



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.001/09

**Modelos de sinh-Gordon supersimétricos $N = 1, 2$ com defeito tipo
Backlund**

Leandro Hayato Ymai

Orientador

Prof. Dr. Abraham Hirsch Zimmerman

Fevereiro de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer à minha família pelo apoio e carinho que sempre me deram.

Ao Prof. Dr. A. H. Zimerman e Prof. Dr. José Francisco Gomes pela orientação.

Gostaria de agradecer também aos amigos Bruno, Christiane, Eduardo, Manuela e Ricardo pela amizade e incentivo.

Ao pessoal Genilson, Guilherme, David, Daniel e Alexis pelas discussões construtivas.

Aos amigos Anderson, Caco, Evandro e Flávia, Fernando, Flavia, Geová, Hiroshi, Júlio, Patrícia, Paulo, Rodrigo Búfalo e aos demais amigos do IFT pela amizade e pelos bons momentos.

À comunidade do IFT por todo auxílio de que precisei.

À FAPESP pelo apoio financeiro (processo 04/09791-1).

Resumo

Verificamos que a teoria clássica das equações supersimétricas de sinh-Gordon $N = 1$ e $N = 2$ suportam descontinuidades ou ‘defeitos’ e ainda mantém a integrabilidade. O estudo das condições de contorno relacionando os campos integráveis na junção de dois domínios é apresentado sob formalismo Lagrangeano e transformações de Backlund. As leis de conservação são discutidas sob o formalismo de curvatura nula.

Palavras Chaves: sistemas integráveis; supersimetria; defeitos integráveis.

Áreas do conhecimento: Teoria Geral de Partículas e Campos (1.05.03.01-3); Física Matemática (1.01.04.01-1); Métodos Matemáticos da Física (1.05.01.01-0).

Abstract

We verify that the classical theory of supersymmetric sinh-Gordon equations $N = 1$ and $N = 2$ can support discontinuities or ‘defects’ and yet maintain integrability. The study of boundary conditions relating integrable fields at the junction of two domains is presented under the Lagrangian formalism and Backlund transformations. The law of conservation is discussed under the zero curvature approach.

Índice

1	Introdução	1
2	Modelo supersimétrico de sinh-Gordon $N = 1$	4
2.1	Lagrangeana e Transformação de Backlund	4
2.2	Equação de curvatura nula	6
2.3	Método de dressing	8
2.4	Teorema de permutabilidade	12
3	Super sinh-Gordon $N = 1$ com defeito	15
3.1	Lagrangeana	16
3.2	Teoria bosônica	19
3.3	Teoria fermiônica	20
3.4	Super sinh-Gordon $N = 1$	21
3.5	Espalhamento com o defeito	23
3.6	Formulação de curvatura nula	25
4	Super Sinh-Gordon $N = 2$ com defeito	28
4.1	Equações de movimento	28
4.2	Super Sinh-Gordon $N=2$ com defeito	30
4.3	Conservação do momento e da energia	34
4.4	Curvatura nula	37
5	Comentários finais	40
A	Superálgebra $sl(2, 1)$	41
B	Aplicando o teorema de permutabilidade	45
C	Transformação de Backlund	49
D	Superálgebra $sl(2, 2)$	55

E Expressões úteis	57
Referências	60

Capítulo 1

Introdução

Teorias integráveis em duas dimensões tem sido uma importante fonte de idéias e intuição para a física e a matemática. Em alguns casos elas fornecem modelos realistas de fenômenos físicos importantes e em outros casos funcionam como laboratórios teóricos onde idéias físicas e matemáticas podem ser testadas e adaptadas. Podemos citar exemplos de aplicações em confinamento de quarks, teoria quântica de sólitons, quantização não perturbativas de teorias de gauge, aplicações em matéria condensada, mecânica estatística, gravitação e teoria de cordas.

Um aspecto interessante de sistemas integráveis é que eles apresentam soluções do tipo sóliton. Estas soluções são ondas não lineares localizadas que mantêm sua forma durante toda a sua evolução e ainda preservam a sua configuração e velocidades iniciais mesmo após sofrerem espalhamento. Este comportamento de partícula está ligado as propriedades de integrabilidade do modelo, o que significa que o modelo exibe um número infinito de cargas conservadas em involução. Do ponto de vista quântico tais leis de conservação presentes em sistemas bidimensionais relativísticos restringem infinitamente o sistema implicando na fatorizabilidade da matriz de espalhamento: a matriz S de n partículas fatoriza na matriz S de duas partículas, não existe produção de partículas e o momento das partículas são conservados [1], [2]. Acredita-se que os sólitons tem um papel importante no entendimento de aspectos não perturbativos de uma ampla classe de teorias quânticas de campo. Tais sólitons estariam ligados a uma estrutura não trivial do vácuo e corresponderiam às excitações de partículas no espectro da teoria quântica. Sua relevância aos fenômenos não perturbativos encontra lugar em teorias que apresentam dualidade. Esta dualidade se manifesta pela existência de uma equivalência quântica entre duas teorias quando suas constantes de acoplamento estão ligadas de maneira inversamente proporcional implicando que o regime de interação forte de uma teoria corresponderia ao regime de interação fraca da outra teoria. Logo, se o regime forte da teoria não pode ser tratado de maneira perturbativa, a dualidade permite conhecer a física

desta teoria através do regime fraco da teoria dual. O exemplo que é melhor compreendido em tal contexto é a equivalência quântica entre os modelos sine-Gordon e de Thirring massivo [3].

Devido ao poder de aplicabilidade de sistemas integráveis bidimensionais, há um grande interesse em tratá-los sistematicamente. Para isso alguns métodos tem sido desenvolvidos e envolvem uma rica estrutura matemática que permitem construir e classificar os modelos integráveis. Um método particular, permite derivar toda uma hierarquia de modelos integráveis a partir de uma condição, cuja a integrabilidade é automaticamente garantida. Esta condição é conhecida como equação de *curvatura nula*. Neste contexto os modelos são formulados e classificados por métodos Lie algébricos e as soluções de toda a hierarquia podem ser construídas explicitamente usando o método de *dressing* [4].

É possível ainda desenvolver e examinar a extensão supersimétrica de modelos integráveis embora não seja sempre fácil colocar os requerimentos de supersimetria e integrabilidade juntos (veja referências dentro de [5] para alguns exemplos de modelos bidimensionais os quais são ambos integráveis e supersimétricos). A motivação para introduzir a supersimetria em teorias integráveis bidimensionais vem da física de partículas e a conexão com teorias de supercordas, esta última as quais são formuladas como uma teoria quântica de campos em duas dimensões sobre uma superfície dinâmica chamada folha-mundo. Além disso tem sido notado que a supersimetria pode ser útil como ferramenta na análise de problemas em mecânica estatística. Em muitas aplicações a supersimetria vem na forma de uma simetria superconforme de uma teoria quântica de campos descrevendo certos fenômenos críticos de redes bidimensionais (veja [6] e referências dentro). Em particular, a versão supersimétrica de sine-Gordon com $N = 1$ foi introduzida muitos anos antes por Hruby [7], di Vecchia e Ferrara [8]; Shankar e Witten [9] construíram sua matriz S a qual foi subsequentemente explorada com mais detalhes por Schoutens [6] e Ahn [10].

Uma outra linha de estudo investiga teorias de campos na presença de inhomogeneidades (impurezas) ou defeitos. Sistemas apresentando impurezas ou defeitos estão presentes na natureza e por isso os modelos com defeitos tendem a ser mais realísticos. Em outras palavras, sistemas homogêneos são em muitos casos apenas idealizações matemáticas de sistemas físicos reais os quais podem apresentar efeitos de borda e vários outros tipos de inhomogeneidade ou defeito. No contexto de sistemas integráveis, teorias apresentando defeito são realizadas matematicamente impondo-se condições de contorno relacionando campos integráveis na junção entre dois domínios. Este tipo de investigação teve início com G. Delfino, G. Mussardo e P. Simonetti [11], os quais trataram uma teoria quântica envolvendo campos bosônicos e fermiônicos livres para descrever uma rede bidimensional com uma linha de defeito

do tipo $\delta(x)$. Uma das razões em considerar uma linha de inhomogeneidade é que somente este tipo de defeito pode afetar o comportamento crítico de um sistema homogêneo. Em se tratando de um sistema integrável, em casos mais gerais a introdução deste tipo de defeito pode estragar a integrabilidade do sistema. Como existem métodos eficientes para tratar sistemas integráveis seria interessante estudar defeitos que preservem a integrabilidade do sistema.

Outras idéias de interesse envolvem o estudo de teorias de campos integráveis clássicas e quânticas restritas a uma semi reta, impondo-se condições de contorno integrável sobre a borda, veja por exemplo [12]-[18]. Em particular, o modelo supersimétrico de sine-Gordon $N = 1$ restrito a semi reta foi tratado classicamente em [19], [20] e quanticamente em [21]-[23]. O caso $N = 2$ foi investigado em [24] e [25]. Existem aplicações para problemas em $3 + 1$ dimensões onde a física essencial do sistema acontece na direção radial. Neste caso o modelo vive num intervalo $0 \leq r < \infty$ e isso requer uma compreensão do que acontece na borda.

P. Bowcock, E. Corrigan e C. Zambon [26], [27] analisaram o modelo de sine-Gordon introduzindo o defeito na origem do sistema. Um fato interessante que eles descobriram é que para manter a integrabilidade do sistema as condições de contorno sobre o defeito devem corresponder a uma transformação de Backlund. A introdução deste tipo de defeito na teoria quebra da isotropia do espaço e portanto espera-se uma quebra na conservação do momento. O fato surpreendente é que o momento ainda é conservado quando a contribuição do defeito é levado em conta.

Nesta tese estudamos a versão supersimétrica de sinh-Gordon $N = 1, 2$ na presença de defeito em $x = 0$, extendendo dessa maneira o modelo estudado em [26] para incluir férmions. Examinamos os aspectos clássicos do modelo e verificamos que além da integrabilidade a supersimetria também é preservada sobre o defeito. Algumas propriedades clássicas podem ser diretamente transladada para a versão quântica e por isso uma análise clássica é requerida.

A tese está organizada na seguinte linha. No capítulo 2 apresentamos as principais características do modelo supersimétrico de sinh-Gordon $N = 1$ e discutimos suas soluções pelo método de dressing e pelo teorema de permutabilidade da transformação de Backlund. No capítulo 3 introduzimos o defeito no modelo discutindo suas propriedades e investigando a integrabilidade do modelo em termos da formulação de curvatura nula. No capítulo 4 abordamos o caso $N = 2$ e em muitos aspectos o tratamento segue de maneira similar ao caso $N = 1$. No final comentamos brevemente os principais resultados.

Capítulo 2

Modelo supersimétrico de sinh-Gordon $N = 1$

Neste capítulo apresentaremos o modelo supersimétrico de sinh-Gordon $N = 1$, discutindo algumas de suas principais características. Primeiramente vamos apresentar a sua formulação lagrangeana e uma transformação de Backlund das equações de movimento. Em seguida seguiremos as idéias dadas em [28] para introduzir a formulação de curvatura nula do modelo. Esta formulação será utilizada no próximo capítulo para discutir a integrabilidade do modelo supersimétrico de sinh-Gordon $N = 1$ com defeito. Apresentaremos explicitamente algumas soluções do modelo usando o método de *dressing* e usando a permutabilidade da transformação de Backlund.

2.1 Lagrangeana e Transformação de Backlund

O modelo sinh-Gordon supersimétrico $N = 1$ é descrito pela densidade Lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \bar{\psi} \partial_x \psi + \bar{\psi} \partial_t \psi + \psi \partial_x \bar{\psi} + \psi \partial_t \bar{\psi} \\ & + 4 \frac{m^2}{\alpha^2} \cosh(2\alpha\phi) + 8m\bar{\psi}\psi \cosh(\alpha\phi), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde α é a constante de acoplamento, m é o parâmetro de massa, ϕ um campo escalar real, $\bar{\psi}$ e ψ são componentes de um espinor Majorana.

A Lagrangiana acima é invariante sob o seguinte conjunto de transformação de supersimetria

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{1}{\sqrt{\alpha m}}(\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi), \\ \delta\bar{\psi} &= \frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}(\partial_x + \partial_t)\phi + \bar{\epsilon}2\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\sinh(\alpha\phi), \\ \delta\psi &= \epsilon 2\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\sinh(\alpha\phi) + \frac{\bar{\epsilon}}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}(\partial_x - \partial_t)\phi. \end{aligned}$$

onde ϵ e $\bar{\epsilon}$ são constantes fermiônicas.

A Lagrangeana (2.1) possui as seguintes equações de campo

$$\begin{aligned}(\partial_x^2 - \partial_t^2)\phi &= 8\frac{m^2}{\alpha} \sinh(2\alpha\phi) + 8m\bar{\psi}\psi \cosh(\alpha\phi), \\(\partial_x - \partial_t)\bar{\psi} &= 4m\psi \cosh(\alpha\phi), \\(\partial_x + \partial_t)\psi &= 4m\bar{\psi} \cosh(\alpha\phi).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Podemos reescrever as equações de movimento do modelo usando o formalismo de supercampos, isto simplifica a notação e deixa a supersimetria manifesta. Para isso introduzimos superderivadas usando variáveis de grassmann θ_1 e θ_2 :

$$D_x = \partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_x, \quad D_t = \partial_{\theta_2} + \theta_2\partial_t,$$

de modo que elas satisfaçam as seguintes relações

$$D_x^2 = \partial_x, \quad D_t^2 = \partial_t, \quad D_x D_t = -D_t D_x.$$

A equação supersimétrica de sinh-Gordon $N = 1$ no formalismo de supercampos tem a seguinte forma

$$D_x D_t \Phi = 2i \sinh \Phi,\tag{2.3}$$

onde o supercampo Φ é parametrizado por ϕ , $\bar{\psi}$ e ψ :

$$\Phi = \phi + \theta_1\bar{\psi} + i\theta_2\psi - \theta_1\theta_2 2i \sinh \phi.$$

Expandindo a eq. (2.3) nas variáveis de grassmann θ_1 e θ_2 , obtemos:

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_t \phi &= 2 \sinh(2\phi) + 2\bar{\psi}\psi \sinh \phi, \\ \partial_t \bar{\psi} &= 2\psi \cosh \phi, \\ \partial_x \psi &= 2\bar{\psi} \cosh \phi.\end{aligned}$$

As equações de movimento acima correspondem as equações de movimento (2.2) após a seguinte reparametrização

$$x \rightarrow m(x+t), \quad t \rightarrow m(x-t), \quad \phi \rightarrow \alpha\phi, \quad \psi \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{m}}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{m}}\bar{\psi}.$$

Para obter a transformação supersimétrica no formalismo de supercampos utilizamos os geradores de supersimetria

$$Q_x = \partial_{\theta_1} - \theta_1\partial_x, \quad Q_t = i(\partial_{\theta_2} - \theta_2\partial_t),$$

os quais satisfazem as seguintes relações

$$Q_x^2 = -\partial_x, \quad Q_t^2 = \partial_t, \quad \{Q_x, Q_t\} = 0.$$

A transformação de supersimetria é dada então por

$$\delta\Phi = (\epsilon Q_x + \bar{\epsilon} Q_t)\Phi, \quad (2.4)$$

o que em componentes corresponde no seguinte conjunto de transformação

$$\delta\phi = \epsilon\bar{\psi} - \epsilon\psi, \quad \delta\bar{\psi} = \epsilon\partial_x\phi + \bar{\epsilon}2\sinh\phi, \quad \delta\psi = \epsilon 2\sinh\phi + \bar{\epsilon}\partial_t\phi.$$

Tendo em mãos as equações de movimento reescritas na forma de supercampos, podemos agora apresentar a transformação de Backlund para o modelo. Esta transformação foi introduzida por M. Chaichian e P. Kulish [29] e ela é dada por

$$\begin{aligned} D_x(\Phi_1 - \Phi_2) &= -\frac{4i}{\beta}f_{1,2}\cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right), \\ D_t(\Phi_1 + \Phi_2) &= 2\beta f_{1,2}\cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}\right), \\ D_x f_{1,2} &= \frac{2i}{\beta}\sinh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right), \\ D_t f_{1,2} &= \beta\sinh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde β é uma constante arbitrária e $f_{1,2}$ é um supercampo fermiônico na forma

$$f_{1,2} = f_1^{(1,2)} + \theta_1 b_1^{(1,2)} + \theta_2 b_2^{(1,2)} + \theta_1\theta_2 f_2^{(1,2)}.$$

Uma característica da transformação de Backlund é que ela é definida de modo que a condição de compatibilidade $\{D_x, D_t\}\Phi_1 = 0$ leve a equação de movimento (2.3) para o campo Φ_2 , como pode ser verificado usando a transformação acima. Veremos mais a frente que ela pode ser utilizada para obter soluções das equações de movimento e para formular o modelo na presença de defeito.

2.2 Equação de curvatura nula

Nesta seção apresentaremos a formulação de curvatura nula para o modelo supersimétrico de sinh-Gordon $N = 1$. Veremos que escrever as equações de movimento na forma de uma equação de curvatura nula implica automaticamente na integrabilidade do modelo. Além disso a estrutura algébrica deste formalismo permite construir explicitamente as soluções das equações de movimento usando o método de dressing. Discutiremos sobre as soluções na próxima seção.

A construção sistemática de hierarquias integráveis supersimétricas foi proposta por H. Aratyn, J. F. Gomes e A. H. Zimerman em [28]. Eles utilizaram uma gradação semi-inteira em uma superálgebra de Lie $sl(2, 1)$ e verificaram que a equação supersimétrica de sinh-Gordon $N = 1$ e a equação mKdV (modified Korteweg-de Vries) supersimétrica $N = 1$ podem ser obtidas a partir da mesma hierarquia integrável.

Para obter a equação de curvatura nula do modelo supersimétrico de sinh-Gordon $N = 1$, utilizamos uma superálgebra $\mathcal{G} = \hat{sl}(2, 1)$ com gradação $D = 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}h_1$, onde o parâmetro espectral λ é responsável por atribuir grau aos geradores da superálgebra. A gradação induz uma decomposição da superálgebra em subespaços graduados $\mathcal{G} = \oplus_k \mathcal{G}_k$ de modo que $[D, \mathcal{G}_k] = k\mathcal{G}_k$, com subespaços \mathcal{G}_k de grau k inteiro (bóson) e sem-inteiro (férmion) (veja Apêndice A). Escolhendo uma subálgebra apropriada, representada por geradores bosônicos $M_1^{(2n+1)}, M_2^{(2n)}, K_1^{(2n+1)}, K_2^{(2n+1)}$, e geradores fermiônicos $G_1^{(2n+1/2)}, G_2^{(2n+3/2)}, F_1^{(2n+3/2)}, F_2^{(2n+1/2)}$, podemos definir o par de Lax:

$$L_x = \partial_x + a_x, \quad L_t = \partial_t + a_t,$$

onde

$$a_x = E^{(1)} - \partial_x B B^{-1} + A_{1/2}, \quad a_t = B(E^{(-1)} + j_{-1/2})B^{-1}, \quad (2.6)$$

$E^{(\pm 1)} = K_1^{(\pm 1)} + K_2^{(\pm 1)}$, e os campos da teoria $\phi, \bar{\psi}$ e ψ parametrizam os termos de grau 0, 1/2 e -1/2

$$B = e^{\phi M_2^{(0)} + \nu \hat{c}}, \quad A_{1/2} = \bar{\psi} G_1^{(1/2)}, \quad j_{-1/2} = \psi G_2^{(-1/2)}.$$

O campo escalar ν corresponde a parametrização do termo central \hat{c} .

Podemos decompor a equação curvatura nula,

$$\partial_x a_t - \partial_t a_x + [a_x, a_t] = 0,$$

em componentes de mesmo grau e obter as equações de movimento:

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_t \phi &= 2 \sinh(2\phi) + 2\bar{\psi}\psi \sinh \phi, \\ \partial_t \bar{\psi} &= 2\psi \cosh \phi, \\ \partial_x \psi &= 2\bar{\psi} \cosh \phi, \\ \partial_x \partial_t \nu &= \psi \bar{\psi} e^\phi + (1 - e^{2\phi}). \end{aligned}$$

A equação para ν é uma consequência do termo central e ela fornece uma equação de consistência adicional.

Um dos atrativos em escrever as equações de movimento na forma de uma equação de curvatura nula é a possibilidade de gerar cargas conservadas. Para ver isso, considere a exponencial ordenada de a_x :

$$U(x_1, x_2; \lambda) = P \exp \int_{x_1}^{x_2} dx a_x = 1 + \int_{x_1}^{x_2} dx a_x U(x, x_2; \lambda).$$

A condição de curvatura nula implica que

$$\frac{d}{dt}U(x_1, x_2; \lambda) = U(x_1, x_2; \lambda)a_t(x_2) - a_t(x_1)U(x_1, x_2; \lambda). \quad (2.7)$$

Para construir as cargas conservadas tomamos o traço da exponencial ordenada acima para $x_1 = -\infty$ e $x_2 = \infty$ e definimos a seguinte quantidade:

$$Q(\lambda) = Tr U(-\infty, \infty; \lambda). \quad (2.8)$$

Com os campos e suas derivadas satisfazendo apropriadas condições em $\pm\infty$, de modo que $a_t(-\infty) = a_t(\infty)$, implica que

$$\frac{d}{dt}Q(\lambda) = Tr \frac{d}{dt}U(-\infty, \infty; \lambda) = 0.$$

Portanto o gerador funcional $Q(\lambda)$ seria conservado para qualquer escolha do parâmetro λ . A série infinita de cargas conservadas seria obtida como coeficientes da expansão de $Q(\lambda)$ em série de potência de λ . Para verificar a completa integrabilidade restaria ainda verificar que estas cargas comutam entre si sob o parênteses de Poisson. No caso de teorias quânticas de sistemas integráveis relativísticos em $1 + 1$ dimensões, estas cargas implicariam na fatorização da matriz S [1], [2], ou seja, a matriz de espalhamento para n partículas seria escrita como o produto de matrizes de espalhamento de apenas duas partículas. Além a disso o momento das partículas na teoria quântica seria conservado e não haveria produção de partículas.

