

**ABORDAGEM ORIENTADA A OBJETOS  
PARA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL  
DE ELEMENTOS FINITOS DE CASCAS  
PLANOS**

**Flávio Henrique Ajeje**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ABORDAGEM ORIENTADA A OBJETOS PARA  
IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE ELEMENTOS  
FINITOS DE CASCAS PLANOS"**

Flávio Henrique Ajeje

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
DEES - UFMG - (Orientador)

---

Prof. Dr. Alcebiades de Vasconcellos Filho  
DEES - UFMG

---

Profa. Dra. Jamile Salim Fuina  
FUMEC

---

Profa. Dra. Aurea Silva de Holanda  
UFC

Belo Horizonte, 03 de setembro de 2009

*Procuramos acender uma vela em vez de  
amaldiçoar a escuridão.*

Provérbio Chinês

*Aos meus pais.*

# Índice

Índice	ii
Lista de Tabelas	vi
Lista de Figuras	xi
Lista de Abreviaturas e Siglas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Resumo	xvii
Abstract	xviii
Agradecimentos	xix
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	4
1.2 Organização do Texto . . . . .	4
<b>2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA O ESTUDO DE CASCAS</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução . . . . .	6
2.2 Teoria de Reissner-Mindlin para Cascas Planas . . . . .	6
2.2.1 Hipóteses . . . . .	6
2.2.2 Campo de Deslocamentos . . . . .	7
2.2.3 Campo de Deformações . . . . .	10
2.2.4 Campo de Tensões . . . . .	11
2.2.5 Esforços Internos . . . . .	13
2.3 Teoria de Kirchhoff para Cascas Planas . . . . .	17
2.3.1 Hipóteses . . . . .	17
2.3.2 Campo de Deslocamentos . . . . .	17
2.3.3 Campo de Deformações . . . . .	19
2.3.4 Campo de Tensões . . . . .	20
2.3.5 Esforços Internos . . . . .	20

<b>3</b>	<b>MODELOS DISCRETOS PARA O ESTUDO DE CASCAS</b>	<b>24</b>
3.1	Introdução . . . . .	24
3.2	Formulação de Elementos Finitos de Casca Planos de Reissner-Mindlin	26
3.2.1	Discretização do Campo de Deslocamentos . . . . .	26
3.2.2	Discretização do Campo de Deformações Generalizadas . . . . .	27
3.2.3	Obtenção da Matriz de Rigidez Local . . . . .	29
3.3	Formulação de Elementos Finitos de Casca Planos de Kirchhoff . . . . .	31
3.4	Montagem das Equações Nodais de Equilíbrio . . . . .	32
3.5	Cálculo dos Cossenos Diretores . . . . .	35
3.5.1	Obtenção dos Eixos Locais por Intersecção com o Plano Coordenado $XY$ . . . . .	36
3.6	Elementos Baseados na Teoria de Reissner-Mindlin - Bloqueio da Solução . . . . .	39
3.6.1	Conceito de Bloqueio por Efeito de Cortante . . . . .	39
3.7	Tratamento de Nós Coplanares . . . . .	41
<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>	<b>43</b>
4.1	Introdução . . . . .	43
4.2	O Núcleo Numérico do Sistema INSANE . . . . .	44
4.2.1	Interface <code>Assembler</code> . . . . .	46
4.2.2	Interface <code>Solution</code> . . . . .	47
4.2.3	Interface <code>Model</code> . . . . .	48
4.2.4	Interface <code>ProblemDriver</code> . . . . .	49
4.2.5	Interface <code>Shape</code> . . . . .	49
4.2.6	Pacote <code>Materialmedia</code> . . . . .	54
4.2.7	Interface <code>AnalysisModel</code> . . . . .	56
4.2.8	Relacionamento entre as Classes do Núcleo Numérico . . . . .	58
4.3	Expansão do Núcleo Numérico do INSANE . . . . .	61
4.3.1	Alterações nas Classes <code>AnalysisModel</code> , <code>ProblemDriver</code> e <code>Element</code> . . . . .	61
<b>5</b>	<b>TESTES DA MALHA DE <i>IRONS</i> (<i>PATCH TESTS</i>)</b>	<b>66</b>
5.1	Descrição do Problema . . . . .	67
5.2	Carregamentos . . . . .	69
5.2.1	Comportamento de Membrana . . . . .	69
5.2.2	Comportamento de Placa . . . . .	70
5.3	Resultados . . . . .	71
<b>6</b>	<b>TESTES DE CONVERGÊNCIA</b>	<b>74</b>
6.1	Introdução . . . . .	74
6.2	Viga de Seção I Engastada . . . . .	74
6.2.1	Resultados . . . . .	76
6.2.2	Discussão dos Resultados . . . . .	83
6.3	Casca Dobrada Simplesmente Apoiada em Dois Lados Opostos . . . . .	84
6.3.1	Resultados . . . . .	85

6.3.2	Discussão dos Resultados . . . . .	88
6.4	Caixa com Furos Carregada com Duas Cargas Concentradas Opostas	88
6.4.1	Resultados . . . . .	89
6.4.2	Discussão dos Resultados . . . . .	91
<b>7</b>	<b>EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</b>	<b>93</b>
7.1	Introdução . . . . .	93
7.2	Telhado Cilíndrico de Scordelis-Lo . . . . .	93
7.2.1	Geometria e Propriedades . . . . .	93
7.2.2	Resultados . . . . .	94
7.3	Casca Esférica Aberta com Cargas Pontuais Radiais . . . . .	105
7.3.1	Resultados . . . . .	106
7.4	Reservatório Cônico-Cilíndrico . . . . .	112
7.4.1	Geometria e Propriedades . . . . .	112
7.4.2	Resultados . . . . .	114
7.5	Barragem em Arco . . . . .	121
7.5.1	Geometria e Propriedades . . . . .	122
7.5.2	Resultados . . . . .	122
7.6	Discussão dos Resultados . . . . .	133
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>134</b>
8.1	Conclusões . . . . .	134
8.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	135
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>137</b>

# Lista de Tabelas

4.1	Elementos de Casca Planos implementados no <b>INSANE</b> e suas siglas	61
5.1	Coordenadas dos nós para o Patch Test em <i>uc</i> . . . . .	68
5.2	Deslocamentos prescritos para o comportamento de membrana. . . . .	70
5.3	Deslocamentos prescritos para o comportamento de placa. . . . .	70
5.4	Resultados para o elemento RMCIQ4. . . . .	71
5.5	Resultados para o elemento RMCIQ8. . . . .	71
5.6	Resultados para o elemento RMCIQ9. . . . .	72
5.7	Resultados para o elemento CKZ. . . . .	72
5.8	Resultados para o elemento MZC. . . . .	72
6.1	Deslocamento vertical na extremidade livre da viga I com carga concentrada em <i>uc</i> (Figura 6.1). . . . .	77
6.2	Deslocamento vertical na extremidade livre da viga I com carga distribuída em <i>uc</i> . . . . .	79
6.3	Deslocamento <i>v</i> do ponto 1 da viga I submetida à torção em <i>uc</i> . . . . .	80
6.4	Deslocamento <i>w</i> do ponto 1 da viga I submetida à torção em <i>uc</i> . . . . .	82
6.5	Deslocamento vertical do ponto 1 ( $w_1$ ) (Figura 6.13). . . . .	85
6.6	Deslocamento vertical do ponto 2 ( $w_2$ ) (Figura 6.13). . . . .	86
6.7	Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga (Ponto 1). . . . .	89
6.8	Deslocamento vertical do ponto 2. . . . .	90
7.1	Deslocamentos verticais ( <i>w</i> ) na seção central. . . . .	100
7.2	Deslocamentos <i>v</i> no apoio. . . . .	101
7.3	Momento de torção no apoio ( $M_{x'y'}$ ). . . . .	102
7.4	Momentos transversais na seção central ( $M_{y'}$ ). . . . .	103
7.5	Momentos longitudinais na seção central ( $M_{x'}$ ). . . . .	104
7.6	Deslocamentos <i>u</i> , <i>w</i> e momento $M_{x'}$ obtidos pelo <b>INSANE</b> . . . . .	110



7.7	Deslocamentos $u$ , $w$ e momento $M_{x'}$ obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	110
7.8	Deslocamentos $u$ , $v$ e $w$ dos nós da viga intermediária obtidos através do <b>INSANE</b> . . . . .	118
7.9	Deslocamentos $u$ , $v$ e $w$ dos nós da viga intermediária obtidos através do <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	119
7.10	Deslocamentos $u$ , $v$ e $w$ sobre a linha de centro da barragem obtidos através do <b>INSANE</b> . . . . .	129
7.11	Deslocamentos $u$ , $v$ e $w$ sobre a linha de centro da barragem obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	129
7.12	Esforços $M_{x'}$ , $M_{y'}$ e $N_{x'}$ sobre a linha de centro da barragem obtidos pelo <b>INSANE</b> . . . . .	130
7.13	Esforços $M_{x'}$ , $M_{y'}$ e $N_{x'}$ sobre a linha de centro da barragem obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	130

# Lista de Figuras

1.1	Representação de uma casca. . . . .	1
1.2	Discretização de uma superfície em subdomínios planos. . . . .	2
2.1	Subdomínio plano de uma casca no espaço. Sistema de coordenadas local e global (adaptado de Oñate (1995)). . . . .	7
2.2	Deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais $x'$ e $z'$ segundo a Teoria de Reissner-Mindlin. . . . .	8
2.3	Deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais $y'$ e $z'$ segundo a Teoria de Reissner-Mindlin. . . . .	8
2.4	Distribuição de tensões cisalhantes. . . . .	12
2.5	Distribuição de tensões cisalhantes conforme a teoria da elasticidade. . . . .	12
2.6	Distribuição de tensões de flexão ao longo da espessura. . . . .	14
2.7	Distribuição de tensões de membrana ao longo da espessura. . . . .	15
2.8	Distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da espessura. . . . .	15
2.9	Deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais $x'$ e $z'$ segundo a Teoria de Kirchhoff. . . . .	18
2.10	Deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais $y'$ e $z'$ segundo a Teoria de Kirchhoff. . . . .	18
2.11	Distribuição de tensões de flexão ao longo da espessura. . . . .	21
2.12	Distribuição de tensões de membrana ao longo da espessura. . . . .	21
3.1	Elemento plano de casca carregado em sua superfície média. . . . .	25
3.2	Discretização de uma casca em elementos planos quadrilaterais de 8 nós. . . . .	27
3.3	Exemplo de transformação das rotações locais $(\theta_{x'}, \theta_{y'})$ e globais $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ . . . . .	33
3.4	Convenção de sinais das rotações locais e globais. . . . .	34

