



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.009/09

Termodinâmica de Quase-Partículas

Fernando Gonçalves Gardim

Orientador

Profa. Dra. Fernanda Monti Steffens

Setembro de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

Aos meus pais, que contribuíram de diversas formas para eu estar e ser, onde estou e sou. À minha irmã, por seu apoio e carinho.

À minha orientadora Fernanda, que me ajudou a reencontrar o *norte* por inúmeras vezes, sem impor seu ponto de vista, ajudando-me a encontrar meu caminho; que me ajudou a ser um questionador mais eficiente, e não apenas um cumpridor de tarefas.

À Fapesp, já que através de seu apoio pude me dedicar exclusivamente ao estudo, entre idas e vindas.

Aos amigos feitos no IFT, que foram mais que colegas de instituto, e não citá-los aqui seria uma completa injustiça: Leandro, Genilson, Hiroshi, Bonin, Búfalo, Edinho.

Aos grandes amigos: a meu compadre Geová, por sua amizade e visão ímpar do mundo. Ao Caco, que quando realmente precisei de uma ajuda prática e não apenas teórica, esteve por perto. Ao *grande* Tilles, um amigo à moda antiga.

Ao Gaúcho, vulgo Ricardo, com quem pude discutir sobre meu trabalho, participando desta forma diretamente no processo evolutivo desta tese.

À família *flanela*, que são inacreditáveis e inimagináveis.

À minha esposa, companheira, amiga, musa, fortaleza, inspiradora, ELV, ∞ Taís. Esta tese é dedicada à você

Resumo

O problema da inconsistência termodinâmica do modelo de quase-partículas foi parcialmente resolvido por Gorenstein e Yang há quase duas décadas. Entretanto sua solução mostra-se como uma solução particular para o problema da inconsistência termodinâmica. Este trabalho apresenta a solução geral para o modelo de quase-partículas a partir da generalização da solução de Gorenstein-Yang, estudando-se assim o modelo de quase-partículas em dois cenários diferentes: para o caso onde este é formado apenas por bósons, e quando é formado por bósons mais férmions e anti-férmions. Para o caso bosônico assume-se os bósons não-massivos, em um sistema à temperatura finita e potencial químico nulo, obtendo então sua solução termodinâmica geral. A partir desta utiliza-se uma solução particular para descrever a matéria desconfinada, o Plasma de Glúons, e compara-se esta solução com os dados provenientes de QCD na rede para pressão, entropia e energia interna. Estuda-se também a solução geral para um sistema à temperatura e potencial químico finitos formado por férmions, anti-férmions e bósons. O limite assintótico destas soluções também é analisado. Uma solução particular, análoga à utilizada no caso apenas de bósons, é utilizada para descrever os resultados de QCD na rede, para um Plasma de Quarks e Glúons. Este formalismo permite descrever o Plasma de Quarks e Glúons em toda região de desconfinamento. Seja no caso bosônico, ou no caso de bósons e férmions, encontra-se uma solução mais simples que a de Gorenstein-Yang para descrever o QGP.

Palavras Chaves: Quase-partícula; termodinâmica; plasma de quarks e glúons.

Áreas do conhecimento: Física das partículas elementares; mecânica estatística.

Abstract

The thermodynamics quasi-particle problem was partially solved by Gorenstein and Yang. Nevertheless, its solution is a particular solution of the thermodynamic inconsistency problem. In this work the thermodynamics of the quasi-particle model is studied from a generalization of the Gorenstein-Yang solution. This work is split in two parts: For the case of finite temperature and vanishing chemical potential for non-massive bosons, and for finite temperature and chemical potential of anti-fermions, fermions plus bosons. For the boson case is computed the thermodynamical general solution and from it, a particular solution it is used to describe the deconfined matter, Gluon Plasma. This solution is compared to QCD lattice data, thus the pressure, entropy and internal energy can be fitted. Also is developed the solution for a system composed by fermions, anti-fermions and gluons. An analogue solution to boson case it is used to describe the real case, the Quark Gluon Plasma. It is shown that solution is able to describe the lattice data. This general formalism allows study the QGP in all deconfined region. Whether in the bosonic case, or in bosonic plus fermionic case, it is found a simpler solution than the Gorenstein-Yang.

Tudo se finge, primeiro; germina autêntico é depois.
João Guimarães Rosa

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Sumário deste trabalho	9
2	Mecânica Estatística	11
2.1	Ensemble Canônico	11
2.2	Ensemble Grande Canônico	13
3	Modelo de Quase-Partículas no Plasma de Quarks e Glúons	16
3.1	QCD Perturbativa e Quase-Partículas	16
3.2	Inconsistência Termodinâmica	17
3.3	Solução de Gorenstein-Yang	18
3.3.1	Gás Ideal de Quase-Partículas	21
4	Plasma de Quase-Glúons: Tratamento Geral	27
4.1	Plasma de Quase-Glúons	27
4.1.1	Solução 1: Gorenstein-Yang	31
4.1.2	Solução 2: Bannur	31
4.1.3	Solução 3: $\alpha = 0$	32
4.2	Gás Ideal de Quase-Partículas	33
4.2.1	A Solução $\alpha = 0$	34
4.2.2	Comportamento Assintótico para Soluções $\alpha \neq 0$	37
4.3	Analisando as Soluções Físicas	40
5	Termodinâmica de Quase-Partículas a Potencial Químico Finito	43
5.1	Tratamento Geral	44
5.2	Funções Termodinâmicas para $\alpha \neq 0$	46
5.2.1	Solução 1: Gorenstein-Yang	47
5.2.2	Solução 2: Bannur	49
5.2.3	Comportamento Assintótico das Soluções	49
5.3	A Solução $\alpha = 0$	53
5.4	Comparação com QCD Perturbativa	55
5.5	QCD na Rede e o Modelo de Quase-Partícula	57

6	Conclusão e Perspectivas	59
A	Integrais Bosônicas	62
A.1	Algumas Integrais	66
B	Integrais Fermiônicas	67
	Referências	72

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas duas décadas a matéria fortemente acoplada em condições extremas de temperatura e densidade tem sido objeto de intenso estudo pela comunidade científica [1, 2]. A possibilidade de que esta matéria predominou no Universo até 10^{-5} segundos após o Big Bang, a possibilidade de descrever o núcleo de algumas estrelas de nêutrons, e recentes experimentos com colisões ultrarelativísticas de íons pesados, são alguns dos motivos pelos quais esta área tornou-se de grande interesse (veja, por exemplo, os trabalhos [1, 2, 3, 4]). A teoria que descreve as interações fortes é a Cromodinâmica Quântica (QCD quantum chromodynamics), que tem como grupo de calibre o grupo de cor $SU(3)$, com 8 bósons de calibre, *glúons*, que carregam cargas de *cor*. As partículas de matéria, *quarks*, são de seis espécies: *up*, *down*, *strange*, *charm*, *beauty* e *top*, sendo todas fermiônicas de spin $1/2$. Uma propriedade fundamental da QCD que será de grande utilidade no desenvolvimento e entendimento deste trabalho, reside no fato de que sua constante de acoplamento cresce a medida que a energia decresce o que, supostamente, leva ao confinamento de partículas de cor em hádrons. Por outro lado, o acoplamento decresce a medida que a energia cresce, o que leva ao regime de liberdade assintótica, onde quarks e glúons comportam-se como partículas livres a menos de correções perturbativas no acoplamento, possibilitando estudá-las através de métodos perturbativos da QCD. Além de entender a interação forte por meio da QCD, diversas outras propriedades foram descobertas ao longo dos anos. Hádrons possuem um tamanho intrínseco, com raio $r_h \simeq 1fm$, permitindo aproximar o volume ocupado por este ao de uma esfera, $V_h \simeq (4\pi/3)r_h^3$. Isto sugere uma densidade crítica para a matéria hadrônica [5], com $n_c = 1/V_h \simeq 1.5n_0$, onde $n_0 \simeq 0.17fm^{-3}$ é a densidade da matéria nuclear. As interações hadrônicas, por sua vez, fornecem uma abundante produção de ressonâncias; o número de espécies hadrônicas $\rho(m)$ cresce exponencialmente com a massa de ressonância m , assim $\rho(m) \sim \exp(bm)$. Do ponto de vista da termodinâmica hadrônica, o crescimento exponencial implica em um limite superior para a temperatura hadrônica, $T_c = 1/b \simeq 150 - 200$ MeV [6].

O que acontece com os hádrons quando a temperatura e a densidade são maiores que os valores limites? À luz da QCD os hádrons são estados ligados de cor neutra, constituídos

por partículas pontuais coloridas, os quarks e os glúons, genericamente chamados de partons. Pela liberdade assintótica da QCD, o hádron a altas temperaturas e/ou altas densidades seria um sistema de quarks e glúons fracamente interagentes, passando assim a um estado descrito pelos graus de liberdade partônicos apenas [7], o chamado Plasma de Quarks e Glúon (QGP).

O diagrama de fases esperado para a matéria hadrônica, descrito em termos da temperatura e do potencial químico bariônico μ_B , pode ser apresentado conforme o diagrama exposto na Fig. 1.1, onde em primeira aproximação pode-se tomar o diagrama de fases apenas com duas fases: a do plasma de quarks e glúons e a hadrônica. A partir desta representação pode-se obter algumas propriedades da transição de fase, como a temperatura e a densidade críticas, apenas utilizando um modelo simples composto por partículas não-interagentes. Primeiramente será considerada a transição no caso do potencial químico bariônico nulo, $\mu_B = 0$. A matéria hadrônica a baixas temperaturas é composta principalmente por mésons leves, mais precisamente de pions. Já a temperaturas suficientemente altas a matéria hadrônica será composta apenas por quarks e anti-quarks, em igual quantidade, e por glúons, formando assim o QGP. Assumindo que tanto em baixas temperaturas, hádrons, como em altas temperaturas, QGP, não há interações entre os constituintes, pode-se calcular a energia e a pressão destes gases. Assim para um sistema composto por pions não-interagentes e não massivos, a densidade de energia e_π e a pressão P_π são dadas por:

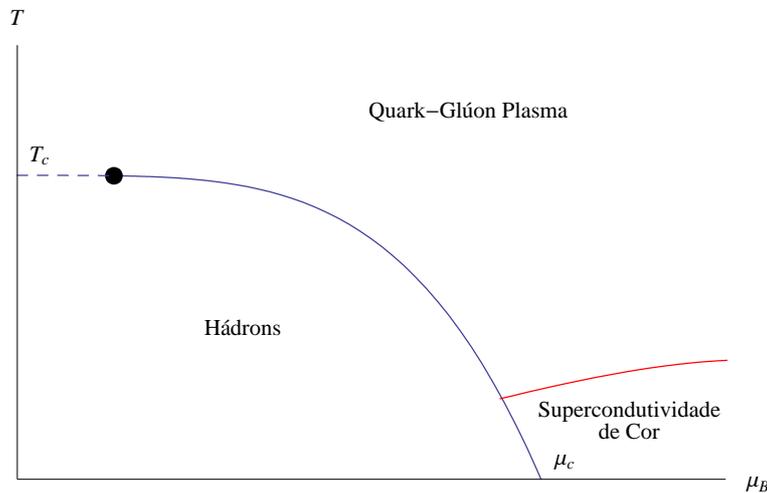


Figura 1.1: Diagrama de fases esperado para matéria hadrônica, em função da temperatura T e do potencial químico μ_B . O ponto representa um possível ponto crítico [8, 9].

$$e_\pi = 3 \cdot \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad P_\pi = 3 \cdot \frac{\pi^2}{90} T^4,$$

onde o fator 3 é o fator de degenerescência do pión (π^+ , π^- , π^0). No caso do QGP, a energia e a pressão são:

$$e_{QGP} = 37 \cdot \frac{\pi^2}{30} T^4 + B, \quad P_{QGP} = 37 \cdot \frac{\pi^2}{90} T^4 - B,$$

onde o fator 37 corresponde à soma da degenerescência dos glúons 8×2 , correspondente a 8 cores e 2 graus de polarização, e da degenerescência dos quarks e anti-quarks $\frac{7}{8} \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$, que corresponde a 2 spins, 2 sabores, q e \bar{q} , e três cores. O fator $7/8$ é proveniente da estatística de Fermi-Dirac. A diferença entre o vácuo físico e o estado de mais baixa energia para quarks e glúons em um meio é expressa pela quantidade B , a qual foi inicialmente introduzida no modelo MIT de sacola para os hádrons [10] - *MIT bag model* - cuja função era atuar como uma força de restauração, necessária para equilibrar a pressão gerada pelo termo cinético dos quarks dentro da sacola.

Como é conhecido da termodinâmica, o sistema escolhe o estado em que a energia livre é menor e, portanto, o estado de maior pressão. Esta propriedade pode ser observada no modelo de sacola através da Fig. 1.2. Desta forma observa-se que há uma temperatura de transição, que pode ser calculada a partir da pressão de sacola

$$T_c = \left(\frac{45}{17\pi^2} \right)^{1/4} B^{1/4} \approx 0.72 B^{1/4}.$$

Por outro lado pode-se expressar o confinamento hadrônico através do modelo de sacola, onde os quarks e os glúons estão confinados dentro desta. Grosseiramente, pode-se dizer que a energia da sacola $E(R)$ é expressa como

$$E(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{C}{R},$$

onde R é o raio da sacola, e C/R é o termo de energia cinética devido aos quarks. A energia da sacola é obtida quando a energia é mínima. Assim minimizando-a com respeito a R encontra-se $E(R_0) = 4V_0 B$, onde o volume de equilíbrio é $V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3$. No caso do próton com raio $R_0 \approx 1$ fm e energia $E_0 \approx 1$ GeV, a densidade de energia é $E_0/V_0 \approx 0.7$ GeV/fm³, que corresponde a constante de sacola $B \approx 175$ MeV/fm³, ou $B^{1/4} \approx 192$ MeV.

A temperatura de desconfinamento pode ser investigada a partir deste resultado. Tomando $B^{1/4} \approx 200$ MeV encontra-se

$$T_c \approx 150 \text{ MeV},$$

que está de acordo com o limite termodinâmico para o crescimento de espécies hadrônicas. Esta simples estimativa da temperatura de desconfinamento também está próxima do valor obtido por cálculos de QCD na rede, $T_c \approx 170 - 190$ MeV [11, 12]. A entropia, ou

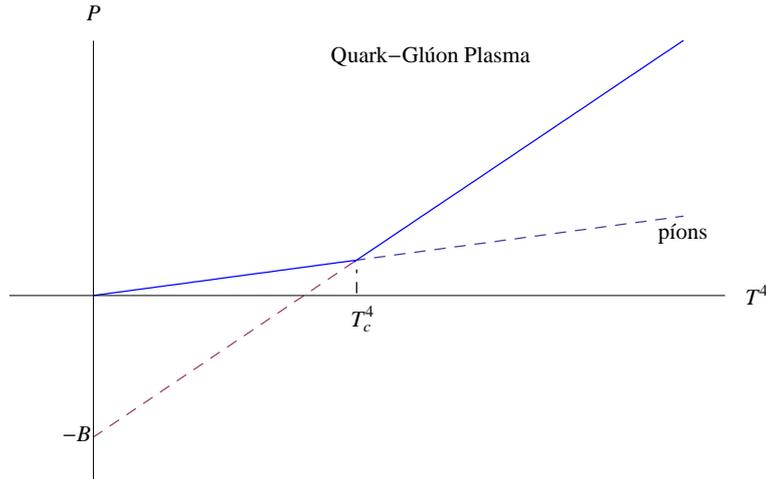


Figura 1.2: A pressão de píons não-massivos, comparada com a pressão do QGP.

densidade de entropia s , também pode ser definida nos casos confinado e desconfinado, apenas pela utilização da relação termodinâmica $s = \partial P / \partial T$. Assim

$$s_\pi = \frac{2\pi^2}{15} T^3, \quad s_{QGP} = \frac{74\pi^2}{45} T^3$$

Note que diferentemente da pressão e da energia do QGP, a entropia não possui contribuição explícita da constante de sacola. Entretanto esta entra na temperatura de desconfinamento, que por sua vez define a descontinuidade que ocorre na transição para a entropia, Fig. 1.3.

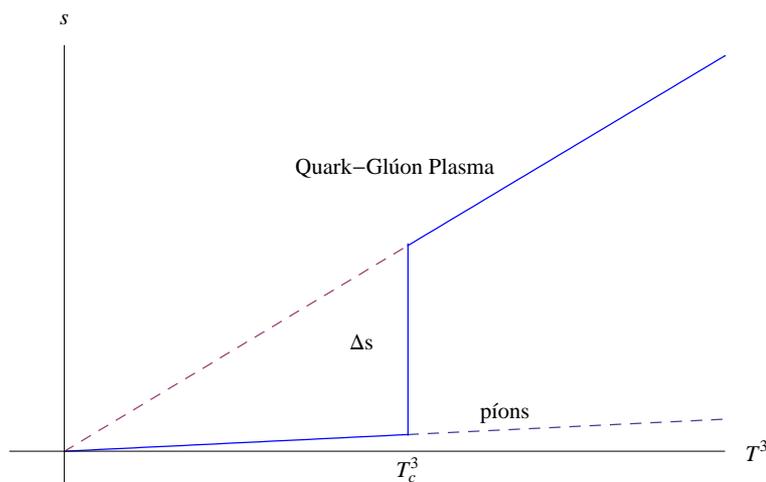


Figura 1.3: Densidade de entropia, e o salto Δs na temperatura de transição, proporcional ao aumento de graus de liberdade acessíveis ao sistema.

Da mesma forma que a entropia é descontínua, pode ser observado que a energia não é contínua na temperatura de desconfinamento, Fig. 1.4. Utilizando as respectivas expressões para a energia e a entropia nas duas regiões, obtém-se que $\Delta e = T_c \Delta s$. Ambas as variações da energia e da entropia são proporcionais à variação de graus de liberdade acessíveis ao sistema. Através deste modelo simples constata-se que a transição ocorre quando a pressão total é aproximadamente nula, ou seja, quando a pressão devido à energia cinética dos quarks e glúons aproximadamente equilibra-se com a pressão de sacola. Assim, pode-se utilizar a condição de $P = 0$ como critério de mudança de fase, resultando na condição $T_c = \left(\frac{90}{37\pi^2}\right)^{1/4} B^{1/4} \approx 0.70B^{1/4}$, que é muito próximo do encontrado anteriormente. Este resultado permite estender as conclusões de $\mu_B = 0$ para o caso de potencial químico finito, onde pode-se considerar que a transição para μ_B e T finitos ocorre quando a pressão *cinética* é igual à pressão de sacola, $P(T_c, \mu_c) = B$, onde P é

$$P(T, \mu_B) = \frac{37\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{9} \mu_B^2 T^2 + \frac{1}{81\pi^2} \mu_B^4.$$

Com esta definição pode-se obter a linha de transição apresentada na Fig. 1.1.

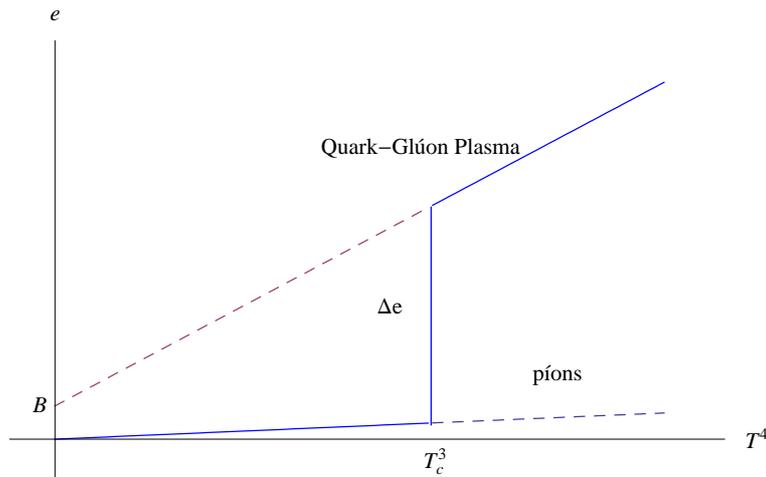


Figura 1.4: Densidade de energia, e e a descontinuidade Δe que ocorre na temperatura de desconfinamento.

Nos capítulos seguintes serão apresentados resultados obtidos através de métodos computacionais para a QCD, a chamada QCD na rede, entretanto pode-se adiantar que o modelo de sacola reproduz algumas das características gerais do QGP obtida pela QCD na rede, como por exemplo o rápido crescimento da densidade de energia e entropia após a temperatura de transição. Como visto, isto deve-se ao aumento dos graus de liberdade acessíveis ao sistema. Este modelo simples não permite precisar as funções termodinâmicas conforme os resultados da rede, nem determinar a natureza da transição de

fase, já que por construção obtém-se a transição de fase de 1ª ordem. A transição de fase ainda é motivo de muitas discussões na literatura [12].

O modelo MIT de sacola possui algumas propriedades interessantes, que inspiraram modelos de quase-partículas para descrever o plasma, e conseqüentemente o presente trabalho. Tal modelo é termodinamicamente consistente, ou seja, suas funções termodinâmicas satisfazem todas as relações termodinâmicas, como por exemplo as relações de Maxwell. Contudo, para isso acontecer o modelo foi cuidadosamente construído. Por exemplo, se ao invés da pressão fosse alterada a entropia por um termo constante não haveria consistência, já que P e S relacionam-se através de uma derivada parcial $s = \partial P / \partial T^*$ e, portanto, não há como aparecer um termo constante em S a partir de um P sem termo extra. Inteligentemente, para uma primeira modificação do caso em que o sistema pode ser tratado como um gás ideal, faz-se uso de um termo adicional constante em específicas funções termodinâmicas de forma a garantir a consistência do modelo. Quando este termo adicional é constante, não depende por exemplo de T ou μ , a única forma de garantir a consistência é modificar as funções da maneira MIT acima. Visando uma descrição mais quantitativa que qualitativa do QGP introduziu-se o modelo de quase-partícula, que será apresentado no capítulo 3, construído sob as idéias do modelo de sacola, onde apenas a pressão e a energia interna são modificadas devido a contribuição do vácuo. Não há outro motivo além da consistência termodinâmica para dizer que a entropia não deva ser modificada. Assim, não deve-se perseguir estas particularidades e sim guiar-se apenas pelo princípio de que o modelo deva ser termodinamicamente consistente.

Há outras ferramentas teóricas, além do modelo de sacola, capazes de descrever aproximadamente o QGP. Os métodos perturbativos da QCD, entre todas as alternativas de cálculos, são os mais precisos a altas energias. Há uma grande variedade destes, como por exemplo a teoria estrita de perturbação, que através de muito esforço calculou algumas quantidades termodinâmicas até a ordem de $g^6 \ln(1/g)$ [13, 14]. Infelizmente estas séries perturbativas mostram-se fracamente convergentes [13, 14, 15], veja Fig. 1.5, sendo razoáveis apenas para temperaturas extremamente altas, da ordem de 10^5 GeV . Da liberdade assintótica da QCD esperaria-se que quando $T \gg T_c$, o QGP comportar-se-ia como um gás ideal de quarks e glúons, contudo a série perturbativa tende vagarosamente a esta perspectiva. Uma forma de contornar este problema dá-se através da reorganização das séries perturbativas. Algumas destas ressomos são baseadas na ação efetiva de Hard-Thermal-Loop (HTL) [16], conduzindo alternativamente à então chamada teoria de perturbação de HTL [17], ou então baseadas na aproximação de *2-loop Φ -derivable* [18]. Esta última técnica assume quase-partículas fracamente interagentes provenientes dos propagadores de HTL, sendo capaz de reproduzir razoavelmente bem os resultados da rede.

As simulações computacionais da QCD, que representa uma alternativa teórica para cálculos envolvendo a matéria fortemente interagente, é capaz de gerar resultados quan-

* s é a densidade de entropia.

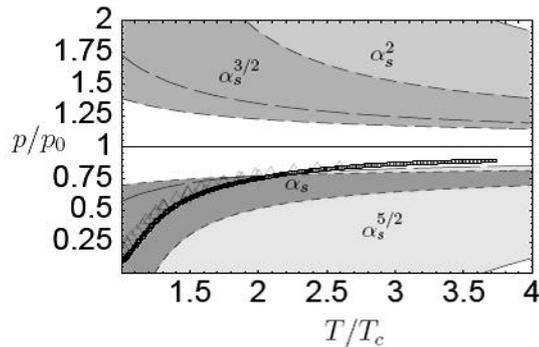


Figura 1.5: Figura retirada da Ref. [34]. Mostra a contribuição de várias ordens de teoria de perturbação para a pressão de QGP.

titativos para a matéria desconfiada à energias intermediárias, e próxima à região de transição. Estes resultados por muitas vezes são encarados como *experimentais*, servindo como base para o ajuste de outras curvas téóricas. Inicialmente, as simulações eram predominantemente para teoria de puro calibre, e pouco era feito para quarks. O motivo para isto deve-se principalmente ao tempo consumido pela simulação com férmions frente ao de bósons. Contudo, nos últimos anos muito se realizou para quarks e potenciais químicos diferentes de zero, devendo seu avanço principalmente à técnica de perturbação em séries de Taylor [12, 19, 20], que reduziu os cálculos à obtenção dos coeficientes de cada termo da série perturbativa. Resultados recentes de rede sugerem fortemente que realmente existe uma transição de fase dos hádrons a baixa temperatura para uma fase a altas temperatura, sendo esta contínua e não-singular [12], ocorrendo em torno de $T_c \simeq 170 - 190 \text{ MeV}$ [11, 12]. Entretanto, a análise da transição de fase para o caso do potencial químico finito é muito mais complicada, havendo muita discussão nesta área [2, 12], não havendo um consenso sobre a transição, e se esta é de primeira ou segunda ordem.

