IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

IFT-T.004/07

Modelos de Schwinger, Thirring e Kondo à Temperatura Finita: Um Estudo

Rosevaldo de Oliveira

Orientador

Bruto Max Pimentel Escobar

Co-Orientador

Rodolfo Alván Casana Sifuentes

16/03/2007

Ao gigante que com voz grave e suave acalentava seu rebanho. Ao rei disfarçado de servo que com sua presença contagiava o ambiente. Que com seu jeito simples e quase ingênuo conquistava a todos, principalmente as crianças.
Sinto saudades de você meu pai

À minha família. À minha esposa e à minha filha Júlia. Só nos sentimos realmente vivos quando amamos e somos amados.

Agradecimentos

Este trabalho se deve muito a algumas pessoas e instituições, por diferentes razões, e eu gostaria de agradecer especialmente:

Ao meu orientador Prof. Bruto Max Pimentel Escobar, por ter sido um interlocutor disposto a percorrer novos caminhos, ouvir com interesse e ânimo todas as questões, dúvidas e problemas que surgiam durante o processo de reflexão. Por ser um interlocutor paciente e generoso. Pela compreensão silenciosa dos momentos difíceis pelos quais passei, permitindo que meu tempo interno fluísse, respeitosamente, correndo os riscos inerentes a esta atitude. Por sua amizade, principalmente.

Ao Rodolfo Alván Casana Sifuentes, sou grato pela co-orientação. Por ter sido um companheiro disposto a ajudar-me em qualquer momento. Por sua disposição em discutir e refletir sobre os conceitos envolvidos. Sou grato por sua persistência em mostrar os outros caminhos que poderiam ser seguidos. Pelas excelentes e necessárias sugestões oferecidas durante a fase de correções da tese. Não seria justo se não mencionasse aqueles importantes diálogos entre uma e outra cerveja.

Ao meu amigo Márcio pela longa amizade, e por suas contribuições no que se refere aos conhecimentos básicos de pseudomecânica necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao German por sua forma direta e sincera em dicutir física, e por ter indicado as referências dos trabalhos de H. Yabuki.

Aos demais colegas de pós-graduação, por suas contribuições indiretas.

Aos funcionários e professores do IFT que desempenhando suas funções me deram o suporte necessário para desenvolver este trabalho.

À minha família, por todo apoio, especialmente à minha mãe por suportar, pacientemente, um filho distante da vida familiar e ao meu saudoso pai que é a razão de tudo isto.

À minha esposa, pelo apoio, carinho, amor e compreensão durante esta jornada. Por partilhar comigo todo o processo de produção da tese.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos agradeço, profundamente, e dedico o resultado deste trabalho.

I remain completely confident that the labour I have expended on the science presented here and which has demanded a significant part of my life as well as the most strenuous application of my powers, will not be lost. It is true that I am aware that the form which I have given the science is imperfect and must be imperfect. But I know and feel obliged to state (though I run the risk of seeming arrogant) that even if this work should again remain unused for another seventeen years or even longer, without entering into the actual development of science, still that time will come when it will be brought forth from the dust of oblivion and when ideas now dormant will bring forth fruit. I know that if I also fail to gather around me (as I have until now desired in vain) a circle of scholars, whom I could fructify with these ideas, and whom I could stimulate to develop and enrich them further, yet there will come a time when these ideas, perhaps in a new form, will arise anew and will enter into a living communication with contemporary developments. For truth is eternal and divine.

Hermann Grassmann

Resumo

Estudamos as propriedades termodinâmicas de algumas Teorias de Campo bidimensionais: os modelos de Schwinger, Thirring e Thirring com simetria de gauge (que chamaremos de Modelo de Kondo).

O estudo é baseado na aplicação sistemática do formalismo de Dirac para tratar sistemas vinculados com o intuito de estabelecer a função de Partição via formalismo de integração funcional.

Palavras chaves: Sistemas Singulares, Teoria de Campos à Temperatura Finita, Modelos bidimendionais.

Área de conhecimento: Teoria Quântica de Campos (1.05.03.01-3).

Abstract

We study the thermodynamical properties of some bidimensional Quantum Field Theories: the Schwinger model, Thirring model and the gauged Thirring model.

The study is based on the systematic application of the Dirac's formalism for constrained systems with the intention of establishing the Partition function via the functional integration formalism.

Keywords: Constrained System, Field Theory at Finite Temperature, Bidimensional model.

Área de conhecimento: Quantum Field Theory (1.05.03.01-3).

Conteúdo

Introdução

"A QED dá uma aproximação desta grandeza (momento magnético do elétron) exatamente coincidente com seu valor empírico com um pequeníssimo erro. Uma coincidência tão perfeita (doze algarismos!) não pode com certeza ser fruto do acaso."
Franco Selleri.

A Teoria Quântica (TQ) é sem dúvida uma grande conquista feita pelo homem na direção da busca por uma teoria fundamental para compreensão dos fenômenos naturais. No começo do século XX, todos os esforços foram concentrados na obtenção dos espectros atômicos. Em 1926, foi publicado um trabalho intitulado "*Coupled Harmonic Oscillators. Statistics of Wave Fields*"; tendo como autor Pascual Jordan, e como co-autores Born e Heisenberg. Jordan chamou atenção para o fato que tanto o trabalho de Ehrenfest (1906) quanto o trabalho de Debye (1910) não incluíam a interação entre átomos mais afastados e misturavam conceitos clássicos da teoria ondulatória com *quantum* de luz. Portanto, era necessário um novo tratamento para a teoria da radiação que levasse em conta a interação dos átomos distantes. Ele interpretou o número quântico n_k de cada oscilador quântico, como sendo o número de quanta de luz com correspondente freqüência ν_k. Jordan considerou o problema da vibração de uma corda de comprimento l em uma dimensão com as extremidades fixas. Expandiu o deslocamento da corda $u(x,t)$ em série de Fourier e quantizou as componentes da expansão. O formalismo empregado por Jordan deu origem ao que hoje é conhecido como a Teoria Quântica de Campos (TQC). No ano seguinte, em fevereiro, o trabalho de Jordan foi estendido por Dirac para incluir sistemas com mais de uma dimensão. Neste trabalho Dirac tratou o problema da interação entre um átomo e a radiação eletromagética. Este foi um passo importante na história da (TQ), pois pela primeira vez a descrição ondulatória e a descrição corpuscular estavam sendo tratadas de uma forma sem conflitos. O processo de quantização desenvolvido no trabalho de Dirac foi estendido em outubro de 1927 por Jordan e Klein para incluir bósons massivos, e em janeiro de 1928 Jordan e Wigner trataram o caso de férmions massivos. O tratamento do campo eletromagnético de uma forma relativística foi tratado ainda no mesmo ano por Jordan e Pauli*.

Um pouco mais tarde nasce a Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita (TQCTF),

*Para maiores detalhes sobre o início da TQC veja por exemplo o livro "*Early Quantum Electrodynamics: a source book*" de Arthur I. Miller (Cambridge University Press) 1994.

que foi inicialmente motivada devido ao interesse nas propriedades da matéria sob condições extremas; por exemplo, altas temperaturas ou densidades. Enquanto que no contexto não-relativístico, Matsubara [1] foi o pioneiro a unir mecânica estatística à (TQC). Fradkin [2], usando o formalismo funcional, estudou TQCTF num contexto relativístico. No começo dos anos 70, a TQCTF foi aplicada à problemas cosmológicos [3] e no estudo da restauração de simetria [4]. Muitas linhas de pesquisas têm sido abertas em TQCTF, como: colisões de íons pesados em altas energias, transições de fases, aplicações em matéria condensada. No trabalho de Bernard [5], foi feito um estudo em detalhes de uma teoria de gauge, e ultimamente temos alguns livros e resenhas para uma introdução no assunto [6, 7, 8, 9, 10].

Neste trabalho estamos interessados em sistemas em equilíbrio térmico, e portanto usaremos o formalismo do tempo imaginário que será suficiente para o nosso propósito. Processos fora do equilíbrio podem ser descritos no mesmo formalismo desde que façamos uma continuação analítica para o tempo real ou alternativamente pelo formalismo do contorno com tempo fechado de Schwinger [13] ou Termal Field Dynamics (TFD) [11, 12].

No primeiro Capítulo, abordaremos uma teoria não-singular. Como um exemplo estudaremos o campo escalar complexo, que descreve bósons carregados massivos. A função de partição será encontrada pelo método de integração funcional com tempo imaginário [9], método este de quantização que será adotado ao longo deste texto.

No segundo Capítulo, um estudo sobre o gás de férmions livres e o gás de fótons livres será apresentado. Nos dois casos, as teorias que descrevem estes sistemas são teorias singulares [14]. Trataremos estas teoria singulares via o formalismo Hamiltoniano de Dirac [15]. A teoria que descreve o gás de Fótons livres possui apenas vínculos de primeira classe, portanto pode ser quantizada usando o formalismo desenvolvido por Fadeev [16]. Para o caso onde estão presentes vínculos de segunda classe, a quantização destas teorias pelo método de integração funcional com variáveis pares foi desenvolvida por Senjanovic [18] e H. Yabuki [17]. No caso da descrição do gás de Férmions livres, a teoria possui vínculos de segunda classe e é descrita por variáveis grassmannianas. O Apêndice **2-C** contém uma breve introdução à álgebra de Grassmann e Pseudomecânica [19]. Para encontrar a amplitude de transição de uma teoria com férmions no formalismo de integração funcional faz-se necessário uma extensão do trabalho de P. Senjanovic. Isto foi feito pela primeira vez por G. Senjanovic [20]. No Apêndice **2-D** generalizamos os resultados de P. Senjanovic [18] para incluir variáveis ímpares. Para obter a função de partição de teorias singulares, é necessário ter a amplitude de transição bem definida. Em posse dos resultados do Apêndice **2-D** a função de partição de um sistema que possui tanto férmions quanto bósons, poderá ser encontrada.

No terceiro Capítulo será apresentado o Modelo de Schwinger (MS) (QED_{1+1}) [21], que é a Eletrodiâmica Quântica (QED) em uma dimensão espacial e uma temporal. Para obter a amplitude de transição seguindo o método adotado por Senjanovic, faz-se necessário um estudo sobre a estrutura singular da teoria baseada no formalismo generalizado de Dirac. Este modelo (MS) é resolvido de forma exata, isto é, podemos calcular qualquer função de Green da teoria sem usar teoria de pertubação. Em outras palavras, os propagadores e vértices são completos. Ainda neste capítulo, as funções de Green e as equações de Schwinger-

Dyson são encontradas.

No quarto Capítulo calcularemos a função de Partição do Modelo de Thirring (MT). O modelo de Thirring é uma teoria em $(D = 1 + 1)$ de Férmions com uma interação quártica, assim como o modelo de Schwinger é uma teoria exatamente solúvel [22]. Para encontrar a função de partição no formalismo de integração funcional via formalismo de Senjanovic, a análise de vínculos da teoria faz-se necessária.

No quinto capítulo trataremos o modelo de Kondo ou Modelo de Thirring com simetria de gauge [23] à temperatura finita. Kondo encontrou outra formulação para o modelo de Thirring, versão essa que é invariante de gauge. Para obter a teoria quântica Kondo usou o formalismo de Fradkin-Batalin. E para limites adequados das constantes de acoplamento, o modelo de Schwinger e o Modelo de Thirring foram encontrados como caso limite do Modelo Kondo à temperatura zero. Nesta tese estudamos a teoria quântica para o modelo Kondo usando o formalismo de integração funcional seguindo nossa extensão do trabalho de Senjanovic, e analisamos os limites das constantes de acoplamento. Estes resultados e suas conseqüências serão discutidos no quinto Capítulo e nos Comentários Finais.

A ordem que os Capítulos foram dispostos não foi por acaso porque para o estudo do modelo Kondo é necessário conhecer o Modelo de Thirring e o Modelo de Schwinger.

Bibliografia

[1] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).

[2] E. S. Fradkin, D. A. Nauk. **98**, 47 (1954). E. S. Fradkin, D. A. Nauk. **100**, 897 (1955). E. S. Fradkin, Sov. Phys. JETP **29**, 259 (1955). E. S. Fradkin, Sov. Phys. JETP, 121 (1955). E. S. Fradkin, Sov. Phys. JETP **2**, 631 (1956). E. S. Fradkin, Sov. Phys. JETP, 148 (1956). E. S. Fradkin, Sov. Phys. JETP **36**, 912 (1959). E. S. Fradkin, Sov. Phys. JETP **11**, 114 (1960).

[3] D.A. Kirznits JETP Lett. **15**, 529 (1972). D.A. Kirznits e A.D. Linde, Phys. Lett. **B 42**, 471 (1972). Ann. Phys. **101**, 195 (1976).

[4] S. Weinberg, Phys. Rev. **D 9** 3357 (1974). L. Dolan, R. Jackin, Phys. Rev. **D 9** 3320 (1974). J. I. Kapusta, Phys. Rev. **D 24**, 426 (1981).

[5] C. W. Bernard, Phys. Rev. **D 9** 3312 (1974).

[6] H. E. Haber and H. A. Weldon, Phys. Rev. Lett. **46**, 1497 (1981).

[7] H. E. Haber and H. A. Weldon, Phys. Rev. **D 25**, 502 (1982).

[8] N. P. Landsman and C. G. van Weert, Physics Reports **145** 141 (1987).

[9] J. I. Kapusta, "*Finite Temperature Field Theory*" (Cambridge University Press, 1989).

[10] M. Le Bellac, "*Thermal Field Theory*", (Cambridge University Press, 1996).

[11] H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachik, "*Termal Field Dynamics and Condensed States*", (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[12] H. Umezawa, "*Advanced Field Theory: Micro, Macro and Termal Field Physics*", (AIP Press, 1995).

[13] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961). P.M. Bakshi, K.T. Mahanthappa, J. Math. Phys. **4**, 1 (1963). L.V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1964). K. C. Chou, Z. B. Su, B. L. Hao and L. Yu, Phys. Rep. **118**, 1 (1985). N.P. Landsman, Ch.G. van Weert, Phys. Rep. **145**, 141 (1987).

[14] P. G. Bergmann, Phys. Rev. **75**, 860 (1949). P. G. Bergmann and J. H. M. Brunings, Rev. Mod. Phys. **21**, 480 (1949). P. G. Bergmann, R. Penfield, R. Schiller and H. Zatzkis, Phys. Rev. **80**, 81 (1950). P. G. Bergmann and J. L. Anderson, Phys. Rev. **83**, 1018 (1951).

[15] P. A. M. Dirac, Canadian Jornal of Mathematics **2**, 129 (1950). P. A. M. Dirac, Canadian Jornal of Mathematics **3**, 1 (1951). P. A. M. Dirac, "*Lectures on Quantum Mechanics*", (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964).

[16] L. D. Faddeev, Theor. Math. Phys. **1**, 1 (1970).

[17] H. Yabuki, "*Null-Plane Quantization in the Hamiltonian Form of the Feynman Path Integral*", Kyoto University Preprint RIMS-183, May (1975).
Neste trabalho o autor generaliza o trabalho de Faddeev, incluindo vínculos de segunda classe no formalismo de integração funcional.

[18] Senjanovic P., Ann. Phys. (N.Y) **100**, 227 (1976).
De uma forma idependente de H. Yabuki o autor também generaliza o trabalho de Faddeev, incluindo vínculos de segunda classe no formalismo de integração funcional. Com base neste trabalho foi possível no Apêndice (2-D) uma generalização incluindo variáveis pares e ímpares. Yan-gang Miao (china) publicou uma errata deste artigo, Annals of Physics **209** 248 (1991)

[19] Casalbuoni R.; Nuovo Cim. **33**, 389 (1976).
Para o desenvolvimento de uma teoria clássica para os Férmions, é necessário estudar Pseudomecânica.

[20] G. Senjanovic, "*Hamiltonian Formulation and Quantization of the Spin 3/2 Field*", Phys. Rev. **D 16**, 307 (1977).

[21] Julian Schwinger, Phys. Rev. **125**, 397 (1962). Julian Schwinger, Phys. Rev. **125**, 2425 (1962).

[22] W. Thirring, Ann. Phys. **3**, 91 (1958).

[23] Kei-Ichi Kondo, Nuclear Phys. **B 450**, 251 (1995).

Capítulo 1

Sistemas Não-Singulares à Temperatura Finita

Seja a Lagrangiana $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ definindo um sistema físico descrito pelo conjunto de coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ e suas respectivas velocidades $\{\dot{q}_i\}$, entende-se por um sistema não-singular aquele cuja matriz Hessiana, $\mathbb{H}$, definida por

$$\mathbb{H}_{ij} \equiv \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \tag{1.1}$$

possui determinante não nulo, $\det \mathbb{H} \neq 0$.

Um sistema físico singular possuirá uma matriz Hessiana singular, $\det \mathbb{H} = 0$. Assim, a equação (1.1) diz respeito à independência dos momentos p_i em relação as velocidades $\dot{q}_i$, ou seja, em uma teoria singular não é possível expressar todos os momentos em função de suas velocidades correspondentes. A Hamiltoniana da teoria, em primeira análise, dependerá das velocidades e, os momentos não serão um conjunto de variáveis linearmente independentes.

No presente Capítulo, estudaremos um modelo de uma teoria de Campos não-singular: O campo escalar complexo. Além de se tratar de um exemplo de uma teoria não-singular, a sua simplicidade permite se aprender como deduzir as quantidades termodinâmicas usando o método de integração funcional. Do ponto de vista físico, o campo escalar complexo descreve um sistema de partículas massivas carregadas relativísticas. Diversas características deste modelo têm sido amplamente estudadas na literatura, como um exemplo podemos citar a condensação de Bose-Einstein. A condensação de Bose-Einstein é uma fase da matéria formada por bósons, que sob certas condições uma fração das partículas atinge o mais baixo estado de energia, e nestas condições os efeitos quânticos podem ser observados em escala macroscópica. Estudaremos este fenômeno no contexto do campo escalar complexo cujas ferramentas matemáticas a serem utilizadas serão muito úteis para o desenvolvimento dos Capítulos seguintes.

1.1 Bósons à Temperatura Finita

A densidade Lagrangiana que descreve um sistema de bósons com carga positiva e negativa é definida da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - V(\Phi^*, \Phi), \tag{1.2}$$

onde $\Phi^* \neq \Phi$ são campos complexos e são tratados como variáveis independentes. Notemos que esta densidade Lagrangiana (1.2) é invariante por uma transformação de fase da seguinte forma

$$\Phi \to \Phi e^{-i\alpha}, \quad \Phi^* \to \Phi^* e^{i\alpha}, \tag{1.3}$$

o parâmetro α é constante e real. Do teorema de Noether encontramos que a carga conservada é dada por

$$Q = i \int d^3x \left(\Phi^*(x)\dot{\Phi}(x) - \Phi(x)\dot{\Phi}^*(x) \right). \tag{1.4}$$

Com o propósito de definir a densidade Hamiltoniana canônica da teoria, os momentos dos campos devem ser calculados, e estes são

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi}^*, \quad \text{e} \quad \Pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\Phi}. \tag{1.5}$$

Aqui é importante notar que a matriz Hessiana

$$H_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^i \partial \dot{\Phi}^j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

do sistema, não é singular, isto é $\det H_{ij} \neq 0$. Portanto, a densidade Hamiltoniana que é definida através de uma transformação de Legendre será função apenas dos momentos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi \dot{\Phi} + \Pi^* \dot{\Phi}^* - \mathcal{L} \\ &= \Pi^* \Pi + \nabla \Phi^* \nabla \Phi + m^2 \Phi^* \Phi + V(\Phi^*, \Phi). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Para definir a função de Partição, devemos levar em conta o fato da teoria possuir uma carga conservada. Este vínculo (conservação da carga), deve ser introduzido através de um multiplicador de Lagrange (potencial químico) da seguinte forma

$$Z_\beta = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{Q})}, \tag{1.7}$$

sendo $\beta = \dfrac{1}{T}$, T (temperatura), μ é o potencial químico.

No formalismo de integração funcional, a função de Partição é

$$Z_\beta = \int D\Pi^* D\Pi \int D\Phi^* D\Phi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[i\Pi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + i\Pi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial \tau} - \mathcal{H} + \mu Q \right] \right\}. \tag{1.8}$$

É conveniente separarmos a parte real e imaginária do campo, $\Phi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ e do momento conjugado $\pi_{1,2} = \dfrac{\partial \phi_{1,2}}{\partial t}$. Fazendo esta substituição na densidade Hamiltoniana, obtemos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\pi_1^2 + \pi_2^2 + (\nabla \phi_1)^2 + (\nabla \phi_2)^2 + m^2 \phi_1^2 + m^2 \phi_2^2 \right] + V(\phi_1, \phi_2), \tag{1.9}$$

e a carga conservada torna-se

$$Q = \int d^3x(\phi_2\pi_1 - \phi_1\pi_2). \tag{1.10}$$

A função de Partição em termos destas novas variáveis é dada por

$$\begin{aligned} Z_\beta &= \int D\pi_1 D\pi_2 \int D\phi_1 D\phi_2 \qquad (1.11)\\ &\times \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} + i\pi_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} - \mathcal{H} + \mu(\phi_2\phi_1 - \phi_1\pi_2)\right)\right], \end{aligned}$$

e após integrarmos os momentos, encontramos que

$$\begin{aligned} Z_\beta &= N\int D\phi_1 D\phi_2 \exp\left\{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\mu\phi_2 + i\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(i\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} - \mu\phi_1\right)^2\right]\right\} \qquad (1.12)\\ &\times \exp\left\{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 - V(\phi_1,\phi_2)\right]\right\} \end{aligned}$$

onde N é uma constante de normalização infinita e é irrelevante para as propriedades termodinâmicas do sistema físico.

Na continuação, consideremos o caso $V(\phi_1,\phi_2) = 0$, e após de algumas integrações por partes podemos reescrever Z_β como

$$Z_\beta = N\int D\phi_1 D\phi_2 e^S, \tag{1.13}$$

onde

$$S = \int_0^\tau \int d^3x \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

e com

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\Delta}{2} - m^2 \quad , \quad A_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\Delta}{2} - m^2 \\ A_{12} &= -i\mu\frac{\partial}{\partial\tau} \quad , \quad A_{21} = i\mu\frac{\partial}{\partial\tau}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Devido ao fato da coordenada τ ser periódica e a coordenada x estar limitada a um volume finito do sistema, as componentes de Φ podem ser expandidas em uma série de Fourier da forma

$$\phi_1(\tau,x) = \sqrt{2}\,\xi\cos\theta + (\frac{\beta}{V})^{1/2}\sum_n\sum_p \exp\left[i(p.x + \omega_n\tau)\right]\varphi_1(n,p) \tag{1.16}$$

$$\phi_2(\tau,x) = \sqrt{2}\,\xi\sin\theta + (\frac{\beta}{V})^{1/2}\sum_n\sum_p \exp\left[i(p.x + \omega_n\tau)\right]\varphi_2(n,p) \tag{1.17}$$

onde ξ e θ são independentes de (τ, x), e $\varphi_1(0,0) = \varphi_2(0,0) = 0$. Este procedimento consiste em separar a contribuição do estado de $p = 0$ e $n = 0$. Dedicamos o Apêndice **1.A** para maiores detalhes sobre a expansão em série de Fourier.

Substituindo (1.16) e (1.17) em (1.13), e observando que o Jacobiano da transformação é a unidade (ver Apêndice **1.B**), a função de Partição torna-se

$$Z_\beta = N \prod_n \prod_p \int d\varphi_1(n,p) d\varphi_2(n,p) e^S, \tag{1.18}$$

onde

$$S = \beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 - \frac{1}{2}\sum_n \sum_p \begin{pmatrix} \varphi_1(n,p) & \varphi_2(n,p) \end{pmatrix} D_{n,p} \begin{pmatrix} \varphi_1(n,p) \\ \varphi_2(n,p) \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

e $D_{n,p}$ é uma matriz de 2×2 dada por

$$D_{n,p} = \beta^2 \left(\begin{array}{c|c} \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 & -2\mu\omega_n \\ \hline 2\mu\omega_n & \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 \end{array} \right). \tag{1.20}$$

Para chegar no resultado acima usamos os resultados obtidos no Apêndice **C**, as equações (1.73) e (1.75); e o fato que $\varphi_1(n,p)$ e $\varphi_2(n,p)$ são reais, portanto $\varphi_r(-n,-p) = \varphi_r(n,p)$; e $\omega^2 = p^2 + m^2$.

Escrevamos o momento da forma $(p = p_m)$, $(m = 0, \pm1, \pm2, \dots)$, assim, a eq.(1.18) expressa-se de forma explícita como

$$Z_\beta = \exp\Big[\beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2\Big]\ N \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \int d\varphi_1(n,m) d\varphi_2(n,m) \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_n \sum_m S_{n,m}\right], \tag{1.21}$$

onde

$$S_{n,m} = \begin{pmatrix} \phi_1(n,m) & \phi_2(n,m) \end{pmatrix} D_{n,m} \begin{pmatrix} \phi_1(n,m) \\ \phi_2(n,m) \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

Consideremos um elemento deste produto

$$Z_\beta(n,m) = N \int d\varphi_1(n,m) d\varphi_2(n,m)\ \exp\left\{-\frac{1}{2} S_{n,m}\right\} = N 2\pi \left[\det D_{n,m}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.23}$$

Assim, a função de Partição é

$$Z_\beta = \ N' \exp\Big[\beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2\Big] \times \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\det D_{n,m}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.24}$$

Sendo calculado o determinante da matriz (2×2) expressa na equação (1.20), e tomando o logarítmo dos dois lados da equação (1.24) obtemos

$$\ln Z_\beta = cte + \beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 + \ln\left(\prod_n \prod_m \left[\left(\omega_n^2 + \omega^2 + \mu^2\right)^2 - 4\omega^2\mu^2 \right]^{-1/2} \right). \tag{1.25}$$

A expressão acima, (1.25), pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \ln Z_\beta &= \beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 - \frac{1}{2}\sum_{n,p} \ln\left\{\beta^2\left[\omega_n^2 + (\omega+\mu)^2\right]\right\} \\ & -\frac{1}{2}\sum_{n,p} \ln\left\{\beta^2\left[\omega_n^2 + (\omega-\mu)^2\right]\right\}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Com o intuito de calcular as somas presentes na equação anterior escrevemos as seguintes identidades

$$\ln\left[(2\pi n)^2 + \beta^2(\omega-\mu)^2\right] = \int_1^{\beta^2(\omega-\mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} + \ln\left[1 + (2\pi n)^2\right], \tag{1.27}$$

e

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + (\frac{\theta}{2\pi})^2} = \frac{2\pi^2}{\theta}\left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1}\right), \tag{1.28}$$

Então, fazendo uso delas, as somas no lado direito da equação (1.26) são

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln\left[(2\pi n)^2 + \beta^2(\omega\pm\mu)^2\right] = \int_1^{\beta(\omega\pm\mu)} d\,\theta \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1}\right) + \sum_{n=\infty}^{+\infty} \ln\left[1 + (2\pi n)^2\right], \tag{1.29}$$

desprezamos o ultimo termo constante, e, assim, obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln\left[(2\pi n)^2 + \beta^2(\omega\pm\mu)^2\right] = \beta(\omega\pm\mu) - 1 + \int_1^{\beta(\omega\pm\mu)} d\,\theta \frac{2}{e^\theta - 1}. \tag{1.30}$$

Podemos calcular a integral de duas maneiras, para $e^{-\theta} < 1$

$$\frac{d}{d\theta}\ln[1 - e^{-\theta}] = \frac{d\theta}{e^\theta - 1}, \tag{1.31}$$

e para $e^{-\theta} > 1$

$$\frac{d}{d\theta}\ln[e^{-\theta} - 1] = \frac{d\theta}{e^\theta - 1}. \tag{1.32}$$

No entanto, o limite de integração da equação (1.30) nos leva a considerar o caso $e^{-\theta} < 1$. Para este caso notamos que esta integração é válida para $m > |\mu|$ e, então, desprezando novamente o termo constante, obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln\left[(2\pi n)^2 + \beta^2(\omega\pm\mu)^2\right] = \beta(\omega\pm\mu) + 2\ln\left[1 - e^{-\beta(\omega\pm\mu)}\right]. \tag{1.33}$$

Finalmente, a função de Partição (1.26) para o campo escalar complexo fica

$$\ln Z_\beta = \beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 - \sum_p \left[\beta\omega + \ln(1 - e^{-\beta(\omega+\mu)}) + \ln(1 - e^{-\beta(\omega-\mu)})\right]. \tag{1.34}$$

Portanto a energia livre F pode ser deduzida da equação acima e é

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\ln Z_\beta}{\beta} \\ &= V(m^2 - \mu^2)\xi^2 + \sum_p \left[\omega + \frac{1}{\beta}\ln(1 - e^{-\beta(\omega+\mu)}) + \frac{1}{\beta}\ln(1 - e^{-\beta(\omega-\mu)})\right]. \end{aligned} \tag{1.35}$$

O parâmetro ξ não é determinado *a priori.* Este parâmetro, como veremos mais adiante, será relacionado com a densidade de carga carregada pelas partículas do condensado. Para um valor fixo de β e μ, encontramos que

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \xi} = 2\beta V(\mu^2 - m^2)\xi = 0, \tag{1.36}$$

isto significa que $\xi = 0$, exceto para o caso $|\mu| = m$ quando ξ fica indeterminado.

Estamos interessados no caso $\xi \neq 0$, isto é, quando $|\mu| = m$.

Assim, primeiro consideramos que $|\mu| < m$ então na equação (1.34) $\xi = 0$, e calculamos a densidade de carga

$$\rho = \frac{1}{\beta V}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}\right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+\mu)} - 1}\right), \tag{1.37}$$

que dá o potencial químico μ como uma função implícita de ρ e T. Para T maior de alguma temperatura crítica, T_c, podemos sempre encontrar um valor de μ tal que a equação (1.37) seja válida. Supondo que a densidade de carga ρ é mantida fixa e a temperatura é abaixada, o potencial químico μ aumentará até alcançar o valor $|\mu| = m$ em $T = T_c$, então, na região $T \geqslant T_c \gg m$ obtemos

$$|\rho| \approx \frac{1}{3}\, mT^2. \tag{1.38}$$

Quando $|\mu| = m$ e a temperatura é abaixada ainda mais tais que $T < T_c$, a densidade de carga é

$$\rho = \frac{1}{\beta V}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}\right)_{\mu=m} = \rho_0 2m\xi^2 + \rho^*(\beta, \mu = m) \tag{1.39}$$

onde $\rho_0 = 2m\xi^2$ é a carga vinda do condensado e $\rho^*(\beta, \mu = m)$ é a contribuição vinda das partículas com momento não nulo e é

$$\rho^*(\beta, \mu = m) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-m)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+m)} - 1}\right), \tag{1.40}$$

A temperatura crítica T_c é definida quando o potencial químico atinge seu valor máxima $|\mu| = m$, mas o parâmetro ξ ainda é zero, isto é

$$\rho = \rho^*(\beta_c, \mu = m), \tag{1.41}$$

que implica em

$$T_C = \left(\frac{3|\rho|}{m}\right)^{1/2}. \tag{1.42}$$

Na temperatura $T < T_C$, (1.39) é a equação para a densidade de carga $\rho - \rho_0$ dos estados com $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$,

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{3}\, mT^2\,, \tag{1.43}$$

a densidade de carga no estado $(\mathbf{p} = \mathbf{0})$ é dada por

$$\rho_0 = \rho\left(1 - \left[\frac{T}{T_C}\right]^2\right)\,, \tag{1.44}$$

A densidade de carga no estado $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ pode aumentar até alcançar a densidade total do sistema. Observemos que (1.42) nos leva para um importante resultado: a condição necessária para que um gás ideal de Bose de massa m se condense numa temperatura relativística ($T_C \gg m$), é quando $\rho \gg m^3$. Literatura adicional sobre condensação de Bose–Einstein pode ser encontrada em [1.1, 1.13, 1.14].

1.2 Apêndices

A Desenvolvimento de Funções em Séries Ortonormais

Assim como um vetor $\mathbf{r}$ em 3 dimensões pode ser expandido em um conjunto de vetores mutuamente ortogonais $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sob a forma $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, existe a possibilidade de desenvolver uma função $\phi(x)$ em um conjunto de funções ortonormais $u_i(x)$, com $(i = 1, 2, \ldots)$, ver por exemplo a referência [8].