2.3 Método de dressing

Para obter as soluções do modelo supersimétrico de sinh-Gordon $N = 1$, partimos do problema de fatorização de Riemann-Hilbert:

$$\Theta_-^{-1}\Theta_+ = T_0 g T_0^{-1}, \quad (2.9)$$

onde

$$\Theta_- = e^{\sum_{k=1}^{\infty} m(-k/2)}, \quad \Theta_+ = B e^{\sum_{k=1}^{\infty} v(k/2)},$$

$m(-k/2) \in \mathcal{G}_{-k/2}$, $v(k/2) \in \mathcal{G}_{k/2}$ e $B \in \mathcal{G}_0$; $T_0 = e^{-xE^{(1)} - tE^{(-1)}}$ e g é um elemento constante do grupo de Lie G .

Para ver a conexão entre a eq. (2.9) e a estrutura integrável do modelo, aplicamos a derivada parcial ∂_x sobre a eq. (2.9), e obtemos o seguinte resultado

$$\Theta_- \partial_x \Theta_-^{-1} - \Theta_+ \partial_x \Theta_+^{-1} = -\Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1} + \Theta_+ E^{(1)} \Theta_+^{-1}. \quad (2.10)$$

Escrevemos o primeiro termo da lado direito da eq. (2.10) como

$$\Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1} = (\Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1})_- + (\Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1})_+,$$

onde $(\dots)_-$ significa a projeção sobre termos de grau estritamente negativos e $(\dots)_+$ significa a projeção sobre termos de grau zero e positivos. Podemos então decompor a eq. (2.10) e duas partes

$$\begin{aligned}\Theta_- \partial_x \Theta_-^{-1} &= -\Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1} + (\Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1})_+ \\ \Theta_+ \partial_x \Theta_+^{-1} &= -\Theta_+ E^{(1)} \Theta_+^{-1} + (\Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1})_+, \end{aligned}$$

ou de maneira equivalente podemos escrever

$$(\Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1})_+ = \Theta_{\pm} E^{(1)} \Theta_{\pm}^{-1} + \Theta_{\pm} \partial_x \Theta_{\pm}^{-1}. \quad (2.11)$$

Usando a identidade $e^L T e^{-L} = T + [L, T] + \frac{1}{2!} [L, [L, T]] + \dots$, podemos escrever o lado esquerdo da equação acima como

$$(\Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1})_+ = E^{(1)} + A_{1/2} - \partial_x B B^{-1},$$

onde agrupamos termos de mesmo grau e identificamos

$$\begin{aligned}A_{1/2} &= [m(-1/2), E^{(1)}], \\ -\partial_x B B^{-1} &= [m(-1), E^{(1)}] + \frac{1}{2} [m(-1/2), [m(-1/2), E^{(1)}]]. \end{aligned}$$

Logo, a eq. (2.11) toma a seguinte forma

$$a_x = \Theta_{\pm} a_x^{vac} \Theta_{\pm}^{-1} + \Theta_{\pm} \partial_x \Theta_{\pm}^{-1}, \quad (2.12)$$

onde $a_x = E^{(1)} + A_{1/2} - \partial_x B B^{-1}$ e $a_x^{vac} = E^{(1)}$.

A partir da equação acima vemos que a eq. (2.9) implica na existência de duas transformações de gauge gerado pelos operadores Θ_+ e Θ_- . A eq. (2.12) mostra que as transformações de gauge conectam a configuração de vácuo, onde os campos são nulos, a uma configuração não trivial. A transformação de gauge (2.12) é chamada de transformação de *dressing* . Como pode ser visto a partir da eq. (2.12), termos de grau diferente de -1 , 0 e $1/2$ no lado direito da equação devem se anular pois o lado esquerdo contém apenas termos de grau -1 , 0 e $1/2$. O cancelamento desses termos geram vínculos que determinam as expressões de $m(-k/2)$ e $v(k/2)$, $k = 1, 2, \dots$

Usando apenas o operador Θ_- na equação (2.12) determinamos componentes $m(-k/2)$ até grau -1 :

$$\begin{aligned}m(-1/2) &= -\frac{1}{2} \bar{\psi} G_2^{(-1/2)} - \frac{1}{2} \chi F_1^{(-1/2)}, \\ m(-1) &= a_1 M_1^{(-1)} + a_2 K_1^{(-1)} + a_3 K_2^{(-1)}, \\ 2\partial_x \eta &= u^2 - \partial_x u - \bar{\psi} \partial_x \psi, \end{aligned}$$

onde colocamos $u = -\partial_x \phi$, $\eta = -\partial_x \nu$, $\chi = \int dx (u \bar{\psi})$ e

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{2} \bar{\psi} \chi \right), \\ a_2 &= \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{1}{2} \bar{\psi} \partial_x \bar{\psi} - \frac{1}{2} \chi \partial_x \chi - u^2 \right), \\ a_3 &= -\frac{1}{4} \int dx (\bar{\psi} \partial_x \bar{\psi} + \chi \partial_x \chi), \end{aligned}$$

O passo seguinte na determinação das soluções requer o uso dos estados de peso mais alto da representação de $\hat{sl}(2, 1)$ os quais denotamos por $|\lambda_i\rangle$, $i = 0, 1$. Estes estados satisfazem

$$\hat{c}|\lambda_i\rangle = |\lambda_i\rangle, \quad M_2^{(0)}|\lambda_i\rangle = \delta_{i,1}|\lambda_i\rangle,$$

e são aniquilados pelos geradores de grau positivo.

Aplicando os estados de peso mais alto na eq. (2.9), obtemos as seguintes funções τ :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= e^\nu = \langle \lambda_0 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_0 \rangle, \\ \tau_1 &= e^{\phi+\nu} = \langle \lambda_1 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_1 \rangle, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} (\bar{\psi} - \chi) e^\nu = \langle \lambda_0 | G_1^{(1/2)} T_0 g T_0^{-1} | \lambda_0 \rangle, \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} (\bar{\psi} + \chi) e^{\phi+\nu} = \langle \lambda_1 | G_1^{(1/2)} T_0 g T_0^{-1} | \lambda_1 \rangle, \end{aligned}$$

e portanto as soluções tomam a seguinte forma

$$\phi = \ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right), \quad \bar{\psi} = \frac{\tau_3}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \nu = \ln \tau_0.$$

Assim, para encontrarmos as soluções do modelo precisamos determinar explicitamente as funções τ . Para isso classificamos as soluções em termos do elemento de grupo constante g , o qual é construído em termos de auto-vetores de $E^{(2n+1)}$, i.e.

$$[E^{(2n+1)}, F_\pm(\gamma)] = \pm 2\gamma^{2n+1} F_\pm(\gamma),$$

onde

$$\begin{aligned} F_-(\gamma) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma^{-2n-1} M_1^{(2n+1)} + \gamma^{-2n} \left(M_2^{(2n)} - \frac{1}{2} \delta_{n,0} \hat{c} \right), \\ F_+(\gamma) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma^{-2n} G_1^{(2n+1/2)} + \gamma^{-2n-1} G_2^{(2n+3/2)}. \end{aligned}$$

Os auto-vetores $F_\pm(\gamma)$ são conhecidos na literatura como *funções de vértice*.

Obtivemos explicitamente uma solução de quatro vértices [30]:

$$g = e^{b_1 F_-(\gamma_1)} e^{b_2 F_-(\gamma_2)} e^{c_1 F_+(\gamma_3)} e^{c_2 F_+(\gamma_4)},$$

onde b_i e c_i , $i = 1, 2$, são coeficientes bosônicos e fermiônicos respectivamente.

Denotando $\rho_i^\pm = e^{\pm(2\gamma_i x + 2\gamma_i^{-1} t)}$, as funções τ ficam

$$\begin{aligned}\tau_0 &= e^\nu = A^- + B^-, \\ \tau_1 &= e^{\phi+\nu} = A^+ + B^+, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \chi)e^\nu = C_3^+ + C_4^+, \\ \tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \chi)e^{\phi+\nu} = C_3^- + C_4^-, \end{aligned}$$

onde denotamos

$$\begin{aligned}A^\pm &= 1 \pm \frac{1}{2}b_1\rho_1^\pm \pm \frac{1}{2}b_2\rho_2^\pm + b_1b_2\rho_1^\pm\rho_2^\pm\alpha_{1,2}, \\ B^\pm &= c_1c_2\rho_3^-\rho_4^- \left(\beta_{3,4} \pm b_1\rho_1^+\delta_{1,3,4} \pm b_2\rho_2^+\delta_{2,3,4} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\theta_{1,2,3,4} \right), \\ C_k^\pm &= c_{k-2}\rho_k^- \left(\gamma_k \pm b_1\rho_1^+\sigma_{1,k} \pm b_2\rho_2^+\sigma_{2,k} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\lambda_{1,2,k} \right), \end{aligned}$$

e os elementos de matriz não nulos são dados por

$$\begin{aligned}\alpha_{1,2} &= \langle \lambda_i | F_-(\gamma_1) F_-(\gamma_2) | \lambda_i \rangle = \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2}, \\ \beta_{3,4} &= \langle \lambda_i | F_+(\gamma_3) F_+(\gamma_4) | \lambda_i \rangle = \gamma_3\gamma_4 \frac{(\gamma_3 - \gamma_4)}{(\gamma_3 + \gamma_4)^2}, \\ \delta_{j,3,4} &= (1 - 2\delta_{i,0}) \langle \lambda_i | F_-(\gamma_j) F_+(\gamma_3) F_+(\gamma_4) | \lambda_i \rangle \\ &= \frac{\gamma_3\gamma_4}{2} \frac{(\gamma_3 - \gamma_4)}{(\gamma_3 + \gamma_4)^2} \frac{(\gamma_j + \gamma_3)}{(\gamma_j - \gamma_3)} \frac{(\gamma_j + \gamma_4)}{(\gamma_j - \gamma_4)}, \quad j = 1, 2, \\ \sigma_{j,k} &= (1 - 2\delta_{i,1}) \langle \lambda_i | G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_j) F_+(\gamma_k) | \lambda_i \rangle \\ &= \frac{\gamma_k}{2} \frac{(\gamma_j + \gamma_k)}{(\gamma_j - \gamma_k)}, \quad j = 1, 2 \quad k = 3, 4, \\ \lambda_{1,2,j} &= \langle \lambda_i | G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) F_-(\gamma_2) F_+(\gamma_j) | \lambda_i \rangle \\ &= \frac{\gamma_j}{4} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} \frac{(\gamma_1 + \gamma_j)}{(\gamma_1 - \gamma_j)} \frac{(\gamma_2 + \gamma_j)}{(\gamma_2 - \gamma_j)}, \quad j = 3, 4, \\ \theta_{1,2,3,4} &= \langle \lambda_i | F_-(\gamma_1) F_-(\gamma_2) F_+(\gamma_3) F_+(\gamma_4) | \lambda_i \rangle \\ &= \frac{\gamma_3\gamma_4}{4} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} \frac{(\gamma_1 + \gamma_3)}{(\gamma_1 - \gamma_3)} \frac{(\gamma_2 + \gamma_3)}{(\gamma_2 - \gamma_3)} \frac{(\gamma_3 - \gamma_4)}{(\gamma_3 + \gamma_4)^2} \frac{(\gamma_1 + \gamma_4)}{(\gamma_1 - \gamma_4)} \frac{(\gamma_2 + \gamma_4)}{(\gamma_2 - \gamma_4)}. \end{aligned}$$

As soluções para quatro vértices são dadas explicitamente a seguir

$$\begin{aligned}\phi &= \ln \left(\frac{A^+}{A^-} \right) + \frac{B^+}{A^+} - \frac{B^-}{A^-}, \quad \bar{\psi} = \frac{C_3^- + C_4^-}{A^+} + \frac{C_3^+ + C_4^+}{A^-}, \\ \nu &= \ln A^- + \frac{B^-}{A^-}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.4 Teorema de permutabilidade

Nesta seção vamos derivar as soluções do modelo sinh-Gordon supersimétrico $N = 1$ usando a permutabilidade da transformação de Backlund [39]. Este método é bem conhecido e o assunto pode ser encontrado na referência [31].

Para apresentar o método, considere duas transformações de Backlund sucessivas

$$\Phi_0 \xrightarrow{\beta_1} \Phi_1 \xrightarrow{\beta_2} \Phi_{12}$$

e outras duas na ordem inversa

$$\Phi_0 \xrightarrow{\beta_2} \Phi_2 \xrightarrow{\beta_1} \Phi_{21}$$

O teorema de permutabilidade declara que a ordem dessas duas transformações é irrelevante, levando a mesma solução final, ou seja $\Phi_{12} = \Phi_{21} = \Phi_3$. Podemos representar este processo pelo diagrama abaixo:

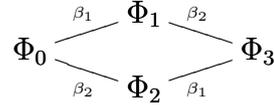


Fig. 1: Diagrama comutativo

Aplicando o teorema de permutabilidade, encontramos uma solução Φ_3 que é escrita como um funcional das soluções Φ_0 , Φ_1 e Φ_2 (veja Apêndice B):

$$\Phi_3 = \Phi_0 + 2 \operatorname{Arctanh} \left[\left(\frac{\beta_2^2 + \beta_1^2}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \right) \tanh \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right) e^{\Omega f_{0,1} f_{0,2}} \right], \quad (2.15)$$

onde

$$\Omega = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \right) - \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right) \right] \operatorname{sech} \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right).$$

Podemos ver a expressão acima como uma relação de recorrência para gerar soluções: começamos obtendo as soluções mais simples de 1-sóliton Φ_1 e Φ_2 por integração direta das equações de Backlund a partir do vácuo $\Phi_0 = 0$, em seguida usamos a expressão (2.15) e obtemos uma solução de 2-sóliton. Podemos carregar este processo para ordem maiores indefinidamente. Por exemplo, uma solução para 3-sólitons pode ser obtida seguindo o diagrama abaixo:

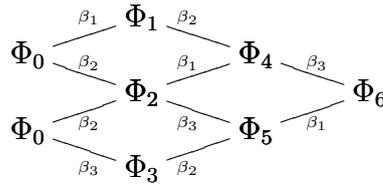


Fig. 2: Diagrama para 3-sóliton

Definindo $\sigma_k = -\frac{2}{\beta_k^2}$, $k = 1, 2$, podemos escrever a expressão (2.15) em componentes:

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= \phi_0 + 2 \operatorname{Arctanh} \left[\delta \tanh \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\Delta_2}{8\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} \left[\frac{\bar{\psi}_0(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2}{\cosh \left(\frac{\phi_0 + \phi_1}{2} \right) \cosh \left(\frac{\phi_0 + \phi_2}{2} \right)} \right], \\
\bar{\psi}_3 &= \bar{\psi}_0 + \Delta_1(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) \\
&\quad - \frac{\Delta_2}{2} \left[\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{\sinh \left(\frac{\phi_0 + \phi_2}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\phi_0 + \phi_1}{2} \right)} (\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_1) - \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \frac{\sinh \left(\frac{\phi_0 + \phi_1}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\phi_0 + \phi_2}{2} \right)} (\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_2) \right], \\
\psi_3 &= \psi_0 + \Delta_1(\psi_1 - \psi_2) \\
&\quad - \frac{\Delta_2}{2} \left[\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{\sinh \left(\frac{\phi_0 - \phi_1}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\phi_0 - \phi_2}{2} \right)} (\psi_0 + \psi_2) - \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \frac{\sinh \left(\frac{\phi_0 - \phi_2}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\phi_0 - \phi_1}{2} \right)} (\psi_0 + \psi_1) \right],
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{2}{\sinh(\phi_1 - \phi_2)} \left[\frac{\delta \tanh \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)}{1 - \delta^2 \tanh^2 \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)} \right], \\
\Delta_2 &= \frac{A \sinh \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)}{B - \sinh^2 \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)}, \\
\delta &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad A = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}, \quad B = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4\sigma_1\sigma_2}.
\end{aligned}$$

• *Solução 1-sóliton* As primeiras soluções e mais simples são obtidas por uma transformação de Backlund a partir vácuo, $\Phi_0 = 0$, neste caso as componentes das transformação de Backlund tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned}
\partial_x \phi_1 &= 2\sigma_1 \sinh \phi_1, & \partial_t \phi_1 &= \frac{2}{\sigma_1} \sinh \phi_1, \\
\bar{\psi}_1 &= 2\sqrt{2\sigma_1} \cosh \left(\frac{\phi_1}{2} \right) f_1^{(0,1)}, & \psi_1 &= 2\sqrt{\frac{2}{\sigma_1}} \cosh \left(\frac{\phi_1}{2} \right) f_1^{(0,1)}, \\
\partial_x f_1^{(0,1)} &= \sqrt{\frac{\sigma_1}{2}} \cosh \left(\frac{\phi_1}{2} \right) \bar{\psi}_1, & \partial_t f_1^{(0,1)} &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma_1}} \cosh \left(\frac{\phi_1}{2} \right) \psi_1.
\end{aligned}$$

Integrando as equações acima, obtemos as seguintes soluções de *1-sóliton*

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \ln \left(\frac{1 + E_1}{1 - E_1} \right), & E_1 &= b_1 \exp(2\sigma_1 x + 2\sigma_1^{-1} t), \\
\bar{\psi}_1 &= \epsilon_1 \frac{a_1}{b_1} E_1 \left(\frac{1}{1 + E_1} + \frac{1}{1 - E_1} \right), & \psi_1 &= \frac{\bar{\psi}_1}{\sigma_1}, \\
f_1^{(0,1)} &= \frac{\epsilon}{\sqrt{2\sigma_1}} \frac{a_1}{b_1} E_1 \cosh \left(\frac{\phi_1}{2} \right),
\end{aligned}$$

onde a_1 e b_1 são constantes arbitrárias e ϵ_1 é um parâmetro fermiônico.

• *Solução 2-sóliton*

Para obter as soluções de *2-sóliton* basta introduzir as soluções de *1-sóliton* acima nas expressões em (2.16) e colocar $\phi_0 = \psi_0 = \bar{\psi}_0 = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 2 \operatorname{Arctanh} \left[\delta \tanh \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \right] - \frac{\Delta_2}{8\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} \left[\frac{\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2}{\cosh\left(\frac{\phi_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{\phi_2}{2}\right)} \right], \\ \bar{\psi}_3 &= \left[\Delta_1 + \frac{\Delta_2}{2} \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{\sinh\left(\frac{\phi_2}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\phi_1}{2}\right)} \right] \bar{\psi}_1 - \left[\Delta_1 + \frac{\Delta_2}{2} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \frac{\sinh\left(\frac{\phi_1}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\phi_2}{2}\right)} \right] \bar{\psi}_2, \\ \psi_3 &= \left[\Delta_1 - \frac{\Delta_2}{2} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \frac{\sinh\left(\frac{\phi_2}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\phi_1}{2}\right)} \right] \psi_1 - \left[\Delta_1 - \frac{\Delta_2}{2} \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{\sinh\left(\frac{\phi_1}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\phi_2}{2}\right)} \right] \psi_2,\end{aligned}$$

onde ϕ_k , $\bar{\psi}_k$ e ψ_k ($k = 1, 2$), são dados por

$$\begin{aligned}\phi_k &= \ln \left(\frac{1 + E_k}{1 - E_k} \right), \quad E_k = b_k \exp \left(2\sigma_k x + 2\sigma_k^{-1} t \right), \\ \bar{\psi}_k &= \epsilon_k \frac{a_k}{b_k} E_k \left(\frac{1}{1 + E_k} + \frac{1}{1 - E_k} \right), \\ \psi_k &= \frac{\bar{\psi}_k}{\sigma_k}, \quad k = 1, 2\end{aligned}$$

e a_k , b_k são constantes arbitrárias e ϵ_k é um parâmetro fermiônico.

As soluções (2.13) correspondem a solução de *2-sóliton** acima quando colocamos $\gamma_3 = -\gamma_1$ e $\gamma_4 = -\gamma_2$ e reescalamos os parâmetros da solução *2-sóliton* acima para

$$\begin{aligned}\sigma_k &\rightarrow \gamma_k, \quad \epsilon_k \rightarrow c_k \quad k = 1, 2 \\ b_1 &\rightarrow \frac{b_1}{2} \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right), \quad b_2 \rightarrow -\frac{b_2}{2} \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right), \\ a_1 &\rightarrow -\gamma_1 \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right), \quad a_2 \rightarrow \gamma_2 \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right).\end{aligned}$$

*Estamos fazendo um abuso de linguagem. Para obter soluções solitônicas devemos efetuar uma reparametrização apropriada de modo à obter *sine* em vez de *sinh*, já que este último possui soluções divergentes.

