



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.009/2009

Quantização Semiclássica e Modelos Integráveis

Daniel Noce da Silva

Orientador

Prof.Dr. José Francisco Gomes

Co-Orientador

Prof.Dr. Abraham Hirsz Zimmerman

Agosto de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador José Francisco Gomes, pela oportunidade e colaboração,

Ao Prof. A. H. Zimmerman, pela co-orientação,

À FAPESP, pelo apoio financeiro,

Aos colegas de grupo, em especial o Leandro, com os quais tive interessantes discussões,

Ao Gustavo, pela parceria,

À Sheila, pelo apoio incondicional,

À minha Família, pelo carinho e empenho. Pelos valores que compartilhamos, e a certeza de que sempre estaremos uns pelos outros.

Resumo

Esta dissertação trata em detalhes do método de quantização semiclássica para teorias de campo que admitem soluções estáticas do tipo soliton. Após uma breve introdução à teoria dos solitons e modelos integráveis, é apresentado o método de quantização canônica para um campo escalar que admite soluções clássicas do tipo soliton, com uma aplicação para os Modelos Afins de Toda. Por fim, o método é estendido para teorias que possuem fermions.

Palavras Chaves: Modelos Integráveis; Quantização de Solitons;

Áreas do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra / Área: Física / Subárea: Física das Partículas Elementares e Campos; Ciências Exatas e da Terra / Área: Física / Subárea: Física Geral / Especialidade: Métodos Matemáticos da Física.

Abstract

This dissertation contains a detailed presentation of the semiclassical quantization method for field theories admitting static soliton solutions. It contains a brief introduction to the theory of solitons and integrable models, and is followed by the presentation of a canonical soliton quantization method, with an application to Affine Toda Field Theories, and to the extended formalism for fermionic theories.

*"No que diz respeito ao empenho, ao compromisso,
ao esforço, à dedicação, não existe meio termo.
Ou você faz uma coisa bem feita ou não faz."*

Ayrton Senna

Sumário

1	Introdução	p. 7
2	Solitons	p. 9
2.1	Ondas solitárias e Solitons	p. 9
2.2	Sistemas em 1+1 dimensões	p. 12
2.2.1	Um exemplo: A teoria Sine-Gordon	p. 12
2.2.2	Estabilidade linear	p. 13
2.2.2.1	Soluções estáticas e o modo zero	p. 14
2.2.2.2	Um teorema Virial	p. 15
2.3	O método de Hirota	p. 16
2.3.1	Solução 1-soliton	p. 19
2.3.2	Solução 2-soliton	p. 20
2.3.3	Três ou mais solitons	p. 21
2.3.4	Massa clássica da solução 1-soliton	p. 22
3	Quantização Canônica de Solitons: Um método semiclássico	p. 24
3.1	O campo escalar em 1+1 dimensões	p. 24
3.2	Teoria de Perturbação Usual	p. 26
3.3	Aproximação Semiclássica para o Campo Escalar Real	p. 27
3.4	Carga topológica e espaço de Hilbert	p. 32
3.5	Interpretação dos Estados e Fatores de Forma no setor do Soliton	p. 35
3.5.1	Uma aplicação: A teoria Sine-Gordon	p. 36
3.5.2	Fatores de forma	p. 37

4	Quantização Semiclássica dos Modelos Afins de Toda	p. 41
4.1	Resolvendo a equação de estabilidade	p. 41
4.2	Primeira correção quântica para a massa do soliton	p. 44
5	Sistemas mais complexos	p. 49
5.1	Adicionando fermions	p. 49
6	Conclusão	p. 56
Apêndice A - Solitons estáticos		p. 58
Apêndice B - Equações bilineares de Hirota		p. 61
B.1	Definições	p. 61
B.2	Solução 1-soliton	p. 63
B.3	Solução 2 soliton	p. 63
B.4	Três ou mais solitons	p. 64
Apêndice C - O caso A_1: Sine-Gordon		p. 66
Referências		p. 68

1 *Introdução*

O balanço entre dispersão e não linearidade em Equações Diferenciais Parciais (EDP's) é responsável pelo aparecimento de soluções do tipo onda solitária e solitons [1]. Se uma solução é localizada (ou com densidade de energia localizada) e se propaga com velocidade constante e perfil fixo, dizemos que esta solução é uma onda solitária. Agora, se uma EDP admite uma solução contendo N ondas solitárias que interagem elasticamente, ou seja, mantendo forma e velocidade, dizemos que esta solução é uma solução de N solitons. Um sistema que admite soluções com um número arbitrário de solitons é chamado de modelo integrável.

O estudo das ondas solitárias e Modelos Integráveis corresponde à uma vasta área de pesquisa na Física Teórica, que compreende métodos para obtenção destes tipos de soluções bem como o estudo de propriedades das mesmas, e possui aplicações em diversos campos da Física, como [1]: Óptica, Mecânica dos Fluidos, Matéria Condensada, e como veremos neste texto, na Teoria Quântica dos Campos [3].

Uma das possíveis interseções entre estas duas áreas, Modelos Integráveis e Teoria Quântica dos Campos, ocorre nos diversos métodos semiclássicos, nos quais soluções das equações de movimento clássicas são utilizadas para se obter informação, num certo sentido, não perturbativa sobre a quantização de teorias de campo não-triviais [2] [3]. Este ferramental teórico, que surgiu inicialmente no contexto de campos escalares auto-interagentes em duas dimensões, foi sistematicamente desenvolvido durante a década de 70, bem como extensões para teorias mais realistas, envolvendo equações acopladas com campos vetoriais e de Dirac em mais dimensões.

O objetivo deste texto é fornecer ao leitor um (possível) caminho para se

familiarizar com o tema, a partir do qual ele possa partir para aplicações mais modernas e complexas, sobretudo, economizando tempo, tendo que recorrer aos artigos originais somente para aprofundar o conhecimento em tópicos a sua escolha. Para tanto, optou-se por restringir a discussão à sistemas com apenas uma dimensão espacial. Embora isto acarrete uma simplificação dos modelos, todos os fatos e idéias relevantes da quantização semiclássica podem ser plenamente desenvolvidos neste contexto. Como o leitor verá, a simplificação assim obtida permite desenvolver as idéias com mais clareza [3].

Procurou-se fazer o texto auto-contido e com as referências adequadas à proposta. Antes de introduzir o leitor à quantização semiclássica foi necessário introduzir alguns conceitos sobre a teoria dos solitons e Modelos Integráveis. Dedicou-se um capítulo inicial à esse propósito (Capítulo 2), no qual o leitor é encorajado a trabalhar em duas dimensões e onde são obtidos alguns resultados necessários para o restante do texto. O terceiro capítulo é dedicado à quantização canônica de um campo escalar real, auto-interagente, em teorias que admitem solitons (ou ondas solitárias) estáticas. Neste capítulo mostra-se que, além dos estados obtidos através da teoria de perturbação usual, surge um novo setor de estados (setor do soliton) caracterizado por um novo número quântico chamado de carga topológica. Além disso, mostra-se como calcular elementos de matriz no setor do soliton através dos chamados fatores de forma. Após ter contato com o conteúdo dos capítulos 2 e 3, o leitor pode acessar de forma independente os capítulos 4 e 5. No entanto, recomenda-se fortemente a leitura do capítulo 4, onde é apresentada, em detalhes, uma aplicação do método de quantização para solitons estáticos nas chamadas Teorias Afins de Toda [7]. Por fim, o último capítulo deve servir como ponte para aplicações mais complexas. Neste, é apresentada uma extensão (do que foi feito no capítulo 3) para um campo escalar em interação com férmions. Nesta extensão [11], feita por R. Jackiw e C. Rebbi, em 1976, são obtidos estados com número fermiônico fracionário, um resultado novo (para a época), que mais tarde foi observado como consequência da presença de solitons em semi-condutores orgânicos [12] o que, entre outros desenvolvimentos, levou ao prêmio Nobel de Química no ano 2000 para Alan Heeger, Alan MacDiarmid e Hideki Shirakawa.

2 Solitons

No próximo capítulo iremos apresentar um método semiclassico para a quantização de campos. A palavra "semiclássico", aqui, tem um significado bem preciso. Iremos utilizar soluções da dinâmica clássica para resolver (perturbativamente) a dinâmica da teoria quântica. No entanto, a dinâmica clássica constitui, por si só, uma vasta área de pesquisa e a obtenção de soluções para as equações de movimento clássicas é, na maioria dos casos, um problema complexo. Por sorte, há muitos casos de interesse que podem ser resolvidos de maneira exata por métodos bem conhecidos na teoria de solitons e modelos integráveis. O objetivo deste capítulo é introduzir algumas destas ferramentas na medida necessária para que sejam utilizadas no próximo capítulo.

2.1 Ondas solitárias e Solitons

Considere um campo escalar ϕ cuja densidade lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi). \quad (2.1)$$

Onde

$$U(\phi) \geq 0. \quad (2.2)$$

Assuma que este potencial satisfaça $U(\phi) = 0$ para um conjunto contável de valores de ϕ , os quais chamaremos de vácuos do potencial. A dinâmica clássica é determinada pela equação de movimento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -U'(\phi) \quad (2.3)$$

que, em geral, é não linear em ϕ .

A não linearidade em Equações Diferenciais Parciais (EDP's) é responsável pelo aparecimento de soluções do tipo onda solitária e solitons. Os primeiros

indícios deste tipo de onda na literatura vêm de um folclórico episódio [1] no qual o engenheiro John Scott Russell (1808-1882) perseguiu uma elevação de água, a qual denominou Onda de Translação, no Union Canal, um estreito canal Escocês. O que chamou a atenção de Russel foi o fato desta onda viajar quase duas milhas sem alterações na sua forma e velocidade (não houve dispersão). Mais tarde, Russel verificou experimentalmente que quando duas ondas deste tipo colidiam, saíam da colisão mantendo forma e velocidade.

A teoria matemática por trás do fenômeno só veio mais tarde em 1895 quando Diederik Korteweg e Gustav de Vries propuseram a equação, conhecida hoje como KdV

$$\phi_{xxx} + 6\phi\phi_x + \phi_t = 0, \quad (2.4)$$

onde os índices subscritos indicam as derivadas em relação as coordenadas x e t , e o campo ϕ é proporcional à elevação da água. Hoje, a Onda de Translação ganhou o nome de soliton e sabe-se que é a não-linearidade, presente na KdV, compensa efeitos dispersivos fazendo com que a forma da onda seja mantida durante a propagação.

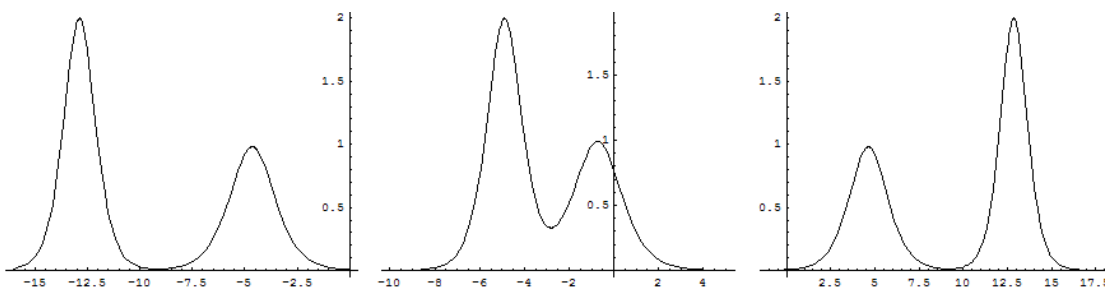


Figura 1: A figura mostra a evolução temporal de uma solução da equação Kdv contendo dois sólitons. Note que o sóliton com maior amplitude também possui maior velocidade; e que os dois sólitons se propagam sem deformação mesmo após colidirem.

Do relato de Russel, podemos obter uma noção intuitiva do que é um sóliton, ou seja, algo **localizado**, como uma corcova ou um pacote de onda, que viaja preservando a sua forma e velocidade mesmo após interagir com outro sóliton. Vamos então formalizar esta noção [2]. O leitor verá que há uma distinção entre as definições de onda solitária e sóliton, que mais tarde mostraremos estar relacionada com a integrabilidade da teoria.

Definição: Uma onda solitária é uma solução de uma EDP não-linear que

possui densidade de energia $\varepsilon(x, t)$ localizada, com dependência espaço-temporal

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0(x - vt) \quad (2.5)$$

O leitor deve ter notado que não há exigência de que o campo ϕ seja localizado. De fato, há outras formas de fazer esta definição, mas é evidente que, tratando-se de uma teoria física, o modo como a energia se propaga e sua localização no espaço são mais relevantes do que as mesmas características para o próprio campo ϕ . É importante notar que a $\varepsilon(x, t)$ localizada implica que a energia da solução seja finita.

Um outro ponto importante das observações de Russel é compreendido pela seguinte

Definição: Considere uma solução que para $t \rightarrow -\infty$ constituiu-se de uma superposição de N ondas solitárias com velocidades v_i . Pela definição acima, a densidade de energia será dada por

$$\varepsilon(x, t) \approx \sum_i^N \varepsilon_0(x - v_i t). \quad (2.6)$$

Se, para $t \rightarrow \infty$, a solução ainda possuir as mesmas N ondas solitárias e densidade de energia

$$\varepsilon(x, t) \approx \sum_i^N \varepsilon_0(x - v_i t + \delta_i), \quad (2.7)$$

onde os δ_i 's representam um deslocamento de fase constante. Então dizemos que esta é uma solução do tipo sóliton. Mais precisamente, uma solução de N solitons.

É interessante ver que a classe de equações que admitem ondas solitárias contém a classe das equações que admitem sólitons. Um exemplo de equação que admite ondas solitárias e não admite sólitons é a equação de movimento da teoria ϕ^4 . Já a teoria Sine-Gordon admite soluções com um número arbitrário de sólitons. Como veremos mais adiante, um modelo que admite soluções N -solitons, para qualquer natural N , é chamado de modelo integrável.

Apesar de haver diferença entre uma onda solitária e uma solução de 1 soliton, para muitos fins práticos esta diferença é irrelevante. Portanto, daqui em diante, utilizaremos somente a palavra soliton para designar estes dois tipos

e nos casos onde a integrabilidade do sistema for relevante faremos com que a diferença fique bem clara.

2.2 Sistemas em 1+1 dimensões

A partir de agora, iremos nos restringir a sistemas com apenas uma dimensão espacial. Veremos que, embora isto acarrete uma simplificação dos modelos, todos os fatos e idéias relevantes da quantização semiclássica podem ser plenamente desenvolvidos neste contexto, sem perda de generalidade. A simplificação assim obtida nos permitirá desenvolver as idéias com mais clareza.

2.2.1 Um exemplo: A teoria Sine-Gordon

Consideremos agora um exemplo de teoria em 1+1: O modelo Sine-Gordon. O modelo Sine-Gordon (SG) é caracterizado pelo potencial

$$U(\phi) = \frac{m^4}{g^2} [1 - \cos(\frac{g}{m}\phi)]. \quad (2.8)$$

Os vácuos (mínimos) deste potencial são

$$\phi_0 = 2n\pi(\frac{m}{g}); n = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

E a solução estática (sem dependência temporal) do tipo 1-soliton para este potencial é dada por

$$\phi_{cl} = 4(\frac{m}{g}) \tan^{-1} \exp(m(x - x_0)), \quad (2.10)$$

onde x_0 é uma constante arbitrária que é consequência da invariância translacional da teoria. Na próxima seção iremos mostrar como obter soluções soliton. Neste ponto estamos interessados apenas em ilustrar alguns fatos.

Como se vê pela figura 2, a solução (2.10) assume os valores dos vácuos 0 e $2\pi\frac{m}{g}$, respectivamente, para $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow \infty$. Este é um fato geral. Soluções do tipo sólton, por definição, possuem densidade de energia localizada. A integral de energia de um sólton

$$E_c[\phi] = \int dx \{ \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + U(\phi) \} \quad (2.11)$$

converge somente se $U(\phi(x)) \rightarrow 0$, ou seja, somente se $\phi(x)$ assume os valores dos vácuos de $U(\phi)$ para $x \rightarrow \pm\infty$. No apêndice A o leitor verá a demonstração de

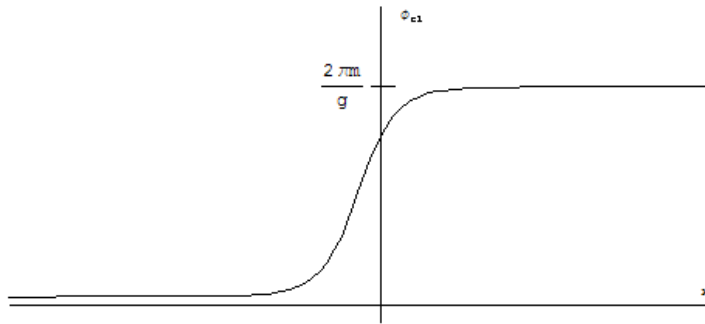


Figura 2: Esta é a solução do tipo 1-soliton da equação Sine-Gordon. Note que ela assume os valores de dois vácuos consecutivos do potencial para $x \rightarrow \pm\infty$

que, em 1+1 dimensões, os vácuos ligados por um sóliton estático sempre serão vácuos consecutivos.