Para o caso discreto,(i e $j = 1, 2, 3 \ldots$) temos que

$$
\begin{aligned}
(u_i, u_j) &= \delta_{i,j} && (1.45)\\
\sum_i u_i(x) u_i^*(y) &= \delta(x - y) && (1.46)\\
\phi(x) &= \sum_i c_i u_i(x) && (1.47)\\
c_i = (u_i, \phi) &= \int dx\ u_i^*(x)\phi(x). && (1.48)
\end{aligned}
$$

Enquanto que para o caso contínuo (α)

$$
\begin{aligned}
(u_\alpha, u_{\alpha'}) &= \delta(\alpha - \alpha') && (1.49)\\
\int d\alpha\ u_\alpha(x)\ u_\alpha^*(y) &= \delta(x - y) && (1.50)\\
\phi(x) &= \int d\alpha\ c_\alpha\ u_\alpha(x) && (1.51)\\
c_\alpha = (u_\alpha, \phi) &= \int dx\ u_\alpha^*(x)\ \phi(x). && (1.52)
\end{aligned}
$$

No presente Capítulo temos, por exemplo, o conjunto discreto $u_n(\tau) = C\, e^{i\omega_n \tau}$, C um fator de normalização tal que a base $\{u_n(\tau)\}$ é ortonormal. O desenvolvimento da função $\phi(\tau)$ definida no intervalo $[0, \beta]$ e satisfazendo $\phi(\tau + \beta) = \phi(\tau)$ é definido da forma

$$
\phi(\tau) = \sum_n c_n u_n(\tau), \tag{1.53}
$$

e usando a condição de periodicidade obtemos que $\omega_n = \dfrac{2\pi n}{\beta}$.

Usando a definição do produto escalar eq.(1.45) obtemos

$$(u_n, u_{n'}) = \int_0^\beta d\tau \;\; e^{i(\omega_n-\omega_{n'})\tau}\,|C|^2 = \begin{cases} \beta|C|^2 & , \quad n = n' \\ \\ \dfrac{|C|^2}{i(\omega_n-\omega_{n'})}\left[e^{i(\omega_n-\omega_{n'})}-1\right] & , \quad n \neq n' \end{cases} \tag{1.54}$$

do fato que $\omega_n = \dfrac{2\pi n}{\beta}$ podemos mostrar que para $n \neq n'$ o produto escalar $(u_n, u_{n'}) = 0$. Usando a condição de ortonormalidade podemos escolher C tais que $\beta|C|^2 = 1$, então, obtemos $C = \beta^{-1/2}$.

Dos resultados acima, podemos reescrever a equação (1.54) como

$$(u_n, u_{n'}) = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau \;\; e^{i(\omega_n-\omega_{n'})\tau} = \delta_{n,n'}, \tag{1.55}$$

onde $\delta_{n,n'}$ é a delta de Kronecker.

A seguir precisamos provar que as bases obedecem a eq.(1.46), em princípio temos

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n(\tau-\tau')} = F(\tau-\tau'). \tag{1.56}$$

O nosso objetivo é mostrar que $F(\tau-\tau') = \delta(\tau-\tau')$. Para isto, multiplicamos $e^{-i\omega_{n'}\tau}$ e integramos em τ

$$e^{-i\omega_{n'}\tau'} = \int_0^\beta d\tau \;\; e^{-i\omega_{n'}\tau}F(\tau-\tau') \tag{1.57}$$

a expressão acima só é satisfeita se $F(\tau-\tau') = \delta(\tau-\tau')$. Observe que para isto usamos um resultado conhecido, portanto, a prova é indireta. Para demonstrarmos de uma forma direta procedemos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} F(\tau-\tau') &= \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n(\tau-\tau')} = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\omega_n(\tau-\tau')} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega_n(\tau-\tau')} \\ &= \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left[\omega_n(\tau-\tau')\right], \end{aligned} \tag{1.58}$$

Por comodidade definamos $x \equiv \frac{\pi(\tau-\tau')}{\beta}$, e a expressão acima fica da seguinte forma

$$F(\tau-\tau') = \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2nx) \;\; . \tag{1.59}$$

A soma pode ser calculada para um número M finito, assim, temos

$$\sum_{n=1}^{M}\cos(2nx) = \frac{\sin\left[(2M+1)x\right]}{2\sin(x)} - \frac{1}{2}. \tag{1.60}$$

Usando eq.(1.60) podemos escrever eq.(1.59) como

$$F(\tau-\tau') = \lim_{M\to\infty} F_M(\tau-\tau'), \tag{1.61}$$

onde

$$F_M(\tau-\tau')=\frac{1}{\beta}\frac{\sin\left[(2M+1)x\right]}{\sin(x)} \tag{1.62}$$

É fácil mostrar que quando $\tau=\tau'\to x=0$

$$F(\tau-\tau')=\lim_{M\to\infty}\lim_{x\to 0}F_M(\tau-\tau')\to\infty. \tag{1.63}$$

esta é uma das propriedades da δ-Dirac. Em seguida mostramos uma outra propriedade da δ-Dirac

$$\int_0^\beta d\tau\ F(\tau-\tau')=1 \tag{1.64}$$

Partimos da equação (1.58),

$$\begin{aligned}\int_0^\beta d\tau\ F(\tau-\tau') &= 1+\frac{2}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\beta d\tau\ \ \cos\left[\omega_n(\tau-\tau')\right]\\ &= 1+\frac{2}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\Big(\ \sin\left[\omega_n(\beta-\tau')\right]+\sin\left[\omega_n\tau'\right]\Big)\\ &= 1+\frac{2}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_n}\sin\left[\omega_n\frac{\beta}{2}\right]\cos\left[\omega_n\left(\frac{\beta}{2}-\tau'\right)\right]\end{aligned} \tag{1.65}$$

$\sin\left[\omega_n\frac{\beta}{2}\right]=\sin\left(n\pi\right)=0$, então, a soma é nula e concluímos que

$$\int_0^\beta d\tau\ F(\tau-\tau')=1 \tag{1.66}$$

e desta forma mostramos que $F(\tau-\tau')=\delta(\tau-\tau')$.

Sintetizando nossos resultados, temos mostrado as seguintes propriedades

$$\delta_{n,n'}=\frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau\ \ e^{i(\omega_n-\omega_{n'})\tau}, \tag{1.67}$$

$$\delta(\tau-\tau')=\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i\omega_n(\tau-\tau')}. \tag{1.68}$$

A.1 Expansão para $\phi(\tau,x)$

Definamos a expansão na parte espacial da seguinte forma

$$\phi(\tau,x)\equiv\beta\sum_l\left(\frac{e^{ik_lx}}{\sqrt{V}}\right)\chi(\tau,k_l), \tag{1.69}$$

e a inversa desta expansão como

$$\chi(\tau,k_l)=\frac{1}{\beta}\int_0^L d^3y\left(\frac{e^{-ik_ly}}{\sqrt{V}}\right)\phi(\tau,y). \tag{1.70}$$

A expansão da parte temporal é definida da seguinte maneira

$$\chi(\tau,k_l)\equiv\sum_n\left(\frac{e^{i\omega_n\tau}}{\sqrt{\beta}}\right)\psi(\omega_n,k_l), \tag{1.71}$$

e sua inversa desta é definida por

$$\psi(\omega_n, k_l) = \int_0^\beta d\tau \left(\frac{e^{-i\omega_n \tau}}{\sqrt{\beta}} \right) \chi(\tau, k_l). \tag{1.72}$$

As definições acima não foram por acaso, definimos desta maneira para que as amplitudes sejam adimensionais *.

Podemos verificar que estas definições estão coerentes com as seguintes identidades

$$\delta_{n,n'} = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau \;\; e^{i(\omega_n - \omega_{n'})\tau}, \tag{1.73}$$

$$\delta(\tau - \tau') = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n(\tau - \tau')}, \tag{1.74}$$

$$\delta_{l,l'} = \frac{1}{V} \int_0^L d^3x \;\; e^{i(k_l - k_{l'})x}, \tag{1.75}$$

$$\delta(x - x') = \frac{1}{V} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik_l(x - x')}. \tag{1.76}$$

Podemos escrever (1.69) usando (1.71)

$$\phi(\tau, x) \equiv \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_l \sum_n e^{i(k_l x + \omega_n \tau)} \psi(\omega_n, k_l), \tag{1.77}$$

e podemos escrever (1.72) usando (1.70)

$$\psi(\omega_n, k_l) = \frac{1}{\beta\sqrt{\beta V}} \int_0^\beta d\tau \int_0^L d^3x e^{-i(\omega_n \tau + k_l x)} \phi(\tau, x). \tag{1.78}$$

Para o estudo da condensação, foi conveniente separar a contribuição do estado $n = 0$ e $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Este procedimento pode ser feito na eq.(1.78), proporcionando o seguinte resultado

$$\psi(0, 0) = \frac{1}{\beta\sqrt{\beta V}} \int_0^\beta d\tau \int_0^L d^3x \;\; \phi(\tau, x) \equiv \sqrt{2}\xi\alpha(\theta), \tag{1.79}$$

onde θ e ξ são independentes de (τ, x). As amplitudes são definidas da seguinte forma

$$\phi(\tau, x) \equiv \sqrt{2}\xi\alpha(\theta) + \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_l \sum_n e^{i(k_l x + \omega_n \tau)} \phi_{n,l}, \tag{1.80}$$

a nova amplitude $\phi_{n,l}$ é zero para $n = l = 0$, isto é $\phi_{0,0} = 0$.

*O campo possui dimensão de inverso de comprimento

B O Jacobiano da Transformação

O operador campo $\hat{\phi}(\tau, x)$ na representação de Heisenberg satisfaz a seguinte equação de autovalor

$$\hat{\phi}(\tau_i, x)|\phi_i(x), \tau_i >= \phi_i(x)|\phi_i(x), \tau_i >, \tag{1.81}$$

e o que esta equação nos diz é que para cada valor do tempo τ_i temos um conjunto de autofunções $\phi_i(x)$ que são associadas à base (autovetores) $|\phi_i(x), \tau_i >$. Esta base é completa e ortogonal

$$\int d\phi_i(x)|\phi_i(x) >< \phi_i(x)| = 1 \tag{1.82}$$

$$< \phi_i(x)|\phi_j(x) > = \delta[\phi_i(x) - \phi_j(x)]. \tag{1.83}$$

Devido à periodicidade das autofunções $\phi(\tau_i + \beta, x + L) = \phi(\tau_i, x)$, estas autofunções podem ser expandidas para cada valor do tempo τ_i em uma séries de Fourier da forma

$$\phi(\tau_i, x) = \sum_n \sum_p u_{np}(\tau_i, x)\psi_n(p), \tag{1.84}$$

onde o conjunto $\{u_{np}(\tau_i, x) = e^{i(px+\omega_n\tau)}\}$ é ortonormal.

Discretizando o intervalo temporal e o espacial em N e M partes, respectivamente; a equação (1.84) pode ser expressa em forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \phi(\tau_1, x_1) \\ \phi(\tau_2, x_1) \\ \phi(\tau_2, x_2) \\ \vdots \\ \phi(\tau_N, x_M) \end{pmatrix} = \lim_{N,M\to\infty} \begin{pmatrix} u_{n_1p_1}(\tau_1, x_1) & u_{n_1p_2}(\tau_1, x_1) & \dots \\ u_{n_1p_1}(\tau_2, x_1) & u_{n_1p_2}(\tau_2, x_1) & \dots \\ u_{n_1p_1}(\tau_2, x_2) & u_{n_1p_2}(\tau_2, x_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n_1p_1}(\tau_N, x_M) & u_{n_1p_2}(\tau_N, x_M) & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{n_1}(p_1) \\ \psi_{n_1}(p_2) \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{1.85}$$

As colunas desta matriz são autovetores, definidos da seguinte forma

$$|u_{np} >= \lim_{N,M\to\infty} \begin{pmatrix} u_{np}(\tau_1, x_1) \\ u_{np}(\tau_2, x_1) \\ \vdots \\ u_{np}(\tau_N, x_M) \end{pmatrix}, \tag{1.86}$$

e usando os autovetores, a matriz de transformação G é escrita como

$$G = \begin{pmatrix} |u_{n_1p_1} > & |u_{n_1p_2} > & \dots \end{pmatrix}. \tag{1.87}$$

Podemos mostrar que estes autovetores são ortonormais

$$\begin{aligned} < u_{n'p'}|u_{np} > &= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} u^*_{n'p'}(\tau_i, x_j) u_{n'p'}(\tau_i, x_j) \\ &= \frac{1}{\beta V} \int_0^\beta d\tau \int_0^L d^3x e^{i\tau(\omega_n - \omega_{n'})} e^{ix(p-p')} \\ &= \delta_{n'n}\delta_{p'p}, \end{aligned} \tag{1.88}$$

onde usamos as relações do apêndice anterior. Usando a condição acima é fácil mostrar que $G^\dagger G = 1$, daqui temos que G é uma matriz unitária $G^\dagger = G^{-1}$ e, conseqüentemente, $|\det G| = 1$. Portanto, o jacobiano da transformação eq.(1.85) é a unidade. Desta forma a transformação da medida da integração funcional é

$$\begin{aligned} D\phi &= \lim_{N,M\to\infty} \prod_i^N \prod_j^M d\phi(\tau_i, x_j) = \left|\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\right| \prod_{np} d\psi_n(p) \\ &= \det G \prod_{np} d\psi_n(p) \\ &= \prod_{np} d\psi_n(p) \end{aligned} \tag{1.89}$$

Bibliografia

[1.1] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, (Cambridge University Press) 1989.
Texto principal adotado para o estudo do campo escalar complexo. Adotamos o estilo deste livro para estudar uma teoria à temperatura finita, no que se diz respeito a uma teoria não-singular.

[1.2] L. P. Kadanoff and Gordon Baym, *Quamtum Statistic Mechanics: A lecture note volume*, (W.A. Benjamin) 1962.
Este livro possui uma linguagem simples além de um estudo completo sobre as funções de Green à temperatura finita.

[1.3] A. Das, *Field Theory a Path Integral Approach* Vol.52, (World Scientific Publishing Company, Singapore) 1993.
É um livro sobre introdução aos métodos funcionais à temperatura zero em MQ e TQC, para sistemas não singulares.

[1.4] P. Ramond, *Field Theory*, 2nd ed., **74** (Addison Wesley) 1990.
Possui uma breve introdução ao método de integração funcional. Na parte que se discute temperatura finita, ao invés do método adotado nesta tese, usa-se o método da função Zeta Generalizada.

[1.5] S.J. Chang, *Introduction to Quantum Field Theory*, **29** (World Scientific) 1990.
Possui uma discussão detalhada sobre teorias de gauge, mas sem falar de vínculos.

[1.6] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*,(Springer Verlag, Berlin) 1996.
Este é um livro introdutório a TQC. Possui uma introdução sobre Integração funcional, mas quase não discute temperatura finita.

[1.7] M. R. Spiegel, *Análise de Fourier*, (Coleção Schaum) 1974.
Este livro contém uma introdução ao estudo de séries de Fourier.

[1.8] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum fields*, (New York, McGraw Hill) (1965).

[1.9] B. S. De Witt *Dynamical Theory of Groups and Fields*, N. Y. Gordon and Breach (1965).

[1.10] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (N.Y. McGraw-Hill) 1980.

[1.11] L. D. Faddeev and A. A. Slavnov , *Gauge fields: Introduction to Quantum Theory* (N.Y. Benjamin) 1980.

[1.12] E. S. Abers and B. W. Lee, Phys. Rep. **9**, 1 (1973).

[1.13] B. S. De Witt, Phys. Rev. **162**, 1195 (1967).

[1.13] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2^{th} Ed., (John Wiley & Sons, New York) 1987.

[1.14] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, (Cambridge University Press) 1996.

Capítulo 2

Sistemas Singulares à Temperatura Finita

"I feel that there will always be somethings missing from them which we can only get by working from a Hamiltonian, or maybe from some generalization of the concept of a Hamiltonian. So I take the point of wiew that Hamiltonian is really very important for quantum theory."
P. A. M. Dirac

As teorias físicas mais importantes que tentam explicar os fenômenos naturais são teorias singulares. Elas são a Eletrodinâmica Quântica, a Cromodinâmica Quântica e a Teoria Eletrofaca, todas pertencentes ao grupo de teorias conhecidas como teorias de gauge. Não entanto nem toda teoria singular é uma teoria de gauge.

No capítulo anterior abordamos o caso em que a matriz Hessiana era não singular

$$\det H_{ij} \equiv \det \frac{\partial_D p_i}{\partial \dot{q}^j} = \det \frac{\partial_D^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0. \tag{2.1}$$

o que nos permite definir um Hamiltoniano sem ambigüidades.

Se esta condição não for satisfeita, necessitaremos do formalismo de Dirac para encontrarmos ou podermos definir um Hamiltoniano sem ambigüidades. Uma breve introdução ao formalismo de Dirac é apresentada no Apêndice **B**.

Neste capítulo abordaremos duas teoria singulares, na primeira seção estudamos o campo de Dirac livre e, na segunda tratamos uma teoria de gauge abeliana: o campo eletromagnético livre.

No primeiro caso, campo de Dirac livre, será mostrado que os vínculos são de segunda classe. Quando os vínculos são de segunda classe, podemos calcular os multiplicadores de Lagrange associados a cada vínculo explicitamente.

No caso do campo eletromagnético livre, os vínculos são de primeira classe. Neste caso não será possível calcular os multiplicadores de Lagrange associados a estes vínculos sem que condições subsidiárias sejam implementadas. Nas primeiras seções desta exposição ficará claro como lidar com estas dificuldades.

Após o trabalho de análise de vínculos, a amplitude de transição será definida por intermédio do formalismo de integração funcional segundo Senjanovic desenvolvido nos Apêndices **C** e **D** deste mesmo Capítulo. O Apêndice **C** contém a dedução da amplitude de transição para sistemas com vínculos de primeira classe. Já no Apêndice **D**, a dedução da amplitude de transição para sistema com vínculos de primeira e segunda classe; onde os vínculos de segunda classe são variáveis Grassmannianas. Faz-se necessário enfatizar que o trabalho original de Senjanovic [2.8] não incluiu o tratamento de variáveis Grassmannianas (ou variáveis ímpares).

2.1 Gás de Férmions Livres

A densidade Lagrangiana para o campo de Dirac (spin-1/2) mais geral possível é dada por

$$\mathcal{L} = i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}_\alpha(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\partial^\mu\psi_\beta + i\frac{(\lambda-1)}{2}\partial^\mu_\alpha\bar{\psi}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta - m\bar{\psi}_\alpha\psi_\alpha, \tag{2.2}$$

onde os índices espinoriais α e β , variam de $\overline{1,2,3,4}$ e os índices do espaço-tempo μ,ν variam de $\overline{0,1,2,3}$. Aqui estamos usando a métrica $(+,-,-,-)$, e as γ são as matrizes de Dirac. Os campos $\bar{\psi}_\alpha,\psi_\beta$ pertencem à álgebra de Grassmann complexa de dimensão infinita (para maiores detalhes ver Apêndice **A**).

Esta densidade Lagrangiana eq.(2.2) é invariante pela seguinte transformação global

$$\psi \to e^{i\xi}\psi \qquad , \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\xi} \ , \tag{2.3}$$

o parâmetro ξ é par. O teorema de Noether nos diz que para esta simetria existe uma corrente conservada que é dada por

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad , \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \tag{2.4}$$

e, conseqüentemente, a quantidade de carga conservada é

$$Q = \int d^3x \ \bar{\psi}\gamma^0\psi. \tag{2.5}$$

Do princípio da mínima ação, obtemos as equações de Euler-Lagrange para os campos fermiônicos ψ e $\bar{\psi}$

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi &= 0 \ , \\ i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Estas equações definem a dinâmica da teoria clássica, independente de estarmos trabalhando no formalismo Lagrangiano ou no formalismo Hamiltoniano. A seguir, iniciaremos a busca pela formulação Hamiltoniana da teoria, e a forma de saber se encontramos a dinâmica certa será comparar as equações de movimento de Hamilton com as equações de Euler-Lagrange.

Os momentos são definidos de maneira análoga ao caso de uma álgebra de Grassmann de dimensão finita

$$\bar{\pi}^{\alpha} \equiv \frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_\alpha(\mathbf{x},t))} = -i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}_\beta(\gamma^0)^{\beta\alpha}, \tag{2.7}$$

$$\pi^{\alpha} \equiv \frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x},t))} = i\frac{(\lambda-1)}{2}(\gamma^0)^{\alpha\beta}\psi_\beta, \tag{2.8}$$

o índice D significa que estamos usando a derivada funcional a *Direita*, definida no Apêndice **A**.

Tendo definido os momentos canônicos conjugados, estabelecemos agora os parênteses de Berezin (PB), $\{\cdot,\cdot\}_B$, fundamentais

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\pi}^\beta(y)\}_B &= -\delta_\alpha^\beta \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ \{\bar{\psi}_\alpha(x), \pi^\beta(y)\}_B &= -\delta_\alpha^\beta \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ fazem referência às coordenadas espaciais.

A densidade Hamiltoniana canônica é definida pela seguinte transformação de Legendre

$$\mathcal{H}_\mathcal{C} = (\partial_0\psi_\alpha)\bar{\pi}^\alpha + (\partial_0\bar{\psi}_\alpha)\pi^\alpha - \mathcal{L}, \tag{2.10}$$

a posição dos momentos deve estar de acordo com a definição da derivada que estamos adotando ao longo deste trabalho: a derivada direita definida no Apêndice **A**. Substituindo os momentos na expressão acima obtemos

$$\mathcal{H}_\mathcal{C} = -i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}_\alpha(\gamma^i)^{\alpha\beta}\partial_i\psi_\beta - i\frac{(\lambda-1)}{2}\partial_i\bar{\psi}_\alpha(\gamma^i)^{\alpha\beta}\psi_\beta + m\bar{\psi}^\alpha\psi_\alpha. \tag{2.11}$$

Os vínculos primários são diretamente deduzidos das equações dos momentos (2.7) e (2.8)

$$\bar{\phi}^\alpha = \bar{\pi}^\alpha + i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}_\beta(\gamma^0)^{\beta\alpha}, \tag{2.12}$$

$$\phi^\alpha = \pi^\alpha - i\frac{(\lambda-1)}{2}(\gamma^0)^{\alpha\beta}\psi_\beta. \tag{2.13}$$

Em seguida podemos calcular os PBs entre os vínculos primários

$$\left\{\phi^\alpha(x), \bar{\phi}^\beta(y)\right\}_B = -i(\gamma^0)^{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{2.14}$$

onde temos usado os PBs fundamentais (2.9).

Em geral, para o cálculo dos PBs levar em consideração as seguintes observações: Designando a letra B para representar uma função da variáveis par (p,q) e a letra F para representar um função das variáveis ímpar (π,θ), os parênteses de Berezin satisfazem as propriedades a seguir

$$\{B_1, B_2\}_B = -\{B_2, B_1\}_B, \tag{2.15}$$

$$\{F, B\}_B = -\{B, F\}_B, \tag{2.16}$$

$$\{F_1, F_2\}_B = \{F_2, F_1\}_B. \tag{2.17}$$

Devido à teoria possuir vínculos primários, os momentos não são variáveis independentes. Para resolver este problema devemos introduzir multiplicadores de Lagrange na densidade Hamiltoniana. Portanto, a nova densidade de Hamiltoniana torna-se

$$\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_C + \bar{\phi}^\alpha a_\alpha + \bar{a}^\alpha \phi_\alpha, \tag{2.18}$$

onde o índice P faz menção ao fato de que esta função é denominada densidade Hamiltoniana primária. Para que a densidade de Hamiltoniana seja par e real, os multiplicadores de Lagrange devem ser variáveis ímpares e o produto $\bar{\phi}^\alpha a_\alpha$ deve ser real por uma operação de involução*

A partir de agora, a dinâmica do sistema deve ser descrita por esta nova densidade Hamiltoniana. Se queremos garantir que os vínculos primários não adquiram dinâmica, ou em outras palavras, que sejam constantes com relação a evolução temporal, é necessário que a seguinte condição de consistência seja válida

$$\dot{\bar{\phi}}^\alpha = \{\bar{\phi}^\alpha,\ H_P\}_B \approx 0, \tag{2.19}$$

$$\dot{\phi}^\alpha = \{\phi^\alpha,\ H_P\}_B \approx 0. \tag{2.20}$$

O símbolo $\approx$ significa ou tem o sentido de uma igualdade *fraca*

Comecemos calculando a condição de consistência para o vínculo $\bar{\phi}^\alpha$, então, o PB da equação (2.19) obtemos

$$\dot{\bar{\phi}}^\alpha = i\partial_i \bar{\psi}_\beta (\gamma^i)^{\beta\alpha} + m\bar{\psi}^\alpha + i\bar{a}_\beta (\gamma^0)^{\beta\alpha} \approx 0 \tag{2.21}$$

que nos fornece um dos multiplicadores de Lagrange

$$\bar{a} = -\partial_i \bar{\psi}\gamma^i\gamma^0 + im\bar{\psi}\gamma^0. \tag{2.22}$$

Repetindo os cálculos para o outro vínculo, ϕ^α, encontramos o seguinte resultado

$$\dot{\phi}^\alpha = i(\gamma^i)^{\alpha\beta}\partial_i \psi_\beta - m\psi^\alpha - i(\gamma^0)^{\alpha\beta} a_\beta, \tag{2.23}$$

*Por uma operação de involução a variável de Grassmann g é levada a $g^\dagger$, e g é real se $g^\dagger = g$ e imaginária se $g^\dagger = -g$. Façamos uma operação de involução no primeiro termo na densidade de Hamiltoniana associado ao multiplicador de Lagrange a_α, obtemos

$$\begin{aligned} (\bar{\phi}^\alpha a_\alpha)^\dagger &= \left(\left[\bar{\pi}^\alpha + i\frac{(\lambda+1)}{2}(\psi^\alpha)^\dagger\right] a_\alpha\right)^\dagger. \\ &= a_\alpha^\dagger \left[(\bar{\pi}^\alpha)^\dagger - i\frac{(\lambda+1)}{2}\psi^\alpha\right] \end{aligned}$$

Para que o produto seja real, o multiplicador de Lagrange deve satisfazer a condição

$$a_\alpha^\dagger \left[(\bar{\pi}^\alpha)^\dagger - i\frac{(\lambda+1)}{2}\psi^\alpha\right] = \left[\bar{\pi}^\alpha + i\frac{(\lambda+1)}{2}(\psi^\alpha)^\dagger\right] a_\alpha.$$

e da expressão acima o outro multiplicador de Lagrange é determinado

$$a = \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + im\gamma^0 \psi. \tag{2.24}$$

Para verificar se os multiplicadores de Lagrange estão corretos, calcularemos as equações de Hamilton dos momentos e compararemos com as equações de Euler-Lagrange.

A equação de Hamilton para o momento π é

$$\dot{\pi} = \{\pi, H_P\}_B = i\gamma^i \partial_i \psi - m\psi - i\frac{\lambda + 1}{2}\gamma^0 \ a. \tag{2.25}$$

e usando o multiplicador de Lagrange dado pela expressão (2.24)

$$\dot{\pi} = -\frac{\lambda - 1}{2}\left(i\gamma^i \partial_i \psi - m\psi\right) \tag{2.26}$$

Das equações de Euler-Lagrange encontramos a seguinte relação

$$\dot{\pi} = i\frac{\lambda - 1}{2}\gamma^0 \dot{\psi}, \tag{2.27}$$

igualando as duas últimas equações, mostramos que uma das equações de Euler-Lagrange é satisfeita

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \tag{2.28}$$

que é a eq.(2.6). E o mesmo procedimento pode ser feito para $\bar{\pi}$.

Calculando os parênteses de Berezin, observamos que nenhum vínculo comuta com todos os outros, portanto os vínculos são de segunda classe.

Assim, chamando de $\Sigma = \left\{\phi^\alpha, \bar{\phi}^\alpha\right\}$ conjunto de vínculos de segunda classe, matriz dos vínculos de segunda classe dada por $\mathbf{C}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$= $\left\{\Sigma^\alpha\left(x\right), \Sigma^\beta\left(y\right)\right\}_B$ é de 8×8 e pode ser expressa como $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{C}}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, sendo $\tilde{\mathbf{C}}$ uma matriz constante e dada por

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^0 \\ -i\left(\gamma^0\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

onde γ^0 =diag$(1, 1, -1, -1)$. A matriz inversa é definida por

$$\int d^3z \ \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{C}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \int d^3z \ \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{2.30}$$

Da definição acima, notamos que é preciso apenas calcular a inversa da matriz $\tilde{\mathbf{C}}$, que é dada por

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^0 \\ i\left(\gamma^0\right)^T & 0 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Com estes resultados podemos escrever os parênteses de Dirac, $\{\cdot, \cdot\}_D$, entre duas funções A e B quaisquer como

$$\begin{aligned} \{A(x), B(y)\}_D &= \{A(x), B(y)\}_B \\ &- \int d^3z d^3w \{A(x), \Sigma_\delta(z)\}_B \left(\mathbf{C}^{-1}\right)^{\delta\gamma}(z, w)\{\Sigma_\gamma(w), B(y)\}_B. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Usando o parêntese de Dirac encontramos o mesmo resultado obtido utilizando explicitamente os conhecidos multiplicadores de Lagrange. Por exemplo pode se calcular o seguinte parêntese de Dirac

$$\dot{\pi} = \{\pi, H_E\}_D = -\frac{(\lambda - 1)}{2} \left(i\gamma^k \partial_k \psi - m\psi\right), \tag{2.33}$$

neste caso $H_E = H_C$, pois não existem vínculos de primeira classe. Usando novamente a equação de Euler-Lagrange encontramos o mesmo resultado, que é a equação de Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0. \tag{2.34}$$

2.1.1 Função de Partição

Devido ao fato da teoria ser relativística teremos processos de criação e aniquilação acontecendo no sistema. O número de partículas não será uma quantidade conservada, como veremos mais adiante; somente a diferença entre o número de partículas e anti-partículas será uma grandeza física. Portanto, devemos trabalhar com a função de partição do ensemble grande canônico, que é definida por

$$Z\left(\beta\right) = \mathrm{Tr}\ e^{-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i)} = \sum_{\bar{\psi},\psi} < \bar{\psi}, \psi | e^{-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i)} | \psi, \bar{\psi} >,$$

este traço é tomado sob todos os estados do operador $\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i$, sendo μ_i um multiplicador de Lagrange para levar em conta a carga conservada $\hat{N}_i$.

A função de partição para um sistema que possui vínculos de segunda classe pode ser definida a partir da amplitude de transição do Apêndice **D**. Para isto, necessitamos realizar uma mudança de variável no setor temporal $it = \tau$ (rotação de Wick), e identificar o novo intervalo "temporal"como sendo o inverso da temperatura $\beta = \frac{1}{kT}$. Procedendo desta forma, obtemos a função de Partição no formalismo de integração funcional

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \prod_{\alpha=1}^{4} [d\bar{\psi}^\alpha d\psi^\alpha] \int \prod_{\alpha=1}^{4} [d\bar{\pi}_\alpha d\pi_\alpha]\, |\det \mathbf{C}|^{-1/2} \prod_{\alpha=1}^{4} \delta(\bar{\phi}_\alpha)\delta(\phi_\alpha) \\ &\quad \times \exp\left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[i\partial_\tau \psi^\alpha \bar{\pi}_\alpha + i\partial_\tau \bar{\psi}^\alpha \pi_\alpha - \mathcal{H} + \mu Q \right] \right\}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde denotamos $\frac{\partial}{\partial \tau} = \partial_\tau$. Os campos fermiônicos satisfazem condições de contorno anti-periódicas na variável τ: $\psi(\tau, \mathbf{x}) = -\psi(\tau + \beta, \mathbf{x})$.

É fácil mostrar que $|\det \mathbf{C}|$ é uma constante independente das variáveis canônicas, assim, integrando os momentos e realizando integrações por partes obtemos, a função de partição

$$Z(\beta) = \int \prod_{\alpha=1}^{4} [d\bar{\psi}^\alpha d\psi^\alpha] \exp\left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x\ \bar{\psi} \left[-\gamma^0 \partial_\tau + i\gamma^k \partial_k - m + \mu\gamma^0 \right] \psi \right\}. \tag{2.36}$$

Em vez de trabalharmos com $\bar{\psi}$, podemos de uma forma alternativa trabalhar com $\psi^\dagger$. Com esta alteração a medida fica invariante e a função de partição passa a ser escrita como

$$Z(\beta) = N \int \prod_\alpha d\psi_\alpha^\dagger d\psi_\alpha\ \exp\{S\} \tag{2.37}$$

onde S é

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \; \psi^\dagger \left[-\partial_\tau + i\gamma^0\gamma^k\partial_k - m\gamma^0 + \mu \right] \psi \tag{2.38}$$

Expandimos os campos em séries de Fourier da seguinte forma

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}, \tau) = v_\alpha e^{i\omega_0 \tau} + \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_n \sum_p \; e^{i(\mathbf{px}+\omega_n\tau)} \Psi_\alpha(\mathbf{p}, n) \tag{2.39}$$

$$\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, \tau) = v_\alpha^\dagger e^{-i\omega_0 \tau} + \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_n \sum_p \; e^{-i(\mathbf{px}+\omega_n\tau)} \Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{p}, n), \tag{2.40}$$

a dimensão das amplitudes $\Psi_\alpha(\mathbf{p}, n)$, $\dim[\Psi_\alpha(\mathbf{p}, n)] = \sqrt{\text{comprimento}}$, foi escolhida de tal forma que a ação na equação (2.37) continue sendo adimensional; e devido ao fato dos campos serem anti-periódicos, as freqüência ω_n são dadas por $\omega_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{\beta}$ onde temos definido que $\Psi_\alpha(0,0) = \Psi_\alpha^\dagger(0,0) = 0$.

