [45] e os critérios que obtivemos da aplicação da técnica de design para o caso de chaveamento Markoviano.

Além disso, integramos as duas formas de se analisar a estabilidade, buscando resposta para a seguinte pergunta:

(P) : *O que ocorre com os resultados que garantem a estabilidade em um chaveamento arbitrário de sistemas estáveis, se supormos que existem subsistemas estáveis e instáveis?*

Para isso, aplicamos as técnicas de design às classes de sistemas lineares estáveis para as quais é possivel construir uma função comum de Lyapunov.

Dividimos o trabalho da seguinte maneira: o segundo capítulo é uma visão histórica de como o problema de estabilidade tem sido abordado na literatura especializada. No capítulo 3, estão presentes as definições e teoremas de Lyapunov para sistemas sem chaveamento. No capítulo 4, apresentamos de que forma as definições e teoremas estudados no capítulo 3 foram estendidas para o caso de sistemas com chaveamento. Apresentamos também os resultados que têm como hipóteses a comutatividade, o fato de serem matrizes triangulares superiores e o fato de ser a álgebra de Lie solúvel e que fornecem critérios para a estabilidade em sistemas com chaveamento arbitrário. No capítulo 5, apresentamos o problema de design, a definição de tempo médio de habitação, funções de Lyapunov por partes e os resultados que consideram o chaveamento entre sistemas lineares com matrizes estáveis e instáveis. Ao final do capítulo, revisitamos o problema de estabilidade em chaveamento arbitrário sob a ótica dos elementos que compõem o design considerando o sistema composto por subsistemas estáveis e instáveis e obtemos como resultados o teorema 28 e os corolários 29 e 30. No capítulo 6, estão presentes os teoremas e definições de estabilidade para o caso de chaveamento Markoviano, além de um estudo comparativo entre os resultados para estabilidades estocástica e àqueles que levam em consideração um chaveamento arbitrário (álgebra de Lie gerada pelas matrizes e comutatividade).

No capítulo 7 demonstramos nossos resultados, teoremas 48, 49, 52 e 53, que dizem respeito ao design em chaveamento Markoviano de sistemas estáveis e estáveis e instáveis.

Capítulo 2

Estabilidade em sistemas com chaveamento: Um breve histórico

As diversas aplicações de sistemas com chaveamento, como em controle de sistemas mecânicos, indústrias automotivas e em controle de tráfego aéreo surgiram como um dos principais motivadores para a utilização desse tipo de sistema aliado ao fato de que muitos fenômenos podem ter seus comportamentos descritos por um chaveamento entre famílias de subsistemas que dependem de fatores ambientais.

Um sistema com chaveamento pode ser compreendido como um sistema dinâmico formado por uma família de subsistemas e uma regra de associação chamada sinal de chaveamento. É ela quem será responsável por designar qual dos subsistemas estará ativo em um determinado instante de tempo. Muitos estudos foram realizados e continuam sendo feitos a respeito de três problemas básicos envolvendo estabilidade e design de sistemas com chaveamento:

- estabilidade diante de um chaveamento arbitrário.
- construção de sinais de chaveamento estabilizadores do sistema.
- estabilidade para certas classes de chaveamento.

Matematicamente, um sistema, a tempo contínuo, com chaveamento pode ser descrito por uma equação diferencial da forma:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)) \tag{2.1}$$

onde $\{f_{\sigma(t)} : \sigma(t) \epsilon P\}$ é uma família de funções suficientemente regulares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ parametrizadas por algum conjunto de índices $\mathcal{P}$ e $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$ uma função constante por partes denominada sinal de chaveamento.

No caso particular onde os subsistemas são lineares, $f_p(x(t)) = A_p x(t)$ e $A_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para cada $p \in \mathcal{P}$, obtemos o sistema linear $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(x(t))$.

O **primeiro problema básico** pode ser formulado da seguinte maneira:

(P1) Encontrar condições que garantam que o sistema com chaveamento (2.1) seja assintóticamente estável para um sinal de chaveamento arbitrário.

Podemos perceber que uma condição necessária para estabilidade assintótica com chaveamento arbitrário é que *todos os subsistemas individuais sejam assintóticamente estáveis*. Para exemplificar: se tivermos o p-ésimo subsistema instável, o sistema com chaveamento será instável se tomarmos como lei de chaveamento $\sigma(t)$ constante e igual à p e como desejamos obter um critério eficaz diante de qualquer lei chaveamento, precisamos que todos os subsistemas sejam estáveis. Entretanto, a estabilidade de todos os subsistemas não é suficiente para garantir a estabilidade do sistema com chaveamento já que, em alguns casos, é possível construir um chaveamento suficientemente rápido capaz de desestabilizar uma coleção de sistemas estáveis, como poderemos mais tarde verificar. Se isso acontece, poderemos nos perguntar para quais classes de chaveamento o sistema será estável. Isso nos remete ao **segundo problema** muito estudado:

(P2) Como construir sinais de chaveamento estabilizadores do sistema (2.1).

Basicamente, foram encontradas garantias para estabilidade diante de *chaveamento lento*, assumindo todos os subsistemas estáveis. Naturalmente surge a pergunta que deu origem ao **terceiro problema**:

(P3) É possível identificar classes de chaveamento que torne estável um sistema composto por subsistemas estáveis e instáveis?

Para esse problema de design foram encontradas condições para estabilidade também através da construção de um chaveamento suficientemente lento, o que significa dizer que, se o sistema permanecer um tempo suficientemente grande, chamado *tempo de habitação*, em cada subsistema, a estabilidade é garantida.

Para o primeiro problema, a abordagem consistiu no uso da *função comum de Lyapunov*. Foram estudadas hipóteses sob as quais é possível garantir a existência de uma função comum de Lyapunov para todos os subsistemas. Como isso garante a estabilidade para qualquer sinal de chaveamento, dizemos então que tal estabilidade é uniforme com relação ao chaveamento. No caso de sistemas lineares, alguns resultados seguindo essa linha têm em comum a identificação de classes de matrizes para as quais é possível a construção de uma função comum de Lyapunov, esses resultados utilizaram como condições:

- a comutatividade entre as matrizes dos subsistemas [50],
- o fato de os subsistemas serem compostos por *matrizes triangulares superiores* [7], [15],
- a solubilidade da álgebra de Lie gerada por suas matrizes [2],[3],

alguns deles possuem extensões para o caso de sistemas não-lineares. Para todas essas classes de subsistemas lineares estáveis pode ser construída uma função comum de Lyapunov, como verificaremos oportunamente.

A conexão entre estabilidade de sistemas lineares com chaveamento e as propriedades da álgebra de Lie associada foi discutida pela primeira vez por Gurvits em [51]. Seus estudos se concentraram em sistemas lineares a tempo discreto da forma $x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k)$. Gurvits conjecturou que se a álgebra de Lie é nilpotente, então o sistema é assintóticamente estável para todo sinal de chaveamento σ. Mais tarde Liberzon, Hespanha e Morse em [3] mostraram, para os sistemas a tempo contínuo, que se a álgebra de Lie é solúvel, então a família de subsistemas possui uma função comum quadrática de Lyapunov. Para isso, foi utilizado o teorema de Lie que garante, para uma *álgebra de Lie solúvel*, a existência de uma base na qual todas as matrizes dos subsistemas são *triangulares superiores* e, para subsistemas estáveis desse tipo, a estabilidade é garantida (ver, p.ex., [7] e [15]). Recentemente, o problema de estabilidade em um chaveamento arbitrário tem sido abordado utilizando como ferramenta, *métodos variacionais*; basicamente a idéia por trás dessa abordagem é procurar uma caracterização para o pior caso, i.e., a mais instável lei de chaveamento e analisar o comportamento dessa única trajetória, suprimindo a necessidade da análise das infinitas soluções do sistema (2.1) que existem para cada condição inicial. Se tal solução for estável, então a estabilidade para o sistema pode ser garantida. Pyatnitskiy e Rapoport foram os pioneiros em desenvolver a abordagem variacional para a caracterização do pior caso de lei de chaveamento e a correspondente trajetória em sistemas lineares [58]. Mais recentemente, o mesmo problema foi estudado utilizando técnicas de *programação dinâmica* [59].

Encontrar *condições necessárias e suficientes* para estabilidade em qualquer regime de chaveamento permanece ainda um problema em aberto. Nesse sentido, o estudo via *métodos variacionais* promete ser um caminho promissor já que foram encontradas condições necessárias e suficientes para o caso de sistemas de segunda ordem utilizando esses métodos (ver, p.ex. [70] e [68]).

O segundo e terceiro problema foram estudados utilizando conceitos novos, como *funções de Lyapunov por partes* e *tempo médio de habitação*. Hespanha e Morse [43] introduziram o conceito de tempo médio de habitação e utilizaram-no juntamente com as múltiplas funções de Lyapunov para provar que, para tempo médio de habitação maior que uma determinada constante suficientemente grande e com todos os subsistemas estáveis, o sistema com chaveamento é exponencialmente estável. Desenvolvendo essas mesmas idéias para sistemas lineares com matrizes estáveis e instáveis, temos o resultado de Michael, Hu , Yashuda e Zhai [44]. Nesse trabalho foi construída uma classe de chaveamento diante da qual é possível garantir a estabilidade para um determinado tempo médio de habitação. Teremos a oportunidade de analisar esses importantes resultados não de forma exaustiva e sim com o intuito de aclarar os resultados e análises deste trabalho.

Capítulo 3

Aspectos relevantes sobre estabilidade

Enunciaremos aqui alguns teoremas e conceitos importantes da teoria de estabilidade de sistemas sem chaveamento, como estabilidade assintótica e exponencial, que serão fundamentais para a compreensão futura dos resultados. As demonstrações dos resultados aqui explicitados podem ser encontradas em [53], [52] e [46].

Consideremos o sistema invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

onde $f(x(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função localmente Lipschitziana. Assumindo 0 um ponto de equilíbrio do sistema, i.e., $f(0) = 0$, estudaremos propriedades de estabilidade nesse ponto.

3.0.1 Definições

A origem é dita um ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov, se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que:

$$| x(0) | \leq \delta \qquad \Rightarrow \qquad | x(t) | \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

O sistema (3.1) é dito assintoticamente estável se a origem é ponto de equilíbrio estável e δ pode ser escolhido de tal maneira que:

$$| x(0) | \leq \delta \qquad \Rightarrow \qquad x(t) \to 0$$

quando $t \to \infty$.

O conjunto de todos os estados iniciais para os quais as trajetórias convergem para a origem é chamado região de atração. Se tal condição ocorre para todo δ, i.e., se a origem é um ponto de equilíbrio estável e a região de atração é o espaço inteiro então, o sistema (3.1) é dito globalmente assintoticamente estável.

Se o sistema não é necessariamente estável mas tem a propriedade de que toda solução com condições iniciais em alguma vizinhança da origem converge para a origem, então o sistema é dito localmente atrator. Dizemos que o sistema é globalmente atrator se as soluções convergem para a origem para todas as condições iniciais.

O sistema (3.1) é dito exponencialmente estável se há constantes positivas δ, c e λ tais que todas as soluções de (3.1) com $| x(0) | \leq \delta$ satisfazem:

$$| x(t) | \leq c \, | x(0) | \exp(-\lambda t), \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.2}$$

Se a desigualdade (3.2) ocorre para todo δ, o sistema é dito globalmente exponencialmente estável.

Uma função $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é dita ser de classe $\mathcal{K}$ se é contínua, estritamente crescente e $\alpha(0) = 0$. Se α também é ilimitada então é dita ser de classe $\mathcal{K}_\infty$. Uma função $\beta : [0, \infty) \times \to [0, \infty)$ é dita ser de classe $\mathcal{KL}$ se $\beta(., t)$ é de classe $\mathcal{K}$ para todo $t \geq 0$ e $\beta(r, t)$ tende a 0 quando $t \to \infty$ para cada $r \geq 0$ fixo. Denotaremos $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, $\beta \in \mathcal{KL}$ para indicar que α é uma função de classe $\mathcal{K}_\infty$ e β de classe $\mathcal{KL}$.

Reescrevendo então as definições acima de estabilidade de uma forma compacta temos que a estabilidade do sistema (3.1) é equivalente à propriedade: existem $\delta > 0$ e uma função α de classe $\mathcal{K}$ tais que todas as soluções com $| x(0) | \leq \delta$ satisfazem:

$$| x(t) | \leq \alpha(| x(0) |) \qquad \forall t \geq 0.$$

Estabilidade assintótica é equivalente à existência de um $\delta > 0$ e uma função de classe $\mathcal{KL}$ tais que todas as soluções com $| x(0) | \leq \delta$ satisfazem:

$$| x(t) | \leq \beta(| x(0) | , t), \quad \forall t \geq 0.$$

Estabilidade assintótica global equivale à existência de uma função β de classe $\mathcal{KL}$ tal que a desigualdade

$$| x(t) | \leq \beta(| x(0) | , t), \quad \forall t \geq 0$$

é alcançada para todas as condições iniciais.

Estabilidade exponencial significa que a função β assume a seguinte forma: $\beta(r, s) = cr \exp(-\lambda s)$ para algum $c, \lambda > 0$.

3.0.2 Teorema de Lyapunov

Considere uma função $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (continuamente diferenciável). Ela é chamada positiva definida se $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ $\forall x \neq 0$. Se $V(x) \to \infty$ quando $| x | \to \infty$, então V é dita *ilimitada radialmente*. Se V é tanto positiva definida quanto ilimitada radialmente, então existem duas funções α_1 e α_1 de classes $\mathcal{K}_\infty$ tais que V satisfaz:

$$\alpha_1(\mid x \mid) \leq V(x) \leq \alpha_1(\mid x \mid), \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^n$$

Para $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ temos como resultado principal da teoria de estabilidade de Lyapunov:

Teorema 1 Suponhamos que exista uma função $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positiva definida de classe $\mathcal{C}^1$ tal que as derivadas ao longo das soluções do sistema (3.1) satisfazem:

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

então o sistema é *estável.*

Se a derivada de V satisfaz

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0 \tag{3.4}$$

então o sistema (3.1) é *assintóticamente estável.* Se, além disso, V é também ilimitada radialmente então o sistema (3.1) é *globalmente assintoticamente estável.*

Referimos a uma função $V(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ como uma função fraca de Lyapunov se V satisfaz a desigualdade (3.3) e, como uma função de Lyapunov se satisfaz a desigualdade (3.4). As conclusões desse teorema permanecem válidas quando V é meramente contínua e não de classe $\mathcal{C}^1$ trocando nas desigualdades (3.3) e (3.4) $\dot{V}$ por V.

Para sistemas lineares invariantes no tempo estabilidade assintótica e exponencial são equivalentes ao fato de A ser uma matriz Hurwitz como pode ser visto em [46] e [22]. Isso pode ser usado para provar o seguinte resultado.

Teorema 2 Se $f(x)$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e a matriz $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ é Hurwitz, então o sistema não linear $\dot{x} = f(x)$ é localmente exponencialmente estável.

3.1 Estabilidade de sistemas lineares

Apresentaremos alguns resultados bastante utilizados para estabilidade assintótica em sistemas lineares do tipo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ como a construção de uma função quadrática comum de Lyapunov e o fato de A ser uma matriz Hurwitz. As demonstrações dos teoremas e proposições aqui apresentados podem ser encontrados em [53] e [52].

3.1.1 Definições

Seja a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{3.5}$$

Suponha que, para cada $x_0 \epsilon \mathbb{R}^n$, exista uma única solução $\phi(x_0, t) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição 3 $\phi(x_0, t)$ é dita estável se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$\| x_0 \| < \delta \Rightarrow \| \phi(x_0, t) \| < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

Definição 4 $\phi(x_0, t)$ é dita assintoticamente estável se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$\| x_0 \| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} (\phi(x_0, t)) = 0, \quad .$$

3.1.2 Teoremas e proposições

No caso da equação diferencial linear (3.5) como $\phi(x_0, t)$ é linear em x_0 a estabilidade de qualquer solução pode ser reduzida à análise de estabilidade no ponto de equilíbrio zero.

Proposição 5 Considere a equação linear dada por (3.5):

a)$\forall$ x_0 $\epsilon \mathbb{R}^n$ a solução $\phi(x_0, t)$ é estável (assintoticamente estável) $\Leftrightarrow$ $\phi(0, t)$ é estável (assintoticamente estável).

b)$\forall\ x_0\ \epsilon \mathbb{R}^n$ a solução $\phi(x_0, t)$ é estável (assintoticamente estavel) $\Leftrightarrow$ $\phi(0, t)$ é limitada em $t \geq 0$ $(\lim_{t \longrightarrow \infty}(\phi(0, t) \rightarrow 0)$.

A proposição abaixo é uma ferramenta muito importante para a limitação de soluções e foi utilizada em design de chaveamento [44].

Proposição 6 Seja $A \epsilon \mathbb{C}^{nxn}$ e $\sigma(A) = max\{Re(\lambda), \lambda \text{ autovalor de } A\}$. Para todo $\sigma > \sigma(A)$ existe $k_A \epsilon \mathbb{R}_+$ tal que $\forall t \geq 0$, $\parallel exp(At) \parallel \leq k_A e^{\sigma t}$.

Teorema 7 O ponto de equilibrio 0 de (3.5) é assintoticamente estável $\Leftrightarrow$ todos os autovalores da matriz A possuem parte real negativa.

Teorema 8 O ponto de equilíbrio 0 de (3.5) é estável $\Leftrightarrow$

- (i)Todos os autovalores de A têm parte real ≤ 0.
- (ii) Se $\lambda \epsilon \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, λ autovalor de A então os blocos de Jordan associados a λ possuem dimensão igual a 1.

3.1.3 Equação de Lyapunov

Teorema 9 Todos os autovalores de A possuem parte real negativa $\Leftrightarrow$ para toda matriz N positiva definida a equação de Lyapunov:

$$A'M + MA = -N$$

possui uma única matriz simétrica M como solução e M é positiva definida.

Fixando uma matriz arbitrária N positiva definida simétrica e encontrando a única solução M para a equação de Lyapunov obtemos a função quadrática comum de Lyapunov, $V(x) = x^T M x$ e, suas derivadas $\dot{V}(x) = -x^T N x$, ao longo das soluções do sistema são negativas, o que condiz com o teorema de Lyapunov para sistemas não lineares.

Capítulo 4

Sistemas com chaveamento

Retomaremos agora o conceito de sistema com chaveamento e estenderemos as definições até então estudadas de estabilidade para esse tipo de sistema. As demonstrações dos resultados aqui apresentados, sem referências citadas no texto, podem ser encontradas, p. ex., em [46] e [50].

4.1 Definição

Um sistema com chaveamento pode ser descrito por uma família de subsistemas a tempo contínuo e uma regra que coordena o chaveamento entre eles. Tais sistemas podem descrever, por exemplo, um dado processo que exibe um comportamento de chaveamento (*switch*) causado por mudanças abruptas num dado meio.

Seja $f_p(x)$, $p \in \mathcal{P}$ uma família de funções suficientemente regulares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ parametrizadas por algum conjunto de índices finito $\mathcal{P}$.

Seja $\sigma(t) : [0, \infty) \to \mathcal{P}$ uma função constante por partes, denominada sinal de chaveamento. Um sistema com chaveamento é então dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)) \tag{4.1}$$

No caso particular em que os subsistemas são lineares, i.e., $f_p(x(t)) = A_p x(t)$

e $A_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para cada $p \in \mathcal{P}$, obtemos o sistema linear com chaveamento:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(x(t)) \tag{4.2}$$

4.2 Estabilidade de sistemas com chaveamento

1- Estabilidade uniforme:

Dada uma família de sistemas como em (4.1), é desejável saber quando o sistema é assintoticamente estável para qualquer sinal de chaveamento $\sigma(t)$. Assumindo que todos os subsistemas individuais possuem a origem como ponto comum de equilíbrio i.e., $f_p(0) = 0$, $\forall p \in \mathcal{P}$, temos que uma condição necessária para a estabilidade assintótica diante de qualquer sinal de chaveamento é que todos os subsistemas individuais sejam assintoticamente estáveis. Se algum subsistema é instável, por exemplo, p-ésimo para p em $\mathcal{P}$ então o sistema com chaveamento é instável para a lei de chaveamento $\sigma(t) \equiv p$, embora tal condição seja necessária ela não é suficiente. Precisamos impor outras condições, como veremos adiante.

Definição 10 O sistema (4.1) é dito uniformente assintoticamente estável se existem uma constante positiva δ e uma função β de classe $\mathcal{KL}$ tais que para todo sinal de chaveamento $\sigma(t)$ as soluções de (4.1) com $\mid x(0) \mid \leq \delta$ satisfazem a desigualdade

$$\mid x(t) \mid \leq \beta(\mid x(0) \mid, t), \quad \forall t > 0$$

Se a função β é da forma $\beta(r,s) = cr\exp(-\lambda t)$, então a equação acima toma a forma

$$\mid x(t) \mid \leq cr\exp(-\lambda t), \quad \forall t > 0$$

e o sistema é chamado uniformemente exponencialmente estável. Se as desigualdades acima são válidas para todo sinal de chaveamento $\sigma(t)$ e todas as condições iniciais, então obtemos a estabilidade assintótica uniforme global (GUAS) e a estabilidade exponencial uniforme global (GUES), respectivamente. O termo uniforme é usado para descrever a uniformidade com relação aos sinais de chaveamento.

4.3 Função comum de Lyapunov

O teorema de estabilidade de Lyapunov possui uma extensão direta que fornece uma ferramenta para o estudo da estabilidade uniforme de sistemas com chaveamento. Tal extensão é obtida requerendo a existência de uma função comum de Lyapunov cuja derivada ao longo das soluções de todos os sistemas da família satisfaz determinadas desigualdades. Para obter uma condição de Lyapunov para GUAS, devemos analisar a contrapartida da desigualdade (3.4).

Seja $V(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$, V é uma função comum de Lyapunov para a família de sistemas (4.1), se existe uma função $W(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, positiva definida tal que:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f_{\sigma(t)} \leq -W(x(t)), \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^n \quad \forall \sigma(t) \in \mathcal{P}$$

Teorema 11 Se todos os sistemas da família (4.1) compartilham uma função comum de Lyapunov radialmente ilimitada então o sistema (4.1) é GUAS.