3.5	Definição dos lados $ij$ e $im$ e dos vetores $v_{x'}$ , $v_{y'}$ e $v_{z'}$ . . . . .	37
3.6	Definição do eixo local $x'$ como a intersecção do elemento com um plano paralelo ao plano $xy$ . . . . .	38
3.7	Exemplos de nós coplanares e não coplanares. . . . .	42
4.1	Diagrama simplificado do núcleo numérico do <b>INSANE</b> . . . . .	46
4.2	Diagrama de classe da interface <b>Assembler</b> . . . . .	47
4.3	Diagrama de classe da interface <b>Solution</b> . . . . .	48
4.4	Diagrama de classe da interface <b>Model</b> . . . . .	50
4.5	Diagrama de classe para <b>Element</b> . . . . .	51
4.6	Diagrama de classe para <b>ProblemDriver</b> . . . . .	52
4.7	Diagrama de classe para a interface <b>Shape</b> . . . . .	53
4.8	Diagrama de classe para <b>Material</b> . . . . .	54
4.9	Diagrama de classe para a interface <b>MaterialPoint</b> . . . . .	55
4.10	Diagrama de classe para a interface <b>ConstitutiveModel</b> . . . . .	55
4.11	Diagrama de classe para a interface <b>Degeneration</b> . . . . .	56
4.12	Diagrama de classe para a interface <b>AnalysisModel</b> . . . . .	57
4.13	Código Java do método <b>getC</b> da classe <b>Parametric</b> . . . . .	60
4.14	Diagrama de classe modificado para a interface <b>AnalysisModel</b> . . . . .	62
4.15	Diagrama de classe modificado para a interface <b>ProblemDriver</b> . . . . .	62
4.16	Código Java do método <b>getC</b> da classe <b>FlatShell</b> . . . . .	64
4.17	Diagramas da classe <b>Element</b> anterior e modificada. . . . .	65
5.1	Malha utilizada para os elementos quadrilaterais. . . . .	68
5.2	Malha utilizada para os elementos triangulares. . . . .	69
6.1	Viga I submetida à carga concentrada na extremidade. . . . .	75
6.2	Viga I submetida à carga distribuída. . . . .	75
6.3	Viga I submetida à torção. . . . .	76
6.4	Deslocamento vertical na extremidade livre da viga I com carga concentrada em $uc$ . . . . .	77
6.5	Variação dos deslocamentos verticais $w$ para a malha $N = 16$ formada por elementos MZC, para o caso de carga concentrada. . . . .	78
6.6	Deslocamento vertical na extremidade livre da viga I com carga distribuída em $uc$ . . . . .	79

6.7	Variação dos deslocamentos verticais $w$ para a malha $N = 16$ formada por elementos RMCIQ8, para o caso de carga distribuída. . . . .	80
6.8	Deslocamento $v$ do ponto 1 da viga I submetida à torção em $uc$ . . . . .	81
6.9	Variação dos deslocamentos horizontais $v$ para a malha $N = 8$ formada por elementos RMCIQ4, submetida à torção. . . . .	81
6.10	Deslocamento $w$ do ponto 1 da viga I submetida à torção em $uc$ . . . . .	82
6.11	Variação dos deslocamentos verticais $w$ para a malha $N = 16$ formada por elementos CKZ, submetida à torção. . . . .	83
6.12	Aproximação dos elementos para o comportamento de membrana . . . . .	84
6.13	Casca dobrada simplesmente apoiada em dois lados opostos. . . . .	84
6.14	Deslocamento vertical do ponto 1 ( $w_1$ ) da casca dobrada. . . . .	85
6.15	Deslocamento vertical do ponto 2 ( $w_2$ ) da casca dobrada. . . . .	86
6.16	Variação dos deslocamentos verticais $w$ para a malha $N = 4$ formada por elementos RMCIQ8. . . . .	87
6.17	Variação dos deslocamentos verticais $w$ para a malha $N = 2$ formada por elementos CKZ. . . . .	87
6.18	Caixa com furos (dimensões em $uc$ ). Adaptado de (Choi e Lee, 1996). . . . .	88
6.19	Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga (Ponto 1). . . . .	89
6.20	Deslocamento vertical do ponto 2. . . . .	90
6.21	Resultado para o elemento CKZ, malha (b). . . . .	91
6.22	Aproximação dos elementos para o comportamento de flexão . . . . .	92
7.1	Geometria, propriedades e malha com numeração dos nós utilizada para o telhado cilíndrico de Scordelis-Lo. . . . .	94
7.2	Deslocamentos verticais obtidos pelo <b>INSANE</b> . . . . .	95
7.3	Deslocamentos verticais obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	95
7.4	Deslocamentos $v$ obtidos pelo <b>INSANE</b> . . . . .	96
7.5	Deslocamentos $v$ obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	96
7.6	Momentos de torção $M_{x'y'}$ obtidos pelo <b>INSANE</b> . . . . .	97
7.7	Momentos de torção $M_{x'y'}$ obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	97
7.8	Diagrama de momentos $M_{y'}$ obtidos pelo <b>INSANE</b> . . . . .	98
7.9	Diagrama de momentos $M_{y'}$ obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	98
7.10	Diagrama de momentos $M_{x'}$ obtidos pelo <b>INSANE</b> . . . . .	99
7.11	Diagrama de momentos $M_{x'}$ obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	99

7.12	Deslocamentos verticais ( $w$ ) na seção central. . . . .	100
7.13	Deslocamentos $v$ no apoio. . . . .	101
7.14	Momento de torção no apoio ( $M_{x'y'}$ ). . . . .	102
7.15	Momentos transversais na seção central ( $M_{y'}$ ). . . . .	103
7.16	Momentos longitudinais na seção central ( $M_{x'}$ ). . . . .	104
7.17	Casca esférica aberta com cargas pontuais radiais. . . . .	105
7.18	Malha de elementos finitos utilizada para a casca esférica. . . . .	106
7.19	Deslocamentos $u$ obtidos pelo <b>INSANE</b> . . . . .	107
7.20	Deslocamentos $u$ obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	107
7.21	Deslocamentos $w$ obtidos pelo <b>INSANE</b> . . . . .	108
7.22	Deslocamentos $w$ obtidos pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	108
7.23	Momento $M_{x'}$ obtido pelo <b>INSANE</b> . . . . .	109
7.24	Momento $M_{x'}$ obtido pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	109
7.25	Deslocamento $u$ dos nós 1 a 9. . . . .	111
7.26	Deslocamento $w$ dos nós 1 a 9. . . . .	111
7.27	Momento $M_{x'}$ nos nós 1 a 9. . . . .	112
7.28	Reservatório cônico-cilíndrico. . . . .	113
7.29	Malha utilizada para o modelo do reservatório cônico-cilíndrico. . . . .	114
7.30	Deslocamento $u$ obtido pelo <b>INSANE</b> . . . . .	115
7.31	Deslocamento $u$ obtido pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	115
7.32	Deslocamento $v$ obtido pelo <b>INSANE</b> . . . . .	116
7.33	Deslocamento $v$ obtido pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	116
7.34	Deslocamento $w$ obtido pelo <b>INSANE</b> . . . . .	117
7.35	Deslocamento $w$ obtido pelo <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	117
7.36	Deslocamento $u = v$ dos nós da viga intermediária. . . . .	120
7.37	Deslocamento $w$ dos nós da viga intermediária. . . . .	120
7.38	Barragem da Venda Nova (Portugal) em arco-gravidade. . . . .	121
7.39	Barragem em arco. . . . .	122
7.40	Malha utilizada para o exemplo da barragem em arco. . . . .	122
7.41	Deslocamentos $u$ do <b>INSANE</b> . . . . .	123
7.42	Deslocamentos $u$ do <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	123
7.43	Deslocamentos $v$ do <b>INSANE</b> . . . . .	124
7.44	Deslocamentos $v$ do <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	124
7.45	Deslocamentos $w$ do <b>INSANE</b> . . . . .	125

7.46	Deslocamentos $w$ do <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	125
7.47	Momento Fletor $M_{x'}$ do <b>INSANE</b> . . . . .	126
7.48	Momento Fletor $M_{x'}$ do <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	126
7.49	Momento Fletor $M_{y'}$ do <b>INSANE</b> . . . . .	127
7.50	Momento Fletor $M_{y'}$ do <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	127
7.51	Esforço normal $N_{x'}$ do <b>INSANE</b> . . . . .	128
7.52	Esforço normal $N_{x'}$ do <b>SAP2000 - Versão 11.0.8</b> . . . . .	128
7.53	Deslocamentos $u = v$ dos nós da linha de centro da barragem. . . . .	131
7.54	Deslocamentos $w$ dos nós da linha de centro da barragem. . . . .	131
7.55	Momento fletor $M_{x'}$ na linha de centro da barragem. . . . .	132
7.56	Momento fletor $M_{y'}$ na linha de centro da barragem. . . . .	132
7.57	Esforço normal $N_{x'}$ na linha de centro da barragem. . . . .	133

# Lista de Abreviaturas e Siglas

DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
FEM	Finite Element Methods
INSANE	<i>Interactive Structural Analysis Environment</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
NPG	Número de Pontos de Gauss
NCD	Número de Componentes de Deformação
POO	Programação Orientada a Objetos
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
TVE	Trabalho Virtual Externo
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UML	<i>Unified Modelling Language</i>

# Lista de Símbolos

$x, y, z$	Coordenadas cartesianas em termos de eixos cartesianos globais
$x', y', z'$	Coordenadas cartesianas em termos de eixos cartesianos locais
$u', v', w'$	Deslocamentos lineares segundo os eixos cartesianos locais <sup>1</sup>
$\theta_{x'}, \theta_{y'}$	Rotações em torno dos planos $x'z'$ e $y'z'$ , respectivamente
$\phi_{x'}, \phi_{y'}$	Rotações adicionais em torno dos planos $x'z'$ e $y'z'$ , respectivamente
$\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \varepsilon_{z'}$	Deformações normais
$\gamma_{x'y'}, \gamma_{y'z'}, \gamma_{x'z'}$	Deformações transversais
$\underline{\varepsilon}'$	Vetor de deformações
$\underline{\hat{\varepsilon}}'_m, \underline{\hat{\varepsilon}}'_f, \underline{\hat{\varepsilon}}'_c$	Vetores de deformações generalizadas de membrana, flexão e cortante, respectivamente
$\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'}$	Tensões normais

---

<sup>1</sup>O símbolo (') nas variáveis desta lista indica que elas se referem ao sistema de coordenadas cartesiano local  $x', y', z'$ .



$\tau_{x'y'}, \tau_{y'z'}, \tau_{x'z'}$	Tensões de cisalhamento
$\underline{\sigma}'$	Vetor de tensões
$E_{x'}, E_{y'}$	Módulos de elasticidade longitudinal
$G_{x'y'}, G_{x'z'}, G_{y'z'}$	Módulos de elasticidade transversal
$\nu_{x'y'}, \nu_{y'x'}$	Coefficientes de Poisson
$\underline{D}'_f, \underline{D}'_c$	Matriz constitutiva, para os termos de flexão e cisalhamento, respectivamente
$\alpha_1, \alpha_2$	Coefficientes utilizados na teoria de placas para corrigir as tensões tangenciais transversais
$\underline{\hat{\sigma}}'_m, \underline{\hat{\sigma}}'_f, \underline{\hat{\sigma}}'_c$	Vetor de esforços (tensões generalizadas) de membrana, flexão e cortante
$\underline{\hat{\sigma}}'$	Vetor de esforços (tensões generalizadas)
$N_{x'}, N_{y'}, N_{x'y'}$	Esforços normais
$M_{x'}, M_{y'}, M_{x'y'}$	Momentos fletores
$Q_{x'}, Q_{y'}$	Esforços cortantes
$t$	Espessura da casca
$\underline{\hat{D}}'$	Matriz constitutiva generalizada
$\underline{\hat{D}}'_m, \underline{\hat{D}}'_f, \underline{\hat{D}}'_{mf}, \underline{\hat{D}}'_c$	Matrizes constitutivas generalizadas, para os termos de membrana, flexão, acoplamento membrana-flexão e cisalhamento, respectivamente
$V$	Volume do elemento
$A$	Área do elemento