Substituindo a expansão em eq.(2.37), obtemos que a ação é expressa como

$$S = V v^\dagger(\mu - m\gamma^0 - i\omega_0)v - \sum_{n,\mathbf{p}} \Psi^\dagger(n, \mathbf{p}) \mathbf{D} \Psi(n, \mathbf{p}), \tag{2.41}$$

com

$$\mathbf{D} = i\omega_n - \mu + \gamma^0\gamma^k p_k + \gamma^0 m. \tag{2.42}$$

Com estes resultados a função de partição passa a ser dada por

$$Z(\beta) = N e^{V v^\dagger(\mu - m\gamma^0 - i\omega_0)v} \int \prod_{\alpha=1}^{4} \prod_{n,\mathbf{p}} [d\Psi_\alpha^\dagger(n, \mathbf{p}) d\Psi^\alpha(n, \mathbf{p})] \; \exp\left\{ -\sum_{n,\mathbf{p}} \Psi^\dagger(n, \mathbf{p}) \mathbf{D} \Psi(n, \mathbf{p}) \right\}. \tag{2.43}$$

Fixado um par $(n, \mathbf{p})$, a expressão acima pode ser escrita como

$$Z(\beta) = N e^{V v^\dagger(\mu - m\gamma^0 - i\omega_0)v} \prod_{n,\mathbf{p}} Z(n, \mathbf{p}), \tag{2.44}$$

onde $Z(n, \mathbf{p})$ é definido por

$$\begin{aligned} Z(n,p) &= \int \prod_{\alpha=1}^{4} [d\Psi_\alpha^\dagger(n, \mathbf{p}) d\Psi^\alpha(n, \mathbf{p})] \; e^{-\Psi^\dagger(n,p)\mathbf{D}(n,\mathbf{p})\Psi(n,\mathbf{p})} \\ &= \det \mathbf{D}(n, \mathbf{p}) \\ &= \left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right]^2, \end{aligned} \tag{2.45}$$

e $\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Finalmente, a função de partição é

$$Z(\beta) = N e^{V v^\dagger(\mu - m\gamma^0 - i\omega_0)v} \prod_{n,\mathbf{p}} \left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right]^2, \tag{2.46}$$

tomamos o logarítmo da função de partição e temos

$$\ln Z(\beta) = V v^\dagger(\mu - m\gamma^0 - i\omega_0)v + 2 \sum_{n,\mathbf{p}} \ln\left\{ \beta^2 \left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \right\}, \tag{2.47}$$

para que o argumento do logarítmo não tenha dimensão, multiplicamos e dividimos por β^2, e a constante infinita é ignorada.

Determinamos se o modo zero $v, v^\dagger$ ($\mathbf{p} = 0, n = 0$) existe com a seguinte equação

$$(\mu - m\gamma^0 - i\frac{\pi}{\beta})v = 0, \tag{2.48}$$

as soluções não triviais são determinadas pela condição

$$\det(\mu - m\gamma^0 - i\frac{\pi}{\beta}) = 0, \tag{2.49}$$

daqui encontramos que

$$(\frac{\pi}{\beta} + i\mu)^2 + m^2 = 0, \tag{2.50}$$

para $T > 0$ essa equação complexa não é satisfeita por nenhum valor real do potencial químico μ, assim o modo zero é nulo: $v = v^\dagger = 0$. Quando a temperatura $T = 0$ podemos ver que o potencial químico é $|\mu| = m$.

A função de partição (2.47) é portanto

$$\ln Z(\beta) = 2\sum_{n,p} \ln\left\{\beta^2\left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2\right]\right\}. \tag{2.51}$$

Separando a soma acima em duas somas iguais, e após algumas mudanças de variáveis, obtemos

$$\ln Z(\beta) = \sum_{n,p} \ln\left\{\beta^2\left[\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2\right]\right\} + \sum_{n,p} \ln\left\{\beta^2\left[\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2\right]\right\}. \tag{2.52}$$

Para calcular as somas em n usamos as seguintes identidades

$$\ln\left[(2n+1)^2\pi^2 + \beta^2(\omega \pm \mu)^2\right] = \int_1^{\beta^2(\omega\pm\mu)} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n+1)^2\pi^2} + \ln\left[1 + (2n+1)^2\pi^2\right], \tag{2.53}$$

e

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2 + \theta^2} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1}\right). \tag{2.54}$$

Assim, finalmente encontramos que

$$\ln Z(\beta) = 2V\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\beta\omega + \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)})\right]. \tag{2.55}$$

A energia livre é definida por

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z(\beta) = \frac{2V}{\beta}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\beta\omega + \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)})\right]. \tag{2.56}$$

A densidade de carga do sistema é dada pela seguinte definição

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\beta V}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z(\beta) = 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+\mu)} + 1}\right) \tag{2.57}$$

o fator $f = 2$ é devido ao *spin* dos férmions $f = (2s + 1)$.

É importante notar que a diferença entre os férmions e os bósons além do fator de spin, também se dá por um sinal da função distribuição

$$N_a^+ = \frac{1}{z_+^{-1} e^{\beta\omega_+} + a}, \tag{2.58}$$

$a = -1$ para os bósons e $a = +1$ para os férmions, e $z_+^{-1} = e^{\beta\mu_+}$. N_a^+ é a função distribuição das partículas (não das anti-partículas) com energia positiva ω_+. A função distribuição para as anti-partículas com energia ω_- é

$$N_a^- = \frac{1}{z_-^{-1} e^{\beta\omega_-} + a}, \tag{2.59}$$

Para o caso dos férmions livres os valores da energia ω são os autovalores da equação de Dirac. E as soluções da equação não possuem solução no intervalo $-mc^2 \leq \omega \leq +mc^2$. A energia mínima que um elétron (real) pode ter é $\omega = \mu = mc^2$. As partículas são os elétrons e as anti-partículas são os pósitrons. Devido aos processos de criação e aniquilação o número de elétrons e pósitrons não se conservam de forma separada, mas sim

$$N_a = N_a^+ - N_a^- \tag{2.60}$$

$$0 = \mu_+ + \mu_-, \tag{2.61}$$

Estes resultados podem ser sintetizados como

$$\rho = \frac{Q}{V} = \rho_0 + f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(N_a^+ - N_a^- \right), \tag{2.62}$$

$\rho_0 \neq 0$ para os bósons e $\rho_0 = 0$ para os férmions.

2.2 Gás de Fótons Livres

2.2.1 Campo Eletromagnético: Análise de Vínculos

A densidade Lagrangiana do campo eletromagnético que descreve um sistema de fótons livres é dadas por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{2.63}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Esta Lagrangiana e é invariante sob a seguinte transformação local

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x), \tag{2.64}$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função escalar arbitrária. E conseqüentemente, as equações de movimento também são invariantes; esta liberdade poderá ser usada para eliminar os graus de liberdade não físicos da teoria.

As equações de movimento são

$$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0, \tag{2.65}$$

O momento canônico conjugado é dado por

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = F_{\mu 0}, \tag{2.66}$$

Os parênteses de Berezin fundamentais $\{\cdot, \cdot\}_B$ são

$$\{A^\mu(x), \pi_\nu(y)\}_B = \delta^\mu_\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{2.67}$$

Da definição do momento conjugado, obtemos para $\mu = 0$ um vínculo primário,

$$C = \pi_0 \approx 0 \tag{2.68}$$

e três relações dinâmicas

$$\pi_k = \partial_k A_0 - \partial_0 A_k \tag{2.69}$$

A densidade Hamiltoniana canônica , $\mathcal{H}_C$, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + \frac{1}{4}\left(F^{jk}\right)^2 - A^0 \partial_k \pi^k \end{aligned} \tag{2.70}$$

onde a relação (2.69) foi usada. Com isto, definamos a densidade Hamiltoniana primária, $\mathcal{H}_P$,

$$\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_C + v_1 \pi^0, \tag{2.71}$$

onde v_1 é um multiplicador de Lagrange.

A condição de consistência para π^0 resulta

$$\dot{\pi}_0 = \{\pi_0, H_P\}_B = \partial_k \pi^k \approx 0, \tag{2.72}$$

dando um vínculo secundário,

$$G = \partial_k \pi^k \approx 0 \tag{2.73}$$

que também pode ser expresso da seguinte forma $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \vec{\pi} \approx 0$.

Pode ser mostrado que o vínculo secundário é preservado no tempo, ou seja, temos que

$$\dot{G} = \{\partial_k \pi^k, H_P\} = 0 \tag{2.74}$$

e não existem mais vínculos na teoria.

Os PBs entre os vínculos primário e secundário são todos nulos

$$\{\pi^0, \partial_k \pi^k\} = 0, \tag{2.75}$$

portanto, os vínculos segundo à classificação de Dirac são de primeira classe.

Classificado os vínculos, definamos o Hamiltoniano estendido, H_E,

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_C + v_1 \pi^0 + v_2 \partial_k \pi^k \tag{2.76}$$

assim, temos que

$$H_E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\pi^k\right)^2 + \frac{1}{4} \left(F^{jk}\right)^2 + v_1 \pi^0 + (v_2 - A^0) \partial_k \pi^k \right]. \tag{2.77}$$

As equações de movimento de Hamilton, considerando H_E como gerador da evolução temporal, são

$$\dot{A}^0 = \{A^0, H_E\} = v_1 \tag{2.78}$$

$$\dot{\pi}^0 = \{A^0, H_E\} = \partial_k \pi^k \approx 0 \tag{2.79}$$

$$\dot{A}^k = \{A^k, H_E\} = \pi_k + \partial_k (v_2 - A_0) \tag{2.80}$$

$$\dot{\pi}^k = \{\pi^k, H_E\} = \partial_j F^{jk} \tag{2.81}$$

As equações de movimento acima, ainda não estão de acordo com as equações de Euler-Lagrange porque ainda possuem os multiplicadores de Lagrange que estão indeterminados. Por exemplo, a equação (2.80) devido à presença do multiplicador v_2 não coincide com a relação dinâmica (2.69).

Então, o seguinte passo na construção Hamiltoniana é fixar os multiplicadores de Lagrange. A regra é escolher uma condição de gauge para cada vínculo de primeira classe (ver os Apêndices **2-A** e **2-B**) de tal modo que este novo conjunto de vínculos seja de segunda classe, e uma observação importante na escolha das condições de gauge é que elas sejam compatíveis com as equações de movimento ou equações de Euler-Lagrange .

Podemos resumir do seguinte modo: Dado o conjunto de vínculos de primeira classe $\{\psi_a\}_{a=1,..,m}$ e o conjunto de condições de gauge $\{\xi_a\}_{a=1,..,m}$, estes últimos devem ser preservados no tempo, assim

$$\dot{\xi}_b(x) = \{\xi_b(x), H_E\} = \{\xi_b(x), H_C\} + \int d^3y\ \{\xi_b(x), \psi_a(y)\} v_a(y) \approx 0 \tag{2.82}$$

então, para que seja possível determinar cada multiplicador v_a devemos ter

$$\det |\{\xi_b(x), \psi_a(y)\}| \neq 0\ . \tag{2.83}$$

2.2.2 O Gauge de Coulomb

A Hamiltoniana estendida para o campo eletromagnético livre é dada por

$$H_E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\pi^k\right)^2 + \frac{1}{4} \left(F^{jk}\right)^2 + v_1\psi_1 + (v_2 - A^0)\psi_2 \right]. \tag{2.84}$$

onde ψ_a refere-se aos vínculos de primeira classe

$$\psi_1 = \pi_0 \approx 0 \quad , \quad \psi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0, \tag{2.85}$$

As equações de Hamilton para as variáveis canônicamente conjugadas são dadas pelas equações (2.78)-(2.81) e notamos que duas delas, (2.78) e (2.80), ficam indeterminadas devido ao desconhecimento dos multiplicadores de Lagrange v_1 e v_2, respectivamente. Das discussões realizadas no final da seção anterior e do Apêndice (2-A), fica claro a necessidade da imposição das condições de gauge para acessar a descrição correta de um sistema físico com vínculos de primeira classe. Portanto, para a descrição do campo eletromagnético livre necessitamos de duas condições de gauge para fixar os multiplicadores de Lagrange.

A nossa escolha é conjunto de condições denominado de o gauge de Coulomb e é definido por

$$\xi_1 = A^0 \approx 0 \quad , \quad \xi_2 = \partial_k A^k \approx 0. \tag{2.86}$$

É fácil mostrar que o novo conjunto de vínculos $\{\Phi_a\}$ com

$$\Phi_1 = \pi_0 \quad , \quad \Phi_2 = \partial_k \pi^k \quad , \quad \Phi_3 = A^0 \quad , \quad \Phi_3 = \partial_k A^k \tag{2.87}$$

é de segunda classe, para isto construamos a matriz de vínculos $\mathbf{C}_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\Phi_a(x), \Phi_b(y)\}$ que é

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{2.88}$$

onde $\nabla^2 = (\partial_k)^2 = (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2$ e o determinante de $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é não nulo,

$$\det \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det \left(-\nabla^2\right)^2. \tag{2.89}$$

Agora, vejamos se estas condições de gauge são compatíveis com as equações de movimento. Da condição de consistência dos gauge, veja equação (2.82), obtemos

$$\dot{\xi}_1 = v_1 \approx 0 \quad , \quad \dot{\xi}_1 = \nabla^2 v_2 \approx 0 \tag{2.90}$$

Como o conjunto total $\{\Phi_a\}$ é de segunda classe, portanto $\{\Phi_a\}$ são fortemente nulos. Para que as equações (2.78) e (2.80) sejam consistentes com $\partial_k \pi^k = 0$ e $\partial_k A^k = 0$, respectivamente, encontramos como resultado que $v_1 = 0$ e $\nabla^2 v_2 = 0$. A equação $\nabla^2 v_2 = 0$ diz que ou $v_2 = 0$ ou v_2 é uma função harmônica, porém, não podemos inferir qual é a escolha correta a *priori*. Se considerarmos $v_2 \neq 0$, como conseqüência a Hamiltoniana torna-se

$$H_E \to H_C = \int d^3x \left(\frac{\vec{\pi}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2} + f(x)\nabla\pi \right), \tag{2.91}$$

que nos levaria a uma dinâmica errada, contudo coerente com as equações de Euler-Lagrange. A seguir calcularemos os multiplicadores de Lagrange de forma explícita.

Da condição de consistência dos gauge, veja equação (2.82), obtemos

$$\int d^3y \sum_{a=1}^{2} v_a(y)\{\xi_b(\mathbf{x},t),\psi_a(\mathbf{y},t)\} = -\{\xi_b(\mathbf{x},t), H_C\}, \tag{2.92}$$

ou de uma forma mais explícita

$$\begin{aligned}
&\int d^3y \begin{pmatrix} \{\xi_1(\mathbf{x},t),\psi_1(\mathbf{y},t)\} & \{\xi_1(\mathbf{x},t),\psi_2(\mathbf{y},t)\} \\ \{\xi_2(\mathbf{x},t),\psi_1(\mathbf{y},t)\} & \{\xi_2(\mathbf{x},t),\psi_2(\mathbf{y},t)\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{y},t) \\ v_2(\mathbf{y},t) \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \{\xi_1(\mathbf{x},t), H_C\} \\ \{\xi_2(\mathbf{x},t), H_C\} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.93}$$

A matriz formada pelos parênteses de Poisson é definida como

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \{\xi_1(\mathbf{x},t),\psi_1(\mathbf{y},t)\} & \{\xi_1(\mathbf{x},t),\psi_2(\mathbf{y},t)\} \\ \{\xi_2(\mathbf{x},t),\psi_1(\mathbf{y},t)\} & \{\xi_2(\mathbf{x},t),\psi_2(\mathbf{y},t)\} \end{pmatrix}, \tag{2.94}$$

obtendo

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \{\xi_a,\psi_b\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nabla^2_{(x)} \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{2.95}$$

Os multiplicadores de Lagrange podem ser determinados se a inversa desta matriz existir, e se é única

$$v_\alpha(z) = -\int d^3x \mathbf{M}^{-1}_{\alpha b}(\mathbf{z},\mathbf{x})\{\xi_b(\mathbf{x},t), H_C\}, \tag{2.96}$$

onde temos usado que

$$\int d^3z \mathbf{M}^{-1}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z})\mathbf{M}_{\gamma\beta}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{2.97}$$

A inversa é dada por

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \end{pmatrix}. \tag{2.98}$$

Lembrando que $H_C = \int d^3x \left[-\vec{\pi}\dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2}(\vec{\pi}^2 - \mathbf{B}^2)\right]$, os multiplicadores de Lagrange agora podem ser determinados

$$v_1(z) = -\int d^3x \mathbf{M}^{-1}_{1b}(\mathbf{z},\mathbf{x})\{\xi_b(\mathbf{x},t), H_C\} = 0 \tag{2.99}$$

$$v_2(z) = -\int d^3x \mathbf{M}^{-1}_{2b}(\mathbf{z},\mathbf{x})\{\xi_b(\mathbf{x},t), H_C\} = 0. \tag{2.100}$$

Assim, a Hamiltoniana estendida reduz a

$$H_E \to \int d^3x \, \frac{1}{2}\left[\left(\pi^k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(F^{jk}\right)^2\right] = \int d^3x \, \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right). \tag{2.101}$$

e as equação de movimento (equações de Hamilton) tornam-se equivalentes às equações de Euler-Lagrange (2.65)

$$\Box A^k = 0. \tag{2.102}$$

2.2.3 Função de Partição

Após estudar a estrutura de vínculos do campo eletromagnético, continuamos a definir a função de partição no gauge de Coulomb do sistema composto por fótons em equilíbrio termodinâmico

$$Z(\beta) = \int D\pi^{\mu} DA_{\mu} \det\left|\{\Phi_a(x), \Phi_b(y)\}\right|^{1/2} \delta(\Phi_a) \exp\left\{\int_{\beta} dx \left[i\pi^{\mu}\partial_{\tau}A_{\mu} - \mathcal{H}_C\right]\right\}, \quad (2.103)$$

Primeiramente, temos que a integração funcional do campo eletromagnético deve ser realizada sobre as configurações satisfazendo condições de contorno periódicas no intervalo $[0, \beta]$: $A_{\mu}(\tau, \mathbf{x}) = A_{\mu}(\tau + \beta, \mathbf{x})$. As quantidades aparecendo na integração funcional são descritas a seguir: o determinante da matriz de vínculos

$$\det\left|\{\Phi_a(x), \Phi_b(y)\}\right|^{1/2} = \det\left|-\nabla^2\right| , \quad (2.104)$$

O conjunto de vínculos

$$\delta(\Phi_a) = \delta(\pi_0)\, \delta\left(\partial_k \pi^k\right) \delta(A_0)\, \delta\left(\partial_k A^k\right) \quad (2.105)$$

a Hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + \frac{1}{4}\left(F_{jk}\right)^2 - A_0 \partial_k \pi^k , \quad (2.106)$$

e, finalmente a medida de integração do espaço de configuração

$$\int_{\beta} dx = \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\mathbf{x} . \quad (2.107)$$

Começamos integrando nos campos A_0 e π^0 e obtemos

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int D\pi^k DA_k \ \det\left|-\nabla^2\right| \ \delta\left(\partial_k \pi^k\right) \ \delta\left(\partial_k A^k\right) \quad (2.108) \\ &\quad \times \exp\left\{\int_{\beta} dx \left[i\pi^k \partial_{\tau} A_k - \frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 - \frac{1}{4}\left(F_{jk}\right)^2\right]\right\}, \end{aligned}$$

usando a transformada de Fourier da δ-funcional contendo o campo π^k temos

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int D\pi^k DA_k \ D\lambda \det\left|-\nabla^2\right| \ \delta(-\partial_k A_k) \quad (2.109) \\ &\quad \times \exp\left\{\int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + i\pi^k \partial_{\tau} A_k + i\lambda \partial_k \pi^k - \frac{1}{4}\left(F_{jk}\right)^2\right]\right\}, \end{aligned}$$

integrando no momento π^k se tem

$$Z(\beta) = \int DA_k \ D\lambda \det\left|-\nabla^2\right| \ \delta(-\partial_k A_k) \exp\left\{\int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2}\left(\partial_{\tau} A_k - \partial_k \lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\left(F_{jk}\right)^2\right]\right\},$$

Finalmente, identificando $\lambda \rightarrow A_0$ obtemos a função de Partição para o campo eletromagnético no gauge de Coulomb

$$Z(\beta) = \int DA_{\mu} \det\left|-\nabla^2\right| \ \delta(-\partial_k A_k) \exp\left\{\int_{\beta} dx - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2\right\}, \quad (2.110)$$

A função de partição no gauge de Coulomb não é explicitamente covariante sob uma transformação de Lorentz. A necessidade de torná-la, explicitamente, covariante vem do fato de que a covariância deve ser mantida durante todo o processo de cálculo das propriedades físicas seja num sentido perturbativo ou não-perturbativo.

O procedimento para passar de um gauge não-covariante a um covariante, como por exemplo o gauge de gauge de Lorenz† $\partial_\mu A^\mu = 0$, pode ser realizado usando o ansatz de Faddeev-Popov definido como

$$\int D\omega(x)\ \delta\left(G\left[A_\mu^\omega\right]\right)\ \det\left|\frac{\delta G\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} \equiv 1, \tag{2.111}$$

onde $\omega\,(x)$ é parâmetro da transformação de gauge, $D\omega$ é a medida de integração do grupo de gauge, $G\,[A_\mu]$ é a condição de gauge, A_μ^ω é o campo transformado

$$A_\mu^\omega = A_\mu + \partial_\mu\omega, \tag{2.112}$$

e finalmente $\det\left|\frac{\delta G\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0}$, chamado de determinante de Faddeev-Popov, que é invariante de gauge.

Então, introduzamos o ansatz de Faddeev-Popov na função de Partição (2.110) e fazendo a transformação de gauge $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\omega$ obtemos

$$\begin{aligned} Z\,(\beta) &= \int DA_\mu\ \delta\left(G\left[A_\mu\right]\right)\ \det\left|\frac{\delta G\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2\right\} \\ &\times \int D\omega\,\det\left|-\nabla^2\right|\ \delta\left(-\partial_k A_k + \nabla^2\omega\right) \end{aligned} \tag{2.113}$$

A integração funcional em ω é simplesmente o ansatz de Faddeev-Popov no gauge de Coulomb que é a unidade. Então, obtemos a função de Partição num gauge arbitrário

$$Z\,(\beta) = \int DA_\mu\ \delta\left(G\left[A_\mu\right]\right)\ \det\left|\frac{\delta G\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2\right\} \tag{2.114}$$

Se escolhermos como condição o gauge de Lorenz da seguinte forma

$$G\,[A_\mu] = -\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_\mu A_\mu + f\ , \tag{2.115}$$

sendo f uma função escalar arbitrária e ρ um parâmetro real arbitrário, tais que temos

$$G\left[A_\mu^\omega\right] = G\,[A_\mu] - \frac{1}{\sqrt{\rho}}\Box\omega \quad\to\quad \det\left|\frac{\delta G\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} = \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\rho}}\right| \tag{2.116}$$

A função de partição é expressa como

$$Z\,(\beta) = \int DA_\mu\ \delta\left(-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_\mu A_\mu + f\right)\ \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\rho}}\right| \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2\right\} \tag{2.117}$$

†L. V. Lorenz (1829-1891): Físico dinamarquês, que de forma independente de Maxwell, construiu uma teoria da luz como onda eletromagnética [2.15]

Podemos eliminar a função f multiplicando por

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\beta} dx\ f^2\right), \tag{2.118}$$

e integrando em f para obtermos

$$Z(\beta) = \int DA_\mu\ \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\rho}}\right| \exp\left\{\int_{\beta} dx - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\rho}(\partial_\mu A_\mu)^2\right\} \tag{2.119}$$

que após uma integração por partes dá

$$Z(\beta) = \int DA_\mu\ \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\rho}}\right| \exp\left\{\int_{\beta} dx - \frac{1}{2}A_\mu\left[-\Box\delta_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{\rho}-1\right)\partial_\mu\partial_v\right]A_\nu\right\} \tag{2.120}$$

A integração no campo de gauge é imediata e obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\rho}}\right| \det\left|-\Box\delta_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{\rho}-1\right)\partial_\mu\partial_v\right|^{-1/2} \\ &= \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\rho}}\right| \det\left|\frac{(-\Box)^4}{\rho}\right|^{-1/2} \\ &= \det\left|-\Box\right|^{-1} \end{aligned} \tag{2.121}$$

Calculamos o determinante na base de Fourier que expande o campo vetorial

$$A(\tau, \mathbf{x}) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n,p} e^{i(\omega_n\tau + \mathbf{x}.\mathbf{p})}\tilde{A}(p,n), \tag{2.122}$$

onde ω_n são as freqüências de Matsubara bosônicas

$$\omega_n = 2n\frac{\pi}{\beta} \tag{2.123}$$

então o logarítmo da função de partição expressa-se como

$$\ln Z(\beta) = -\ln\det\left|-\Box\right| = -\sum_{n,\mathbf{p}} \ln\left(\beta^2\left[\mathbf{p}^2 + (\omega_n)^2\right]\right), \tag{2.124}$$

A soma em n foi calculada para o caso massivo no Capítulo 1 (ver equação (1.33)), e no caso sem massa é

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln\left[(2\pi n)^2 + \beta^2\omega_{\mathbf{p}}^2\right] = \beta\omega_{\mathbf{p}} + 2\ln\left[1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}}}\right], \tag{2.125}$$

onde $\omega_{\mathbf{p}} = ||\mathbf{p}||$, assim, temos finalmente a função de partição para o campo eletromagnético

$$\ln Z = -2V\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\beta\omega_{\mathbf{p}}}{2} + \ln(1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}}})\right]. \tag{2.126}$$

Esta equação descreve um campo bosônico sem massa com 2 estados de polarização em equilíbrio termodinâmico, isto é, a radiação de um corpo negro.

Ignorando a contribuição do vácuo, a função de partição é calculada

$$\begin{aligned}\ln Z &= -2V\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\ln(1-e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}}}) \\ &= -\frac{V}{\pi^2}\int_0^\infty d\omega\ \omega^2\ln(1-e^{-\beta\omega}) \\ &= \frac{V\pi^2}{45\beta^3}\end{aligned} \tag{2.127}$$

A energia livre de Helmholtz é

$$F=-\frac{1}{\beta}\ln Z(\beta)=-\frac{\pi^2 V}{45\beta^4} \tag{2.128}$$

A energia interna ou energia média do sistema por unidade de volume é

$$\frac{U}{V}=-\frac{1}{V}\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}=\int_0^\infty d\omega\ \frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1} \tag{2.129}$$

onde o integrando é a densidade de energia do sistema ou lei de radiação de Planck. Integrando, obtemos a densidade de energia da cavidade, o corpo negro,

$$\frac{U}{V}=\frac{\pi^2}{15\beta^4}=\frac{\pi^2}{15}T^4 \tag{2.130}$$

esta é a lei de Stefan-Boltzmann

A pressão da radiação é

$$P=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln Z}{\partial V}=\frac{\pi^2}{45\beta^4}. \tag{2.131}$$

Da equação (2.129)), podemos também concluir que a função distribuição dos fótons é

$$n\left(\omega\right)=\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}, \tag{2.132}$$

que é a função de distribuição de Bose-Einstein para um sistema com potencial químico nulo.

2.3 Apêndices

A Álgebra de Grassmann

Neste Apêndice um estudo introdutório ao assunto será apresentado, seguindo a referência [2.4]. Na primeira seção trataremos um número finito de graus de liberdade, o tratamento para campos será abordado na segunda seção.

A.1 Número Finito de Graus de Liberdade

Uma álgebra de Grassmann finita G_N, possui um número finito de geradores $\theta_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$; e satisfaz a seguinte relação

$$\{\theta_\alpha,\theta_\beta\}=0. \tag{2.133}$$

Esta álgebra, constitui um espaço vetorial linear G_N de dimensão 2^N, e as bases são dadas por

$$1, \theta_1, \ldots, \theta_N, \theta_1\theta_2, \ldots, \theta_1\theta_2 \ldots \theta_N. \tag{2.134}$$

O espaço G_N pode ser naturalmente separado em dois subespaços

$$G_N = G_N^0 \oplus G_N^1, \tag{2.135}$$

onde G_N^0 está associado as bases com um número par de geradores, e é definido para ter paridade $P = 0$; enquanto que G_N^1 está associado as bases com um número ímpar de geradores, e definimos a paridade para ser $P = 1$. Assim temos que

$$A(\theta)B(\theta) = (-)^{P_A P_B} B(\theta)A(\theta). \tag{2.136}$$

Sempre uma função $A(\theta)$ dos geradores da álgebra θ pode ser separada nos dois setores: bosônico e fermiônico

$$A(\theta) = A^0(\theta) + A^1(\theta), \tag{2.137}$$

o setor G_N^0 é chamado de setor bosônico, a paridade é par($P_0 = 0$); e G_N^1 é o setor fermiônico, a paridade é ímpar $P_1 = 1$.

Devido sua propriedade de anti-comutar, temos dois tipos de derivada, a derivada direita

$$\delta F = \delta\theta_\alpha \frac{\partial_D F}{\partial\theta_\alpha}, \tag{2.138}$$

e derivada a esquerda

$$\delta F = \frac{\partial_E F}{\partial\theta_\alpha}\delta\theta_\alpha, \tag{2.139}$$

esquerda (E) e direita (D) são apenas nomes, não existe um consenso netas definições, alguns autores usam o contrário da definição acima.

Como exemplo consideramos o caso de uma álgebra de dimensão 2, i.e G_2, e derivamos a função $F = \theta_1\theta_2$

1. Usando derivada direita

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta\theta_1\theta_2 + \theta_1\delta\theta_2 \\ &= \left(\delta\theta_\alpha \frac{\partial_D\theta_1}{\partial\theta_\alpha}\right)\theta_2 + \theta_1\left(\delta\theta_\alpha \frac{\partial_D\theta_2}{\partial\theta_\alpha}\right) \\ &= \delta\theta_\alpha\left[\frac{\partial_D\theta_1}{\partial\theta_\alpha}\theta_2 - \theta_1\frac{\partial_D\theta_2}{\partial\theta_\alpha}\right], \end{aligned} \tag{2.140}$$

assim a derivada direita é definida como

$$\frac{\partial_D(\theta_1\theta_2)}{\partial\theta\alpha} = \frac{\partial_D\theta_1}{\partial\theta_\alpha}\theta_2 - \theta_1\frac{\partial_D\theta_2}{\partial\theta_\alpha}. \tag{2.141}$$

2. Agora usando a derivada esquerda

$$\begin{aligned}
\delta F &= \delta\theta_1\theta_2 + \theta_1\delta\theta_2 \\
&= \left(\frac{\partial_E\theta_1}{\partial\theta_\alpha}\delta\theta_\alpha\right)\theta_2 + \theta_1\left(\frac{\partial_E\theta_2}{\partial\theta_\alpha}\delta\theta_\alpha\right) \\
&= \left[-\frac{\partial_E\theta_1}{\partial\theta_\alpha}\theta_2 + \theta_1\frac{\partial_E\theta_2}{\partial\theta_\alpha}\right]\delta\theta_\alpha,
\end{aligned} \tag{2.142}$$

assim a derivada direita é definida como

$$\frac{\partial_E(\theta_1\theta_2)}{\partial\theta\alpha} = -\frac{\partial_E\theta_1}{\partial\theta_\alpha}\theta_2 + \theta_1\frac{\partial_E\theta_2}{\partial\theta_\alpha} \tag{2.143}$$

É importante observar que se F_P é uma função par, então a derivada de F_P em relação a uma variável ímpar, como resultado teremos uma função ímpar F_I' ; e se derivamos uma função ímpar com respeito a uma função ímpar, teremos como resultado uma função par.