Demonstração:[46]

Pela definição acima seja a função $V(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função comum de Lyapunov para a família de sistemas então existe uma função positiva definida $W(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_{\sigma(t)} \leq -W(x(t)), \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^n, \quad \forall \sigma(t) \in \mathcal{P}$$

Assumimos que a desigualdade acima se verifica. Considere uma bola em torno da origem de raio $\varepsilon > 0$. Tome um número positivo $b < min_{|x|=\varepsilon} V(x)$.

Denote por δ o raio de alguma bola dentro do intervalo $\{x; V(x) < b\}$. Tomamos $x(0)$ tal que $\mid x(0) \mid < \delta$. Como V é uma função positiva definida e $\dot{V}(x(t)) \leq -W(x(t)) < 0$ não é crescente ao longo das soluções, V tem limite $c \geq 0$ quando $t \to \infty$. Se nós provarmos que c=0 então teremos a estabilidade assintótica já que V é positiva definida. Suponhamos que $c > 0$, então a solução não pode entrar em um intervalo do tipo $\{x; V(x) < c\}$ pois V é decrescente logo, a solução pertence a algum intervalo do tipo $S = \{x; r \leq \mid x \mid < \varepsilon\}$ para r suficientemente pequeno. Seja $d = max_{x \epsilon S} \dot{V}(x)$. Este número é bem definido pois S é compacto e V é C^1. Além disso, $d < 0$ já que $\dot{V}(x(t)) \leq -W(x(t)) \leq 0$. Então $\dot{V}(x(t)) \leq d \Longrightarrow V(x(t)) \leq V(0) + dt$. Como d é negativo podemos encontrar t tal que V seja menor que c, contradição.

No caso especial em que ambas $V(x(t))$ e $W(x(t))$ são quadráticas ou mais geralmente são limitadas superior e inferiormente por monômios de mesmo grau em $\mid x \mid$, pode ser provado que o sistema (4.1) é GUES.

É natural nos perguntarmos se o fato de o sistema ser GUAS implica a existência de uma função comum de Lyapunov, o que é abordado no próximo teorema.

Teorema 12 Assuma que o sistema é GUAS, o conjunto $\{f_p; p \epsilon P\}$ é limitado para todo x e cada função $f_p(x)$ é localmente Lipschitziana em x, uniformemente sobre p. Então todos os sistemas na família dividem a mesma função de Lyapunov.

4.4 Sistemas lineares com chaveamento

Aplicaremos as noções acima para o caso em que todos os subsistemas individuais são lineares. Para sistemas lineares invariantes no tempo, estabilidade exponencial é equivalente ao fato de o sistema ser assintoticamente estável [22]. De fato, as diferentes versões de estabilidade assintótica resultam da propriedade de A ser uma matriz de Hurwitz e são caracterizadas pela existência de uma função quadrática de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ onde P é uma matriz simétrica positiva definida. Para sistemas com chaveamento as funções quadráticas comuns de Lyapunov são funções da forma $V(x) = x^T P x$ tal que para alguma matriz Q simétrica, positiva definida temos:

$$A_p^T P + P A_p \leq -Q, \quad \forall p \epsilon P.$$

Se assumirmos $\{A_p; p\epsilon P\}$ compacto, a desigualdade acima é equivalente a:

$$A_p^T P + P A_p \leq 0, \quad \forall p \epsilon P.$$

As funções quadráticas de Lyapunov são interessantes, porque a desigualdade acima pode ser resolvida por métodos numéricos a fim de encontrarmos valores para P e, portanto, uma função quadrática de Lyapunov.

Consideremos agora que o conjunto das matrizes de Hurwitz $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ é compacto. Similarmente ao caso de sistemas lineares sem chaveamento o seguinte resultado é verdadeiro.

Teorema 13 O sistema linear (4.2) é GUES $\Leftrightarrow$ é localmente atrator para todo sinal de chaveamento $\sigma(t)$.

4.5 Estabilidade *versus* Relações de Comutatividade

Consideremos o sistema linear com chaveamento (4.2). Assumindo $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ e que as matrizes A_1 e A_2 comutam, desejamos estudar as propriedades das soluções considerando os sistemas 1 e 2 estáveis.

Denotaremos a comutatividade de A_1 e A_2, i.e., $A_1 A_2 = A_2 A_1$ por $[A_1, A_2]$=0 onde o operador [.,.], denominado *colchete (bracket)*, é definido como $[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$. Se $[A_1, A_2]$=0 temos $e^{A_1} e^{A_2} = e^{A_2} e^{A_1}$. Pela definição de matriz exponencial via séries de potência temos também $e^{A_1 t} e^{A_2 \tau} = e^{A_2 t} e^{A_1 \tau}$, $\forall t, \tau > 0$.

Consideremos um sinal de chaveamento $\sigma(t)$ arbitrário e denotaremos por τ_i o intervalo de tempo em que $\sigma(t)$ é igual a 1 e 2 respectivamente então, se tivermos a seguinte sequência de sinais descrita na figura:

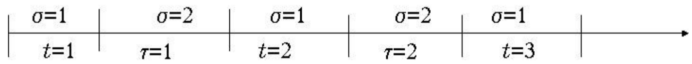

Figura 4.1

a solução para esse sistema é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_1 t_1} e^{A_2 \tau_1} e^{A_1 t_2} e^{A_2 \tau_2} e^{A_1 t_3} ... x(0) \\ &= e^{A_1 t_1} e^{A_1 t_2} e^{A_1 t_3} e^{A_2 \tau_1} e^{A_2 \tau_2} ... x(0) \end{aligned}$$

Como $[A, B] = 0 \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$ pois

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1[A,B]}{2}+\frac{1([A,[A,B]]+[B,[A,B]])}{12}+...}$$

Então temos

$$x(t) = e^{A_1(t_1+t_2+t_3)+\cdots} e^{A_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3)+\cdots} x(0)$$

quando $t \to \infty$ temos que $t_i \to \infty$ ou $\tau_i \to \infty$ e como os subsistemas são ambos assintóticamente estáveis, $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Para o caso em que $\mathcal{P}$ tem mais de 2 elementos temos o seguinte resultado.

Teorema 14 Se $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto finito de matrizes de Hurwitz que comutam então o correspondente sistema linear com chaveamento (4.2) é GUES.

Considere novamente o sistema linear com chaveamento descrito em (4.2). Em vista do que foi descutido anteriormente, é razoável esperar que, se as matrizes de estado A_p não comutam, então a estabilidade do sistema com chaveamento pode depender das relações de comutatividade entre elas.

A extensão para sistemas não lineares do critério de comutatividade é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 15 Se $\{f_p : p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de campos vetoriais de classe $\mathcal{C}^1$ que comutam, e, além disso, a origem é um ponto de equilíbrio estável assintoticamente e globalmente para todos os sistemas da família (4.1) então o correspondente sistema com chaveamento é GUAS.

4.6 Sistemas triangulares e Álgebra de Lie solúvel

Muitos trabalhos já foram feitos buscando para uma coleção de matrizes Hurwitz, critérios para a estabilidade exponencial. Um resultado já conhecido [7] e [15], que restringe a análise a uma classe de subsistemas com matrizes triangulares superiores é o seguinte.

Teorema 16 Se $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto compacto de matrizes de Hurwitz e existe $U \epsilon \mathbb{C}^{nxn}$ não singular tal que $U^{-1}A_pU$ são matrizes triangulares superiores então o sistema linear com chaveamento (4.2) é GUES.

Paralelamente, outros resultados importantes seguindo esta linha envolvem características da *álgebra de Lie gerada pelas matrizes dos respectivos subsistemas lineares*. No Apêndice, abordamos os conceitos importantes da teoria de álgebra de Lie para a melhor compreensão desses resultados. Segundo um deles, é possível construir uma função quadrática comum de Lyapunov para uma coleção de subsistemas lineares estáveis se a *álgebra de Lie gerada pelas matrizes é solúvel.* A prova se estrutura em torno do teorema de Lie e outros auxiliares e pode ser encontrada, por exemplo, em [2] e [3].

Teorema de Lie: Se Ω é uma álgebra de Lie solúvel, então existe uma mudança de base, tal que todas as matrizes em Ω são simultaneamente transformadas em triangulares superiores.

Teorema 17 Se $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto compacto de matrizes de Hurwitz e a respectiva álgebra de Lie gerada por tais matrizes é solúvel, então o sistema linear com chaveamento (4.2) é GUES.

Podemos checar o teorema acima para um número finito de matrizes. A título de ilustração considere, por exemplo, para $\mathcal{P} = 1, 2$ e $x \epsilon \mathbb{R}^2$, as duas matrizes:

$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1 \\ 0 & -c_1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} -a_2 & b_2 \\ 0 & -c_2 \end{pmatrix}$.

Por simplicidade, supomos que as entradas são reais. Uma vez que seus autovalores possuem parte real negativa, pois são matrizes Hurwitz, temos $a_i, c_i > 0$ para $i = 1, 2$. Considere agora o sistema com chaveamento $\dot{x} = A_{\sigma(t)}x$. A segunda componente de x satisfaz a equacão $\dot{x}_2 = c_{\sigma(t)}x_2$, por isso x_2 decai para zero exponencialmente rápido e a taxa de decaimento correspondente é $min\{c_1, c_2\}$. A primeira componente satisfaz a equação:

$$\dot{x}_1 = a_{\sigma(t)}x_1 + b_{\sigma(t)}x_2.$$

Esse pode ser visto como um sistema exponencialmente estável $\dot{x}_1 = a_{\sigma(t)}x_1$ perturbado por um decaimento exponencial $b_{\sigma(t)}x_2$. Então x_1 converge exponencialmente para zero.

Consideremos agora a decomposição g da álgebra de Lie gerada pelas matrizes $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ na soma semidireta: $g = \tau \oplus \sigma$ onde τ é um ideal solúvel e σ é uma subálgebra. Para propósitos aqui desejados, a melhor escolha para τ é o radical; nesse caso temos a decomposição de Levy.

Teorema 18 Se $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto compacto de matrizes Hurwitz e a álgebra de Lie gerada por tal conjunto é a soma direta de um ideal solúvel e uma subálgebra compacta, então o sistema linear com chaveamento (4.2) é GUES.

Teorema 19 Suponha que uma dada álgebra de Lie Ω não satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Então existe um conjunto de geradores Hurwitz para Ω tal que o correspondente sistema linear com chaveamento não é GUES. Há também um outro conjunto de geradores Hurwitz para Ω tal que o correspondente sistema linear é GUES.

Capítulo 5

Design de chaveamento

A segunda maneira de se abordar o problema de estabilidade em sistemas com chaveamento foi através de *design de switch*. Agora teremos a oportunidade de apresentar os conceitos de *funções de Lyapunov por partes* e *tempo médio de habitação* e analisar alguns teoremas de design que são fundamentais em nossos resultados. As demonstrações e teoremas aqui apresentados, sem referências explicitas, podem ser encontrados em [46].

5.1 Funções de Lyapunov por partes

Uma ferramenta muito útil para o estudo da estabilidade são as *funções múltiplas de Lyapunov* ou funções de Lyapunov por partes. Consideremos o sistema $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$ com $\mathcal{P} = \{1, 2\}$. Suponha que ambos os subsistemas $\dot{x}(t) = f_1(x(t))$, $\dot{x}(t) = f_2(x(t))$ sejam globalmente assintoticamente estáveis e sejam $V_1(x(t))$ e $V_2(x(t))$ as respectivas funções de Lyapunov. Na ausência de uma função comum de Lyapunov, a estabilidade do sistema depende em geral do sinal de chaveamento $\sigma(t)$. Seja t_i o tempo em que o i-ésimo chaveamento ocorre. Se os valores de $V_1(x(t))$ e $V_2(x(t))$ coincidem em cada tempo de chaveamento isto é $V_{\sigma(t_i-1)}(x(t_i)) = V_{\sigma(t_i)}(x(t_i))$ para todo i então $V_{\sigma(t)}$ é uma função comum de Lyapunov para o sistema com chaveamento acima. Logo a estabilidade assintótica segue. Entretanto, em geral, em poucos casos é possível construir uma função comum de Lyapunov.

Teorema 20 Seja $\dot{x}(t) = f_p(x(t))$ onde $\{\sigma(t)\epsilon\mathcal{P}\}$ e $\mathcal{P}$ finito, uma família finita de sistemas globalmente assintoticamente estáveis e seja $V_p(x(t))$, $p\epsilon\mathcal{P}$, uma família de funções de Lyapunov radialmente ilimitadas. Suponha que exista uma família de funções continuamente positivas definidas $W_p(x(t))$, $p\epsilon\mathcal{P}$, com a propriedade de que para todo par de tempos em que o chaveamento ocorre (t_i, t_j), $i < j$, tais que $\sigma(t_i) = \sigma(t_j) = p\epsilon\mathcal{P}$ e $\sigma(t_k) \neq p$ para $t_i < t_k < t_j$, temos:

$$V_p(x(t_j)) - V_p(x(t_i)) \leq -W_p(x(t_i)) \tag{5.1}$$

então o sistema $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração:

Mostraremos primeiro a estabilidade no sentido de Lyapunov. Seja m o número de elementos em $\mathcal{P}$. Sem perda de generalidade assumimos que $P = \{1, 2, .., m\}$. Considere a bola em torno da origem com raio $\varepsilon > 0$. Seja R_m o conjunto da forma $\{x; V_m(x) \leq c_m\}$ com $c_m > 0$ que está contido na bola. Para $i = 1, ..., m-1$ seja R_i o conjunto da forma $\{x; V_i(x) \leq c_i\}$, $c_i > 0$ que está contido no conjunto R_{i+1}. Denote por δ o raio de alguma bola em torno da origem que pertence à intersecção de todas as sequências de conjuntos construídos desta maneira para todas possíveis permutações de $1, ..., m$. Suponha que a condição inicial satisfaça $\mid x(0) \mid \leq \delta$. Se os primeiros k valores de σ são distintos onde $k \leq m$ então por construção temos $\mid x(t_k) \mid \leq \varepsilon$, depois que os valores de σ começarem a se repetir a desigualdade (5.1) garante que as trajetórias de estado sempre pertencerão a um dos intervalos acima, já que $V_i > 0$, $V_i < c_i$ e $-W_i < 0 \Rightarrow V_i(t) \leq c_i$.

Para mostrar a estabilidade assintótica observe que, devido ao fato de $\mathcal{P}$ ser finito existe um índice $q\epsilon\mathcal{P}$ que tem associado a ele uma sequência infinita de tempos de chaveamento $t_{i_1}, t_{i_2}, ...$ tal que $\sigma(t_{ij}) = q$.

A sequência $V_q(x(t_{i_1})), V_q(x(t_{i_2})), V_q(x(t_{i_3})), ...$ é decrescente e positiva por construção, pois $V_q(x(t_i)) \leq c_q$ e V_q é positiva definida, por isso tem limite $c \geq 0$.

Temos então

$0 = c - c = lim_{j\to\infty}(V_q(x(t_{ij+1}))) - lim_{j\to\infty}(V_q(x(t_{ij}))) = lim_{j\to\infty}(V_q(x(t_{ij+1})) - V_q(x(t_{ij}))) \leq lim_{j\to\infty}(-W_q(x(t_{ij}))) \leq 0$

Então $-W_q(x(t_{ij})) \to 0$ quando $j \to \infty$. Sabemos que W_q é positiva definida em vista do fato de V_q $q\epsilon\mathcal{P}$ ser radialmente ilimitada. Podemos, mostrar que $\mid x(t) \mid$ permanece limitada já que $\exists\alpha_1, \alpha_2$ tal que:

$$\alpha_1(\mid x \mid) < V_q(x) < \alpha_2(\mid x \mid)$$

então x permanece limitada quando $j \to \infty$, pois temos $V_q(x(t_j)) \to c$ quando $j \to \infty$.

Portanto $x(t_{ij})$ deve convergir para zero quando $j \to \infty$ pois W_q é positiva definida. Logo, segue que $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

É possível obter outras condições de estabilidade envolvendo funções múltiplas de Lyapunov. Em particular podemos relaxar a condição de cada V_p ser decrescente em intervalos em que o p-ésimo sistema é ativo, admitindo que o crescimento admissível de V_p em tais intervalos seja limitado apropriadamente.

É importante notar que, para aplicar o teorema anterior, devemos ter informações sobre o sistema, suas soluções e precisamos conhecer os valores das funções de Lyapunov nos tempos de chaveamento, o que em geral requer o conhecimento do estado ativo nesses tempos. Isto é um contraste com os resultados clássicos de estabilidade que prescindem do conhecimento das soluções mas, tais resultados, que usam funções de Lyapunov por partes, são úteis quando a classe de chaveamento está restrita a um conjunto no qual é possivel medir relações entre os valores das funções de Lyapunov nos tempos de chaveamento.

5.2 Estabilidade com chaveamento lento

É um fato bem conhecido que um sistema com chaveamento é estável se todos os seus subsistemas são estáveis e o chaveamento entre eles é suficientemente lento. Agora discutiremos como esse fato pode ser justificado usando as funções de Lyapunov por partes.

A maneira mais simples de se especificar um chaveamento lento é introduzir um número $\tau_d > 0$ e uma classe restrita de sinais de chaveamento tal que todos os tempos em que o chaveamento ocorre $t_1, t_2, ...$ satisfaçam $t_{i+1} - t_i \geq \tau_d$, para todo i. Este número τ_d é chamado tempo de habitação já que o sistema habita seus subsistemas por ao menos τ_d unidades de tempo.

É bem conhecido que quando todos os subsistemas considerados lineares são assintoticamente estáveis o sistema é assintoticamente estável se o tempo de habitação τ_d é suficientemente grande. Com as considerações apropriadas, um tempo de habitação suficientemente grande também garante a estabilidade assintótica do sistema com chaveamento no caso não linear. A melhor maneira de se provar esse resultado geral é utilizando as funções de Lyapunov por partes.

Checaremos agora o argumento relevante:

Assumimos por simplicidade que todos os subsistemas da família $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$ sejam globalmente assintoticamente estáveis então, para cada $p \epsilon \mathcal{P}$ existe uma função de Lyapunov $V_p(x(t))$. Suponhamos também que existem constantes positivas a_p, b_p e c_p satisfazendo:

$$\begin{aligned} a_p \mid x(t) \mid^2 \leq V_p(x(t)) \leq b_p \mid x(t) \mid^2 \\ \frac{\partial V_p}{\partial x} f_p(x) \leq -c_p \mid x(t) \mid^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Combinando esses dois fatos temos $\frac{\partial V_p}{\partial x} f_p(x) \leq -2\lambda_p V_p(x)$, $\forall p \epsilon \mathcal{P}$, onde $\lambda_p = \frac{c_p}{2b_p}$ $p \epsilon \mathcal{P}$. Isto implica que $V_p(x(t_0 + \tau_d)) \leq e^{-2\lambda_p \tau_d} V_p(x(t_0))$, desde que $\sigma(t) = p$ para $t \epsilon [t_0, t_0 + \tau_d)$.

Para simplificar o próximo cálculo, consideremos o caso em que $\mathcal{P} = 1, 2$ e $\sigma(t)$ toma o valor 1 em $[t_0, t_1)$ e 2 em $[t_1, t_2)$, onde $t_{i+1} - t_i \geq \tau_d$. Então, pelas desigualdades (5.2)

$$a_1 \mid x(t) \mid^2 \leq V_1(x(t)) \leq b_1 \mid x(t) \mid^2$$
$$a_2 \mid x(t) \mid^2 \leq V_2(x(t)) \leq b_2 \mid x(t) \mid^2$$

logo $V_2(x(t_1)) \leq b_2 \mid x \mid^2 \leq \frac{b_2}{a_1} V_1(x(t_1)) \leq \frac{b_2}{a_1} e^{-2\lambda_1 \tau_d} V_1(t_0)$, e por isso,

$$V_1(t_2) \leq \frac{b_1}{a_2} V_2(t_2) \leq \frac{b_1}{a_2} e^{-2\lambda_2 \tau_d} V_2(t_1) \leq \frac{b_2 b_1}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_d} V_1(t_0) \tag{5.3}$$

Devemos agora computar um limitante inferior para τ_d que garanta que hipóteses como no teorema 20 sejam satisfeitas. Para implicar a estabilidade de um sistema com chaveamento $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$ é suficiente garantir que

$$V_p(x(t_2)) - V_p(x(t_0)) \leq -\gamma \mid x(t_0) \mid^2$$

para algum $\gamma > 0$.

De acordo com (5.3) isso será verdadeiro se nós tomarmos

$$(\frac{b_2 b_1}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_d} - 1) V_1 \leq -\gamma \mid x(t_0) \mid^2$$

Isto será alcançado se

$$(\frac{b_2 b_1}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_d} - 1) a_1 \leq -\gamma.$$

Como γ pode ser escolhido arbitrariamente devemos ter $(\frac{b_2 b_1}{a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_d}) \leq a_1$ o que pode ser escrito como:

$$-2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_d \leq ln(\frac{a_1 a_2}{b_2 b_1})$$

ou finalmente como

$$\tau_d > \frac{1}{(2\lambda_1 + \lambda_2)} ln(\frac{b_2 b_1}{a_1 a_2})$$

o que define um limitante inferior para o tempo de habitação τ_d.

No contexto de controle com chaveamento, especificar um tempo de habitação pode ser muito restritivo. Depois de um chaveamento, pode haver nenhum chaveamento nas próximas τ_d unidades de tempo; então, não há que se falar em possíveis falhas no sistema nesse período. É interessante propor um tempo de habitação que permita um chaveamento rápido, compensado por um chaveamento lento posteriormente.

O conceito de **tempo médio de habitação** serve a esse propósito. Denotaremos o número de descontinuidades em um intervalo (t_0, t) por $N_\sigma(t_0, t)$. Diremos que $\sigma(t)$ tem tempo médio de habitação τ_d se existem números positivos N_0 e τ_d tais que

$$N_\sigma(t_0, t) \leq N_0 + \frac{t - t_0}{\tau_d}, \quad \forall t \geq t_0 > 0$$

Sinais de chaveamento com essa propriedade são exatamente os sinais de chaveamento com tempo médio de habitação τ_d. Em geral, descartamos os primeiros N_0 chaveamentos e analisamos quando o tempo médio entre consecutivos chaveamentos é ao menos τ_d. Como o tempo médio de habitação é uma extensão do tempo de habitação , é muito natural utilizá-lo para a análise da estabilidade assintótica de um sistema com chaveamento.