$p$	Cargas concentradas
$t_i$	Componente de carga distribuída
$t$	Espessura
$m$	Momentos distribuídos
$\underline{p}$	Vetor de cargas concentradas
$\underline{t}$	Vetor de cargas distribuídas
$\underline{f}$	Vetor de forças nodais equivalentes
$\underline{N}$	Matriz de funções de forma
$\underline{d}^{(e)}$	Vetor de deslocamentos do elemento
$\underline{B}'_m, \underline{B}'_f, \underline{B}'_c$	Matrizes de deformação generalizadas de membrana, flexão e cortante
$\underline{B}'$	Matriz de deformações generalizadas
$\underline{K}'^{(e)}_m, \underline{K}'^{(e)}_f, \underline{K}'^{(e)}_{mf}, \underline{K}'^{(e)}_c$	Matrizes de rigidez de membrana, flexão, acoplamento membrana-flexão e cortante do elemento, respectivamente
$\underline{K}'^{(e)}$	Matriz de rigidez do elemento
$\underline{\lambda}_i^{(e)}$	Matriz de transformação de deslocamentos nodais
$\hat{\underline{\lambda}}_i^{(e)}$	Matriz de transformação de rotações nodais
$\underline{L}_i^{(e)}$	Matriz de transformação de deslocamentos e rotações nodais
$\underline{T}^{(e)}$	Matriz de transformação do elemento

$\xi, \eta$	Sistema de coordenadas natural
$\underline{J}$	Matriz de transformação jacobiana

# Resumo

A maneira mais simples de estudar o comportamento de uma casca, usando o Método dos Elementos Finitos (MEF), baseia-se na aproximação da geometria de sua superfície média por elementos finitos planos obtidos da combinação de elementos de placa e membrana. Esta dissertação discute a implementação computacional de tais elementos usando a metodologia de programação orientada a objetos. A base desta implementação é o núcleo numérico do INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), um sistema computacional orientado a objetos, segmentado, expansível e amigável a mudanças, que está sendo desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Após a apresentação das teorias de cascas de Reissner-Mindlin e de Kirchhoff e dos correspondentes modelos do MEF, a implementação destes modelos é discutida de tal maneira que as principais mudanças efetuadas no núcleo numérico do INSANE são detalhadas. Simulações numéricas envolvendo testes de malha, estudos de convergência e exemplos de aplicação são apresentadas. Os resultados obtidos são comparados com soluções analíticas e com resultados numéricos da literatura ou de outros sistemas computacionais.

Palavras-Chave: *Análise Estrutural, Métodos Numéricos, Método dos Elementos Finitos, Elementos Finitos de Cascas Planos*

# Abstract

One of the simplest ways of studying the behavior of a shell, using the Finite Element Method (FEM), is to approximate the geometry of its middle surface by plane finite elements obtained from the combination of plate and membrane elements. This master's thesis discusses the computational implementation of such elements using the object-oriented programming methodology. The base of this implementation is the numerical core of INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), an object-oriented, modular, expansible and change-friendly computational system that is been developed by the Structural Engineering Department of Federal University of Minas Gerais. After the presentation of Reissner-Mindlin and Kirchhoff shell theories and the corresponding FEM models, the implementation of these models is discussed in such a way that details the main changes performed in the numerical core of INSANE. Numerical simulations concerning Patch Tests, convergence study and application examples are presented. The obtained results are compared with analytic solutions and with numerical results from literature or from other computational systems.

Keywords: *Structural Analysis, Numerical Methods, Finite Element Methods, Flat Shell Finite Elements*

# Agradecimentos

A *DEUS*.

Aos *meus pais*.

Ao professor *Roque Luiz da Silva Pitangueira*, por sua orientação, paciência, conhecimento e compreensão. E aos professores *Alcebíades de Vasconcellos Filho* e *Gabriel de Oliveira Ribeiro*.

Aos *meus irmãos, família* e *Amanda* pela compreensão e incentivos.

Aos *meus chefes e companheiros de trabalho da ECM*, que permitiram e entenderam que a minha ausência no serviço foi importante para que eu pudesse adquirir conhecimentos e experiências que serão aproveitadas na minha profissão.

Aos colegas *Insanos*, em especial ao *Samuel, Samir, Flávio* e *Jamile* pelo companheirismo e ajuda na elaboração deste trabalho.

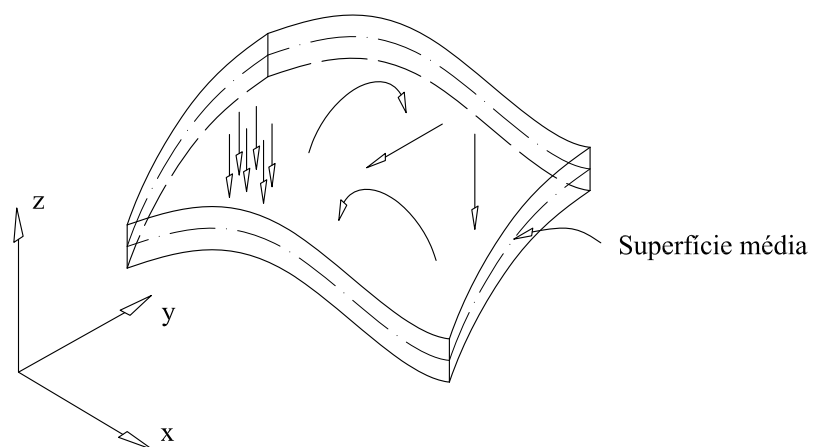
A todos os meus *amigos*, pela compreensão de que o tempo dispensado a este trabalho foi fundamental para meu desenvolvimento profissional.

Aos *professores e funcionários* do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG.

# Capítulo 1

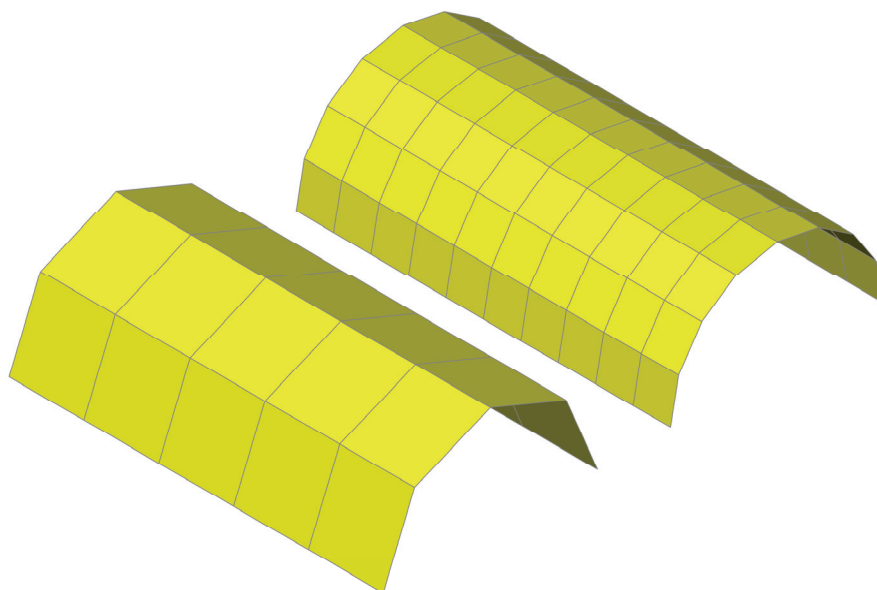
## INTRODUÇÃO

Uma casca é, em essência, uma estrutura que pode ser obtida de uma placa impondo-se à sua superfície média inicial uma curvatura simples (ou dupla). No entanto, a maneira como as cascas suportam as cargas externas é bastante diferente da maneira como fazem as placas. Os esforços atuantes na superfície média da casca possuem componentes normais que podem suportar grande parte do carregamento, fato este que explica a utilização das cascas como estruturas portantes e sua bem-merecida popularidade. Assim, as cascas podem ser carregadas tanto perpendicularmente, quanto na direção de sua superfície, gerando deformações de flexão, como as placas, e de membrana, como em problemas de Estado Plano de Tensões (Figura 1.1).



**Figura 1.1:** Representação de uma casca.

Uma das maneiras mais simples de se estudar o comportamento de uma casca é a de aproximar a geometria de sua superfície média por subdomínios planos de tamanho reduzido (Figura 1.2). Parece intuitivo que a aproximação à geometria real será tanto mais exata quanto menor for o tamanho dos subdomínios utilizados, analogamente ao processo de se aproximar uma curva através de segmentos de retas progressivamente menores.



**Figura 1.2:** Discretização de uma superfície em subdomínios planos.

A idéia anterior é a base da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) ao estudo de cascas de que trata esta dissertação. Esses elementos são de grande interesse não só para estudar as cascas de superfície média curva, como também para o estudo de diversas estruturas de cascas compostas por sub-estruturas planas agrupadas no espaço.

Os elementos finitos de casca, historicamente, têm sido fonte para diversas pesquisas na área de engenharia estrutural. Pode-se encontrar um número grande de referências de dissertações de mestrado e artigos internacionais. Como por exemplo: Ibrahimbegovic e Wilson (1991), Jin (1994), Choi e Lee (1996), Pimpinelli (2004) e Kansara (2004). No Brasil, o assunto também é bastante explorado, podendo-se



encontrar várias referências sobre o assunto, como as elaboradas por Lima (1972), Pierossi (1996), Carrijo (2001) e Andrade (2005). Entretanto, grande parte deste trabalho é perdido, e um dos motivos foi exposto por Saliba (2007): “diversos softwares desenvolvidos pela comunidade acadêmica têm se mostrado totalmente dependentes de sistemas operacionais, escritos em linguagens de programação não apropriadas, de expansão e/ou manutenção difíceis, com documentação deficiente, entre outras limitações”.

O sistema **INSANE** (*INteractive Structural ANalysis Environment*), em desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, “é um projeto de software livre que objetiva o domínio de soluções tecnológicas para desenvolvimento de software, como programação orientada a objetos, linguagem Java, XML, padrões de projeto de software, entre outras, para aprimoramento da agilidade e criatividade da pesquisa de modelos discretos de análise estrutural, através do desenvolvimento colaborativo de um sistema segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade.” (<http://www.insane.dees.ufmg.br/insane/conteudo/bem-vindo>).

O ambiente do sistema **INSANE** é organizado em três grandes aplicações: o pré-processador, o processador e o pós-processador. Todos eles implementados em **JAVA** segundo o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO). O pré-processador é responsável pelo fornecimento de recursos para a criação e edição de modelos. O processador representa o núcleo numérico que elabora a solução dos diversos modelos discretos disponibilizados no sistema. O pós-processador tem a função de apresentar os resultados obtidos pelo processador de diversas formas, entre elas a gráfica. Atualmente, o sistema **INSANE** já disponibiliza em seu processador, entre outros, diversos elementos finitos de membrana e de placa.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo acrescentar alguns elementos de cascas planas ao programa **INSANE**. Para isso, foram estudadas as implementações dos elementos de membrana e de placa já realizadas, respectivamente, por Almeida (2005) e Saliba (2007). Não é objetivo deste trabalho implementar formulações recentes que representem o estado da arte do Método dos Elementos Finitos para cascas. Também não é objetivo deste trabalho prover o **INSANE** de elementos de casca capazes de atender todas as variedades de estruturas de cascas existentes. O objetivo primordial é complementar o **INSANE** com formulações clássicas dos elementos finitos de cascas planas, de forma a criar uma base computacional para pesquisas futuras, e para o ensino do MEF e de análise estrutural.

## 1.2 Organização do Texto

O texto desta dissertação está organizado em 8 capítulos.

No Capítulo 2, faz-se uma exposição dos modelos matemáticos de cascas baseados na Teoria de Reissner-Mindlin, que se aplica às cascas de qualquer espessura, e na Teoria de Kirchhoff, que se aplica às cascas finas.

No Capítulo 3, são apresentados os modelos do MEF, baseados nas Teorias de cascas vistas no Capítulo 2, selecionados para implementação.