A.2 Equações de Hamilton para Variáveis Grassmannianas

Agora concentramos no cálculo das equações de Hamilton para um sistema que possui variáveis ímpares. A ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\theta_\alpha, \dot{\theta}_\alpha), \tag{2.144}$$

é definida com paridade par ($P_A = 0$) e real, e (t é par e real). Fazendo uma variação na ação

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(\theta_\alpha, \dot{\theta}_\alpha), \tag{2.145}$$

e a variação na Lagrangiana usando derivada direita é dada por

$$\delta L = \delta\theta_\alpha\frac{\partial_D L}{\partial\theta_\alpha} + \delta\dot{\theta}_\alpha\frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha}.$$

Da seguinte relação

$$\frac{d}{dt}\left[\delta\theta_\alpha\frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha}\right] = \delta\dot{\theta}_\alpha\frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha} + \delta\theta_\alpha\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha}\right], \tag{2.146}$$

encontramos o seguinte resultado

$$\delta L = \delta\theta_\alpha\left(\frac{\partial_D L}{\partial\theta_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha}\right) + \frac{d}{dt}\left[\delta\theta_\alpha\frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha}\right]. \tag{2.147}$$

Se o último termo é uma quantidade que se conserva nos extremos (t_1, t_2), isto é

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= \delta\theta_\alpha(t)\,\frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha}\bigg|_t && (2.148)\\
Q(t_1) &= Q(t_2), && (2.149)
\end{aligned}
$$

e considerando $\delta S = 0$ obtemos as equações de Euler-Lagrange para um sistema com variáveis ímpares (grassmannianas)

$$
\frac{\partial_D L}{\partial\theta_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha} = 0. \tag{2.150}
$$

Definamos o momento canônico da seguinte forma

$$
\pi^\alpha = \frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha}, \tag{2.151}
$$

e usando derivada direita, a transformação de Legendre que leva a uma função que não depende das velocidades (a Hamiltoniana canônica), é definida como

$$
H_C(\theta,\pi) \;\equiv\; \dot{\theta}_\alpha\pi^\alpha - L, \tag{2.152}
$$

esta definição leva a $\frac{dH_C}{dt} = 0$, note que as velocidades estão à esquerda dos momentos, devido ao fato que estamos usando derivada **direita**.

Considerando que a Hamiltoniana dependa apenas das coordenadas θ_α e dos momentos π_α, a variação infinitesimal em H_C será a seguinte

$$
\delta H_C = \delta\theta_\alpha\frac{\partial_D H_C}{\partial\theta_\alpha} + \delta\pi^\alpha\frac{\partial_D H_C}{\partial\pi^\alpha}. \tag{2.153}
$$

Agora, fazendo uma variação infinitesimal na Hamiltoniana definida pela equação (2.152), encontramos

$$
\begin{aligned}
\delta H_C &= \delta\dot{\theta}_\alpha\pi^\alpha + \dot{\theta}_\alpha\delta\pi^\alpha - \delta L\\
&= \delta\dot{\theta}_\alpha\pi^\alpha + \dot{\theta}_\alpha\delta\pi^\alpha - (\delta\theta_\alpha\frac{\partial_D L}{\partial\theta_\alpha} + \delta\dot{\theta}_\alpha\frac{\partial_D L}{\partial\dot{\theta}_\alpha}),
\end{aligned} \tag{2.154}
$$

e usando a equação de Euler-Lagrange (2.150), obtemos

$$
\begin{aligned}
\delta H_C &= \delta\dot{\theta}_\alpha\pi^\alpha + \dot{\theta}_\alpha\delta\pi^\alpha - (\delta\theta_\alpha\dot{\pi}^\alpha + \delta\dot{\theta}_\alpha\pi^\alpha)\\
&= \dot{\theta}_\alpha\delta\pi^\alpha - \delta\theta_\alpha\dot{\pi}^\alpha.
\end{aligned} \tag{2.155}
$$

Agora, comparando a eq.(2.153) e a eq.(2.155), encontramos as equações de Hamilton para as variáveis ímpares

$$
\begin{aligned}
\dot{\pi}^{\alpha} &= -\frac{\partial_D H_C}{\partial \theta_\alpha} &(2.156)\\
\dot{\theta}_{\alpha} &= -\frac{\partial_D H_C}{\partial \pi^\alpha}. &(2.157)
\end{aligned}
$$

A partir das equações de Hamilton acima, podemos então definir os parênteses de Poisson na álgebra de Grassmann (parênteses de Berezin) como

$$
\begin{aligned}
\{A,B\} &= -\left(\frac{\partial_D A}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial_D B}{\partial\pi^\alpha}+\frac{\partial_D B}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial_D A}{\partial\pi^\alpha}\right)\\
&= \left(\frac{\partial_E A}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial_E B}{\partial\pi^\alpha}+\frac{\partial_E B}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial_E A}{\partial\pi^\alpha}\right), \qquad (2.158)
\end{aligned}
$$

aqui usamos a identidade

$$
\frac{\partial_E A}{\partial z_\alpha} = -(-)^{P_A}\frac{\partial_D A}{\partial z_\alpha}. \qquad (2.159)
$$

A equação de movimento é definida como de costume

$$
\frac{dA}{dt} = \{A, H_C\} + \frac{\partial_{D/E} A}{\partial t}. \qquad (2.160)
$$

A.3 Teoria de Campos

Na seção anterior consideramos o caso de um número finito de geradores, em teoria de campos temos um número infinito de graus de liberdade, portanto precisamos de um número infinito de geradores ($\theta_i \rightarrow \theta(x)$), x é um índice contínuo, e portanto precisamos definir a álgebra de Grassmann num espaço de dimensão infinita.

Qualquer elemento pode ser expresso com

$$
\begin{aligned}
g(\theta,x) = g^0(x) + \int dx_1 g^1(x_1)\theta(x_1,x) + \cdots + \qquad (2.161)\\
+\int dx_1\ldots dx_n g^n(x_1,x_2,\ldots,x_n,x)\theta(x_1)\ldots\theta(x_n)+\ldots.
\end{aligned}
$$

A ação de uma teoria de campos é definida por

$$
S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t), \qquad (2.162)
$$

onde a Lagrangiana $L(t)$, é dada por

$$
L(t) = L[\theta(\mathbf{x},t),\partial_0\theta(\mathbf{x},t)] = \int d^3x \mathcal{L}(\theta(\mathbf{x},t),\partial_0\theta(\mathbf{x},t),\partial_i\theta(\mathbf{x},t)). \qquad (2.163)
$$

Definamos a derivada funcional direita como

$$\delta_D F[\theta] \equiv F[\theta + \delta\theta] - F[\theta] = \int dx \delta\theta(x) \frac{\delta_D F[\theta]}{\delta\theta(x)}, \tag{2.164}$$

daqui

$$\delta_D \theta(\mathbf{x}, t) \equiv \theta(\mathbf{x}, t) + \delta\theta(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \delta\theta(\mathbf{y}, t) \frac{\delta_D \theta(\mathbf{x}, t)}{\delta\theta(\mathbf{y}, t)}, \tag{2.165}$$

e

$$\frac{\delta_D \theta(\mathbf{x}, t)}{\delta\theta(\mathbf{y}, t)} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{2.166}$$

Com estas definições, a derivada entre dois campos grassmannianos A e B, fica da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\delta(A(x)B(y)) &= (\delta A(x))B(y) + A(x)(\delta B(y)) \\
&= \left[\int d^3z \delta\theta(z) \frac{\delta_D A(x)}{\delta\theta(z)}\right] B(y) + A(x) \left[\int d^3z \delta\theta(z) \frac{\delta_D B(y)}{\delta\theta(z)}\right] \\
&= \int d^3z \delta\theta(z) \left[\frac{\delta_D A}{\delta\theta(z)} B(y) - A(x) \frac{\delta_D B(y)}{\delta\theta(z)}\right],
\end{aligned} \tag{2.167}$$

e assim

$$\frac{\delta_D(A(x)B(y))}{\delta\theta(z)} = \frac{\delta_D A}{\delta\theta(z)} B(y) - A(x) \frac{\delta_D B(y)}{\delta\theta(z)}. \tag{2.168}$$

As variáveis grassmannianas possuem outras propriedades, citaremos algumas a seguir

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\theta(y)} = \delta^4(x - y), \tag{2.169}$$

$$\left\{\frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \theta(y)\right\} = \delta^4(x - y), \tag{2.170}$$

$$\left\{\frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \frac{\delta}{\delta\theta(y)}\right\} = 0.$$

A integração é definida por duas regras:

$$\int d\theta(x) 1 = 0 \qquad \int d\theta(x)\theta(x) = 1. \tag{2.171}$$

Fazendo uma variação infinitesimal na Lagrangiana de uma teoria de campo grassmannianos

$$\begin{aligned}\delta L[\theta,\partial_0\theta(\mathbf{x},t)] &= \int d^3x\left(\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\delta_D\ L}{\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)}\right.\\&\left.+\delta(\partial_0\theta^\alpha(\mathbf{x},t))\frac{\delta_D\ L}{\delta(\partial_0\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\right),\end{aligned}\tag{2.172}$$

e integrando por partes, usando $[\delta,\partial]=0$, encontramos

$$\begin{aligned}\delta L[\theta,\partial_0\theta(\mathbf{x},t)] &= \int d^3x\left(\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\delta_D\ L}{\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)}\right.\\&\left.-\delta(\theta^\alpha(\mathbf{x},t))\left[\partial_0\frac{\delta_D\ L}{\delta(\partial_0\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\right]+\partial_0Q^0_L(\mathbf{x},t)\right).\end{aligned}\tag{2.173}$$

Do princípio de Hamilton $\delta S=0$ segue que

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dtd^3x\left(\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\delta_D\ L}{\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)}\right.\\&\left.-\delta(\theta^\alpha(\mathbf{x},t))\left[\partial_0\frac{\delta_D\ L}{\delta(\partial_0\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\right]+\partial_0Q^0_L(\mathbf{x},t)\right),\end{aligned}\tag{2.174}$$

se o termo $F(t)=\int d^3x\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\delta_D\ L}{\delta(\partial_0\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}$ se conserva nos extremos, $F(t_1)=F(t_2)$, usando

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left[\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\delta_D\ L}{\delta(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\right] &= =\delta(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))\frac{\delta_D\ L}{\delta(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\\&+\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\left[\partial_\mu\frac{\delta_D\ L}{\delta(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\right],\end{aligned}\tag{2.175}$$

obtemos

$$\frac{\delta_D\ L}{\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)}-\partial_0\frac{\delta_D\ L}{\delta(\partial_0\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}=0.\tag{2.176}$$

As equação de Euler-Lagrange em função das derivadas infinitesimais (2.176), podem ser definidas em função das derivadas parciais. Para isso, façamos a seguinte variação

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}[\theta(\mathbf{x},t),\partial_0\theta(\mathbf{x},t),\partial_i\theta(\mathbf{x},t)] &= \int d^3x\left(\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\partial_D\mathcal{L}}{\partial\theta^\alpha(\mathbf{x},t)}\right.\\&\left.+\delta(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))\frac{\partial_D\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\right),\end{aligned}\tag{2.177}$$

usando o fato que $[\delta,\partial]=0$ e realizando uma integração por partes, encontramos que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}[\theta(\mathbf{x},t),\partial_0\theta(\mathbf{x},t),\partial_i\theta(\mathbf{x},t)] &= \int d^3x\left\{\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\partial_D\mathcal{L}}{\partial\theta^\alpha(\mathbf{x},t)}\right.\\&-\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\left[\partial_\mu\frac{\partial_D\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\right]\\&\left.+\partial_\mu Q^\mu_{\mathcal{L}}(\mathbf{x},t)\right\},\end{aligned}\tag{2.178}$$

aqui usamos

$$\partial_\mu \left[\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\right] = = \delta(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))\frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))} + \delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\left[\partial_\mu \frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}\right]. \tag{2.179}$$

Definamos a quantidade $Q^\mu_{\mathcal{L}}(\mathbf{x},t) = \delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial\theta^\alpha(\mathbf{x},t)}$. Se esta quantidade se conserva nos extremos ($Q(_1) = Q(t_2)$), então comparando a eq.(2.172) e eq.(2.173) com eq.(2.178), encontramos que

$$\frac{\delta_D\ L}{\delta\theta^\alpha(\mathbf{x},t)} = \frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial\theta^\alpha(\mathbf{x},t)} - \partial_i \frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\theta^\alpha(\mathbf{x},t))} \tag{2.180}$$

$$\frac{\delta_D\ L}{\delta(\partial_0\theta^\alpha(\mathbf{x},t))} = \frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\theta^\alpha(\mathbf{x},t))}. \tag{2.181}$$

Substituindo estes resultados na equação de Euler-Lagrange funcional (2.176) encontramos

$$\frac{\partial_D\ L}{\partial\theta^\alpha(\mathbf{x},t)} - \partial_\mu \frac{\partial_D\ L}{\partial(\partial_\mu\theta^\alpha(\mathbf{x},t))} = 0. \tag{2.182}$$

De forma análoga ao caso de um número finito de graus de liberdades tratado na seção anterior, o Hamiltoniano para uma teoria de campos é definido

$$H(t) = \int d^3x[\partial_0\theta(\mathbf{x},t)]\pi(\mathbf{x},t) - L(t), \tag{2.183}$$

onde os momentos são dispostos nesta ordem devido a definição de derivada que estamos considerando. E os momentos são definidos por

$$\pi^\alpha(\mathbf{x},t) \equiv \frac{\delta_D L(t)}{\delta\partial_0\theta_\alpha(\mathbf{x},t)} = \frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\theta_\alpha(\mathbf{x},t))}. \tag{2.184}$$

A Hamiltoniana H da mesma forma que a Lagrangiana, pode escrita em termos de uma função densidade, a densidade Hamiltoniana

$$H(t) = \int d^3x\mathcal{H}(\theta(\mathbf{x},t), \partial_i\theta(\mathbf{x},t)). \tag{2.185}$$

Portanto, uma variação funcional de H pode ser escrita de duas formas; uma variação em na equação (2.183)

$$\delta H = \int d^3x \left(\delta\theta^\alpha \frac{\delta_D\ H}{\delta\theta^\alpha} + \delta\pi^\alpha \frac{\delta_D H}{\delta\pi^\alpha}\right), \tag{2.186}$$

e usando a densidade de Hamiltoniana (2.185), encontramos

$$\begin{aligned} \delta H &= \int d^3x \left(\delta\theta^\alpha \frac{\partial_D \mathcal{H}}{\partial \theta^\alpha} + \delta\pi^\alpha \frac{\partial_D \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha} \right. \\ &\left. + \delta(\partial_i\theta^\alpha) \frac{\partial_D \mathcal{H}}{\partial(\partial_i\theta^\alpha)} + \delta(\partial_i\pi^\alpha) \frac{\partial_D \mathcal{H}}{\partial(\partial_i\pi^\alpha)} \right). \end{aligned} \tag{2.187}$$

Comparando as duas equações acima, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta_D\ H}{\delta\theta^\alpha} &= \frac{\partial_D \mathcal{H}}{\partial\theta^\alpha} - \partial_i \frac{\partial_D \mathcal{H}}{\partial(\partial_i\theta^\alpha)} \\ \frac{\delta_D H}{\delta\pi^\alpha} &= \frac{\partial_D \mathcal{H}}{\partial\pi^\alpha} - \partial_i \frac{\partial_D \mathcal{H}}{\partial(\partial_i\pi^\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.188}$$

Dessas equações acima podemos inferir quais são as equações de Hamilton, e conseqüentemente a evolução temporal de qualquer variável dinâmica usando os parênteses de Berezin

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_B + \partial_0 F, \tag{2.189}$$

onde $F = F(\theta, \pi)$. E designando a letra B para representar uma função da variáveis par (p, q) e a letra F para representar um função das variáveis ímpar (π, θ), os parênteses de Berezin usando derivada **Direita** são definidos abaixo

$$\begin{aligned} \{B_1, B_2\}_B &= -\{B_2, B_1\}_B = \\ &\int d^3x \left\{ \left(\frac{\delta_D B_1}{\delta q(\mathbf{x},t)_i} \frac{\delta_D B_2}{\delta p(\mathbf{x},t)^i} - \frac{\delta_D B_2}{\delta q(\mathbf{x},t)_i} \frac{\delta_D B_1}{\delta p(\mathbf{x},t)^i} \right) \right. \\ &\left. + \left(\frac{\delta_D B_1}{\delta\theta(\mathbf{x},t)_\alpha} \frac{\delta_D B_2}{\delta\pi(\mathbf{x},t)^\alpha} - \frac{\delta_D B_2}{\delta\theta(\mathbf{x},t)_\alpha} \frac{\delta_D B_1}{\delta\pi(\mathbf{x},t)^\alpha} \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.190}$$

$$\begin{aligned} \{F, B\}_B &= -\{B, F\}_B = \\ &\int d^3x \left\{ \left(\frac{\delta_D F}{\delta q(\mathbf{x},t)_i} \frac{\delta_D B}{\delta p(\mathbf{x},t)^i} - \frac{\delta_D B}{\delta q(\mathbf{x},t)_i} \frac{\delta_D F}{\delta p(\mathbf{x},t)^i} \right) \right. \\ &\left. - \left(\frac{\delta_D F}{\delta\theta(\mathbf{x},t)_\alpha} \frac{\delta_D B}{\delta\pi(\mathbf{x},t)^\alpha} + \frac{\delta_D B}{\delta\theta(\mathbf{x},t)_\alpha} \frac{\delta_D F}{\delta\pi(\mathbf{x},t)^\alpha} \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.191}$$

$$\begin{aligned} \{F_1, F_2\}_B &= \{F_2, F_1\}_B = \\ &\int d^3x \left\{ \left(\frac{\delta_D F_1}{\delta q(\mathbf{x},t)_i} \frac{\delta_D F_2}{\delta p(\mathbf{x},t)^i} + \frac{\delta_D F_2}{\delta q(\mathbf{x},t)_i} \frac{\delta_D F_1}{\delta p(\mathbf{x},t)^i} \right) \right. \\ &\left. - \left(\frac{\delta_D F_1}{\delta\theta(\mathbf{x},t)_\alpha} \frac{\delta_D F_2}{\delta\pi(\mathbf{x},t)^\alpha} + \frac{\delta_D F_2}{\delta\theta(\mathbf{x},t)_\alpha} \frac{\delta_D F_1}{\delta\pi(\mathbf{x},t)^\alpha} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{2.192}$$

B Formalismo de Dirac

Apresentaremos as idéias básicas do formalismo Hamiltoniano generalizado de Dirac, para maiores detalhes as referências [2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6] deverão ser consultadas.

Um sistema é não singular quando a supermatriz Hessiana obedece a seguinte condição

$$\det H_{ij} \equiv \det \frac{\partial_D p_i}{\partial \dot{q}^j} = \det \frac{\partial_D^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0. \tag{2.193}$$

Se esta condição não for satisfeita, necessitaremos do formalismo de Dirac para encontrar o formalismo Hamiltoniano sem ambigüidades.

Se a supermatriz singular tiver posto $P = N - R$, podemos resolver apenas P velocidades $\dot{q}_a$ em função das coordenadas e dos momentos e das R velocidades restantes $\dot{q}_\alpha$, ou seja

$$\dot{q}_a = f_a(q, p_b, \dot{q}_\alpha), \tag{2.194}$$

onde $\alpha = 1, \ldots, R$ e $a = b = R + 1, \ldots, N$. Substituindo na definição dos momentos canônicamente conjugados

$$p_i = \tilde{g}_i(q, \dot{q}_a, \dot{q}_\alpha) = \tilde{g}_i(q, f_a(q, p_b, \dot{q}_\alpha), \dot{q}_\alpha) = g_i(q, p_b, \dot{q}_\alpha). \tag{2.195}$$

Conseqüentemente, temos R vínculos primários

$$\Phi_\alpha = p_\alpha - g_\alpha(q, p_b) \approx 0, \tag{2.196}$$

e portanto se faz necessário a definição do Hamiltoniano primário

$$H_P = H_C + u_\alpha \Phi^\alpha, \tag{2.197}$$

onde u_α são os multiplicadores de Lagrange.

Os vínculos primários devem ser preservados na evolução temporal do sistema, portanto, devemos ter como condição de consistência

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, H_P\}_B \approx 0. \tag{2.198}$$

Destas condições pode resultar em três situações distintas:

- As expressões envolvem os multiplicadores de Lagrange, portanto podemos encontrar alguns dos multiplicadores.

- Estas expressões não envolvem os multiplicadores u_α e nem se anulam, portanto devem ser consideradas como novos vínculos.

- A expressão não envolvem os multiplicadores u_α mas se anula, a igualdade é trivialmente satisfeita.

Apliquemos as condições de consistência nos novos vínculos. O processo deve ser repetido até que não surja novos vínculos.

O próximo passo é a classificação dos vínculos:

- Os vínculos que possuem parênteses de Berezin nulos com todo o conjunto de vínculo, são chamados de vínculos de primeira classe.

- Os que não possui esta propriedade são chamados de vínculos de segunda classe.

Com os vínculos de segunda classe, formamos uma supermatriz Δ. Se esta matriz não for inversível, significa que pelo menos um dos autovetores desta matriz possui um autovalor nulo. Destes autovetores nulos encontramos novos vínculos de primeira classe. E finalmente teremos em mãos o verdadeiro conjunto de vínculos de primeira classe e segunda classe. A supermatriz reduzida Γ será inversível, isto significa que os multiplicadores associados com os verdadeiros vínculos de segunda classe podem ser calculados explicitamente. Restam apenas os vínculos primeira classe, quando é o caso.

Redefinamos os parênteses da seguinte forma

$$\{A, B\}_D = \{A, B\}_B - \{A, \Psi_\beta\}_B \left(\Delta^{-1}\right)^{\beta\alpha} \{\Psi_\alpha, B\}_B, \tag{2.199}$$

denominados de parênteses de Dirac entre as funções A e B.

Dirac conjeturou [‡]que a dinâmica é dada pela nova Hamiltoniana

$$H_E = H_C + v_\alpha \Psi^\alpha, \tag{2.200}$$

que contém todos os vínculos de primeira classe, primários e secundários.

Podemos também continuar os cálculos usando os parênteses de Berezin, substituindo o valor dos multiplicadores de Lagrange calculados no Hamiltoniano primário H_P. O resultado final deve ser o mesmo. A vantagem da nova definição, é que não precisamos se preocupar em calcular explicitamente os multiplicadores. E por fim podemos calcular as equações de Hamilton e comparar com as equações de Euler-Lagrange para se ter uma idéia de como deve ser os multiplicadores de Lagrange, portanto este método não determina explicitamente estes multiplicadores de Lagrange associados com os vínculos de primeira classe. Para calcular explicitamente estes multiplicadores, necessitamos de condições subsidiárias (ou condições de gauge). As condições de gauge devem ser escolhidas de tal forma que o novo conjunto, vínculos de primeira classe e condições de gauge, devem formar um conjunto de vínculos de segunda classe (supermatriz inversível). Desta forma não teremos parâmetros arbitrários na teoria, todos os multiplicadores podem ser calculados explicitamente. E as equações de Hamilton concordam com as equações de Euler-Lagrange.

[‡]Com base nas transformações infinitesimais que não alteram o estado físico do sistema, Dirac observou que tanto os vínculos de primeira classe primários quanto os secundários são geradores destas transformações que não afetam o estado do sistema.

C Integração Funcional para Sistemas com vínculos de Primeira Classe

C.1 Dinâmica no Espaço de Fase Reduzido

O espaço de fase reduzido Γ^*, ou o espaço físico, possui o número de graus de liberdade correto da teoria. A dimensão deste espaço é $D^* = D - 2m$, onde $D = 2n$ é a dimensão do espaço de fase completo Γ, e m é o número de vínculos da teoria.

As coordenadas e os momentos do espaço de fase reduzido serão rotuladas por $(\mathcal{A}^i(\mathbf{x},t), \Pi_i(\mathbf{x},t))$, os índices $i, j, k = m+1, \ldots, n$; enquanto que as coordenadas e os momentos do espaço de fase completo são rotuladas por $(A^\mu(\mathbf{x},t), \pi_\mu(\mathbf{x},t))$, e os índices $\mu, \nu, \rho = 1, \ldots, n$. Aqui estamos considerando que os índices podem pertencer tanto ao espaço quanto ao tempo.

Façamos uma transformação canônica nas coordenadas do espaço de fase Γ

$$(A^\mu(\mathbf{x},t), \pi_\mu(\mathbf{x},t)) \to (Q^\mu(\mathbf{x},t), P_\mu(\mathbf{x},t)), \tag{2.201}$$

quando o índice μ das novas coordenadas e momentos variam de $\mu = m+1, \ldots, n \equiv i$, definimos que estas novas coordenadas e momentos são as coordenadas e momentos do espaço reduzido

$$\left(Q^i \equiv \mathcal{A}^i, P_i \equiv \Pi_i\right). \tag{2.202}$$

Definamos os novos momentos e coordenadas restantes como sendo as condições de gauge e os vínculos respectivamente

$$P_a \equiv \xi_a \qquad a = b = 1, \ldots, m \tag{2.203}$$

$$Q^a \qquad a = b = 1, \ldots, m, \tag{2.204}$$

Por definição, uma transformação canônica deve satisfazer

$$\begin{aligned} &\{Q^\mu, Q^\nu\} = 0 \qquad \{P^\mu, P^\nu\} = 0 \\ &\{Q^\mu(\mathbf{x},t), P_\nu(\mathbf{y},t)\} = \delta^\mu_\nu \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{2.205}$$

portanto, devemos escolher o caso onde as condições de gauge satisfazem

$$\{\xi_a, \xi_b\} = 0. \tag{2.206}$$

Em termos das novas variáveis, calculemos o parêntese de Poisson entre os gauges ξ e os vínculos de primeira classe da teoria $\{\xi_b, \psi^a\}$

$$\begin{aligned} \{\xi_b(x,t), \psi^a(y,t)\} &= \int d^3x' \left(\frac{\delta \xi_b(x,t)}{\delta Q^\mu(x',t)} \frac{\delta \psi^a(\ y,t)}{\delta P_\mu(x',t)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta \psi^a(\ y,t)}{\delta Q^\mu(x',t)} \frac{\delta \xi_b(x,t)}{\delta P_\mu(x',t)} \right) \\ &= -\frac{\delta \psi^a(\ y,t)}{\delta Q^b(x,t)}. \end{aligned} \tag{2.207}$$

Usando este resultado podemos reescrever a condição que garante que os multiplicadores de Lagrange são fixados, da seguinte forma

$$\det|\{\xi_b(x,t),\psi^a(y,t)\}| = \det\left|\frac{\delta\psi^a(\ y,t)}{\delta Q^b(x,t)}\right| \neq 0. \tag{2.208}$$

O Hamiltoniano no espaço de fase reduzido é definido por

$$H^*(\mathcal{A}^i,\Pi_i) = H(A^\mu,\pi_\mu)|_{\psi^a=0,\xi^a=0}\,, \tag{2.209}$$

e conseqüentemente

$$\dot{\mathcal{A}}^i = \frac{\delta H^*}{\delta\Pi_i} \qquad \dot{\Pi}_i = -\frac{\delta H^*}{\delta\mathcal{A}^i}. \tag{2.210}$$

Isto significa que o sistema físico pode ser reduzido de $2n$ variáveis sujeitas a m vínculos e m condições de gauge, para $2(n-m)$ variáveis independentes.

C.2 Amplitude de Transição para Lagrangianas que possuem somente vínculos de primeira classe

A amplitude de transição do sistema estar em uma configuração de campo $\mathcal{A}^i$ no espaço de fase reduzido Γ^* no tempo $t=0$ e depois de um intervalo de tempo t encontrar-se na mesma configuração é dada por

$$\begin{aligned} <\mathcal{A}^i|e^{-itH^*}|\mathcal{A}^i> &= \int\prod_i D\Pi_i D\mathcal{A}^i \\ &\times\exp\left\{i\int_0^t dt\left[\sum_i\Pi_i\dot{\mathcal{A}}^i - H\left(Q^a(\mathcal{A}^i,\Pi_i),\mathcal{A}^i,P_a=0,\Pi_i\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.211}$$

Agora o objetivo é passar do espaço de fase Γ^* para o espaço de fase completo Γ, para isto escrevemos a amplitude de transição de uma forma equivalente

$$\begin{aligned} <\mathcal{A}^i|e^{-itH^*}|\mathcal{A}^i> &= \int\prod_{i=m+1}^{n} D\Pi_i D\mathcal{A}^i\prod_{a=1}^{m} DP_a DQ^a\delta(P_a)\delta[Q^a - Q^a(\mathcal{A}^i,\Pi_i)] \\ &\times\exp\left\{i\int_0^t dt\left[\sum_{i=m+1}^{n}\Pi_i\dot{\mathcal{A}}^i + \sum_{a=1}^{m}P_a\dot{Q}^a - H\left(P_a,Q^a,\mathcal{A}^i,\Pi_i\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.212}$$

Definamos $Q'^a = Q^a(\mathcal{A}^i,\Pi_i)$, calculamos a seguinte integral

$$\begin{aligned} \int DQ'^a\delta\left[\psi^b(Q'^a)\right] &= \int D\psi^c\det|\frac{\delta Q'^a}{\delta\psi^c}|\delta\left[\psi^b(Q'^a)\right] \\ &= \det\left|\frac{\delta Q'^a}{\delta\psi^c}\right|_{\psi^b(Q'^a)=0}, \end{aligned} \tag{2.213}$$

e usando o resultado acima encontramos a seguinte identidade

$$\left(\det\left|\frac{\delta Q'^a}{\delta\psi^c}\right|_{\psi^b(Q'^a)=0}\right)^{-1}\int DQ'^a\delta\left[\psi^b(Q'^a)\right]=1. \tag{2.214}$$

Inserindo esta identidade na amplitude de transição

$$\begin{aligned}< \mathcal{A}^i|e^{-itH^*}|\mathcal{A}^i >=&\int\prod_{i=m+1}^{n}D\Pi_iD\mathcal{A}^i\prod_{a=1}^{m}DP_aDQ^a\delta(P_a)\delta[Q^a-Q^a(\mathcal{A}^i,\Pi_i)]\\ &\times\det\left|\frac{\delta\psi^c}{\delta Q'^a}\right|_{\psi^b(Q'^a)=0}\int DQ'^a\delta\left[\psi^b(Q'^a)\right]\\ &\times\exp\left\{i\int_0^t dt\left[\sum_{i=m+1}^{n}\Pi_i\dot{\mathcal{A}}^i+\sum_{a=1}^{m}P_a\dot{Q}^a-H\left(P_a,Q^a,\mathcal{A}^i,\Pi_i\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{2.215}$$

e realizando a integração em Q'^a obtemos

$$\begin{aligned}< \mathcal{A}^i|e^{-itH^*}|\mathcal{A}^i >=&\int\prod_{i=m+1}^{n}D\Pi_iD\mathcal{A}^i\prod_{a=1}^{m}DP_aDQ^a\delta(P_a)\\ &\times\det\left|\frac{\delta\psi^c}{\delta Q^a}\right|_{\psi^b(Q^a)=0}\delta\left[\psi^b(Q^a)\right]\\ &\times\exp\left\{i\int_0^t dt\left[\sum_{i=m+1}^{n}\Pi_i\dot{\mathcal{A}}^i+\sum_{a=1}^{m}P_a\dot{Q}^a-H\left(P_a,Q^a,\mathcal{A}^i,\Pi_i\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{2.216}$$

E finalmente a amplitude de transição para um sistema que possui apenas vínculos de primeira classe é dada por

$$\begin{aligned}< \mathcal{A}^i|e^{-itH^*}|\mathcal{A}^i >=&\int\prod_{\mu=1}^{n}D\pi_\mu D\ A^\mu\det|\{\xi_b,\psi^a\}|\prod_{a=1}^{m}\delta(\xi_a)\int Dv_a\\ &\times\exp\left\{i\int_0^t dt\left[\sum_{\mu=1}^{n}\pi_\mu\ \dot{A}^\mu-H_E\left(\pi_\mu,A^\mu\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{2.217}$$

onde a Hamiltoniana estendida é

$$H_E=H+\sum_{a=1}^{m}\int d^3x\,v_a\psi^a, \tag{2.218}$$

e usamos a identidade

$$\int\prod_a Dv_a\exp\left\{-i\sum_a\int dt\,d^3x\,v_a\psi^a\right\}=\prod_a\delta(\psi^a). \tag{2.219}$$

D Integração funcional para sistemas com vínculos de primeira e segunda classe

D.1 Dinâmica no Espaço de Fase Reduzido para sistemas com vínculos de primeira e segunda classe

O espaço de fase reduzido Γ^*, ou o espaço físico, possui o número de graus de liberdade correto da teoria. A dimensão deste espaço é $D^*=D-(m+2n)-m=2(N-n-m)$, onde $D = 2N$ é a dimensão do espaço de fase completo Γ, e m é o número de vínculos de primeira classe da teoria, e $2n$ é o número de vínculos de segunda classe da teoria. E para cada vínculo de primeira classe existe uma condição de gauge, portanto temos m condições de gauge.