A energia da solução estática do tipo 1-soliton da teoria SG é, portanto,

$$E[\phi_{cl}] = 8\left(\frac{m^3}{g^2}\right) \quad (2.12)$$

2.2.2 Estabilidade linear

Dada uma solução clássica, é interessante investigar se ela suporta perturbações e mantém a sua forma. Veremos que a condição de estabilidade linear introduzida nesta seção [3] será importante no contexto de quantização semiclássica pois garantirá que a correção quântica para a massa do soliton seja real.

Seja $\phi_c(x, t)$ uma solução soliton das equações de movimento (2.3). Considere uma perturbação $\hat{\phi}$ dessa solução

$$\phi(x) = \phi_c(x, t) + \hat{\phi}, \quad (2.13)$$

tal que os termos quadráticos em $\hat{\phi}$ possam ser desprezados. Inserindo (2.13) na equação de movimento, mantendo apenas os termos lineares em $\hat{\phi}$, obtém-se a **equação de estabilidade linear**

$$[\partial_t^2 - \partial_x^2 + U''(\phi_{cl}(x))]\hat{\phi}(x, t) = 0 \quad (2.14)$$

Como o potencial $U(\phi)$ independe do tempo e a equação acima é linear, podemos escrever $\hat{\phi} = e^{i\omega_k t} \eta_k(x)$, onde está implícita a soma em k . Os modos η_k irão

satisfazer a equação de schrödinger

$$[-\partial_x^2 + U''(\phi_{cl}(x))]\eta_k(x) = w_k^2 \eta_k(x) \quad (2.15)$$

De onde podemos extrair as frequencias w_k e um conjunto completo de soluções $\{\eta_k(x, t)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Caso $w_k^2 \geq 0$ para todo k , a perturbação não cresce com o tempo e dizemos que o soliton é estável. Já no caso em que para pelo menos um valor de k tem-se $w_k^2 < 0$, a perturbação cresce exponencialmente com o tempo, dizemos então que o sóliton é instável.

2.2.2.1 Soluções estáticas e o modo zero

No próximo capítulo utilizaremos solitons estáticos como (2.10). Uma vez que a densidade lagrangeana do tipo (2.1) gera uma equação de movimento covariante, para obter uma solução estática a partir de uma do tipo 1 soliton com velocidade $v \neq 0$, ou vice versa, basta fazer um boost. De maneira que pode-se trabalhar com solitons estáticos sem perda de generalidade.

É um fato notável que a equação de estabilidade, (para os campos definidos pela lagrangeana (2.1)), sempre admite um modo com frequência zero ($w = 0$). De fato, considere um soliton estático $\phi_c(x)$. Derivando com relação à variável x a equação de movimento satisfeita por $\phi_c(x)$,

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = U'(\phi(x)), \quad (2.16)$$

vê-se facilmente que $\phi'_c(x)$ é um modo zero.

Uma maneira mais interessante de ver isso é a seguinte. Considere uma solução estática $\phi_c(x)$. Devido à invariância translacional da teoria, temos que $\phi(x) = \phi_c(x + x_0)$ também é solução. Caso $|x_0| \ll 1$,

$$\phi(x) = \phi_c(x) + x_0 \phi'_c(x) \quad (2.17)$$

Portanto $\phi'_c(x)$ satisfaz a equação de estabilidade e, como independe do tempo, possui frequência nula. Assim, o modo zero aparece como consequência da in-

variância translacional.

Um outro ponto interessante envolvendo solitons estáticos é o fato de que a equação estática de movimento (2.16) implica que a solução $\phi_c(x)$ é um ponto estacionário do funcional

$$V[\phi] = \int dx \left(\frac{1}{2} \nabla \phi^2 + U(\phi) \right). \quad (2.18)$$

Ou seja, satisfaz

$$\frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi} \Big|_{\phi_c} = 0. \quad (2.19)$$

Note que o funcional $V[\phi]$ aplicado à uma solução estática fornece a energia da solução, ou seja, no caso estático $V[\phi] = E_c[\phi]$. Assim, dada uma variação $\phi(x) = \phi_c(x) + \hat{\phi}$ em torno da solução estática, a variação correspondente em $V[\phi]$ só aparece em segunda ordem

$$\delta V[\phi] = \int dx \frac{1}{2} \hat{\phi} (-\partial_x^2 + U''(\phi_c(x))) \hat{\phi} \quad (2.20)$$

Vê-se então que a condição de estabilidade faz com que esta variação seja não-negativa. De fato, a variação é estritamente positiva caso $\hat{\phi}$ não possua componentes na direção do modo zero. Portanto uma solução $\phi_c(x)$, estável, é quase um mínimo do funcional $V[\phi]$.

2.2.2.2 Um teorema Virial

Começamos esta seção afirmando que todos os fatos e idéias envolvidos na quantização semiclássica podem ser tratados em 1+1 dimensões sem perda de generalidade. Em contrapartida, obtém-se uma enorme simplificação no que diz respeito às soluções clássicas. O teorema abaixo [3] é encorajador para os que trabalham em uma dimensão espacial.

Teorema: *Considere um modelo, sem spin, regido por uma densidade lagrangiana do tipo (2.1). Este modelo só admite solitons estáticos **estáveis** em 1 dimensão espacial.*

Demonstração: Seja $\phi_c(x)$ uma solução estática em d dimensões espaciais. Como vimos, soluções estáticas são extremos do funcional

$$V(\phi) = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \right) \quad (2.21)$$

Considere agora a função $\phi_a(x) \equiv \phi_c(x/a)$. Fazendo uma mudança de variáveis vemos que $V[\phi_a] = a^{d-2}E_T + a^d E_V(\phi_c)$ onde

$$E_T = \int d^d x \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \quad (2.22)$$

e

$$E_V = \int d^d x U(\phi). \quad (2.23)$$

Uma vez que para $\varepsilon \equiv (1 - a) \ll 1$ tem-se

$$\phi_a(x) - \phi_c(x) = x \phi'_c(x) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (2.24)$$

Vê-se que a variação sobre $\phi_c(x)$ dada pelo lado direito equação acima não é proporcional ao modo zero, portanto a $\delta V[\phi(x)] > 0$, ou seja, $V[\phi_a]$ tem um mínimo em $a = 1$.

Assim,

$$\partial_a V[\phi_a]|_{a=1} = 0 \quad (2.25)$$

Implica

$$E_V(\phi_c) = \frac{2-d}{d} E_T(\phi_c) \quad (2.26)$$

Portanto,

$$\partial_a^2 V[\phi_a]|_{a=1} = 2(2-d) E_T(\phi_c) \quad (2.27)$$

De onde se vê que $V[\phi_a]$ possui um mínimo em $a = 1$ somente se $2 - d > 0$, ou seja, $d=1$.

2.3 O método de Hirota

Até agora, discutimos alguns fatos gerais sobre soluções do tipo soliton, contudo, não foi mostrado como obtê-las. Nesta seção mostraremos como obter soluções como (2.10) através do método de Hirota.

Quando aplicável, o método de Hirota fornece uma maneira direta de se obter soluções do tipo soliton e, caso a teoria seja integrável, obtêm-se uma forma geral para um número qualquer de solitons [4]. Vale lembrar que há outros métodos para a solução de EDP's não lineares, como a transformação de espalhamento inverso, que permite lidar com condições iniciais. Como veremos,

o método de Hirota se mostra muito mais simples e direto, uma vez que estamos interessados simplesmente em obter soluções.

O método de Hirota constitui basicamente de um *ansatz* (uma mudança de variáveis) que fornece as chamadas equações bilineares de Hirota, ou equações do tipo bilinear. Embora a estrutura revelada pelas equações bilineares seja muito semelhante para uma vasta classe de modelos não lineares, iremos, a partir de agora, trabalhar com uma teoria específica, cujos resultados aqui obtidos irão ser utilizados no quarto capítulo. Assim, podemos partir de um *ansatz* conhecido, uma vez que maneiras sistemáticas de se obter esse *ansatz* geralmente utilizam ferramentas sofisticadas, como o formalismo de curvatura nula e o método de *dressing* [5], que estão fora do escopo deste texto.

Considere a densidade lagrangeana de uma Teoria Afim de Toda [7], para uma algebra de Lie "simply laced" g

$$L = \frac{1}{2}((\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2) - \frac{m^2}{\gamma^2} \sum_{j=0}^r n_j (e^{\gamma \alpha_j \cdot \phi} - 1). \quad (2.28)$$

Aqui, $\phi(x, t)$ é um vetor de r componentes e os α_j $j = 1, \dots, r$ são as raízes simples de g ; α_0 é a raiz estendida (negativo da raiz mais alta) e os n_j são definidos através do vetor nulo, i.e.,

$$\sum_{j=0}^r n_j \alpha_j = 0, \quad (2.29)$$

com $n_0 = 1$.

Vamos nos restringir a álgebras do tipo A, $g = A_r$, e constante de acoplamento imaginária $\gamma = i\beta$. No caso $g = A_r$, temos que $n_j = 1$ para j qualquer. As raízes simples têm todas o mesmo comprimento, por convenção $\alpha_j^2 = 2$. Temos também que $\alpha_j \cdot \alpha_{j+1} = -1$ e $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0$ caso i e j não sejam consecutivos, como indicado pelo Diagrama de Dinkin, abaixo,

Apesar de ϕ ser um campo escalar de rank r as discussões anteriores são válidas sem nenhuma modificação relevante. É fácil de ver que a teoria SG, descrita acima, corresponde ao caso $r=1$. De fato, isto está feito no apêndice C.

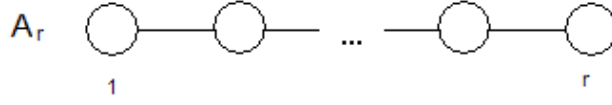


Figura 3: Diagrama de Dynkin para A_r : Cada círculo representa uma raiz simples. A quantidade de linhas ligando dois círculos varia de acordo com $n_{ij} = (\alpha_i \cdot \alpha_j)^2$. No presente caso, $n_{ij} = 0$, se as raízes não são consecutivas, e $n_{ij} = 1$ para raízes consecutivas.

O ansatz de Hirota apropriado é dado por [7]

$$\phi = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \log \tau_j. \quad (2.30)$$

De modo que as novas variáveis são as funções τ_j . A equação clássica de movimento em termos das funções tau é dada por

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j \left(\frac{\tau_j \ddot{\tau}_j - \dot{\tau}_j^2 - \tau_j'' \tau_j + \tau_j'^2}{\tau_j^2} \right) = m^2 \sum_{j=0}^r n_j \alpha_j \prod_{k=0}^r \tau_k^{-\alpha_j \cdot \alpha_k}. \quad (2.31)$$

De forma que

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j \left(\frac{\tau_j \ddot{\tau}_j - \dot{\tau}_j^2 - \tau_j'' \tau_j + \tau_j'^2}{\tau_j^2} - m^2 n_j \prod_{k=0}^r \tau_k^{-\alpha_j \cdot \alpha_k} \right) = 0, \quad (2.32)$$

Portanto, utilizando (2.29) obtemos o sistema de equações

$$\tau_j \ddot{\tau}_j - \dot{\tau}_j^2 - \tau_j'' \tau_j + \tau_j'^2 = m^2 n_j \left(\prod_{k=0}^r \tau_k^{-\alpha_j \cdot \alpha_k} \tau_j^2 - \tau_j^2 \right). \quad (2.33)$$

Para $g = A_r$, tem-se que $\alpha_j \cdot \alpha_j = 2$ e $\alpha_j \cdot \alpha_{j+1} = -1$, de forma que a equação acima fica

$$\tau_j \ddot{\tau}_j - \dot{\tau}_j^2 - \tau_j'' \tau_j + \tau_j'^2 = m^2 (\tau_{j-1} \tau_{j+1} - \tau_j^2). \quad (2.34)$$

Esta equação é uma equação do tipo bilinear. Como dito acima, o objetivo do método é chegar a uma equação deste tipo, pois a partir daí, a solução é mais ou menos parecida, qualquer que seja o modelo. Deixaremos para o apêndice B a definição mais precisa do que seria uma equação do tipo bilinear e também demonstração de que equações bilineares, do tipo ao qual pertence (2.34), admitem soluções do tipo 1 e 2-soliton. Por ora, vamos mostrar isto na prática, obtendo soluções destes tipos para o caso específico (2.34).

A última etapa do método consiste em propor uma solução para as equações bilineares, cuja forma é dada por

$$\tau_j = 1 + \epsilon \tau_j^{[1]} + \epsilon^2 \tau_j^{[2]} + \dots + \epsilon^n \tau_j^{[n]}, \quad (2.35)$$

onde ϵ é um parâmetro livre que, posteriormente, será igualado a 1. A prescrição de Hirota é que para se obter a solução de 1-soliton deve-se tomar a expansão acima até primeira ordem em ϵ , para 2-soliton toma-se até segunda ordem e assim por diante. Vejamos como isto funciona.

2.3.1 Solução 1-soliton

No caso 1-soliton, temos

$$\tau_j = 1 + \epsilon \tau_j^{[1]} \quad (2.36)$$

Introduzindo esta expressão na equação bilinear (2.34) obtemos, em ordem ϵ^1 , a equação

$$\ddot{\tau}_j^{[1]} - \tau_j''^{[1]} = m^2(\tau_{j+1}^{[1]} + \tau_{j-1}^{[1]} - 2\tau_j^{[1]}) \quad (2.37)$$

E uma relação de recorrência,

$$\tau_{j-1}^{[1]} \tau_{j+1}^{[1]} = \tau_j^{[1]2}, \quad (2.38)$$

que provém da ordem ϵ^2 . A solução para estas equações é facilmente reconhecida como

$$\tau_j^{[1]} = \delta_j e^{\sigma(x-vt-\xi)} \quad (2.39)$$

onde, σ, δ_j, v, ξ são constantes e os δ_j 's satisfazem

$$\delta_{j-1} \delta_{j+1} = \delta_j^2 \quad (2.40)$$

juntamente com a periodicidade $\delta_{j+r+1} = \delta_j$. É fácil de ver que uma possível solução para δ_j é

$$\delta_j = w_a^j \quad (2.41)$$

Sendo w_a a $(r+1)$ -ésima raiz da unidade, $w_a = e^{\frac{2i\pi a}{r+1}}$. Além disso, a equação bilinear fornece uma relação de dispersão

$$\sigma^2(1-v^2) = 4m^2 \sin\left(\frac{\pi a}{r+1}\right) \equiv m_a^2 \quad (2.42)$$

Finalmente, a solução do tipo 1-soliton é dada por

$$\phi_a = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \log \left(1 + w_a^j e^{\sigma(x-vt-\xi)} \right) \quad (2.43)$$

Note que a equação (2.37) é linear. Por isso, a forma exponencial das funções-tau,

$$\tau_j^{[1]} = e^{\Phi_j} \quad (2.44)$$

onde

$$\Phi_j = \sigma(x - v^p t - \xi) + \log(w_a^j), \quad (2.45)$$

2.3.2 Solução 2-soliton

Para obter uma solução do tipo 2-soliton terminamos a série acima na segunda ordem de ϵ , $\tau_j = 1 + \epsilon \tau_j^{[1]} + \epsilon^2 \tau_j^{[2]}$. Uma boa maneira de procurar uma solução do tipo dois soliton, é aproveitar o que sabemos sobre a solução 1-soliton.

Note que ao inserir τ_j na equação bilinear, a equação para ordem ϵ^1 é igual à anterior (2.37), pois termos contendo $\tau_j^{[2]}$ só aparecem em ordem ϵ^2 . Tendo isto em vista, definimos

$$\Phi_j^p = \sigma^p(x - v^p t - \xi^p) + \log(w_{a_p}^j), \quad (2.46)$$

onde o índice p assume os valores 1;2, correspondentes ao primeiro e segundo soliton.