O Capítulo 4 faz a apresentação do programa **INSANE** e das alterações necessárias para a implementação dos elementos de casca selecionados, utilizando diagramas da linguagem UML - *Unified Modelling Language* (Guedes, 2005).

No Capítulo 5, são apresentados testes da Malha de *Irons* (*Patch Tests*) para os elementos implementados.

No Capítulo 6, são apresentados testes de convergência, com a finalidade de conhecer melhor o comportamento dos elementos implementados.

No Capítulo 7, são mostrados exemplos de análise de estruturas utilizando-se

elementos de cascas e combinações de elementos de casca e de barra.

Finalizando, no Capítulo 8, encontram-se algumas conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# MODELOS MATEMÁTICOS PARA O ESTUDO DE CASCAS

### 2.1 Introdução

“Similarmente às placas, as teorias de cascas diferem entre si, basicamente, quanto à idealização das deformações de esforço cortante” (Soriano e Lima, 1999), podendo ser classificadas como teoria de cascas espessas de Reissner-Mindlin ou teoria de cascas finas ou clássica de Kirchhoff.

A seguir, são apresentadas as teorias de Reissner-Mindlin e Kirchhoff, respectivamente, descrevendo as hipóteses, os campos de deslocamentos, deformações, tensões e esforços internos.

### 2.2 Teoria de Reissner-Mindlin para Cascas Planas

#### 2.2.1 Hipóteses

A teoria de Reissner-Mindlin para cascas encontra-se fundamentada em três hipóteses:

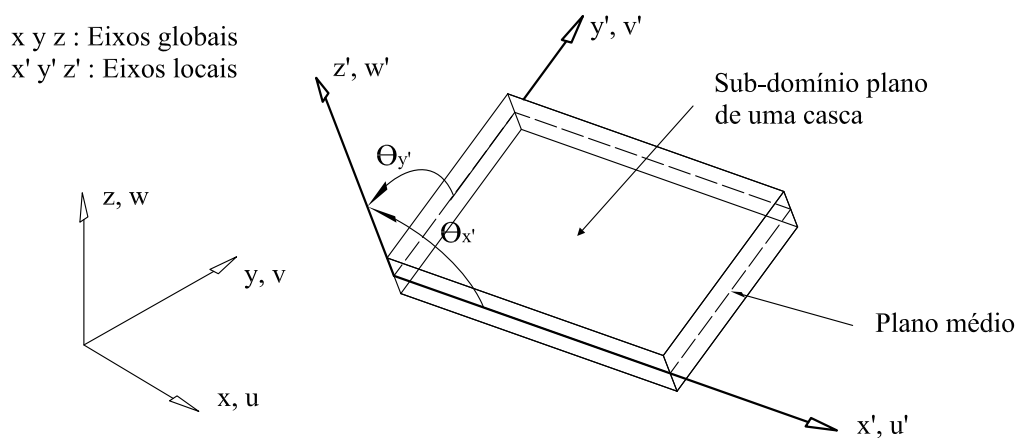
1. Todos os pontos contidos numa reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento transversal;

2. A tensão normal na direção transversal é desprezível;
3. Retas normais ao plano médio da casca indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais ao plano médio, após a deformação desta.

Verifica-se destas hipóteses que a diferença em relação à flexão de placas é a inexistência da hipótese de que os pontos contidos no plano médio se deslocam apenas transversalmente. Nota-se, também, a semelhança entre as teorias de Vigas de Timoshenko e a de Cascas de Reissner-Mindlin, diferenciando-se pelo fato das cascas serem estudadas em duas dimensões. Além disso, a não coplanaridade entre os diversos subdomínios (Figura 1.2) requer a definição dos mesmos em termos de sistemas de coordenadas global e locais.

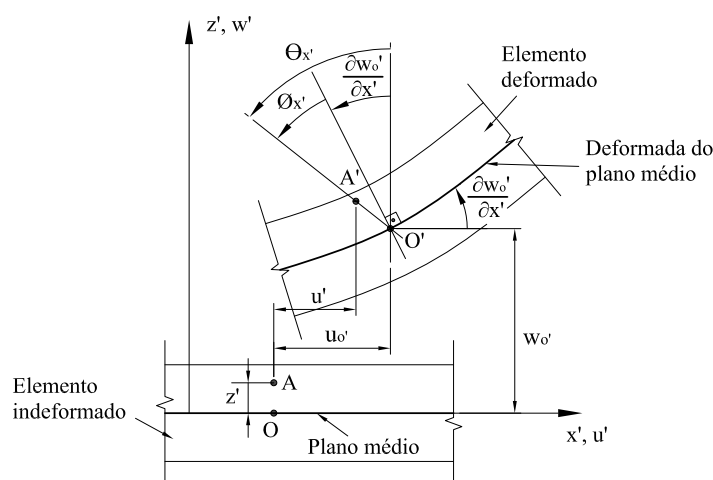
### 2.2.2 Campo de Deslocamentos

Considere-se, por simplicidade, o subdomínio plano da Figura 2.1 definido no sistema de coordenadas global. A superfície média deste subdomínio define o sistema de coordenadas local  $x'y'z'$ , que será utilizado para obtenção do campo de deslocamentos. O eixo  $z'$  é normal ao plano médio e os eixos  $x'$  e  $y'$  coincidem com dois lados do plano médio deste subdomínio.

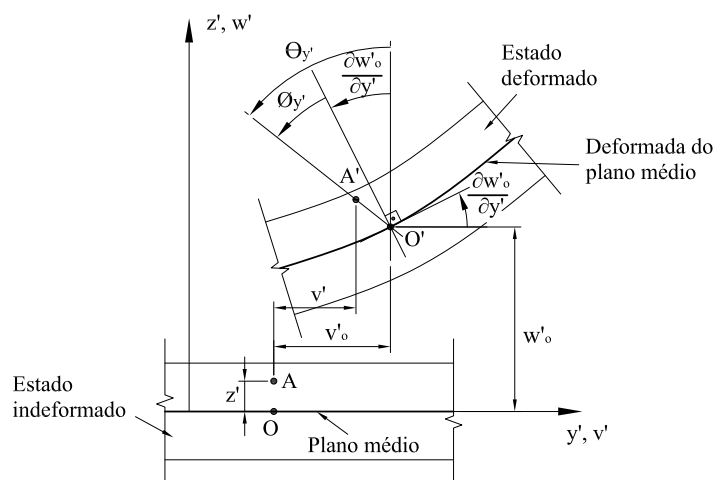


**Figura 2.1:** Subdomínio plano de uma casca no espaço. Sistema de coordenadas local e global (adaptado de Oñate (1995)).

A Figura 2.2 ilustra o deslocamento de um ponto  $A$  segundo os eixos locais  $x'$  e  $z'$ . Segundo as hipóteses adotadas, a distância entre os pontos  $O$  e  $A$  nos estados deformado e indeformado é a mesma, ou seja, a distância entre os pontos  $O$  e  $A$  e entre os pontos  $O'$  e  $A'$  é igual a  $z'$ . Nota-se que, no estado deformado, o plano que continha o ponto  $A$  sofre uma rotação, assim como no caso de placas, e além disso, em se tratando de cascas, o ponto  $A$  também se desloca segundo o eixo  $x'$ . Analogamente, o ponto  $A$  desloca-se segundo os eixos  $y'$  e  $z'$  (ver Figura 2.3).



**Figura 2.2:** Deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais  $x'$  e  $z'$  segundo a Teoria de Reissner-Mindlin.



**Figura 2.3:** Deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais  $y'$  e  $z'$  segundo a Teoria de Reissner-Mindlin.

A partir de uma análise da Figura 2.2 e da Figura 2.3, conclui-se que os deslocamentos do ponto  $A$  são:

$$\begin{aligned} u'(x', y', z') &= u'_o(x', y') - z' \theta_{x'}(x', y') \\ v'(x', y', z') &= v'_o(x', y') - z' \theta_{y'}(x', y') \\ w'(x', y', z') &= w'_o(x', y') \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  são os deslocamentos nas direções  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , respectivamente.

Como as grandezas  $u'_o$ ,  $v'_o$ ,  $w'_o$ ,  $\theta_{x'}$  e  $\theta_{y'}$  são independentes entre si, o vetor de deslocamentos de um ponto no plano médio é dado por:

$$\underline{u}' = \left\{ \begin{array}{c} u'_o \\ v'_o \\ w'_o \\ \theta_{x'} \\ \theta_{y'} \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

Conforme mostrado nas Figuras 2.2 e 2.3, as rotações para a teoria de Reissner-Mindlin podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \theta_{x'} &= \frac{\partial w'_o}{\partial x'} + \phi_{x'} \\ \theta_{y'} &= \frac{\partial w'_o}{\partial y'} + \phi_{y'} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como a hipótese “3” não impõe ortogonalidade da normal ao plano médio deformado e, portanto, permite aproximar o empenamento da mesma, esta teoria pode ser aplicada em cascas de média a grande espessura.

### 2.2.3 Campo de Deformações

Para obtenção do campo de deformações, aplicam-se as relações da teoria da elasticidade para pequenas deformações. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'_o}{\partial x'} - z' \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'} \\
\varepsilon_{y'} &= \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial v'_o}{\partial y'} - z' \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} \\
\varepsilon_{z'} &= \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \\
\gamma_{x'y'} &= \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} - z' \left( \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \right) \\
\gamma_{x'z'} &= \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{\partial w'_o}{\partial x'} - \theta_{x'} = -\phi_{x'} \\
\gamma_{y'z'} &= \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} = \frac{\partial w'_o}{\partial y'} - \theta_{y'} = -\phi_{y'}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Devido às rotações adicionais (Hipótese “3” e Equações 2.3) surgem nesta teoria deformações transversais ( $\gamma_{x'z'}$  e  $\gamma_{y'z'}$ ) que, conforme pode-se ver nas equações (2.4), são independentes da coordenada “z” e são iguais, em valor, a estas rotações.

Escrevendo-se as componentes não nulas de deformação na forma matricial, tem-se

$$\underset{\sim}{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \dots \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \dots \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_o}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z' \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'} \\ -z' \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} \\ -z' \left( \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \right) \\ \dots \\ \frac{\partial w'_o}{\partial x'} - \theta_{x'} \\ \frac{\partial w'_o}{\partial y'} - \theta_{y'} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

ou ainda,

$$\underset{\sim}{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}'_m \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z' \underset{\sim}{\varepsilon}'_f \\ \dots \\ \underset{\sim}{\varepsilon}'_c \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

onde

$$\underset{\sim}{\varepsilon}'_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_o}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{\varepsilon}'_f = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'} \\ -\frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} \\ -\left( \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \right) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{\varepsilon}'_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial w'_o}{\partial x'} - \theta_{x'} \\ \frac{\partial w'_o}{\partial y'} - \theta_{y'} \end{pmatrix}$$



são, respectivamente, os vetores de deformações generalizadas de membrana, flexão e cortante.

É importante ressaltar que deformações transversais nulas implicam em  $\theta_{x'} = \frac{\partial w'_o}{\partial x'}$  e  $\theta_{y'} = \frac{\partial w'_o}{\partial y'}$ , recuperando-se a condição de ortogonalidade.