No trabalho de P. Senjanovic [2.8] foi generalizado o trabalho de L.D. Faddeev [2.12] para o caso onde vínculos de segunda classe possam estar presentes. No entanto, no trabalho citado P. Senjanovic considerou apenas sistemas com variáveis par. Aqui consideraremos a possibilidade que o sistema também possua variáveis ímpares, de modo que com base nestes resultados poderemos aplicar a quantização para sistemas com férmions.

As variáveis canônicas no espaço de fase completo Γ devem satisfazer os seguintes vínculos

$$\varphi^a(q_i, p^i) \qquad a = 1, \ldots, m \qquad 1^{\text{a}} \quad \text{classe(par)} \tag{2.220}$$

$$\theta^{\rho'}(q_i, p^i) \qquad \rho' = 1, 2, \ldots, 2n \qquad 2^{\text{a}} \quad \text{classe(ímpar)} \tag{2.221}$$

os vínculos de primeira classe φ^a são variáveis **par**, enquanto os vínculos de segunda classe θ^ρ são variáveis **ímpar**.

As coordenadas e os momentos do espaço de fase reduzido, pares e ímpares, serão rotuladas por $({q^*}_\alpha(\mathbf{x}, t),\ p^{*\alpha}(\mathbf{x}, t))$, os índices $\alpha, \beta, \gamma = (n + m + 1), \ldots, N$; enquanto que as coordenadas e os momentos do espaço de fase completo são rotuladas por $(q_i(\mathbf{x}, t), p^i(\mathbf{x}, t))$, e os índices $i, j, k = 1, \ldots, N$.

Façamos uma transformação canônica nas coordenadas do espaço de fase Γ

$$\big(q_i(\mathbf{x}, t), p^i(\mathbf{x}, t)\big) \xrightarrow{t.c.} \big(Q_i(\mathbf{x}, t), P^i(\mathbf{x}, t)\big) \tag{2.222}$$

$$i = \underbrace{1, \ldots, m}_{a,b,c}\underbrace{m+1, \ldots, m+n,}_{\rho,\eta,\tau}\underbrace{m+n+1, \ldots, N}_{\alpha,\gamma,\sigma}, \tag{2.223}$$

quando o índice i das novas coordenadas e momentos varia de $(m + n + 1, \ldots, N = \alpha, \gamma, \sigma)$, definimos que estas novas coordenadas e momentos são as coordenadas e momentos do espaço de fase reduzido Γ^*

$$(Q_\alpha = {q^*}_\alpha, P^\alpha = p^{*\alpha})\,. \tag{2.224}$$

Definimos os momentos relacionados com os índice $(a, b, c = 1, \ldots, m)$ como sendo as condições de gauge

$$P_a \equiv \xi_a \qquad a, b, c = 1, \ldots, m, \tag{2.225}$$

para isto devemos escolher o caso onde as condições de gauge satisfazem

$$\{\xi_a, \xi_b\}_B = 0, \tag{2.226}$$

observe que devido a que os gauge (ξ^a) serem variáveis **pares**, este conjunto de coordenadas (Q_a, P^a) também são variáveis **pares**.

Por definição de uma transformação canônica

$$\{Q^i, Q^j\}_B = 0 \qquad \{P^i, P^j\}_B = 0$$
$$\{Q^i(\mathbf{x}, t), P_j(\mathbf{y}, t)\}_B = \delta^i_j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{2.227}$$

Em termos das novas variáveis canônicas, calculamos $\{\xi_b, \varphi^a\}_B$

$$\begin{aligned}\{\xi_b(x,t), \varphi^a(y,t)\}_B &= \int d^3x' \left(\frac{\delta \xi_b(x,t)}{\delta Q^i(x',t)} \frac{\delta \varphi^a(\ y,t)}{\delta P_i(x',t)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta \varphi^a(\ y,t)}{\delta Q^i(x',t)} \frac{\delta \xi_b(x,t)}{\delta P_i(x',t)} \right) \\ &= -\frac{\delta \varphi^a(\ y,t)}{\delta Q^b(x,t)}. \end{aligned} \tag{2.228}$$

Usando este resultado podemos reescrever a condição que garante que os multiplicadores de Lagrange são fixados, da seguinte forma

$$\det |\{\xi_b(x,t), \varphi^a(y,t)\}| = \det \left| \frac{\delta \varphi^a(\ y,t)}{\delta Q^b(x,t)} \right| \neq 0. \tag{2.229}$$

O Hamiltoniano no espaço de fase reduzido é definido por

$$H^*(q^{*\alpha}, p^*{}_\alpha) = H(q^i, p_i)\big|_{\varphi^a=0, \xi^a=0}, \tag{2.230}$$

e conseqüentemente

$$\dot{q^*}^\alpha = \frac{\delta H^*}{\delta p^*{}_\alpha} \qquad \dot{p}^*_\alpha = -\frac{\delta H^*}{\delta q^{*\alpha}}, \tag{2.231}$$

isto significa que o sistema físico pode ser reduzido de $2N$ variáveis sujeitas a $(m + 2n)$ vínculos e m condições de gauge, para $2(N - n - m)$ variáveis independentes.

D.2 Amplitude de Transição para Lagrangianas que possuem vínculos de primeira e segunda classe

A amplitude de transição no espaço de fase reduzido é

$$\begin{aligned} < q^{*\alpha} | e^{-itH^*} | q^{*\alpha} >&= \int \prod_\alpha Dp^*_\alpha Dq^{*\alpha} \\ \times \exp &\left\{ i \int_0^t dt \left[\sum_{\alpha=m+n+1}^{N} p^*_\alpha \dot{q^*}^\alpha - H^*\left(q^{*\alpha}, p^*_\alpha\right) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.232}$$

Agora o objetivo é passar do espaço de fase Γ^* para o espaço de fase completo Γ, para isto escrevemos a amplitude de transição de uma forma equivalente

$$
\begin{aligned}
< q^{*\alpha}|e^{-itH^*}|q^{*\alpha} >= & \int \prod_{\alpha} Dp^*_\alpha Dq^{*\alpha} \prod_{a=1}^{m} DP_a DQ^a \delta(P_a)\delta[Q_a - Q^*_a(q^{*\alpha}, p^*_\alpha)] \\
\times & \prod_{\rho'=m+1}^{m+2n} D\bar{Q}^{\rho'} \delta[\bar{Q}_{\rho'} - \bar{Q}^*_{\rho'}(q^{*\alpha}, p^*_\alpha)] \\
\times & \exp\left\{ i\int_0^t dt \left[\sum_{\alpha=m+n+1}^{N} p^*_\alpha \dot{q^*}^\alpha + \sum_{a=1}^{m} P_a \dot{Q}^a - H\left(q^{*\alpha}, p^*_\alpha, Q^*_a, P^a, \bar{Q}^*_{\rho'}\right)\right]\right\}, \qquad (2.233)
\end{aligned}
$$

onde Q^*_a, e $\bar{Q}^*_{\rho'}$ são soluções dos vínculos

$$\varphi_a\left(p^*_\alpha,\, q^*_\alpha,\, P_a = 0,\, Q^*_a,\, \bar{Q}^*_{\rho'}\right) = 0 \qquad (2.234)$$

$$\theta_{\rho'}\left(p^*_\alpha,\, q^*_\alpha,\, P_a = 0,\, Q^*_a,\, \bar{Q}^*_{\rho'}\right) = 0. \qquad (2.235)$$

Fazendo uso da seguinte identidade relacionando φ e Q

$$
\begin{aligned}
\int DQ\delta\left[\varphi(Q)\right] &= \int D\varphi \det|\frac{\delta Q}{\delta\varphi}|\delta\left[\varphi(Q)\right] \\
&= \det\left|\frac{\delta Q}{\delta\varphi}\right|_{\varphi(Q)=0}, \qquad (2.236)
\end{aligned}
$$

encontramos a seguinte identidade

$$\left(\det\left|\frac{\delta Q}{\delta\varphi}\right|_{\varphi(Q)=0}\right)^{-1}\int DQ\delta\left[\varphi(Q)\right] = 1, \qquad (2.237)$$

onde estamos considerando que tanto φ quanto Q sejam variáveis **pares**.

Inserindo esta identidade na amplitude de transição

$$
\begin{aligned}
< q^{*\alpha}|e^{-itH^*}|q^{*\alpha} >= & \int \prod_{\alpha} Dp^*_\alpha Dq^{*\alpha} \prod_{a=1}^{m} DP_a DQ^a \delta(P_a) \det\left|\frac{\delta\varphi}{\delta Q^*}\right|_{\varphi(Q^*)=0} \\
\times & \int DQ^*_a \delta\left[\varphi_a(Q^*)\right]\delta[Q_a - Q^*_a(q^{*\alpha}, p^*_\alpha)] \prod_{\rho'=m+1}^{m+2n} D\bar{Q}^{\rho'} \delta[\bar{Q}_{\rho'} - \bar{Q}^*_{\rho'}(q^{*\alpha}, p^*_\alpha)] \\
\times & \exp\left\{ i\int_0^t dt \left[\sum_{\alpha=m+n+1}^{N} p^*_\alpha \dot{q^*}^\alpha + \sum_{a=1}^{m} P_a \dot{Q}^a - H\left(q^{*\alpha}, p^*_\alpha, Q^*_a, P^a, \bar{Q}^*_{\rho'}\right)\right]\right\}, \qquad (2.238)
\end{aligned}
$$

e realizando a integração em Q^*_a obtemos

$$
\begin{aligned}
< q^{*\alpha}|e^{-itH^*}|q^{*\alpha} >= & \int \prod_{\alpha} Dp^*_\alpha Dq^{*\alpha} \prod_{a=1}^{m} DP_a DQ^a \delta(P_a) \det\left|\frac{\delta\varphi}{\delta Q}\right|_{\varphi(Q)=0} \\
\times & \delta\left[\varphi_a(Q)\right] \prod_{\rho'=m+1}^{m+2n} D\bar{Q}^{\rho'} \delta[\bar{Q}_{\rho'} - \bar{Q}^*_{\rho'}(q^{*\alpha}, p^*_\alpha)] \\
\times & \exp\left\{ i\int_0^t dt \left[\sum_{\alpha=m+n+1}^{N} p^*_\alpha \dot{q^*}^\alpha + \sum_{a=1}^{m} P_a \dot{Q}^a - H\left(q^{*\alpha}, p^*_\alpha, Q_a, P^a, \bar{Q}^*_{\rho'}\right)\right]\right\}. \qquad (2.239)
\end{aligned}
$$

Fazendo o uso da identidade relacionando θ e $\bar{Q}^*$

$$\begin{aligned}\int D\bar{Q}^*\delta\left[\theta(\bar{Q}^*)\right] &= \int D\theta \det|\frac{\delta\theta}{\delta\bar{Q}^*}|\delta\left[\theta(\bar{Q})\right] \\ &= \det\left|\frac{\delta\theta}{\delta\bar{Q}}\right|_{\theta(\bar{Q})=0},\end{aligned} \tag{2.240}$$

e usando o resultado acima encontramos a seguinte identidade

$$\left(\det\left|\frac{\delta\theta}{\delta\bar{Q}^*}\right|_{\theta(\bar{Q})=0}\right)^{-1}\int D\bar{Q}^*\delta\left[\theta(\bar{Q})\right] = 1, \tag{2.241}$$

onde estamos considerando que tanto θ quanto $\bar{Q}^*$ são variáveis **ímpares**.

Inserindo esta identidade na amplitude de transição acima

$$\begin{aligned}< q^{*\alpha}|e^{-itH^*}|q^{*\alpha} >= \int\prod_{\alpha} Dp^*_\alpha Dq^{*\alpha}\prod_{a=1}^{m} DP_a DQ^a\delta(P_a)\det\left|\frac{\delta\varphi}{\delta Q}\right|_{\varphi(Q)=0}\det\left|\frac{\delta\bar{Q}^*}{\delta\theta}\right|_{\theta(\bar{Q})=0} \\ \times\delta\left[\varphi_a(Q)\right]\prod_{\rho'=m+1}^{m+2n} D\bar{Q}^{\rho'}\int D\bar{Q}^*_{\rho'}\delta\left[\theta_{\rho'}(\bar{Q}^*)\right]\delta[\bar{Q}_{\rho'}-\bar{Q}^*_{\rho'}(q^{*\alpha},p^*_\alpha)] \\ \times\exp\left\{i\int_0^t dt\left[\sum_{\alpha=m+n+1}^{N} p^*_\alpha\dot{q^*}^\alpha+\sum_{a=1}^{m} P_a\dot{Q}^a - H\left(q^{*\alpha},p^*_\alpha,Q_a,P^a,\bar{Q}^*_{\rho'}\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{2.242}$$

e integramos na variável $\bar{Q}^*$, obtemos

$$\begin{aligned}< q^{*\alpha}|e^{-itH^*}|q^{*\alpha} >= \int\prod_{\alpha} Dp^*_\alpha Dq^{*\alpha}\prod_{a=1}^{m} DP_a DQ^a\delta(P_a)\det\left|\frac{\delta\varphi}{\delta Q}\right|_{\varphi(Q)=0}\det\left|\frac{\delta\bar{Q}}{\delta\theta}\right|_{\theta(\bar{Q})=0} \\ \times\delta\left[\varphi_a(Q)\right]\prod_{\rho'=m+1}^{m+2n} D\bar{Q}^{\rho'}\delta\left[\theta_{\rho'}(\bar{Q})\right] \\ \times\exp\left\{i\int_0^t dt\left[\sum_{\alpha=m+n+1}^{N} p^*_\alpha\dot{q^*}^\alpha+\sum_{a=1}^{m} P_a\dot{Q}^a - H\left(q^{*\alpha},p^*_\alpha,Q_a,P^a,\bar{Q}_{\rho'}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{2.243}$$

Fazendo a seguinte redefinição

$$\prod_{\rho'=m+1}^{m+2n} D\bar{Q}^{\rho'}\delta\left[\theta_{\rho'}(\bar{Q})\right] \equiv \prod_{\rho=m+1}^{m+n} D\bar{P}_\rho D\bar{Q}^\rho\delta\left(\theta_\rho\right)\delta\left(\bar{P}_\rho=\theta_{\rho+n}\right), \tag{2.244}$$

e substituindo esta redefinição acima, podemos escrever a amplitude de transição como

$$\begin{aligned}< q^{*\alpha}|e^{-itH^*}|q^{*\alpha} >= \int\prod_{\alpha} Dp^*_\alpha Dq^{*\alpha}\prod_{a=1}^{m} DP_a DQ^a\delta(P_a)\det\left|\frac{\delta\varphi}{\delta Q}\right|_{\varphi(Q)=0}\det\left|\frac{\delta\bar{Q}}{\delta\theta}\right|_{\theta(\bar{Q})=0} \\ \times\delta\left[\varphi_a(Q)\right]\prod_{\rho=m+1}^{m+n} D\bar{P}_\rho D\bar{Q}^\rho\delta\left(\theta_\rho\right)\delta\left(\bar{P}_\rho=\theta_{\rho+n}\right)\exp\left\{i\int_0^t dt\left[\sum_{\alpha=m+n+1}^{N} p^*_\alpha\dot{q^*}^\alpha+\sum_{a=1}^{m} P_a\dot{Q}^a\right.\right. \\ \left.\left.+\sum_{\rho=m+1}^{m+n}\bar{P}_\rho\dot{\bar{Q}}^\rho - H\left(q^{*\alpha},p^*_\alpha,Q_a,P^a,\bar{Q}_\rho,\bar{P}_\rho\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{2.245}$$

Observando quais são as variáveis definidas pela transformação canônica, obtemos

$$< q^{*\alpha}|e^{-itH^*}|q^{*\alpha} >= \int D[\mu] \exp\left\{ i \int_0^t dt \left[\sum_{i=1}^{N} P_i \dot{Q}^i - H(P_i, Q_i) \right] \right\}, \tag{2.246}$$

onde

$$D[\mu] \;=\; \int \prod_{i=1}^{N} DP_i DQ^i \det|\{\xi, \varphi\}| \det\left|\frac{\delta \bar{Q}}{\delta \theta}\right|_{\theta(\bar{Q})=0} \prod_{a=1}^{m} \delta(\varphi_a)\, \delta(\xi_a) \prod_{\rho'=1}^{2n} \delta(\theta_{\rho'}) \,. \tag{2.247}$$

Acima, fizemos uso do resultado encontrado na seção anterior

$$\det|\{\xi_b(x,t), \varphi^a(y,t)\}| = \det\left|\frac{\delta \varphi^a(\ y,t)}{\delta Q^b(x,t)}\right| \neq 0. \tag{2.248}$$

Agora com o objetivo de calcular o determinante $\det\left|\frac{\delta \bar{Q}}{\delta \theta}\right|_{\theta(\bar{Q})=0}$, definamos a coordenada $\bar{Q}$ como sendo uma função θ'

$$\bar{Q}_{\rho'} \equiv \theta'_{\rho'} = \Lambda_{\rho' l}\theta_l + \mu_{\rho' l}\varphi_l, \tag{2.249}$$

onde

$$\Lambda_{\rho' l} \;=\; \Lambda^0_{\rho' l} + \bar{\Lambda}_{\rho' l} \tag{2.250}$$

$$\bar{\Lambda}_{\rho' l} \;=\; W^e_{\rho' l}\theta_e + U^a_{\rho' l}\varphi_a, \tag{2.251}$$

e

$$\mu_{\rho' l} \;=\; \mu^0_{\rho' l} + \bar{\mu}_{\rho' l} \tag{2.252}$$

$$\bar{\mu}_{\rho' l} \;=\; Z^e_{\rho' l}\theta_e + V^a_{\rho' l}\varphi_a, \tag{2.253}$$

Com base nestas definições, obtemos

$$\det\left|\frac{\delta \bar{Q}}{\delta \theta}\right|_{\theta=0} = \det\left|\frac{\delta \theta'}{\delta \theta}\right|_{\theta=0} = \det\left|\Lambda^0\right|_{\theta(\bar{Q})=0}. \tag{2.254}$$

Podemos mostrar que existe uma matriz Λ^0 tal que

$$\mathbf{C}'^0 \mathbf{C} (\Lambda^0)^T, \tag{2.255}$$

onde $\mathbf{C} = ||\{\theta, \theta\}_B||$ é a matriz dos vínculos de segunda classe, e $\mathbf{C}' = ||\{\theta', \theta'\}_B||$.

A matriz Λ^0 é definida de tal forma que $\det \mathbf{C}' = 1$, desta forma obtemos

$$\det \Lambda^0 = (\det \mathbf{C})^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.256}$$

Portanto

$$\det\left|\frac{\delta \bar{Q}}{\delta \theta}\right|_{\theta=0} = \det\left|\frac{\delta \theta'}{\delta \theta}\right|_{\theta=0} = \det\left|\Lambda^0\right|_{\theta(\bar{Q})=0} = (\det \mathbf{C})^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.257}$$

E finalmente encontramos a amplitude de transição no espaço de fase completo (Γ)

$$< q^{*\alpha}|e^{-itH^*}|q^{*\alpha} >= \int D[\mu] \exp\left\{ i \int_0^t dt \left[\sum_{i=1}^{N} P_i \dot{Q}^i - H(P_i, Q_i) \right] \right\}, \tag{2.258}$$

onde

$$D[\mu] = \int \prod_{i=1}^{N} DP_i DQ^i \det ||\{\xi, \varphi\}|| \left(\det ||\{\theta, \theta\}||\right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{a=1}^{m} \delta\left(\varphi_a\right) \delta(\xi_a) \prod_{\rho'=1}^{2n} \delta\left(\theta_{\rho'}\right). \tag{2.259}$$

Bibliografia

[2.1] P. A. M. Dirac, "*Lectures on Quantum Mechanics*", Belfer Graduate School of Science, (Yeshiva University, New York, 1964).
Livro de cabeceira para o estudo de sistemas vinculados.

[2.2] P. A. M. Dirac, "*Generalized Hamiltonian Dynamics*,"Canadian Journal of Mathematics, **2**, 129 (1950).

[2.3] P. A. M. Dirac , "*The Hamiltonian form of field dynamics*,"Canadian Journal of Mathematics **3** 1 (1951).

[2.4] Kurt Sundermeyer, "*Constrained Dynamics; Lecture notes in Physics*"(Springer-Verlag, 1982).
Este livro possui uma excelente introdução à teoria de vínculo. No Apêndice C deste livro, se encontra um resumo sobre álgebra de Grassmann.

[2.5] Randall Guedes Teixeira, "*Quantização de sistemas singulares via formalismo de Hamilton-Jacobi*", tese de doutorado, UNESP-IFT-T.006/00, 2000.
Esta tese de doutorado possui em excelente resumo sobre o formalismo de Dirac incluindo as variáveis ímpares.

[2.6] Andrew Hanson, Tullio Regge, Claudio Teitelboin, "*Constrained Hamiltonian Systems*", (Academia Nazionale de Lincei, 1976).
O autor aborda o assunto com muita desenvoltura. Para quem estiver interessado em Espaços Curvos, este livro é um bom começo.

[2.7] M. Chaichian, N.F. Nelipa, "*Introduction to Gauge Field Theories*", (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984).
Toda discussão realizada do Apêndice (A) está contida neste livro.

[2.8] Senjanovic P., Ann. Phys. (N.Y) **100**, 227 (1976).
Neste artigo o autor generaliza o trabalho de Faddeev, incluindo vínculos de segunda classe no formalismo de integração funcional. Com base neste trabalho foi possível no Apêndice (2-B) uma generalização incluindo variáveis pares e ímpares.

[2.9] Casalbuoni R., Nuovo Cim. **A 33**, 389 (1976).
Para o desenvolvimento de uma teoria clássica para os Férmions, é necessário estudar Pseudomecânica. Este e os próximos artigos discutem a pseudomecânica.

[2.10] Casalbuoni R., Nuovo Cim. **A 33**, 115 (1976).

[2.11] Berezin F. A., "*The method of Second Quantization*", Academic Press, New York (1966).

[2.12] L.D.Faddeev, Teoret. i Mat. Fiz. **1** 3 (1969). [Trans. Theoret. Math. Phys. **1** 1 (1970).]

[2.13] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, "*Quantization of Fields with Constraints*", (Springer-Velag, 1990).

[2.14] Walter Greiner and Joachim Reinhardt, "*Field Quantization*",(1996).
Este é um livro introdutório á teoria de campos. Possui uma introdução sobre Integração funcional para varáveis pares e impares.

[2.15] Bjorn Felsazer, "*Geometry, Particles and Fields*"(Springer, 1998) pag. 10.

Capítulo 3

Modelo de Schwinger-(QED_{1+1}) à Temperatura Finita

Todas as idéias e técnicas utilizadas nos capítulos anteriores serão úteis para o desenvolvimento deste capítulo e dos capítulos restantes. Aqui abordaremos o Modelo de Schwinger (MS) (QED_2), que é a Eletrodinâmica Quântica (QED) em uma dimensão espacial e uma temporal ($D = 1+1$). Este modelo foi introduzido em 1962 por Julian Schwinger [3.1], desde então, este modelo tem se tornado um laboratório para testar as características gerais de uma teoria de gauge. O modelo de Schwinger possui a vantagem de ser exatamente solúvel. Os propagadores tanto do campo de gauge (A^μ) quanto do campo de Dirac sem massa (ψ) são calculados de forma exata, são os propagadores completos da teoria. O modelo também exibe algumas características muito importantes, como confinamento e geração dinâmica de massa.

Neste capítulo estaremos interessados nas suas características mais fundamentais, toda a sutileza da teoria clássica (vínculos, Grassmann, etc, ...) e dos cuidados para obtenção da função de Partição da teoria que é fundamental para implementar o gerador funcional das funções de correlação e a correspondente obtenção das equações de Schwinger-Dyson e as identidades de Ward.

3.1 Análise de Vínculos

O modelo de Schwinger é a Eletrodinâmica Quântica de férmions sem massa num espaço-tempo de (1+1)-dimensões e é definido pela seguinte densidade Lagrangiana*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{e.m} + \mathcal{L}_{int} \\ &= \frac{i}{2}(\lambda+1)\,\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{i}{2}(\lambda-1)\,\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

*A notação que usaremos assim como as propriedades das matrizes γ^μ de Dirac no espaço-tempo de Minkowski bidimensional esta detalhada no Apêndice **A** do Capítulo.

A densidade de Lagrangiana (3.1) nos leva as seguintes equações de Euler-Lagrange

$$\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu)\psi = 0 \tag{3.2}$$

$$(i\partial_\mu + eA_\mu)\bar{\psi}\gamma^\mu = 0 \tag{3.3}$$

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial.A) = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{3.4}$$

No nível clássico a densidade Lagrangiana é invariante sob as transformações globais geradas pelo grupo quiral $U_{_V}(1) \times U_{_A}(1)$

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha}\psi \quad , \quad \psi \longrightarrow e^{i\beta\gamma_5}\psi\,. \tag{3.5}$$

e, também, é invariante sob a transformação de gauge local

$$\psi \to e^{-i\Lambda}\psi \quad , \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\Lambda} \quad , \quad A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda \tag{3.6}$$

Os momentos canônicos fermiônicos são

$$\bar{p}^\alpha \equiv \frac{\partial_D\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_\alpha(\mathbf{x},t))} = -i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}_\beta(\gamma^0)^{\beta\alpha} \tag{3.7}$$

$$p^\alpha \equiv \frac{\partial_D\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x},t))} = i\frac{(\lambda-1)}{2}(\gamma^0)^{\alpha\beta}\psi_\beta \tag{3.8}$$

e o momento canônico do campo eletromagnético é

$$\pi^\mu = \frac{\partial_D\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = F^{\mu 0}, \tag{3.9}$$

Os parênteses de Berezin (PB) fundamentais, $\{\cdot,\cdot\}_B$, são

$$\left\{\psi_\alpha(x), \bar{p}^\beta(y)\right\}_B = -\delta_\alpha^\beta\delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{3.10}$$

$$\left\{\bar{\psi}_\alpha(x), p^\beta(y)\right\}_B = -\delta_\alpha^\beta\delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{3.11}$$

$$\left\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\right\}_B = \delta_\mu^\nu\delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{3.12}$$

Da expressão dos momentos fermiônicos, extraímos dois vínculos primários

$$\bar{\phi}^\alpha = \bar{p}^\alpha + i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}_\beta(\gamma^0)^{\beta\alpha} \approx 0 \tag{3.13}$$

$$\phi^\alpha = p^\alpha - i\frac{(\lambda-1)}{2}(\gamma^0)^{\alpha\beta}\psi_\beta \approx 0 \tag{3.14}$$

Já do momento do campo eletromagnético se obtém um outro vínculo primário, $\pi^0 \approx 0$, que chamamos de

$$\varphi_1 = \pi^0 \approx 0\;, \tag{3.15}$$

e uma relação dinâmica

$$\pi^1 = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0. \tag{3.16}$$

A densidade Hamiltoniana canônica é definida por meio de uma transformação de Legendre

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \pi_\mu \partial_0 A^\mu + (\partial_0 \psi)\bar{p} + \left(\partial_0 \bar{\psi}\right) p - \mathcal{L}, \tag{3.17}$$

substituindo os momentos conjugados e a relação (3.16) na expressão acima, obtemos

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\left(\pi^1\right)^2 + \pi^1 \partial_1 A_0 - i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}\gamma^1 \partial_1 \psi - i\frac{(\lambda-1)}{2}\partial_1 \bar{\psi}\gamma^1 \psi + eA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi. \tag{3.18}$$

A densidade Hamiltoniana primária é definida somando os vínculos primários à Hamiltoniana canônica incluindo um número igual de multiplicadores de Lagrange

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}} = \mathcal{H}_C + \bar{\phi}^\alpha a_\alpha + \bar{a}_\alpha \phi^\alpha + v_1 \varphi_1, \tag{3.19}$$

onde necessitamos de cinco multiplicadores de Lagrange (a_α, $\bar{a}_\alpha$ e v_1).

Os PBs não nulos entre os vínculos primários são

$$\left\{\phi^\alpha(x), \bar{\phi}^\beta(y)\right\}_B = -i(\gamma^0)^{\alpha\beta}\delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{3.20}$$

e os parênteses com o Hamiltoniano canônico

$$\begin{aligned} \left\{\bar{\phi}^\alpha(x), H_C\right\}_B &= \left[i\partial_1 \bar{\psi}\gamma^1 + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\right]^\alpha(x) && (3.21) \\ \left\{\phi^\alpha(x), H_C\right\}_B &= \left[i\gamma^1 \partial_1 \psi - eA_\mu \gamma^\mu \psi\right]^\alpha(x) && (3.22) \\ \left\{\varphi_1(x), H_C\right\}_B &= \partial_1 \pi^1(x) - e\bar{\psi}\gamma^0 \psi && (3.23) \end{aligned}$$

As condições de consistência dos vínculos primários são: para $\bar{\phi}$

$$\dot{\bar{\phi}} = \{\bar{\phi}, H_P\}_B = i\partial_1 \bar{\psi}\gamma^1 + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu + i\bar{a}\gamma^0 \approx 0$$

encontramos um dos multiplicadores fermiônicos

$$\bar{a} = -\partial_i \bar{\psi}\gamma^i \gamma^0 + ie\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^0 A_\mu. \tag{3.24}$$

Da condição de consistência de ϕ,

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_P\}_B = i\gamma^1 \partial_1 \psi - eA_\mu \gamma^\mu \psi - i\gamma^0 a \approx 0 \tag{3.25}$$

determinamos o outro multiplicador fermiônico

$$a = \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + ie\gamma^0 \gamma^\mu \psi A_\mu. \tag{3.26}$$

A condição de consistência do vínculo bosônico, φ_1, obtemos um vínculo secundário

$$\{\varphi_1, H_P\}_B = \partial_1 \pi^1 - e\bar{\psi}\gamma^0 \psi \approx 0, \tag{3.27}$$

que chamamos de G

$$G = \partial_1 \pi^1 - e\bar{\psi}\gamma^0 \psi \approx 0. \tag{3.28}$$

A condição de consistência deste vínculo secundário resulta em

$$\{G, H_P\}_B = -e(\partial_1\bar{\psi})\gamma^1\psi - e\bar{\psi}\gamma^1(\partial_1\psi) + e\bar{\psi}\gamma^0 a - e\bar{a}\gamma^0\psi, \tag{3.29}$$

Substituindo os multiplicadores de Lagrange fermiônicos, a e $\bar{a}$, encontramos que

$$\{G, H_P\}_B = 0, \tag{3.30}$$

o vínculo secundário é automaticamente conservado e isto garante que não se tenha mais vínculos na teoria.

3.1.1 Classificação dos vínculos

Dado o conjunto de vínculos primários e secundários

$$\begin{aligned}
\bar{\phi} &= \bar{p} + i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0\ , && (3.31)\\
\phi &= p - i\frac{(\lambda-1)}{2}\gamma^0\psi \approx 0\ , && (3.32)\\
\varphi_1 &= \pi^0 \approx 0\ , && (3.33)\\
G &= \partial_1\pi^1 - e\bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0\ , && (3.34)
\end{aligned}$$

o nosso próximo passo é a classificação deles em primeira ou segunda classe.