Teorema 21 Considere a família de sistemas $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$. Suponha que existam funções de classe $\mathcal{C}^1$, $V_p(x(t))$ tal que $V_p(x(t)) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $p\epsilon\mathcal{P}$, duas classes de funções α_1 e α_2 K_∞, um número positivo λ_0 e $\mu \geq 1$ tal que:

$$\alpha_1 \mid x(t) \mid^2 \leq V_p(x(t)) \leq \alpha_2 \mid x(t) \mid^2, \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^n, \quad \forall p \epsilon \mathcal{P}$$
$$\frac{\partial V_p}{\partial x} f_p(x) \leq -2\lambda_0 V_p(x), \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^n, \quad \forall p \epsilon \mathcal{P}$$
$$V_p(x) \leq \mu V_q(x) \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^n \quad \forall p, q \epsilon P$$

Então o sistema $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$ é assintoticamente, globalmente estável para todo o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ com tempo médio de habitação $\tau_a > \frac{ln\mu}{2\lambda_0}$ e N_0 arbitrário.

Demostração: Tomando um $T > 0$ arbitrário e $t_0 = 0$ e denotando os tempos de chaveamento no intervalo $(0, T)$ por $t_1, ..., t_{N_\sigma(0,T)}$. Considere a função

$$W(x(t)) = e^{2\lambda_0 t} V_{\sigma(t)}(x(t))$$

Essa função é diferenciável por partes ao longo das soluções do sistema anterior em cada intervalo $[t_i, t_{i+1})$. Para $t \in [t_i, t_{i+1})$ temos:

$$\dot{W}(x(t)) = 2\lambda_0 W(x(t)) + e^{2\lambda_0 t} \frac{\partial V_{\sigma(t_i)}}{\partial x} f_{\sigma(t_i)}(x)$$

e é não positiva em virtude da segunda desigualdade, isto é $W(x(t))$ é não-crescente entre os tempos de chaveamento. Isto implica:

$W(x(t_{i+1})) = e^{2\lambda_0 t_{i+1}} V_{\sigma(t_{i+1})} x(t_{i+1}) \leq \mu e^{2\lambda_0 t_{i+1}} V_{\sigma(t_i)} x(t_{i+1}) = \mu W(x(t_{i+1}^-)) \leq \mu W(x(t_i))$

Iterando essa desigualdade de $i = 0$ a $i = N_\sigma(0, T) - 1$, temos

$$W(x(T^-)) \leq W(x(t_{N_{\sigma(0,T)}})) \leq \mu^{N_{\sigma(0,T)}} W(x(0))$$

Suponha que $\sigma(t)$ tenha média de tempo de habitação expressa pela desigualdade dada pela definição. Então podemos escrever a desigualdade acima como

$$V_{\sigma(t)}(T^-)(x(T)) \leq e^{2\lambda_0 T+(N_0+\frac{T}{\tau_a})ln\mu}V_{\sigma(0)}(x(0)) = e^{N_0 ln\mu}e^{(\frac{ln\mu}{\tau_a}-2\lambda_0)T}V_{\sigma(0)}(x(0)).$$

Concluímos que, se τ_a satisfaz a desigualdade inicial das hipóteses do teorema, então $V_{\sigma(T^-)}(x(T))$ converge para zero exponencialmente quando $T \to \infty$. Ao mesmo tempo é limitado superiormente por $\mu^{N_0}e^{-2\lambda T}V_{\sigma(0)}(x(0))$ para algum $\lambda\epsilon(0,\lambda_0)$. Então segue pelas hipóteses que

$$| x(t) |\leq \alpha_1^{-1}(\mu^{N_0}e^{-2\lambda T\alpha_2}(| x(0) |)$$

o que prova a estabilidade.

5.3 Tempo de habitação e estabilidade em sistemas lineares

Estudaremos agora de que maneira o conceito de tempo médio de habitação e funções de Lyapunov por partes foram utilizados como critérios para estabilidade em sistemas lineares. Apresentaremos dois resultados: primeiramente, considerando todos os subsistemas estáveis e depois com estáveis e instáveis.

Teorema 22 Dado um conjunto compacto de matrizes $n \times n$ $\mathcal{A} = \{A_p; p \in \mathcal{P}\}$ e uma constante positiva λ_0 tal que $A_p + \lambda_0 I$ é Hurwitz para todo $p\epsilon\mathcal{P}$, então para qualquer $\lambda \in [0, \lambda_0)$ existe uma constante finita τ_d^*, tal que o sistema com chaveamento $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$, $\sigma(t) \in \mathcal{P}$, é uniformemente exponencialmente estável, com margem de estabilidade λ para todo tempo de habitação $\tau_d \geq \tau_d^*$ e todo $N_0 > 0$.[43]

Demonstração: Antes de provarmos o teorema note que uma vez que cada matriz $A_p + \lambda_0 I$ é assintoticamente estável existe um conjunto de matrizes $n \times n$ simétricas positivas definidas $\mathcal{Q} = \{Q_p; p \in \mathcal{P}\}$ tal que :

$$Q_p(A_p + \lambda_0 I) + (A_p + \lambda_0 I)^T Q_p = -I$$

Além disso, como $\mathcal{A}$ é compacto $\mathcal{Q}$ é compacto. Concluímos que existe uma família de funções de Lyapunov $\mathcal{V} = \{V_p; V_p(x(t)) = (x(t))^T Q_p x(t), p \in \mathcal{P}\}$ para os sistemas invariantes no tempo $\dot{z}(t) = A_{\sigma(t)} z(t)$, $p \in \mathcal{P}$ com as seguintes propriedades:

(i) Cada $V_p(x(t))$ é contínua e decresce exponencialmente ao longo das soluções do sistema invariante no tempo (o sistema $\dot{z}(t) = A_p z(t)$ em particular):

$$\frac{\partial V_p}{\partial x} A_p \leq -2\lambda_0 V_p(x(t)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathcal{P}$$

(ii) Há funções α, $\bar{\alpha}$ de classe K_∞ tais que $\alpha(\| x(t) \|) \leq V_p(x(t)) \leq \bar{\alpha}(\| x(t) \|)$,$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathcal{P}$.

(iii) Há uma constante positiva μ tal que $V_p(x(t)) \leq \mu V_q(x(t))$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $p, q \in \mathcal{P}$.

A propriedade *(i)* é consequência direta das equações equações de Lyapunov pois $\frac{\partial V_p}{\partial x} A_p x(t) + 2\lambda_0 V_p(x(t)) = (x(t))^T (Q_p(A_p + \lambda_0 I) + (A_p + \lambda_0 I)^T Q_p) x(t) = - \| x(t) \|^2$; e as propriedades *(ii)* e *(iii)* são alcançadas tomando $\alpha(s) = s^2 inf_{Q \in \mathcal{Q}} \sigma_{min}[Q]$, $\bar{\alpha}(s) = s^2 sup_{Q \in \mathcal{Q}} \sigma_{max}[Q]$ e $\mu = sup_{Q, \bar{Q} \in \mathcal{Q}} \frac{\sigma_{max}[\bar{Q}]}{\sigma_{min}[Q]}$ onde $\sigma_{min}[Q]$ denota o menor autovalor de $Q \in \mathcal{Q}$ e $\sigma_{max}[\bar{Q}]$ o maior autovalor de $\bar{Q} \in \mathcal{Q}$. Note que, na definição acima, o supremo e o ínfimo são na verdade o máximo e o mínimo, respectivamente, pois $\mathcal{Q}$ é compacto. A existência de uma família de funções de Lyapunov com as propriedades acima é utilizada abaixo.

Para provar este teorema construímos um limitante exponencialmente limitado para uma solução arbitrária do sistema. Este limitante será independente do sinal de chaveamento $\sigma(t)$ constante por partes e $x(t)$ denota alguma solução do sistema. Dados dois instantes de tempo $T > t_0 \geq 0$, sejam $t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_{N_\sigma(t_0,T)}$ as descontinuidades de $\sigma(t)$ no intervalo (t_0, T) e $t_{N_\sigma(t_0,T)+1} = T$. Uma vez que $\sigma(t)$ é constante por partes, o sinal $v(t) = e^{2\lambda_0 t} V_{\sigma(t)}(x(t))$, $t \geq 0$, é continuamente diferenciável por partes e

$$\dot{v}(t) = 2\lambda_0 v(t) + e^{2\lambda_0 t}\frac{\partial V_{pi}}{\partial x}(x(t))A_{pi}(x(t)), \quad t \in (t_i, t_{i+1})$$

pois $\sigma = p_i = \sigma(t_i)$ em $[t_i, t_{i+1})$; e das propriedades *(i)* e *(ii)* concluímos que $\dot{v} \leq 0$ em (t_i, t_{i+1}); e por isso $v(t) \leq v(t_i)$ $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i \in \{0, ..., N_\sigma(t_0, T)\}$. Além disso, em virtude da propriedade *(iii)*

$$v(t_{i+1}) = e^{2\lambda_0 t_{i+1}} V_{p_{i+1}} x(t_{i+1}) \leq \mu e^{2\lambda_0 t_{i+1}} V_{p_i}(x(t_{i+1}))$$

Como $V_p(x(t))$ e $x(t)$ são contínuas concluímos que

$$v(t_{i+1}) \leq \mu lim_{\tau \longrightarrow t_{i+1}} e^{2\lambda_0 \tau} V_{p_i} x(\tau) = \mu lim_{\tau \longrightarrow t_{i+1}} v(\tau)$$

mas $lim_{\tau \longrightarrow t_{i+1}} v(\tau) \leq v(t_i)$ por isso $v(t_{i+1}) \leq \mu v(t_i)$. Iterando essa desigualdade de 0 a $N_\sigma(t_0, T) - 1$ obtemos

$$v(t_{N_\sigma(t_0,T)}) \leq \mu^{N_\sigma(t_0,T)} v(t_0)$$

Por isso e pela definição de v, concluímos que

$$e^{2\lambda_0 T} V_{\sigma(T^-)}(x(T)) \leq \mu^{N_\sigma(t_0,T)} e^{2\lambda_0 t_0} V_{\sigma(t_0)}(x(t_0))$$

onde $\sigma(T^-) = lim_{\tau \longrightarrow T} \sigma(\tau)$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $e^{-2\lambda_0 T}$ nos dá

$$V_{\sigma(T^-)}(x(T)) \leq e^{ln(\mu) N_\sigma(t_0,T) - 2\lambda_0 (T - t_0)} V_{\sigma(t_0)}(x(t_0))$$

por isso e pela propriedade *(ii)* concluímos que $\| x(T) \| \leq \alpha^{-1}(e^{-2\lambda_0(T-t_0)+ln(\mu)N_\sigma(t_0,T)}\bar{\alpha}(\| x(t_0) \|))$. Então temos:

$$\| x(t) \| \leq q(e^{-\lambda_0(T-t_0)+\frac{ln(\mu)}{2}N_\sigma(t_0,T)}(\| x(t_0) \|))$$

com $q = (sup_{Q,\bar{Q}\in\mathcal{Q}}\frac{\sigma_{max}[\bar{Q}]}{\sigma_{min}[Q]})^{1/2}$.

Para chegar à margem de estabilidade λ é suficiente que

$$-\lambda_0(T-t_0) + N_\sigma(t_0,T)\frac{ln\mu}{2} \leq k - \lambda(T-t_0)$$

para algum k finito isto é equivalente a

$$N_\sigma(t_0,T) \leq N_0 + \frac{T-t_0}{\tau_d^*}$$

com $N_0 = \frac{2k}{ln\mu}$ e $\tau_d^* = \frac{ln\mu}{2(\lambda_0-\lambda)}$. Concluímos que se a desigualdade acima ocorre teremos

$$\| x(T) \| \leq q(e^{k-\lambda(T-t_0)}(\| x(t_0) \|))$$

quando $\tau_d \geq \tau_d^*$. Note que escolhendo k suficientemente pequeno, podemos acomodar qualquer N_0. Então se $\tau_d \geq \tau_d^*$ teremos o sistema uniformemente exponencialmente estável.

Naturalmente surge a pergunta: Será possível para uma coleção de matrizes estáveis e instáveis utilizar funções múltiplas de Lyapunov para encontrar um tempo mínimo de habitação de forma a garantir a estabilidade?

A resposta é dada no resultado abaixo.

Consideremos um sistema com chaveamento da forma:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{5.4}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ é o tempo inicial, $x_0 = x(0)$, $I_N = \{1, ..., N\}$ é o estado inicial e $\sigma(t) : [t_0, \infty) \rightarrow I_N$ é uma função constante por partes chamada sinal de chaveamento e $\{A_i; i \in I_N\}$ é um conjunto de matrizes constantes descrevendo os subsistemas onde $N > 1$. Assumimos que matrizes estáveis e instáveis existem em I_N.

Definimos $S_d[\tau_d]$ o conjunto de todos os sinais de chaveamento com intervalos entre chaveamentos consecutivos maior que τ_d (tempo de habitação). Quando todos os subsistemas são estáveis, então podemos escolher τ_d suficientemente grande tal que o sistema com chaveamento seja exponencialmente estável .

5.3.1 Design em sistemas lineares estáveis e instáveis

Anteriormente, foi introduzido o conceito de tempo médio de habitação para todo o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ e $t \geq \tau$, Definiu-se $N_\sigma(t, \tau)$ o número de chaveamentos no intervalo $[\tau, t)$ para um dado N_0 ,$\tau_d > 0$ e $S_a[\tau_a, N_0]$ o conjunto de todos os sinais de chaveamento satisfazendo:

$$N_\sigma(\tau, t) \leq N_0 + \frac{t - \tau}{\tau_a} \tag{5.5}$$

onde τ_a é o tempo de habitação.

Definição 23 Para um certo sinal de chaveamento $\sigma(t)$, o sistema com chaveamento (5.4) é dito globalmente exponencialmente estável com grau de estabilidade $\lambda \geq 0$ se $\| x(t) \| \leq e^{a - \lambda(t - t_0)} \| x_0 \|$ ocorre para todo $t \geq t_0$ e uma constante a.

Como ambos os sistemas estáveis e instáveis existem em (5.4), assumimos sem perda de generalidade que $A_1, ..., A_r$ são instáveis e as restantes matrizes estáveis. Então existe um conjunto de escalares $\lambda_i > 0$ e a_i tais que:

$$\| e^{A_i t} \| \leq e^{a_i + \lambda_i t}, \quad 1 \leq i \leq r$$
$$\| e^{A_i t} \| \leq e^{a_i - \lambda_i t}, \quad r \leq i \leq N \qquad (5.6)$$

Os escalares a_i e λ_i podem ser computados usando a teoria de matrizes .

Agora, para qualquer sinal de chaveamento $\sigma(t)$ e $t > \tau$ sejam $T^+(\tau, t)$ e $T^-(\tau, t)$ respectivamente o tempo total de ativação dos subsistemas instáveis e estáveis respectivamente em $[\tau, t)$ e definimos $\lambda^+ = max_{1 \leq q \leq r} \lambda_q$ e $\lambda^- = min_{r+1 \leq q \leq N} \lambda_q$. Então para qualquer $\lambda \in (0, \lambda^-)$, escolhemos um escalar $\lambda^* \in (0, \lambda)$ arbitrariamente para propor a seguinte lei de chaveamento:

(S1) Seja o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ tal que

$$\frac{T^-(t_0, t)}{T^+(t_0, t)} \geq \frac{\lambda^+ + \lambda^*}{\lambda^- - \lambda^*}$$

acontece para todo $t > t_0$.

Teorema 24 Com a lei de chaveamento (S1), existe uma constante positiva τ_a^* tal que o sistema com chaveamento (5.4) é globalmente exponencialmente estável com grau de estabilidade λ sobre $S_a[\tau_a, N_0]$ para todo tempo médio de habitação $\tau_a \geq \tau_a^*$ e $N_0 > 0$. [44]

Demonstração: Sejam $t_1, t_2, ...$ os tempos onde o chaveamento ocorre e seja p_j o valor de $\sigma(t)$ em $[t_{j-1}, t_j)$. Então para qualquer t satisfazendo $t_0 < ... < t_i \leq t < t_{i+1}$ obtemos:

$$x(t) = e^{A_{p_{i+1}}(t - t_i)} e^{A_{p_i}(t_i - t_{i-1})} ... e^{A_{p_1}(t_1 - t_0)} x_0$$

Pelas estimativas acima feitas em (5.6) para os subsistemas estáveis e não estáveis temos:

$$\begin{aligned} \| x(t) \| &\leq (\prod_{q=1}^{i+1} e^{a_{pq}}) e^{\lambda^+ T^+(t_0,t) - \lambda^- T^-(t_0,t)} \| x_0 \| \\ &\leq e^{(i+1)a + \lambda^+ T^+(t_0,t) - \lambda^- T^-(t_0,t)} \| x_0 \| \\ &= c e^{a N_\sigma(t_0,t) + \lambda^+ T^+(t_0,t) - \lambda^- T^-(t_0,t)} \| x_0 \| \end{aligned} \tag{5.7}$$

onde $a = max_{q \in I_N} a_q$, $c = e^a$ e $N_\sigma(t_0, t)$ é o número de chaveamentos no intervalo (t_0, t).

Para todo $\lambda < \lambda^-$ suponhamos que o sistema obedeça à lei de chaveamento (S1). Sabemos que $\frac{T^-(t_0,t)}{T^+(t_0,t)} \geq \frac{\lambda^+ + \lambda^*}{\lambda^- - \lambda^*}$ ocorre para algum $\lambda^* \in (0, \lambda)$ o que é equivalente a:

$$T^+(t_0,t)\lambda^+ - T^-(t_0,t)\lambda^- \leq -\lambda^*(T^+(t_0,t) + T^-(t_0,t)) = -\lambda^*(t - t_0)$$

Substituindo em (5.7) temos

$$\| x(t) \| \leq c e^{a N_\sigma(t_0,t) - \lambda^*(t-t_0)} \| x_0 \|$$

Temos dois casos:

Se $a \leq 0$, obtemos $\| x(t) \| \leq c e^{-\lambda^*(t-t_0)} \| x_0 \| \leq c e^{-\lambda(t-t_0)} \| x_0 \|$. Isto implica que o sistema é exponencialmente estável com grau de estabilidade λ.

Se $a > 0$, $a N_\sigma(t_0, t) - \lambda^*(t - t_0) \leq \alpha - \lambda(t - t_0)$ para α arbitrário. Isto é equivalente a $N_\sigma(t_0, t) \leq N_0 + \frac{(t-t_0)}{\tau_a^*}$ onde $N_0 = \frac{\alpha}{a}$ e $\tau_a^* = \frac{a}{\lambda^* - \lambda}$. Como α é arbitrário, temos N_0 também arbitrário e assim temos $\| x(t) \| \leq c e^{\alpha - \lambda(t-t_0)} \| x_0 \|$.
Então o sistema (5.4) é globalmente exponencialmente estável com grau de estabilidade λ sobre $S_a[\tau_a, N_0]$ para qualquer tempo médio de habitação $\tau_a \geq \tau_a^*$ e N_0.

5.3.2 Função de Lyapunov por partes

Faremos o estudo da estabilidade do sistema (5.4), como feito na seção anterior, desta vez, através de funções de Lyapunov por partes:

Como $A_1, ..., A_r$ são instáveis e $A_{r+1}, ..., A_N$ são estáveis, existe um conjunto de escalares positivos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ tal que $A_i - \lambda_i I$ $(i \leq r)$ e $A_i + \lambda_i I$ $(i > r)$ são matrizes Hurwitz estáveis. Então há matrizes positivas definidas $P_1, P_2, ..., P_N$ tais que

$$\begin{aligned} &(A_i - \lambda_i I)^T P_i + P_i(A_i - \lambda_i I) < 0, \quad i \leq 0 \\ &(A_i + \lambda_i I)^T P_i + P_i(A_i + \lambda_i I) < 0, \quad i > 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

acontece para todo i. Utilizando as soluções das desigualdades (5.8) definimos a seguinte candidata à função de Lyapunov por partes para o sistema (5.4):

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) = (x(t))^T P_{\sigma(t)} x(t), \quad t \geq t_0 \tag{5.9}$$

onde $P_\sigma(t)$ varia entre as soluções P_i´s das desigualdades (5.8). Essas funções satisfazem as seguintes propriedades:

(i) Cada $V_i(x(t)) = (x(t))^T P_i x(t)$ é contínua e suas derivadas ao longo das soluções do sistema satisfazem

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x(t)) &= (\dot{x}(t))^T P_i x(t) + (x(t))^T P_i \dot{x}(t) \\ &= (x(t))^T A_i^T P_i x(t) + (x(t))^T P_i A_i x(t) \\ &= (x(t))^T (A_i^T P_i + P_i A_i) x(t) \end{aligned}$$

então

$$\dot{V}_i(x(t)) \leq 2\lambda_i V_i(x(t)), \quad i \leq r$$
$$\dot{V}_i(x(t)) \leq -2\lambda_i V_i(x(t)), \quad i > r$$

(ii) Existem escalares $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ tais que

$$\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V_i(x(t)) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in I_N$$

(iii) Existe uma constante $\mu \geq 1$ tal que $V_i(x(t)) \leq \mu V_j(x(t))\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in I_N$.

A segunda propriedade decorre se tomarmos $\alpha_1 = inf_{i \in I_N} \lambda_m(P_i)$ e $\alpha_2 = sup_{i \in I_N} \lambda_M(P_i)$, onde $\lambda_m(P_i)$ e $\lambda_M(P_i)$ são, respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz positiva definida P_i. Por isso temos $\lambda_m(P_i) \parallel x \parallel^2 \leq V_i(x) \leq \lambda_M(P_i) \parallel x \parallel^2$.

A terceira propriedade pode ser verificada se tomarmos $\mu = sup_{k,l \in I_N} \frac{\lambda_M(P_k)}{\lambda_m(P_l)}$.