## 2.2.4 Campo de Tensões

Eliminando-se as tensões nulas e trabalhando-se em termos de eixos locais, a equação constitutiva da teoria da elasticidade clássica permite escrever a seguinte relação entre tensões e deformações:

$$\underline{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \dots \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}'_f \\ \dots \\ \underline{\sigma}'_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D}'_f & \underline{0} \\ \dots & \dots \\ \underline{0} & \underline{D}'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \dots \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \underline{D}' \underline{\varepsilon}' \quad (2.7)$$

onde,

$\underline{D}'_f$  é a matriz constitutiva de flexão, que para material ortotrópico é dada por

$$\underline{D}'_f = \frac{1}{1 - \nu_{x'y'}\nu_{y'x'}} \begin{bmatrix} E_{x'} & \nu_{x'y'}E_{x'} & 0 \\ \nu_{y'x'}E_{y'} & E_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{x'y'}\nu_{y'x'})G_{x'y'} \end{bmatrix} \text{ e}$$

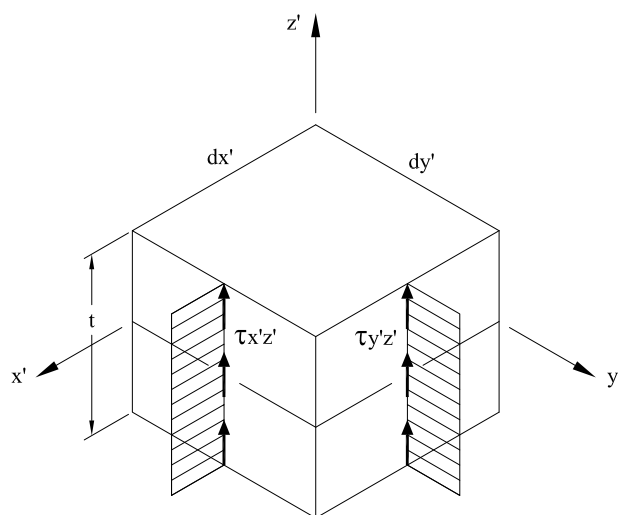
$$\underline{D}'_c = \begin{bmatrix} G_{x'z'} & 0 \\ 0 & G_{y'z'} \end{bmatrix} \text{ é a matriz constitutiva de cisalhamento.}$$

É importante ressaltar que na equação (2.7)  $\underline{\sigma}'_f$  acumula as contribuições devidas às deformações de membrana ( $\hat{\underline{\varepsilon}}'_m$ ) e de flexão ( $\hat{\underline{\varepsilon}}'_f$ ) dadas na equação (2.6).

De (2.6) e (2.7) obtém-se:

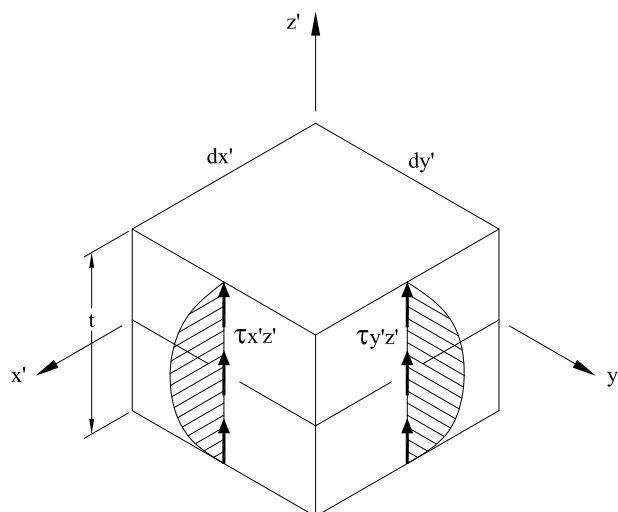
$$\begin{aligned} \underline{\sigma}'_f &= \underline{D}'_f(\hat{\underline{\varepsilon}}'_m + z'\hat{\underline{\varepsilon}}'_f) \\ \underline{\sigma}'_c &= \underline{D}'_c\hat{\underline{\varepsilon}}'_c \end{aligned} \quad (2.8)$$

Conforme comentou-se anteriormente, as deformações de cortante independem da coordenada “ $z'$ ”. Da mesma forma, as tensões tangenciais transversais também independem de “ $z'$ ”, caracterizando uma distribuição de tensões ao longo da espessura como a representada na Figura 2.4.



**Figura 2.4:** Distribuição de tensões cisalhantes.

Entretanto, de acordo com a teoria da elasticidade, a distribuição das tensões tangenciais transversais não é constante ao longo da espessura. Esta distribuição tem forma polinomial com valores nulos nas extremidades superior e inferior da casca, conforme representado na Figura 2.5.



**Figura 2.5:** Distribuição de tensões cisalhantes conforme a teoria da elasticidade.

Comparando-se as Figuras 2.4 e 2.5 fica claro a existência de uma divergência entre as distribuições. Para resolver este problema, adicionam-se fatores de correção aos módulos de elasticidade transversal com o objetivo de igualar o trabalho de deformação calculado com as duas distribuições. Logo, a nova matriz constitutiva de cortante fica:

$$\underline{D}_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 G_{x'z'} & 0 \\ 0 & \alpha_2 G_{y'z'} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os coeficientes de correção, também conhecidos por coeficientes de distorção transversal.

Para seção retangular constante, tem-se os seguintes valores

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5}{6} \quad (\text{Oñate, 1995}), \text{ ou}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu} \quad (\text{Dym e Shames, 1973}),$$

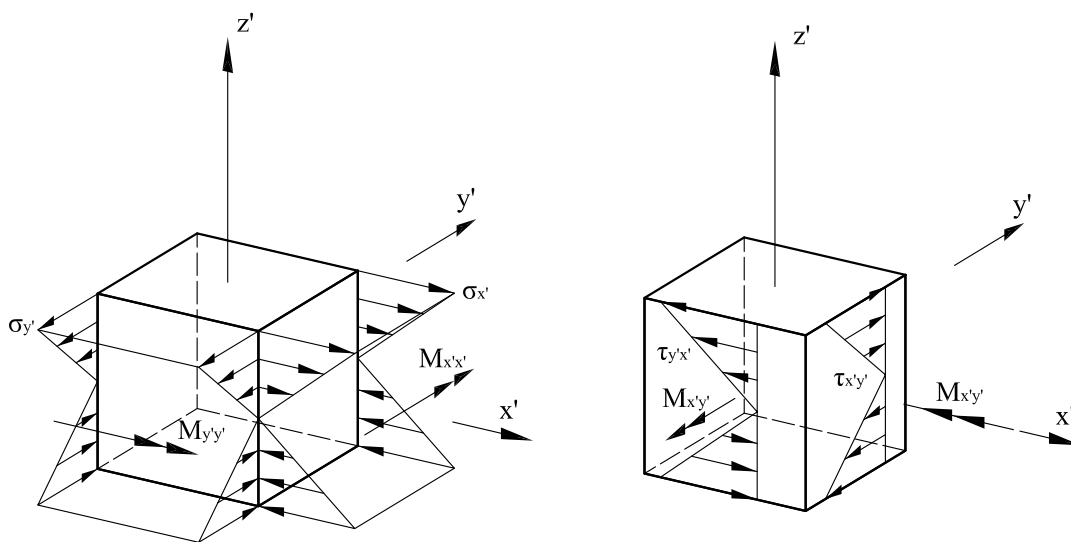
quando se considera o efeito de Poisson.

### 2.2.5 Esforços Internos

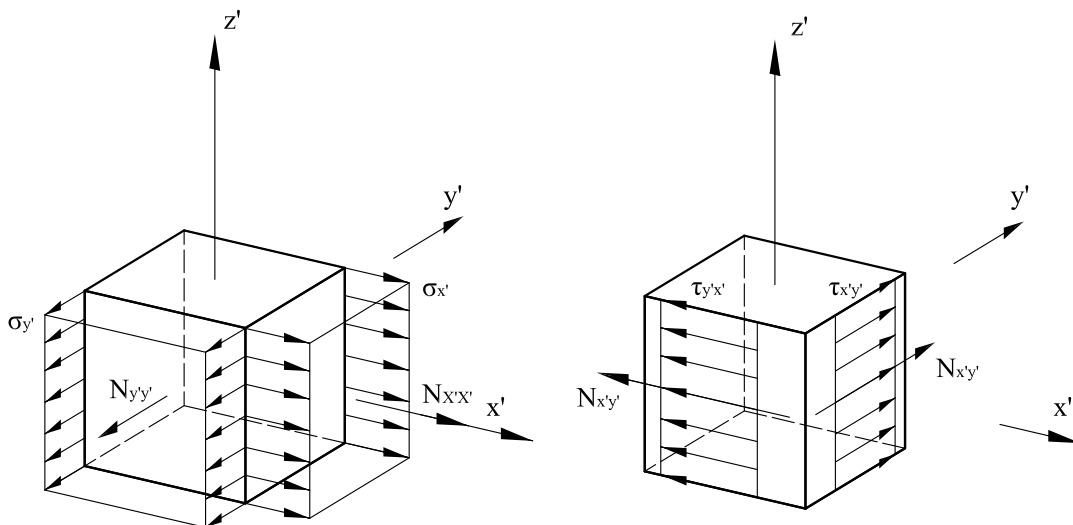
O vetor de esforços internos é obtido a partir da integração das tensões ao longo da espessura da casca. Sabendo-se que as tensões de flexão variam linearmente com a espessura e que as tensões de membrana e cisalhamento permanecem constantes, conforme mostram as Figuras 2.6, 2.7 e 2.8, tem-se:

$$\underline{\hat{\sigma}}' = \begin{Bmatrix} \underline{\hat{\sigma}}'_m \\ \underline{\hat{\sigma}}'_f \\ \underline{\hat{\sigma}}'_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x'x'} \\ N_{y'y'} \\ N_{x'y'} \\ \dots \\ M_{x'x'} \\ M_{y'y'} \\ M_{x'y'} \\ \dots \\ Q_{x'z'} \\ Q_{y'z'} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \dots \\ z' \sigma_{x'} \\ z' \sigma_{y'} \\ z' \tau_{x'y'} \\ \dots \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}'_f \\ \dots \\ z' \underline{\sigma}'_f \\ \dots \\ \underline{\sigma}'_c \end{Bmatrix} dz' \quad (2.10)$$

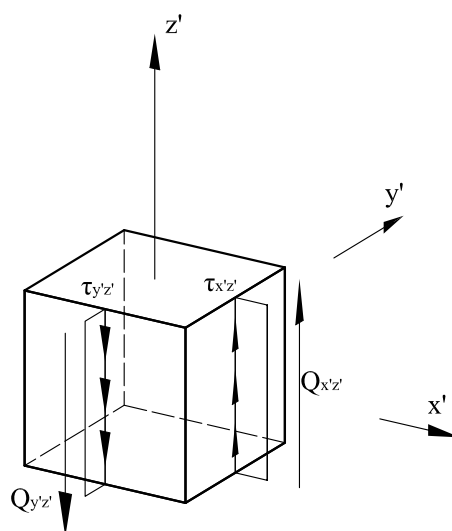
onde  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  e  $t$  são os esforços normais, momentos fletores, esforços cortantes e a espessura da casca, respectivamente.



