IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.001/05

Hierarquia mKdV e sinh-Gordon supersimétrica com $N = 1$

Leandro Hayato Ymai

Orientador

Abraham Hirsz Zimerman

Fevereiro de 2005

Agradecimentos

À minha família pelo apoio, amor e carinho.
Aos professores A. H. Zimerman e J. F. Gomes pela orientação.
Ao professor L. A. Ferreira pelas notas de aula sobre álgebras de Lie.
Aos amigos, pela amizade e os bons momentos que convivemos juntos.
À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Apresentamos a formulação da hierarquia mKdV e sinh-Gordon supersimétrica com $N = 1$ baseada na superálgebra de Kac-Moody $\tilde{sl}(2,1)$. Obtivemos soluções para até quatro vértices para ambos os modelos utilizando o método de dressing e também discutimos a transformação de Bäcklund para o modelo sinh-Gordon supersimétrico utilizando supercampos.

Palavras Chaves: hierarquias integráveis; supersimetria; sóliton; modelo mKdV supersimétrico; modelo sinh-Gordon supersimétrico.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos, Física Matemática, Fenômenos Não-lineares.

Abstract

We introduce the formulation of supersymmetric mKdV and sinh-Gordon hierarchy with $N = 1$ based on Kac-Moody $\tilde{sl}(2,1)$ superalgebra. We obtained solutions to up to four vertex operator for both models using the dressing method and we also discuss the Bäcklund transformation for the supersymmetric sinh-Gordon model using superfields.

Sumário

Introdução

Foi observado [1] em 1980 que as Hamiltonianas da equação KdV (Korteweg-de-Vries) são também constantes de movimento para a equação de sine-Gordon. Já nessa época houve tentativas de se entender este resultado [1], [2].
Na década de 90 este fato foi retomado por vários autores [3], [4] indicando que as equações mKdV (Korteweg-de-Vries modificada) e sinh-Gordon pertencem à mesma hierarquia.
A referência [5] é a que dá uma formulação indicando a maneira matematicamente mais clara que isto de fato é o que ocorre.
Mais tarde mostrou-se [6] que a equação de sine-Gordon complexa deve pertencer à mesma hierarquia AKNS (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur).
Em 1988 a equação mKdV supersimétrica [7] foi introduzida dez anos após a equação de sine-Gordon supersimétrica [8] ter sido formulada. Ambos estes artigos utilizam o formalismo de supercampos. No caso da equação mKdV utiliza-se um superespaço com uma variável grassmaniana enquanto que no caso de sine-Gordon utilizam-se duas variáveis grassmanianas. Em [9] e [10], o método de bilinearização de Hirota é implementado para construir soluções de n-sólitons para a equação mKdV e sine-Gordon supersimétricas, ambos com $N = 1$ (N = número de supersimetria) respectivamente.
Neste formalismo não é claro portanto que as duas equações supersimétricas pertencem à mesma hierarquia. A fim de abordar este problema, na referência [11] é feita uma construção geral baseada na superálgebra afim $\hat{sl}(2,1)$ onde mostra-se que as duas equações supersimétricas mencionadas acima são construídas à partir da mesma hierarquia.

Nesta dissertação apresentamos a formulação da versão supersimétrica para os modelos mKdV e sinh-Gordon proposta em [11] para o caso de $N = 1$. A formulação desses modelos está baseada na superálgebra de Kac-Moody $\tilde{sl}(2,1)$ com uma gradação principal que induz a decomposição da álgebra em sub-espaços com grau inteiro e semi-inteiro. Geradores de grau inteiro são associados a bósons e geradores de grau semi-inteiro são associados a férmions. Apresentamos as transformações de supersimetria e obtemos as soluções dos modelos utilizando o método de *dressing* para até quatro vértices. A diferença do tratamento nesta dissertação em relação a [11], consiste na utilização de uma gradação diferente assim como uma diferente redução da álgebra de Kac-Moody. A razão disto é que é difícil obter soluções pelo método de dressing usando a gradação e a redução dada em [11].

A extensão do tratamento algébrico acima para obter hierarquias com $N = 2$ e $N = 4$ à partir de álgebras reduzidas de $\hat{sl}(2,2)$ e $\hat{sl}(4,4)$ é feita na referência [12].

No capítulo 1 desta dissertação, apresentamos o esquema geral de construção para hierarquias integráveis e superintegráveis, seguindo a referência [13].

No capítulo 2, apresentamos a supersimetrização das equações mKdV e sine-Gordon utilizando supercampos seguindo as referências [7] e [8]. Também comentamos brevemente sobre o método de bilinearização de Hirota para construção de soluções de n-sólitons para as equações mKdV e sine-Gordon supersimétricas com $N = 1$ conforme proposto em [9] e [10].

Do capítulo 3 ao 6, é apresentada a construção algébrica para os modelos mKdV e sinh-Gordon supersimétricos com $N = 1$ baseada na superálgebra de Kac-Moody $\tilde{sl}(2,1)$. Seguimos a referência [11]. Apresentamos as transformações de supersimetria para os modelos em questão bem como suas soluções para até quatro vértices usando o método de dressing.

No capítulo 7, discutimos transformações de Bäcklund para o modelo sinh-Gordon supersimétrico seguindo o método de supercampos da referência [8]. Após o capítulo 7, apresentamos nossas considerações finais.

No Apêndice A, é dada uma pequena revisão sobre álgebras de Lie.

Capítulo 1

Construção algébrica das hierarquias integráveis e superintegráveis

1.1 Construção geral de hierarquias integráveis relativísticas

A construção geral [13] de hierarquias integráveis relativísticas em termos de uma álgebra de Lie afim $\hat{\mathcal{G}}$ pode ser estabelecida a partir das equações de movimento de Leznov-Saveliev [14]

$$\bar{\partial}(B^{-1}\partial B) + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B] = 0, \qquad \partial(\bar{\partial}B\,B^{-1}) - [\epsilon_+, B\epsilon_- B^{-1}] = 0, \tag{1.1}$$

onde o espaço-tempo é representado pelas coordenadas no cone de luz $z = t + x$, $\bar{z} = t - x$ e a decomposição de $\hat{\mathcal{G}}$ em subespaços graduados $\hat{\mathcal{G}} = \oplus_a \mathcal{G}_a$, $a \in \mathbb{Z}$, de acordo com o operador gradação Q tal que $[Q, \mathcal{G}_a] = a\,\mathcal{G}_a$ é assumida. Aqui B representa um elemento do subgrupo de grau zero $B \in G_0$ e é parametrizado pelos campos físicos (campos de Toda) da teoria. $\epsilon_\pm$ são geradores constantes de grau ± 1 os quais caracterizam a interação não linear. A integrabilidade clássica desses modelos segue da representação (Lax) de curvatura nula deles:

$$\partial \bar{\mathcal{A}} - \bar{\partial} \mathcal{A} + [\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] = 0, \qquad \mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}} \in \oplus_{i=0,\pm 1} \mathcal{G}_i, \tag{1.2}$$

com

$$\mathcal{A} = B \epsilon_- B^{-1}, \qquad \bar{\mathcal{A}} = -\epsilon_+ - \bar{\partial} B \, B^{-1}. \tag{1.3}$$

A existência de um conjunto infinito de cargas conservadas P_m, $m = 0, 1, ...$, é consequência direta da eq. (1.2):

$$\begin{aligned} P_m(t) &= Tr(T(t))^m, \qquad \partial_t P_m = 0, \\ T(t) &= \lim_{L \to \infty} \mathcal{P} \exp \left(\int_{-L}^{L} \mathcal{A}_x(t,x) \right), \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $\mathcal{A}_x = \mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}}$.
Um exemplo bem conhecido de modelo integrável dentro dessa construção geral é dado a seguir.
Considere $\hat{\mathcal{G}} = \hat{sl}(2)$ com a gradação principal, i.e. $Q = 2d + \frac{1}{2} H^{(0)}$ e $d = \lambda \frac{d}{d\lambda}$ é o operador derivação. A sub-álgebra de grau zero é então $\mathcal{G}_0 = \{H^{(0)}\}$ e portanto $B = e^{\phi \, H^{(0)}}$. Se agora escolhemos $\epsilon_+ = E_{\alpha}^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}$, $\epsilon_- = \epsilon_+^{\dagger}$ encontramos a partir de (1.2) a equação *sinh-Gordon*

$$\partial \bar{\mathcal{A}} - \bar{\partial} \mathcal{A} + [\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] = (\bar{\partial} \partial \phi + e^{2\phi} - e^{-2\phi}) H^{(0)} = 0. \tag{1.5}$$

1.2 Construção de hierarquias integráveis não relativísticas

De acordo com a referência [15], cada elemento de *grau n positivo* $E^{(n)} \in C(\mathcal{K})$ ($C(\mathcal{K}) = \{x \in \mathcal{K}, [x,y] = 0 \; \forall \; y \in \mathcal{K}\})^*$, está associada a uma evolução temporal segundo t_n por

$$\partial_{t_n} \Theta(t) = (\Theta \, E^{(n)} \, \Theta^{-1})_- \Theta(t), \tag{1.6}$$

*O *kernel* de um elemento E em $\hat{\mathcal{G}}$ é dado por $\mathcal{K} = \{x \in \hat{\mathcal{G}}, \; ad(E)x = [E, x] = 0\}$.

para a matriz *dressing* $\Theta = \exp\left(\sum_{i<0} \theta^{(i)}\right)$ sendo uma exponencial em $\mathcal{G}_<$ e $(\quad)_-$ representa a projeção sobre graus estritamente negativos. Por construção tal fluxo comuta, i.e. $[\partial_{t_m}, \partial_{t_n}]\Theta(t) = 0$. Em particular para $n = 1$, $\partial_{t_1} \equiv \partial_x$, $\epsilon_+ = E$ encontramos

$$
\begin{aligned}
\partial_x(\Theta) &= (\Theta\, E\, \Theta^{-1})_- \Theta = \left[\Theta\, E\, \Theta^{-1} - (\Theta\, E\, \Theta^{-1})_+\right] \Theta \\
&= \Theta\, E - (E + [\theta^{(-1)}, E])\Theta \\
&= \Theta\, E - (E + A_0)\Theta, \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

onde $(\quad)_+$ representa a projeção sobre grau zero e graus positivos e $A_0 = [\theta^{(-1)}, E]$. Vemos que A_0 está em $\mathcal{M}$† e tem grau zero. Isto leva a *trasformação de dressing*

$$
\Theta^{-1}(\partial_x + E + A_0)\Theta = \partial_x + E, \qquad (1.8)
$$

para o operador Lax $L = \partial_x + E + A_0$. Similarmente, para fluxos de n mais alto obtemos

$$
\Theta^{-1}\left(\partial_{t_n} + E^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} D_n^{(i)}\right)\Theta = \partial_{t_n} + E^{(n)}, \qquad (1.9)
$$

onde

$$
\left(\Theta\, E^{(n)}\, \Theta^{-1}\right)_+ = E^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} D_n^{(i)}. \qquad (1.10)
$$

A transformação de dressing acima fornece a *condição de curvatura nula*

$$
\begin{aligned}
\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_n} + E^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} D_n^{(i)}\right] &= \\
= \Theta\left[\partial_x + E, \partial_{t_n} + E^{(n)}\right]\Theta^{-1} &= 0, \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

onde $D_n^{(j)} = D_{n\mathcal{K}}^{(j)} + D_{n\mathcal{M}}^{(j)} \in \mathcal{G}_j$. Portanto encontramos

$$
\begin{aligned}
&[E, D_n^{(n-1)}] + [A_0, E^{(n)}] = 0, \\
&[E, D_n^{(n-2)}] + [A_0, D_n^{(n-1)}] + \partial_x D_n^{(n-1)} = 0, \\
&\quad\vdots \\
&[A_0, D_n^{(0)}] - \partial_{t_n} A_0 + \partial_x D_n^{(0)} = 0. \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

†A *image* de um elemento E em $\hat{\mathcal{G}}$ é dada por $\mathcal{M} = \{x \in \hat{\mathcal{G}},\ ad(E)x = [E, x] \neq 0\}$.

Cada equação pode ser decomposta em componentes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{M}$. Verifica-se que uma solução local para $D_n^{(i)}$, $i = 0, 1, ..., n-1$, em termos do campo A_0 pode ser encontrada recursivamente iniciando a partir da equação de grau mais alto em (1.12) até chegar a última. Em particular a equação correspondente a componente de grau zero também fornece a evolução temporal dos campos físicos.
Deixe-nos considerar o exemplo dada na seção anterior em conexão com $\hat{\mathcal{G}} = \hat{sl}(2)$. Com Q dado pela gradação principal, $Q = 2d + \frac{1}{2}H$ e $\epsilon_+ = E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}$ parametrizamos $A_0 = u\, H^{(0)} \in \mathcal{M}$ e resolvendo a eq. (1.2) para $t = t_3$. Após resolver para $D_3^{(2)}$, $D_3^{(1)}$ e $D_3^{(0)}$ obtemos a equação de movimento para o modelo $mKdV$,

$$4\partial_{t_3} u = u_{xxx} - 6u^2 u_x. \tag{1.13}$$

1.3 Evolução para tempos de grau negativo

A evolução temporal associada a elementos de *grau negativo* em $C(\mathcal{K})$ pode ser incorporada dentro da construção geral de hierarquias seguindo o problema de Riemann-Hilbert e sua conexão com a formulação de dressing [16].
Como na eq. (1.6) para cada $E^{(-n)} \in C(\mathcal{K})$ definimos a evolução temporal associada por

$$\partial_{t_{-n}} \Theta(t) = -(B\, M\, E^{(-n)}\, M^{-1}\, B^{-1})_- \Theta(t), \tag{1.14}$$

onde $M = \exp(\sum_{i>0} m^{(i)})$ e $B \in G_0$, i.e., um elemento do subgrupo de grau zero. Segue portanto que

$$\Theta \partial_{t_{-n}} \Theta^{-1} = \partial_{t_{-n}} + (B\, M\, E^{(-n)}\, M^{-1}\, B^{-1})_-. \tag{1.15}$$

Por construção $[\partial_{t_{-n}}, \partial_{t_m}] = 0$, e portanto

$$\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_{-n}} + \sum_{i=1}^{n} D_n^{(-i)} \right] = \Theta \left[\partial_x + E, \partial_{t_{-n}} \right] \Theta = 0. \tag{1.16}$$

Decompondo a condição de curvatura nula (1.16) em componentes graduada encontramos

$$\partial_x D_n^{(-n)} + [A_0, D_n^{(-n)}] = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_x D_n^{(-n+1)} + [E, D_n^{(-n)}] + [A_0, D_n^{(-n+1)}] = 0,\\
&\quad\vdots\\
&\partial_x D_n^{(-1)} + [E, D_n^{(-2)}] + [A_0, D_n^{(-1)}] = 0,\\
&\partial_{t_{-n}} A_0 - [E, D_n^{(-1)}] = 0.
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

A eq. (1.17) pode ser resolvida recursivamente, no entanto note que em geral, ao contrário dos $D_n^{(i)}$ na eq. (1.12), os $D_n^{(-i)}$ são funcionais não locais dos campos A_0. Existe um caso particular, para $t = t_{-1}$, para os quais obtemos uma solução local fechada. Tome $n = 1$ na eq. (1.16)

$$
\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_{-1}} + (B\, E^{(-1)}\, B^{-1})\right] = 0. \tag{1.18}
$$

Se agora comparamos a eq. (1.18) com (1.2) e (1.3) identificando $\bar{z} = -x$, $z = t_{-1}$ e $E^{(\pm 1)} = \epsilon_{\pm}$ encontramos,

$$
D_1^{(-1)} = B\,\epsilon_-\,B^{-1}, \qquad A_0 = \bar{\partial} B\, B^{-1} = -\partial_x B\, B^{-1}. \tag{1.19}
$$

Com o espaço-tempo identificado acima, fica claro que a equação de Leznov-Saveliev (1.1) pode ser colocada dentro da construção geral para hierarquias integráveis associada a evolução temporal para graus negativos (1.16).

1.4 Hierarquias integráveis supersimétricas

Nesta seção veremos como a estrutura do operador Lax muda quando termos com grau semi-inteiro aparecem em $\hat{\mathcal{G}} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{n/2}$. Como consequência de tais termos estando presentes no expoente da matriz dressing

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \exp\left(\sum_{i<0} \theta^{(i)}\right) = \exp\left(\theta^{(-1/2)} + \theta^{(-1)} + \theta^{(-3/2)} + ...\right),\\
M &= \exp\left(\sum_{i>0} m^{(i)}\right) = \exp\left(m^{(1/2)} + m^{(1)} + m^{(3/2)} + ...\right),
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

a forma do operador Lax é mudada como segue (compare com eq.(1.7))

$$\begin{aligned}
\partial_{t_1}(\Theta) &= (\Theta\, E\, \Theta^{-1})_- \Theta = [\Theta\, E\, \Theta^{-1} - (\Theta\, E\, \Theta^{-1})_+]\Theta \\
&= \Theta\, E - \left(E + \left[\theta^{(-1)}, E\right] + \left[\theta^{(-1/2)}, E\right]\right) \Theta \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\theta^{(-1/2)}, \left[\theta^{(-1/2)}, E\right]\right] \Theta \\
&= \Theta\, E - (E + A_0 + A_{1/2} + k_0)\Theta. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Aqui

$$A_0 = \left[\theta^{(-1)}, E\right] + \frac{1}{2}\left[\theta^{(-1/2)}, \left[\theta^{(-1/2)}, E\right]\right] \Big|_{\mathcal{M}} \quad \in \mathcal{M}, \qquad (1.22)$$

$$A_{1/2} = \left[\theta^{(-1/2)}, E\right] \quad \in \mathcal{M}, \qquad (1.23)$$

$$k_0 = \frac{1}{2}\left[\theta^{(-1/2)}, \left[\theta^{(-1/2)}, E\right]\right] \Big|_{\mathcal{K}} \quad \in \mathcal{K}, \qquad (1.24)$$

onde $|_{\mathcal{M}}$ e $|_{\mathcal{K}}$ denota a projeção sobre o *kernel* $\mathcal{K}$ e *image* $\mathcal{M}$, respectivamente. Isto mostra que, no caso de graduação semi-inteira, a expressão geral para o operador Lax é

$$\mathcal{L} = \partial_x + E + A_0 + A_{1/2} + k_0. \qquad (1.25)$$

O termo k_0 de grau zero não convencional residindo em $\mathcal{K}$ aparece aqui devido a graduação semi-inteira (encontrado no caso de $\hat{sl}(2,1)$ com gradação principal [11]). Seguindo o procedimento explicado na seção 1.1 com Θ dado em (1.20) generalizamos a condição de curvatura nula (1.11), i.e.

$$\begin{aligned}
\left[\partial_x + E + A_0 + A_{1/2} + k_0, \partial_{t_n} + E^{(n)} + \sum_{i=0}^{2n-1} D_n^{(i/2)}\right] &= \\
= \Theta\left[\partial_x + E, \partial_{t_n} + E^{(n)}\right]\Theta^{-1} &= 0, \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

os quais pode ser resolvido recursivamente para $D_n^{(i)}$ e $D_n^{(i+1/2)}$, $i = 1, ..., n-1$. Isto também leva as equações de movimento (evolução temporal) para os campos A_0 e $A_{1/2}$.