Como na demonstração anterior, sejam $t_1 < t_2 < ... < t_i$ os tempos em que ocorrem os chaveamentos sobre o intervalo (t_0, t). Então sabemos pela propriedade *(i)* que a candidata à função de Lyapunov por partes satisfaz:

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \leq e^{2\lambda^+(t-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)), \quad \sigma(t_{i+1}) \leq r$$
$$V_{\sigma(t_i)} x(t) \leq e^{-2\lambda^-(t-t_i)} V_{\sigma(t_i)} x(t_i), \quad \sigma(t_{i+1}) > r$$

Notando que $V_{\sigma(t_j)} \leq \mu V_{\sigma(t_j^-)}$ acontece para todo ponto t_j de acordo com a propriedade *(iii)*, onde $t_j^- = lim_{\tau \to t_j} \tau$, obtemos por iteração

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \mu^{N_\sigma(t_0,t)} e^{2\lambda^+ T^+(t_0,t) - 2\lambda^- T^-(t_0,t)} V_{\sigma(t_0)}(x(0))$$

E pela propriedade *(ii)*, temos

$$\| x(t) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{2\lambda^+ T^+(t_0,t) - 2\lambda^- T^-(t_0,t) + \frac{ln\mu}{2} N_\sigma(t_0,t)} \| x_0 \|$$

Comparando essa desigualdade com a do teorema (24), observamos que a mesma discussão pode ser feita considerando nesse caso $a = \frac{ln\mu}{2}$. Por isso podemos concluir que $V_{\sigma(t)}(x(t)) = x^T P_{\sigma(t)} x$ é uma função de Lyapunov por partes para o sistema com chaveamento (5.4) quando adotamos a lei de chaveamento (S1) com tempo médio de habitação suficientemente grande.

5.4 Álgebra de Lie, comutatividade e design

Revisitamos aqui o problema de estabilidade em chaveamento arbitrário com o intuito de estudar o comportamento das classes de subsistemas estáveis para as quais é possível a construção de uma função comum de Lyapunov supondo a existência de matrizes estáveis e instáveis no chaveamento. Obtemos alguns resultados mesclando as técnicas anteriormente estudadas que estabelecem critérios para estabilidade em chaveamento arbitrário e têm como hipótese estabilidade de todos os subsistemas (sistemas triangulares superiores, álgebra de Lie solúvel e matrizes comutantes) com os teoremas sobre design, que através da construção de um chaveamento busca estabilidade para o sistema não necessariamente composto somente por subsistemas estáveis. Procuramos respostas para perguntas como: o que ocorre com os resultados para chaveamento arbitrário se supusermos que existem matrizes estáveis e instáveis? Ou melhor, como se comporta uma coleção de matrizes instáveis e estáveis triangulares superiores? Focaremos o estudo sob uma coleção de matrizes triangulares superiores, pois, sob as condições de solubilidade e comutatividade de uma coleção de matrizes é possível encontrar uma mudança de base que as tornem triangulares superiores. Portanto, os casos de classes de matrizes em que é possível construir uma mudança de base para torná-las triangulares superiores surgem como aplicação do resultado obtido.

Para o conjunto $\{A_1, ..., A_N\}$ formado por matrizes estáveis e instáveis, estudamos o comportamento do sistema com chaveamento $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$, com $\sigma(t)$ arbitrário sob o ponto de vista de design sabendo que as matrizes $\{A_i; i\epsilon 1, ..., N\}$ são triangulares superiores. Aplicaremos a dois casos em que é possível construir uma mudança de base tal que as matrizes são transformadas em triangulares superiores. O primeiro, quando as matrizes $\{A_i; i\epsilon 1, ..., N\}$ comutam e o segundo caso quando álgebra de Lie gerada pelas matrizes $\{A_i; i\epsilon 1, ..., N\}$ é solúvel.

5.5 Notação e preliminares

Consideremos um sistema com chaveamento da forma:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{5.10}$$

onde $x(t)\epsilon\mathbb{R}^n$, $t_0 = 0$ é o tempo inicial, x_0 é o estado inicial e $\sigma(t) : [t_0, \infty) \to \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = \{1, ..N\}$ é uma função constante por partes chamada sinal de chaveamento e $\{A_i; i\epsilon\mathcal{P}\}$ é um conjunto de matrizes constantes descrevendo os subsistemas onde $N > 1$.

Sabemos que para um conjunto $\{A_i; i\epsilon\mathcal{P}\}$, compacto de matrizes Hurwitz se as matrizes são triangulares superiores então é possível construir uma função quadrática comum de Lyapunov para o sistema.

Considerando que $A_1, ..., A_r$ $(r < N)$ são instáveis e as restantes são estáveis, então existe um conjunto de escalares γ_i tal que $A_i - \gamma_i I$ $(i \leq r)$ e $A_i + \gamma_i I$ $(i > r)$ são estáveis, como $A_i - \gamma_i I$ $(i \leq r)$ e $A_i + \gamma_i I$ $(i > r)$ são também triangulares superiores e estáveis, então existe uma matriz P tal que as desigualdades abaixo ocorrem

$$\begin{aligned}
(A_i - \gamma_i I)^T P + P(A_i - \gamma_i I) < 0, \quad i \leq r \\
(A_i + \gamma_i I)^T P + P(A_i + \gamma_i I) < 0, \quad i > r
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Agora, para qualquer sinal de chaveamento $\sigma(t)$ e $t > 0$ sejam $T^+(0,t)$ e $T^-(0,t)$ respectivamente o tempo de ativação dos subsistemas instáveis e estáveis respectivamente em $[0,t)$ e definimos $\gamma^+ = max_{1 \leq q \leq r} \gamma_q$ e $\gamma^- = min_{r+1 \leq q \leq N} \gamma_q$.

5.6 Resultado auxiliar

Proposição 25 Utilizando as soluções das desigualdades 5.11 definimos a seguinte função de Lyapunov

$$V(x(t)) = (x(t))^T P x(t), \quad t \geq 0$$

Essa função satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $Vx(t) = (x(t))^T P x(t)$ é contínua e suas derivadas ao longo das soluções do sistema satisfazem:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} A_i x &\leq 2\gamma_i V(x(t)) \quad i \leq r \\ \dot{V}(x(t)) &\leq -2\gamma_i V(x(t)) \quad i > r \end{aligned}$$

(ii) Existem escalares $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ tal que

$$\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V(x(t)) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2, \quad \forall x(t) \epsilon \mathbb{R}^n, \quad \forall i \epsilon \mathcal{P}$$

Demonstração

Para a primeira propriedade basta verificarmos que $\dot{V}x(t) = (\dot{x}(t))^T P x(t) + (x(t))^T P \dot{x}(t) = (x(t))^T A_i^T P x(t) + (x(t))^T P A_i x(t) = (x(t))^T (A_i^T P + P A_i) x(t) \Rightarrow \dot{V}x(t) \leq -2\gamma_i V x(t)$.

A segunda propriedade decorre se tomarmos $\alpha_1 = \lambda_{min}(P)$ e $\alpha_2 = \lambda_{max}(P)$

onde $\lambda_{min}(P)$, $\lambda_{max}(P)$ são respectivamente o menor e o maior autovalor da matriz positiva definida P, por isso temos

$$\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V(x(t)) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2 \tag{5.12}$$

.

5.7 Resultado Principal

Teorema 26 Para $\lambda \in (0, \gamma^-)$ escolhemos um escalar $\lambda^* \in (\lambda, \gamma^-)$ arbitrariamente para propor a seguinte lei de chaveamento:

Seja o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ tal que:

$$\frac{T^-(0,t)}{T^+(0,t)} \geq \frac{\gamma^+ + \lambda^*}{\gamma^- - \lambda^*} \tag{5.13}$$

acontece para todo $t > 0$.

Para um conjunto $\{A_i; i\epsilon\mathcal{P}\}$, compacto de matrizes triangulares superiores, com a lei de chaveamento (5.13) o sistema (5.10) é globalmente exponencialmente estável com grau de estabilidade λ.

Demonstração

Sejam $t_1 < t_2 < ... < t_{N_\sigma} \leq t$ os tempos em que ocorrem os chaveamentos sobre o intervalo $(0, t)$. Então sabemos pela propriedade *(i)* que a candidata à função de Lyapunov por partes satisfaz:

$$V(x(t)) \leq e^{2\gamma^+(t-t_i)} V(x(t)) \quad \sigma(t_{i+1}) \leq r$$
$$V(x(t)) \leq e^{-2\gamma^-(t-t_i)} V(x(t)) \quad \sigma(t_{i+1}) > r$$

Iterando as desigualdades de $i = 0$ a $i = N_\sigma(0,t)$ para um tempo arbitrário $t > 0$ obtemos:

$$V(x(t)) \leq \ e^{-2\gamma^- T^-(0,t)} e^{2\gamma^+ T^+(0,t)} V_{\sigma(0)}(x(0))$$

e pela propriedade *(ii)* temos

$$\| \ x(t) \ \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\gamma^- T^-(0,t)} e^{\gamma^+ T^+(0,t)} \ \| \ x(0) \ \|$$

Para todo $\lambda < \lambda^-$ suponhamos que o sistema obedeça a lei de chaveamento (5.13) sabemos que $\frac{T^-(0,t)}{T^+(0,t)} \geq \frac{\gamma^+ + \lambda^*}{\gamma^- - \lambda^*}$ ocorre para algum $\lambda^* \epsilon (\lambda, \gamma^-)$ o que é equivalente a $T^+(0,t)\gamma^+ - T^-(0,t)\gamma^- \leq -\lambda^*(T^+(0,t) + T^-(0,t)) = -\lambda^* t < -\lambda t$, isto implica que o sistema 5.10 é globalmente exponencialmente estável com grau de estabilidade λ ,podemos concluir que $V(x(t)) = x^T P x$ é uma função de Lyapunov para o sistema 5.10 quando adotamos a lei de chaveamento (5.13).

5.8 Aplicação: álgebra de Lie solúvel e matrizes comutantes

Sabemos que para um conjunto $\{A_i; i\epsilon\mathcal{P}\}$, compacto de matrizes Hurwitz se a álgebra de Lie g formada por tais matrizes é solúvel então existe uma função quadrática comum de Lyapunov para o sistema $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$. Suponhamos então $\{A_i; i\epsilon\mathcal{P}\}$ um conjunto compacto com $A_1, ..., A_r$ $(r < N)$ instáveis e as matrizes restantes são estáveis e a álgebra de Lie g gerada por tais matrizes solúvel .

Existe um conjunto de escalares positivos $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_N$ tal que $A_i - \gamma_i I$ $(i \leq r)$ e $A_i + \gamma_i I$ $(i > r)$ são matrizes Hurwitz estáveis , como $\{A_i; i\epsilon 1, ..., N\}$ é compacto temos $\{A_i - \gamma_i I, (i \leq r)\} \bigcup \{A_i + \gamma_i I (i > r)\}$ compacto , como a álgebra de Lie g é solúvel então $g^{(k)} = 0$ para k suficientemente grande onde $g^{(1)} = g = span\{A_1, A_2, ..., [A_1, A_2], ...\}$, $g^{(2)} = g = span\{[A_1, A_2], [A_1, [A_1, A_2]], ...\}$ e $g^{(k)} = [g^{(k-1)}, g^{(k-1)}]$. Agora desejamos saber o que ocorre com a álgebra de Lie q gerada por $A_i - \gamma_i I$ $(i \leq r)$ e $A_i + \gamma_i I$ $(i > r)$.

Sabemos que $q^{(2)} = span\{[A_1 - \gamma_1 I, A_2 - \gamma_2], ..., [A_1, [A_1 - \gamma_1 I, A_2 - \gamma_2]], ...\}$ mas $[A_1 - \gamma_1 I, A_2 - \gamma_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$, $[A_1 - \gamma_1 I, A_{r+1} + \gamma_{r+1}] = A_1 A_{r+1} - A_{r+1} A_1$, $[A_1 - \gamma_1 I, [A_1 - \gamma_1 I, A_2 - \gamma_2]] = A_1 A_1 A_2 - A_1 A_2 A_1 - A_1 A_2 A_1 + A_2 A_1 A_1$
Assim podemos perceber que os brackets de mais alta ordem são iguais aos gerados por g dessa forma temos $q^{(k)} = g^{(k)}$ para $k \geq 2$ então se tivermos g solúvel teremos q solúvel, pelo teorema de Lie sabemos que existe uma mudança de base tal que as matrizes acima são tranformadas em triangulares superiores, então existe uma matriz P tal que as desigualdades (5.11) ocorrem, portanto, podemos definir uma função comum quadrática de Lyapunov que satisfaz as propriedades da proposição 25 e podemos então estender o teorema 26 para esse caso.

Corolario 27 Para $\lambda \in (0, \gamma^-)$ escolhemos um escalar $\lambda^* \in (\lambda, \gamma^-)$ arbitrariamente para propor a seguinte lei de chaveamento:

Seja o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ tal que

$$\frac{T^-(0,t)}{T^+(0,t)} \geq \frac{\gamma^+ + \lambda^*}{\gamma^- - \lambda^*} \tag{5.14}$$

acontece para todo $t > 0$.

Para um conjunto $\{A_i; i\epsilon\mathcal{P}\}$, compacto se a álgebra de lie gerada por tais matrizes é solúvel, com a lei de chaveamento (5.14) o sistema (5.10) é globalmente exponencialmente estável com grau de estabilidade λ.

Demonstração : Análoga ao teorema 26.

Faremos agora o estudo do caso em que as matrizes comutam. Sabemos que para um conjunto $\{A_i; i\epsilon\mathcal{P}\}$, de matrizes Hurwitz que comutam existe uma função quadrática comum de Lyapunov para o sistema $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$.

Suponhamos então $\{A_i; i\epsilon\mathcal{P}\}$ um conjunto compacto com $A_1, ..., A_r$ $(r < N)$ instáveis e as matrizes restantes são estáveis e que as matrizes comutam .

Existe um conjunto de escalares positivos $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_N$ tais que $A_i - \gamma_i I$ $(i \leq r)$ e $A_i + \gamma_i I$ $(i > r)$ são matrizes Hurwitz estáveis , como as matrizes $A_1, ..., A_N$ comutam , desejamos saber o que ocorre com as matrizes $A_i - \gamma_i I$ $(i \leq r)$ e $A_i + \gamma_i I$ $(i > r)$.

Podemos perceber que se as matrizes A_i comutam temos $(A_p + \gamma_p I)(A_q + \gamma_q I) = (A_p A_q + \gamma_q A_p + \gamma_p A_q + \gamma_p \gamma_q) = (A_q A_p + \gamma_p A_q + \gamma_q A_p + \gamma_q \gamma_p) = (A_q + \gamma_q I)(A_p + \gamma_p I)$

$(A_p + \gamma_p I)(A_q - \gamma_q I) = (A_p A_q - \gamma_q A_p + \gamma_p A_q - \gamma_p \gamma_q) = (A_q A_p + \gamma_p A_q - \gamma_q A_p - \gamma_q \gamma_p) = (A_q - \gamma_q I)(A_p + \gamma_p I)$

$(A_p - \gamma_p I)(A_q - \gamma_q I) = (A_p A_q - \gamma_q A_p - \gamma_p A_q + \gamma_p \gamma_q) = (A_q A_p - \gamma_p A_q - \gamma_q A_p + \gamma_q \gamma_p) = (A_q - \gamma_q I)(A_p - \gamma_p I)$.

Portanto as matrizes $A_i - \gamma_i I$ $(i \leq r)$ e $A_i + \gamma_i I$ $(i > r)$ também comutam, por isso existe uma mudança de base tal que as matrizes acima são tranformadas em triangulares superiores, então existe uma matriz P tal que as desigualdades (5.11) ocorrem assim, podemos definir uma função comum quadrática de Lyapunov que satisfaz as propriedades da proposição 25 e podemos então estender o teorema 26 também para esse caso:

Corolario 28 Para $\lambda \in (0, \gamma^-)$ escolhemos um escalar $\lambda^* \in (\lambda, \gamma^-)$ arbitrariamente para propor a seguinte lei de chaveamento:

Seja o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ tal que

$$\frac{T^-(0,t)}{T^+(0,t)} \geq \frac{\gamma^+ + \lambda^*}{\gamma^- - \lambda^*} \tag{5.15}$$

acontece para todo $t > 0$.

Para um conjunto $\{A_i; i\epsilon\mathcal{P}\}$, compacto se as matrizes comutam, diante da lei de chaveamento (5.15) o sistema (5.10) é globalmente exponencialmente estável com grau de estabilidade λ.

Demonstração :

Análoga ao teorema 26.

Comentários

Podemos perceber a estreita relação entre o fato de as matrizes comutarem e o fato de a álgebra de Lie ser solúvel, porque em ambos os casos, para a lei de chaveamento $\frac{T^-(0,t)}{T^+(0,t)} \geq \frac{\gamma^+ + \lambda^*}{\gamma^- - \lambda^*}$, temos a estabilidade do sistema. Na realidade, como podemos verificar em [22] o fato de as matrizes comutarem implica a existência de uma mudança de base tal que todas as matrizes podem ser tranformadas em triangulares superiores. O mesmo acontece se supusermos a álgebra de Lie solúvel. Por isso, diante do chaveamento estabelecido acima, essas duas classes de matrizes se comportam da mesma maneira.

Capítulo 6

Sistemas lineares com chaveamento Markoviano

Como mencionado na introdução, o foco principal dessa dissertação é uma discussão crítica sobre as duas abordagem mais relevantes que tratam do problema de estabilidade para os sistemas que possuem como mecanismos de chaveamento uma *função constante por partes* ou uma *cadeia de Markov*. Como é nossa intenção contrapor técnicas utilizadas na teoria clássica de sistemas com chaveamento e as técnicas utilizadas na teoria de SLSM, é importante, nesse ponto, apresentar o conjunto de resultados relevantes que estabelecem condições necessárias e suficientes para *estabilidade no sentido da média quadrática* dos SLSM, (sistemas lineares com chaveamento Markoviano). As demonstrações para os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [45].

No espírito de contrapor as duas abordagens mencionadas, é importante ressaltar nesse ponto 2 vantagens da teoria para o caso de chaveamento Markoviano:

- Possui um conjunto de resultados que fornecem *condições necessárias e suficientes* para estabilidade, baseada em condições espectrais de fácil verificação.

- A teoria vale para o caso do espaço de estado da cadeia de Markov ser *infinito enumerável*

- Os resultados valem para o caso do espaço de estados de $x(.)$ complexo.

6.1 Espaço de Estado da Cadeia de Markov Infinito Enumerável

Definição 29 Para $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, espaços de Banach complexos, definimos $\mathbb{B}(X, Y)$ o conjunto de todos operadores lineares de X em Y. Definimos também $\mathbb{H}_1^{n,m}$ (respectivamente $\mathbb{H}_2^{n,m}$, $\mathbb{H}_{sup}^{n,m}$) o espaço linear formado por todas as sequências de matrizes complexas $V = (V_1, V_2, ...)$ com $V_i \epsilon \mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ tal que $\Sigma_{i=1}^{\infty} \parallel V_i \parallel < \infty$, $(\Sigma_{i=1}^{\infty} tr(V_i^* V_i) < \infty,\ sup\{\parallel V_i \parallel ; i = 1, 2, ...\})$. Por simplicidade designaremos $\mathbb{H}_\imath^n := \mathbb{H}_\imath^{n,n}$, . Para $V = (V_1, ...) \epsilon \mathbb{H}_\imath^{n,n}$, consideremos as seguintes normas $\parallel . \parallel_\imath$ em $\mathbb{H}_\imath^{n,m}$:

$$
\begin{aligned}
\parallel V \parallel_1 &:= \Sigma_{i=1}^{\infty} \parallel V_i \parallel \\
\parallel V \parallel_2 &:= (\Sigma_{i=1}^{\infty} tr(V_i^* V_i))^{\frac{1}{2}} \\
\parallel V \parallel_{sup} &:= sup\{\parallel V_i \parallel i = 1, 2, ...\}
\end{aligned}
$$

Pode ser verificado que $(\mathbb{H}_\imath^{n,m}, \parallel . \parallel_i)$ e $(\ell_\imath^{n,m}, \parallel . \parallel_i)$ $\imath = 1, 2, sup$ são uniformementes homeomórficas. Por isso $(\mathbb{H}_\imath^{n,m}, \parallel . \parallel_i)$ são espaços de Banach e de fato $(\mathbb{H}^{n,m}, \parallel . \parallel_2)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por $\langle V; S \rangle = \Sigma_{i \epsilon S} tr(V_i^* S_i))$, para $S = (S_1, ...)$ e $V = (V_1, ...)$ em $(\mathbb{H}^{n,m}, \parallel . \parallel_2)$.

Faremos as seguintes considerações:

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade completo equipado com os seguintes objetos:

(i) $\theta = \{(\theta_t, \mathcal{F}_t), t \epsilon \mathbb{R}^+\}$ um processo Markoviano homogêneo com trajetórias contínuas à direita e tomando valores no conjunto $S = \{1, 2, ...\}$. Assumimos também

$$
\begin{aligned}
P(\theta_{t+h} = j|\theta_t = i) &= \lambda_{ij}h + o(h), \quad i \neq j \\
P(\theta_{t+h} = j|\theta_t = i) &= 1 + \lambda_{ii}h + o(h), \quad i = j
\end{aligned}
$$

onde (λ_{ii}) é a matriz das taxas de transição estácionárias do processo $\{\theta\}$ com $0 \leq \lambda_i := -\lambda_{ii} = \Sigma_{j;j\neq i}\lambda_{ij} \leq \infty$ para todo $i\epsilon S$, isto é o processo é suposto ser conservativo. A notação $o(h)$ denota uma função que satisfaz $\lim_{h\downarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Definimos $P_{ij}(t) := P(\theta_{t+s} = j|\theta_s = i)$, i,j ϵS e denotamos $p_i(t) := P(\theta_t = i)$ para todo i ϵS . Note que $P_t := (p_1(t), ...)$ satisfaz a equação de Kolmogorov

$$\frac{dP_t}{dt} = \Lambda P_t, \quad P_0 = P \quad t \in \mathbb{R}^+$$

onde $\Lambda := (\lambda_{ij})'$. Além disso, assumimos que $\{(\theta_t, \mathcal{F}_t),\ t\epsilon\mathbb{R}^+\}$ possui como distribuição inicial $\{v(i); i\epsilon S\}$.

(ii) $x_0 : \Omega \to \mathbb{C}^n$ uma variável aleatória com $E[\| x_0 \|^2] < \infty$.

Consideremos o seguinte sistema homogêneo:

$$\dot{x}(t) = A(\theta_t)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad \theta_0 = v, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{6.1}$$

onde $A(.)$ é tal que $A(\theta_t) = A_j$ para $\theta_t = j$, $j \in S$ com A_j matriz constante em $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$, é assumido que $A := (A_1, ...) \in \mathbb{H}^n_{sup}$.