É fácil verificar que $\varphi_1 = \pi^0$ comuta com os outros três vínculos, assim ele é de primeira classe. Agora, calculamos os PBs entre os três vínculos restantes

$$\begin{aligned}
\{\bar{\phi}(x), G(y)\}_B &= -e\bar{\psi}(y)\gamma^0\delta\left(x^1 - y^1\right) && (3.35)\\
\{\phi(x), G(y)\}_B &= e\gamma^0\psi(y)\delta\left(x^1 - y^1\right) && (3.36)\\
\left\{\phi^\alpha(x), \bar{\phi}^\beta(y)\right\}_B &= -i(\gamma^0)^{\alpha\beta}\delta\left(x^1 - y^1\right) && (3.37)
\end{aligned}$$

aparentemente estes são vínculos de segunda classe. Por comodidade renomeamos os vínculos como $\Phi_1 = G$, $\Phi_{2\alpha} = \bar{\phi}^\alpha$ e $\Phi_{3\alpha} = \phi^\alpha$ e montamos a sua matriz de vínculos $\mathbf{C}_{ab}(x,y) = \{\Phi_a(x), \Phi_b(y)\}_B$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(x,y) &= \left(\begin{array}{cccc}
 & G & \bar{\phi}^\beta & \phi^\beta \\
G & 0 & \left[e\bar{\psi}\gamma^0\right]^\beta & -\left[e\gamma^0\psi\right]^\beta \\
\bar{\phi}^\alpha & -\left[e\bar{\psi}\gamma^0\right]^\alpha & 0 & -i\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha} \\
\phi^\alpha & \left[e\gamma^0\psi\right]^\alpha & -i\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta} & 0
\end{array}\right)\delta\left(x^1 - y^1\right)\\
&= \mathbf{\Delta}(x)\delta\left(x^1 - y^1\right). && (3.38)
\end{aligned}$$

então, se este conjunto de vínculos $\{\Phi_a\}$ é realmente de segunda classe, o determinante da matriz $\mathbf{C}$ deve ser diferente de zero; caso contrário, esta matriz é singular e devem existir combinações lineares dos vínculos $\{\Phi_a\}$ que são vínculos de primeira classe; assim, podemos dizer que os autovetores com autovalor zero são candidatos a serem vínculos de primeira classe. Sendo assim, calculamos o autovetor usando a equação de autovalor nulo

$$\int dy^1 \ \mathbf{C}^{ab}(x,y)\mathbf{U}_b(y) = 0$$

que resulta em $\mathbf{\Delta}\,(x)\,\mathbf{U}\,(x) = 0$, explicitamente temos

$$\begin{pmatrix} 0 & \left[e\bar{\psi}\gamma^0\right]^\beta & -\left[e\gamma^0\psi\right]^\beta \\ -\left[e\bar{\psi}\gamma^0\right]^\alpha & 0 & -i\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha} \\ \left[e\gamma^0\psi\right]^\alpha & -i\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ (\mathbf{U}_2)_\alpha \\ (\mathbf{U}_3)_\beta \end{pmatrix} = 0. \tag{3.39}$$

de onde o autovetor nulo é facilmente calculado $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1, \ -ie\psi_\alpha, \ ie\bar{\psi}_\beta \end{pmatrix}^T$, assim a combinação linear que produz o segundo vínculo de primeira classe é

$$\varphi_2 = \Phi^\beta \mathbf{U}_\beta = G - ie\bar{\phi}^\alpha\psi_\alpha + ie\phi^\beta\bar{\psi}_\beta \tag{3.40}$$

de onde resulta

$$\varphi_2 = \partial_1\pi^1 - ie\left(\bar{p}^\alpha\psi_\alpha + \bar{\psi}_\alpha p^\alpha\right) \tag{3.41}$$

Agora podemos concluir que os vínculos de primeira classe são φ_1 e φ_2, e os de segunda classe são $\bar{\phi}$ e ϕ.

3.1.2 Equações de movimento

O próximo passo é calcular as equações de movimento e ver se o formalismo Hamiltoniano é compatível com Lagrangiano, para isto, primeiramente eliminamos os vínculos de segunda classe $\bar{\phi}$ e ϕ fazendo-lhes fortemente nulos via os parênteses de Dirac (PD), $\{\cdot,\cdot\}_D$, definidos como

$$\begin{aligned} \{A\,(x)\,,B\,(y)\}_D &= \{A\,(x)\,,B\,(y)\}_B \\ &\quad - \int du^1 dw^1 \,\{A\,(x)\,,\Sigma_a\,(u)\}_B \left[\mathbf{D}^{-1}\right]_{ab}(u,w)\,\{\Sigma_b\,(w)\,,B\,(y)\}_B \end{aligned} \tag{3.42}$$

onde $\Sigma_a = \left\{\bar{\phi}^\alpha, \phi^\alpha\right\}$ e $\mathbf{D}^{-1}\,(x,y)$ é a inversa da matriz de vínculos de segunda classe $\mathbf{D}_{ab}\,(x,y) = \{\Sigma_a\,(x)\,,\Sigma_b\,(y)\}$ dada por

$$\mathbf{D}\,(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^0 \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{3.43}$$

assim

$$\mathbf{D}^{-1}\,(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^0 \\ i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{3.44}$$

Então, a Hamiltoniana estendida é definida pela adição ao Hamiltoniano canônico dos vínculos de primeira classe e considerando os vínculos de segunda classe fortemente nulos, temos que

$$\begin{aligned} H_E &= H_C + \int dx^1 \, (v_1\varphi_1 + v_2\varphi_2) \\ &= \int dx^1 \left[\frac{1}{2}\left(\pi^1\right)^2 + \pi^1\partial_1 A_0 - i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - i\frac{(\lambda-1)}{2}\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi\right] \\ &\quad + \int dx^1 \left[\, eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + v_1\pi^0 + v_2\partial_1\pi^1 - e\,v_2\bar{\psi}\gamma^0\psi\right] \end{aligned} \tag{3.45}$$

Calculamos as equações de movimento de Hamilton considerando H_E como gerador da evolução temporal, assim, temos para o campo eletromagnético

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H_E\}_D = v_1 \tag{3.46}$$
$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_E\}_D = \partial_1\pi^1 - e\bar{\psi}\gamma^0\psi = G \approx 0 \tag{3.47}$$
$$\dot{A}_1 = \{A_1, H_E\}_D = \pi^1 + \partial_1(A_0 - v_2) \tag{3.48}$$
$$\dot{\pi}^1 = \{\pi^1, H_E\}_D = -e\bar{\psi}\gamma^1\psi \tag{3.49}$$

e para o campo fermiônico ψ

$$\dot{\psi} = \{\psi, H_E\}_D = i\gamma^0\left(i\gamma^1\partial_1\psi - eA_\mu\gamma^\mu\psi + e\,v_2\gamma^0\psi\right)$$

de onde obtemos

$$\gamma^\mu\left(i\partial_\mu\psi - eA_\mu\right)\psi = -e\,v_2\gamma^0\psi \tag{3.50}$$

e para $\bar{\psi}$

$$\dot{\bar{\psi}} = \left\{\bar{\psi}, H_E\right\}_D = i\left(i\partial_1\bar{\psi}\gamma^1 + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - e\,v_2\bar{\psi}\gamma^0\right)\gamma^0$$

obtendo

$$\left(i\partial_\mu + eA_\mu\right)\bar{\psi}\gamma^\mu = e\,v_2\bar{\psi}\gamma^0 \tag{3.51}$$

Vemos que as equações de Hamilton (3.46), (3.48), (3.50) e (3.51), dependem dos multiplicadores de Lagrange que ainda permanecem arbitrários, assim, elas não são compatíveis com as equações de movimento ou de Euler-Lagrange da teoria. Para determinar os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos de primeira classe devemos escolher as condição de gauge de tal forma que o novo conjunto (vínculos e gauges) determine explicitamente os multiplicadores de Lagrange.

3.1.3 Gauge de Coulomb

Um conjunto de condições que satisfaz os requerimento acima mencionados é o chamado de gauge de Coulomb e é definido pelas seguintes condições

$$\xi_1 = A_0 \approx 0 \tag{3.52}$$
$$\xi_2 = \partial_1 A_1 \approx 0. \tag{3.53}$$

Da condição de consistência dos gauge, veja equação (2.82), obtemos

$$\int d^3y \sum_{a=1}^{2} v_a(y)\{\xi_b(\mathbf{x},t),\varphi_a(\mathbf{y},t)\}_D = -\{\varphi_b(\mathbf{x},t),H_C\}_D, \tag{3.54}$$

da relação acima definimos a seguinte matriz formada pelos parênteses de Poisson

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \{\xi_1(\mathbf{x},t),\varphi_1(\mathbf{y},t)\}_D & \{\xi_1(\mathbf{x},t),\varphi_2(\mathbf{y},t)\}_D \\ \{\xi_2(\mathbf{x},t),\varphi_1(\mathbf{y},t)\}_D & \{\xi_2(\mathbf{x},t),\varphi_2(\mathbf{y},t)\}_D \end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

obtemos

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \{\xi_a,\psi_b\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nabla^2_{(x)} \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{3.56}$$

A inversa desta matriz já foi calculada no caoítulo anterior e é dada por

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \{\xi_a,\psi_b\} = \begin{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 \\ & 0 \\ 0 & G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

onde $\nabla^2_x G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$.

Calculando estes multiplicadores de Lagrange, obtemos que $v_1 = v_2 = 0$. Para o caso do segundo multiplicador de Lagrange obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} v_2 &= -\int dx G(\mathbf{z}-\mathbf{x})\{\partial_k A^k(\mathbf{x},t),H_C\}_D \\ &= -\int dx G(\mathbf{z}-\mathbf{x}) \underbrace{\left(\nabla\pi - e\bar{\psi}\gamma^0\psi\right)}_{\nabla\pi - e\bar{\psi}\gamma^0\psi\approx 0} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Portanto, no gauge de Coulomb as equações de Hamilton (3.46) - (3.51) concordam com as equações de Euler-Lagrange (3.2) - (3.4).

3.2 A função de Partição

No Apêndice **D** do Capítulo **2** generalizamos o resultado de P. Senjanovic para incluir tanto variáveis pares quanto ímpares à Temperatura zero, usando estes resultados e estendendo ao caso de Temperatura finita, estabelecemos a função de Partição para o modelo de Schwinger a seguir

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int [D\pi^\mu DA_\mu]\left[d\bar{\psi}d\psi\right][d\bar{p}dp]\det\left|-(\partial_1)^2\right| \ \delta(\varphi_a)\ \delta(\xi_a)\delta(\bar{\phi}_\alpha)\delta(\phi_\alpha) \\ &\quad \times \exp\left\{\int_\beta dx\left[i\pi^\mu\partial_\tau A_\mu - i\bar{p}\partial_\tau\psi + i\partial_\tau\bar{\psi}p - \mathcal{H}_C\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

onde devido ao fato de que a massa fermiônica ser nula, fizemos o potencial químico nulo e, onde

$$\int_\beta dx = \int_0^\beta d\tau \int dx^1 \tag{3.60}$$

Primeiro, integremos nos momentos fermiônicos $\bar{p}$, p e obtemos

$$\begin{aligned} Z(\beta) \;=\; & \int [D\pi^\mu DA_\mu]\left[d\bar{\psi}d\psi\right]\det\left|-(\partial_1)^2\right|\delta(\pi^0)\delta(\partial_1\pi^1 - e\bar{\psi}\gamma^0\psi)\delta(A_0)\delta(\partial_1 A_1) \\ & \exp\left\{\int_\beta dx\left[i\pi^\mu\partial_\tau A_\mu - \frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}\gamma^0\partial_\tau\psi - \frac{(\lambda-1)}{2}\partial_\tau\bar{\psi}\gamma^0\psi - \mathcal{H}_C\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

A integração nas variáveis A_0, π^0 é imediata. Logo, usando a representação de Fourier da δ-funcional contendo o campo π_1 obtemos

$$\begin{aligned} Z(\beta) \;=\; & \int DA_1 D\bar{\psi}D\psi D\rho \det\left|-(\partial_1)^2\right|\delta(\partial_1 A_1) \\ & \exp\left\{\int_\beta dx\left[-\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}\gamma^0\partial_\tau\psi - \frac{(\lambda-1)}{2}\partial_\tau\bar{\psi}\gamma^0\psi + i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi\right]\right\} \\ & \exp\left\{\int_\beta dx\left[i\frac{(\lambda-1)}{2}\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi - ie\rho\bar{\psi}\gamma^0\psi - e\bar{\psi}\gamma^1\psi A_1\right]\right\} \\ & \int D\pi^1 \exp\left\{\int_\beta dx\left[-\frac{(\pi^1)^2}{2} + i\pi^1\partial_\tau A_1 + i\rho\partial_1\pi^1\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

A integração em π^1 é

$$\exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{2}\left(\partial_\tau A_1 - \partial_1\rho\right)^2\right\}, \tag{3.63}$$

e fazendo uma integração por partes no termo cinético dos férmions, obtemos

$$\begin{aligned} Z(\beta) \;=\; & \int DA_1 D\bar{\psi}D\psi D\rho \det\left|-(\partial_1)^2\right|\delta(\partial_1 A_1)\exp\left\{\int_\beta dx\left[-\frac{1}{2}\left(\partial_\tau A_1 - \partial_1\rho\right)^2\right]\right\} \\ & \exp\left\{\int_\beta dx\left[-\bar{\psi}\gamma^0\partial_\tau\psi + i\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - ie\rho\bar{\psi}\gamma^0\psi - e\bar{\psi}\gamma^1\psi A_1\right]\right\}. \end{aligned}$$

Renomeando $\rho \to A_0$, $\gamma^0 = \gamma^\tau$, $\gamma^1 = i\gamma^1_E$, finalmente obtemos a função de Partição do modelo de Schwinger no gauge de Coulomb

$$\begin{aligned} Z(\beta) \;=\; & \int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi \det\left|-(\partial_1)^2\right|\delta(\partial_1 A_1) \\ & \times\exp\left\{\int_0^\beta d\tau\int dx\left[-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 - \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Por conveniência é útil trabalhar num gauge covariante sendo a transição imediata. Assim, no presente caso usaremos o gauge de Lorenz

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}}\partial_\mu A_\mu - f = 0 , \tag{3.65}$$

onde f é uma função escalar arbitrária, a função de Partição do modelo de Schwinger é

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right| \delta(\partial_\mu A_\mu - f) \\ &\quad \times \exp\left\{\int_\beta dx \left[-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Sendo f uma função arbitrária podemos calcular a média desta função multiplicando a integral (3.66) por

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int d\tau \int dx\ f^2\right), \tag{3.67}$$

e integrando em f obtemos a função de Partição no gauge de Lorenz (tal como usual na literatura) do modelo de Schwinger

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right| \\ &\quad \times \exp\left\{\int_\beta dx \left[-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 - \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

3.2.1 Cálculo da Função de Partição

Integrando os graus de liberdade fermiônicos na equação (3.68) e introduzindo a forma explícita do determinante fermiônico (3.173) (ver Apendice **C**), a função de Partição é expressa por

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int DA^\mu\ \det\left|\gamma^\mu\partial_\mu\right| \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right| \\ &\quad \times \exp\left\{\int_\beta dx \left[-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 - \frac{e^2}{2\pi}A_\mu\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}\right)A_\nu\ \right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.69}$$

onde $\det\left(\gamma^\mu\partial_\mu\right)$ é o determinante dos férmions livres

$$\det\left(\gamma^\mu\partial_\mu\right) = \int D\bar{\psi}D\psi \exp\left(-\int_\beta dx\ \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right), \tag{3.70}$$

reescrevemos a função de partição numa forma mais adequada

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int DA^\mu\ \det\left|\gamma^\mu\partial_\mu\right| \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right| \\ &\quad \times \exp\left\{-\int_\beta dx\ \frac{1}{2}A_\mu\left[\left(-\Box + \frac{e^2}{\pi}\right)T_{\mu\nu} - \frac{\Box}{\xi}L_{\mu\nu}\ \right]A_\nu\right\}, \end{aligned} \tag{3.71}$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box} \quad , \quad L_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}. \tag{3.72}$$

Integrando no campo de gauge obtemos finalmente a função de partição do modelo de Schwinger

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \det\left|\gamma^\mu\partial_\mu\right| \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right| \det\left|\frac{-\Box}{\xi}\right|^{-1/2} \det\left|-\Box + \frac{e^2}{\pi}\right|^{-1/2} \\ &= \det\left|\gamma^\mu\partial_\mu\right| \times \det\left|-\Box\right|^{1/2} \times \det\left|-\Box + \frac{e^2}{\pi}\right|^{-1/2} \\ &= Z_F(\beta) \times Z_g(\beta) \times Z_B(\beta), \end{aligned} \tag{3.73}$$

onde Z_F é a função de partição para um campo fermiônico sem massa, satisfazendo condições de contorno anti-periódicas, Z_g é a função de partição de um campo fantasma obedecendo condições de contorno periódicas e Z_B é função de partição de um campo bosônico massivo, obedecendo condições de contorno periódicas.

Contribuição fermiônica

$$\ln Z_F(\beta) = \ln\det\left(\gamma^\mu \partial_\mu\right) = \ln\det\left(-\Box\right) = \sum_{n_f,p} \ln\left[\left(\omega_{n_f}\right)^2 + (p_1)^2\right], \tag{3.74}$$

onde

$$\omega_{n_f} = (2n+1)\,\frac{\pi}{\beta} \quad , \quad n_f \in \mathbb{Z}. \tag{3.75}$$

Esta soma foi calculada no Capítulo 2 , assim, a função de Partição é simplesmente

$$\ln Z_F(\beta) = 2L \int \frac{dp_1}{(2\pi)} \left[\frac{1}{2}\beta\omega + \ln(1+e^{-\beta\omega})\right]. \tag{3.76}$$

onde L é a dimensão do sistema, $\omega = \sqrt{(p_1)^2}$ e algumas quantidades infinitas irrelevantes foram descartadas.

Calculando a integral em p_1 obtemos

$$\ln Z_F(\beta) = \frac{\pi L}{6\beta} \tag{3.77}$$

Contribuição fantasma

$$\ln Z_g(\beta) = \frac{1}{2}\ln\det\left(-\Box\right) = \frac{1}{2}\sum_{n_b,p} \ln\left[(\omega_{n_b})^2 + \omega^2\right], \tag{3.78}$$

onde

$$\omega_{n_b} = (2n)\,\frac{\pi}{\beta} \quad , \quad n_b \in \mathbb{Z} \tag{3.79}$$

A soma foi calculada no Capítulo 1, então, a contribuição do fantasma é

$$\ln Z_g(\beta) = L \int \frac{dp_1}{(2\pi)} \left[\frac{1}{2}\beta\omega + \ln(1-e^{-\beta\omega})\right]. \tag{3.80}$$

Calculando a integral em p_1 obtemos

$$\ln Z_g(\beta) = -\frac{\pi L}{6\beta} \tag{3.81}$$

Contribuição bosônica

$$\ln Z_B(\beta) = -\frac{1}{2}\ln\det\left(-\Box + \frac{e^2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n_b,p}\ln\left[(\omega_{n_b})^2 + \omega_e^2\right], \tag{3.82}$$

onde

$$\omega_e = \sqrt{(p_1)^2 + \frac{e^2}{\pi}}. \tag{3.83}$$

fazendo a soma, a função de partição do bóson massivo é

$$\ln Z_B(\beta) = -L\int\frac{dp_1}{(2\pi)}\left[\frac{1}{2}\beta\omega_e + \ln(1-e^{-\beta\omega_e})\right]. \tag{3.84}$$

Desprezando as contribuições do vácuo e somando as contribuições podemos ver das equações (3.77) e (3.81) que as contribuições do férmion e a do fantasma se cancelam mutuamente, e somente a contribuição do bóson massivo é relevante para a função de partição do modelo de Schwinger

$$\ln Z(\beta) = -L\int\frac{dp_1}{(2\pi)}\left[\frac{1}{2}\beta\omega_e + \ln(1-e^{-\beta\omega_e})\right], \tag{3.85}$$

ou seja, a termodinâmica do modelo de Schwinger é descrita por aquela de um campo escalar massivo de massa $\frac{e^2}{\pi}$.

A energia livre de Helmholtz é definida por

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta}\ln Z(\beta) \\ &= \frac{L}{\beta}\int\frac{dp_1}{(2\pi)}\ln(1-e^{-\beta\omega_e}) \end{aligned} \tag{3.86}$$

A energia média por unidade de volume do sistema é

$$\begin{aligned} \frac{U}{L} &= -\frac{1}{L}\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta} \\ &= \int_0^\infty dp\frac{1}{\pi}\frac{\omega_e}{e^{\beta\omega_e}-1} \end{aligned} \tag{3.87}$$

3.3 Funções de Green

Uma vez definida corretamente a função de partição (3.68) podemos introduzir o gerador funcional das funções de Green completas à temperatura finita adicionando uma interação linear para cada campo com uma fonte externa adequada

$$\begin{aligned} Z[J,\bar{\eta},\eta] &= \frac{1}{Z(\beta)}\int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi\det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right| \\ &\times\exp\left\{\int_\beta dx\left[-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + J_\mu A^\mu\right]\right\} \\ &\times\exp\left\{\int_\beta dx\left[-\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Substituindo a forma explícita da função de partição $Z(\beta)$ neste funcional, obtemos

$$Z[J,\bar{\eta},\eta] = N\int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi \exp\left\{\int_\beta dx\left[-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + J_\mu A^\mu\right]\right\} \quad (3.89)$$
$$\times\exp\left\{\int_\beta dx\left[-\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right]\right\},$$

onde N é um fator de normalização tais que $Z[0,0,0]=1$.

Integrando os campos fermiônicos

$$Z[J,\bar{\eta},\eta] = N\int DA_\mu \exp\left\{\int_\beta dx\left[-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + J_\mu A^\mu\right]\right\} \quad (3.90)$$
$$\times\exp\left\{\int_\beta dx -\frac{e^2}{2\pi}A_\mu\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}\right)A_\nu\right\}\exp\left\{i\int_\beta dxdy\ \bar{\eta}(x)\,G(x,y;A)\,\eta(y)\right\}$$

onde na segunda linha a primeira exponencial dá a contribuição do determinante fermiônico (3.173) e na segunda exponencial $G(x,y;A)$ é a função de Green da equação de Dirac na presença do campo eletromagnético externo, calculada no Apêndice **B**. Após algumas integrações por partes obtemos o gerador funcional das funções de Green completas à temperatura finita para o modelo de Schwinger

$$Z[J,\bar{\eta},\eta] = N_1\int DA_\mu \exp\left\{\int_\beta dx\left(-\frac{1}{2}A_\mu\left[\left(-\Box+\frac{e^2}{\pi}\right)T_{\mu\nu}-\frac{\Box}{\xi}L_{\mu\nu}\right]A_\nu + J_\mu A_\mu\right)\right\}$$
$$\times\exp\left\{i\int_\beta dx\,dy\bar{\eta}(x)\,G(x,y;A)\,\eta(y)\right\}. \quad (3.91)$$

onde N_1 é um fator de normalização tais que $Z[0,0,0]=1$. A partir desta expressão para o gerador funcional calculamos as funções de Green do modelo.

3.3.1 Propagador do Campo A_μ: $G_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0\,|T\,A_\mu(x)A_\nu(y)|\,0\rangle$

O propagador para este campo é definido por

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J^\nu(y)\delta J^\mu(x)}\bigg|_{fontes=0}. \quad (3.92)$$

Fazendo $\eta=\bar{\eta}=0$ e integrando no campo vetorial obtemos

$$Z[J,0,0] = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_\beta dx\ J_\mu(x)\left[\frac{T_{\mu\nu}}{-\Box+\frac{e^2}{\pi}}-\frac{\xi\ L_{\mu\nu}}{\Box}\right]J_\nu(x)\right\}. \quad (3.93)$$

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \left[\frac{T_{\mu\nu}}{-\Box+\frac{e^2}{\pi}}-\frac{\xi\ L_{\mu\nu}}{\Box}\right]\delta(x-y).$$
$$= \int_\beta\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\left[\frac{T_{\mu\nu}}{p^2+\frac{e^2}{\pi}}+\frac{\xi\ L_{\mu\nu}}{p^2}\right]e^{-ip\cdot(x-y)} \quad (3.94)$$

A componente transversal do campo ganha uma massa $\frac{e^2}{\pi}$ que foi gerada dinamicamente no processo de quantização dos campos fermiônicos. O propagador do campo de gauge não tem divergências ultravioletas nem infravermelhas.

3.3.2 Propagador Fermiônico $S(x-y) = \left\langle 0 \left| T\psi(x)\bar{\psi}(y) \right| 0 \right\rangle$

O propagador fermiônico é definido como

$$S(x-y) = \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)}\bigg|_{fontes=0}. \tag{3.95}$$

Após um pouco de álgebra, obtemos

$$S(x-y) = i\exp\left\{ e^2 \int_\beta \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[-\frac{\xi}{p^4} + \frac{1}{\left(p^2 + \frac{e^2}{\pi}\right)p^2} \right] \left[1 - e^{-ip\cdot(x-y)}\right] \right\} G_F(x-y). \tag{3.96}$$

Este propagador não tem divergências ultravioletas e, no gauge $\xi = 0$ as divergências infravermelhas são eliminadas de todas as funções de Green completas. Isto pode ser verificado, explicitamente, usando a equação de Schwinger-Dyson para o propagador fermiônico no espaço de momentos.

3.3.3 Função de Vértice $V_\mu(x,y;z) = \left\langle 0 \left| T\psi(x)\bar{\psi}(y)A_\mu(z) \right| 0 \right\rangle$

O vértice é definido da seguinte forma

$$V_\mu(x,y;z) = \frac{1}{Z} \frac{\delta^3 Z}{\delta J_\mu(z)\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)}\bigg|_{fontes=0}. \tag{3.97}$$

Que pode ser expresso como

$$V_\mu(x,y;z) = -ie \int_\beta \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(\frac{\tilde{p}_\mu}{p^2\left(p^2 + \frac{e^2}{\pi}\right)}\gamma_5 - \frac{i\xi p_\mu}{p^4} \right) \left[e^{-ip\cdot(z-x)} - e^{-ip\cdot(z-y)}\right] S(x-y). \tag{3.98}$$

No espaço dos momentos o vértice é

$$V_\mu(p,-p-q;q) = -ie \left(\frac{\tilde{q}_\mu}{q^2\left(q^2 + \frac{e^2}{\pi}\right)}\gamma_5 - \frac{i\xi q_\mu}{q^4} \right) [S(p+q) - S(p)] \tag{3.99}$$

Esta função não tem divergências ultravioletas e, como no caso do propagador fermiônico o gauge $\xi = 0$ elimina as possíveis divergências infravermelhas.

3.4 Equações de Schwinger-Dyson

Podemos encontrar as equações de movimentos satisfeitas pelo gerador funcional das funções de Green

$$\begin{aligned} Z[J,\bar{\eta},\eta] &= N\int DA^{\mu}D\bar{\psi}D\psi \exp\left\{\int_{\beta}dx\left[-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^{2}-\frac{1}{2\xi}(\partial_{\mu}A_{\mu})^{2}\ +J_{\mu}A^{\mu}\right]\right\} \\ &\times\exp\left\{\int_{\beta}dx\left[\ -\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-ieA_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.100}$$

à temperatura finita a partir das equações de movimento dos campos.

A representação funcional dos campos é

$$A_{\mu}=\frac{\delta}{\delta J_{\mu}}\quad,\quad\psi=\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\quad,\quad\bar{\psi}=-\frac{\delta}{\delta\eta} \tag{3.101}$$

3.4.1 Equação de SD para o propagador fermiônico

A equação de movimento para o campo fermiônico é

$$\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi+ieA_{\mu}\gamma^{\mu}\psi-\eta=0, \tag{3.102}$$

usamos a representação funcional dos campos para obter a seguinte equação para o gerador funcional $Z[J,\bar{\eta},\eta]$

$$\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu}^{x}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}+ie\frac{\delta}{\delta J_{\mu}\left(x\right)}\gamma^{\mu}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}-\eta\left(x\right)\right)Z[J,\bar{\eta},\eta]=0. \tag{3.103}$$

Derivando esta equação com respeito a $\eta\left(y\right)$ e fazendo as fontes externas nulas se obtém a equação SD para o propagador fermiônico

$$\gamma^{\mu}\partial_{\mu}^{x}S\left(x-y\right)+ie\gamma^{\mu}V_{\mu}\left(x,y;x\right)-\delta\left(x-y\right)=0. \tag{3.104}$$

3.4.2 Equação de SD para o propagador do campo de gauge

A equação de movimento para o campo de gauge é

$$\left(\Box\delta_{\mu\nu}+\left[\frac{1}{\xi}-1\right]\partial_{\mu}\partial_{\nu}\right)A_{\nu}-ie\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi+J_{\mu}=0, \tag{3.105}$$

usando a representação funcional dos campos obtemos uma outra equação para o gerador funcional $Z[J,\bar{\eta},\eta]$

$$\left[\left(\Box\delta_{\mu\alpha}+\left[\frac{1}{\xi}-1\right]\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\right)\frac{\delta}{\delta J_{\alpha}\left(x\right)}+ie\frac{\delta}{\delta\eta_{a}\left(x\right)}\left(\gamma^{\mu}\right)_{ab}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_{b}\left(x\right)}+J_{\mu}\left(x\right)\right]Z[J,\bar{\eta},\eta]=0. \tag{3.106}$$

Derivando esta equação com respeito a $J_{\nu}\left(y\right)$ e fazendo as fontes externas nulas, obtemos a equação SD para o propagador do campo de gauge

$$\left(\Box\delta_{\mu\alpha}+\left[\frac{1}{\xi}-1\right]\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\right)G_{\alpha\nu}\left(x-y\right)+ie\ \mathrm{tr}\left[\gamma^{\mu}V_{\nu}\left(x,x;y\right)\right]+\delta_{\mu\nu}\left(x-y\right)=0. \tag{3.107}$$

onde tr indica o traço nos índices de Dirac.

3.5 Apêndices

A Convenções e Identidades

A.1 Notação para o Espaço-Tempo de Minkowski

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e o tensor de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu}$ são

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{\mu\nu}$$

E as matrizes γ satisfazem

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad , \quad \left(\gamma^0\right)^\dagger = \gamma^0 \quad , \quad \left(\gamma^1\right)^\dagger = -\gamma^1$$

As γ são definidas da seguinte forma

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E a matriz γ_5

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad , \quad \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 \quad , \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5$$

Os projetores P_+ e P_- são dados por

$$P_+ = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \quad , \quad P_- = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \tag{3.108}$$

Algumas relações

$$\begin{aligned}
[\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= 2\epsilon^{\mu\nu}\gamma_5 && (3.109)\\
\gamma^\mu\gamma_5 &= \epsilon^{\mu\nu}\gamma_\mu && (3.110)\\
\tilde{\partial^\mu} &= \epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu && (3.111)\\
\tilde{k^\mu} &= \epsilon^{\mu\nu}k_\nu && (3.112)\\
tr\gamma^\mu\gamma^\nu &= 2g^{\mu\nu} && (3.113)\\
tr\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu &= 0 && (3.114)\\
tr\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta &= 2g^{\mu\alpha}g^{\mu\beta} - 2g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + 2g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu} && (3.115)\\
tr\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5 &= -2\epsilon^{\mu\nu} && (3.116)\\
\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu &= 0 && (3.117)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_- + P_+ &= 1 && (3.118)\\
P_+ - P_- &= \gamma_5 && (3.119)\\
P_\pm P_\mp &= 0 && (3.120)\\
P_\pm^n &= P_\pm && (3.121)
\end{aligned}$$

No texto definimos algumas relações

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \tag{3.122}$$

$$L_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \tag{3.123}$$

É fácil mostrar que

$$L_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \tag{3.124}$$

$$L_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.125}$$

$$L_{\mu\nu} L^{\nu\alpha} = L_\mu^{\ \alpha} \tag{3.126}$$

$$T_{\mu\nu} T^{\nu\alpha} = T_\mu^{\ \alpha} \tag{3.127}$$

A.2 Notação para o Espaço-Tempo Euclidiano

Neste caso a métrica é positiva definida $(+, +)$. E as matrizes γ^ν são definidas da seguinte forma

$$\gamma_E^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_E^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.128}$$

Portanto, a correlação entre o Espaço-Tempo Minkowski e o Espaço-Tempo Euclidiano é dado por

$$\gamma_E^0 = \gamma_M^0 \quad \gamma_E^1 = i\gamma_M^1 \tag{3.129}$$

A matriz γ_5 no espaço Euclidiano é definida como

$$\gamma_5 \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.130}$$

As matrizes no o Espaço-Tempo Euclidiano satisfazem as seguintes relações

$$\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \tag{3.131}$$

$$\gamma_E^\mu \gamma_E^\nu = \delta^{\mu\nu} + i\gamma_5 \epsilon^{\mu\nu} \tag{3.132}$$

$$\gamma_E^\mu \gamma_5 = i\epsilon^{\mu\nu} \gamma_E^\nu \tag{3.133}$$

Com base nas definições acima todas as outras identidades podem ser derivadas.

B Cálculo da função de Green $G(x, y; A)$

Redefinimos as matrizes γ^μ por

$$\gamma^0 \rightarrow \gamma^0 \qquad \gamma^1 = i\gamma_E^1, \tag{3.134}$$

e definamos a seguinte matriz

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma_E^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \rightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}.$$

A função de Green $G(x, y; A)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + ie\gamma^\mu A_\mu)\, G(x, y; A) = -i\delta\,(x - y)\ . \tag{3.135}$$

Para resolver a equação acima adotamos o seguinte ansatz [3.2]

$$G(x, y; A) = e^{i(\phi(x)-\phi(y))} G_F(x - y)\ , \tag{3.136}$$

onde $G_F(x - y)$ é a função de Green da equação de Dirac livre

$$\gamma^\mu \partial_\mu G_F(x - y) = -i\delta^2(x - y), \tag{3.137}$$

e satisfaz as condições de contorno anti-periódicas, a função ϕ satisfaz condições de contorno periódicas e tem a seguinte forma $\phi = \phi_1(x) + \gamma_5\phi_2(x)$.