Capítulo 3

Super sinh-Gordon $N = 1$ com defeito

Neste capítulo apresentaremos a formulação Lagrangeana do modelo de sinh-Gordon supersimétrico $N = 1$ na presença de defeito e discutiremos a integrabilidade do modelo em termos de curvatura nula [40]. O caso sem férmion foi tratado primeiramente por P. Bowcock, E. Corrigan e C. Zambon [26]. Extendemos as idéias deles para o caso supersimétrico. Eles verificaram que a equação de sinh-Gordon permite descontinuidade integráveis onde as condições de defeito relacionando campos ϕ_1 e ϕ_2 , definidos respectivamente em $x < 0$ e $x > 0$, correspondem as transformações de Backlund. Este é um fato notável já que as transformações de Backlund tem um papel importante no desenvolvimento da teoria de sólitons. Um exemplo de aplicação da transformação de Backlund foi visto na seção anterior. Além disso, este tipo de defeito em geral tem $\phi_1(0, t) - \phi_2(0, t) \neq 0$, implicando numa descontinuidades do campo em $x = 0$. Uma consequência disso é que a carga topológica *usual**

$$Q_{top.} = \int_{-\infty}^0 dx \partial_x \phi_1 + \int_0^{\infty} dx \partial_x \phi_2 = \phi_2(\infty) - \phi_1(-\infty) + \phi_1(0) - \phi_2(0),$$

não precisa ser conservada, indicando que existe troca de carga topológica no processo de espalhamento do sóliton com o defeito.

Um outro aspecto deste tipo de defeito é que os processos de espalhamento pelo defeito são puramente transmitidos a nível clássico e presumivelmente também a nível quântico. Como este tipo de defeito preserva a integrabilidade, o tratamento quântico usando o método de Zamolodchikov [2] pode ser implementado. Os aspectos quânticos do modelo sinh-Gordon com defeito integrável foi tratado em [27] através da matriz de transmissão quântica.

*Na presença do defeito as cargas usuais devem ser redefinidas levando-se em conta a contribuição do defeito para que haja conservação.

3.1 Lagrangeana

Iniciamos definindo a densidade Lagrangeana de uma teoria mais geral, onde o modelo seria especificado fornecendo o potencial de interação. A completa densidade Lagrangeana, a qual inclui campos bosônicos ϕ_p e fermiônicos $\bar{\psi}_p, \psi_p$, consiste de peças na região $x < 0$ e $x > 0$ e uma contribuição em $x = 0$ descrevendo o defeito:

$$\mathcal{L} = \theta(-x)\mathcal{L}_1 + \theta(x)\mathcal{L}_2 + \delta(x)\mathcal{L}_D, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p &= \frac{1}{2}(\partial_x \phi_p)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \phi_p)^2 - \bar{\psi}_p \partial_x \psi_p + \bar{\psi}_p \partial_t \psi_p + \psi_p \partial_x \bar{\psi}_p + \psi_p \partial_t \bar{\psi}_p \\ &\quad + V_p(\phi_p) + W_p(\phi_p, \psi_p, \bar{\psi}_p), \quad p = 1, 2 \\ \mathcal{L}_D &= \frac{1}{2}(\phi_2 \partial_t \phi_1 - \phi_1 \partial_t \phi_2) - \psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + 2f_1 \partial_t f_1 \\ &\quad B_0(\phi_1, \phi_2) + B_1(\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, f_1). \end{aligned}$$

O campo fermiônico f_1 é um campo auxiliar e V_p e W_p correspondem aos potenciais de interação. As quantidades B_0 e B_1 são funções descrevendo o defeito.

A Lagrangeana acima leva as equações de movimento nas regiões $x < 0$, $x > 0$ e as condições de defeito em $x = 0$:

$x < 0$:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \phi_1 - \partial_t^2 \phi_1 &= \partial_{\phi_1} V_1 + \partial_{\phi_1} W_1, \\ \partial_x \psi_1 + \partial_t \psi_1 &= -\frac{1}{2} \partial_{\psi_1} W_1, \\ \partial_x \bar{\psi}_1 + \partial_t \bar{\psi}_1 &= -\frac{1}{2} \partial_{\bar{\psi}_1} W_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$x > 0$:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \phi_2 - \partial_t^2 \phi_2 &= \partial_{\phi_2} V_2 + \partial_{\phi_2} W_2, \\ \partial_x \psi_2 + \partial_t \psi_2 &= -\frac{1}{2} \partial_{\psi_2} W_2, \\ \partial_x \bar{\psi}_2 + \partial_t \bar{\psi}_2 &= -\frac{1}{2} \partial_{\bar{\psi}_2} W_2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$x = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 &= -\partial_{\phi_1} B_0 - \partial_{\phi_1} B_1, \\ \partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 &= \partial_{\phi_2} B_0 + \partial_{\phi_2} B_1, \\ \psi_1 + \psi_2 &= \partial_{\psi_1} B_1 = -\partial_{\psi_2} B_1, \\ \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 &= -\partial_{\bar{\psi}_1} B_1 = -\partial_{\bar{\psi}_2} B_1, \\ \partial_t f_1 &= -\frac{1}{4} \partial_{f_1} B_1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $\partial_{\psi_p} = \frac{\partial}{\partial \psi_p}$ é uma derivada fermiônica atuando a esquerda (o mesmo valendo para $\partial_{\bar{\psi}_p}$ e ∂_{f_1}).

Vemos a partir da Lagrangeana acima que a introdução do defeito quebra a invariância de translação, e por isso era de se esperar que a conservação do momento fosse violada. Um fato surpreendente é que a conservação do momento ainda é preservada para uma escolha apropriada das funções B_0 e B_1 . Para ver isso considere a derivada do momento em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^0 dx \left(\partial_t \phi_1 \partial_x \phi_1 - \bar{\psi}_1 \partial_x \bar{\psi}_1 - \psi_1 \partial_x \psi_1 \right) \right. \\ & \left. + \int_0^{+\infty} dx \left(\partial_t \phi_2 \partial_x \phi_2 - \bar{\psi}_2 \partial_x \bar{\psi}_2 - \psi_2 \partial_x \psi_2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Usando as equações de movimento (3.2), (3.3) e desprezando as contribuições em $\pm\infty$, podemos escrever a expressão acima como:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & \left[\frac{1}{2}(\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t \phi_1)^2 - \bar{\psi}_1 \partial_t \bar{\psi}_1 - \psi_1 \partial_t \psi_1 - V_1 - W_1 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(\partial_x \phi_2)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \phi_2)^2 + \bar{\psi}_2 \partial_t \bar{\psi}_2 + \psi_2 \partial_t \psi_2 + V_2 + W_2 \right]_{x=0}. \end{aligned}$$

Usando as condições sobre o defeito em $x = 0$, e assumindo que

$$\frac{1}{2}(\partial_{\phi_1} B_0)^2 - \frac{1}{2}(\partial_{\phi_2} B_0)^2 - V_1 + V_2 = 0, \quad (3.5)$$

$$(\partial_{\phi_1} B_1)^2 = (\partial_{\phi_2} B_1)^2 = 0, \quad (3.6)$$

então, a derivada temporal do momento toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & \left[-(\partial_t \phi_2 \partial_{\phi_1} + \partial_t \phi_1 \partial_{\phi_2})(B_0 + B_1) + \partial_{\phi_1} B_0 \partial_{\phi_1} B_1 - \partial_{\phi_2} B_0 \partial_{\phi_2} B_1 \right. \\ & - \partial_t \bar{\psi}_1 \partial_{\bar{\psi}_1} B_1 - \partial_t \bar{\psi}_2 \partial_{\bar{\psi}_2} B_1 + \partial_t \psi_1 \partial_{\psi_1} B_1 + \partial_t \psi_2 \partial_{\psi_2} B_1 \\ & \left. - W_1 + W_2 + \partial_t(\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) - \partial_t(\psi_1 \psi_2) \right]_{x=0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Introduzindo novas variáveis

$$\begin{aligned} \phi_{\pm} &= \phi_1 \pm \phi_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \partial_{\phi_1} = \partial_{\phi_+} + \partial_{\phi_-} \\ \partial_{\phi_2} = \partial_{\phi_+} - \partial_{\phi_-} \end{cases} \\ \bar{\psi}_{\pm} &= \bar{\psi}_1 \pm \bar{\psi}_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \partial_{\bar{\psi}_1} = \partial_{\bar{\psi}_+} + \partial_{\bar{\psi}_-} \\ \partial_{\bar{\psi}_2} = \partial_{\bar{\psi}_+} - \partial_{\bar{\psi}_-} \end{cases} \\ \psi_{\pm} &= \psi_1 \pm \psi_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \partial_{\psi_1} = \partial_{\psi_+} + \partial_{\psi_-} \\ \partial_{\psi_2} = \partial_{\psi_+} - \partial_{\psi_-} \end{cases} \end{aligned}$$

podemos verificar que a terceira e quarta equações de (3.4) implicam em

$$\partial_{\psi_+} B_1 = 0, \quad \partial_{\bar{\psi}_-} B_1 = 0.$$

As condições acima sugerem que B_1 seria independente de ψ_+ e $\bar{\psi}_-$.
Deixe-nos agora assumir as seguintes condições:

$$\partial_{\phi_+}\partial_{\phi_-}B_0 = 0, \quad \partial_{\phi_+}\partial_{\phi_-}B_1 = 0, \quad \partial_{\bar{\psi}_+}\partial_{\psi_-}B_1 = 0,$$

de modo que as funções B_0 e B_1 possam ser decompostas na seguinte forma

$$B_0 = B_0^+(\phi_+) + B_0^-(\phi_-), \quad (3.8)$$

$$B_1 = B_1^+(\phi_+, \bar{\psi}_+, f_1) + B_1^-(\phi_-, \psi_-, f_1). \quad (3.9)$$

Usando (3.8), (3.9) e a última equação de (3.4), a equação (3.7) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & \left[\partial_t(-B_0^+ + B_0^- - B_1^+ + B_1^- + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2) \right]_{x=0} \\ & + \left[\frac{1}{2}\partial_{f_1}B_1^+\partial_{f_1}B_1^- + 2\partial_{\phi_+}B_0\partial_{\phi_-}B_1 + 2\partial_{\phi_-}B_0\partial_{\phi_+}B_1 \right. \\ & \left. - W_1 + W_2 \right]_{x=0}. \end{aligned}$$

A expressão acima pode ser reduzida a uma derivada total no tempo se colocamos

$$\frac{1}{2}\partial_{f_1}B_1^+\partial_{f_1}B_1^- + 2\partial_{\phi_+}B_0\partial_{\phi_-}B_1 + 2\partial_{\phi_-}B_0\partial_{\phi_+}B_1 = W_1 - W_2. \quad (3.10)$$

Assim, a combinação

$$\mathcal{P} = P + \left[(B_0^+ - B_0^-) + (B_1^+ - B_1^-) - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2 \right]_{x=0} \quad (3.11)$$

é conservada.

No caso de translação temporal vemos que a introdução do defeito na Lagrangeana (3.1) ainda preserva a invariância da Lagrangeana e portanto existe uma energia conservada a qual inclui a contribuição do defeito. Neste caso temos

$$\begin{aligned} E = & \int_{-\infty}^0 dx \left[\frac{1}{2}(\partial_x\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t\phi_1)^2 - \bar{\psi}_1\partial_x\bar{\psi}_1 + \psi_1\partial_x\psi_1 + V_1 + W_1 \right] \\ & + \int_0^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\partial_x\phi_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t\phi_2)^2 - \bar{\psi}_2\partial_x\bar{\psi}_2 + \psi_2\partial_x\psi_2 + V_2 + W_2 \right], \end{aligned}$$

e levando-se em conta a contribuição do defeito vemos que quantidade conservada seria a combinação

$$\mathcal{E} = E + \left[(B_0^+ + B_0^-) + (B_1^+ + B_1^-) - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2 \right]_{x=0}. \quad (3.12)$$

A partir das expressões (3.11) e (3.12) vemos que os campos trocam energia e momento com o defeito. A forma fechada sob derivada total no tempo das expressões para energia e momento, levando-se em conta a contribuição do defeito, justificam

as expressões (3.5), (3.6) e (3.10). Veremos que estas condições são satisfeitas para B_0 e B_1 correspondendo a transformação de Backlund, e por isso elas podem ser vistas alternativamente como uma ‘ferramenta’ para gerar uma transformação de Backlund [32]. Apresentaremos a seguir alguns modelos os quais satisfazem estas condições.

3.2 Teoria bosônica

Vamos considerar um caso puramente bosônico, colocando os férmions a zero na Lagrangeana (3.1). Assim, nas regiões $x < 0$ e $x > 0$ temos

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{2}(\partial_x \phi_p)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \phi_p)^2 + V_p, \quad p = 1, 2$$

onde os potenciais de interação são,

$$V_p = \frac{1}{2}m^2 \phi_p^2.$$

Portanto, as equações de movimento da lagrangeana acima para $x < 0$ ($p = 1$) e $x > 0$ ($p = 2$) são

$$\partial_x^2 \phi_p - \partial_t^2 \phi_p = m^2 \phi_p.$$

Este modelo corresponde ao caso linearizado da equação sinh-Gordon. A porção da lagrangeana associada com o defeito tem a seguinte forma

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2}(\phi_2 \partial_t \phi_1 - \phi_1 \partial_t \phi_2) + B_0(\phi_1, \phi_2).$$

Uma solução satisfazendo a equação (3.5) seria dado por

$$B_0 = -\frac{m\beta^2}{4}(\phi_1 - \phi_2)^2 - \frac{m}{4\beta^2}(\phi_1 + \phi_2)^2,$$

onde β é um parâmetro constante medindo com a intensidade do defeito.

Assim, as condições do defeito em $x = 0$ são

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 &= \frac{m\beta^2}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{m}{2\beta^2}(\phi_1 + \phi_2), \\ \partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 &= \frac{m\beta^2}{2}(\phi_1 - \phi_2) - \frac{m}{2\beta^2}(\phi_1 + \phi_2). \end{aligned}$$

Considere agora as soluções[†] para as equações de movimento nas regiões $x < 0$ e $x > 0$:

$$\phi_1 = e^{-i\omega t}(e^{ikx} + R(\theta)e^{-ikx}), \quad \phi_2 = T(\theta)e^{-i\omega t + ikx},$$

[†]As soluções são a parte real das expressões acima.

onde $k = m \sinh \theta$, $\omega = m \cosh \theta$; R e T são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente. Usando as condições de defeito acima, obtemos

$$R = 0, \quad T = -\frac{2i \sinh \theta + a_+}{2i \cosh \theta - a_-}, \quad a_{\pm} = \left(\frac{2}{\sigma} \pm \frac{\sigma}{2} \right), \quad \sigma = -\frac{2}{\beta^2}.$$

Vemos a partir das expressões acima que no processo de espalhamento pelo defeito a reflexão está ausente, ou seja, o processo é puramente transmitido.

O momento e a energia são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= P + \left[-\frac{m\beta^2}{4}(\phi_1 - \phi_2)^2 + \frac{m}{4\beta^2}(\phi_1 + \phi_2)^2 \right]_{x=0}, \\ \mathcal{E} &= E + \left[-\frac{m\beta^2}{4}(\phi_1 - \phi_2)^2 - \frac{m}{4\beta^2}(\phi_1 + \phi_2)^2 \right]_{x=0}. \end{aligned}$$

3.3 Teoria fermiônica

Agora vamos considerar um caso puramente fermiônico, colocando os bósons a zero na Lagrangeana (3.1), de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p &= -\bar{\psi}_p \partial_x \psi_p + \bar{\psi}_p \partial_t \psi_p + \psi_p \partial_x \bar{\psi}_p + \psi_p \partial_t \bar{\psi}_p + W_p(\psi_p, \bar{\psi}_p), \\ & p = 1, 2 \end{aligned}$$

onde o potencial de interação é dado por

$$W_p = 2m\bar{\psi}_p \psi_p.$$

Então, as equações de campo nas regiões $x < 0$ ($p = 1$) e $x > 0$ ($p = 2$) são

$$\partial_x \psi_p + \partial_t \psi_p = m\bar{\psi}_p, \quad \partial_x \bar{\psi}_p - \partial_t \bar{\psi}_p = m\psi_p.$$

A lagrangeana associada com o defeito tem a seguinte forma

$$\mathcal{L}_D = -\psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + 2f_1 \partial_t f_1 + B_1(\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, f_1).$$

Considere

$$B_1 = -\frac{2i}{\beta} \sqrt{m} f_1 (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) + i\beta \sqrt{m} f_1 (\psi_1 - \psi_2),$$

os quais satisfaz

$$\partial_{\bar{\psi}_+} \partial_{\psi_-} B_1 = 0, \quad \frac{1}{2} \partial_{f_1} B_1^+ \partial_{f_1} B_1^- = W_1 - W_2.$$

Então, as condições de defeito em $x = 0$ são

$$\begin{aligned}\psi_1 + \psi_2 &= -i\beta\sqrt{m}f_1, \\ \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 &= -\frac{2i}{\beta}\sqrt{m}f_1, \\ \partial_t f_1 &= \frac{i}{2\beta}\sqrt{m}(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) - \frac{i\beta}{4}\sqrt{m}(\psi_1 - \psi_2),\end{aligned}$$

e o momento e a energia são dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= P + \left[-\frac{2i}{\beta}\sqrt{m}f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) - i\beta\sqrt{m}f_1(\psi_1 - \psi_2) - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2 \right]_{x=0}, \\ \mathcal{E} &= E + \left[-\frac{2i}{\beta}\sqrt{m}f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) + i\beta\sqrt{m}f_1(\psi_1 - \psi_2) - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2 \right]_{x=0}.\end{aligned}$$

3.4 Super sinh-Gordon $N = 1$

Considere a Lagrangeana[‡]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p &= \frac{1}{2}(\partial_x \phi_p)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \phi_p)^2 - \bar{\psi}_p \partial_x \bar{\psi}_p + \bar{\psi}_p \partial_t \bar{\psi}_p + \psi_p \partial_x \psi_p + \psi_p \partial_t \psi_p \\ &\quad + V_p(\phi_p) + W_p(\phi_p, \psi_p, \bar{\psi}_p), \quad p = 1, 2 \\ \mathcal{L}_D &= \frac{1}{2}(\phi_2 \partial_t \phi_1 - \phi_1 \partial_t \phi_2) - \psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + 2f_1 \partial_t f_1 \\ &\quad B_0(\phi_1, \phi_2) + B_1(\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, f_1),\end{aligned}\tag{3.13}$$

onde

$$V_p = 4m^2 \cosh(2\phi_p), \quad W_p = 8m \bar{\psi}_p \psi_p \cosh \phi_p,$$

e

$$B_0 = -m\beta^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4m}{\beta^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2),\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}B_1 &= -\frac{4i}{\beta}\sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \\ &\quad + 2i\beta\sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2).\end{aligned}\tag{3.15}$$

As equações de movimento são

$x < 0$:

$$\begin{aligned}\partial_x^2 \phi_1 - \partial_t^2 \phi_1 &= 8m^2 \sinh(2\phi_1) + 8m \bar{\psi}_1 \psi_1 \sinh \phi_1, \\ (\partial_x + \partial_t) \bar{\psi}_1 &= 4m \psi_1 \cosh \phi_1, \\ (\partial_x - \partial_t) \psi_1 &= 4m \bar{\psi}_1 \cosh \phi_1,\end{aligned}\tag{3.16}$$

[‡]Por simplicidade colocamos a constante de acoplamento $\alpha = 1$, a qual pode ser reinserida por reparametrização apropriada.

$x > 0$:

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 \phi_2 - \partial_t^2 \phi_2 &= 8m^2 \sinh(2\phi_2) + 8m \bar{\psi}_2 \psi_2 \sinh \phi_2, \\
(\partial_x + \partial_t) \bar{\psi}_2 &= 4m \psi_2 \cosh \phi_2, \\
(\partial_x - \partial_t) \psi_2 &= 4m \bar{\psi}_2 \cosh \phi_2,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$x = 0$:

$$\begin{aligned}
\partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 &= m\beta^2 \sinh(\phi_1 - \phi_2) + \frac{4m}{\beta^2} \sinh(\phi_1 + \phi_2) \\
&\quad \frac{2i}{\beta} \sqrt{m} \sinh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \\
&\quad - i\beta \sqrt{m} \sinh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 &= m\beta^2 \sinh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4m}{\beta^2} \sinh(\phi_1 + \phi_2) \\
&\quad - \frac{2i}{\beta} \sqrt{m} \sinh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \\
&\quad - i\beta \sqrt{m} \sinh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\psi_1 + \psi_2 = -2i\beta \sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1, \tag{3.20}$$

$$\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 = -\frac{4i}{\beta} \sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1, \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t f_1 &= \frac{i}{\beta} \sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \\
&\quad - \frac{i\beta}{2} \sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) (\psi_1 - \psi_2).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

O momento e a energia são dados por

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= P + \left[-m\beta^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) + \frac{4m}{\beta^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) \right. \\
&\quad - \frac{4i}{\beta} \sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \\
&\quad \left. - 2i\beta \sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2) - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + \psi_1 \psi_2 \right]_{x=0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= E + \left[-m\beta^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4m}{\beta^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) \right. \\
&\quad - \frac{4i}{\beta} \sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \\
&\quad \left. + 2i\beta \sqrt{m} \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2) - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 - \psi_1 \psi_2 \right]_{x=0}.
\end{aligned}$$

As expressões (3.14) e (3.15) satisfazem as condições (3.5), (3.6), (3.10) e implicam nas condições de defeito em $x = 0$, as quais correspondem as transformações de Backlund (2.5).[§] Como as transformações de Backlund são supersimétrica, a supersimetria é mantida no defeito. Uma consequência disso é que além de armazenar energia e momento, o defeito também armazena supercarga. Para ver isso, considere a transformação de supersimetria ($m = 1$)

$$\delta\phi_p = \epsilon\bar{\psi}_p, \quad \delta\bar{\psi} = \frac{\epsilon}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi_p, \quad \delta\psi_p = \epsilon 2 \sinh \phi_p.$$

Esta transformação levaria a conservação da supercarga na teoria sem defeito:

$$Q_{susy} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\bar{\psi}_p(\partial_x\phi_p + \partial_t\phi_p) + 4\psi_p \sinh \phi_p \right].$$

No entanto quando levamos em conta o defeito, vemos uma parcela vindo de $x = 0$ é adicionada a supercarga:

$$Q_{susy} = \int_{-\infty}^0 dx \left[\bar{\psi}_1(\partial_x\phi_1 + \partial_t\phi_1) + 4\psi_1 \sinh \phi_1 \right] \\ + \int_0^{\infty} dx \left[\bar{\psi}_2(\partial_x\phi_2 + \partial_t\phi_2) + 4\psi_2 \sinh \phi_2 \right] + Q_D,$$

onde Q_D é a contribuição do defeito

$$Q_D = \frac{8i}{\beta} \left[\sinh \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) f_1 \right]_{x=0}.$$

3.5 Espalhamento com o defeito

Nesta seção discutimos o espalhamento de sóliton com o defeito.