No setor de grau negativo, a (1.16) também pode ser extendida como segue

$$\begin{aligned}
\left[\partial_x + E + A_0 + A_{1/2} + k_0, \partial_{t_{-n}} + \sum_{i=1}^{2n} D_n^{(-i/2)}\right] &= \\
= \Theta\left[\partial_x + E, \partial_{t_{-n}}\right]\Theta^{-1} &= 0. \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

Em particular para $n = 1$ encontramos

$$\left[\partial_x + E + A_0 + A_{1/2} + k_0, \partial_{t_{-1}} + D_1^{(-1)} + D_1^{(-1/2)}\right] = 0, \tag{1.28}$$

onde

$$\begin{aligned} D_1^{(-1)} &= B\, E^{(-1)}\, B^{-1}, \qquad D_1^{(-1/2)} = B\, j_{-1/2}\, B^{-1}, \\ j_{-1/2} &= \left[m^{(1/2)}, E^{(-1)}\right]. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Tomando o grau -1 na eq. (1.28) encontramos

$$\partial_x(B\, E^{(-1)}\, B^{-1}) + \left[A_0 + k_0, B\, E^{(-1)}\, B^{-1}\right] = 0, \tag{1.30}$$

os quais tem solução para $A_0 + k_0 = -\partial_x B\, B^{-1}$. Tome agora o grau $-\frac{1}{2}$ da eq. (1.28) para obter

$$\partial_x(j_{-1/2}) = \left[E^{(-1)}, B^{-1}\, A_{1/2}\, B\right]. \tag{1.31}$$

A partir de grau $\frac{1}{2}$ e zero, obtemos

$$\partial_{t_{-1}}(A_{1/2}) = \left[E, B\, j_{-1/2}\, B^{-1}\right], \tag{1.32}$$

$$\partial_{t_{-1}}(\partial_x B\, B^{-1}) = \left[B\, E^{(-1)}\, B^{-1}, E\right] + \left[B\, j_{-1/2}\, B^{-1}, A_{1/2}\right]. \tag{1.33}$$

As eqs. (1.31)-(1.33) correspondem as equações de movimento do modelo integrável relativístico associado.

Capítulo 2

Supersimetrização da equação mKdV e sine-Gordon utilizando supercampos

2.1 Equação mKdV supersimétrica

Seguiremos o procedimento em [7], a partir do formalismo de *superespaço*. Neste formalismo a variável x é estendida para o dubleto (x, θ), onde θ é uma variável *Grassmaniana* (ou *anticomutante*): $\theta^2 = 0$. Em seguida, para um dado campo $f(x,t)$ associamos a ele um *supercampo* $F(x,t;\theta)$ o qual possui uma expansão de Taylor muito simples em termos de θ:

$$F(x,t;\theta) = f(x,t) + \theta\,\gamma(x,t). \tag{2.1}$$

Os campos $f(x,t)$ e $\gamma(x,t)$ são chamados de *componentes* do supercampo $F(x,t;\theta)$. É costume dizer que o campo $\gamma(x,t)$ é o superparceiro de $f(x,t)$ e vive-versa. Em particular, o campo $\gamma(x,t)$ é *fermiônico*, o que significa dizer que $\gamma(x,t)\gamma(y,t) = -\gamma(y,t)\gamma(x,t)$ e consequentemente $\gamma(x,t)^2 = 0$. No presente caso $F(x,t;\theta)$ é um supercampo *bosônico* uma vez que $f(x,t)$ é um campo *bosônico* e a combinação $\theta\,\gamma(x,t)$ também o é. O passo seguinte, é introduzir a *superderivada*

$$D = \theta\partial_x + \partial_\theta. \tag{2.2}$$

que satisfaz $D^2 = \partial_x$.
A transformação de supersimetria surge como uma translação no superespaço:

$$x \to x - \eta\,\theta, \qquad \theta \to \theta + \eta, \tag{2.3}$$

onde η é um parâmetro constante anticomutante e pequeno. Cosidere então o efeito dessa translação sobre o supercampo:

$$F(x,t;\theta) \to F(x - \eta\,\theta, t; \theta + \eta), \tag{2.4}$$

tendo em mente que

$$\delta_\eta F(x,t;\theta) \equiv F(x - \eta\,\theta, t; \theta + \eta) - F(x,t;\theta). \tag{2.5}$$

Expandindo a eq. (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} &F(x - \eta\,\theta, t; \theta + \eta) = \\ &\quad = F(x,t;\theta) - \eta\,\theta\,\partial_x F(x,t;\theta) + \eta\,\partial_\theta F(x,t;\theta) \\ &\quad = f(x,t) + \theta\,\gamma(x,t) + \eta\,\gamma(x,t) + \theta\,\eta\,\partial_x f(x,t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da eq. (2.5) temos

$$\begin{aligned} &F(x - \eta\,\theta, t; \theta + \eta) = \\ &\quad = F(x,t;\theta) + \delta_\eta F(x,t;\theta) \\ &\quad = f(x,t) + \theta\,\gamma(x,t) + \delta_\eta f(x,t) + \theta\,\delta_\eta \gamma(x,t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Comparando a eq. (2.7) com (2.6), vemos que

$$\delta_\eta f(x,t) = \eta\,\gamma(x,t), \qquad \delta_\eta \gamma(x,t) = \eta\,\partial_x f(x,t). \tag{2.8}$$

Estas expressões são chamadas de *transformações de supersimetria*, e relacionam campos bosônicos com campos fermiônicos e vice-versa.Vemos que duas transformações de supersimetria sucessivas levam a

$$\delta_\eta\,\delta_{\eta'} f(x,t) = \eta'\,\eta\,\partial_x f(x,t) \qquad \delta_\eta\,\delta_{\eta'} \gamma(x,t) = \eta'\,\eta\,\partial_x \gamma(x,t). \tag{2.9}$$

Em outras palavras, uma translação no superespaço, portanto uma transformação de supersimetria, é algo como uma "raíz quadrada"de uma translação ordinária. Podemos supersimetrizar a equação mKdV*

$$v_t = -v_{xxx} + 6v^2 v_x, \tag{2.10}$$

introduzindo um supercampo fermiônico

$$\psi(x,t;\theta) = \theta\, v(x,t) + \zeta(x,t), \tag{2.11}$$

onde $\theta^2 = 0$ e $\zeta(x,t)$ é um campo fermiônico. A extensão supersimétrica é obtida reescrevendo a equação mKdV (2.10) em termos do supercampo (2.11) e da superderivada (2.2), tendo em mente que a equação mKdV ordinária deva ser restaurada no limite de $\zeta \to 0$. Multiplicando a eq. (2.10) por θ,

$$\theta\, v_t = -\theta\, v_{xxx} + \theta\, 6v^2 v_x, \tag{2.12}$$

vemos que a forma geral da equação mKdV supersimétrica é dada por

$$\partial_t \psi = -D^6\psi + 3(D\psi)D^2(\psi D\psi) + (3-b)(D\psi)D(\psi D^2\psi), \tag{2.13}$$

onde b é um parâmetro livre. Em termos das componentes de ψ, a equação fica

$$\begin{aligned} \partial_t v &= -\partial_x^3 v + 6v^2\partial_x v - b\partial_x(v\zeta\partial_x\zeta), && (2.14)\\ \partial_t \zeta &= -\partial_x^3 \zeta + 6v^2\partial_x \zeta - b(v^2\partial_x\zeta - v\partial_x v\zeta). && (2.15) \end{aligned}$$

Verifica-se que as equações acima são invariantes pela seguinte transformação de supersimetria

$$\delta_\eta v = \eta\, \partial_x\zeta, \qquad \delta_\eta\zeta = \eta\, v. \tag{2.16}$$

Em [9], utiliza-se o método de Hirota bilinear para obter soluções de n-sólitons para a equação (2.13) no caso de $b = 3$. A equação é posta numa forma bilinear reescrevendo o supercampo ψ em termos de funções τ

$$\psi = D\, \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right), \tag{2.17}$$

*Fazendo $t \to -\frac{t}{4}$, obtemos a eq. (1.13).

e usando uma derivada de Hirota supersimétrica, definida por

$$\mathbf{S}\,\mathbf{D}_x^n f\cdot g=(D_{\theta_1}-D_{\theta_2})(\partial_{x_1}-\partial_{x_2})^n f(x_1,\theta_1)g(x_2,\theta_2)\Big|_{\substack{x_1=x_2=x\\ \theta_1=\theta_2=\theta}} \tag{2.18}$$

onde $D_{\theta_i}=\theta_i\partial_{x_i}+\partial_{\theta_i}$, e f e g são supercampos bosônicos.

2.2 Equação sine-Gordon supersimétrica

De acordo com [8], a equação sine-Gordon†

$$\partial_x\partial_t u=-\mathrm{sen}\,u, \tag{2.19}$$

pode ser supersimetrizada introduzindo um supercampo bosônico, dado por

$$\Phi=\frac{u}{2}+\theta_1\psi_1+\theta_2\psi_2+\theta_1\theta_2 F, \tag{2.20}$$

onde θ_1 e θ_2 são parâmetros fermiônicos, u e F são campos bosônicos e ψ_1 e ψ_2 são campos fermiônicos. Usando as superderivadas

$$D_1=\partial_{\theta_1}+\theta_1\partial_x,\qquad D_2=\partial_{\theta_2}+\theta_2\partial_t, \tag{2.21}$$

as quais satisfazem $D_1^2=\partial_x$, $D_2^2=\partial_t$ e $D_1D_2=-D_2D_1$, encontramos que

$$D_1D_2\Phi=\mathrm{sen}\,\Phi, \tag{2.22}$$

é a equação supersimétrica de (2.19) se

$$F=-\mathrm{sen}\left(\frac{u}{2}\right). \tag{2.23}$$

A eq. (2.22) pode ser escrita em componentes de Φ:

$$\begin{aligned}\partial_x\partial_t u &= -\mathrm{sen}\,u+2\,\mathrm{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\psi_1\psi_2,\\ \partial_t\psi_1 &= -\cos\left(\frac{u}{2}\right)\psi_2,\\ \partial_x\psi_2 &= \cos\left(\frac{u}{2}\right)\psi_1,\end{aligned} \tag{2.24}$$

†Fazendo $u\to i2\phi$, $x\to 2\bar{z}$ e $t\to 2z$, obtemos (1.5).

onde fica claro que a eq. (2.19) é restaurada quando ψ_1 e ψ_2 se anulam.
Na referência [10], mostra-se como construir soluções de n-sólitons para sine-Gordon supersimétrica, reescrevendo o supercampo Φ como

$$\Phi = i \ln \left(\frac{F_-}{F_+} \right), \tag{2.25}$$

onde F_- e F_+ são funções de parâmetros grassmaniano, e em seguida bilinearizando a equação (2.22) com a ajuda de um superoperador de Hirota, definido como

$$S_x f \cdot g = (D_x f) g - (-1)^{|f|} f (D_x g), \tag{2.26}$$

onde $D_x = \partial_{\theta_x} + \theta_x \partial_x$, e $|f|$ é zero se f é uma função bosônica e 1 se for uma função fermiônica.

Capítulo 3

Modelo mKdV supersimétrico com $N = 1$

3.1 Superálgebra $sl(2,1)$

Diferente da álgebra comum, uma superálgebra constitui-se de geradores bosônicos $\{B\}$ e geradores fermiônicos $\{F\}$ satisfazendo as seguintes propriedades*: $[B, B'] = B''$, $\{F, F'\} = B$ e $[B, F] = F'$. A superálgebra $sl(2,1)$ possui oito geradores. Numa representação matricial 3×3, os geradores de $sl(2,1)$ são dados por

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
E_{\alpha_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_{\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

*aqui usaremos $[A, B] = AB - BA$ e $\{A, B\} = AB + BA$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\alpha_1-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

onde $\{H_1, H_2, E_{\pm\alpha_1}\}$ são geradores bosônicos e $\{E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}\}$ são geradores fermiônicos.
As raízes simples da superálgebra $sl(2,1)$ podem ser representadas em termos de vetores unitários e_i, f, $i = 1, 2$ ($e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, $e_i \cdot f = 0$, $f \cdot f = -1$) como segue

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \qquad \alpha_2 = e_2 - f. \tag{3.2}$$

Para obter uma superálgebra de Kac-Moody $\tilde{sl}(2,1)$ a partir da superálgebra $sl(2,1)$, introduzimos um parâmetro espectral, $h \to h^{(n)} = \lambda^n h$, onde $h \in sl(2,1)$, e usamos a seguinte regra

$$[g^{(n)}, h^{(m)}]_\pm = [g,h]_\pm^{(n+m)} + n\,\delta_{n+m,0} Str(gh)\hat{c}, \qquad g, h \in sl(2,1) \tag{3.3}$$

onde $[g,h]_+ = \{g,h\}$, $[g,h]_- = [g,h]$ e $Str(m) = m_{11} + m_{22} - m_{33}$, é chamado de *supertraço*. Seguindo este procedimento, obtemos as seguintes relações de comutação e anticomutação para a superálgebra de Kac-Moody $\tilde{sl}(2,1)$:

$$\begin{aligned}
&[h_+^{(n)}, E_{\pm\alpha_1}^{(m)}] = \pm E_{\pm\alpha_1}^{(n+m)}, && [h_+^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}] = \pm E_{\mp\alpha_2}^{(n+m)}, \\
&[h_2^{(n)}, E_{\pm\alpha_1}^{(m)}] = \mp E_{\pm\alpha_1}^{(n+m)}, && [h_2^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] = \mp E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n+m)}, \\
&[h_+^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] = 0, && [h_2^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}] = 0, \\
&[E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}] = 0, && [E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] = 0, \\
&\{E_{\mp\alpha_2}^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}\} = 0, && \{E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}\} = 0, \\
&[E_{\alpha_1}^{(n)}, E_{-\alpha_1}^{(m)}] = h_1^{(n+m)} + n\,\delta_{n+m,0}\hat{c}, && \\
&\{E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)}, E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(m)}\} = h_+^{(n+m)} + n\,\delta_{n+m,0}\hat{c}, && \\
&[E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] = \mp E_{\mp\alpha_2}^{(n+m)}, && [E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\pm\alpha_2}^{(m)}] = \pm E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n+m)}, \\
&\{E_{-\alpha_2}^{(n)}, E_{\alpha_2}^{(m)}\} = h_2^{(n+m)} - n\,\delta_{n+m,0}\hat{c}, && \\
&\{E_{\mp\alpha_2}^{(n)}, E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}\} = 0, && \{E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}\} = E_{\pm\alpha_1}^{(n+m)}, \\
&[h_+^{(n)}, h_2^{(m)}] = -n\,\delta_{n+m,0}\hat{c}, &&
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde temos definido

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 2H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = -H_1 + H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
h_+ &= h_1 + h_2. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

3.2 Construção do modelo

Em [11] foi proposta a construção de uma hierarquia integrável para a equação mKdV supersimétrica baseada na superálgebra afim $\hat{sl}(2,1)$ com uma gradação principal Q que decompõe a superálgebra em sub-espaços de grau inteiro e semi-inteiro. Os geradores de grau inteiro são associados a bósons e os geradores de grau semi-inteiro são associados a férmions. Aqui, apresentaremos a base proposta por eles com uma modificação no operador gradação:

$$
Q = \lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2} h_1^{(0)}, \quad \rightarrow \quad Q = 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2} h_1^{(0)}. \qquad (3.6)
$$

Esta modificação foi nescessária para obter as soluções das equações de movimento para o caso $N = 1$ (N representa o número de campos bosônico+fermiônico para o modelo). Neste caso, o modelo é tratado usando-se uma álgebra reduzida, ou seja, usando-se apenas uma sub-álgebra da álgebra toda. A álgebra completa é usada para o caso $N = 2$ o qual não será tratado aqui. Na próxima seção, apresentaremos as equações de movimento do modelo mKdV supersimétrico para o caso $N = 1$ usando a formulação dada na seção 1.4. A base $\tilde{sl}(2,1)$ segundo a gradação (3.6), no caso reduzida, é dada por

$$
\begin{aligned}
F_1^{(2n+3/2)} &= (E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/2)} - E_{\alpha_2}^{(n+1)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)} - E_{-\alpha_2}^{(n+1/2)}), \\
F_2^{(2n+1/2)} &= -(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} - E_{\alpha_2}^{(n+1/2)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1/2)} - E_{-\alpha_2}^{(n)}), \\
G_1^{(2n+1/2)} &= (E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} + E_{\alpha_2}^{(n+1/2)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1/2)} + E_{-\alpha_2}^{(n)}), \\
G_2^{(2n+3/2)} &= -(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/2)} + E_{\alpha_2}^{(n+1)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1/2)}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_1^{(2n+1)} &= -E_{-\alpha_1}^{(n+1)} - E_{\alpha_1}^{(n)}, \\
K_2^{(2n+1)} &= h_+^{(n+1/2)} + h_2^{(n+1/2)}, \\
M_1^{(2n+1)} &= E_{-\alpha_1}^{(n+1)} - E_{\alpha_1}^{(n)}, \\
M_2^{(2n)} &= h_1^{(n)}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

As relações de comutação e anti-comutação para os geradores de $\tilde{sl}(2,1)$ acima são dadas no Apêndice B.
Define-se o elemento

$$E^{(1)} = K_1^{(1)} + K_2^{(1)}, \tag{3.8}$$

que induz a decomposição de $\tilde{sl}(2,1)$ em *kernel* $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \{x \in \tilde{sl}(2,1), [E^{(1)}, x] = 0 \text{ ou } [E^{(1)}, x] \propto \hat{c}\},$$

e *image* $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \{x \in \tilde{sl}(2,1), [E^{(1)}, x] \neq 0\}.$$

Assim,

$$\tilde{sl}(2,1) = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}, \tag{3.9}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{Bose} &= \{M_1^{(2n+1)}, M_2^{(2n)}\}, \qquad \mathcal{M}_{Fermi} = \{G_1^{(2n+1/2)}, G_2^{(2n+3/2)}\}, \\
\mathcal{K}_{Bose} &= \{K_1^{(2n+1)}, K_2^{(2n+1)}\}, \qquad \mathcal{K}_{Fermi} = \{F_1^{(2n+3/2)}, F_2^{(2n+1/2)}\}.
\end{aligned}
$$