Definição 30 Para $t \in \mathbb{R}^+$

$$
\begin{aligned}
q(t) &:= E(x(t)) \quad \in \mathbb{C}^n \\
Q(t) &:= E(x(t)x(t)^*) \quad \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)^+.
\end{aligned}
$$

Definição 31 Um sistema linear com chaveamento Markoviano é *estocasticamente estavél* se para condições iniciais arbitrárias x_0 e distribuição inicial arbitrária v, tivermos:

$$\int_0^\infty \| x(t) \|_2^2 \, dt < \infty$$

Definição 32 Um sistema linear com chaveamento Markoviano é *estável no sentido da média quadrática* (ESMQ) se existem $q \in \mathbb{C}^n$ e $Q \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)^+$ tais que para qualquer condição inicial x_0 e distribuição inicial v tivermos:

(a) $\| q(t) - q \| \to 0$ quando $t \to \infty$

(b) $\| Q(t) - Q \| \to 0$ quando $t \to \infty$.

Usaremos também as seguintes notações :

$$\begin{aligned} V &:= \Lambda' \otimes I_{n^2}; \\ H &:= diag(\bar{A}_i \oplus A_i); \\ \mathcal{A} &:= V + H \\ \mathcal{L}(.) &:= (\mathcal{L}_i(.), ...); \\ \mathcal{T}(.) &:= (\mathcal{T}_i(.), ...); \end{aligned}$$

onde para $P = (P_i, ...) \in \mathbb{H}_1^n$, $V = (V_i, ...) \in \mathbb{H}_{sup}^n$ e $i \in S$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(P) &:= A_i P_i + P_i A_i^* + \Sigma_{j=1}^\infty \lambda_{ji} P_j; \\ \mathcal{T}_i(V) &:= A_i^* V_i + V_i A_i + \Sigma_{j=1}^\infty \lambda_{ij} V_j; \end{aligned}$$

6.2 Teoremas e proposições

Proposição 33 As seguintes afirmações são equivalentes

(a) O sistema (6.1) é estocasticamente estável de acordo com a definição 31.

(b) $Re\{\lambda(\mathcal{L})\} < 0$.

(c) $Re\{\lambda(\mathcal{A})\} < 0$.

Proposição 34 Se o sistema (6.1) é estocasticamente estável então para todo $S = (S_1, ...) \in \mathbb{H}^{n+}_{sup}$, existe uma única $G = (= G_1, ...) \in \mathbb{H}^{n+}_{sup}$ tal que

$$\mathcal{T}(G) + S = 0 \tag{6.2}$$

Proposição 35 Se existe $G = (G_1, ...) \in \mathbb{H}^{n+}_{sup}$ tal que (6.2) é satisfeita para algum $S = (S_1, ...) \in \mathbb{H}^{n+}_{sup}$ então o sistema (6.1) é estocasticamente estável.

Proposição 36 Se $Re\{\lambda(\mathcal{A})\} < 0$ então o sistema (6.1) possui estabilidade na média quadrática com $q = 0$ e $Q = 0$.

6.3 Resultados para espaço de estados finito

Consideramos agora $S = \{1, 2, ..., N\}$. Nesse caso, estabilidade estocástica é equivalente a estabilidade no sentido da média quadrática (o que não acontece no caso infinito enumerável). O resultado à seguir fornece um critério espectral de estabilidade no espírito do resultado clássico para sistemas lineares.

Teorema 37 O sistema (6.1) é ESMQ de acordo com a Definição 32 se e somente se $Re\{\lambda(\mathcal{A})\} < 0$. Além disso, as seguintes condições são equivalentes:

(a) $Re\{\lambda(\mathcal{A})\} < 0$

(b) $Re\{\lambda(\mathcal{L})\} < 0$

(c) $Re\{\lambda(\mathcal{A}^*)\} < 0$

(d) $Re\{\lambda(\mathcal{T})\} < 0$

O resultado à seguir engloba o resultado espectral e do tipo Lyapunov.

Teorema 38 As seguintes afirmativas são equivalentes à ESMQ do sistema (6.1):

(a) $Re\{\lambda(\mathcal{A})\} < 0$.

(b) $Re\{\lambda(\mathcal{L})\} < 0$.

(c) Para algum $G_j > 0 \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$, $j \in \mathcal{S}$, nós temos $\mathcal{L}_i(G) < 0, \quad i \in \mathcal{S}$.

(d) Para algum $S_i > 0 \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$, $i \in \mathcal{S}$, existe uma única $G = (G_1, ..., G_N)$, $G_i > 0 \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$, $i \in \mathcal{S}$, tal que$\mathcal{L}_i(G) + S_i = 0, \quad i \in \mathcal{S}$.

O próximo resultdo será útil para analisarmos o caso de matrizes triangulares no cenário de chaveamento markoviano. Considere a equação:

$$\dot{x}(t) = A(\theta_t)x(t) + B(\theta_t)w(t), \quad x(0) = x_0, \quad \theta_0 = v, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{6.3}$$

onde $\{w(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ é uma perturbação em L_2^m.

Teorema 39 O sistema (6.3) possui estabilidade no sentido da média quadratica, de acordo com a definição 32, $\Leftrightarrow Re\{\lambda(\mathcal{A})\} < 0$.

6.4 Estudo comparativo dos critérios para estabilidade

A estabilidade de cada modo de operação não implica necessariamente a estabilidade de um sistema com chaveamento. Podemos ter cada modo estável mas o sistema como um todo não ser instável da mesma forma que podemos ter cada modo instável e apesar disso o sistema ser estável. Por isso os resultados que garantem estabilidade diante de qualquer sinal de chaveamento como o que leva em consideração a *álgebra de Lie*, a *estrutura triangular* das matrizes e o das *matrizes que comutam* são mais restritos pois precisam que todos os subsistemas sejam estáveis. Nesta seção fazemos um estudo comparativo dos critérios que garantem a estabilidade diante de qualquer chaveamento e os que foram analisados neste capítulo referente ao chaveamento Markoviano.

Além da restrição relativa à estabilidade dos subsistemas, os resultados baseados na *álgebra de Lie*, a *estrutura triangular* das matrizes e o das *matrizes que co-*

mutam encontrados na literatura são restritos ao caso do espaço de estado finito. Portanto, para efeito de comparação, no que segue vamos considerar apenas esse cenário.

Exemplo 40 (Cada modo é instável mas o sistema é estável) Sejam $S = 1, 2$, $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $\Lambda = \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$
Nesse caso não podemos utilizar o critério de álgebra de Lie, das matrizes triangulares, nem o da comutatividade pois tais resultados têm como hipótese o fato de que todos os modos de operação são estáveis. Analisaremos portanto, a estabilidade do sistema através de $Re\{\lambda(\mathcal{A})\}$.

Podemos perceber que cada modo é instável pois A_1 e A_2 possuem como autovalores 1/2 e -2 entretanto podemos calcular $\mathcal{A} = V + H$ e constatar que para $0 < \beta \leq 1,33$ teremos para algum i $Re\{\lambda_i(\mathcal{A})\} > 0$ e por isso o sistema não possui estabilidade na média quadrática. Ao passo que, se $\beta > 1,34$, teremos $Re\{\lambda(\mathcal{A})\} < 0$, o que assegura a estabilidade na média quadrática para sistemas com espaço de estados finito.

Exemplo 41 (Cada modo é estável mas todo o sistema pode ser instável)

.

Sejam $S = 1, 2$, $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$ e $\Lambda = \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$

Como as matrizes não comutam não podemos aplicar o teorema da comutatividade. Para utilizarmos o teorema da álgebra de Lie, precisamos verificar se a mesma é solúvel, já que todos os modos de operação são estáveis, pois A_1 e A_2 possuem autovalores com parte real negativa .Tentaremos encontrar uma forma de **killing** não degenerada o que garante a não solubilidade da álgebra de Lie. Primeiramente, vamos verificar a estabilidade do sistema através de $Re\{\lambda(\mathcal{A})\}$ .Podemos calcular a matriz $\mathcal{A}$ e constatar que para $0 < \beta \leq 0,04$ temos $Re\{\lambda(\mathcal{A})\} < 0$ mas, para $\beta > 0,05$ temos para algum i $Re\{\lambda_i(\mathcal{A})\} > 0$ e o sistema não possui estabilidade média quadrática.

Vamos verificar se a álgebra de Lie gerada por A_1 e A_2 é solúvel. Para isso usaremos o primeiro critério de Cartan que diz que se a forma de **killing** é nula para $g^{(2)} = [g, g]$ onde g pertence à álgebra de Lie gerada pelas matrizes A_1 e A_2 então a álgebra é solúvel. Nesse caso temos:

$$g^{(2)} = span\{\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2000 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -400000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, ...\}$$

.

Devemos checar se a forma de **Killing** é nula em $g^{(2)}$, como a forma de **Killing** é bilinear, se encontrarmos uma base para $g^{(2)}$ e um caso onde dois de seus elementos possuam a forma de **Killing** não degenerada então a álgebra de Lie formada pelas matrizes não é solúvel.

Como geradores da subálgebra $g^{(2)}$ podemos ter:

$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pois não é difícil verificar que $span\{\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2000 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -400000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, ...\}$ pode ser gerado pelas matrizes acima .

Analisaremos agora a forma de **Killing** entre os elementos da base formada por X_1, X_2, X_3:

$[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_{12}^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c_{12}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_{12}^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}^1 & c_{12}^2 \\ c_{12}^3 & -c_{12}^1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{12}^2 = 2$

$[X_1, X_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{13}^1 & c_{13}^2 \\ c_{13}^3 & -c_{13}^1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{13}^3 = -2$

$[X_2, X_1] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{21}^1 & c_{21}^2 \\ c_{21}^3 & -c_{21}^1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{21}^2 = -2$

$$[X_2, X_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{23}^1 & c_{23}^2 \\ c_{23}^3 & -c_{23}^1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{23}^1 =$$

1

$$[X_3, X_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{31}^1 & c_{31}^2 \\ c_{31}^3 & -c_{31}^1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{31}^3 = 2$$

$$[X_3, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{32}^1 & c_{32}^2 \\ c_{32}^3 & -c_{32}^1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{32}^1 = -1$$

então temos $adX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $adX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $adX_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ onde ad é a representação adjunta definida no apêndice. Temos então $K(X_1, X_2) = tr(adX_1 \bigcirc adX_2) = 4$ logo, a álgebra de Lie gerada pelas matrizes A_1 e A_2 não é solúvel, dessa forma o critério da álgebra de Lie nada nos diz sobre a estabilidade do sistema.

Agora, vamos analisar o caso que as matizes são triangulares superiores que, de certa forma, abrange os casos em que as matrizes comutam ou aquele em que a álgebra de Lie é solúvel pois em ambos os casos é possível construir uma mudança de base que as tornem triangulares superiores. No exemplo a seguir, estudaremos um sistema linear com salto markoviano, formado por matrizes triangulares superiores estáveis. Neste caso sabemos pelo teorema 18 que o sistema é exponencialmente estável diante de qualquer lei de chaveamento e poderíamos nos perguntar agora se o sistema será estável no sentido da média quadrática. É o que temos a seguir.

Exemplo 42 (Cada modo é estável e as matrizes são triangulares) .

Sejam $S = 1, 2$, $A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ e $\Lambda = [\lambda_{ij}] = \left[\begin{smallmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{smallmatrix}\right]$, para $\alpha, \beta \geq 0$. Alternativamente, note que o sistema pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a_i y(t), \\ \dot{x}(t) = b_i x(t) + c_i y(t), \qquad i \in \{1, 2\}, \end{cases} \tag{6.4}$$

de onde é possível concluir que:

- Se o sistema (6.4) é ESMQ então o subsistema $\dot{y}(t) = a_i y(t)$ $i \in \{1,2\}$ também é ESMQ.

- Caso a componente y seja ESMQ, então $y \in L^2(\mathbb{R}_+)$ pode ser considerado uma perturbação de energia finita no sistema $\dot{x}(t) = b_i x(t)$.

Logo, para que (6.4) seja ESMQ, é necessário e suficiente que os sistemas com saltos

$$\dot{y}(t) = a_i y(t), \qquad \dot{x}(t) = b_i x(t) \tag{6.5}$$

sejam individualmente ESMQ. Através do critério espectral (Teorema 39), o primeiro desses subsistemas será ESMQ se e somente se a matriz

$$\mathcal{A}_1 := \begin{bmatrix} 2a_1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 2a_2 - \beta \end{bmatrix}$$

possuir todos seus autovalores no semiplano esquerdo, isto é, se e só se $\det(\mathcal{A}_1) > 0$ e $\operatorname{tr}(\mathcal{A}_1) < 0$. Derivando o critério análogo para a componente x, podemos verificar que (6.4) é ESMQ se e somente se $\alpha, \beta \geq 0$ satisfazem, simultaneamente, as desigualdades

$$\begin{gathered} a_1\beta + a_2\alpha < 2a_1a_2, \qquad b_1\beta + b_2\alpha < 2b_1b_2, \\ \alpha + \beta > 2\max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\}. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Agora, podemos concluir que:

(i) Caso $a_1, a_2, b_1, b_2 < 0$, então *o sistema é ESMQ para quaisquer* $\alpha, \beta \geq 0$. Isto quer dizer que se as matizes forem triangulares superiores e estáveis, o sistema é ESMQ para quaisquer mecanismos de chaveamento markoviano. Tal fato vai ao encontro do resultado estabelecido no teorema 18 como era de se esperar.

(ii) Caso $a_1, a_2, b_1, b_2 < 0$ não valha, então pelo menos um dos sistemas

$$\dot{y}(t) = a_i y(t), \qquad \dot{x}(t) = b_i x(t), \qquad i = 1, 2 \tag{6.7}$$

não é estável, fazendo com que a estabilidade **uniforme** (i.e., para chaveamento arbitrário) do sistema correspondente não se verifique. Apesar disso, através de chaveamento markoviano ainda é possível que se garanta a ESMQ do sistema (6.4).

(iii) Podemos perceber então que (6.6) define uma classe de chaveamentos Markovianos para os quais o sistema (6.4) é ESMQ. Isto é, (6.6) corresponde a uma condição suficiente para a ESMQ.

Podemos fazer agora uma interpretação dos resultados obtidos via funções de Lyapunov.

(i) Caso $a_1, a_2, b_1, b_2 < 0$, então existe uma função comum de Lyapunov para ambos os sistemas

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

o que garante a estabilidade global, exponencial, e uniforme (com respeito a chaveamento arbitrário) do sistema com chaveamento correspondente. Em particular, como vimos, isto também garante a ESMQ do sistema (6.4).

(ii) Caso um dos sistemas em (6.7) não seja individualmente estável, então não existe uma função comum de Lyapunov. No entanto, a existência de funções de Lyapunov acopladas, tal como aquela estudada em [84], ainda é capaz de garantir a ESMQ do sistema.

Podemos chegar a conclusão semelhante para o caso de dimensão 3, levando em consideração que a soma de 2 processos em $L^2(\mathbb{R}_+)$ também é $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Capítulo 7

Design com chaveamento Markoviano: Alguns resultados

Introduzimos a estrutura da cadeia de Markov como sinal de chaveamento nos resultados sobre design, e obtemos em nossos resultados, tempos de habitação no sentido estocástico, que permitem garantir a estabilidade do sistema.

7.1 Notação e Preliminares

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço completo de probabilidade equipado com o filtro $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+\}$, que satisfaz as usuais hipóteses de continuidade à direita, contendo os seguintes objetos:

(i) $\sigma = \{(\sigma(t), \mathcal{F}_t), t \in \mathbb{R}^+\}$ um processo Markoviano homogêneo com trajetórias continuas à direita tomando valores em um conjunto finito $\mathcal{P} = \{1, 2, ..., N-1, N\}$. Assumimos também:

$$P(\sigma(t+h) = j | \sigma(t) = i) = \lambda_{ij} h + o(h) \qquad i \neq j$$

$$P(\sigma(t+h) = j | \sigma(t) = i) = 1 + \lambda_{ii} h + o(h) \qquad i = j$$

onde $[(\lambda_{ij})] = \Lambda$ é a matriz das taxas de transição de $\sigma(t)$ com $\lambda_{ij} \geq 0$, $i \neq j$ e $-\lambda_{ii} = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}$ para todo $i \in \mathcal{P}$ e $o(h)$ é uma função que satisfaz

$lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$. Definimos $P_{ij}(t) = P(\sigma(t+s) = j|\sigma(s) = i)$, $i, j \in \mathcal{P}$ e denotemos $P_i(t) = P(\sigma(t) = i)$, $i \in \mathcal{P}$. Note que $P_t = (P_1(t), ..., P_N(t))$ e satisfaz a equação de Kolmogorov forward $\frac{dP_t}{dt} = \Lambda P_t$, $P_0 = P$ $t \in \mathbb{R}^+$, onde $\Lambda = [(\lambda_{ij})]$.

(ii) x_0 constante.

7.2 Chaveamento markoviano em subsistemas estáveis

Estabelecemos condições suficientes para estabilidade em sistemas lineares com chaveamento Markoviano considerando todos os subsistemas estáveis através de funções de Lyapunov por partes e tempo médio de habitação no sentido estocástico. Por fim, estendemos o resultado para uma família de sistemas não lineares.

7.2.1 Sistemas Lineares I

Definimos o seguinte sistema linear com chaveamento Markoviano

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{7.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ é o tempo inicial e $\sigma(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathcal{P}$ é o sinal de chaveamento.

Assumimos todos os subsistemas estáveis em (7.1) e $N > 1$. Considerando $A_1, ..., A_N$ matrizes $n \times n$ estáveis, então existe um conjunto de escalares γ_i tal que $A_i + \gamma_i I$ são estáveis e existem matrizes $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ tais que

$$(A_i + \gamma_i I)^T Q_i + Q_i(A_i + \gamma_i I) < 0 \tag{7.2}$$

acontece para todo i.

Sejam os tempos de chaveamento de $\sigma(t)$ denotados por t_i, $i = 1, 2, ...$ e $t_0 = 0$, por convenção, e além disso $N_\sigma(0, t)$ o número de chaveamentos no intervalo $[0, t)$ onde $t > 0$. Definimos também $\gamma^- = min_{i\in\mathcal{P}}\gamma_i$.

Diante das definições acima, utilizaremos os seguintes resultados auxiliares a fim de encontrarmos condições suficientes para estabilidade do sistema (7.1).

7.2.2 Resultados Auxiliares I

A proposição a seguir visa demonstrar algumas propriedades da função de Lyapunov por partes abaixo definida.

Proposição 43 Definimos a seguinte função de Lyapunov por partes:

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) = (x(t))^T Q_{\sigma(t)} x(t), \quad t \geq 0 \tag{7.3}$$

onde $Q_{\sigma(t)}$ varia entre as soluções Q_i´s da desigualdade (7.2). Essas funções satisfazem as seguintes propriedades:

(i) Cada $V_i(x(t)) = (x(t))^T Q_i x(t)$ é contínua e suas derivadas ao longo das soluções do sistema satisfazem

$$\dot{V}_i(x(t)) = \frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x \leq -2\gamma_i V_i x(t).$$

(ii) Existem escalares $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ tal que $\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V_i(x(t)) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2$, $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \mathcal{P}$.

(iii) Existe uma constante $\mu \geq 1$ tal que $V_i(x(t)) \leq \mu V_j(x(t))$ $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \mathcal{P}$.

Demonstração:

Para a primeira propriedade, basta verificarmos que

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_i x(t) &= (\dot{x}(t))^T Q_i x(t) + (x(t))^T Q_i \dot{x}(t) \\
&= (x(t))^T A_i^T Q_i x(t) + (x(t))^T Q_i A_i x(t) \\
&= (x(t))^T (A_i^T Q_i + Q_i A_i) x(t) \\
&\leq -2\gamma_i V_i x(t) \qquad (7.4)
\end{aligned}
$$

A segunda propriedade decorre se tomarmos $\alpha_1 = \inf_{i \in \mathcal{P}} \gamma_m(Q_i)$ e $\alpha_2 = \sup_{i \in \mathcal{P}} \gamma_M(Q_i)$ onde $\gamma_m(Q_i)$, $\gamma_M(Q_i)$ são, respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz positiva definida Q_i. Assim temos

$$\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V_i x(t) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2 .$$

A terceira propriedade pode ser verificada se tomarmos $\mu = sup_{i,k \in \mathcal{P}} \frac{\gamma_M(Q_i)}{\gamma_m(Q_k)}$.

Proposição 44 $N_\sigma(0,t)$ é um processo de Poisson não-homogêneo com taxa $\sum_{i=1}^{N} \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} P_i(t)$.

Demonstração:

Podemos perceber que N_σ é um processo de contagem. Vamos verificar suas propriedades:

(i) $N_\sigma(t_0, t) \geq 0$ (o sistema pode permanecer no subsistema inicial ou efetuar chaveamento).

(ii) $N_\sigma(t_0, t)$ está definido nos inteiros.

(iii) Se $s < t$ então $N_\sigma(0, s) \leq N_\sigma(0, t)$. Isto porque de s a t o sistema pode permanecer em um mesmo subsistema ou efetuar chaveamento.

(iv) Para $s < t$ temos $N_\sigma(0, t) - N_\sigma(0, s) = N_\sigma(s, t)$. Podemos verificar pela definição de $N_\sigma(0, t)$ que $N_\sigma(0, t) - N_\sigma(0, s)$ é o número de chaveamentos em (s, t).

(v) Assumindo $P(N_\sigma(0,h) \geq 2) = o(h)$, o que de fato é razoável já que a probabilidade de o sistema efetuar mais que um chaveamento em um infinitésimo de tempo pode ser assumida de ordem $o(h)$.

Obteremos a função de probabilidade do processo N_σ.

$$\begin{aligned}
P(N_\sigma(0,t+h) = i+1|N_\sigma(0,t) = i) &= P(\{\sigma(t) = 1\} \cap \{\sigma(t+h) \neq 1\}) \\
&+ P(\{\sigma(t) = 2\} \cap \{\sigma(t+h) \neq 2\}) + ... \\
&+ P(\{\sigma(t) = N\} \cap \{\sigma(t+h) \neq N\}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (P\{\sigma(t) = i \cap \sigma(t+h) \neq i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} P\{\sigma(t) = i\}(P\{\sigma(t+h) \neq i|\sigma(t) = i\}) \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

mas $P\{\sigma(t) = i\} = P_i(t)$, que é solução da equação diferencial $\dot{P} = \Lambda P$, isto é, $P_i(t) = e^{\Lambda t} P_i(0)$.