• *sistema bóson-bóson*. Vamos considerar o caso bosônico colocando os campos fermiônicos $\psi_1 = \psi_2 = \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 = 0$ na Lagrangeana[¶](3.13), com $\phi_1 \neq 0$, $\phi_2 \neq 0$. Este caso produz precisamente a solução obtida em [26] para o modelo sine-Gordon na presença de defeito:

$$e^{i\phi_a/2} = \frac{1 - iE_a}{1 + iE_a}, \quad E_a = R_a e^{\alpha_a x + \beta_a t},$$

onde $\alpha_a^2 - \beta_a^2 = 1$, $a = 1, 2$. A transformação de Backlund (3.18) e (3.19) neste caso fica

$$\partial_x\phi_1 - \partial_t\phi_2 = -\sigma \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) - \frac{1}{\sigma} \sin \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right), \\ \partial_x\phi_2 - \partial_t\phi_1 = \sigma \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) - \frac{1}{\sigma} \sin \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right).$$

[§]Após uma reparametrização apropriada e fazendo $f_1 \rightarrow f_1^{(1,2)}$.

[¶]Por simplicidade colocamos $m = 1$, e usamos a seguinte reparametrização: $\phi_p \rightarrow \frac{i}{2}\phi_p$, $x \rightarrow \frac{x}{4}$, $t \rightarrow \frac{t}{4}$, $\sigma = -\frac{2}{\beta^2}$.

Colocando $\alpha_a = \cosh \theta_a$ e $\beta_a = \sinh \theta_a$, as condições de defeito acima implicam que:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta, \quad R_2 = \left(\frac{e^\theta + \sigma}{e^\theta - \sigma} \right) R_1.$$

As relações acima indicam que o defeito preserva a velocidade do sóliton, permitindo uma mudança de fase quando ele passa através do defeito. Note que para valores especiais de θ o defeito pode absorver ou emitir um sóliton. Por exemplo, para $\sigma < 0$ e $e^\theta = |\sigma|$ temos $R_2 = 0$, e quando $\sigma > 0$ e $e^\theta = |\sigma|$ temos $R_2 \rightarrow \infty$, em ambos casos temos $\phi_2 = 0$ indicando que o sóliton vindo da região $x < 0$ é absorvido no defeito. Uma outra configuração possível ocorre quando $e^\theta < |\sigma|$ para $\sigma > 0$ ou $\sigma < 0$, neste caso um sóliton é convertido num anti-sóliton seguido de uma mudança de fase. Para o caso em que $e^\theta > |\sigma|$ para $\sigma > 0$ ou $\sigma < 0$, a forma do sóliton é preservada seguida apenas de uma mudança de fase. Note que os processos de conversão sóliton \rightarrow anti-sóliton são dominantes uma vez o processo de absorção/emissão ocorre apenas para valores específicos de θ . Além disso, note que no processo de absorção/emissão o sóliton perde/ganha uma unidade de carga topológica enquanto que no processo de conversão sóliton \rightarrow anti-sóliton, o sóliton perde duas unidades de carga topológica. Nesse sentido, vemos que o defeito armazena e troca carga topológica com o sóliton durante o processo de espalhamento para que a conservação da carga topológica seja mantida por todo o processo. Este fato foi um ponto importante notado em [27] para a derivação da matriz de transmissão quântica do modelo de sine-Gordon com defeito.

• *sistema férmion-férmion.* Consideramos soluções onde $\phi_1 = \phi_2 = 0$. As soluções das equações de movimento são da forma

$$\bar{\psi}_a = \epsilon S_a e^{\alpha_a x + \beta_a t}, \quad \psi_a = e^{-\theta_a} \bar{\psi}_a, \quad a = 1, 2,$$

onde ϵ é um parâmetro grassmanniano e $\alpha_a^2 - \beta_a^2 = 1$. A partir de (3.20)-(3.22) encontramos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\beta} (S_1 \beta_1 e^{-\theta_1} e^{\alpha_1 x + \beta_1 t} + S_2 \beta_2 e^{-\theta_2} e^{\alpha_2 x + \beta_2 t}) &= \frac{1}{\beta} (S_1 e^{\alpha_1 x + \beta_1 t} + S_2 e^{\alpha_2 x + \beta_2 t}) \\ &\quad - \frac{\beta}{2} (S_1 e^{-\theta_1} e^{\alpha_1 x + \beta_1 t} - S_2 e^{-\theta_2} e^{\alpha_2 x + \beta_2 t}). \end{aligned}$$

Para $\alpha_1 = \alpha_2$, encontramos $\theta_1 = \theta_2 = 0$ e

$$S_2 = \left(\frac{e^\theta + \sigma}{e^\theta - \sigma} \right) S_1,$$

onde $\alpha_a = \cosh \theta$, $\beta_a = \sinh \theta$. Novamente a velocidade é preservada sendo permitida apenas uma mudança de fase quando o sóliton interage com o defeito. No caso limite de absorção, quando $S_2 = 0$, ocorre para $\sigma < 0$ e $e^\theta = |\sigma|$.

• *sistema férmion/bóson-férmion/bóson*. Considere a seguinte solução das equações de movimento

$$e^{i\phi_a} = \frac{1 - iE_a}{1 + iE_a}, \quad E_a = R_a e^{\alpha_a x + \beta_a t}, \quad \alpha_a^2 - \beta_a^2 = 1, \quad a = 1, 2,$$

$$\bar{\psi}_a = \epsilon S_a e^{\alpha_a x + \beta_a t} \left(\frac{1}{1 + iE_a} + \frac{1}{1 - iE_a} \right), \quad \psi_a = e^{-\theta_a} \bar{\psi}_a.$$

Substituimos as soluções acima nas equações de Backlund

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 &= -\sigma \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) - \frac{1}{\sigma} \sin \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \\ \partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 &= \sigma \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) - \frac{1}{\sigma} \sin \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right), \\ (\psi_1 + \psi_2) \cos \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{4} \right) &= -\frac{1}{\sigma} (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) \cos \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{4} \right). \end{aligned}$$

Escrevendo $\alpha_a = \cosh \theta_a$, $\beta_a = \sinh \theta_a$ na solução acima encontramos

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta, \quad S_2 = \left(\frac{e^\theta + \sigma}{e^\theta - \sigma} \right) S_1, \quad R_2 = \left(\frac{e^\theta + \sigma}{e^\theta - \sigma} \right) R_1. \quad (3.23)$$

Novamente a velocidade é preservada sendo permitida apenas uma mudança de fase quando o sólton interage com o defeito. O processo de absorção/emissão ocorre quando obtido e $e^\theta = |\sigma|$ para $\sigma < 0$ ou $\sigma > 0$, e o processo de conversão ocorre quando $e^\theta < |\sigma|$ para $\sigma < 0$ ou $\sigma > 0$. Neste caso os campos bosônicos e fermiônicos mudam de sinal seguido de uma mudança de fase.

3.6 Formulação de curvatura nula

Nesta seção discutiremos sobre a integrabilidade do modelo super sinh-Gordon $N = 1$ com defeito em termos da formulação de curvatura nula. Seguiremos a linha sugerida em [18]. Para começar a discussão considere o par de Lax (2.6) construído a partir de uma superálgebra $sl(2, 1)$ ^{||}:

$$\begin{aligned} a_t^{(p)} &= -\frac{1}{2} \partial_x \phi_p h_1 + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) (h_1 + 2h_2) + B_-(\phi_p) E_{\alpha_1} + B_-(-\phi_p) E_{-\alpha_1} \\ &\quad + F_+(\phi_p) E_{\alpha_2} + F_-(-\phi_p) E_{-\alpha_2} + F_+(-\phi_p) E_{\alpha_1 + \alpha_2} + F_-(\phi_p) E_{-\alpha_1 - \alpha_2}, \\ a_x^{(p)} &= -\frac{1}{2} \partial_t \phi_p h_1 + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) (h_1 + 2h_2) - B_+(\phi_p) E_{\alpha_1} - B_+(-\phi_p) E_{-\alpha_1} \\ &\quad + F_-(\phi_p) E_{\alpha_2} + F_+(-\phi_p) E_{-\alpha_2} + F_-(-\phi_p) E_{\alpha_1 + \alpha_2} + F_+(\phi_p) E_{-\alpha_1 - \alpha_2}, \end{aligned}$$

$p = 1, 2$.

^{||}Efetuamos uma transformação de gauge $\tilde{A}_\mu^{(p)} = \theta A_\mu^{(p)} \theta^{-1} + \theta \partial_\mu \theta^{-1}$, onde $\theta = e^{-\frac{1}{2} \phi M_2^{(0)}}$, e uma mudança de variáveis $x \rightarrow (x + t)$, $t \rightarrow (x - t) \implies a_x^{(p)} = (\tilde{A}_x^{(p)} + \tilde{A}_t^{(p)})$, $a_t^{(p)} = (\tilde{A}_x^{(p)} - \tilde{A}_t^{(p)})$. Por simplicidade colocamos a potência de λ compatível com a gradação homogênea $Q = \lambda \frac{d}{d\lambda}$.

onde

$$B_{\pm}(\phi_p) = \left(\frac{e^{\phi_p}}{\lambda} \pm \lambda e^{-\phi_p} \right), \quad F_{\pm}(\phi_p) = (\lambda^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\phi_p} \bar{\psi}_p \pm \lambda^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\phi_p} \psi_p),$$

e λ denota o parâmetro espectral efetivo. Colocamos $m = 1$ por questão de simplicidade.

Para introduzir o defeito no par de Lax extendemos *infinitesimalmente* cada uma das regiões $R^{(1)} : x < 0$ e $R^{(2)} : x > 0$ para $R^{(1)} : x \leq b$ e $R^{(2)} : x \geq a$, com $b > a$, de modo que haja uma *pequena* região sobreposta $R^{(1)} \cap R^{(2)}$ em $a \leq x \leq b$. Em cada região definimos o novo par de Lax:

$R^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \hat{a}_t^{(1)} &= a_t^{(1)} - \frac{1}{2}\theta(x-a) \left[(\partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 + \partial_{\phi_1} B_0 + \partial_{\phi_1} B_1) h_1 \right. \\ &\quad \left. + (\psi_1 + \psi_2 - \partial_{\psi_1} B_1) E_1 + (\partial_t f_1 + \frac{1}{4} \partial_{f_1} B_1) E'_1 \right], \\ \hat{a}_x^{(1)} &= \theta(a-x) a_x^{(1)}, \end{aligned}$$

$R^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \hat{a}_t^{(2)} &= a_t^{(2)} - \frac{1}{2}\theta(b-x) \left[(\partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 - \partial_{\phi_2} B_0 - \partial_{\phi_2} B_1) h_1 \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 + \partial_{\bar{\psi}_2} B_1) E_2 + (\partial_t f_1 + \frac{1}{4} \partial_{f_1} B_1) E'_2 \right], \\ \hat{a}_x^{(2)} &= \theta(x-b) a_x^{(2)}, \end{aligned}$$

onde E_i e E'_i denotam um par de operadores *step* de $sl(2,1)$. Podemos ver diretamente usando a equação de curvatura nula que as expressões definidas acima para $R^{(1)}$ e $R^{(2)}$ produzem as equações de movimento para as regiões $x < a$ e $x > b$, respectivamente. Além disso, a ação da derivada ∂_x sobre as funções $\theta(x)$ implicam nas condições de defeito *infinitesimalmente* deslocadas para $x = a$ e $x = b$. Note que na região de sobreposição $\hat{a}_x^{(1)}$ e $\hat{a}_x^{(2)}$ se anulam implicando que $a_t^{(1)}$ e $a_t^{(2)}$ sejam independente de x nesta região. Esta independência permite estabelecer uma transformação de gauge entre $a_t^{(1)}$ e $a_t^{(2)}$ em diferentes pontos:

$$\partial_t K = K \hat{a}_t^{(2)}(b, t) - \hat{a}_t^{(1)}(a, t) K. \quad (3.24)$$

A existência de uma transformação de gauge com a propriedade acima é requerida para que a condição de curvatura nula seja mantida sobre toda a linha, implicando na existência de um número infinito de cargas conservadas. No contexto de formulação de curvatura nula na presença de defeito, o análogo do gerador funcional (2.8) teria a seguinte forma:

$$\hat{Q}(\lambda) = Tr [U_1(-\infty, a; \lambda) K U_2(b, \infty; \lambda)],$$

onde

$$U_p(x_1, x_2; \lambda) = P \exp \int_{x_1}^{x_2} dx \hat{a}_x^{(p)}.$$

Usando a eq. (2.7) e a transformação de gauge (3.24), com os campos satisfazendo apropriadas condições em $\pm\infty$, vemos que a quantidade $\hat{Q}(\lambda)$ é conservada para qualquer escolha do parâmetro λ .

Portanto, de acordo com a discussão acima, é necessário obter explicitamente a transformação de gauge gerado por K . Para fazer isso decompomos o operador K na seguinte forma

$$K = e^{\frac{1}{2}\phi_2 h_1} \bar{K} e^{-\frac{1}{2}\phi_1 h_1}.$$

Substituindo a expressão acima na eq. (3.24), encontramos

$$\bar{K} = I \left(1 + \frac{2}{\lambda\beta} \right) \Lambda - m(-1/2)\Lambda - m(-1)\Lambda, \quad (3.25)$$

onde Λ é uma constante arbitrária. No caso em que $\Lambda = \left(1 + \frac{2}{\lambda\beta^2} \right)^{-1}$, podemos reescrever a expressão acima como

$$\bar{K} = e^{-m(-1/2)-m(-1)-m(-3/2)\dots},$$

onde

$$\begin{aligned} m(-1/2) &= \frac{2if_1}{\beta} \lambda^{-\frac{1}{2}} (E_{\alpha_1} - E_{-\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} - E_{-\alpha_1-\alpha_2}), \\ m(-1) &= \frac{2}{\beta^2} \lambda^{-1} (h_1 + 2h_2 - E_{\alpha_1} - E_{-\alpha_1}). \\ m(-3/2) &= m(-2) = 0 \\ m(-5/2) &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\beta^2} \right)^2 \lambda^{-2} m(-1/2), \\ m(-3) &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\beta^2} \right)^2 \lambda^{-2} m(-1), \\ &\vdots \end{aligned}$$

A existência da transformação de gauge gerada pelo operador K , obtido explicitamente acima, indica fortemente que o sistema é integrável. Para a completa integrabilidade restaria ainda verificar que as cargas conservadas geradas por $\hat{Q}(\lambda)$ comutam entre si sob o parênteses de Poisson, mas não temos a intenção de fazer isso aqui.

Capítulo 4

Super Sinh-Gordon $N = 2$ com defeito

Neste capítulo apresentaremos a extensão do modelo de sinh-Gordon supersimétrico para $N = 2$ na presença de defeito [33], [34]. A equação super sine-Gordon $N = 2$ foi proposta por K. Kobayashi e T. Uematsu [35], [36] os quais investigaram suas leis de conservação a nível clássico e quântico, e sua matriz S . O caso restrito na semi-reta $x \leq 0$ foi discutido por R. I. Nepomechie [24], [25]. Apresentaremos o caso em que o defeito está presente em $x = 0$. Novamente veremos que as condições de contorno sobre o defeito devem corresponder a transformação de Backlund localizada em $x = 0$ para que a integrabilidade do modelo seja mantida.

4.1 Equações de movimento

Para obter as equações de movimento da teoria supersimétrica de sine-Gordon $N = 2$ introduzimos os supercampos

$$\phi^\pm = \varphi^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm) + \theta^\pm \psi^\mp(z^\pm, \bar{z}^\pm) + \bar{\theta}^\pm \bar{\psi}^\mp(z^\pm, \bar{z}^\pm) + \theta^\pm \bar{\theta}^\pm F^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm),$$

onde

$$z^\pm = z \pm \frac{1}{2}\theta^+\theta^-, \quad \bar{z}^\pm = \bar{z} \pm \frac{1}{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-.$$

As componentes dos supercampos ϕ^\pm podem ser expandidas nas variáveis de grassmann θ^\pm e $\bar{\theta}^\pm$. Por exemplo, as componentes $\varphi^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm)$ quando expandidas nas variáveis de grassmann tomam a seguinte forma:

$$\varphi^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm) = \varphi^\pm \pm \frac{1}{2}\theta^+\theta^-\partial_z\varphi^\pm \pm \frac{1}{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\partial_{\bar{z}}\varphi^\pm + \frac{1}{4}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\partial_z\partial_{\bar{z}}\varphi^\pm.$$

Assim, se expandimos todas as componentes de ϕ^\pm , obtemos

$$\begin{aligned} \phi^\pm = & \varphi^\pm + \theta^\pm \psi^\mp + \bar{\theta}^\pm \bar{\psi}^\mp \pm \frac{1}{2}\theta^+\theta^-\partial_z\varphi^\pm \pm \frac{1}{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\partial_{\bar{z}}\varphi^\pm + \theta^\pm \bar{\theta}^\pm F^\pm \\ & \pm \theta^\pm \bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}\psi^\mp \pm \bar{\theta}^\pm \theta^+\theta^-\frac{1}{2}\partial_z\bar{\psi}^\mp + \frac{1}{4}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\partial_z\partial_{\bar{z}}\varphi^\pm. \end{aligned}$$

Em seguida, usamos as variáveis de grassmann para introduzir as seguintes superderivadas

$$D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \theta^{\pm}} + \frac{1}{2} \theta^{\mp} \partial_z, \quad \bar{D}_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\pm}} + \frac{1}{2} \bar{\theta}^{\mp} \partial_{\bar{z}}.$$

Agora estamos prontos para apresentar as equações de movimento para a teoria supersimétrica de sine-Gordon $N = 2$:

$$\bar{D}_{\pm} D_{\pm} \phi^{\pm} = g \operatorname{sen}(\beta \phi^{\mp}), \quad (4.1)$$

onde g é um parâmetro de massa e β é uma constante de acoplamento. Daqui por diante vamos colocar $\beta = 1$ por questão de simplicidade, ela pode ser reinserida na teoria usando uma apropriada reparametrização. Em termos de componentes as equações de movimento são

$$\begin{aligned} F^{\pm} &= g \operatorname{sen} \varphi^{\mp}, \\ \partial_{\bar{z}} \psi^{\mp} &= g \cos \varphi^{\mp} \bar{\psi}^{\pm}, \\ \partial_z \bar{\psi}^{\mp} &= -g \cos \varphi^{\mp} \psi^{\pm}, \\ \partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi^{\pm} &= -g \cos \varphi^{\mp} F^{\mp} - g \operatorname{sen} \varphi^{\mp} \psi^{\pm} \bar{\psi}^{\pm}. \end{aligned}$$

Além disso o supercampo quiral ϕ^+ e anti-quiral ϕ^- satisfazem os vínculos

$$\bar{D}_{\pm} \phi^{\mp} = D_{\pm} \phi^{\mp} = 0.$$

Para obter a transformação de supersimetria introduzimos os geradores

$$Q_{\pm} = \partial_{\theta^{\pm}} - \frac{1}{2} \theta^{\mp} \partial_z, \quad \bar{Q}_{\pm} = \partial_{\bar{\theta}^{\pm}} - \frac{1}{2} \bar{\theta}^{\mp} \partial_{\bar{z}},$$

os quais satisfazem

$$\begin{aligned} Q_+^2 &= Q_-^2 = \bar{Q}_+^2 = \bar{Q}_-^2 = 0, \\ \{Q_+, Q_-\} &= -\partial_z, & \{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} &= -\partial_{\bar{z}}, \\ \{D_{\pm}, Q_{\mp}\} &= \{D_{\pm}, Q_{\pm}\} = 0, & \{D_{\pm}, \bar{Q}_{\mp}\} &= \{D_{\pm}, \bar{Q}_{\pm}\} = 0, \\ \{\bar{D}_{\pm}, Q_{\mp}\} &= \{\bar{D}_{\pm}, Q_{\pm}\} = 0, & \{\bar{D}_{\pm}, \bar{Q}_{\mp}\} &= \{\bar{D}_{\pm}, \bar{Q}_{\pm}\} = 0. \end{aligned}$$

A transformação de supersimetria então é dada por

$$\delta \phi^{\pm} = (\epsilon_+ Q_+ + \epsilon_- Q_- + \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_+ + \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_-) \phi^{\pm},$$

onde ϵ_{\pm} e $\bar{\epsilon}_{\pm}$ são parâmetros fermiônicos. Em termos de componentes a transformação de supersimetria é dada por

$$\begin{aligned} \delta \varphi^{\pm} &= \epsilon_{\pm} \psi^{\mp} + \bar{\epsilon}_{\pm} \bar{\psi}^{\mp}, \\ \delta \psi^{\mp} &= \epsilon_{\mp} \partial_z \varphi^{\pm} + \bar{\epsilon}_{\pm} F^{\pm}, \\ \delta \bar{\psi}^{\mp} &= -\epsilon_{\pm} F^{\pm} + \bar{\epsilon}_{\mp} \partial_{\bar{z}} \varphi^{\pm}, \\ \delta F^{\pm} &= -\epsilon_{\mp} \partial_z \bar{\psi}^{\mp} + \bar{\epsilon}_{\mp} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mp}. \end{aligned}$$

Obtivemos uma transformação de Backlund para as equações (4.1), veja o Apêndice C.