Os efeitos não-perturbativos da QCD próximo à região de desconfiamento torna os cálculos analíticos extremamente difíceis de serem realizados. A incapacidade atual de calcular analiticamente grandezas termodinâmicas a partir da QCD na região de desconfiamento, conduz à utilização de modelos fenomenológicos para a descrição do QGP. Esta formulação pretende cobrir não apenas a região de transição, mas toda a região do QGP, sendo que o modelo de quase-partículas é um dos modelos fenomenológicos que obteve sucesso em descrever os dados de QCD na rede [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27] sobre uma vasta extensão de temperaturas (à $\mu = 0$). Mais recentemente, o modelo de quase-partícula para o plasma de quark e glúon plasma (qQGP) foi aplicado ao caso de μ finito [28, 29, 30, 31], levando a uma satisfatória descrição dos dados da rede.

O modelo de quase-partícula para o QGP baseia-se no fato de que à altíssimas energias a matéria acoplada através da interação forte deve ser assintoticamente livre. Assume-se

então um modelo cujas partículas são massivas e não-interagentes. Contudo, estas massas são dependentes de certas propriedades termodinâmicas do sistema, como por exemplo a temperatura e o potencial químico. As massas das partículas são os ingredientes fundamentais deste modelo, pois permitem acomodar, de certa forma, os efeitos da interação forte. Para isto é necessário descrever a massa com a ajuda de alguns parâmetros fenomenológicos, capacitando o modelo descrever os resultados da rede sobre uma ampla variedade de temperaturas [23, 24, 25]. De fato, o modelo de quase-partícula tem a pretensão de descrever toda a matéria desconfiada, desde T_c até $T \rightarrow \infty$, e desde μ_c até $\mu \rightarrow \infty$.

O problema com os modelos de quase-partículas está no fato de que as relações termodinâmicas calculadas a partir das funções termodinâmicas da mecânica estatística usual [32], onde utiliza-se as relações de dispersão das quase-partículas, não são satisfeitas. Diferentemente do caso de partículas, massas dependentes de T e/ou μ interferem diretamente no cálculo das derivadas existentes nas relações termodinâmicas. O primeiro trabalho a estudar sistematicamente o problema da consistência e resolvê-lo para T finito mas potencial químico nulo, foi o de Gorenstein e Yang [33]. Neste formalismo foi construído uma hamiltoniana efetiva composta por uma parte representando um gás ideal, e outra representando contribuições do vácuo. Este termo extra levou à uma modificação na pressão e na energia interna do sistema, mas manteve a entropia e a densidade de partículas inalteradas. Desta forma, obteve-se um qQGP termodinamicamente consistente. A maioria dos trabalhos na literatura são baseados neste tratamento [34]. Nos últimos anos, no entanto, muitos autores voltaram a atenção à consistência termodinâmicas do modelo de quase-partículas, por exemplo na Ref. [35], os autores construíram uma hamiltoniana efetiva, H_{eff} , mas impuseram que a variação do valor médio da hamiltoniana com relação à μ e T fosse zero. Como resultado, obtiveram o mesmo resultado encontrado em [33]. Por outro lado, em [36], a massa da quase-partícula é tratada como uma variável independente. Neste caso a termodinâmica é tida como consistente, já que uma nova quantidade termodinâmica foi introduzida. Na Ref. [26] apresentou-se outra possibilidade, mantendo a energia interna como a de um gás ideal e alterando a entropia e a pressão de maneira a deixar a termodinâmica consistente.

Além dos métodos teóricos utilizados para descrever a matéria fortemente acoplada às condições extremas há, por outro lado os resultados experimentais. Pode-se estudar indiretamente esta matéria através de observações astrofísicas e cosmológicas, como a observação do diagrama de fases de estrelas compactas [37], ou pode-se estudá-la através de experimentos realizados em terra, como as colisões de íons pesados ultrarelativísticos. Dentre este último há dois experimentos principais: um realizado na Suíça/França, no CERN (*Centré Européenne pour la Reserche nucléaire*), que entrou em funcionamento em setembro de 2008 e por um grave problema foi fechado, o chamado Grande Colisor de Hádrons (LHC - Large Hadron Collider). O retorno do funcionamento do LHC está previsto para setembro de 2009, devendo este operar com uma energia de 7 TeV por

feixe, energia muito acima da transição de fase teórica. O outro experimento que está operacional desde 1999 e localiza-se nos EUA, mais precisamente no BNL (Brookhaven National Laboratory), tem produzido uma enorme quantidade de dados para colisões de íons pesados, núcleo-núcleo, no chamado RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider). Alguns dos resultados do RHIC, indicam que o plasma de quarks e glúons já foi produzido no regime de altíssimas temperaturas e potencial químico nulo [38].

Curiosamente, os dados provenientes do RHIC podem ser descritos através de modelos hidrodinâmicos [39]. Para tal é necessário a equação de estado EoS, abrangendo tanto a fase hadrônica como a da QGP. A EoS da fase hadrônica é comumente descrita pelo modelo hadrônico ressonante gasoso (hadronic resonance gas model) [6], que possui uma boa concordância com os dados de rede [12, 40]. Para a fase desconfinada há alguns modelos sendo implementados, como os previamente mencionados HTL e 2-loop Φ derivable, mas nenhum destes descreve a matéria desconfinada em toda região de desconfinamento. Assim sendo, o modelo de quase-partícula apresenta-se também como um modelo que possibilita o estudo da matéria formada nos grandes aceleradores. A idéia inicial de que o modelo de quase-partículas descreveria o QGP por causa de seu comportamento gasoso, parece estar refutado pelos resultados obtidos pelo RHIC, onde o QGP parece comportar-se como um líquido. Contudo, estudos recentes mostram que o modelo de quase-partícula pode descrever um sistema do tipo líquido, com uma viscosidade extremamente baixa [41].

Perante todas estas particularidades do qQGP, e das variedades que o modelo abrange, uma questão pode ser levantada: haverá uma única solução para a consistência termodinâmica do modelo de quase-partículas, ou as soluções conhecidas na literatura são soluções particulares de uma solução geral? Este trabalho consiste no estudo do problema fundamental do modelo de quase-partícula, isto é, o que acontece com a mecânica estatística e a termodinâmica de um sistema composto por quase-partículas.

1.1 Sumário deste trabalho

No capítulo 2 apresentar-se-á uma breve revisão da mecânica estatística em dois ensembles diferentes, canônico e grande canônico, juntamente com a termodinâmica necessária para descrever estes dois ensembles. No capítulo 3 introduzir-se-á o modelo de quase-partículas, mostrando que uma aplicação direta deste modelo acarreta inconsistências termodinâmicas. Além disto, mostrar-se-á de que forma este problema foi solucionado pela primeira vez, através de uma analogia direta com o modelo MIT de sacola. O capítulo 4 consiste no desenvolvimento da solução geral desta inconsistência para um sistema onde o potencial químico é nulo, mostrando que as soluções anteriores para este problema, como por exemplo a solução de Gorenstein-Yang e de Bannur, são casos particulares da solução geral. Uma das soluções particulares será utilizada para estudar o plasma composto apenas por glúons, onde esta mostra-se mais simples de ser calculada analiticamente do que todas as outras soluções, e por fim os cálculos são comparados

aos resultados provenientes de QCD na rede. O comportamento assintótico de todas as soluções também é estudada. No capítulo 5 generalizar-se-á o tratamento desenvolvido no capítulo 4, mas agora para potencial químico finito. A solução geral será analisada para o limite assintótico, temperaturas e potenciais químicos muito maiores que a temperatura e o potencial químico de transição, e comparada com o resultado perturbativo. A mesma classe de solução estudada no capítulo 4 será estudada detalhadamente para um plasma de quarks e glúons, e comparada com os resultados da rede. Por fim no capítulo 6 a conclusão e as perspectivas deste trabalho serão fornecidas. Nos apêndices A e B são calculadas as integrais necessárias para a análise teórica dos casos particulares.

Capítulo 2

Mecânica Estatística

Neste capítulo será feita uma breve revisão de como obter as funções termodinâmicas para um sistema físico a partir da Mecânica Estatística. Este capítulo é de suma importância no desenvolvimento do trabalho, visto que o procedimento e o enfoque utilizados aqui fornecerão as idéias e os ingredientes básicos à solução do problema geral da consistência termodinâmica em um sistema composto por quase-partículas.

2.1 Ensemble Canônico

Um sistema físico *fechado* em contato com um reservatório térmico* à temperatura T alcançará o equilíbrio quando estiver à mesma temperatura T que o reservatório. Um sistema nestas condições pode ser descrito por variáveis diferentes das *naturais* - entende-se por variáveis naturais as variáveis de estado extensivas como entropia S , volume V , número de partículas N , energia interna U e etc - que são utilizadas preferencialmente para descrever um sistema isolado. Por exemplo, a entropia é útil no caso de um sistema isolado pois auxilia a determinar o estado de equilíbrio: segunda lei da termodinâmica.

Contudo para o caso de um sistema não isolado, que permanece à temperatura T e não troca partículas com o reservatório térmico, a entropia não desempenha o mesmo papel. Assim é interessante utilizar uma função de estado que auxilie encontrar o estado de equilíbrio deste sistema, e utilizar a temperatura como variável independente. A temperatura pode ser calculada como função das variáveis naturais a partir da relação $T = \partial U / \partial S|_{N,V}$. Já a variável termodinâmica útil para encontrar o estado de equilíbrio para uma transformação isotérmica é a *energia livre* ou *potencial de Helmholtz* A , que é mínima para esta situação. A partir da primeira lei da termodinâmica

$$dU = TdS - PdV,$$

*Assume-se o reservatório muito maior que o sistema a ser estudado.

e juntamente com a transformação de Legendre, as relações entre as diversas funções termodinâmicas são obtidas:

$$P = - \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_{T,N}, \quad S = - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_{V,N}, \quad A = U - TS, \quad (2.1)$$

onde P é a pressão. A terceira relação da Eq. (2.1) pode ser escrita como $A = -PV$. Para descrever a termodinâmica deste sistema, portanto, é fundamental determinar A como função de T , V e N .

Um sistema em equilíbrio térmico com um reservatório que possui número fixo de partículas, pode ser descrito pela mecânica estatística através do estudo do *ensemble canônico*. Para tal utiliza-se as propriedades microscópicas do sistema, como a posição espacial q , o momento p , e a hamiltoniana microscópica H que depende, aqui[†], exclusivamente de q e p .

O estudo da mecânica estatística dar-se-á inversamente ao caminho utilizado na maioria dos livros textos [32, 42]. Primeiro será desenvolvida a versão quântica da mecânica estatística, já que todos os sistemas devem obedecer as leis da mecânica quântica, e depois tomaremos o limite clássico da mesma. A função que relaciona as quantidades microscópicas com a realidade macroscópica dá-se através da função de partição. A função de partição no ensemble canônico Q_N é dada por

$$Q_N \equiv \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}}], \quad (2.2)$$

onde $\beta \equiv T^{-1}$, E_n é o auto-valor da energia do sistema, e cujo índice n indica a soma sobre a energia dos estados possíveis, e \hat{H} é o operador hamiltoniano do sistema. Para encontrar a relação entre mecânica estatística e termodinâmica, parte-se da hipótese: existe uma função termodinâmica que conecta a termodinâmica com as grandezas microscópicas através da igualdade $\phi = -T \ln Q_N$. Derivando-se esta relação com respeito a T , obtem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = - \ln Q_N - \frac{1}{T} \sum_n E_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Q_N}, \quad (2.3)$$

Utilizando o operador de distribuição canônico $\hat{\rho}_c$

$$\hat{\rho}_c = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Q_N}, \quad (2.4)$$

que está ligado ao valor médio de um operador

[†]No modelo de quase-partícula a hamiltoniana dependerá de certas variáveis termodinâmicas. O formalismo neste caso será visto posteriormente.

$$\langle G \rangle_c = \text{Tr}[\widehat{G}(q, p)\rho_c],$$

e identifica-se o termo de somatória do lado direito da Eq. (2.3) como o valor médio do operador \widehat{H} multiplicado por β^\ddagger . Este é exatamente igual à definição da energia interna U , a menos do fator β . Dessa forma a Eq. (2.3) é exatamente igual a terceira expressão da Eq. (2.1) com $\phi = A$, mostrando que a conexão entre termodinâmica e mecânica estatística dá-se através da relação

$$A = -T \ln Q_N. \quad (2.5)$$

Calculado a energia livre através da mecânica estatística, a termodinâmica do sistema está completamente definida. A conexão acima é válida tanto para o caso quântico como para o clássico. O limite clássico da teoria, dá-se quando o comprimento de onda de uma partícula é muito menor que a separação média entre as partículas, e acarreta algumas modificações nas expressões previamente vistas. A somatória, como na Eq. (2.2), deve ser alterada pelo espaço de fase clássico, dividido pela área mínima quântica no espaço de fase $\Delta p \Delta q = h$, corrigida pelo *fator de Gibbs*

$$\sum_n \rightarrow \int \frac{d^{3N} p d^{3N} q}{N! (2\pi)^{3N}},$$

e os operadores quânticos devem ser substituídos pelos análogos clássicos. Desta forma o valor médio para o ensemble canônico clássico é

$$\langle G \rangle_c = \int \frac{dq dp}{(2\pi)^{3N} N!} G(q, p) \rho_c.$$

Algumas outras funções termodinâmicas podem ser calculadas através do valor médio de certas quantidades microscópicas, por exemplo

$$U = \langle H \rangle_c,$$

$$S = -\langle \ln \rho_c \rangle_c$$

2.2 Ensemble Grande Canônico

Diferentemente do caso canônico, consideremos um sistema *aberto* em contato com um reservatório térmico e de partículas, ou seja, além do reservatório manter-se à temperatura

$$\ddagger \text{Tr}[\widehat{H} \widehat{\rho}_c] = \sum_n \langle \Phi_n | \widehat{H} \frac{e^{-\beta \widehat{H}}}{Q_N} | \Phi_n \rangle = \sum_n E_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Q_N} \langle \Phi_n | \Phi_n \rangle = \sum_n E_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Q_N}$$

T pode trocar partículas com o sistema. Neste caso o equilíbrio térmico e químico é alcançado quando o sistema em questão encontra-se à temperatura T , e com potencial químico constante μ . É interessante expressar as funções termodinâmicas deste sistema não em termos das variáveis naturais S e N , já que agora N pode variar, e sim em termos das variáveis intensivas T e μ . As transformações de Legendre necessárias são, $T = \partial U / \partial S|_{N,V}$ e $\mu = \partial U / \partial N|_{S,V}$, que irá determinar a função termodinâmica *grande potencial* ou *energia livre de Gibbs* Φ . Assim como no caso de um sistema isolado, onde S é maximizado, e no caso de um sistema em equilíbrio térmico com A minimizado, Φ desempenha um papel especial no caso de um sistema em equilíbrio térmico à potencial químico constante: ele é mínimo quando o equilíbrio é alcançado. A termodinâmica fornece as relações necessárias para obtenção das variáveis termodinâmicas a partir do grand potencial:

$$P = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T,\mu}, \quad S = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{V,\mu}, \quad N = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{T,V}, \quad \Phi = U - TS - \mu N. \quad (2.6)$$

A mecânica estatística fornece o grande potencial, permitindo assim a completa descrição termodinâmica do sistema. Para isto é necessário a função de partição grande canônica quântica

$$Z \equiv \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}], \quad (2.7)$$

onde o traço indica, além da soma sobre todos os estados possíveis, a soma sobre todos os números de partículas, $N = 0 \dots \infty$. A conexão entre o mundo macroscópico e o microscópico dá-se através da relação:

$$\Phi = -T \ln Z. \quad (2.8)$$

Para confirmar esta relação, primeiramente deriva-se Φ com relação a μ utilizando as Eqs. (2.7) e (2.8). O resultado é exatamente igual ao negativo do valor médio da quantidade N . Portanto mostra-se que a relação termodinâmica entre Φ e N expressa pela Eq. (2.6) é satisfeita. Contudo isto não garante a completa validade da Eq. (2.8). Para tal devemos mostrar que a relação entre Φ e S é satisfeita. Assim derivando a Eq. (2.8) com relação a T temos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = -\ln Z + \beta(\langle H \rangle_g - \mu \langle N \rangle_g), \quad (2.9)$$

cujos valores médios no ensemble grand canônico é definido como

$$\langle \hat{G} \rangle_g = \text{Tr}[\hat{G} \hat{\rho}_g],$$

onde o operador de distribuição grand canônica $\hat{\rho}_g$ é

$$\hat{\rho}_g = \frac{e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}}{Z}. \quad (2.10)$$

Para mostrar que o lado direito da Eq. (2.9) é igual ao negativo da entropia, e satisfazendo assim a quarta relação termodinâmica Eq. (2.6), utiliza-se o fato que a entropia deve ser igual ao negativo do valor médio do logaritmo natural da função de distribuição [43], $S = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle$. Utilizando as propriedades da função logaritma obtém-se

$$\langle \ln \hat{\rho}_g \rangle_g = -\ln Z + \beta \langle \hat{H} - \mu\hat{N} \rangle_g,$$

que é exatamente igual ao lado direito da Eq. (2.9), mostrando que a relação entre S e Φ é a mesma da Eq. (2.6). Dessa forma prova-se a conexão entre o grande potencial e a função de partição. A versão clássica do ensemble grande canônico é dada pela troca do operador quântico pelo seu análogo clássico, e o traço substituído por

$$\text{Tr} \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} \int \frac{d^{3N}p d^{3N}q}{N!(2\pi)^{3N}}.$$

Note que a partir da mecânica estatística pode-se calcular algumas grandezas termodinâmicas sem o auxílio de Φ e das relações termodinâmicas (2.6), como

$$\begin{aligned} U &= \langle H \rangle_g, \\ S &= -\langle \ln \rho_g \rangle_g, \\ N &= \langle N \rangle_g. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Modelo de Quase-Partículas no Plasma de Quarks e Glúons

O modelo de quase-partícula será estudado neste capítulo, mostrando sua importância e de que maneira foi introduzido para estudar a matéria desconfiada. A inconsistência termodinâmica existente ao utilizar o modelo de sacola, previamente estudado, concomitantemente com o modelo de quase-partículas será estudada, assim como a primeira solução deste problema. Este capítulo não baseia-se na descrição geral das soluções, mas apenas revisar os métodos utilizados para encontrar as expressões finais.

3.1 QCD Perturbativa e Quase-Partículas

Uma das principais propriedades da QCD refere-se ao seu comportamento à altas energias. Sabe-se a partir dos primeiros experimentos sobre a estrutura do próton nos anos de 1960 pelo SLAC (Stanford Linear Accelerator Center), que as funções de estrutura para o espalhamento elétron-núcleon possuem a propriedade de escalonamento (scaling property): ao invés das funções de estrutura dependerem da energia e do momento transferido, dependem, a menos de correções perturbativas, apenas de uma variável adimensional x . A explicação para este comportamento foi dada por Bjorken [47], que supôs o próton como composto de partículas livres a altíssimas energias, em primeira aproximação. Esta propriedade mostra-se importante ao estudar a matéria fortemente acoplada em condições extremas de temperatura e densidade. Desta forma, por analogia, pode-se estudar nesta região o QGP através de um sistema composto por quarks e glúons desconfiados, com a interação forte desprezível [7], inspirado na observação de que a QCD a altas energias possui a propriedade da liberdade assintótica. Por outro lado, ao diminuir a energia do sistema, a interação forte retoma sua importância e não pode ser desprezada. Estas propriedades motivam estudar o QGP através de um modelo conhecido por quase-partículas.

O modelo de quase-partícula para o plasma de quarks e glúons é um modelo fenomenológico que assume quase-partículas não-interagentes massivas, com o auxílio de poucos

parâmetros - como a massa térmica - para descrever os dados de QCD na rede e a matéria desconfiada, em uma ampla região de temperatura e potencial químico [23, 24, 25]. Este modelo extrapola a aplicabilidade existente em cálculos estritamente perturbativos, que valem apenas para altíssimas temperaturas, ou para certos cálculos em HTL, que valem apenas para $T > 20T_c$. Ele pretende descrever toda região da matéria desconfiada, desde a temperatura de desconfinamento T_c até $T \rightarrow \infty$. Contudo, uma aplicação direta deste modelo, isto é, utilizar as expressões da mecânica estatística para um sistema sem interação, apenas modificando a relação de dispersão de um gás ideal para uma relação de dispersão para um sistema de quase-partículas, acarreta na inconsistência termodinâmica das funções termodinâmicas.

3.2 Inconsistência Termodinâmica

Os primeiros trabalhos a utilizar a formulação de quase-partícula para descrever o plasma de quarks e glúons seguiam rigorosamente a definição de quase-partículas, tratando um sistema interagente simplesmente como um sistema livre, mas modificado, de forma que as massas das partículas acomodassem o efeito das interações na *inércia* destas partículas. Esta visão mostrou-se insuficiente para descrever o plasma, visto que as funções termodinâmicas não satisfaziam as relações termodinâmicas [21, 45]. Esta inconsistência pode ser observada no caso do estudo da termodinâmica de um sistema aberto à temperatura finita composto por bósons, com potencial químico idêntico a zero. Para calcular as funções termodinâmicas do sistema precisa-se das expressões de um gás ideal bosônico obtidas através da mecânica estatística. Utilizando a função de partição no ensemble grande canônico [32]

$$Z(V, T) = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}},$$

ou

$$\ln Z = - \sum_k \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) = - \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk 4\pi k^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}),$$

com $\omega^2 = k^2 + m^2(T)$ sendo a relação de dispersão, k o módulo do vetor momento dos bósons e m a massa, pode-se obter a termodinâmica do sistema. Utilizando os resultados do capítulo 2, como a definição do valor médio e a conexão entre a mecânica estatística e a termodinâmica, juntamente com os resultados padrões da mecânica quântica estatística, tem-se que

$$\Phi = V \frac{T}{2\pi^2} \int dk k^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}) = - \frac{V}{6\pi^2} \int_0^\infty dk n_b(k) \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}}, \quad (3.1)$$

$$U = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dk n_b(k) k^2 \sqrt{k^2 + m^2(T)}, \quad (3.2)$$

$$S = \frac{V}{2\pi^2 T} \int_0^\infty dk n_b(k) k^2 \frac{\frac{4}{3}k^2 + m^2(T)}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}}, \quad (3.3)$$

onde $n_b(k)$ é a função de distribuição bosônica dada por

$$n_b(k) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}.$$

A termodinâmica diz que a derivada de Φ com relação à T é igual ao negativo da entropia, Eq. (2.6). Derivando a primeira igualdade da Eq. (3.1) com respeito à temperatura, obtém-se

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial T} = \frac{V}{2\pi^2 T} \int_0^\infty dk k^2 n_b(k) \frac{\frac{4}{3}k^2 + m^2}{\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 n_b(k) \frac{\partial\omega}{\partial T},$$

que é diferente da entropia obtida pela mecânica estatística, Eq. (3.3). A origem da inconsistência está entrelaçada com a solução do problema para um plasma de quarks e glúons: ao utilizar o modelo de quase-partículas para estudar o plasma, necessita-se de uma massa efetiva para os partons, que pode depender tanto da temperatura como do potencial químico do sistema em questão. Contudo esta modificação introduz inconsistências termodinâmicas ao modelo, visto que as funções termodinâmicas são relacionadas entre si através de derivadas, cuja variação é sempre tomada com relação às variáveis independentes do ensemble. Assim no caso de um gás ideal de partículas, a relação de dispersão independeria de T e o segundo termo da derivada não existiria, e os dois formalismos, estatístico e termodinâmico, concordariam.