Resta obter $P\{\sigma(t+h) \neq i|\sigma(t) = i\}$. Mas $P\{\sigma(t+h) \neq i|\sigma(t) = i\} = \sum_{i\neq j} P\{\sigma(t+h) = j|\sigma(t) = i\}$.

Como $\sigma(t)$ é um processo Markoviano cuja matriz de taxas de transição é dada por $\Lambda = [(\lambda_{ij})]$ temos $\sum_{i\neq j} P\{\sigma(t+h) = j|\sigma(t) = i\} = \sum_{i\neq j} \lambda_{ij} h + o(h)$.

Substituindo em (7.5) temos

$$\begin{aligned}
P(N_\sigma(0,t+h) = i+1|N_\sigma(0,t) = i) &= \sum_{i=1}^{N} P_i(t)(\sum_{i\neq j} \lambda_{ij})h + o(h) \\
&= (\sum_{i=1}^{N} \sum_{i\neq j} \lambda_{ij} P_i(t))h + o(h)
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que N_σ é um processo de Poisson não homogêneo com taxa $(\sum_{i=1}^{N} \sum_{i\neq j} \lambda_{ij} P_i(t))$.

7.2.3 Resultado principal I

O teorema a seguir estabelece condição de suficiência para estabilidade do sistema (7.1).

Teorema 45 O sistema com chaveamento Markoviano (7.1) é estocasticamente estável se $-\sum_{k=1}^{N}\lambda_{kk} < \frac{2\gamma^-}{(\mu-1)}$.

Demonstração

Sejam $t_1 < t_2 < ... < t_{N_{\sigma(0,t)}} \leq t$ os tempos em que ocorrem os chaveamentos sobre o intervalo $(0,t)$. Então sabemos pela propriedade *(i)* da Proposição 43 acima que para $t \in [t_i, t_{i+1})$ a candidata à função de Lyapunov por partes satisfaz

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \leq e^{-2\gamma^-(t-t_i)}V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)).$$

Notando que $V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1}))$ se verifica, de acordo com a propriedade *(iii)* da Proposição 43 e $V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq e^{-2\gamma^-(t_{i+1}-t)}V_{\sigma(t_i)}(x(t))$ temos

$$V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu e^{-2\gamma^-(t_{i+1}-t_i)}V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)).$$

Iterando a última desigualdade de $i = 0$ a $i = N_\sigma(0,t)$ para um tempo arbitrário $t > 0$ obtemos

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \mu^{N_\sigma(0,t)}e^{-2\gamma^-(t)}V_{\sigma(0)}(x(0))$$

e pela propriedade *(ii)* da Proposição 43 temos

$$\| x(t) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}e^{-\gamma^-(t)+\frac{ln\mu}{2}N_\sigma(0,t)} \| x(0) \| .$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\| x(t) \|_2^2 &= E(\| x(t) \|^2) \\
&\leq c \| x_0 \|^2 \, E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)-2\gamma^- t}) \\
&= c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^- t} E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)})
\end{aligned} \tag{7.6}$$

onde $c = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Mas,

$$E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ln\mu k} P(N_\sigma(0,t) = k).$$

Sabemos que $P(N_\sigma(0,t) = k) = \frac{e^{-m(t)}(m(t))^k}{k!}$ onde $m(t) := \int_0^t \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} \lambda_{kj} P_k(y) dy$, pois N_σ é um processo de Poisson não-homogêneo com taxa $\sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} P_i(t)$. Então

$$\begin{aligned}
E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{ln\mu k}) P(N_\sigma(0,t) = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ln\mu k} \frac{e^{-m(t)} m(t)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ln\mu k - m(t)} \frac{m(t)^k}{k!} \\
&= e^{(\mu-1)m(t)}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Substituindo em (7.6)

$$
\begin{aligned}
\| x(t) \|_2^2 &= E(\| x(t) \|^2) \\
&\leq c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^- t} E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) \\
&= c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^- t} e^{(\mu-1)m(t)}.
\end{aligned}
$$

Mas $m(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^N \sum_{j\neq k} \lambda_{kj} P_k(y) dy \leq \int_0^t \sum_{k=1}^N \sum_{j\neq k} \lambda_{kj} dy = -\sum_{k=1}^N \lambda_{kk} t$. Portanto temos

$$
\begin{aligned}
\| x(t) \|_2^2 &= E(\| x(t) \|^2) \\
&\leq c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^-(t)} e^{(\mu-1)m(t)} \\
&\leq c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^-(t)} e^{(\mu-1)(-\sum_{k=1}^N \lambda_{kk} t)} \\
&= c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^-(t)+(\mu-1)(-\sum_{k=1}^N \lambda_{kk} t)} \\
&= c \| x_0 \|^2 \, e^{(-2\gamma^- - \sum_{k=1}^N \lambda_{kk}(\mu-1))t}.
\end{aligned}
$$

Por hipótese $-\sum_{k=1}^N \lambda_{kk} < \frac{2\gamma^-}{(\mu-1)}$ o que implica $-2\gamma^- - \sum_{k=1}^N \lambda_{kk}(\mu-1) < 0$ portanto $E(\| x(t) \|^2) < \infty$ e o sistema (7.1) é estocasticamente estável.

Comentário

Podemos verificar que a condição $-\sum_{k=1}^N \lambda_{kk} \leq \frac{2\gamma^-}{(\mu-1)}$ se aproxima, intuitivamente, do sentido de tempo médio de habitação dos sistemas determinísticos já que o tempo esperado de permanência em um subsistema i a longo prazo é o inverso da taxa $-\lambda_{ii}$. Além disso, γ^- está relacionado à quão robusto é o sistema, i.e, quanto maior é γ^- maior é a perturbação que podemos efetuar em cada subsistema sem que nenhum subsitema perca a estabilidade e, de acordo com a hipótese podemos observar que quanto maior é γ^- menor é o tempo de permanência necessário de modo a garantir a estabilidade.

No caso de sistemas não lineares podemos estender o teorema da seção 7.2.3, sendo necessário impor a existência de funções de Lyapunov por partes com as devidas hipóteses, como veremos a seguir.

7.2.4 Sistemas não-lineares I

Consideremos o seguinte sistema com chaveamento markoviano

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x) \tag{7.8}$$

onde as funções $f_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são localmente Lipschitz, $f_\sigma(0) = 0$ e $\sigma(t)$ satisfaz as hipóteses estabelecidas na seção 7.1.

Teorema 46 Suponhamos que existam funções continuamente diferenciáveis V_i : $\mathbb{R}^n \to R^+$, $i \in \mathcal{P}$, números reais $\gamma_i \in \mathbb{R}$ e $\mu > 1$ tais que:

(i) Cada $V_i(x(t))$ é contínua e suas derivadas ao longo das soluções do sistema satisfazem:

$\dot{V}_i(x(t)) = \frac{\partial V_i}{\partial x} f_i(x) \leq -2\gamma_i V_i(x(t))$

(ii) Existem escalares $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ tal que $\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V_i(x(t)) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2$, $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \mathcal{P}$.

(iii) Existe uma constante $\mu \geq 1$ tal que $V_i x(t) \leq \mu V_j x(t)$ $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \mathcal{P}$.

O sistema com chaveamento markoviano 7.8 é estocasticamente estável para $-\sum_{k=1}^{N} \lambda_{kk} < \frac{2\gamma^-}{(\mu-1)}$

Demonstração :

Sejam $t_1 < t_2 < ... < t_{N_{\sigma(0,t)}} \leq t$ os tempos em que ocorrem os chaveamentos sobre o intervalo $(0, t)$ e $\gamma^- = min_{i \in \mathcal{P}} \gamma_i$. Então sabemos por hipótese que para $t \in [t_i, t_{i+1})$ a candidata à função de Lyapunov por partes satisfaz:

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \leq e^{-2\gamma^-(t-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i))$$

Notando que $V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1}))$ se verifica, de acordo com a hipótese *iii* e $V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq e^{-2\gamma^-(t_{i+1}-t)} V_{\sigma(t_i)}(x(t))$ temos

$$V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu e^{-2\gamma^-(t_{i+1}-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i))$$

Iterando a última desigualdade de $i = 0$ a $i = N_\sigma(0,t)$ para um tempo arbitrário $t > 0$ obtemos:

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \mu^{N_\sigma(0,t)} e^{-2\gamma^-(t)} V_{\sigma(0)}(x(0))$$

e pela hipótese (ii) temos

$$\| x(t) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\gamma^-(t)+\frac{ln\mu}{2}N_\sigma(0,t)} \| x(0) \|$$

Para calcularmos $\| x(t) \|_2^2$ precisamos calcular $E(\| x(t) \|^2)$.

$$\begin{aligned} & E(\| x(t) \|^2) \\ & \qquad \leq \quad c \| x_0 \|^2 \, E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t) - 2\gamma^- t}) \\ & \qquad = \quad c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^- t} E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) \end{aligned} \tag{7.9}$$

onde $c = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Mas $E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ln\mu k} P(N_\sigma(0,t) = k)$.

Por outro lado sabemos que $P(N_\sigma(0,t) = k) = \frac{e^{-m(t)} m(t)^k}{k!}$ onde $m(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{N} \sum_{j\neq k} \lambda_{kj} P_k(y) dy$ pois N_σ é um processo de Poisson não homogêneo com taxa $(\sum_{i=1}^{N} \sum_{i\neq j} \lambda_{ij} P_i(t))$, então

$$
\begin{aligned}
E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) &= \sum_{k=0}^{\infty}(e^{ln\mu k})P(N_\sigma(0,t)=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ln\mu k}\frac{e^{-m(t)}m(t)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ln\mu k - m(t)}\frac{m(t)^k}{k!} = e^{(\mu-1)m(t)}
\end{aligned}
$$

Substituindo em (7.9)

$$
\begin{aligned}
E(\| x(t) \|^2) &\leq c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^- t}E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) \\
&= c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^- t}e^{(\mu-1)m(t)} \qquad (7.10)
\end{aligned}
$$

Mas $m(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^N \sum_{j\neq k} \lambda_{kj}P_k(y)dy \leq \int_0^t \sum_{k=1}^N \sum_{j\neq k} \lambda_{kj}dy = -\sum_{k=1}^N \lambda_{kk}t$, substituindo em (7.10) temos

$$
\begin{aligned}
E(\| x(t) \|^2) &\leq c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^-(t)}e^{(\mu-1)m(t)} \\
&\leq c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^-(t)}e^{(\mu-1)(-\sum_{k=1}^N \lambda_{kk}t)} \\
&= c \| x_0 \|^2 \, e^{-2\gamma^-(t)+(\mu-1)(-\sum_{k=1}^N \lambda_{kk}t)} \\
&= c \| x_0 \|^2 \, e^{(-2\gamma^- - \sum_{k=1}^N \lambda_{kk}(\mu-1))t}
\end{aligned}
$$

Por hipótese temos $-\sum_{k=1}^N \lambda_{kk} < \frac{2\gamma^-}{(\mu-1)}$ o que implica $-2\gamma^- - \sum_{k=1}^N \lambda_{kk}(\mu - 1) < 0$ portanto $E(\| x(t) \|^2) < \infty$ e o sistema (7.8) é estocasticamente estável.

7.3 Chaveamento Markoviano em subsistemas instáveis

Como na seção anterior, estudaremos aqui o comportamento de uma coleção de sistemas instáveis utilizando as ferramentas de design: funções de Lyapunov por partes e tempo médio de habitação. Surpreendentemente, as ferramentas de design se mostram ineficazes e incapazes de produzir critérios para estabilidade quando se trata de todos modos instáveis.

Definimos o seguinte sistema linear com chaveamento Markoviano

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{7.11}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ é o tempo inicial e $\sigma(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathcal{P}$ é o sinal de chaveamento.

Assumimos todos os subsistemas instáveis em (7.11) e $N > 1$.

Considerando $A_1, ..., A_N$ matrizes $n \times n$ estáveis, então existe um conjunto de escalares γ_i tal que $A_i - \gamma_i I$ são estáveis e existem matrizes $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ tais que

$$(A_i - \gamma_i I)^T Q_i + Q_i(A_i - \gamma_i I) < 0 \tag{7.12}$$

acontece para todo i.

Sejam os tempos de chaveamento de σ denotados por t_i, $i = 1, 2, ...$, $t_0 = 0$, por convenção, e $N_\sigma(0, t)$ o número de chaveamentos no intervalo $[0, t)$ onde $t > 0$.

Definimos $\gamma^+ = max_{i \in \mathcal{P}} \gamma_i$.

Diante das definições acima, utilizaremos o seguinte resultado auxiliar, juntamente com (44) a fim de encontrarmos condições suficientes para estabilidade do sistema (7.11).

7.3.1 Função de Lyapunov e subsistemas instáveis

A proposição a seguir visa demonstrar algumas propriedades da função de Lyapunov por partes abaixo definida.

Proposição 47 Definimos a seguinte função de Lyapunov por partes:

$$V_{\sigma(t)}x(t) = (x(t))^T Q_{\sigma(t)}x(t), \quad t \geq 0 \tag{7.13}$$

onde $Q_{\sigma(t)}$ varia entre as soluções Q_i´s da desigualdade (7.12). Essas funções satisfazem as seguintes propriedades:

(i) Cada $V_i x(t) = (x(t))^T Q_i x(t)$ é contínua e suas derivadas ao longo das soluções do sistema satisfazem

$$\dot{V}_i x(t) = \tfrac{\partial V_i}{\partial x} A_i x \leq 2\gamma_i V_i x(t).$$

(ii) Existem escalares $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ tal que $\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V_i x(t) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2$, $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \mathcal{P}$.

(iii) Existe uma constante $\mu \geq 1$ tal que $V_i x(t) \leq \mu V_j x(t)$ $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \mathcal{P}$.

Demonstração:

Para a primeira propriedade, basta verificarmos que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i x(t) &= (\dot{x}(t))^T Q_i x(t) + (x(t))^T Q_i \dot{x}(t) \\
&= (x(t))^T A_i^T Q_i x(t) + (x(t))^T Q_i A_i x(t) \\
&= (x(t))^T (A_i^T Q_i + Q_i A_i) x(t) \\
&\leq 2\gamma_i V_i x(t) \qquad (7.14)
\end{aligned}$$

A segunda propriedade decorre se tomarmos $\alpha_1 = \inf_{i \in \mathcal{P}} \gamma_m(Q_i)$ e $\alpha_2 = \sup_{i \in \mathcal{P}} \gamma_M(Q_i)$ onde $\gamma_m(Q_i)$, $\gamma_M(Q_i)$ são, respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz positiva definida Q_i. Assim temos

$$\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V_i x(t) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2 .$$

A terceira propriedade pode ser verificada se tomarmos $\mu = sup_{i,k \in \mathcal{P}} \frac{\gamma_M(Q_i)}{\gamma_m(Q_i)}$.

7.3.2 Comportamento de $E(\| x(t) \|^2)$

Faremos aqui o estudo da solução do sistema (7.11) da mesma maneira que estudamos o caso em que todas os subsistemas eram estáveis e concluíremos que não é possível obter uma limitação para $E(\| x(t) \|^2)$, por isso não é possível estabelecer critérios para estabilidade estocástica.

Sejam $t_1 < t_2 < ... < t_{N_{\sigma(0,t)}} \leq t$ os tempos em que ocorrem os chaveamento sobre o intervalo $(0, t)$. Então sabemos pela propriedade *(i)* da Proposição 47 acima que para $t \in [t_i, t_{i+1})$ a candidata à função de Lyapunov por partes satisfaz

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \leq e^{2\gamma^+(t-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)).$$

Notando que $V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1}))$ se verifica, de acordo com a propriedade *(iii)* da Proposição 43 e $V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq e^{2\gamma^+(t_{i+1}-t)} V_{\sigma(t_i)}(x(t))$ temos

$$V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu e^{2\gamma^+(t_{i+1}-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)).$$

Iterando a última desigualdade de $i = 0$ a $i = N_\sigma(0, t)$ para um tempo arbitrário $t > 0$ obtemos

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \mu^{N_\sigma(0,t)} e^{2\gamma^+(t)} V_{\sigma(0)}(x(0))$$

e pela propriedade *(ii)* da Proposição 43 temos

$$\| x(t) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{\gamma^+(t) + \frac{ln\mu}{2} N_\sigma(0,t)} \| x(0) \| .$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \| x(t) \|_2^2 &= E(\| x(t) \|^2) \\ &\leq c \| x_0 \|^2 \, E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)+2\gamma^+ t}) \\ &= c \| x_0 \|^2 \, e^{2\gamma^+ t} E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) \end{aligned} \qquad (7.15)$$

onde $c = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Mas,

$$E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ln\mu k} P(N_\sigma(0,t) = k).$$

Sabemos que $P(N_\sigma(0,t) = k) = \frac{e^{-m(t)}(m(t))^k}{k!}$ onde $m(t) := \int_0^t \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} \lambda_{kj} P_k(y) dy$, pois N_σ é um processo de Poisson não-homogêneo com taxa $\sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} P_i(t)$. Então

$$\begin{aligned} E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{ln\mu k}) P(N_\sigma(0,t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ln\mu k} \frac{e^{-m(t)} m(t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ln\mu k - m(t)} \frac{m(t)^k}{k!} \\ &= e^{(\mu-1)m(t)}. \end{aligned} \qquad (7.16)$$

Substituindo em (7.15)

$$\begin{aligned} \| x(t) \|_2^2 &= E(\| x(t) \|^2) \\ &\leq c \| x_0 \|^2 \, e^{2\gamma^+ t} E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)}) \\ &= c \| x_0 \|^2 \, e^{2\gamma^+ t} e^{(\mu-1)m(t)}. \end{aligned}$$

Como $m(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{N} \sum_{j \neq k} \lambda_{kj} P_k(y) dy \geq 0$ podemos perceber que $(\mu - 1)m(t) \geq 0$ e portanto $E(\| x(t) \|^2)$ é ilimitada e, dessa forma, não podemos concluir nada a respeito da estabilidade estocástica do sistema (7.11).

Concluímos que para o sistema composto todos os subsistemas instáveis a aplicação dos conceitos da teoria de design não fornece um tempo de permanência que assegure a estabilidade, como também não fornecia no caso de chaveamento determinístico, entretanto, há casos em que mesmo composto por todos os susbsistemas instáveis o sistema pode ser estabilizado diante de um determinado chaveamento [45].

7.4 Exemplos de aplicação dos critérios de estabilidade

Faremos agora um estudo de estabilidade diante das conclusões obtidas neste capítulo e dos resultados de [45] em dois casos, primeiramente considerando todos os subsistemas estáveis e posteriormente com todos instáveis.

7.4.1 Subsistemas estáveis

Consideremos o sistema com chaveamento cujos modos de operação são dados pelas matrizes: $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$ e a matriz de taxas de transição dada por $\Lambda = \begin{pmatrix} -0,02 & 0,02 \\ 0,02 & -0,02 \end{pmatrix}$.

Ao calcularmos $Re\{\lambda(\mathcal{A})\}$ obtemos $Re\{\lambda(\mathcal{A})\} = -0,0263$ e, portanto, o sistema é estocasticamente estável.

De acordo com o critério estabelecido no teorema 45 para se garantir a estabilidade, uma condição suficiente é $-\sum_{k=1}^{N} \lambda_{kk} \leq \frac{2\gamma^-}{(\mu-1)}$. Podemos computar γ^- e μ utilizando ferramentas computacionais para LMI´s. Dessa forma, $\gamma^- = 0,001$ e $\mu = 46,7361$ portanto para uma matriz $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$ tal que, $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \frac{0,002}{46,7361}$ o critério definido em 45 nos fornece a estabilidade do sistema mas, no caso da matriz Λ temos $\alpha_1 + \alpha_2 = 0,04 > \frac{0,002}{46,7361}$ assim, o critério definido em 45 nada nos diz sobre a estabilidade do sistema.

7.4.2 Subsistemas instáveis

Consideremos agora, o sistema com chaveamento cujos modos de operação são dados pelas matrizes: $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e a matriz de taxas de transição dada por $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Para esse sistema temos $Re\{\lambda(\mathcal{A})\} = -0,2984$. Portanto, o sistema é estocasticamente estável. Mas, como vimos através da aplicação dos conceitos de funções de Lyapunov por partes e tempo médio de habitação não obtemos um critério para a estabilidade do sistema.

7.5 Chaveamento Markoviano em subsistemas estáveis e instáveis

Como nos resultados obtidos para uma coleção de subsistemas estáveis, estabelecemos aqui condições suficientes para estabilidade em sistemas lineares com chaveamento Markoviano considerando subsistemas estáveis e instáveis e aplicamos o resultado alcançado aos sistemas não lineares.

7.5.1 Sistemas lineares II

Diante das considerações feitas em 7.1 definimos o seguinte sistema linear com chaveamento Markoviano:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{7.17}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ é o tempo inicial e $\sigma(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathcal{P}$ é o sinal de chaveamento.

Assumimos $A_1, ..., A_r$ $(r < N)$ são instáveis e as matrizes restantes são estáveis em (7.17) e $N > 1$.

Considerando $A_1, ..., A_r$ $(r < N)$ são instáveis e as restantes são estáveis, então existe um conjunto de escalares γ_i tal que $A_i - \gamma_i I$ $(i \leq r)$ e $A_i + \gamma_i I$ $(i > r)$ são estáveis, então existem matrizes $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ tais que as desigualdades abaixo ocorrem:

$$\begin{aligned} &(A_i - \gamma_i I)^T Q_i + Q_i(A_i - \gamma_i I) < 0, \quad i \leq r \\ &(A_i + \gamma_i I)^T Q_i + Q_i(A_i + \gamma_i I) < 0, \quad i > r \end{aligned} \tag{7.18}$$

Denotemos os tempos de chaveamento de σ por t_i, $i = 1, 2, ...$ e $t_0 = 0$ por convenção. Definimos $N_\sigma(0,t)$, o número de chaveamentos no intervalo $[0,t)$ onde $t > 0$, $T^+(0,t)$, o tempo total de ativação dos sistemas instáveis, $T^-(0,t)$ o tempo total de ativação dos estáveis no intervalo $[0,t)$, $\gamma^+ = max_{1 \leq q \leq r} \gamma_q$ e $\gamma^- = min_{r < q \leq N} \gamma_q$.