4.2 Super Sinh-Gordon $N=2$ com defeito

Para formular a teoria supersimétrica de sinh-Gordon $N = 2$ na presença de defeito faremos primeiro uma reparametrização da teoria supersimétrica de sine-Gordon $N = 2$ colocando:

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t), \quad \partial_{\bar{z}} = -\frac{1}{2}(\partial_x - \partial_t),$$

$$g = 2, \quad \phi_n^\pm \rightarrow i\phi_n^\pm, \quad \psi_n^\pm \rightarrow i\sqrt{2}\psi_n^\pm, \quad \bar{\psi}_n^\pm \rightarrow i\sqrt{2}\bar{\psi}_n^\pm,$$

para $n = 1, 2$, onde

$$\phi_n^\pm = \phi_n \pm \varphi_n, \quad \psi_n^\pm = \psi_n \pm \chi_n, \quad \bar{\psi}_n^\pm = \bar{\psi}_n \pm \bar{\chi}_n. \quad (4.2)$$

Em seguida, de maneira similar ao caso $N = 1$, introduzimos a densidade lagrangeana composta por peças governando os campos nas regiões $x < 0$ e $x > 0$, e uma contribuição descrevendo o defeito em $x = 0$:

$$\mathcal{L} = \theta(-x)\mathcal{L}_1 + \theta(x)\mathcal{L}_2 + \delta(x)\mathcal{L}_D, \quad (4.3)$$

onde*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n &= \frac{1}{2}(\partial_x \phi_n)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \phi_n)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \varphi_n)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t \varphi_n)^2 - 2\psi_n \partial_x \psi_n + 2\psi_n \partial_t \psi_n \\ &\quad + 2\bar{\psi}_n \partial_x \bar{\psi}_n + 2\bar{\psi}_n \partial_t \bar{\psi}_n + 2\chi_n \partial_x \chi_n - 2\chi_n \partial_t \chi_n - 2\bar{\chi}_n \partial_x \bar{\chi}_n - 2\bar{\chi}_n \partial_t \bar{\chi}_n \\ &\quad - 16(\psi_n \bar{\psi}_n + \chi_n \bar{\chi}_n) \text{ch} \varphi_n \text{ch} \phi_n + 16(\psi_n \bar{\chi}_n + \chi_n \bar{\psi}_n) \text{sh} \varphi_n \text{sh} \phi_n \\ &\quad + 4 \text{ch}(2\phi_n) - 4 \text{ch}(2\varphi_n), \quad n = 1, 2 \\ \mathcal{L}_D &= \frac{1}{2}(\phi_2 \partial_t \phi_1 - \phi_1 \partial_t \phi_2) - 2\psi_1 \psi_2 - 2\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + \zeta_1^+ \partial_t \zeta_1^- \\ &\quad - \frac{1}{2}(\varphi_2 \partial_t \varphi_1 - \varphi_1 \partial_t \varphi_2) + 2\chi_1 \chi_2 + 2\bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 + \zeta_1^- \partial_t \zeta_1^+ + B. \end{aligned}$$

A quantidade B é uma função dos campos descrevendo o defeito dada por:

$$B = B_0^+ + B_0^- + B_1^+ + B_1^-,$$

$$\begin{aligned} B_0^+(\phi_+, \varphi_+) &= 2\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \text{ch} \phi_+ - 2\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \text{ch} \varphi_+, \\ B_0^-(\phi_-, \varphi_-) &= 2\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \text{ch} \phi_- - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \text{ch} \varphi_-, \end{aligned}$$

*Para simplificar a notação vamos denotar $\text{ch} x = \cosh x$ e $\text{sh} x = \sinh x$.

(4.5)

$$\begin{aligned}
B_1^+(\phi_+, \varphi_+, \psi_+, \chi_+, \zeta_1^-, \zeta_1^+) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\zeta_1^- \alpha_3 \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2}\right) \psi_+^{(-)} \\
&\quad -\frac{i}{\sqrt{2}}\zeta_1^+ \alpha_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2}\right) \psi_+^{(+)}, \\
B_1^-(\phi_-, \varphi_-, \bar{\psi}_-, \bar{\chi}_-, \zeta_1^-, \zeta_1^+) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\zeta_1^- \alpha_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2}\right) \bar{\psi}_-^{(+)} \\
&\quad +\frac{i}{\sqrt{2}}\zeta_1^+ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(+)}}{2}\right) \bar{\psi}_-^{(-)},
\end{aligned}$$

onde as funções auxiliares ζ_1^\pm são fermiônicas e α_1 , α_2 e α_3 são constantes medindo a intensidade do defeito. Na Lagrangeana acima, em acordo com (4.2), a notação para os campos $\phi_\pm^{(\pm)}$ significa:

$$\begin{aligned}
\phi_\pm^{(-)} &= \phi_1^- \pm \phi_2^- = (\phi_1 - \varphi_1) \pm (\phi_2 - \varphi_2) = \phi_\pm - \varphi_\pm, \\
\phi_\pm^{(+)} &= \phi_1^+ \pm \phi_2^+ = (\phi_1 + \varphi_1) \pm (\phi_2 + \varphi_2) = \phi_\pm + \varphi_\pm,
\end{aligned}$$

onde denotamos $\phi_\pm = \phi_1 \pm \phi_2$ e $\varphi_\pm = \varphi_1 \pm \varphi_2$. Para os demais campos a notação é similar.

A Lagrangeana introduzida acima leva as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned}
(\partial_x^2 - \partial_t^2)\phi_p &= 8\operatorname{sh}(2\phi_p) - 16(\psi_p\bar{\psi}_p + \chi_p\bar{\chi}_p)\operatorname{sh}\phi_p\operatorname{ch}\varphi_p, \\
&\quad +16(\psi_p\bar{\chi}_p + \chi_p\bar{\psi}_p)\operatorname{sh}\varphi_p\operatorname{ch}\phi_p, \\
(\partial_x^2 - \partial_t^2)\varphi_p &= 8\operatorname{sh}(2\varphi_p) + 16(\psi_p\bar{\psi}_p + \chi_p\bar{\chi}_p)\operatorname{sh}\varphi_p\operatorname{ch}\phi_p, \\
&\quad -16(\psi_p\bar{\chi}_p + \chi_p\bar{\psi}_p)\operatorname{sh}\phi_p\operatorname{ch}\varphi_p, \\
(\partial_x - \partial_t)\psi_p &= -4\bar{\psi}_p\operatorname{ch}\phi_p\operatorname{ch}\varphi_p + 4\bar{\chi}_p\operatorname{sh}\phi_p\operatorname{sh}\varphi_p, \\
(\partial_x - \partial_t)\chi_p &= -4\bar{\psi}_p\operatorname{sh}\phi_p\operatorname{sh}\varphi_p + 4\bar{\chi}_p\operatorname{ch}\phi_p\operatorname{ch}\varphi_p, \\
(\partial_x + \partial_t)\bar{\psi}_p &= -4\psi_p\operatorname{ch}\phi_p\operatorname{ch}\varphi_p + 4\chi_p\operatorname{sh}\phi_p\operatorname{sh}\varphi_p, \\
(\partial_x + \partial_t)\bar{\chi}_p &= -4\psi_p\operatorname{sh}\phi_p\operatorname{sh}\varphi_p + 4\chi_p\operatorname{ch}\phi_p\operatorname{ch}\varphi_p,
\end{aligned}$$

com $p = 1$ para $x < 0$ e $p = 2$ para $x > 0$.

Em $x = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 &= -\partial_{\phi_1} B, & \partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 &= \partial_{\phi_2} B, \\
\partial_x \varphi_1 - \partial_t \varphi_2 &= \partial_{\varphi_1} B, & \partial_x \varphi_2 - \partial_t \varphi_1 &= -\partial_{\varphi_2} B, \\
\psi_1 - \psi_2 &= -\frac{1}{2} \partial_{\psi_1} B = -\frac{1}{2} \partial_{\psi_2} B, & \chi_1 - \chi_2 &= \frac{1}{2} \partial_{\chi_1} B = \frac{1}{2} \partial_{\chi_2} B, \\
\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 &= \frac{1}{2} \partial_{\bar{\psi}_1} B = -\frac{1}{2} \partial_{\bar{\psi}_2} B, & \bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2 &= -\frac{1}{2} \partial_{\bar{\chi}_1} B = \frac{1}{2} \partial_{\bar{\chi}_2} B, \\
\partial_t \zeta_1^+ &= -\frac{1}{2} \partial_{\zeta_1^-} B, & \partial_t \zeta_1^- &= -\frac{1}{2} \partial_{\zeta_1^+} B.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Note no entanto que a partir da transformação de Backlund dada no Apêndice C, após a reparametrização (4.2), temos

$$\begin{aligned}
\partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \zeta_1^- \left[-\alpha_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(+)} + \alpha_3 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2} \right) \psi_+^{(-)} \right] \\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \zeta_1^+ \left[-\alpha_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_-^{(+)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(-)} + \alpha_3 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2} \right) \psi_+^{(+)} \right] \\
&- \frac{2\alpha_2}{\alpha_3} \operatorname{sh}(\phi_1 - \phi_2) - \frac{2\alpha_3}{\alpha_2} \operatorname{sh}(\phi_1 + \phi_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \zeta_1^- \left[-\alpha_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(+)} - \alpha_3 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2} \right) \psi_+^{(-)} \right] \\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \zeta_1^+ \left[-\alpha_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_-^{(+)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(-)} - \alpha_3 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2} \right) \psi_+^{(+)} \right] \\
&- \frac{2\alpha_2}{\alpha_3} \operatorname{sh}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{2\alpha_3}{\alpha_2} \operatorname{sh}(\phi_1 + \phi_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x \varphi_1 - \partial_t \varphi_2 &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \zeta_1^- \left[-\alpha_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(+)} - \alpha_3 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2} \right) \psi_+^{(-)} \right] \\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \zeta_1^+ \left[\alpha_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_-^{(+)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(-)} + \alpha_3 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2} \right) \psi_+^{(+)} \right] \\
&- \frac{2\alpha_2}{\alpha_3} \operatorname{sh}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{2\alpha_3}{\alpha_2} \operatorname{sh}(\varphi_1 + \varphi_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x \varphi_2 - \partial_t \varphi_1 &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \zeta_1^- \left[-\alpha_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(+)} + \alpha_3 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2} \right) \psi_+^{(-)} \right] \\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \zeta_1^+ \left[\alpha_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_-^{(+)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(-)} - \alpha_3 \operatorname{sh} \left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2} \right) \psi_+^{(+)} \right] \\
&- \frac{2\alpha_2}{\alpha_3} \operatorname{sh}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2\alpha_3}{\alpha_2} \operatorname{sh}(\varphi_1 + \varphi_2),
\end{aligned}$$

$$\psi_1 - \psi_2 = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\alpha_3\zeta_1^- \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2}\right) - \frac{i}{2\sqrt{2}}\alpha_1\zeta_1^+ \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2}\right), \quad (4.7)$$

$$\chi_1 - \chi_2 = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\alpha_3\zeta_1^- \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2}\right) + \frac{i}{2\sqrt{2}}\alpha_1\zeta_1^+ \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2}\right), \quad (4.8)$$

$$\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\alpha_2\zeta_1^- \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2}\right) - \frac{i}{2\sqrt{2}}\alpha_1\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\zeta_1^+ \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(+)}}{2}\right), \quad (4.9)$$

$$\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2 = \frac{i}{2\sqrt{2}}\alpha_2\zeta_1^- \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2}\right) - \frac{i}{2\sqrt{2}}\alpha_1\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\zeta_1^+ \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(+)}}{2}\right), \quad (4.10)$$

$$\partial_t\zeta_1^+ = -i2\sqrt{2}\frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2}\operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2}\right)\psi_+^{(-)} + i\frac{2\sqrt{2}}{\alpha_1}\operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2}\right)\bar{\psi}_-^{(+)},$$

$$\partial_t\zeta_1^- = -i\frac{2\sqrt{2}}{\alpha_2}\operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2}\right)\psi_+^{(+)} + i\frac{2\sqrt{2}}{\alpha_3}\operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(+)}}{2}\right)\bar{\psi}_-^{(-)}. \quad (4.11)$$

Comparando (4.11) com (4.6), vemos que

$$\partial_t\zeta_1^- = \frac{4}{\alpha_1\alpha_2}\partial_{\zeta_1^+}B = -\frac{1}{2}\partial_{\zeta_1^+}B.$$

Portanto, para que as condições de contorno em $x = 0$, derivadas a partir da Lagrangeana (4.3), correspondam a uma transformação de Backlund localizada em $x = 0$ requer que

$$\alpha_1 = -\frac{8}{\alpha_2},$$

como $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3\alpha_4$ (veja Apêndice C) segue que

$$\alpha_4 = -\frac{8}{\alpha_3}.$$

4.3 Conservação do momento e da energia

Como no caso $N = 1$ vemos que a introdução do defeito na teoria quebra a isotropia do espaço e por isso espera-se que a conservação do momento seja destruída. Vamos avaliar as consequências da introdução do defeito na teoria e veremos que a conservação pode ser mantida quando levamos em conta a contribuição do defeito. Para isso considere o momento dado por

$$P = \int_{-\infty}^0 dx \mathcal{P}_1 + \int_0^{\infty} dx \mathcal{P}_2,$$

onde

$$\mathcal{P}_p = \partial_x \phi_p \partial_t \phi_p - \partial_x \varphi_p \partial_t \varphi_p - 2\bar{\psi}_p \partial_x \bar{\psi}_p - 2\psi_p \partial_x \psi_p + 2\bar{\chi}_p \partial_x \bar{\chi}_p + 2\chi_p \partial_x \chi_p.$$

Derivando P em relação ao tempo e usando as equações de movimento obtemos

$$\begin{aligned} \dot{P} = & \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \varphi_1)^2 + 4\text{ch}(2\varphi_1) \right. \\ & - 2\bar{\psi}_1 \partial_t \bar{\psi}_1 - 2\psi_1 \partial_t \psi_1 + 2\bar{\chi}_1 \partial_t \bar{\chi}_1 + 2\chi_1 \partial_t \chi_1 - 4\text{ch}(2\phi_1) \\ & \left. + 16(\psi_1 \bar{\psi}_1 + \chi_1 \bar{\chi}_1) \text{ch}\phi_1 \text{ch}\varphi_1 - 16(\psi_1 \bar{\chi}_1 + \chi_1 \bar{\psi}_1) \text{sh}\phi_1 \text{sh}\varphi_1 \right]_{x=0} \\ & - \left[(1 \rightarrow 2) \right]_{x=0}. \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno em $x = 0$ podemos escrever a expressão acima como uma derivada total no tempo:

$$\dot{P} = \partial_t [-2(\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 - \psi_1 \psi_2 - \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 + \chi_1 \chi_2) - B_0^+ + B_0^- - B_1^+ + B_1^-]_{x=0}.$$

Para isso é necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$\partial_{\phi_+} B_0^+ \partial_{\phi_-} B_0^- - \partial_{\varphi_+} B_0^+ \partial_{\varphi_-} B_0^- = 4 \text{sh}\phi_+ \text{sh}\phi_- - 4 \text{sh}\varphi_+ \text{sh}\varphi_-, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & (\partial_{\phi_+} B_0^+ \partial_{\phi_-} B_1^- + \partial_{\phi_-} B_0^- \partial_{\phi_+} B_1^+) - (\partial_{\varphi_+} B_0^+ \partial_{\varphi_-} B_1^- + \partial_{\varphi_-} B_0^- \partial_{\varphi_+} B_1^+) \quad (4.13) \\ + & (\partial_{\phi_+} B_1^+ \partial_{\phi_-} B_1^- - \partial_{\varphi_+} B_1^+ \partial_{\varphi_-} B_1^-) - \frac{1}{2}(\partial_{\zeta_1^-} B_1^- \partial_{\zeta_1^+} B_1^+ + \partial_{\zeta_1^+} B_1^- \partial_{\zeta_1^-} B_1^+) = \\ = & -2(\psi_+ \bar{\psi}_+ + \psi_- \bar{\psi}_- + \chi_+ \bar{\chi}_+ + \chi_- \bar{\chi}_-) \Lambda_- - 2(\psi_+ \bar{\psi}_- + \psi_- \bar{\psi}_+ + \chi_+ \bar{\chi}_- + \chi_- \bar{\chi}_+) \Lambda_+ \\ & + 2(\psi_+ \bar{\chi}_+ + \psi_- \bar{\chi}_- + \chi_+ \bar{\psi}_+ + \chi_- \bar{\psi}_-) \Delta_- + 2(\psi_+ \bar{\chi}_- + \psi_- \bar{\chi}_+ + \chi_+ \bar{\psi}_- + \chi_- \bar{\psi}_+) \Delta_+, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pm} &= \text{ch} \left(\frac{\phi_+ + \phi_-}{2} \right) \text{ch} \left(\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} \right) \pm \text{ch} \left(\frac{\phi_+ - \phi_-}{2} \right) \text{ch} \left(\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} \right), \\ \Delta_{\pm} &= \text{sh} \left(\frac{\phi_+ + \phi_-}{2} \right) \text{sh} \left(\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} \right) \pm \text{sh} \left(\frac{\phi_+ - \phi_-}{2} \right) \text{sh} \left(\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} \right). \end{aligned}$$

A equação (4.12) é facilmente verificada usando B_0^+ e B_0^- .