3.3 Solução de Gorenstein-Yang

O problema da inconsistência termodinâmica para um plasma formado de quase-partículas foi estudado por Gorenstein e Yang [33]. A solução proposta por eles foi de utilizar uma hamiltoniana efetiva, composta pela hamiltoniana livre de quase-partículas mais um termo adicional, de maneira que este termo satisfizesse duas condições: garantiria a consistência termodinâmica do modelo, e as relações entre mecânica estatística e termodinâmica seriam idênticas ao do caso de um gás ideal de partículas. Assim ao estudar o problema no ensemble grande canônico, eles assumiram que

$$\begin{aligned} \Phi &= -T \ln Z_e, \\ S &= -\langle \ln \hat{\rho}_e \rangle, \\ U &= \langle \hat{H}_e \rangle, \\ N &= \langle \hat{N} \rangle, \end{aligned}$$

onde o subscrito e refere-se à hamiltoniana efetiva, definida como

$$\widehat{H}_e = \sum_i \omega_i(k, c_1, c_2, \dots) \widehat{a}_i^\dagger \widehat{a}_i + \widehat{E}_0,$$

onde \widehat{E}_0 é o termo adicional que depende exclusivamente dos parâmetros c_1, c_2 e etc. Os parâmetros c_i 's podem ser por exemplo, a temperatura e o potencial químico. Utilizando estas definições eles puderam calcular um \widehat{E}_0 que satisfizesse as relações termodinâmicas, Eq. (2.6). Antes de prosseguir com a solução, é interessante notar uma propriedade do operador de distribuição grande canônico, Eq. (2.10). Ao adicionar um termo independente de q e p à hamiltoniana, o operador de distribuição grande canônico não sofre nenhuma alteração em sua forma, ou seja, o operador de distribuição grande canônico é invariante pela transformação

$$\widehat{H} \rightarrow \widehat{H} + \widehat{E}_0(c_1, c_2, \dots). \quad (3.4)$$

Isto pode ser observado a partir da definição de $\widehat{\rho}_g$

$$\widehat{\rho}_{g,e} = \frac{e^{-\beta(\widehat{H} + \widehat{E} - \mu \widehat{N})}}{Z_e} = \frac{e^{-\beta(\widehat{H} - \mu \widehat{N})}}{Z} = \widehat{\rho}_g.$$

A invariância ocorre pois a função de partição transforma-se como $Z_e = e^{-\beta \widehat{E}_0} Z$, sendo E_0 o autovalor do operador \widehat{E}_0 . Apenas pela invariância do operador de distribuição conclui-se que tanto a entropia como o número de partículas possuem a mesma forma que no caso de um gás ideal. No entanto o grande potencial e a energia interna terão um termo extra às expressões do gás ideal. A obtenção de \widehat{E}_0 é simples, mas antes de encontrá-la pode-se prever a equação que regerá a consistência termodinâmica. Como S e N não possuem termos adicionais* mas Φ possui, e sendo que as relações termodinâmicas relacionam este último com os dois primeiros através de derivadas parciais com relação a T e μ , tem-se que as derivadas de Φ com relação aos parâmetros c_i 's deverão ser idênticos a zero. Por estas condições temos que

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial \Phi}{\partial T} = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} \Big|_{\{\mu, c_i\}} - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial T} = -\langle \ln \widehat{\rho} \rangle, \\ N &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \Big|_{\{T, c_i\}} - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial \mu} = -\langle N \rangle. \end{aligned}$$

Como os parâmetros c_i 's são linearmente independentes, mas dependentes de T e μ , e as derivadas de Φ com relação a T e μ com c_i fixo são iguais a $-S$ e a $-N$, respectivamente, temos que a somatória deve ser igual a zero. Assim, obtém-se

*O termo adicional refere-se às expressões de um gás ideal.

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} \right|_{\{T, c_j, \dots\}} = 0, \quad j \neq i. \quad (3.5)$$

Como o grande potencial utilizado por Gorenstein e Yang é

$$\Phi = -T \ln Z_e = -T \ln(e^{-\beta E_0} Z) = E_0 - T \ln Z,$$

a Eq. (3.5) reduz-se a

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} \right|_{\{T, c_j, \dots\}} = \frac{\partial E_0}{\partial c_i} + \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \frac{\partial \hat{H}}{\partial c_i} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Com este resultado obtêm-se o termo adicional E_0 que foi introduzido na hamiltoniana de forma a preservar a consistência termodinâmica do modelo de quase-partículas. O termo encontrado por Gorenstein-Yang foi

$$\frac{\partial E_0}{\partial c_i} = -\frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \frac{\partial \hat{H}}{\partial c_i} \right). \quad (3.7)$$

Esta solução foi apresentada seguindo as idéias do trabalho original de Gorenstein e Yang [33]. Contudo existe uma forma análoga de apresentá-la que ajuda a aprofundar o entendimento desta solução. Este trabalho foi desenvolvido por Biro, Shanenko e Toneev [35], cuja idéia central era de solucionar o problema da consistência termodinâmica através de uma propriedade da mecânica estatística usual: a variação da hamiltoniana com relação à temperatura e/ou ao potencial químico possui valor esperado igual a zero. Desta forma, com o auxílio de uma hamiltoniana efetiva eles partiram da relação

$$\left\langle \frac{\partial \hat{H}_e}{\partial c_i} \right\rangle = 0.$$

Utilizando a expressão para H_e encontra-se

$$\left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial c_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{E}_0}{\partial c_i} \right\rangle = \frac{\partial \hat{E}_0}{\partial c_i} + \text{Tr} \left[\frac{\partial \hat{H}}{\partial c_i} \rho \right] = 0,$$

onde foi utilizada a condição de normalização da função de distribuição, $\text{Tr} \rho = 1$. A expressão acima é idêntica à encontrada por Gorenstein-Yang, Eq. (3.7), mostrando que os dois tratamentos são idênticos e só *diferem* pelas hipóteses iniciais. Após encontrar uma solução que deixa o modelo livre de inconsistências termodinâmicas, uma questão fundamental aparece: há significado físico para E_0 , ou é apenas um artifício matemático para garantir a consistência?

A resposta à esta pergunta foi dada pelos mesmos físicos, Gorenstein e Yang. Ao calcular a energia de um oscilador harmônico quântico, encontra-se que esta é diretamente proporcional à frequência angular mais a energia de ponto zero. Computando a energia de todos os estados haverá dois termos, um referente aos estados quânticos n^\dagger , e outro à soma da energia de ponto zero de todos os modos n , levando a uma energia de ponto zero constante. Entretanto quando realizam-se medidas de energia efetua-se a diferença entre duas energias, acarretando na contribuição nula da energia de ponto zero para o resultado experimental. Desta forma toma-se a hamiltoniana sem o termo de ponto zero. Contudo, para o caso da matéria a alta temperatura e/ou potencial químico o vácuo modifica suas propriedades e passa a depender destes. Ao realizar medidas sobre a energia, estas estarão a diferentes temperaturas, e por conseguinte a energia de ponto zero também. Desprezar a contribuição da energia de ponto zero à termodinâmica é inconcebível nestas situações, e tal procedimento torna o modelo inconsistente, como pôde ser observado na seção 3.2. Adicionar o termo extra \hat{E}_0 é levar em conta a contribuição do vácuo ao modelo, e conseqüentemente deixar o modelo termodinamicamente consistente.

3.3.1 Gás Ideal de Quase-Partículas

A partir do trabalho de Gorenstein-Yang foi possível descrever os dados de rede [46] para um plasma de glúons [23]. Como visto, deve-se adicionar à pressão e à energia interna a contribuição da energia de ponto zero, para que estas sejam termodinamicamente consistentes. As funções termodinâmicas auto-consistentes são:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{Vd}{6\pi^2} \int_0^\infty dk n_b(k) \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}} - B(T), \\ U &= \frac{Vd}{2\pi^2} \int_0^\infty dk n_b(k) k^2 \sqrt{k^2 + m^2(T)} + B(T), \\ S &= \frac{Vd}{2\pi^2 T} \int_0^\infty dk n_b(k) k^2 \frac{\frac{4}{3}k^2 + m^2(T)}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}}, \end{aligned}$$

onde d é fator de degenerescência do glúon. A função $B(T)$ está relacionada com a energia de ponto zero E_0 , que pode ser obtida através da Eq. (3.7), com c_i sendo a massa do glúon $m \equiv m(T)$. A solução de $B(T)$ é:

$$B(T) = B_0 V - \frac{Vd}{4\pi^2} \int_{T_0}^T d\tau \frac{dm^2(\tau)}{d\tau} \int_0^\infty dk n_b(k) \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2(\tau)}},$$

onde B_0 é a constante de integração. A derivada da massa com relação à τ é uma função muito complicada de τ , assim a função $B(T)$ que possui uma integral em τ só pode ser

[†]Auto-vetores do operador \mathbf{H} .

resolvida analiticamente no limite assintótico de altas energias, constante de acoplamento muito menor que um ($g \ll 1$) e $m/T \ll 1$. Nesta região a pressão é

$$P = \frac{d\pi^2 T^4}{90} \left[1 - \frac{15}{8\pi^2} \left(\frac{m(T)}{T} \right)^2 + \dots \right].$$

Neste limite pode-se comparar o resultado com o da QCD perturbativa. Impondo que ambos os resultados sejam idênticos, tem-se que:

$$m^2(T) = \frac{g^2 T^2}{2}.$$

Na Ref. [23], utilizando este procedimento, os dados da QCD na rede para a pressão, entropia e energia interna foram descritos. Para isso foi necessário utilizar uma constante de acoplamento efetiva, que acomoda efeitos não perturbativos na região $T \sim T_c$ em sua definição[‡], além de deixar como parâmetros a ser ajustados para descrever a curva, a constante de integração B_0 e o fator de degenerescência d . Ao todo foram quatro parâmetros fenomenológicos, sendo que dois destes estão presentes na constante de acoplamento efetiva. Ao fazer isto obteve-se a Fig. 3.1.

Posteriormente a esta solução, com o avanço dos resultados da rede, e desejando uma descrição dos resultados da rede para férmions, foi introduzido por Schneider e Weise [24] o *modelo de confinamento*. Este modelo é uma extensão da solução de Gorenstein-Yang, cuja alteração reside no fator de degenerescência das partículas. Como pode ser observado na Fig. 3.1, um rápido crescimento nas funções termodinâmicas ocorre na região próxima a temperatura de desconfinamento, e aproxima-se do limite de Stefan-Boltzmann a altas energias. Este comportamento, à luz do modelo de quase-partículas, pode ser interpretado como um rápido crescimento no número de graus de liberdade acessíveis ao sistema, de hádrons a glúons e (anti)-quarks. Assim, Schneider e Weise argumentaram que o grau de liberdade deve ser função da temperatura, de forma que no limite assintótico esta correção deve tender a unidade, ou seja

$$d \rightarrow C(T)d, \quad C(T \gg T_c) \approx 1,$$

onde o fator $C(T)$ é o *fator de confinamento*. Portanto as funções termodinâmicas devem ser alteradas para:

$$PV = \frac{Vd}{6\pi^2} \int_0^\infty dk C(T) n_b(k) \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}} - B(T),$$

[‡]Detalhes da constante de acoplamento, de como obter as funções termodinâmicas e outros detalhes pertinentes a esta descrição serão detalhadas no próximo capítulo.

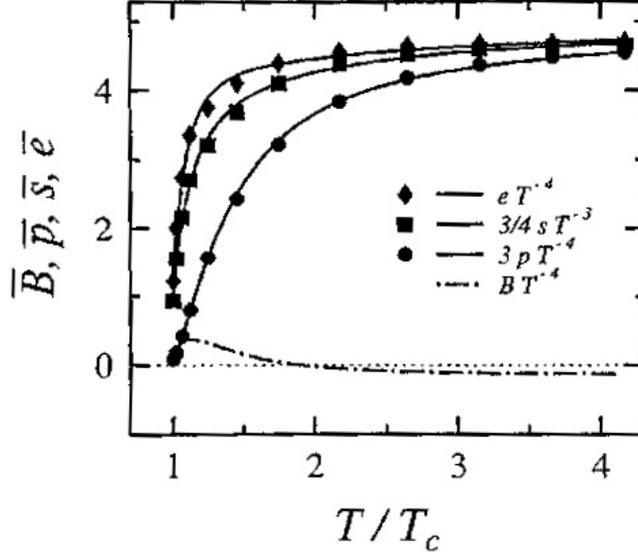


Figura 3.1: Curvas para solução de Gorenstein-Yang presente na Ref. [23], onde a pressão redimensionada é $\bar{P} = 3p/T^4$, a densidade de energia interna $\bar{e} = e/T^4$ e a densidade de entropia $\bar{s} = \frac{3}{4}s/T^3$. O termo extra $\bar{B} = B/T^4$ também é apresentada.

$$U = \frac{Vd}{2\pi^2} \int_0^\infty dk C(T) n_b(k) k^2 \sqrt{k^2 + m^2(T)} + B(T),$$

$$S = \frac{Vd}{2\pi^2 T} \int_0^\infty dk C(T) n_b(k) k^2 \frac{\frac{4}{3}k^2 + m^2(T)}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}}.$$

Devido à função $C(T)$, o termo $B(T)$ não pode ser o mesmo utilizado na Ref. [23]. Assim, assumindo a consistência termodinâmica, tem-se que o $B(T)$ deve ser descrito como:

$$B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_0V,$$

onde

$$B_1(T) = -\frac{Vd}{4\pi^2} \int_{T_0}^T d\tau C(\tau) \frac{dm^2(\tau)}{d\tau} \int_0^\infty dk n_b(k) \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2(\tau)}},$$

$$B_2(T) = \frac{Vd}{6\pi^2} \int_{T_0}^T d\tau \frac{dC(\tau)}{d\tau} \int_0^\infty dk n_b(k) \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2(\tau)}}.$$

Note que quando $C(T) = 1$, o resultado de $B(T)$ é recuperado. Ao descrever o modelo de quase-partículas, é utilizada a seguinte lei de potência para $C(T)$ próxima a região de desconfinamento

$$C(T) = C_0 \left(\left[1 + \delta_c \right] - \frac{T_c}{T} \right)^{\beta_c}.$$

Assim, com este fator de confinamento pode-se ajustar os parâmetros para que a curva teórica descreva da melhor forma os resultados de QCD na rede, Fig. 3.2.

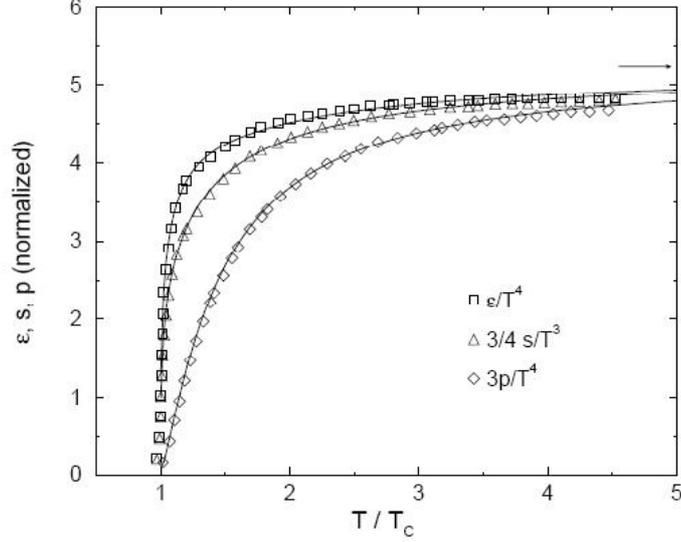


Figura 3.2: Figura presente na Ref. [24], onde a pressão redimensionada é $\bar{P} = 3p/T^4$, a densidade de energia interna $\bar{\epsilon} = \epsilon/T^4$ e a densidade de entropia $\bar{s} = \frac{3}{4}s/T^3$. A seta indica o limite para um gás ideal de bósons não massivos.

Cálculos baseados na solução de Gorenstein-Yang, com contribuições fermiônicas, foram posteriormente desenvolvidos. Por exemplo na Ref. [28] foi estudado sistemas compostos por glúons mais 2 quarks leves, e glúons mais 2 quarks leves e 1 pesado. Assim a pressão e a entropia, para $N_f = 2$, são dadas por

$$\begin{aligned}
 P(T, \mu) &= \sum_{a=q,g} P_a - B(T, \mu), \\
 S(T, \mu) &= \sum_{a=q,g} S_a. \\
 N(T, \mu) &= \frac{d_q V}{2\pi^2} \int dk k^2 (n_q^+ - n_q^-)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
 P_a &= \frac{d_a}{6\pi^2} \int dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_a^2(T, \mu)}} (n_a^+ + n_a^-), \\
 S_a &= \frac{d_a V}{2\pi^2 T} \int dk k^2 \left[\frac{\frac{4}{3}k^2 + m_a^2(T, \mu)}{\sqrt{k^2 + m_a^2(T, \mu)}} (n_a^+ + n_a^-) - \mu (n_a^+ - n_a^-) \right].
 \end{aligned}$$

Os símbolos + e - indicam partícula e anti-partícula, respectivamente. Como havia sido mostrado, a entropia e o número de partículas não possui termo extra. As funções que

não forem explicitadas aqui, serão citadas no capítulo 5. Na Ref. [28], apenas cálculos numéricos das expressões acima são realizados, mesmo no caso assintótico, isto porque o método é diferente do caso de $\mu = 0$. O método pode ser resumido da seguinte forma: sendo as funções termodinâmicas dependentes das massas das quase-partículas e estas por sua vez dependem de T , μ e g obtidas através do HTL, usualmente prefere-se não utilizar um novo *ansatz* para a dependência de T e μ em g . Então para encontrar sua dependência utiliza-se a equação de fluxo, partindo da condição de $g(T, \mu = 0)$. A equação de fluxo é obtida através da relação de Maxwell

$$\frac{\partial S}{\partial \mu} = \frac{\partial N}{\partial T},$$

que é reduzida a

$$a_\mu \frac{\partial g^2}{\partial \mu} + a_T \frac{\partial g^2}{\partial T} = b,$$

onde a_T , a_μ e b são funções de T e μ [34]. Utilizando conjuntamente a solução da equação de fluxo e as funções termodinâmicas, pode-se calcular numericamente a termodinâmica do sistema a partir da comparação com os resultados da rede, e assim obtém-se uma curva teórica para as funções termodinâmicas do sistema. Isto, por exemplo, resulta no número de partículas do sistema expresso na Fig. 3.3.

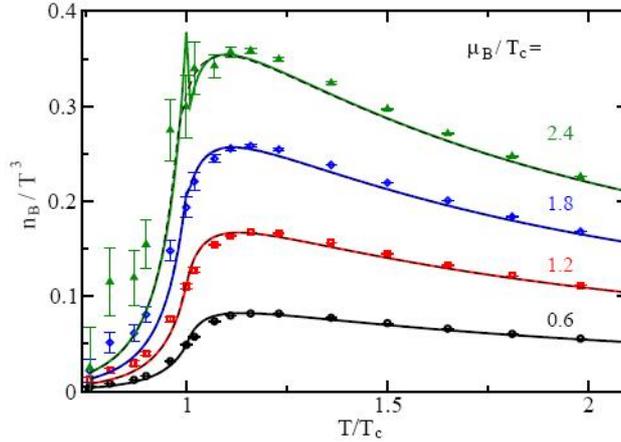


Figura 3.3: Figura presente na Ref. [28] para a densidade de partículas n .

Em todas estas soluções sempre há a necessidade do ajuste de parâmetros fenomenológicos, que são escolhidos de forma a descrever da melhor maneira os resultados experimentais. Devido a utilização da equação de fluxo nenhum dos trabalhos citados aqui para μ finito, faz relação com o resultado de QCD perturbativa, ou HTL/HDL assintóticos.

Todos são construídos de forma que sejam termodinamicamente consistentes, ficando em aberto questões como: estes são capazes de descrever os resultados teóricos assintóticos? Há consistência termodinamica ordem a ordem quando expandidos em função de g ?

Capítulo 4

Plasma de Quase-Glúons: Tratamento Geral

No capítulo anterior foi apresentado uma solução para o problema da inconsistência termodinâmica para um plasma de quarks e glúons. Entretanto não analisou-se sua competência em descrever os resultados de QCD na rede, preocupou-se apenas com a consistência do modelo perante os princípios físicos, ficando em aberto a previsibilidade desta solução. Será que existe apenas uma solução capaz de curar a inconsistência termodinâmica de um sistema com massas térmicas, ou existirá diversas outras? A previsibilidade da solução de Gorenstein-Yang será analisada posteriormente, sendo este capítulo devotado à busca de outras soluções auto-consistentes.

4.1 Plasma de Quase-Glúons

Por motivos históricos e práticos será estudado primeiramente um plasma formado apenas por glúons, deixando para o próximo capítulo a tarefa de estudar o plasma de quarks e glúons. O plasma de glúons pode ser estudado de duas forma: através do ensemble canônico ou do ensemble grande canônico. No caso do ensemble grand canônico assume-se o potencial químico dos glúons igual a zero, isto porque os glúons são não-massivos e dessa forma a criação destes em repouso tem custo energético zero. Como não há custo algum em criá-los diz-se que seu potencial químico é $\mu_g = 0$. Para o caso do ensemble canônico pode-se obter a função de partição canônica para o plasma de glúons assumindo que o número de glúons é indefinido. Será utilizado aqui o formalismo canônico, tanto para a busca de novas soluções como para o cálculo explícito das funções termodinâmicas, diferentemente da Referência [27] que utilizou o ensemble grande canônico para calcular as funções termodinâmicas. Os dois formalismos são equivalentes no limite termodinâmico [32].

O problema de interesse pode ser definido, em sua forma geral, da seguinte maneira: para um sistema composto por bósons interagentes não-massivos, pode-se tratá-lo como

um sistema de bósons não-interagentes massivos, cujas massas passam a depender da temperatura do sistema. Utilizando os resultados e a técnica vista na seção 2.1, parte-se da função de partição canônica, Eq. (2.2), e da existência da conexão entre a mecânica estatística e a termodinâmica, $\phi = -T \ln Q_N$. A descrição do sistema através do modelo de quase-partículas implica num operador hamiltoniano dependente da temperatura, $\hat{H} \equiv \hat{H}(q, p, T)$. Derivando ϕ com relação a T , auxiliado pela Eq. (2.2), obtem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = -\ln Q_N - \frac{1}{T} \sum_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Q_N} \left(E_n + T \frac{\partial E_n}{\partial T} \right),$$

que pode ser reescrita como

$$T \frac{\partial \phi}{\partial T} = \phi - \langle \hat{H} \rangle - \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right\rangle. \quad (4.1)$$

Note que não há possibilidade de identificarmos ϕ como a energia livre A , como feito na Sec. 2.1, já que a variação de \hat{H} com relação à T não permite definir as quantidades da mesma maneira que a mecânica estatística usual*. Este resultado permite pela primeira vez identificar o problema geral, abrindo a possibilidade da existência de outras soluções auto-consistentes. Assim, qual função termodinâmica é ϕ ? Como é a forma para a energia livre A ? A energia interna U possui a mesma definição que em mecânica estatística usual?

Como ver-se-á adiante, há inúmeras soluções para termodinâmica deste sistema, com todas elas recaindo no caso usual para o limite de hamiltonianas independentes de T . Para todas as possíveis soluções há a necessidade de redefinir a conexão entre mecânica estatística e termodinâmica, a fim de que estas sejam consistentemente construídas. Gorenstein e Yang ao construírem sua solução observaram corretamente a necessidade da inclusão da energia de ponto zero nas grandezas termodinâmicas. Contudo, restringiram drasticamente o papel desta, pois apenas as grandezas A e U sofreram alterações devido à energia de ponto zero. Como a Eq. (4.1) não está de acordo com as relações termodinâmicas, e ϕ não pode ser identificado como a energia livre, a conexão entre mecânica estatística e termodinâmica deverá ser redefinida de forma que haja a contribuição do vácuo em sua definição. Assim

$$A(V, T, f(T)) = -T \ln Q_N(V, T, f(T)) + \alpha B(V, T), \quad (4.2)$$

onde $B \equiv B(V, T)$ é o termo extra[†], introduzido com o propósito de deixar a formulação termodinâmica consistente, α é uma constante arbitrária real, e $f(T)$ é a contribuição

*Utiliza-se o termo usual para indicar sistemas cuja dependência está fora de variáveis macroscópicas, como por exemplo temperatura e potencial químico.

†O termo extra será estudado posteriormente, mostrando assim sua relação com a energia de ponto zero.

explícita da dependência na temperatura da hamiltoniana devido ao modelo de quase-partículas. Para o caso de hamiltonianas independentes de T , B deve ser igual a uma constante, recaindo desta forma em todas as expressões usuais da mecânica estatística. A energia livre dada pela Eq. (4.2) tem que satisfazer todas as relações termodinâmicas, Eq. (2.1). Entretanto, apenas a redefinição da energia livre não possibilita a consistência termodinâmica do modelo: redefinindo a energia livre e mantendo a entropia como a de um gás ideal, automaticamente a energia interna deve ser modificada para garantir a consistência. A solução geral não faz distinção alguma às variáveis termodinâmicas, ou seja, todas soluções termodinamicamente consistentes são igualmente boas[‡]. Assim a entropia e a energia interna devem ser redefinidas como

$$S(V, T, f(T)) = \langle \ln \hat{\rho} \rangle - \gamma \frac{B(V, T)}{T}, \quad (4.3)$$

$$U(V, T, f(T)) = \langle \widehat{H} \rangle + \eta B(V, T), \quad (4.4)$$

onde γ e η são constantes reais arbitrárias. Para que a relação termodinâmica $A = U - TS$ seja válida, as constantes devem ser vinculadas pela expressão $\alpha = \gamma + \eta$. Para o termo extra B , deve-se utilizar a segunda relação da Eq. (2.1), com a entropia e a energia livre redefinidas, Eqs. (4.3) e (4.4). Assim

$$\gamma B = T\alpha \frac{\partial B}{\partial T} + T \left\langle \frac{\partial \widehat{H}}{\partial T} \right\rangle.$$

Manipulando a equação diferencial parcial, encontra-se duas soluções

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T}(BT^{-\frac{\gamma}{\alpha}}) &= -\frac{T^{-\frac{\gamma}{\alpha}}}{\alpha} \left\langle \frac{\partial \widehat{H}}{\partial T} \right\rangle & \alpha \neq 0, \\ B &= \frac{T}{\gamma} \left\langle \frac{\partial \widehat{H}}{\partial T} \right\rangle & \alpha = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Quando uma das três constantes α , γ ou η é zero, as funções termodinâmicas são independentes das outras duas constantes, isto porque as constantes através da equação de vínculo cancelam-se. A solução da Eq. (4.5) para o termo extra B conclui a busca pelo solução geral do problema da inconsistência termodinâmica para o caso de um sistema composto por bósons não massivos[§], dessa forma as novas definições das funções termodinâmicas, juntamente com B satisfazendo a Eq. (4.5) acarreta na auto-consistência termodinâmica do modelo de quase-partícula para hamiltonianas dependentes de T . Funções hamiltonianas dependentes da temperatura do sistema aparecem em problemas de aproximação

[‡]Posteriormente analisar-se-á a capacidade destas em reproduzir resultados teóricos e experimentais conhecidos

[§]O desenvolvimento teórico desenvolvido até então aplica-se tanto a bósons como a férmions, devendo apenas serem não massivos.

de campo médio [44], ou em modelos fenomenológicos para o Plasma de Quarks e Glúons [33, 21, 23]. Para finalizar o arcabouço teórico para o modelo de quase-partícula, resta responder à pergunta: Qual o significado de B ? Para responder à esta questão, seja a energia interna:

$$U = \langle \hat{H} \rangle + \eta B = \text{Tr}[\hat{\rho}(\hat{H} + \eta \hat{B})], \quad (4.6)$$

com $\hat{B} = B\mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ é o operador identidade. Reescrevendo a energia interna na forma acima, e utilizando a propriedade do operador de distribuição comentado na Sec. 3.3, que no caso geral diz que ao adicionar um termo independente de q e p à hamiltoniana, o operador de distribuição para esta é idêntico ao operador de distribuição sem o termo adicionado, facilmente deduz-se o significado de B : o termo dentro do parênteses é a hamiltoniana efetiva total, cujo termo de vácuo está presente

$$\hat{H}_e = \hat{H} + \hat{E}_0, \quad (4.7)$$

com $\hat{E}_0 = \eta \hat{B}$. Como B não depende do momento e das coordenadas espaciais, aplica-se ao operador densidade a propriedade acima citada e o operador densidade conserva a mesma forma da Eq. (2.4). Reescrevendo as funções termodinâmicas como função da hamiltoniana efetiva, Eq. (4.7), obtêm-se

$$\begin{aligned} S &= -\langle \ln \hat{\rho}_e \rangle - \gamma \frac{B}{T} \\ A &= -T \ln Q_N^e + \gamma B \\ U &= \langle \hat{H}_e \rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde Q_N^e é a função de partição escrita em termos de \hat{H}_e . Observe que para $\gamma = 0$, as funções termodinâmicas possuem a mesma forma daquelas encontradas através da mecânica estatística usual. A interpretação para B é similar à dada por Gorenstein e Yang na Ref. [33]: No caso padrão da hamiltoniana independente de T , a energia de ponto zero é cons-tante e usualmente subtraída, já que experimentos medem apenas diferenças de energia. No modelo de quase-partícula a relação de dispersão é dependente de T , assim como a energia de ponto zero. Portanto esta não pode ser descartada do espectro de energia, sendo então ηB interpretado como a energia do sistema na ausência de quase-partículas, o estado de mais baixa energia.