Espera-se que a solução 2-soliton se aproxime da solução 1-soliton para $\Phi_j^2 \rightarrow -\infty$, ou seja, quando o segundo sóliton está distante do primeiro ($\xi^2 \rightarrow \infty$). Além disso, a solução deve ser simétrica em relação à dependência nos parâmetros de cada soliton, Φ_j^1 e Φ_j^2 . Tendo isto em vista, e também o fato de que a equação (2.37) é linear, obtêm-se a seguinte prescrição para a função-tau

$$\tau_j = 1 + \epsilon(e^{\Phi_j^1} + e^{\Phi_j^2}) + \epsilon^2(Ae^{\Phi_j^1 + \Phi_j^2}), \quad (2.47)$$

onde A é uma constante fixada pela equação de movimento em ordem ϵ^2 . Esta forma da função-tau satisfaz as exigências feitas acima. Por exemplo, que a solução 1-soliton é recuperada no limite $\Phi_j^2 \rightarrow -\infty$. De onde se vê que a relação de dispersão satisfeita pelos parâmetros com índices 1 e 2 é a mesma obtida para a solução de 1-soliton, (2.42).

Explicitamente, temos

$$A(k) = \frac{(\sigma^1 - \sigma^2)^2 - (\sigma^1 v^1 - \sigma^2 v^2)^2 - 4m^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{r+1}(a^1 - a^2)\right)}{(\sigma^1 + \sigma^2)^2 - (\sigma^1 v^1 + \sigma^2 v^2)^2 - 4m^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{r+1}(a^1 + a^2)\right)}. \quad (2.48)$$

2.3.3 Três ou mais solitons

A prescrição do método de Hirota para a solução 3-soliton, seguindo a mesma linha da seção anterior, é dada por

$$\tau_j = 1 + \epsilon(e^{\Phi_j^1} + e^{\Phi_j^2} + e^{\Phi_j^3}) + \epsilon^2(A_{12}e^{\Phi_j^1 + \Phi_j^2} + A_{13}e^{\Phi_j^1 + \Phi_j^3} + A_{23}e^{\Phi_j^2 + \Phi_j^3}) + \epsilon^3(A_{123}e^{\Phi_j^1 + \Phi_j^2 + \Phi_j^3}).$$

Novamente, verifica-se que no limite $\Phi_j^3 \rightarrow -\infty$ é obtida uma solução do tipo 2-soliton. Como os termos envolvendo $\tau_j^{[3]}$ não aparecem até ordem ϵ^3 da equação bilinear, as constantes A_{ij} correspondem às mesmas para a solução 2-soliton, (2.48).

Desta forma, a única constante que resta ser ajustada para que τ_j satisfaça as equações de movimento é A_{123} . No apêndice B é mostra-se que

$$A_{123} = A_{12}A_{23}A_{13}. \quad (2.49)$$

No mesmo apêndice, mostra-se que qualquer equação bilinear do tipo (2.34) admite soluções do tipo 1 e 2-soliton, mas apenas uma classe restrita admite soluções do tipo N-soliton pra $N \geq 3$. A esta classe, chamamos de modelos integráveis (à lá Hirota).

Como os modelos de Toda são integráveis, uma solução do tipo N-soliton é dada por [7]

$$\tau_j = \sum_{\mu^p=0,1} \exp\left(\sum_{p=1}^N \mu^p \Phi_j^p + \sum_{p,q=1}^N \mu^p \mu^q \gamma^{pq}\right) \quad (2.50)$$

Onde $\gamma^{pq} = \log A_{pq}$ e a soma é sobre as 2^N possibilidades de $\mu^p = 0, 1$, para cada p .

Agora, pode-se apreciar melhor o fato de que os modelos integráveis são uma classe notável, uma vez que, como em (2.49), os coeficientes das exponenciais

acima estão todos determinados em função de A_{pq} , que por sua vez são originados pela interação entre dois sólitons. Isto mostra que a equação bilinear correspondente a um modelo integrável contém vínculos que codificam a dinâmica de interação entre sólitons e que permitem que obtenhamos soluções multi-solitônicas através de (2.50), a qual corresponde à uma espécie de princípio de superposição não-linear.

2.3.4 Massa clássica da solução 1-soliton

Nesta seção, iremos calcular a massa das soluções 1-soliton obtidas através do método de Hirota. O leitor que deseja chegar logo ao próximo capítulo deve sentir-se à vontade para ir direto ao resultado (2.63) e retornar quando (e se) achar necessário.

Para obter-se a massa, calcula-se o momento,

$$M\gamma(v)v = \int dx \phi'(x, t) \dot{\phi}(x, t) \quad (2.51)$$

onde $\gamma(v) = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Neste ponto, é conveniente introduzir os pesos da representação $(r+1)$ dimensional de A_r , os vetores ortogonais e_j , com $j = 1, \dots, r+1$. Em termos dos quais, as raízes α_j são dadas por

$$\alpha_j = e_j - e_{j+1} \quad (2.52)$$

Onde $e_0 \equiv e_{r+1}$. Da equação acima vê-se que

$$\alpha_k \cdot \sum_{j=1}^{r+1} e_j = 0 \quad (2.53)$$

Assim, definindo $\phi_j = e_j \cdot \phi$, temos

$$P = - \int dx \sum_{j=1}^{r+1} \phi_j'(x, t) \dot{\phi}_j(x, t) = - \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sum_{j=1}^{r+1} d\phi_j \dot{\phi}_j(x, t) \quad (2.54)$$

Utilizando a expressão (2.43) para a solução 1-soliton, encontra-se

$$\dot{\phi}_j(x, t) = -\frac{1}{i\beta} \partial_t \log \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}} = \frac{\sigma v}{i\beta} \left(\frac{\delta_j e^\phi}{1 + \delta_j e^\phi} - \frac{\delta_{j-1} e^\phi}{1 + \delta_{j-1} e^\phi} \right) \quad (2.55)$$

Onde os dois termos do lado direito podem ser escritos como

$$\frac{\delta_j e^\phi}{1 + \delta_j e^\phi} = -\frac{1}{1 - \delta^{-1}} \left(\frac{1 + \delta_{j-1} e^\phi}{1 + \delta_j e^\phi} - 1 \right) = \frac{1}{1 - \delta^{-1}} (1 - e^{i\beta\phi_j}) \quad (2.56)$$

e

$$\frac{\delta_{j-1} e^\phi}{1 + \delta_{j-1} e^\phi} = -\frac{1}{1 - \delta} \left(\frac{1 + \delta_j e^\phi}{1 + \delta_{j-1} e^\phi} - 1 \right) = \frac{1}{1 - \delta} (1 - e^{-i\beta\phi_j}) \quad (2.57)$$

Usando estas expressões obtemos

$$\dot{\phi}_j(x, t) = \frac{\sigma v}{i\beta} \left(\frac{1}{1 - \delta^{-1}} (1 - e^{i\beta\phi_j}) - \frac{1}{1 - \delta} (1 - e^{-i\beta\phi_j}) \right) \quad (2.58)$$

$$= \frac{\sigma v}{i\beta} \left(\frac{1}{1 - \delta^{-1}} - \frac{e^{i\beta\phi_j}}{1 - \delta^{-1}} - \frac{1}{1 - \delta} + \frac{e^{-i\beta\phi_j}}{1 - \delta} \right) \quad (2.59)$$

Os termos constantes não contribuem para (2.54) pois $\alpha_k \cdot \sum_{j=1}^{r+1} e_j = 0$. Após a integração, se obtém

$$P = -\sigma v \beta^2 \sum_{j=0}^{r+1} \left(\frac{e^{-i\beta\phi_j}}{1 - \delta} - \frac{e^{i\beta\phi_j}}{1 - \delta^{-1}} \right) \Big|_{\phi_-}^{\phi_+} \quad (2.60)$$

Que é facilmente calculado utilizando-se os limites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\beta\phi_j} = \delta^{-1} \quad (2.61)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{i\beta\phi_j} = 1 \quad (2.62)$$

Deste modo, a massa do soliton é dada por

$$M_a = \frac{P}{\gamma(v)v} = \frac{2\sigma(r+1)}{\beta^2} = \frac{4m(r+1)}{\beta^2} \sin \left(\frac{\pi a}{r+1} \right) \quad (2.63)$$

Onde a relação de dispersão (2.42) foi empregada para eliminar σ .

3 Quantização Canônica de Solitons: Um método semiclassico

A seguir, apresentaremos um método de quantização para um campo escalar real que utiliza uma solução clássica, mais precisamente um sólito, como ponto de partida para uma expansão da lagrangeana. Esta expansão é uma generalização da teoria de perturbação usual, e é, num certo sentido, não perturbativa, uma vez que a solução clássica é singular no parâmetro de expansão.

3.1 O campo escalar em 1+1 dimensões

Considere um campo escalar real ϕ , auto-interagente, em um espaço-tempo de 1+1 dimensões, cuja densidade Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) \quad (3.1)$$

Onde o potencial $U(\phi)$ satisfaz,

$$U(\phi) \geq 0, \quad (3.2)$$

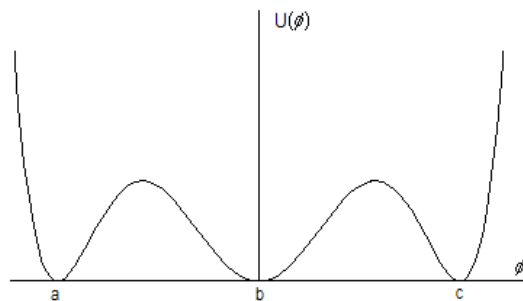


Figura 4: Um potencial contendo três vácuos

Sendo que a igualdade se verifica para dois ou mais valores distintos de ϕ (os vácuos do potencial), os quais denotaremos por $a, b, c \dots$ etc. (como na figura

4). Como vimos no capítulo anterior, este tipo de potencial admite uma solução estática do tipo sóliton para a equação clássica de movimento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -U'(\phi) \quad (3.3)$$

Ou seja, uma solução estática $\phi(x)$, não trivial, com energia $E[\phi]$ finita e que assume os valores de vácuos consecutivos, por ex. a e b , nos limites $x = -\infty$ e $x = +\infty$, respectivamente.

Faremos mais uma exigência sobre o potencial, que este satisfaça a seguinte condição:

$$U(\phi) = U(\phi; g) = \frac{1}{g^2} U(g\phi; 1), \quad (3.4)$$

para uma determinada constante de acoplamento g . O que faremos a seguir é uma expansão semiclássica para a teoria quântica definida por este potencial. O que consiste em tratar a teoria quântica perturbativamente, de modo que os termos de origem clássica sejam dominantes sobre os demais. Veremos nas próximas seções que a condição acima permite controlar o tamanho dos demais termos da expansão semiclássica.

De fato, podemos entender isto da seguinte forma, sugerida por S. Coleman, em [6]. Na teoria clássica, a constante de acoplamento g é irrelevante, pois, fazendo

$$\phi' = g\phi, \quad (3.5)$$

obtêm-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' - U(\phi'; 1) \right\} \quad (3.6)$$

De modo que a constante de acoplamento não é fundamental para a dinâmica clássica. De fato, tendo-se uma solução clássica para um determinado valor de g , não nulo, então obtêm-se facilmente a solução para g qualquer. Já na teoria quântica, a situação é outra.

Ao escrever um propagador em termos de integrais de trajetória, vê-se que o tamanho da ação em relação à constante \hbar determina o "peso" de cada trajetória. Assim, na teoria quântica, a quantidade importante é

$$\frac{\mathcal{L}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar g^2} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' - U(\phi'; 1) \right\}. \quad (3.7)$$

Portanto, na teoria quântica, a dinâmica depende de um parâmetro adicional, a constante adimensional $g^2 \hbar$. E, pela maneira como estas constantes aparecem juntas, vê-se que o limite clássico $\hbar \rightarrow 0$ é equivalente ao limite de acoplamento fraco, ou seja, para g pequeno. Portanto, é de se esperar que uma expansão semiclássica, como faremos a seguir, funcione bem no limite de acoplamento fraco.

3.2 Teoria de Perturbação Usual

Em geral, obter uma solução da equação de movimento clássica (3.3) é uma tarefa não trivial, devido à não-linearidade. A dificuldade (em obter uma solução explícita) proveniente da não-linearidade da teoria é aumentada quando consideramos a quantização deste campo. No processo de quantização canônica o campo ϕ deixa de ser um c-number e assume valores operatoriais. E, além de o campo satisfazer a equação de movimento de heisenberg (3.3), deve também satisfazer as relações de comutação canônicas ($\hbar = 1$)

$$[\phi(x, t), \dot{\phi}(y, t)] = i\delta(x - y) \quad (3.8)$$

$$[\phi(x, t), \phi(y, t)] = 0 \quad (3.9)$$

$$[\dot{\phi}(x, t), \dot{\phi}(y, t)] = 0 \quad (3.10)$$

A maneira usual e mais simples de se tratar este problema é expandir o potencial $U(\phi)$ em série de Taylor em torno de um dos vácuos,

$$\phi = a + \hat{\phi} \quad (3.11)$$

Obtendo-se

$$U(\phi) = \frac{1}{2} U''(a) \hat{\phi}^2 + \tilde{U}(\hat{\phi}), \quad (3.12)$$

que representa uma teoria linear de massa $m_a = (U''(a))^{\frac{1}{2}}$ para $\hat{\phi}$, mais um termo de interação $\tilde{U}(\hat{\phi})$, que por conta de (3.4) é de ordem superior em g e pode ser tratado como perturbação no limite de acoplamento fraco, ou seja, para g suficientemente pequeno. Desta forma, podemos reescrever a densidade lagrangeana como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (3.13)$$

A teoria definida por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} - \frac{1}{2} U''(a) \hat{\phi}^2 \quad (3.14)$$

possui solução exata, dada por

$$\hat{\phi}(x, t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2Lw_k}} [e^{i(kx-w_k t)} b_k + e^{-i(kx-w_k t)} b_k^\dagger], \quad (3.15)$$

onde $w_k = \sqrt{k^2 + m_a^2}$ e

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (3.16)$$

$$[b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = 0 \quad (3.17)$$

$$[b_k, b_{k'}] = 0 \quad (3.18)$$

Assim, no limite de **acoplamento fraco**, resolve-se o problema utilizando teoria de perturbação até a ordem desejada em g .

Neste ponto, ainda no acoplamento fraco, onde o método acima funciona de maneira satisfatória, é justo perguntar se a solução obtida desta maneira, como perturbação de uma teoria livre, é única. Será que o espaço de Hilbert obtido perturbativamente, a partir da expansão do potencial em torno do vácuo $\phi = a$ contém todos os estados possíveis desta teoria?

É de se esperar que não, uma vez que $\phi = a$ é uma solução trivial dentre outras soluções clássicas. O objetivo da próxima seção é mostrar que, para uma vasta classe de potenciais, que admitem soluções do tipo soliton, há uma outra solução (ainda perturbativa) para o campo $\phi(x, t)$ que satisfaz as relações de comutação canônicas bem como a equação de movimento. Veremos que surge um novo setor de estados da teoria, que se diferencia do anterior por um novo número quântico que representa a carga topológica.

3.3 Aproximação Semiclássica para o Campo Escalar Real

Vimos que a expansão do potencial $U(\phi)$ a partir do vácuo $\phi = a$ permite que quantizemos o campo de modo perturbativo no regime de acoplamento fraco (ou

seja, g suficientemente pequeno). Note que $\phi = a$ é uma solução trivial das equações de movimento (3.3) pois $U'(\phi = a) = 0$, ou seja, é um mínimo local de $U(\phi)$. Vamos agora, estender este procedimento para o caso de uma solução clássica não trivial com energia finita, um soliton estático.

Para tornar a analogia mais clara, reescrevamos a lagrangeana do campo escalar como

$$L[\phi] = T[\phi] - V[\phi], \quad (3.19)$$

onde os funcionais $T[\phi]$ e $V[\phi]$ são definidos por

$$T[\phi] = \int \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \quad (3.20)$$

e

$$V[\phi] = \int \frac{1}{2} \phi'^2 + U[\phi]. \quad (3.21)$$

Note que a equação estática de movimento pode ser escrita como

$$\frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi(x)} = 0, \quad (3.22)$$

de modo que um soliton estático ϕ_{cl} representa um extremo do funcional $V[\phi]$. Com isso em mente, considere a mudança de variável

$$\phi(x, t) = \phi_{cl}(x) + \hat{\phi}(x, t). \quad (3.23)$$

Neste ponto é conveniente comparar esta expressão com (3.11). A diferença é que agora estamos considerando flutuações do campo $\phi(x, t)$ em torno de uma solução não trivial. A expansão até segunda ordem em $\hat{\phi}(x, t)$ do funcional $V[\phi]$ fica

$$V[\phi_{cl}(x) + \hat{\phi}(x, t)] = V[\phi_{cl}(x)] + \int d^2x (U'(\phi_{cl}) - \partial_x \phi_{cl}) \hat{\phi} + \frac{1}{2} \int d^2x \hat{\phi} (-\partial_x^2 + U''(\phi_{cl})) \hat{\phi} + \dots \quad (3.24)$$

Note que o segundo termo da expressão é nulo, uma vez que ϕ_{cl} satisfaz a equação clássica de movimento. Assim, restam o primeiro e o terceiro termo. Vale a pena ressaltar que o parâmetro que controla o tamanho dos termos

da série de Taylor funcional acima é a constante de acoplamento g . De fato, mostremos agora que o primeiro termo é de ordem g^{-2} , o terceiro termo $O(g^0)$ e os demais de ordem superior em g .

