

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MONICA BELTRAMI

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE AÇÕES POR MODELOS DE *SUPPORT  
VECTOR REGRESSION*

CURITIBA  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MONICA BELTRAMI

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE AÇÕES POR MODELOS DE *SUPPORT  
VECTOR REGRESSION*

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Arinei Carlos Lindbeck da Silva.

CURITIBA  
2009

## TERMO DE APROVAÇÃO

MONICA BELTRAMI

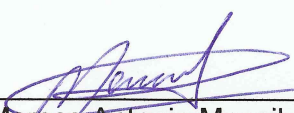
### PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE AÇÕES POR MODELOS DE *SUPPORT VECTOR REGRESSION*

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Programação Matemática, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:



Prof. Dr. Arinei Carlos Lindbeck da Silva  
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR



Dr. Marcos Antonio Masnik Ferreira  
Banco Central do Brasil



Prof. Dr. Volmir Eugênio Wilhem  
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR

Curitiba, 14 de agosto de 2009.

Aos meus pais, por todo  
o amor e incentivo.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela vida, graças e proteção.

Aos meus pais, Renato e Sandra, a quem devo grande parte da realização deste trabalho, pelo amor e apoio em todas as etapas da minha vida.

Aos meus irmãos, Katia, e Enzo, pela eterna amizade, paciência e apoio nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, professor Arinei Carlos Lindbeck da Silva, pelos ensinamentos, atenção, paciência e principalmente pela amizade.

A secretária Maristela Bandil, pela amizade, apoio e ajuda recebida.

Aos meus colegas de curso, Crisiane Rezende de Oliveira, Tânia Lindbeck da Silva, Gustavo Loch, Vanderlei Galina e Aline Costa, pelo companheirismo, colaboração e por se tornarem grande amigos.

Aos meus amigos Gustavo Guandalini, Marcelo Shimomura, Fernanda Menezes e Ricardo Cesar, pela amizade, apoio e cooperação.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

A todas as outras pessoas, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

Uma jornada de milhares de  
quilômetros começa com um simples  
passo.

Confúcio

## RESUMO

Derivativos são títulos financeiros cujo valor de mercado deriva do preço de outro ativo. Dentre as modalidades de derivativos existentes, destacam-se as opções. No mercado de opções, negociam-se contratos que concedem ao seu titular o direito futuro de comprar ou vender um ativo objeto por um preço determinado no presente, chamado de preço de exercício. As opções são comercializadas no mercado mediante o pagamento de um prêmio, correspondente ao valor monetário do contrato. O valor desse prêmio sofre influência de diversos fatores e oscila de acordo com a expectativa do mercado. A determinação de preços teóricos de opções mediante modelos matemáticos permite ao investidor verificar se os preços estabelecidos pelo mercado estão superestimados ou subestimados. Essas informações influenciam diretamente nas operações realizadas pelo investidor. Desta forma, é preciso que o modelo empregado apresente alto grau de confiabilidade e seja condizente com a realidade do mercado ao qual ele se destina. Neste sentido, essa dissertação tem como objetivo estabelecer um modelo de precificação de opções baseado na técnica de *Support Vector Regression* (SVR), que capte a realidade do mercado brasileiro. O SVR baseia-se no aprendizado supervisionado estatístico e determina uma função de precificação a partir do reconhecimento de padrões e tendências do mercado. Para realizar a pesquisa, foram utilizados dados referentes às opções de compra americanas sobre ações da Petrobras PN negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo, no período de novembro de 2008 a maio de 2009. Com a finalidade de validar o modelo proposto, compararam-se os resultados encontrados pelo SVR com os valores calculados pelo modelo de Black & Scholes, o qual se caracteriza por ser um dos modelos mais utilizados na área de finanças. A partir das comparações realizadas, concluiu-se que o desempenho do modelo de SVR foi superior ao de B&S na precificação de opções classificadas dentro do dinheiro, no dinheiro e fora do dinheiro. Verificou-se também que o modelo de SVR é capaz de captar os movimentos de preços do mercado.

Palavras-chave: Precificação de opções. Opções de compra. *Support Vector Regression*.



## **ABSTRACT**

Derivatives are financial instruments whose market values derive from the price of another underlying asset. Among the most common types of derivatives are options. In the options market, contracts are traded that grant the holder the right to buy or sell the underlying asset in future for a currently-determined price, called strike price. Options are traded in the market through payment of a premium corresponding to the monetary value of the contract. The value of this premium is influenced by a wide range of factors and varies according to market expectations. Establishing theoretical option prices using mathematical models allows investors to check whether the prices established by the market are over or underestimated. This information directly influences operations made by investors. Therefore, the model used needs to feature a high degree of reliability and to be in tune with the reality of the market for which it is designed. Accordingly, the aim of this paper is to establish an option pricing model based on the Support Vector Regression (SVR) technique, which captures the reality of the Brazilian market. SVR is a machine learning technique and establishes a pricing function from recognition of market patterns and trends. For this study, data on American call options for Petrobras PN shares traded on the São Paulo Stock Exchange were used, for the period November 2008 to May 2009. In order to validate the proposed model, results obtained via SVR were compared with values calculated using the Black & Scholes model, which is one of the most commonly used models in finance. Based on these comparisons, it was concluded that the SVR model's performance was superior to that of the B&S model in pricing options classified as in the money, at the money and out of the money. It was also observed that the SVR model is able to capture movements in market prices.

Key words: Option pricing. Call Options. Support Vector Regression.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - EXEMPLO DE CONJUNTO CONVEXO.....	42
FIGURA 2 - EXEMPLO DE CONJUNTO NÃO CONVEXO.....	42
FIGURA 3 - EXEMPLO DE FUNÇÃO CONVEXA.....	42
FIGURA 4 - CONJUNTO DE DADOS LINEARMENTE SEPARÁVEIS.....	49
FIGURA 5 - POSSIBILIDADES DE SEPARAÇÃO POR MEIO DE DIFERENTES HIPERPLANOS.....	50
FIGURA 6 - SEPARAÇÃO ÓTIMA DE DOIS CONJUNTOS LINEARMENTE SEPARÁVEIS.....	51
FIGURA 7 - VETORES SUPORTE.....	55
FIGURA 8 - POSSIBILIDADES DE VIOLAÇÃO DAS MARGENS DE CLASSIFICAÇÃO.....	57
FIGURA 9 - MAPEAMENTO NÃO LINEAR DO ESPAÇO DE ENTRADA PARA O ESPAÇO DE CARACTERÍSTICAS.....	60
FIGURA 10 - FUNÇÃO DE PERDA $\epsilon$ -INSENSITIVE.....	66
FIGURA 11 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL LINEAR.....	71
FIGURA 12 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL POLINOMIAL HOMOGÊNEO E PARÂMETRO $p=3$ .....	71
FIGURA 13 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL POLINOMIAL NÃO HOMOGÊNEO E PARÂMETROS $p=4$ E $k=2$ .....	72
FIGURA 14 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL SIGMOIDAL E PARÂMETROS $\kappa=2$ E $k=-1,7$ .....	72
FIGURA 15 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL GAUSSIANO E PARÂMETRO $\sigma=0,4$ .....	73
FIGURA 16 - PRIMEIRA INTERFACE GRÁFICA DO PROGRAMA DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES.....	86
FIGURA 17 - SEGUNDA INTERFACE GRÁFICA DO PROGRAMA DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES.....	87

## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 - PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE DE OPÇÕES PETRE26 .....	96
GRÁFICO 2 - PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE DE OPÇÕES PETRE30 .....	97
GRÁFICO 3 - PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE DE OPÇÕES PETRD30 .....	99
GRÁFICO 4 - PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE DE OPÇÕES PETRE34 .....	100

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - SEQUÊNCIA PARA O FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES .....	89
--	----

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	- CLASSIFICAÇÃO DAS OPÇÕES QUANTO À PROBABILIDADE DE EXERCÍCIO .....	20
TABELA 2	- LETRAS UTILIZADAS NA DENOMINAÇÃO DOS CONTRATOS DE OPÇÕES .....	23
TABELA 3	- RESUMO DOS EFEITOS SOBRE O PRÊMIO DE UMA CALL AMERICANA SOBRE AÇÃO EM FUNÇÃO DO AUMENTO INDIVIDUAL DAS VARIÁVEIS .....	27
TABELA 4	- SÉRIE DE OPÇÕES AVALIADAS PELO PROGRAMA DE PRECIFICAÇÃO BASEADO NA TÉCNICA DE SVR .....	82
TABELA 5	- PARÂMETROS DE ENTRADA DOS MODELOS DE SVR .....	83
TABELA 6	- CLASSIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES UTILIZADAS PARA AVALIAR OS 84 MODELOS DE SVR .....	91
TABELA 7	- DESEMPENHO DO MODELO M14 .....	92
TABELA 8	- VALORES MÉDIOS DE EQRM E DE VETORES SUPORTE DOS MODELOS DE SVR.....	93
TABELA 9	- CLASSIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES UTILIZADAS PARA AVALIAR O MODELO DE SVR .....	94
TABELA 10	- RESULTADOS PROVENIENTES DA PRECIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES CLASSIFICADAS DENTRO DO DINHEIRO ..	95
TABELA 11	- RESULTADOS PROVENIENTES DA PRECIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES CLASSIFICADAS NO DINHEIRO .....	96
TABELA 12	- RESULTADOS PROVENIENTES DA PRECIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES CLASSIFICADAS FORA DO DINHEIRO .....	98
TABELA 13	- MODELOS DE SVR .....	113
TABELA 14	- RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB20 .....	115
TABELA 15	- RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB22 .....	117
TABELA 16	- RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB24 .....	119
TABELA 17	- RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB26 .....	121
TABELA 18	- RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB28 .....	123

## LISTA DE SIGLAS

ARCH	-	<i>Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>
ATM	-	<i>At the Money</i>
BDI	-	Boletim Diário de Informações
B&S	-	Black & Scholes
BM&F	-	Bolsa de Mercadorias e Futuros
BOVESPA	-	Bolsa de Valores de São Paulo
ECC	-	Código de correção de erros
EGG	-	Eletrocardiograma
EQRM	-	Erro Quadrático Relativo Médio
EWMA	-	<i>Exponentially Weighted Moving Average</i>
FPG	-	Fotopletismografia
GARCH	-	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>
ITM	-	<i>In the Money</i>
KKT	-	<i>Karush- Kuhn-Tucker</i>
MLP	-	<i>Multilayer Perceptron</i>
OTM	-	<i>Out of the Money</i>
PN	-	Preferencial Nominativa
RNA	-	Redes Neurais Artificiais
SELIC	-	Sistema Especial de Liquidação e Custódia
SRM	-	<i>Structural Risk Minimization</i>
SVC	-	<i>Support Vector Classification</i>
SVM	-	<i>Support Vector Machine</i>
SVR	-	<i>Support Vector Regression</i>
VE	-	Valor Extrínseco
VI	-	Valor Intrínseco

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	15
1.1 OBJETIVO GERAL .....	16
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	16
1.3 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO .....	16
1.4 LIMITAÇÕES DO TRABALHO .....	17
1.5 JUSTIFICATIVA .....	17
1.6 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	18
<b>2 OPÇÕES</b> .....	19
2.1 FUNDAMENTOS BÁSICOS .....	19
2.2 MERCADO BRASILEIRO DE OPÇÕES SOBRE AÇÕES .....	21
2.3 EXEMPLO DE NEGOCIAÇÃO COM OPÇÕES DE COMPRA AMERICANAS .....	24
2.4 PRÊMIO .....	25
2.4.1 Fatores que afetam o prêmio das opções .....	26
2.4.2 Componentes do prêmio de uma opção .....	27
2.5 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO .....	29
2.5.1 Modelo de Black & Scholes (B&S) .....	29
2.5.2 Volatilidade .....	32
2.5.3 Alternativas ao modelo de Black & Scholes .....	35
<b>3 SUPPORT VECTOR MACHINE</b> .....	38
3.1 CONCEITOS DA TEORIA DE OTIMIZAÇÃO .....	39
3.1.1 Formulação do Problema de Otimização .....	40
3.1.2 Teoria Lagrangeana e suas extensões .....	43
3.2 <i>SUPPORT VECTOR CLASSIFICATION</i> .....	48
3.2.1 Algoritmo de classificação com margens rígidas .....	48
3.2.2 Algoritmo de classificação com margens flexíveis .....	56
3.2 <i>SUPPORT VECTOR REGRESSION</i> .....	64
<b>4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	74
4.1 BIOMETRIA E SEGURANÇA .....	74
4.2 MEDICINA .....	75
4.3 INDÚSTRIA .....	76
4.4 MERCADO FINANCEIRO .....	77
4.4.1 Previsões de séries temporais financeiras .....	77
4.4.2 Precificação de opções .....	78
<b>5 METODOLOGIA</b> .....	81

5.1	OPÇÕES DE ESTUDO .....	81
5.2	PARÂMETROS DOS MODELOS DE SVR .....	82
5.3	PROGRAMAÇÃO DO ALGORITMO SVR.....	85
5.4	DEFINIÇÃO DO MELHOR MODELO DE SVR PARA PRECIFICAR OPÇÕES.	90
5.4.1	Critérios utilizados para selecionar o modelo .....	90
5.5	COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO DE SVR E DE B&S .....	93
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DE RESULTADOS</b> .....	<b>95</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>101</b>
7.1	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....	102
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>104</b>
	<b>DOCUMENTOS CONSULTADOS</b> .....	<b>109</b>
	<b>GLOSSÁRIO</b> .....	<b>110</b>
	<b>APÊNDICES</b> .....	<b>113</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Na área de finanças, investidores procuram a cada dia compreender o processo de formação dos preços de títulos negociados em mercados de capitais. Informações referentes a esses preços são necessárias para que o investidor determine vantagens a seu favor e acompanhe o comportamento do mercado a cada momento. Nesse sentido, faz-se necessário que o investidor possua modelos teóricos de precificação com alto grau de confiabilidade.

Dentre os diversos títulos comercializados em Bolsa de Valores, destacam-se os contratos de opções. Esses contratos conferem aos seus proprietários o direito futuro de comprar ou vender um ativo objeto por um preço predeterminado, chamado preço de exercício. Todavia, para que o proprietário possa ter esses direitos, ele deve pagar ao vendedor de opções um prêmio, o qual corresponde ao valor monetário do contrato. Esse prêmio sofre influência de diversos fatores e oscila de acordo com a expectativa do mercado.

Com objetivo de apurar os preços de opções, os economistas Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton fizeram um avanço notável na área de precificação. Eles desenvolveram o importante modelo de Black & Scholes (B&S), que se tornou um dos mais populares e utilizados em finanças. Seu sucesso se deve principalmente a sua fácil utilização. No entanto, constata-se que esse modelo também apresenta aspectos negativos, devido alguns de seus pressupostos não se verificarem na realidade. Logo, em certos momentos, é possível observar diferenças significativas entre os preços calculados por B&S e os determinados pelo mercado.

Com base nessa situação, Freitas (2001) enfatiza que o modelo de precificação de opções a ser empregado deve estar apto a captar a realidade do mercado para o qual se destina. Desta forma, fundamentando-se nesse argumento, avalia-se a necessidade de buscar modelos alternativos mais apropriados aos existentes.

Tendo em vista o embasamento teórico do algoritmo *Support Vector Regression* (SVR), proveniente do aprendizado supervisionado estatístico, e os bons resultados apresentados por ele no mercado financeiro, propõe-se a partir dessa técnica determinar uma função que precifique adequadamente as opções. Essa

função de precificação é estabelecida mediante o reconhecimento de padrões e tendências dos dados históricos de mercado.

Neste trabalho, a função proposta terá uma aplicação voltada ao mercado brasileiro.

### 1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho consiste em estabelecer um modelo de precificação de opções baseado na técnica de *Support Vector Regression*, que seja condizente com as características do mercado brasileiro.

### 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver um programa de precificação de opções via linguagem de programação *Microsoft Visual Basic* e ferramenta computacional LINGO.
- Validar o modelo proposto comparando-o com o modelo de Black & Scholes e com os preços de mercado, para as opções classificadas dentro do dinheiro, no dinheiro e fora do dinheiro.
- Analisar a viabilidade da aplicação do modelo de SVR no mercado brasileiro de opções.

### 1.3 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

Modelos de precificação de opções são fundamentais para definição do comportamento do mercado de opções. Por meio deles determinam-se preços teóricos que servem de parâmetro para avaliar se os contratos de opções estão sendo operados de forma sobre ou subavaliada pelo mercado. Logo, com base

nessas informações o investidor pode realizar operações de *hedge*, especulação ou arbitragem.

Dessa forma, é preciso que o modelo utilizado apresente um alto grau de confiabilidade, para que os preços estabelecidos por ele sejam condizentes com a realidade do mercado analisado.

Tendo em vista os bons resultados apresentados pelo SVR em diversos campos do conhecimento, essa técnica torna-se muito atrativa e uma ótima alternativa para a obtenção de um modelo de precificação de opções de qualidade.

#### 1.4 LIMITAÇÕES DO TRABALHO

Este trabalho limita-se ao estudo da precificação de opções de compra, do tipo americano, sobre ações negociadas no mercado brasileiro.

#### 1.5 JUSTIFICATIVA

A utilização da técnica de SVR na precificação de opções possibilita a construção de modelos adequados ao comportamento de mercados específicos, como o mercado brasileiro. Pois, a função de precificação é determinada por meio do reconhecimento de padrões e tendências do mercado analisado.

Ainda, a formulação do SVR baseia-se no princípio de Minimização do Risco Estrutural, o qual possui desempenho de generalização superior ao tradicional princípio de Minimização do Risco Empírico, empregado por técnicas convencionais de reconhecimento de padrões, como por exemplo, as redes neurais.

Visto que não foram encontrados relatos de aplicações do SVR no mercado brasileiro de opções, esta dissertação contribui para o desenvolvimento da teoria de opções nesse mercado.

## 1.6 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada em sete capítulos. No primeiro introduz-se o tema do trabalho assim como seus objetivos, importância e limitações.

No segundo capítulo, explicam-se os principais conceitos relativos às opções, ressaltando as características dos contratos de opções, do mercado brasileiro e dos modelos de precificação.

No capítulo três, descrevem-se os teoremas e conceitos necessários para o desenvolvimento da teoria do *Support Vector Classification* (SVC), a qual originou o *Support Vector Regression*, assim como, apresenta-se o SVR em detalhes.

No capítulo quatro, realiza-se uma revisão bibliográfica, destacando aplicações do SVC e do SVR em diversas áreas do conhecimento.

No capítulo cinco, apresenta-se a metodologia empregada nesta dissertação, os dados utilizados e o programa de precificação de opções desenvolvido.

No sexto capítulo, faz-se a análise dos resultados. E por fim, no capítulo sete apresenta-se a conclusão da dissertação e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 OPÇÕES

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos do mercado de opções necessários para a compreensão da presente dissertação. Inicialmente serão abordadas as principais características dos contratos, dos participantes e do mercado brasileiro. Em seguida, uma negociação hipotética é utilizada para exemplificar os elementos introduzidos nas duas primeiras seções. Por fim, explicam-se assuntos relativos ao prêmio de uma opção, como: fatores que o influenciam, suas componentes e modelos teóricos de precificação.

### 2.1 FUNDAMENTOS BÁSICOS

Derivativo é um contrato, ou título financeiro, cujo valor de mercado deriva do preço de outro ativo. Este ativo, conhecido como ativo objeto, pode ser uma mercadoria física, as chamadas *commodities*, ou um instrumento financeiro, como por exemplo: ações, índices, taxas de juros, taxas de câmbio, derivativos, entre outros. Dentre as modalidades de derivativos existentes, destacam-se as opções.

No mercado de opções, negociam-se contratos cuja entrega do ativo objeto, se desejada, ocorrerá numa data futura por um preço determinado no presente. O lançador, pessoa que vende a opção, tem a obrigação futura de liquidar o contrato, se o comprador assim o desejar. Por sua vez, o comprador de opção, também chamado de titular, tem o direito futuro, mas não a obrigação, de comprar ou vender o ativo do contrato firmado (LOZARDO, 1998). Para que o comprador venha obter estes direitos, ele deve pagar um prêmio ao vendedor de opções. Este prêmio, ou preço da opção, consiste em uma remuneração ao vendedor do título por ter assumido a responsabilidade de tomar uma posição no mercado, em data futura (SILVA NETO, 1996).

Existem dois tipos de contratos de opções: opções de compra (*calls*)<sup>1</sup> e opções de venda (*puts*). Como o próprio nome sugere, as primeiras concedem ao

---

<sup>1</sup> Em virtude do mercado de opções ter se desenvolvido nos Estados Unidos, grande parte da terminologia utilizada é norte americana.

seu titular o direito de comprar um ativo por preço predeterminado e as segundas o direito de vender. O preço pelo qual o ativo será negociado é chamado de preço de exercício.

Todo contrato de opção tem um determinado período de validade, ou seja, se o comprador da opção não exercer seu direito até o fim deste período, tanto a opção quanto a oportunidade de exercê-la deixam de existir. Essa data limite é chamada de data de exercício.

De um modo geral, as opções podem ser classificadas em dois grupos: americanas e européias. Essas opções se diferenciam pelas suas condições de exercício. As opções americanas permitem que o titular exerça seu direito, seja de comprar ou vender o ativo, em qualquer momento entre a data de compra da opção e o vencimento do contrato. Já as opções européias permitem que o titular exerça seu direito apenas na data de exercício, isto é, na data de vencimento do contrato (LEMGRUBER, 1995).

Para Silva Neto (1996), as opções também podem ser classificadas conforme sua probabilidade de exercício. Esta probabilidade é caracterizada pela relação entre o preço de exercício da opção ( $X$ ) e o preço do ativo-objeto ( $S$ ). Na tabela 1 estão definidas tais classificações, tanto para opções de compra como para venda.

TABELA 1 - CLASSIFICAÇÃO DAS OPÇÕES QUANTO À PROBABILIDADE DE EXERCÍCIO

CLASSIFICAÇÃO	OPÇÃO DE COMPRA	OPÇÃO DE VENDA
Dentro do dinheiro ou <i>In the money</i> (ITM)	$S > X$	$S < X$
No dinheiro ou <i>At the money</i> (ATM)	$S = X$	$S = X$
Fora do dinheiro ou <i>Out of the money</i> (OTM)	$S < X$	$S > X$

FONTE: A autora (2009)

Conforme a classificação descrita na tabela 1, pode-se dizer que as opções poderão estar num instante de lucro, neutro, ou de prejuízo em relação ao preço do ativo. Estas situações acontecem respectivamente quando as opções estão: dentro do dinheiro, no dinheiro e fora do dinheiro.

Segundo Hull (2005), três categorias de operadores podem ser identificadas no mercado de opções: os *hedgers*, os arbitadores e os especuladores.

Os *hedgers* são os investidores que utilizam os contratos derivativos como forma de seguro. Eles têm como objetivo proteger-se contra oscilações adversas do preço do ativo, em um período futuro. Sua principal preocupação não é obter lucros em derivativos, mas sim garantir o preço de compra ou de venda de uma determinada mercadoria (BOLSA DE MERCADORIAS E FUTUROS (BM&F), [200-], p.15).

Já os arbitadores são os operadores que têm como meta o lucro sem assumir riscos. Sua atividade consiste em buscar distorções de preços quando o mesmo título é negociado em dois ou mais mercados. A estratégia básica do arbitador é comprar no mercado em que o preço está mais barato e vender no que está mais caro. Esses participantes agem como elementos reguladores de mercado, fazendo com os preços se ajustem as suas trajetórias normais<sup>2</sup> (BM&F, [200-], p.15-16).

De maneira contrária aos *hedgers* e arbitadores, os especuladores são os únicos participantes que assumem riscos (BM&F, [200-], p.16). O objetivo desses investidores é lucrar com oscilações, apostando em altas ou quedas de preços. Por adotarem posições muito arriscadas, os especuladores dificilmente as mantêm até a data de liquidação do contrato. São participantes que costumam abrir e encerrar suas posições a todo o momento, de forma a aumentar o volume dos contratos negociados. Por esta razão, diz-se que eles são responsáveis por trazer liquidez ao mercado (LOZARDO,1998).

Como pode ser visto, a existência e atuação dos três participantes são imprescindíveis para o sucesso do mercado de opções, pois suas funções se complementam e garantem um mercado forte e líquido (BM&F, [200-], p.15).

## 2.2 MERCADO BRASILEIRO DE OPÇÕES SOBRE AÇÕES

No Brasil, as opções são negociadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros (BM&FBOVESPA S.A), também chamada de: A Nova Bolsa. Criada em

---

<sup>2</sup> À medida que os arbitadores atuam, eles aumentam a oferta e a procura nos diferentes mercados, gerando aumento e queda de preços. Num determinado momento, esses preços tendem a equilibrar-se num valor intermediário aos originalmente estabelecidos.

2008, esta bolsa consiste na integração entre a Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F S.A) e a Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA Holding S.A). Juntas, estas formam a terceira maior bolsa do mundo em valor de mercado, a segunda das Américas e a líder no continente latino-americano (BOLSA DE VALORES, MERCADORIAS E FUTUROS (BM&FBOVESPA), 2008).

Em termos de negociações de títulos, apesar da unificação destas Bolsas, ainda se faz a distinção entre Mercados BM&F e Mercados BOVESPA. Neste último são negociadas opções sobre determinadas ações.

Semanalmente, as opções de ações com negociação e/ou lançamento autorizados são divulgadas no Boletim Diário de Informações da BOVESPA, conhecido como BDI. Ao ser autorizado um novo vencimento, a Bolsa abre séries de opções cujos preços de exercício estejam próximos ao valor da ação-objeto. No entanto, em caso de alterações futuras nas cotações das ações, a emissão de novas séries de opções poderá ser autorizada. O objetivo é que estas novas séries tenham preços de exercício coerentes com o mercado, refletindo o movimento do preço da ação. Da mesma maneira, a Bolsa pode, a qualquer instante, suspender as autorizações para lançamento e/ou negociação de opções cujos preços de exercício sejam muito diferentes dos preços de mercado. Isso geralmente acontece com as séries que não apresentam posições em aberto. As séries com posições em aberto não têm a sua negociação suspensa, exceto em condições especiais (BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO (BOVESPA), 2000, p.4-5).

Nesse mercado, são permitidas as operações *day-trade*, ou seja, a compra e venda da mesma série, em um mesmo pregão, por um mesmo aplicador. Apenas no dia de vencimento da opção este tipo de operação não é permitido. O dia de vencimento das opções ocorre na terceira segunda-feira do seu respectivo mês de vencimento (BOVESPA, 2000, p.4-5).

Em virtude das diferentes modalidades de opções negociadas, as bolsas criaram um sistema de classificação que individualiza cada um dos grupos de contrato, facilitando as negociações. Esta classificação é realizada com base no ativo objeto, prazo de vencimento e preço de exercício da opção (SILVA NETO, 1996). No Brasil, normalmente as opções de ações são identificadas pelo símbolo da ação a que estão vinculadas, uma letra e um número. A letra identifica se a opção é de compra ou venda e seu respectivo mês de vencimento. Enquanto que o número



representa o preço de exercício. Na tabela 2 estão descritas as letras utilizadas na denominação dos contratos de opções e seus respectivos significados.

TABELA 2 - LETRAS UTILIZADAS NA DENOMINAÇÃO DOS CONTRATOS DE OPÇÕES

VENCIMENTO	OPÇÃO DE COMPRA	OPÇÃO DE VENDA
Janeiro	A	M
Fevereiro	B	N
Março	C	O
Abril	D	P
Maiο	E	Q
Junho	F	R
Julho	G	S
Agosto	H	T
Setembro	I	U
Outubro	J	V
Novembro	K	W
Dezembro	L	X

FONTE: Adaptado de BOVESPA (2000, p.6)

Para exemplificar a denominação dos contratos, utiliza-se a opção PETRC40. O código PETR corresponde à ação da Petrobras PN. A letra C, conforme se vê na tabela 2, indica uma opção de compra com vencimento em março, mais exatamente na terceira segunda-feira deste mês. E o número 40 representa o valor do preço de exercício da opção, isto é, R\$40.

Nem sempre o número que consta no nome da opção descreve o valor exato do preço de exercício. Em casos em que a ação-objeto distribuir dividendos, juros sobre o capital próprio ou qualquer outro provento em dinheiro, durante o período de vigência da opção, o valor líquido recebido será deduzido do preço de exercício da série. (BOVESPA, 2000, p.7). Segundo Hissa (2007), essas alterações podem causar erros de interpretação por parte de investidores que não estejam cientes das mudanças, visto que o nome das opções não se modifica.

No Brasil, as opções de ações de maior liquidez são as opções de compra americanas. Desta forma, o presente trabalho se limitará apenas ao estudo deste tipo de contrato.

### 2.3 EXEMPLO DE NEGOCIAÇÃO COM OPÇÕES DE COMPRA AMERICANAS

Esta seção tem como objetivo exemplificar os conceitos inicialmente introduzidos. Para isso, considera-se uma negociação hipotética de opções de compra do tipo americano sobre ações de certa empresa.

Imagina-se que um investidor comprou 100 opções da EMPZG50. Estas opções são referentes às ações de uma empresa conhecida por Empresa Z. O preço de exercício e prêmio de cada uma dessas opções são respectivamente R\$50 e R\$1. Pela tabela 2, a letra G indica que a data de exercício (vencimento) dessas opções ocorre na terceira segunda-feira do mês de julho. Dessa forma, ao negociar estes contratos, o investidor adquire o direito de comprar 100 ações da Empresa Z a R\$50, até a terceira segunda-feira do mês de julho. Isto é, se ele não exercer seu direito até esta data limite, o mesmo deixa de existir. Para obter este direito, ele pagou ao vendedor de opções um prêmio de R\$100 ( $R\$1 \times 100$ ).

Como uma primeira hipótese, supõe-se que em um momento qualquer antes do vencimento destas opções, as ações da Empresa Z valorizaram de tal forma que estejam custando R\$52 no mercado à vista. Pela classificação da tabela 1, estas opções estão dentro do dinheiro, ou seja, num instante de lucro em relação ao ativo objeto (neste exemplo, as ações). Desta forma, é vantajoso que o titular exerça seu direito e compre, do lançador de opções, as 100 ações da Empresa Z por R\$5.000 ( $R\$50 \times 100$ ), conforme prevê o contrato. Nota-se, no entanto, que a compra deste mesmo lote de ações no mercado à vista custaria um total de R\$5.200 ( $R\$52 \times 100$ ), evidenciando o lucro obtido pelo titular da opção.