Nesta seção foram calculadas as soluções que são termodinamicamente consistentes para um sistema cuja hamiltoniana dependa da temperatura. Como visto anteriormente as constantes α , γ e η podem assumir qualquer valor real, mas certas combinações de valores devem recair em soluções de uso prático e conhecidas na literatura. As subseções subsequentes tratarão de algumas destas combinações.

4.1.1 Solução 1: Gorenstein-Yang

A primeira solução particular que deve ser encontrada através da solução geral é aquela obtida inicialmente por Gorenstein e Yang [33]. A solução em questão é definida de forma que não haja contribuição extra à entropia do sistema, ou seja $\gamma = 0$. A equação do vínculo implica em $\alpha = \eta$. Assim:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{Q_N^e} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_e} \ln \left(\frac{e^{-\beta \hat{H}_e}}{Q_N^e} \right) \right), \\ A &= -T \ln \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_e} \right) = -T \ln \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right) + \alpha B \\ U &= \frac{1}{Q_N^e} \text{Tr} \left(\hat{H}_e e^{-\beta \hat{H}_e} \right) = \frac{1}{Q_N} \text{Tr} \left(\hat{H} e^{-\beta \hat{H}} \right) + \alpha B. \end{aligned}$$

A partir da Eq. (4.5) pode-se determinar o termo B para a solução 1:

$$\alpha B = B_0 - \int dT \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right\rangle, \quad (4.9)$$

onde B_0 é a constante de integração. Dessa forma as funções termodinâmicas são

$$\begin{aligned} S &= -\langle \ln \hat{\rho} \rangle, \\ A &= -T \ln Q_N - \int dT \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right\rangle + B_0, \\ U &= \langle \hat{H} \rangle - \int dT \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right\rangle + B_0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Esta solução foi proposta para estudar o plasma de glúons cuja hamiltoniana é dependente da temperatura, onde a relação de dispersão dos glúons depende da temperatura através da massa do glúon. As funções termodinâmicas encontradas na Eq. (4.10) são as encontradas no trabalho original de Gorenstein e Yang. Neste caso, a função $f(T)$ é dada pelo quadrado da massa do quase-glúon. Esta solução é amplamente usada na literatura, como por exemplo nas Refs. [21, 23, 24, 25], e possui uma interpretação física simples: sendo o hádron descrito através do modelo de sacola, existe uma “pressão de sacola” ou “energia de sacola” que permite uma descrição dos quarks e glúons confinados nos hádrons. Quando o hádron é aquecido, os quarks e os glúons desconfinam-se, mas a contribuição da sacola não desaparece por inteira, havendo assim alguma contribuição na pressão e na energia interna do sistema.

4.1.2 Solução 2: Bannur

Há alguns anos o modelo de quase-partículas proposto para descrever o QGP sofreu algumas alterações, rompendo a idéia de que apenas uma solução como a de Gorenstein-Yang fosse capaz de descrever o QGP. A solução proposta por Bannur [26] para descrever

o QGP, baseia-se na suposição de que toda energia de interação converte-se para a massa da quase-partícula, de forma que a energia de ponto zero não contribui para a energia interna do sistema. Quando esta solução for analisada para o caso de $\mu \neq 0$ observar-se-á que a motivação física poderá ser descrita de outra forma. Assim como a solução geral descreveu o resultado de Gorenstein-Yang, supõe-se que também deva conter a solução de Bannur, visto que esta é termodinamicamente consistente. A condição que garante que não haja termo adicional à energia interna é $\eta = 0$, que implica em $\alpha = \gamma$. De acordo com a Eq. (4.8) a energia interna é inalterada, enquanto a energia livre e a entropia os são:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{Q_N^e} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_e} \ln \hat{\rho}_e \right) - \alpha \frac{B}{T} = \frac{1}{Q_N} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \ln \hat{\rho} \right) - \alpha \frac{B}{T}, \\ A &= -T \ln \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_e} \right) + \alpha B = -T \ln \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right) + \alpha B, \\ U &= \frac{1}{Q_N^e} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_e} \hat{H}_e \right) = \frac{1}{Q_N} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \hat{H} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

O termo extra para $\eta = 0$ pode ser calculado com o auxílio da Eq. (4.5) como:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{B}{T} \right) = -\frac{1}{T} \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right\rangle. \quad (4.12)$$

Calculando B através da Eq. (4.12), as funções termodinâmicas consistentes são

$$\begin{aligned} S &= -\langle \ln \hat{\rho} \rangle + \int dT \frac{1}{T} \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right\rangle - \frac{B_0}{T_0}, \\ A &= -T \left(\ln Q_N + \int dT \frac{1}{T} \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right\rangle - \frac{B_0}{T_0} \right), \\ U &= \langle \hat{H} \rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Assim como ocorrido na solução 1, a solução geral permite obter exatamente as funções termodinâmicas Eq. (4.13) obtidas por Bannur na Ref. [26].

4.1.3 Solução 3: $\alpha = 0$

Devido ao fato de haver a possibilidade de mais de uma solução para o problema de quase-glúons, e observando as outras duas soluções anteriores, parece um passo natural questionar à respeito da solução em que a energia livre não possui termo adicional. Esta terceira solução é expressa pela condição $\alpha = 0$, e conseqüentemente pelo vínculo $\eta = -\gamma$. A primeira grande diferença entre esta solução e as demais é sua simplicidade, já que quando $\alpha = 0$ a Eq. (4.5) para B não é expressa através de uma equação diferencial parcial. Assim nesta solução a energia livre é inalterada, enquanto a entropia e energia interna não:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{Q_N^e} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_e} \ln \hat{\rho}_e \right) + \gamma \frac{B}{T} = \frac{1}{Q_N} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \ln \hat{\rho} \right) - \eta \frac{B}{T}, \\
A &= -T \ln \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_e} \right) + \gamma B = -T \ln \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right) \\
U &= \frac{1}{Q_N^e} \text{Tr} \left(\hat{H}_e e^{-\beta \hat{H}_e} \right) = \frac{1}{Q_N} \text{Tr} \left(\hat{H} e^{-\beta \hat{H}} \right) + \eta B.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Com o auxílio da Eq. (4.5), as funções termodinâmicas são escritas como

$$\begin{aligned}
S &= -\langle \ln \hat{\rho} \rangle - \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right\rangle, \\
A &= -T \ln Q_N, \\
U &= \left\langle \frac{\partial(\beta \hat{H})}{\partial \beta} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Observe que a energia interna dada pela Eq. (4.15) tem a peculiaridade de ser a única das três soluções onde a conexão entre U e a função de partição é mantida como no caso de hamiltonianas independentes de T [32]:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q_N.$$

No contexto do modelo de quase-partículas para o plasma de quarks e glúons, a terceira solução leva a diferentes propriedades comparada às anteriores: a modificação da energia de ponto zero nesta solução não acarreta nenhuma modificação na capacidade do sistema em realizar trabalho mecânico, medido pela energia livre. Nesta solução, assim como na de Bannur, a definição da entropia é modificada, e isto pode parecer um problema. Entretanto, como é bem conhecido, a entropia do sistema é definida a menos de uma constante, que usualmente é subtraída. Este procedimento não pode ser realizado aqui, já que a relação de dispersão é dependente de T , e dessa forma o termo adicional da entropia também o será.

4.2 Gás Ideal de Quase-Partículas

Formulada a solução geral para o problema de quase-partículas para hamiltonianas dependentes de T , mostra-se interessante aplicá-la para um caso específico: um plasma composto apenas por glúons, com potencial químico igual a zero. Este sistema tratado através do modelo de quase-partícula implica no estudo de um gás massivo formado por quase-glúons não interagentes. Este problema já foi estudado para duas soluções particulares, correspondentes às soluções 1 [33] e 2 [26] da seção anterior. De qualquer forma, para exemplificar o método desenvolvido até então será escolhida a solução 3, cujo termo B é o mais simples entre todas as outras soluções. Notar-se-á que, diferentemente das soluções 1 e 2, uma expressão algébrica para as funções termodinâmicas será obtida.

4.2.1 A Solução $\alpha = 0$

Para calcular as grandezas macroscópicas do sistema em questão, é necessário calcular a função de partição canônica. A obtenção da função de partição canônica para quase-glúons livres é equivalente ao caso de um sistema composto por fótons, que pode ser encontrado em diversos livros textos, como por exemplo na Ref. [32]. Assim a função de partição canônica é dada por

$$Q = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}},$$

cujo logaritmo é

$$\ln Q = - \sum_k \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) = - \frac{V}{(2\pi)^3} \int 4\pi dk k^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}),$$

onde a relação de dispersão é $\omega^2 = k^2 + m^2(T)$. Sendo a solução para o caso $\alpha = 0$ dado pela Eq. (4.15), encontra-se as seguintes funções termodinâmicas

$$P = - \frac{d_g T}{2\pi^2} \int dk k^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}) = \frac{d_g}{6\pi^2} \int_0^\infty dk n_b(k) \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}} \quad (4.16)$$

$$e = \frac{U}{V} = \frac{d_g}{2\pi^2} \int_0^\infty dk n_b(k) k^2 \sqrt{k^2 + m^2(T)} - \frac{d_g T}{4\pi^2} \frac{\partial m^2}{\partial T} \int_0^\infty dk n_b(k) \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}}, \quad (4.17)$$

$$s = \frac{d_b}{6\pi^2 T} \int_0^\infty dk n_b(k) k^2 \frac{4k^2 + 3m^2(T)}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}} - \frac{d_b}{4\pi^2} \frac{\partial m^2}{\partial T} \int_0^\infty dk n_b(k) \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2(T)}}. \quad (4.18)$$

onde d_g é o fator de degenerescência do glúon, e é a densidade de energia, s é a densidade de entropia e $n_b(k)$ é a função de distribuição de Bose-Einstein. O segundo termo nas expressões da energia e da entropia existe apenas no modelo de quase-partícula, pois $m \equiv m(T)$. Define-se este termo extra como $b(T) \equiv B(T, V)/V$. Contudo, ao comparar este termo com ao da solução *usual* de quase-partícula - solução de Gorenstein-Yang, Eq. (5) da Ref. [23] - encontra-se a relação $b_{GY}(T) = \partial B(T)/\partial T$. Isto implica que a solução de Gorenstein-Yang necessita da integração em T para obtenção da constante de sacola $B(T)$. Já para o caso $\alpha = 0$ não há necessidade de integração em T , facilitando cálculos analíticos. Esta peculiaridade deve-se ao fato de não haver termo extra em A , e assim s e e não possuem integrações em T , implicando em uma facilidade extra desta solução.

Pressão, Energia e Entropia

As funções termodinâmicas são obtidas quando escritas explicitamente em função das variáveis termodinâmicas independentes. Para obtenção da energia interna, entropia e pressão pode-se dividir o cálculo em duas partes: na solução das integrais e em operações

sob a massa da quase-partícula. Como a integração independe da relação entre a massa e a temperatura, deixar-se-á tal dependência para a próxima subseção. O cálculo analítico para as integrais bosônicas, deve-se a integração sob o momento da partícula. A técnica que permitirá uma descrição analítica das grandezas termodinâmicas foi inteiramente desenvolvida no apêndice A. Deve ficar claro que além do esforço em resolver as integrais, as funções termodinâmicas não poderiam ser expressas analiticamente em uma grande região de temperatura se não fosse a propriedade de B independe de uma integração em T . A pressão P , dada pela solução da Eq. (4.16), pode ser escrita em termos de funções encontradas no apêndice A

$$P = \frac{d_b \beta^{-4}}{6\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2}} - 1} = \frac{4d_b T^4}{\pi^2} J_5(r) \quad (4.19)$$

onde $r \equiv \frac{m}{T}$ e J_5 é a Eq. (A.12) do Apêndice A. Assim, a Eq. (4.19) torna-se

$$P = \frac{d_b}{\pi^2} \left[\frac{\pi^4}{90} T^4 - \frac{\pi^2}{24} T^2 m^2 + \frac{\pi}{12} T m^3 + \frac{m^4}{2^5} \left(\ln \frac{m}{4\pi T} + \gamma_E - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^\infty a_n \frac{m^{2(n+2)}}{T^{2n}} \right] \quad (4.20)$$

com $a_n = \frac{(-1)^n (2n-1)! \zeta(2n+1)}{(n+2)! 2^{3n+1} \pi^{2n}}$. Este resultado pode ser expresso em termos de correções para o caso de um gás ideal não massivo, cuja pressão vale $P_0 = \frac{d_f \pi^2 T^4}{90}$. Assim

$$P = P_0 \left[1 - \frac{15}{4\pi^2} \left(\frac{m}{T} \right)^2 + \frac{15}{2\pi^3} \left(\frac{m}{T} \right)^3 + \frac{45}{16\pi^4} \left(\frac{m}{T} \right)^4 \left(\ln \frac{m}{4\pi T} + \gamma_E - \frac{3}{4} \right) + \frac{45}{4\pi^4} \sum_{n=1}^\infty a_n \left(\frac{m}{T} \right)^{2(n+2)} \right]. \quad (4.21)$$

Para o caso da densidade de energia e , utiliza-se a mesma técnica da pressão. Assim

$$\begin{aligned} e &= \frac{d_b T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + r^2}} n_b(k) + \frac{d_b T^2}{2\pi^2} \left(m^2 - \frac{T}{2} \frac{\partial m^2}{\partial T} \right) \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + r^2}} n_b(k) \\ &= \frac{12d_b T^4}{\pi^2} J_5(r) + \frac{d_b T^2}{\pi^2} \left(m^2 - \frac{T}{2} \frac{\partial m^2}{\partial T} \right) J_3(r), \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde J_3 e J_5 são as funções dada pela Eq. (A.11) do Apêndice A. Resolvendo as integrais, encontra-se

$$\begin{aligned} e = e_0 \left\{ 1 - \frac{5}{4\pi^2} \left(\frac{m}{T} \right)^2 - \frac{15}{16\pi^4} \left(\frac{m}{T} \right)^4 \left(\ln \frac{m}{4\pi T} + \gamma_E + \frac{1}{4} \right) - \frac{15}{4\pi^4} \sum_{n=1}^\infty a_n (2n+1) \left(\frac{m}{T} \right)^{2(n+2)} + \right. \\ \left. - \frac{5}{4T\pi^2} \frac{\partial m^2}{\partial T} \left[1 - \frac{3}{\pi} \frac{m}{T} - \frac{3}{2\pi^2} \frac{m^2}{T^2} \left(\ln \frac{m}{4\pi T} + \gamma_E - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^\infty a_n (n+2) \left(\frac{m}{T} \right)^{2(n+1)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $e_0 = \frac{d_b T^4 \pi^2}{30}$ é a densidade de energia de um gás ideal. Para concluir é interessante conhecer a expressão para a entropia do sistema, que é facilmente calculada através da relação termodinâmica $S = -(\partial(PV)/\partial T)_V$, ou seja,

$$s = s_0 \left\{ 1 - \frac{15}{8\pi^2} \left(\frac{m}{T}\right)^2 + \frac{15}{8\pi^3} \left(\frac{m}{T}\right)^3 - \frac{45}{64\pi^4} \left(\frac{m}{T}\right)^4 - \frac{45}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \left(\frac{m}{T}\right)^{2(n+2)} + \right. \\ \left. - \frac{15}{16T\pi^2} \frac{\partial m^2}{\partial T} \left[1 - \frac{3m}{\pi T} - \frac{3m^2}{2\pi^2 T^2} \left(\ln \frac{m}{4\pi T} + \gamma_E - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+2) \left(\frac{m}{T}\right)^{2(n+1)} \right] \right\}. \quad (4.24)$$

onde $s_0 = \frac{2d_b\pi^2 T^3}{45}$ é a densidade de entropia de um gás ideal não massivo. O raio de convergência de todas as variáveis termodinâmicas calculadas até então deve ser levado em consideração. Pelos cálculos apresentados no Apêndice A, este é de $m/T < 2\pi$.

Resultados

A dependência na temperatura das funções termodinâmicas possui duas origens. A primeira vem diretamente da função de distribuição n_b , onde a hamiltoniana surge multiplicada pelo *parâmetro* β . Já a segunda contribuição é proveniente da relação de dispersão, que possui a dependência em T devido à massa da quase-partícula, ou seja, as funções termodinâmicas não podem ser completamente descritas apenas utilizando mecânica estatística. Para determinar a expressão para $m(T)$ é necessário informações adicionais à mecânica estatística. Pode-se importar tal informação da teoria de perturbação HTL [16, 18, 25], cuja relação entre $m(T)$ e T é

$$m^2(T) = N_c \frac{g^2 T^2}{6}, \quad (4.25)$$

onde g é a constante de acoplamento forte. Com esta expressão calcula-se explicitamente a dependência em T das funções termodinâmicas. O interesse é obter estas não apenas no limite assintótico, mas em toda a região de desconfinamento. Em NLO (next-to-leading order) a correção para massa HTL [18] é

$$\delta m^2 = -N_c \frac{g^2}{2\pi} T m_D, \quad (4.26)$$

onde $m_D = \sqrt{\frac{2N_c}{6}} gT$ é a massa de Debye. Para altíssimas temperaturas, $g \ll 1$, a Eq. (4.26) descreve corretamente a massa em NLO. Entretanto esta equação pode fornecer resultados inadequados para certos valores de g , como uma massa taquônica para os glúons. Contudo uma análise à luz do HTL [18] mostra que a Eq. (4.26) vem exclusivamente de correções com grandes momentos. Para incluir a contribuição dos momentos mais baixos à massa é necessário utilizar uma equação de *gap*:

$$m^2(T) = N_c \frac{g^2 T^2}{6} - \frac{N_c}{\sqrt{2}\pi} g^2 T m(T). \quad (4.27)$$

Para que o modelo de quase-partículas possa descrever a matéria desconfinada na vizinhança da temperatura de desconfinamento, necessita-se substituir a constante de acoplamento g por uma constante de acoplamento efetiva g_s [28] em NLO, inspirada por QCD perturbativa, a fim de acomodar efeitos não-perturbativos :

$$g_s^2(T) = \frac{16\pi^2}{\beta_0 \ln \xi^2} \left[1 - \frac{2\beta_1 \ln(\ln \xi^2)}{\beta_0^2 \ln \xi^2} \right], \quad (4.28)$$

onde $\beta_0 = 11N_c/3$, $\beta_1 = 34N_c^2/6$, $\xi \equiv \lambda_s \left(\frac{T}{T_c} - \frac{T_s}{T_c} \right)$, N_c é o número de cores, λ_s é um parâmetro de escala e T_s é um deslocamento na temperatura que regula divergências infra-vermelhas abaixo da temperatura crítica. Com estas expressões, finalmente pode-se expressar as funções termodinâmicas explicitamente em termos de T , e assim a comparação com resultados vindos de QCD na rede [51] para um sistema composto apenas por glúons pode ser realizada. O melhor ajuste é alcançado quando $\lambda_s = 5.182$, $T_s/T_c = 0.197$, sendo $N_c = 3$ e o fator de degenerescência $d_b = 2(N_c^2 - 1) = 16$. Na Fig. 4.1 são traçadas as funções termodinâmicas Eqs. (4.21), (4.23) e (4.24), utilizando a massa em NLO Eq. (4.27). As curvas obtidas descrevem muito bem o resultado da rede da Ref. [51].

Até agora, mostrou-se que as soluções 1 e 2 são consistentes com a termodinâmica, entretanto nada foi dito sobre suas capacidades em descrever o plasma de glúons. Sabe-se que ambas conseguem descrever os resultados da rede com pequenas variações nos ajustes das funções, mas na média descrevem bem o plasma. Isto pode ser observado para solução de Gorenstein e Yang na Ref. [23], veja Fig. 3.1, e para a solução de Bannur ver Ref. [26]. Comparando o resultado fenomenológico obtido para solução $\alpha = 0$ com a da solução 1, na Ref. [23], foi necessário 4 parâmetros para ajustar da melhor forma a curva: λ_s , T_s/T_c , a constante de integração B_0 , além da degenerescência d_b .