Utilizaremos os resultados a seguir para encontrarmos condições suficientes de estabilidade do sistema (7.17).

7.5.2 Resultados Auxiliares II

Utilizaremos a proposição a seguir para demonstrar algumas propriedades da função de Lyapunov por partes abaixo definida.

Proposição 48 Definimos a seguinte função de Lyapunov por partes:

$$V_{\sigma(t)} x(t) = (x(t))^T Q_{\sigma(t)} x(t), \quad t \geq 0 \tag{7.19}$$

onde $Q_{\sigma(t)}$ varia entre as soluções Q_i´s da desigualdade (7.18). Essas funções satisfazem as seguintes propriedades:

(i) Cada $V_i(x(t)) = (x(t))^T P_i x(t)$ é contínua e suas derivadas ao longo das soluções do sistema satisfazem

$$\dot{V}_i(x(t)) = \frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x \leq 2\gamma_i V_i \quad se \quad i \leq r$$
$$\dot{V}_i(x(t)) \leq -2\gamma_i V_i(x(t)) \quad se \quad i > r$$

(ii) Existem escalares $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ tal que $\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V_i(x(t)) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2$, $\forall x(t) \epsilon \mathbb{R}^n$, $\forall i \epsilon \mathcal{P}$.

(iii) Existe uma constante $\mu \geq 1$ tal que $V_i(x(t)) \leq \mu V_j(x(t))$ $\forall x(t) \epsilon \mathbb{R}^n$, $\forall i \epsilon \mathcal{P}$.

Demonstração :

Para a primeira propriedade, basta verificarmos que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i x(t) &= (\dot{x}(t))^T Q_i x(t) + (x(t))^T Q_i \dot{x}(t) \\
&= (x(t))^T A_i^T Q_i x(t) + (x(t))^T Q_i A_i x(t) \\
&= (x(t))^T (A_i^T Q_i + Q_i A_i) x(t)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i(x(t)) &\leq 2\gamma_i V_i(x(t)) \quad se \quad i \leq r \\
\dot{V}_i(x(t)) &\leq -2\gamma_i V_i(x(t)) \quad se \quad i > r
\end{aligned} \tag{7.20}$$

A segunda propriedade decorre se tomarmos $\alpha_1 = inf_{i\epsilon\mathcal{P}} \gamma_m(Q_i)$ e $\alpha_2 = sup_{i\epsilon\mathcal{P}} \gamma_M(Q_i)$ onde $\gamma_M(Q_i)$, $\gamma_m(Q_i)$ são respectivamente maior e o menor autovalor da matriz positiva definida Q_i, por isso temos

$$\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V_i(x(t)) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2$$

A terceira propriedade pode ser verificada se tomarmos $\mu = sup_{i,k\epsilon\mathcal{P}} \frac{\gamma_M(Q_i)}{\gamma_m(Q_i)}$.

Utilizaremos também a proposição 44 da seção 7.2.2.

7.5.3 Resultado principal II

O seguinte teorema estabelece condições suficientes para estabilidade do sistema 7.17.

Teorema 49 O sistema 7.17 é estocásticamente estável se

- (i)
$$-\sum_{i=1}^{N} \lambda_{kk} \leq \frac{2\gamma^-}{(\mu^2-1)}$$

- (ii) $\exists$ uma função $w(t)$ tal que $lim_{t\to\infty} w(t) = 0$ e $E(e^{4(\gamma^+ + \gamma^-)T^+(0,t)}) \leq w(t)$

Demonstração :

Sejam $t_1 < t_2 < ... < t_{N_{\sigma(0,t)}} \leq t$ os tempos em que ocorrem os chaveamento sobre o intervalo $(0, t)$. Então sabemos pela propriedade i da Proposição 48 para $t\epsilon[t_i, t_{i+1})$ a candidata à função de Lyapunov por partes satisfaz:

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \leq e^{2\gamma^+(t-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) \leq r$$
$$V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \leq e^{-2\gamma^-(t-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) > r$$

Notando pela propriedade iii da Proposição 48 que $V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1}))$ se verifica para todo $x(t_{i+1})$, como

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq e^{2\gamma^+(t_{i+1}-t)} V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) \leq r$$
$$V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq e^{-2\gamma^-(t_{i+1}-t)} V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) > r$$

temos:

$$V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu e^{2\gamma^+(t_{i+1}-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) \leq r$$
$$V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu e^{-2\gamma^-(t_{i+1}-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) > r$$

Iterando as desigualdades de $i = 0$ a $i = N_\sigma(0,t)$ para um tempo arbitrário $t > 0$ obtemos:

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \mu^{N_\sigma(0,t)} e^{2\gamma^+ T^+(0,t) - 2\gamma^- T^+(0,t)} V_{\sigma(0)}(x(0))$$

e pela propriedade *ii* da Proposição 48 temos

$$\| x(t) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\gamma^- T^- + \gamma^+ T^+ + \frac{ln\mu}{2} N_\sigma(0,t)} \| x(0) \| \tag{7.21}$$

Precisamos calcular $\| x(t) \|_2^2 = E(\| x(t) \|^2)$. Pela desigualdade (7.24) temos:

$$E(\| x(t) \|^2) \leq kE(e^{ln\mu N_\sigma(0,t) + 2\gamma^+ T^+(0,t) - 2\gamma^- T^-(0,t)})$$

onde $k = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \| x_0 \|^2$ mas

$$\begin{aligned} E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t) + 2\gamma^+ T^+(0,t) - 2\gamma^- T^-(0,t)}) &= E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t) + 2\gamma^+ T^+(0,t) - 2\gamma^-(t - T^+(0,t))}) \\ &= e^{-2\gamma^- t} E(e^{(2\gamma^+ + 2\gamma^-) T_+(0,t) + ln\mu N_\sigma(0,t)}) \\ &\leq e^{-2\gamma^- t} \sqrt{E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)})} \sqrt{E(e^{(4(\gamma^+ + \gamma^-)) T^+(0,t)})} \quad (7.22) \end{aligned}$$

de acordo com a desigualdade de Cauchy.

Vamos analisar $\sqrt{E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)})}$

$$\begin{aligned} E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{2ln\mu k} e^{-(m(t))} \frac{(m(t))^k}{k!} \\ &= e^{-(m(t))} e^{\mu^2((m(t)))} \\ &= e^{(\mu^2 - 1)((m(t)))} \end{aligned}$$

onde $(m(t)) = \int_0^t \sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi} P_i(s)ds \leq \int_0^t \sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi} ds < \sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi} t$

Então

$$
\begin{aligned}
\sqrt{E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)})} &= \sqrt{e^{(\mu^2-1)(m(t))}} \\
&\leq \sqrt{e^{(\mu^2-1)(\sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi} t)}} \\
&\leq e^{(\mu^2-1)(\sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi} t)}
\end{aligned}
$$

Substituindo em (7.22) temos

$$
\begin{aligned}
E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)+2\gamma^+ T^+(0,t)-2\gamma^- T^-(0,t)}) &\leq e^{-2\gamma^- t}\sqrt{E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)})}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^+ + \gamma^-))T^+(0,t)})} \\
&\leq e^{-2\gamma^- t} e^{(\mu^2-1)(\sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi} t)}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^+ + \gamma^-))T^+(0,t)})} \\
&= e^{(-2\gamma^- + (\mu^2-1)(\sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi}))t}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^+ + \gamma^-))T^+(0,t)})} \\
&= e^{(-2\gamma^- + (\mu^2-1)(-\sum_{i=1}^N \lambda_{ii}))t}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^+ + \gamma^-))T^+(0,t)})}
\end{aligned}
$$

Por hipótese temos $-\sum_{i=1}^N \lambda_{ii} < \frac{2\gamma^-}{(\mu^2-1)}$ e $lim_{t\to\infty}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^+ + \gamma^-))T^+(0,t)})} \leq lim_{t\to\infty} E(e^{(4(\gamma^+ + \gamma^-))T^+(0,t)}) \leq lim_{t\to\infty} w(t) = 0$, portanto $E(\| x(t) \|^2) < \infty$ e o sistema 7.17 é estocasticamente estável.

Comentários

Podemos interpretar a condição estabelecida em $-\sum_{k=1}^N \lambda_{kk} \leq \frac{2\gamma^-}{(\mu^2-1)}$ como um limitante para o tempo de habitação. Como o tempo esperado de habitação no estado i a longo prazo é $\frac{1}{-\lambda_{ii}}$, de fato a hipótese estabelece um limitante para o tempo de habitação dos subsistemas e portanto é uma forma de definir um chaveamento Markoviano suficientemente lento de modo a garantir a estabilidade estocástica.

7.5.4 Sistemas não-lineares II

Nesta seção aplicamos os resultados encontrados para sistemas lineares considerando desta vez o seguinte sistema com chaveamento markoviano

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x) \tag{7.23}$$

onde as funções $f_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são localmente Lipschitzianas, $f_\sigma(0) = 0$ e $\sigma(t)$ satisfaz as hipóteses estabelecidas na seção 7.1.

Teorema 50 Suponhamos que existam funções continuamente diferenciáveis $V_i : \mathbb{R}^n \to R^+$, $i \in \mathcal{P}$, números reais $\gamma_i \in \mathbb{R}$ e $\mu > 1$ tais que:

(i) Cada $V_i x(t) = (x(t))^T Q_i x(t)$ é contínua e suas derivadas ao longo das soluções do sistema satisfazem

$$\dot{V}_i(x(t)) = \frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x \leq 2\gamma_i V_i \quad se \quad i \leq r$$
$$\dot{V}_i(x(t)) \leq -2\gamma_i V_i(x(t)) \quad se \quad i > r$$

(ii) Existem escalares $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ tal que $\alpha_1 \parallel x(t) \parallel^2 \leq V_i(x(t)) \leq \alpha_2 \parallel x(t) \parallel^2$, $\forall x(t) \epsilon \mathbb{R}^n$, $\forall i \epsilon \mathcal{P}$.

(iii) Existe uma constante $\mu \geq 1$ tal que $V_i(x(t)) \leq \mu V_j(x(t))$ $\forall x(t) \epsilon \mathbb{R}^n$, $\forall i \epsilon \mathcal{P}$.

O sistema com chaveamento markoviano 7.23 é estocasticamente estável se

- (i) $-\sum_{i=1}^N \lambda_{kk} \leq \frac{2\gamma^-}{(\mu^2-1)}$.
- (ii) $\exists$ uma função $w(t)$ tal que $lim_{t\to\infty} w(t) = 0$ e $E(e^{4(\gamma^+ + \gamma^-)T^+(0,t)}) \leq w(t)$

Demonstração :

A demonstração segue a mesma ideia da prova do teorema 49.

Sejam $t_1 < t_2 < ... < t_{N_{\sigma(0,t)}} \leq t$ os tempos em que ocorrem os chaveamentos sobre o intervalo $(0,t)$. Então sabemos pela hipótese i que para $t \epsilon [t_i, t_{i+1})$ a candidata à função de Lyapunov por partes satisfaz:

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \leq e^{2\gamma^+(t-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) \leq r$$
$$V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \leq e^{-2\gamma^-(t-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) > r$$

Notando pela hipótese iii que $V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1}))$ se verifica para todo $x(t_{i+1})$, como

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq e^{2\gamma^+(t_{i+1}-t)} V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) \leq r$$
$$V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq e^{-2\gamma^-(t_{i+1}-t)} V_{\sigma(t_i)}(x(t)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) > r$$

temos:

$$V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu e^{2\gamma^+(t_{i+1}-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) \leq r$$
$$V_{\sigma(t_{i+1})}(x(t_{i+1})) \leq \mu e^{-2\gamma^-(t_{i+1}-t_i)} V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)) \quad se \quad \sigma(t_{i+1}) > r$$

Iterando as desigualdades de $i = 0$ a $i = N_\sigma(0,t)$ para um tempo arbitrário $t > 0$ obtemos:

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \mu^{N_\sigma(0,t)} e^{2\gamma^+ T^+(0,t) - 2\gamma^- T^+(0,t)} V_{\sigma(0)}(x(0))$$

e pela hipótese ii temos

$$\| x(t) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\gamma^- T^- + \gamma^+ T^+ + \frac{ln\mu}{2} N_\sigma(0,t)} \| x(0) \| \tag{7.24}$$

Precisamos calcular $\| x(t) \|_2^2 = E(\| x(t) \|^2)$. Pela desigualdade (7.24) temos:

$$E(\| x(t) \|^2) \leq kE(e^{ln\mu N_\sigma(0,t) + 2\gamma^+ T^+(0,t) - 2\gamma^- T^-(0,t)})$$

onde $k = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \parallel x_0 \parallel^2$ mas

$$\begin{aligned} E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)+2\gamma^+T^+(0,t)-2\gamma^-T^-(0,t)}) &= E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)+2\gamma^+T^+(0,t)-2\gamma^-(t-T^+(0,t))}) \\ &= e^{-2\gamma^-t}E(e^{(2\gamma^++2\gamma^-)T_+(0,t)+ln\mu N_\sigma(0,t)}) \\ &\leq e^{-2\gamma^-t}\sqrt{E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)})}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^++\gamma^-))T^+(0,t)})} \quad (7.25) \end{aligned}$$

de acordo com a desigualdade de Cauchy.

Vamos analisar $\sqrt{E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)})}$

$$\begin{aligned} E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{2ln\mu k}e^{-(m(t))}\frac{(m(t))^k}{k!} \\ &= e^{-(m(t))}e^{\mu^2((m(t)))} \\ &= e^{(\mu^2-1)((m(t)))} \end{aligned}$$

onde $(m(t)) = \int_0^t \sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi}P_i(s)ds \leq \int_0^t \sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi}ds < \sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi}t$

Então

$$\begin{aligned} \sqrt{E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)})} &= \sqrt{e^{(\mu^2-1)(m(t))}} \\ &\leq \sqrt{e^{(\mu^2-1)(\sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi}t)}} \\ &\leq e^{(\mu^2-1)(\sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi}t)} \end{aligned}$$

Substituindo em (7.25) temos

$$\begin{aligned} E(e^{ln\mu N_\sigma(0,t)+2\gamma^+T^+(0,t)-2\gamma^-T^-(0,t)}) &\leq e^{-2\gamma^-t}\sqrt{E(e^{2ln\mu N_\sigma(0,t)})}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^++\gamma^-))T^+(0,t)})} \\ &\leq e^{-2\gamma^-t}e^{(\mu^2-1)(\sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi}t)}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^++\gamma^-))T^+(0,t)})} \\ &= e^{(-2\gamma^-+(\mu^2-1)(\sum_{i=0}^N \sum_{p\neq i} \lambda_{pi}))t}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^++\gamma^-))T^+(0,t)})} \\ &= e^{(-2\gamma^-+(\mu^2-1)(-\sum_{i=1}^N \lambda_{ii}))t}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^++\gamma^-))T^+(0,t)})} \end{aligned}$$

Por hipótese temos $-\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ii} < \frac{2\gamma^-}{(\mu^2-1)}$ e $lim_{t\to\infty}\sqrt{E(e^{(4(\gamma^+ + \gamma^-))T^+(0,t)})} \leq lim_{t\to\infty}E(e^{(4(\gamma^+ + \gamma^-))T^+(0,t)}) \leq lim_{t\to\infty}w(t) = 0$, portanto $E(\| x(t) \|^2) < \infty$ e o sistema 7.17 é estocasticamente estável.

7.6 Trabalhos recentes em design de chaveamento aleatório

Alguns trabalhos recentes tratam de design em sistemas não lineares com chaveamento aleatório como por exemplo [56] e [55]. Enunciaremos agora dois resultados presentes nesses trabalhos que abordam o caso de chaveamento Markoviano e discutiremos inovações e semelhanças com relação aos resultados que estabelecemos neste capítulo.

Seja o sistema com chaveamento $\dot{x} = f_\sigma(x)$, $\sigma(t) \in \mathcal{P}$ onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}$ é um conjunto finito $\mathcal{P} = \{1, ..., N\}$, as funções $f_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são localmente Lipschitz, $f_\sigma(0) = 0$, $\sigma(t) \in \mathcal{P}$ e $\sigma(t)$ é uma cadeia de Markov onde $Q = [q_{ij}]_{N\times N}$ é a matriz de transição de estados.

O sistema acima é dito ser quase certamente globalmente assintóticamente estável (GAS a.s) se:

$P(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \| x_0 \| < \delta \Rightarrow sup_{t\geq 0} \| x(t) \| < \varepsilon) = 1$

$P(\forall r, \varepsilon_1 > 0, \exists T > 0, \| x_0 \| < r \Rightarrow sup_{t\geq T} \| x(t) \| < \varepsilon_1) = 1$

O teorema a seguir fornece critérios para (GAS a.s) considerando os subsistemas globalmente assintoticamente estáveis.

Teorema 51 Para o sistema acima suponhamos que existam funções continuamente diferenciáveis $V_p : \mathbb{R}^n \to R_{\geq 0}$, $p \in \mathcal{P}$,funções α_1,$\alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, números reais $\lambda_0 > 0$ e $\mu > 1$ tais que:

(i) $\alpha_1(\| x(t) \|) \leq V_p(x(t)) \leq \alpha_2(\| x(t) \|)$, $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall p \in \mathcal{P}$.

(ii) $\dot{V}_p(x(t)) = \frac{\partial V_p}{\partial x} f_p x \leq -\lambda_0 V_p(x)$ $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall p \in \mathcal{P}$.

(iii) $V_p(x(t)) \leq \mu V_q(x(t))$ $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall p, q \in \mathcal{P}$.

(iv) $\mu < \frac{(\lambda_0+\tilde{q})}{\bar{q}}$, onde $\bar{q} = max\{\mid q_{ii} \mid\}$, $i \in \mathcal{P}$, $\tilde{q} = max\{\mid q_{ij} \mid\}$,$i, j \in \mathcal{P}$.

Então o sistema com chaveamento acima é GAS a.s.

Podemos perceber que o tempo médio de habitação obtido no teorema acima se aproxima daquele obtido em nossos resultados, no caso de todos os subsistemas estáveis, no sentido de que ambos dependem das taxas da matriz de transição do processo Markoviano $\sigma(t)$ e levam em consideração a relação entre as funções de Lyapunov por partes e suas taxas de variação.

O teorema a seguir fornece critérios para GAS a.s considerando uma coleção composta por subsistemas estáveis e instáveis.

Teorema 52 Para o sistema acima suponhamos que existam funções continuamente diferenciáveis $V_p : \mathbb{R}^n \to R_{\geq 0}$, $p \in \mathcal{P}$, funções α_1,$\alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, números reais $\gamma_p \in \mathbb{R}$ e $\mu > 1$ tais que:

(i) $\alpha_1(\parallel x(t) \parallel) \leq V_p(x(t)) \leq \alpha_2(\parallel x(t) \parallel)$, $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall p \in \mathcal{P}$.

(ii) $L_{f_j}V_i(x(t)) \leq -\gamma_{i,j}V_i(x)$ $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i, j \in \mathcal{P}$, onde $L_{f_p}V_p(x(t)) = \langle \nabla_x V(x), f(x) \rangle$.

(iii) $V_p(x(t)) \leq \mu V_q(x(t))$ $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall p, q \in \mathcal{P}$.

(iv) A sequência de tempos de habitação $S_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, onde τ_i são os tempos em que o chaveamento ocorre, é uma coleção de variáveis aleatórias independentes com $E[S_i] < \infty$.

(v) $[S_i]$ e $\sigma(\tau_i)$ são independentes.

(vi) $\exists \theta \in [0, 1[$ tal que $max_{i\in\mathcal{P}} \sum_{j\in\mathcal{P}}(\mu q_{i,j} E(e^{-\gamma_{i,j}S_k}) \leq \theta$

Então o sistema é GAS a.s.

Nesse caso também percebemos que tanto o resultado acima quanto aquele que obtivemos fornecem critérios para estabilidade em função de uma limitação para a esperança de uma variável aleatória e, por isso, do ponto de vista prático são difíceis de serem aplicados.

Capítulo 8

Conclusão e Perspectivas

A definição de classes de subsistemas lineares estáveis para as quais é possível construir uma função comum de Lyapunov implica a possibilidade de triangularização das matrizes como vimos nos casos em que comutam ou a álgebra de Lie gerada pelas matrizes dos subsistemas é soluvel. A grande desvantagem dos critérios de estabilidade a partir da análise da algebra de Lie ou da propriedade de comutatividade é que eles fornecem critérios apenas suficientes para a estabilidade de um dado sistema. Além disso devemos reconhecer que o procedimento para encontrar tal mudança que transforma as matrizes do sistema em triangulares superiores pode não ser muito simples. Alternativamente para a análise da solubilidade por exemplo, podemos construir uma sequência de ideais derivados através dos brackets entre álgebras de Lie de forma iterativa ou podemos utilizar a forma de Killing e os critérios de Cartan que fornecem condições necessárias e suficientes para a solubilidade. Entretanto, o estudo das propriedades da álgebra de Lie apesar de dificultoso do ponto de vista prático ainda parece ser um promissor caminho para a investigação de condições necessárias e suficientes para estabilidade em vista dos resultados recentemente obtidos mesclando métodos variacionais e propriedades da álgebra de Lie.

Por outro lado, o design em sistemas com chaveamento tem sido muito estudado para a obtenção de critérios para estabilidade mais simples de serem checados. Mas, também fornecem critérios suficientes, mas não necessários para estabilidade.

O que há por trás dos sistemas triangulares que dispensam a análise da lei de chaveamento? Será possível estabelecer ESMQ para os sistemas lineares estáveis diante de qualquer mecanismo de chaveamento markoviano? A nossa conjectura é que o seguinte resultado é verdadeiro:

Considere o SLSM:

$$\dot{x}(t) = A(\theta_t)x(t), \tag{8.1}$$

onde $\theta = \{\theta_t,\ t \geq 0\}$ é um processo de Markov homogêneo que toma valores em $\mathcal{S} = \{1, 2, .., m\}$, com taxas de transição $\Lambda = [\lambda_{ij}]$. Se para cada $i \in \mathcal{S}$ $A(i)$ é uma matriz triangular superior e o sistema é estável para cada modo de operação, então (8.1) é estável no sentido da média quadrática, para qualquer matriz de transição $\Lambda = [\lambda_{ij}]$.