Agora, considerando uma segunda hipótese, contrária e independente da primeira, tem-se que após a compra de tais opções, as ações da Empresa Z sofreram uma queda de preço e estão custando R\$48 no mercado à vista. Supõe-se ainda, que a data de vencimento das opções se aproxima e o valor das ações continua em baixa. Assim, pela classificação da tabela 1, as opções se encontram fora do dinheiro, ou seja, num instante de prejuízo em relação às ações. Visto que a compra de tais ações no mercado à vista custaria apenas R\$4.800 ( $R\$48 \times 100$ ), não faz sentido que o comprador exerça seu direito e gaste R\$5.000 ( $R\$50 \times 100$ ), conforme previsto no contrato. É mais vantajoso que ele compre tais ações

diretamente no mercado à vista, limitando sua perda financeira em apenas R\$100, valor correspondente ao prêmio pago ao vendedor.

Nas duas hipóteses consideradas, o lançador de opções é obrigado a liquidar a negociação caso o comprador deseje. No entanto, apenas na primeira situação seria conveniente ao titular exercer seu direito. Dessa forma, do ponto de vista do lançador apenas a segunda situação seria vantajosa, na qual ele lucrou o valor do prêmio.

Sem considerar os custos operacionais<sup>3</sup>, o titular de opções de compra tem uma perda financeira limitada ao valor do prêmio pago. Esta situação acontece nos casos em que o valor do ativo não supera o preço de exercício da opção, e a compra deste ativo se torna mais atrativa no mercado à vista. Em compensação, em casos de alta de preço, o retorno financeiro ou lucro desta operação torna-se ilimitado. De maneira contrária, o vendedor de opções de compra tem seu lucro limitado ao prêmio recebido no momento da venda, e um risco financeiro ilimitado.

Como alternativa às reações adversas, tanto o comprador como o vendedor de opções podem zerar suas posições no mercado e ficar fora do negócio. Zerar a posição no mercado de opções corresponde a vender o que foi comprado ou comprar o que foi vendido, ficando em posição nula no mercado, sem nenhum direito ou obrigação. Para isso, no exemplo dado, o comprador deverá vender 100 opções de compra da EMPZG50 e o vendedor comprar 100 opções do mesmo tipo.

## 2.4 PRÊMIO

Conforme visto no início deste capítulo, o prêmio de uma opção consiste no valor monetário que o titular paga ao lançador da opção (LOZARDO, 1998). Este valor é determinado pelo mercado e sofre influência das expectativas de seus participantes quanto ao comportamento futuro de certas variáveis. Ao se negociar opções, o grande desafio encontrado é justamente avaliar e mensurar essas variáveis (SILVA NETO, 1996).

---

<sup>3</sup> Taxas que o operador paga para investir no mercado de opções.

Nesta seção, serão apresentados quais são esses fatores e como eles afetam individualmente a formação do prêmio. Uma vez conhecidas tais variáveis, abordam-se os elementos que compõe o preço de uma opção.

#### 2.4.1 Fatores que afetam o prêmio das opções

Segundo Hull (2005), existem seis fatores que influenciam o preço das opções sobre ações, são eles: o preço à vista da ação, o preço de exercício, o prazo até o vencimento da opção, a volatilidade do preço da ação, a taxa de juro livre de risco e os dividendos esperados durante a vigência da opção.

Esses fatores podem afetar o prêmio de uma opção americana de diferentes formas, de maneira que todos estes venham exercer sua influência ao mesmo tempo. No entanto, as análises aqui realizadas levam em conta a variação de apenas um fator por vez, mantendo-se os demais constantes.

A primeira variável a ser analisada é o preço à vista da ação. Conforme Silva Neto (1996), este fator tem influência direta sobre o prêmio de uma opção. Para opções de compra, quanto maior for o preço do ativo objeto, maior será o valor do prêmio. Isso significa que à medida que o preço da ação sobe, maiores são as possibilidades de que a opção esteja dentro do dinheiro e seja exercida com lucro.

No caso do preço de exercício, a relação com o prêmio da *call* é inversa. Ou seja, quanto maior for o preço de exercício, menor será o prêmio da opção. Lozardo (1998) explica que o preço de exercício representa um limite pelo qual o valor da ação precisa ultrapassar afim de que a *call* esteja dentro do dinheiro.

Avaliando a variável tempo, tem-se que quanto maior for o prazo até o vencimento de uma opção de compra americana, maior será seu prêmio. Isto é consequência de que o titular de uma opção de vida longa tem mais oportunidades de exercício do que o titular de uma opção de vida curta (HULL, 2005). Assim, quanto mais próximo se estiver da data de vencimento, menos tempo restará para que o valor da ação suba e a opção esteja dentro do dinheiro.

A variável volatilidade é a medida de incerteza acerca dos movimentos do preço da ação. A relação entre esse fator e o prêmio de uma *call* é direta. Dessa forma, quanto maior a volatilidade da ação, maior será o prêmio da opção. Segundo

Hissa (2007), o lançador exige prêmios maiores ao lançar opções ligadas a ativos mais voláteis, visto que o risco de ser exercido é maior.

Hissa (2007) afirma que as taxas de juros têm pouco efeito sobre o preço das opções. No entanto, o valor das opções de compra tende a subir com o aumento dessas taxas, já que os juros de mercado estão inclusos nos prêmios das opções. Apesar de a influência ser menos clara, quanto maior os juros, maior o prêmio.

A distribuição de dividendos tem o efeito de reduzir o preço das ações. Conseqüentemente, conduz à desvalorização do preço das opções de compra (FREITAS, 2001).

Na tabela 3, resume-se os efeitos ocasionados sobre o prêmio de uma *call* americana sobre ação quando o valor de uma das variáveis aumenta e as demais se mantêm constantes.

TABELA 3 - RESUMO DOS EFEITOS SOBRE O PRÊMIO DE UMA CALL AMERICANA SOBRE AÇÃO EM FUNÇÃO DO AUMENTO INDIVIDUAL DAS VARIÁVEIS

VARIÁVEL	PREÇO DA CALL AMERICANA
Preço à vista da ação	Aumento
Preço de exercício	Diminuição
Prazo até o vencimento da opção	Aumento
Volatilidade do preço da ação	Aumento
Taxa de juro livre de risco	Aumento
Dividendos	Diminuição

FONTE: Adaptado de Hull (2005)

#### 2.4.2 Componentes do prêmio de uma opção

O preço de qualquer opção pode ser subdividido em duas partes: o valor intrínseco e o valor extrínseco. O valor intrínseco representa a quantidade da opção que está dentro do dinheiro, ou seja, o quanto o titular ganhará caso exerça a opção imediatamente. Assim, o valor intrínseco (VI) é dado por:

$$VI = \max \{ \text{Preço da Ação} - \text{Preço de Exercício da Opção}, 0 \} \quad (1)$$

Opções no dinheiro e fora do dinheiro têm valor intrínseco zero, pois não serão exercidas (LOZARDO,1998). Portanto, essa parte do prêmio perde seu valor apenas no caso em que o mercado se move contra a posição assumida pelo investidor. Por exemplo: o operador realiza uma compra em *calls* e o preço das ações caem, de forma que as opções negociadas tornam-se fora do dinheiro ou no dinheiro.

A segunda componente do prêmio, denominada de valor extrínseco (VE), refere-se à porção do prêmio que excede ao valor intrínseco. Essa é dada por:

$$VE = \text{Prêmio da Opção} - VI \quad (2)$$

É nessa última porção, que a variável prazo até o vencimento da opção exerce sua influência. Assim, o valor extrínseco de uma opção também é chamado de valor do tempo.

Conforme visto anteriormente, o prêmio de uma opção de compra americana diminui à medida que o tempo passa. Hissa (2007) afirma que mesmo que uma opção aumente de preço de um dia para outro, ela perde valor extrínseco. Ou seja, o preço da opção seria ainda maior se não houvesse a passagem de um dia. Dessa forma, toda opção de compra no dia do seu vencimento tende a custar apenas o equivalente ao seu valor intrínseco, caso esteja dentro do dinheiro. Isso se deve ao fato de que no vencimento, o valor extrínseco do prêmio tem seu valor igual ou muito próximo de zero. No caso de opções no dinheiro e fora do dinheiro, estas costumam a expirar sem valor, pois ambas as componentes (VI e VE) são nulas. Para esse tipo de situação, diz-se que a opção “virou pó”, ou seja, ela chega ao dia de exercício sem nenhum valor.

Em resumo, diz-se que a componente VI é a parte do prêmio perdida ou ganha conforme o movimento da ação. Enquanto que a VE é a parte perdida pela passagem do tempo.

## 2.5 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

Na busca de lucros, procura-se comprar títulos ou ativos financeiros que estejam baratos e vender os que estão mais caros (SILVA NETO, 1996). A pergunta que se faz é: como se avalia o preço de uma opção?

O trabalho de determinar o preço de uma opção, conhecido como precificação de opção, é um dos problemas centrais abordados pela teoria de opções (FREITAS, 2001). Nesse sentido, profissionais de finanças e pesquisadores têm dedicado razoável esforço para desenvolver modelos que permitam estimar um preço teórico aos contratos negociados. A esses modelos teóricos dá-se o nome de modelos de precificação.

O objetivo de se encontrar um preço teórico para as opções é avaliar se cada contrato está sendo negociado de forma sobre ou subavaliada (HISSA, 2007). Segundo Freitas (2001), esta é uma tarefa importante para a definição do comportamento do mercado, que exerce influência direta sobre as operações de hedge, especulação e arbitragem.

Nas próximas subseções serão apresentados alguns modelos de precificação, dentre os quais, destaca-se o pioneiro modelo de Black & Scholes.

### 2.5.1 Modelo de Black & Scholes (B&S)

Em 1973, os economistas Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton fizeram um avanço notável no campo de precificação de opções. Suas pesquisas contribuíram para a criação do modelo conhecido como Black & Scholes (B&S). O reconhecimento do trabalho deu-se em 1997, quando Myron Scholes e Robert Merton foram agraciados com o prêmio Nobel de Economia<sup>4</sup> (HULL, 2005).

O modelo de B&S fornece fórmulas matemáticas para avaliar preços de opções européias sobre ações que não pagam dividendos. Partindo de algumas premissas quanto ao comportamento do mercado, os autores desenvolveram um

---

<sup>4</sup> Fischer Black faleceu em 1995, anteriormente à data de premiação.

dos modelos mais utilizados e de maior sucesso na área de finanças (RUBINSTEIN<sup>5</sup>, 1994, *apud* FREITAS, 2001).

A análise feita por Black, Scholes e Merton baseia-se inicialmente na hipótese de que o preço da ação segue movimentos aleatórios dados pela distribuição lognormal<sup>6</sup>. Como consequência, pressupõe-se que os retornos da ação são normalmente distribuídos.

A distribuição lognormal é descrita pela equação (3), onde os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  são respectivamente a esperança matemática e variância da variável aleatória  $x$ .

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (3)$$

No presente contexto, diz-se que o parâmetro  $\mu$  representa o retorno esperado da ação em um dado período de tempo, e o desvio padrão  $\sigma$  indica a volatilidade do preço da ação no mesmo período. Por representar uma medida de dispersão, a volatilidade expressa, em percentagem, como o preço do ativo pode oscilar em torno do seu valor médio.

Além da hipótese de que o preço da ação segue um comportamento estocástico, outras premissas foram necessárias para derivar as equações do modelo de B&S. De acordo com Hull (2005), estas são:

- O comportamento do preço da ação segue movimentos aleatórios dados pela distribuição lognormal, com  $\mu$  e  $\sigma$  constantes;
- Não existem custos de transação ou impostos;
- A ação não paga dividendos durante a vida da opção;
- Não existem oportunidades de arbitragem sem risco;
- A negociação de títulos é contínua, ou seja, é possível negociar a ação a qualquer momento até o exercício;

<sup>5</sup> RUBINSTEIN, M. Implied Binomial Trees. **Journal of Finance**, v.49, n.3, p. 771-818, July 1994. [S.l.].

<sup>6</sup> Diz-se que uma variável aleatória segue a distribuição lognormal, quando seu logaritmo natural segue a distribuição normal.



- Os investidores podem emprestar ou tomar emprestado recursos à mesma taxa de juro livre de risco;
- A taxa de juro de curto prazo livre de risco ( $r$ ) é constante.

As fórmulas de B&S para precificar opções de compra e venda europeias para ações que não pagam dividendos são descritas respectivamente por (4) e (5):

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \quad (4)$$

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (5)$$

Onde  $d_1$  e  $d_2$  são obtidos por:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (6)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (7)$$

E as variáveis representam:

- $c$  = preço da opção de compra (call) europeia;
- $p$  = preço da opção de venda (put) europeia;
- $S$  = preço da ação;
- $X$  = preço de exercício da opção;
- $r$  = taxa de juro livre de risco (expressa em capitalização contínua);
- $T$  = tempo até o vencimento da opção;
- $\sigma$  = volatilidade do preço da ação;

- $N(x)$  = função de probabilidade cumulativa para uma variável normal padronizada<sup>7</sup>.

Detalhes quanto ao desenvolvimento das equações diferenciais que compõe modelo e a obtenção das fórmulas exatas (4) e (5) podem ser encontrados em Lemgruber (1995) e Wilmott, Howison e Dewynne (2007).

De acordo com Hull (2005), os resultados do modelo de B&S podem ser facilmente estendidos para o caso de opções de compra e de venda européias sobre ações que pagam dividendos. Um procedimento é utilizar as fórmulas (4) e (5) com o preço à vista da ação deduzido pelo valor dos dividendos que serão pagos durante a vida da opção.

Para o caso de opções de compra do tipo americano, Mendes (2000) afirma que o seu exercício antecipado é na realidade bastante improvável, salvo raras exceções. Logo, essas costumam se comportar como opções de compra européia e podem, portanto, ser avaliadas pela equação de Black & Scholes.

## 2.5.2 Volatilidade

Dentre os parâmetros necessários ao emprego dos mais diversos modelos de precificação, nos quais se incluem as fórmulas de B&S, a volatilidade é o único elemento que não pode ser diretamente observado, devendo ser estimado.

A volatilidade representa a medida de incerteza quanto aos preços ou retornos dos ativos num período de tempo. Sua estimativa é essencial na avaliação da probabilidade de se obter certos resultados, em termos de preços do ativo, quando se está negociando instrumentos financeiros (MENDES, 2000).

As estimativas da volatilidade futura dos preços de uma ação podem ser obtidas sob a ótica de diferentes conceitos, entre os quais se destacam: a volatilidade histórica, a volatilidade implícita, a volatilidade medida pelo modelo de médias móveis com ponderação exponencial (EWMA) e as volatilidades condicionais calculadas por meio de modelos da classe ARCH/GARCH.

---

<sup>7</sup> Probabilidade de que a variável com distribuição normal padrão seja menor que  $x$ .

A volatilidade histórica, como seu próprio nome sugere, utiliza-se de dados históricos do ativo-objeto. De acordo com Hull (2005), o cálculo deste valor é dado pelo desvio padrão dos retornos logarítmicos proporcionados pela ação em intervalos regulares de tempo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \quad (8)$$

Onde:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \quad (9)$$

Com:

- $\sigma$  = volatilidade histórica;
- $n$  = número de dados observados;
- $u_i$  =  $i$ -ésima observação dos retornos da ação
- $\bar{u}_i$  = média dos valores de  $u_i$
- $S_i$  = preço da ação no fim do  $i$ -ésimo intervalo

Mendes (2000) afirma que esta técnica funciona como um modelo de médias móveis, cuja ponderação é igual para todos os dados considerados. Observa-se que ao atribuir pesos iguais a todos os retornos de uma série histórica, os eventos ocorridos há mais tempo têm a mesma influência na estimativa da volatilidade, que os eventos ocorridos recentemente (ALEXANDER<sup>8</sup>, 1999, *apud* MENDES, 2000).

A escolha do período de tempo considerado exerce influência significativa sobre os resultados obtidos para a volatilidade histórica. Mendes (2000) destaca que em períodos em que a volatilidade oscila muito, a exclusão ou inclusão de dados pode gerar grandes distorções. Constata-se que a opinião referente à escolha da variável  $n$  diverge de autor para autor. Nessa perspectiva, Silva Neto (1996)

<sup>8</sup> ALEXANDER, C. **Volatility and Correlation**: measurement, models and applications in Risk Management and Analysis. Chichester: John Wiley & Sons, 1999. v.1.

aconselha escolher uma amostra com período de tempo suficientemente longo. A finalidade disso seria detectar períodos com movimentos de preços atípicos ou sazonais, quando esses existirem. Já Hull (2005) afirma que uma maior quantidade de dados produz melhores resultados, porém como a volatilidade se modifica ao longo do tempo, dados muito antigos podem não ser relevantes para prever o futuro. Dessa forma, esse mesmo autor sugere, como regra prática, estabelecer o valor de  $n$  como sendo igual ao número de dias para os quais a volatilidade está sendo apurada. Assim, se a volatilidade for usada para precificar uma opção de dois anos, dois anos de dados históricos devem ser utilizados.

Questões quanto ao intervalo de tempo em que as medidas serão coletadas (dados diários, semanais, mensais, etc.) e o preço da ação a ser empregado (preço de fechamento do pregão, de abertura, preço médio, outros, ou uma combinação desses), também devem ser consideradas. Das<sup>9</sup> (1997, citado por Mendes, 2000) comenta que o procedimento usual para a escolha dos preços do ativo-objeto é utilizar os de fechamento do pregão, pois estes permitem capturar todo o movimento do ativo entre dois períodos consecutivos.

Baseando-se nas determinações citadas, supõe-se que existam infinitas maneiras de se calcular a volatilidade histórica. No entanto, Silva Neto (1996) afirma que se a volatilidade for medida criteriosamente em intervalos regulares e as técnicas estatísticas de tratamentos de séries temporais forem aplicadas corretamente, chega-se a excelentes estimativas para esse número.

Outra forma de estimar a volatilidade futura é por meio do cálculo da volatilidade implícita. De acordo com Alexander (2005), esse parâmetro corresponde à volatilidade do ativo que está implícita no prêmio de mercado de uma opção, quando avaliada por um modelo de precificação particular.

No caso do modelo de B&S, determina-se tal parâmetro igualando as fórmulas (4) ou (5) ao preço de mercado da opção. Contudo, verifica-se que não é possível inverter essas equações a fim de expressar a volatilidade em função das demais variáveis. Como solução, aplicam-se métodos de procura iterativa que permitam calcular o seu valor.

A terceira possibilidade de se estimar a volatilidade é dada pelo método de médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA – *Exponentially Weighted*

---

<sup>9</sup> DAS, S. **Risk management and financial derivatives**: A Guide to the mathematics. New York: McGraw-Hill, 1998.

*Moving Average*). De maneira similar à volatilidade histórica, este modelo também considera que a previsão da volatilidade futura se dá pelo desvio padrão de uma amostra de retornos passados (MIKOSZEWSKI, 2006). Entretanto, a diferença fundamental é que, na metodologia EWMA, as observações mais recentes recebem um peso maior e influenciam mais a estimativa da volatilidade. O grau de importância dos retornos é atribuído pela relação  $\lambda(1 - \lambda)^{i-1}$ , onde  $0 < \lambda < 1$ , e  $i = 1, \dots, n$ .

Como quarta alternativa, podem-se utilizar os modelos de estimação de volatilidade condicional. Em contraste aos três métodos anteriormente descritos, os modelos da classe ARCH e GARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity e Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) assumem que a volatilidade varia no tempo. Esses métodos também supõem que a volatilidade passada traz informações sobre seu valor futuro, apresentando-se agrupada em períodos distintos de alta e baixa intensidade (MENDES, 2000).

Da análise do exposto, conclui-se que há várias maneiras de estimar a volatilidade de um ativo objeto. Entretanto, Lanari (2000) afirma que não existe uma conclusão definitiva quanto à melhor maneira de fazê-la. Em virtude disso, a volatilidade torna-se um dos principais responsáveis pelas distorções apresentadas nos resultados dos modelos teóricos de precificação.

### 2.5.3 Alternativas ao modelo de Black & Scholes

O modelo de Black & Scholes é considerado por muitos autores<sup>10</sup> como sendo de fácil utilização. Apesar desta enorme vantagem, ele parte de algumas premissas que não são verificadas na prática. Logo, em determinadas situações, é possível encontrar diferenças significativas entre os preços calculados mediante o modelo de B&S e os cotados pelo mercado.

Na tentativa de obter melhores resultados e reduzir os desvios observados, foram desenvolvidos novos modelos de precificação. Alguns desses surgiram a partir

---

<sup>10</sup> Lanari (2000), Freitas (2001), Araújo (2002), Hissa (2007).

de alterações nas hipóteses de Black, Scholes e Merton, enquanto outros basearam em processos distintos de geração de preço (FREITAS, 2001).

Dentro desta perspectiva, enumeram-se algumas técnicas alternativas, dentre as quais: aquelas que utilizam taxas de juros e volatilidades estocásticas, que admitem um processo de difusão com elasticidade de variância constante, que envolvem o uso de árvores binomiais ou trinomiais, que se baseiam em redes neurais artificiais (RNA), em algoritmos genéticos, em método de diferenças finitas e em simulação de Monte Carlo.

No mercado brasileiro de opções, verificam-se alguns trabalhos em que essas técnicas são aplicadas. Vitiello Junior (2000) comparou o ajustamento dos modelos de B&S e de Cox e Ross<sup>11</sup> aos preços estabelecidos pelo mercado. O estudo foi aplicado para todas as opções de compra sobre ações, negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA), compreendidas entre o período de julho de 1994 e junho de 1997. A pesquisa evidenciou que o modelo de B&S se ajustou melhor às opções classificadas no dinheiro e fora do dinheiro, e o modelo de Cox e Ross às opções dentro do dinheiro.

Freitas (2001) confrontou os resultados obtidos por meio de um modelo baseado em uma rede neural *Multilayer Perceptron (MLP) back-propagation* com aqueles alcançados pelo modelo de B&S. Utilizaram-se como parâmetros de entrada da rede: o grau de *moneyness* da opção, o tempo de vencimento da opção em anos, o preço de exercício da opção, o preço anterior da opção e o preço anterior da ação objeto. Como parâmetro de saída utilizou-se a relação entre o preço de fechamento da opção e o preço de fechamento da ação. A amostra analisada constituía-se de opções de compra européias sobre ações da Telebras PN, com vencimentos compreendidos entre fevereiro de 1998 e dezembro de 1999. Concluiu-se que o modelo de redes neurais superou o de B&S, tanto para a precificação de opções classificadas dentro do dinheiro, como para opções no dinheiro e fora do dinheiro.

Araújo (2002) realizou o primeiro exame aprofundado no apreçamento de opções brasileiras, via modelo GARCH. Nesse trabalho foram empregadas opções de compra sobre ações da Telebras PN, negociadas no período de julho 1995 a junho de 2000. Os resultados indicaram que o modelo GARCH foi capaz de diminuir alguns dos vieses apresentados por B&S, principalmente para precificação de

---

<sup>11</sup> Modelo que admite um processo de difusão com elasticidade de variância constante.

opções fora do dinheiro com curto prazo para o vencimento. Dessa forma, esse modelo mostrou-se uma alternativa eficaz, sobretudo para opções de baixa liquidez.

Mikoszewski (2006) comparou o desempenho do método de Cox, Ross e Rubinstein, popularmente conhecido como modelo Binomial, frente ao proporcionado por B&S. Na sua pesquisa, avaliou-se para ambos os métodos o efeito de diferentes formas de estimação de volatilidade. Tais parâmetros foram calculados a partir dos conceitos de volatilidade histórica, implícita e método de EWMA com valores distintos de  $\lambda$ . O estudo se aplicou a opções de compra americanas sobre ações da Telemar Participações (TNLP4), cotadas entre março de 1999 e setembro de 2005. Para os casos considerados, concluiu-se que o modelo que melhor se ajustou aos preços de mercado foi o Binomial com estimação de volatilidade implícita. Este apresentou menores erros de precisão tanto para opções classificadas dentro do dinheiro, no dinheiro e fora do dinheiro.

Chagas (2006) propôs um modelo de Redes Neurais Artificiais otimizadas por Algoritmos Genéticos para a precificação de opções europeias sobre a taxa de câmbio de reais por dólar comercial (usualmente denominados contratos de opção de dólar à vista). Em seu estudo, o autor comparou a eficiência de seu modelo frente ao desempenho dos modelos convencionais de B&S, Garman-Kohlhagen, Árvores Trinomiais e Simulações de Monte Carlo. A análise compreendeu as opções negociadas entre janeiro de 1999 e novembro de 2006. A partir dos resultados, concluiu-se que o modelo proposto não apresentou resultados estatisticamente superiores àqueles dos modelos convencionais.

Como se pôde verificar, diversas alternativas para a precificação de opções já foram apresentadas. Entretanto, assim como para a estimativa da volatilidade, ainda não existem conclusões sobre qual delas é a melhor. De acordo com Freitas (2001), no que se refere ao mercado brasileiro de opções, uma resposta definitiva para essa questão também está distante.

### 3 SUPPORT VECTOR MACHINE

Desenvolvido por Boser, Guyon e Vapnik, o algoritmo do *Support Vector Machine* (SVM) foi apresentado pela primeira vez em 1992, na *Annual Workshop on Computational Learning Theory*<sup>12</sup>.

Em sua forma inicial, também denominada *Support Vector Classification* (SVC), o algoritmo propõe encontrar por meio da metodologia de aprendizagem um hiperplano separador de margem máxima. Tal hiperplano permite a classificação de dados linearmente separáveis, seja no espaço de entrada ou em um espaço característico de dimensão maior. A classificação neste último espaço é permitida pelo uso de funções de transformação Kernel.

Em 1995, Cortes e Vapnik sugerem uma modificação no algoritmo inicial, introduzindo variáveis de folga. Esta alteração permite encontrar um hiperplano de separação com margens flexíveis que minimiza a probabilidade de se ter erros de classificação, no caso de dados não linearmente separáveis.

Nesse mesmo ano, os conceitos do SVC são estendidos para casos de regressão, possibilitando estimar funções de valores reais. Surge então o chamado *Support Vector Regression* (SVR).

Na presente dissertação, o termo *Support Vector Machine* é utilizado para descrever tanto a técnica de classificação como a de regressão, enquanto os termos *Support Vector Classification* e *Support Vector Regression* são utilizados para especificar cada um dos respectivos métodos.

A formulação do SVM baseia-se no princípio de Minimização do Risco Estrutural (SRM)<sup>13</sup>, proveniente da teoria do aprendizado estatístico. O SRM tem um desempenho de generalização superior ao tradicional princípio de Minimização do Risco Empírico, empregado por técnicas convencionais de reconhecimento de padrões (GUNN, 1998).

O SRM está fundamentado no fato de que o erro do algoritmo de aprendizado junto aos dados de teste (erro de generalização) é limitado pela soma

---

<sup>12</sup> A apresentação do tema se deu por meio do artigo: *A Training Algorithm For Optional Margin Classifiers*, o qual se encontra listado nas referências desta dissertação.

<sup>13</sup> Do inglês, *Structural Risk Minimization*.



do erro de treinamento mais um termo que depende da dimensão de Vapnik e Chervonenkis, ou simplesmente dimensão VC (CHAVES, 2006).

A dimensão VC é uma medida da capacidade de expressão de uma família de funções classificadoras obtidas por meio de um algoritmo de aprendizado. É dada pelo número máximo de amostras de treinamento que podem ser classificadas sem erro, usando-se funções da classe escolhida.

Devido aos bons resultados proporcionados, verificam-se aplicações do SVM em diversas áreas de atuações. No capítulo 4, enumeram-se algumas dessas aplicações.

Nas próximas seções expõem-se as principais características e propriedades do algoritmo *Support Vector Machine*. Inicialmente, abordam-se algumas definições e teoremas da teoria de otimização, cujos conceitos são necessários para o entendimento do SVM. Em seguida, introduz-se a idéia do modelo de classificação por vetores suporte, o qual serve de ponto de partida para a construção de modelos mais sofisticados, como o de regressão. Por fim, enfoca-se na metodologia do SVR, a qual será utilizada para resolver o problema proposto nesta dissertação.

### 3.1 CONCEITOS DA TEORIA DE OTIMIZAÇÃO

A teoria da otimização é o ramo da matemática que tem como objetivo determinar soluções para certa classe de problemas e desenvolver algoritmos eficazes que permitam encontrá-las (CRISTIANINI; SHAW-TAYLOR, 2006).

As definições e teoremas, apresentados a seguir, são indispensáveis para a compreensão do SVM. Maiores detalhes, incluindo demonstrações, encontram-se disponíveis em: Cristianini e Shaw-Taylor (2006) e, Izmailov e Solodov (2005).

### 3.1.1 Formulação do Problema de Otimização

Em problemas de otimização busca-se maximizar ou minimizar uma função objetivo, que depende de um número finito de variáveis de entrada. Estas variáveis podem ser independentes uma das outras ou podem estar relacionadas por meio de restrições, sejam essas de igualdade e/ou desigualdade. Dependendo da natureza da função objetivo, diz-se que um problema é de minimização ou de maximização.

É importante destacar que todo problema de maximização pode ser transformado em um problema de minimização equivalente<sup>14</sup>. Em particular, as soluções globais e locais de ambos os problemas têm os mesmos valores ótimos, mas com sinais opostos. Portanto, do ponto de vista matemático, não existem diferenças relevantes entre uma classe de problema e outra. Os resultados obtidos para uma, podem ser estendidos para segunda, sem grandes dificuldades (IZMAILOV; SOLODOV, 2005). Por este motivo, consideram-se ao longo desta seção apenas os problemas de minimização.

Segundo Cristianini e Shawe-Taylor (2006), a formulação geral de um problema de otimização é dada por:

**Definição de um Problema de Otimização Primal:** *Dadas as funções  $f$ ,  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , e  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , definidas em um domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,*

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(w), & w \in \Omega \\ \text{sujeito a:} \quad & g_i(w) \leq 0, & i = 1, \dots, k, \\ & h_i(w) = 0, & i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{10}$$

onde a função  $f(w)$  é denominada de função objetivo, e as relações restantes  $g_i(w)$  e  $h_i(w)$  são chamadas, respectivamente, de restrições de desigualdade e de igualdade.