4.2.2 Comportamento Assintótico para Soluções $\alpha \neq 0$

Na seção anterior foi possível estudar com algum detalhe a solução $\alpha = 0$, pela possibilidade de escrevê-la analiticamente em toda extensão do plasma. Contudo para os casos de $\alpha \neq 0$ o cálculo de B envolve integrais não triviais, que podem ser resolvidas explicitamente apenas para o limite assintótico de $T \rightarrow \infty$. Portanto esta seção será destinada ao cálculo das funções termodinâmicas nesta região. A expressão geral para B no caso $\alpha \neq 0$ é dada pela Eq. (4.5). Utilizando a relação de dispersão para o quase-glúon, pode-se reescrever B como

$$B = B_0 T^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{d_b V T^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{\alpha 4\pi^2} \int_{T_c}^T d\tau \tau^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \frac{dm^2(\tau)}{d\tau} \int_0^\infty dk \frac{k^2 n_b(k)}{\sqrt{k^2 + m^2(\tau)}}. \quad (4.29)$$

Para analisar o comportamento para T grande em $B(T)$, manipula-se a Eq. (4.29) a fim de usar as integrais do apêndice A:

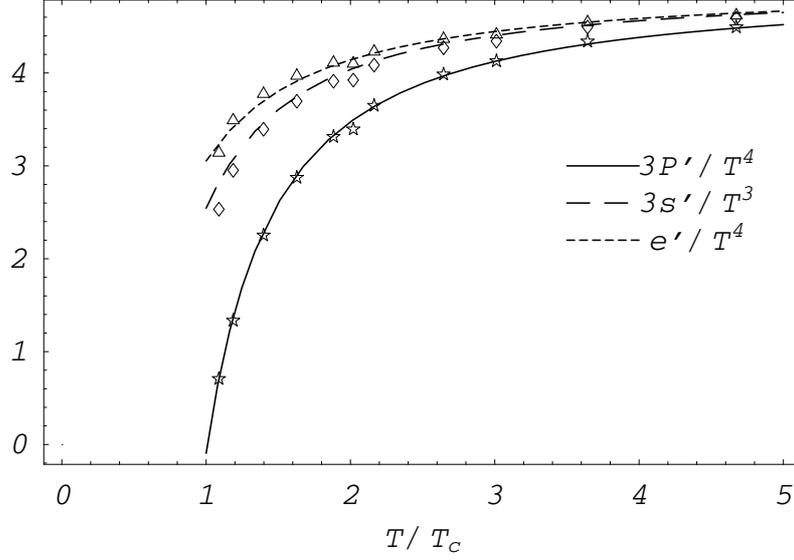


Figura 4.1: Curvas para pressão P , densidade de energia interna e e densidade de entropia s para solução $\alpha = 0$, e dados da rede extrapolados para o contínuo [51] para pressão (estrela), densidade de energia interna (triângulo) e densidade de entropia (diamante), como função de T/T_c .

$$\begin{aligned}
B &= B_0 T^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{d_b V T^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{\alpha 4 \pi^2} \int_{T_c}^T d\tau \tau^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \frac{dm^2(\tau)}{d\tau} \Gamma(3) \tau^2 J_3\left(\frac{m}{\tau}\right) \\
&= B_0 T^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{d_b V T^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{\alpha 2 \pi^2} \int_{T_c}^T d\tau \tau^{2-\frac{\gamma}{\alpha}} \frac{dm^2(\tau)}{d\tau} \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi m}{4 \tau} + O\left(\frac{m^2}{\tau^2}\right) \right). \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Integrando e mantendo apenas os dois primeiros termos dentro do parênteses

$$\begin{aligned}
B &= B_0 T^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{d_b V}{24 \alpha} \left[m^2 \tau^2 \Big|_{T_c}^T - \left(2 - \frac{\gamma}{\alpha} \right) T^{\frac{\gamma}{\alpha}} \int_{T_c}^T d\tau \tau^{1-\frac{\gamma}{\alpha}} m^2 \right] + \\
&\quad + \frac{d_b V}{12 \alpha \pi} \left[m^3 \tau \Big|_{T_c}^T - \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} \right) T^{\frac{\gamma}{\alpha}} \int_{T_c}^T d\tau \tau^{-\frac{\gamma}{\alpha}} m^3 \right] + \dots \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $g_s \ll 1$, a Eq. (4.27) é reduzida à

$$\frac{m}{T} = \frac{g_s}{\sqrt{2}} - \frac{3g_s^2}{2\sqrt{2}\pi}. \quad (4.32)$$

A altas temperaturas a constante de acoplamento efetiva Eq. (4.28) decresce muito lentamente, levando a razão m/T a decrescer muito lentamente para $T/T_c \gg 1$, podendo assim ser considerada como constante neste limite. Com esta particularidade pode-se resolver a integral para B facilmente. Reescrevendo o integrando como potências de m/T , encontra-se no limite $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
B &\approx B_0 T^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{d_b V}{24\alpha} \left[m^2 T^2 - \left(2 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) T^{\frac{\gamma}{\alpha}} \frac{m^2 T^{4-\frac{\gamma}{\alpha}}}{T^2} \right] + \frac{d_b V}{12\alpha\pi} \left[m^3 T - \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) T^{\frac{\gamma}{\alpha}} \frac{m^3 T^{4-\frac{\gamma}{\alpha}}}{T^3} \right] \\
&= B_0 T^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{d_b V}{12\alpha} \frac{1}{4 - \gamma/\alpha} m^2 T^2 + \frac{d_b V}{4\alpha\pi} \frac{1}{4 - \gamma/\alpha} m^3 T, \quad \frac{\gamma}{\alpha} \neq 4, \tag{4.33}
\end{aligned}$$

onde assume-se que $\frac{\gamma}{\alpha}$ é diferente de 4. Para $\frac{\gamma}{\alpha} = 4$ tem-se

$$B \approx B_0 T^4 - \frac{d_b V}{24\alpha} (1 + 2 \ln T) m^2 T^2 + \frac{d_b V}{12\alpha\pi} (1 + 3 \ln T) m^3 T, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = 4. \tag{4.34}$$

Para obter as funções termodinâmicas na região assintótica, escreve-se B em função da pressão de um gás ideal não massivo P_0 :

$$\begin{aligned}
b &\approx P_0 \left(\frac{90b_0}{d_b \pi^2} - \frac{15}{4\alpha\pi^2} (1 + 2 \ln T) \frac{m^2}{T^2} + \frac{15}{2\alpha\pi^3} (1 + 3 \ln T) \frac{m^3}{T^3} \right), \quad \frac{\gamma}{\alpha} = 4; \\
b &\approx P_0 \left(b_0 \frac{90}{d_b \pi^2} T^{\frac{\gamma}{\alpha}-4} - \frac{15}{2\alpha\pi^2} \frac{1}{4 - \gamma/\alpha} \frac{m^2}{T^2} + \frac{45}{2\alpha\pi^3} \frac{1}{4 - \gamma/\alpha} \frac{m^3}{T^3} \right), \quad \frac{\gamma}{\alpha} \neq 4, \tag{4.35}
\end{aligned}$$

onde $b_0 \equiv \frac{B_0}{V}$. As funções termodinâmicas podem ser calculadas com o auxílio da Eq. (4.35). Por exemplo utilizando as Eqs. (4.2), (4.21) e (4.35) encontra-se a pressão assintótica para $\alpha \neq 0$. Se $\gamma/\alpha = 4$, obtém-se:

$$P = P_0 \left[1 - \frac{90b_0\alpha}{d_b \pi^2} + \frac{15}{2\pi^2} \frac{m^2}{T^2} \ln T - \frac{45}{2\pi^3} \frac{m^3}{T^3} \ln T + \dots \right].$$

A partir da Eq. (4.28) nota-se que o logaritmo de T é inversamente proporcional à g_s^2 . Portanto utilizando a massa assintótica Eq. (4.25)

$$P(T) = P_0 \left[1 - \frac{90b_0\alpha}{d_b \pi^2} + \frac{30}{11} + \frac{90}{11\sqrt{2}} \frac{g_s}{\pi} + \dots \right].$$

Note que o limite de $g_s \rightarrow 0$ deve recuperar o resultado esperado para a pressão de um gás ideal não massivo. Assim deve ser satisfeita a relação $b_0\alpha = d_b \pi^2/33$. A pressão é então

$$P = P_0 \left[1 + \frac{90}{11\sqrt{2}} \frac{g_s}{\pi} + \dots \right], \quad \frac{\gamma}{\alpha} = 4. \tag{4.36}$$

Agora a pressão para $\gamma/\alpha \neq 4$ é obtida ao utilizar as Eqs. (4.2), (4.21) e (4.35), assim

$$P = P_0 \left[1 - \frac{15}{4\pi^2} \frac{2 - \frac{\gamma}{\alpha}}{4 - \frac{\gamma}{\alpha}} \left(\frac{m}{T} \right)^2 + \frac{15}{2\pi^3} \frac{1 - \frac{\gamma}{\alpha}}{4 - \frac{\gamma}{\alpha}} \left(\frac{m}{T} \right)^3 - \alpha b_0 \frac{90}{d_b \pi^2} T^{\frac{\gamma}{\alpha}-4} + \dots \right], \quad \frac{\gamma}{\alpha} \neq 4. \tag{4.37}$$

A solução *matemática* geral para a consistência termodinâmica de um sistema bosônico composto por quase-partícula foi desenvolvida inteiramente. Entretanto quais das soluções são fisicamente relevantes? A primeira propriedade que qualquer solução deve satisfazer para ser apta a descrever a física do QGP é a de que, no limite $T \rightarrow \infty$, esta deve se comportar como um gás ideal, ou seja, a pressão deve ser proporcional à T^4 . Como foi visto as soluções $\alpha = 0$ e $\gamma/\alpha = 4$ concordam com esta particularidade. Para as demais soluções deve-se retornar à Eq. (4.37) e analisar a pressão. Como a razão m/T é proporcional às potências de g_s , esta não discorda do limite de gás ideal. Por outro lado, o termo envolvendo $b_0\alpha$ sim. A forma de solucionar este problema é fazer o termo $b_0\alpha$ desaparecer, o que implica nas potências de T serem negativas, ou seja, a solução geral não possui significado quando $\gamma/\alpha > 4$. A solução geral obtida neste capítulo é passível de significado físico apenas se a condição $\gamma/\alpha \leq 4$ é satisfeita. Esta condição será referida como *condição física fraca*. As soluções 1, 2 e 3 satisfazem a condição fraca.

4.3 Analisando as Soluções Físicas

Outra condição desejável às soluções físicas é a de que, no limite de temperaturas muito maiores que a temperatura de desconfinamento, deveriam concordar com o resultado perturbativo da QCD [48]. Heróicos esforços foram realizados recentemente para calcular a pressão perturbativa até a ordem de $g_s^6 \log(1/g_s)$ [13], mas para os propósitos do presente trabalho, é necessária apenas a pressão até g_s^3 :

$$P_{QCD} = P_0 \left[1 - \frac{15}{16} \frac{g_s^2}{\pi^2} + \frac{15}{4} \frac{g_s^3}{\pi^3} + \dots \right]. \quad (4.38)$$

A comparação iniciar-se-á pela solução 1, dessa forma a pressão à altíssimas temperaturas, denominada P_1 , pode ser escrita com a ajuda da Eq. (4.37), e com a condição $\gamma = 0$, como

$$P_1 = P_0 \left[1 - \frac{15}{8\pi^2} \left(\frac{m}{T} \right)^2 + \frac{15}{8\pi^3} \left(\frac{m}{T} \right)^3 + \dots \right]. \quad (4.39)$$

Introduzindo a massa assintótica adequada, Eq. (4.32), em (4.39) obtém-se

$$P_1 = P_0 \left[1 - \frac{15}{16\pi^2} g_s^2 + \frac{15}{4\pi^3} g_s^3 \left(\frac{3\sqrt{2} + 1}{4\sqrt{2}} \right) + \dots \right]. \quad (4.40)$$

Comparando as Eqs. (4.40) e (4.38) observa-se, como esperado, a concordância entre os termos de ordem zero. Nota-se também que utilizando a massa assintótica há a concordância entre os termos de segunda ordem, mas o termo em g_s^3 discorda[¶]. Além

[¶]O número dentro do parênteses que multiplica g_s^3 na Eq. (4.40) é ~ 0.93 .

desta solução satisfazer a condição fraca e concordar com a QCD perturbativa até a ordem de g_s^2 , ela possui outra qualidade previamente mencionada: a conexão entre mecânica estatística e termodinâmica é a mesma do caso em que a hamiltoniana é independente da temperatura, Eq. (4.8) com $\gamma = 0$. O termo extra B é interpretado como uma modificação na energia de ponto zero, se o vácuo depende da temperatura T , espera-se que haja uma entropia associada a esta, e que seja também dependente de T . Contudo a solução 1 não possui termo associado à entropia do vácuo, e podendo ser encarada como uma limitação desta solução.

A pressão para solução 2 à temperaturas extremamente altas, denominada P_2 , é:

$$P_2 = P_0 \left[1 - \frac{15}{12\pi^2} \left(\frac{m}{T} \right)^2 + O(m^4/T^4) + \dots \right].$$

Note que não há termos em m^3/T^3 , isto porque o termo extra B cancela-os. Ao utilizar a massa de HTL na pressão P_2 , encontra-se

$$P_2 = P_0 \left[1 - \frac{15}{24} \frac{g_s^2}{\pi^2} + \frac{15}{24} \frac{g_s^3}{\pi^3} + \dots \right]. \quad (4.41)$$

A pressão P_2 não concorda com o resultado de QCD perturbativa à nenhuma ordem em g_s . O termo em g_s^2 é cerca de 1.5 vezes menor que o da QCD perturbativa, enquanto g_s^3 é seis vezes menor. Entretanto, há uma maneira de fazer os dois formalismos concordarem em ordem g_s^2 , utilizando a seguinte relação para a massa $m^2 = 3g_s^2 T^2/4$. Na Ref. [26] o autor não utilizou nenhuma das duas massas, e sim que a massa do glúon advém da frequência de plasma $m^2 = \omega^2 = \frac{2N_c g_s^2 T^2}{18}$.

A única solução na qual as funções termodinâmicas podem ser escritas algebricamente em toda extensão do plasma é a de número 3. Assintoticamente esta pressão será definida como P_3 , dada por:

$$P_3 = P_0 \left[1 - \frac{15}{8} \frac{g_s^2}{\pi^2} + \frac{15}{8} \frac{g_s^3}{\pi^3} (3 + \sqrt{2}) + \dots \right].$$

Comparando o comportamento assintótico de P_3 com o da pressão perturbativa de QCD, observa-se que não há concordância em nenhuma ordem de g_s . Contudo, se ao invés da massa de HTL fosse utilizada a massa $m = \frac{g_s T}{2}$, o resultado da pressão da solução 3 recuperaria o resultado perturbativo até g_s^2 . Motivado pela equação de gap do HTL, pode-se modificar a relação de massa geral e procurar uma concordância em ordens mais altas. Assim especula-se que dividindo a Eq. (4.27) por 2, e redefinindo $\frac{m}{\sqrt{2}} \rightarrow m$ possa encontrar tal concordância. Calculando até a ordem g_s^3 na massa, e substituindo-a encontra-se que o resultado concorda com QCD perturbativa até ordem 3. Observe que a partir da pressão para $\alpha = 0$, é possível buscar alternativas para ajustar a função $m(T)$ à QCD na rede, e procurar desvios na massa de HTL próximas à T_c .

A solução para $\gamma/\alpha = 4$ precisa ser analisada separadamente, já que é a única que possui termo em ordem g_s . Embora satisfazendo à condição física fraca, este termo contradiz qualquer cálculo da pressão encontrado na literatura, com por exemplo HTL, aproximação de 2-Loop Φ -derivable, ou QCD perturbativa. Sabe-se de teoria de campos térmica que a primeira correção da função de partição é dada através de g_s^2 [49], assim faz-se necessário excluir esta solução das soluções físicas possíveis. Portanto as únicas soluções fisicamente viáveis são as que satisfazem $\gamma/\alpha < 4$.

Capítulo 5

Termodinâmica de Quase-Partículas a Potencial Químico Finito

Neste capítulo estudar-se-á sistemas que estão em contato tanto com um reservatório térmico como com um reservatório de partículas. O estudo de tais sistemas é importante não apenas para a completeza do estudo das quase-partículas, mas também para o caso realístico da matéria desconfinada. Inicialmente, a solução geral para um sistema de quase-partículas com massas que dependem de T e μ será obtida. A seguir, procurar-se-á qual das soluções melhor descreve tanto os resultados teóricos quanto resultados *experimentais*. A primeira vista pode parecer que uma mistura entre bósons e férmions deva obedecer a lei de Dalton para uma mistura de gases. Esta lei afirma que a pressão exercida por uma mistura de gases é igual a soma das pressões parciais exercida por todos os componentes da mistura* [50]. Como o formalismo de quase-partículas é construído sobre o modelo de gás ideal, é natural esperar que a pressão do sistema completo, quarks mais glúons, é a soma das contribuições fermiônicas e bosônicas independentemente. No entanto, isto não é verdade para o modelo de quase-partículas. Como é sabido para o caso dos glúons, não há sentido em fixar o seu número, $n_g = \partial P_g / \partial \mu = 0$, já que nenhum custo energético é necessário para sua criação em repouso ($\mu_g = 0$). Por outro lado, se a pressão é calculada a partir dos resultados do capítulo 4, juntamente com a massa de Debye apropriada para um sistema composto também por férmions, $m_D \equiv m_D(T, \mu)$, pode-se ver a partir das relações termodinâmicas que o *número de glúons* será diferente de zero $n_g = \partial P_g(m_D) / \partial \mu \neq 0$. Portanto a lei de Dalton falha neste modelo, sendo então necessário um desenvolvimento teórico para o modelo completo e não independentemente para cada parte.

*Esta lei é válida apenas para gases ideais.

5.1 Tratamento Geral

O caso realístico para um sistema composto de glúons e quarks, será estudado através do ensemble grande canônico. O formalismo geral será construído para um sistema composto por bósons não-massivos e por quarks e anti-quarks massivos, a altas temperaturas e potencial químico finito, de forma que a matéria possa ser descrita via modelo de quase-partículas. Devida a alta energia do sistema, o sistema possui um número indefinido de bósons, ou seja $\mu_b = 0$, mas a mesma quantidade de quarks e anti-quarks, $\mu_q = -\mu_{\bar{q}} \equiv \mu$. O estudo deste sistema por quase-partículas faz com que os partons adquiram uma massa *térmica-química*, obrigando a reformulação tanto da hamiltoniana como das funções termodinâmicas para garantir a consistência termodinâmica. Assim, a forma mais geral para a reformulação das funções termodinâmicas é

$$\Phi(V, T, \mu, m_f^2, m_b^2) = \Phi_f(V, T, \mu, m_f^2) + \Phi_b(V, T, \mu, m_b^2) + \alpha B(V, m_f^2, m_b^2), \quad (5.1)$$

$$U(V, T, \mu, m_f^2, m_b^2) = U_f(V, T, \mu, m_f^2) + U_b(V, T, \mu, m_b^2) + \eta B(V, m_f^2, m_b^2), \quad (5.2)$$

$$S(V, T, \mu, m_f^2, m_b^2) = S_f(V, T, \mu, m_f^2) + S_b(V, T, \mu, m_b^2) - \frac{\gamma}{T} B(V, m_f^2, m_b^2), \quad (5.3)$$

$$N(V, T, \mu, m_f^2, m_b^2) = N_{\{f\}}(V, T, \mu, m_f^2) - \frac{\lambda}{\mu} B(V, m_f^2, m_b^2), \quad (5.4)$$

onde os subscritos f and b referem-se a férmions e bósons, respectivamente. As funções $m_f^2 = m_f^2(T, \mu)$ e $m_b^2 = m_b^2(T, \mu)$ são as massas adquiridas pelos férmions e bósons. As constantes α , η , γ and λ são arbitrárias, mas vinculadas pela equação $\alpha = \eta + \gamma + \lambda$, de forma a garantir a consistência da quarta relação da Eq. (2.6). Esta condição é a extensão do vínculo necessário para o caso canônico Ref. [27]. A dependência em T e μ do termo extra $B(V, m_f^2, m_b^2)$ é através apenas das massas. O termo $B(V, m_f^2, m_b^2)$ deve ser tal que as relações termodinâmicas sejam satisfeitas. Assim substituindo as Eqs. (5.1), (5.2), (5.3) e (5.4) na Eq. (2.6), encontra-se as equações diferenciais que B deve satisfazer

$$\gamma B = T\alpha \frac{\partial B}{\partial T} + T \sum_{i=b,f} \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle, \quad \lambda B = \mu\alpha \frac{\partial B}{\partial \mu} + \mu \sum_{i=b,f} \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle, \quad (5.5)$$

Quando $\alpha \neq 0$ as expressões na Eq. (5.5) são iguais, e reduzem-se a

$$\frac{\partial}{\partial m_i^2} (BT^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}}) = -\frac{T^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\alpha} \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial m_i^2} \right\rangle \quad \alpha \neq 0, \quad i = b, f. \quad (5.6)$$

O limite de $\alpha \rightarrow 0$ na Eq. (5.5) deve ser cuidadosamente tomado. Obviamente as duas equações para B em (5.5) fornecem resultados diferentes ao substituir $\alpha = 0$ nas equações[†].

[†]Há uma solução trivial de B que satisfaz as duas equações: $\gamma = \lambda$ e $m_i^2 = C_i T \mu$. Mas esta não é o tipo de expressão que espera-se para a massa da quase-partícula.

Quando o grande potencial não possui termo extra, o número médio de partículas e a entropia devem possuir termos extras, i.e. se $\alpha = 0$ então γ e λ devem ser diferentes de zero. Se tal condição não é satisfeita a termodinâmica não será consistente. Esta conclusão baseia-se no fato de que S e N são relacionadas à Φ através de derivadas parciais, Eq. (2.6). Portanto as redefinições válidas para $\alpha \neq 0$ não são válidas para $\alpha = 0$, sendo necessário modificar as funções termodinâmicas:

$$\Phi = \Phi_b + \Phi_f, S = S_b + S_f - \gamma \frac{B_S}{T}, N = N_{\{f\}} - \lambda \frac{B_N}{\mu}, U = U_b + U_f - \lambda B_N - \gamma B_S, \quad (5.7)$$

onde B_S e B_N são

$$B_S = \frac{T}{\gamma} \sum_{i=b,f} \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle, \quad B_N = \frac{\mu}{\lambda} \sum_{i=b,f} \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \quad \alpha = 0. \quad (5.8)$$

As soluções de B_i são inversamente proporcionais a λ ou γ , assim as Eqs. (5.7) são independentes de γ e λ , diferentemente do caso $\alpha \neq 0$. Como no caso canônico [27], o significado físico de $B(V, T, \mu)$ pode-se extraído a partir da mecânica estatística quântica e de seus valores médios. Para a energia interna, tem-se

$$U = \left\langle \sum_{b,f} \hat{H} \right\rangle + \eta B = \text{Tr}[\hat{\rho}(\sum_{b,f} \hat{H} + \eta \hat{B})], \quad (5.9)$$

onde $\hat{\rho}$ é o operador de densidade grande canônico, e $\hat{B} \equiv B \mathbf{1}$ é o termo extra com o operador unidade. Assim como para $\hat{\rho}_c$, o operador densidade grande canônico é invariante à transformação da hamiltoniana por um termo independente de q e p . Utilizando esta propriedade, encontra-se que a Eq. (5.9) mantém a mesma definição da mecânica estatística usual: U é o valor médio da hamiltoniana do sistema. Portanto, a hamiltoniana efetiva completa, partículas mais vácuo, que deve ser utilizada no modelo de quase-partícula, é $\hat{H}_e = \sum \hat{H} + \hat{E}_0$, com $\hat{E}_0 = \eta \hat{B}$ sendo a energia de ponto zero. O procedimento padrão de descartar a energia de ponto zero, como esperado, também não pode ser efetuado neste ensemble sem levar a inconsistências teóricas.

No caso do número médio de partículas, a mesma manipulação utilizada para U pode ser feita aqui, sendo que uma função dependente de T/μ é adicionada ao operador \hat{N} ao invés do operador \hat{H} . Assim N segue a mesma definição da mecânica estatística usual: N é obtido através do valor médio do operador número efetivo, $\hat{N}_e = \hat{N} + \hat{N}_0$, com $\hat{N}_0 = -\frac{\lambda}{\mu} \hat{B}$. O termo extra $-\lambda \hat{B}/\mu$ representa o número de partículas associadas à energia de ponto zero, que significa que pode-se ver a energia de ponto zero no cenário de quase-partículas, multiplicada por determinada constante, como um mecanismo de adicionar ou subtrair partículas do sistema. Estas redefinições implicam nas seguintes funções termodinâmicas

$$S = -\langle \ln \hat{\rho}_e \rangle - \gamma \frac{B}{T}, \quad \Phi = -T \ln Z_e + \gamma B, \quad N = \langle \hat{N}_e \rangle, \quad U = \langle \hat{H}_e \rangle. \quad (5.10)$$

onde Z_e é a função de partição com \hat{H}_e and \hat{N}_e . Note que para $\gamma = 0$, as definições da mecânica estatística para entropia, grand potencial, número de partículas e energia interna são as usuais.

A interpretação para B no caso de $\alpha = 0$ segue o mesmo procedimento do caso $\alpha \neq 0$. Utilizando novamente a versão quântica da energia interna, obtem-se

$$U = U_b + U_f - \lambda B_N - \gamma B_S = \text{Tr}[\hat{\rho}(\sum_{i=b,f} \hat{H}_i - \lambda \hat{B}_N - \gamma \hat{B}_S)], \quad (5.11)$$

onde $\hat{B}_j \equiv B_j \mathbf{1}$ é o operador para $j = N, S$. Assim como antes, $\hat{H}_e = \sum \hat{H} + \hat{E}_0$, com $\hat{E}_0 = -\lambda \hat{B}_N - \gamma \hat{B}_S$ a energia de ponto zero, dependente de T e μ . As definições da mecânica estatística para o número de partículas é

$$N = \langle \hat{N} \rangle - \frac{\lambda}{\mu} B_N = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \left(\hat{N} - \frac{\lambda}{\mu} \hat{B}_N \right) \right]. \quad (5.12)$$

Aplicando os mesmos argumentos, o número de partículas efetiva é $\hat{N}_e = \hat{N} + \hat{N}_0$, com $\hat{N}_0 = -\frac{\lambda}{\mu} \hat{B}_N$ sendo o número de partículas associadas com a energia de ponto zero. Finalmente, as relações termodinâmicas escritas em termos da hamiltoniana e do operador número efetivos são.

$$\Phi = -T \ln Z_e + \gamma B_S, \quad S = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle - \gamma \frac{B_S}{T}, \quad N = \langle \hat{N}_e \rangle, \quad U = \langle \hat{H}_e \rangle. \quad (5.13)$$

5.2 Funções Termodinâmicas para $\alpha \neq 0$

A solução geral para sistemas dependentes de T e μ encontrada na Sec. 5.1, deve ser capaz de reproduzir as soluções já conhecidas e estudadas na literatura, como as soluções de Gorenstein-Yang [33] e Bannur [29]. A investigação das possíveis soluções para as funções termodinâmicas necessita do termo extra B . Assim, resolvendo a Eq. (5.6) para B encontra-se

$$\alpha B = B_0 \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} T^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} T^{\frac{\gamma}{\alpha}} \sum_{i=b,f} \int dm_i^2 \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial m_i^2} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} T^{-\frac{\gamma}{\alpha}},$$

ou simplesmente

$$\alpha B = B_0 \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} T^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} T^{\frac{\gamma}{\alpha}} \sum_{i=b,f} \left[\int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} T^{-\frac{\gamma}{\alpha}} + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} T^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \right]. \quad (5.14)$$

O termo extra B , chamado também aqui por energia de sacola ou pressão de sacola, desempenha o papel principal na consistência termodinâmica da teoria. Mas além disto, B

deve ser fisicamente aceitável. A teoria deve garantir que qualquer das soluções contendo B deve recuperar a física conhecida, com por exemplo o limite de Stefan-Boltzmann a altas temperaturass, ou o resultado perturbativo da QCD à temperatura e/ou potencial químico finitos. Em particular, no limite onde as massas são independentes de T e μ , B deve ser, no máximo, uma constante:

$$\lim_{\substack{m_g \rightarrow 0 \\ m_q \rightarrow m_0}} B(m_g, m_f, V) = B_0.$$

Utilizando estas expressões para (5.14), obtem-se:

$$\lim_{\substack{m_g \rightarrow 0 \\ m_q \rightarrow m_0}} B(m_g, m_f, V) = \alpha^{-1} B_0 T^{\frac{\gamma}{\alpha}} \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Deste resultado segue que B_0 deve ser zero quando $\gamma \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, e nos outros casos pode ser uma constante qualquer. Comumente, B é calculado a partir de uma equação diferencial proveniente das relações de Maxwell, $\partial S/\partial\mu = \partial N/\partial T$. Este procedimento leva à uma equação para a constante de acoplamento e para o termo extra B [25, 28, 34]:

$$a_T(T, \mu, g) \frac{\partial g^2}{\partial T} + a_\mu(T, \mu, g^2) \frac{\partial g^2}{\partial \mu} = b(T, \mu, g).$$

Assim, o conhecimento da constante de acoplamento e de B para $\mu = 0$ à uma temperatura arbitrária T , é o suficiente para determinar as funções a qualquer T e μ . Entretanto, como realizado aqui e na Ref. [31], B é dado através de uma solução da Eq. (5.5). Naturalmente, espera-se que ambos procedimentos sejam equivalentes, e de fato os são. A solução geral apresentada aqui foi construída para ser consistente. Ao utilizar as expressões completas das funções termodinâmicas para verificar a relação de Maxwell, encontra-se que elas a respeitam sem qualquer condição adicional às massas ou a constante de acoplamento. Assim, pode-se fazer como feito na Ref. [29], e emprestar as massas das partículas (e o acoplamento) de qualquer estrutura, sem estragar a consistência da teoria. A escolha por uma dada massa para a quase-partícula induzirá uma forma particular para B , deixando toda a teoria auto-consistente. Entretanto, como será mostrado aqui, esta consistência vale apenas para as funções completas, e não na expansão perturbativa, com apenas uma exceção.