Introduzindo o ansatz na equação diferencial obtemos

$$\gamma^\mu \partial_\mu \phi = -e\gamma^\mu A_\mu, \tag{3.138}$$

aplicando o operador $\gamma^\nu \partial_\nu$ encontramos

$$-\Box\phi = e\gamma^\mu\gamma^\nu \partial_\mu A_\nu, \tag{3.139}$$

cuja solução é

$$\phi(x) = e \int dy\, D_F(x - y)\gamma^\mu\gamma^\nu \partial_\mu A_\nu(y), \tag{3.140}$$

onde $D_F(x - y)$ é a função de Green da equação de Klein-Gordon sem massa à temperatura finita

$$-\Box D_F(x - y) = \delta(x - y). \tag{3.141}$$

Não é difícil verificar a seguinte propriedade

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \delta_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu}\gamma_5, \tag{3.142}$$

onde $\epsilon_{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ com $\epsilon_{01} = -1$.

Usando esta propriedade podemos escrever o campo $\phi(x)$

$$\phi(x) = e \int dz\, D_F(x - z) \left[\partial_\mu A_\mu + i\gamma_5 \tilde{\partial}_\mu A_\mu\right](z), \tag{3.143}$$

onde temos definido $\tilde{\partial}_\mu = \epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu$.

Substituindo $\phi(x)$ na função $G(x,y;A)$ encontramos

$$G(x,y;A) = \exp\left\{-ie\int dz\ A_\mu(z)\left[\partial^z_\mu + i\gamma_5\tilde{\partial}^z_\mu\right]\left[D_F(z-x)-D_F(z-y)\right]\right\}G_F(x-y), \tag{3.144}$$

usando a seguinte identidade $e^{\gamma_5 f} = e^f P_+ + e^{-f}P_-$ obtemos

$$\begin{aligned} G(x,y;A) &= \exp\left\{-ie\int dz\ A_\mu(z)\left[\partial^z_\mu + i\tilde{\partial}^z_\mu\right]\left[D_F(z-x)-D_F(z-y)\right]\right\}P_+G_F(x-y) \\ &\quad+\exp\left\{-ie\int dz\ A_\mu(z)\left[\partial^z_\mu - i\tilde{\partial}^z_\mu\right]\left[D_F(z-x)-D_F(z-y)\right]\right\}P_-G_F(x-y), \end{aligned} \tag{3.145}$$

a expressão acima pode ser escrita em forma compacta

$$G(x,y;A) = \sum_{\sigma=\pm}\exp\left\{-ie\int dz\ A_\mu(z)\left[\partial^z_\mu + \sigma i\tilde{\partial}^z_\mu\right]\left[D_F(z-x)-D_F(z-y)\right]\right\}P_\sigma G_F(x-y) \tag{3.146}$$

C Determinante Fermiônico

Calcularemos o determinante funcional do operado de Dirac

$$D = \gamma^\mu\partial_\mu + ie\gamma^\mu A_\mu, \tag{3.147}$$

que é expresso pela seguinte identidade

$$\det D = \exp\left(\mathrm{Tr}\ln D\right). \tag{3.148}$$

A derivada do determinante funcional com respeito a constante e pode ser colocado da seguinte forma

$$\frac{d}{de}\mathrm{Tr}\ln D = \mathrm{Tr}\left[\ D^{-1}\frac{d}{de}\ D\right]. \tag{3.149}$$

Na representação do espaço de configuração $[D^{-1}\frac{d}{de}D]$ temos

$$[D^{-1}\frac{d}{de}D](x,y) = \int d^2z\ D^{-1}(x,z)\frac{d}{de}D(z,y) = i\int d^2z\ G(x,z;A)\frac{d}{de}D(z,y), \tag{3.150}$$

onde $D^{-1}(z,y) = iG(z,y;A)$ e $D(z,y) = D(z)\,\delta(z-y)$, e assim obtemos

$$[D^{-1}\frac{d}{de}D](x,y) = iG(x,y;A)\frac{d}{de}D(y), \tag{3.151}$$

então obtemos

$$\frac{d}{de}\ \mathrm{Tr}\ln D(x,y) = -\int d^2x\ \ \mathrm{tr}\left[G(x,x;A)\gamma^\mu\right]A_\mu(x), \tag{3.152}$$

onde tr é o traço nos índices de Dirac.

C.1 O Método da Separação de Pontos

A função $G(x,x;A)$ têm divergências ultravioletas que precisam ser controladas usando algum método de regularização, no presente caso escolhemos o método da separação de pontos cuja idéia será explicada brevemente a seguir

Sendo o operador da corrente fermiônica $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ um objeto singular, por ser um produto de operadores num mesmo ponto, introduzimos o método da separação de pontos na corrente sendo redefinida na seguinte maneira

$$J^\mu(x,\epsilon) = \bar{\psi}(x+\epsilon)\gamma^\mu\psi(x), \tag{3.153}$$

onde $\epsilon \to 0$ é um regulador ultravioleta.

No entanto tal definição não é explicitamente invariante sob a seguinte simetria de gauge da corrente original

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to e^{i\alpha(x)}\psi(x) && (3.154)\\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)} && (3.155)\\ A_\mu &\to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), && (3.156) \end{aligned}$$

como é verificado a seguir

$$J^\mu(x,\epsilon) \to J^\mu_g(x,\epsilon) = \bar{\psi}(x+\epsilon)\gamma^\mu\psi(x)\exp[i\alpha(x) - i\alpha(x+\epsilon)]. \tag{3.157}$$

Schwinger propôs a seguinte regularização invariante sob a simetria de gauge da corrente original

$$J^\mu(x,\epsilon) = \bar{\psi}(x+\epsilon)\gamma^\mu e^{-ie\int_x^{x+\epsilon} dz_\mu A_\mu(z)}\psi(x). \tag{3.158}$$

Podemos verificar que esta corrente é invariante de gauge no seguinte sentido

$$J^g_\mu(x,\epsilon) = J_\mu(x,\epsilon)\exp\left(\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\right), \tag{3.159}$$

onde $\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)$ são correções de segunda ordem assim podemos dizer que $J^g_\mu(x,\epsilon) = J_\mu(x,\epsilon)$.

Portanto redefinimos a função de Green como

$$G(x,x;A) \to G(x,x-\epsilon;A)\exp\left\{-ie\int_x^{x-\epsilon} dz_\mu A^g_\mu(z)\right\}, \tag{3.160}$$

pois $G(x,x-\epsilon;A) \sim \left\langle 0\left|T\psi(x)\bar{\psi}(x-\epsilon)\right|0\right\rangle_A$ o propagador fermiônico na presença do campo externo A_μ.

Usando esta nova função de Green o determinante fermiônico (3.152) é

$$\frac{d}{de}\ln\det D = -\lim_{(x-y)=\epsilon\to 0}\int dx\ \mathrm{tr}\left[G(x,y;A)\gamma^\mu\right]\exp\left[-ie\int_x^y dz^\mu A_\mu(z)\right]A_\mu(x). \tag{3.161}$$

Para calcular a expressão acima, começaremos calculando $\mathrm{tr}\left[G(x,y;A)\gamma^\mu\right]$. Para isto usaremos a função de Green que calculamos na seção anterior, eq.(3.146)

$$\mathrm{tr}\left[G(x,y;A)\gamma^\mu\right] = \sum_{\sigma=\pm}\exp\left[-ie\int dz A_\rho\left(z\right)J^\sigma_\rho(z,x,y)\right]\mathrm{tr}\left[P_\sigma G_F(x-y)\gamma^\mu\right], \tag{3.162}$$

onde

$$J^{\sigma}_{\rho}\left(z,x,y\right)=\left[\partial^{z}_{\rho}+\sigma i\tilde{\partial}^{z}_{\rho}\right]\left[D_F(z-x)-D_F(z-y)\right]. \tag{3.163}$$

No limite $(x-y)=\epsilon\to 0$, o comportamento ultravioleta da função de Green $G_F(x-y)$ é calculado no limite $\beta\to\infty$. Então, usando a identidade $G_F(x-y)=i\gamma^{\mu}\partial^{x}_{\mu}D_F(x-y)$ obtemos

$$G_F(\epsilon)=-\frac{i}{2\pi}\frac{\gamma^{\mu}\epsilon_{\mu}}{\epsilon^2}, \tag{3.164}$$

onde

$$D_F(z-x)-D_F(z-y)=-\epsilon_{\alpha}\partial^{z}_{\alpha}D_F(z-x)+\mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.165}$$

Usando estas relações podemos mostrar que

$$\mathrm{tr}\left[P_{\sigma}G_F(\epsilon)\gamma^{\mu}\right]=-\frac{i}{2\pi\epsilon^2}\left[\epsilon_{\mu}+\sigma i\tilde{\epsilon}_{\mu}\right] \tag{3.166}$$

$$J^{\sigma}_{\rho}\left(z,x,y\right)=-\epsilon_{\alpha}\left[\partial^{z}_{\rho}\partial^{z}_{\alpha}+\sigma i\tilde{\partial}^{z}_{\rho}\partial^{z}_{\alpha}\right]D_F(z-x). \tag{3.167}$$

Assim a expressão $\mathrm{tr}[G(x,x-\epsilon;A)\gamma^{\mu}]$ chega a ser

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[G(x,x-\epsilon;A)\gamma^{\mu}\right] &= -\frac{i}{2\pi\epsilon^2}\sum_{\sigma=\pm}\left[\epsilon_{\mu}+\sigma i\tilde{\epsilon}_{\mu}\right] \\ &\quad\times\exp\left\{ie\epsilon_{\alpha}\int dzA_{\rho}\left(z\right)\left[\partial^{z}_{\rho}\partial^{z}_{\alpha}+\sigma i\tilde{\partial}^{z}_{\rho}\partial^{z}_{\alpha}\right]D_F(z-x)\right\}\end{aligned} \tag{3.168}$$

Na equação (3.161), encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{de}\ln\det D &= \lim_{\epsilon\to 0}\int dx\ A_{\mu}(x)\frac{i}{2\pi\epsilon^2}\sum_{\sigma=\pm}\left[\epsilon_{\mu}+\sigma i\tilde{\epsilon}_{\mu}\right] \\ &\quad\times\exp\left\{ie\epsilon_{\alpha}A_{\alpha}(x)+ie\epsilon_{\alpha}\int dzA_{\rho}\left(z\right)\left[\partial^{z}_{\rho}\partial^{z}_{\alpha}+\sigma i\tilde{\partial}^{z}_{\rho}\partial^{z}_{\alpha}\right]D_F(z-x)\right\}\end{aligned} \tag{3.169}$$

Expandindo a exponencial até ordem ϵ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{de}\ln\det D &= \lim_{\epsilon\to 0}\int dx\ A_{\mu}(x)\frac{i}{2\pi\epsilon^2}\sum_{\sigma=\pm}\left\{\epsilon_{\mu}+\sigma i\tilde{\epsilon}_{\mu}+\left[\epsilon_{\mu}\epsilon_{\alpha}+\sigma i\tilde{\epsilon}_{\mu}\epsilon_{\alpha}\right]\left[ieA_{\alpha}(x)\right.\right. \\ &\quad\left.\left.+ie\int dzA_{\rho}\left(z\right)\left(\partial^{z}_{\rho}\partial^{z}_{\alpha}+\sigma i\tilde{\partial}^{z}_{\rho}\partial^{z}_{\alpha}\right)D_F(z-x)\right]+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\right\}.\end{aligned} \tag{3.170}$$

E tomando a média sobre todas as direções de ϵ, ou seja

$$\bar{\epsilon}_{\mu}=0 \quad , \qquad \overline{\epsilon_{\mu}\epsilon_{\nu}}=\frac{\epsilon^2}{2}\delta_{\mu\nu}, \tag{3.171}$$

obtemos

$$\frac{d}{de}\ln\det D = -\frac{e}{\pi}\int dx\ A_{\mu}\left[\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box}\right]A_{\nu}. \tag{3.172}$$

Finalmente integrando em $e\in[0,e]$ obtemos o determinante do operador fermiônico D

$$\det D=\exp\left\{-\frac{e^2}{2\pi}\int dx\ A_{\mu}\left[\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box}\right]A_{\nu}\right\}. \tag{3.173}$$

Bibliografia

[3.1] Julian Schwinger, Phys. Rev. **125**, 397 (1962); ibid. 2425.

[3.2] R. Casana, *Renormalização e Ambiguidades na QED_2*, Tese de mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas- CBPF, (1997).
Nesta tese é discutido em detalhes o modelo de Schwinger. O autor aborda o problema anomalia-renormalização

[3.3] S. A. Dias e C. A. Linhares, Phys. Rev. **D45**, 2162 (1992).
Cálculo em detalhes do determinante fermiônico

[3.4] R. Casana and S. A. Dias, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 4601 (2002).

[3.5] R. Casana and S.A. Dias, J. Phys. **G27**, 1501 (2001).

[3.6] Elcio Abdalla, M. Cristina B. Abdalla and Klaus Rothe, *Non-pretubative methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*, 2nd, (World Scientific Publishing) 2001.

[3.7] R. Casana, Int. J. Mod. Physics **A20**, 7129 (2005).

[3.8] F. Ruiz Ruiz, R. F. Alvarez-Estrada, Phys. Rev. **D35**, 3161 (1987).

[3.9] F. Ruiz Ruiz e R. F. Alvarez-Estrada, Phys. Lett. **B180**, 153 (1986).

Capítulo 4

Modelo de Thirring

O modelo de Thirring é uma Teoria Quântica de Campos ($D = 1 + 1$) exatamente solúvel, isto é, no sentido em que as funções de correlação podem ser calculadas exatamente. Thirring [4.1], construiu os autoestados do Hamiltoniano e calculou algumas quantidades observáveis. Hagen [4.2], introduziu fontes externas e encontrou uma solução geral para o Modelo de Thirring. Klaiber [4.3], encontrou a solução via operadores. De uma maneira diferente, Nakanishi [4.4] expressou as soluções em termos de campos bosônicos sem massa. Recentemente, explorando o fato de que a teoria não possui uma simetria de gauge local em nível clássico, foram encontradas novas soluções ao modelo [4.20]

Nos últimos anos o interesse no estudo de Teorias de Campos com uma e duas dimensões espaciais têm aumentado consideravelmente e, em particular, devido à real possibilidade da fabricação de fios quânticos (quantum wires) [4.5]. Este sistema possui características diferentes de um líquido de Fermi, a superfície de Fermi desaparece e o espectro fica apenas com modos coletivos. Haldane [4.6] nomeou este comportamento de líquido de Luttinger. O modelo que descreve este comportamento é o modelo Tomonaga-Luttinger [4.7, 4.8, 4.9]. O modelo de Thirring não local contém o modelo de Tomonaga-Luttinger como um caso particular. Outra característica importante do modelo, é a sua aplicação no tratamento da (QCD) como uma teoria efetiva em baixas energias [4.10, 4.11]. Hoje em dia existe uma vasta literatura tratando o Modelo de Thirring [4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18].

A densidade de Lagrangiana simétrica do modelo é dado por

$$\mathcal{L} = i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + i\frac{(\lambda-1)}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)^2, \tag{4.1}$$

g é a constante de acoplamento e e adimensional, as matrizes γ^{μ} são de 2×2 e estão definidas no apêndice **A** do Capítulo **3**. Os campos fermiônicos $\bar{\psi}_{\alpha}$ e ψ_{α}, com $\alpha = 1, 2$, são independentes entre si e são os geradores de uma álgebra de Grassmann complexa de dimensão infinita (para maiores detalhes ver apêndice **A** do Capítulo **2**).

As equações de Euler-Lagrange são

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - g\gamma^{\mu}\psi(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi) \;=\; 0 \;, \tag{4.2}$$

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} + g\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi) \;=\; 0 \;. \tag{4.3}$$

4.1 Análise de vínculos

Primeiramente definimos os momentos canônicos conjugados

$$\bar{\pi}^{\alpha} \equiv \frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_\alpha(\mathbf{x},t))} = -i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}_\beta(\gamma^0)^{\beta\alpha} \tag{4.4}$$

$$\pi^{\alpha} \equiv \frac{\partial_D \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x},t))} = i\frac{(\lambda-1)}{2}(\gamma^0)^{\alpha\beta}\psi_\beta, \tag{4.5}$$

e definimos os parênteses de Berezin (PB) fundamentais, $\{\cdot,\cdot\}_B$, entre as variáveis canônicas

$$\left\{\psi_\alpha(x), \bar{\pi}^\beta(y)\right\}_B = -\delta_\alpha^\beta \delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{4.6}$$

$$\left\{\bar{\psi}_\alpha(x), \pi^\beta(y)\right\}_B = -\delta_\alpha^\beta \delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{4.7}$$

A densidade Hamiltoniana canônica é definida por meio da seguinte transformação de Legendre

$$\mathcal{H}_\mathcal{C} = (\partial_0\psi_\alpha)\bar{\pi}^\alpha + (\partial_0\bar{\psi}_\alpha)\pi^\alpha - \mathcal{L},$$

e substituindo os momentos na expressão acima obtemos

$$\mathcal{H}_\mathcal{C} = -i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - i\frac{(\lambda-1)}{2}\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi + \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2.$$

Os vínculos primários são diretamente deduzidos das equações dos momentos (4.4) e (4.5)

$$\bar{\phi}^\alpha = \bar{\pi}^\alpha + i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}_\beta(\gamma^0)^{\beta\alpha} \tag{4.8}$$

$$\phi^\alpha = \pi^\alpha - i\frac{(\lambda-1)}{2}(\gamma^0)^{\alpha\beta}\psi_\beta. \tag{4.9}$$

Os PBs não nulos entre os vínculos primários são

$$\left\{\phi^\alpha(x), \bar{\phi}^\beta(y)\right\}_B = -i(\gamma^0)^{\alpha\beta}\delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{4.10}$$

e os parênteses com o Hamiltoniano canônico

$$\left\{\bar{\phi}(x), H_C\right\}_B = i\partial_1\bar{\psi}\gamma^1 + g\bar{\psi}\gamma^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \tag{4.11}$$

$$\left\{\phi(x), H_C\right\}_B = i\gamma^1\partial_1\psi - g(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu\psi \tag{4.12}$$

A densidade Hamiltoniana primária é definida somando os vínculos primários à Hamiltoniana canônica incluindo um número igual de multiplicadores de Lagrange

$$\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_C + \bar{\phi}^\alpha a_\alpha + \bar{a}_\alpha\phi^\alpha. \tag{4.13}$$

As condições de consistência dos vínculos primários são: para $\bar{\phi}$

$$\dot{\bar{\phi}} = \{\bar{\phi}, H_P\}_B = i\partial_1\bar{\psi}\gamma^1 + g\bar{\psi}\gamma^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) + i\bar{a}\gamma^0 \approx 0$$

encontramos um dos multiplicadores fermiônicos

$$\bar{a} = -\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\gamma^0 + ig\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^0(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi). \tag{4.14}$$

Da condição de consistência de ϕ,

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_P\}_B = i\gamma^1\partial_1\psi - e(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu\psi - i\gamma^0 a \approx 0 \tag{4.15}$$

achamos o outro multiplicador fermiônico

$$a = \gamma^0\gamma^1\partial_1\psi + ig(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^0\gamma^\mu\psi. \tag{4.16}$$

Como não encontramos mais vínculos e, havendo encontrado todos os multiplicadores de Lagrange, concluímos que os vínculos primários são de segunda classe.

Se desejamos quantizar a teoria no formalismo canônico o seguinte passo seria calcular os parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas e, usar o princípio de correspondência para estabelecer as respectivas relações de anti-comutação.

No entanto, como usaremos a quantização via formalismo de integração funcional, somente requeremos a classificação dos vínculos para poder proceder com a quantização da teoria.

4.2 Função de Partição

A função de partição para o nosso caso (modelo de Thirring), sistemas com apenas vínculos de segunda classe, é dada por

$$Z(\beta) = \int [D\bar{\psi}D\psi][D\bar{\pi}D\pi]\;|\det \mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}}\;\delta(\bar{\phi}^\alpha)\delta(\phi^\alpha)\exp\left\{\int_\beta dx\left[-i\bar{\pi}_\alpha\partial_\tau\psi^\alpha + i\partial_\tau\bar{\psi}^\alpha\bar{\pi}_\alpha - \mathcal{H}_C\right]\right\} \tag{4.17}$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz dos vínculos de segunda classe e é dada por

$$\mathbf{C}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^0 \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix}\delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{4.18}$$

e cujo determinante é independente das variáveis canônicas. Calculando as integrais dos momentos e após algumas integrações por parte, obtemos

$$Z(\beta) = \int [D\bar{\psi}D\psi]\exp\left[\int_\beta dx\;\bar{\psi}\left(-\gamma^0\partial_\tau + i\gamma^1\partial_1\right)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^0\psi)^2 + \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^1\psi)^2\right]. \tag{4.19}$$

Renomeando $\gamma^0 = \gamma^\tau$, $\gamma^1 = i\gamma^1_E$ tais que obtemos a notação compacta

$$Z(\beta) = \int [D\bar{\psi}D\psi]\exp\left[\int_\beta dx\;-\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2\right] \tag{4.20}$$

onde $\mu = \tau, 1_E$. Com objetivo de poder realizar integrações gaussianas introduzimos um campo auxiliar A_μ tais que o termo de interação da corrente fermiônica é linearizada, assim, a função de partição do modelo de Thirring sem massa é

$$Z(\beta) = \int [DA_\mu][D\bar{\psi}D\psi] \exp\left[\int_\beta dx \; - \bar{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + iA_\mu\right)\psi - \frac{1}{2g}A_\mu^2\right]. \tag{4.21}$$

Integrando os graus de liberdade fermiônicos na equação (4.21), a função de partição é expressa por

$$Z(\beta) = \int DA^\mu \; \det\left|\gamma^\mu\partial_\mu\right| \exp\left\{\int_\beta dx \left[-\frac{1}{2g}A_\mu^2 - \frac{1}{2\pi}A_\mu\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}\right)A_\nu\right]\right\}, \tag{4.22}$$

onde o segundo termo na ação é a contribuição do determinante fermiônico (3.173) e, $\det\left|\gamma^\mu\partial_\mu\right|$ refere-se ao determinante dos férmions livres

$$\det\left(\gamma^\mu\partial_\mu\right) = \int D\bar{\psi}D\psi \exp\left(-\int_\beta dx \; \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right), \tag{4.23}$$

A integração no campo A_μ dá $\det\left|\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{\pi}\right)\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{\pi}\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}\right|^{-1/2} = \det\left|\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{g}\right|^{-1/2}$ que é um termo constante e infinito e cuja contribuição pode ser desprezada, assim, finalmente obtemos a função de partição do modelo de Thirring sem massa

$$Z(\beta) = \det\left|\gamma^\mu\partial_\mu\right| \tag{4.24}$$

podendo dizer que as propriedades termodinâmicas do modelo de Thirring sem massa são descritas por aquela correspondente a um campo fermiônico livre e sem massa. O cálculo do $\ln Z(\beta)$ esta feito no Capítulo **3** e o resultado é dado pela equação (3.76) e (3.77), assim, temos que função de Partição é

$$\ln Z_F(\beta) = 2L\int \frac{dp_1}{(2\pi)}\left[\frac{1}{2}\beta\omega + \ln(1 + e^{-\beta\omega})\right]. \tag{4.25}$$

onde L é a dimensão do sistema, $\omega = \sqrt{(p_1)^2}$. Calculando a integral em p_1 obtemos

$$\ln Z_F(\beta) = \frac{\pi L}{6\beta} \tag{4.26}$$

4.3 Funções de Green

Uma vez tendo definida a função de Partição (4.20) ou (4.21), podemos definir o gerador funcional das funções de Green à temperatura finita; isto é conquistado, introduzindo um termo de interação linear com o campo

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = N\int [DA_\mu][D\bar{\psi}D\psi] \exp\left[\int_\beta dx \; - \bar{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + iA_\mu\right)\psi - \frac{1}{2g}\left(A_\mu\right)^2 + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right] \tag{4.27}$$

onde N é um fator de normalização tais que $Z[0,0]=1$.

Integrando os campos fermiônicos temos a seguinte expressão para o gerador funcional das funções de Green completas à temperatura finita para o modelo de Thirring sem massa

$$\begin{aligned} Z[J,\bar{\eta},\eta] &= N_1 \int DA_\mu \exp\left\{\int_\beta dx \left[-\frac{1}{2g}A_\mu^2 - \frac{1}{2\pi}A_\mu\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}\right)A_\nu\right]\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{i\int_\beta dxdy\ \bar{\eta}(x)\, G(x,y;A)\,\eta(y)\right\} \end{aligned} \tag{4.28}$$

e na segunda exponencial $G(x,y;A)$ é a função de Green da equação de Dirac na presença do campo vetorial externo e calculada no Apêndice **B** do Capítulo **3**. A partir deste gerador funcional podemos calcular todas as funções de correlação do modelo e a construção das equações de Schwinger-Dyson.

Por outro lado, devido ao fato do modelo não ter uma simetria de calibre local, em nível clássico, é possível calcular o determinante fermiônico usando um método de regularização generalizada [4.21, 4.22, 4.23], ou dito numa outra maneira, podemos definir a corrente fermiônica num sentido generalizado [4.24, 4.25, 4.26]. Neste caso o determinante fermiônico é dado por

$$\det(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/) = \exp\left(i\int dx\ \frac{1}{2\pi}A_\mu\left[\frac{a+1}{2}g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right]A_\nu\right) \tag{4.29}$$

em que a parametriza as diferentes regularizações utilizadas para controlar as divergências ultravioletas que aparecem no cálculo do determinante fermiônico ou na definição da corrente fermiônica. Quando $a=1$ o lado direito da equação (4.29) é invariante sob a transformação de calibre local local $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha$.

Usando o resultado (4.29) na equação (4.21) podemos então calcular as função de partição e as propriedades termodinâmicas do modelo. Estes estudos assim como a análise das funções de correlação para esta solução geral [4.20] do modelo de Thirring estão em estudo.

Bibliografia

[4.1] W. Thirring, Ann. Phys. (N. Y.) **3**, 91 (1958).

[4.2] C. R. Hagen, Nuovo Cimento B **51**, 169 (1967).

[4.3] B. Klaiber, in *Lectures in Theoretical Physics* 1967, eds. A. Barut and W. Britten (Gordon and Breach, New York, 1968), p. 141.

[4.4] N. Nakanishi, Prog. Phys. **57**, 580 (1977).

[4.5] J. Voit, Rep. Prog. Phys. **58**, 977 (1995).

[4.6] F. Haldane, J. Phys. **C14**, 2585 (1981).

[4.7] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950).

[4.8] J. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).

[4.9] E. Lieb e D. Mattis, J. Math. Phys. **6**, 305 (1965).

[4.10] D. Ebert e H. Reinhardt, Nucl. Phys. **B271**, 188 (1986).

[4.11] R. Alkofer e Reinhardt, *Chiral Quark Dynamics*, (Springs, Berlin, 1995).

[4.12] C. M. Naón, M. C. von Reichenbach e M. L. Trobo, Nucl. Phys. **B435**, 567 (1995).

[4.13] D. G. Barci e C. M. Naón, Int. J. Mod. Phys. **A13**, 1169 (1995).

[4.14] M. V. Manías, C. M. Naón e M. L. Trobo, Nucl. Phys. **B525**, 721 (1998).

[4.15] R. Casana, *Renormalização e Ambiguidades na* QED_2, Dissertação de mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF, (1997).

[4.16] S. A. Dias e C. A. Linhares, Phys. Rev. **D45**, 2162 (1992).
Possui o cálculo em detalhes do determinante fermiônico

[4.17] R. Casana and S. A. Dias, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 4601 (2002).

[4.18] R. Casana and S.A. Dias, J. Phys. **G27**, 1501 (2001).

[4.19] Elcio Abdalla, M. Cristina B. Abdalla and Klaus Rothe, *Non-pretubative methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*, 2nd, World Scientific Publishing (2001).

[4.20] R. Casana, Int. J. Mod. Physics **A20**, 7129 (2005).

[4.21] R. Jackiw, *Topological Investigations of Quantized Gauge Theories*, *in Relativity, Groups and Topology II* (Les Houches 1983), eds. B.S. DeWitt and R. Stora, North Holland, Amsterdam, 1984.

[4.22] R. Banerjee, Z. Phys. **C 25**, 251 (1984); Phys. Rev. **D 37**, 3778 (1988).

[4.23] P. Mitra and A. Rahaman, Ann. Phys. **249**, 34 (1996).

[4.24] C.R. Hagen, Nuovo Cimento **51B**, 169 (1967).

[4.25] R. Jackiw and K. Johnson, Phys. Rev. **182**, 1459 (1969).

[4.26] K. Jonhson, Nuovo Cimento **20**, 773 (1961).

Capítulo 5

Modelo de Thirring com Simetria de Gauge

O Modelo de Thirring da forma como foi definido no capítulo anterior não possui invariância de gauge. Quando introduzimos o campo auxiliar (A^μ), a teoria efetiva encontrada novamente não exibe invariância de gauge, devido ao termo massivo do campo auxiliar (A^μ). Para tornar o Modelo de Thirring invariante de gauge, Itoh e seus colaboradores [5.1] usaram o método da invariância de gauge local escondida (HLS Hidden Local Symmetry). Com esta técnica o Modelo de Thirring torna-se invariante de gauge e, como conseqüência, aparece um campo escalar na teoria. No mesmo trabalho [5.1] os autores observaram que o campo escalar (A^μ) adquire massa nas correções radiativas. Portanto um termo cinético para o campo auxiliar (A^μ) pode ser introduzido na Lagrangiana a nível clássico. Seguindo a idéia da introdução deste termo cinético para o campo auxiliar (A^μ), Kondo [5.2, 5.3, 5.4] reformulou o Modelo de Thirring de uma forma diferente da referência [5.1], adotando o formalismo de Fradkin-Batalin [5.7, 5.8, 5.9], e dependendo dos limites das constantes de acoplamento pode descrever tanto o Modelo de Schwinger quanto o Modelo de Thirring.

O nosso objetivo neste capítulo, é estudar o Modelo proposto por Kondo (Modelo de Kondo) à temperatura finita e analizarmos os limites correspondentes quanto às constantes de acoplamento.