---

<sup>14</sup> Maximizar a função  $f(w)$  é equivalente a minimizar a função  $-f(w)$ .

A região, na qual a função objetivo está definida e todas as restrições são satisfeitas é conhecida como região factível ou conjunto viável, e é denotada por:

$$F = \{w \in \Omega: g_i(w) \leq 0, h_i(w) = 0\} \quad (11)$$

De acordo com Friedlander (1994), consideram-se dois tipos de soluções para este problema: os minimizadores globais e locais. As definições de cada uma delas estão descritas abaixo.

**Definição de minimizador global:** *Um ponto  $w^* \in F$  é um minimizador global de (10), se  $f(w^*) \leq f(w), \forall w \in F$ .*

**Definição de minimizador local:** *Um ponto  $w^* \in F$  é chamado de minimizador local de (10), se existir um  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(w^*) \leq f(w), \forall w \in F$ , com  $\|w - w^*\| < \varepsilon$ .*

Problemas de otimização em que a função objetivo é quadrática e as suas restrições são todas lineares são chamados de problemas de programação quadrática. Uma classe específica desse tipo de problema é dada pelos problemas quadráticos convexos. Pertencem a essa classe todos aqueles que, além de quadráticos, têm a função objetivo e as restrições convexas. As definições de conjunto convexo e função convexa, descritas a seguir, contam com as figuras 1 e 2 que ilustram seus respectivos conceitos.

**Definição de conjunto convexo:** *Um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é chamado de conjunto convexo se para quaisquer  $x \in \Omega, y \in \Omega$ , e  $\alpha \in [0,1]$ , tem-se que o ponto  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Omega$ .*

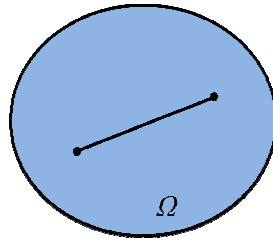


FIGURA 1 - EXEMPLO DE CONJUNTO CONVEXO

FONTE: A autora (2009)

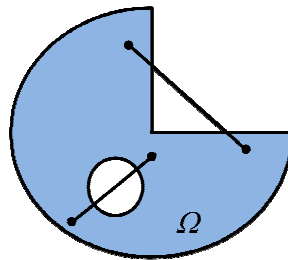


FIGURA 2 - EXEMPLO DE CONJUNTO NÃO CONVEXO

FONTE: A autora (2009)

**Definição de função convexa:** Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo, diz que a função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa em  $\Omega$  quando para quaisquer  $x \in \Omega$ ,  $y \in \Omega$ , e  $\alpha \in [0,1]$  tem-se  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ .

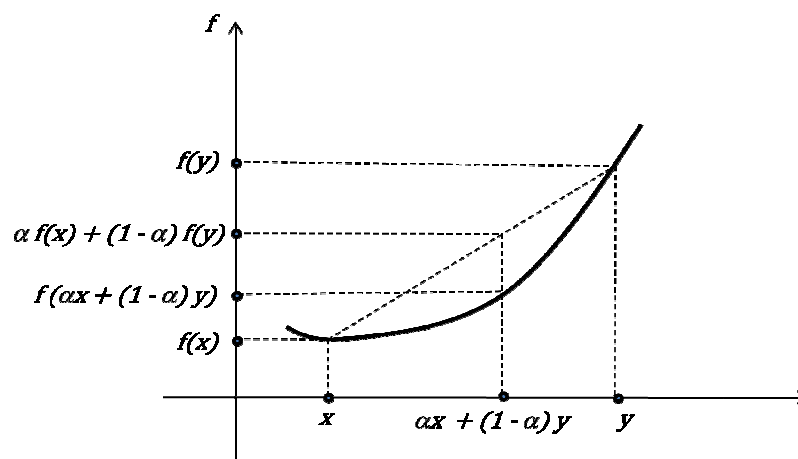


FIGURA 3 - EXEMPLO DE FUNÇÃO CONVEXA

FONTE: Izmailov e Solodov (2005)

De acordo com Izmailov e Solodov (2005), a noção de convexidade é muito importante na teoria da otimização. Tal relevância pode ser verificada por meio do seguinte resultado:

**Teorema da Minimização Convexa:** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa em  $\Omega$ . Então todo minimizador local em*

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (12)$$

*é global. Além disso, o conjunto de minimizadores é convexo. Se  $f$  é estritamente convexa, não pode haver mais de um minimizador.*

No contexto dos problemas convexos insere-se o *Support Vector Machine*, o qual consiste em um problema quadrático convexo. Uma das grandes vantagens desta metodologia é justamente a ausência de minimizadores locais.

Para resolver esse tipo de problema, utiliza-se da Teoria Lagrangeana e suas respectivas extensões. Conceitos e teoremas relativos a esses assuntos são introduzidos na seqüência.

### 3.1.2 Teoria Lagrangeana e suas extensões

A Teoria Lagrangeana, desenvolvida por Lagrange em 1797, generaliza os resultados apresentados por Fermat, em 1629. O intuito dessa teoria é caracterizar a solução de um problema de otimização sujeito a apenas restrições de igualdade.

Em 1951, Kuhn e Tucker estendem o método de Lagrange e permitem a resolução de problemas também sujeitos a restrições de desigualdade. Esse novo método ficou conhecido como Teorema de Kuhn e Tucker.

Na continuação, enunciam-se estes três importantes resultados, respeitando sua ordem cronológica de desenvolvimento.

**Teorema de Fermat<sup>15</sup>:** *Uma condição necessária para que o ponto  $w^*$  seja um mínimo de  $f(w)$ ,  $f \in C^1$ , é:*

$$\frac{\partial f(w^*)}{\partial w} = 0 \quad (13)$$

*Esta condição, juntamente com a convexidade de  $f$ , também é uma condição suficiente.*

O método desenvolvido por Fermat dá condições para localizar mínimos de uma função sem restrições. No caso de problemas restritos, nem sempre estas condições são verificadas. Para estes casos, é necessário definir uma função que incorpore tanto a função objetivo quanto as restrições do problema. A essa função dá-se o nome de função Lagrangeana.

Precisamente, a função Lagrangeana é definida como sendo a soma da função objetivo com a combinação linear das restrições, onde os coeficientes da combinação são chamados de multiplicadores de Lagrange (CRISTIANINI; SHAW-TAYLOR, 2006). A definição de tal função, seguida pelos resultados encontrados por Lagrange, são descritos abaixo.

**Definição de Função Lagrangeana:** *Dado um problema de otimização com função objetivo  $f(w)$  e restrições de igualdade  $h_i(w) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , define-se a função Lagrangeana como:*

$$L(w, \beta) = f(w) + \sum_{i=1}^m \beta_i h_i(w) \quad (14)$$

*onde os coeficiente  $\beta_i$  são chamados de multiplicadores de Lagrange.*

---

<sup>15</sup>  $C^1$  é o conjunto das funções que têm a primeira derivada contínua em  $\Omega$ .

**Teorema de Lagrange:** *Uma condição necessária para que o ponto  $w^*$  seja um mínimo de  $f(w)$ , sujeito a  $h_i(w) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , com  $f, h_i \in C^1$ , é:*

$$\frac{\partial L(w^*, \beta^*)}{\partial w} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial L(w^*, \beta^*)}{\partial \beta} = 0, \quad (16)$$

*para alguns valores de  $\beta^*$ . As condições acima também serão suficientes, caso  $L(w, \beta^*)$  seja uma função convexa de  $w^*$ .*

Para resolver problemas gerais de otimização, contendo tanto restrições de igualdade como de desigualdade, deve-se considerar a função de Lagrange generalizada.

**Definição de Função Lagrangeana Generalizada:** *Dado um problema de otimização, na forma apresentada por (10), com domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , define-se a função Lagrangeana generalizada como:*

$$L(w, \alpha, \beta) = f(w) + \sum_{i=1}^k \alpha_i g_i(w) + \sum_{i=1}^m \beta_i h_i(w) \quad (17)$$

*onde os coeficiente  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são os multiplicadores de Lagrange .*

Com a versão generalizada da função Lagrangeana descrita, é possível introduzir o problema dual Lagrangeano. Os conceitos e teoremas relativos à dualidade são necessários para a compreensão dos resultados apresentados por Kuhn e Tucker.

Basicamente, tem-se que a teoria da dualidade associa ao problema original primal um segundo problema, denominado dual, que sob certas condições é

equivalente ao primal e mais fácil de ser resolvido. As relações apresentadas pela dualidade podem ser muito úteis, tanto para as questões teóricas quanto computacionais (IZMAILOV; SOLODOV, 2005).

**Definição de Problema Dual Lagrangeano:** *O problema dual Lagrangeano, referente ao problema definido por (10), é dado por:*

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \theta(\alpha, \beta), \\ \text{sujeito a} & \alpha \geq 0, \end{array} \quad (18)$$

onde:  $\theta(\alpha, \beta) = \inf_{w \in \Omega} L(w, \alpha, \beta)$ .

**Teorema Fraco da Dualidade:** *Seja  $w \in \Omega$  uma solução viável do problema primal, definido por (10), e seja  $(\alpha, \beta)$  uma solução viável do problema dual, definido por (18). Então  $f(w) \geq \theta(\alpha, \beta)$ .*

**Corolário:** *Se  $f(w^*) = \theta(\alpha^*, \beta^*)$ , onde  $\alpha^* \geq 0$ , e  $g(w^*) \leq 0$ ,  $h(w^*) = 0$ , então  $w^*$  e  $(\alpha^*, \beta^*)$  resolvem os problemas primal e dual respectivamente.*

De acordo com Cristianini e Shawe-Taylor (2006), pode-se verificar que a solução do problema é atingida comparando-se os valores obtidos para o primal e dual. Quando a diferença entre estas soluções reduz-se a zero, diz-se que o ponto ótimo foi encontrado. Contudo, esta expectativa nem sempre é atendida, sendo necessário introduzir o conceito de *gap de dualidade*.

**Definição de *gap de dualidade*:** *O gap de dualidade consiste na diferença dada entre os valores dos problemas primal e dual.*



O Teorema Forte da Dualidade, enunciado a seguir, determina condições para as quais o *gap de dualidade* é igual a zero.

**Teorema Forte da Dualidade:** *Dado um problema de otimização, com domínio convexo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , na forma apresentada por (10), onde  $g_i$  e  $h_i$  são funções afins, ou seja  $h(w) = Aw - b$ , para alguma matriz  $A$  e vetor  $b$ , o gap de dualidade é igual a zero.*

Com base nos conceitos de dualidade, explicados anteriormente, pode-se apresentar o Teorema de Kuhn e Tucker.

**Teorema de Kuhn e Tucker:** *Dado um problema de otimização com domínio convexo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , na forma apresentada por (10), com  $f \in C^1$  convexa e  $g_i, h_i$  funções afins, a condição necessária e suficiente para que o ponto  $w^*$  seja ótimo, é a existência de  $\alpha^*, \beta^*$ , satisfazendo:*

$$\frac{\partial L(w^*, \alpha^*, \beta^*)}{\partial w} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial L(w^*, \alpha^*, \beta^*)}{\partial \beta} = 0, \quad (20)$$

$$\alpha_i^* g_i(w^*) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (21)$$

$$g_i(w^*) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (22)$$

$$\alpha_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (23)$$

A terceira condição desse teorema, dada por (21), é conhecida como condição de complementaridade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Conforme visto, o tratamento Lagrangeano para um problema de otimização convexo traz a alternativa da descrição dual. Esta estratégia tornou-se padrão na teoria de *Support Vector Machine*, pois possibilita a análise dos dados em um espaço de alta dimensionalidade. As características e vantagens de tal transformação são expostas na seqüência deste trabalho.

### 3.2 SUPPORT VECTOR CLASSIFICATION

A metodologia do *Support Vector Classification* (SVC) foi originalmente desenvolvida para a classificação binária, mas também pode ser empregada para a classificação em múltiplas classes. Em Chaves (2006) são descritas duas abordagens básicas que permitem esse procedimento. No entanto, a presente dissertação limita-se a apresentar apenas a classificação em duas classes.

Inicialmente, introduz-se o algoritmo do SVC com margens rígidas, o qual foi o primeiro modelo a ser desenvolvido e o de mais fácil compreensão. O mesmo trabalha apenas com dados linearmente separáveis, o que faz com que sua aplicação não se estenda a muitas situações do mundo real. Entretanto, sua descrição é crucial para o entendimento de outros modelos mais sofisticados (CRISTIANINI; SHAW-TAYLOR, 2006).

Em seguida, explica-se o modelo SVC com margens flexíveis, o qual permite a classificação de dados não linearmente separáveis e sua conseqüente aplicação a casos práticos.

#### 3.2.1 Algoritmo de classificação com margens rígidas

O funcionamento dos algoritmos *Support Vector Machine* está baseado na metodologia de aprendizado supervisionado. Tal metodologia faz com que um sistema aprenda uma função a partir de uma amostra de dados de treinamento. Nesse processo, são utilizadas duas etapas: a de treinamento e a de teste.

Na etapa de treinamento fornecem-se exemplos de entrada e saída  $\{x_i, y_i\}$ , para  $i = 1, \dots, l$ , cujas coordenadas são conhecidas. O objetivo principal desta fase é ajustar os parâmetros livres do sistema e então, determinar uma função que relacione os respectivos valores de  $x_i$  e  $y_i$ . Para isso, penalizam-se os erros de estimação e valorizam-se acertos, de forma que o sistema retenha informações relevantes e adquira conhecimento (CARVALHO, 2005).

Na fase de teste, utiliza-se um conjunto de dados sobre o qual o método será efetivamente aplicado. Como são conhecidos apenas os valores de entrada dessa amostra, o intuito é utilizar a função determinada no treinamento para gerar as saídas desejadas e encontrar os resultados.

Neste contexto, a partir de um conjunto de vetores de treinamento pertencentes a duas classes linearmente separáveis, a tarefa do SVC é determinar uma função que classifique corretamente os dados de testes. Em outras palavras, significa encontrar um hiperplano separador com boa capacidade de generalização.

Na figura 4, ilustra-se o referido conjunto de dados, na qual se identificam duas classes distintas denominadas classe -1 e classe +1, ou classe negativa e positiva respectivamente.

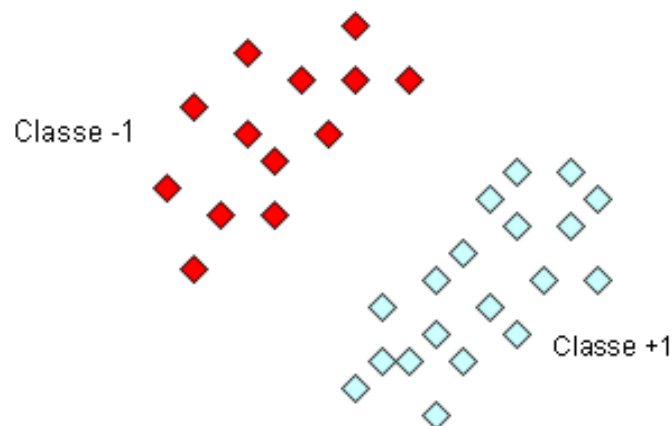


FIGURA 4 - CONJUNTO DE DADOS LINEARMENTE SEPARÁVEIS  
FONTE: ALES (2008)

Pela figura 5, observa-se que existem várias formas de separar a amostra de dados, sem erros. No entanto, há somente uma maneira na qual se maximiza a margem de classificação. Essa situação é verificada no canto inferior direito da figura 5. Segundo Lima (2004), define-se margem de classificação como a distância entre

o hiperplano separador e o vetor mais próximo de cada classe. Tal definição pode ser visualizada por meio da figura 6.

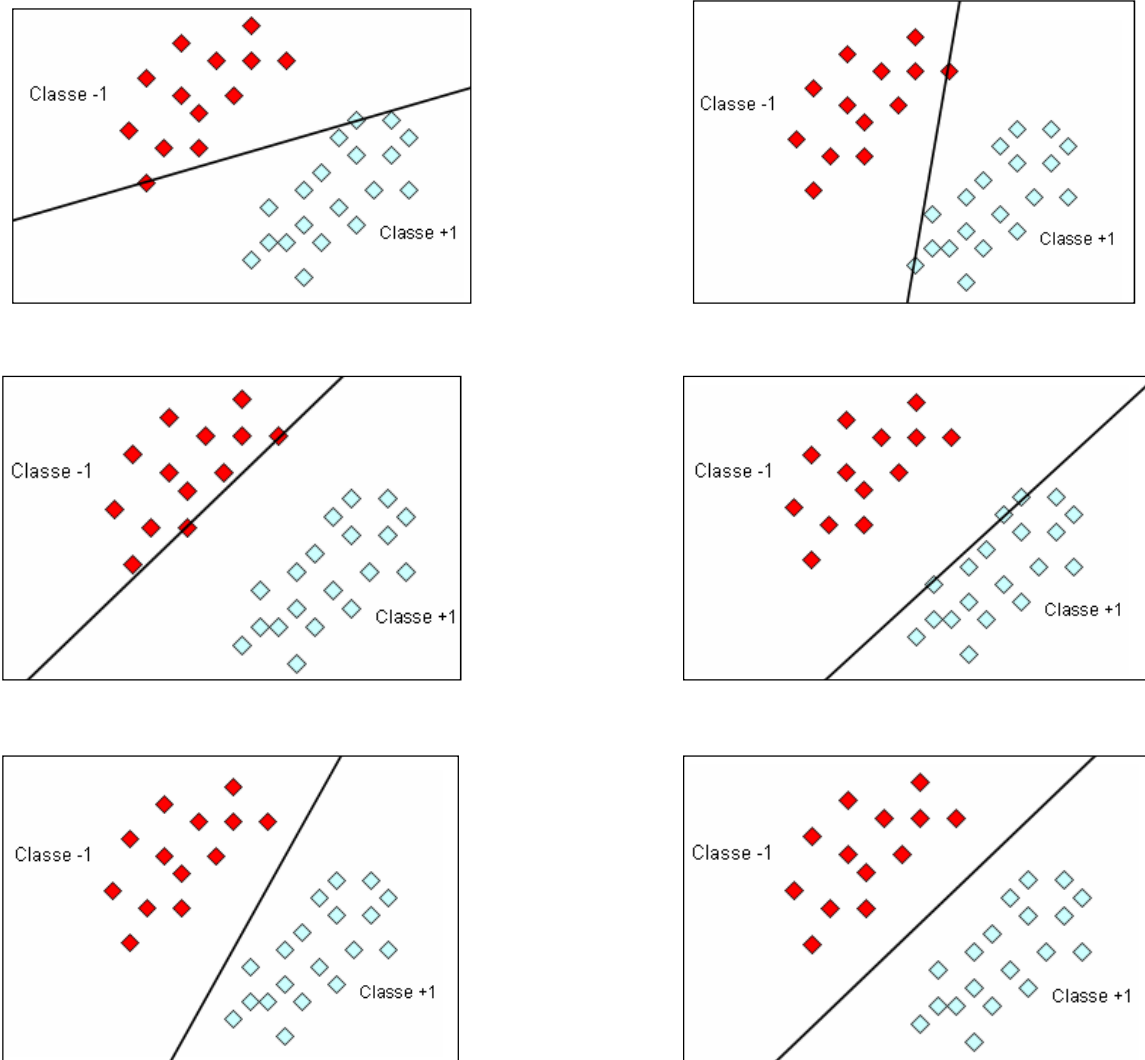


FIGURA 5 - POSSIBILIDADES DE SEPARAÇÃO POR MEIO DE DIFERENTES HIPERPLANOS  
FONTE: ALES (2008)

O hiperplano que maximiza a distância entre estas duas margens é conhecido como hiperplano ótimo. Resultados teóricos apresentados em Vapnik<sup>16</sup> (1995, citado por Carvalho, 2005) indicam que a maximização das margens entre os exemplos das classes -1 e +1, implica uma maior generalização do sistema de aprendizagem. Com isso, pode-se dizer que o objetivo do SVC é encontrar esse hiperplano particular, o qual está ilustrado em detalhes na figura 6.

<sup>16</sup> VAPNIK, V. **The nature of statistical learning theory**. Springer-Verlag, New York, 1995.

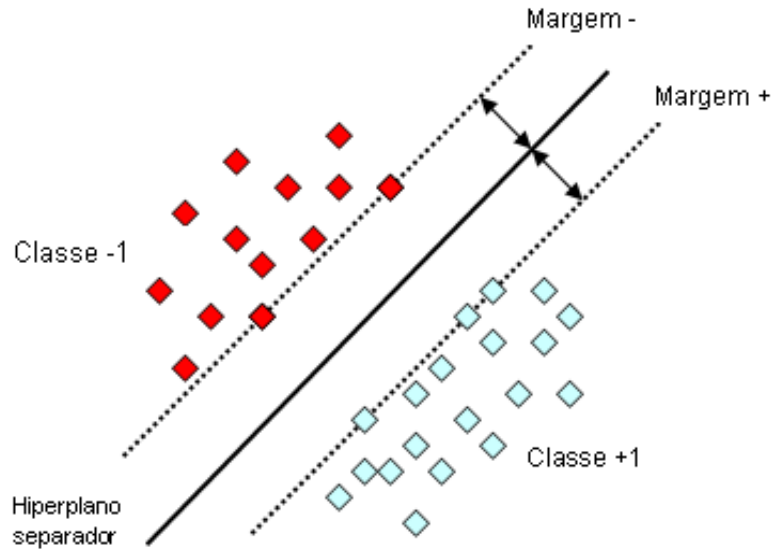


FIGURA 6 - SEPARAÇÃO ÓTIMA DE DOIS CONJUNTOS LINEARMENTE SEPARÁVEIS

FONTE: ALES (2008)

Antes de dar início à explicação do algoritmo do SVC, é preciso apresentar algumas notações que referenciam o conjunto de treinamento, entradas e saídas.

Seja o conjunto de treinamento:

$$S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_l, y_l)\} \subseteq (X \times Y)^l \quad (24)$$

Onde:  $l = \text{número de pontos de treinamento}$

Diz-se que  $X$  denomina o espaço de entrada<sup>17</sup> e  $Y$  denomina o domínio de saída. Basicamente, tem-se que o vetor  $x_i \in \mathbb{R}^n$  representa a quantificação das características do problema de classificação e  $y_i \in \{-1, +1\}$  corresponde a saída binária desejada, onde  $i = 1, \dots, l$ .

A classificação binária é realizada por meio da função real  $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , atribuindo-se o vetor de entrada  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  à classe positiva se  $f(x) \geq 0$ , e caso contrário, à classe negativa. Tem-se que a função de decisão é definida por:

<sup>17</sup> Espaço vetorial no qual se representa cada vetor de entrada  $x_i \in \mathbb{R}^n$ .

$$f(x) = \langle w \cdot x \rangle + b \quad (25)$$

Onde:  $w \in \mathbb{R}^n =$  vetor dos pesos;

$b \in \mathbb{R} =$  bias

A interpretação geométrica do problema consiste na divisão do espaço de entrada  $X$  em dois outros subespaços, realizada pelo hiperplano separador de equação  $\langle w \cdot x \rangle + b = 0$ , cuja dimensão é  $n - 1$  (LIMA, 2002).

Considerando que a margem negativa é definida por  $\langle w \cdot x \rangle + b = -1$  e a positiva é definida por  $\langle w \cdot x \rangle + b = +1$ , um vetor de treinamento está corretamente classificado quando satisfaz as equações:

$$\begin{aligned} \langle w \cdot x_i \rangle + b &\leq -1, \text{ se } y_i = -1 \\ \langle w \cdot x_i \rangle + b &\geq +1, \text{ se } y_i = +1. \end{aligned} \quad (26)$$

Reescrevendo estas duas restrições em uma única expressão, tem-se que:

$$y_i(\langle w \cdot x_i \rangle + b) \geq 1, \quad \forall i = 1 \dots l \quad (27)$$

Em Ales (2008) encontra-se a prova de que a distância entre as duas margens é dada por  $d = \frac{2}{\|w\|}$ . Logo, sabe-se que para encontrar o hiperplano ótimo, que classifica duas classes linearmente separáveis, é preciso maximizar a distância  $d$ , que equivale a minimizar  $\frac{1}{2} \|w\|^2$ . Desta forma, formula-se o problema de otimização primal como:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ &\text{sujeito a: } y_i(\langle w \cdot x_i \rangle + b) \geq 1, \quad \forall i = 1 \dots l \end{aligned} \quad (28)$$

Onde:  $w \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}$  são as incógnitas do problema.

Resolver o problema (28) pode se tornar uma tarefa difícil, em virtude das restrições de desigualdade. Como alternativa, Boser, Guyon e Vapnik (1992) ao desenvolverem o modelo do SVM, mostraram como representá-lo no espaço dual proporcionando eficiência e flexibilidade ao algoritmo.

O problema dual correspondente é obtido por meio dos conceitos da teoria de otimização, explicados no início deste capítulo. Para modelá-lo, é preciso inicialmente encontrar a função Lagrangeana referente ao modelo (28), a qual é dada por:

$$L(w, b, \alpha) = \frac{1}{2} \langle w \cdot w \rangle - \sum_{i=1}^l \alpha_i [y_i (\langle w \cdot x_i \rangle + b) - 1] \quad (29)$$

Onde:  $\alpha_i \geq 0$  são os multiplicadores de Lagrange.

A solução do problema de otimização em questão é determinada minimizando-se a função (29) em relação às variáveis primais e maximizando-a em relação aos multiplicadores de Lagrange, o que equivale a determinar o ponto de sela da função.

Para minimizar (29) em relação às variáveis primais, calculam-se as derivadas parciais primeiras dessa função em relação à  $w$  e  $b$ , e em seguida igualam-nas à zero. Assim, tem-se que:

$$\frac{\partial L(w, b, \alpha)}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i x_i \quad (30)$$

$$\frac{\partial L(w, b, \alpha)}{\partial b} = \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i \quad (31)$$

Da onde se obtém respectivamente:

$$w = \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i x_i \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^l y_i \alpha_i = 0 \quad (33)$$

Substituindo as expressões (32) e (33) na função Lagrangeana (29), chega-se a:

$$L(w, b, \alpha) = \sum_{i=1}^l \alpha_i - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle x_i \cdot x_j \rangle \quad (34)$$

Desse modo, considerando um conjunto de treinamento linearmente separável  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_l, y_l)\}$ , resolver o modelo dual consiste em encontrar os multiplicadores de Lagrange  $\alpha_i$ , que:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^l \alpha_i - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle x_i \cdot x_j \rangle \\ & \text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i = 0 \\ & \quad \quad \quad \alpha_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (35)$$

A partir da solução de (35), calcula-se o vetor de pesos ótimo  $w^*$  utilizando-se a relação (32).

Apesar do valor de  $b$  não aparecer no problema dual (30), o bias pode ser encontrado fazendo uso de (GUNN, 1998):

$$b^* = -\frac{1}{2} \langle w^*, (x_r + x_s) \rangle \quad (36)$$

Onde:  $x_r$  e  $x_s$  são quaisquer vetores suporte de cada classe, satisfazendo  $\alpha_r, \alpha_s > 0$  e  $y_r = -1$ ,  $y_s = 1$ .

Visto que o teorema de Kuhn-Tucker se aplica à este problema de otimização, tem-se que as condições de complementaridade de KKT, representadas



por (21), fornecem informações muito úteis quanto à estrutura de sua solução (CRISTIANINI; SHAW-TAYLOR, 2006).

Estas condições estabelecem que as soluções ótimas  $\alpha^*$ ,  $(w^*, b^*)$  devem satisfazer:

$$\alpha_i^* [y_i (\langle w^* \cdot x_i \rangle + b^*) - 1] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, l \quad (37)$$

Logo, a relação (37) implica que somente os dados de entrada com margem igual a 1, os quais atendem à expressão  $y_i (\langle w \cdot x_i \rangle + b) = 1$ , têm seu respectivo multiplicador de Lagrange  $\alpha_i \neq 0$ . Todos os demais têm parâmetro  $\alpha_i = 0$ .

Como somente estes pontos (com  $\alpha_i \neq 0$ ) estão envolvidos no cálculo de  $w^*$ , eles são chamados de vetores suporte. Segundo Lima (2002), estes vetores condensam todas as informações, contidas no conjunto de treinamento, necessárias para classificar os dados de teste.

Na figura abaixo, destacam-se tais vetores os quais se encontram localizados sobre as margens de separação.

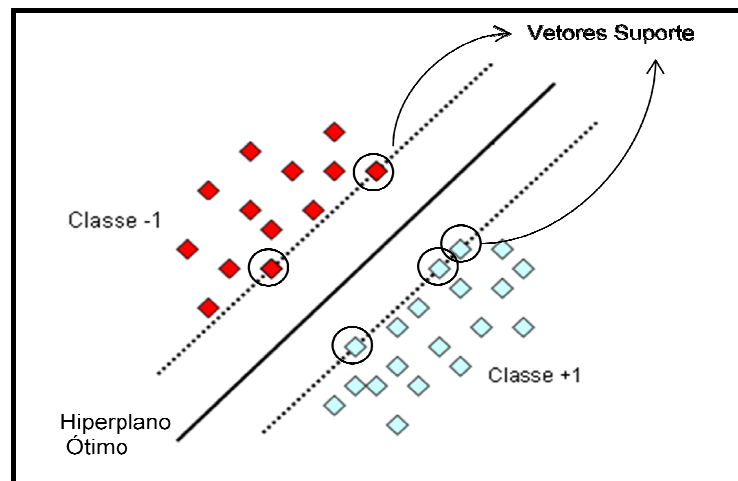


FIGURA 7 - VETORES SUPORTE

FONTE: A autora (2009)

Para finalizar, diz-se que o hiperplano ótimo pode ser expresso na sua representação dual, em termos de:

$$f(x, \alpha^*, b^*) = \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i^* (x_i \cdot x) + b^* \quad (38)$$

### 3.2.2 Algoritmo de classificação com margens flexíveis

Em casos em que o conjunto de treinamento não é linearmente separável, os quais caracterizam a maioria dos exemplos reais, encontram-se pontos que violam a restrição (27). Nestas condições, o problema (28) poderá separar vetores incorretamente, desviando seu valor na função de decisão (ALES, 2008).

Embora nestas situações não seja possível construir um hiperplano separador sem erros de classificação, é possível encontrar aquele que minimiza a probabilidade de erro junto às amostras de treinamento.