Com a expressão geral para B , é possível encontrar as soluções particulares através de escolhas particulares para o conjunto de constantes α , γ , λ , e η . Estas soluções são:

5.2.1 Solução 1: Gorenstein-Yang

Como dito anteriormente, os autores da Ref. [33] estudaram a termodinâmica de um sistema cujas massas dependiam de T/μ , através de duas condições: (i) as funções ter-

modinâmicas são definidas como no caso da mecânica estatística usual, e (ii) a pressão é minimizada com relação aos parâmetros fenomenológicos. Na solução geral desenvolvida aqui, a condição $\gamma = 0$ garante (i), implicando que o vácuo não contribui para a entropia total do sistema. As funções correspondentes são dadas por:

$$\begin{aligned}
S &= - \sum_{i=b,f} \langle \ln \hat{\rho}_i \rangle \\
\Phi &= - \sum_{i=b,f} \left(T \ln Z_i + \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right) + \alpha B_0 \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} \\
N &= \langle \hat{N} \rangle + \frac{\lambda}{\alpha} \mu^{-1} \sum_{i=b,f} \left(\int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle + \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \right) - B_0 \lambda \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}-1} \\
U &= \sum_{i=b,f} \left[\langle \hat{H}_i \rangle - \frac{\eta}{\alpha} \left(\mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right) \right] + \eta B_0 \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}}. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

As soluções com $\gamma = 0$ serão classificadas como soluções do tipo Gorenstein-Yang, e pode ser dividida em dois ramos.

A Solução Original

Esta é a solução mais utilizada na literatura, deduzida diretamente das condições (i) e (ii), onde inúmeros trabalhos sobre QGP estudados pelo modelo de quase-partícula foram desenvolvidos Refs. [21, 23, 24, 25, 22]. Nesta solução nem a entropia nem o número médio de partículas são modificados por termos adicionais provenientes do vácuo. Esta solução é obtida quando $\gamma = \lambda = 0$, e $\alpha = \eta$. As funções termodinâmicas são reduzidas à:

$$\begin{aligned}
S &= - \sum_{i=b,f} \langle \ln \hat{\rho}_i \rangle \\
N &= \langle \hat{N} \rangle \\
\Phi &= - \sum_{i=b,f} \left(T \ln Z_i + \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right) + B_0 \\
U &= \sum_{i=b,f} \left[\langle \hat{H}_i \rangle - \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} - \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right] + B_0. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Por ser largamente conhecida e estudada esta solução não será tratada em detalhes, já que estes podem ser encontrados na Ref. [33]. Esta solução será denominada por GY1.

A Solução Modificada

A segunda solução do tipo Gorenstein-Yang é obtida escolhendo $\gamma = \eta = 0$, $\alpha = \lambda$, o que significa que S e U conservam sua expressão original, enquanto Φ e N são modificados. Incluindo bósons e férmions as funções termodinâmicas são escritas como

$$\begin{aligned}
S &= - \sum_{i=b,f} \langle \ln \hat{\rho}_i \rangle \\
U &= \sum_{i=b,f} \langle \hat{H}_i \rangle \\
\Phi &= - \sum_{i=b,f} \left(T \ln Z_i + \mu \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-1} + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right) + B_0 \mu \\
N &= \langle \hat{N} \rangle + \frac{\lambda}{\alpha} \mu^{-1} \sum_{i=b,f} \left(\int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle + \mu \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-1} \right) - B_0. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Esta solução será chamada de GY2.

5.2.2 Solução 2: Bannur

Esta solução é baseada no princípio que quantidades termodinâmicas que possuem análogos microscópicos devem ser calculados pelos valores médios destas grandezas, por exemplo a energia interna e o número médio de partículas. Bannur estudou tanto o caso para $\mu = 0$, conforme mencionado anteriormente. Recentemente estendeu seu formalismo para $\mu \neq 0$ [29]. Em ambos os casos, foi encontrado uma boa concordância com os dados da rede, exceto para a região $T_c < T \leq 1.2T_c$. Fazendo $\eta = \lambda = 0$ nas Eqs. (5.13) e (5.14), obtem-se:

$$\begin{aligned}
N &= \langle \hat{N} \rangle \\
U &= \sum_{i=b,f} \langle \hat{H}_i \rangle \\
S &= - \sum_{i=b,f} \left(\langle \ln \hat{\rho}_i \rangle - \frac{1}{T} \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle - \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle T^{-1} \right) - B_0 \\
\Phi &= - \sum_{i=b,f} \left(T \ln Z_i + \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle + T \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle T^{-1} \right) + B_0 T. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

5.2.3 Comportamento Assintótico das Soluções

As funções termodinâmicas serão calculadas explicitamente para um sistema composto por quarks, anti-quarks e glions, cuja hamiltoniana é $H_i \equiv \omega_i = \sqrt{k^2 + m_i^2(T, \mu)}$, onde $|k|$ é a magnitude do vetor momento da quase-partícula. Para obter o comportamento assintótico das soluções,  necessário saber a dependência das quase-massas com relação  T e μ . No entanto, a mecânica estatística não fornece esta relação, sendo que o procedimento usual para adquirir tal informação  através da HTL [34]. Em 2 ordem (NLO), a massa para os glions e quarks são [18, 25] :

$$m_g^2 = \frac{m_D^2}{2} - \frac{N_c}{\pi\sqrt{2}} g^2 T m_g,$$

$$\widetilde{m}_q^2 = \frac{N_g g^2}{8N_c} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{N_g \sqrt{2} g^2}{N_c 4\pi} T m_g, \quad (5.19)$$

onde $N_g = (N_c^2 - 1)$ é o número de glúons, N_f é o número de sabores, e $m_D^2 = g^2 \left(\frac{2N_c + N_f}{6} T^2 + \frac{N_f \mu^2}{2\pi^2} \right)$ é a massa de Debye [18, 34], que é a generalização da massa de Debye para μ finito apresentada no capítulo anterior. Note que assim como a massa de Debye, a massa dos glúons completa como função de T e μ é apresentada na Eq. (5.19). Incluindo a massa nua quarkônica m_0 , pode-se obter a expressão completa para a massa dos quarks $m_q = \sqrt{m_0^2 + \widetilde{m}_q^2}$. Utilizando o limite assintótico $g \ll 1$ (e $\mu/T \ll 1$), a massa dos quarks e anti-quarks são escritas como

$$m_q^2 = m_0^2 + \frac{N_g g^2 T^2}{8N_c} \left[1 + \frac{\mu^2}{\pi^2 T^2} - \frac{g}{\pi} \left(2\sqrt{\frac{2N_c + N_f}{6}} + \frac{3N_f}{\sqrt{12N_c + 6N_f}} \frac{\mu^2}{\pi^2 T^2} \right) + \frac{N_c g^2}{\pi^2} \right] \quad (5.20)$$

Para acomodar os efeitos não-perturbativos ao modelo de quase-partículas próximo à região de desconfinamento, a constante de acoplamento g será trocada por uma constante de acoplamento efetiva inspirada em QCD perturbativa, [28]:

$$g_s^2(T, \mu) = \frac{16\pi^2}{\beta_0 \ln \xi^2} \left[1 - \frac{2\beta_1 \ln(\ln \xi^2)}{\beta_0^2 \ln \xi^2} \right], \quad (5.21)$$

com $\beta_0 = (11N_c - 2N_f)/3$, $\beta_1 = (34N_c^2 - 13N_f N_c + 3N_f/N_c)/6$, e $\xi \equiv \lambda_s \frac{T}{T_c} \sqrt{1 + u^2 \frac{\mu^2}{T^2}} - \lambda_s \frac{T_s}{T_c}$. O fator $\sqrt{1 + u^2 \frac{\mu^2}{T^2}}$ em ξ surge do estudo da constante de acoplamento na QCD à temperatura e potencial químico finito, através do método de “semiclassical background field” [52]. O parâmetro u será escolhido de forma a fornecer o melhor ajuste aos resultados da rede. Para $\mu/T \rightarrow 0$, a Eq. (5.21) é reduzida ao resultado usual para a constante de acoplamento. Neste caso:

$$B = \frac{B_0}{\alpha} \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} T^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{\mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} T^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{\alpha} \sum_{b,f} \left[\int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} T^{-\frac{\gamma}{\alpha}} + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} T^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \right] = B_b + B_f, \quad (5.22)$$

onde B_b corresponde à contribuição dos glúons, e B_f aos quarks e anti-quarks juntamente com B_0 . O valor médio das derivadas das hamiltonianas com relação às massas são:

$$\left\langle \frac{\partial H_b}{\partial m_b^2} \right\rangle = \frac{V d_b}{4\pi^2} \int dk \frac{n_b^+ k^2}{\sqrt{k^2 + m_b^2}} = \frac{d_b V T^2}{2\pi^2} J_3 \left(\frac{m_b}{T} \right) \approx \frac{d_b V T^2}{24}; \quad (5.23)$$

$$\left\langle \frac{\partial H_f}{\partial m_f^2} \right\rangle = \frac{V d_f}{4\pi^2} \int dk \frac{n_f^+ k^2}{\sqrt{k^2 + m_f^2}} = \frac{d_f V T^2}{2\pi^2} I_3^T \left(\frac{m_f}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \approx \frac{d_f V T^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\mu^2}{4T^2} \right) \quad (5.24)$$

onde d_b e d_f são os fatores de degenerescência para bósons e férmions respectivamente, e as funções de distribuições são agora definidas como $n_f^\pm(k) = [e^{\beta(\sqrt{k^2 + m_f^2} - \mu)} + 1]^{-1} \pm$

$[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_f^2}+\mu)} + 1]^{-1}$, e $n_b^\pm(k) = \frac{1}{2}([e^{\beta(\sqrt{k^2+m_b^2})} - 1]^{-1} \pm [e^{\beta(\sqrt{k^2+m_b^2})} - 1]^{-1})$. As funções I_i^T são calculadas no apêndice B. As derivadas das massas com relação à T e μ

$$\frac{\partial m_b^2}{\partial \mu} = g^2 \frac{N_f \mu}{2 \pi^2}, \quad \frac{\partial m_b^2}{\partial T} = g^2 \frac{2N_c + N_f}{6} T; \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial m_f^2}{\partial \mu} = g^2 \frac{N_g \mu}{4N_c \pi^2}, \quad \frac{\partial m_f^2}{\partial T} = g^2 \frac{N_g}{4N_c} T. \quad (5.26)$$

Note que foi utilizada a aproximação em primeira ordem nas relações acima, e com estas quatro equações B pode ser calculado facilmente. Para a contribuição dos glúons utilizam-se as Eqs. (5.22), (5.23), e (5.25), assim

$$\frac{B_b \alpha}{V d_b} \approx -\frac{m_b^2 T^2}{12(2-\Lambda)} + g^2 \frac{(2N + N_f) T^4}{12^2} \frac{2 + \Lambda - \Gamma}{(2-\Lambda)(4-\Gamma)}, \quad (5.27)$$

onde $\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha}$ e $\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$. A partir das Eqs. (5.22), (5.24) e (5.26), pode-se encontrar a contribuição dos quarks e anti-quarks

$$\frac{B_f \alpha}{V d_f} \approx B_0 \mu^\Lambda T^\Gamma - \frac{m_f^2}{12(4-\Gamma)} \left(T^2 + \frac{3\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{g^2 N_g \mu^2}{32\pi^2(4-\Gamma)N_c} \left[\frac{\Lambda - \Gamma}{4-\Lambda} \frac{\mu^2}{\pi^2} + \left(\frac{2}{2-\Gamma} + \frac{2-\Gamma+\Lambda}{3(2-\Lambda)} \right) T^2 \right]. \quad (5.28)$$

No cálculo de B_b e B_f a grandes T e μ , utilizou-se as seguintes condições assintóticas: $\frac{T_0}{T} \ll 1$, e $\frac{\mu_0}{\mu} \ll 1$, onde T_0 e μ_0 são os limites inferiores das integrais. Nesta região $g \ll 1$ e a constante de acoplamento é uma função que varia pouquíssimo com T e μ , justificando tratá-la como constante nas Eqs. (5.25) e (5.26). As integrais, como pode ser visto no apêndice B, convergem apenas quando $\Lambda < 2$ e $\Gamma < 2$. Inspirado pelo caso do sistema composto apenas por bósons [27], esta condição será também chamada de *condição fraca*. Estes resultados resultam nas expressões necessárias para descrever a termodinâmica do sistema. Para escrever a pressão assintótica são necessárias as Eqs. (5.1), (5.27) e (5.28). Então,

$$P(T, \mu) = \frac{\pi^2}{90} \left(\frac{7N_c N_f + 4N_g}{2} T^4 + 15N_c N_f \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{15N_c N_f \mu^4}{2 \pi^4} \right) + \frac{N_g g^2}{32} \left(\frac{4N + 5N_f}{9} \frac{2-\Gamma}{4-\Gamma} T^4 + 2N_f \frac{\Gamma\Lambda - \Gamma - \Lambda}{(2-\Gamma)(2-\Lambda)} \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + N_f \frac{2-\Lambda}{4-\Lambda} \frac{\mu^4}{\pi^4} \right). \quad (5.29)$$

O termo independente de g é a conhecida pressão de Stefan-Boltzmann, enquanto a parte restante é a correção em ordem g^2 . Utilizando a Eq. (5.29) na Eq. (2.6) é possível obter todas as outras funções termodinâmicas. Por outro lado, seguindo os mesmos passos usados no cálculo da pressão, pode-se calcular as outras quantidades diretamente, sem o

auxílio das relações entre as funções termodinâmicas. Como a teoria é termodinamicamente consistente, ambos procedimentos devem fornecer o mesmo resultado. Contudo, a consistência foi provada apenas para as funções termodinâmicas completas, ou seja, sem aproximações. Uma questão então aparece: As funções termodinâmicas são também consistentes ordem a ordem em uma expansão perturbativa? A resposta à esta questão apenas pode ser dada após o cálculo de S , N e U nas duas maneiras e comparado seus resultados.

A densidade de entropia s , é calculada com o auxílio das Eqs. (5.3), (5.27) e (5.28):

$$s(T, \mu) = \frac{\pi^2 T}{3} \left(\frac{7N_c N_f + 4N_g}{15} T^2 + N_c N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) + \frac{N_g g^2 T}{24} \left[\frac{4N_c + 5N_f}{3} \frac{2 - \Gamma}{4 - \Gamma} T^2 + \frac{3N_f}{2} \frac{4 - 6\Gamma - 2\Lambda + 2\Gamma\Lambda + \Gamma^2}{(2 - \Gamma)(2 - \Lambda)} \frac{\mu^2}{\pi^2} - \frac{3N_f \Gamma}{2(4 - \Lambda)} \frac{\mu^4}{\pi^4 T^2} \right] \quad (5.30)$$

Para a densidade de partículas $n = N/V$, utiliza-se o fato que $\langle N_f \rangle = \frac{d_f T^3}{\pi^2} G_3^T \left(\frac{m_f}{T}, \frac{\mu}{T} \right)$, assim encontra-se que o número de partículas médio é:

$$n(T, \mu) = N_c N_f \frac{\mu}{3} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) + \frac{N_g g^2 \mu}{16\pi^2} \left(N_f \frac{4 - 2\Gamma - 6\Lambda + 2\Gamma\Lambda + \Lambda^2}{(2 - \Gamma)(2 - \Lambda)} T^2 + \frac{2N_f(2 - \Lambda)}{(4 - \Lambda)} \frac{\mu^2}{\pi^2} + \frac{4N + 5N_f}{9(4 - \Gamma)} \frac{\Lambda \pi^2 T^4}{\mu^2} \right) \quad (5.31)$$

Por outro lado, calculando s e n através do resultado para P Eq. (5.29), juntamente com as relações termodinâmicas da pela Eq. (2.6), obtem-se:

$$s_{therm} = \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\pi^2 T}{3} \left(\frac{7N_c N_f + 4N_g}{15} T^2 + N_c N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) + \frac{N_g g^2 T}{8} \left[\frac{4N + 5N_f}{9} \frac{2 - \Gamma}{4 - \Gamma} T^2 + N_f \frac{\Gamma\Lambda - \Gamma - \Lambda}{(2 - \Gamma)(2 - \Lambda)} \frac{\mu^2}{\pi^2} \right];$$

$$n_{therm} = \frac{\partial P}{\partial \mu} = \frac{N_c N_f \mu}{3} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{N_g N_f g^2 \mu}{8\pi^2} \left[\frac{\Gamma\Lambda - \Gamma - \Lambda}{(2 - \Gamma)(2 - \Lambda)} T^2 + \frac{2 - \Lambda}{4 - \Lambda} \frac{\mu^2}{\pi^2} \right] \quad (5.32)$$

Trivialmente, o resultado para os termos independentes de g são consistentes: ambos procedimentos resultam no mesmo resultado. Entretanto, os termos em g^2 não concordam entre si. Por exemplo, para a entropia apenas os termos dependentes da temperatura concordam entre si. O mesmo acontece para n , mas agora ao invés do termo dependente apenas de T ser consistente, é o termo que envolve o potencial químico que concorda. Os termos que envolvem tanto T quanto μ , não concordam em nenhuma situação. Comparando ambos procedimentos, para o termo μT^2 para n , e $T\mu^2$ em s , a única solução que produz uma possível concordância entre os procedimentos é aquela cujo $\Gamma = \Lambda = 2$. No entanto, esta solução é excluída por B , já que a integral não converge para esses valores.

Concluindo, o limite assintótico das funções termodinâmicas não satisfaz a consistência termodinâmica ordem a ordem na expansão perturbativa. O mesmo acontece para as soluções $\alpha = 0$?

5.3 A Solução $\alpha = 0$

A principal característica da solução $\alpha = 0$ reside no fato de que esta solução é a mais simples de se calcular, já que B_S e B_N não são definidos por integrais em T e μ . Neste caso é possível obter resultados analíticos para quase todo intervalo da temperatura e potencial químico. De forma a obter a termodinâmica do sistema, é conveniente iniciar pela pressão, $P = -\Phi V^{-1}$, já que não existe contribuição de termos adicionais. A pressão para um gás ideal, com as devidas massas de quase-partículas é

$$P(T, \mu) = \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty dk k^4 \sum_{i=b,f} d_i \frac{n_i^+(k)}{\sqrt{k^2 + m_i^2(T, \mu)}}, \quad (5.33)$$

A Eq. (5.33) pode ser calculada explicitamente a partir das integrais resolvidas no apêndice B. A técnica utilizada nesta solução, que é análoga ao do caso bosônico, não obteve sucesso quando utilizada separadamente para férmions ou para anti-férmions, já que quantidades divergentes foram obtidas em cada caso. Contudo, quando a expressão completa foi utilizada, ou seja, a contribuição de férmions e anti-férmions foram postas juntamente, pode-se calcular analiticamente as integrais necessárias, obtendo-se um valor finito para as mesmas quando os seguintes vínculos fermiônicos forem satisfeitos : (i) $\frac{\mu}{T}, \frac{m_f}{T} < \pi$ ou (ii) $\left| \frac{a^2}{\pi^2} + \frac{2ai}{\pi} - \frac{r_f^2}{\pi^2} \right| < 1$, onde $a = \frac{\mu}{T}$ e $r_f = \frac{m_f}{T}$. Já para bósons, as condições de contorno são $r_b = \frac{m_b}{T} < 2\pi$. Desta forma a pressão pode ser escrita como $P = \frac{4}{\pi^2} T^4 [d_f I_5^T(r_f, a) + d_b J_5(r_b)]$, ou

$$\begin{aligned} P = \frac{\pi^2 T^4}{90} & \left\{ d_b + \frac{7d_f}{4} + \frac{15a^2 d_f}{2\pi^2} + \frac{15a^4 d_f}{4\pi^4} - \frac{15(d_f r_f^2 + d_b r_b^2)}{4\pi^2} - \frac{45a^2 r_f^2 d_f}{4\pi^4} + \frac{15r_b^3 d_b}{2\pi^2} + \right. \\ & + \frac{45}{8\pi^4} \left[r_f^4 d_f \left(\frac{3}{4} - \gamma_E - \ln \frac{r_f}{\pi} \right) - \frac{r_b^4 d_b}{2} \left(\frac{3}{4} - \gamma_E - \ln \frac{r_b}{4\pi} \right) \right] + \frac{105\zeta(3)d_f}{64\pi^6} (r_f^2 - a^2)^3 + \\ & + \frac{45(r_f^2 - a^2)^2 d_f}{64\pi^2} \left[21\zeta(3)a^2 - \frac{31\zeta(5)}{32\pi^2} (r_f^2 - a^2)^2 \right] + \frac{45d_b}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2}) r_b^{2(n+2)}}{(2\pi)^{2n} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+3)} + \\ & \left. - d_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{45(2n+1)^3}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(k+3)} \Re \left(\frac{a^2 - r_f^2}{[(2n+1)\pi]^2} + \frac{2ai}{(2n+1)\pi} \right)^{k+2} \right\} \quad (5.34) \end{aligned}$$

No cálculo da entropia e da energia interna são necessários os termos extras, Eqs. (5.7) e (5.8). Assim obtem-se

$$\begin{aligned}
s(T, \mu) &= \frac{1}{2\pi^2 T} \int_0^\infty dk k^2 \sum_{i=b,f} d_i \left[\frac{\frac{4}{3}k^2 + \left(m_i^2 - \frac{T}{2} \frac{\partial m_i^2}{\partial T}\right)}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} n_i^+(k) - \mu n_i^-(k) \right] \\
&= \frac{d_f T^3}{\pi^2} \left[16I_5^T(r_f, a) + \left(\frac{m_f^2}{T^2} - \frac{1}{2T} \frac{\partial m_f^2}{\partial T}\right) I_3^T(r_f, a) - \frac{\mu}{T} G_3^T(r_f, a) \right] + \\
&\quad + \frac{d_b T^3}{\pi^2} \left[16J_5(r_b) + \left(\frac{m_b^2}{T^2} - \frac{1}{2T} \frac{\partial m_b^2}{\partial T}\right) J_3(r_b) \right]. \quad (5.35)
\end{aligned}$$

Utilizando as integrais dos apêndices A e B pode-se calcular certas funções termodinâmicas. Para o caso da densidade de energia interna, o resultado é:

$$\begin{aligned}
e(T, \mu) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \sum_{i=b,f} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \left[k^2 + m_i^2 - \frac{1}{2} \left(\mu \frac{\partial m_i^2}{\partial \mu} + T \frac{\partial m_i^2}{\partial T} \right) \right] d_i n_i^+(k) \\
&= \frac{d_f T^4}{\pi^2} \left\{ 12I_5^T(r_f, a) + \left[\frac{m_f^2}{T^2} - \frac{1}{2T^2} \left(\mu \frac{\partial m_f^2}{\partial \mu} + T \frac{\partial m_f^2}{\partial T} \right) \right] I_3^T(r_f, a) \right\} + \\
&\quad + \frac{d_b T^4}{\pi^2} \left\{ 12J_5(r_b) + \left[\frac{m_b^2}{T^2} - \frac{1}{2T^2} \left(\mu \frac{\partial m_b^2}{\partial \mu} + T \frac{\partial m_b^2}{\partial T} \right) \right] J_3(r_b) \right\}. \quad (5.36)
\end{aligned}$$

Similarmente, o resultado para o número médio de partículas é

$$\begin{aligned}
n(T, \mu) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sum_{i=b,f} d_i \left[n_i^-(k) - \frac{1}{2\sqrt{k^2 + m_i^2}} \frac{\partial m_i^2}{\partial \mu} n_i^+(k) \right] \\
&= \frac{T^3}{\pi^2} \left\{ d_f G_3^T(r_f, a) - \frac{1}{2T} \left[d_f \frac{\partial m_f^2}{\partial \mu} I_3^T(r_f, a) + d_b \frac{\partial m_b^2}{\partial \mu} J_3(r_b) \right] \right\}. \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Como no caso $\alpha \neq 0$, é importante investigar a consistência termodinâmica das funções termodinâmicas ordem a ordem na expansão perturbativa. A pressão calculada em ordem mais baixa, Eq. (5.34), é

$$\begin{aligned}
P(T, \mu) &= \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{7N_c N_g + 4N_g T^4}{30} + N_f N_c \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{N_f N_c \mu^4}{2 \pi^4} \right) + \\
&\quad - \frac{N_g g^2}{16} \left(\frac{4N + 5N_f T^4}{18} + N_f \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{N_f \mu^4}{2 \pi^4} \right). \quad (5.38)
\end{aligned}$$

Os resultados em ordem mais baixa para s e n são calculados a partir das Eqs. (5.35) e (5.37):

$$\begin{aligned}
s(T, \mu) &= \frac{\pi^2 T}{3} \left(\frac{7N_c N_f + 4N_g T^2}{15} + N_c N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{g^2 T N_g}{8} \left(\frac{4N + 5N_f T^2}{9} + N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right), \\
n(T, \mu) &= \frac{N_c N_f \mu}{3} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{g^2 N_g N_f \mu}{8\pi^2} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right). \quad (5.39)
\end{aligned}$$

A densidade de entropia e de partículas podem ser encontradas a partir das relações termodinâmicas. Assim como anteriormente, estas serão denotadas por s_{therm} e n_{therm} , respectivamente. Contrariamente ao que foi visto no caso $\alpha \neq 0$, as expressões resultantes concordam entre si: para $\alpha = 0$, $s = s_{therm}$ e $n = n_{therm}$ ao menos até a ordem g^2 .