3.3 Equações de movimento

O operador Lax é definido como (veja (1.25))

$$\mathcal{L}_x = \partial_x + \mathcal{A}_x, \tag{3.10}$$

onde

$$\mathcal{A}_x = E^{(1)} + A_0 + A_{1/2}, \tag{3.11}$$

com

$$A_0 = u\, M_2^{(0)} + \eta \hat{c}, \qquad A_{1/2} = \bar{\psi}\, G_1^{(1/2)}, \tag{3.12}$$

onde $u = u(x,t_3)$ e $\eta = \eta(x,t_3)$, são campos bosônicos e $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x,t_3)$ é um campo fermiônico.
Definimos em seguida,

$$\mathcal{L}_{t_3} = \partial_{t_3} + \mathcal{A}_{t_3}, \tag{3.13}$$

onde

$$\mathcal{A}_{t_3} = E^{(3)} + \sum_{n=0}^{5} D_3^{(n/2)}, \tag{3.14}$$

com

$$\begin{aligned} D_3^{(0)} &= a_1 M_2^{(0)}, & D_3^{(1/2)} &= b_1 G_1^{(1/2)} + b_2 F_2^{(1/2)}, \\ D_3^{(1)} &= c_1 M_1^{(1)} + c_2 K_1^{(1)} + c_3 K_2^{(1)}, & D_3^{(3/2)} &= d_1 G_2^{(3/2)} + d_2 F_1^{(3/2)}, \\ D_3^{(2)} &= e_1 M_2^{(2)}, & D_3^{(5/2)} &= f_1 G_1^{(5/2)} + f_2 F_2^{(5/2)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $a_1 = a_1(x,t_3)$, $b_1 = b_1(x,t_3)$, $b_2 = b_2(x,t_3)$,...etc.
A equação de curvatura nula fornece

$$[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{t_3}] = \partial_x \mathcal{A}_{t_3} - \partial_{t_3} \mathcal{A}_x + [\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_{t_3}] = \sum_{n=0}^{7} G^{(n/2)} = 0. \tag{3.16}$$

onde cada $G^{(n/2)}$ possui grau $(n/2)$:

$$G^{(7/2)} = [E^{(1)}, D_3^{(5/2)}] + [A_{1/2}, E^{(3)}]$$

$$
\begin{aligned}
&= (2f_1 - 2\bar{\psi})G_2^{(7/2)}, \\
G^{(3)} &= [E^{(1)}, D_3^{(2)}] + [A_0, E^{(3)}] + [A_{1/2}, D_3^{(5/2)}] \\
&= (-2e_1 + 2u + 2\bar{\psi}f_2)M_1^{(3)} + 2\bar{\psi}f_1(K_2^{(3)} - K_1^{(3)}), \\
G^{(5/2)} &= \partial_x D_3^{(5/2)} + [E^{(1)}, D_3^{(3/2)}] + [A_0, D_3^{(5/2)}] + [A_{1/2}, D_3^{(2)}] \\
&= (\partial_x f_1 + 2d_1 - uf_2)G_1^{(5/2)} + (\partial_x f_2 - uf_1 + \bar{\psi}e_1)F_2^{(5/2)}, \\
G^{(2)} &= \partial_x D_3^{(2)} + [E^{(1)}, D_3^{(1)}] + [A_0, D_3^{(2)}] + [A_{1/2}, D_3^{(3/2)}] \\
&= (\partial_x e_1 - 2c_1 + 2\bar{\psi}d_2)M_2^{(2)} \\
G^{(3/2)} &= \partial_x D_3^{(3/2)} + [E^{(1)}, D_3^{(1/2)}] + [A_0, D_3^{(3/2)}] + [A_{1/2}, D_3^{(1)}] \\
&= (\partial_x d_1 + 2b_1 - ud_2 - \bar{\psi}c_2 - \bar{\psi}c_3)G_2^{(3/2)} \\
&\quad +(\partial_x d_2 - ud_1 + \bar{\psi}c_1)F_1^{(3/2)}, \\
G^{(1)} &= \partial_x D_3^{(1)} + [E^{(1)}, D_3^{(0)}] + [A_0, D_3^{(1)}] + [A_{1/2}, D_3^{(1/2)}] \\
&= (\partial_x c_1 - 2a_1 + 2uc_2 + 2\bar{\psi}b_2)M_1^{(1)} + (\partial_x c_2 + 2uc_1 - 2\bar{\psi}b_1)K_1^{(1)} \\
&\quad +(\partial_x c_3 + 2\bar{\psi}b_1)K_2^{(1)}, \\
G^{(1/2)} &= \partial_x D_{t_3}^{(1/2)} - \partial_{t_3} A_{1/2} + [A_0, D_3^{(1/2)}] + [A_{1/2}, D_3^{(0)}] \\
&= (\partial_x b_1 - \partial_{t_3}\bar{\psi} - ub_2)G_1^{(1/2)} + (\partial_x b_2 - ub_1 + \bar{\psi}a_1)F_2^{(1/2)}, \\
G^{(0)} &= \partial_x D_3^{(0)} - \partial_{t_3} A_0 + [A_0, D_3^{(0)}] \\
&= (\partial_x a_1 - \partial_{t_3} u)M_2^{(0)}. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Para que a condição de curvatura nula seja satisfeita, colocamos cada $G^{(n/2)} = 0$. Ao fazer isto obtemos o seguinte sistema de equações

$$
\begin{aligned}
2f_1 - 2\bar{\psi} &= 0, \\
2u - 2e_1 + 2\bar{\psi}f_2 &= 0, \\
2\bar{\psi}f_1 &= 0, \\
\partial_x f_1 + 2d_1 - uf_2 &= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_x f_2 - u f_1 + \bar\psi e_1 &= 0,\\
\partial_x e_1 - 2c_1 + 2\bar\psi d_2 &= 0,\\
\partial_x d_1 + 2b_1 - u d_2 - \bar\psi c_2 - \bar\psi c_3 &= 0,\\
\partial_x d_2 - u d_1 + \bar\psi c_1 &= 0,\\
\partial_x c_1 - 2a_1 + 2uc_2 + 2\bar\psi b_2 &= 0,\\
\partial_x c_2 + 2uc_1 - 2\bar\psi b_1 &= 0,\\
\partial_x c_3 + 2\bar\psi b_1 &= 0,\\
\partial_x b_1 - \partial_{t_3}\bar\psi - u b_2 &= 0,\\
\partial_x b_2 - u b_1 + \bar\psi a_1 &= 0,\\
\partial_x a_1 - \partial_{t_3} u &= 0. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Após resolver este sistema de equações para $a_1, b_1, b_2, \cdots$ etc, obtemos

$$
\begin{aligned}
D_3^{(0)} &= (\frac{1}{4}\partial_x^2 u + \frac{3}{4}u\bar\psi\partial_x\bar\psi - \frac{1}{2}u^3)M_2^{(0)},\\
D_3^{(1/2)} &= (\frac{1}{4}\partial_x^2\bar\psi - \frac{1}{2}u^2\bar\psi)G_1^{(1/2)} + \frac{1}{4}(u\partial_x\bar\psi - \bar\psi\partial_x u)F_2^{(1/2)},\\
D_3^{(1)} &= \frac{1}{2}\partial_x u M_1^{(1)} + \frac{1}{2}(\bar\psi\partial_x\bar\psi - u^2)K_1^{(1)} - \frac{1}{2}\bar\psi\partial\psi K_2^{(1)},\\
D_3^{(3/2)} &= -\frac{1}{2}\partial_x\bar\psi G_2^{(3/2)} - \frac{1}{2}u\bar\psi F_1^{(3/2)},\\
D_3^{(2)} &= uM_2^{(2)},\\
D_3^{(5/2)} &= \bar\psi G_1^{(5/2)}, \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

e as equações de movimento

$$
\begin{aligned}
4\partial_{t_3}\bar\psi &= \partial_x^3\bar\psi - 3u\partial_x(u\bar\psi), \qquad (3.20)\\
4\partial_{t_3}u &= \partial_x^3 u - 6u^2\partial_x u + 3\bar\psi\partial_x(u\partial_x\bar\psi), \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

que é a versão *supersimétrica* da equação mKdV[†] (1.13). Verificamos que estas equações são invariantes pela transformação de supersimetria dada a seguir:

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}' &= \bar{\psi} + \epsilon u, \\
u' &= u + \epsilon \partial_x \bar{\psi},
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

onde ϵ é um parâmetro fermiônico.

[†] A eq. (3.21) restaura a eq. (1.13) no limite de $\bar{\psi} \to 0$.

Capítulo 4

Soluções do modelo mKdV supersimétrico com $N = 1$

4.1 Método de Dressing

O método *dressing* basea-se na hipótese da existência de duas tranformações de gauge que mapeam a configuração de vácuo numa configuração não trivial.
Para elucidar melhor a afirmação acima, considere

$$\mathcal{L}_x T = 0, \tag{4.1}$$

onde o operador Lax é dado como em (3.11)

$$(\partial_x + \mathcal{A}_x)T = \left(\partial_x + E^{(1)} + A_0 + A_{1/2}\right) T = 0. \tag{4.2}$$

Na configuração de vácuo temos $A_0 = 0$ e $A_{1/2} = 0$, de modo que

$$(\partial_x + E^{(1)})T_{vac} = 0. \tag{4.3}$$

As tranformações de gauge seriam geradas por ambos

$$T = \Theta_- T_{vac}, \tag{4.4}$$
$$T = \Theta_+ T_{vac}\, g^{-1}, \tag{4.5}$$

onde g é um elemento constante do grupo de Lie G e

$$\Theta_+ \;=\; B\, e^{v(1/2)+v(1)+v(3/2)+\ldots}, \qquad (4.6)$$
$$\Theta_- \;=\; e^{t(-1/2)+t(-1)+t(-3/2)+\ldots}, \qquad (4.7)$$

sendo $v(n/2)$ e $t(-n/2)$ $(n = 1, 2, ...)$ parametrizados em sub-espaços de grau $n/2$ e $-n/2$ de $\tilde{sl}(2,1)$, respectivamente. B é um elemento de grupo não constante parametrizado no sub-espaço de grau zero de $\tilde{sl}(2,1)$. Podemos escrever a eq. (4.4) como

$$T_{vac} = \Theta_-^{-1} T, \qquad (4.8)$$

e substituindo em (4.3), obtemos

$$(\Theta_-^{-1}\partial_x + \partial_x \Theta_-^{-1} + E^{(1)}\Theta_-^{-1})T = 0. \qquad (4.9)$$

Multiplicando a expressão acima por Θ_- pela esquerda e comparando o resultado com a expressão (4.2), vemos que

$$E^{(1)} + A_0 + A_{1/2} = \Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1} + \Theta_- \partial_x \Theta_-^{-1}. \qquad (4.10)$$

Fica claro portanto, que Θ_- realiza a transformação de uma configuração de vácuo para uma configuração não trivial. O mesmo raciocínio vale para Θ_+.
Igualando a eq. (4.4) com (4.5), obtemos

$$T_{vac}\, g\, T_{vac}^{-1} = \Theta_-^{-1}\Theta_+, \qquad (4.11)$$

onde fica claro que T_{vac} transforma o elemento de grupo g constante num elemento de grupo $\Theta_-^{-1}\Theta_+$ não constante.
Tomando-se o valor esperado de (4.11) sob estados de peso mais alto $\mid \lambda_j\rangle$ da representação de $\tilde{sl}(2,1)$, construiremos as *funções* τ:

$$\tau_j^h = \langle \lambda_j \mid h\, \Theta_-^{-1}\Theta_+ \mid \lambda_j\rangle = \langle \lambda_j \mid h\, T_{vac}\, g\, T_{vac}^{-1} \mid \lambda_j\rangle, \qquad h \in \tilde{sl}(2,1). \qquad (4.12)$$

A partir das funções τ, podemos obter soluções de n-sólitons escrevendo o elemento de grupo g em termos de *funções de vértice* $F(\gamma_n)$ como segue:

$$g = e^{F(\gamma_1)} e^{F(\gamma_2)} ... e^{F(\gamma_n)}, \qquad [E^{(m)}, F(\gamma_n)] = f(\gamma_n, m) F(\gamma_n), \qquad (4.13)$$

onde $f(\gamma_n, m)$ é um número que depende de γ_n e de m.
O elemento T_{vac} é obtido a partir dos operadores Lax na configuração de vácuo:

$$
\begin{aligned}
(\partial_x + E^{(1)})T_{vac} &= 0 \quad \rightarrow \quad \partial_x T_{vac} = -E^{(1)}T_{vac}, && (4.14)\\
(\partial_{t_3} + E^{(3)})T_{vac} &= 0 \quad \rightarrow \quad \partial_{t_3} T_{vac} = -E^{(3)}T_{vac}. && (4.15)
\end{aligned}
$$

Integrando (4.14) e (4.15), obtemos

$$
T_{vac} = \exp(-E^{(1)}x - E^{(3)}t). \tag{4.16}
$$

4.2 Funções τ para o modelo mKdV supersimétrico

Partimos da transformação (4.10):

$$
E^{(1)} + A_0 + A_{1/2} = \Theta_- E^{(1)} \Theta_-^{-1} + \Theta_- \partial_x \Theta_-^{-1}, \tag{4.17}
$$

onde Θ_- é dado por (4.7). Usando a relação

$$
e^L T e^{-L} = T + [L, T] + \frac{1}{2!}[L, [L, T]] + \frac{1}{3!}[L, [L, [L, T]]] + \cdots
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
E^{(1)} + A_0 + A_{1/2} &= E^{(1)} + [\sum_{n=1/2}^{\infty} t(-n), E^{(1)}] \\
&+ \frac{1}{2!}[\sum_{n=1/2}^{\infty} t(-n), [\sum_{n=1/2}^{\infty} t(-n), E^{(1)}]] \\
&+ \frac{1}{3!}[\sum_{n=1/2}^{\infty} t(-n), [\sum_{n=1/2}^{\infty} t(-n), [\sum_{n=1/2}^{\infty} t(-n), E^{(1)}]]] + \cdots \\
&+ \Theta_- \partial_x \Big[1 - \left(\sum_{n=1/2}^{\infty} t(-n) \right) + \frac{1}{2!} \left(\sum_{n=1/2}^{\infty} t(-n) \right)^2 \\
&- \frac{1}{3!} \left(\sum_{n=1/2}^{\infty} t(-n) \right)^3 + \cdots \Big] \qquad (4.18) \\
&= E^{(1)} + \{\lambda^{(1/2)}\} + \{\lambda^{(0)}\} + \{\lambda^{(-1/2)}\} + \{\lambda^{(-1)}\} + \cdots
\end{aligned}
$$

onde $\{\lambda^{(n/2)}\}$ possui grau $(n/2)$:

$$
\begin{aligned}
\{\lambda^{(1/2)}\} &= [t(-1/2), E^{(1)}], \\
\{\lambda^{(0)}\} &= [t(-1), E^{(1)}] + \frac{1}{2!}[t(-1/2), [t(-1/2), E^{(1)}]], \\
\{\lambda^{(-1/2)}\} &= [t(-3/2), E^{(1)}] + \frac{1}{2!}[t(-1/2), [t(-1), E^{(1)}]], \\
&+ \frac{1}{2!}[t(-1), [t(-1/2), E^{(1)}]] \\
&+ \frac{1}{3!}[t(-1/2), [t(-1/2), [t(-1/2), E^{(1)}]]] - \partial_x t(-1/2) \\
\{\lambda^{(-1)}\} &= [t(-2), E^{(1)}] + \frac{1}{2!}[t(-1/2), [t(-3/2), E^{(1)}]] \\
&+ \frac{1}{2!}[t(-1), [t(-1), E^{(1)}]] + \frac{1}{2!}[t(-3/2), [t(-1/2), E^{(1)}]] \\
&+ \frac{1}{3!}[t(-1/2), [t(-1/2), [t(-1), E^{(1)}]]] \\
&+ \frac{1}{3!}[t(-1/2), [t(-1), [t(-1/2), E^{(1)}]]] \\
&+ \frac{1}{3!}[t(-1), [t(-1/2), [t(-1/2), E^{(1)}]]] \\
&+ \frac{1}{4!}[t(-1/2), [t(-1/2), [t(-1/2), [t(-1/2), E^{(1)}]]]] \\
&- \partial_x t(-1) - t(-1/2)\partial_x t(-1/2) + \frac{1}{2!}\partial_x t^2(-1/2). \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Para que a (4.18) seja satisfeita, devemos ter

$$
A_{1/2} = [t(-1/2), E^{(1)}], \qquad (4.20)
$$

$$
A_0 = [t(-1), E^{(1)}] + \frac{1}{2!}[t(-1/2), A_{1/2}] \qquad (4.21)
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_x t(-1/2) &= [t(-3/2), E^{(1)}] + \frac{1}{2!}[t(-1/2), [t(-1), E^{(1)}]] \qquad (4.22) \\
&+ \frac{1}{2!}[t(-1), A_{1/2}] + \frac{1}{3!}[t(-1/2), [t(-1/2), A_{1/2}]],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_x t(-1) &= \frac{1}{2!}\partial_x t^2(-1/2) - t(-1/2)\partial_x t(-1/2) \\
&+ [t(-2), E^{(1)}] + \frac{1}{2!}[t(-1/2), [t(-3/2), E^{(1)}]] \\
&+ \frac{1}{2!}[t(-1), [t(-1), E^{(1)}]] + \frac{1}{2!}[t(-3/2), A_{1/2}] \\
&+ \frac{1}{3!}[t(-1/2), [t(-1/2), [t(-1), E^{(1)}]]] \\
&+ \frac{1}{3!}[t(-1/2), [t(-1), A_{1/2}]] + \frac{1}{3!}[t(-1), [t(-1/2), A_{1/2}]] \\
&+ \frac{1}{4!}[t(-1/2), [t(-1/2), [t(-1/2), A_{1/2}]]].
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Em seguida, definimos os campos

$$
\begin{aligned}
t(-1/2) &= \alpha_1 G_2^{(-1/2)} + \alpha_2 F_1^{-1/2}, \\
t(-1) &= \beta_1 M_1^{(-1)} + \beta_2 K_1^{(-1)} + \beta_3 K_2^{(-1)}, \\
t(-3/2) &= \gamma_1 G_1^{(-3/2)} + \gamma_2 F_2^{(-3/2)}, \\
t(-2) &= \delta_1 M_2^{(-2)},
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

onde $\alpha_1 = \alpha_1(x, t_3)$, $\alpha_2 = \alpha_2(x, t_3)$, $\beta_1 = \beta_1(x, t_3)$, ...etc. Substituindo os campos definidos acima e os campo físicos dados em (3.12) nas eqs. (4.20)-(4.23), obtemos o seguinte sistema de equações

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi} &= -2\alpha_1, \\
u &= 2\beta_1 + \alpha_2\bar{\psi}, \\
\eta &= \beta_3 - \beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\bar{\psi}, \\
\partial_x\alpha_1 &= -2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1 + \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3)\bar{\psi}, \\
\partial_x\alpha_2 &= \alpha_1\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_1\bar{\psi} + \frac{1}{3}\alpha_1\alpha_2\bar{\psi},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_x\beta_1 &= \alpha_1\partial_x\alpha_2+\alpha_2\partial_x\alpha_1+2\delta_1+2\alpha_2\gamma_1-2\beta_2\beta_1+\gamma_2\bar{\psi}, \\
&- \frac{2}{3}\beta_2\alpha_2\bar{\psi}+\frac{1}{3}\alpha_1\beta_1\bar{\psi}-\frac{1}{3}(\beta_2+\beta_3)\alpha_2\bar{\psi}, \\
\\
\partial_x\beta_2 &= -\alpha_1\partial_x\alpha_1-\alpha_2\partial_x\alpha_2-2\beta_1^2-\gamma_1\bar{\psi}-\frac{2}{3}\beta_1\alpha_2\bar{\psi} \\
&+ \frac{1}{3}(\beta_2+\beta_3)\alpha_1\bar{\psi}-\frac{1}{3}\alpha_2\beta_1\bar{\psi}-2\alpha_1\gamma_1, \\
\\
\partial_x\beta_3 &= \alpha_1\partial_x\alpha_1-\alpha_2\partial_x\alpha_2+\gamma_1\bar{\psi}-\frac{4}{3}\alpha_1\alpha_2\beta_1 \\
&- \frac{1}{3}(\beta_2+\beta_3)\alpha_1\bar{\psi}-\frac{1}{3}\alpha_2\beta_1\bar{\psi}+2\alpha_1\gamma_1.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Resolvendo o sistema acima para α_1, α_2, β_1, β_2 e β_3, obtemos

$$
t(-1/2) = -\frac{1}{2}\bar{\psi}G_2^{(-1/2)}-\frac{1}{2}\chi F_1^{(-1/2)}, \tag{4.26}
$$

$$
t(-1) = \beta_1 M_1^{(-1)}+\beta_2 K_1^{(-1)}+\beta_3 K_2^{(-1)}, \tag{4.27}
$$

$$
2\partial_x\eta = u^2-\partial_x u-\bar{\psi}\partial_x\bar{\psi}, \tag{4.28}
$$

onde

$$
\chi = \int(u\bar{\psi})dx, \quad \rightarrow \quad \partial_x\chi = u\bar{\psi} \tag{4.29}
$$

$$
\beta_1 = \frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\bar{\psi}\chi\right), \tag{4.30}
$$

$$
\beta_2 = \frac{1}{4}\int(\bar{\psi}\partial_x\bar{\psi}-\chi\partial_x\chi)dx-\frac{1}{2}\int u^2dx, \tag{4.31}
$$

$$
\beta_3 = -\frac{1}{4}\int(\bar{\psi}\partial_x\bar{\psi}+\chi\partial_x\chi)dx. \tag{4.32}
$$