Para verificar que B satisfaz a eq. (4.13), usamos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} & \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_+ - \varphi_+}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_- - \varphi_-}{2}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_+ + \varphi_+}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_- + \varphi_-}{2}\right) = \\ & = \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_+ - \varphi_+}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_- - \varphi_-}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_+ + \varphi_+}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_- + \varphi_-}{2}\right) = \\ & = -\operatorname{sh}\left(\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+ - \varphi_+}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_- - \varphi_-}{2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+ + \varphi_+}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_- + \varphi_-}{2}\right) = \\ & = \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+ - \varphi_+}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_- - \varphi_-}{2}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+ + \varphi_+}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_- + \varphi_-}{2}\right) = \\ & = -\operatorname{sh}\left(\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right), \end{aligned}$$

e então podemos verificar que

$$\begin{aligned} & (\partial_{\phi_+} B_0^+ \partial_{\phi_-} B_1^- + \partial_{\phi_-} B_0^- \partial_{\phi_+} B_1^+) \tag{4.14} \\ & - (\partial_{\varphi_+} B_0^+ \partial_{\varphi_-} B_1^- + \partial_{\varphi_-} B_0^- \partial_{\varphi_+} B_1^+) = \\ & = -2(\psi_+ \bar{\psi}_+ + \psi_- \bar{\psi}_- + \chi_+ \bar{\chi}_+ + \chi_- \bar{\chi}_-) \Lambda_- \\ & \quad + 2(\psi_+ \bar{\chi}_+ + \psi_- \bar{\chi}_- + \chi_+ \bar{\psi}_+ + \chi_- \bar{\psi}_-) \Delta_-, \end{aligned}$$

$$(\partial_{\phi_+} B_1^+ \partial_{\phi_-} B_1^- - \partial_{\varphi_+} B_1^+ \partial_{\varphi_-} B_1^-) = 0, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial_{\zeta_1^-} B_1^- \partial_{\zeta_1^+} B_1^+ + \partial_{\zeta_1^+} B_1^- \partial_{\zeta_1^-} B_1^+) = \tag{4.16} \\ & = 2(\psi_+ \bar{\psi}_- + \chi_+ \bar{\chi}_-) \Lambda_+ - 2(\psi_+ \bar{\chi}_- + \chi_+ \bar{\psi}_-) \Delta_+. \end{aligned}$$

Além disso, note que as eqs. (4.7)-(4.10) levam aos seguintes vínculos

$$\begin{aligned}
\psi_- + \chi_- &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_3\zeta_1^- \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2}\right), \\
\bar{\psi}_+ - \bar{\chi}_+ &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_2\zeta_1^- \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2}\right), \\
&\Downarrow \\
\alpha_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(-)}}{2}\right)(\psi_- + \chi_-) &= \alpha_3 \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2}\right)(\bar{\psi}_+ - \bar{\chi}_+), \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_- - \chi_- &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_1\zeta_1^+ \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2}\right), \\
\bar{\psi}_+ + \bar{\chi}_+ &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_1\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\zeta_1^+ \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_-^{(+)}}{2}\right), \\
&\Downarrow \\
\alpha_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(+)}}{2}\right)(\psi_- - \chi_-) &= \alpha_3 \operatorname{ch}\left(\frac{\phi_+^{(-)}}{2}\right)(\bar{\psi}_+ + \bar{\chi}_+). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Multiplicando (4.17) por (4.18), obtemos

$$(\psi_- \bar{\psi}_+ + \chi_- \bar{\chi}_+) \Lambda_+ - (\psi_- \bar{\chi}_+ + \chi_- \bar{\psi}_+) \Delta_+ = 0. \tag{4.19}$$

A partir das eqs. (4.14), (4.15), (4.16) e (4.19) vemos que a eq. (4.13) é satisfeita e portanto o momento conservado é dado por

$$\mathcal{P} = P + [2(\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 - \psi_1 \psi_2 - \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 + \chi_1 \chi_2) + B_0^+ - B_0^- + B_1^+ - B_1^-]_{x=0}.$$

No caso da energia temos

$$E = \int_{-\infty}^0 dx \mathcal{E}_1 + \int_0^{\infty} dx \mathcal{E}_2,$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_p &= \frac{1}{2}(\partial_x \phi_p)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t \phi_p)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \varphi_p)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \varphi_p)^2 + 4\operatorname{ch}(2\phi_p) \\
&\quad - 2\psi_p \partial_x \psi_p + 2\bar{\psi}_p \partial_x \bar{\psi}_p + 2\chi_p \partial_x \chi_p - 2\bar{\chi}_p \partial_x \bar{\chi}_p - 4\operatorname{ch}(2\varphi_p) \\
&\quad - 16(\psi_p \bar{\psi}_p + \chi_p \bar{\chi}_p) \operatorname{ch} \varphi_p \operatorname{ch} \phi_p + 16(\psi_p \bar{\chi}_p + \chi_p \bar{\psi}_p) \operatorname{sh} \varphi_p \operatorname{sh} \phi_p.
\end{aligned}$$

Derivando a energia em relação ao tempo e usando as equações de movimento obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \left[\partial_x \phi_1 \partial_t \phi_1 - \partial_x \varphi_1 \partial_t \varphi_1 - 2\psi_1 \partial_t \psi_1 + 2\bar{\psi}_1 \partial_t \bar{\psi}_1 + 2\chi_1 \partial_t \chi_1 - 2\bar{\chi}_1 \partial_t \bar{\chi}_1 \right]_{x=0} \\
&\quad - \left[\partial_x \phi_2 \partial_t \phi_2 - \partial_x \varphi_2 \partial_t \varphi_2 - 2\psi_2 \partial_t \psi_2 + 2\bar{\psi}_2 \partial_t \bar{\psi}_2 + 2\chi_2 \partial_t \chi_2 - 2\bar{\chi}_2 \partial_t \bar{\chi}_2 \right]_{x=0}.
\end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno em $x = 0$ e usando (4.12) e (4.13) podemos escrever a expressão acima como uma derivada total no tempo:

$$\frac{dE}{dt} = \partial_t \left[-B + 2\psi_1\psi_2 - 2\chi_1\chi_2 + 2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - 2\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2 \right]_{x=0}.$$

Portanto a energia conservada levando-se em conta a contribuição do defeito é dada por

$$\mathcal{E} = E + \left[B - 2\psi_1\psi_2 + 2\chi_1\chi_2 - 2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + 2\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2 \right]_{x=0},$$

onde $B = B_0^+ + B_0^- + B_1^+ + B_1^-$.

4.4 Curvatura nula

A formulação da hierarquia supersimétrica mKdV/sinh-Gordon $N = 2$ foi discutida em [37] utilizando uma superálgebra $sl(2, 2)$. Para maiores informações sobre a superálgebra $sl(2, 2)$ veja o Apêndice D. Até o momento não foram obtidas as soluções para as equações supersimétrica de mKdV e sinh-Gordon $N = 2$ usando método de dressing. No entanto uma classe de soluções de apenas uma variável de grassmann foi investigada usando o método de Hirota [38]. O problema de obter soluções mais gerais para estes modelos ainda continua em aberto. A seguir apresentaremos o par de Lax para a equação supersimétrica de sinh-Gordon $N = 2$:

$$\mathcal{A}_x = E^{(1)} - \partial_x B B^{(-1)} + A_{1/2}, \quad \mathcal{A}_t = B E^{(-1)} B^{-1} + B j_{-1/2} B^{-1},$$

onde

$$B = e^{\phi_1 M_1^{(0)} + \phi_3 M_3^{(0)}}, \\ A_{1/2} = \psi_1 G_1^{(1/2)} + \psi_3 G_3^{(1/2)}, \quad j_{-1/2} = \psi_2 G_2^{(-1/2)} + \psi_4 G_4^{(-1/2)}.$$

Antes de introduzir o defeito na formulação de curvatura nula seria conveniente obter uma forma mais simétrica do par de Lax. Para isso realizamos primeiramente uma transformação de gauge:

$$a_x = \theta^{-1} \mathcal{A}_x \theta + \theta^{-1} \partial_x \theta, \quad a_t = \theta^{-1} \mathcal{A}_t \theta + \theta^{-1} \partial_t \theta, \quad \theta = e^{\frac{1}{2} \phi_1 M_1^{(0)} + \frac{1}{2} \phi_3 M_3^{(0)}}.$$

Em seguida efetuamos a seguinte reparametrização

$$\partial_t \rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_x - \partial_t), \quad \partial_x \rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t), \quad \phi_1 \rightarrow \phi, \quad \phi_3 \rightarrow \varphi, \\ \psi_1 \rightarrow i\sqrt{2}\psi, \quad \psi_3 \rightarrow i\sqrt{2}\chi, \quad \psi_2 \rightarrow i\sqrt{2}\bar{\psi}, \quad \psi_4 \rightarrow i\sqrt{2}\bar{\chi}.$$

A reparametrização acima, implica que

$$\begin{aligned}\partial_x + a_x &\rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t) + a_x, \\ \partial_t + a_t &\rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_x - \partial_t) + a_t.\end{aligned}$$

Logo, se combinamos as expressões acima vemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t) - a_x + \frac{1}{2}(\partial_x - \partial_t) - a_t &= \partial_x - (a_x + a_t), \\ \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t) - a_x - \frac{1}{2}(\partial_x - \partial_t) + a_t &= \partial_t - (a_x - a_t),\end{aligned}$$

e portanto definimos

$$A_x = -(a_x + a_t), \quad A_t = -(a_x - a_t),$$

para que a equação de curvatura nula seja dada por

$$\partial_x A_t - \partial_t A_x + [A_x, A_t] = 0.$$

Seguindo o procedimento acima, obtemos

$$\begin{aligned}A_x^{(k)} &= -\frac{1}{2}\partial_t \phi_k h_1 - \frac{1}{2}\partial_t \varphi_k h_3 + V_x^{(k)}, \\ A_t^{(k)} &= -\frac{1}{2}\partial_x \phi_k h_1 - \frac{1}{2}\partial_x \varphi_k h_3 + V_t^{(k)},\end{aligned}$$

onde $V_x^{(k)}$ e $V_t^{(k)}$ são apresentados explicitamente no Apêndice E.

Para introduzir o defeito procedemos de maneira similar ao caso $N = 1$. Extendemos infinitesimalmente as regiões $x < 0$ e $x > 0$ para $x < b$ e $x > a$, com $b > a$, de modo que haja uma pequena região sobreposta em $a \leq x \leq b$. Em seguida, para cada região definimos um novo par de Lax:

$$\begin{aligned}\hat{A}_t^{(1)} &= A_t^{(1)} + \frac{1}{2}\theta(x-a)\left[(\partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 + \partial_{\phi_1} B)h_1 + (\partial_x \varphi_1 - \partial_t \varphi_2 - \partial_{\varphi_1} B)h_3 \right. \\ &\quad + (\psi_1 - \psi_2 + \frac{1}{2}\partial_{\psi_1} B)E_{\alpha_2} + (\chi_1 - \chi_2 - \frac{1}{2}\partial_{\chi_1} B)E_{\alpha_2+\alpha_3} \\ &\quad \left. + (\partial_t \zeta_1^+ + \frac{1}{2}\partial_{\zeta_1^-} B)E_{\alpha_1+\alpha_2} + (\partial_t \zeta_1^- + \frac{1}{2}\partial_{\zeta_1^+} B)E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right], \\ \hat{A}_x^{(1)} &= \theta(a-x)A_x^{(1)}, \\ \hat{A}_t^{(2)} &= A_t^{(2)} + \frac{1}{2}\theta(b-x)\left[(\partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 - \partial_{\phi_2} B)h_1 + (\partial_x \varphi_2 - \partial_t \varphi_1 + \partial_{\varphi_2} B)h_3 \right. \\ &\quad + (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 - \frac{1}{2}\partial_{\bar{\psi}_1} B)E_{-\alpha_2} + (\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2 + \frac{1}{2}\partial_{\bar{\chi}_1} B)E_{-\alpha_2-\alpha_3} \\ &\quad \left. + (\partial_t \zeta_1^+ + \frac{1}{2}\partial_{\zeta_1^-} B)E_{-\alpha_1-\alpha_2} + (\partial_t \zeta_1^- + \frac{1}{2}\partial_{\zeta_1^+} B)E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\right], \\ \hat{A}_x^{(2)} &= \theta(x-b)A_x^{(2)}.\end{aligned}$$

A equação de curvatura nula leva as equações de movimento para as regiões $x < a$ e $x > b$ e as condições de defeito deslocadas infinitesimalmente para $x = a$ e $x = b$, respectivamente. Além disso, como $\hat{A}_x^{(1)}$ e $\hat{A}_x^{(2)}$ se anulam na região de sobreposição implicam que $A_t^{(1)}$ e $A_t^{(2)}$ sejam independentes de x em $a \leq x \leq b$. Esta independência permite estabelecer uma transformação de gauge conectando $\hat{A}_t^{(1)}$ e $\hat{A}_t^{(2)}$ em diferentes pontos:

$$\partial_t K = K \hat{A}_t^{(2)}(b, t) - \hat{A}_t^{(1)}(a, t) K.$$

A existência de uma transformação de gauge com a propriedade acima permite que a condição de curvatura nula seja mantida por toda a linha. Portanto, temos que obter explicitamente o operador K . Para isso decompos

$$K = e^{\frac{1}{2}\phi_2 h_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 h_3} \bar{K} e^{-\frac{1}{2}\phi_1 h_1 - \frac{1}{2}\varphi_1 h_3},$$

de modo que a transformação de gauge acima toma a seguinte forma

$$(\partial_{\phi_1} B h_1 - \partial_{\varphi_1} B h_3) \bar{K} + \bar{K} (\partial_{\phi_2} B h_1 - \partial_{\varphi_2} B h_3) = 2\bar{K} V_{1,2} - 2V_{2,1} \bar{K} - 2\partial_t \bar{K},$$

onde

$$\begin{aligned} V_{1,2} &= e^{-\frac{1}{2}\phi_1 h_1 - \frac{1}{2}\varphi_1 h_3} V_t^{(2)} e^{\frac{1}{2}\phi_1 h_1 + \frac{1}{2}\varphi_1 h_3}, \\ V_{2,1} &= e^{-\frac{1}{2}\phi_2 h_1 - \frac{1}{2}\varphi_2 h_3} V_t^{(1)} e^{\frac{1}{2}\phi_2 h_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 h_3}. \end{aligned}$$

As expressões explícitas de $V_{1,2}$ e $V_{2,1}$ são apresentadas no Apêndice E.

Resolvendo a equação para \bar{K} obtemos

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \Lambda I - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \Lambda (\lambda^{-1} E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} + E_{\alpha_3} + \lambda^{-1} E_{-\alpha_3}) \\ &\quad - \frac{\Lambda}{\alpha_2} 2\sqrt{2} \lambda^{-3/4} \zeta_1^+ (E_{\alpha_1 + \alpha_2} - \lambda E_{-\alpha_1 - \alpha_2} - \lambda E_{\alpha_2 + \alpha_3} + E_{-\alpha_2 - \alpha_3}) \\ &\quad + \frac{\Lambda}{2\sqrt{2}} \alpha_3 \lambda^{-1/4} \zeta_1^- (-E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_2} + E_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} - E_{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde Λ é uma constante arbitrária. Portanto a expressão explícita do operador K indica que a integrabilidade está sendo preservada na presença do defeito.

Capítulo 5

Comentários finais

Nesta tese discutimos a formulação clássica das teorias supersimétricas de sinh-Gordon $N = 1$ e $N = 2$ na presença de defeito*. Ela pode ser vista como uma extensão do caso bosônico $N = 0$ tratado em [26]. De maneira similar ao caso $N = 0$, verificamos que a integrabilidade dos modelos pode ser preservada se as condições sobre o defeito correspondem a uma transformação de Backlund. Além disso como a transformação de Backlund é supersimétrica, a supersimetria é mantida sobre o defeito e como consequência disso o defeito também armazena supercarga, além da energia, momento, carga topológica e demais cargas conservadas. Esta capacidade de armazenagem do defeito permite que haja troca de cargas com as soluções solitônicas durante o processo de espalhamento. Esta troca de cargas é requerida para que a conservação das cargas seja mantida por todo o processo levando portanto a integrabilidade do modelo. A análise da integrabilidade foi feita mais precisamente, embora não tão rigorosamente†, pela formulação de curvatura nula dos modelos. Derivamos explicitamente as matrizes de transformação de gauge (3.25) e (4.20) o que indica fortemente que a integrabilidade dos modelos na presença do defeito está sendo preservada. Isto significa que o tratamento *a lá* Zamolodchikov pode ser implementado para estudar os aspectos quânticos dos modelos. Até o momento as matrizes de transmissão quântica desses modelos ainda não foram estudadas e esperamos que algumas propriedades clássicas analisadas aqui possam ajudar nessa direção. Além disso apresentamos dois métodos de soluções, o de dressing e o da permutabilidade da transformação de Backlund, os quais funcionaram muito bem para a equação supersimétrica de sinh-Gordon $N = 1$. No entanto, até o momento não conseguimos implementar estes métodos para o caso $N = 2$, e por isso este é um assunto que ainda necessita de esclarecimento.

*Além de superar o desafio técnico em se tratar um formalismo com defeito para o caso $N = 2$, obtivemos as transformações de Backlund para o modelo.

†Resta ainda verificar a involução das cargas conservadas.

Apêndice A

Superálgebra $sl(2, 1)$

Os gerados da superálgebra $sl(2, 1)$ são dados por

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_2 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 E_{\alpha_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 E_{\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 E_{\alpha_1+\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha_1-\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

As raízes simples α_1 e α_2 de $sl(2, 1)$ podem ser representadas em termos de vetores unitários $e_i, f, i = 1, 2$:

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 - f,$$

onde $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, $e_i \cdot f = 0$, $f \cdot f = -1$. Para estender $sl(2, 1)$ para uma superálgebra infinita com termo central, denotada por $\mathcal{G} = \hat{sl}(2, 1)$, introduzimos um parâmetro espectral λ :

$$h \rightarrow h^{(n)} = \lambda^n h, \quad h \in sl(2, 1),$$

e em seguida introduzimos o termo central \hat{c} usando expressão

$$[g^{(n)}, h^{(m)}]_{\pm} = [g, h]_{\pm}^{(n+m)} + n \delta_{n+m, 0} str(gh) \hat{c}, \quad g, h \in sl(2, 1)$$

onde $[g, h]_+ = \{g, h\}$, $[g, h]_- = [g, h]$ e o supertraço é dado por $str(m) = m_{11} + m_{22} - m_{33}$. A expressão acima preserva a identidade de Jacobi. Seguindo este procedimento, obtemos a superálgebra de $\hat{sl}(2, 1)$:

$$\begin{aligned}
[h_+^{(n)}, E_{\pm\alpha_1}^{(m)}] &= \pm E_{\pm\alpha_1}^{(n+m)}, & [h_+^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}] &= \pm E_{\mp\alpha_2}^{(n+m)}, \\
[h_2^{(n)}, E_{\pm\alpha_1}^{(m)}] &= \mp E_{\pm\alpha_1}^{(n+m)}, & [h_2^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] &= \mp E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n+m)}, \\
[h_+^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] &= 0, & [h_2^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}] &= 0, \\
[E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}] &= 0, & [E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] &= 0, \\
\{E_{\mp\alpha_2}^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}\} &= 0, & \{E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}\} &= 0, \\
[E_{\alpha_1}^{(n)}, E_{-\alpha_1}^{(m)}] &= h_1^{(n+m)} + n \delta_{n+m,0} \hat{c}, \\
\{E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)}, E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(m)}\} &= h_+^{(n+m)} + n \delta_{n+m,0} \hat{c}, \\
[E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] &= \mp E_{\mp\alpha_2}^{(n+m)}, & [E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\pm\alpha_2}^{(m)}] &= \pm E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n+m)}, \\
\{E_{-\alpha_2}^{(n)}, E_{\alpha_2}^{(m)}\} &= h_2^{(n+m)} - n \delta_{n+m,0} \hat{c}, \\
\{E_{\mp\alpha_2}^{(n)}, E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}\} &= 0, & \{E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}\} &= E_{\pm\alpha_1}^{(n+m)}, \\
[h_+^{(n)}, h_2^{(m)}] &= -n \delta_{n+m,0} \hat{c},
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
h_1 &= 2H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & h_2 &= -H_1 + H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
h_+ &= h_1 + h_2.
\end{aligned}$$

A introdução da gradação $D = 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}h_1$, induz uma decomposição da superálgebra em subespaços de grau k inteiro e semi-inteiro:

$$\mathcal{G} = \bigoplus_k \mathcal{G}_k, \quad [D, \mathcal{G}_k] = k\mathcal{G}_k.$$

Escolhemos uma base apropriada com grau bem definido pela gradação D :

$$\begin{aligned}
F_1^{(2n+3/2)} &= (E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/2)} - E_{\alpha_2}^{(n+1)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)} - E_{-\alpha_2}^{(n+1/2)}), \\
F_2^{(2n+1/2)} &= -(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} - E_{\alpha_2}^{(n+1/2)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1/2)} - E_{-\alpha_2}^{(n)}), \\
G_1^{(2n+1/2)} &= (E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} + E_{\alpha_2}^{(n+1/2)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1/2)} + E_{-\alpha_2}^{(n)}), \\
G_2^{(2n+3/2)} &= -(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/2)} + E_{\alpha_2}^{(n+1)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1/2)}), \\
K_1^{(2n+1)} &= -E_{-\alpha_1}^{(n+1)} - E_{\alpha_1}^{(n)}, \\
K_2^{(2n+1)} &= h_+^{(n+1/2)} + h_2^{(n+1/2)}, \\
M_1^{(2n+1)} &= E_{-\alpha_1}^{(n+1)} - E_{\alpha_1}^{(n)}, \\
M_2^{(2n)} &= h_1^{(n)},
\end{aligned}$$

de modo que essa nova base fecha uma subálgebra:

$$\begin{aligned}
[K_1^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}] &= 0, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, F_2^{(2m+1/2)}\} &= [(2n+1) - 2m]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[F_1^{(2n+3/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= F_2^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[F_1^{(2n+3/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -F_2^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[F_2^{(2n+1/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
[F_2^{(2n+1/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, F_1^{(2m+3/2)}\} &= 2(K_2^{2(n+m+1)+1} + K_1^{2(n+m+1)+1}), \\
\{F_2^{(2n+1/2)}, F_2^{(2m+1/2)}\} &= -2(K_2^{2(n+m)+1} + K_1^{2(n+m)+1}), \\
\{F_2^{(2n+1/2)}, G_1^{(2m+1/2)}\} &= 2M_1^{2(n+m)+1}, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= -2M_1^{2(n+m)+1}, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, G_1^{(2m+1/2)}\} &= 2M_2^{2(n+m)+1} + [(2n+1) + 2m]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
\{F_2^{(2n+1/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= -2M_2^{2(n+m)+1} - [2n + (2m+1)]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_1^{(2n+1)}, F_1^{(2m+3/2)}] &= G_1^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, F_2^{(2m+1/2)}] &= G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_2^{(2n)}, F_1^{(2m+3/2)}] &= -G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_2^{(2n)}, F_2^{(2m+1/2)}] &= -G_1^{2(n+m)+1/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, K_1^{(2m+1)}] &= 2M_2^{2(n+m)+1} + (n+m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_1^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}] &= 0, \\
[K_2^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}] &= -(n-m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_2^{(2n)}, K_1^{(2m+1)}] &= 2M_1^{2(n+m)+1}, \\
[M_2^{(2n)}, K_2^{(2m+1)}] &= 0, \\
[G_1^{(2n+1/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= -G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[G_1^{(2n+1/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[G_2^{(2n+3/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= -G_1^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[G_2^{(2n+3/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -G_1^{2(n+m+1)+1/2}, \\
\{G_1^{(2n+1/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= [2n - (2m+1)]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
\{G_1^{(2n+1/2)}, G_1^{(2m+1/2)}\} &= 2(K_2^{2(n+m)+1} - K_1^{2(n+m)+1}), \\
\{G_2^{(2n+3/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= -2(K_2^{2(n+m+1)+1} - K_1^{2(n+m+1)+1}), \\
[M_1^{(2n+1)}, G_1^{(2m+1/2)}] &= -F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, G_2^{(2m+3/2)}] &= -F_2^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[M_2^{(2n)}, G_1^{(2m+1/2)}] &= -F_2^{2(n+m)+1/2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M_2^{(2n)}, G_2^{(2m+3/2)}] &= -F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, M_2^{(2m)}] &= -2K_1^{2(n+m)+1}, \\
[M_1^{(2n+1)}, M_1^{(2m+1)}] &= -(n-m)\delta_{n+m+1,0}\hat{C}, \\
[M_2^{(2n)}, M_2^{(2m)}] &= (n-m)\delta_{n+m,0}\hat{C}, \\
[K_1^{(2n+1)}, K_1^{(2m+1)}] &= (n-m)\delta_{n+m+1,0}\hat{C}.
\end{aligned}$$