Normalmente, a massa das partículas da teoria linearizada, $m_a = (U''(a))^{\frac{1}{2}}$, independe da constante de acoplamento g . Nesse caso de (3.4), tem-se

$$\frac{d^2}{d\phi^2}U(\phi; g)|_{\phi=a} = U''(g\phi; 1)|_{\phi=a} = O(g^0) \quad (3.25)$$

Logo ϕ deve ser $O(g^{-1})$ e portanto, $U(\phi; g)$ e $V[\phi_{cl}(x)]$ são $O(g^{-2})$. Novamente, como $g\phi = O(g^0)$, tem-se que a cada derivada do potencial U em relação a ϕ , ganha-se um fator g , logo, os termos superiores à segunda derivada são de ordem g em diante. Assim,

$$V[\phi(x, t)] = V[\phi_{cl}] + \frac{1}{2} \int d^2x \hat{\phi}(-\partial_x^2 + U''(\phi_{cl}))\hat{\phi} + O(g) \quad (3.26)$$

Como $\phi_{cl}(x)$ independe do tempo, $\partial_t \hat{\phi}(x, t) = \partial_t \phi(x, t)$. Deste modo, a lagrangeana pode ser escrita como um funcional de $\hat{\phi}$

$$L[\hat{\phi}] = T[\hat{\phi}] - V[\phi_{cl}] - \frac{1}{2} \int d^2x \hat{\phi}(-\partial_x^2 + U''(\phi_{cl}))\hat{\phi} + L_I \quad (3.27)$$

onde L_I é definido por esta equação e contém os termos de ordem superior em g . Em analogia com a seção anterior, define-se

$$L_0 = T[\hat{\phi}] - V[\phi_{cl}] - \frac{1}{2} \int d^2x \hat{\phi}(-\partial_x^2 + U''(\phi_{cl}))\hat{\phi} \quad (3.28)$$

A estratégia agora é tratar L_I como perturbação pois, como veremos logo em seguida, podemos quantizar o campo com lagrangeana L_0 de um modo muito parecido com a quantização do campo livre. De fato, dado que $V[\phi_{cl}]$ é uma constante, L_0 gera a seguinte equação de movimento

$$[\partial_t^2 - \partial_x^2 + U''(\phi_{cl}(x))]\hat{\phi}(x, t) = 0 \quad (3.29)$$

que, como visto no capítulo anterior, é a equação de estabilidade linear para o soliton. Como (3.29) é linear e o potencial $U(\phi)$ independe do tempo, podemos escrever $\hat{\phi} = e^{iw_k t} \eta_k(x)$, onde está implícita a soma em k . Assim, os modos η_k irão

satisfazer a equação de schrödinger

$$[-\partial_x^2 + U''(\phi_{cl}(x))]\eta_k(x) = w_k^2 \eta_k(x) \quad (3.30)$$

Note que a condição de estabilidade clássica do soliton ($w_k^2 \geq 0$) também garante, a menos do modo zero, que a segunda derivada funcional de $V[\phi]$ seja positiva, caracterizando ϕ_{cl} como um mínimo do funcional $V[\phi]$, o que completa a analogia, uma vez que o vácuo a , é um mínimo do potencial $U(\phi)$.

Sabemos que o modo zero é consequência da invariância de translação da teoria e, portanto, independente da forma do potencial. Desta forma, $\phi_{cl}(x-x_0)$ é solução das equações de movimento para qualquer x_0 . Em um tratamento mais rigoroso da quantização semi-clássica [8], mostra-se que a seguinte mudança de variáveis define uma transformação canônica

$$\phi(x, t) = \phi_{cl}(x - X) + \hat{\phi}(x - X, t). \quad (3.31)$$

onde $X(t)$ é promovido à uma variável dinâmica, juntamente com $\hat{\phi}$, e possui momento canonicamente conjugado P , tal que

$$[X, P] = i \quad (3.32)$$

Mostra-se também que P representa o momento total do sistema.

Ao se incluir mais uma variável dinâmica, X , aumenta-se o número de graus de liberdade, o que é convenientemente acertado com o seguinte vínculo, que exclui o modo zero como solução para o campo $\hat{\phi}$,

$$\int dx \hat{\phi}'_{cl} = 0 \quad (3.33)$$

Como vimos no capítulo anterior, ϕ'_{cl} é o próprio modo zero, que segundo o vínculo acima será ortogonal à $\hat{\phi}$. Já que $[X, \hat{\phi}] = 0$, por simplicidade, daqui em diante X será eliminado da discussão. Mais tarde, introduziremos um método de calcular elementos de matriz que permite obter resultados corretos sem a utilização dos operadores X e P .

Assim, deve-se excluir o modo zero da expansão

$$\hat{\phi}(x, t) = e^{iw_k t} \eta_k(x) a_k, \quad (3.34)$$

onde os coeficientes a_k são constantes arbitrárias e o conjunto de soluções $\{\eta_k; k \in \mathbb{N}\}$ é ortonormal e completo. Sem a perturbação L_I , a solução para a equação de movimento é, portanto

$$\phi(x, t) = \phi_{cl} + e^{iw_k t} \eta_k a_k \quad (3.35)$$

Que assim como (3.11) é uma boa aproximação no contexto de acoplamento fraco, a partir da qual podemos tratar os termos $O(g)$ como perturbação.

A quantização de $\hat{\phi}(x, t)$ segue os mesmos princípios da quantização do campo escalar real livre. Basta tomar os a_k 's como operadores de criação e aniquilação de modo a satisfazer as relações de comutação canônicas. O resultado é melhor escrito como

$$\hat{\phi}(x, t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2w_k}} [e^{-iw_k t} \eta_k(x) a_k + e^{iw_k t} \eta_k^\dagger(x) a_k^\dagger] \quad (3.36)$$

onde

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (3.37)$$

$$[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (3.38)$$

$$[a_k, a_{k'}] = 0 \quad (3.39)$$

É interessante notar que a expansão em torno do vácuo $\phi(x, t) = a + \hat{\phi}(x, t)$ é um caso particular da aproximação semiclássica desenvolvida nesta seção, dado que $\phi = a$ é uma solução clássica com energia finita.

Note que separamos o campo em uma soma de dois termos $\phi(x, t) = \phi_{cl}(x) + \hat{\phi}(x, t)$. O primeiro termo é um c-number e por isso não contribui para as relações de comutação canônicas. Por outro lado, este termo satisfaz a equação clássica de movimento sem aproximações. Já o segundo nos permite quantizar o campo, faz com que a solução satisfaça as relações de comutação canônicas. A não-linearidade da equação de movimento (3.3) impossibilita uma soma como solução exata. Deste modo, no acoplamento fraco, a aproximação $L = L_0$ transfere esta dificuldade para a perturbação L_I , uma vez que $\hat{\phi}(x, t)$ satisfaz a equação de estabilidade **linear** do sistema. Ainda assim, alguma informação

sobre a dinâmica não linear é retida em ϕ_{cl} que carrega informação não perturbativa já que é proporcional à g^{-1} .

3.4 Carga topológica e espaço de Hilbert

Vimos que, no limite de acoplamento fraco, há pelo menos duas maneiras (igualmente satisfatórias) de se quantizar o campo escalar $\phi(x, t)$. A primeira corresponde à uma expansão do potencial $U(\phi)$ a partir de um dos vácuos clássicos. Já a segunda corresponde a expansão do funcional $V[\phi]$, definido em (3.21), a partir de uma solução clássica não trivial ϕ_{cl} .

No primeiro caso o espaço de Hilbert é constituído por vetores do tipo

$$|k_1 \dots k_n\rangle = b_{k_1}^\dagger \dots b_{k_n}^\dagger |0\rangle \quad (3.40)$$

onde $|0\rangle$ é o vácuo da teoria. Estes estados constituem o que chamaremos de **setor do vácuo**. No segundo caso temos algo parecido. Observe (3.36), onde os operadores a_k e a_k^\dagger são operadores de aniquilação e criação. No **setor do soliton** (chamaremos assim daqui em diante) também há um vetor que é aniquilado por todos os a_k 's, uma espécie de vácuo, que denotaremos por $|P\rangle$, de modo que o setor do soliton é constituído por vetores do tipo

$$|P; k_1 \dots k_n\rangle = a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_n}^\dagger |P\rangle \quad (3.41)$$

Por agora podemos ignorar o significado do índice P, que será revelado adiante.

Um ponto interessante é se os quanta do setor do vácuo são iguais aos gerados no setor solitônico pelos operadores a_k^\dagger . Para resolver esta questão observe a equação de estabilidade (3.30). Nos limites $x \rightarrow \pm\infty$ o soliton assume os valores dos vácuos a e b , logo (3.30) vai para

$$[-\partial_x^2 + m_l^2]\eta_k(x, t) = w_k^2 \eta_k(x, t) \quad (3.42)$$

onde $l = a; b$. A última equação é precisamente a equação que define os modos normais das partículas fundamentais do setor do vácuo, ou seja, a equação de Klein Gordon (separada a variável tempo).

Considere a restrição $m_a = m_b$, que compreende casos de grande interesse como as teorias Sine-Gordon e ϕ^4 . Neste caso, o comportamento das soluções

de (3.30) no infinito define a forma

$$\eta_k \rightarrow \exp(i[kx - wt])\tilde{\eta}_k(x) \quad (3.43)$$

com

$$\tilde{\eta}_k^\dagger(x) = \tilde{\eta}_{-k}(x) \quad (3.44)$$

Satisfazendo a mesma relação de dispersão que as partículas do setor do vácuo

$$m_a^2 + k^2 = w_k^2 \quad (3.45)$$

Portanto, nestes casos, os quanta de ambos os setores possuem mesma massa $m = m_a$. Na literatura, é comum denominar estas partículas de mesons. Note que a condição $m_a = m_b$, implica que os dois vácuos possuem a mesma curvatura $U''(a)$. Daqui em diante consideraremos somente casos onde a restrição é satisfeita. O leitor mais curioso encontrará em [9] uma vasta discussão em casos em que há dois tipos de quanta.

Calculemos, agora, a energia dos estados do setor do sóliton. É fácil de ver que o hamiltoniano obtido a partir da lagrangeana

$$L[\hat{\phi}] = T[\hat{\phi}] - V[\phi_{cl}] - \frac{1}{2} \int dx \hat{\phi}(-\partial_x^2 + U''(\phi_{cl}))\hat{\phi} + L_I \quad (3.46)$$

é dado por

$$H = V(\phi_{cl}) + \int dx \frac{1}{2} [(\partial_t \hat{\phi})^2 + (\partial_x \hat{\phi})^2 + U''(\phi_{cl})\hat{\phi}^2] + O(g) \quad (3.47)$$

que em termos de $\hat{\phi}$ dado por (3.36) fica

$$E = V[\phi_{cl}] + \sum_k w_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \quad (3.48)$$

Vale ressaltar que $|P\rangle$ não é o vácuo da teoria, uma vez que a energia do estado $|P\rangle$ é maior do que a energia do vácuo por conter a contribuição clássica $V[\phi_{cl}]$. Portanto, sendo $|0\rangle$ o estado de menor energia, para que a energia dos estados do setor do sóliton esteja bem definida, deve-se subtrair de (3.48) a energia de ponto zero do vácuo

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_k w_k^{vac} \quad (3.49)$$

Assim, a energia do estado $|P\rangle$ é dada por

$$E = V[\phi_{cl}] + \frac{1}{2} \sum_k (w_k - w_k^{vac}) \quad (3.50)$$

Esta soma ainda não está bem definida, pois, como veremos em exemplos, possui uma divergência logarítmica. No entanto, não há motivo para preocupação, uma vez que esta divergência pode ser eliminada através do ordenamento normal da lagrangeana.

A esta altura é natural nos questionarmos sobre a relação entre os dois setores, já que estes constituem estados distintos de uma mesma teoria. Bem, veremos que estes setores são ortogonais pois diferem por um novo número quântico que definiremos logo em seguida, a carga topológica.

No apêndice A, vimos que os vácuos ligados por um soliton estático são distintos e consecutivos. Assim, não é possível obter a solução clássica $\phi = a$ a partir de um soliton ϕ_{cl} , que liga os vácuos a e b , através de uma deformação contínua sem que o funcional $E[\phi]$ divirja. Uma vez que a evolução temporal é uma deformação contínua, uma solução clássica conserva os limites em $x \rightarrow \pm\infty$ para todo tempo t . Para tornar esta última passagem mais concreta, define-se a corrente (trivialmente) conservada [2]

$$j^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_{cl} \quad (3.51)$$

Note que a conservação da corrente j^μ não está relacionada com a dinâmica do sistema, portanto não é uma corrente de Noether. A carga associada a esta corrente é denominada carga topológica

$$Q = \int dx \varepsilon^{0\nu} \partial_\nu \phi = \phi(\infty, t) - \phi(-\infty, t) \quad (3.52)$$

Desta definição segue que a solução clássica $\phi = a$ possui carga topológica $Q = 0$ e para o soliton estático temos $Q=1$ (a menos de uma normalização).

Agora, na teoria quântica, a carga topológica passa a um operador \hat{Q} . É fácil de ver que \hat{Q} é hermiteano pois o campo ϕ é real. Mostremos então que os setores do vácuo e do soliton possuem cargas topológicas distintas e, portanto, são ortogonais. De fato, nos dois casos o campo $\phi(x, t)$ pode ser escrito como

$$\phi(x, t) = \phi_{cl}(x) + \hat{\phi}(x, t) \quad (3.53)$$

(Pois $\phi_{cl} = a$ é uma solução clássica trivial). Assim,

$$\hat{Q} = \phi(\infty, t) - \phi(-\infty, t) = [\phi_{cl}(\infty) - \phi_{cl}(-\infty)] + [\hat{\phi}(\infty, t) - \hat{\phi}(-\infty, t)] \quad (3.54)$$

$$\hat{Q} = Q + [\hat{\phi}(\infty, t) - \hat{\phi}(-\infty, t)] \quad (3.55)$$

$$\hat{Q} = Q \quad (3.56)$$

Na última passagem foi utilizado o fato de que quando expandimos $\hat{\phi}$ em modos normais, o fazemos numa caixa de tamanho L , com condições de contorno periódicas. Desta forma, o setor do soliton possui carga topológica $\hat{Q} = 1$ e o do vácuo $\hat{Q} = 0$. Conclui-se então que são ortogonais.

Vale ressaltar que $\phi(x, t) = \phi_{cl}(x) + \hat{\phi}(x, t)$ é solução exata somente na aproximação semiclássica $L = L_0$. Deste modo, para a teoria completa, o resultado correto seria

$$\hat{Q} = Q + O(g) \quad (3.57)$$

Omitiremos $O(g)$, de modo consistente nessas expressões, pois estamos trabalhando no regime de acoplamento fraco.

3.5 Interpretação dos Estados e Fatores de Forma no setor do Soliton

Da expressão para o Hamiltoniano no setor do soliton (3.48) vê-se que energia destes estados possui uma contribuição clássica $E[\phi_{cl}]$, da ordem g^{-2} , além da correção quântica, de ordem g^0 . Podemos, então, interpretar [2] os estados do tipo

$$|P; k_1 \dots k_n\rangle \quad (3.58)$$

como estados de n mesons de massa m_a , onde a é um vácuo, com momentos

$$k_1, \dots, k_n \quad (3.59)$$

mais uma partícula pesada, que chamaremos de soliton, ou kink, com momento P e energia $E = V[\phi_{cl}] + \frac{1}{2} \sum_k (w_k - w_k^{vac})$. Veja que $E[\phi_{cl}]$ foi calculada a partir de uma solução estática, logo não contém energia cinética. A aparente contradição com o fato do kink possuir momento P vem do fato de que

$$E(P) = \sqrt{P^2 + M^2} \simeq M + \frac{P^2}{2M} \quad (3.60)$$

onde M é a massa do soliton. Como vimos, a massa do soliton estático é $O(g^{-2})$, logo P só aparece na energia $E(P)$ em ordem superior em g [8], e a expressão para a energia na aproximação semiclássica vai até $O(g^0)$. Assim, a energia do

kink (3.50) na aproximação semiclássica corresponde à sua massa de repouso, isto é

$$M = V[\phi_{cl}] + \frac{1}{2} \sum_k (w_k - w_k^{vac}) \quad (3.61)$$

Por fim, sendo \hat{P} o momento e H o hamiltoniano, os estados $|P\rangle$ satisfazem

$$\hat{P}|P\rangle = P|P\rangle \quad (3.62)$$

$$H|P\rangle = E(P)|P\rangle \quad (3.63)$$

$$E(P) = \sqrt{P^2 + M^2} \quad (3.64)$$

De modo que os estados do setor do soliton representam estados de espalhamento das partículas fundamentais (mesons) pela partícula kink. Vale lembrar que a interação entre estes dois tipos de partícula está contida na lagrangeana de perturbação L_I , ou seja, nos termos de ordem superior em g .