Agora estamos preparados para construir as funções τ. Da a eq. (4.11), temos

$$
\Theta_-^{-1}\Theta_+ = e^{-t(-1/2)-t(-1)-\cdots}B\,e^{v(1/2)+v(1)+\cdots} = T_{vac}\,g\,T_{vac}^{-1}, \tag{4.33}
$$

onde

$$\Theta_- = e^{t(-1/2)+t(-1)+t(-3/2)+\dots}, \tag{4.34}$$
$$\Theta_+ = B\, e^{v(1/2)+v(1)+v(3/2)+\dots}, \tag{4.35}$$

e

$$B = e^{\phi M_2^{(0)}+\nu\hat{c}}. \tag{4.36}$$

De acordo com a eq. (1.30), temos

$$A_0 = -\partial_x B\, B^{-1}, \tag{4.37}$$

de modo que devemos ter

$$u = -\partial_x \phi, \qquad \eta = -\partial_x \nu. \tag{4.38}$$

Usaremos em seguida o estado de peso mais alto da representação de $\tilde{sl}(2,1)$, dados por $\mid \lambda_1\rangle$ e $\mid \lambda_0\rangle$ os quais satisfazem

$$\hat{c} \mid \lambda_i\rangle = \mid \lambda_i\rangle, \tag{4.39}$$
$$M_2^{(0)} \mid \lambda_i\rangle = \delta_{i,1} \mid \lambda_i\rangle, \tag{4.40}$$
$$h^{(n/2)} \mid \lambda_i\rangle = 0, \qquad n = 1,2,3,... \tag{4.41}$$

onde $i = 0,1$ e $h^{(n/2)} \in \tilde{sl}(2,1)$ possui grau positivo $(n/2)$. Usaremos também os estados $\langle\lambda_1 \mid$ e $\langle\lambda_0 \mid$ que satisfazem

$$\langle\lambda_i \mid \hat{c} = \langle\lambda_i \mid, \tag{4.42}$$
$$\langle\lambda_i \mid M_2^{(0)} = \langle\lambda_i \mid \delta_{i,1}, \tag{4.43}$$
$$\langle\lambda_i \mid h^{(-n/2)} = 0, \qquad n = 1,2,3,... \tag{4.44}$$

onde $i = 0,1$ e $h^{(-n/2)} \in \tilde{sl}(2,1)$ possui grau negativo $(-n/2)$.
Aplicando $\mid \lambda_i\rangle$ a direita e $\langle\lambda_i \mid$ a esquerda de (4.33), obtemos

$$\tau_0 = e^{\nu} = \langle\lambda_0 \mid T_{vac}\, g\, T_{vac}^{-1} \mid \lambda_0\rangle, \tag{4.45}$$
$$\tau_1 = e^{\phi+\nu} = \langle\lambda_1 \mid T_{vac}\, g\, T_{vac}^{-1} \mid \lambda_1\rangle. \tag{4.46}$$

Agora, aplicamos $\langle\lambda_i \mid G_1^{(1/2)}$ a esquerda e $\mid \lambda_i\rangle$ a direita de (4.33):

$$\begin{aligned} \langle\lambda_i \mid G_1^{(1/2)}\Theta_-^{-1}\Theta_+ \mid \lambda_i\rangle &= \langle\lambda_i \mid G_1^{(1/2)} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} t(-n/2)} \mid \lambda_i\rangle e^{\phi\delta_{i,1}+\nu} \qquad (4.47)\\ &= \langle\lambda_i \mid G_1^{(1/2)} T_{vac}\, g\, T_{vac}^{-1} \mid \lambda_i\rangle. \qquad (4.48)\end{aligned}$$

Usando a (4.26), obtemos

$$\begin{aligned} \langle\lambda_i \mid G_1^{(1/2)} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} t(-n/2)} \mid \lambda_i\rangle &= -\langle\lambda_i \mid G_1^{(1/2)} t(-1/2) \mid \lambda_i\rangle \qquad (4.49)\\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi} + (1-2\delta_{i,0})\frac{1}{2}\chi. \qquad (4.50)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}-\chi)e^{\nu} = \langle\lambda_0 \mid G_1^{(1/2)} T_{vac}\, g\, T_{vac}^{-1} \mid \lambda_0\rangle, \qquad (4.51)\\ \tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}+\chi)e^{\phi+\nu} = \langle\lambda_1 \mid G_1^{(1/2)} T_{vac}\, g\, T_{vac}^{-1} \mid \lambda_1\rangle. \qquad (4.52)\end{aligned}$$

A partir de (4.38), (4.45), (4.46), (4.51) e (4.52), obtemos os campos u, $\bar{\psi}$ e η em termos das funções τ

$$\begin{aligned} u &= -\left(\frac{\partial_x\tau_1}{\tau_1} - \frac{\partial_x\tau_0}{\tau_0}\right), \qquad (4.53)\\ \bar{\psi} &= \frac{\tau_3}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_0}, \qquad (4.54)\\ \eta &= -\frac{\partial_x\tau_0}{\tau_0}. \qquad (4.55)\end{aligned}$$

De posse das soluções em termos das funções τ, precisamos agora determiná-las explicitamente e para isso usaremos as funções de vértice dadas a seguir:

$$\begin{aligned} F_-(\gamma) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma^{-(2n+1)} M_1^{(2n+1)} + \gamma^{-2n}(M_2^{(2n)} - \frac{1}{2}\delta_{n,0}\hat{c}), \qquad (4.56)\\ F_+(\gamma) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma^{-2n} G_1^{(2n+1/2)} + \gamma^{-(2n+1)} G_2^{(2n+3/2)}. \qquad (4.57)\end{aligned}$$

A função $F_-(\gamma)$ é uma função de vértice bosônica, uma vez que ela é escrita em termos de geradores bosônicos, enquanto que $F_+(\gamma)$ é uma função de vértice fermiônica já que ela é escrita em termos de geradores fermiônicos. Elas satisfazem a seguinte relação:

$$[E^{(2n+1)}, F_{\pm}(\gamma)] = \pm 2\gamma^{(2n+1)} F_{\pm}(\gamma), \tag{4.58}$$

onde

$$E^{(2n+1)} = K_1^{(2n+1)} + K_2^{(2n+1)}. \tag{4.59}$$

4.3 Solução para 1-vértice fermiônico

Seguindo o procedimento dado em (4.13), a solução para 1-sóliton pode ser obtida colocando

$$g = e^{c_1 F_+(\gamma_1)}, \tag{4.60}$$

onde c_1 é um parâmetro fermiônio constante ($c_1^2 = 0$).
Segue que

$$T_{vac}\, g\, T_{vac}^{-1} = T_{vac}(1 + c_1 F_+(\gamma_1))T_{vac}^{-1} = 1 + c_1 T_{vac} F_+(\gamma_1) T_{vac}^{-1}. \tag{4.61}$$

Usando a eq. (4.16), (4.58) e a relação

$$e^L T e^{-L} = T + [L, T] + \frac{1}{2!}[L, [L, T]] + \frac{1}{3!}[L, [L, [L, T]]] + \cdots, \tag{4.62}$$

obtemos

$$T_{vac} F_+(\gamma_1) T_{vac}^{-1} = \rho_1^- F_+(\gamma_1) \tag{4.63}$$

onde

$$\rho_1^- = e^{-2\gamma_1 x - 2\gamma_1^3 t_3}. \tag{4.64}$$

Assim, as funções τ ficam:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} = 1 + c_1 \rho_1^- \langle \lambda_0 \mid F_+(\gamma_1) \mid \lambda_0 \rangle, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} = 1 + c_1 \rho_1^- \langle \lambda_1 \mid F_+(\gamma_1) \mid \lambda_1 \rangle, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \chi) e^{\nu} = c_1 \rho_1^- \langle \lambda_0 \mid G_1^{(1/2)} F_+(\gamma_1) \mid \lambda_0 \rangle, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \chi) e^{\phi+\nu} = c_1 \rho_1^- \langle \lambda_1 \mid G_1^{(1/2)} F_+(\gamma_1) \mid \lambda_1 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Calculando os elementos de matriz, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \lambda_i \mid F_+(\gamma_1) \mid \lambda_i \rangle &= 0, \\ \langle \lambda_i \mid G_1^{(1/2)} F_+(\gamma_1) \mid \lambda_i \rangle &= \gamma_1 \qquad (i = 0, 1),\end{aligned} \tag{4.66}$$

e as soluções ficam:

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ \bar{\psi} &= c_1 2\gamma_1 \rho_1^-, \\ \eta &= 0. \end{aligned} \tag{4.67}$$

O cálculo para a solução de um único vértice é geralmente simples. Quando desejamos obter soluções com um número maior de vértices, o cálculo dos elementos de matriz é em geral muito trabalhoso. Por isso, na prática, calculamos os elementos de matriz emplementando um programa no *mathematica*. As funções τ (4.45), (4.46), (4.51) e (4.52), fornecem um *ansatz* na forma

$$\tau_i = \sum_j (\prod_k \rho_k)_j M_j, \tag{4.68}$$

onde $\rho_k = \rho(\gamma_k)$ são exponenciais do tipo (4.64), e os coeficientes M_j são os elementos de matriz os quais desejamos determinar. Para determiná-los, escrevemos as equações de movimento (3.20) e (3.21) e as equações (4.28) e (4.29), todas em termos das funções τ. O programa encarrega de substituir o ansatz (4.68) neste sistema de equações, agrupando os coeficientes de mesmo $(\prod_k \rho_k)_j$ e resolvendo-os para os M_j em questão obtendo $M_j = M_j(\gamma)$. O processo é repetido sucessivamente para as ordens seguintes de $(\prod_k \rho_k)_j$ até que todos os M_j estejam determinados. Nas seções seguintes, apresentaremos as soluções que obtivemos seguindo este procedimento.

4.4 Solução para 1-vértice bosônico

Colocamos

$$g = e^{b_1 F_-(\gamma_1)} = 1 + b_1 F_-(\gamma_1) \Rightarrow T_{vac} g T_{vac} = 1 + b_1 \rho_1^+ F_-(\gamma_1),$$

onde b_1 é um parâmetro bosônico constante e

$$\rho_1^+ = e^{2\gamma_1 x + 2\gamma_1^3 t_3}.$$

As funções τ ficam

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} = 1 + b_1\rho_1^+ \langle \lambda_0 \mid F_-(\gamma_1) \mid \lambda_0\rangle, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} = 1 + b_1\rho_1^+ \langle \lambda_1 \mid F_-(\gamma_1) \mid \lambda_1\rangle, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \chi)e^{\nu} = b_1\rho_1^+ \langle \lambda_0 \mid G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) \mid \lambda_0\rangle, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \chi)e^{\phi+\nu} = b_1\rho_1^+ \langle \lambda_1 \mid G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) \mid \lambda_1\rangle.
\end{aligned}$$

Calculando os elementos de matriz, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_i \mid F_-(\gamma_1) \mid \lambda_i\rangle &= (1 - 2\delta_{i,0})\frac{1}{2}, \\
\langle \lambda_i \mid G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) \mid \lambda_i\rangle &= 0, \qquad (i = 0, 1)
\end{aligned}$$

e as soluções ficam

$$\begin{aligned}
u &= -b_1\gamma_1\rho_1^+ \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}b_1\rho_1^+} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}b_1\rho_1^+} \right), \\
\bar{\psi} &= 0, \\
\eta &= \frac{b_1\gamma_1\rho_1^+}{1 - \frac{1}{2}b_1\rho_1^+}.
\end{aligned}$$

4.5 Solução para 1-vértice bosônico + 1-vértice fermiônico

Colocamos

$$g = e^{b_1 F_-(\gamma_1)} e^{c_1 F_+(\gamma_2)}. \tag{4.69}$$

As funções τ para este g, são

$$\tau_0 = e^{\nu}$$

$$\begin{aligned}
&= 1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + b_1c_1\rho_1^+\rho_2^-\langle\lambda_0 \mid F_-(\gamma_1)F_+(\gamma_2)\mid\lambda_0\rangle,\\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu}\\
&= 1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + b_1c_1\rho_1^+\rho_2^-\langle\lambda_1 \mid F_-(\gamma_1)F_+(\gamma_2)\mid\lambda_1\rangle,\\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}-\chi)e^{\nu}\\
&= c_1\rho_2^-\gamma_2 + b_1c_1\rho_1^+\rho_2^-\langle\lambda_0 \mid G_1^{(1/2)}F_-(\gamma_1)F_+(\gamma_2)\mid\lambda_0\rangle,\\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}+\chi)e^{\phi+\nu}\\
&= c_1\rho_2^-\gamma_2 + b_1c_1\rho_1^+\rho_2^-\langle\lambda_1 \mid G_1^{(1/2)}F_-(\gamma_1)F_+(\gamma_2)\mid\lambda_1\rangle. \qquad (4.70)
\end{aligned}$$

Daqui por diante, denotaremos c_i para os coeficientes fermiônicos, b_i para os coeficientes bosônicos e

$$\rho_i^{\pm} = e^{\pm(2\gamma_i x + 2\gamma_i^3 t_3)}. \qquad (4.71)$$

Os elementos de matriz calculados, foram

$$\begin{aligned}
\langle\lambda_i \mid F_-(\gamma_1)F_+(\gamma_2)\mid\lambda_i\rangle &= 0,\\
\langle\lambda_i \mid G_1^{(1/2)}F_-(\gamma_1)F_+(\gamma_2)\mid\lambda_i\rangle &= (1-2\delta_{i,1})\sigma_{1,2} \qquad (i=0,1),\\
\sigma_{1,2} &= \frac{\gamma_2}{2}\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{(\gamma_1-\gamma_2)}. \qquad (4.72)
\end{aligned}$$

Obtivemos as seguintes soluções

$$\begin{aligned}
u &= -b_1\gamma_1\rho_1^+\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+}\right),\\
\bar{\psi} &= \frac{c_1\rho_2^-\gamma_2 - b_1c_1\rho_1^+\rho_2^-\sigma_{1,2}}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+}+\frac{c_1\rho_2^-\gamma_2 + b_1c_1\rho_1^+\rho_2^-\sigma_{1,2}}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+},\\
\eta &= \frac{b_1\gamma_1\rho_1^+}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+}. \qquad (4.73)
\end{aligned}$$

4.6 Solução para 2-vértices bosônicos

Colocamos

$$g = e^{b_1 F_-(\gamma_1)} e^{b_2 F_-(\gamma_2)}. \tag{4.74}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} = 1 - \frac{1}{2} b_1 \rho_1^+ - \frac{1}{2} b_2 \rho_2^+ + b_1 b_2 \rho_1^+ \rho_2^+ \langle \lambda_0 \mid F_-(\gamma_1) F_-(\gamma_2) \mid \lambda_0 \rangle, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} = 1 + \frac{1}{2} b_1 \rho_1^+ + \frac{1}{2} b_2 \rho_2^+ + b_1 b_2 \rho_1^+ \rho_2^+ \langle \lambda_1 \mid F_-(\gamma_1) F_-(\gamma_2) \mid \lambda_1 \rangle, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \chi) e^{\nu} = b_1 b_2 \rho_1^+ \rho_2^+ \langle \lambda_0 \mid G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) F_-(\gamma_2) \mid \lambda_0 \rangle, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \chi) e^{\phi+\nu} = b_1 b_2 \rho_1^+ \rho_2^+ \langle \lambda_1 \mid G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) F_-(\gamma_2) \mid \lambda_1 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Calculando os elementos de matriz, encontramos

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_i \mid F_-(\gamma_1) F_-(\gamma_2) \mid \lambda_i \rangle &= \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} = \alpha_{1,2}, \\
\langle \lambda_i \mid G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) F_-(\gamma_2) \mid \lambda_i \rangle &= 0 \qquad (i = 0, 1).
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Assim, as soluções ficam

$$\begin{aligned}
u &= \left(\frac{-b_1 \gamma_1 \rho_1^+ - b_2 \gamma_2 \rho_2^+ + b_1 b_2 2(\gamma_1 + \gamma_2) \rho_1^+ \rho_2^+ \alpha_{1,2}}{1 - \frac{1}{2} b_1 \rho_1^+ - \frac{1}{2} b_2 \rho_2^+ + b_1 b_2 \rho_1^+ \rho_2^+ \alpha_{1,2}} \right) \\
&- \left(\frac{b_1 \gamma_1 \rho_1^+ b_2 \gamma_2 \rho_2^+ + b_1 b_2 2(\gamma_1 + \gamma_2) \rho_1^+ \rho_2^+ \alpha_{1,2}}{1 + \frac{1}{2} b_1 \rho_1^+ + \frac{1}{2} b_2 \rho_2^+ + b_1 b_2 \rho_1^+ \rho_2^+ \alpha_{1,2}} \right), \\
\bar{\psi} &= 0, \\
\eta &= - \left(\frac{-b_1 \gamma_1 \rho_1^+ - b_2 \gamma_2 \rho_2^+ + b_1 b_2 2(\gamma_1 + \gamma_2) \rho_1^+ \rho_2^+ \alpha_{1,2}}{1 - \frac{1}{2} b_1 \rho_1^+ - \frac{1}{2} b_2 \rho_2^+ + b_1 b_2 \rho_1^+ \rho_2^+ \alpha_{1,2}} \right).
\end{aligned} \tag{4.77}$$