Para tratar problemas desta classe, introduz-se variáveis de folga  $\xi_i \geq 0$  associadas à cada vetor de treinamento, que meçam os desvios encontrados em relação as condições ideais de separação. Logo, se um vetor está separado corretamente tem-se que  $\xi_i = 0$ .

Constata-se que a violação da equação (27) pode ocorrer de duas maneiras distintas. A primeira possibilidade consiste no ponto  $x_i$  estar localizado dentro da região de separação e no lado correto da classificação. Neste caso considera-se que a variável de folga vale  $0 < \xi_i \leq 1$ . Na segunda possibilidade, o ponto  $x_i$  localiza-se no lado incorreto da superfície de decisão, podendo estar dentro ou fora da região de separação. Para este caso, a variável de folga correspondente terá valor  $\xi_i > 1$ . A figura 8 ilustra estas duas condições.

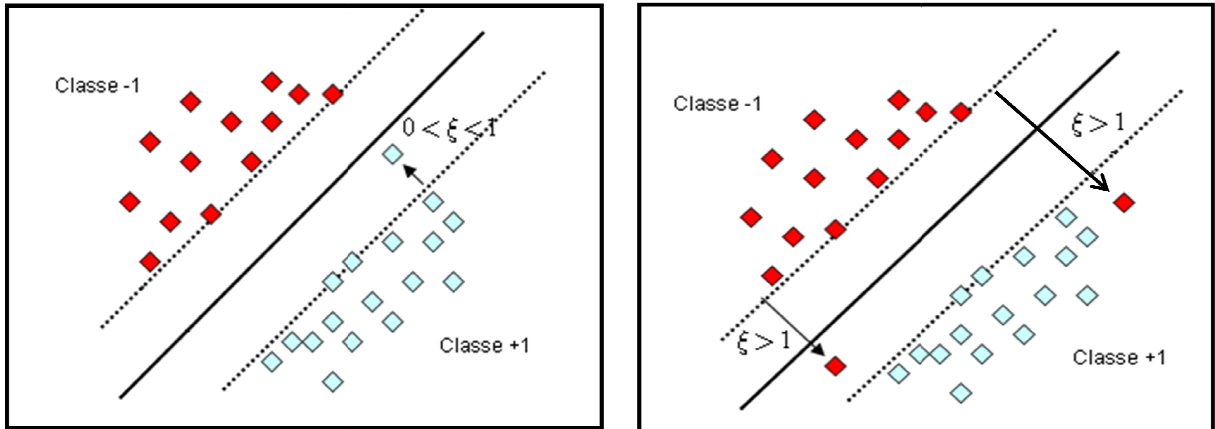


FIGURA 8 - POSSIBILIDADES DE VIOLAÇÃO DAS MARGENS DE CLASSIFICAÇÃO

FONTE: A autora (2009)

Ao inserir variáveis de folga, diz-se que um vetor de treinamento está corretamente classificado quando a seguinte restrição é satisfeita:

$$y_i(\langle w \cdot x_i \rangle + b) \geq 1 - \xi_i, \quad \forall i = 1 \dots l \quad (39)$$

Verifica-se que para  $\xi_i = 0$ , a equação (39) reduz-se a (27).

Neste contexto, o problema de otimização primal que determina o hiperplano ótimo de margens flexíveis é dado por:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^l \xi_i \\ \text{sujeito a:} \quad & y_i(\langle w \cdot x_i \rangle + b) \geq 1 - \xi_i \\ & \xi_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots l \end{aligned} \quad (40)$$

Onde:  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$  são as incógnitas do problema e  $C$  é denominada constante de regularização, pois pondera os termos da função de minimização.

Analisando a função objetivo do modelo (40), o primeiro termo representado por  $\frac{1}{2} \|w\|^2$  tem a finalidade de maximizar a margem do hiperplano, enquanto que o segundo termo  $C \sum_{i=1}^l \xi_i$  minimiza os valores das variáveis de folga  $\xi_i$ . Logo, valores grandes de  $C$  atribuem maior peso ao número de erros e menor peso à margem do

hiperplano. Nessa condição, poucos erros são permitidos e gera-se uma menor margem de classificação (CHAVES, 2006). Ao se utilizarem valores pequenos de C, a situação inversa ocorre.

Em resumo, a constante de regularização caracteriza maior ou menor importância às variáveis de folga, determinando o quão sensível o modelo será à presença de pontos mal classificados (ALES, 2008). Ressalta-se que seu valor deve ser positivo e especificado a priori.

De maneira similar ao algoritmo de classificação de margens rígidas, o modelo (40) também pode ser transformado em seu correspondente dual. Novamente, depara-se com um problema de mais fácil resolução.

Utilizando procedimentos análogos aos descritos na subseção anterior, encontra-se que a versão dual de (40) é dada por:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} \sum_{i=1}^l \alpha_i - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle x_i \cdot x_j \rangle \\
 & \text{sujeito a:} \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i = 0 \\
 & 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad \forall i = 1, \dots, l
 \end{aligned} \tag{41}$$

Onde:  $\alpha_i$  são os multiplicadores de Lagrange.

Observa-se que se a constante C for suficientemente grande e o conjunto de treinamento for linearmente separável, o problema (41) reduz-se a (35).

As condições de KKT relacionadas ao problema (41) são definidas por:

$$\alpha_i [y_i (\langle w \cdot x_i \rangle + b) - 1 + \xi_i] = 0, \quad \forall i = 1 \dots l \tag{42}$$

$$\xi_i (\alpha_i - C) = 0, \quad \forall i = 1 \dots l \tag{43}$$

Igualmente ao caso separável, os pontos de entrada para os quais  $\alpha_i > 0$  recebem o nome de vetores suporte. No entanto, diferenciam-se entre esses, aqueles cujo  $0 < \alpha_i < C$  daqueles com  $\alpha_i = C$ .

Para a primeira categoria, chamada de vetores suportes não limitados, obtém-se pela condição (43) que  $\xi_i = 0$ , e segue de (42) que estes estão situados sobre a margem de sua classe.

Para o caso em que  $\alpha_i = C$ , denominado vetores suportes limitados, é possível por (43) que  $\xi_i > 1$  ou que  $0 < \xi_i \leq 1$ . Conforme visto, a localização desse vetor dada por (42) dependerá do valor da variável de folga a qual ele está associado, podendo o mesmo estar classificado incorreta ou corretamente. Devido a isso, Lima (2002) refere-se a todo este conjunto de vetores como erros de classificação.

Com exceção dos vetores suporte, sejam eles limitados ou não, tem-se que os demais pontos (com  $\alpha_i = 0$ ) não influenciam na construção do hiperplano separador ótimo. As variáveis  $w^*$ ,  $b^*$  e a superfície de decisão são determinados como na subseção anterior.

Até o presente momento, considerou-se em ambos os modelos (margens rígidas e flexíveis) que a separação dos dados no espaço de entrada é realizada por funções lineares. No entanto, essa consideração pode ser desvantajosa quando se resolvem problemas cujos pontos de treinamento não são linearmente separáveis.

Um das grandes vantagens do algoritmo SVM, permitida pela descrição dual, é a possibilidade de se projetar os dados de entrada para um espaço de dimensão maior, onde a separação linear torna-se possível.

Para isso, realiza-se um mapeamento não linear dos dados de entrada  $X$ , para um espaço de alta dimensionalidade  $F$ , chamado de espaço de características. Uma técnica comum para realizar este procedimento é mudar a representação dos dados por meio de:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)) \quad (44)$$

Onde:  $F = \{\phi(x) | x \in X\}$

A figura 9 mostra um exemplo dessa transformação, onde os dados não podem ser separados linearmente no espaço de entrada, mas podem ser no espaço característico.

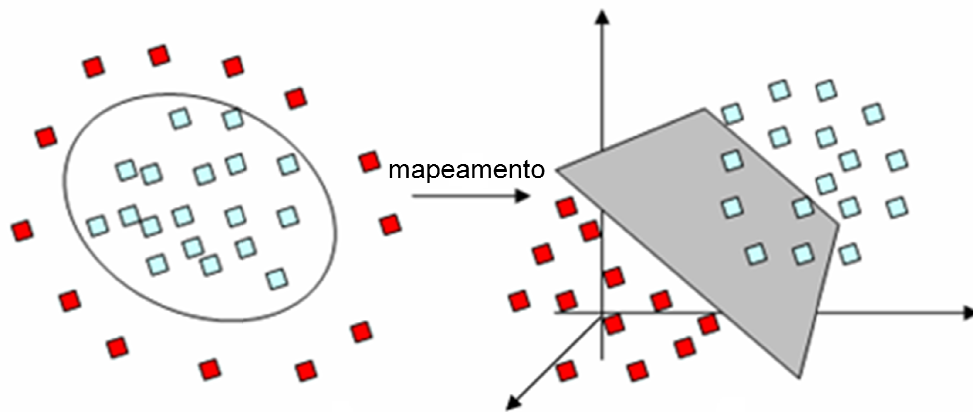


FIGURA 9 - MAPEAMENTO NÃO LINEAR DO ESPAÇO DE ENTRADA PARA O ESPAÇO DE CARACTERÍSTICAS

FONTE: Carvalho (2005)

Na prática, a modificação necessária para implementar o referido mapeamento é mínima. Basta substituir na função objetivo do modelo (41) as entradas  $x$  por  $\phi(x)$ , onde  $\phi$  representa a função  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ , com  $N \gg n$  (CHAVES, 2006).

Contudo, calcular o produto interno  $\langle \phi(x_i) \cdot \phi(x_j) \rangle$  diretamente no espaço de características pode se tornar computacionalmente inviável, devido à sua alta dimensionalidade (LIMA, 2002).

A fim de se evitar o custo computacional, o mapeamento pode ser realizado implicitamente pelas chamadas funções kernel, as quais dependem apenas das variáveis de entrada (CHAVES, 2006).

**Definição de kernel:** *Um kernel é uma função  $K$ , tal que para todo  $x, z \in X$  tem-se*

$$K(x, z) = \langle \phi(x) \cdot \phi(z) \rangle \quad (45)$$

onde  $\phi$  é um mapeamento de  $X$  para (um produto interno) espaço característico  $F$ .

Para que uma função  $K(x, z)$  seja denominada kernel esta precisa obedecer à algumas propriedades (CRISTIANINI; SHAWE-TAYLOR, 2006). Necessariamente tem-se que esta função deve ser simétrica:

$$K(x, z) = \langle \phi(x) \cdot \phi(z) \rangle = \langle \phi(z) \cdot \phi(x) \rangle = K(z, x) \quad (46)$$

E satisfazer a desigualdade de Cauchy- Schwarz:

$$\begin{aligned} K(x, z)^2 &= \langle \phi(x) \cdot \phi(z) \rangle^2 \leq \|\phi(x)\|^2 \|\phi(z)\|^2 \\ &= \langle \phi(x) \cdot \phi(x) \rangle \langle \phi(z) \cdot \phi(z) \rangle = K(x, x)K(z, z) \end{aligned} \quad (47)$$

Todavia, apesar de necessárias, as condições (46) e (47) não são suficientes para assegurar a existência do espaço característico. Para que esse exista, o Teorema de Mercer deve ser satisfeito.

**Teorema de Mercer:** *Seja  $X$  um conjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  e  $K$  uma função contínua e simétrica. Existe um mapeamento  $\phi$  e uma expansão da forma*

$$K(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x) \phi_i(z) \quad (48)$$

*associados à autovalores  $\lambda_i \geq 0$ , se e somente se, para todo  $f(x)$  no qual*

$$\int_X f(x)^2 dx < \infty \quad (49)$$

*implica que:*

$$\int_X \int_X K(x, z) f(x) f(z) dx dz \geq 0 \quad (50)$$

Logo, a partir das condições de Mercer, é possível estabelecer a seguinte proposição (CRISTIANINI; SHAW-TAYLOR, 2006):

**Proposição:** *Seja  $X$  um espaço de entrada finito com  $K(x, z)$  uma função simétrica em  $X$ . Então  $K(x, z)$  é uma função kernel se e somente se, a matriz*

$$K = \left( K(x_i, x_j) \right)_{i,j=1}^n \quad (51)$$

*é semi definida positiva, ou seja, seus autovalores são não negativos.*

Dentre as possibilidades existentes, destacam-se as funções kernel mais utilizadas no algoritmo SVC como sendo:

- Kernel Linear

$$K(x_i, x_j) = \langle x_i, x_j \rangle \quad (52)$$

- Kernel Polinomial Homogêneo:

$$K(x_i, x_j) = (\langle x_i, x_j \rangle)^p \quad (53)$$

*Onde:  $p$  é o grau do polinômio*

- Kernel Polinomial Não Homogêneo:

$$K(x_i, x_j) = (\langle x_i, x_j \rangle + k)^p \quad (54)$$

*Onde:  $p$  é o grau do polinômio e  $k$  é uma constante.*



- Kernel Sigmoidal:

$$K(x_i, x_j) = \tanh(\langle \kappa x_i, x_j \rangle + k) \quad (55)$$

Onde:  $\kappa$  é um coeficiente e  $k$  é uma constante negativa.

- Kernel Gaussiano (ou Função Base Radial)

$$K(x_i, x_j) = e^{-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}} \quad (56)$$

Onde:  $\sigma$  é um parâmetro.

Assim, com o conceito de mapeamento implícito introduzido, reescreve-se o problema dual como:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^l \alpha_i - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i y_j \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) \\ & \text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i = 0 \\ & \quad \quad \quad 0 \leq \alpha_i \leq C, \forall i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (57)$$

Onde:  $\alpha_i$  são os multiplicadores de Lagrange.

As condições de KKT para este modelo são as mesmas de (41), assim como a nomenclatura dos vetores suporte.

Entretanto, o vetor dos pesos já não pode ser mais descrito explicitamente, pois seu cálculo envolve a função  $\phi(x)$  que nem sempre é conhecida.

$$w^* = \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i^* \phi(x_i) \quad (58)$$

De acordo com Gunn (1998), o bias é encontrado pela expressão:

$$b^* = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i [K(x_i, x_r) + K(x_i, x_s)] \quad (59)$$

E o hiperplano separador ótimo, no espaço característico, é dado por:

$$f(x) = \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i^* K(x_i, x) + b^* \quad (60)$$

Onde:  $K(x_i, x)$  é a função kernel escolhida a priori.

Ressalta-se que os resultados obtidos pelo SVC variam significativamente conforme a escolha da constante de regularização  $C$ , do tipo da função kernel e de seus parâmetros. Dependendo da seleção de todas estas variáveis obtém-se uma melhor ou pior classificação, assim como é possível deparar-se com o problema do *overfitting*.

O *overfitting* consiste no treino excessivo do algoritmo, o qual se especializa demasiadamente nos dados de treinamento e perde sua capacidade de generalização. Em decorrência de uma generalização pobre, o algoritmo encontra dificuldades para prever as saídas dos dados que não pertencem ao grupo de treinamento, ou seja, dos dados de teste.

### 3.2 SUPPORT VECTOR REGRESSION

A extensão do SVC para o tratamento de problemas de regressão se dá pela introdução de uma função de perda, denominada do inglês *loss function*.

Em linhas gerais, o *Support Vector Regression* (SVR) utiliza os mesmos princípios do algoritmo de classificação, com exceção de alguns detalhes (PARRELLA, 2007).

Uma das principais diferenças é que o SVR, ao contrário do SVC, propõe determinar um hiperplano ótimo do qual as amostras de treinamento estejam as mais próximas possíveis, não importando em qual lado da superfície os pontos se localizem (LIMA, 2004).

Todavia, apesar dos propósitos de otimização serem opostos, ambos os modelos visam estabelecer uma função com máxima capacidade de generalização (LIMA, 2004).

Novamente, considera-se um conjunto de treinamento descrito por (24) no qual  $x_i \in \mathbb{R}^n$  é o vetor do espaço de entrada  $X$ . Porém, como se trata de um problema de regressão, as saídas desejadas podem assumir qualquer valor real, isto é,  $y_i \in \mathbb{R}$  para todo  $i = 1, \dots, l$ .

O objetivo do SVR é encontrar uma função  $f(x)$  que apresente no máximo um desvio  $\varepsilon$  em relação aos valores alvo  $y_i$ . Em outras palavras, procura-se uma função com uma margem de erros caracterizada pelo intervalo  $[y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon]$ . Desta forma, desvios são permitidos desde que não ultrapassem a margem especificada.

Ao mesmo tempo, deseja-se que a função seja a mais *flat*<sup>18</sup> possível. (SMOLA; SCHÖLKOPF, 2004).

Assumindo funções na forma (25), buscar a característica *flatness* significa determinar valores pequenos para o vetor dos pesos,  $w$ , o que corresponde a minimizar a medida  $\frac{1}{2} \|w\|^2$ .

Visto que a função  $f(x)$  deve satisfazer as restrições de erro  $|f(x_i) - y_i| \leq \varepsilon$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ , modela-se o problema de otimização em sua forma primal como:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ & \text{sujeito a:} \quad y_i - \langle w \cdot x_i \rangle - b \leq \varepsilon \\ & \quad \quad \quad \langle w \cdot x_i \rangle + b - y_i \leq \varepsilon, \quad \forall i = 1 \dots l \end{aligned} \tag{61}$$

Onde:  $w \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}$  são as incógnitas do problema.

---

<sup>18</sup> Optou-se por não traduzir o termo em inglês *flat function*, afim de que o sentido matemático da expressão não seja perdido. No entanto, entende-se por uma *flat function*, a função mais paralela ao domínio possível.

O problema anterior supõe a existência de uma função  $f(x)$  que aproxima todos os pares  $(x_i, y_i)$  com uma precisão  $\varepsilon$  especificada a priori.

No entanto, nem sempre é possível garantir a viabilidade do problema (61), visto que existem pontos que violam suas restrições. Por tal razão, estuda-se uma função de perda, que introduz variáveis de folgas não negativas  $\xi_i, \xi_i^*$ , cuja finalidade é penalizar dados que se situem fora da margem  $|f(x_i) - y_i| \leq \varepsilon$ . Considerando esta função é possível trabalhar com um número limitado de erros, que em outras condições tornariam o problema de otimização inviável (DIAS, 2007).

A função de perda, denominada  $\varepsilon$ - *InSensitive*, é descrita por:

$$\begin{aligned} |\xi|_{\varepsilon} &= 0, & \text{se } |\xi| &\leq \varepsilon \\ |\xi|_{\varepsilon} &= |\xi| - \varepsilon & \text{caso contrário} \end{aligned} \quad (62)$$

A seguir representa-se graficamente a situação proposta por (62), na qual apenas os pontos localizados fora da região sombreada contribuem para o valor custo da função.

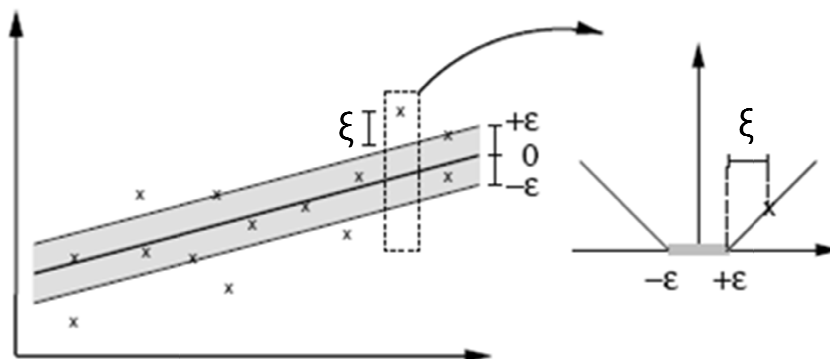


FIGURA 10 - FUNÇÃO DE PERDA  $\varepsilon$ -INSENSITIVE

FONTE: Smola e Schölkopf (2004)

As variáveis de folga  $\xi_i, \xi_i^*$  estão associadas respectivamente aos dados localizados abaixo da margem inferior e acima da margem superior. Assim, pode-se reescrever o problema primal como sendo:

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} \quad \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^l (\xi_i + \xi_i^*) \\
& \text{sujeito a:} \quad y_i - \langle w \cdot x_i \rangle - b \leq \varepsilon + \xi_i \\
& \quad \quad \quad \langle w \cdot x_i \rangle + b - y_i \leq \varepsilon + \xi_i^* \\
& \quad \quad \quad \xi_i, \xi_i^* \geq 0, \quad \forall i = 1 \dots l
\end{aligned} \tag{63}$$

Onde:  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$  são as incógnitas do problema e  $C$  é denominada constante de regularização, pois pondera os termos da função de minimização.

Similarmente ao SVC, verifica-se no modelo (63) a presença da constante de regularização  $C$ . Assim como no algoritmo de classificação, este parâmetro mede o grau de importância dado às variáveis de folga, caracterizando a quantidade de erros que serão permitidos (desvios acima de  $\varepsilon$ ).

Dando continuidade às analogias entre o SVC e o SVR, tem-se que o problema (63) também é mais facilmente resolvido por meio de sua formulação dual. Dessa forma, utilizando a teoria Lagrangeana obtém-se o seguinte modelo de otimização:

$$\begin{aligned}
& \text{maximize} \quad -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*)(\alpha_j - \alpha_j^*) \langle x_i \cdot x_j \rangle - \varepsilon \sum_{i=1}^l (\alpha_i + \alpha_i^*) \\
& \quad \quad \quad + \sum_{i=1}^l y_i (\alpha_i - \alpha_i^*) \\
& \text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 \\
& \quad \quad \quad \alpha_i, \alpha_i^* \in [0, C], \quad , \quad \forall i = 1 \dots l
\end{aligned} \tag{64}$$

Onde:  $\alpha_i, \alpha_i^*$  são os multiplicadores de Lagrange.

Para este caso, as condições de complementaridade de Karush-Kuhn-Tucker são descritas por:

$$\alpha_i(\varepsilon + \xi_i - y_i + \langle w \cdot x_i \rangle + b) = 0, \quad \forall i = 1 \dots l \quad (65)$$

$$\alpha_i^*(\varepsilon + \xi_i^* + y_i - \langle w \cdot x_i \rangle - b) = 0, \quad \forall i = 1 \dots l \quad (66)$$

$$(C - \alpha_i)\xi = 0_i, \quad \forall i = 1 \dots l \quad (67)$$

$$(C - \alpha_i^*)\xi_i^* = 0, \quad \forall i = 1 \dots l \quad (68)$$

$$\alpha_i \alpha_i^* = 0, \quad \forall i = 1 \dots l \quad (69)$$

$$\xi_i \xi_i^* = 0, \quad \forall i = 1 \dots l \quad (70)$$

Analisando as condições de KKT, novamente extraem-se informações importantes quanto à solução do modelo.

Pela equação (69), nota-se que nunca existirá um conjunto de variáveis duais  $\alpha_i$  e  $\alpha_i^*$ , em que ambos os valores sejam não nulos.

Das relações (65) e (66) observa-se que apenas os pontos de treinamento em que  $|f(x_i) - y_i| \geq \varepsilon$  estão associados a multiplicadores de Lagrange diferente de zero. Tais pontos estão localizados sobre as margens  $+\varepsilon$  e  $-\varepsilon$  ou fora da região delimitada por essas. Estes dados são os únicos a serem utilizados no cálculo do vetor dos pesos  $w$  e por isso são chamados de vetores suporte. De acordo com Dias (2007), consegue-se uma representação esparsa de  $w$ , visto que não são necessários todos os dados de treinamento para determiná-lo.

Assim como no algoritmo de classificação de margens flexíveis, os vetores suporte podem ser limitados ou não. Pelas condições (67) e (68), aqueles que são limitados, cujo  $\alpha_i=C$  ou  $\alpha_i^*=C$ , têm respectivamente variáveis de folga  $\xi_i$  ou  $\xi_i^*$  não nulas. Conseqüentemente são pontos localizados fora das margens e correspondem a erros do modelo.

Conforme Gunn (1998), o vetor dos pesos é calculado pela fórmula:

$$w^* = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) x_i \quad (71)$$

E a função de decisão é dada por:

$$f(x) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) \langle x_i \cdot x \rangle + b \quad (72)$$

Onde o bias  $b^*$  pode ser determinado por meio da relação (36).

Até o presente momento, foram consideradas somente regressões lineares no espaço de entrada. Sabe-se que representar  $f(x)$  por uma função linear pode ser uma aproximação conveniente e necessária em alguns casos, já que estas são mais fáceis de interpretar. Entretanto, algumas aplicações práticas exigem um espaço de hipóteses mais expressivo do que apenas relações lineares (DIAS, 2007).

Em virtude disso, a formulação dual do problema SVR fornece como alternativa trabalhar em um espaço de alta dimensionalidade denominado  $F$ . Assim, pode-se realizar um mapeamento não linear dos dados de entrada para um espaço de dimensão maior, onde a regressão linear torna-se possível.

Para isso, outra vez utiliza-se a abordagem baseada em funções kernel. Substituindo  $\langle x_i, x_j \rangle$  por  $K(x_i, x_j)$  no problema (64), todas as considerações feitas anteriormente continuam válidas, com a diferença de que a regressão linear é realizada no espaço de características. Com as novas alterações, o modelo de otimização torna-se:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*)(\alpha_j - \alpha_j^*) K \langle x_i \cdot x_j \rangle - \varepsilon \sum_{i=1}^l (\alpha_i + \alpha_i^*) \\ & + \sum_{i=1}^l y_i (\alpha_i - \alpha_i^*) \end{aligned} \quad (73)$$

*sujeito a:*  $\sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0$

$\alpha_i, \alpha_i^* \in [0, C], \quad \forall i = 1 \dots l$

Onde:  $\alpha_i, \alpha_i^*$  são os multiplicadores de Lagrange.

O vetor dos pesos passa a não ser mais descrito explicitamente, pois envolve a função  $\phi(x)$  em seu cálculo:

$$w^* = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) \phi(x_i) \quad (74)$$

No entanto a função de decisão é descrita por:

$$f(x) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x_i \cdot x) + b \quad (75)$$

Onde o bias  $b^*$  é determinado por meio da relação:

$$b^* = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) (K(x_i, x_r) + K(x_i, x_s)) \quad (76)$$

Segundo Dias (2007), um dos pontos marcantes do SVR é não precisar conhecer a função  $\phi(x)$  explicitamente, pois por meio da formulação dual consegue-se uma função de decisão expressa em termos do produto interno entre os pontos de treinamento e os pontos de testes.

Igualmente à classificação, as funções kernel devem necessariamente satisfazer as propriedades (46) e (47), assim como o teorema de Mercer. Novamente, tem-se que as funções mais utilizadas no algoritmo do SVR são: a função kernel linear, a polinomial homogênea, a polinomial não homogênea, a sigmoideal e a gaussiana, descritas respectivamente por (52) à (56).

Para finalizar, ressalta-se que os resultados obtidos pelo SVR também dependem significativamente dos valores da constante de regularização  $C$ , margem  $\epsilon$ , do tipo de função kernel e seus respectivos parâmetros. Desta maneira, verifica-se que conforme é realizada a seleção dessas variáveis, obtêm-se funções que melhor ou pior se ajustam aos dados do problema analisado.

Na seqüência, mostram-se resultados de aplicações do SVR que ilustram os conceitos anteriormente explicados. Nos exemplos a seguir, foram utilizados os mesmos dados de treinamento, a mesma constante de regularização  $C=10$  e a



mesma margem  $\epsilon=20$ , variando-se apenas as funções kernel. Nas figuras 11 a 15, os pontos azuis correspondem aos vetores suportes e os vermelhos aos erros.