3.5.1 Uma aplicação: A teoria Sine-Gordon

A idéia desta seção é ilustrar rapidamente o método apresentado acima com os resultados correspondentes a teoria Sine Gordon. Faremos um exemplo passo a passo no próximo capítulo. Como vimos, modelo SG possui potencial

$$U(\phi) = \frac{m^4}{g^2} [1 - \cos(\frac{g}{m}\phi)] \quad (3.65)$$

Os vácuos (mínimos) deste potencial são

$$\phi_0 = 2n\pi(\frac{m}{g}); n = 0, 1, \dots \quad (3.66)$$

A solução estática do tipo 1-soliton para este potencial é dada por

$$\phi_{cl} = 4(\frac{m}{g}) \tan^{-1} \exp(m(x - x_0)) \quad (3.67)$$

Onde x_0 é uma constante arbitrária que é consequência da invariância translacional da teoria. Note que esta solução assume os valores dos vácuos 0 e $2\pi\frac{m}{g}$ no infinito.

A Massa clássica deste soliton é

$$E[\phi_{cl}] = 8\left(\frac{m^3}{g^2}\right) \quad (3.68)$$

Para determinar a energia w_k dos mesons no setor do soliton, temos que resolver a equação de estabilidade do sistema (3.30). Que neste caso fica

$$\left[-\partial_x^2 + m^2 - \frac{6m^2}{\cosh^2(mx)}\right]\eta_k(x, t) = w_k^2 \eta_k(x, t) \quad (3.69)$$

Resolvendo esta equação [3] encontra-se o espectro contínuo $w_k^2 = (k^2 + 1)m^2$, para $k > 0$, e mais dois modos discretos com w_k^2 assumindo os valores 0 e m^2 . Note que o espectro contínuo começa a partir da massa do meson. A massa M do kink, dada por (3.48), subtraindo-se a energia do vácuo, é

$$M = 8\frac{m^3}{g^2} - \frac{m}{\pi} + O(g^2) \quad (3.70)$$

Este resultado [3] já conta com a renormalização da teoria.

3.5.2 Fatores de forma

Fez-se menção, na segunda seção deste capítulo, que para se eliminar corretamente o modo zero da expansão semiclássica é necessário introduzir uma nova variável dinâmica X , a qual aparece da seguinte forma,

$$\phi(x, t) = \phi_{cl}(x - X) + \hat{\phi}(x - X, t). \quad (3.71)$$

De maneira consistente com o fato de que X comuta com $\hat{\phi}$, levamos a diante a discussão desconsiderando sua existência. Por exemplo, o cálculo da energia (3.48) não é alterado pela substituição $x \rightarrow x - X$, no entanto, ao se calcular ingênuamente o elemento de matriz

$$\langle P' | \phi | P \rangle \quad (3.72)$$

sem considerar X , obtém-se o resultado incorreto, uma vez que $|P\rangle$ é auto-vetor do momento conjugado à X .

Não é uma tarefa difícil fazer este cálculo considerando a teoria completa [8]. No entanto, para que o texto fique auto-contido, optamos por apresentar uma maneira (elegante) de contornar este problema sem utilizar os operadores X e

P . Para tanto [3], basta considerar a seguinte expressão como postulado:

$$\langle P'; k'_1 \dots k'_{n'} | \phi(0) | P; k_1 \dots k_n \rangle_C = O(g^{n+n'-1}) \quad (3.73)$$

Onde o índice C denota a parte conectada do elemento de matriz. Nesta seção, quando ϕ estiver escrito sem argumento entende-se que está avaliado na origem $\langle \phi \rangle = \langle \phi(0) \rangle$.

A partir de (3.73) e utilizando a equação de movimento (3.3) iremos obter explicitamente os elementos de matriz acima como funcionais da solução clássica $\phi_{cl}(x)$ e dos modos normais $\eta_k(x)$. O método utilizado para chegar a este resultado é bastante elegante e foi utilizado pela primeira vez no contexto de quantização semiclássica por Goldstone e Jackiw (veja [3] e referências contidas no mesmo). Veremos que os postulados são auto-consistentes.

A equação de movimento para o modelo SG é

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi = -\frac{m^3}{g} \sin\left(\frac{g}{m}\phi\right) \quad (3.74)$$

$$= -\frac{m^3}{g} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{g}{m}\phi\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.75)$$

Se tomarmos os elementos de matriz entre dos estados kink $|P\rangle$ e $|P'\rangle$, na equação de movimento, utilizando a translação

$$\phi(x, t) = e^{ix^\mu \cdot P_\mu} \phi(0) e^{-ix^\mu \cdot P_\mu}, \quad (3.76)$$

obtém-se

$$([E(P') - E(P)]^2 - [P' - P]^2 + m^2) f(P', P) = \frac{g^2}{6} \langle P' | \phi^3 | P \rangle + \dots \quad (3.77)$$

Onde foi introduzido o fator de forma $f(P', P) = \langle P' | \phi | P \rangle$ e as reticências do lado direito **não** indicam que estes termos serão desprezados. Por um momento, consideraremos somente o primeiro termo da série e o leitor verá que o resultado pode ser estendido facilmente para as demais potências.

Consideremos a equação acima em ordem mais baixa, $O(g^{-1})$. No lado direito, introduzimos conjuntos completos

$$\frac{g^2}{6} \langle P' | \phi^3 | P \rangle = \frac{g^2}{6} \sum_{nn'} \langle P' | \phi | n \rangle \langle n | \phi | n' \rangle \langle n' | \phi | P \rangle. \quad (3.78)$$

A soma acima compreende a base de estados do setor do kink apenas, devido à estabilidade do soliton. Em ordem g^{-1} , contribuem apenas os estados que não contêm mesons.

$$\frac{g^2}{6} \langle P' | \phi^3 | P \rangle = \frac{g^2}{6} \sum_{P''P'''} \langle P' | \phi | P'' \rangle \langle P'' | \phi | P''' \rangle \langle P''' | \phi | P \rangle. \quad (3.79)$$

Substituindo a soma por integração tem-se

$$([E(P') - E(P)]^2 - [P' - P]^2 + m^2) f(P', P) = \frac{g^2}{6} \int \frac{dP'' dP'''}{(2\pi)^2} f(P', P'') f(P'', P''') f(P''', P). \quad (3.80)$$

Note que, se estivessemos considerando as demais potências de ϕ , a conta seria a semelhante, com a única diferença que mais conjuntos completos seriam necessários entre os ϕ 's e mais variáveis de integração apareceriam na expressão acima, por exemplo, para o próximo termo seria

$$\int \frac{dP'' dP''' dP'''' dP'''''}{(2\pi)^4} f(P', P'') f(P'', P''') f(P''', P''''') f(P''''', P''''') f(P''''', P). \quad (3.81)$$

Agora, avaliemos o lado esquerdo de (3.80). Como vimos, M é de ordem g^{-2} , portanto a diferença $[E(P') - E(P)]^2$ é de ordem g^2 e pode ser eliminada da equação acima em ordem g^{-1} . Mais uma simplificação pode ser feita utilizando que $f(P, P') = f(P - P')$ em ordem mais baixa de g .

De fato, $f(P, P')$ só pode ser função dos invariantes de Lorentz $(P_\mu - P'_\mu)^2$ e $\varepsilon^{\mu\nu} P_\mu P'_\nu$, que, em ordem mais baixa de g , são dados por

$$(P_\mu - P'_\mu)^2 = [E(P') - E(P)]^2 - [P' - P]^2 \approx -[P' - P]^2 \quad (3.82)$$

e

$$\varepsilon^{\mu\nu} P_\mu P'_\nu = E(P)P' - E(P')P \approx M(P - P'). \quad (3.83)$$

Utilizando estas simplificações na equação (3.80), obtém-se

$$(-[P' - P]^2 + m^2)f(P' - P) = \frac{g^2}{6} \int \frac{dP'' dP'''}{(2\pi)^2} f(P' - P'')f(P'' - P''')f(P''' - P). \quad (3.84)$$

É fácil de ver que esta expressão, em termos da transformada de fourier,

$$f(P' - P) = \int dx \exp[i(P' - P)x]f(x), \quad (3.85)$$

é equivalente a

$$f''(x) = -m^2 f + \frac{g^2}{6} f^3(x) + \dots = -\frac{m^3}{g} \sin\left(\frac{g}{m} f(x)\right), \quad (3.86)$$

onde que re-introduzimos as demais potências de $f(x)$. Note que esta é precisamente a equação de movimento clássica, logo, a menos de normalização,

$$f(P' - P) = \int dx \exp[i(P' - P)x] \frac{4m}{g} \tan^{-1} \exp(mx) + O(g). \quad (3.87)$$

Apesar de estarmos lidando com o modelo SG é fácil de ver que esta demonstração é geral

$$\langle P' | \phi | P \rangle = \int dx \exp[i(P' - P)x] \phi_{cl}(x) + O(g). \quad (3.88)$$

Pode-se, também, estender este método para os demais elementos de matriz, obtendo-se

$$\langle P' | \phi | P, k \rangle = \int dx \exp[i(P' - P)x] \frac{\eta_k(x)}{\sqrt{2w_k}} + O(g), \quad (3.89)$$

onde a normalização $\sqrt{2w_k}$, assim como a $f = \phi_{cl}$ é necessária para que as relações de comutação canônicas sejam satisfeitas em ordem g^0 [3]

$$\langle P' | [\phi(x, 0), \phi(y, 0)] | P \rangle = i\delta(x - y)(2\pi)\delta(P' - P) \quad (3.90)$$

4 Quantização Semiclássica dos Modelos Afins de Toda

No capítulo anterior, vimos que para uma vasta classe de teorias, surge um setor do espaço de Hilbert associado às soluções do tipo soliton e com carga topológica não nula. Foram **exibidos**, a fim de ilustração, os resultados da quantização semi-clássica correspondentes a teoria Sine-Gordon. No presente capítulo, veremos passo a passo, o cálculo das correções quânticas para a massa das soluções 1-soliton correspondentes aos modelos Afins de Toda obtidas no capítulo 2. Como a teoria SG corresponde ao caso particular $r = 1$, estaremos justificando também os resultados exibidos anteriormente.

4.1 Resolvendo a equação de estabilidade

Como vimos, a equação de estabilidade é que define as massas e energias das excitações no setor do soliton. Para os modelos de Toda (introduzidos na seção 2.3), a equação de estabilidade de uma solução do tipo 1-soliton ϕ_a é dada por

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\hat{\phi} + m^2 \sum_{j=0}^r e^{i\beta\phi_a \cdot \alpha_j} n_j \alpha_j (\alpha_j \cdot \hat{\phi}) = 0 \quad (4.1)$$

Note que, apesar de o campo $\phi(x, t)$ ter $r = \text{rank}(g)$ componentes, a equação de estabilidade é obtida no mesmo espírito do capítulo 2. Ou seja, é a equação de movimento para uma perturbação $\hat{\phi}$, tal que $\phi = \phi_a + \hat{\phi}$ satisfaça a equação de movimento gerada pela lagrangeana (2.28), até primeira ordem em $\hat{\phi}$.

É conveniente lembrar que o método de semiclássico de quantização, apresentado na seção anterior, requer um soliton ϕ_a estático, que, neste caso, é dado por (2.43) com $v = 0$ e $\sigma^2 = 4m^2 \sin\left(\frac{\pi a}{r+1}\right) \equiv m_a^2$,

$$\phi_a = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \log \left(1 + w_a^j e^{m_a(x-\xi)} \right) \quad (4.2)$$

Onde w_a corresponde à $(r+1)^a$ raiz da unidade, $w_a = e^{\frac{2i\pi a}{r+1}}$, e ξ é uma constante qualquer proveniente da invariância de translacional da teoria.

Assintoticamente, $x \rightarrow \pm\infty$, a equação de estabilidade assume a forma

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\hat{\phi} + m^2 \sum_{j=0}^{r+1} n_j \alpha_j (\alpha_j \cdot \hat{\phi}) = 0 \quad (4.3)$$

Que corresponde à equação de movimento linearizada em torno do vácuo $\phi = 0$. O que nos leva a procurar soluções da equação de estabilidade com dependência espaço-temporal dada por

$$\hat{\phi} \sim e^{i(kx + \nu t + \delta_{\pm})} \mu_b \quad (4.4)$$

Onde o índice b , com $b = 1, \dots, r$, vem do fato que $\hat{\phi}$ possui r componentes e, portanto, a equação acima possui r soluções linearmente independentes com

$$\nu^2 = k^2 + m_b^2, \quad (4.5)$$

sendo $\frac{m_b^2}{m^2}$ auto-valor da matriz

$$\sum_{j=0}^{r+1} n_j \alpha_j \otimes \alpha_j \quad (4.6)$$

correspondente ao auto-vetor μ_b , que serão determinados mais adiante. Por ora, note que, como (4.3) é a equação de movimento linearizada em torno do vácuo trivial $\phi = 0$, então os auto-valores m_b , correspondem as massas das partículas do setor do vácuo da teoria.

Em geral, a equação de estabilidade é muito difícil de ser resolvida analiticamente. Contudo, o fato de o modelo ser integrável mostra-se muito útil na resolução desta equação. Utiliza-se a seguinte estratégia.

A partir de uma solução 2-soliton, ϕ_{ab} , ajusta-se os parâmetros livres do segundo soliton (b) de forma que este atue como uma pequena perturbação sobre o primeiro (a), obtendo

$$\phi_{ab} \approx \phi_a + \eta_b(x, t) \quad (4.7)$$

Assim, $\eta_b(x, t)$ satisfará a equação de estabilidade automaticamente, uma vez que ϕ_{ab} é solução exata da equação de movimento. Vejamos como isto funciona na prática.

A solução do tipo 2-soliton é dada por

$$\phi = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \log \tau_j \quad (4.8)$$

Com as funções tau

$$\tau_j = 1 + e^{\Phi_j^1} + e^{\Phi_j^2} + Ae^{\Phi_j^1 + \Phi_j^2} \quad (4.9)$$

onde

$$\Phi_j^p = \sigma^p(x - v^p t - \xi^p) + \log(w_{a_p}^j). \quad (4.10)$$

O segundo sóliton deve agir como uma pequena perturbação. Isso pode ser controlado tomando-se $\sigma^{(2)}\xi^{(2)} \ll 1$. E, para recuperar o comportamento assintótico (4.4) da equação de estabilidade, tomamos $\sigma^{(2)} = ik$ e $\sigma^{(2)}v^{(2)} = -i\nu$. Assim, a expansão de ϕ_{ab} até primeira ordem em

$$\delta\tau_j = e^{\Phi_j^2} + Ae^{\Phi_j^1 + \Phi_j^2}, \quad (4.11)$$

fornece

$$\eta_b = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \frac{\delta\tau_j}{\tau_j} \quad (4.12)$$

Note que o índice b é herdado do segundo soliton. Explicitamente, temos

$$\eta_b = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \left(\frac{1 + A(k)w_a^j e^{m_a(x-\xi)}}{1 + w_a^j e^{m_a(x-\xi)}} \right) w_b^j e^{i(kx+vt)}, \quad (4.13)$$

onde

$$k^2 + m_b^2 = \nu^2. \quad (4.14)$$

Que, como argumentamos acima, é solução da equação de estabilidade linear. A constante $A(k)$ é obtida através de (2.48) com $\sigma^{(2)} = ik$, $\sigma^{(2)}v^{(2)} = -i\nu$ e $v^{(1)} = 0$,

$$A(k) = -\frac{m_a^2 + m_b^2 - m_{a-b}^2 - 2im_a k}{m_a^2 + m_b^2 - m_{a+b}^2 + 2im_a k} \quad (4.15)$$

Na próxima seção, iremos impor condições de contorno periódicas sobre estes modos de forma a obter um espectro ν_m , discreto. Por ora, é conveniente, a partir da solução η_b , obter explicitamente os auto-vetores μ_b e auto-valores m_b , citados acima. Para isto, basta tomar $x \rightarrow -\infty$ em η_b e identificar o resultado com (4.4), obtendo,

$$\mu_b = \sum_{j=0}^r w_b^j \alpha_j \quad (4.16)$$

Agora, aplicando a matriz (4.6) em μ_b , obtém-se o auto-valor:

$$\frac{m_b^2}{m^2} = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi b}{r+1} \right). \quad (4.17)$$

Logo,

$$m_b = 2m \sin \left(\frac{\pi b}{r+1} \right). \quad (4.18)$$

De modo que a massa clássica do soliton (2.63) pode ser expressa em termos da massa das partículas fundamentais como

$$M_b = \frac{4m(r+1)}{\beta^2} \sin \left(\frac{\pi a}{r+1} \right) = \frac{2m_b(r+1)}{\beta^2} \quad (4.19)$$

Este resultado será útil para o que segue.