4.7 Solução para 2-vértices fermiônicos

Colocamos

$$g = e^{c_1 F_+(\gamma_1)} e^{c_2 F_+(\gamma_2)}, \tag{4.78}$$

As funções τ ficam

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} \\
&= 1 + c_1 c_2 \rho_1^- \rho_2^- \langle \lambda_0 \mid F_+(\gamma_1) F_+(\gamma_2) \mid \lambda_0 \rangle, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} \\
&= 1 + c_1 c_2 \rho_1^- \rho_2^- \langle \lambda_1 \mid F_+(\gamma_1) F_+(\gamma_2) \mid \lambda_1 \rangle, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \chi) e^{\nu} \\
&= c_1 \gamma_1 \rho_1^- + c_2 \gamma_2 \rho_2^- \\
&+ c_1 c_2 \rho_1^- \rho_2^- \langle \lambda_0 \mid G_1^{(1/2)} F_+(\gamma_1) F_+(\gamma_2) \mid \lambda_0 \rangle, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \chi) e^{\phi+\nu} \\
&= c_1 \gamma_1 \rho_1^- + c_2 \gamma_2 \rho_2^- \\
&+ c_1 c_2 \rho_1^- \rho_2^- \langle \lambda_1 \mid G_1^{(1/2)} F_+(\gamma_1) F_+(\gamma_2) \mid \lambda_1 \rangle. \qquad (4.79)
\end{aligned}$$

Calculando os elementos de matriz, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_i \mid F_+(\gamma_1) F_+(\gamma_2) \mid \lambda_i \rangle &= \gamma_1 \gamma_2 \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} = \beta_{1,2}, \\
\langle \lambda_i \mid G_1^{(1/2)} F_+(\gamma_1) F_+(\gamma_2) \mid \lambda_i \rangle &= 0, \qquad (i = 0, 1). \qquad (4.80)
\end{aligned}$$

Assim, as soluções ficam

$$\begin{aligned}
u &= 0, \\
\bar{\psi} &= c_1 2 \gamma_1 \rho_1^- + c_2 2 \gamma_2 \rho_2^-, \\
\eta &= c_1 c_2 2(\gamma_1 + \gamma_2) \rho_1^- \rho_2^- \beta_{1,2}. \qquad (4.81)
\end{aligned}$$

4.8 Solução para 1-vértice bosônico + 2-vértices fermiônicos

Colocamos

$$g = e^{b_1 F_-(\gamma_1)} e^{c_1 F_+(\gamma_2)} e^{c_2 F_+(\gamma_3)}, \qquad (4.82)$$

e as funções τ ficam

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} \\
&= 1 - \frac{1}{2} b_1 \rho_1^+ + c_1 c_2 \rho_2^- \rho_3^- \beta_{2,3} \\
&+ b_1 c_1 c_2 \rho_1^+ \rho_2^- \rho_3^- \langle \lambda_0 \mid F_-(\gamma_1) F_+(\gamma_2) F_+(\gamma_3) \mid \lambda_0 \rangle, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} \\
&= 1 + \frac{1}{2} b_1 \rho_1^+ + c_1 c_2 \rho_2^- \rho_3^- \beta_{2,3} \\
&+ b_1 c_1 c_2 \rho_1^+ \rho_2^- \rho_3^- \langle \lambda_1 \mid F_-(\gamma_1) F_+(\gamma_2) F_+(\gamma_3) \mid \lambda_1 \rangle, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2} (\bar{\psi} - \chi) e^{\nu} \\
&= c_1 \gamma_2 \rho_2^- + c_2 \gamma_3 \rho_3^- + b_1 c_1 \rho_1^+ \rho_2^- \sigma_{1,2} + b_1 c_2 \rho_1^+ \rho_3^- \sigma_{1,3} \\
&+ b_1 c_1 c_2 \rho_1^+ \rho_2^- \rho_3^- \langle \lambda_0 \mid G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) F_+(\gamma_2) F_+(\gamma_3) \mid \lambda_0 \rangle, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2} (\bar{\psi} + \chi) e^{\phi+\nu} \\
&= c_1 \gamma_2 \rho_2^- + c_2 \gamma_3 \rho_3^- - b_1 c_1 \rho_1^+ \rho_2^- \sigma_{1,2} - b_1 c_2 \rho_1^+ \rho_3^- \sigma_{1,3} \\
&+ b_1 c_1 c_2 \rho_1^+ \rho_2^- \rho_3^- \langle \lambda_1 \mid G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) F_+(\gamma_2) F_+(\gamma_3) \mid \lambda_1 \rangle. \qquad (4.83)
\end{aligned}$$

Calculando os elementos de matriz, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_i \mid F_-(\gamma_1) F_+(\gamma_2) F_+(\gamma_3) \mid \lambda_i \rangle &= (1 - 2\delta_{i,0}) \delta_{1,2,3} \qquad (i = 0, 1), \\
\langle \lambda_i \mid G_1^{(1/2)} F_-(\gamma_1) F_+(\gamma_2) F_+(\gamma_3) \mid \lambda_i \rangle &= 0, \qquad (4.84)
\end{aligned}$$

onde

$$\delta_{1,2,3} = \frac{\gamma_2 \gamma_3}{2} \frac{(\gamma_2 - \gamma_3)}{(\gamma_2 + \gamma_3)^2} \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \frac{(\gamma_1 + \gamma_3)}{(\gamma_1 - \gamma_3)}. \qquad (4.85)$$

Assim, as soluções ficam

$$\begin{aligned}
u &= \frac{-b_1 \gamma_1 \rho_1^+ - c_1 c_2 2(\gamma_2 + \gamma_3) \rho_2^- \rho_3^- \beta_{2,3}}{1 - \frac{1}{2} b_1 \rho_1^+} \\
&- \frac{b_1 c_1 c_2 2(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \rho_1^+ \rho_2^- \rho_3^- \delta_{1,2,3}}{1 - \frac{1}{2} b_1 \rho_1^+}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\frac{-b_1\gamma_1\rho_1^+}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+}\right)\left(\frac{c_1c_2\rho_2^-\rho_3^-\beta_{2,3} - b_1c_1c_2\rho_1^+\rho_2^-\rho_3^-\delta_{1,2,3}}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+}\right) \\
&- \frac{\left(b_1\gamma_1\rho_1^+ - c_1c_2 2(\gamma_2+\gamma_3)\rho_2^-\rho_3^-\beta_{2,3}\right)}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+} \\
&- \frac{b_1c_1c_2 2(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3)\rho_1^+\rho_2^-\rho_3^-\delta_{1,2,3}}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+} \\
&+ \left(\frac{b_1\gamma_1\rho_1^+}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+}\right)\left(\frac{c_1c_2\rho_2^-\rho_3^-\beta_{2,3} + b_1c_1c_2\rho_1^+\rho_2^-\rho_3^-\delta_{1,2,3}}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi} &= \frac{c_1\gamma_2\rho_2^- + c_2\gamma_3\rho_3^- - b_1c_1\rho_1^+\rho_2^-\sigma_{1,2} - b_1c_2\rho_1^+\rho_3^-\sigma_{1,3}}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+} \\
&+ \frac{c_1\gamma_2\rho_2^- + c_2\gamma_3\rho_3^- + b_1c_1\rho_1^+\rho_2^-\sigma_{1,2} + b_1c_2\rho_1^+\rho_3^-\sigma_{1,3}}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{b_1\gamma_1\rho_1^+ + c_1c_2 2(\gamma_2+\gamma_3)\rho_2^-\rho_3^-\beta_{2,3}}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + c_1c_2\rho_2^-\rho_3^-\beta_{2,3} - b_1c_1c_2\rho_1^+\rho_2^-\rho_3^-\delta_{1,2,3}} \\
&+ \frac{b_1c_1c_2 2(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3)\rho_1^+\rho_2^-\rho_3^-\delta_{1,2,3}}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + c_1c_2\rho_2^-\rho_3^-\beta_{2,3} - b_1c_1c_2\rho_1^+\rho_2^-\rho_3^-\delta_{1,2,3}}.
\end{aligned} \tag{4.86}
$$

4.9 Solução para 2-vértices bosônicos + 1-vértice fermiônico

Colocamos

$$
g = e^{b_1F_-(\gamma_1)}e^{b_2F_-(\gamma_2)}e^{c_1F_+(\gamma_3)}, \tag{4.87}
$$

e as funções τ são

$$
\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} \\
&= 1 - \frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2} \\
&+ b_1b_2c_1\rho_1^+\rho_2^+\rho_3^-\langle\lambda_0 \mid F_-(\gamma_1)F_-(\gamma_2)F_+(\gamma_3) \mid \lambda_0\rangle, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2} \\
&+ b_1b_2c_1\rho_1^+\rho_2^+\rho_3^-\langle\lambda_1 \mid F_-(\gamma_1)F_-(\gamma_2)F_+(\gamma_3) \mid \lambda_1\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}-\chi)e^{\nu} \\
&= c_1\gamma_3\rho_3^- + b_1c_1\rho_1^+\rho_3^-\sigma_{1,3} + b_2c_1\rho_2^+\rho_3^-\sigma_{2,3} \\
&+ b_1b_2c_1\rho_1^+\rho_2^+\rho_3^-\langle\lambda_0 \mid G_1^{(1/2)}F_-(\gamma_1)F_-(\gamma_2)F_+(\gamma_3) \mid \lambda_0\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}+\chi)e^{\phi+\nu} \\
&= c_1\gamma_3\rho_3^- - b_1c_1\rho_1^+\rho_3^-\sigma_{1,3} - b_2c_1\rho_2^+\rho_3^-\sigma_{2,3} \\
&+ b_1b_2c_1\rho_1^+\rho_2^+\rho_3^-\langle\lambda_1 \mid G_1^{(1/2)}F_-(\gamma_1)F_-(\gamma_2)F_+(\gamma_3) \mid \lambda_1\rangle. \qquad (4.88)
\end{aligned}
$$

Calculando os elementos de matriz, obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle\lambda_i \mid F_-(\gamma_1)F_-(\gamma_2)F_+(\gamma_3) \mid \lambda_i\rangle &= 0, \\
\langle\lambda_i \mid G_1^{(1/2)}F_-(\gamma_1)F_-(\gamma_2)F_+(\gamma_3) \mid \lambda_i\rangle &= \lambda_{1,2,3}, \qquad (4.89)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\lambda_{1,2,3} = \frac{\gamma_3}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2}\frac{(\gamma_1+\gamma_3)}{(\gamma_1-\gamma_3)}\frac{(\gamma_2+\gamma_3)}{(\gamma_2-\gamma_3)}. \qquad (4.90)
$$

E as soluções ficam

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\left(-b_1\gamma_1\rho_1^+ - b_2\gamma_2\rho_2^+ + b_1b_2 2(\gamma_1+\gamma_2)\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}} \\
&- \frac{\left(b_1\gamma_1\rho_1^+ + b_2\gamma_2\rho_2^+ + b_1b_2 2(\gamma_1+\gamma_2)\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}\right)}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi} &= \frac{c_1\gamma_3\rho_3^- - b_1c_1\rho_1^+\rho_3^-\sigma_{1,3} - b_2c_1\rho_2^+\rho_3^-\sigma_{2,3} + b_1b_2c_1\rho_1^+\rho_2^+\rho_3^-\lambda_{1,2,3}}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}} \\
&+ \frac{c_1\gamma_3\rho_3^- + b_1c_1\rho_1^+\rho_3^-\sigma_{1,3} + b_2c_1\rho_2^+\rho_3^-\sigma_{2,3} + b_1b_2c_1\rho_1^+\rho_2^+\rho_3^-\lambda_{1,2,3}}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}},
\end{aligned}
$$

$$\eta = -\frac{\left(-b_1\gamma_1\rho_1^+ - b_2\gamma_2\rho_2^+ + b_1b_2 2(\gamma_1+\gamma_2)\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}}. \tag{4.91}$$

4.10 Solução para 2-vértices bosônicos + 2-vértices fermiônicos

Colocamos

$$g = e^{b_1F_-(\gamma_1)}e^{b_2F_-(\gamma_2)}e^{c_1F_+(\gamma_3)}e^{c_2F_+(\gamma_4)}. \tag{4.92}$$

E as funções τ ficam

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} \\
&= 1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2} \\
&+ c_1c_2\rho_3^-\rho_4^-\left(\beta_{3,4} - b_1\rho_1^+\delta_{1,3,4} - b_2\rho_2^+\delta_{2,3,4} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\theta_{1,2,3,4}\right), \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} \\
&= 1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2} \\
&+ c_1c_2\rho_3^-\rho_4^-\left(\beta_{3,4} + b_1\rho_1^+\delta_{1,3,4} + b_2\rho_2^+\delta_{2,3,4} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\theta_{1,2,3,4}\right), \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}-\chi)e^{\nu} \\
&= c_1\rho_3^-\left(\gamma_3 + b_1\rho_1^+\sigma_{1,3} + b_2\rho_2^+\sigma_{2,3} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\lambda_{1,2,3}\right) \\
&+ c_2\rho_4^-\left(\gamma_4 + b_1\rho_1^+\sigma_{1,4} + b_2\rho_2^+\sigma_{2,4} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\lambda_{1,2,4}\right), \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}+\chi)e^{\phi+\nu} \\
&= c_1\rho_3^-\left(\gamma_3 - b_1\rho_1^+\sigma_{1,3} - b_2\rho_2^+\sigma_{2,3} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\lambda_{1,2,3}\right) \\
&+ c_2\rho_4^-\left(\gamma_4 - b_1\rho_1^+\sigma_{1,4} - b_2\rho_2^+\sigma_{2,4} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\lambda_{1,2,4}\right),
\end{aligned} \tag{4.93}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1,2} &= \frac{1}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2},\\
\beta_{3,4} &= \gamma_3\gamma_4\frac{(\gamma_3-\gamma_4)}{(\gamma_3+\gamma_4)^2},\\
\delta_{j,3,4} &= \frac{\gamma_3\gamma_4}{2}\frac{(\gamma_3-\gamma_4)}{(\gamma_3+\gamma_4)^2}\frac{(\gamma_j+\gamma_3)}{(\gamma_j-\gamma_3)}\frac{(\gamma_j+\gamma_4)}{(\gamma_j-\gamma_4)}, \qquad (j=1,2)\\
\sigma_{j,k} &= \frac{\gamma_3}{2}\frac{(\gamma_j+\gamma_k)}{(\gamma_j-\gamma_k)}, \qquad (j=1,2) \qquad (k=3,4)\\
\lambda_{1,2,j} &= \frac{\gamma_j}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2}\frac{(\gamma_1+\gamma_j)}{(\gamma_1-\gamma_j)}\frac{(\gamma_2+\gamma_j)}{(\gamma_2-\gamma_j)}, \qquad (j=3,4)\\
\theta_{1,2,3,4} &= \frac{\gamma_3\gamma_4}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2}\frac{(\gamma_1+\gamma_3)}{(\gamma_1-\gamma_3)}\frac{(\gamma_2+\gamma_3)}{(\gamma_2-\gamma_3)}\frac{(\gamma_3-\gamma_4)}{(\gamma_3+\gamma_4)^2}\frac{(\gamma_1+\gamma_4)}{(\gamma_1-\gamma_4)}\frac{(\gamma_2+\gamma_4)}{(\gamma_2-\gamma_4)}.
\end{aligned}
\tag{4.94}
$$

As soluções são dadas a seguir

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\left(-b_1\gamma_1\rho_1^+ - b_2\gamma_2\rho_2^+ + b_1b_2 2(\gamma_1+\gamma_2)\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}}\\
&+ c_1c_2\frac{\rho_3^-\rho_4^-\left(\beta_{3,4} - b_1\rho_1^+\delta_{1,3,4} - b_2\rho_2^+\delta_{2,3,4} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\theta_{1,2,3,4}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}}\\
&- c_1c_2\frac{\left(-b_1\gamma_1\rho_1^+ - b_2\gamma_2\rho_2^+ + b_1b_2 2(\gamma_1+\gamma_2)\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}}\times\\
&\times \frac{\rho_3^-\rho_4^-\left(\beta_{3,4} - b_1\rho_1^+\delta_{1,3,4} - b_2\rho_2^+\delta_{2,3,4} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\theta_{1,2,3,4}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}}\\
&- \frac{\left(b_1\gamma_1\rho_1^+ + b_2\gamma_2\rho_2^+ + b_1b_2 2(\gamma_1+\gamma_2)\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}\right)}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}}\\
&- c_1c_2\frac{\rho_3^-\rho_4^-\left(\beta_{3,4} + b_1\rho_1^+\delta_{1,3,4} + b_2\rho_2^+\delta_{2,3,4} + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\theta_{1,2,3,4}\right)}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad c_1 c_2 \frac{\left(b_1\gamma_1\rho_1^+ + b_2\gamma_2\rho_2^+ + b_1 b_2 2(\gamma_1+\gamma_2)\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}\right)}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}} \times \\
&\times \quad \frac{\rho_3^-\rho_4^-\left(\beta_{3,4} + b_1\rho_1^+\delta_{1,3,4} + b_2\rho_2^+\delta_{2,3,4} + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\theta_{1,2,3,4}\right)}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi} \quad &= \quad \frac{c_1\rho_3^-\left(\gamma_3 - b_1\rho_1^+\sigma_{1,3} - b_2\rho_2^+\sigma_{2,3} + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\lambda_{1,2,3}\right)}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}} \\
&+ \quad \frac{c_2\rho_4^-\left(\gamma_4 - b_1\rho_1^+\sigma_{1,4} - b_2\rho_2^+\sigma_{2,4} + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\lambda_{1,2,4}\right)}{1+\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ + \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}} \\
&+ \quad \frac{c_1\rho_3^-\left(\gamma_3 + b_1\rho_1^+\sigma_{1,3} + b_2\rho_2^+\sigma_{2,3} + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\lambda_{1,2,3}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}} \\
&+ \quad \frac{c_2\rho_4^-\left(\gamma_4 + b_1\rho_1^+\sigma_{1,4} + b_2\rho_2^+\sigma_{2,4} + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\lambda_{1,2,4}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta \quad &= \quad -\frac{\left(-b_1\gamma_1\rho_1^+ - b_2\gamma_2\rho_2^+ + b_1 b_2 2(\gamma_1+\gamma_2)\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}} \\
&- \quad c_1 c_2 \frac{\rho_3^-\rho_4^-\left(\beta_{3,4} - b_1\rho_1^+\delta_{1,3,4} - b_2\rho_2^+\delta_{2,3,4} + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\theta_{1,2,3,4}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}} \\
&+ \quad c_1 c_2 \frac{\left(-b_1\gamma_1\rho_1^+ - b_2\gamma_2\rho_2^+ + b_1 b_2 2(\gamma_1+\gamma_2)\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}} \times \\
&\times \quad \frac{\rho_3^-\rho_4^-\left(\beta_{3,4} - b_1\rho_1^+\delta_{1,3,4} - b_2\rho_2^+\delta_{2,3,4} + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\theta_{1,2,3,4}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\rho_1^+ - \frac{1}{2}b_2\rho_2^+ + b_1 b_2\rho_1^+\rho_2^+\alpha_{1,2}}.
\end{aligned}
\tag{4.95}
$$

Capítulo 5

Modelo sinh-Gordon supersimétrico com $N = 1$

5.1 Equações de movimento

De acordo com (1.29), temos

$$\mathcal{L}_x = \partial_x + \mathcal{A}_x, \qquad \mathcal{L}_{t_{-1}} = \partial_{t_{-1}} + \mathcal{A}_{t_{-1}}, \tag{5.1}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x &= E^{(1)} - \partial_x B\, B^{(-1)} + A_{1/2}, & (5.2)\\ \mathcal{A}_{t_{-1}} &= BE^{(-1)}B^{-1} + Bj_{-1/2}B^{-1}, & (5.3) \end{aligned}$$

onde

$$B = e^{\phi M_2^{(0)} + \nu \hat{c}}, \qquad A_{1/2} = \bar{\psi}\, G_1^{(1/2)}, \qquad j_{-1/2} = \psi\, G_2^{(-1/2)}. \tag{5.4}$$