Apêndice B

Aplicando o teorema de permutabilidade

Aplicando o teorema de permutabilidade na transformação de Backlund, implica que

$$D_x(\Phi_0 - \Phi_1) = -\frac{4i}{\beta_1} f_{0,1} \cosh\left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2}\right), \quad (\text{B.1})$$

$$D_x(\Phi_1 - \Phi_3) = -\frac{4i}{\beta_2} f_{1,3} \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right), \quad (\text{B.2})$$

$$D_x(\Phi_0 - \Phi_2) = -\frac{4i}{\beta_2} f_{0,2} \cosh\left(\frac{\Phi_0 + \Phi_2}{2}\right),$$

$$D_x(\Phi_2 - \Phi_3) = -\frac{4i}{\beta_1} f_{2,3} \cosh\left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right).$$

Combinando as expressões acima obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta_1} f_{0,1} \cosh\left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2}\right) + \frac{1}{\beta_2} f_{1,3} \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) = \\ & = \frac{1}{\beta_2} f_{0,2} \cosh\left(\frac{\Phi_0 + \Phi_2}{2}\right) + \frac{1}{\beta_1} f_{2,3} \cosh\left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

De maneira similar, podemos combinar as seguintes expressões

$$D_t(\Phi_0 + \Phi_1) = 2\beta_1 f_{0,1} \cosh\left(\frac{\Phi_0 - \Phi_1}{2}\right),$$

$$D_t(\Phi_1 + \Phi_3) = 2\beta_2 f_{1,3} \cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right),$$

$$D_t(\Phi_0 + \Phi_2) = 2\beta_2 f_{0,2} \cosh\left(\frac{\Phi_0 - \Phi_2}{2}\right),$$

$$D_t(\Phi_2 + \Phi_3) = 2\beta_1 f_{2,3} \cosh\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{2}\right),$$

e obter a seguinte relação

$$\begin{aligned} & \beta_1 f_{0,1} \cosh\left(\frac{\Phi_0 - \Phi_1}{2}\right) - \beta_2 f_{1,3} \cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) = \\ & = \beta_2 f_{0,2} \cosh\left(\frac{\Phi_0 - \Phi_2}{2}\right) - \beta_1 f_{2,3} \cosh\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Resolvendo (B.3) e (B.4), para $f_{1,3}$ e $f_{2,3}$, obtemos

$$f_{1,3} = \Lambda_{1,3}^{(1)} f_{0,1} + \Lambda_{1,3}^{(2)} f_{0,2}, \quad f_{2,3} = \Lambda_{2,3}^{(1)} f_{0,1} + \Lambda_{2,3}^{(2)} f_{0,2}, \quad (\text{B.5})$$

onde os coeficientes Λ são dados por

$$\Lambda_{1,3}^{(1)} = -\beta_1 \beta_2 \frac{\left[\cosh\left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\Phi_0 - \Phi_1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right) \right]}{\left[\cosh\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) \beta_1^2 - \cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right) \beta_2^2 \right]},$$

$$\Lambda_{1,3}^{(2)} = \frac{\left[\cosh\left(\frac{\Phi_0 + \Phi_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{2}\right) \beta_1^2 + \cosh\left(\frac{\Phi_0 - \Phi_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right) \beta_2^2 \right]}{\left[\cosh\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) \beta_1^2 - \cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right) \beta_2^2 \right]},$$

$$\Lambda_{2,3}^{(1)} = -\frac{\left[\cosh\left(\frac{\Phi_0 - \Phi_1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) \beta_1^2 + \cosh\left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) \beta_2^2 \right]}{\left[\cosh\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) \beta_1^2 - \cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right) \beta_2^2 \right]},$$

$$\Lambda_{2,3}^{(2)} = \beta_1 \beta_2 \frac{\left[\cosh\left(\frac{\Phi_0 + \Phi_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\Phi_0 - \Phi_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) \right]}{\left[\cosh\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) \beta_1^2 - \cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right) \beta_2^2 \right]}.$$

Note agora que aplicando D_x em (B.1), obtemos

$$\partial_x(\Phi_0 - \Phi_1) = \frac{4}{\beta_1^2} \sinh(\Phi_0 + \Phi_1) + \frac{4i}{\beta_1} f_{0,1} D_x \left[\cosh\left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2}\right) \right].$$

A equação acima pode ser vista como uma perturbação do caso ordinário

$$\partial_x(\Phi_0 - \Phi_1) = \frac{4}{\beta_1^2} \sinh(\Phi_0 + \Phi_1).$$

Logo, usamos um ansatz na forma:

$$\Phi_3 = \Phi_0 + \Gamma + \Delta, \quad (\text{B.6})$$

onde $\Gamma = \Gamma(\Phi_1 - \Phi_2)$ é obtido resolvendo o caso ordinário (veja [31]):

$$\Gamma(\xi) = 2 \operatorname{Arctanh} \left[\delta \tanh\left(\frac{\xi}{2}\right) \right], \quad \delta = \left(\frac{\beta_2^2 + \beta_1^2}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \right),$$

e Δ é uma perturbação independente de Φ_3 tal que $\Delta^2 = 0$:

$$\Delta = \lambda f_{0,1} f_{0,2}, \quad \lambda = \lambda(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Substituindo o ansatz (B.6) nos coeficientes Λ , obtemos

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,3}^{(1)} &= -a + c_1 f_{0,1} f_{0,2}, \\ \Lambda_{1,3}^{(2)} &= -b + c_2 f_{0,1} f_{0,2}, \\ \Lambda_{2,3}^{(1)} &= b + c_3 f_{0,1} f_{0,2}, \\ \Lambda_{2,3}^{(2)} &= a + c_4 f_{0,1} f_{0,2}, \end{aligned}$$

onde

$$a = \frac{\delta_1}{\sqrt{1 - \delta^2 \tanh^2 \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right)}}, \quad \delta_1 = \frac{2\beta_1\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)},$$

$$b = \frac{\delta \operatorname{sech} \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right)}{\sqrt{1 - \delta^2 \tanh^2 \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right)}},$$

e os $c_k = c_k(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)$, $k = 1, \dots, 4$, são coeficientes de $f_{0,1}f_{0,2}$. Portanto, as expressões (B.5) tomam a seguinte forma

$$f_{1,3} = -af_{0,1} - bf_{0,2}, \quad f_{2,3} = bf_{0,1} + af_{0,2}, \quad (\text{B.7})$$

os quais satisfazem

$$f_{1,3}f_{2,3} = f_{0,1}f_{0,2}.$$

Somando (B.1) e (B.2), obtemos

$$D_x(\Phi_3 - \Phi_0) = \frac{4i}{\beta_1} f_{0,1} \cosh \left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2} \right) + \frac{4i}{\beta_2} f_{1,3} \cosh \left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2} \right).$$

Substituindo na equação acima o ansatz (B.6) e $f_{1,3}$ dado em (B.7), obtemos a seguinte equação:

$$f_{0,1}\Sigma_1 + f_{0,2}\Sigma_2 + (D_x\lambda)f_{0,1}f_{0,2} = 0, \quad (\text{B.8})$$

onde

$$\Sigma_1 = \partial_\xi \Gamma|_{\xi=(\Phi_1-\Phi_2)} \frac{4i}{\beta_1} \cosh \left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2} \right) - \lambda \frac{2i}{\beta_2} \sinh \left(\frac{\Phi_0 + \Phi_2}{2} \right) - \frac{4i}{\beta_1} \cosh \left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2} \right) - \Lambda_{1,3}^{(1)} \frac{4i}{\beta_1} \cosh \left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1 + \Gamma}{2} \right),$$

$$\Sigma_2 = -\partial_\xi \Gamma|_{\xi=(\Phi_1-\Phi_2)} \frac{4i}{\beta_2} \cosh \left(\frac{\Phi_0 + \Phi_2}{2} \right) + \lambda \frac{2i}{\beta_1} \sinh \left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2} \right) - \Lambda_{1,3}^{(2)} \frac{4i}{\beta_1} \cosh \left(\frac{\Phi_0 + \Phi_1 + \Gamma}{2} \right).$$

O último termo de (B.8) se anula pois

$$D_x\lambda = \partial_\xi \lambda|_{\xi=(\Phi_1-\Phi_2)} D_x(\Phi_1 - \Phi_2).$$

A eq. (B.8) é satisfeita quando $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0$, isso que ocorre se

$$\lambda = -\frac{4 \sinh \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right) \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)}{\beta_1^4 + \beta_2^4 - 2 \cosh(\Phi_1 - \Phi_2) \beta_1^2 \beta_2^2}. \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, substituindo (B.9) no ansatz (B.6), podemos reescrever a solução Φ_3 na seguinte forma

$$\Phi_3 = \Phi_0 + 2 \operatorname{Arctanh} \left[\left(\frac{\beta_2^2 + \beta_1^2}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \right) \tanh \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right) e^{\Omega f_{0,1} f_{0,2}} \right],$$

onde

$$\Omega = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \right) - \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right) \right] \operatorname{sech} \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right).$$

Apêndice C

Transformação de Backlund

Agora vamos apresentar a transformação de Backlund para o modelo super sine-Gordon $N = 2$. Para isso considere o par de equações:

$$D_+\phi_1^+ = D_+\phi_2^+ + \alpha_1\mathcal{F}_1\cos\left(\frac{\phi_1^- + \phi_2^-}{2}\right), \quad (\text{C.1})$$

$$\bar{D}_+\phi_1^+ = -\bar{D}_+\phi_2^+ + \alpha_2\mathcal{F}_2\cos\left(\frac{\phi_1^- - \phi_2^-}{2}\right), \quad (\text{C.2})$$

onde \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são supercampos fermiônicos e α_1 e α_2 são constantes. As equações acima e a condição

$$(\bar{D}_+D_+ + D_+\bar{D}_+)\phi_1^+ = 0,$$

levam a equação

$$\bar{D}_+D_+\phi_2^+ = g\text{sen}\phi_2^-,$$

contanto que os supercampos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 satisfaçam as seguintes condições

$$\bar{D}_+\mathcal{F}_1 = \frac{2g}{\alpha_1}\text{sen}\left(\frac{\phi_1^- - \phi_2^-}{2}\right), \quad D_+\mathcal{F}_2 = -\frac{2g}{\alpha_2}\text{sen}\left(\frac{\phi_1^- + \phi_2^-}{2}\right). \quad (\text{C.3})$$

De maneira similar, considere o seguinte par de equações

$$D_-\phi_1^- = D_-\phi_2^- + \alpha_3\mathcal{G}_1\cos\left(\frac{\phi_1^+ + \phi_2^+}{2}\right), \quad (\text{C.4})$$

$$\bar{D}_-\phi_1^- = -\bar{D}_-\phi_2^- + \alpha_4\mathcal{G}_2\cos\left(\frac{\phi_1^+ - \phi_2^+}{2}\right), \quad (\text{C.5})$$

onde \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são supercampos fermiônicos e α_3 e α_4 são constantes. Novamente, as equações acima e a condição

$$(\bar{D}_-D_- + D_-\bar{D}_-)\phi_1^- = 0,$$

levam a seguinte equação

$$\bar{D}_- D_- \phi_2^- = g \text{sen} \phi_2^+,$$

contanto que os supercampos \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 satisfaçam as seguintes condições

$$\bar{D}_- \mathcal{G}_1 = \frac{2g}{\alpha_3} \text{sen} \left(\frac{\phi_1^+ - \phi_2^+}{2} \right), \quad D_- \mathcal{G}_2 = -\frac{2g}{\alpha_4} \text{sen} \left(\frac{\phi_1^+ + \phi_2^+}{2} \right). \quad (\text{C.6})$$

Portanto as equações (C.1), (C.2), (C.4), (C.5) e as condições (C.3) e (C.6) efetuam uma transformação de Backlund para a teoria super sine-Gordon $N = 2$. A transformação de supersimetria das equações de Backlund são obtidas usando os geradores de supersimetria Q_\pm e \bar{Q}_\pm :

$$\begin{aligned} \delta \phi_p^\pm &= (\epsilon_+ Q_+ + \epsilon_- Q_- + \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_+ + \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_-) \phi_p^\pm, \\ \delta \mathcal{F}_p &= (\epsilon_+ Q_+ + \epsilon_- Q_- + \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_+ + \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_-) \mathcal{F}_p, \\ \delta \mathcal{G}_p &= (\epsilon_+ Q_+ + \epsilon_- Q_- + \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_+ + \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_-) \mathcal{G}_p, \end{aligned}$$

onde ϵ_\pm e $\bar{\epsilon}_\pm$ so parmetros fermínicos constantes, e $p = 1, 2$.

Os supercampos fermiônicos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1$ e \mathcal{G}_2 podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= D_+ \Phi_1^+, & \mathcal{F}_2 &= \bar{D}_+ \Phi_2^+, \\ \mathcal{G}_1 &= D_- \Phi_1^-, & \mathcal{G}_2 &= \bar{D}_- \Phi_2^-, \end{aligned}$$

onde os supercampos quirais Φ_p^+ e anti-quirais Φ_p^- são dados por

$$\begin{aligned} \Phi_1^\pm &= q_1^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm) + \theta^\pm \zeta_1^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm) + \bar{\theta}^\pm \zeta_2^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm) + \theta^\pm \bar{\theta}^\pm q_2^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm), \\ \Phi_2^\pm &= p_1^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm) + \theta^\pm \xi_1^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm) + \bar{\theta}^\pm \xi_2^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm) + \theta^\pm \bar{\theta}^\pm p_2^\pm(z^\pm, \bar{z}^\pm). \end{aligned}$$

Para simplificar a notação usaremos $\varphi_\pm^{(-)}, \varphi_\pm^{(+)}$ os quais significam $\varphi_\pm^{(-)} = \varphi_1^- \pm \varphi_2^-$, $\varphi_\pm^{(+)} = \varphi_1^+ \pm \varphi_2^+$, e para os demais campos a notação será similar.

Em termos de componentes temos

$$\begin{aligned}
\bullet \bar{D}_+ \mathcal{F}_1 &= \frac{2g}{\alpha_1} \text{sen} \left(\frac{\phi_1^- - \phi_2^-}{2} \right), \\
&\Downarrow \\
q_2^+ &= \frac{2g}{\alpha_1} \text{sen} \left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2} \right), \\
\partial_{\bar{z}} \zeta_1^+ &= \frac{g}{\alpha_1} \cos \left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(+)}, \\
\partial_z \zeta_2^+ &= -\frac{g}{\alpha_1} \cos \left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2} \right) \psi_-^{(+)}, \\
\partial_{\bar{z}} \partial_z q_1^+ &= -\frac{g}{\alpha_1} \cos \left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2} \right) F_-^{(-)} - \frac{g}{2\alpha_1} \text{sen} \left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2} \right) \psi_-^{(+)} \bar{\psi}_-^{(+)}. \quad (\text{C.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet D_+ \mathcal{F}_2 &= -\frac{2g}{\alpha_2} \text{sen} \left(\frac{\phi_1^- + \phi_2^-}{2} \right), \\
&\Downarrow \\
p_2^+ &= \frac{2g}{\alpha_2} \text{sen} \left(\frac{\varphi_+^{(-)}}{2} \right), \\
\partial_{\bar{z}} \xi_1^+ &= \frac{g}{\alpha_2} \cos \left(\frac{\varphi_+^{(-)}}{2} \right) \bar{\psi}_+^{(+)}, \\
\partial_z \xi_2^+ &= -\frac{g}{\alpha_2} \cos \left(\frac{\varphi_+^{(-)}}{2} \right) \psi_+^{(+)}, \\
\partial_{\bar{z}} \partial_z p_1^+ &= -\frac{g}{\alpha_2} \cos \left(\frac{\varphi_+^{(-)}}{2} \right) F_+^{(-)} - \frac{g}{2\alpha_2} \text{sen} \left(\frac{\varphi_+^{(-)}}{2} \right) \psi_+^{(+)} \bar{\psi}_+^{(+)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \bar{D}_- \mathcal{G}_1 &= \frac{2g}{\alpha_3} \text{sen} \left(\frac{\phi_1^+ - \phi_2^+}{2} \right), \\
&\Downarrow \\
q_2^- &= \frac{2g}{\alpha_3} \text{sen} \left(\frac{\varphi_-^{(+)}}{2} \right), \\
\partial_{\bar{z}} \zeta_1^- &= \frac{g}{\alpha_3} \cos \left(\frac{\varphi_-^{(+)}}{2} \right) \bar{\psi}_-^{(-)}, \\
\partial_z \zeta_2^- &= -\frac{g}{\alpha_3} \cos \left(\frac{\varphi_-^{(+)}}{2} \right) \psi_-^{(-)}, \\
\partial_{\bar{z}} \partial_z q_1^- &= -\frac{g}{\alpha_3} \cos \left(\frac{\varphi_-^{(+)}}{2} \right) F_-^{(+)} - \frac{g}{2\alpha_3} \text{sen} \left(\frac{\varphi_-^{(+)}}{2} \right) \psi_-^{(-)} \bar{\psi}_-^{(-)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet D_- \mathcal{G}_2 &= -\frac{2g}{\alpha_4} \text{sen} \left(\frac{\phi_1^+ + \phi_2^+}{2} \right), \\
&\Downarrow \\
p_2^- &= \frac{2g}{\alpha_4} \text{sen} \left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2} \right), \\
\partial_{\bar{z}} \xi_1^- &= \frac{g}{\alpha_4} \cos \left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2} \right) \bar{\psi}_+^{(-)}, \\
\partial_z \xi_2^- &= -\frac{g}{\alpha_4} \cos \left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2} \right) \psi_+^{(-)}, \\
\partial_{\bar{z}} \partial_z p_1^- &= -\frac{g}{\alpha_4} \cos \left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2} \right) F_+^{(+)} - \frac{g}{2\alpha_4} \text{sen} \left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2} \right) \psi_+^{(-)} \bar{\psi}_+^{(-)}.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}
\bullet D_+ \phi_1^+ &= D_+ \phi_2^+ + \alpha_1 \mathcal{F}_1 \cos \left(\frac{\phi_1^- + \phi_2^-}{2} \right), \\
&\Downarrow \\
\psi_-^{(-)} &= \alpha_1 \zeta_1^+ \cos \left(\frac{\varphi_+^{(-)}}{2} \right), \quad F_-^{(+)} = \alpha_1 q_2^{(+)} \cos \left(\frac{\varphi_+^{(-)}}{2} \right), \\
\partial_z \varphi_-^{(+)} &= \frac{\alpha_1}{2} \text{sen} \left(\frac{\varphi_+^{(-)}}{2} \right) \zeta_1^+ \psi_+^{(+)} + \alpha_1 \partial_z q_1^+ \cos \left(\frac{\varphi_+^{(-)}}{2} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \bar{D}_+ \phi_1^+ &= -\bar{D}_+ \phi_2^+ + \alpha_2 \mathcal{F}_2 \cos \left(\frac{\phi_1^- - \phi_2^-}{2} \right), \\
&\Downarrow \\
\bar{\psi}_+^{(-)} &= \alpha_2 \xi_2^+ \cos \left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2} \right), \quad F_+^{(+)} = \alpha_2 p_2^{(+)} \cos \left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2} \right), \\
\partial_{\bar{z}} \varphi_+^{(+)} &= \frac{\alpha_2}{2} \text{sen} \left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2} \right) \xi_2^+ \bar{\psi}_-^{(+)} + \alpha_2 \partial_{\bar{z}} p_1^+ \cos \left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet D_- \phi_1^- &= D_- \phi_2^- + \alpha_3 \mathcal{G}_1 \cos \left(\frac{\phi_1^+ + \phi_2^+}{2} \right), \\
&\Downarrow \\
\psi_-^{(+)} &= \alpha_3 \zeta_1^- \cos \left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2} \right), \quad F_-^{(-)} = \alpha_3 q_2^{(-)} \cos \left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2} \right), \\
\partial_z \varphi_-^{(-)} &= \frac{\alpha_3}{2} \text{sen} \left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2} \right) \zeta_1^- \psi_+^{(-)} + \alpha_3 \partial_z q_1^- \cos \left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \bar{D}_- \phi_1^- &= -\bar{D}_- \phi_2^- + \alpha_4 \mathcal{G}_2 \cos \left(\frac{\phi_1^+ - \phi_2^+}{2} \right), \\
&\Downarrow \\
\bar{\psi}_+^{(+)} &= \alpha_4 \xi_2^- \cos \left(\frac{\varphi_-^{(+)}}{2} \right), \quad F_+^{(-)} = \alpha_4 p_2^{(-)} \cos \left(\frac{\varphi_-^{(+)}}{2} \right), \\
\partial_{\bar{z}} \varphi_+^{(-)} &= \frac{\alpha_4}{2} \text{sen} \left(\frac{\varphi_-^{(+)}}{2} \right) \xi_2^- \bar{\psi}_-^{(-)} + \alpha_4 \partial_{\bar{z}} p_1^- \cos \left(\frac{\varphi_-^{(+)}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Aplicando \bar{D}_- na eq. (C.1) e usando eq. (C.5), obtemos a condiç~ao

$$\mathcal{F}_1 \mathcal{G}_2 = 0,$$

que é satisfeita quando colocamos

$$\zeta_1^+ = \xi_2^-, \quad q_2^+ = \partial_{\bar{z}} p_1^-, \quad p_2^- = -\partial_z q_1^+, \quad \partial_z \zeta_2^+ = -\partial_{\bar{z}} \xi_1^-. \quad (\text{C.9})$$

De maneira similar, se aplicamos D_- na eq. (C.2) e usamos a eq. (C.4), obtemos a condição

$$\mathcal{F}_2 \mathcal{G}_1 = 0,$$

que é satisfeita quando colocamos

$$\zeta_1^- = \xi_2^+, \quad p_2^+ = -\partial_z q_1^-, \quad q_2^- = \partial_{\bar{z}} p_1^+, \quad \partial_z \zeta_2^- = -\partial_{\bar{z}} \xi_1^+. \quad (\text{C.10})$$

Usando a terceira equação de (C.9), a eq. (C.7) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} \partial_z q_1^+ &= -\partial_{\bar{z}} p_2^- \\ &= -\frac{g}{\alpha_1} \cos\left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2}\right) F_-^{(-)} - \frac{g}{2\alpha_1} \text{sen}\left(\frac{\varphi_-^{(-)}}{2}\right) \psi_-^{(+)} \bar{\psi}_-^{(+)}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Aplicando $\partial_{\bar{z}}$ na eq. (C.8) obtemos

$$\partial_{\bar{z}} p_2^- = \frac{2g}{\alpha_4} \partial_{\bar{z}} \left[\text{sen}\left(\frac{\varphi_+^{(+)}}{2}\right) \right]. \quad (\text{C.12})$$

Para que (C.11) seja compatível com (C.12), é necessário que

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3 \alpha_4.$$

Apêndice D

Superálgebra $sl(2, 2)$

Neste apêndice apresentaremos algumas informações úteis sobre a álgebra afim $sl(2, 2)$ usada para a obter a equação de curvatura nula para a teoria supersimétrica de sinh-Gordon $N = 2$.