4.2 Primeira correção quântica para a massa do soliton

Como vimos, na aproximação semiclássica, o momento do soliton aparece em ordem superior da constante de acoplamento. Portanto, na aproximação semiclássica, a massa, M , do soliton, em ordem inferior da constante de acoplamento, é dada pelo valor de energia mais baixo do setor do soliton,

$$M = V[\phi_a] + \frac{1}{2} \sum_k (\nu_k - \nu_k^{vac}) \quad (4.20)$$

Onde a constante $V[\phi_a]$ corresponde à energia do soliton estático, que neste caso é M_b , e as frequências ν_k e ν_k^{vac} são obtidas das equações de estabilidade no setor do soliton e do vácuo, respectivamente.

É conveniente, neste ponto, discretizar o espectro correspondente aos modos $\eta_b(x, t)$. Mostra-se apropriada [7] a condição de contorno $\eta(x=0) = \eta(x=L) = 0$, onde L representa o tamanho de uma caixa unidimensional na qual estamos

colocando o sistema. É interessante ter em mente que $L \gg 1$ pois, no final do dia, faremos $L \rightarrow \infty$.

Como pode-se verificar, os modos $\eta_b(x, t)$, obtidos previamente não satisfazem as condições de contorno desejadas. As soluções da equação de estabilidade satisfazendo estas condições de contorno são dadas pela seguinte combinação linear

$$\eta_b(k_m, x, t) - \eta_b(-k_m, x, t) \quad (4.21)$$

(lembre-se que a equação é linear), com

$$k_m L + \rho_b(k_m) = m\pi \quad (4.22)$$

Onde $\rho_b(k_m) = \text{Im}(\text{Log}A(k_m))$. É fácil verificar que $\rho_b(k_m) = -\rho_b(-k_m)$.

Assim, a primeira correção quântica à massa do soliton envolve a diferença de frequências

$$\Delta M_a = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^r \sum_{m \geq 0} \left(\sqrt{k_m^2 + m_b^2} - \sqrt{(k_m + \rho_m/L)^2 + m_b^2} \right) \quad (4.23)$$

Expandindo o termo entre parênteses em potências de L^{-1} , obtém-se o termo dominante

$$\frac{-k\rho_b(k)}{L\sqrt{k^2 + m_b^2}} = -\frac{1}{L}\rho_b(k)\frac{d\varepsilon_b(k)}{dk} \quad (4.24)$$

Onde $\varepsilon_b(k) \equiv \sqrt{k^2 + m_b^2}$. Agora, no limite $L \rightarrow \infty$, passamos de soma a integração

$$\sum_{m \geq 0} = L \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} + O(L^{-1}) \right) \quad (4.25)$$

De modo que a correção para a massa clássica fica

$$\begin{aligned} \Delta M_a = & - \sum_{b=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{4\pi} \rho_b(k) \frac{d\varepsilon_b(k)}{dk} = \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{b=1}^r \left(\rho_b(k)\varepsilon_b(k) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dk \varepsilon_b \frac{d\rho_b(k)}{dk} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

No limite $k \rightarrow \pm\infty$, tem-se $\varepsilon_b(k) \rightarrow |k|$. Por outro lado,

$$\rho_b(k) \rightarrow \frac{1}{2m_a k} (2m_a^2 + 2m_b^2 - m_{a-b}^2 - m_{a+b}^2) \quad (4.27)$$

De modo que a primeira contribuição de (4.26) é dada por

$$\sum_{b=1}^r \rho_b(k) \varepsilon_b(k) \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (4.28)$$

Esta soma, é facilmente calculada utilizando que $m_{b\pm(r+1)}^2 = m_b^2$ e $m_{r+1} = 0$, resultando em

$$\frac{-m_a(r+1)}{2\pi} \quad (4.29)$$

Note que a integral do segundo termo em (4.26) diverge logaritmicamente. O que é esperado, já que a lagrangeana não foi renormalizada. Felizmente, neste caso, a divergência pode ser removida por ordenamento normal. Introduzindo o cut-off Λ , em ordem mais baixa de β^2 temos

$$: e^{i\beta\alpha_j \cdot \phi} := e^{i\beta\alpha_j \cdot \phi} \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 \sum_{a=1}^r (\mu_a \cdot \alpha_j)^2 \Delta_a + O(\beta^4) \right) \quad (4.30)$$

onde

$$\Delta_a = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + m_a^2}} \quad (4.31)$$

e μ_b é autovetor da matriz (4.6), com auto-valor $\frac{m_b^2}{m^2}$. Deste modo, a densidade lagrangeana renormalizada, em ordem mais baixa de β^2 é

$$L = \frac{1}{2} ((\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2) + \frac{1}{\beta^2} \sum_{j=0}^r n_j (m^2 + \partial m_j^2) (e^{i\beta\alpha_j \cdot \phi} - 1) \quad (4.32)$$

Com

$$\partial m_j^2 = \frac{1}{2} (m\beta)^2 \sum_{a=1}^r (\mu_a \cdot \alpha_j)^2 \Delta_a \quad (4.33)$$

Onde o termo constante dá conta da energia de ponto zero, subtraída a mão em (4.23). Retomando o cálculo da massa, incluídos os contratermos, tem-se

$$\Delta M_a = \frac{-m_a(r+1)}{2\pi} + \sum_{b=1}^r \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{4\pi} \varepsilon_b \frac{d\rho_b(k)}{dk} \right) - \frac{1}{\beta^2} \sum_{j=0}^r n_j \int_{-\infty}^{\infty} dx (e^{i\beta\alpha_j \cdot \phi} - 1) \partial m_j \quad (4.34)$$

Calculemos a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (e^{i\beta\alpha_j \cdot \phi} - 1). \quad (4.35)$$

Devido ao anatz de Hirota

$$\phi = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \log \tau_j, \quad (4.36)$$

tem-se

$$e^{i\beta\alpha_j \cdot \phi} = \prod_{k=0}^r \tau_k^{-\alpha_j \cdot \alpha k} = \frac{\tau_{j-1} \tau_{j+1}}{\tau_j^2} \quad (4.37)$$

Onde $\tau_j = 1 + w_a^j e^{m_a(x-\xi)}$ corresponde à solução estática de 1-soliton. Utilizando a equação de movimento para as funções tau

$$\tau_j \dot{\tau}_j - \dot{\tau}_j^2 - \tau_j'' \tau_j + \tau_j'^2 = m^2 (\tau_{j-1} \tau_{j+1} - \tau_j^2) \quad (4.38)$$

vê-se que

$$(e^{i\beta\alpha_j \cdot \phi} - 1) = \frac{1}{m^2} \frac{-\tau_j'' \tau_j + \tau_j'^2}{\tau_j^2} = -\left(\frac{m_a}{m}\right)^2 \frac{w_a^j e^{m_a(x-\xi)}}{(1 + w_a^j e^{m_a(x-\xi)})^2} \quad (4.39)$$

Que pode ser avaliado explicitamente, resultando

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (e^{i\beta\alpha_j \cdot \phi} - 1) = \left(\frac{m_a}{m}\right)^2 \frac{w_a^j e^{m_a(x-\xi)}}{m_a(1 + w_a^j e^{m_a(x-\xi)})} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{m_a}{m^2} \quad (4.40)$$

Agora, a contribuição para a correção da massa pode ser simplificada

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\beta^2} \sum_{j=0}^r n_j \int_{-\infty}^{\infty} dx n_j (e^{i\beta\alpha_j \cdot \phi} - 1) \partial m_j &= \frac{1}{2} m_a \sum_{b=1}^r \sum_{j=0}^r (\mu_a \cdot \alpha_j)^2 \Delta_b \\ &= \frac{1}{2} m_a \sum_{b=1}^r \left(\frac{m_b}{m}\right)^2 \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + m_b^2}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde usamos que μ_b é autovetor da matriz (4.6), com auto-valor $\frac{m_b^2}{m^2}$.

Deste modo, a expressão final para a correção da massa é

$$\Delta M_a = -\frac{m_a(r+1)}{2\pi} + m_a \sum_{b=1}^r \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{m_b}{m}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{k^2 + m_b^2}} - \sqrt{k^2 + m_b^2} \frac{4(m_a^2 + m_b^2 - m_{a+b}^2)}{(m_a^2 + m_b^2 - m_{a+b}^2)^2 + 4m_a^2 k^2} \right\} \quad (4.42)$$

Mostremos agora que esta expressão converge. De fato, para $|k|$ suficiente-

mente grande, o integrando é dado por

$$\sum_{b=1}^r \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{m_b}{m} \right)^2 \frac{1}{|k|} - \frac{(m_a^2 + m_b^2 - m_{a+b}^2)}{m_a^2 |k|} \right\} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (4.43)$$

Considerando os fatos

$$\sum_{b=1}^r m_a^2 + m_b^2 - m_{a+b}^2 = m_a^2(r+1) \quad (4.44)$$

e

$$\sum_{b=1}^r \left(\frac{m_b}{m} \right)^2 = Tr \left(\sum_{j=0}^{r+1} n_j \alpha_j \otimes \alpha_j \right) = \sum_{j=0}^{r+1} n_j \alpha_j^2 = 2 \sum_{j=0}^{r+1} n_j = 2(r+1) \quad (4.45)$$

Vê-se que so restam os termos $O(\frac{1}{k^2})$, portanto a integral é convergente.

Infelizmente, a integral da expressão (4.42) não pode ser calculada analiticamente, a menos do caso $r = 1$, que corresponde à teoria SG. É conveniente escrever a correção da massa como

$$\Delta M_a = m_a \left(-\frac{(r+1)}{2\pi} + I_a \right) \quad (4.46)$$

Para a teoria SG temos $I_a = 0$, assim

$$M = \frac{8m}{\beta^2} - \frac{2m}{\pi} \quad (4.47)$$

No apêndice C mostra-se que este resultado é equivalente ao exibido no capítulo anterior, cujo potencial foi definido em termos de constantes diferentes do atual.

Verifica-se também que I_a independe de a [7], ou seja, em ordem mais baixa, a correção devida a renormalização consiste em uma constante universal, (independente de a), que multiplica a massa do soliton. Isto pode ser expresso por

$$M_a = m_a \left(\frac{2(r+1)}{\beta'^2} + I \right) + O(\beta^2) \quad (4.48)$$

Onde

$$\beta'^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2/4\pi} \quad (4.49)$$

5 Sistemas mais complexos

Vimos que os solitons exercem um papel interessante na quantização de certas teorias em 1+1 dimensões. São responsáveis pelo surgimento de um setor topológico no espaço de estados da teoria. A quantização semiclássica dos Modelos Afins de Toda, feita em detalhes no capítulo anterior, é uma aplicação elegante dessas idéias. O objetivo deste capítulo é mostrar que podemos extendê-las para sistemas mais complexos (ainda em 1+1 dimensões!), obtendo resultados interessantes [10].

5.1 Adicionando fermions

Entre os primeiros a generalizar a estratégia de utilizar solitons para obter informação sobre a teoria quântica, incluindo fermions, estão Jackiw e Rebbi, no artigo [11], o qual seguiremos de perto nesta sessão.

Considere a teoria para o campo bosônico (3.1), agora em interação bilinear com um campo espinorial, com a seguinte densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - G \bar{\psi} (g\phi) \psi \quad (5.1)$$

Onde G é uma constante positiva e tem dimensão de massa. Iremos nos restringir à teoria ϕ^4 , para o campo bosônico, isto é

$$U(\phi) = \frac{m^4}{2g^2} \left(1 - \frac{g^2 \phi^2}{m^2} \right)^2 \quad (5.2)$$

Note que este potencial é duplamente degenerado, como mostra a figura.

É sabido que a equação clássica para a teoria sem os fermions admite uma solução estática do tipo soliton (aqui estamos usando um abuso de linguagem,

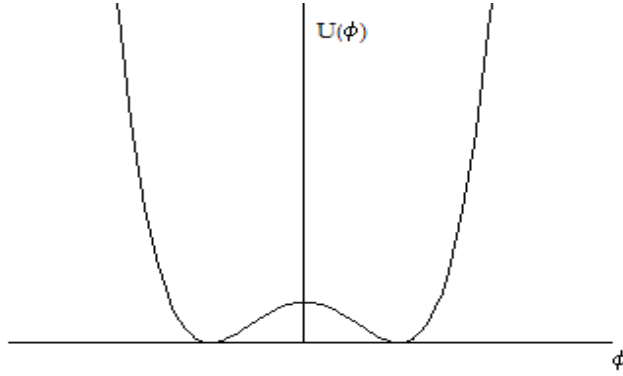


Figura 5: O potencial da teoria ϕ^4

uma vez que a teoria não é integrável). Esta solução é dada por [3]

$$\phi_c = \frac{m}{g} \tanh(mx) \quad (5.3)$$

Note que, como esperado, esta solução conecta os dois vácuos $\phi = \pm \frac{m}{g}$ e possui, portanto, carga topológica não nula. A ocorrência de ϕ_c indica que também deve haver um setor do soliton na teoria com os fermions. De fato, considere as equações de heisenberg para os campos

$$\square\phi = 2m^2\phi - 2g^2\phi^3 - Gg\bar{\psi}\psi \quad (5.4)$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - Gg\phi\psi = 0 \quad (5.5)$$

Como vimos, ϕ_c é $O(g^{-1})$. No limite de acoplamento fraco, o termo que acopla os campos na primeira equação é de ordem superior em g , de forma que em primeira aproximação a solução é $\phi = \phi_c$. A segunda equação, em ordem mais baixa, $O(g^0)$, é dada, então, por

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - Gg\phi_c(x)\psi = 0 \quad (5.6)$$

Baseando-se nisso, pode-se fazer uma expansão semiclássica, $\phi = \phi_c + \hat{\phi}$, em torno do soliton (5.3), do mesmo modo feito para o caso puramente bosônico. Fazendo-se esta expansão, vê-se que em ordem mais baixa de g , a densidade lagrangeana (5.1) não possui acoplamento, sendo então o campo bosônico dado pela solução obtida no capítulo 3,

$$\phi = \phi_c + \hat{\phi} \quad (5.7)$$

Onde $\hat{\phi}$, $O(g^0)$, é dado em termos de uma expansão nos modos normais da

equação de estabilidade do sóliton ((3.36)). E o espinor, em ordem mais baixa é $O(g^0)$, é dado por

$$\psi = \hat{\psi} = a\psi_0 + \sum_p b_p \psi_{p+} + d_p^\dagger \psi_{p-} \quad (5.8)$$

Onde b_p e d_p^\dagger são operadores de criação e aniquilação usuais correspondentes a soluções da equação de Dirac (5.6) com energia positiva ψ_{p+} , e com energia negativa ψ_{p-} . A solução ψ_0 é estática e tem energia nula. Utilizando a representação $\gamma^0 = \sigma^1$ e $\gamma^1 = i\sigma^3$, vê-se, facilmente, que

$$\psi_0 = N \exp\left\{-G \int^x dx' g \phi_c\right\} s^+ \quad (5.9)$$

onde $s^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e N é uma constante de normalização finita. Note que esta solução é invariante por conjugação de número fermiônico ($\sigma^3 \psi_0^* = \psi_0$).

Assim, a equação (5.6) admite uma única solução estática e normalizável ψ_0 , note, entretanto, que o modo zero fermiônico não têm origem na simetria de translação da lagrangeana, como no caso do bosônico. Este modo zero aparece por causa da solução topológica ϕ_c . Vale ressaltar também que o operador, a não corresponde necessariamente à aniquilação de uma partícula. A única restrição sobre ele é que satisfaça as relações de anticomutação

$$\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad (5.10)$$

$$\{a^\dagger, a\} = 1 \quad (5.11)$$

Assim, em ordem mais baixa da constante de acoplamento g , obtém-se de forma muito semelhante à feita no caso puramente bosônico, uma solução para a teoria de campos definida por (5.1). Vejamos agora, como ficam os estados do setor do soliton com a adição dos fermions.