Os campos $\phi = \phi(x, t_{-1})$ e $\nu = \nu(x, t_{-1})$ são campos bosônicos enquanto que e os campos $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x, t_{-1})$ e $\psi = \psi(x, t_{-1})$ são campos fermiônicos.
A condição de curvatura nula fornece

$$[\partial_x + \mathcal{A}_x, \partial_{t_{-1}} + \mathcal{A}_{-1}] \;=\; \partial_x(BE^{(-1)}B^{-1}) + \partial_x(Bj_{-1/2}B^{-1})$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \partial_{t_{-1}}(\partial_x B\, B^{-1}) - \partial_{t_{-1}} A_{1/2} \\
&+ \quad [E^{(1)}, BE^{(-1)}B^{-1}] + [E^{(1)}, Bj_{-1/2}B^{-1}] \\
&- \quad [\partial_x B\, B^{(-1)}, BE^{(-1)}B^{-1}] - [\partial_x B\, B^{(-1)}, Bj_{-1/2}B^{-1}] \\
&+ \quad [A_{1/2}, BE^{(-1)}B^{-1}] + [A_{1/2}, Bj_{-1/2}B^{-1}] \\
&= \quad 0.
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

Separando os termos de mesmo grau na expressão acima e igualando a zero, obtemos

$$
\begin{aligned}
\partial_{t_{-1}} A_{1/2} - [E^{(1)}, Bj_{-1/2}B^{-1}] &= 0, \\
\partial_{t_{-1}}(\partial_x B\, B^{-1}) + [E^{(1)}, BE^{(-1)}B^{-1}] + [A_{1/2}, Bj_{-1/2}B^{-1}] &= 0, \\
\partial_x(Bj_{-1/2}B^{-1}) - [\partial_x B\, B^{(-1)}, Bj_{-1/2}B^{-1}] + [A_{1/2}, BE^{(-1)}B^{-1}] &= 0, \\
\partial_x(BE^{(-1)}B^{-1}) - [\partial_x B\, B^{(-1)}, BE^{(-1)}B^{-1}] &= 0.
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

De acordo com (1.30), a última das equações acima é uma identidade.
Com o auxílio da relação (4.62), podemos obter

$$
\begin{aligned}
BE^{(-1)}B^{-1} &= K_2^{(-1)} + \operatorname{senh}(2\phi) M_1^{(-1)} + \cosh(2\phi) K_1^{(-1)}, \\
Bj_{-1/2}B^{-1} &= \psi \cosh(\phi) G_2^{(-1/2)} - \psi \operatorname{senh}(\phi) F_1^{(-1/2)}.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Substituindo as expressões acima nas três primeiras equações de (5.6), obtemos:

$$
\partial_{t_{-1}} \bar{\psi}\, G_1^{(1/2)} - [E^{(1)}, \psi \cosh(\phi) G_2^{(-1/2)} - \psi \operatorname{senh}(\phi) F_1^{(-1/2)}] = 0, \tag{5.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{t_{-1}} \partial_x \phi M_2^{(0)} + \partial_{t_{-1}} \partial_x \nu \hat{c} + [E^{(1)}, K_2^{(-1)} + \operatorname{senh}(2\phi) M_1^{(-1)} + \cosh(2\phi) K_1^{(-1)}] \\
+ [\bar{\psi}\, G_1^{(1/2)}, \psi \cosh(\phi) G_2^{(-1/2)} - \psi \operatorname{senh}(\phi) F_1^{(-1/2)}] = 0,
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_x \left(\psi \cosh(\phi)\right) G_2^{(-1/2)} - \partial_x \left(\psi \operatorname{senh}(\phi)\right) F_1^{(-1/2)} \\
-[\partial_x \phi M_2^{(0)} + \partial_x \nu \hat{c}, \psi \cosh(\phi) G_2^{(-1/2)} - \psi \operatorname{senh}(\phi) F_1^{(-1/2)}] \\
+[\bar{\psi}\, G_1^{(1/2)}, K_2^{(-1)} + \operatorname{senh}(2\phi) M_1^{(-1)} + \cosh(2\phi) K_1^{(-1)}] = 0,
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

o que resultam nas equações do *modelo sinh-Gordon supersimétrico*:

$$\partial_{t_{-1}}\bar{\psi} = 2\psi\cosh\phi, \tag{5.11}$$
$$\partial_{t_{-1}}\partial_x\phi = 2\,\mathrm{senh}(2\phi) + 2\bar{\psi}\psi\,\mathrm{senh}\phi, \tag{5.12}$$
$$\partial_{t_{-1}}\partial_x\nu = \psi\bar{\psi}e^{\phi} + (1-2e^{2\phi}), \tag{5.13}$$
$$\partial_x\psi = 2\bar{\psi}\cosh\phi. \tag{5.14}$$

As equações (5.11), (5.12) e (5.14) também podem ser derivadas da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\partial_t\phi\,\partial_x\phi - \bar{\psi}\,\partial_t\bar{\psi} + \psi\,\partial_x\psi + 2\cosh(2\phi) + 4\bar{\psi}\psi\cosh\phi\right]. \tag{5.15}$$

Podemos reduzir o sistema de equações (5.11)-(5.14) notando que

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{\partial_{t_{-1}}\bar{\psi}}{\cosh(\phi)}, \tag{5.16}$$

de acordo com a eq. (5.11). Portanto, substituindo (5.16) nas equações (5.12)-(5.14), obtemos

$$\partial_{t_{-1}}\partial_x\phi = 2\,\mathrm{senh}(2\phi) + \bar{\psi}\partial_{t_{-1}}\bar{\psi}\,\mathrm{tgh}(\phi), \tag{5.17}$$

$$\partial_{t_{-1}}\partial_x\bar{\psi} = 4\bar{\psi}\cosh^2(\phi) + \partial_x\phi\partial_{t_{-1}}\bar{\psi}\,\mathrm{tgh}(\phi), \tag{5.18}$$

$$\partial_{t_{-1}}\partial_x\nu = \partial_{t_{-1}}\bar{\psi}\,\bar{\psi}(1+e^{-2\phi})^{-1} + (1-e^{2\phi}). \tag{5.19}$$

Verificamos que as equações (5.17) e (5.18) são invariantes pela seguinte transformação de supersimetria:

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} + \epsilon\partial_x\phi, \tag{5.20}$$
$$\phi' = \phi + \epsilon\bar{\psi}. \tag{5.21}$$

Capítulo 6

Soluções para o modelo sinh-Gordon supersimétrico com $N = 1$

6.1 Solução para 1-vértice bosônico

Integrando

$$(\partial_x + E^{(1)})T_{vac} = 0, \qquad (\partial_{t_{-1}} + E^{(-1)})T_{vac} = 0, \tag{6.1}$$

obtemos,

$$T_{vac} = \exp(-E^{(1)}x - E^{(-1)}t_{-1}). \tag{6.2}$$

Uma consequência de (6.2), é que

$$T_{vac}F_{\pm}(\gamma)T_{vac}^{-1} = e^{\mp(2\gamma x + 2\gamma^{-1}t_{-1})}F_{\pm}(\gamma), \tag{6.3}$$

e portanto, denotaremos daqui por diante (compare com (4.71)):

$$\tilde{\rho}_i^{\pm} = e^{\pm(2\gamma_i x + 2\gamma_i^{-1}t_{-1})}. \tag{6.4}$$

Os campos ϕ, $\bar{\psi}$ e ν do modelo sinh-Gordon supersimétrico em termos das funções τ (4.45), (4.46), (4.51) e (4.52), ficam

$$\begin{aligned} \phi &= \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right), && (6.5)\\ \bar{\psi} &= \frac{\tau_3}{\tau_1}+\frac{\tau_2}{\tau_0}, && (6.6)\\ \nu &= \ln(\tau_0). && (6.7) \end{aligned}$$

Para a solução de 1-vértice bosônico colocamos

$$g = e^{b_1 F_-(\gamma_1)}. \tag{6.8}$$

As funções τ para o g acima são dadas por

$$\begin{aligned} \tau_0 &= e^{\nu} = 1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+,\\ \tau_1 &= e^{\phi+\nu} = 1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+,\\ \tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}-\chi)e^{\nu} = 0,\\ \tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}+\chi)e^{\phi+\nu} = 0, \end{aligned} \tag{6.9}$$

e portanto obtemos as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} \phi &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+}{1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+}\right),\\ \bar{\psi} &= 0,\\ \nu &= \ln(\tau_0) = \ln\left(1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+\right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

6.2 Solução para um 1-vértice fermiônico

Colocamos

$$g = e^{c_1 F_+(\gamma_1)}. \tag{6.11}$$

As funções τ ficam

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} = 1, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} = 1, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \chi)e^{\nu} = c_1\gamma_1\tilde{\rho}_1^-, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \chi)e^{\phi+\nu} = c_1\gamma_1\tilde{\rho}_1^-.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

E as soluções são

$$\begin{aligned}
\phi &= 0, \\
\bar{\psi} &= c_1 2\gamma_1\tilde{\rho}_1^-, \\
\nu &= 0.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

6.3 Solução para 1-vértice bosônico + 1-vértice fermiônico

Colocamos

$$g = e^{b_1 F_-(\gamma_1)} e^{c_1 F_+(\gamma_2)}. \tag{6.14}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} = 1 - \frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} = 1 + \frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \chi)e^{\nu} = c_1\tilde{\rho}_2^-\gamma_2 + b_1c_1\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^-\sigma_{1,2}, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \chi)e^{\phi+\nu} = c_1\tilde{\rho}_2^-\gamma_2 - b_1c_1\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^-\sigma_{1,2},
\end{aligned} \tag{6.15}$$

onde

$$\sigma_{1,2} = \frac{\gamma_2}{2}\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)}. \tag{6.16}$$

Obtemos as seguintes soluções

$$\begin{aligned}
\phi &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+}{1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+}\right), \\
\bar{\psi} &= \frac{c_1\tilde{\rho}_2^-\gamma_2 - b_1c_1\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^-\sigma_{1,2}}{1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+} + \frac{c_1\tilde{\rho}_2^-\gamma_2 + b_1c_1\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^-\sigma_{1,2}}{1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+}, \\
\nu &= \ln\left(1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+\right).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

6.4 Solução para 2-vértices bosônicos

Colocamos

$$g = e^{b_1F_-(\gamma_1)}e^{b_2F_-(\gamma_2)}. \tag{6.18}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} = 1 - \frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} = 1 + \frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}-\chi)e^{\nu} = 0, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}+\chi)e^{\phi+\nu} = 0,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

onde

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2}. \tag{6.20}$$

Assim, as soluções ficam

$$\begin{aligned}
\phi &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}}{1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}}\right), \\
\bar{\psi} &= 0, \\
\nu &= \ln\left(1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}\right).
\end{aligned} \tag{6.21}$$

6.5 Solução para 2-vértices fermiônicos

Colocamos

$$g = e^{c_1 F_+(\gamma_1)} e^{c_2 F_+(\gamma_2)}. \tag{6.22}$$

E as funções τ ficam

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} = 1 + c_1 c_2 \tilde{\rho}_1^- \tilde{\rho}_2^- \beta_{1,2}, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} = 1 + c_1 c_2 \tilde{\rho}_1^- \tilde{\rho}_2^- \beta_{1,2}, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \chi) e^{\nu} = c_1 \gamma_1 \tilde{\rho}_1^- + c_2 \gamma_2 \tilde{\rho}_2^-, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \chi) e^{\phi+\nu} = c_1 \gamma_1 \tilde{\rho}_1^- + c_2 \gamma_2 \tilde{\rho}_2^-,
\end{aligned} \tag{6.23}$$

onde

$$\beta_{1,2} = \gamma_1 \gamma_2 \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2}. \tag{6.24}$$

Assim, as soluções ficam

$$\begin{aligned}
\phi &= 0, \\
\bar{\psi} &= c_1 2 \gamma_1 \tilde{\rho}_1^- + c_2 2 \gamma_2 \tilde{\rho}_2^-, \\
\nu &= \ln\left(1 + c_1 c_2 \tilde{\rho}_1^- \tilde{\rho}_2^- \beta_{1,2}\right) = c_1 c_2 \tilde{\rho}_1^- \tilde{\rho}_2^- \beta_{1,2},
\end{aligned} \tag{6.25}$$

onde usamos $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$ na solução para ν.

6.6 Solução para 1-vértice bosônico + 2-vértices fermiônicos

Colocamos

$$g = e^{b_1 F_-(\gamma_1)} e^{c_1 F_+(\gamma_2)} e^{c_2 F_+(\gamma_3)}, \tag{6.26}$$

e as funções τ ficam

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu} \\
&= 1 - \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^{+} + c_1 c_2 \tilde{\rho}_2^{-} \tilde{\rho}_3^{-} \beta_{2,3} - b_1 c_1 c_2 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_2^{-} \tilde{\rho}_3^{-} \delta_{1,2,3}, \\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} \\
&= 1 + \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^{+} + c_1 c_2 \tilde{\rho}_2^{-} \tilde{\rho}_3^{-} \beta_{2,3} + b_1 c_1 c_2 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_2^{-} \tilde{\rho}_3^{-} \delta_{1,2,3}, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2} (\bar{\psi} - \chi) e^{\nu} \\
&= c_1 \gamma_2 \tilde{\rho}_2^{-} + c_2 \gamma_3 \tilde{\rho}_3^{-} + b_1 c_1 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_2^{-} \sigma_{1,2} + b_1 c_2 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_3^{-} \sigma_{1,3}, \\
\tau_3 &= \frac{1}{2} (\bar{\psi} + \chi) e^{\phi+\nu} \\
&= c_1 \gamma_2 \tilde{\rho}_2^{-} + c_2 \gamma_3 \tilde{\rho}_3^{-} - b_1 c_1 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_2^{-} \sigma_{1,2} - b_1 c_2 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_3^{-} \sigma_{1,3},
\end{aligned} \tag{6.27}$$

onde

$$\delta_{1,2,3} = \frac{\gamma_2 \gamma_3}{2} \frac{(\gamma_2 - \gamma_3)}{(\gamma_2 + \gamma_3)^2} \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \frac{(\gamma_1 + \gamma_3)}{(\gamma_1 - \gamma_3)}. \tag{6.28}$$

Logo, as soluções ficam

$$\begin{aligned}
\phi &= \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^{+}}{1 - \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^{+}} \right) \\
&+ \left(\frac{c_1 c_2 \tilde{\rho}_2^{-} \tilde{\rho}_3^{-} \beta_{2,3} + b_1 c_1 c_2 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_2^{-} \tilde{\rho}_3^{-} \delta_{1,2,3}}{1 + \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^{+}} \right) \\
&- \left(\frac{c_1 c_2 \tilde{\rho}_2^{-} \tilde{\rho}_3^{-} \beta_{2,3} - b_1 c_1 c_2 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_2^{-} \tilde{\rho}_3^{-} \delta_{1,2,3}}{1 - \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^{+}} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} &= \frac{c_1 \gamma_2 \tilde{\rho}_2^{-} + c_2 \gamma_3 \tilde{\rho}_3^{-} - b_1 c_1 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_2^{-} \sigma_{1,2} - b_1 c_2 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_3^{-} \sigma_{1,3}}{1 + \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^{+}} \\
&+ \frac{c_1 \gamma_2 \tilde{\rho}_2^{-} + c_2 \gamma_3 \tilde{\rho}_3^{-} + b_1 c_1 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_2^{-} \sigma_{1,2} + b_1 c_2 \tilde{\rho}_1^{+} \tilde{\rho}_3^{-} \sigma_{1,3}}{1 - \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^{+}},
\end{aligned}$$

$$\nu = \ln\left(1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+\right)+\left(\frac{c_1c_2\tilde{\rho}_2^-\tilde{\rho}_3^-\beta_{2,3}-b_1c_1c_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^-\tilde{\rho}_3^-\delta_{1,2,3}}{1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+}\right). \tag{6.29}$$

6.7 Solução para 2-vértices bosônicos + 1-vértice fermiônico

Colocamos

$$g = e^{b_1F_-(\gamma_1)}e^{b_2F_-(\gamma_2)}e^{c_1F_+(\gamma_3)}. \tag{6.30}$$

E as funções τ ficam

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= e^{\nu}\\
&= 1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+-\frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2},\\
\tau_1 &= e^{\phi+\nu} = 1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2},\\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}-\chi)e^{\nu}\\
&= c_1\left(\gamma_3\tilde{\rho}_3^- + b_1\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_3^-\sigma_{1,3}+b_2\tilde{\rho}_2^+\tilde{\rho}_3^-\sigma_{2,3}+b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\tilde{\rho}_3^-\lambda_{1,2,3}\right),\\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}+\chi)e^{\phi+\nu}\\
&= c_1\left(\gamma_3\tilde{\rho}_3^- - b_1\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_3^-\sigma_{1,3}-b_2\tilde{\rho}_2^+\tilde{\rho}_3^-\sigma_{2,3}+b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\tilde{\rho}_3^-\lambda_{1,2,3}\right),
\end{aligned} \tag{6.31}$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,2} &= \frac{1}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2},\\
\sigma_{j,3} &= \frac{\gamma_3}{2}\frac{(\gamma_j+\gamma_3)}{(\gamma_j-\gamma_3)}, \qquad (j=1,2),
\end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2,3} = \frac{\gamma_3}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2}\frac{(\gamma_1+\gamma_3)}{(\gamma_1-\gamma_3)}\frac{(\gamma_2+\gamma_3)}{(\gamma_2-\gamma_3)}. \tag{6.32}$$

Portanto, obtemos as seguintes soluções:

$$\phi = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}}{1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}}\right),$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= \frac{c_1\left(\gamma_3\tilde{\rho}_3^- - b_1\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_3^-\sigma_{1,3} - b_2\tilde{\rho}_2^+\tilde{\rho}_3^-\sigma_{2,3} + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\tilde{\rho}_3^-\lambda_{1,2,3}\right)}{1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}} \\ &+ \frac{c_1\left(\gamma_3\tilde{\rho}_3^- + b_1\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_3^-\sigma_{1,3} + b_2\tilde{\rho}_2^+\tilde{\rho}_3^-\sigma_{2,3} + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\tilde{\rho}_3^-\lambda_{1,2,3}\right)}{1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}},\end{aligned}$$

$$\nu = \ln\left(1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}\right). \tag{6.33}$$

6.8 Solução para 2-vértices bosônicos + 2-vértices fermiônicos

Colocamos

$$g = e^{b_1F_-(\gamma_1)}e^{b_2F_-(\gamma_2)}e^{c_1F_+(\gamma_3)}e^{c_2F_+(\gamma_4)}. \tag{6.34}$$