A superálgebra $sl(2, 2)$ é composta por geradores de Cartan

$$h_1 = e_{11} - e_{22}, \quad h_2 = e_{22} + e_{33}, \quad h_3 = -e_{33} + e_{44},$$

e geradores step

$$E_{\pm\alpha_1}, \quad E_{\pm\alpha_2}, \quad E_{\pm\alpha_3}, \quad E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}, \quad E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)},$$

tal que

$$E_{\alpha_j+\alpha_{j+1}+\dots+\alpha_{j+k}} = e_{jl}, \quad E_{-\alpha_j-\alpha_{j+1}-\dots-\alpha_{j+k}} = e_{lj}, \quad l = j + k + 1,$$

onde $(e_{nm})_{jk} = \delta_{n,j}\delta_{m,k}$.

Para obter uma superálgebra infinita introduzimos o parâmetro espectral λ :

$$h \rightarrow h^{(n)} = \lambda^n h, \quad h \in sl(2, 2).$$

A equação de curvatura nula para o modelo supersimétrico de sinh-Gordon $N = 2$ é obtida usando gradação

$$D = 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}(h_1 + h_3).$$

Em seguida escolhemos uma base apropriada com grau bem definido pela gradação D :

$$\begin{aligned}
F_1^{(2n+3/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+5/4)}) + (E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+5/4)} + E_{-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+1/4)}) \\
&\quad + (E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+3/4)}) + (E_{\alpha_2}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_2}^{(n+3/4)})], \\
F_2^{(2n+1/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n-1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+3/4)}) + (-E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_2-\alpha_3}^{(n-1/4)}) \\
&\quad + (-E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+1/4)}) + (-E_{\alpha_2}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1/4)})], \\
F_3^{(2n+3/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+5/4)}) + (E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+5/4)} + E_{-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+1/4)}) \\
&\quad - (E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+3/4)}) - (E_{\alpha_2}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_2}^{(n+3/4)})], \\
F_4^{(2n+1/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n-1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+3/4)}) + (-E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_2-\alpha_3}^{(n-1/4)}) \\
&\quad - (-E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+1/4)}) - (-E_{\alpha_2}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1/4)})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1^{(2n+1/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n-1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+3/4)}) - (E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_2-\alpha_3}^{(n-1/4)}) \\
&\quad + (E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+1/4)}) - (E_{\alpha_2}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1/4)})], \\
G_2^{(2n+3/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+5/4)}) + (E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+5/4)} - E_{-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+1/4)}) \\
&\quad + (-E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+3/4)}) + (E_{\alpha_2}^{(n+3/4)} - E_{-\alpha_2}^{(n+3/4)})], \\
G_3^{(2n+1/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n-1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+3/4)}) - (E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_2-\alpha_3}^{(n-1/4)}) \\
&\quad - (E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+1/4)}) + (E_{\alpha_2}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1/4)})], \\
G_4^{(2n+3/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+5/4)}) + (E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+5/4)} - E_{-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+1/4)}) \\
&\quad - (-E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{(n+3/4)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}^{(n+3/4)}) - (E_{\alpha_2}^{(n+3/4)} - E_{-\alpha_2}^{(n+3/4)})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1^{(2n)} &= h_1^{(n)}, & M_2^{(2n+1)} &= -E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{-\alpha_1}^{(n+1)}, \\
M_3^{(2n)} &= -h_3^{(n)}, & M_4^{(2n+1)} &= -E_{\alpha_3}^{(n+1)} + E_{-\alpha_3}^{(n)}
\end{aligned}$$

$$E^{(2n+1)} = K_1^{(2n+1)} + K_2^{(2n+1)} + K_3^{(2n+1)},$$

onde

$$K_1^{(2n+1)} = E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{-\alpha_1}^{(n+1)}, \quad K_2^{(2n+1)} = E_{\alpha_3}^{(n+1)} + E_{-\alpha_3}^{(n)}, \quad K_3^{(2n+1)} = I^{(n+1/2)}.$$

Apêndice E

Expressões úteis

Neste apêndice apresentamos explicitamente as expressões de $V_x^{(k)}$, $V_t^{(k)}$, $V_{1,2}$ e $V_{2,1}$ usadas na formulação de curvatura nula para a teoria supersimétrica de sinh-Gordon $N = 2$ com defeito.

$$\begin{aligned}
V_x^{(k)} = & \left(-e^{-\phi_k} - \frac{1}{\lambda}e^{\phi_k}\right) E_{\alpha_1} + (-\lambda e^{\phi_k} - e^{-\phi_k})E_{-\alpha_1} \\
& + (-\lambda e^{-\varphi_k} - e^{\varphi_k})E_{\alpha_3} + \left(-e^{\varphi_k} - \frac{1}{\lambda}e^{-\varphi_k}\right) E_{-\alpha_3} + (-\lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2})I \\
& + i \left[-e^{-\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\psi_k + \chi_k)\lambda^{-1/4} + e^{\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\bar{\psi}_k + \bar{\chi}_k)\lambda^{-3/4}\right] E_{\alpha_1 + \alpha_2} \\
& + i \left[-e^{\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\psi_k + \chi_k)\lambda^{3/4} - e^{-\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\bar{\psi}_k + \bar{\chi}_k)\lambda^{1/4}\right] E_{-\alpha_1 - \alpha_2} \\
& + i \left[e^{\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\psi_k + \chi_k)\lambda^{3/4} - e^{-\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\bar{\psi}_k + \bar{\chi}_k)\lambda^{1/4}\right] E_{\alpha_2 + \alpha_3} \\
& + i \left[e^{-\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\psi_k + \chi_k)\lambda^{-1/4} + e^{\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\bar{\psi}_k + \bar{\chi}_k)\lambda^{-3/4}\right] E_{-\alpha_2 - \alpha_3} \\
& + i \left[-e^{-\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\psi_k - \chi_k)\lambda^{1/4} + e^{\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\bar{\psi}_k - \bar{\chi}_k)\lambda^{-1/4}\right] E_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\
& + i \left[-e^{\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\psi_k - \chi_k)\lambda^{1/4} - e^{-\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\bar{\psi}_k - \bar{\chi}_k)\lambda^{-1/4}\right] E_{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3} \\
& + i \left[e^{\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\psi_k - \chi_k)\lambda^{1/4} - e^{-\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\bar{\psi}_k - \bar{\chi}_k)\lambda^{-1/4}\right] E_{\alpha_2} \\
& + i \left[e^{-\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\psi_k - \chi_k)\lambda^{1/4} + e^{\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\bar{\psi}_k - \bar{\chi}_k)\lambda^{-1/4}\right] E_{-\alpha_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_t^{(k)} &= \left(-e^{-\phi_k} + \frac{1}{\lambda}e^{\phi_k}\right) E_{\alpha_1} + (-\lambda e^{\phi_k} + e^{-\phi_k}) E_{-\alpha_1} \\
&+ (-\lambda e^{-\varphi_k} + e^{\varphi_k}) E_{\alpha_3} + \left(-e^{\varphi_k} + \frac{1}{\lambda}e^{-\varphi_k}\right) E_{-\alpha_3} + (-\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}) I \\
&+ i \left[-e^{-\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\psi_k + \chi_k)\lambda^{-1/4} - e^{\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\bar{\psi}_k + \bar{\chi}_k)\lambda^{-3/4}\right] E_{\alpha_1 + \alpha_2} \\
&+ i \left[-e^{\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\psi_k + \chi_k)\lambda^{3/4} + e^{-\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\bar{\psi}_k + \bar{\chi}_k)\lambda^{1/4}\right] E_{-\alpha_1 - \alpha_2} \\
&+ i \left[e^{\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\psi_k + \chi_k)\lambda^{3/4} + e^{-\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\bar{\psi}_k + \bar{\chi}_k)\lambda^{1/4}\right] E_{\alpha_2 + \alpha_3} \\
&+ i \left[e^{-\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\psi_k + \chi_k)\lambda^{-1/4} - e^{\frac{1}{2}(\phi_k - \varphi_k)}(\bar{\psi}_k + \bar{\chi}_k)\lambda^{-3/4}\right] E_{-\alpha_2 - \alpha_3} \\
&+ i \left[-e^{-\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\psi_k - \chi_k)\lambda^{1/4} - e^{\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\bar{\psi}_k - \bar{\chi}_k)\lambda^{-1/4}\right] E_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\
&+ i \left[-e^{\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\psi_k - \chi_k)\lambda^{1/4} + e^{-\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\bar{\psi}_k - \bar{\chi}_k)\lambda^{-1/4}\right] E_{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3} \\
&+ i \left[e^{\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\psi_k - \chi_k)\lambda^{1/4} + e^{-\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\bar{\psi}_k - \bar{\chi}_k)\lambda^{-1/4}\right] E_{\alpha_2} \\
&+ i \left[e^{-\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\psi_k - \chi_k)\lambda^{1/4} - e^{\frac{1}{2}(\phi_k + \varphi_k)}(\bar{\psi}_k - \bar{\chi}_k)\lambda^{-1/4}\right] E_{-\alpha_2}.
\end{aligned}$$

$V_{1,2}$ e $V_{2,1}$ são dados por

$$\begin{aligned}
V_{1,2} &= e^{-\frac{1}{2}\phi_1 h_1 - \frac{1}{2}\varphi_1 h_3} V_t^{(2)} e^{\frac{1}{2}\phi_1 h_1 + \frac{1}{2}\varphi_1 h_3}, \\
V_{2,1} &= e^{-\frac{1}{2}\phi_2 h_1 - \frac{1}{2}\varphi_2 h_3} V_t^{(1)} e^{\frac{1}{2}\phi_2 h_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 h_3}.
\end{aligned}$$

Explicitamente temos

$$\begin{aligned}
V_{1,2} &= a_- E_{\alpha_1} + b_+ E_{-\alpha_1} + c_- E_{\alpha_3} + d_+ E_{-\alpha_3} + \lambda_+ I \\
&- \alpha_+^{(2)} E_{\alpha_1 + \alpha_2} - \beta_-^{(2)} E_{-\alpha_1 - \alpha_2} + \beta_+^{(2)} E_{\alpha_2 + \alpha_3} + \alpha_-^{(2)} E_{-\alpha_2 - \alpha_3} \\
&- \gamma_+^{(2)} E_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} - \delta_-^{(2)} E_{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3} + \delta_+^{(2)} E_{\alpha_2} + \gamma_-^{(2)} E_{-\alpha_2},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
a_- &= (-e^{-\phi_+} + \lambda^{-1}e^{-\phi_-}), \\
b_+ &= (-\lambda e^{\phi_+} + e^{\phi_-}), \\
c_- &= (-\lambda e^{-\varphi_+} + e^{-\varphi_-}), \\
d_+ &= (-e^{\varphi_+} + \lambda^{-1}e^{\varphi_-}), \\
\alpha_{\pm}^{(2)} &= i \left[e^{-\frac{1}{2}\phi_+^{(-)}}(\psi_2 + \chi_2)\lambda^{-1/4} \pm e^{-\frac{1}{2}\phi_-^{(-)}}(\bar{\psi}_2 + \bar{\chi}_2)\lambda^{-3/4} \right], \\
\beta_{\pm}^{(2)} &= i \left[e^{\frac{1}{2}\phi_+^{(-)}}(\psi_2 + \chi_2)\lambda^{3/4} \pm e^{\frac{1}{2}\phi_-^{(-)}}(\bar{\psi}_2 + \bar{\chi}_2)\lambda^{1/4} \right], \\
\gamma_{\pm}^{(2)} &= i \left[e^{-\frac{1}{2}\phi_+^{(+)}}(\psi_2 - \chi_2)\lambda^{1/4} \pm e^{-\frac{1}{2}\phi_-^{(+)}}(\bar{\psi}_2 - \bar{\chi}_2)\lambda^{-1/4} \right], \\
\delta_{\pm}^{(2)} &= i \left[e^{\frac{1}{2}\phi_+^{(+)}}(\psi_2 - \chi_2)\lambda^{1/4} \pm e^{\frac{1}{2}\phi_-^{(+)}}(\bar{\psi}_2 - \bar{\chi}_2)\lambda^{-1/4} \right], \\
\lambda_{\pm} &= (-\lambda^{1/2} \pm \lambda^{-1/2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,1} = & a_+ E_{\alpha_1} + b_- E_{-\alpha_1} + c_+ E_{\alpha_3} + d_- E_{-\alpha_3} + \lambda_+ I \\
& -\alpha_+^{(1)} E_{\alpha_1+\alpha_2} - \beta_-^{(1)} E_{-\alpha_1-\alpha_2} + \beta_+^{(1)} E_{\alpha_2+\alpha_3} + \alpha_-^{(1)} E_{-\alpha_2-\alpha_3} \\
& -\gamma_+^{(1)} E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - \delta_-^{(1)} E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} + \delta_+^{(1)} E_{\alpha_2} + \gamma_-^{(1)} E_{-\alpha_2},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
a_+ &= (-e^{-\phi_+} + \lambda^{-1} e^{\phi_-}), \\
b_- &= (-\lambda e^{\phi_+} + e^{-\phi_-}), \\
c_+ &= (-\lambda e^{-\varphi_+} + e^{\varphi_-}), \\
d_- &= (-e^{\varphi_+} + \lambda^{-1} e^{-\varphi_-}), \\
\alpha_{\pm}^{(1)} &= i \left[e^{-\frac{1}{2}\phi_+^{(-)}} (\psi_1 + \chi_1) \lambda^{-1/4} \pm e^{\frac{1}{2}\phi_-^{(-)}} (\bar{\psi}_1 + \bar{\chi}_1) \lambda^{-3/4} \right], \\
\beta_{\pm}^{(1)} &= i \left[e^{\frac{1}{2}\phi_+^{(-)}} (\psi_1 + \chi_1) \lambda^{3/4} \pm e^{-\frac{1}{2}\phi_-^{(-)}} (\bar{\psi}_1 + \bar{\chi}_1) \lambda^{1/4} \right], \\
\gamma_{\pm}^{(1)} &= i \left[e^{-\frac{1}{2}\phi_+^{(+)}} (\psi_1 - \chi_1) \lambda^{1/4} \pm e^{\frac{1}{2}\phi_-^{(+)}} (\bar{\psi}_1 - \bar{\chi}_1) \lambda^{-1/4} \right], \\
\delta_{\pm}^{(1)} &= i \left[e^{\frac{1}{2}\phi_+^{(+)}} (\psi_1 - \chi_1) \lambda^{1/4} \pm e^{-\frac{1}{2}\phi_-^{(+)}} (\bar{\psi}_1 - \bar{\chi}_1) \lambda^{-1/4} \right].
\end{aligned}$$

Referências

- [1] A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov, *Annals of Physics* **120** (1979), 253-291.
- [2] P. Dorey, hep-th/9810026.
- [3] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11** (1975), 2088.
- [4] L. A. Ferreira, J. L. Miramontes, J. Sanches Guillen, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 882; hep-th/9606066.
- [5] M. Ablikin, E. Corrigan, hep-th/0007214.
- [6] K. Schoutens, *Nucl. Phys.* **B344** (1990), 665-695.
- [7] J. Hruby, *Nucl. Phys.* **B131** (1977), 275.
- [8] P. di Vecchia, S. Ferrara, *Nucl. Phys.* **B130** (1977), 93.
- [9] R. Shankar, E. Witten, *Phys. Rev.* **D17** (1978), 2134.
- [10] C. Ahn, *Nucl. Phys.* **B354** (1991), 57.
- [11] G. Delfino, G. Mussardo, P. Simonetti, *Nucl. Phys.* **B432** (1994), 518; hep-th/940976.
- [12] A. Fring, R. Koberle, *Nucl. Phys.* **B421** (1994), 159; hep-th/9304141.
- [13] S. Ghoshal, A. Zamolodchikov, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A9** (1994), 3841; hep-th/9306002.
- [14] S. Ghoshal, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A9** (1994), 4801; hep-th/9310188.
- [15] E. Corrigan, P. E. Dorey, R. H. Rietdijk, R. Sasaki, *Phys. Lett.* **B333** (1994) 83; hep-th/9404108.
- [16] E. Corrigan, P. E. Dorey, R. H. Rietdijk, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **118** (1995) 143; hep-th/9407148.

- [17] A. MacIntyre, *J. Phys.* **A28** (1995); hep-th/9410026.
- [18] P. Bowcock, E. Corrigan, P. E. Dorey, R. H. Rietdijk, *Nucl. Phys.* **B445** (1995) 469; hep-th/9501098.
- [19] T. Inami, S. Odake, Y. Z. Zhang, *Phys. Lett.* **B359** (1995), 118-124; hep-th/9506157.
- [20] R. I. Nepomechie, *Phys. Lett.* **B509** (2001), 183-188; hep-th/0103029.
- [21] C. Ahn, W. M. Koo, *J. Phys.* **A29** (1996), 5845-5854; hep-th/9509056.
- [22] M. Moriconi, K. Schoutens, *Nucl. Phys.* **B487** (1997), 756-778; hep-th/9605219.
- [23] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs, *Nucl. Phys.* **B644** (2002), 509-532; hep-th/0207099.
- [24] R. I. Nepomechie, *Phys. Lett.* **B516** (2001), 376-382; hep-th/0106207.
- [25] R. I. Nepomechie, *Phys. Lett.* **B516** (2001), 161-164; hep-th/0106223.
- [26] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *Int. J. Mod. Phys.* **A19** (2004), 82-91; hep-th/0305022.
- [27] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *JHEP* **508** (2005), 23; hep-th/05065169.
- [28] H. Aratyn, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *Nucl. Phys.* **B676** (2004), 537; hep-th/0309099.
- [29] M. Chaichian, P. Kulish, *Phys. Lett.* **B78** (1978), 413.
- [30] J. F. Gomes, L. H. Ymai, A. H. Zimerman, *Phys. Lett.* **A359** (2006), 630-637; hep-th/0607107.
- [31] A. Das, *Integrable Models*, World Scientific.
- [32] J. F. Gomes, L.H. Ymai, A.H. Zimerman, *Czech. J. Phys.* **56** (2006), 1167-1172; hep-th/0609077.
- [33] J. F. Gomes, L.H. Ymai, A.H. Zimerman, *JHEP03* (2008), 001; arXiv:0710.1391.
- [34] J. F. Gomes, L.H. Ymai, A.H. Zimerman, *J. Phys. Conf. Ser.* **128** (2008), 012004; arXiv:0708.2407.

- [35] K. Kobayashi, T. Uematsu, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **110** (1992), 347-364; hep-th/9112043.
- [36] K. Kobayashi, T. Uematsu, *Phys. Lett.* **B275** (1992), 361-370; hep-th/9110040.
- [37] H. Aratyn, J.F. Gomes, L.H. Ymai, A.H. Zimerman, hep-th/0409171.
- [38] H. Aratyn, J.F. Gomes, L.H. Ymai, A.H. Zimerman, *J. Phys.* **A41**(2007), 312001; arXiv:0712.0626.
- [39] J. F. Gomes, L. H. Ymai, A. H. Zimerman, aceito em *Phys. Lett. A*, arXiv:0902.2456.
- [40] J. F. Gomes, L. H. Ymai, A. H. Zimerman, *J. Phys.* **A39** (2006), 7471-7483; hep-th/0601014.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)