5.4 Comparação com QCD Perturbativa

O formalismo de quase-partículas foi introduzido para descrever o QGP, principalmente porque a QCD perturbativa é incapaz de estudá-la próxima da região de desconfinamento, já que esta só exhibe uma boa convergência para temperaturas maiores que $10^5 T_c$. Como candidato a um modelo para toda região de temperatura $T > T_c$, espera-se que no limite de temperaturas e potenciais químicos extremamente altos os resultados do modelo de quase-partículas concordem com o resultado de QCD.

Na QCD perturbativa, as funções termodinâmicas em ordem g^2 , são [18]:

$$\begin{aligned} s_{QCD} &= \frac{\pi^2 T}{3} \left(\frac{7N_c N_f + 4N_g}{15} T^2 + N_c N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{g^2 T N_g}{16} \left(\frac{4N + 5N_f}{9} T^2 + N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right); \\ n_{QCD} &= \frac{N_c N_f \mu}{3} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{g^2 N_g N_f \mu}{16\pi^2} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right); \\ P_{QCD} &= \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{7N_c N_g + 4N_g}{30} T^4 + N_f N_c \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{N_f N_c \mu^4}{2\pi^4} \right) + \\ &\quad - \frac{N_g g^2}{32} \left(\frac{4N + 5N_f}{18} T^4 + N_f \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{N_f \mu^4}{2\pi^4} \right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

A seguir, as várias soluções para a termodinâmica de quase-partículas serão comparadas com a QCD perturbativa, assim como a comparação entre as soluções para $\alpha \neq 0$ e $\alpha = 0$. Como visto anteriormente, as soluções para $\alpha \neq 0$ possuem sérios problemas com a consistência termodinâmica ordem a ordem na expansão perturbativa. Contudo, a comparação entre QCD perturbativa será feita utilizando as Eqs. (5.29), (5.30), e (5.31) calculadas diretamente de suas definições. Se ao invés destas utilizar-se as Eqs. (5.32), as expressões termodinâmicas serão diferentes mas a conclusão final será a mesma. Os casos discutidos até então são:

1. $\gamma = \lambda = 0$, $\alpha \neq 0$: Solução GY1.

$$\begin{aligned} P_{GY1} &= -\frac{g^2 N_g}{64} \left(\frac{4N + 5N_f}{9} T^4 + N_f \frac{\mu^4}{\pi^4} \right), \\ s_{GY1} &= -\frac{g^2 N_g T}{16} \left(\frac{4N + 5N_f}{9} T^2 + N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right), \quad n_{GY1} = -\frac{g^2 N_g N_f \mu}{16\pi^2} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) \end{aligned}$$

Embora esta seja a solução amplamente utilizada na literatura [21, 22, 23, 24, 25], a expressão assintótica para pressão em ordem g^2 não concorda com a QCD perturbativa, apesar de s e n sim. Entretanto, esta concordância é puramente acidental

dada a falta de consistência termodinâmica nesta ordem, como discutida na Sec. 5.2.3. Observe que todo problema provém do termo misto, $\mu^2 T^2$ na pressão.

2. $\gamma = \eta = 0$, $\alpha \neq 0$: Solução GY2.

$$\begin{aligned} P_{GY2} &= -\frac{g^2 N_g}{32} \left(\frac{4N + 5N_f T^4}{18} - \frac{N_f \mu^2 T^2}{2 \pi^2} + \frac{N_f \mu^4}{3 \pi^4} \right), \\ s_{GY2} &= -\frac{g^2 s N_g T}{16} \left(\frac{4N + 5N_f T^2}{9} + N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right), \\ n_{GY2} &= -\frac{g^2 N_g \mu}{16 \pi^2} \left(\frac{4N + 5N_f \pi^2 T^4}{36 \mu^2} - \frac{N_f T^2}{2} + \frac{2N_f \mu^2}{3 \pi^2} \right) \end{aligned}$$

Aqui apenas a densidade de entropia s concorda com o resultado perturbativo.

3. $\lambda = \eta = 0$, $\alpha \neq 0$: Solução Bannur.

$$\begin{aligned} P_B &= -\frac{g_s^2 N_g}{32} \left(\frac{4N + 5N_f T^4}{27} - N_f \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{N_f \mu^4}{2 \pi^4} \right), \\ s_B &= -\frac{g_s^2 N_g T}{24} \left(\frac{4N + 5N_f T^2}{9} - \frac{3N_f \mu^2}{4 \pi^2} - \frac{3N_f \mu^4}{8 \pi^4 T^2} \right), \quad n_B = -\frac{g_s^2 N_g N_f \mu}{16 \pi^2} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right). \end{aligned}$$

Como esperado, a única função que concorda com a QCD é n .

4. $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned} P_{\alpha=0} &= -\frac{N_g g^2}{16} \left(\frac{4N + 5N_f T^4}{18} + N_f \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{N_f \mu^4}{2 \pi^4} \right), \\ s_{\alpha=0} &= -\frac{g^2 T N_g}{8} \left(\frac{4N + 5N_f T^2}{9} + N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right), \quad n_{\alpha=0} = -\frac{g^2 N_g N_f \mu}{8 \pi^2} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right). \end{aligned}$$

Diferentemente dos 3 casos vistos até então, as soluções para $\alpha = 0$ são as únicas que são consistentes ordem a ordem. Entretanto, ao utilizar as massas do HTL para obtenção das funções termodinâmicas explicitamente em função de T e μ , Eqs. (5.38) and (5.39), obtém-se como resultado para a correção em g^2 , metade do valor perturbativo para as 3 funções.

A questão relevante neste momento é: Há algum regime em que haja a consistência ordem a ordem, além de reproduzir o resultado de QCD perturbativa? Como visto, a única possibilidade para soluções consistentes ordem a ordem é aquela em que a energia livre não apresenta termos adicionais a do gás ideal, $\alpha = 0$. Entretanto, para reproduzir a QCD perturbativa a quase-massa de quarks e glúons não pode ser proveniente de HTL. Inspirado pelo cálculo à temperatura finita T e $\mu = 0$ do capítulo 4, onde a massa de HTL foi trocada por $m_{HTL}/\sqrt{2}$ de forma a concordar com QCD perturbativa para $\alpha = 0$, o mesmo pode ser feito aqui. De fato, ao alterar esta relação na massa dos quarks e dos glúons, encontra-se a completa concordância entre o resultado perturbativo e a termodinâmica.

Já que a solução para $\alpha = 0$ satisfaz a condição fraca, e é termodinamicamente consistente, também ordem a ordem, uma questão naturalmente aparece: a solução com $\alpha = 0$ reproduz o resultado de QCD na rede?

5.5 QCD na Rede e o Modelo de Quase-Partícula

Por toda dificuldade computacional que existe ao introduzir férmions nos cálculos de rede, só nos últimos anos foram apresentados resultados confiáveis para o plasma próximo a região de desconfinamento. Não existem resultados de rede para temperaturas e potenciais químicos arbitrários, geralmente a QCD na rede a potencial químico finito utiliza-se de expansões em série de Maclaurin em torno de μ/T para calcular quantidades termodinâmicas, onde cálculos recentes levam estas até a ordem de $\mathcal{O}(\mu^6/T^6)$ [12]. Por exemplo para o caso da pressão, a expansão é:

$$\frac{P}{T^4} = c_0(T) + c_2(T)\frac{\mu^2}{T^2} + c_4(T)\frac{\mu^4}{T^4} + c_6(T)\frac{\mu^6}{T^6} + \dots, \quad (5.41)$$

Os coeficientes c_2 , c_4 e c_6 foram calculados na Ref. [12] no intervalo de $[0.76, 1.98]$ para T/T_c . O valor de massa nua dos férmions é necessária tanto para os cálculos teóricos quanto para as simulações na rede. O valor utilizado na Ref. [12] é $m_0/T = 0.4$, o mesmo que será utilizado no cálculo via modelo de quase-partículas. No presente trabalho utilizar-se-á o parâmetro c_2 para restringir os valores dos parâmetros u , λ_s , and T_s , que aparecem na constante de acoplamento efetiva para T e μ finitos, Eq. (5.21). Como visto na seção 5.4, a única solução que reproduz a QCD perturbativa é aquela obtida com $\alpha = 0$. Neste caso a pressão é:

$$p = \frac{P}{T^4} = \frac{4}{\pi^2} [d_f I_5^T(r_f, a) + d_b J_5(r_b)].$$

Por outro lado a definição de c_2 é $c_2(T) = \left. \frac{\partial^2(P/T^4)}{\partial a^2} \right|_{a=0}$, onde $a \equiv \mu/T$. Calculando as derivadas obtém-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial a^2} \right|_{a=0} &= \frac{1}{\pi^2} \left[d_f \left(\frac{\partial}{\partial a} \right) \left(G_3^T - r_f \frac{\partial r_f}{\partial a} I_3^T \right) - d_b \left(\frac{\partial}{\partial a} \right) \frac{\partial r_b}{\partial a} r_b J_3 \right] \Big|_{a=0} \\ \left. \frac{\partial^2 p}{\partial a^2} \right|_{a=0} &= \frac{1}{\pi^2} \left[d_f \left(2I_3^T + \frac{r_f^2}{2} I_1^T - r_f I_3^T \frac{\partial^2 r_f}{\partial a^2} \right) - d_b r_b J_3 \frac{\partial^2 r_b}{\partial a^2} \right] \Big|_{a=0} \end{aligned} \quad (5.42)$$

As expressões para I_1^T , I_3^T , e J_3 possuem somatórias que devem ser truncadas em algum ponto para que haja possibilidade de realizar cálculos numéricos com estas. O critério adotado foi aquele em que o raio de convergência das somas satisfaça $r_{b,f} < \pi$. Com isto em mente, é possível ver que para $r_{b,f}$ próximo a π , uma expansão até $k = 5$ é suficiente, sendo que termos para $k > 5$ fornecem apenas correções marginais.

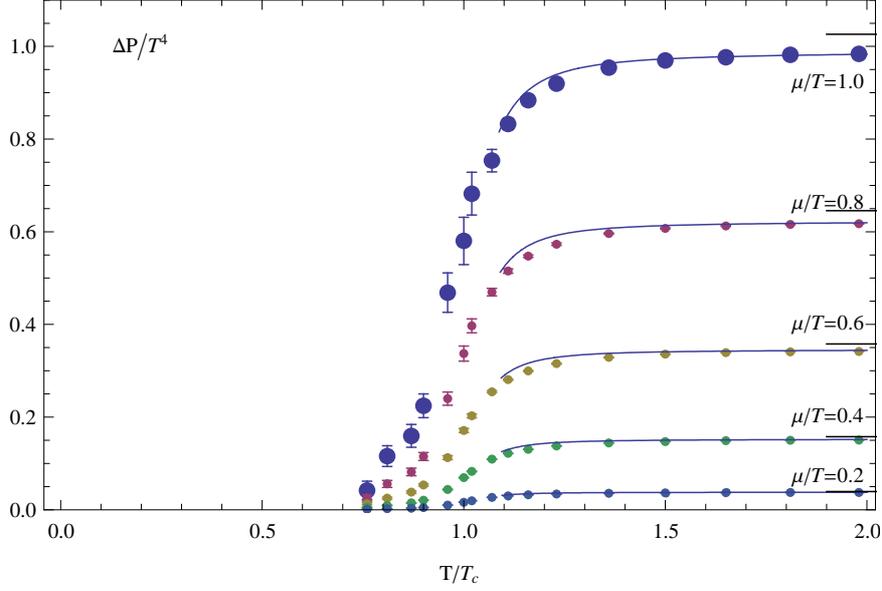


Figura 5.1: A pressão reduzida $\Delta P/T^4$. Os pontos foram obtidos da QCD na rede[12].

Os dados da Ref. [12] foram corrigidos por um fator de 1.12, já que como afirmado na Ref. [54], deve haver uma correção de 10 a 20% ao extrapolar o resultado da rede para o contínuo. Seguindo Letessier and Rafelski [53], a primeira escolha para o parâmetro u que aparece em g_s foi $u = 1/\pi$. Entretanto, com este valor, o ajuste aos dados abaixo de $T/T_c = 1.2$ foi insatisfatório. Se ao invés deste valor utiliza-se $u = 1/2\pi$, observa-se um ajuste satisfatório entre os dados da rede e o cálculo apresentado até então, desde que $2.7 \leq \lambda_s \leq 3$ e $1.6 \leq T_s \leq 2$. Com estes resultados a pressão reduzida $\Delta \frac{P}{T^4} = \frac{P(T,\mu) - P(T,0)}{T^4}$ pode ser calculada e comparada com os dados. Isto é feito na Fig. 1, com $\lambda_s = 3$ e $T_s = 1.98$. Como se pode ver, o ajuste é muito bom, implicando que a solução com $\alpha = 0$ descreve tanto a QCD perturbativa no limite de T e μ muito grandes, quanto na região próxima ao desconfinamento.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho foi estudado a termodinâmica do Plasma de Quarks e Glúons através do modelo de quase-partículas. Ao invés de estudar o sistema com sua hamiltoniana completa, isto é, com os termos cinéticos e potenciais, o modelo de quase-partícula toma este sistema como não interagente, sem energia potencial. Contudo, o termo cinético é modificado, acomodando de certa forma os efeitos das interações no modelo. Particularmente, modifica-se a massa das partículas para que estas sejam dependentes da temperatura e do potencial químico do sistema. Como visto, utilizar esta massa diretamente nas expressões de gás ideal, oriundas da mecânica estatística, acarreta na inconsistência termodinâmica do modelo. Gorenstein e Yang, inspirados pelo modelo de sacola do MIT, encontraram uma solução para este problema que consiste em adicionar uma determinada função B dependente de T e μ à energia interna, e subtrair esta à pressão, sem modificar a estrutura da entropia e do número de partículas. Esta função B foi interpretada como a energia de ponto-zero da matéria desconfinada. Esta solução mostrou-se capaz de descrever os resultados de QCD na rede para o QGP a partir de alguns parâmetros fenomenológicos. Alguns anos mais tarde, apareceram outras soluções para o problema da inconsistência, como por exemplo a solução de Bannur, que adiciona/subtrai uma função B a pressão e a entropia, sem alterar a expressão para energia interna e o número de partículas. A solução de Bannur também foi capaz de descrever os resultados da rede.

Como existia mais de uma solução termodinamicamente consistente, e capaz de descrever os resultados de QCD na rede, uma pergunta simples aparece: haverá mais soluções de qQGP termodinamicamente consistentes? Este trabalho preocupou-se de que forma estas soluções aparecem e se de alguma forma estão interligadas. Primeiramente estudou-se o caso de um sistema composto por bósons não-massivos à $\mu = 0$. Mostrou-se que a partir da redefinição da entropia, energia interna, e energia livre do sistema, cuja redefinição surge da utilização de uma hamiltoniana completa e efetiva para o sistema desconfinado, pode-se obter soluções termodinamicamente consistentes. Dependendo de qual expressão funcional a hamiltoniana possui, obtem-se um conjunto de grandezas termodinâmicas, podendo ser a solução de Gorenstein-Yang ou a de Bannur. Entretanto, quantitativamente

as funções termodinâmicas devem ser muito próximas, pois são capazes de descrever os resultados de QCD na rede. Para o sistema em questão encontrou-se uma solução mais simples do que as outras, onde resultados analíticos puderam ser calculados longe da região assintótica da QCD. Esta solução aparece quando a energia livre do sistema não possui nenhum termo adicional ao de um gás ideal. Contudo, a energia interna e a entropia, apresentam este termo. Da mesma forma ocorrida para as outras soluções, esta também é capaz de descrever os resultados da rede. Entretanto, a análise da matéria formada nos grandes aceleradores, composta por glúons, quarks e anti-quarks, mostrou-se mais complicada. Diferentemente do caso de apenas glúons, a energia de ponto-zero depende de duas variáveis, T e μ , dificultando o cálculo do termo adicional B . A solução consistente com a termodinâmica foi calculada analogamente à de $\mu = 0$. A solução geral para este sistema possui como soluções particulares os resultados de Gorenstein-Yang e Bannur. Uma solução mais fácil apresentou-se, consistindo na mesma forma do grande potencial de um gás ideal. Esta solução, definida por $\alpha = 0$, foi capaz de reproduzir os dados da rede apenas com dois parâmetros fenomenológicos, juntamente com a consistência ordem a ordem do resultado perturbativo, diferentemente de qualquer outra solução que é consistente apenas em sua forma completa. A solução analítica para $\alpha = 0$ não pode ser calculada separadamente para quarks e anti-quarks, ela só existe quando os consideramos juntos no mesmo sistema. É importante ressaltar que a solução geral aplica-se a qualquer problema de quase-partículas e não apenas para o QGP.

Este tratamento, mais especificamente a solução $\alpha = 0$, pode ser aplicada no cálculo de outras quantidades termodinâmicas, como por exemplo na obtenção da energia de interação do plasma $e - 3P$ ou ainda e na obtenção da equação de estado próxima à região de transição. Esta última quantidade pode ser aplicada ao tratamento hidrodinâmico da matéria criada nos grandes aceleradores, auxiliando no processo de entendimento do QGP. A maior parte das simulações hidrodinâmicas utilizam um modelo realístico para a EoS abaixo da transição de desconfinamento, entretanto para a região desconfinaada são usados modelos muito simples como o de MIT [56]. Todavia, resultados de QCD na rede para $T < 2T_c$ indicam uma alteração significativa da EoS. Como os estágios iniciais das colisões no RHIC estão em torno de $T_c < T < 2T_c$, é necessário uma EoS que descreva realisticamente esta região. Da mesma forma, pode-se utilizar a EoS para calcular o raio de estrelas de nêutrons e comparar o resultado com os observacionais. Futuramente, pretende-se utilizar a solução $\alpha = 0$ para obter a EoS e assim tentar descrever resultados como a viscosidade do QGP, escoamento de partículas, número de partículas com especificas pseudo-rapidez, além de diversas grandezas termodinâmicas previamente citadas. Devido ao tratamento analítico desta solução, pode-se descrever o plasma em uma região com temperatura e potencial químico moderados, já esta é convergente para uma região diferente de $\mu/T < \pi$.

“Everything should be made as simple as possible, but not simpler”*, esta frase dita à luz do princípio da navalha de Occam pode muito bem servir-nos como guia sobre a

*“Tudo deve ser feito da forma mais simples possível, mas não mais simples que isso.”

escolha de uma das possíveis soluções apresentadas neste trabalho.

Apêndice A

Integrais Bosônicas

As integrais necessárias para solução das funções termodinâmicas são do tipo

$$J_n(r) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} - 1}. \quad (\text{A.1})$$

Estas integrais satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$\frac{dJ_{n+1}(r)}{dr} = -\frac{r}{n} J_{n-1}(r). \quad (\text{A.2})$$

Para encontrar as soluções cujos valores de n são inteiros, é necessário separá-las em dois tipos, uma para n par e outra para n ímpar. A solução da integral pode ser resolvida utilizando a expansão

$$\coth(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (n\pi)^2}, \quad (\text{A.3})$$

com

$$\coth(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^z - e^{-z} + 2e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = 1 + \frac{2}{e^{2z} - 1}.$$

Utilizando o resultado acima e a mudança de variável $2z = x$ na Eq.(A.3), obtém-se

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2n\pi)^2}. \quad (\text{A.4})$$

A primeira solução será para n ímpar. Iniciando com $n = 1$ substituindo a Eq. (B.8) na Eq. (A.1), encontra-se

$$J_1(r) = \int_0^\infty dx \left(\frac{1}{x^2 + r^2} - \frac{1}{2(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + r^2 + (2n\pi)^2} \right) = j_1 - \frac{1}{2} j_2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} j_{3,n} \quad (\text{A.5})$$

Primeiramente calcular-se-á j_1 :

$$j_1 = \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + r^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{r^2 \left(\frac{x}{r}\right)^2 + 1} = \frac{1}{r} \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{r} \arctan(x) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2r}. \quad (\text{A.6})$$

Para o cálculo da sub-integral j_2 será utilizado o artifício de multiplicar o integrando por um fator de convergência $x^{-\epsilon}$, que no fim será cancelado tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Assim tem-se

$$j_2 = \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = r^{-\epsilon} \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = r^{-\epsilon} \int_0^\infty dx \frac{(x^2)^{-\frac{\epsilon}{2}}}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Utilizando a mudança de variável

$$z = \frac{1}{x^2 + 1} \mapsto x^2 = \frac{1 - z}{z}$$

$$dz = -dx \frac{2(x^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + 1)^2} = -2dx z^{\frac{3}{2}}(1 - z)^{\frac{1}{2}},$$

obtem-se

$$i_2 = \frac{r^{-\epsilon}}{2} \int_0^1 dz z^{-\frac{3}{2}}(1 - z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}(1 - z)^{-\frac{\epsilon}{2}} z^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{r^{-\epsilon}}{2} \int_0^1 dz z^{-1 + \frac{\epsilon}{2}}(1 - z)^{-\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}},$$

onde a função beta $B(\alpha, \beta)$ é definida como

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \int_0^1 dx x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1},$$

assim a sub-integral j_2 é:

$$j_2 = \frac{r^{-\epsilon}}{2} B\left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{r^{-\epsilon}}{2} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})},$$

where $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1 - \epsilon}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2}(\gamma_E + \ln 4) + O(\epsilon^2)\right) \\ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon) \\ r^{-\epsilon} &= e^{-\epsilon \ln(r)} = 1 - \epsilon \ln r + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

onde $\gamma_E \approx 0.5772$ é a constante de Euler-Mascheroni. Assim j_2 é

$$j_2 = \frac{1 - \epsilon \ln r + O(\epsilon^2)}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon)\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2}(\gamma_E + \ln 4) + O(\epsilon^2)\right),$$

que simplificando torna-se

$$j_2 = \frac{1}{\epsilon} - \log \frac{r}{2}. \tag{A.7}$$

Para $j_{3,n}$, será utilizada o fator de convergência $x^{-\epsilon}$ para resolver a integral:

$$\begin{aligned} j_{3,n} &= \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{x^2 + r^2 + (2n\pi)^2} = \frac{1}{2[r^2 + (2n\pi)^2]^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \int_0^1 dz z^{-\frac{1-\epsilon}{2}} (1-z)^{-\frac{1+\epsilon}{2}} \\ &= \frac{1}{2[r^2 + (2n\pi)^2]^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2[r^2 + (2n\pi)^2]^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \frac{1}{\cos(\pi\epsilon/2)}. \end{aligned}$$

O mesmo procedimento utilizado para j_2 foi realizado aqui. Ao expandir a expressão em r e somar sobre n , encontra-se que o termo de ordem r^0 não converge. Expandindo-a em séries de Taylor e mantendo apenas o primeiro termo encontra-se

$$\frac{1}{[r^2 + (2n\pi)^2]^{\frac{1+\epsilon}{2}}} = \frac{1}{(2n\pi)^{1+\epsilon}} + O(r^2). \quad (\text{A.8})$$

Note que na Eq. (A.5) há uma soma sobre $i_{3,n}$. A partir da função zeta de Riemann, definida como

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^x},$$

pode-se reescrever a soma como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{1+\epsilon}} = \frac{1}{(2\pi)^{1+\epsilon}} \zeta(1 + \epsilon). \quad (\text{A.9})$$

Assim o primeiro termo da soma $\sum j_3$ deve ser dado pelo termo acima. Expandindo a raiz quadrada em série de Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + (2n\pi)^2}} = \frac{1}{2\pi n} - \frac{r^2}{2} \frac{1}{(2\pi n)^3} + \frac{3r^4}{8} \frac{1}{(2\pi n)^5} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-1)!! (r^2)^m}{m! 2^m (2\pi n)^{2m+1}}.$$