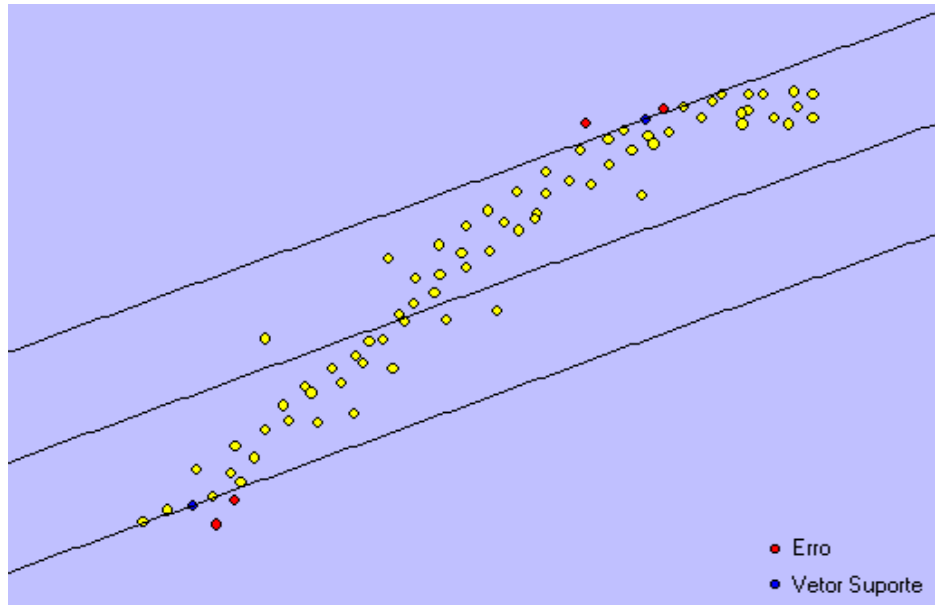


FIGURA 11 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL LINEAR

FONTE: A autora (2009)

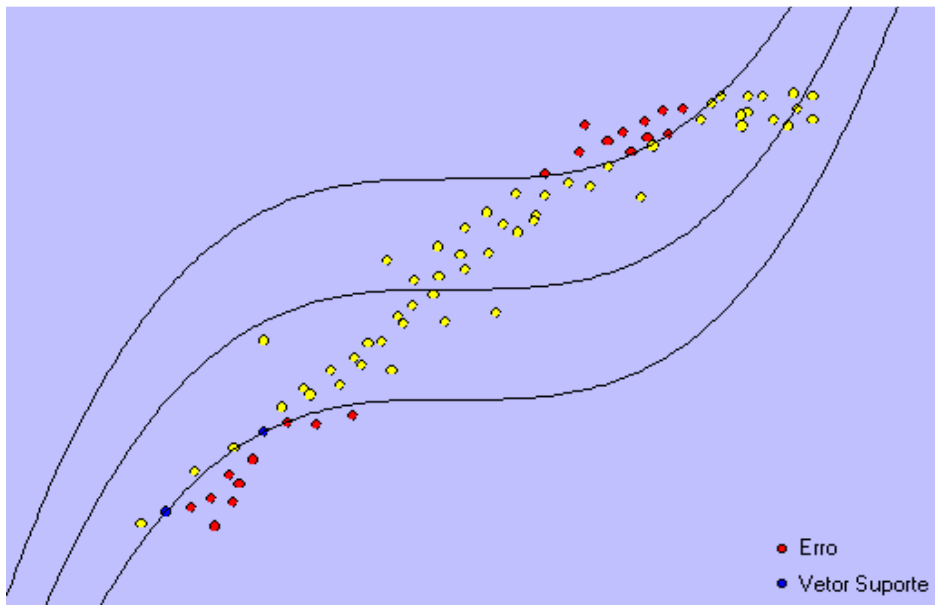


FIGURA 12 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL POLINOMIAL HOMOGÊNIO E PARÂMETRO  $p=3$

FONTE: A autora (2009)

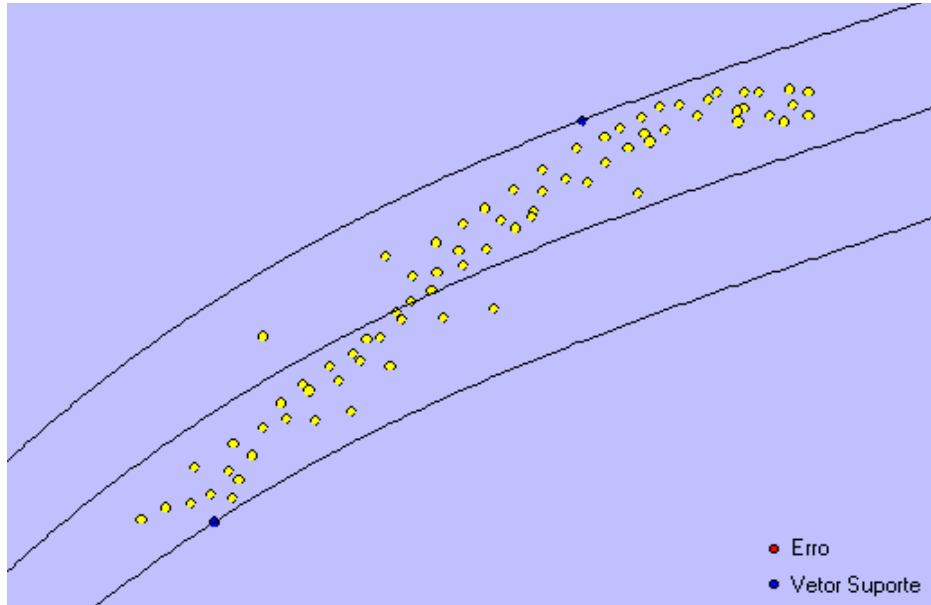


FIGURA 13 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL POLINOMIAL NÃO HOMOGÊNIO E PARÂMETROS  $p=4$  E  $k=2$

FONTE: A autora (2009)

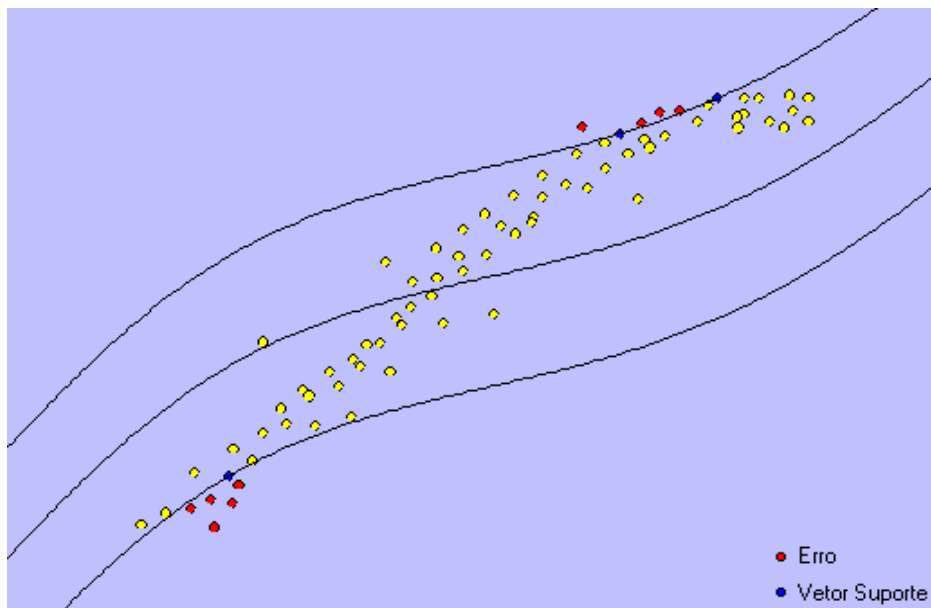


FIGURA 14 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL SIGMOIDAL E PARÂMETROS  $\kappa=2$  E  $k=-1,7$

FONTE: A autora (2009)

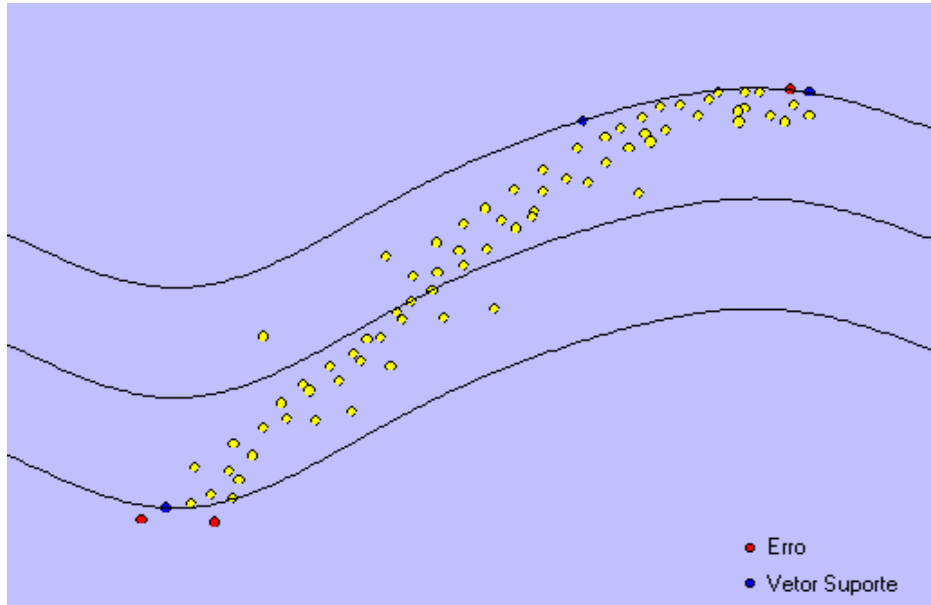


FIGURA 15 - RESULTADO DO SVR COM KERNEL GAUSSIANO E PARÂMETRO  $\sigma=0,4$   
FONTE: A autora (2009)

Analisando as figuras 11 a 15, conclui-se que dentre os parâmetros avaliados, aqueles que determinam a função que melhor rege o comportamento dos dados são  $C=10$ ,  $\epsilon=20$  e kernel polinomial não homogêneo com parâmetros  $p=4$  e  $k=2$ .

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O *Support Vector Machine* tornou-se objeto de intenso estudo devido à sua eficácia em resolver problemas relacionados à classificação, regressão e previsões de séries temporais. Em virtude dos bons resultados apresentados, encontram-se pesquisas vinculadas a essa técnica nos mais diversos campos do conhecimento, como por exemplo: nas áreas de biometria e segurança, medicina, indústria e no mercado financeiro.

Baseado neste contexto, o objetivo deste capítulo é fazer uma breve revisão bibliográfica das possíveis aplicações do SVM.

### 4.1 BIOMETRIA E SEGURANÇA

Com o crescimento da população mundial e com os avanços da tecnologia, aumentou-se também a criminalidade. Em face da necessidade de proteção, cada vez mais se investe em sistemas de segurança, principalmente naqueles voltados à identificação de pessoas.

Yao *et al.* (2001) apresentaram um algoritmo para classificação de impressões digitais baseado nas técnicas do SVC e redes neurais artificiais. Para realizar o estudo foi utilizado o banco de dados NIST-4 que contém 4000 imagens. As impressões digitais foram representadas por 192 atributos e divididas em cinco categorias: *Whorl*, *Right Loop*, *Left Loop*, *Plain Arch* e *Tented Arch*. Por se tratar de classificação em múltiplas classes, utilizaram-se juntamente com o algoritmo SVC as seguintes abordagens para solução do problema: um contra todos, todos os pares e códigos de correção de erros (ECC). Destaca-se que uma das dificuldades encontradas na classificação de digitais trata de casos ambíguos, ou seja, impressões digitais que podem ser designadas a duas classes simultaneamente. Tendo em vista este tipo de ocorrência, diz-se que o melhor desempenho de classificação foi obtido pelo SVC abordado pela técnica ECC. Esse método foi capaz de tolerar a presença de exemplos duvidosos no conjunto de treinamento e

identificar imagens de teste difíceis, o que melhorou significativamente a acurácia do sistema.

Özgündüz, Sentürk e Karşligil (2005) propuseram um sistema *off-line* de reconhecimento e verificação de assinaturas baseado no SVC. O sistema é composto por algumas etapas, dentre as quais se destacam o pré-processamento e a extração das características. No pré-processamento, escaneia-se a assinatura, elimina-se seu fundo, reduz-se os ruídos, ajusta-se um tamanho padrão e elimina-se a diferença de espessura provocada pela caneta utilizada, visando padronizar a assinatura para a etapa de extração das características. Dentre os atributos utilizados no reconhecimento da assinatura, destacam-se as informações sobre: a área, densidade da assinatura, direção das linhas, maior frequência horizontal e vertical, número de cantos, entre outros. Por se tratar de um problema de classificação em múltiplas classes, empregou-se o método um contra todos. Para treinar e testar o sistema utilizou-se 1320 assinaturas, originais e falsas, coletadas de um grupo de 70 pessoas. Compararam-se os resultados encontrados com os obtidos por um sistema baseado em redes neurais artificiais e concluiu-se que o desempenho de classificação do SVC foi superior ao de RNA.

Ainda na área de biometria e segurança, encontram-se trabalhos do SVC aplicados à sistemas de detecção e reconhecimento de faces, como por exemplo, a pesquisa realizada por Osuna, Freund e Girosi (1997).

## 4.2 MEDICINA

Visando reduzir a necessidade de cirurgias complementares ao diagnóstico de melanomas, Mocellin *et al.* (2006) usaram o algoritmo do SVC em pacientes com melanoma cutâneo, com o objetivo de prever quais desses pacientes apresentariam metástase local baseados apenas em parâmetros clínicos e histológicos do tumor primário. Nesse estudo, 234 pacientes com melanoma submetidos à cirurgia de linfonodo sentinela foram classificados segundo parâmetros clínicos, como idade e sexo, e histopatológicos, como espessura do tumor, invasão de vasos sanguíneos e linfáticos, quantidade de células em mitose, entre outros. Esses parâmetros foram utilizados para prever os resultados da biópsia (52 positivos

e 182 negativos para metástase local) por um método em que o paciente a ser classificado foi comparado com o restante do grupo. Assim, cada um dos pacientes teve suas variáveis clínicas e histopatológicas comparadas às dos 233 restantes, usando as metodologias do SVC e também da regressão logística. Os resultados do SVC foram significativamente superiores aos da regressão logística, com acurácia de 81% e, o mais importante, com valor preditivo negativo de 98%. Esse último dado significa que, dos 144 pacientes que o SVC classificou como tendo linfonodo sentinela livre de metástases, 141 realmente tiveram a biópsia com resultado negativo. Dessa forma, mediante os resultados do SVC seria possível evitar a realização de 60% das biópsias.

Na medicina, a aplicação do SVC vai além de diagnósticos de doenças como o câncer. Yu *et al.* (2006), a fim de julgar a qualidade de sinais biológicos do ritmo cardíaco, utilizaram o SVC para classificar os sinais de eletrocardiograma (ECG) e de fotopletismografia (FPG) como adequados ou inadequados, isto é, como ruídos. Foram utilizados dados de 726 pacientes vítimas de trauma sendo transportados por helicóptero. Convém lembrar que as variações em decorrência da do transporte aéreo podem interferir enormemente na qualidade dos registros de ECG e FPG, e que apesar das más condições de captura dos dados, o SVC apresentou concordância com a avaliação subjetiva dos médicos em 92% dos casos.

#### 4.3 INDÚSTRIA

Em virtude da privatização do setor de energia elétrica e a comercialização de energia entre as distribuidoras, torna-se importante para estas empresas a previsão de demanda, tanto a longo quanto a curto prazo. Nesse contexto, Ruas *et al.*(2007) aplicaram as técnicas de SVR e de RNA recorrentes para previsão da demanda de energia elétrica a curto prazo. Para realizar a pesquisa, os autores utilizaram como dados de demanda de energia a potência ativa consumida integralizada em 15 minutos dos pontos de conexão da rede de energia do estado do Paraná, entre os anos de 2004 e 2006. Os resultados apresentados pelas redes neurais mostraram-se satisfatórios, comparáveis com os publicados na literatura.

Porém, a grande desvantagem no seu uso é a definição automática da estrutura da rede que envolve um grande número de testes e muita experiência por parte do projetista. Logo, concluiu-se que uma alternativa viável para facilitar estes procedimentos é adotar a técnica do SVR, a qual exige para estas condições apenas o ajuste do parâmetro C.

#### 4.4 MERCADO FINANCEIRO

Problemas relacionados às previsões financeiras são muito complicados devido ao número de variáveis que podem influenciar o mercado. No entanto, os investidores que possuem adequadas ferramentas de previsão, de muito podem se beneficiar aumentando o retorno de seus investimentos (TRAFALIS; INCE, 2000). Em razão disso, o SVR torna-se uma ferramenta de grande interesse para a previsão de preços.

##### 4.4.1 Previsões de séries temporais financeiras

Trafalis e Ince (2000) realizaram um estudo comparativo entre o SVR e as redes neurais *Back-propagation* e *Radial Basis Function* para previsão de preços de ações. Nas fases de treinamento e de teste dos modelos foram utilizados respectivamente os conjuntos de dados formados pelos preços diários das ações da IBM, Yahoo e AOL negociadas nos períodos de 07/05/98 à 28/09/98 e 29/09/98 à 19/10/98. Os resultados preliminares da pesquisa se mostraram bastante promissores. Os desempenhos de ambos os modelos variaram conforme a seleção de seus parâmetros, de forma que em determinadas situações as previsões realizadas pelo SVR mostraram-se superiores às realizadas pelas redes neurais e em outras, mostraram-se inferiores.

Tay e Cao (2001) compararam o uso do SVR com o uso de uma rede neural *Back-propagation* na previsão de séries temporais financeiras. Utilizaram-se dados de cinco contratos futuros negociados na *Chicago Mercantile Market*. Os contratos

avaliados e seus respectivos períodos de negociação foram: CME-SP (30/12/92 a 30/07/96), CBOT-US (01/01/93 a 01/08/96), CBOT-BO (01/01/93 a 01/08/96), EUREX-BUND (01/01/93 a 01/08/96) e MATIF-CAC40 (01/06/95 a 01/02/99). Para definir as variáveis de entrada e de saída do modelo, consideraram-se os preços de fechamento diário dos contratos. No entanto, esses dados foram transformados de forma que sua distribuição ficasse o mais próximo de uma curva normal. Em conjunto com estas transformações, utilizou-se uma média móvel exponencial para evitar que informações importantes provindas dos dados originais fossem perdidas. Para avaliar o desempenho de ambos os modelos, empregaram-se métricas estatísticas que avaliassem os desvios entre os valores reais e os previstos, e que fornecessem uma indicação quanto à direção da previsão realizada. Os resultados mostraram que as previsões do SVR foram significativamente superiores às da rede neural para os contratos futuros CME-SP, CBOT-US, CBOT-BO e MATIF-CAC40 e ligeiramente superior para o contrato EUREX-BUND.

Yang, Chan e King (2002) propuseram uma extensão do algoritmo SVR para previsão de preços do Índice Hang Seng (HSI) de Hong Kong. A principal diferença do modelo apresentado, em relação ao SVR original, consistiu numa adaptação das margens do problema. Foram consideradas margens simétricas e assimétricas com valores fixos de  $\epsilon$  e margens simétricas com valores variáveis de  $\epsilon$ . Para realizar o estudo, foram utilizados preços de fechamento diários do HSI, compreendidos no período de 15/01/01 a 19/06/01. A partir dos resultados, evidenciou-se que os menores erros de previsão foram obtidos utilizando margens simétricas com valores variáveis de  $\epsilon$ , igualando-se o valor dessa constante ao desvio padrão dos vetores de entrada. Quando igualaram  $\epsilon$  aos desvios padrões, o objetivo dos autores era incorporar a mudança da volatilidade dos dados financeiros ao modelo SVR, e conseqüentemente obter uma melhor previsão dos preços. Constatou-se a partir dos resultados que tal objetivo foi alcançado.

#### 4.4.2 Precificação de opções

Apesar de o SVR vir apresentando resultados eficazes em diversos campos do conhecimento, sua aplicação na área de precificações de opções ainda é



bastante restrita. Dentre os poucos resultados existentes, pode-se destacar as pesquisas realizadas por Pires e Marwala.

Em uma primeira análise, Pires e Marwala (2004) compararam o desempenho do algoritmo SVR com o de uma rede neural MLP para precificação de opções americanas. Para isso, os autores utilizaram dados de opções de compra sobre certa ação, negociadas no período de janeiro de 2001 a dezembro de 2003, na Bolsa de Valores da África do Sul. Para ambos os modelos, foram empregados os mesmos parâmetros de entrada e saída, assim como os mesmos dados de treinamento e de teste. As variáveis de entrada consideradas foram: a volatilidade do ativo-objeto, o tempo (em dias) até o vencimento do contrato e o preço de exercício da opção, enquanto que a variável de saída utilizada foi a média entre o preço máximo e mínimo da opção. Os resultados da pesquisa mostraram que tanto as previsões feitas pela rede neural quanto pelo SVR acompanharam os movimentos de preços de mercado. No entanto, quando calculados os erros percentuais entre os preços estimados e os preços reais, verificou-se que o desempenho do modelo de SVR foi superior ao de rede neural. Todavia, ressaltou-se que apesar do modelo SVR ter apresentado melhores resultados, isto é, menores erros, o mesmo exigiu maior tempo para realizar a fase de treinamento dos dados, necessitando de 6 minutos e 40 segundos, enquanto a rede neural utilizou apenas 5 segundos.

Em uma análise posterior, Pires e Marwala (2005), ainda com o objetivo de precificar opções americanas, aplicaram técnicas Bayesianas em modelos de SVR e de redes neurais. O intuito dos autores, ao aplicar essas técnicas, era de fornecer níveis de confiança aos resultados encontrados e tentar reduzir o problema do *overfitting*. Para esta aplicação, foram utilizados dados de opções de compra sobre o índice ALSI (*All Share Index*) da África do Sul, negociadas no período de janeiro de 2001 a dezembro de 2003. Considerou-se ainda, os mesmos parâmetros de entrada e de saída da pesquisa realizada em 2004. Novamente, os resultados evidenciaram a superioridade do SVR em precificar opções americanas, tendo em vista os menores erros proporcionados por este modelo. Portanto, concluiu-se que o SVR superou a rede neural MLP tanto na aplicação de métodos tradicionais (resultados de 2004) quanto na aplicação de técnicas Bayesianas (resultados 2005). No entanto, mais uma vez ressaltou-se que o SVR exigiu maior tempo para realizar a fase de treinamento dos dados. Desta vez, o SVR necessitou de duas horas e trinta minutos enquanto a rede neural exigiu apenas 44 segundos.

No Brasil, não foram encontrados trabalhos que relacionem a aplicação do SVR à precificação de opções.

## 5 METODOLOGIA

Este capítulo tem por finalidade apresentar a metodologia utilizada para sustentar a presente dissertação. Primeiramente, fazem-se explicações quanto aos dados empregados nesta pesquisa, explicações essas que abrangem a coleta de dados, o contexto histórico-econômico no qual estes estão inseridos e os parâmetros escolhidos para construir os modelos de *Support Vector Regression*. Posteriormente, descreve-se como foi realizada a implementação do programa de precificação de opções baseado na técnica de SVR e quais critérios foram utilizados para escolher o modelo que melhor se adapta ao comportamento dos preços das opções. Como será visto na seqüência desta pesquisa, esse modelo será empregado para precificar as demais séries de opções e seus resultados serão comparados com os de Black & Scholes.

### 5.1 OPÇÕES DE ESTUDO

Para validar o programa de precificação de opções baseado na técnica de SVR foram utilizados dados históricos referentes às opções de compra americanas sobre a ação Petrobras PN (preferencial nominativa) negociada no mercado BOVESPA mediante o código PETR4. A escolha dessas opções, como objeto de estudo da presente dissertação, ocorreu em função da alta liquidez desses títulos de opções e também do grande volume de negociações da ação PETR4, que atualmente é uma das ações mais comercializadas no mercado brasileiro.

A partir do *CMA Station Advanced Web*, sistema integrado em tempo real com diversas Bolsas de Valores do mundo e utilizado para executar ordens de negociação, obteve-se os preços de fechamento das séries de opções analisadas e também da ação PETR4.

É importante salientar que os dados utilizados neste trabalho provêm de um período de instabilidade resultante da crise imobiliária americana de 2008, que afetou a economia mundial em seus diversos setores, e que atualmente é considerada por especialistas como uma das piores crises após a quebra da Bolsa

de Valores de Nova York, em 1929. Desta forma, observa-se que certos intervalos de tempo analisados correspondem a períodos de grande volatilidade.

As séries de opções estudadas se encontram listadas na tabela 4.

TABELA 4 - SÉRIE DE OPÇÕES AVALIADAS PELO PROGRAMA DE PRECIFICAÇÃO BASEADO NA TÉCNICA DE SVR

SÉRIE DE OPÇÕES	DATA DE VENCIMENTO
PETRB20	16/02/2009
PETRB22	16/02/2009
PETRB24	16/02/2009
PETRB26	16/02/2009
PETRB28	16/02/2009
PETRC22	16/03/2009
PETRC24	16/03/2009
PETRC26	16/03/2009
PETRC28	16/03/2009
PETRC30	16/03/2009
PETRD26	20/04/2009
PETRD28	20/04/2009
PETRD30	20/04/2009
PETRD32	20/04/2009
PETRD34	20/04/2009
PETRE26	18/05/2009
PETRE28	18/05/2009
PETRE30	18/05/2009
PETRE32	18/05/2009
PETRE34	18/05/2009

FONTE: A autora (2009)

Ressalta-se ainda, que no dia de vencimento de um contrato de opção, o prêmio dessa opção equivale à diferença absoluta entre o seu preço de exercício e o valor de mercado da ação. Dessa forma, nesse trabalho não foram utilizados dados referentes aos dias de vencimento das séries.

## 5.2 PARÂMETROS DOS MODELOS DE SVR

Para definir quais parâmetros iriam compor as entradas dos modelos de SVR, tomou-se como base os principais fatores que influenciam o preço de uma

opção, assim como, assumiram-se algumas das variáveis utilizadas por Freitas (2001) em seu trabalho de precificação de opções baseado em redes neurais.

Desta forma, definiram-se como parâmetros de entrada, as variáveis: preço à vista da ação (S), preço de exercício da opção (X), tempo em dias até o vencimento da opção, taxa de juro livre de risco, volatilidade do preço da ação, retorno diário da ação, grau de *moneyness* da opção, preço anterior da opção ( $c_{anterior}$ ), preço anterior da ação ( $S_{anterior}$ ), relação dada por  $c_{anterior}/S_{anterior}$  e relação S/X.

Estas variáveis encontram-se listadas na tabela 5, e serão detalhadas na seqüência dessa seção.

TABELA 5 - PARÂMETROS DE ENTRADA DOS MODELOS DE SVR

PARÂMETROS DE ENTRADA	SÍMBOLO
Preço à vista da ação	S
Preço de exercício da opção	X
Tempo em dias até o vencimento da opção	T
Taxa de juro livre de risco	R
Volatilidade do preço da ação	$\sigma$
Retorno diário da ação	U
Grau de <i>moneyness</i> da opção	M
Preço anterior da opção	$c_{anterior}$
Preço anterior da ação	$S_{anterior}$
Relação $c_{anterior}/S_{anterior}$	$c_{anterior}/S_{anterior}$
Relação S/X	S/X

Fonte: A autora (2009)

No que se refere ao preço à vista da ação PETR4, utilizou-se como dados os preços de fechamento do pregão.

Convém evidenciar que a ação PETR4 distribuiu dividendos e juros sobre o capital próprio durante o período de vigência das opções analisadas neste trabalho. Como no Brasil as opções são protegidas, o valor líquido recebido é deduzido do preço de exercício das séries a partir do primeiro dia de negociação ex-direito. Portanto, os dados aqui utilizados tiveram seus preços de exercício ajustados conforme a realidade do mercado.

Para apurar o tempo até o vencimento das opções, foram considerados apenas os dias em que houve negociações na Bolsa de Valores, ignorando as datas em que essa permaneceu fechada. Dessa forma, por convenção considerou-se o ano contendo 252 dias.

Como taxa de juro livre de risco, utilizou-se a taxa SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia), divulgada no site do Banco Central do Brasil.

Sabe-se que dentre todos os parâmetros de entrada estabelecidos, o único que não pode ser diretamente observado é a volatilidade do preço da ação. Desta forma, utilizou-se como método de estimação a volatilidade histórica determinada pela equação (8). Baseando-se em Freitas (2001), que apurou a volatilidade histórica de ações da Telebras com um período fixo de 40 dias devido a pouca estabilidade do mercado brasileiro, considerou-se conveniente para essa dissertação, tendo em vista o atual contexto econômico, utilizar no cálculo da volatilidade histórica um intervalo de observações igual a 30 dias, ou seja,  $n=30$ .

No que se refere ao cálculo do retorno diário da ação empregou-se a fórmula (9).

Considerando que o grau de *moneyness* de uma opção consiste na relação entre seu preço de exercício e o preço à vista da ação, tem-se que a partir do seu valor é possível classificar as opções estando dentro do dinheiro, no dinheiro ou fora do dinheiro. Logo, o cálculo do grau de *moneyness* foi realizado mediante:

$$M = \frac{S}{Xe^{-r(T)}} \quad (77)$$

Onde:

- $M$  = grau de *moneyness*;
- $S$  = preço da ação;
- $X$  = preço de exercício da opção;
- $r$  = taxa de juro livre de risco;
- $T$  = tempo até o vencimento da opção.

Diz-se que uma opção está fora do dinheiro quando  $M \leq 0,95$ , no dinheiro quando  $0,95 < M \leq 1,05$ , e dentro do dinheiro quando  $M > 1,05$ .

Nesse trabalho, considerou-se o preço anterior da opção como sendo a cotação mais recente referente à opção a ser precificada. Por exemplo: se objetivo é precificar uma opção negociada em uma quarta feira, o preço de fechamento dessa

mesma opção, a qual foi negociada na terça feira antecedente, corresponde ao  $C_{anterior}$ .

Analogamente, o preço anterior da ação corresponde ao preço de fechamento da ação no dia de apuração de  $C_{anterior}$ .

Dessa maneira, as relações  $C_{anterior}/S_{anterior}$  e  $S/X$  consistiram apenas nas divisões dos dados anteriormente explicados.

Além das variáveis de entrada, outros parâmetros dos modelos de SVR foram submetidos a variações. Dentre esses estão: a constante de regularização  $C$  e a margem  $\epsilon$ , as quais variaram respectivamente entre os intervalos  $[5 ; 100]$  e  $[0,005; 0,05]$ .

Para realizar o mapeamento não linear do espaço de entrada para o espaço de características utilizou-se as funções kernel: linear, polinomial homogêneo, polinomial não homogêneo, sigmoidal e gaussiano, representadas respectivamente pelas fórmulas (52), (53), (54), (55) e (56).

Ao utilizar estas funções, seus respectivos parâmetros também foram variados, como por exemplo: o grau do polinômio, no caso das funções kernel polinomial homogêneo e não homogêneo, assim como a constante da curva para essa última, além do coeficiente kappa e a constante negativa para o kernel sigmoidal e o parâmetro sigma para o kernel gaussiano.

Como variável de saída dos modelos foram utilizadas apenas os preços de fechamento das séries de opções avaliadas.

### 5.3 PROGRAMAÇÃO DO ALGORITMO SVR

Nesta dissertação, desenvolveu-se um programa de precificação de opções, que foi utilizado para executar os testes que fundamentam a presente pesquisa, os quais serão explicados no decorrer deste capítulo.

O programa proposto foi implementado por meio da linguagem de programação *Microsoft Visual Basic*, desenvolvida para aplicações visuais em ambiente *Windows*, a qual disponibiliza aos seus usuários comandos e recursos avançados de programação.

Juntamente com o *Visual Basic* utilizou-se o software LINGO, fabricado pela LINDO Systems, que consiste numa ferramenta computacional capaz de modelar e resolver problemas de otimização lineares, não lineares e inteiros. Neste caso, o LINGO foi empregado para solucionar o problema quadrático do SVR.

O programa desenvolvido funciona a partir de duas interfaces gráficas. Na primeira interface, ilustrada pela figura 16, o usuário define quais serão as variáveis de entrada e de saída do SVR. Para isso, selecionam-se os dados correspondentes à ação objeto e à série de opções a ser precificada. Na seqüência, as informações selecionadas, referentes às entradas e saída do SVR, são organizadas em arquivos de texto no formato LIBSVM<sup>19</sup>.

Por meio desta interface, também se calculam os preços de opções pelo modelo de Black & Scholes e geram-se arquivos de texto contendo esses valores.