E as funções τ ficam

$$\begin{aligned}\tau_0 &= e^{\nu} \\ &= 1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2} \\ &+ c_1c_2\tilde{\rho}_3^-\tilde{\rho}_4^-\left(\beta_{3,4} - b_1\tilde{\rho}_1^+\delta_{1,3,4} - b_2\tilde{\rho}_2^+\delta_{2,3,4} + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\theta_{1,2,3,4}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_1 &= e^{\phi+\nu} \\ &= 1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad c_1 c_2 \tilde{\rho}_3^- \tilde{\rho}_4^- \left(\beta_{3,4} + b_1\tilde{\rho}_1^+ \delta_{1,3,4} + b_2\tilde{\rho}_2^+ \delta_{2,3,4} + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \theta_{1,2,3,4}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \chi)e^{\nu} \\
&= c_1\tilde{\rho}_3^- \left(\gamma_3 + b_1\tilde{\rho}_1^+\sigma_{1,3} + b_2\tilde{\rho}_2^+\sigma_{2,3} + b_1 b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\lambda_{1,2,3}\right) \\
&+ c_2\tilde{\rho}_4^- \left(\gamma_4 + b_1\tilde{\rho}_1^+\sigma_{1,4} + b_2\tilde{\rho}_2^+\sigma_{2,4} + b_1 b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\lambda_{1,2,4}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \chi)e^{\phi+\nu} \\
&= c_1\tilde{\rho}_3^- \left(\gamma_3 - b_1\tilde{\rho}_1^+\sigma_{1,3} - b_2\tilde{\rho}_2^+\sigma_{2,3} + b_1 b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\lambda_{1,2,3}\right) \\
&+ c_2\tilde{\rho}_4^- \left(\gamma_4 - b_1\tilde{\rho}_1^+\sigma_{1,4} - b_2\tilde{\rho}_2^+\sigma_{2,4} + b_1 b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\lambda_{1,2,4}\right), \qquad (6.35)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1,2} &= \frac{1}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2}, \\
\beta_{3,4} &= \gamma_3\gamma_4\frac{(\gamma_3-\gamma_4)}{(\gamma_3+\gamma_4)^2}, \\
\delta_{j,3,4} &= \frac{\gamma_3\gamma_4}{2}\frac{(\gamma_3-\gamma_4)}{(\gamma_3+\gamma_4)^2}\frac{(\gamma_j+\gamma_3)}{(\gamma_j-\gamma_3)}\frac{(\gamma_j+\gamma_4)}{(\gamma_j-\gamma_4)} \qquad (j=1,2), \\
\sigma_{j,k} &= \frac{\gamma_3}{2}\frac{(\gamma_j+\gamma_k)}{(\gamma_j-\gamma_k)} \qquad (j=1,2) \qquad (k=3,4), \\
\lambda_{1,2,j} &= \frac{\gamma_j}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2}\frac{(\gamma_1+\gamma_j)}{(\gamma_1-\gamma_j)}\frac{(\gamma_2+\gamma_j)}{(\gamma_2-\gamma_j)}, \qquad (j=3,4), \\
\theta_{1,2,3,4} &= \frac{\gamma_3\gamma_4}{4}\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2}\frac{(\gamma_1+\gamma_3)}{(\gamma_1-\gamma_3)}\frac{(\gamma_2+\gamma_3)}{(\gamma_2-\gamma_3)}\frac{(\gamma_3-\gamma_4)}{(\gamma_3+\gamma_4)^2}\frac{(\gamma_1+\gamma_4)}{(\gamma_1-\gamma_4)}\frac{(\gamma_2+\gamma_4)}{(\gamma_2-\gamma_4)}. \qquad (6.36)
\end{aligned}
$$

As soluções são dadas a seguir

$$
\phi = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}}{1-\frac{1}{2}b_1\tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2}b_2\tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2\tilde{\rho}_1^+\tilde{\rho}_2^+\alpha_{1,2}}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{c_1 c_2 \tilde{\rho}_3^- \tilde{\rho}_4^- \left(\beta_{3,4} + b_1 \tilde{\rho}_1^+ \delta_{1,3,4} + b_2 \tilde{\rho}_2^+ \delta_{2,3,4} + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \theta_{1,2,3,4}\right)}{1 + \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2} b_2 \tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \alpha_{1,2}} \\
&- \quad \frac{c_1 c_2 \tilde{\rho}_3^- \tilde{\rho}_4^- \left(\beta_{3,4} - b_1 \tilde{\rho}_1^+ \delta_{1,3,4} - b_2 \tilde{\rho}_2^+ \delta_{2,3,4} + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \theta_{1,2,3,4}\right)}{1 - \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2} b_2 \tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \alpha_{1,2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi} \quad &= \quad \frac{c_1 \tilde{\rho}_3^- \left(\gamma_3 - b_1 \tilde{\rho}_1^+ \sigma_{1,3} - b_2 \tilde{\rho}_2^+ \sigma_{2,3} + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \lambda_{1,2,3}\right)}{1 + \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2} b_2 \tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \alpha_{1,2}} \\
&+ \quad \frac{c_2 \tilde{\rho}_4^- \left(\gamma_4 - b_1 \tilde{\rho}_1^+ \sigma_{1,4} - b_2 \tilde{\rho}_2^+ \sigma_{2,4} + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \lambda_{1,2,4}\right)}{1 + \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^+ + \frac{1}{2} b_2 \tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \alpha_{1,2}} \\
&+ \quad \frac{c_1 \tilde{\rho}_3^- \left(\gamma_3 + b_1 \tilde{\rho}_1^+ \sigma_{1,3} + b_2 \tilde{\rho}_2^+ \sigma_{2,3} + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \lambda_{1,2,3}\right)}{1 - \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2} b_2 \tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \alpha_{1,2}} \\
&+ \quad \frac{c_2 \tilde{\rho}_4^- \left(\gamma_4 + b_1 \tilde{\rho}_1^+ \sigma_{1,4} + b_2 \tilde{\rho}_2^+ \sigma_{2,4} + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \lambda_{1,2,4}\right)}{1 - \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2} b_2 \tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \alpha_{1,2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu \quad &= \quad \ln\left(1 - \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2} b_2 \tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \alpha_{1,2}\right) \\
&+ \quad \frac{c_1 c_2 \tilde{\rho}_3^- \tilde{\rho}_4^- \left(\beta_{3,4} - b_1 \tilde{\rho}_1^+ \delta_{1,3,4} - b_2 \tilde{\rho}_2^+ \delta_{2,3,4} + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \theta_{1,2,3,4}\right)}{1 - \frac{1}{2} b_1 \tilde{\rho}_1^+ - \frac{1}{2} b_2 \tilde{\rho}_2^+ + b_1 b_2 \tilde{\rho}_1^+ \tilde{\rho}_2^+ \alpha_{1,2}}.
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

Capítulo 7

Transformação de Bäcklund

7.1 Transformação de Bäcklund para equação sine-Gordon

A *transformação de Bäcklund* [17] originou-se no estudo de superfícies com curvatura negativa constante. Em poucas palavras, ela pode ser descrita como segue. Dada uma equação diferencial na variável $u(x,t)$,

$$P\left(u(x,t)\right)=0, \tag{7.1}$$

uma transformação de Bäcklund é uma transformação para uma nova variável $\tilde{u}(x,t)$ definida pelo par de equações de primeira ordem

$$u_x=\mathcal{B}_1(u,\tilde{u}), \qquad u_t=\mathcal{B}_2(u,\tilde{u}), \tag{7.2}$$

onde $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ dependem de u, $\tilde{u}$ e suas derivadas, de maneira que a equação diferencial (7.1) surge a partir de uma condição de integrabilidade das duas equações de primeira ordem:

$$\partial_t\mathcal{B}_1-\partial_x\mathcal{B}_2=0. \tag{7.3}$$

Considere, por exemplo, a equação sine-Gordon:

$$u_{xt}=\operatorname{sen} u. \tag{7.4}$$

Em seguida, considere a transformação

$$u_x = \tilde{u}_x - 2\beta \operatorname{sen}\left(\frac{u+\tilde{u}}{2}\right) = \mathcal{B}_1(u, \tilde{u}, \tilde{u}_x), \tag{7.5}$$

$$u_t = -\tilde{u}_t + \frac{2}{\beta} \operatorname{sen}\left(\frac{u-\tilde{u}}{2}\right) = \mathcal{B}_2(u, \tilde{u}, \tilde{u}_t), \tag{7.6}$$

onde β é um parâmetro arbitrário. A condição de integrabilidade (7.3) produz

$$\tilde{u}_{xt} = \operatorname{sen} \tilde{u}. \tag{7.7}$$

Por outro lado, se as relações (7.5) e (7.6) forem escritas como

$$\tilde{u}_x = u_x - 2\beta \operatorname{sen}\left(\frac{u+\tilde{u}}{2}\right) = \tilde{\mathcal{B}}_1(u, \tilde{u}, u_x), \tag{7.8}$$

$$\tilde{u}_t = -u_t + \frac{2}{\beta} \operatorname{sen}\left(\frac{u-\tilde{u}}{2}\right) = \tilde{\mathcal{B}}_2(u, \tilde{u}, u_t), \tag{7.9}$$

a condição de integrabilidade

$$\partial_t \tilde{\mathcal{B}}_1 - \partial_x \tilde{\mathcal{B}}_2 = 0, \tag{7.10}$$

leva a equação (7.4). A partir da transformação de Bäcklund (7.8) e (7.9) podemos obter uma solução não trivial a partir da solução de vácuo. Para ver isso, tome $\tilde{u} = 0$ em (7.8) e (7.9), o que leva ao par de equações

$$u_x = 2\beta \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right), \qquad u_t = \frac{2}{\beta} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right). \tag{7.11}$$

Integrando o par de equações acima, obtemos a solução de 1-sóliton

$$u = 4 \arctan\left[\exp(\beta x + \beta^{-1} t + \alpha)\right], \tag{7.12}$$

onde α é uma constante de integração.

7.2 Transformações de Bäcklund para o modelo sinh-Gordon supersimétrico

Desejamos obter as transformações de Bäcklund para as equações supersimétricas de sinh-Gordon (5.11), (5.12) e (5.14). Utilizaremos o método de supercampos de

acordo com a referência [8].
Considere o supercampo bosônico

$$\Phi = \phi + \theta_1 \bar{\psi} + i\theta_2\psi - \theta_1\theta_2 F, \tag{7.13}$$

onde θ_1 e θ_2 são parâmetros fermiônicos, ϕ e F são campos bosônicos, ψ e $\bar{\psi}$ são campos fermiônicos.
Em seguida, considere as superderivadas

$$D_x = \partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_x, \qquad D_t = \partial_{\theta_2} + \theta_2\partial_t, \tag{7.14}$$

as quais satisfazem

$$D_x^2 = \partial_x, \qquad D_t^2 = \partial_t, \qquad D_x D_t = -D_t D_x. \tag{7.15}$$

Verifica-se que as equações supersimétricas de sinh-Gordon (5.11), (5.12) e (5.14) são compatíveis com a equação

$$D_x D_t \Phi = 2i \,\mathrm{senh}\, \Phi, \tag{7.16}$$

em termos das componentes de Φ se

$$F = 2i \,\mathrm{senh}\, \phi. \tag{7.17}$$

Considere a transformação

$$\begin{aligned} D_x\Phi &= D_x\tilde{\Phi} - \frac{4i}{\beta} f \cosh\left(\frac{\Phi + \tilde{\Phi}}{2}\right) = \mathcal{B}_1(\Phi, \tilde{\Phi}, D_x\tilde{\Phi}), && (7.18)\\ D_t\Phi &= -D_t\tilde{\Phi} + 2\beta f \cosh\left(\frac{\Phi - \tilde{\Phi}}{2}\right) = \mathcal{B}_2(\Phi, \tilde{\Phi}, D_t\tilde{\Phi}), && (7.19) \end{aligned}$$

onde f é um campo fermiônico e β é um parâmetro bosônico constante.
A condição de integrabilidade,

$$D_t\mathcal{B}_1 + D_x\mathcal{B}_2 = 0, \tag{7.20}$$

leva a equação

$$D_x D_t \tilde{\Phi} = 2i \,\mathrm{senh}\, \tilde{\Phi}, \tag{7.21}$$

se

$$\begin{aligned} D_t f &= \beta \,\mathrm{senh} \left(\frac{\Phi - \tilde{\Phi}}{2} \right), & (7.22) \\ D_x f &= \frac{2i}{\beta} \,\mathrm{senh} \left(\frac{\Phi + \tilde{\Phi}}{2} \right). & (7.23) \end{aligned}$$

Portanto, a (7.18) e (7.19) juntamente com (7.22) e (7.23) são as transformações de Bäcklund para as equações supersimétricas de sinh-Gordon.
Se definimos, em seguida

$$f = f_1 + \theta_1 \, b_1 + \theta_2 \, b_2 + \theta_1 \theta_2 \, f_2, \tag{7.24}$$

sendo b_1, b_2 campos bosônicos e f_1, f_2 campos fermiônicos, então a eq. (7.18) em termos das componentes de Φ fica:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_- &= -\frac{4i}{\beta} \, f_1 \cosh \left(\frac{\phi_+}{2} \right), & (7.25) \\ \partial_x \phi_- &= \frac{4i}{\beta} \left[\frac{f_1}{2} \,\mathrm{senh} \left(\frac{\phi_+}{2} \right) \bar{\psi}_+ - b_1 \cosh \left(\frac{\phi_+}{2} \right) \right], & (7.26) \\ F_- &= -\frac{4i}{\beta} \left[\frac{f_1}{2} \,\mathrm{senh} \left(\frac{\phi_+}{2} \right) \psi_+ - b_2 \cosh \left(\frac{\phi_+}{2} \right) \right], & (7.27) \\ i\partial_x \psi_- &= \frac{4i}{\beta} \left[\frac{f_1}{2} \,\mathrm{senh} \left(\frac{\phi_+}{2} \right) \, F_+ - \frac{i f_1}{4} \cosh \left(\frac{\phi_+}{2} \right) \psi_+ \bar{\psi}_+ \right] \\ &\quad - \frac{4i}{\beta} \left[\frac{i b_1}{2} \,\mathrm{senh} \left(\frac{\phi_+}{2} \right) \psi_+ - \frac{b_2}{2} \,\mathrm{senh} \left(\frac{\phi_+}{2} \right) \, \bar{\psi}_+ \right] \\ &\quad - \frac{4i}{\beta} \, f_2 \cosh \left(\frac{\phi_+}{2} \right), & (7.28) \end{aligned}$$

onde temos denotado

$$\phi_\pm = \phi \pm \tilde{\phi}, \quad F_\pm = F \pm \tilde{F}, \quad \bar{\psi}_\pm = \bar{\psi} \pm \tilde{\bar{\psi}}, \quad \psi_\pm = \psi \pm \tilde{\psi}. \tag{7.29}$$

As eqs. (7.19), (7.22) e (7.23) em termos das componentes de Φ também são dadas a seguir.
eq. (7.19):

$$i\psi_+ = 2\beta\, f_1 \cosh\left(\frac{\phi_-}{2}\right), \tag{7.30}$$

$$\partial_t\phi_+ = -2\beta\left[\frac{if_1}{2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\psi_- - b_2\cosh\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\right], \tag{7.31}$$

$$F_+ = -2\beta\left[\frac{f_1}{2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\bar{\psi}_- - b_1\cosh\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\right], \tag{7.32}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\bar{\psi}_+ = & -2\beta\left[-\frac{f_1}{2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\,F_- + \frac{if_1}{4}\cosh\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\psi_-\bar{\psi}_-\right] \\ & -2\beta\left[\frac{ib_1}{2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\psi_- - \frac{b_2}{2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\,\bar{\psi}_-\right] \\ & -2\beta\, f_2\cosh\left(\frac{\phi_-}{2}\right),\end{aligned} \tag{7.33}$$

eq. (7.22):

$$b_2 = \beta\,\mathrm{senh}\left(\frac{\phi_-}{2}\right), \tag{7.34}$$

$$f_2 = -\frac{\beta}{2}\cosh\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\,\bar{\psi}_-, \tag{7.35}$$

$$\partial_t f_1 = \frac{i\beta}{2}\cosh\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\,\psi_-, \tag{7.36}$$

$$\partial_t b_1 = -\beta\left[-\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\,F_- + \frac{i}{4}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\,\psi_-\bar{\psi}_-\right], \tag{7.37}$$

eq. (7.23):

$$b_1 = \frac{2i}{\beta}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\phi_+}{2}\right), \tag{7.38}$$

$$f_2 = -\frac{1}{\beta}\cosh\left(\frac{\phi_+}{2}\right)\,\psi_+, \tag{7.39}$$

$$\partial_x f_1 = \frac{i}{\beta}\cosh\left(\frac{\phi_+}{2}\right)\bar{\psi}_+, \tag{7.40}$$

$$\partial_x b_2 = \frac{2i}{\beta}\left[-\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{\phi_+}{2}\right)F_+ + \frac{i}{4}\operatorname{senh}\left(\frac{\phi_+}{2}\right)\psi_+\bar{\psi}_+\right]. \tag{7.41}$$

A partir das eqs. (7.25)-(7.41) podemos encontrar as transformações de Bäcklund em termos das componentes de Φ:

$$\partial_x\phi_- = -\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\phi_+}{2}\right)\bar{\psi}_-\bar{\psi}_+ + \frac{4}{\beta^2}\operatorname{senh}\phi_+, \tag{7.42}$$

$$\partial_x\bar{\psi}_- = \frac{1}{2}\bar{\psi}_-\tanh\left(\frac{\phi_+}{2}\right)\partial_x\phi_+ + \frac{4}{\beta^2}\cosh^2\left(\frac{\phi_+}{2}\right)\bar{\psi}_+ \tag{7.43}$$

$$\partial_t\phi_+ = \frac{\beta^2}{8}\frac{\tanh(\phi_-/2)}{\cosh^2(\phi_+/2)}\bar{\psi}_-\partial_t\bar{\psi}_- + \beta^2\operatorname{senh}\phi_-, \tag{7.44}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\bar{\psi}_+ &= \tanh\left(\frac{\phi_+}{2}\right)\tanh\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\partial_t\bar{\psi}_- \\ &- \frac{\beta^2}{2}\tanh^2\left(\frac{\phi_+}{2}\right)\tanh\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\operatorname{senh}\phi_-\,\bar{\psi}_- \\ &+ \beta^2\cosh^2\left(\frac{\phi_-}{2}\right)\bar{\psi}_-.\end{aligned} \tag{7.45}$$

Considerações finais

Nesta dissertação verificamos que as equações mKdV e sinh-Gordon supersimétricas com $N = 1$ podem ser incorporadas dentro de um esquema geral de construção de hierarquias integráveis baseado em superálgebras conforme proposto em [13]. Específicamente, para os modelos estudados aqui, usamos a superálgebra de Kac-Moody $\tilde{sl}(2,1)$ com uma gradação diferente daquela proposta em [11] assim como uma redução diferente para a superálgebra. Esta escolha nos permitiu obter soluções usando o formalismo de dressing para até quatro vértices para ambos os modelos. Comparando soluções de mesmo vértice para ambos os modelos, podemos ver que as soluções compartilham os mesmos elementos de matriz. Esta propriedade aparece naturalmente para equações não lineares pertencentes a mesma hierarquia. Sendo assim, conhecendo-se as soluções de um dos modelos podemos prontamente obter as soluções para o outro modelo através da relação $u = -\partial_x \phi$ e da troca de suas exponencias $e^{2\gamma x + 2\gamma^3 t_3} \leftrightarrow e^{2\gamma x + 2\gamma^{-1} t_{-1}}$ (veja eqs. (4.38), (4.71) e (6.4)).