**Figura 2.6:** Distribuição de tensões de flexão ao longo da espessura.



**Figura 2.7:** Distribuição de tensões de membrana ao longo da espessura.



**Figura 2.8:** Distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da espessura.

A relação entre esforços e deformações generalizados locais se obtém combinando (2.8) e (2.10)

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\sigma}}' &= \int_{-t/2}^{t/2} \left\{ \begin{array}{c} \underline{\sigma}'_f \\ \dots \\ z' \underline{\sigma}'_f \\ \dots \\ \underline{\sigma}'_c \end{array} \right\} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \left\{ \begin{array}{c} \underline{D}'_f(\underline{\hat{\varepsilon}}'_m + z' \underline{\hat{\varepsilon}}'_f) \\ \dots \\ z' \underline{D}'_f(\underline{\hat{\varepsilon}}'_m + z' \underline{\hat{\varepsilon}}'_f) \\ \dots \\ \underline{D}'_c \underline{\hat{\varepsilon}}'_c \end{array} \right\} dz' = \underline{\hat{D}}' \left\{ \begin{array}{c} \underline{\hat{\varepsilon}}'_m \\ \dots \\ \underline{\hat{\varepsilon}}'_f \\ \dots \\ \underline{\hat{\varepsilon}}'_c \end{array} \right\} \\ &= \underline{\hat{D}}' \underline{\hat{\varepsilon}}' \end{aligned} \quad (2.11)$$

sendo  $\underline{\hat{D}}'$  a matriz constitutiva que relaciona o vetor de esforços  $\underline{\hat{\sigma}}'$  com o de deformações generalizadas  $\underline{\hat{\varepsilon}}'$  no sistema de coordenadas local. Assim, de (2.11) deduz-se que

$$\underline{\hat{D}}' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \underline{D}'_f & z' \underline{D}'_f & 0 \\ z' \underline{D}'_f & z'^2 \underline{D}'_f & 0 \\ 0 & 0 & \underline{D}'_c \end{bmatrix} dz' = \begin{bmatrix} \underline{\hat{D}}'_m & \underline{\hat{D}}'_{mf} & 0 \\ \underline{\hat{D}}'_{mf} & \underline{\hat{D}}'_f & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\hat{D}}'_c \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

com

$$\begin{aligned} \underline{\hat{D}}'_m &= \int_{-t/2}^{t/2} \underline{D}'_f dz' & ; & & \underline{\hat{D}}'_{mf} &= \int_{-t/2}^{t/2} z' \underline{D}'_f dz' & ; \\ \underline{\hat{D}}'_f &= \int_{-t/2}^{t/2} z'^2 \underline{D}'_f dz' & \text{ e } & & \underline{\hat{D}}'_c &= \int_{-t/2}^{t/2} \underline{D}'_c dz' \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $\underline{\hat{D}}'_m$ ,  $\underline{\hat{D}}'_f$  e  $\underline{\hat{D}}'_c$  são as matrizes constitutivas generalizadas correspondentes aos esforços de membrana, flexão e cortante, respectivamente, e  $\underline{\hat{D}}'_{mf}$  é a matriz constitutiva de acoplamento membrana-flexão.

“As expressões anteriores são válidas para o caso mais geral em que as propriedades do material estejam distribuídas heterogeneamente através da espessura (por exemplo, em cascas de concreto armado com distribuições não simétricas de armaduras). É fácil constatar que se existe simetria das propriedades do material com respeito ao plano médio, ou o material é homogêneo,  $\underline{\hat{D}}'_{mf} = \underline{0}$  e cada um dos vetores de esforços pode ser calculado de forma desacoplada a partir de suas correspondentes deformações generalizadas” (Oñate, 1995). Neste caso, tem-se

$$\underline{\hat{\sigma}}'_m = \underline{\hat{D}}'_m \underline{\hat{\varepsilon}}'_m, \quad \underline{\hat{\sigma}}'_f = \underline{\hat{D}}'_f \underline{\hat{\varepsilon}}'_f \quad \text{ e } \quad \underline{\hat{\sigma}}'_c = \underline{\hat{D}}'_c \underline{\hat{\varepsilon}}'_c \quad (2.14)$$

Essas expressões se simplificam bastante em caso de material homogêneo, e podem ser obtidas por integração direta das equações (2.13) como a seguir

$$\underline{\hat{D}}'_m = t\underline{D}'_f, \quad \underline{\hat{D}}'_f = \frac{t^3}{12}\underline{D}'_f \quad \text{e} \quad \underline{\hat{D}}'_c = t\underline{D}'_c \quad (2.15)$$

## 2.3 Teoria de Kirchhoff para Cascas Planas

### 2.3.1 Hipóteses

A teoria de placas de Kirchhoff se obtém da teoria de Reissner-Mindlin através da alteração da hipótese de ortogonalidade da normal depois da deformação da placa. O mesmo vale para as cascas. Assim, as duas primeiras hipóteses permanecem as mesmas da teoria de Reissner-Mindlin, e a terceira se altera como se segue

3. Retas normais ao plano médio da casca indeformada permanecem retas e normais ao plano médio, após sua deformação.

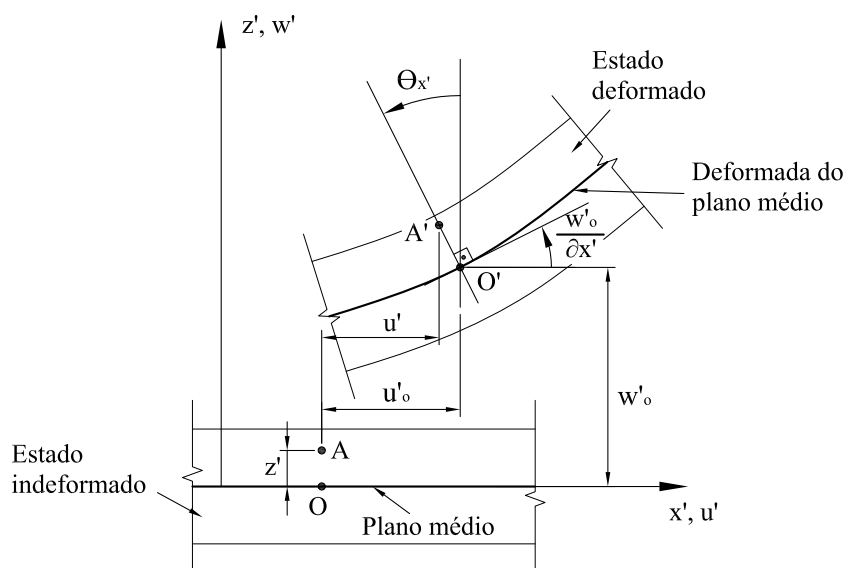
### 2.3.2 Campo de Deslocamentos

A partir da Figura 2.9, pode-se deduzir a seguinte relação no plano  $x'z'$ :

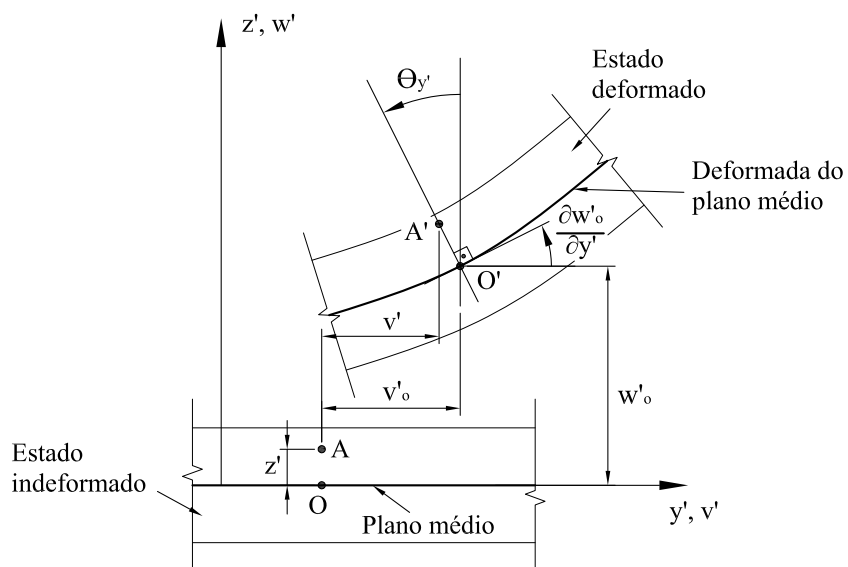
$$\theta_{x'} = \frac{\partial w'_o}{\partial x'} \quad (2.16)$$

Analogamente, para o plano  $y'z'$  (Figura 2.10), tem-se:

$$\theta_{y'} = \frac{\partial w'_o}{\partial y'} \quad (2.17)$$



**Figura 2.9:** Deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais  $x'$  e  $z'$  segundo a Teoria de Kirchhoff.



**Figura 2.10:** Deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais  $y'$  e  $z'$  segundo a Teoria de Kirchhoff.



Da observação das Figuras 2.9 e 2.10, pode-se obter o seguinte campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned}
 u'(x', y', z') &= u'_o(x', y') - z' \theta_{x'}(x', y') = u'_o(x', y') - z' \frac{\partial w'_o(x', y')}{\partial x'} \\
 v'(x', y', z') &= v'_o(x', y') - z' \theta_{y'}(x', y') = v'_o(x', y') - z' \frac{\partial w'_o(x', y')}{\partial y'} \\
 w'(x', y', z') &= w'_o(x', y')
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  são os deslocamentos nas direções  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , respectivamente.

Devido à relação de dependência entre as rotações  $\theta_{x'}$  e  $\theta_{y'}$  e o deslocamento  $w'_o$ , o vetor de deslocamentos de um ponto contido no plano médio pode ser escrito como:

$$\underline{u}' = \begin{Bmatrix} u'_o \\ v'_o \\ w'_o \\ \theta_{x'} \\ \theta_{y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_o \\ v'_o \\ w'_o \\ \frac{\partial w'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'_o}{\partial y'} \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

### 2.3.3 Campo de Deformações

A partir do campo de deslocamentos descrito pelas equações (2.18) e das relações deslocamento-deformação da teoria da elasticidade, obtém-se as seguintes relações entre deformações e deslocamentos para a teoria de cascas de Kirchhoff:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x'} &= \frac{\partial u'_o}{\partial x'} - z' \frac{\partial^2 w'_o}{\partial x'^2} \\
 \varepsilon_{y'} &= \frac{\partial v'_o}{\partial y'} - z' \frac{\partial^2 w'_o}{\partial y'^2} \\
 \gamma_{x'y'} &= \left( \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} \right) - 2 z' \frac{\partial^2 w'_o}{\partial x' \partial y'} \\
 \varepsilon_{z'} &\simeq \gamma_{x'z'} = \gamma_{y'z'} = 0
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Escrevendo matricialmente, tem-se o seguinte vetor de deformações locais

$$\underline{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_o}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial x'} - z' \frac{\partial^2 w'_o}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial v'_o}{\partial y'} - z' \frac{\partial^2 w'_o}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} - 2 z' \frac{\partial^2 w'_o}{\partial x' \partial y'} \end{Bmatrix}$$

ou

$$\underline{\varepsilon}' = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_o}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} \end{array} \right\} + z' \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w'_o}{\partial x'^2} \\ -\frac{\partial^2 w'_o}{\partial y'^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w'_o}{\partial x' \partial y'} \end{array} \right\} = \underline{\varepsilon}'_m + z' \underline{\varepsilon}'_f \quad (2.21)$$

onde,

$$\underline{\varepsilon}'_m = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_o}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} \end{array} \right\} \text{ é o vetor de deformações generalizadas locais de membrana, e}$$

$$\underline{\varepsilon}'_f = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w'_o}{\partial x'^2} \\ -\frac{\partial^2 w'_o}{\partial y'^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w'_o}{\partial x' \partial y'} \end{array} \right\} \text{ é o vetor de deformações generalizadas locais de flexão.}$$

### 2.3.4 Campo de Tensões

Eliminando as tensões nulas e trabalhando-se em termos de eixos locais, a equação constitutiva da teoria da elasticidade clássica permite escrever a seguinte relação entre tensões e deformações:

$$\underline{\sigma}' = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{array} \right\} = \underline{\sigma}'_f = \underline{D}'_f \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma_{x'y'} \end{array} \right\} = \underline{D}'_f \underline{\varepsilon}' \quad (2.22)$$

onde,

$$\underline{D}'_f = \frac{1}{1 - \nu_{x'y'} \nu_{y'x'}} \left[ \begin{array}{ccc} E_{x'} & \nu_{x'y'} E_{x'} & 0 \\ \nu_{y'x'} E_{y'} & E_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{x'y'} \nu_{y'x'}) G_{x'y'} \end{array} \right] \text{ é a matriz} \quad (2.23)$$

constitutiva para uma casca de material ortotrópico.