Lembre que o primeiro termo da soma é dado pela Eq. (A.9). Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(\pi\epsilon/2)} &= 1 + O(\epsilon^2), \\ (2\pi)^{-\epsilon} &= 1 - \epsilon \log 2\pi + O(\epsilon^2), \\ \zeta(1 + \epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} + \gamma_E + O(\epsilon), \end{aligned}$$

assim pode-se reescrever a soma em $j_{3,n}$ as

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} j_{3,n} &= \frac{\pi}{2(2\pi)^{1+\epsilon}} \zeta(1 + \epsilon) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{m! 2^{m+2}} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln 2\pi + \gamma_E\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{m! 2^{m+2}} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{2m} \zeta(2m+1). \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Utilizando os resultados para as sub-integrais, Eqs. (A.6), (A.7) e (A.10), encontra-se $J_1(r)$:

$$J_1(r) = \frac{\pi}{2r} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{r}{4\pi} + \gamma_E \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{m! 2^{m+1}} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{2m} \zeta(2m+1).$$

As singularidades vindas de j_2 and j_3 , provenientes do termo ϵ^{-1} , cancelam-se mutuamente. Para obter todas as soluções de (A.1) é necessário resolver agora o caso de n par. A melhor escolha para isso é $n = 2$, assim

$$I_2(r) = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} - 1},$$

Mudando a variável para $u = \sqrt{x^2 + r^2}$, encontra-se

$$I_2(r) = \int_r^{\infty} du \frac{1}{e^u - 1} = \ln(1 - e^{-u}) \Big|_r^{\infty} = -\ln(1 - e^{-r}).$$

Há o interesse de calcular duas soluções particulares, para $n = 3$ e $n = 5$, já que estas são as integrais que se apresentam nos cálculos funções termodinâmicas. Iniciando para o caso $J_3(r)$, faz-se necessário resolver a relação Eq. (A.2) para $n = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_3(r)}{dr} &= -\frac{r}{2} J_1(r) = -\frac{r}{2} \left(\frac{\pi}{2r} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{r}{4\pi} + \gamma_E \right) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{2m} \zeta(2m+1) \right) \\ &= -\frac{\pi}{4} - r \frac{\gamma_E}{4} - \frac{r}{4} \ln \frac{r}{4\pi} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(2\pi)^{2m}} r^{2m+1} \zeta(2m+1), \end{aligned}$$

onde $c_m = \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{m! 2^{m+1}}$. Resolvendo a equação acima obtém-se

$$\begin{aligned} J_3(r) &= - \int dr \left[\frac{\pi}{4} + r \frac{\gamma_E}{4} + \frac{r}{4} \ln \frac{r}{4\pi} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(2\pi)^{2m}} r^{2m+1} \zeta(2m+1) \right] + C \\ &= -\frac{\pi}{4} r - r^2 \frac{\gamma_E}{8} - \frac{r^2}{8} \left(\ln \frac{r}{4\pi} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(m+1)(2\pi)^{2m}} r^{2(m+1)} \zeta(2m+1) + C. \end{aligned}$$

sendo C a constante de integração que pode ser determinada quando $r = 0^*$,

$$C = J_3(0) = \frac{\zeta(2)}{2} = \frac{\pi^2}{12},$$

portanto $J_3(r)$ assume a forma:

*Esta integral está resolvida na Sec. A.1 deste apêndice.

$$J_3(r) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi}{4}r - \frac{r^2}{8} \left(\ln \frac{r}{4\pi} + \gamma_E - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(m+1)(2\pi)^{2m}} r^{2(m+1)} \zeta(2m+1). \quad (\text{A.11})$$

Com este resultado é possível calcular $J_5(r)$. Utilizando a Eq.(A.2) para $n = 4$,

$$\begin{aligned} \frac{dJ_5(r)}{dr} &= -\frac{rJ_3(r)}{4} = \frac{r}{4} \left[\frac{\pi}{4}r + \frac{r^2}{8} \left(\ln \frac{r}{4\pi} + \gamma_E - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m \zeta(2m+1)}{(m+1)(2\pi)^{2m}} r^{2(m+1)} - \frac{\pi^2}{12} \right] \\ &= \frac{\pi}{2^4} r^2 + \frac{r^3}{2^5} \left(\ln \frac{r}{4\pi} + \gamma_E - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m \zeta(2m+1)}{(m+1)(2\pi)^{2m}} r^{2m+3} - r \frac{\pi^2}{48}. \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais da equação acima encontramos

$$J_5(r) = \frac{\pi}{2^4 3} r^3 + \frac{r^4}{2^7} \left(\ln \frac{r}{4\pi} + \gamma_E - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m \zeta(2m+1)}{(m+2)(m+1)(2\pi)^{2m}} r^{2(m+2)} - r^2 \frac{\pi^2}{96} + C.$$

Para calcular C utiliza-se novamente a condição para $r = 0$:

$$C = I_5(0) = \frac{\zeta(4)}{4} = \frac{\pi^4}{2^3 45},$$

com $\tilde{c}_m = \frac{(-1)^m (2m-1)! \zeta(2m+1)}{(m+2)! 2^{m+1}}$, assim obtem-se $J_5(r)$:

$$J_5(r) = \frac{\pi}{2^4 3} r^3 + \frac{r^4}{2^7} \left(\ln \frac{r}{4\pi} + \gamma_E - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m}{(2\pi)^{2m}} r^{2(m+2)} - r^2 \frac{\pi^2}{96} + \frac{\pi^4}{2^3 45}. \quad (\text{A.12})$$

Obtida as integrais necessárias, deve-se preocupar com a convergência das séries. Utilizando testes de convergência econtra-se que as séries convergem para $r < 2\pi$.

A.1 Algumas Integrais

As seguintes integrais são necessárias para o cálculo das integrais bosônicas:

$$\int dx x^n \ln(x) = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} \ln(x) - \int dx \frac{x^n}{n+1} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} \left(\ln(x) - \frac{1}{n+1} \right);$$

e

$$\begin{aligned} J_n(0) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{n-2}}{e^x - 1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x^{n-2} e^{-(m+1)x} = \\ &= \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{n-1}} = \frac{\zeta(n-1)}{n-1}. \end{aligned}$$

Apêndice B

Integrais Fermiônicas

As integrais necessárias para descrever sistemas compostos por férmions, são:

$$I_n(r, \pm a) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2} \pm a} + 1}, \quad n > 0 \quad (\text{B.1})$$

$$G_n(r, \pm a) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{e^{\sqrt{x^2 + r^2} \pm a} + 1}. \quad n > 0 \quad (\text{B.2})$$

Sendo o sistema de interesse composto por quarks e anti-quarks, as funções termodinâmicas necessárias são formadas por combinações lineares destas integrais. Assim, as integrais *totais* são

$$\begin{aligned} I_n^T(r, a) &= I_n(r, a) + I_n(r, -a), \\ G_n^T(r, a) &= G_n(r, -a) - G_n(r, a). \end{aligned}$$

Estas integrais satisfazem as seguintes relações de recorrência:

$$\frac{\partial I_{n+1}^T(r, a)}{\partial r} = -\frac{r}{n} I_{n-1}^T(r, a), \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial I_{n+1}^T(r, a)}{\partial a} = \frac{1}{n} G_{n-1}^T(r, a), \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial G_{n+1}^T(r, a)}{\partial r} = -\frac{r}{n} G_{n-1}^T(r, a), \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial G_{n+1}^T(r, a)}{\partial a} = n I_{n+1}^T(r, a) + \frac{r^2}{n} I_{n-1}^T(r, a), \quad (\text{B.6})$$

com a condição de que

$$I_n^T(0) = \frac{2(1 - 2^{2-n})}{n-1} \zeta(n-1) \quad n > 2, \quad \text{and} \quad G_n^T(0) = 0 \quad n > 0 \quad (\text{B.7})$$

onde $\zeta(n)$ é

$$\zeta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x > 1,$$

a função zeta de Riemann. Note que as relações de recorrência levam soluções pares em soluções pares, e ímpares em ímpares, e como as funções termodinâmicas são escritas apenas com funções I_n e G_n com n ímpar, precisar-se-á de uma solução ímpar para encontrar as grandezas termodinâmicas. O procedimento do cálculo que será apresentado aqui, é inspirado pela Ref. [55], onde as integrais bosônicas no limite de altas temperaturas.

Se as integrais I_1^T e G_1^T forem calculadas, pode-se utilizar as relações de recorrência para determinar as outras integrais ímpares. Para a integral I_1^T , necessita-se da seguinte identidade:

$$\tanh(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{z^2 + [(n + \frac{1}{2})\pi]^2} = 1 - \frac{2}{e^{2z} + 1}.$$

Assim, a distribuição de Fermi-Dirac pode ser escrita como:

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{x^2 + [(2n + 1)\pi]^2}.$$

Substituindo esta expressão em I_1^T , e fazendo $x \rightarrow (x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} + a$, obtem-se

$$I_1^T(r, a) = \int_0^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + r^2} + a}{(\sqrt{x^2 + r^2} + a)^2 + [(2n + 1)\pi]^2} + \frac{\sqrt{x^2 + r^2} - a}{(\sqrt{x^2 + r^2} - a)^2 + [(2n + 1)\pi]^2} \right) \right].$$

Simplificando o integrando:

$$I_1^T(r, a) = \int_0^{\infty} dx \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \Re \left(\frac{1}{x^2 + r^2 - (a - (2n + 1)\pi i)^2} \right) \right] = i_1 - 4 \sum_{n=0}^{\infty} i_{2,n} \quad (\text{B.8})$$

Para resolver as sub-integrais i_1 e $i_{2,n}$, é necessário conhecer a solução de duas integrais:

$$z = \int_0^{\infty} dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{b^{-\epsilon}}{2} B \left(\frac{1 - \epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$w = \int_0^{\infty} dx \frac{x^{-\epsilon}}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2b^{1+\epsilon}} B \left(\frac{\epsilon + 1}{2}, \frac{1 - \epsilon}{2} \right). \quad (\text{B.10})$$

onde $B(p, q)$ é a função Beta. O fator $x^{-\epsilon}$ foi introduzido como fator de convergência, que ao final dos cálculos será tomado o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, as sub-integrais são:

$$i_1 = \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{r^{-\epsilon}}{2} B\left(\frac{1-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right). \quad (\text{B.11})$$

$$i_{2,n} = \int_0^\infty dx \Re\left(\frac{x^{-\epsilon}}{x^2 + r^2 - (a - (2n+1)\pi i)^2}\right) = \Re\left[\frac{B\left(\frac{1+\epsilon}{2}, \frac{1-\epsilon}{2}\right)}{2[r^2 - (a - (2n+1)\pi i)^2]^{\frac{1+\epsilon}{2}}}\right] \quad (\text{B.12})$$

Assim, a integral $I_1^T(r, a)$ Eq. (B.8), é:

$$I_1^T(r, a) = \frac{r^{-\epsilon}}{2} B\left(\frac{1-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) - \frac{2\pi}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\epsilon)\right]} \sum_{n=0}^{\infty} \Re\left\{\frac{1}{[r^2 - (a + (2n+1)\pi i)^2]^{\frac{1+\epsilon}{2}}}\right\}, \quad (\text{B.13})$$

Para $\epsilon \rightarrow 0$, as funções podem ser expandidas em séries de potência:

$$\begin{aligned} b^{-\epsilon} = e^{-\epsilon \ln b} &= 1 - \epsilon \ln b + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ B\left(\frac{1-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) &= \frac{2}{\epsilon} + \ln 4 + \left(\frac{\pi^2}{6} + \ln^2 2\right) \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \csc\left[\frac{\pi}{2}(1-\epsilon)\right] &= 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Por outro lado, o denominador da somatória pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{[r^2 - (a + (2n+1)\pi i)^2]^{\frac{1+\epsilon}{2}}} &= \frac{1}{[(2n+1)\pi]^{1+\epsilon}} + \\ &+ \frac{1}{[(2n+1)\pi]^{1+\epsilon}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\epsilon}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)\Gamma(k+1)} \left(\frac{a^2}{[(2n+1)\pi]^2} + \frac{2ai}{(2n+1)\pi} - \frac{r^2}{[(2n+1)\pi]^2}\right)^k, \end{aligned}$$

onde realizou-se uma expansão em série de Taylor. Esta expansão é válida para dois casos: $a, r < \pi$ e $\left|\left(\frac{a^2}{[(2n+1)\pi]^2} + \frac{2ai}{(2n+1)\pi} - \frac{r^2}{[(2n+1)\pi]^2}\right)\right| < 1$. Tomando-se o limite de $\epsilon \rightarrow 0$, obtêm-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)\pi]^{1+\epsilon}} = \frac{2^{1+\epsilon} - 1}{(2\pi)^{1+\epsilon}} \zeta(1+\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E + \ln \frac{2}{\pi}\right),$$

onde $\gamma_E \approx 0.5772$ é a constante de Euler-Mascheroni. O resultado final para I_1^T é

$$I_1^T(r, a) = -\ln \frac{r}{\pi} - \gamma_E - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)} \Re\left[\left(\frac{a^2 - r^2}{[(2n+1)\pi]^2} + \frac{2ai}{(2n+1)\pi}\right)^k\right] \quad (\text{B.15})$$

A integral I_1^T foi obtida também na Ref. [52], utilizando as integrais de Bose da Ref. [55]. Em [52], entretanto, a solução da integral é apresentada truncada em certa ordem, já neste cálculo, o truncamento não aparece.

Para calcular a integral $I_3^T(r, a)$ é necessário a integral $G_1^T(r, a)$. A partir da Eq. (B.2)

$$\begin{aligned} G_1^T(r, a) &= G_1(r, -a) - G_1(r, a) \\ &= 2 \int_0^\infty dx \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{\sqrt{x^2 + r^2} + a}{(\sqrt{x^2 + r^2} + a)^2 + [(2n+1)\pi]^2} - \frac{\sqrt{x^2 + r^2} - a}{(\sqrt{x^2 + r^2} - a)^2 + [(2n+1)\pi]^2} \right], \end{aligned}$$

manipula-a de forma a escrever

$$G_1^T(r, a) = -4 \int_0^\infty dx \sum_{n=0}^\infty \Re \left[\frac{a - (2n+1)\pi i}{x^2 + r^2 - (a - (2n+1)\pi i)^2} \right] = -4 \sum_{n=0}^\infty i_{3,n}. \quad (\text{B.16})$$

A integral $i_{3,n}$ é similar à $i_{2,n}$:

$$i_{3,n} = \Re \left\{ \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon} (a - (2n+1)\pi i)}{x^2 + r^2 - (a - (2n+1)\pi i)^2} \right\} = \frac{B\left(\frac{1+\epsilon}{2}, \frac{1-\epsilon}{2}\right)}{2} \Re \left\{ \frac{a - (2n+1)\pi i}{[r^2 - (a - (2n+1)\pi i)^2]^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \right\}.$$

Como realizado anteriormente, toma-se o limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} G_1^T(r, a) &= a - \frac{7a a^2 - r^2}{2 (2\pi)^2} \zeta(3) + \\ &\quad - 2 \sum_{n=0}^\infty \Re \left\{ \frac{a + (2n+1)\pi i}{2n+1} \sum_{k=2}^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k+1)} \left(\frac{a^2 - r^2}{[(2n+1)\pi]^2} + \frac{2ai}{(2n+1)\pi} \right)^k \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Para mostrar que a expansão em série é finita foi necessário utilizar os termos em $k = 0$ e $k = 1$. Utilizando as relações de recorrência (B.3) e (B.4), juntamente com as Eqs. (B.15) e (B.17), pode-se facilmente integrar ambas expressões e utilizar as condições iniciais Eq. (B.7) para obter I_3^T :

$$\begin{aligned} I_3^T(r, a) &= \frac{\pi^2}{12} + \frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \gamma_E - \ln \frac{r}{\pi} \right) - \frac{7}{16} \frac{(r^2 - a^2)^2}{(2\pi)^2} \zeta(3) + \\ &\quad - \sum_{n=0}^\infty \frac{\pi^2(2n+1)}{2} \sum_{k=2}^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k+2)} \Re \left(\frac{a^2 - r^2}{[(2n+1)\pi]^2} + \frac{2ai}{(2n+1)\pi} \right)^{k+1}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Para calcular G_3^T necessita-se das Eqs. (B.5) e (B.6). Inicia-se tomando a derivada da solução Eq. (B.5), com relação à a . Após manipulações deste resultado, e comparado-a com a Eq. (B.6), obtem-se

$$\begin{aligned} G_3^T(r, a) &= \frac{\pi^2 a}{6} + \frac{a^3}{6} - \frac{ar^2}{4} - \frac{7\zeta(3)a}{16(2\pi)^2} (r^2 - a^2)^2 + \\ &\quad - \left[\frac{21\zeta(3)a}{16(2\pi)^2} (4a^2 r^2 - r^4 - 3a^4) - \frac{31\zeta(5)}{32(2\pi)^4} a (r^2 - a^2)^3 \right] + \\ &\quad - \sum_{n=0}^\infty [(2n+1)\pi]^2 \Re \left\{ \frac{a + (2n+1)\pi i}{2(2n+1)} \sum_{k=3}^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k+2)} \left(\frac{a^2 - r^2}{[(2n+1)\pi]^2} + \frac{2ai}{(2n+1)\pi} \right)^{k+1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

A segunda linha deve-se a contribuição do termo de ordem $k = 2$. Uma vez que G_3^T está determinada, I_5^T pode ser calculada. A partir das expressões para I^T Eqs. (B.3) e (B.18), e juntamente com as Eqs. (B.4) e (B.19), obtém-se:

$$\begin{aligned}
I_5^T(r, a) = & \frac{7\pi^4}{2^5 45} - \frac{\pi^2(r^2 - 2a^2)}{96} + \frac{a^4}{96} - \frac{a^2 r^2}{32} + \frac{r^4}{4^3} \left[\frac{3}{4} - \gamma_E - \ln \frac{r}{\pi} \right] + \frac{7\zeta(3)}{2^7 3(2\pi)^2} (r^2 - a^2)^3 + \\
& + \left[\frac{21\zeta(3)}{2^7 (2\pi)^2} a^2 (r^2 - a^2)^2 - \frac{31\zeta(5)}{2^{10} (2\pi)^4} (r^2 - a^2)^4 \right] + \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^4 (2n+1)^3}{16} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k+3)} \Re \left(\frac{a^2 - r^2}{[(2n+1)\pi]^2} + \frac{2ai}{(2n+1)\pi} \right)^{k+2} \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

E como expreso anteriormente a segunda linha corresponde ao termo em $k = 2$.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Wilczek, [arXiv:hep-ph/0003183];
- [2] Quark Matter 2008, J. Phys. G **35**, 1 (2008).
- [3] H. Satz, arXiv:0803.1611 [hep-ph].
- [4] F. Karsch, Lect. Notes Phys. 583 (2002) 209, [arXiv:hep-lat/0106019].
- [5] I. Ya. Pomeranchuk, Doklady Akad. Nauk. SSSR 78.
- [6] R. Hagedorn, Nuovo Cimento **35**, 395 (1965).
- [7] J. C. Collins and M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. 34 (1975) 1353.
- [8] R. V. Gavai and S. Gupta, Phys. Rev., D **78**, 114503 (2008).
- [9] S. Gupta, arXiv:0909.4630 [nucl-ex].
- [10] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D **9** (1974) 3471.
- [11] M. Cheng *et al.*, Phys. Rev. D **74** (2006) 054507 [arXiv:hep-lat/0608013].
- [12] C. R. Allton *et al.*, Phys. Rev. D **71** (2005) 054508, [arXiv:hep-lat/0501030].
- [13] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and Y. Schroder, Phys. Rev. D **67**, 105008 (2003) [arXiv:hep-ph/0211321].
- [14] A. Ipp, K. Kajantie, A. Rebhan and A. Vuorinen, Phys. Rev. D **74** (2006) 045016 [arXiv:hep-ph/0604060].
- [15] P. Arnold e C.-X. Zhai, Phys. Rev. D **51**, 1906 (1995); C.-X. Zhai e B. Kastening, Phys. Rev. D **52**, 7232 (1995);
- [16] E. Braaten and R. D. Pisarski, Phys. Rev. D **45**, 1827 (1992).
- [17] J. O. Andersen, E. Braaten and M. Strickland, Phys. Rev. Lett. **83**, 2139 (1999), [arXiv:hep-ph/9902327]. J. O. Andersen, E. Braaten, E. Petitgirard and M. Strickland, Phys. Rev. D **66**, 085016 (2002), [arXiv:hep-ph/0205085].

- [18] J. P. Blaizot, E. Iancu and A. Rebhan, Phys. Rev. Lett. **83**, 2906 (1999) [arXiv:hep-ph/9906340]; J. P. Blaizot, E. Iancu and A. Rebhan, Phys. Rev. D **63**, 065003 (2001) [arXiv:hep-ph/0005003].
- [19] Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, Phys. Lett. B 568 (2003) 73, [arXiv:hep-lat/0208078].
- [20] M. D’Elia and M. P. Lombardo, Phys. Rev. D 70 (2004) 074509, [arXiv:hep-lat/0406012].
- [21] A. Peshier, B. Kampfer, O. P. Pavlenko and G. Soff, Phys. Lett. **B337**, 235 (1994).
- [22] P. Lévai and U. W. Heinz, Phys. Rev. C 57, 1879 (1998), [arXiv:hep-ph/9710463].
- [23] A. Peshier, B. Kampfer, O. P. Pavlenko and G. Soff, Phys. Rev. D **54**, 2399 (1996).
- [24] R. A. Schneider and W. Weise, Phys. Rev. **C64**, 055201 (2001).
- [25] A. Rebhan and P. Romatschke, Phys. Rev. D **68**, 025022 (2003) [arXiv:hep-ph/0304294].
- [26] V. M. Bannur, Phys. Lett. B **647** (2007) 271 [arXiv:hep-ph/0608232]; V. M. Bannur, Eur. Phys. J. C **50** (2007) 629 [arXiv:hep-ph/0508069].
- [27] F. G. Gardim and F. M. Steffens, Nucl. Phys. A **797**, 50 (2007) [arXiv:0709.3853 [nucl-th]].
- [28] M. Bluhm, B. Kampfer, R. Schulze, D. Seipt and U. Heinz, Phys. Rev. C 76, 034901 (2007), [arXiv:hep-ph/0705.0397].
- [29] V. M. Bannur, [arXiv:hep-ph/0712.2886].
- [30] M. Bluhm and B. Kampfer, Phys. Rev. D 77, 114016 (2008). [arXiv:0801.4147 [hep-ph]].
- [31] F. G. Gardim and F. M. Steffens, Nucl. Phys. A **838**, 225 (2009) [arXiv:0905.0667 [nucl-th]].
- [32] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, Inc., 1963).
- [33] M. I. Gorenstein and S. N. Yang, Phys. Rev. D **52**, 5206 (1995).
- [34] P. Romatschke, Tese de Doutorado [arXiv:hep-ph/0312152].
- [35] T. S. Biro, A. A. Shandenko and V. D. Toneev, Phys. Atom. Nucl. **66** (2003) 982 [Yad. Fiz. **66** (2003) 1015] [arXiv:nucl-th/0102027].
- [36] S. y. Yin and R. K. Su, [arXiv:hep-th/0709.0179].

- [37] H. Grigorian, D. Blaschke and G. S. Pogosyan, Nucl. Phys. A **715** (2003) 831 [arXiv:nucl-th/0209068].
- [38] BRAHMS Collaboration, Nucl. Phys. A 757, 1 (2005); PHOBOS Collaboration, Nucl. Phys. A 757, 28 (2005); STAR Collaboration, Nucl. Phys. A 757, 102 (2005); PHENIX Collaboration, Nucl. Phys. A 757, 184 (2005).
- [39] E. Shuryak, Prog. Part. Nucl. Phys. 53 (2004) 273, [arXiv:hep-ph/0312227].
- [40] F. Karsch, K. Redlich and A. Tawfik, Eur. Phys. J. C 29 (2003) 549, [arXiv:hep-ph/0303108].
- [41] A. Peshier and W. Cassing, Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 172301, [arXiv:hep-ph/0502138].
- [42] W. Greiner, L. Neise and H. Stoecker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (Springer 2008)
- [43] L. Boltzmann, *Lectures on Gas Theory* (University of California Press, 1964).
- [44] J. D. Walecka, Phys. Lett. **B59**, 109 (1975).
- [45] V. Goloviznin and H. Satz, Z. Phys. C **57** (1993) 671.
- [46] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier and B. Petersson, Phys. Rev. Lett. **75**, 4169 (1995) [arXiv:hep-lat/9506025].
- [47] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **179**, 1547 (1969).
- [48] J.I. Kapusta, Nucl. Phys. **B148**, 461 (1979); *Finite Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, 1989).
- [49] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, 1996).
- [50] E. Fermi, *Thermodynamics* (Dover Publications, INC).
- [51] F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert, Nucl. Phys. B **605**, 579 (2001) [arXiv:hep-lat/0012023].
- [52] R. A. Schneider, [arXiv:hep-ph/0303104].
- [53] J. Letessier and J. Rafelski, Phys. Rev. C 67 (2003) 031902, [arXiv:hep-ph/0301099].
- [54] F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert, Phys. Lett. B 478 (2000) 447, [arXiv:hep-lat/0002003].
- [55] H. E. Haber and H. A. Weldon, J. Math. Phys. **23** (1982) 1852.
- [56] Y. Hama, T. Kodama e O. Socolowski Jr, Braz. J. Phys. **35**, 24 (2005).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)