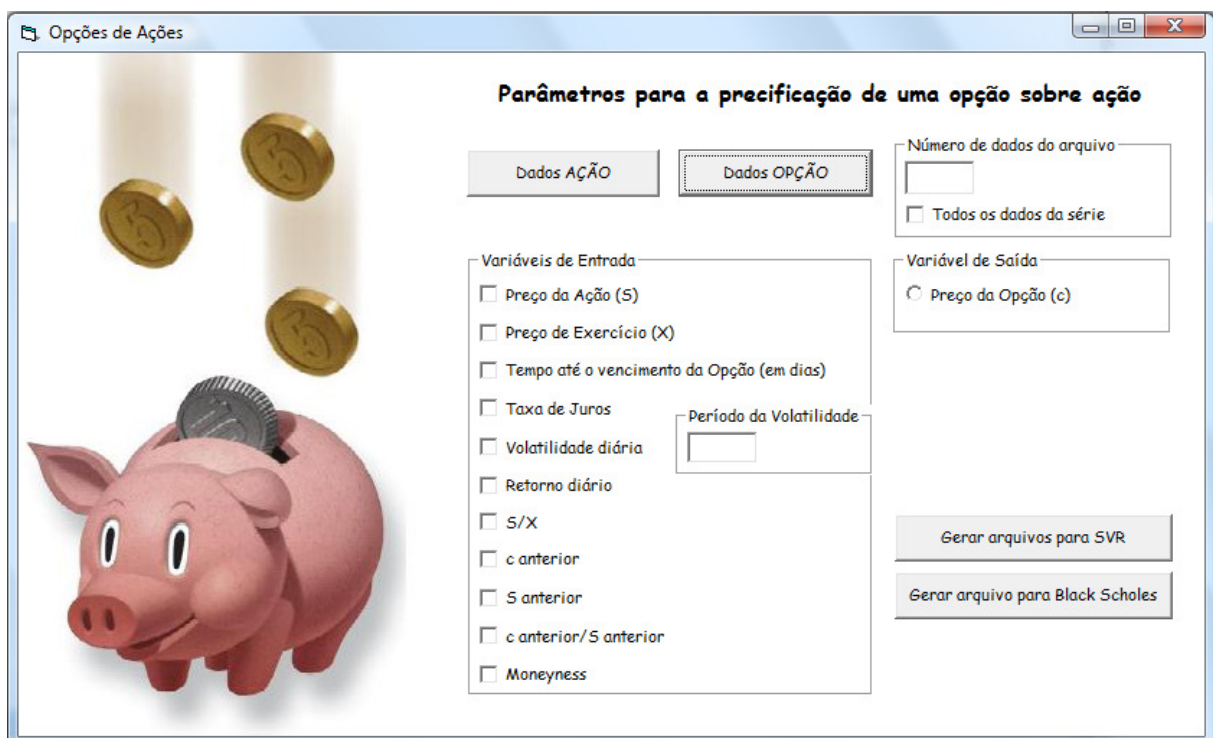


FIGURA 16 - PRIMEIRA INTERFACE GRÁFICA DO PROGRAMA DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES  
FONTE: A autora (2009)

Após a geração dos arquivos de texto anteriormente descritos, torna-se possível utilizar a segunda interface do programa, ilustrada pela figura 17. Nesta

<sup>19</sup> LIBSVM é uma biblioteca virtual referente ao Support Vector Machine, desenvolvida por Chih-Chung Chang e [Chih-Jen Lin](#) da Universidade Nacional de Taiwan. Nela estão disponíveis diversos materiais, como por exemplo: bancos de dados em um formato padrão.



interface, selecionam-se os demais parâmetros do SVR, resolve-se o problema quadrático e apresentam-se os resultados dos modelos analisados. Dentre esses, encontram-se: o gráfico comparativo entre os preços de mercado, preços calculados por B&S e SVR, tabelas que mostram a quantidade de vetores suportes e seus respectivos valores, e quadros que comparam o desempenho do modelo de SVR e B&S.

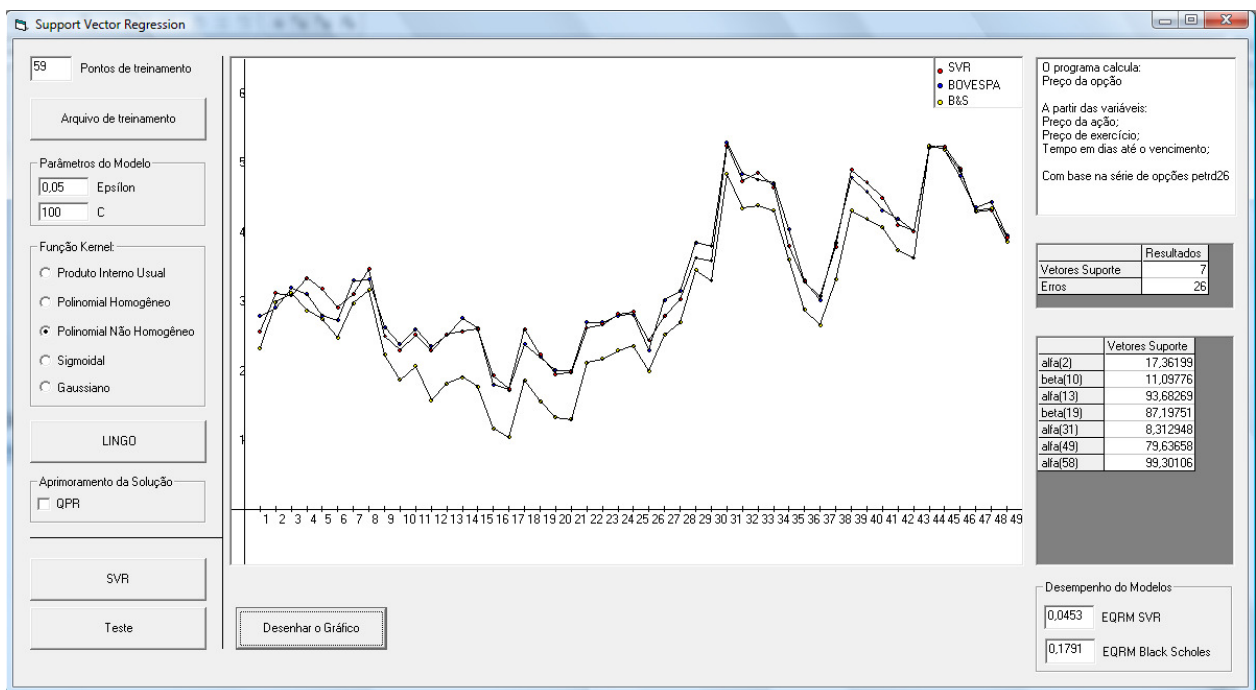


FIGURA 17 - SEGUNDA INTERFACE GRÁFICA DO PROGRAMA DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES  
FONTE: A autora (2009)

Todos os cálculos e comandos realizados pelo programa são executados acionando-se botões de ações presentes nas suas interfaces.

No que diz respeito à lógica de programação, essa foi estruturada de acordo com a teoria de opções e de SVR, explicada nos capítulos anteriores.

Todavia, visto que a função do SVR pode retornar quaisquer valores reais para as suas previsões, o que não é válido para preços de opções, foi necessário adaptar à saída do SVR uma nova função.

Esta nova função leva em conta que o mercado não negocia títulos com valores negativos ou iguais a zero, e que o menor valor de comercialização de uma opção é R\$ 0,01. Dessa forma, a nova função adaptada à saída do SVR é dada por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0,01 \\ 0,01 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (78)$$

Onde:

- $x$  = vetor de características;
- $f(x)$  = saída do SVR;
- $g(x)$  = saída utilizada para comparação de precificação.

Para a melhor compreensão do funcionamento do programa, descreveu-se no quadro 1 a sua seqüência lógica de implementação.

No entanto, detalhes relacionados às etapas 1 e 2, executadas pela segunda interface, serão explicados respectivamente nas seções 5.4 e 5.5.

**1ª Interface:**

- Entrar com os dados da ação objeto e da opção a ser precificada.
- Determinar a quantidade de dados (dias de negociação) do arquivo do SVR.
- Selecionar as coordenadas (características) dos vetores de entrada do SVR.
  - Se a volatilidade for selecionada então definir o período de observações.
- Gerar o arquivo com os dados de entrada e saída do SVR no padrão LIBSVM.
- Calcular o preço das opções por B&S.
- Gerar o arquivo com os preços calculados por B&S.

**2ª Interface:****Etapa 1 (escolha do melhor modelo de SVR):**

- Entrar com arquivo de dados do SVR gerado pela 1ª interface.
- Definir os parâmetros  $\epsilon$  e  $C$ .
- Definir o tipo de função kernel e seus respectivos parâmetros.
- Para todos os pontos do arquivo:
  - Gerar o problema de programação quadrática do SVR.
  - Executar o programa LINGO.
  - Fazer a leitura dos multiplicadores de Lagrange.
  - Construir a função do SVR.
- Testar a validade da solução usando todos os pontos do arquivo.
- Calcular o desempenho (EQRM) do modelo de SVR.

**Etapa 2 (validação do modelo escolhido na Etapa 1):**

- Definir o número de dados (**n**) para treinamento do SVR
- Enquanto **n** < **número total de pontos do arquivo** então
  - Gerar o problema de programação quadrática do SVR
  - Executar o programa LINGO
  - Fazer a leitura dos multiplicadores de Lagrange
  - Construir a função do SVR
  - Determinar o preço da opção no ponto **n+1** (fase de teste)
  - Fazer: **n=n+1**
- Repetir
- Calcular o desempenho (EQRM) dos modelos de SVR e B&S
- Desenhar o gráfico comparativo

QUADRO 1 - SEQUÊNCIA PARA O FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Fonte: A autora (2009)

## 5.4 DEFINIÇÃO DO MELHOR MODELO DE SVR PARA PRECIFICAR OPÇÕES

Nesta etapa do trabalho, empregou-se o programa desenvolvido para testar e comparar diferentes modelos de SVR, os quais se distinguiam pelas variáveis de entrada, valor da constante de regularização  $C$ , valor da margem  $\epsilon$ , tipo de função kernel e respectivos parâmetros. O objetivo dessa etapa consiste em identificar, dentre os modelos avaliados, aquele que melhor se adapta ao comportamento dos preços das opções.

Para realizar os diversos testes, utilizaram-se as opções com vencimento em 16/02/2009, ou seja, as séries PETRB20, PETRB22, PETRB24, PETRB26 e PETRB28.

Conforme será visto no próximo capítulo, o modelo de melhor desempenho será utilizado para precificar as demais séries de opções e terá seus resultados comparados com os de Black & Scholes.

### 5.4.1 Critérios utilizados para selecionar o modelo

A partir de combinações feitas com os diversos parâmetros descritos na seção 5.2, foram estabelecidos 84 modelos de SVR, os quais estão listados no apêndice 1 deste trabalho.

O objetivo principal desta etapa é encontrar dentre esses 84 modelos, aquele que melhor rege o comportamento dos preços das opções. Dessa forma, foram utilizadas as séries de dados PETRB20, PETRB22, PETRB24, PETRB26 e PETRB28, classificadas conforme os graus de *moneyness* dentro do dinheiro, no dinheiro ou fora do dinheiro.

A classificação dessas séries foi realizada calculando o grau de *moneyness* para cada uma de suas cotações e avaliando, a partir dos resultados, em qual dos grupos cada série permaneceu por mais tempo.

O intuito de classificar as amostras de dados é avaliar o desempenho de cada modelo com relação à precificação de opções fora do dinheiro, no dinheiro e dentro do dinheiro.

A tabela 6 relaciona as séries analisadas com o seu respectivo grupo de *moneyness* e seu grau de representatividade neste grupo. Neste caso, o grau de representatividade corresponde à porcentagem de cotações classificadas no grupo em questão.

TABELA 6 - CLASSIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES UTILIZADAS PARA AVALIAR OS 84 MODELOS DE SVR

SÉRIE DE OPÇÕES	GRUPO	REPRESENTATIVIDADE
PETRB20	Dentro do dinheiro	86,27%
PETRB22	Dentro do dinheiro	62,71%
PETRB24	No dinheiro	38,77%
PETRB26	Fora do dinheiro	60,00%
PETRB28	Fora do dinheiro	87,75%

Fonte: A autora (2009)

Nesta etapa de escolha do melhor modelo de precificação não foi feita diferenciação entre os dados de treinamento e de teste do algoritmo SVR, o que significa que os algoritmos foram treinados e testados com os mesmos dados. Por exemplo, para precificar opções da série PETRB20 com o modelo M1, todos os dados dessa série foram utilizados para treinar o modelo e posteriormente para testá-lo.

Com relação ao desempenho dos 84 modelos estabelecidos, comparou-se os preços teóricos obtidos por meio de cada um dos modelos com os preços realmente observados no mercado BOVESPA. A diferença entre esses valores foi calculada mediante o erro quadrático relativo médio (EQRM), dada por:

$$EQRM = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{C_{m_i} - C_{t_i}}{C_{m_i}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (79)$$

Onde:

- $n$  = número total de observações;
- $C_m$  = preço de fechamento observado no mercado;
- $C_t$  = preço teórico obtido pelo modelo.

Além do cálculo do EQRM, foi levado em consideração o número de vetores suporte gerados por cada modelo de precificação. Pois, um número pequeno de vetores suportes representa uma alta capacidade de generalizar os dados, enquanto o contrário representa uma generalização pobre, ou seja, o *overfitting*.

Todos os resultados gerados, pelos 84 modelos na precificação das cinco séries, encontram-se listados nos apêndices 2 a 6.

Dessa forma, analisando esses resultados encontrados e considerando os critérios de desempenho anteriormente mencionados, concluiu-se que o modelo M14 é aquele que melhor capta os movimentos do mercado e que melhor precifica as opções, pois esse apresentou o melhor desempenho com relação aos três grupos de *moneyness* avaliados.

O modelo M14 é descrito por três variáveis de entrada: preço da ação, preço de exercício da opção e tempo em dias até o vencimento da opção. Sua constante de regularização  $C$  tem valor 100 e a margem  $\epsilon$  tem valor igual a 0,05. O que significa que os preços das opções poderão ter variações de até R\$ 0,10 e oscilações acima deste valor serão considerados como erros. Para realizar o mapeamento implícito dos dados utilizou-se a função kernel polinomial não homogêneo com parâmetros  $p=5$  e  $k=1$ . A variável de saída do modelo consiste no preço da opção.

A tabela 7 descreve os resultados obtidos pelo modelo M14.

TABELA 7 - DESEMPENHO DO MODELO M14

GRUPO	SÉRIE DE OPÇÕES	EQRM	VS
Dentro do dinheiro	PETRB20	0,0377	11
Dentro do dinheiro	PETRB22	0,0472	12
No dinheiro	PETRB24	0,0482	11
Fora do dinheiro	PETRB26	0,0860	12
Fora do dinheiro	PETRB28	0,1167	9

Fonte: A autora (2009)

A tabela 8 apresenta os valores médios de EQRM e de vetores suporte calculados para os 84 modelos estabelecidos, com relação às cinco séries analisadas.

TABELA 8 - VALORES MÉDIOS DE EQRM E DE VETORES SUPORTE DOS MODELOS DE SVR

GRUPO	SÉRIE DE OPÇÕES	EQRM MÉDIO	VS MÉDIO
Dentro do dinheiro	PETRB20	0,0712	8
Dentro do dinheiro	PETRB22	0,0960	8
No dinheiro	PETRB24	0,1118	8
Fora do dinheiro	PETRB26	0,1628	8
Fora do dinheiro	PETRB28	0,2128	9

Fonte: A autora (2009)

Ao comparar os resultados da tabela 7 com os da tabela 8, verifica-se que os valores de EQRM obtidos pelo modelo M14 são muito inferiores aos valores médios de EQRM obtidos pelos demais modelos. No entanto, os números de vetores suporte do modelo M14 excedem à média dos demais na precificação das séries PETRB20, PETRB22, PETRB24 e PETRB26. Todavia, os valores excedidos não comprometeram a sua capacidade de generalização.

Desta forma, com base nesses resultados, escolheu-se o modelo M14 para validar a utilização do algoritmo SVR na precificação de opções. A partir desta seção, esse modelo será chamado simplesmente de modelo SVR.

## 5.5 COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO DE SVR E DE B&S

Com o intuito de validar o modelo de precificação de opções proposto nessa dissertação, comparou-se o desempenho do modelo de SVR com o de Black & Scholes, o qual se caracteriza por ser um dos modelos mais utilizados e de maior sucesso na área de finanças.

Dessa maneira, foram utilizadas as séries de opções sobre ações da PETR4 com vencimento em 16/03/2009, 20/04/2009 e 18/05/2009, listadas na tabela 4. Novamente, as séries de dados foram classificadas conforme os grupos de *moneyness*, de forma que os desempenhos do modelo de SVR e de B&S pudessem ser comparados com relação à precificação de opções dentro do dinheiro, no dinheiro e fora do dinheiro. A tabela 9 relaciona cada uma dessas séries com o seu respectivo grupo de *moneyness* e seu grau de representatividade neste grupo.

TABELA 9 - CLASSIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES UTILIZADAS PARA AVALIAR O MODELO DE SVR

SÉRIE DE OPÇÕES	GRUPO	REPRESENTATIVIDADE NO GRUPO
PETRC22	Dentro do dinheiro	100,00%
PETRC24	Dentro do dinheiro	76,19%
PETRD24	Dentro do dinheiro	85,25%
PETRD26	Dentro do dinheiro	50,85%
PETRE26	Dentro do dinheiro	88,46%
PETRE28	Dentro do dinheiro	53,33%
PETRC26	No dinheiro	60,00%
PETRD28	No dinheiro	36,21%
PETRE30	No dinheiro	47,46%
PETRC28	Fora do dinheiro	59,00%
PETRC30	Fora do dinheiro	100,00%
PETRD30	Fora do dinheiro	62,26%
PETRD32	Fora do dinheiro	91,66%
PETRE32	Fora do dinheiro	60,37%
PETRE34	Fora do dinheiro	86,36%

Fonte: A autora (2009)

Para cada uma das séries avaliadas, a fim de gerar a primeira previsão do modelo de SVR, treinou-se o algoritmo com uma amostra de dez pontos de treinamento. Nesses pontos estavam contidas informações de dez dias de negociações, o que equivale a duas semanas de transações em Bolsa de Valores.

Tendo em vista as constantes mudanças do mercado, decidiu-se após a primeira previsão de preço, não gerar imediatamente as demais outras. Optou-se por fazer um novo treinamento com uma amostra de dez pontos<sup>20</sup> anteriores ao da previsão a ser realizada. Assim as informações de mercado seriam sempre atualizadas e aprendidas pelo algoritmo de SVR. Esse procedimento foi repetido sucessivamente até finalizar a previsão de toda a série de dados.

Após terem sido feitas todas as previsões, avaliou-se o desempenho do modelo de SVR mediante o cálculo do EQRM, dado pela fórmula (79).

Para cada série de opções, comparou-se o valor do EQRM obtido pelo modelo de SVR com o valor do EQRM obtido pelo modelo de B&S.

<sup>20</sup> O treinamento foi realizado apenas com dados históricos.



## 6 ANÁLISE DE RESULTADOS

Para cada uma das séries de opções analisadas, foram comparados os preços teóricos, obtidos pelo modelo de SVR e de B&S, com os preços realmente observados no mercado BOVESPA. A diferença entre esses valores foi determinada mediante cálculo do EQRM. Atentou-se também para o número de vetores suporte gerado pelo modelo de SVR, a fim de verificar se houve ou não *overfitting*.

As tabelas 10, 11 e 12 relacionam respectivamente os resultados encontrados para as séries classificadas dentro do dinheiro, no dinheiro e fora do dinheiro.

Analisando inicialmente os dados da tabela 10, observa-se a superioridade do modelo de SVR em precificar as séries de opções classificadas dentro do dinheiro. Pois, com base nos valores de EQRM, tem-se que em 100% dos casos avaliados o SVR obteve o melhor desempenho.

Em relação ao número de vetores suporte gerados, ao comparar os valores da tabela 10 com os da tabela 7 (1ª e 2ª linha), tem-se que os valores aqui encontrados são iguais ou inferiores aos anteriormente determinados. O que confirma a capacidade do modelo em generalizar os dados.

TABELA 10 - RESULTADOS PROVENIENTES DA PRECIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES CLASSIFICADAS DENTRO DO DINHEIRO

GRUPO	SÉRIE DE OPÇÕES	VS	EQRM SVR	EQRM B&S
Dentro do dinheiro	PETRC22	8	0,0715	0,0768
Dentro do dinheiro	PETRC24	9	0,0899	0,1389
Dentro do dinheiro	PETRD24	8	0,0447	0,1231
Dentro do dinheiro	PETRD26	7	0,0453	0,1791
Dentro do dinheiro	PETRE26	11	0,0305	0,0656
Dentro do dinheiro	PETRE28	11	0,0578	0,1330

Fonte: A autora (2009)

Ainda na tabela 10, verifica-se que o menor valor de EQRM (0,0305) resultou da aplicação do modelo de SVR na precificação da série de opções PETRE26. Ao avaliar o gráfico dessa série, representado pelo gráfico 1, observa-se que o modelo de SVR além de prever os preços de opções com valores mais próximos aos de mercado, também prevê corretamente os movimentos de preços

das opções. Ou seja, o modelo consegue acompanhar os movimentos de subida e descida do mercado.

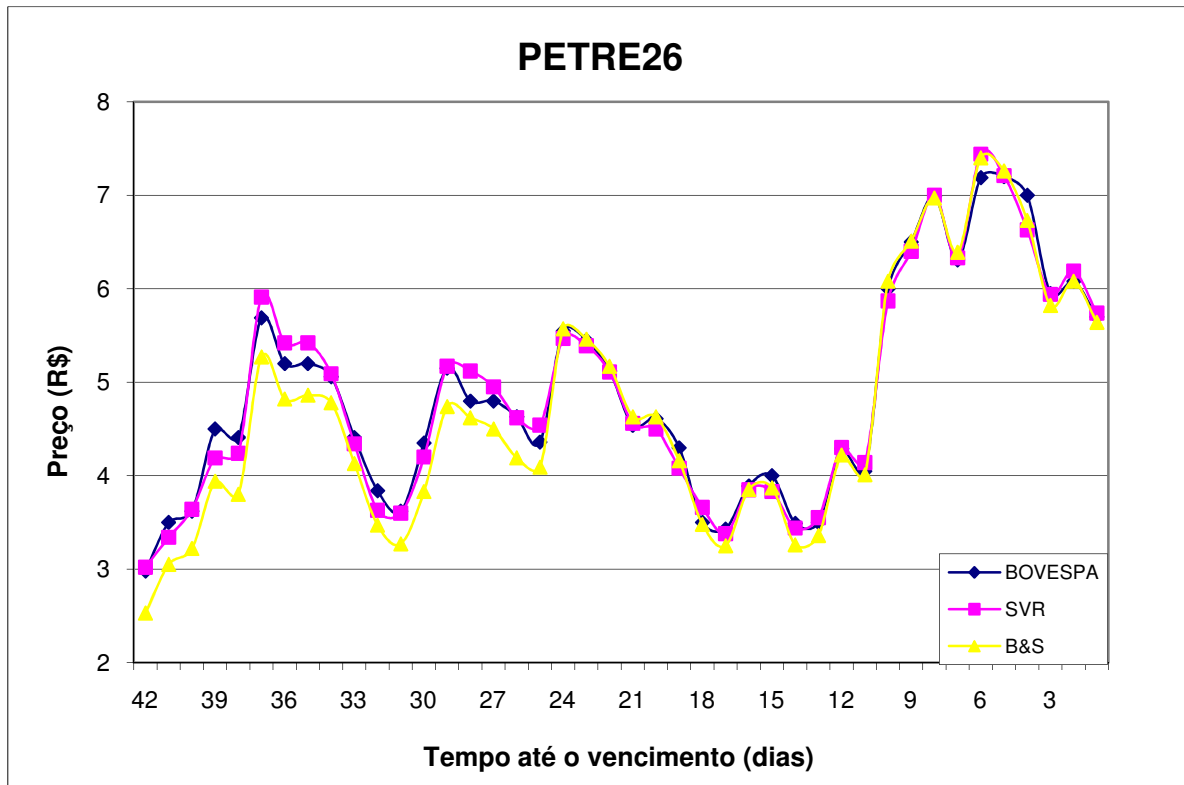


GRÁFICO 1 - PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE DE OPÇÕES PETRE26

FONTE: A autora (2009)

Com relação à precificação de opções classificadas no dinheiro, obtiveram-se os resultados listados na tabela 11. Analisando os valores de EQRM, também se constatou a superioridade do modelo SVR em precificar essas opções. Analogamente as opções ITM, o desempenho do SVR foi superior ao de B&S em 100% dos casos avaliados.

TABELA 11 - RESULTADOS PROVENIENTES DA PRECIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES CLASSIFICADAS NO DINHEIRO

GRUPO	SÉRIE DE OPÇÕES	VS	EQRM SVR	EQRM B&S
No dinheiro	PETRC26	11	0,0823	0,2276
No dinheiro	PETRD28	10	0,0970	0,2357
No dinheiro	PETRE30	10	0,0784	0,1684

Fonte: A autora (2009)

No que tange ao número de vetores suporte, esse mais uma vez confirma a capacidade do modelo em generalizar os dados. Pois, ao comparar os resultados da tabela 11 com o valor da tabela 7 (3ª linha), repara-se que os valores aqui estabelecidos são iguais ou inferiores ao anteriormente determinado.

De maneira similar as opções ITM, o menor valor de EQRM para opções no dinheiro (0,0784) também resultou da precificação de opções da série E, mais exatamente, da série PETRE30.

Analisando o gráfico referente a essa série, ilustrado pelo gráfico 2, percebe-se que o modelo de SVR novamente proporcionou resultados com valores mais próximos aos negociados na BOVESPA, assim como reproduziu os movimentos de aumento e queda de preços.

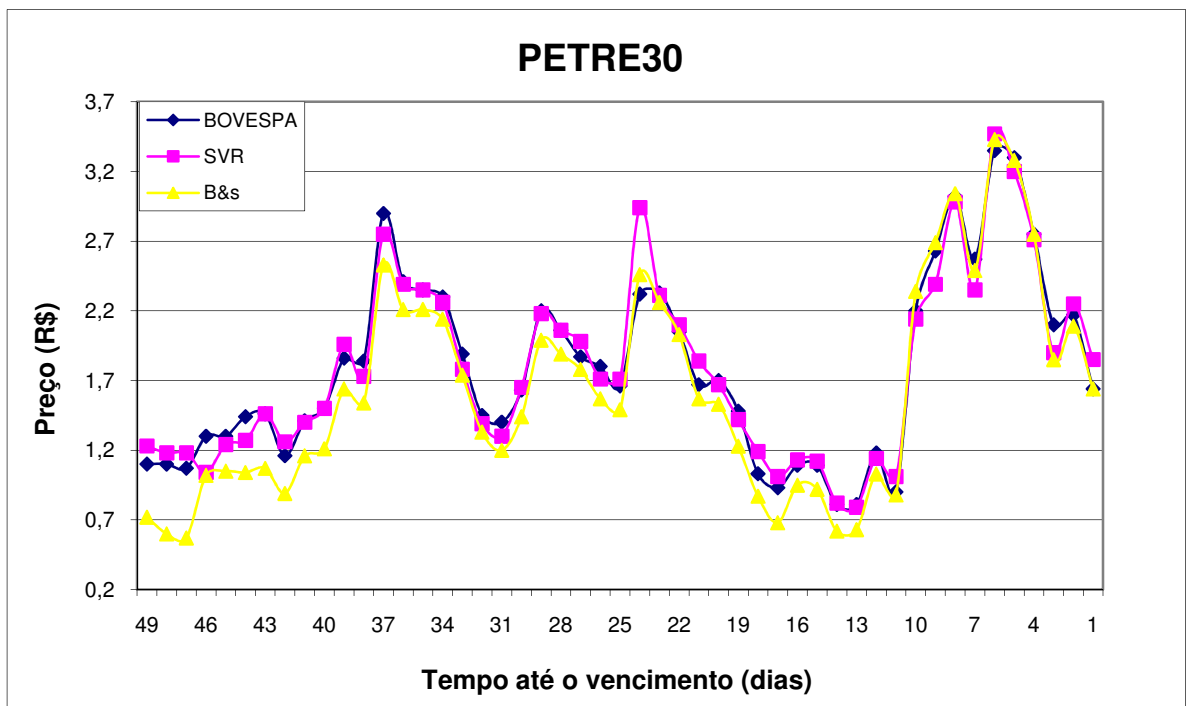


GRÁFICO 2 - PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE DE OPÇÕES PETRE30

FONTE: A autora (2009)

Ainda no gráfico 2, verifica-se que a única previsão discrepante realizada pelo modelo SVR ocorreu no 26º dia de apuração de preços. Entretanto, nenhuma razão específica foi encontrada para explicar o porquê dessa divergência de valores, a não ser a ocorrência aleatória de um erro de previsão por parte do modelo. Todavia, apesar desse ponto irregular, o modelo de SVR ainda assim apresentou um EQRM muito menor ao do modelo de B&S.

Dando continuidade a avaliação do gráfico da série PETRE30, nota-se que na apuração do 4º dia de negociação os preços determinados pelos modelos de SVR e B&S foram praticamente iguais. O primeiro modelo previu como preço da opção o valor R\$1,04, enquanto o segundo modelo previu o valor R\$1,02. No entanto, além da semelhança de valores, ressalta-se como fato notório, a convergência de ambas as curvas para o mesmo ponto. De forma que a curva de preços do SVR cai para R\$1,04 enquanto a de curva de B&S sobe para R\$1,02. Essa convergência de valores leva a crer que ambos os modelos teóricos estão precificando corretamente a opção neste dia. Contudo, apesar de toda essa semelhança, constatou-se que a opção foi negociada na BOVESPA por R\$1,30. O que faz concluir que neste dia a opção foi operada no mercado de forma sobreavaliada, isto é, o contrato de opções estava custando mais caro do que realmente deveria estar. Conforme se sabe, informações desse tipo são fundamentais para operações de arbitragem.

Tendo em vista a precificação de opções classificadas fora do dinheiro, obtiveram-se os dados apresentados na tabela 12. Avaliando os valores de EQRM, constatou-se que o modelo de SVR mostrou um desempenho superior ao de B&S em 66,67% casos avaliados.