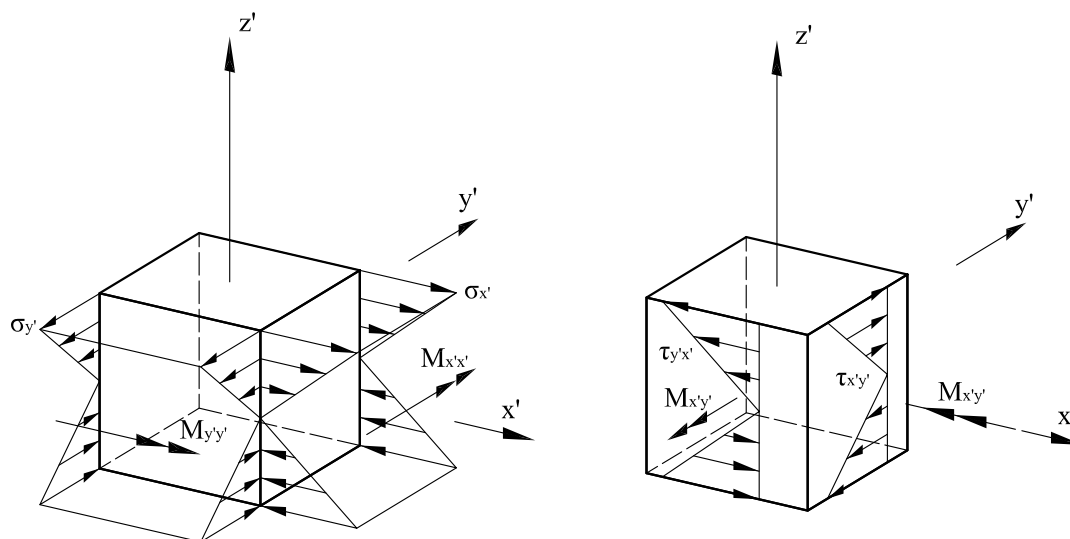
De (2.21) e (2.22) obtém-se

$$\underline{\sigma}'_f = \underline{D}'_f (\underline{\varepsilon}'_m + z' \underline{\varepsilon}'_f) \quad (2.24)$$

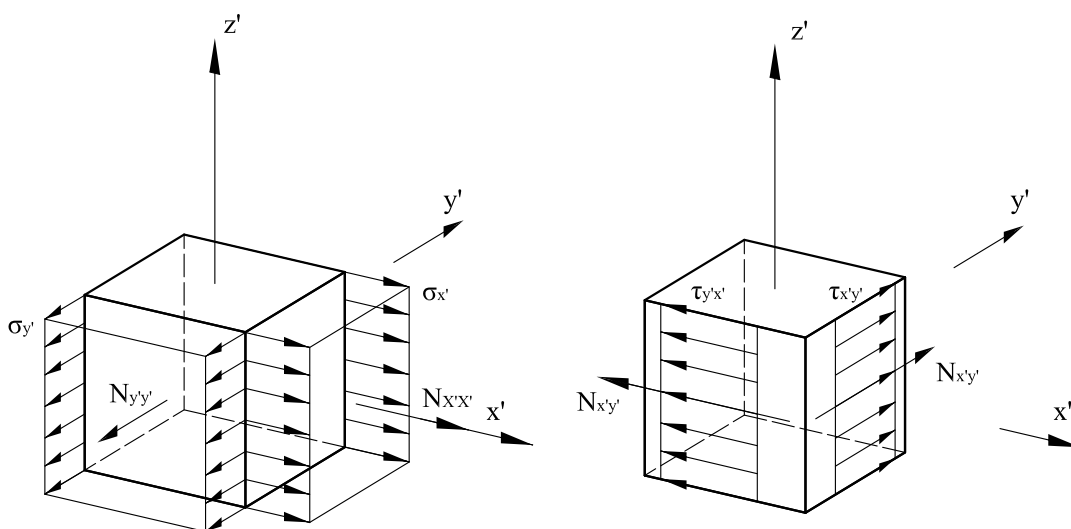
### 2.3.5 Esforços Internos

A partir da equação (2.24) pode-se observar que as tensões de membrana são constantes e as de flexão variam linearmente ao longo da espessura e, também, que

os valores máximos em módulo ocorrem nas superfícies limites, conforme pode ser visto nas Figuras 2.11 e 2.12.



**Figura 2.11:** Distribuição de tensões de flexão ao longo da espessura.



**Figura 2.12:** Distribuição de tensões de membrana ao longo da espessura.

Os esforços internos são obtidos a partir da integração das tensões ao longo da

espessura  $t$  da casca em uma faixa de uma unidade de comprimento, assim tem-se:

$$\underline{\hat{\sigma}}' = \begin{Bmatrix} \underline{\hat{\sigma}}'_m \\ \underline{\hat{\sigma}}'_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x'x'} \\ N_{y'y'} \\ N_{x'y'} \\ M_{x'x'} \\ M_{y'y'} \\ M_{x'y'} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ z' \sigma_{x'} \\ z' \sigma_{y'} \\ z' \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} dz'$$

ou

$$\underline{\hat{\sigma}}' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}'_f \\ z' \underline{\sigma}'_f \end{Bmatrix} dz' \quad (2.25)$$

A relação entre esforços e deformações generalizadas locais se obtém combinando (2.24) e (2.25)

$$\underline{\hat{\sigma}}' = \begin{Bmatrix} \underline{\hat{\sigma}}'_m \\ \underline{\hat{\sigma}}'_f \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}'_f \\ z' \underline{\sigma}'_f \end{Bmatrix} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \underline{D}'_f (\underline{\hat{\epsilon}}'_m + z' \underline{\hat{\epsilon}}'_f) \\ z' \underline{D}'_f (\underline{\hat{\epsilon}}'_m + z' \underline{\hat{\epsilon}}'_f) \end{Bmatrix} dz' \quad (2.26)$$

A equação (2.26) pode ser reescrita da forma

$$\underline{\hat{\sigma}}' = \underline{\hat{D}}' \begin{Bmatrix} \underline{\hat{\epsilon}}'_m \\ \underline{\hat{\epsilon}}'_f \end{Bmatrix} = \underline{\hat{D}}' \underline{\hat{\epsilon}}', \quad (2.27)$$

onde,

$$\underline{\hat{D}}' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \underline{D}'_f & z' \underline{D}'_f \\ z' \underline{D}'_f & z'^2 \underline{D}'_f \end{bmatrix} dz' = \begin{bmatrix} \underline{\hat{D}}'_m & \underline{\hat{D}}'_{mf} \\ \underline{\hat{D}}'_{mf} & \underline{\hat{D}}'_f \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

com

$$\underline{\hat{D}}'_m = \int_{-t/2}^{t/2} \underline{D}'_f dz'; \quad \underline{\hat{D}}'_{mf} = \int_{-t/2}^{t/2} z' \underline{D}'_f dz' \quad \text{e} \quad \underline{\hat{D}}'_f = \int_{-t/2}^{t/2} z'^2 \underline{D}'_f dz' \quad (2.29)$$

onde  $\underline{\hat{D}}'_m$  e  $\underline{\hat{D}}'_f$  são as matrizes constitutivas generalizadas correspondentes aos esforços de membrana e flexão, respectivamente, e  $\underline{\hat{D}}'_{mf}$  é a matrix constitutiva de acoplamento membrana-flexão.

Como já discutido para o caso da teoria de Reissner-Mindlin, se existe simetria das propriedades do material com respeito ao plano médio ou o material é homogêneo,  $\hat{\underline{D}}'_{mf} = \underline{0}$  e cada um dos vetores de esforços pode ser calculado de forma desacoplada a partir de suas correspondentes deformações generalizadas. Assim, tem-se

$$\underline{\hat{\sigma}}'_m = \underline{\hat{D}}'_m \underline{\hat{\varepsilon}}'_m \quad \text{e} \quad \underline{\hat{\sigma}}'_f = \underline{\hat{D}}'_f \underline{\hat{\varepsilon}}'_f \quad (2.30)$$

Essas expressões se simplificam bastante em caso de material homogêneo, e podem ser obtidas por integração direta das equações (2.29) como a seguir

$$\underline{\hat{D}}'_m = t \underline{D}'_f \quad \text{e} \quad \underline{\hat{D}}'_f = \frac{t^3}{12} \underline{D}'_f \quad (2.31)$$

## Capítulo 3

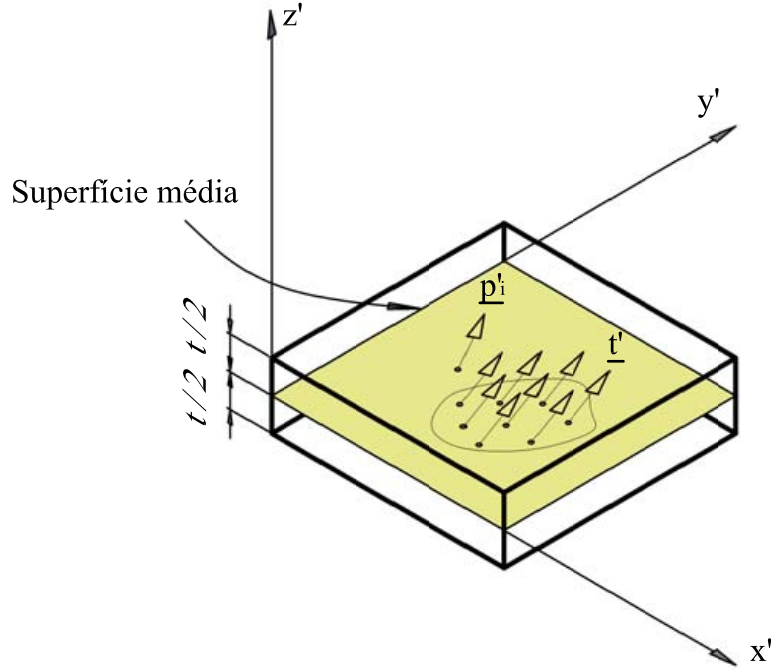
# MODELOS DISCRETOS PARA O ESTUDO DE CASCAS

### 3.1 Introdução

Considerando um elemento finito de casca plano submetido a cargas distribuídas sobre sua superfície  $\underline{t}'$  e cargas concentradas  $\underline{p}'_i$  (Figura 3.1), tem-se a seguinte expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV):

$$\iiint_V \delta \underline{\varepsilon}'^T \underline{\sigma}' dV = \iint_A \delta \underline{u}'^T \underline{t}' dA + \sum_i \delta \underline{u}'_i^T \underline{p}'_i \quad , \quad (3.1)$$

onde  $V$  e  $A$  são o volume e a área da superfície média do elemento, respectivamente. Todas as grandezas estão referidas ao sistema de coordenadas  $x', y', z'$ ;  $\delta \underline{u}'$  é o vetor de deslocamentos virtuais de um ponto qualquer da superfície média;  $\delta \underline{u}'_i$  é o vetor  $\delta \underline{u}'$  avaliado no ponto  $i$  de coordenadas  $(x'_i, y'_i, 0)$ ;  $\delta \underline{\varepsilon}'$  é o vetor de deformações associadas aos deslocamentos  $\delta \underline{u}'$ ;  $\underline{\sigma}'$  é o vetor de tensões em um ponto qualquer do elemento;  $\underline{t}'$  é o vetor de forças por unidade de área atuando na superfície média do elemento (Figura 3.1) e  $\underline{p}'_i$  é o vetor de cargas concentradas atuando no ponto  $i$   $(x'_i, y'_i, 0)$ .