Também discutimos as transformações de Bäcklund para o modelo sinh-Gordon supersimétrico seguindo o método de supercampos da referência [8].

Observou-se recentemente [18], [19] que a teoria clássica de sine-Gordon pode ser alterada acrescentando "defeitos" e ainda assim manter a integrabilidade (e preservar muitas leis de conservação). A forma do defeito está relacionada com a transformação de Bäcklund.

Esperamos estender esses últimos resultados para o caso de sinh-Gordon supersimétrico com $N = 1$.

Apêndice A

Álgebra de Lie

A.1 Estrutura de uma Álgebra de Lie e a base de Weyl-Cartan

Uma *álgebra de Lie* $\mathcal{G}$ possui um conjunto de operadores $\{T_a\}$, $a = 1, 2, ..., dim\,\mathcal{G}$, satisfazendo

i) $[T_a, T_b] = if^c_{ab}T_c$,

ii) $[T_a, [T_b, T_c]] + [T_c, [T_a, T_b]] + [T_b, [T_c, T_a]] = 0$ (id. de Jacobi).

As constantes $f^c_{ab} = -f^c_{ba}$ são chamadas de *constantes de estrutura* e caracterizam a álgebra de Lie. Os operadores T_a são chamados de *geradores* da álgebra e o conjunto de todas as combinações lineares de T_a forma um espaço vetorial no qual $\{T_a\}$ forma uma base nesse espaço.
Um elemento g do grupo de Lie G está associado a $\mathcal{G}$ através de um mapeamento exponencial dos geradores T_a:

$$g = exp\left(i\sum_a \zeta^a T_a\right). \tag{A.1}$$

onde ζ^a, $a = 1, 2, ..., dim\,\mathcal{G}$, são parâmetros contínuos. Quando variamos o parâmetro ζ_a para $\zeta_a + \delta\zeta_a$, variamos de um elemento $g(\zeta_a)$ para um outro elemento $g(\zeta_a + \delta\zeta_a)$

em G.
Para uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ semisimples, podemos escolher uma combinação linear adequada dos geradores T_a e formar uma nova base $\mathcal{G} = \{H_i, E_\alpha\}$. Esta nova base é conhecida como *base de Weyl-Cartan* [20]. O conjunto $\{H_i\}$, $i = 1, 2, ..., r = rank\, \mathcal{G}$, é chamado *sub-álgebra de Cartan* e seus geradores constituem a maior sub-álgebra abeliana de $\mathcal{G}$ os quais podem ser diagonalizados simultâneamente, i.e. os geradores H_i satisfazem

$$[H_i, H_j] = 0, \tag{A.2}$$

para qualquer i e qualquer j. Portanto, podemos encontrar um conjunto de autoestados $\mid \mu\rangle$ satisfazendo

$$H_i \mid \mu\rangle = \mu_i \mid \mu\rangle, \tag{A.3}$$

onde os autovalores μ_i são componentes de um vetor $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r)$ que vive num espaço vetorial de mesma dimensão que a sub-álgebra de Cartan.
Os geradores E_α são autovetores de H_i, no sentido de que

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \tag{A.4}$$

onde α_i também são componentes de um vetor α de dimensão $rank\, \mathcal{G}$. O vetor α é chamado de *raíz* da álgebra de Lie. Para cada raíz α de uma álgebra de Lie semisimples existe um único gerador correspondente E_α e uma única raíz negativa $-\alpha$. Portanto o número de raízes e de geradores E_α de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é igual a

$$dim\, \mathcal{G} - rank\, \mathcal{G} = \textit{número par.} \tag{A.5}$$

Dentre o conjunto de todas as raízes de uma álgebra de Lie, existe um sub-conjunto de raízes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ $(r = rank\, \mathcal{G})$, chamadas de *raízes simples*. Todas as outras raízes da álgebra podem ser escritas como uma combinação linear das raízes simples, i.e.

$$\alpha = \sum_{a=1}^{r} n_a \alpha_a, \tag{A.6}$$

onde os n_a são números inteiros, todos sendo ou positivos ou negativos.
Um vetor μ satisfazendo (A.3) tal que

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{A.7}$$

para qualquer raíz α, é chamado de *peso*. É possível encontrar um conjunto de pesos λ_a, $a = 1, 2, ..., r$, satisfazendo

$$\frac{2\lambda_a \cdot \alpha_b}{\alpha_b^2} = \delta_{ab}, \tag{A.8}$$

para qualquer raíz simples α_b. Estes pesos são chamados de *pesos fundamentais*. Qualquer peso μ pode ser escritos como uma combinação linear dos pesos fundamentais:

$$\mu = \sum_{a=1}^{r} m_a \lambda_a, \qquad m_a \in \mathbb{Z}. \tag{A.9}$$

Considere agora um estado $\mid \mu\rangle$ satisfazendo (A.3). O estado definido por $E_\alpha \mid \mu\rangle$, satisfaz

$$\begin{aligned} H_i E_\alpha \mid \mu\rangle &= (E_\alpha H_i + [H_i, E_\alpha]) \mid \mu\rangle \\ &= (\mu_i + \alpha_i) E_\alpha \mid \mu\rangle, \end{aligned} \tag{A.10}$$

e portanto $E_\alpha \mid \mu\rangle$ tem peso $\mu + \alpha$. Logo, o estado

$$E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} ... E_{\alpha_n} \mid \mu\rangle, \tag{A.11}$$

tem peso $\mu + \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Por esta razão os geradores E_α são chamados de *operadores de levantamento* (ou *operadores step*).
Um estado $\mid \lambda\rangle$ que satisfaz

$$E_\alpha \mid \lambda\rangle = 0, \quad \text{para qualquer } \alpha > 0 \tag{A.12}$$

é chamado de *estado de peso mais alto* e define uma representação de $\mathcal{G}$. O peso λ é chamado de *peso mais alto* da representação. Todos os outros estados da representação são obtidos a partir do estado de peso mais alto pela aplicação de uma sequência de operadores $E_{-\alpha_n}$. Por exemplo, o estado definido por

$$\mid \mu\rangle = E_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2} ... E_{-\alpha_n} \mid \lambda\rangle, \tag{A.13}$$

tem peso $\lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_n$.
Agora, desejamos avaliar $[E_\alpha, E_\beta]$. Usando a identidade de Jacobi e a eq. (A.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] &= -[E_\alpha, [E_\beta, H_i]] - [E_\beta, [H_i, E_\alpha]] \\
&= (\alpha_i + \beta_i)[E_\alpha, E_\beta],
\end{aligned}$$

Uma vez que a álgebra é fechada sob o comutador segue que $[E_\alpha, E_\beta]$ deve ser um elemento da álgebra, portanto temos três possibilidades:

1- se $\alpha + \beta$ é raíz, então $[E_\alpha, E_\beta] \propto E_{\alpha+\beta}$,

2- se $\alpha + \beta$ não é raíz, então $[E_\alpha, E_\beta] = 0$,

3- se $\alpha + \beta = 0$, então $[E_\alpha, E_\beta]$ deve ser um elemento da sub-álgebra de Cartan, uma vez que ele comuta com todo H_i.

Para finalizar esta seção, deixamos um resumo das relações de comutação de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ semisimples na base de Weyl-Cartan:

$$[H_i, H_j] = 0, \qquad i, j = 1, 2, ..., r = rank\,\mathcal{G} \tag{A.14}$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \tag{A.15}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} & \text{se } \alpha + \beta \text{ é raíz,} \\ \frac{2}{\alpha^2} \alpha \cdot H & \text{se } \alpha + \beta = 0 \text{ ,} \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases} \tag{A.16}$$

onde $N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha}$ são constantes de estruturas.

A.2 Álgebra de Kac-Moody

Podemos estender uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de dimensão finita para uma álgebra de dimensão infinita adicionando um índice extra, $T_a \to T_a^{(n)}$, e acrescentando dois novos geradores:

$$\mathcal{G} = \{T_a\} \to \tilde{\mathcal{G}} = \{T_a^{(n)}, \hat{c}, \hat{d}\}. \tag{A.17}$$

A álgebra $\tilde{\mathcal{G}}$ é chamada *álgebra de Kac-Moody* [21] e seus geradores satistifazem

$$\begin{aligned}
[T_a^{(n)}, T_b^{(m)}] &= f_{ab}^c T_c^{(n+m)} + \hat{c} n \delta_{ab} \delta^{n+m,0}, && \text{(A.18)}\\
[\hat{d}, T_a^{(n)}] &= n T_a^{(n)}, && \text{(A.19)}\\
[\hat{c}, T_a^{(n)}] &= [\hat{c}, \hat{d}] = 0. && \text{(A.20)}
\end{aligned}$$

A identidade de Jacobi também é satisfeita. O novo gerador $\hat{c}$ é chamado de *termo central* e comuta com todos os outros geradores. $\hat{d}$ é o *operador derivação* e através dele a álgebra de Kac-Moody $\tilde{\mathcal{G}}$ pode ser decomposta em sub-espaços graduados, isto é

$$\tilde{\mathcal{G}} = \oplus_n \tilde{\mathcal{G}}_n, \tag{A.21}$$

onde

$$\tilde{\mathcal{G}}_n = \{h \in \tilde{\mathcal{G}} \mid [\hat{d}, h] = nh\}, \tag{A.22}$$

e satisfaz

$$[\tilde{\mathcal{G}}_n, \tilde{\mathcal{G}}_m] \subset \tilde{\mathcal{G}}_{n+m}. \tag{A.23}$$

A base de Weyl-Cartan na álgebra de Kac-Moody, agora é dada por

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{H_i^{(n)}, E_\alpha^{(n)}, \hat{c}, \hat{D}\}, \tag{A.24}$$

onde $\hat{D}$ é o operador derivação na base de Weyl-Cartan e satisfaz

$$\begin{aligned}
[\hat{D}, E_\alpha^{(n)}] &= n E_\alpha^{(n)}, && \text{(A.25)}\\
[\hat{D}, H_i^{(n)}] &= n H_i^{(n)}, \qquad i = 1, 2, ..., r && \text{(A.26)}\\
[\hat{D}, \hat{c}] &= 0. && \text{(A.27)}
\end{aligned}$$

Os demais geradores da base de Weyl-Cartan satisfazem

$$
\begin{aligned}
[H_i^{(n)}, H_j^{(m)}] &= n\,\delta_{ij}\delta_{n+m,0}\hat{c}, && \text{(A.28)}\\
[H_i^{(n)}, E_{\pm\alpha}^{(m)}] &= \pm\alpha_i E_{\pm\alpha}^{(n+m)}, && \text{(A.29)}\\
[E_{\alpha}^{(n)}, E_{-\alpha}^{(m)}] &= \frac{2}{\alpha^2}\alpha\cdot H + \frac{2}{\alpha^2} n\,\delta_{n+m,0}\hat{c}, && \text{(A.30)}\\
[E_{\alpha}^{(n)}, E_{\beta}^{(m)}] &= n_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}^{(n+m)} \qquad \text{se } \alpha+\beta \text{ é raíz}, && \text{(A.31)}\\
[\hat{c}, H_i^{(n)}] &= [\hat{c}, E_{\alpha}^{(n)}] = 0, && \text{(A.32)}
\end{aligned}
$$

onde $n_{\alpha\beta}$ é uma constante de estrutura.
Note que, apesar da álgebra de Kac-Moody $\tilde{\mathcal{G}}$ possuir dimensão infinita a sub-álgebra de Cartan ainda possui dimensão finita e é dada por

$$\tilde{\mathcal{G}}_0 = \{H_i^{(0)}, \hat{c}, \hat{D}\}, \qquad i = 1, 2, ..., r. \tag{A.33}$$

Os geradores $H_i^{(n)}$ com $n \neq 0$ funcionam como operadores de levantamento na álgebra de Kac-Moody e as raízes correspondendentes a $H_i^{(n)}$ são

$$\hat{\alpha} = (0, 0, n), \qquad\qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{A.34}$$

uma vez que,

$$[H_i^{(0)}, H_j^{(n)}] = 0, \qquad [\hat{c}, H_j^{(n)}] = 0, \qquad [\hat{D}, H_j^{(n)}] = n\,H_j^{(n)}. \tag{A.35}$$

As raízes correspondentes aos geradores $E_{\alpha}^{(n)}$ agora são dadas por

$$\hat{\alpha} = (\alpha, 0, n), \qquad \alpha \in \{\alpha\}_{\mathcal{G}}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{A.36}$$

pois,

$$[H_i^{(0)}, E_{\alpha}^{(n)}] = \alpha_i E_{\alpha}^{(n)}, \qquad [\hat{c}, E_{\alpha}^{(n)}] = 0, \qquad [\hat{D}, E_{\alpha}^{(n)}] = n\,E_{\alpha}^{(n)}. \tag{A.37}$$

O conjunto de geradores correspondendo as raízes positivas na álgebra de Kac-Moody agora é $\mathcal{B} = \{E_{\alpha}^{(n)}, E_{-\alpha}^{(n)}, H_i^{(n)}, E_{\alpha}^{(0)}\}$, com $n > 0$. Assim, o estado $\mid \lambda\rangle$ de peso mais alto em $\tilde{\mathcal{G}}$ agora é aniquilado por

$$b \mid \lambda\rangle = 0, \qquad b \in \mathcal{B}. \tag{A.38}$$

Na álgebra de Kac-Moody é introduzido um novo estado $\mid \lambda_0\rangle$ que satisfaz

$$\begin{aligned} \hat{c} \mid \lambda_0\rangle &= c \mid \lambda_0\rangle, && (A.39) \\ h \mid \lambda_0\rangle &= 0, \qquad h \in \tilde{\mathcal{G}} \setminus \{\hat{c}\} && (A.40) \end{aligned}$$

onde c é uma constante.

Apêndice B

Tabela da superálgebra $\tilde{sl}(2,1)$

$$
\begin{aligned}
[K_1^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}] &= 0, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, F_2^{(2m+1/2)}\} &= [(2n+1) - 2m]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[F_1^{(2n+3/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= F_2^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[F_1^{(2n+3/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -F_2^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[F_2^{(2n+1/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
[F_2^{(2n+1/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, F_1^{(2m+3/2)}\} &= 2(K_2^{2(n+m+1)+1} + K_1^{2(n+m+1)+1}), \\
\{F_2^{(2n+1/2)}, F_2^{(2m+1/2)}\} &= -2(K_2^{2(n+m)+1} + K_1^{2(n+m)+1}), \\
\{F_2^{(2n+1/2)}, G_1^{(2m+1/2)}\} &= 2M_1^{2(n+m)+1}, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= -2M_1^{2(n+m+1)+1}, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, G_1^{(2m+1/2)}\} &= 2M_2^{2(n+m+1)} + [(2n+1) + 2m]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
\{F_2^{(2n+1/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= -2M_2^{2(n+m+1)} - [2n + (2m+1)]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_1^{(2n+1)}, F_1^{(2m+3/2)}] &= G_1^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, F_2^{(2m+1/2)}] &= G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_2^{(2n)}, F_1^{(2m+3/2)}] &= -G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_2^{(2n)}, F_2^{(2m+1/2)}] &= -G_1^{2(n+m)+1/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, K_1^{(2m+1)}] &= 2M_2^{2(n+m+1)} + (n+m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[M_1^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}] &= 0, \\
[K_2^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}] &= -(n-m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_2^{(2n)}, K_1^{(2m+1)}] &= 2M_1^{2(n+m)+1}, \\
[M_2^{(2n)}, K_2^{(2m+1)}] &= 0, \\
[G_1^{(2n+1/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= -G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[G_1^{(2n+1/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[G_2^{(2n+3/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= -G_1^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[G_2^{(2n+3/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -G_1^{2(n+m+1)+1/2}, \\
\{G_1^{(2n+1/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= [2n-(2m+1)]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
\{G_1^{(2n+1/2)}, G_1^{(2m+1/2)}\} &= 2(K_2^{2(n+m)+1} - K_1^{2(n+m)+1}), \\
\{G_2^{(2n+3/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= -2(K_2^{2(n+m+1)+1} - K_1^{2(n+m+1)+1}), \\
[M_1^{(2n+1)}, G_1^{(2m+1/2)}] &= -F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, G_2^{(2m+3/2)}] &= -F_2^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[M_2^{(2n)}, G_1^{(2m+1/2)}] &= -F_2^{2(n+m)+1/2}, \\
[M_2^{(2n)}, G_2^{(2m+3/2)}] &= -F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, M_2^{(2m)}] &= -2K_1^{2(n+m)+1}, \\
[M_1^{(2n+1)}, M_1^{(2m+1)}] &= -(n-m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_2^{(2n)}, M_2^{(2m)}] &= (n-m)\delta_{n+m,0}\hat{c}, \\
[K_1^{(2n+1)}, K_1^{(2m+1)}] &= (n-m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c}. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

Referências Bibliográficas

[1] A. Chodos, *Phys. Rev. D* **21**, 2818 (1980).

[2] Veja também dissertação de Mestrado de J.A. Suyama, *IFT*, 46 (1980)

[3] L. A. Ferreira, J. L. Miramontes, J. S. Guillén, *J. Math. Phys.* **38**, 882 (1997).

[4] D. Fioravanti, M. Stanishkov, *Nucl. Phys. B* **591**, 685-700 (2000).

[5] C. A. Tracy, H. Widom, *Comm. Math. Phys.* **179**, 1 (1996).

[6] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *J. Phys. A* **33**, L331 (2000).

[7] P. Mathieu, *J. Math. Phys* **29**, 2499 (1988).

[8] M. Chaichian, P. P. Kulish, *Phys. Letters B* **78**, 413 (1978).

[9] S. Ghosh, D. Sarma, *Nonlinearity* **16**, 411 (2003).

[10] B. Grammaticos, A. Ramani, A. S. Carstea, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 4881 (2001).

[11] H. Aratyn, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *Nucl. Phys. B* **676**, 537 (2004).

[12] H. Aratyn, J. F. Gomes, L. H. Ymai, A. H. Zimerman, hep-th/0409171 v1.

[13] H. Aratyn, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, hep-th/0408231 v1 - apresentado em Praga (República Tcheca) em junho de 2004 e a ser publicado nos anais do "11^{th} International Conference on Supersymetry Methods in Physics".

[14] A. N. Leznov, M. V. Saveliev, *Group Theoretical Methods for Integrations of Nonlinear Dynamical Systems*, Progress in Physics, Vol. 15, Birkhauser Verlag, Berlin (1992).

[15] H. Aratyn, J. F. Gomes, E. Nissimov, S. Pacheva, A. H. Zimerman, *NATO Advanced Research Workshop on Integrable Hierarchies e Modern Physical Theories*, Eds. H. Aratyn and A. Sorin, *nlin.si*/0012042, pg. 243, Chicago (2000)

[16] H. Aratyn, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *Nucl. Phys. B* **46**, 21 (2003), hep-th/0309099.

[17] A. Das, *Integrable models*, *World Scientific*, 162 (1989).

[18] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *Int. Jour. Mod. Phys.***A9** supplement 82 (2004).

[19] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *JHEP* **0401**, 56 (2004).

[20] L. A. Ferreira, *Lecture Notes on Lie Algebra and Lie Groups*, *IFT*, 41 (2000).

[21] J. Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, *Cambridge University*, 100 (1992).