5.1 Modelo de Kondo

A densidade Lagrangiana do modelo de Thirring com simetria de gauge (MTG) proposto por Kondo é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{TG} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &\quad + A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \frac{1}{2g}(A_\mu - \partial_\mu\theta)^2 - \frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ , \end{aligned} \tag{5.1}$$

esta densidade Lagrangiana é invariante pela seguinte transformação de gauge local

$$\psi \to e^{i\omega(x)}\psi \quad , \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\omega(x)} \quad , \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\omega(x) \quad , \quad \theta \to \theta + \omega \tag{5.2}$$

e a corrente conservada é

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{5.3}$$

As equações de Euler-Lagrange são

$$\begin{aligned}
(i\partial_\mu - A_\mu)\,\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} &= 0 && (5.4)\\
\gamma^\mu\,(i\partial_\mu\psi + A_\mu)\,\psi - m\psi &= 0 && (5.5)\\
\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial\cdot A) + e^2\bar{\psi}\gamma^\nu\psi + \frac{e^2}{g}A^\nu - \frac{e^2}{g}\partial^\nu\theta &= 0 && (5.6)\\
\Box\theta - (\partial\cdot A) &= 0. && (5.7)
\end{aligned}$$

Das equações de movimento podemos fazer dois limites nas constantes de acoplamento: O primeiro limite a ser considerado no gauge $\theta = 0$ e fazendo $e \to \infty$, assim, da equação (5.6) obtemos $A^\mu = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ que substituído na equação (5.5) reproduz a equação de movimento para o modelo de Thirring massivo

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi - g\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right)\gamma^\mu\psi = 0, \tag{5.8}$$

que expresso em termos de uma densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{TG} \to \mathcal{L}_T = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2\ . \tag{5.9}$$

O segundo limite também no gauge $\theta = 0$ e fazendo $g \to \infty$ que, em nível clássico resulta nas equações de movimento do Modelo de Schwinger massivo no gauge de Lorenz

$$\begin{aligned}
(i\partial_\mu - eA_\mu)\,\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} &= 0 && (5.10)\\
\gamma^\mu\,(i\partial_\mu\psi + eA_\mu)\,\psi - m\psi &= 0 && (5.11)\\
\Box A^\nu + e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi &= 0, && (5.12)
\end{aligned}$$

em que o campo de gauge tem sido rescalado $A_\mu \to eA_\mu$. E correspondem a seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{TG} \to \mathcal{L}_S = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{5.13}$$

5.1.1 Análise de Vínculos

Os momentos canônicos conjugados fermiônicos são

$$\bar{p} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^0 \qquad , \qquad p = -\frac{i}{2}\gamma^0\psi\ , \tag{5.14}$$

o momento canônico para o campo eletromagnético é

$$\pi^\mu = \frac{1}{e^2}F^{\mu 0}\ , \tag{5.15}$$

e o momento canônico conjugado para o campo escalar é

$$\pi_\theta = -\frac{1}{g}A^0 + \frac{1}{g}\dot{\theta}. \tag{5.16}$$

Os parênteses de Berezin (PB) fundamentais entre as variáveis canônicamente conjugadas, $\{\cdot,\cdot\}_B$, são

$$\left\{\psi_\alpha(x), \bar{p}^\beta(y)\right\}_B = -\delta_\alpha^\beta \delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{5.17}$$

$$\left\{\bar{\psi}_\alpha(x), p^\beta(y)\right\}_B = -\delta_\alpha^\beta \delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{5.18}$$

$$\left\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\right\}_B = \delta_\mu^\nu \delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{5.19}$$

$$\left\{\theta(x), \pi_\theta(y)\right\}_B = \delta\left(x^1 - y^1\right). \tag{5.20}$$

Da expressão dos momentos fermiônicos extraímos dois vínculos primários

$$\bar{\phi} = \bar{p} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0 \quad , \quad \phi = p + \frac{i}{2}\gamma^0\psi \approx 0. \tag{5.21}$$

Da equação, ao definir o momento conjugado ao campo eletromagnético, conseguimos outro vínculo primário, π^0, que denominamos de

$$\varphi_1 = \pi^0 \approx 0, \tag{5.22}$$

e uma relação dinâmica

$$\dot{A}_1 = \partial_1 A_0 + e^2\pi^1 . \tag{5.23}$$

E da equação (5.16) simplesmente obtemos outra relação dinâmica

$$\dot{\theta} = g\pi_\theta + A_0. \tag{5.24}$$

A densidade Hamiltoniana canônica é definida por meio de uma transformação de Legendre

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_C &= \pi_\theta\dot{\theta} + \pi^\mu\dot{A}_\mu + \dot{\psi}_a\bar{p}_a + \dot{\bar{\psi}}_a p_a - \mathcal{L}_{TG} \\
&= \frac{1}{2}g(\pi_\theta)^2 + \frac{1}{2}e^2\left(\pi^1\right)^2 + \frac{1}{2g}(A_1)^2 - \frac{1}{g}A_1\partial_1\theta + \frac{1}{2g}(\partial_1\theta)^2 \\
&\quad + \pi^1\partial_1 A_0 + A_0\pi_\theta - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi + \frac{i}{2}\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi + m\bar{\psi}\psi - A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Em seguida definamos a densidade Hamiltoniana primária

$$\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_C + v\varphi + \bar{\phi}_a\lambda_a + \bar{\lambda}_a\phi_a, \tag{5.26}$$

onde foi introduzido um conjunto de multiplicadores de Lagrange λ_a, $\bar{\lambda}_a$ e v.

Os PB's não nulos entre os vínculos primários são

$$\left\{\phi_a(x), \bar{\phi}_b(y)\right\} = -i\left(\gamma^0\right)_{ab}\delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{5.27}$$

e, os PB's entre os vínculos primários e o Hamiltoniano canônico são

$$\begin{aligned}\left\{\bar{\phi}\left(x\right),H_C\right\} &= i\partial_1\bar{\psi}\gamma^1+m\bar{\psi}-A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu \\ \left\{\phi\left(x\right),H_C\right\} &= i\gamma^1\partial_1\psi-m\psi+A_\mu\gamma^\mu\psi \\ \left\{\varphi_1\left(x\right),H_C\right\} &= \partial_1\pi^1-\pi_\theta+\bar{\psi}\gamma^0\psi.\end{aligned} \tag{5.28}$$

Implementamos as condições de consistência dos vínculos primários: primeiramente para ϕ

$$\begin{aligned}\dot{\phi}\left(x\right) &= \left\{\phi\left(x\right),H_P\right\}\approx 0 \\ &= i\gamma^1\partial_1\psi-m\psi+A_\mu\gamma^\mu\psi-i\gamma^0\lambda\approx 0,\end{aligned}$$

equação esta que determina o multiplicador fermiônico λ

$$\lambda=\gamma^0\gamma^1\partial_1\psi+im\gamma^0\psi-iA_\mu\gamma^0\gamma^\mu\psi. \tag{5.29}$$

Logo, para $\bar{\phi}_1$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\phi}}\left(x\right) &= \left\{\bar{\phi}\left(x\right),H_P\right\}\approx 0 \\ &= i\partial_1\bar{\psi}\gamma^1+m\bar{\psi}-A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu+i\bar{\lambda}\gamma^0\approx 0,\end{aligned}$$

que resulta na determinação do outro multiplicador fermiônico $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda}=-\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\gamma^0+im\bar{\psi}\gamma^0-iA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^0. \tag{5.30}$$

Finalmente a preservação no tempo do vínculo bosônico φ

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1\left(x\right) &= \left\{\varphi_1\left(x\right),H_P\right\}\approx 0 \\ &= \partial_1\pi^1-\pi_\theta+\bar{\psi}\gamma^0\psi\approx 0,\end{aligned} \tag{5.31}$$

produz um vínculo secundário que denotamos como

$$G=\partial_1\pi^1-\pi_\theta+\bar{\psi}\gamma^0\psi\approx 0, \tag{5.32}$$

e cuja condição de consistência resulta em

$$\dot{G}=\partial_1(\bar{\psi}\gamma^1\psi)-\bar{\psi}\gamma^0\lambda+\bar{\lambda}\gamma^0\psi, \tag{5.33}$$

e que usando as equações para os multiplicadores de Lagrange fermiônicos leva a

$$\dot{G}=0, \tag{5.34}$$

assim, o vínculo secundário é preservado no tempo e, não existem vínculos adicionais no modelo.

Classificação

Dado o conjunto de vínculos primários e secundários

$$\bar{\phi} \;=\; \bar{p} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0 \;, \tag{5.35}$$

$$\phi \;=\; p + \frac{i}{2}\gamma^0\psi \approx 0 \;, \tag{5.36}$$

$$\varphi_1 \;=\; \pi^0 \approx 0 \;, \tag{5.37}$$

$$G \;=\; \partial_1\pi^1 - \pi_\theta + \bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0 \;, \tag{5.38}$$

o próximo passo é a classificação deles em primeira ou segunda classe.

É fácil verificar que $\varphi_1 = \pi^0$ comuta com os outros três vínculos, assim ele é de primeira classe. Agora, calculemos os PBs entre os três vínculos restantes

$$\{\bar{\phi}(x), G(y)\}_B \;=\; \bar{\psi}(y)\,\gamma^0\delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{5.39}$$

$$\{\phi(x), G(y)\}_B \;=\; -\gamma^0\psi(y)\,\delta\left(x^1 - y^1\right) \tag{5.40}$$

$$\left\{\phi^\alpha(x), \bar{\phi}^\beta(y)\right\}_B \;=\; -i(\gamma^0)^{\alpha\beta}\delta\left(x^1 - y^1\right), \tag{5.41}$$

assim, o subconjunto $\Sigma = \left\{\mathcal{G}, \phi, \bar{\phi}\right\}$ aparentemente é de segunda classe. Para verificar se é verdade, construímos a sua matriz de vínculos $\mathbf{C}_{ab}(x,y) = \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}_B$

$$\mathbf{C}(x,y) = \begin{array}{c} \\ G \\ \bar{\phi}^\alpha \\ \phi^\alpha \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & \bar{\phi}^\beta & \phi^\beta \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\left[\bar{\psi}\gamma^0\right]^\beta & \left[\gamma^0\psi\right]^\beta \\ \left[\bar{\psi}\gamma^0\right]^\alpha & 0 & -i\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha} \\ -\left[\gamma^0\psi\right]^\alpha & -i\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \delta\left(x^1 - y^1\right) = \mathbf{\Delta}(x)\delta\left(x^1 - y^1\right), \tag{5.42}$$

e exploramos a possibilidade dela ter vetores de autovalor nulo, pois esses são os candidatos a serem vínculos de primeira classe. Sendo assim, calculemos o autovetor usando a equação de autovalor nulo

$$\int dy^1\; \mathbf{C}^{ab}(x,y)\mathbf{U}_b(y) = 0, \tag{5.43}$$

que resulta em $\mathbf{\Delta}(x)\,\mathbf{U}(x) = 0$, explicitamente temos

$$\begin{pmatrix} 0 & -\left[\bar{\psi}\gamma^0\right]^\beta & \left[\gamma^0\psi\right]^\beta \\ \left[\bar{\psi}\gamma^0\right]^\alpha & 0 & -i\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha} \\ -\left[\gamma^0\psi\right]^\alpha & -i\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ (\mathbf{U}_2)_\alpha \\ (\mathbf{U}_3)_\beta \end{pmatrix} = 0, \tag{5.44}$$

de onde o autovetor nulo é facilmente calculado $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1, & i\psi_\alpha, & -i\bar{\psi}_\beta \end{pmatrix}^T$, assim a combinação linear que produz o segundo vínculo de primeira classe é

$$\varphi_2 = \Phi^\beta\mathbf{U}_\beta = G + i\bar{\phi}^\alpha\psi_\alpha - i\phi^\beta\bar{\psi}_\beta, \tag{5.45}$$

de onde resulta que o segundo vínculo de primeira classe é

$$\varphi_2 = \partial_1\pi^1 - \pi_\theta + i\left(\bar{p}^\alpha\psi_\alpha + \bar{\psi}_\alpha p^\alpha\right). \tag{5.46}$$

Finalmente podemos concluir a classificação, dizendo que o subconjunto de primeira classe é dado por

$$\varphi_1 \quad , \quad \varphi_2, \tag{5.47}$$

enquanto que o de segunda classe é

$$\bar{\phi} \quad , \quad \phi. \tag{5.48}$$

O seguinte passo é estabelecer condições de gauge para os vínculos de primeira classe, assim, seguindo uma análise similar a realizada no Capítulo **3** (ver subseção 3.1.2) com o modelo de Schwinger, escolhemos o conjunto de condições de gauge denominado de gauge de Coulomb que é dado pelas seguintes relações

$$\xi_1 = A_0 \approx 0 \tag{5.49}$$

$$\xi_2 = \partial_1 A_1 \approx 0. \tag{5.50}$$

5.1.2 A função de Partição

O formalismo Hamiltoniano desenvolvido na seção prévia permite implementar a função de partição via formalismo de integração funcional, assim, ela é expressa como

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\pi_\theta\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\pi^\mu\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{p}\mathcal{D}p \left|\det\left\{\phi_a,\bar{\phi}_b\right\}\right|^{-1/2} \delta(\bar{\phi})\delta(\phi) \\ &\times \left|\det\{\varphi_i,\xi_j\}\right| \delta(\xi_i)\delta(\varphi_i) \exp\left\{\int_\beta d^2x\ i\pi^\mu\partial_\tau A_\mu + i\pi_\theta\partial_\tau\theta - i\bar{p}\partial_\tau\psi + i\partial_\tau\bar{\psi}p - \mathcal{H}_C + \mu\mathcal{Q}\right\}, \end{aligned} \tag{5.51}$$

em que a medida do espaço de configuração $\int_\beta d^2x = \int_0^\beta d\tau \int dx$. O campo escalar θ e os campos de gauge A_μ satisfazem condições de contorno periódicas na coordenada τ: $\theta(0,x) = \theta(\beta,x)$, $A_a(0,x) = A_a(\beta,x)$ e os campos fermiônicos satisfazem condições de contorno anti-periódicas na mesma coordenada τ: $\psi(0,x) = -\psi(\beta,x)$, $\bar{\psi}(0,x) = -\bar{\psi}(\beta,x)$.

No gauge de Coulomb, o determinante da matriz formada pelos PBs entre os vínculos de primeira classe e as respectivas condições de gauge é $\det\{\varphi_i,\xi_j\} = \det\left|-(\partial_1)^2\right|$ e, o determinante da matriz formada pelos PBs entre os vínculos de segunda classe é $\det\left\{\phi_a,\bar{\phi}_b\right\} = \det[1]$, uma constante que não contribuirá para as propriedades termodinâmicas do sistema.

$\mathcal{H}_C$ é a densidade Hamiltoniana canônica definida em (5.25), e μ é o potencial químico relacionado à densidade de carga conservada $\mathcal{Q} = \bar{\psi}\gamma^0\psi$.

Fazendo as integrações em π^0 e A_0, os momentos fermiônicos $\bar{p}$ e p e, logo em π_θ e finalmente em π^1, após algumas integrações por partes, obtemos a função de partição no gauge de Coulomb

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}A_a\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\ \det\left|-(\partial_1)^2\right|\ \delta[\partial_1 A_1]\ \exp\left\{\int_\beta d^2x\ \mathcal{L}_E\left[\bar{\psi},\psi,A_a,\theta\right]\right\}, \tag{5.52}$$

onde a densidade Lagrangiana $\mathcal{L}_E\left[\bar{\psi},\psi,A_a,\theta\right]$ é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E\left[\bar{\psi},\psi,A_a,\theta\right] &= -\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi+\mu\bar{\psi}\gamma^0\psi-m\bar{\psi}\psi+iA_a\bar{\psi}\gamma^a\psi \\ &\quad -\frac{1}{2g}\left(A_a-\partial_a\theta\right)^2-\frac{1}{4e^2}F_{ab}F_{ab},\end{aligned} \tag{5.53}$$

$a=\tau,1$ e $\gamma^\tau=\gamma^0$, $\gamma^1=-i\gamma_M^1$.

Usando o ansatz de Faddeev-Popov (2.111) podemos expressar a função de partição (5.52) num gauge arbitrário, assim, temos

$$\begin{aligned}Z\left(\beta\right) &= N\left(\beta\right)\int\mathcal{D}\theta\mathcal{D}A_a\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \\ &\quad\times\delta\left(F\left[\bar{\psi},\psi,A_a,\theta\right]\right)\det\left|\frac{\partial F^g}{\partial\omega}\right|_{\omega=0}\exp\left\{\int_\beta d^2x\ \mathcal{L}_E\left[\bar{\psi},\psi,A_a,\theta\right]\right\}\quad,\end{aligned} \tag{5.54}$$

sendo $F\left[\bar{\psi},\psi,A_a,\theta\right]$ uma condição de gauge arbitrária e ω a função definindo a transformação de gauge (5.2).

Escolhemos como condição o gauge covariante R_ξ definida por

$$F=R_\xi=-\partial_aA_a+\frac{\xi}{g}\theta-f\quad,\qquad F^g=F+\left(-\Box+\frac{\xi}{g}\right)\omega\quad. \tag{5.55}$$

onde a transformação de gauge ^{g} é $A_a\rightarrow A_a+\partial_a\omega$, $\theta=\theta+\omega$, f é uma função escalar arbitrária e $\Box=\partial_a\partial_a=\left(\partial_a\right)^2=\left(\partial_\tau\right)^2+\left(\partial_1\right)^2$. Então, neste gauge a função de partição é

$$\begin{aligned}Z\left(\beta\right) &= \int\mathcal{D}\theta\mathcal{D}A_a\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \\ &\quad\times\det\left|-\Box+\frac{\xi}{g}\right|\ \delta\left[-\partial_aA_a+\frac{\xi}{g}\theta-f\right]\exp\left\{\int_\beta d^2x\ \mathcal{L}_E\left[\bar{\psi},\psi,A_a,\theta\right]\right\}.\end{aligned} \tag{5.56}$$

Segundo o procedimento padrão, multiplicamos por $\exp\left(-\frac{1}{2\xi}\int_\beta d^2x\ f^2\right)$ e integramos em f para finalmente obter a função de partição do Modelo Kondo no gauge R_ξ

$$Z\left(\beta\right)=\int\mathcal{D}\theta\mathcal{D}A_a\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\det\left|-\Box+\frac{\xi}{g}\right|\ \exp\left\{\int_\beta d^2x\ \mathcal{L}_1\left[\bar{\psi},\psi,A_a\right]+\mathcal{L}_2\left[\theta\right]\right\}, \tag{5.57}$$

onde $\mathcal{L}_1\left[\bar{\psi},\psi,A_\mu\right]$ é definida como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1\left[\bar{\psi},\psi,A_a\right] &= -\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi+\mu\bar{\psi}\gamma^0\psi-m\bar{\psi}\psi+iA_a\bar{\psi}\gamma^a\psi \\ &\quad -\frac{1}{4e^2}F_{ab}F_{ab}-\frac{1}{2g}\left(A_a\right)^2-\frac{1}{2\xi}\left(\partial_aA_a\right)^2,\end{aligned} \tag{5.58}$$

e $\mathcal{L}_2\left[\theta\right]$ é dada por

$$\mathcal{L}_2\left[\theta\right]=-\frac{1}{2g}\left(\partial_a\theta\right)^2-\frac{\xi}{2g^2}\theta^2. \tag{5.59}$$

Podemos observar claramente a motivação que levou a escolher o gauge R_ξ: neste gauge o campo escalar θ se desacopla tanto dos férmions quanto o campo de gauge.

O próximo passo é calcular a função de partição (5.57), assim, primeiramente escolhemos a situação mais simples quando $m = 0$ e $\mu = 0$. Nessa condição, após a integração no campo θ obtemos

$$Z(\beta) = \det\left|-\Box + \frac{\xi}{g}\right|^{1/2} \int \mathcal{D}A_a \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{\int_\beta d^2x\ \bar{\mathcal{L}}_1\left[\bar{\psi}, \psi, A_a\right]\right\}, \tag{5.60}$$

onde

$$\bar{\mathcal{L}}_1 = -\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi + iA_a\bar{\psi}\gamma^a\psi - \frac{1}{4e^2}F_{ab}F_{ab} - \frac{1}{2g}(A_a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_a A_a)^2. \tag{5.61}$$

Logo, a integração nos campos fermiônicos resulta em

$$\det\left|\gamma^a\partial_a\right| \exp\left\{\int_\beta d^2x\ -\frac{1}{2\pi}A_a\left(\delta_{ab} - \frac{\partial_a\partial_b}{\Box}\right)A_b\right\}. \tag{5.62}$$

Introduzindo na equação (5.60) obtemos

$$Z(\beta) = \det\left|\gamma^a\partial_a\right| \det\left|-\Box + \frac{\xi}{g}\right|^{1/2} \int \mathcal{D}A_a \exp\left\{\ \mathcal{S}_{eff}[A_a]\right\}, \tag{5.63}$$

onde a ação efetiva do campo A_a é

$$\mathcal{S}_{eff}[A_a] = -\int_\beta d^2x\ \frac{1}{2e^2}A_a\left[\left(-\Box + \frac{e^2}{\pi} + \frac{e^2}{g}\right)T_{ab} + e^2\left(-\Box + \frac{\xi}{g}\right)L_{ab}\right]A_b. \tag{5.64}$$

Por último, da integração do campo de gauge obtemos

$$\det\left|-\Box + \frac{e^2}{\pi} + \frac{e^2}{g}\right|^{-1/2} \det\left|-\Box + \frac{\xi}{g}\right|^{-1/2}, \tag{5.65}$$

que em (5.63) permite obter explicitamente a função de partição do modelo Kondo sem massa que é

$$Z(\beta) = \det\left|\partial\!\!\!/\right| \det\left|-\Box + \frac{e^2}{g} + \frac{e^2}{\pi}\right|^{-1/2}, \tag{5.66}$$

Podemos dizer que as propriedades termodinâmicas do modelo são descritas por um campo fermiônico sem massa e um campo bosônico massivo de massa $\dfrac{e^2}{g} + \dfrac{e^2}{\pi}$ e, vale a pena lembrar que a massa $\dfrac{e^2}{\pi}$ foi gerada dinamicamente em nível quântico.

Neste ponto, analisamos os dois limites que mencionamos em nível clássico: O primeiro limite $e^2 \to \infty$, torna o campo escalar infinitamente pesado e cancela a sua contribuição na função de partição (5.66) tal que temos

$$Z(\beta) \underset{e^2\to\infty}{\longrightarrow} Z_{TM}(\beta) = \det\left|\partial\!\!\!/\right|, \tag{5.67}$$

e assim a termodinâmica seria descrita por um campo fermiônico sem massa equivalente ao modelo de Thirring sem massa.

No segundo limite $g \to \infty$, a descrição da termodinâmica dada por (5.66) definitivamente não muda, porém, a massa do bóson passa a ser $\frac{e^2}{\pi}$, a massa de Schwinger. Assim temos que a função de partição neste limite é

$$Z(\beta) \underset{g\to\infty}{\longrightarrow} \det\left|\not{\partial}\right| \det\left|-\Box + \frac{e^2}{\pi}\right|^{-1/2}, \tag{5.68}$$

que não é a função de partição do modelo de Schwinger (3.73)

$$Z_{SM}(\beta) = \det\left|-\Box + \frac{e^2}{\pi}\right|^{-1/2}. \tag{5.69}$$

Vejamos agora outro modelo bidimensional que é conhecido como modelo de Thirring-Wess, que descreve um campo de Proca acoplado a férmions de Dirac sem massa, cuja densidade Lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{TW} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{i}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi + eA_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_P^2 A_{\mu}A^{\mu}, \tag{5.70}$$

e a respectiva função de partição é dado pela seguinte expressão

$$Z_{TW}(\beta) = \det\left|\not{\partial}\right| \det\left|-\Box_E + m_P^2 + \frac{e^2}{\pi}\right|^{-1/2}. \tag{5.71}$$

Então, se escolhermos a massa do campo de Proca como $m_P^2 = \frac{e^2}{g}$, podemos afirmar, com toda segurança que as propriedades termodinâmicas do modelo Kondo são exatamente as mesmas que a do modelo de Thirring-Wess ou como foi mostrado em [**?**] também equivalente ao modelo de Schwinger anômalo quando feita uma escolha apropriada da ambigüidade.

Tendo definido corretamente a função de partição o próximo passo é implementar o gerador funcional das funções de correlação e estabelecer as equações de Schwinger-Dyson e as identidades de Ward para o modelo estudado.

Em vista do inesperado resultado da equivalência entres as funções de Partição destes três modelos, pretendemos verificar se essa equivalência esta presente também nas funções de correlação térmicas dos modelos.

Bibliografia

[5.1] T. Itoh, Y. Kim, M. Sugiura and K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. **93**, 417 (1995).

[5.2] K. Kondo, Nucl. Phys. **B450,** 251 (1995).

[5.3] K. Kondo, Prog. Theor. Phys. **98**, 211 (1997).

[5.4] K. Ikegami, K. Kondo and A. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **95**, 203 (1996).

[5.5] K. Kondo, Prog. Theor. Phys. **94**, 899 (1995).

[5.6] K. Kondo, Int. J .Mod. Phys. **A12**, 5651 (1997).

[5.7] I. A. Batalin and E. S. Fradkin, Nuovo Cimento **9, 1** (1986).

[5.8] I. A. Batalin and E. S. Fradkin, Phys. Lett. **B 180, 157** (1986).

[5.9] I. A. Batalin and E. S. Fradkin, Nucl. Phys. **B 279,** 514 (1987).

[5.10] R. Casana and B. M. Pimentel, Mod. Phys. Lett. **A20**, 1933 (2005).

Comentários Finais e Perspectivas

O objeto fundamental para o estudo das propriedades termodinâmicas de um sistema físico é a *função de partição.* A implementação deste objeto deve ser feita cuidadosamente quando o sistema físico em estudo é singular ou, melhor dito, o sistema possui vínculos; então, a correta implementação da função de partição passa a ser de suma importância para a obtenção de um resultado satisfatório que possa ser em princípio compatível com a experiência.

A análise dos sistemas vinculados segue o formalismo proposto por Dirac [1, 2, 3], cuja importância reside na implementação da função de Partição via formalismo de integração funcional, ou seja: a classificação dos vínculos em primeira e segunda classe e a escolha correta das condições gauge são fundamentais na definição correta da medida [4] na integração funcional que define a função de partição.

Com a função de partição definida de modo consistente é direto implementar o gerador funcional das funções de correlação térmicas do sistema, assim como estabelecer as equações de Schwinger-Dyson e no caso que há simetrias de gauge local, também, calcular as identidades de Ward satisfeitas pelas funções de correlação; ambas de vital importância para o estudo de soluções não perturbativas para o sistema físico.

Começamos estudando um modelo sem vínculos, o campo escalar complexo que na sua simplicidade além de descrever um gás de bósons carregados, permite uma descrição clara do fenômeno conhecido como condensação de Bose-Einstein.

Logo estudamos o gás de férmions, um sistema vinculado de segunda classe, cujos resultados obtidos são conhecidos na literatura, por exemplo, é mostrado que os férmions não condensam como resultado de eles satisfazerem a estatística de Fermi-Dirac.

O campo eletromagnético é o sistema físico mais simples cuja estrutura de vínculos é puramente de primeira classe. O tratamento cuidadoso deste sistema nos leva a mostrar corretamente a distribuição de radiação de corpo negro ou distribuição de Planck, assim, como a lei de radiação de Stefan-Boltzmann.

Os modelos descritos anteriormente são livres e estão num espaço de configuração de (3+1) dimensões, onde "1" refere-se à coordenada "temporal". Os modelos estudados a partir do Capítulo **3** são modelos com interação e em (1+1) dimensões. A escolha desses modelos, é devido ao fato que eles são exatamente solúveis no sentido de que podemos descrever as funções de partição de forma exata assim como as suas funções de correlação.

O primeiro modelo bidimensional estudado foi o modelo de Schwinger [5, 6, 7, 8, 9, 10] que é um modelo com simetria de gauge local e apresenta a geração dinâmica de massa para o campo de gauge. De acordo com a literatura [11, 12] mostramos que as propriedades termodinâmicas são descritas pela função de Partição de um campo escalar massivo de massa $\frac{e^2}{\pi}$, a massa gerada pelo mecanismo de Schwinger. Como uma extensão estamos estudando as propriedades termodinâmicas da outra solução do modelo de Schwinger conhecida como modelo de Schwinger anômalo [13, 14], assim como, se a sua equivalência (a $T = 0$, [15]) é mantida, a $T \neq 0$, com o modelo de Thirring-Wess [16]. E, em paralelo estamos estudando também a termodinâmica do modelo de Schwinger quiral generalizado.

O segundo modelo escolhido foi o modelo de Thirring sem massa [17, 18, 19, 20, 21], que embora não seja uma teoria de gauge ele faz uma resenha ao modelo de Pauli devido ao termo de interação $\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)^2$ ou via a transformação de Fierz o termo de interação pode ser expresso de tal modo que resulta na versão bidimensional do modelo de Nambu-Jona-Lasinio [22], compartilhando ambos os modelos das mesmas propriedades não perturbativas [23]. Seguindo o procedimento padrão, linearizamos o termo de interação introduzindo um campo vetorial. Este passo permite calcular exatamente a integração fermiônico, tal como fizemos no modelo de Schwinger. Assim, concluímos que a termodinâmica do modelo de Thirring sem massa é descrita pela função de partição de um campo fermiônico sem massa.

Por outro lado, devido ao fato do modelo não ter uma simetria de gauge local, em nível clássico, é possível calcular o determinante fermiônico usando um método de regularização generalizada [24, 25, 26], ou dito de uma outra maneira, podemos definir a corrente fermiônica num sentido generalizado [27, 28, 29]. Neste caso o determinante fermiônico é dado por

$$\det(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/) = \exp\left(i\int dx\, \frac{1}{2\pi}A_\mu\left[\frac{a+1}{2}g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right]A_\nu\right), \tag{5.72}$$

em que a parametriza as diferentes regularizações utilizadas para controlar as divergências ultravioletas que aparecem no cálculo do determinante fermiônico ou na definição da corrente fermiônica. Quando $a = 1$ o lado direito da equação (5.72) é invariante sob a transformação de gauge local $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha$. Usando o resultado, podemos calcular a função de Partição e as propriedades termodinâmicas do modelo. Estes estudos assim como a análise das funções de correlação para esta solução geral [21] do modelo de Thirring estão em andamento. Um outro problema é o estudo das propriedades termodinâmicas das fases com e sem simetria quiral chamadas de simétrica e não simétrica [23, 30], avanços nessa direção estão sendo desenvolvidos.

O último modelo bidimensional tratado na tese é o modelo de Thirring com simetria de calibre (Modelo Kondo) que foi primeiramente proposto por K. Kondo [31, 32] e separadamente por Itoh [33] e colaboradores, embora as abordagens propostas para a obtenção do modelo sejam diferentes. Os estudos de Kondo e Itoh foram à temperatura zero, a proposta era que o modelo podia descrever, em nível clássico, dois modelos diferentes tomando os limites adequados: O primeiro limite $e^2 \to \infty$, no gauge $\theta = 0$, levava ao modelo de Thirring e, o segundo limite $g \to \infty$, também no gauge $\theta = 0$, levava ao modelo de Schwinger.

O fato ou resultado interessante obtido na Tese é que um dos limites, $e^2 \to \infty$, é compatível com o resultado deles. Porém, o segundo limite $g \to \infty$ obtido por eles não é compatível com o nível quântico do modelo. Como vimos no Capítulo **5** a termodinâmica do modelo Kondo, dado um e^2 e um g quaisquer, é a do modelo de Thirring-Wess [16] e/ou a do modelo de Schwinger anômalo [16]. Assim, no limite $g \to \infty$ a termodinâmica será a mesma que para um g finito.

Dada a equivalência termodinâmica dos modelos mencionados é interessante estudar se tal equivalência é mantida em nível de funções de correlação. Avanços nesta direção estão sob estudo.

Bibliografia

[1] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).

[2] P. A. M. Dirac , Can. J. Math **2**, 129 (1950).

[3] P. A. M. Dirac, Can. J. Math **3**, 1 (1951).

[4] P. Senjanovic, Ann. Phys. (N.Y) 100, 227 (1976).

[5] J. Schwinger, Phys. Rev. **125**, 397 (1962); *ibid.* 2425.

[6] R. Casana, *Renormalização e Ambiguidades na* QED_2, Tese de mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF, (1997).

[7] S. A. Dias and C. A. Linhares, Phys. Rev. **D45**, 2162 (1992).

[8] R. Casana and S. A. Dias, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 4601 (2002).

[9] R. Casana and S.A. Dias, J. Phys. **G27**, 1501 (2001).

[10] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla and K. Rothe, *Non-pertubative methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*, 2nd, (World Scientific Publishing) 2001.

[11] F. Ruiz Ruiz, R. F. Alvarez-Estrada, Phys. Rev. **D35**, 3161 (1987).

[12] F. Ruiz Ruiz e R. F. Alvarez-Estrada, Phys. Lett. **B180**, 153 (1986).

[13] P. Mitra and A. Rahaman, Ann. Phys. 249, 34 (1996).

[14] R. Casana and S. A. Dias, Int. J. Mod. Phys. A15, 4603 (2000).

[15] R. Casana and B. M. Pimentel, Mod. Phys. Lett. **A20**, 1933 (2005).

[16] W. E. Thirring and J. E. Wess, Ann. Phys. 27, 331 (1964).

[17] W. Thirring, Ann. Phys. (N. Y.) **3**, 91 (1958).

[18] C. R. Hagen, Nuovo Cimento **B51**, 169 (1967).

[19] B. Klaiber, in *Lectures in Theoretical Physics 1967*, eds. A. Barut and W. Britten (Gordon and Breach, New York, 1968), p. 141.

[20] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **57**, 580 (1977).

[21] R. Casana, Int. J. Mod. Phys. **A20**, 7129 (2005).

[22] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); *ibid.* **124**, 246 (1961)

[23] M. Faber and A. N. Ivanov, Eur. Phys. J. **C20**, 723 (2001).

[24] R. Jackiw, *Topological Investigations of Quantized Gauge Theories*, *in Relativity, Groups and Topology II* (Les Houches 1983), eds. B.S. DeWitt and R. Stora, North Holland, Amsterdam, 1984.

[25] R. Banerjee, Z. Phys. **C 25**, 251 (1984); Phys. Rev. **D 37**, 3778 (1988).

[26] P. Mitra and A. Rahaman, Ann. Phys. **249**, 34 (1996).

[27] C.R. Hagen, Nuovo Cimento **51B**, 169 (1967).

[28] R. Jackiw and K. Johnson, Phys. Rev. **182**, 1459 (1969).

[29] K. Jonhson, Nuovo Cimento **20**, 773 (1961).

[30] M. Faber and A. N. Ivanov, *On the solution of the massless Thirring model with fermion fields quantized in the chiral symmetric phase*, hep-th/0112183.

[31] K. Kondo, Nucl. Phys. **B450**, 251 (1995).

[32] K. Kondo, Prog. Theor. Phys. **98**, 211 (1997).

[33] T. Itoh, Y. Kim, M. Sugiura and K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. **93**, 417 (1995).