TABELA 12 - RESULTADOS PROVENIENTES DA PRECIFICAÇÃO DAS SÉRIES DE OPÇÕES CLASSIFICADAS FORA DO DINHEIRO

GRUPO	SÉRIE DE OPÇÕES	VS	EQRM SVR	EQRM B&S
Fora do dinheiro	PETRC28	9	0,1425	0,3908
Fora do dinheiro	PETRC30	10	0,3564	0,5225
Fora do dinheiro	PETRD30	12	0,1262	0,2930
Fora do dinheiro	PETRD32	10	0,3275	0,4052
Fora do dinheiro	PETRE32	11	0,2372	0,2181
Fora do dinheiro	PETRE34	9	0,4815	0,4215

Fonte: A autora (2009)

Do ponto de vista do número de vetores suportes, ao comparar os dados da tabela 12 com os da tabela 7 (4ª e 5ª linhas), percebe-se que os valores da tabela 12 compreendem-se dentro de um intervalo formado pelos valores da tabela 7. Logo, mais uma vez confirma-se a capacidade do modelo em generalizar os dados.

Ao avaliar os valores de EQRM, observa-se que o menor valor obtido (0,1262) resultou da aplicação do SVR na precificação da série PETRD30.

Analisando o gráfico dessa série, representado pelo gráfico 3, tem-se que as cotações previstas pelo SVR tiveram, na maioria dos casos, seus valores mais próximos dos valores reais. Esse fato fica evidente nos 17 primeiros dias de apurações de preços.

Observa-se também a capacidade do SVR em captar os movimentos de subida e queda de preços do mercado.

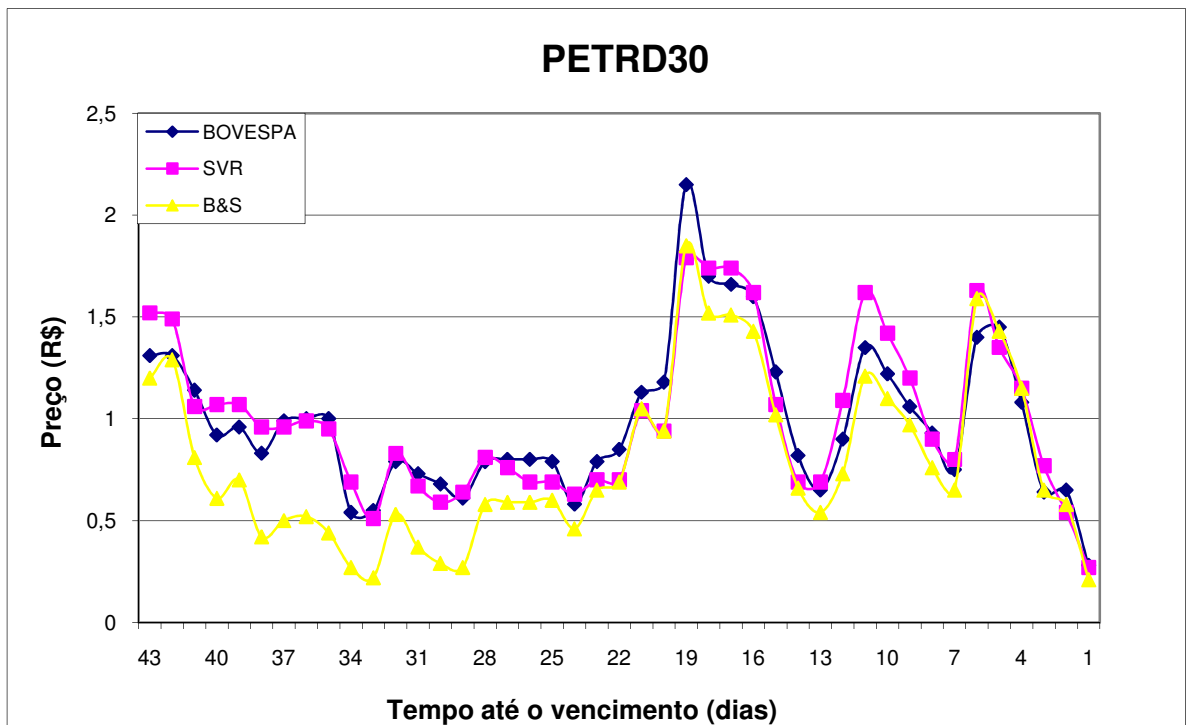


GRÁFICO 3 - PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE DE OPÇÕES PETRD30

FONTE: A autora (2009)

No entanto, ao avaliar as previsões realizadas para a série PETRE34, cujo EQRM (0,4815) foi o maior dentre os demais valores calculados pelo modelo de SVR e maior que o EQRM (0,4215) calculado por B&S para essa mesma série, deparou-se com curvas teóricas bastantes irregulares.

O gráfico da opção PETRE34, representado pelo gráfico 4, evidencia que apesar do desempenho pouco satisfatório apresentado por ambos os modelos, esses previram em grande parte do tempo os movimentos de preços do mercado.

E ainda, observa-se que as curvas do SVR e B&S seguiram comportamentos de crescimento e queda de preços muito similares entre si, com exceção dos períodos de apurações de preços localizados entre o 6º e 8º dia e 25º e 28º dia.

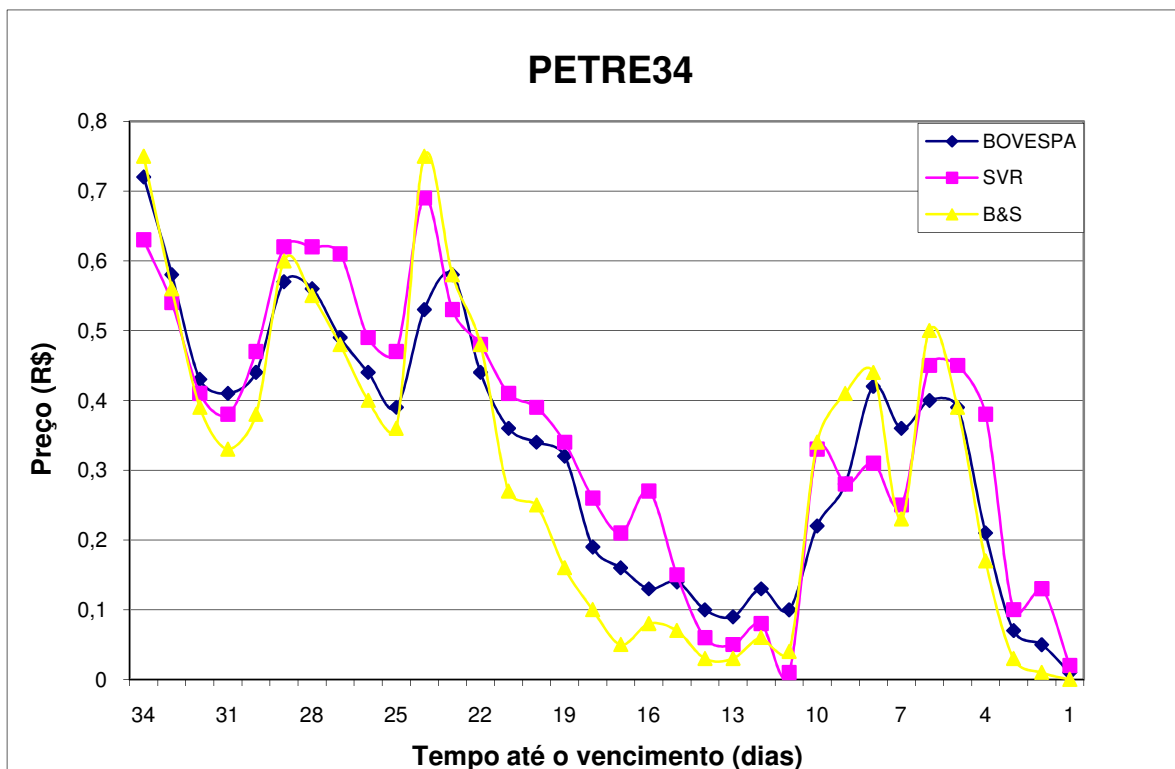


GRÁFICO 4 - PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE DE OPÇÕES PETRE34

FONTE: A autora (2009)

Por fim a última análise que se faz, do ponto de vista do EQRM, é que durante todo período de precificação da série PETRE34, calculou-se para o SVR valores menores ou muito próximos aos calculados por B&S. No entanto, o resultado final (0,4815) foi muito influenciado pela previsão do 33<sup>a</sup> dia de apuração de preços, pois, erros na precificação de preços baixos geram valores de EQRM elevados.

Convém ressaltar que todos os testes aqui mencionados foram realizados em um computador de configuração Centrino Duo T2250, 1,73 GHz, 2GB de memória RAM. Os tempos obtidos em cada processo foram inferiores a 12 segundos e em média, o tempo para a precificação das opções foi de 6 segundos.

## 7 CONCLUSÃO

A finalidade de um modelo de precificação de opções é determinar um preço teórico para os contratos de opções negociados no mercado. O uso de um modelo robusto e confiável permite ao investidor avaliar se o preço negociado está superestimado ou subestimado. Com base nessas informações, o investidor realiza suas operações, as quais podem ser de *hedge*, arbitragem ou especulação. Dessa forma, é preciso que o modelo em questão seja condizente com a realidade do mercado ao qual ele se destina.

Nesse contexto, o objetivo geral deste trabalho foi estabelecer um modelo de precificação de opções baseado na técnica de *Support Vector Regression*, voltado ao comportamento do mercado brasileiro. Este modelo foi aplicado e testado por meio de um programa implementado em *visual Basic* juntamente com a ferramenta LINGO.

Os resultados obtidos pelo programa mostraram, a partir das comparações feitas com os valores de mercado e com o modelo de B&S, que o desempenho do modelo de SVR foi superior ao de B&S na precificação de opções dentro do dinheiro, no dinheiro e fora do dinheiro.

No entanto, constatou-se que os melhores resultados foram encontrados para séries de opções classificadas dentro do dinheiro e no dinheiro. Já para o caso das opções classificadas fora do dinheiro, embora superior ao de B&S, o desempenho do SVR foi inferior ao observado para as séries ITM e ATM.

Sendo assim, nota-se que a classificação dos dados e a precificação das opções conforme os três grupos de *moneyness* permitem uma análise mais profunda dos resultados e do comportamento do mercado de opções.

Verificou-se também, que além do modelo de SVR estimar preços mais condizentes com a realidade do mercado brasileiro, com menores erros de previsão, ele é capaz de captar os movimentos de aumento e queda de preços. O que se torna um ponto forte do modelo, pois em mercado de opções, prever quando o preço do contrato irá cair ou subir é tão importante quanto estimar valores teóricos próximos dos reais.

Outro fato a ser ressaltado é que o modelo de SVR, proposto nesta dissertação, utiliza como parâmetros de entrada apenas o preço da ação, o preço de

exercício da opção e o tempo em dias até o vencimento da opção. Estas três variáveis são conhecidas por influenciar o preço de uma opção e também são utilizadas para a precificação de opções via modelo de B&S. Desta forma, verifica-se que o modelo proposto não utiliza como parâmetro de entrada a volatilidade do preço da ação. Esse fato se torna mais um aspecto positivo do modelo de SVR, pois a volatilidade da ação não pode ser diretamente observada, tendo que ser estimada. Logo, neste caso, o modelo de SVR tem todos os seus parâmetros diretamente observáveis no mercado, podendo ser facilmente aplicado.

Ainda, destaca-se que os tempos de processamento dos testes são plenamente aceitáveis, visto que foram todos inferiores a 12 segundos.

Convém evidenciar que devido os dados utilizados nesta pesquisa pertencerem a um período de instabilidade devido à crise econômica e por as opções de compra da Petrobras PN consistirem em um dos títulos de opções de maior liquidez no Brasil, os resultados encontrados nesse trabalho tornam-se mais expressivos para a realidade brasileira e ressaltam a confiabilidade do modelo de SVR.

Ainda, ao relacionar modelos matemáticos de otimização, métodos numéricos em engenharia e teoria de finanças, essa dissertação contribui não só para o conhecimento do comportamento do mercado brasileiro de opções, mas também para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento.

## 7.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Sugere-se como objeto de estudo para trabalhos futuros a análise mais aprofundada de parâmetros que possam compor modelos de SVR na precificação de opções. Dentre os quais, citam-se a combinação de variáveis de entrada, constante de regularização  $C$ , valor da margem  $\epsilon$ , funções kernel e seus respectivos parâmetros, e periodicidade dos dados de treinamento do modelo.

Ainda, sugere-se como alternativa ao uso da ferramenta computacional LINGO a resolução do problema quadrático do SVR por meio do algoritmo *Sequential Minimal Optimization* (SMO), o qual vem sendo amplamente empregado na resolução de problemas do *Support Vector Machine*.



Além disso, tendo em vista a abrangência do modelo proposto, sugere-se a sua aplicação para a precificação de opções negociadas em outros mercados que não o brasileiro.

E por fim, sugere-se o desenvolvimento de um modelo de precificação de opções, baseado em SVR, que permita a variação dos valores da margem  $\epsilon$ .

## REFERÊNCIAS

ALES, V. T. **O algoritmo Sequential Minimal Optimisation para resolução do problema de Support Vector Machine**: uma técnica para reconhecimento de padrões. 150 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

ALEXANDER, C. **Modelos de mercado**: um guia para a análise de informações financeiras. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2005.

ARAÚJO, G. S. **Análise do modelo de apreçamento de opções GARCH em opções de compra da Telebras**. 130 f. Dissertação (Mestrado em Administração) – Departamento de Administração, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002. Disponível em: <[http://www4.bcb.gov.br/depesteses/DOWNLOAD/disserta%C3%A7%C3%A3o\\_gustavosara%C3%BAjo.PDF](http://www4.bcb.gov.br/depesteses/DOWNLOAD/disserta%C3%A7%C3%A3o_gustavosara%C3%BAjo.PDF)>. Acesso em: 04/01/2009.

BM&FBOVESPA - A Nova Bolsa. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/portugues/QuemSomos.asp>>. Acesso em: 27/09/2008.

BOLSA DE MERCADORIAS & FUTUROS. **Mercados Derivativos**. São Paulo: [200-]. Folheto.

BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO. **Como atuar no mercado de opções**. [São Paulo]: 2000. Disponível em: <<http://www.bovespa.com.br/pdf/opcoes.pdf>>. Acesso em: 27/09/2008.

BOSER, B. E.; GUYON, I. M.; VAPNIK, V. N. A Training Algorithm for Optimal Margin Classifiers. In: ANNUAL WORKSHOP ON COMPUTATIONAL LEARNING THEORY, 5., 1992, Pittsburgh. **Proceedings of the fifth annual workshop on Computational learning theory**. New York: ACM, 1992. p. 144-152.

CARVALHO, B. P. R. O estado da arte em métodos para reconhecimento de padrões: Support Vector Machine. In: CONGRESSO NACIONAL DA TECNOLOGIA DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO, 2005, Belo Horizonte. **Anais**. Disponível em: <[http://www.cpdee.ufmg.br/~bpenna/bpenna\\_SUCESU\\_2005.pdf](http://www.cpdee.ufmg.br/~bpenna/bpenna_SUCESU_2005.pdf)>. Acesso em: 11/09/2008.

CHAGAS, G. M. B. **Precificação de opções de dólar no mercado brasileiro utilizando redes neurais e algoritmo genéticos**. 88 f. Dissertação (Mestrado em Finanças e Economia Empresarial) - Escola de Economia de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2006. Disponível em: <<http://virtualbib.fgv.br/dspace/handle/10438/2055>>. Acesso: 16/03/2009.

CHAVES, A. da C. F. **Extração de regras Fuzzy para máquinas de vetores suporte (SVM) para classificação em múltiplas classes**. 225 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: <<http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br>> Acesso em: 28/11/2008.

CRISTIANINI, N; SHAW-TAYLOR, J. **An Introduction to Support Vector Machines and other kernel-based learning methods**. 10<sup>th</sup>. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2006.

DIAS, M. S. **O uso de máquina de suporte vetorial para regressão (SVR) na estimação da estrutura a termo da taxa de juros do Brasil**. 77 f. Dissertação. (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007. Disponível em: <<http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br>> Acesso em: 15/07/2008.

FREITAS, S. O. de. **Utilização de modelo baseado em redes neurais para a precificação de opções**. 106 f. Dissertação (Mestrado em Administração) – Departamento de Ciências Administrativas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001. Disponível em: <<http://www.cepead.face.ufmg.br>>. Acesso em: 01/12/2008.

FRIEDLANDER, A. **Elementos da programação não-linear**. Campinas: UNICAMP, 1994.

GUNN, S. R. **Support Vector Machines for Classification and Regression**. University of Southampton, 1998. Disponível em: <<http://www.dec.usc.es/persoal/cernadas/tc03/mc/SVM.pdf>>. Acesso em: 02/09/2008. Relatório Técnico.

HISSA, M. **Investindo em opções: como aumentar seu capital operando com segurança**. 5. ed. Rio de Janeiro: Elsevier: Campus, 2007. (Expo Money).

HULL, J.C. **Fundamentos dos mercados futuros e de opções**. 4. ed. rev. e ampl. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2005.

IZMAILOV, A; SOLODOV, M. **Otimização**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. v.1: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade.

LANARI, C. S. **O efeito “sorriso” da volatilidade implícita do modelo de Black & Scholes**: estudo empírico sobre as opções Telebras PN no ano de 1998. 118 f. Dissertação (Mestrado em Administração) - Departamento de Ciências Administrativas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2000. Disponível em: <<http://www.cepead.face.ufmg.br/>>. Acesso em: 01/12/2008.

LEMGRUBER, E. F. **Avaliação de contratos de opções**. Ed. rev. e ampl. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1995.

LIMA, A. R. G. **Máquinas de vetores suporte na classificação de impressões digitais**. 81 f. Dissertação. (Mestrado em Ciência da Computação) – Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2002. Disponível em: <<http://mdcc.ufc.br/disser/AllanReffson.pdf>>. Acesso em: 02/09/2008.

LIMA, C. A. de M. **Comitê de máquinas**: uma abordagem unificada empregando maquinas de vetores-suporte. 378 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004. Disponível em: <<http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000345129>> Acesso em: 05/08/2008.

LOZARDO, E. **Derivativos no Brasil**: fundamentos e práticas. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1998.

MENDES, L. S. **Avaliação de Opções**: uma comparação do desempenho de métodos distintos de se estimar a volatilidade. 80 f. Dissertação (Mestrado em Administração) – Departamento de Ciências Administrativas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2000. Disponível em: <[http://www4.bcb.gov.br/depesteses/DOWNLOAD/disserta%C3%A7%C3%A3o\\_luassmendes.PDF](http://www4.bcb.gov.br/depesteses/DOWNLOAD/disserta%C3%A7%C3%A3o_luassmendes.PDF)>. Acesso em: 04/01/2009.

MIKOSZEWSKI, C. G. **Opções de compra no mercado brasileiro**: uma abordagem relativa a métodos numéricos frente ao modelo de Black & Scholes. 92 f. Dissertação (Mestrado em Administração) – Setor de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

MOCELLIN, S. *et al.* Support Vector Machine Learning Model for the Prediction of Sentinel Node Status in Patients with Cutaneous Melanoma. **Annals of Surgical Oncology**. New York, v.13, n. 8, p. 1113 – 1122, August 2006.

OSUNA, E.; FREUND, R.; GIROSI, F. Training Support Vector Machines: an Application to Face Detection. **IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition**. Issue: 17-19. p. 130-136, June 1997.

ÖZGÜNDÜZ, E.; SENTÜRK, T.; KARSLIGIL, E. Off-Line Signature Verification and Recognition by Support Vector Machine. In: 13<sup>th</sup> EUROPEAN SIGNAL PROCESSING CONFERENCE, 2005, Turkey. **Proceedings**. Disponível em: <<http://www.eurasip.org/Proceedings/Eusipco/Eusipco2005/defevent/papers/cr2010.pdf>> Acesso em: 31/03/2009.

PARRELLA, F. **Online Support Vector Regression**. Master Science Thesis. Department of Information Science, University of Genoa, Italy, 2007. Disponível em: <<http://onlinesvr.altervista.org/>>. Acesso em: 02/02/2009.

PIRES, M. M; MARWALA. T. American Option Pricing Using Multi-Layer Perceptron and Support Vector Machine. **IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics**, v.2. p.1279-1285, October 2004.

PIRES, M. M; MARWALA. T. American Option Pricing Using Bayesian Multi-Layer Perceptron and Bayesian Support Vector Machine. **IEEE 3<sup>rd</sup> International Conference on Computational Cybernetics**, p.219-224, April 2005.

RUAS, G. I. S. *et al.* Previsão de demanda de energia elétrica utilizando redes neurais artificiais e Support Vector Regression. In: VI ENCONTRO NACIONAL DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL, 2007, Rio de Janeiro. **Anais do XXVII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação**, 2007. v. 1. p. 1262-1271.

SILVA NETO, L. de A. **Opções: do tradicional ao exótico**. 2. ed. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros: Atlas, 1996.

SMOLA, A. J; SCHÖLKOPF, B. A tutorial on support vector regression. **Statistics and Computing**, v.14. n. 3, p. 199-222, August 2004.

TAY, F. E. H; CAO, L. Application of support vector machines in financial time series forecasting. **Omega. The International Journal of Management Science**. v.9, Issue 4, p.309- 317, August 2001.

TRAFALIS, T. B; INCE, H. Support Vector Machine for Regression and Applications to Financial Forecasting. **Proceedings of the IEEE-INNS-ENNS International Joint Conference on Neural Networks**. Italy. v. 6. p. 348- 353, July 2000.

VITIELLO JUNIOR, L. R. de S. Opções de compra: o ajustamento ao mercado brasileiro de dois modelos de precificação. **Revista de Administração Contemporânea**, Rio de Janeiro, v.4, n.1, p. 27-45, 2000. Disponível em: <[http://www.anpad.org.br/rac/vol\\_04/dwn/rac-v4-n1-lrj.pdf](http://www.anpad.org.br/rac/vol_04/dwn/rac-v4-n1-lrj.pdf)> Acesso em: 06/01/2009.

WILMOTT, P; HOWISON. S; DEWYNNE. J. **The Mathematics of Financial Derivatives**: A Student Introduction. 15<sup>th</sup>. ed. New York: Cambridge University Press, 2007.

YANG, H.; CHAN, L.; KING, I. Support Vector Machine Regression for Volatile Stock Market Prediction. **Intelligent Data Engineering and Automated Learning- IDEAL**, v. 2412. p. 143-152, January 2002.

YAO, Y. *et al.* A New Machine Learning Approach to Fingerprint Classification. **Advances in Artificial Intelligence**, v.2175. p. 57-63, January 2001.

YU. C. *et. al.* A Method for Automatic Identification of Reliable Heart Rates Calculated from ECG and PPG Waveforms. **Journal of the American Medical Informatics Association**. Stanford, v.13, n.3, June 2006.

## DOCUMENTOS CONSULTADOS

TAXA SELIC. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/?SELIC>> Acesso em: 05/06/2009.

LIBSVM. Disponível em: <<http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm/>> Acesso em: 05/11/2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. Sistema de Bibliotecas. **Normas para apresentação de documentos científicos**. Curitiba: UFPR, 2007. v.2: Teses, dissertações, monografias e outros trabalhos acadêmicos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. Sistema de Bibliotecas. **Normas para apresentação de documentos científicos**. Curitiba: UFPR, 2007. v.3: Citações e notas de rodapé.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. Sistema de Bibliotecas. **Normas para apresentação de documentos científicos**. Curitiba: UFPR, 2007. v.4: Referências.

## GLOSSÁRIO

**Ações:** Títulos de renda variável, nominativos e negociáveis, que representam para quem os possui, uma fração do capital social de uma empresa.

**Arbitragem:** Operação cuja finalidade é tirar proveito da diferença de preços de um mesmo produto (ativo) negociado em mercados diferentes. O objetivo é aproveitar as discrepâncias no processo de formação de preços dos diversos ativos e entre vencimentos. Chama-se de Arbitrador o participante de mercado que realiza operação de arbitragem.

**Ativo objeto:** Ativo sobre o qual se negociam as opções.

**Data de exercício:** Data de vencimento do contrato de opção. Momento a partir do qual os direitos negociados se extinguem. No Brasil, esta data consiste na terceira segunda-feira do mês.

**Derivativo:** Contrato ou título financeiro cujo valor de mercado e características de negociação estão vinculados ao preço de outro contrato ou título, denominado ativo-objeto. Não apresenta valor próprio, deriva-se sempre do valor de um bem básico.

**Especulação:** Tomar uma posição no mercado de opções sem uma posição correspondente no mercado à vista. Nesse caso, o objetivo é atingir ganhos apostando na variação dos preços de mercados. Chama-se de Especulador o participante de mercado que realiza a operação de especulação.

**Exercício da opção:** Operação pela qual o titular da opção exerce seu direito de comprar (no caso de opções de compra) ou de vender (no caso de opções de venda), o ativo-objeto pelo seu preço de exercício.

**Grau de *Moneyness*:** Refere-se à relação entre o preço de exercício da opção e o preço à vista da ação.

**Hedge (proteção):** Operação cuja finalidade é proteger o participante do mercado físico de um bem ou ativo, contra variações adversas de taxas, moedas ou preços. Equivale a ter uma posição em mercado de derivativos oposta à posição assumida no mercado à vista, para minimizar o risco de perda financeira decorrente da alteração adversa de preços. Chama-se de *Hedger* o participante de mercado que realiza a operação de *hedge*.



**Lançador de opção:** Pessoa que vende uma opção, seja ela de compra ou de venda de um ativo. Aquele que assume os compromissos referentes à opção e tem a obrigação futura de liquidá-los, se solicitado pelo comprador.

**Modelo de Black & Scholes:** Modelo desenvolvido para a precificação de opções européias sobre ações que não pagam dividendos. Pressupõe que os preços das ações seguem movimentos aleatórios dados pela distribuição lognormal, e conseqüentemente os retornos da ação seguem a distribuição normal.

**Opção americana:** Contrato que permite ao seu comprador exercer um direito (de comprar ou vender certo ativo) em qualquer momento, desde a efetivação do negócio até a data de vencimento do mesmo.

**Opção de compra (*call*):** Contrato que concede ao seu titular o direito de comprar certo ativo em uma data futura, por um preço predeterminado no presente.

**Opção de venda (*put*):** Contrato que concede ao seu titular o direito de vender certo ativo em uma data futura, por um preço predeterminado no presente.

**Opção dentro do dinheiro (*in the money*):** Opção cujo exercício resulta em um fluxo de caixa positivo para seu detentor.

**Opção européia:** Contrato que permite ao seu comprador exercer um direito (de comprar ou vender certo ativo) apenas na data de seu vencimento, também chamada de data de exercício.

**Opção fora do dinheiro (*out of the money*):** Opção cujo exercício resulta em um fluxo de caixa negativo para seu detentor.

**Opção no dinheiro (*at the money*):** Opção cujo exercício resulta em um fluxo de caixa nulo para seu detentor.

**Operações *day-trade* (no mercado de opções):** Assumir uma posição (de compra ou venda) num contrato de opções e liquidá-la no mesmo dia, antes do final do pregão. São posições onerosas, pois há uma incidência de tributação e custos de corretagem em cada uma das posições assumidas (comprada ou vendida), bem como nas suas liquidações. No mercado brasileiro, tais operações não são permitidas na data de vencimento das opções.

**Precificação de opções:** Procedimento pelo qual se determina um preço (prêmio) teórico de uma opção.

**Preço de exercício:** Valor pelo qual o comprador de opções tem o direito de negociar o ativo-objeto (comprar, no caso de opções de compra, e vender, no caso de opções de venda). Seu valor é acordado na data de efetivação do contrato.

**Prêmio da opção:** Preço de uma opção. Corresponde ao valor monetário que o titular paga ao lançador de opções para adquirir um direito. Seu valor varia conforme as oscilações e expectativas do mercado.

**Série de opções:** Opções do mesmo tipo (compra ou venda), referentes ao mesmo ativo-objeto, tendo o mesmo mês de vencimento e o mesmo preço de exercício.

**Titular de opção:** Pessoa que compra uma opção, seja ela de compra ou de venda de um ativo. Aquele que tem o direito futuro, mas não a obrigação, de exercer o contrato.

**Valor extrínseco:** Parte do prêmio de uma opção que consiste em valor do tempo. Refere-se à quantidade do prêmio que excede ao valor intrínseco.

**Valor intrínseco:** Parte do prêmio de uma opção que consiste em valor verdadeiro. Representa o ganho da opção dentro do dinheiro, caso essa seja exercida imediatamente. Opções no dinheiro ou fora do dinheiro não têm valor intrínseco.

**Virar pó:** Jargão utilizado para designar as opções que chegam ao dia do vencimento sem valor.

**Volatilidade Futura:** Volatilidade que descreve a futura distribuição de preços do ativo-objeto. Variável de valor desconhecido.

**Volatilidade Histórica:** Volatilidade estimada por meio das cotações históricas do ativo-objeto. Utilizada para estimar o valor da volatilidade futura.

**Volatilidade Implícita:** Volatilidade do ativo-objeto que está implícita no prêmio de mercado de uma opção. Seu valor é estimado por meio da aplicação de algum modelo teórico de precificação. Utilizada para estimar o valor da volatilidade futura.

**Zerar a posição:** Ato de vender o que se comprou ou de comprar o que se vendeu, ficando em posição nula no mercado de opções, sem nenhum direito ou obrigação.