Essas são algumas questões que podem orientar futuros trabalhos.

Referências Bibliográficas

[1] Margaliot M. 2006, Liberzon D. 2006. Lie-Algebraic stability conditions for nonlinear switched systems and differential inclusions. Systems and control letters. v.55, no. 1, pp 8-16.

[2] Liberzon, D., Agrachev, A.A. (2001). Lie algebric criteria for switched system. SIAM J. Control Optim., v.40, n.1, pp.253-269.

[3] Liberzon, D., Hespanha, J.P.,Morse, A.S. (1999). Stability of switched systems : a lie algebraic condition. Systems Control Lett.,37, pp.117-122.

[4] Liberzon, D.,Morse, A.S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems.IEEE Control Systems Magazine,19, pp.59-70.

[5] R. Vinter. Optimal Control. Birkh¨auser, Boston, 2000.

[6] L. Vu and D. Liberzon. Common Lyapunov functions for families of commuting nonlinear systems. Systems Control Lett., 54. 405;416. 2005.

[7] Cohen N.,Levkowicz I.,Rodman1999. Exponential stability of triangular differential inclusions systems.

[8] L. B. Rapoport. Asymptotic stability and periodic motions of selector-linear differential inclusions. In F. Garofalo and L. Glielmo, editors, Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques, pages 269;285. LNCIS 217, Springer, 1996.

[9] H. Shim, D. J. Noh, and J. H. Seo. Common Lyapunov function for exponentially stable nonlinear systems. J. Korean Institute of Electrical Engineers, 11:108;111, 2001.

[10] Cohen N.,Levkowicz I. Convex Invertible cones and the Lyapunov equation. Linear algebra and its applications 250:105;131. 1997.

[11] Cohen N.,Levkowicz I. A necessary and sufficient criterion for the stability a convex set of matrices. IEEE Trans. Automat. Control AC 38(4): 611;615(1993).

[12] Horn A.R., Johnson R.C. Matrix Analysis. Cambridge University Press, 1985.

[13] Hespanha P.J., Margaliot M. Root-mean-square gains of switched linear systems:A variational approach. Automatica 44(2008) 2398;2402.

[14] De persis. C., De Santis R., Morse S. A. Supervisory control with state-dependent dwell-time logic and constraints. Automatica 40(2004) pp. 269;275.

[15] MoreY.,MoreT.,Kuroe. A solution to the common Lyapunov function problem for continuos time systems. Proceedings of 36th Conference on decision and control. 1997.

[16] Dayawansa P.W., Martin F.C. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems wich undergo switching. IEEE transactions on Automatic Control, vol. 44, no 4., 1999. pp. 751;760.

[17] H. J. Sussmann. A bang-bang theorem with bounds on the number of switchings. SIAM J. Control Optim., 17:629;651, 1979.

[18] H. J. Sussmann. Lie brackets, real analyticity and geometric control. In R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, editors, Differential Geometric Control Theory, pages 1;116. Birkh¨auser, Boston, 1983.

[19] S. A. Vakhrameev. A bang-bang theorem with a finite number of switchings for nonlinear smooth control systems. J. Math. Sci., 85:2002;2016, 1997.

[20] Mori Y.,Mori T., Kuroe Y. Classes of systems having commom quadratic Lyapunov functions: triangular system matrices. Proceedings of eletronic inform. and systems conference IEE of Japan. 1996.pp. 313;318.

[21] La Salle , J.P. (1960).Some extensions of lyapunov second method IRE trans circuit theory 7:520-527.

[22] Angeli D. A note on stability of arbitrarily switched homogeneous systems. 1999. preprint.

[23] Bellman R.,Bucy R. Asymtotic control theory. Siam journal control optim., vol 2, no. 1, pp11;18. 1964.

[24] Boyd S., Ghaoui E.L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. Siam studies in applied mathematics. Philadelphia:SIAM.1994. vol 15.

[25] Brockett W. R. Lie algebra and Lie groups in control theory. in Geometric methods in system theory, Mayne Q.D. and Brockett W. R. Boston: D. Reidel publishing company, 1973, pp 43-82.

[26] Colonius F., Kliemann W., Grune L. The dynamics of control. Birkhauser. 2000.

[27] Filippov F. A. On certains questions in the theory of optimal control. Siam J. Control. Optim. vol 1. pp 76;84. 1962.

[28] Hespanha P.J., Morse S.A.. Switching between stabilizing controllers. Automatica. vol. 38. no. 1.pp 1905;1917. 2002.

[29] Howe R. Very basic Lie theory. American mathematical monthly. vol 90.pp 600;623. 1983.

[30] Smirnov V.G. Introduvtion to the thery of differential inclusions. American mathematical society. 2002.

[31] Yfoulis A.C., Shorten R. A numerical technique for the stability analisys of linear switched systems. Int. J. control. vol 77. pp 1019;1039. 2004.

[32] Young C.L. Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. Providence, Rhode Island. American mathematical society. 2000.

[33] Pyatniskii S. E. Absolute stability of nonstationary nonlinear systems. Automatic remote control. vol 1. pp. 5;15. 1970.

[34] Rudin W. Real and complex analisys. McGraw-Hill, New Delhi 1974.

[35] Angeli D., Mosca E.2002. Lyapunov-based switching supervisory control of nonlinearuncertain systems. IEEE transactions on Automatic Control, vol. 47, no 3., 2002. pp. 500;505.

[36] Branick S. M. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools foswitched and hybrid systems. IEEE transactions on Automatic Control, vol. 43, no 4., 1998. pp. 475;482.

[37] Amato F., Pironti A., Scala S. Necessary and sufficient conditions for quadratic stability and stabilizability of uncertain linear time-varying systems. IEEE transactions on Automatic Control, vol. 41, no 1., 1996. pp. 125;128.

[38] Brewer W. J. Krokner products and matrix calculus in system theory. IEEE transactions on Automatic Control, vol. cas 25, no 9., 1978. pp. 772;781.

[39] Morse, A.S. (1996).Supervisory control of families of linear set -point controllers -part 1: exact matching.IEEE transactions on Automatic control Systems Magazine,vol 41,10, pp.1413;1431.

[40] Mao X. Exponential stability of stochastic delay interval systems with markovian switching. IEEE transactions on Automatic control Systems Magazine,vol 47,10, 2002 pp.1604;1612.

[41] De Santis. A, Battilotti S. Stabilization in probability of nonlinear stochastic systems with guaranteed region of atraction and target set.IEEE transactions on Automatic control Systems Magazine,vol 48, no 9,2003 pp.1585;1599.

[42] De Santis. A, Battilotti S. Robust output feedback control of nonlinear stochastic systeusing neural networks.IEEE transactions on Neural Networks,vol 14, no 1,2003 pp.103;116.

[43] Hespanha, J.P.,Morse, A.S. (1999). Stability of switched systems with average dwell time.Procedings of 38th IEEE conference on decision and Control pp.2655-2660.

[44] Michel, A.N., Hu B.,Yasuda,K., Zhai G. (1999). Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems : an average dwell time approach. International Journal of Systems Science, 32(2001), pp. 1055;1061.

[45] Fragoso, M.D. , Costa, O.L.(2003). A unified approach for stochastic and mean square stability of continuos-time Linear systems with markovian jumping parametrs and additive disturbances. Siam J. Control Optim, vl 44, pp.1165-1191.

[46] Liberzon, D. (2003). Switching in systems and control.Birkhäuser.

[47] Samelson, H. (1990). Notes on Lie algebra.Universitext.Springer-Verlag.

[48] Humphreys, E.J. (1970). Introduction to Lie Algebra and representation theory.Graduated texts in mathemathics .Springer-Verlag.

[49] Gilmore, R. (1974). Lie groups , Lie algebras and some of their applications .Wiley , New York.

[50] Narenda K.S,Balakrishnan (1994). A common Lyapunov Function for stable LTI systems with commuting A-matrices.IEEE Trans.autmat.control.vol 39 pp 2469-2471, 1994.

[51] Gurvits L. (1995). Stability of discrete linear inclusions. Lin.Alg.Appl., vol 231 pp 47-85, 1995

[52] Chung L. (1975). Linear systems analysis. Mc Graw Hill 1975.

[53] Kailath T. (1980). Linear systems . Prentice Hall 1980.

[54] Chatterjee D., Liberzon, D.(2006). Stability analysis of deterministic and stochastic switched systems via comparason principle and multiple Lyapunov functions. Siam J. Control Optim. Vol. 45, No. 1, pp. 174;206.

[55] Liberzon, D. Chatterjee D. (2008). Stabilizing Randomly switched systems .

[56] Liberzon, D. Chatterjee D. (2007). On stability of Randomly switched nonlinear systems. IEEE transactions on automatic control, 52(2007), pp. 5612;5617.

[57] Shorten N.R. and Narenda K.S.1998. On stability and existence of common Lyapunov function for stable linear switching systems.Proceedings of 37th IEEE Conference on decision and control.

[58] E. S. Pyatnitskiy and L. B. Rapoport. Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems. IEEE Trans. Circuits Syst.I, 43 pp 219;229, 1996.

[59] M. Margaliot and R. Gitizadeh. The problem of absolute stability: a dynamic programming approach. Automatica, 40 pp 1247;1252, 2004.

[60] J. L. Mancilla-Aguilar. A condition for the stability of switched nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Control, 45:2077;2079, 2000.

[61] Sontag E.D. 1989. A universal construction of Airstein´s theorem on nonlinear stabilization. Systems and control letters. 13. pp 117-123.

[62] Sontag E.D., Lyn Y. 1991. A universal formula for stabilization with bounded control. Systems and control letters. 16. pp 393-397.

[63] Sontag E.D., Malisoff M. 1999. Universal formulas for CFL´s with respect to Minkowski balls. In proceedings of the 1999 American Control Conference, 1999, pp.3033-3037.

[64] Y. Lin, E. D. Sontag, and Y. Wang. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability. SIAM J. Control Optim., 34:124;160, 1996.

[65] V. Jurdjevic. Geometric Control Theory. Cambridge University Press, 1996.

[66] D. Holcman and M. Margaliot. Stability analysis of switched homogeneous systems in the plane. SIAM J. Control Optim., 41(5):1609;1625, 2003.

[67] D. Liberzon. Lie algebras and stability of switched nonlinear systems. In V. Blondel and A. Megretski, editors, Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory, pages 203;207. Princeton University Press, 2004.

[68] U. Boscain. Stability of planar switched systems: the linear single input case. SIAM J. Control Optim., 41:89,112, 2002.

[69] M. Margaliot and G. Langholz. Necessary and sufficient conditions for absolute stability: the case of second-order systems. IEEE Trans. Circuits Syst.-I, 50:227,234, 2003.

[70] M. Margaliot. Stability analisys of switched systems using variational principles: an introduction.

[71] A. A. Agrachev and Yu. L. Sachkov. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer, Berlin, 2004.

[72] J.-P. Aubin and A. Cellina. Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory. Springer, Berlin, 1984.

[73] O.L.V.Costa, M.D. Fragoso e R.P. Marques. Discrete-time Markov Jump Linear systems. Probability and its applications, Springer-Verlag, New york, 2004.

[74] R.F.Curtain, ED. stability of stochastic dinamical systems. Lecture notes in math. 294, Springer-Verlag, New york, 1972.

[75] X.Mao Stability of stochastic differential equations with markovian switching. stochastic process. Appl., 79(1999),pp. 45;77.

[76] C.Yuan e X.Mao Asymtoptic stability in distribution of stochastic differential equations with markovian switching. stochastic process. Appl., 103(2003),pp. 277;291.

[77] Oskendal B.S., Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[78] Arnold V.I. Ordinary differential equations. MIT press. Cambridge. Massachusetts. 1978.

[79] Kushner J. H., Stochastic stability and control, Academic Press, New York, 1967.

[80] Battilotti S. and Santis A. D. Dwell time controllers for stochastic systems with switching Markov chain, Automatica, 41(2005), pp. 923;934.

[81] Hou L., Michel N. A., Ye H. Stability analisys of switched systems. Proceedings of the 35th IEEE conference on decision and control, vol. 2, 1996, pp. 1208;1212.

[82] Mao X., Yuan C. Stochastic differential equations with markovian switch, Imperial college press, London, 2006.

[83] Yuan C., Mao X. Asymtoptic stability in distribution of stochastic differential equations with markovian switching. Stochastic process and their applications, 103(2003). pp. 277;291.

[84] Fragoso D. M. and Baczynski. J. Lyapunov coupled equations for continuous-time infinite Markov jump linear systems, J. Math. Anal. Appl., 274 (2002), pp.319;355.

Apêndice A

A.1 Apêndice : Álgebra de Lie

Álgebra de Lie possui uma grande diversidade de aplicações mostrando-se como uma poderosa ferramenta. Apesar disso, os critérios para identificar certas propriedades como solubilidade e nilpotência, que são particularmente os de nosso interesse, pois aparecem como condições em resultados de estabilidade nos sistemas com switch, são muitas vezes difíceis de se verificar do ponto de vista prático, principalmente quando temos muitos subsistemas e, por conseguinte, muitas matrizes, porque tais critérios envolvem a construção de uma base para o espaço vetorial gerado por uma operação entre essas matrizes chamada bracket. Mas, isso pode se tornar um trabalho muito árduo. Entretanto, os resultados de estabilidade desenvolvidos com essa ferramenta são muito fortes do ponto de vista que, sob essas condições, ficam excluídas as análises da lei de switch, ou seja não nos interessa como se comporta o sistema, qual subsistema estará ativo em um determinado instante de tempo e por quanto tempo ele permanecerá ativo. Diremos então que ela fornece critérios para estabilidade uniforme em relação ao switch porque independe do sinal de switch.

Pretendemos aqui tão somente explicitar algumas definições e teoremas importantes para a compreensão dos resultados envolvendo álgebra de Lie e estabilidade sem o intuito de se aprofundar em análises e demonstrações que podem ser melhor estudadas na literatura disposta nas referências.

A.1.1 Definições e exemplos

Uma Álgebra de Lie Ω é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F equipado com o produto [,] denominado Lie bracket, uma aplicação [,] : $\Omega \times \Omega \to \Omega$ que satisfaz às seguintes propriedades:

(1) É bilinear

(2) $[x, x] = 0$ ∀x ∈ Ω

(3) Indentidade de jacobi $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

podemos observar que (2) é equivalente a propriedade antissimétrica .

De fato tomando $x + y$ em (2) temos $[x + y, x + y] = 0 \Longrightarrow [x, y] + [y, x] = 0$ (pela bilinearidade). Por outro lado $[x, y] = -[y, x] \Longrightarrow 2[x, x] = 0$, basta tomar $x = y$. Se $[x, y] = 0 \ \forall \ x, y \in \Omega$, dizemos que Ω é abeliana.

Exemplo 1:

Seja $\mathcal{F}$ o espaço das transformações lineares de V em V (um espaço vetorial sobre um corpo F que possui multiplicação associativa $x.y$) . $\mathcal{F}$ equipado com a operação $[x, y] = x.y - y.x$ é uma álgebra de Lie que denotamos por gl(V).

De fato podemos verificar que a operação satisfaz às propriedades:

(1) É bilinear pois $[ax+by, z] = (ax+by)z-z(ax+by) = axz+byz-azx-bzy = a[x, z] + b[y, z]$

(2) $[x, x] = xx - xx = 0 \ \forall x \in \mathcal{F}$

(3) $[x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] = xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz = 0$

Se dim V=n podemos identificar as tranformações lineares com matrizes nxn , a álgebra de Lie formada por tais matrizes é denotada por gl(n,F).

Um caso especial de álgebra de Lie sl(n,F) consiste em todas as matrizes nxn com traço 0 e com a mesma operação definida em gl(n,F), dizemos então que sl(n,F) é uma subalgebra da álgebra de Lie gl(n,F).

A álgebra de lie Ω de um grupo de Lie ω é definida como o espaço tangente a ω na identidade, por exemplo se $\varphi(\theta)$ é qualquer curva num grupo de Lie para qual $\varphi(0) = I$ então $\dot{g(0)} = lim_{\theta\to 0}\frac{\varphi(\theta)-I}{\theta}$ é um vetor tangente a identidade , o conjunto de todos esses vetores tangentes geram a álgebra de Lie.

Exemplo 2:

Seja o grupo de Lie formado pelas matrizes triangulares superiores :

$$\mathrm{g}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A álgebra de Lie é gerada por três matrizes $\frac{\partial g}{\partial \alpha},\frac{\partial g}{\partial \beta},\frac{\partial g}{\partial \gamma}$ calculadas em $\alpha = \beta = \gamma = 0$, o que nos dá:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma subálgebra de Lie de Ω é um subespaço Γ que é fechado para a operação de bracket ie , $\forall$ x,y $\in \Gamma$, [x,y] $\in \Gamma$. Uma subálgebra é chamada ideal se [x,y] $\in \Gamma$, $\forall$ x $\in \Omega$ e y $\in \Gamma$.

Um homomorfismo φ de uma álgebra de Lie Ω em uma álgebra de Lie Γ é um mapeamento linear $\varphi : \Omega \to \Gamma$ que preserva o bracket :

$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$, se $\Omega = \Gamma$ temos um endomorfismo.Um homomorfismo injetivo e sobrejetivo é denominado isomorfismo.

Uma representação de uma álgebra de Lie Ω num espaço vetorial V é um homomorfismo $\varphi : \Omega \to gl(V)$ que associa a cada x $\in \Omega$ uma transformação linear $\varphi(x) : V \to V$, um subespaço W de V é chamado invariante se $\varphi(x)(W) \in W$, $\forall x \in \Omega$. φ é chamada irredutível se V não contém nenhum subespaço invariante diferente dos triviais ie, 0 e V.

O núcleo de um homomorfisfo $\varphi : \Omega \to \Gamma$, N(φ) é o conjunto de todos os x $\in \Omega$ tais que $\varphi(x)$=0 .N(φ) é um ideal em Ω pois tomando y$\in \Omega$ e x$\in N(\varphi)$ temos $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [0, \varphi(y)] = 0$, além disso a imagem $\varphi(\Omega)$ é também uma subalgebra de Lie de Γ pois $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) \in \Gamma$.

O Primeiro teorema do isomorfismo (analogo a teoria de grupos) diz que o nucleo de um homomorfisfo φ induz um isomorfismo $\varphi_0 : \Omega/N(\varphi) \longrightarrow \varphi(\Omega)$.

A.1.2 Representação adjunta e forma de Killing

Uma representação importante de Ω é , representação adjunta denotada por "ad", o espaço vetorial V nesse caso é a própria Ω e para x $\in \Omega$ definimos adx(y)=[x,y], $\forall$ y $\in \Omega$.

Da representação adjunta derivamos a forma de Killing , k de Ω, simétrica e bilinear dada por:

k(x,y)=tr(adx $\circ$ ady) ie., o traço da composição de adx com ady.

Exemplo 1:

Se tomarmos X= aA+bB+cC e ad(A)= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, ad(B)= $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e ad(C)= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, temos ad(X)=aad(A)+bad(B)+cad(C)= $\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}$

$+ \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 2c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix}$ então

k(X,X)=tr(ad(X)$\circ$ ad(X))=8(b^2+ac).

A.1.3 Solubilidade e Nilpotência

Uma subálgebra de Lie derivada $\Omega^{(0)}$ de uma álgebra de Lie Ω é o ideal $[\Omega,\Omega]$ gerado por todos [x,y] onde x,y $\in \Omega$ ie, todas as combinações lineares de brackets, o fato de $\Omega^{(0)}$ ser um ideal segue das propriedadades do operador bracket.

Seja $\Omega^{(0)}$,$\Omega^{(1)}$,$\Omega^{(2)}$,... a sequência das álgebras derivadas onde $\Omega^{(n)}$=[$\Omega^{(n-1)}$,$\Omega^{(n-1)}$], podemos observar usando argumentos indutivos que os termos da sequência são ideais em Ω e também que $\Omega^{(n+1)} \subset \Omega^{(n)}$.Chamamos Ω solúvel se $\Omega^{(n)} \to 0$, ie se $\Omega^{(n)} = 0$ para n suficientemente grande.

Seja a sequência Ω^n cujo termo geral é dado por $\Omega^{n+1} = [\Omega, \Omega^n]$, novamente podemos verificar que Ω^n é um ideal em Ω e que $\Omega^{n+1} \subset \Omega^n$.Chamamos Ω nilpotente se $\Omega^n \to 0$, ie se $\Omega^n = 0$ para n suficientemente grande.

A.1.4 Teoremas de Engel e Lie

Teorema de Engel :

Seja V um espaço vetorial e Ω_0 uma subalgebra de lie de gl(V) consistindo inteiramente de operadores nilpotentes então, g é nilpotente.

Há uma segunda forma para o teorema de Engel :

Se Ω é uma álgebra de Lie tal que todos os operadores adx com x em Ω são nilpotentes , então Ω é nilpotente.

Teorema de Lie :

Seja Ω uma álgebra de lie solúvel, agindo no espaço vetorial V pela representação φ sobre os complexos.Então existe um autovetor comum, ie há um vetor não nulo ϑ_0 em V que satisfaz x$\vartheta_0 = \lambda(x)\vartheta_0$, onde $\lambda(x)$ é um número complexo dependente de x , para todo x em Ω.

Como no teorema de Engel , há uma forma equivalente para o teorema de Lie:

Toda representação complexa de uma álgebra de Lie solúvel é equivalente a uma triangular ,ie uma representação com todas as matrizes triangulares superiores.

A.1.5 Critérios de Cartan

Primeiro critério de Cartan:

Teorema : Uma álgebra de Lie Ω é solúvel $\Leftrightarrow$ a forma de Killing é identicamente nula na álgebra de Lie derivada $\Omega^{(0)}$.

Segundo critério de Cartan:

Teorema: Uma álgebra de Lie Ω é semisimples $\Leftrightarrow$ a dimensão é positiva e a forma de Killing é não degenerada , ie se para algum x em Ω k(x,y)=0 $\forall y \in \Omega$

então x=0.

Corolário 1: Uma álgebra de Lie é semisimples $\Leftrightarrow$ é uma soma direta de álgebras de Lie simples.