Os estados sem excitações de partículas fundamentais do setor do sóliton, denotados por $|P\rangle$, agora passam à um dubleto degenerado $|P_\pm\rangle$. De fato, como o modo ψ_0 possui energia zero, temos dois estados degenerados $|P_+\rangle$ e $|P_-\rangle$ satisfazendo,

$$\begin{aligned}
a|P_+\rangle &= |P_-\rangle \\
a^\dagger|P_-\rangle &= |P_+\rangle \\
a|P_-\rangle &= 0 \\
a^\dagger|P_+\rangle &= 0
\end{aligned}$$

É necessário enfatizar que não adotamos o ponto de vista de que o soliton (partícula pesada, com massa dada pela energia mais baixa do setor topológico, representada pelos estados $|P\rangle$) existe independente dos fermions. Neste caso, teríamos fermions gerados por a^\dagger , sem custo de energia, em estados de férmion-sóliton. Como consequência do nosso ponto de vista obtém-se o duplete degenerado $|P_\pm\rangle$.

Assim como no terceiro capítulo, iremos agora obter os fatores de forma. Os quais permitem o cálculo correto de elementos de matriz, sem a necessidade de um tratamento mais rigoroso do modo zero bosônico. Postula-se que

$$\langle P'_\pm|\phi(0)|P_\pm\rangle \sim O(g^{-1}) \quad (5.12)$$

E que todos os outros elementos de matriz são de ordem superior em g . Tomando o valor médio da equação de movimento (5.4) e utilizando a translação

$$\phi(x, t) = e^{ix^\mu \cdot P_\mu} \phi(0) e^{-ix^\mu \cdot P_\mu}, \quad (5.13)$$

obtém-se

$$\{[E(P') - E(P)]^2 - [P' - P]^2\} \langle P'_\pm|\phi|P_\pm\rangle = \frac{1}{g} \langle P'_\pm|U'(\phi)|P_\pm\rangle + gG \langle P'_\pm|\bar{\psi}\psi|P_\pm\rangle \quad (5.14)$$

Onde $U'(\phi) = -2m^2\phi + 2g^2\phi^3$. Assim como visto no capítulo 3, a diferença de energia na equação (5.14) é de ordem g^2 e pode ser desprezada em inferior, g^{-1} . Do mesmo modo, elimina-se o último termo, de ordem g , que contém os fermions. Temos então,

$$-[P' - P]^2 \langle P'_\pm|\phi|P_\pm\rangle = \frac{1}{g} \langle P'_\pm|U'(\phi)|P_\pm\rangle \quad (5.15)$$

Introduzindo o fator de forma f , dado pela transformada de fourier,

$$\langle P'_\pm | \phi | P_\pm \rangle = \int dx e^{i(P'-P)x} f(x), \quad (5.16)$$

Vimos na seção 3.4.2 que, em termos do fator de forma, a equação (5.15) fica

$$f'' = U'(f) \quad (5.17)$$

(sendo o lado esquerdo bem óbvio). Que, como era de se esperar, é a equação de movimento estática para a teoria puramente bosônica. Assim, podemos identificar $f(x) = \phi_c(x)$, exatamente como no terceiro capítulo. Convém lembrar que a normalização adotada é necessária para que haja consistência com as relações de comutação canônicas.

Os elementos de matriz contendo fermions, são de ordem superior em g , o que é consistente com o fato de $\hat{\psi}$ ser $O(g^0)$. O mesmo vale para os mésons gerados por $\hat{\phi}$. Os elementos de matriz na próxima ordem, g^0 , contêm um estado do tipo $|P_\pm; k\rangle$, com um méson, ou $|P_\pm; p_\pm\rangle$, com um (anti)fermion de momento p . De fato, repetindo o procedimento acima para os elementos de matriz contendo estes estados, obtém-se

$$\begin{aligned} \langle P'_- | \hat{\psi} | P_+ \rangle &= \int dx e^{i(P'-P)x} \psi_0(x) = O(g^0) \\ \langle P'_\pm | \hat{\psi} | P_\pm; p_+ \rangle &= \int dx e^{i(P'-P)x} \psi_{p_+}(x) = O(g^0) \\ \langle P'_\pm | \hat{\psi}^\dagger | P_\pm; p_- \rangle &= \int dx e^{i(P'-P)x} \psi_{p_-}^\dagger(x) = O(g^0) \\ \langle P'_\pm | \hat{\phi} | P_\pm; k \rangle &= \int dx e^{i(P'-P)x} \frac{\eta_k(x)}{\sqrt{2w_k}} = O(g^0) \end{aligned}$$

Onde η_k é o modo normal k da equação de estabilidade da teoria bosônica, e ψ_{p_+} , ψ_{p_-} e ψ_0 são os modos da equação de Dirac (5.6). Com estes elementos de matriz pode-se mostrar que a normalização adotada para os fatores de forma reproduz corretamente, em ordem inferior de g , ou seja, g^0

$$\langle P'_\pm | \{\bar{\psi}(x), \psi(y)\} | P_\pm \rangle = \delta(x-y)(2\pi)\delta(P'-P). \quad (5.18)$$

De fato, consideremos isto em detalhes. Há dois termos a serem calcu-

lados: $\langle P'_\pm | \bar{\psi}(x) \psi(y) | P_\pm \rangle$ e $\langle P'_\pm | \psi(y) \bar{\psi}(x) | P_\pm \rangle$. A aproximação semiclássica trata como perturbação os termos da lagrangeana de ordem g^1 em diante, portanto deve-se saturar o produto de fermions com estados do tipo sóliton $|P_\pm\rangle$ e sóliton mais fêrmion $|P_\pm; p_\pm\rangle$, o que mantém o cálculo até ordem g^0 . Assim,

$$\langle P'_\pm | \bar{\psi}(x) \psi(y) | P_\pm \rangle = \quad (5.19)$$

$$\langle P'_\pm | \bar{\psi}(x) \left(\sum_{\pm} \int \left(\frac{dP''}{2\pi} \right) |P''_\pm\rangle \langle P''_\pm| + \sum_{\pm} \int \left(\frac{dP''}{2\pi} \right) |P''_\pm; p_\pm\rangle \langle P''_\pm; p_\pm| \right) \psi(y) | P_\pm \rangle. \quad (5.20)$$

Note que no caso +, da primeira soma na expressão (5.19) somente os estados internos do tipo antisoliton (-) contribuem. Para o caso em que os estados externos têm sinal - não há contribuição da primeira soma. Assim, utilizando os elementos de matriz (5.18), tem-se

$$\int \left(\frac{dP''}{2\pi} \right) \langle P'_+ | \bar{\psi}(x) | P''_- \rangle \langle P''_- | \psi(y) | P_+ \rangle = \int dz e^{i(P'-P)z} \psi_0^\dagger(x+z) \psi_0(y+z). \quad (5.21)$$

Para o segundo termo, $\langle P'_\pm | \psi(y) \bar{\psi}(x) | P_\pm \rangle$, a situação é invertida e só há contribuição da primeira soma quando os estados externos são do tipo -. Pode-se mostrar que a contribuição nesse caso é igual à obtida acima. Já para a segunda soma em (5.19), os estados internos do tipo antifermion dão a seguinte contribuição

$$\int \left(\frac{dP''}{2\pi} \right) \langle P'_\pm | \bar{\psi}(x) | P''_\pm; p_- \rangle \langle P''_\pm; p_- | \psi(y) | P_\pm \rangle = \int dz e^{i(P'-P)z} \int \left(\frac{dp}{2\pi} \right) [\psi_{p^+}^\dagger(x+z) \psi_{p^+}(y+z)].$$

Já no segundo termo do anticomutador, a contribuição dos estados com um fêrmion é dada por

$$\int dz e^{i(P'-P)z} \int \left(\frac{dp}{2\pi} \right) [\psi_{p^-}^\dagger(x+z) \psi_{p^-}(y+z)]. \quad (5.22)$$

Somando as três contribuições e utilizando a relação de completeza,

$$\int \left(\frac{dp}{2\pi} \right) [\psi_{p^+}^\dagger(x) \psi_{p^+}(y) + \psi_{p^-}^\dagger(x) \psi_{p^-}(y)] = \delta(x-y) - \psi_0^\dagger(x) \psi_0(y),$$

obtém-se o resultado desejado. \square

Considere agora o número fermiônico do sóliton $|P_\pm\rangle$. A corrente fermiônica é dada por $j^\mu = \frac{1}{2}[\bar{\psi}, \gamma^\mu \psi]$. O número fermiônico é dado, então, por

$$n_{\pm} = \frac{1}{2} \langle P_{\pm} | \psi^{\dagger} \psi - \psi \psi^{\dagger} | P_{\pm} \rangle \quad (5.23)$$

Novamente, utilizando os elementos de matriz calculados acima, pode-se calcular o número fermiônico, chegando-se ao resultado

$$n_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\pm \int dx \psi_0^{\dagger} \psi_0 + \int dx \int \frac{dp}{2\pi} [\psi_{p^+}^{\dagger} \psi_{p^+} - \psi_{p^-}^{\dagger} \psi_{p^-}] \right) = \pm \frac{1}{2} \quad (5.24)$$

Assim, a existência do modo zero ψ_0 , que aparece somente do setor do sóliton (setor topológico), tem como consequência o dubleto degenerado $|P_{\pm}\rangle$, com número fermiônico semi-inteiro $n_{\pm} = \pm \frac{1}{2}$.

6 Conclusão

Este texto compreende um possível caminho para que o leitor se familiarize com a utilização de solitons e modelos integráveis na quantização de teorias de campo não triviais. Para tanto, fez-se uma breve introdução à teoria dos solitons e modelos integráveis. Em seguida, foi apresentado um método semiclássico para a quantização canonica de sólitons estáticos em um campo escalar real. Em uma elegante aplicação desse método, mostrou-se o cálculo da primeira correção quântica à massa do soliton para as Teorias Afins de Toda. E, finalmente, como uma ponte para aplicações mais complexas e modernas, foi apresentada uma possível extensão do método semiclássico para o campo escalar real na presença de férmions.

A abordagem aqui apresentada para a quantização de solitons obviamente não é única. Muitas vezes, a maneira de obter o espectro semiclássico é determinada pelo tipo de sistema e solução clássica que se deseja quantizar. Uma boa ilustração disso é feita por S. T. Lee et al. em uma sequência de dois artigos, nos quais são obtidas soluções localizadas para fermions massivos com interação do tipo Fermi (Gross-Neveu, Thirring) [13] e, em seguida, o espectro semiclássico correspondente [14]. O método semiclássico utilizado é uma variante do desenvolvido por R. F. Dashen, B. Hasslacher e A. Neveu (DHN). A abordagem DHN corresponde à uma abordagem de integração funcional[15]. Permite lidar com soluções que possuem dependência não trivial no tempo, como um breather [2], que corresponde à um estado ligado de soliton, antisoliton. E, por ser baseada em integração funcional, a inclusão de férmions se dá de maneira natural.

A quantização semiclássica de sistemas com supersimetria foi, durante anos, um problema em aberto. Ao se discretizar os modos normais da equação de estabilidade, obtinha-se uma correção quântica para a massa do soliton sensível às condições de contorno utilizadas. As ambiguidades na determinação da massa solitônica em um loop foram fixadas em um método desenvolvido por H. Nastase

et al. em 1998 [16]. Mais recentemente, a quantização semiclássica tem sido utilizada para o entendimento de Teoria Quântica de Campos em volume finito. Isto pode ser encontrado em trabalhos de G. Mussardo et al. [17] para diferentes geometrias (no cilindro, em uma fita, etc...). Do mesmo autor, recomenda-se um artigo didático [18], no qual é mostrado um método para o cálculo do espectro semiclássico de estados ligados em teorias que admitem kinks. Este procedimento evita a utilização do método DHN para a quantização de breathers, fazendo a derivação da massa dos estados ligados muito mais simples.

APÊNDICE A - Solitons estáticos

Neste apêndice iremos mostrar que solitons estáticos, isto é, que não possuem dependência temporal, conectam dois vácuos do potencial, nos extremos $x \rightarrow \pm\infty$. E mais, mostraremos que estes vácuos sempre são dois vácuos consecutivos, como indicado na figura 6.

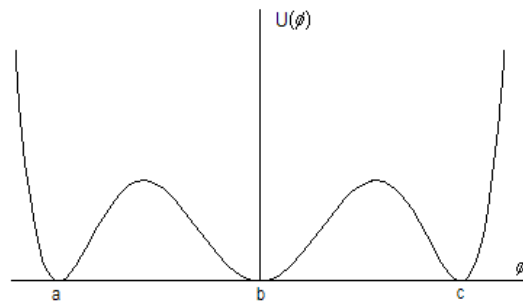


Figura 6: Um potencial contendo três vácuos $a b c$

Na definição de onda solitária, exige-se que a densidade de energia $\varepsilon(x)$ da solução seja localizada, ou seja, tal que a integral da energia

$$E[\phi] = \int dx \frac{1}{2} \frac{d\phi^2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\phi^2}{dx} + U(\phi) \quad (\text{A.1})$$

seja convergente. Daí concluímos que, para uma onda solitária estática, deve-se ter

$$\frac{d\phi}{dx} \rightarrow 0 \quad (\text{A.2})$$

e

$$U(\phi(x)) \rightarrow 0 \quad (\text{A.3})$$

nos limites $x \rightarrow \pm\infty$. Mais precisamente, para que a integral seja convergente, a velocidade com que estes termos tendem a zero deve ser maior do que x^{-1} . Da

última equação, vemos que a solução $\phi(x)$ deve assumir o valor correspondente a vácuos do potencial nos limites $x \rightarrow \pm\infty$. Vejamos agora que estes vácuos devem diferentes e consecutivos.

Para tanto, iremos utilizar uma analogia. De fato, a versão estática das equações de Euler-Lagrange para os sistemas que estamos considerando,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = U'(\phi), \quad (\text{A.4})$$

é equivalente à equação newtoniana de movimento de uma partícula pontual, cuja posição é dada por $\phi(x)$, no instante x sob a ação do potencial $-U(\phi)$. Este análogo mecânico permite obter algumas conclusões interessantes sem ter que resolver a equação de movimento.

Note que a energia do análogo, dada por

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - U(\phi), \quad (\text{A.5})$$

é nula, $W = 0$, devido as condições de contorno apresentadas acima.

Como vimos, a trajetória $\phi(x)$ do análogo clássico começa e termina em algum dos vácuos do potencial. O fato de a energia da trajetória ser nula implica

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = U(\phi). \quad (\text{A.6})$$

Daí, o intervalo de tempo entre dois pontos da trajetória do análogo é dado por

$$x - x_0 = \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} d\phi \frac{1}{\sqrt{2U(\phi)}}. \quad (\text{A.7})$$

De onde se vê que quando a trajetoria assume o valor de um vácuo $\phi(x) = a$, por exemplo, o intervalo de tempo torna-se infinito, como era de se esperar. Caso o potencial $U(\phi)$ possua apenas um vácuo, ϕ_a , o potencial correspondente ao análogo mecânico fica como ilustrado na figura 7 i.

Vê-se facilmente que, neste caso, não há solução diferente da trivial $\phi(x) \equiv a$, tendo em vista que o vácuo a é uma posição de equilíbrio instável e uma vez fora

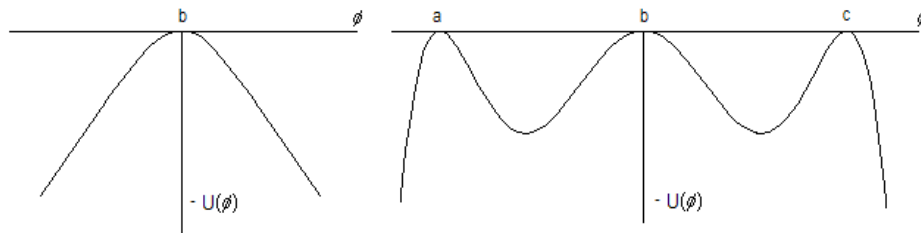


Figura 7: O potencial do análogo mecânico contendo i- Somente um vácuo; ii- Três vácuos

desta posição, a partícula sofre uma força que a repele da posição inicial.

Já no caso de o potencial possuir dois ou mais vácuos, a situação é descrita pela figura 7 ii. Neste caso, há uma trajetória de energia $W = 0$, que sai de $\phi = a$ para tempo menos infinito e chega em $\phi = b$ em mais infinito, ou vice-versa. Obviamente isto pode ser estendido para os vácuos b e c . No entanto, não há trajetórias que saindo de a , passam por b e retornam a a ou seguem para c . Pois como vimos, o tempo necessário para atingir b já é infinito.

APÊNDICE B - Equações bilineares de Hirota

No primeiro capítulo deste texto, vimos que a mudança de variáveis

$$\phi = -\frac{1}{\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \log \tau_j \quad (\text{B.1})$$

, onde as novas variáveis independentes são τ_j , com $j = 0, \dots, r+1$, deixam as equações de movimento não-lineares dos modelos afins de Toda, com algebra $g = A_r$, na seguinte forma

$$\tau_j \ddot{\tau}_j - \dot{\tau}_j^2 - \tau_j'' \tau_j + \tau_j'^2 = m^2 (\tau_{j-1} \tau_{j+1} - \tau_j^2), \quad (\text{B.2})$$

que é quadrática nas variáveis τ_j e se revela mais tratável do que a anterior.