## APÊNDICE 1

TABELA 13 - MODELOS DE SVR

MODELO	VARIÁVEIS DE ENTRADA	$\epsilon$	C	KERNEL	$p$	CONSTANTE k	$\kappa$	$\sigma$
M1	S, X, T	0,005	10	Linear	-	-	-	-
M2	S, X, T	0,005	10	Pol. homogêneo	7	-	-	-
M3	S, X, T	0,005	10	Pol. não homog.	5	1	-	-
M4	S, X, T	0,005	10	Sigmoidal	-	-2	0,9	-
M5	S, X, T	0,005	10	Gaussiano	-	-	-	0,5
M6	S, X, T	0,01	10	Linear	-	-	-	-
M7	S, X, T	0,01	10	Pol. homogêneo	7	-	-	-
M8	S, X, T	0,01	10	Pol. não homog.	5	1	-	-
M9	S, X, T	0,01	10	Sigmoidal	-	-2	0,9	-
M10	S, X, T	0,01	10	Gaussiano	-	-	-	0,5
M11	S, X, T	0,01	5	Sigmoidal	-	-2	0,9	-
M12	S, X, T	0,05	100	Linear	-	-	-	-
M13	S, X, T	0,05	100	Pol. homogêneo	7	-	-	-
M14	S, X, T	0,05	100	Pol. não homog.	5	1	-	-
M15	S, X, T	0,05	100	Sigmoidal	-	-2	0,9	-
M16	S, X, T	0,05	100	Gaussiano	-	-	-	0,5
M17	S, X, T	0,05	10	Linear	-	-	-	-
M18	S, X, T	0,05	10	Sigmoidal	-	-2	0,9	-
M19	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,025	50	Linear	-	-	-	-
M20	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,025	50	Pol. homogêneo	5	-	-	-
M21	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,025	50	Pol. não homog.	3	2	-	-
M22	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,025	50	Sigmoidal	-	-0,5	0,2	-
M23	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,025	50	Gaussiano	-	-	-	0,75
M24	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,025	50	Gaussiano	-	-	-	0,4
M25	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,025	50	Gaussiano	-	-	-	0,5
M26	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,025	50	Gaussiano	-	-	-	0,9
M27	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,015	25	Linear	-	-	-	-
M28	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,015	25	Pol. homogêneo	5	-	-	-
M29	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,015	25	Pol. não homog.	3	2	-	-
M30	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,015	25	Sigmoidal	-	-0,5	0,2	-
M31	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,015	25	Gaussiano	-	-	-	0,75
M32	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,015	25	Gaussiano	-	-	-	0,4
M33	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,015	25	Gaussiano	-	-	-	0,5
M34	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,015	25	Gaussiano	-	-	-	0,9
M35	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,005	10	Linear	-	-	-	-
M36	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,005	10	Pol. homogêneo	5	-	-	-
M37	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,005	10	Pol. não homog.	3	2	-	-
M38	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,005	10	Sigmoidal	-	-0,5	0,2	-
M39	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,005	10	Gaussiano	-	-	-	0,75
M40	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,005	10	Gaussiano	-	-	-	0,4
M41	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,005	10	Gaussiano	-	-	-	0,5
M42	S, X, T, r, $\sigma$ (n=30)	0,005	10	Gaussiano	-	-	-	0,9
M43	T, X, M, C <sub>anterior</sub> , S <sub>anterior</sub>	0,02	40	Linear	-	-	-	-
M44	T, X, M, C <sub>anterior</sub> , S <sub>anterior</sub>	0,02	40	Pol. homogêneo	6	-	-	-
M45	T, X, M, C <sub>anterior</sub> , S <sub>anterior</sub>	0,02	40	Pol. não homog.	4	3	-	-
M46	T, X, M, C <sub>anterior</sub> , S <sub>anterior</sub>	0,02	40	Sigmoidal	-	-0,25	0,1	-
M47	T, X, M, C <sub>anterior</sub> , S <sub>anterior</sub>	0,02	40	Gaussiano	-	-	-	0,8
M48	T, X, M, C <sub>anterior</sub> , S <sub>anterior</sub>	0,01	20	Linear	-	-	-	-

Continua

## Conclusão

MODELO	VARIÁVEIS DE ENTRADA	$\epsilon$	C	KERNEL	p	CONSTANTE k	$\kappa$	$\sigma$
M49	T, X, M, $C_{anterior}$ , $S_{anterior}$	0,01	20	Pol. homogêneo	6	-	-	-
M50	T, X, M, $C_{anterior}$ , $S_{anterior}$	0,01	20	Pol. não homog.	4	3	-	-
M51	T, X, M, $C_{anterior}$ , $S_{anterior}$	0,01	20	Sigmoidal	-	-0,25	0,1	-
M52	T, X, M, $C_{anterior}$ , $S_{anterior}$	0,01	20	Gaussiano	-	-	-	0,8
M53	T, S/X, u	0,005	25	Linear	-	-	-	-
M54	T, S/X, u	0,005	25	Pol. homogêneo	4	-	-	-
M55	T, S/X, u	0,005	25	Pol. não homog.	2	5	-	-
M56	T, S/X, u	0,005	25	Sigmoidal	-	-0,75	0,4	-
M57	T, S/X, u	0,005	25	Gaussiano	-	-	-	0,9
M58	T, S/X, u	0,01	40	Linear	-	-	-	-
M59	T, S/X, u	0,01	40	Pol. homogêneo	4	-	-	-
M60	T, S/X, u	0,01	40	Pol. não homog.	2	5	-	-
M61	T, S/X, u	0,01	40	Sigmoidal	-	-0,75	0,4	-
M62	T, S/X, u	0,01	40	Gaussiano	-	-	-	0,9
M63	T, S/X, u	0,01	30	Sigmoidal	-	-0,75	0,4	-
M64	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,01	10	Linear	-	-	-	-
M65	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,01	10	Pol. homogêneo	3	-	-	-
M66	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,01	10	Pol. não homog.	4	1	-	-
M67	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,01	10	Sigmoidal	-	-0,5	0,1	-
M68	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,01	10	Gaussiano	-	-	-	0,6
M69	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,025	30	Linear	-	-	-	-
M70	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,025	30	Pol. homogêneo	3	-	-	-
M71	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,025	30	Pol. não homog.	4	1	-	-
M72	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,025	30	Sigmoidal	-	-0,5	0,1	-
M73	T, $\sigma_{(n=30)}$ , $C_{anterior}/S_{anterior}$	0,025	30	Gaussiano	-	-	-	0,6
M74	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,015	35	Linear	-	-	-	-
M75	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,015	35	Pol. homogêneo	5	-	-	-
M76	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,015	35	Pol. não homog.	4	2	-	-
M77	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,015	35	Sigmoidal	-	-0,5	0,3	-
M78	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,015	35	Gaussiano	-	-	-	0,7
M79	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,005	15	Linear	-	-	-	-
M80	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,005	15	Pol. homogêneo	5	-	-	-
M81	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,005	15	Pol. não homog.	4	2	-	-
M82	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,005	15	Sigmoidal	-	-0,5	0,3	-
M83	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,005	15	Gaussiano	-	-	-	0,7
M84	T, S/X, $\sigma_{(n=30)}$	0,005	20	Sigmoidal	-	-0,5	0,3	-

FONTE: A autora (2009)

## APÊNDICE 2

TABELA 14 - RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB20

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
Dentro do Preço	PETRB20	M1	0,0829	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M2	0,0398	10	-
Dentro do Preço	PETRB20	M3	0,0394	7	-
Dentro do Preço	PETRB20	M4	0,0731	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M5	0,0455	7	-
Dentro do Preço	PETRB20	M6	0,0826	2	-
Dentro do Preço	PETRB20	M7	0,0394	10	-
Dentro do Preço	PETRB20	M8	0,0395	9	-
Dentro do Preço	PETRB20	M9	0,0738	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M10	0,0453	7	-
Dentro do Preço	PETRB20	M11	0,1134	2	-
Dentro do Preço	PETRB20	M12	0,1003	4	-
Dentro do Preço	PETRB20	M13	0,0349	12	-
Dentro do Preço	PETRB20	M14	0,0377	11	-
Dentro do Preço	PETRB20	M15	0,1963	4	-
Dentro do Preço	PETRB20	M16	0,0405	10	-
Dentro do Preço	PETRB20	M17	0,0852	2	-
Dentro do Preço	PETRB20	M18	0,0749	2	-
Dentro do Preço	PETRB20	M19	0,0736	5	-
Dentro do Preço	PETRB20	M20	0,0401	20	-
Dentro do Preço	PETRB20	M21	0,0389	14	-
Dentro do Preço	PETRB20	M22	0,0792	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M23	0,0435	11	-
Dentro do Preço	PETRB20	M24	0,0398	14	-
Dentro do Preço	PETRB20	M25	0,0415	14	-
Dentro do Preço	PETRB20	M26	0,0466	9	-
Dentro do Preço	PETRB20	M27	0,0695	4	-
Dentro do Preço	PETRB20	M28	0,0378	18	-
Dentro do Preço	PETRB20	M29	0,0394	12	-
Dentro do Preço	PETRB20	M30	0,1223	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M31	0,0480	8	-
Dentro do Preço	PETRB20	M32	0,0417	13	-
Dentro do Preço	PETRB20	M33	0,0453	13	-
Dentro do Preço	PETRB20	M34	0,0515	6	-
Dentro do Preço	PETRB20	M35	0,0777	4	-
Dentro do Preço	PETRB20	M36	0,0370	14	-
Dentro do Preço	PETRB20	M37	0,0433	9	-
Dentro do Preço	PETRB20	M38	0,1742	2	-
Dentro do Preço	PETRB20	M39	0,0558	5	-
Dentro do Preço	PETRB20	M40	0,0488	12	-
Dentro do Preço	PETRB20	M41	0,0491	8	-
Dentro do Preço	PETRB20	M42	0,0660	5	-
Dentro do Preço	PETRB20	M43	0,0693	4	-
Dentro do Preço	PETRB20	M44	0,0394	24	-
Dentro do Preço	PETRB20	M45	0,0392	19	-
Dentro do Preço	PETRB20	M46	0,0979	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M47	0,0448	11	-
Dentro do Preço	PETRB20	M48	0,0734	3	-

**Continua**

**Conclusão**

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
Dentro do Preço	PETRB20	M49	0,0381	22	-
Dentro do Preço	PETRB20	M50	0,0389	15	-
Dentro do Preço	PETRB20	M51	0,1093	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M52	0,0501	7	-
Dentro do Preço	PETRB20	M53	0,0815	4	-
Dentro do Preço	PETRB20	M54	0,0453	14	-
Dentro do Preço	PETRB20	M55	0,0609	7	-
Dentro do Preço	PETRB20	M56	0,0784	6	-
Dentro do Preço	PETRB20	M57	0,0491	11	-
Dentro do Preço	PETRB20	M58	0,0758	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M59	0,0406	13	-
Dentro do Preço	PETRB20	M60	0,0623	7	-
Dentro do Preço	PETRB20	M61	0,0717	6	-
Dentro do Preço	PETRB20	M62	0,0422	14	-
Dentro do Preço	PETRB20	M63	0,0787	6	-
Dentro do Preço	PETRB20	M64	0,1254	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M65	0,1245	4	-
Dentro do Preço	PETRB20	M66	0,1245	8	-
Dentro do Preço	PETRB20	M67	0,1716	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M68	0,1166	7	-
Dentro do Preço	PETRB20	M69	0,1296	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M70	0,1206	6	-
Dentro do Preço	PETRB20	M71	0,1183	9	-
Dentro do Preço	PETRB20	M72	0,1392	2	-
Dentro do Preço	PETRB20	M73	0,1208	9	-
Dentro do Preço	PETRB20	M74	0,0725	4	-
Dentro do Preço	PETRB20	M75	0,0505	9	-
Dentro do Preço	PETRB20	M76	0,0464	12	-
Dentro do Preço	PETRB20	M77	0,0855	3	-
Dentro do Preço	PETRB20	M78	0,0469	6	-
Dentro do Preço	PETRB20	M79	0,0768	4	-
Dentro do Preço	PETRB20	M80	0,0507	9	-
Dentro do Preço	PETRB20	M81	0,0463	10	-
Dentro do Preço	PETRB20	M82	0,1208	2	-
Dentro do Preço	PETRB20	M83	0,0521	6	-
Dentro do Preço	PETRB20	M84	0,1009	2	-

FONTE: A autora (2009)

### APÊNDICE 3

TABELA 15 - RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB22

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
Dentro do Preço	PETRB22	M1	0,1365	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M2	0,0477	10	-
Dentro do Preço	PETRB22	M3	0,0498	9	-
Dentro do Preço	PETRB22	M4	0,0992	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M5	0,0598	7	-
Dentro do Preço	PETRB22	M6	0,1363	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M7	0,0475	9	-
Dentro do Preço	PETRB22	M8	0,0500	9	-
Dentro do Preço	PETRB22	M9	0,0995	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M10	0,0546	7	-
Dentro do Preço	PETRB22	M11	0,1493	2	-
Dentro do Preço	PETRB22	M12	0,1421	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M13	0,0457	13	-
Dentro do Preço	PETRB22	M14	0,0472	12	-
Dentro do Preço	PETRB22	M15	0,4513	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M16	0,0472	10	-
Dentro do Preço	PETRB22	M17	0,1344	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M18	0,1013	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M19	0,1332	5	-
Dentro do Preço	PETRB22	M20	0,0409	18	-
Dentro do Preço	PETRB22	M21	0,0424	12	-
Dentro do Preço	PETRB22	M22	0,1496	4	-
Dentro do Preço	PETRB22	M23	0,0507	9	-
Dentro do Preço	PETRB22	M24	0,0458	16	-
Dentro do Preço	PETRB22	M25	0,0487	15	-
Dentro do Preço	PETRB22	M26	0,0554	8	-
Dentro do Preço	PETRB22	M27	0,1264	4	-
Dentro do Preço	PETRB22	M28	0,0390	20	-
Dentro do Preço	PETRB22	M29	0,0441	14	-
Dentro do Preço	PETRB22	M30	0,1511	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M31	0,0555	8	-
Dentro do Preço	PETRB22	M32	0,0499	14	-
Dentro do Preço	PETRB22	M33	0,0508	9	-
Dentro do Preço	PETRB22	M34	0,0648	6	-
Dentro do Preço	PETRB22	M35	0,1241	4	-
Dentro do Preço	PETRB22	M36	0,0390	17	-
Dentro do Preço	PETRB22	M37	0,0449	12	-
Dentro do Preço	PETRB22	M38	0,1936	2	-
Dentro do Preço	PETRB22	M39	0,0687	6	-
Dentro do Preço	PETRB22	M40	0,0539	10	-
Dentro do Preço	PETRB22	M41	0,0562	9	-
Dentro do Preço	PETRB22	M42	0,0861	5	-
Dentro do Preço	PETRB22	M43	0,0982	6	-
Dentro do Preço	PETRB22	M44	0,0369	24	-
Dentro do Preço	PETRB22	M45	0,0552	19	-
Dentro do Preço	PETRB22	M46	0,1233	5	-
Dentro do Preço	PETRB22	M47	0,0548	11	-
Dentro do Preço	PETRB22	M48	0,0979	6	-

Continua

**Conclusão**

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
Dentro do Preço	PETRB22	M49	0,0379	25	-
Dentro do Preço	PETRB22	M50	0,0496	19	-
Dentro do Preço	PETRB22	M51	0,1349	2	-
Dentro do Preço	PETRB22	M52	0,0628	7	-
Dentro do Preço	PETRB22	M53	0,1204	4	-
Dentro do Preço	PETRB22	M54	0,0639	13	-
Dentro do Preço	PETRB22	M55	0,0802	8	-
Dentro do Preço	PETRB22	M56	0,0919	6	-
Dentro do Preço	PETRB22	M57	0,0692	12	-
Dentro do Preço	PETRB22	M58	0,1204	4	-
Dentro do Preço	PETRB22	M59	0,0602	12	-
Dentro do Preço	PETRB22	M60	0,0705	9	-
Dentro do Preço	PETRB22	M61	0,0887	5	-
Dentro do Preço	PETRB22	M62	0,0669	12	-
Dentro do Preço	PETRB22	M63	0,0885	6	-
Dentro do Preço	PETRB22	M64	0,1673	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M65	0,1709	7	-
Dentro do Preço	PETRB22	M66	0,1621	7	-
Dentro do Preço	PETRB22	M67	0,1830	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M68	0,1600	8	-
Dentro do Preço	PETRB22	M69	0,1673	4	-
Dentro do Preço	PETRB22	M70	0,1651	7	-
Dentro do Preço	PETRB22	M71	0,1620	10	-
Dentro do Preço	PETRB22	M72	0,1695	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M73	0,1543	9	-
Dentro do Preço	PETRB22	M74	0,1407	4	-
Dentro do Preço	PETRB22	M75	0,0510	7	-
Dentro do Preço	PETRB22	M76	0,0488	13	-
Dentro do Preço	PETRB22	M77	0,1631	3	-
Dentro do Preço	PETRB22	M78	0,0592	6	-
Dentro do Preço	PETRB22	M79	0,1363	2	-
Dentro do Preço	PETRB22	M80	0,0528	7	-
Dentro do Preço	PETRB22	M81	0,0513	11	-
Dentro do Preço	PETRB22	M82	-	-	Não foram encontrados vetores suportes
Dentro do Preço	PETRB22	M83	0,0643	6	-
Dentro do Preço	PETRB22	M84	0,1495	2	-

FONTE: A autora (2009)



## APÊNDICE 4

TABELA 16 - RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB24

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
No preço	PETRB24	M1	0,1501	2	-
No preço	PETRB24	M2	0,0487	11	-
No preço	PETRB24	M3	0,0506	8	-
No preço	PETRB24	M4	0,1097	3	-
No preço	PETRB24	M5	0,0688	6	-
No preço	PETRB24	M6	0,1492	3	-
No preço	PETRB24	M7	0,0484	12	-
No preço	PETRB24	M8	0,0502	9	-
No preço	PETRB24	M9	0,1077	3	-
No preço	PETRB24	M10	0,0693	8	-
No preço	PETRB24	M11	0,1593	2	-
No preço	PETRB24	M12	0,2179	3	-
No preço	PETRB24	M13	0,0511	13	-
No preço	PETRB24	M14	0,0482	11	-
No preço	PETRB24	M15	0,6037	4	-
No preço	PETRB24	M16	0,0554	7	-
No preço	PETRB24	M17	0,1530	2	-
No preço	PETRB24	M18	0,1030	3	-
No preço	PETRB24	M19	0,1703	5	-
No preço	PETRB24	M20	0,0488	19	-
No preço	PETRB24	M21	0,0512	14	-
No preço	PETRB24	M22	0,1470	5	-
No preço	PETRB24	M23	0,0642	7	-
No preço	PETRB24	M24	0,0452	16	-
No preço	PETRB24	M25	0,0532	12	-
No preço	PETRB24	M26	0,0699	10	-
No preço	PETRB24	M27	0,1464	3	-
No preço	PETRB24	M28	0,0425	18	-
No preço	PETRB24	M29	0,0549	14	-
No preço	PETRB24	M30	0,1597	4	-
No preço	PETRB24	M31	0,0711	8	-
No preço	PETRB24	M32	0,0498	15	-
No preço	PETRB24	M33	0,0623	10	-
No preço	PETRB24	M34	0,0791	8	-
No preço	PETRB24	M35	0,1307	4	-
No preço	PETRB24	M36	0,0434	14	-
No preço	PETRB24	M37	0,0573	12	-
No preço	PETRB24	M38	0,2240	3	-
No preço	PETRB24	M39	0,0883	6	-
No preço	PETRB24	M40	0,0691	12	-
No preço	PETRB24	M41	0,0715	9	-
No preço	PETRB24	M42	0,0966	5	-
No preço	PETRB24	M43	0,1061	4	-
No preço	PETRB24	M44	0,0566	23	-
No preço	PETRB24	M45	0,0614	16	-
No preço	PETRB24	M46	0,1475	3	-
No preço	PETRB24	M47	0,0613	10	-
No preço	PETRB24	M48	0,1151	4	-

**Continua**

**Conclusão**

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
No preço	PETRB24	M49	0,0519	23	-
No preço	PETRB24	M50	0,0488	17	-
No preço	PETRB24	M51	0,1608	3	-
No preço	PETRB24	M52	0,0689	7	-
No preço	PETRB24	M53	0,1590	4	-
No preço	PETRB24	M54	0,0694	13	-
No preço	PETRB24	M55	0,0933	9	-
No preço	PETRB24	M56	0,1296	5	-
No preço	PETRB24	M57	0,0817	11	-
No preço	PETRB24	M58	0,1615	4	-
No preço	PETRB24	M59	0,0685	13	-
No preço	PETRB24	M60	0,0902	9	-
No preço	PETRB24	M61	0,1292	6	-
No preço	PETRB24	M62	0,0759	13	-
No preço	PETRB24	M63	0,1217	7	-
No preço	PETRB24	M64	0,1859	3	-
No preço	PETRB24	M65	0,1770	6	-
No preço	PETRB24	M66	0,1611	8	-
No preço	PETRB24	M67	0,2078	3	-
No preço	PETRB24	M68	0,1697	6	-
No preço	PETRB24	M69	0,1903	4	-
No preço	PETRB24	M70	0,1750	7	-
No preço	PETRB24	M71	0,1563	10	-
No preço	PETRB24	M72	0,1881	3	-
No preço	PETRB24	M73	0,1637	12	-
No preço	PETRB24	M74	0,1492	4	-
No preço	PETRB24	M75	0,0719	9	-
No preço	PETRB24	M76	0,0710	12	-
No preço	PETRB24	M77	0,1594	3	-
No preço	PETRB24	M78	0,0806	8	-
No preço	PETRB24	M79	0,1339	4	-
No preço	PETRB24	M80	0,0720	8	-
No preço	PETRB24	M81	0,0739	11	-
No preço	PETRB24	M82	0,1673	3	-
No preço	PETRB24	M83	0,0834	7	-
No preço	PETRB24	M84	0,1537	2	-

FONTE: A autora (2009)

## APÊNDICE 5

TABELA 17 - RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB26

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
Fora do Preço	PETRB26	M1	0,1893	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M2	0,0900	11	-
Fora do Preço	PETRB26	M3	0,1053	8	-
Fora do Preço	PETRB26	M4	0,2164	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M5	0,1178	5	-
Fora do Preço	PETRB26	M6	0,1880	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M7	0,0891	10	-
Fora do Preço	PETRB26	M8	0,1044	7	-
Fora do Preço	PETRB26	M9	0,2141	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M10	0,1177	6	-
Fora do Preço	PETRB26	M11	0,2010	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M12	0,2131	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M13	0,0835	12	-
Fora do Preço	PETRB26	M14	0,0860	12	-
Fora do Preço	PETRB26	M15	1,2479	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M16	0,0944	7	-
Fora do Preço	PETRB26	M17	0,1823	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M18	0,2207	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M19	0,1855	5	-
Fora do Preço	PETRB26	M20	0,0929	20	-
Fora do Preço	PETRB26	M21	0,1064	11	-
Fora do Preço	PETRB26	M22	0,1877	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M23	0,1114	9	-
Fora do Preço	PETRB26	M24	0,0631	18	-
Fora do Preço	PETRB26	M25	0,0834	13	-
Fora do Preço	PETRB26	M26	0,1178	8	-
Fora do Preço	PETRB26	M27	0,1652	5	-
Fora do Preço	PETRB26	M28	0,0808	19	-
Fora do Preço	PETRB26	M29	0,1168	12	-
Fora do Preço	PETRB26	M30	0,1785	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M31	0,1191	10	-
Fora do Preço	PETRB26	M32	0,0781	13	-
Fora do Preço	PETRB26	M33	0,0966	11	-
Fora do Preço	PETRB26	M34	0,1256	7	-
Fora do Preço	PETRB26	M35	0,1586	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M36	0,0798	17	-
Fora do Preço	PETRB26	M37	0,1254	11	-
Fora do Preço	PETRB26	M38	0,2638	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M39	0,1308	7	-
Fora do Preço	PETRB26	M40	0,1007	11	-
Fora do Preço	PETRB26	M41	0,1174	10	-
Fora do Preço	PETRB26	M42	0,1420	8	-
Fora do Preço	PETRB26	M43	0,1591	5	-
Fora do Preço	PETRB26	M44	0,0813	25	-
Fora do Preço	PETRB26	M45	0,1146	19	-
Fora do Preço	PETRB26	M46	0,1644	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M47	0,1026	14	-
Fora do Preço	PETRB26	M48	0,1414	5	-

**Continua**

**Conclusão**

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
Fora do Preço	PETRB26	M49	0,0763	27	-
Fora do Preço	PETRB26	M50	0,0897	17	-
Fora do Preço	PETRB26	M51	0,1772	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M52	0,1118	10	-
Fora do Preço	PETRB26	M53	0,1724	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M54	0,1283	14	-
Fora do Preço	PETRB26	M55	0,1334	9	-
Fora do Preço	PETRB26	M56	0,1932	5	-
Fora do Preço	PETRB26	M57	0,1200	12	-
Fora do Preço	PETRB26	M58	0,1742	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M59	0,1252	14	-
Fora do Preço	PETRB26	M60	0,1272	8	-
Fora do Preço	PETRB26	M61	0,2419	5	-
Fora do Preço	PETRB26	M62	0,1138	13	-
Fora do Preço	PETRB26	M63	0,2132	6	-
Fora do Preço	PETRB26	M64	0,2366	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M65	0,2416	5	-
Fora do Preço	PETRB26	M66	0,2293	9	-
Fora do Preço	PETRB26	M67	0,2484	2	-
Fora do Preço	PETRB26	M68	0,2263	7	-
Fora do Preço	PETRB26	M69	0,2343	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M70	0,2383	6	-
Fora do Preço	PETRB26	M71	0,2261	12	-
Fora do Preço	PETRB26	M72	0,2339	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M73	0,2155	10	-
Fora do Preço	PETRB26	M74	0,1860	4	-
Fora do Preço	PETRB26	M75	0,1111	8	-
Fora do Preço	PETRB26	M76	0,1116	10	-
Fora do Preço	PETRB26	M77	0,1752	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M78	0,1285	8	-
Fora do Preço	PETRB26	M79	0,1660	3	-
Fora do Preço	PETRB26	M80	0,1189	8	-
Fora do Preço	PETRB26	M81	0,1227	11	-
Fora do Preço	PETRB26	M82	0,1780	2	-
Fora do Preço	PETRB26	M83	0,1322	8	-
Fora do Preço	PETRB26	M84	0,1672	2	-

FONTE: A autora (2009)

## APÊNDICE 6

TABELA 18 - RESULTADOS DOS MODELOS DE SVR NA PRECIFICAÇÃO DA SÉRIE PETRB28

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
Fora do Preço	PETRB28	M1	0,2325	2	-
Fora do Preço	PETRB28	M2	0,1405	10	-
Fora do Preço	PETRB28	M3	0,1398	10	-
Fora do Preço	PETRB28	M4	0,3041	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M5	0,1604	7	-
Fora do Preço	PETRB28	M6	0,2344	2	-
Fora do Preço	PETRB28	M7	0,1383	11	-
Fora do Preço	PETRB28	M8	0,1368	10	-
Fora do Preço	PETRB28	M9	0,3034	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M10	0,1568	6	-
Fora do Preço	PETRB28	M11	0,2646	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M12	0,2132	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M13	0,1412	13	-
Fora do Preço	PETRB28	M14	0,1167	9	-
Fora do Preço	PETRB28	M15	1,4634	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M16	0,1367	11	-
Fora do Preço	PETRB28	M17	0,2395	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M18	0,3006	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M19	0,2458	5	-
Fora do Preço	PETRB28	M20	0,1368	18	-
Fora do Preço	PETRB28	M21	0,1477	13	-
Fora do Preço	PETRB28	M22	0,6938	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M23	0,1585	12	-
Fora do Preço	PETRB28	M24	0,0909	16	-
Fora do Preço	PETRB28	M25	0,1187	13	-
Fora do Preço	PETRB28	M26	0,1693	12	-
Fora do Preço	PETRB28	M27	0,2405	5	-
Fora do Preço	PETRB28	M28	0,0999	16	-
Fora do Preço	PETRB28	M29	0,1486	13	-
Fora do Preço	PETRB28	M30	0,3924	4	-
Fora do Preço	PETRB28	M31	0,1645	11	-
Fora do Preço	PETRB28	M32	0,0968	16	-
Fora do Preço	PETRB28	M33	0,1427	12	-
Fora do Preço	PETRB28	M34	0,1703	9	-
Fora do Preço	PETRB28	M35	0,2665	4	-
Fora do Preço	PETRB28	M36	0,1016	15	-
Fora do Preço	PETRB28	M37	0,1583	13	-
Fora do Preço	PETRB28	M38	0,4238	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M39	0,1769	9	-
Fora do Preço	PETRB28	M40	0,1300	13	-
Fora do Preço	PETRB28	M41	0,1638	12	-
Fora do Preço	PETRB28	M42	0,1857	8	-
Fora do Preço	PETRB28	M43	0,1680	5	-
Fora do Preço	PETRB28	M44	0,0991	27	-
Fora do Preço	PETRB28	M45	0,1069	20	-
Fora do Preço	PETRB28	M46	0,1619	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M47	0,1098	15	-
Fora do Preço	PETRB28	M48	0,1666	6	-

**Continua**

**Conclusão**

GRUPO	SÉRIE	MODELO	EQRM	VS	OBSERVAÇÕES
Fora do Preço	PETRB28	M49	0,0946	28	-
Fora do Preço	PETRB28	M50	0,1021	21	-
Fora do Preço	PETRB28	M51	0,1822	4	-
Fora do Preço	PETRB28	M52	0,1200	12	-
Fora do Preço	PETRB28	M53	0,1837	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M54	0,1474	14	-
Fora do Preço	PETRB28	M55	0,1777	7	-
Fora do Preço	PETRB28	M56	0,2142	6	-
Fora do Preço	PETRB28	M57	0,1606	12	-
Fora do Preço	PETRB28	M58	0,1871	4	-
Fora do Preço	PETRB28	M59	0,1496	15	-
Fora do Preço	PETRB28	M60	0,1716	8	-
Fora do Preço	PETRB28	M61	0,2574	6	-
Fora do Preço	PETRB28	M62	0,1576	14	-
Fora do Preço	PETRB28	M63	0,2162	6	-
Fora do Preço	PETRB28	M64	0,2455	4	-
Fora do Preço	PETRB28	M65	0,2672	6	-
Fora do Preço	PETRB28	M66	0,2295	11	-
Fora do Preço	PETRB28	M67	0,2523	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M68	0,2302	12	-
Fora do Preço	PETRB28	M69	0,2471	4	-
Fora do Preço	PETRB28	M70	0,2553	8	-
Fora do Preço	PETRB28	M71	0,2258	13	-
Fora do Preço	PETRB28	M72	0,2402	4	-
Fora do Preço	PETRB28	M73	0,2259	12	-
Fora do Preço	PETRB28	M74	0,2195	4	-
Fora do Preço	PETRB28	M75	0,1795	8	-
Fora do Preço	PETRB28	M76	0,1480	12	-
Fora do Preço	PETRB28	M77	0,4060	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M78	0,1665	8	-
Fora do Preço	PETRB28	M79	0,2141	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M80	0,1790	8	-
Fora do Preço	PETRB28	M81	0,1540	11	-
Fora do Preço	PETRB28	M82	0,3011	3	-
Fora do Preço	PETRB28	M83	0,1748	7	-
Fora do Preço	PETRB28	M84	0,3291	3	-

FONTE: A autora (2009)

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)