Iremos, agora, mostrar que a equação (B.2) faz parte de uma classe de equações chamadas equações bilineares de Hirota. Em seguida, exploraremos um pouco a estrutura deste tipo de equações mostrando que o tipo de equação bilinear representado por (B.2) admite soluções do 1 e 2-soliton, entretanto, a existência de soluções contendo mais solitons requer que a equação satisfaça algumas identidades.

B.1 Definições

Além de ser quadráticas nas variáveis independentes, para que uma equação esteja na forma bilinear há uma restrição sobre as derivadas. Estas, devem aparecer somente como combinações da derivada bilinear D, definida por

$$D_x^n f \cdot g = (\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^n f(x_1) \cdot g(x_2). \quad (\text{B.3})$$

Por exemplo,

$$D_x D_t f \cdot g = f_{tx}g - f_t g_x - f_x g_t + f g_{tx} \quad (\text{B.4})$$

$$D_x D_x f \cdot g = f_{xx}g - 2f_x g_x + f g_{xx} \quad (\text{B.5})$$

Assim,

$$D_x^2 \tau_j \cdot \tau_j = 2(\tau_j'' \tau_j - 2\tau_j'^2) \quad (\text{B.6})$$

De onde se vê que a equação (B.2) pode ser reescrita na forma bilinear como

$$(D_t^2 - D_x^2) \tau_j \cdot \tau_j = 2m^2(\tau_{j-1} \tau_{j+1} - \tau_j^2). \quad (\text{B.7})$$

Que, por sua vez, pode ser generalizada para um polinômio $P(D_x, D_t)$

$$P(D_x, D_t) \tau_j \cdot \tau_j = 2m^2(\tau_{j-1} \tau_{j+1} - \tau_j^2). \quad (\text{B.8})$$

Poderíamos ter generalizado também o lado direito da equação (B.7), entretanto, além de deixar a análise subsequente mais trabalhosa, isso não acrescentaria em clareza das idéias. Contudo, vale ressaltar que o lado direito da equação depende da álgebra de Lie associada ao modelo de Toda (no presente caso $g = A_r$). E, que o caso mais simples de equação bilinear,

$$P(D_x, D_t) \tau_j \cdot \tau_j = 0 \quad (\text{B.9})$$

já é suficiente para descrever a equação KdV, longe de ser trivial.

A seguir, três propriedades da derivada bilinear D . Seja $P(D)$ um polinômio

$$i) P(D) f \cdot g = P(-D) g \cdot f \quad (\text{B.10})$$

$$ii) P(D) f \cdot 1 = P(\partial) f \quad (\text{B.11})$$

$$iii) P(D) e^{\vec{p} \cdot \vec{x}} \cdot e^{\vec{q} \cdot \vec{x}} = P(\vec{p} - \vec{q}) e^{(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{x}} \quad (\text{B.12})$$

A antissimetria (i) implica que para a equação (B.8) $P(D)$ é par, uma vez que os coeficientes ímpares da equação se cancelam. Além disso iremos supor que $P(D)$ não possui termos de ordem D^0 , pois estes já fazem parte do lado direito da equação. Assim, $P(0, 0) \equiv 0$.

B.2 Solução 1-soliton

No caso 1-soliton, a solução é dada por

$$\tau_j = 1 + \epsilon \tau_j^{[1]} \quad (\text{B.13})$$

, onde $\tau_j^{[1]} = e_j^\phi = \delta_j e^{\vec{p} \cdot \vec{x}}$, com $\vec{x} = (x, t)$ e \vec{p} constante (veja (2.45)) e ϵ é uma constante arbitrária que posteriormente será tomado igual à unidade. Inserindo na equação bilinear, obtém-se

$$P(D)\{1 \cdot 1 + \epsilon 1 \cdot \tau_j^{[1]} + \epsilon \tau_j^{[1]} \cdot 1 + \epsilon^2 \tau_j^{[1]} \cdot \tau_j^{[1]}\} = 2m^2\{\epsilon(\tau_{j-1}^{[1]} + \tau_{j+1}^{[1]} - 2\tau_j^{[1]}) + \epsilon^2(\tau_{j+1}^{[1]} \tau_{j-1}^{[1]} - \tau_j^{[1]2})\} \quad (\text{B.14})$$

Do lado esquerdo, o primeiro termo é nulo pois $P(0, 0) \equiv 0$. Já o último termo é nulo em virtude da propriedade (iii), acima. Utilizando as demais propriedades de $P(D)$, restam então em ordem ϵ e ϵ^2 , respectivamente,

$$P(\partial)\tau_j^{[1]} = m^2(\tau_{j-1}^{[1]} + \tau_{j+1}^{[1]} - 2\tau_j^{[1]}) \quad (\text{B.15})$$

$$0 = \tau_{j+1}^{[1]} \tau_{j-1}^{[1]} - \tau_j^{[1]2}. \quad (\text{B.16})$$

A segunda equação fornece uma relação de recorrência cuja solução já sabemos, $\delta_j = w^j$. E, uma vez tendo um conjunto $\{\delta_j\}_{0 \leq j \leq r}$ que satisfaz esta, basta inserir na primeira equação para obter uma relação de dispersão

$$P(\vec{p}) = m^2(\delta_{-1} + \delta_1 - 2) \quad (\text{B.17})$$

B.3 Solução 2 soliton

Como vimos no primeiro capítulo, a solução do tipo 2-soliton é dada pela função tau

$$\tau_j = 1 + \epsilon(e^{\Phi_j^1} + e^{\Phi_j^2}) + \epsilon^2(A_{12}e^{\Phi_j^1 + \Phi_j^2}), \quad (\text{B.18})$$

onde A_{12} é uma constante. O lado esquerdo da equação bilinear fica

$$\begin{aligned}
P(D) * (1 \cdot 1 + 1 \cdot e^{\phi_j^1} + 1 \cdot e^{\phi_j^2} + \underline{A_{12}1 \cdot e^{\phi_j^1 + \phi_j^2}} + \\
e^{\phi_j^1} \cdot 1 + e^{\phi_j^1} \cdot e^{\phi_j^1} + \underline{e^{\phi_j^1} \cdot e^{\phi_j^2}} + A_{12}e^{\phi_j^1} \cdot e^{\phi_j^1 + \phi_j^2} + \\
e^{\phi_j^2} \cdot 1 + \underline{e^{\phi_j^2} \cdot e^{\phi_j^1}} + e^{\phi_j^2} \cdot e^{\phi_j^2} + A_{12}e^{\phi_j^2} \cdot e^{\phi_j^1 + \phi_j^2} + \\
\underline{A_{12}e^{\phi_j^1 + \phi_j^2} \cdot 1} + A_{12}e^{\phi_j^1 + \phi_j^2} \cdot e^{\phi_j^1} + A_{12}e^{\phi_j^1 + \phi_j^2} \cdot e^{\phi_j^2} + A_{12}^2e^{\phi_j^1 + \phi_j^2} \cdot e^{\phi_j^1 + \phi_j^2}) \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

Após um pouco de álgebra simples, utilizando as propriedades (i),(ii),(iii), as relações de dispersão (B.17) e recorrência (B.16), vê-se que a equação bilinear é satisfeita para as ordens ϵ^0 , ϵ^1 , ϵ^3 e ϵ^4 . Resta apenas a equação de segunda ordem, cujos termos (não nulos), do lado esquerdo, estão grifados em (B.19). Assim, para ordem ϵ^2 a equação bilinear é dada por

$$e^{\phi_j^1 + \phi_j^2} * \{2A_{12}P(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + 2P(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\} = 2m^2 e^{\phi_j^1 + \phi_j^2} * \{A_{12}(\delta_{-1}^{[1]}\delta_{-1}^{[2]} + \delta_1^{[1]}\delta_1^{[2]} - 2) + (\delta_1^{[1]}\delta_{-1}^{[2]} + \delta_{-1}^{[1]}\delta_1^{[2]} - 2)\} \quad (\text{B.20})$$

, que é satisfeita se e somente se,

$$A_{12} = - \frac{P(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) - m^2(\delta_1^{[1]}\delta_{-1}^{[2]} + \delta_{-1}^{[1]}\delta_1^{[2]} - 2)}{P(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) - m^2(\delta_{-1}^{[1]}\delta_{-1}^{[2]} + \delta_1^{[1]}\delta_1^{[2]} - 2)} \quad (\text{B.21})$$

B.4 Três ou mais solitons

Foi mostrada acima a existência de soluções do tipo 1 e 2-soliton qualquer que seja o polinômio $P(D)$ na equação bilinear. Agora, veremos que, para que haja solução com três solitons, $P(D)$ precisa satisfazer uma identidade que é chamada de condição de três solitons. A função-tau para solução três soliton é dada por

$$\tau_j = 1 + \epsilon(e^{\Phi_j^1} + e^{\Phi_j^2} + e^{\Phi_j^3}) + \epsilon^2(A_{12}e^{\Phi_j^1 + \Phi_j^2} + A_{13}e^{\Phi_j^1 + \Phi_j^3} + A_{23}e^{\Phi_j^2 + \Phi_j^3}) + \epsilon^3(A_{123}e^{\Phi_j^1 + \Phi_j^2 + \Phi_j^3}).$$

h

Procedendo de maneira idêntica à feita para a solução com dois solitons, vê-se que a equação bilinear é satisfeita imediatamente por τ_j para as ordens ϵ^0 , ϵ^1 , ϵ^2 , ϵ^5 e ϵ^6 , restando apenas a terceira e quarta ordem a serem analisadas com mais cuidado.

A equação para quarta ordem fica

$$m^2\{A_{123}(\delta_1^2\delta_1^3 + \delta_{-1}^2\delta_{-1}^3 - 2) + (\delta_{-1}^2\delta_1^3 + \delta_1^2\delta_{-1}^3 - 2)\} = A_{123}P(\vec{p}_2 + \vec{p}_3) + A_{12}A_{13}(P(\vec{p}_2 - \vec{p}_3)). \quad (\text{B.22})$$

De A_{12} , cuja forma é dada pela equação (B.21), a equação acima fornece o resultado

$$A_{123} = A_{12}A_{13}A_{23} \quad (\text{B.23})$$

Já a equação para terceira ordem fica

$$\sum_{\sigma_i=\pm 1} \{P(\sigma_1\vec{p}_1 + \sigma_2\vec{p}_2 + \sigma_3\vec{p}_3) - (\delta_{\sigma_1}^{[1]}\delta_{\sigma_2}^{[2]}\delta_{\sigma_3}^{[3]} + \delta_{-\sigma_1}^{[1]}\delta_{-\sigma_2}^{[2]}\delta_{-\sigma_3}^{[3]} - 2)\} \quad (\text{B.24})$$

$$*\{P(\sigma_1\vec{p}_1 - \sigma_2\vec{p}_2) - (\delta_{\sigma_1}^{[1]}\delta_{-\sigma_2}^{[2]} + \delta_{-\sigma_1}^{[1]}\delta_{\sigma_2}^{[2]} - 2)\} \quad (\text{B.25})$$

$$*\{P(\sigma_1\vec{p}_1 - \sigma_3\vec{p}_3) - (\delta_{\sigma_1}^{[1]}\delta_{-\sigma_3}^{[3]} + \delta_{-\sigma_1}^{[1]}\delta_{\sigma_3}^{[3]} - 2)\} \quad (\text{B.26})$$

$$*\{P(\sigma_2\vec{p}_2 - \sigma_3\vec{p}_3) - (\delta_{\sigma_2}^{[2]}\delta_{-\sigma_3}^{[3]} + \delta_{-\sigma_2}^{[2]}\delta_{\sigma_3}^{[3]} - 2)\} = 0 \quad (\text{B.27})$$

, que é a condição de três solitons citada acima.

Portanto, há equações que admitem soluções do tipo 1 e 2-soliton, entretanto não admitem soluções com três ou mais solitons. Pode-se, então, concluir que quanto maior o número de solitons, menor é o subconjunto das equações bilineares que possuem este tipo de solução. Quando uma equação admite um número arbitrário de solitons dizemos que o modelo é integrável.

É notável que, para modelos integráveis, uma solução de N solitons (2.50) é construída a partir do princípio de superposição para as funções τ_j revelado do método de Hirota.

APÊNDICE C - O caso A_1 : Sine-Gordon

Neste apêndice mostra-se que o modelo de toda para $g = A_1$ corresponde à teoria Sine-Gordon como definida no capítulo 1. Posteriormente, mostra-se que a correção quântica da massa, obtida para os modelos de toda com $g = A_1$, no capítulo 3, é equivalente àquela exibida, no segundo capítulo, para o Modelo Sine-Gordon.

De fato, considere a lagrangeana dos modelos Afins de Toda,

$$L = \frac{1}{2}((\partial_t\phi)^2 - (\partial_x\phi)^2) + \frac{m^2}{\beta^2} \sum_{j=0}^r n_j (e^{i\beta\alpha_j\phi} - 1). \quad (\text{C.1})$$

No caso $g = A_1$, há somente duas raízes $\alpha_1 = -\alpha_0 = \sqrt{2}$. Como $n_0 = n_1 = 1$, temos

$$L = \frac{1}{2}((\partial_t\phi)^2 - (\partial_x\phi)^2) - \frac{2m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta\sqrt{2}\phi). \quad (\text{C.2})$$

Com a transformação

$$\beta = \frac{g}{\sqrt{2}m'} \quad (\text{C.3})$$

$$m = 2m', \quad (\text{C.4})$$

fica

$$L = \frac{1}{2}((\partial_t\phi)^2 - (\partial_x\phi)^2) - \left(\frac{m'}{g}\right)^4 (1 - \cos \frac{g}{m'}\phi), \quad (\text{C.5})$$

que corresponde à densidade lagrangeana da teoria Sine-Gordon na forma apresentada no primeiro capítulo.

Agora, aplicando a mesma transformação para a massa do soliton, com a

primeira correção quântica, calculada no terceiro capítulo, obtém-se

$$M = \frac{8m}{\beta^2} - \frac{2m}{\pi} = \frac{8m'^3}{g} - \frac{m'}{\pi} \quad (\text{C.6})$$

Que é o resultado exibido no capítulo 2, correspondente à forma (C.5) para a teoria Sine-Gordon.

Referências

- [1] M. Peyrard, P. Dauxois, *Physique des Solitons*, EDP Sciences/CNRS EDITIONS (2004).
- [2] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons, An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North Holland (1982).
- [3] R. Jackiw, *Quantum meaning of classical field theory*, Rev. Mod. Phys. **49**, 681 (1977).
- [4] J. Hietarinta, *Introduction to the Hirota bilinear method*, arXiv:solv-int/9708006v1.
- [5] G. S. França, *Estrutura Algébrica dos Modelos Integráveis*, Dissertação de Mestrado IFT-UNESP, IFTD.007/07.
- [6] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press,(1985).
- [7] T. Hollowood, *Quantum Solitons in Affine Toda Field Theories*, arXiv:hep-th/9110010v1.
- [8] E. Tomboulis, *Canonical Quantization of Nonlinear Waves*, Phys. Rev. D **12**, 1678 (1975).
- [9] M. Lohe, *Soliton structures in $P(\phi)_2$* , Phys. Rev. D **20**, 3120(1979).
- [10] R. Jackiw, *Effects of Dirac's Negative Energy Sea on Quantum Numbers*, arXiv:hep-th/9903255v1.
- [11] R. Jackiw, C. Rebbi, *Solitons with fermion number 1/2*, Phys. Rev. D **13**, 3398 (1976).
- [12] W. P. Su, J. R. Schrieffer, A. J. Heeger, *Soliton excitations in polyacetylene*, Phys. Rev. B **22**, 2099 (1980).
- [13] S. Y. Lee, T. K. Kuo, e A. Gavrielides, *Exact localized solutions of two-dimensional field theories of massive fermions with Fermi interactions*, Phys. Rev. D **12**, 2249 (1975).
- [14] S. Y. Lee, e A. Gavrielides, *Quantization of the localized solutions of two-dimensional field theories of massive fermions*, Phys. Rev. D **12**, 3880 (1975).
- [15] R. F. Dashen, B. Hasslacher, e A. Neveu, *Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theories, I. Semiclassical functional methods*, Phys. Rev. D **10**, 4114 (1974).
- [16] H. Nastase et al., *Topological boundary conditions, the BPS bound, and elimination of ambiguities in the quantum mass of solitons*, arXiv:hep-th/9802074v1.

- [17] G. Mussardo, V. Riva, G. Sotkov., *Finite-Volume Form Factors in Semiclassical Approximation*, arXiv:hep-th/0307125v1.
- [18] G. Mussardo, *Neutral Bound States in Kink-like Theories*, arXiv:hep-th/0607025v1.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)