**Figura 3.1:** Elemento plano de casca carregado em sua superfície média.

Substituindo (2.6) e (2.7) no primeiro termo de (3.1) tem-se

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \delta \hat{\underline{\varepsilon}}'^T \underline{\sigma}' dV &= \iiint_V \delta \left[ \hat{\underline{\varepsilon}}'_m + z' \hat{\underline{\varepsilon}}'_f \mid \hat{\underline{\varepsilon}}'_c \right] \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}'_f \\ - \\ \underline{\sigma}'_c \end{Bmatrix} dV = \\
 &= \iiint_V (\delta \hat{\underline{\varepsilon}}'_m \underline{\sigma}'_f + z' \delta \hat{\underline{\varepsilon}}'_f \underline{\sigma}'_f + \delta \hat{\underline{\varepsilon}}'_c \underline{\sigma}'_c) dV = \\
 &= \iint_A [\delta \hat{\underline{\varepsilon}}'_m \underbrace{\left( \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \underline{\sigma}'_f dz' \right)}_{\hat{\underline{\sigma}}'_m} + \delta \hat{\underline{\varepsilon}}'_f \underbrace{\left( \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z' \underline{\sigma}'_f dz' \right)}_{\hat{\underline{\sigma}}'_f} + \delta \hat{\underline{\varepsilon}}'_c \underbrace{\left( \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \underline{\sigma}'_c dz' \right)}_{\hat{\underline{\sigma}}'_c}] dA = \\
 &= \iint_A (\delta \hat{\underline{\varepsilon}}'_m \hat{\underline{\sigma}}'_m + \delta \hat{\underline{\varepsilon}}'_f \hat{\underline{\sigma}}'_f + \delta \hat{\underline{\varepsilon}}'_c \hat{\underline{\sigma}}'_c) dA = \iint_A \delta \hat{\underline{\varepsilon}}'^T \hat{\underline{\sigma}}' dA \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

de onde se deduz que o trabalho de deformação virtual pode ser obtido da soma direta das contribuições de membrana, flexão e cortante.

Assim, o PTV pode ser escrito como se segue

$$\iint_A \delta \hat{\underline{\varepsilon}}'^T \hat{\underline{\sigma}}' dA = \iint_A \delta \underline{u}'^T \underline{t}' dA + \sum_i \delta \underline{u}'_i{}^T \underline{p}'_i \quad (3.3)$$

A equação (3.3) mostra que, trabalhando-se com esforços e deformações generalizadas se reduz o domínio de integração em uma dimensão: de uma integral de volume para uma integral sobre o plano médio do elemento (ver Figura 3.1).

## 3.2 Formulação de Elementos Finitos de Casca Planos de Reissner-Mindlin

Utilizando a teoria de Reissner-Mindlin para cascas planas (Seção 2.2), todas as derivadas que aparecem nos integrandos de (3.3) são de primeira ordem, o que permite a utilização de elementos finitos de classe  $C_o$ .

Apresenta-se a seguir as expressões básicas da formulação de elementos finitos de cascas planos isoparamétricos de classe  $C_o$  de  $n$  nós.

### 3.2.1 Discretização do Campo de Deslocamentos

Considerando a superfície média de uma casca discretizada em elementos finitos (Figura 3.2), pode-se interpolar o vetor de deslocamentos da equação 2.2 da seguinte forma

$$\underline{u}' = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \underline{d}'^{(e)} = [\underline{N}_1, \underline{N}_2, \dots, \underline{N}_n] \begin{Bmatrix} \underline{d}'^{(e)}_1 \\ \underline{d}'^{(e)}_2 \\ \vdots \\ \underline{d}'^{(e)}_n \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{d}'^{(e)} \quad (3.4)$$

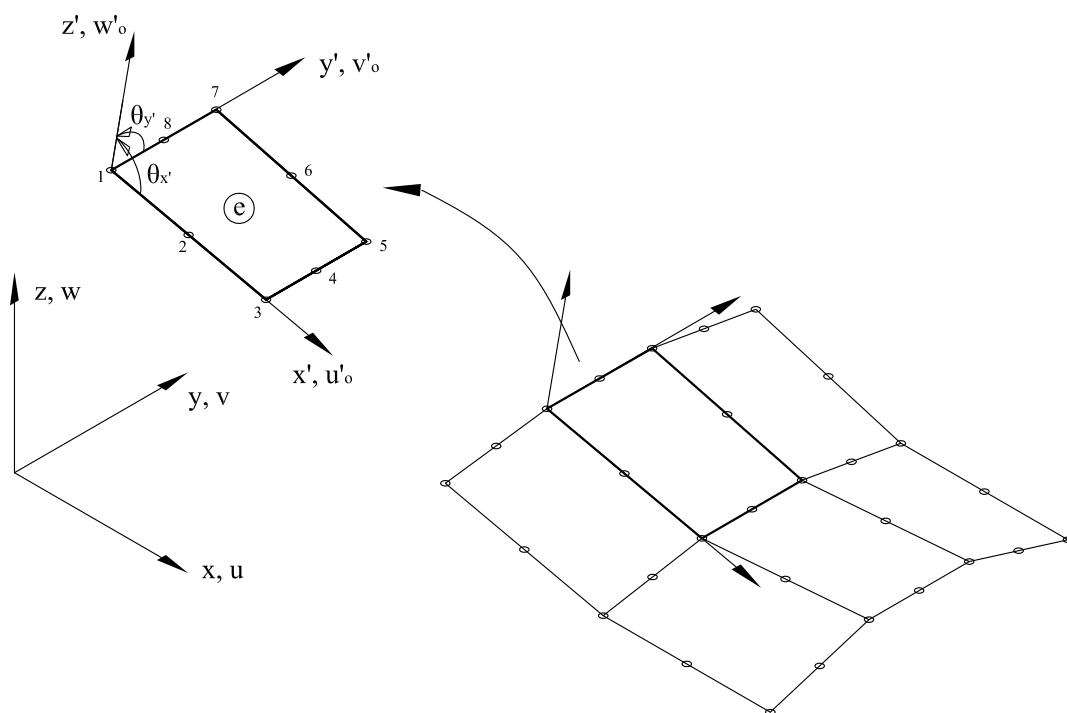
onde,

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{d}'^{(e)}_i = \begin{Bmatrix} u'_{o_i} \\ v'_{o_i} \\ w'_{o_i} \\ \theta_{x'_i} \\ \theta_{y'_i} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

são a matriz de funções de forma e o vetor de deslocamentos locais de um nó  $i$  do elemento, respectivamente. Pode-se ver que os deslocamentos nodais incluem os



deslocamentos no plano do elemento  $u'_{o_i}$  e  $v'_{o_i}$ , o deslocamento transversal  $w'_{o_i}$  e os giros  $\theta_{x'_i}$  e  $\theta_{y'_i}$ . A convenção de sinais destes giros pode ser vista na Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Discretização de uma casca em elementos planos quadrilaterais de 8 nós.

### 3.2.2 Discretização do Campo de Deformações Generalizadas

Substituindo a aproximação dada na equação (3.4) no vetor de deformações generalizadas locais, cujas parcelas de membrana, flexão e cortante são definidas na equação (2.6), pode-se deduzir que

$$\begin{aligned}
\{\underline{c}'\} &= \begin{Bmatrix} \{\underline{c}'_m\} \\ \dots \\ \{\underline{c}'_f\} \\ \dots \\ \{\underline{c}'_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_o}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} \\ \dots \\ -\frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'} \\ -\frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} \\ -\left(\frac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial w'_o}{\partial x'} - \theta_{x'} \\ \frac{\partial w'_o}{\partial y'} - \theta_{y'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x'} u'_{o_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} v'_{o_i} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y'} u'_{o_i} + \frac{\partial N_i}{\partial x'} v'_{o_i}\right) \\ \dots \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x'} \theta_{x'_i} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y'} \theta_{y'_i} \\ -\left(\frac{\partial N_i}{\partial y'} \theta_{x'_i} + \frac{\partial N_i}{\partial x'} \theta_{y'_i}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial x'} w'_{o_i} - N_i \theta_{x'_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} w'_{o_i} - N_i \theta_{y'_i} \end{Bmatrix} = \\
&= [\underline{B}'_1, \underline{B}'_2, \dots, \underline{B}'_n] \begin{Bmatrix} \underline{d}'^{(e)}_1 \\ \underline{d}'^{(e)}_2 \\ \vdots \\ \underline{d}'^{(e)}_n \end{Bmatrix} = \underline{B}' \underline{d}'^{(e)} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

onde  $\underline{B}'$  e  $\underline{B}'_i$  são as matrizes das relações deformações generalizadas – deslocamentos, referidas ao sistema local de coordenadas, do elemento e de um nó  $i$ , respectivamente.

Esta última pode ser escrita como

$$\underline{B}'_i = \begin{Bmatrix} \underline{B}'_{m_i} \\ \underline{B}'_{f_i} \\ \underline{B}'_{c_i} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $\underline{B}'_{m_i}$ ,  $\underline{B}'_{f_i}$ ,  $\underline{B}'_{c_i}$  são as matrizes das relações deformações generalizadas – deslocamentos, locais, de membrana, flexão e cortante de um nó  $i$ , dadas por

$$\underline{B}'_{m_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\underline{B}'_{f_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y'} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y'} & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\underline{B}'_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.2.3 Obtenção da Matriz de Rigidez Local

Aplicando o PTV ao domínio de um elemento obtém-se

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \underline{\hat{\varepsilon}}'^T \underline{\hat{\sigma}}' dA = \iint_{A^{(e)}} \delta \underline{u}'^T \underline{t}' dA + \left[ \delta \underline{d}'^{(e)} \right]^T \underline{p}'^{(e)} \quad (3.11)$$

onde

$$\underline{t}' = \begin{Bmatrix} t_{x'} \\ t_{y'} \\ t_{z'} \\ m_{x'} \\ m_{y'} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

é o vetor de forças distribuídas sobre a superfície do elemento, sendo  $t_{x'}$ ,  $t_{y'}$ ,  $t_{z'}$  as forças distribuídas atuando nas direções locais  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , respectivamente, e  $m_{x'}$ ,  $m_{y'}$  os momentos distribuídos contidos nos planos  $x'z'$  e  $y'z'$ , respectivamente, e

$$\underline{p}'^{(e)} = \begin{Bmatrix} p_1'^{(e)} \\ \vdots \\ p_n'^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

é o vetor de forças nodais com

$$\underline{p}_i'^{(e)} = \begin{Bmatrix} p_{x'_i} \\ p_{y'_i} \\ p_{z'_i} \\ m_{x'_i} \\ m_{y'_i} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

sendo  $p_{x'_i}$ ,  $p_{y'_i}$ ,  $p_{z'_i}$  as forças pontuais que atuam no nó  $i$  do elemento segundo as direções  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , respectivamente, e  $m_{x'_i}$ ,  $m_{y'_i}$  os momentos nodais contidos nos planos  $x'z'$  e  $y'z'$ .

A equação matricial de equilíbrio de um elemento isolado é dada por

$$\underline{p}'^{(e)} = \underline{K}'^{(e)} \underline{d}'^{(e)} - \underline{f}'^{(e)} \quad (3.15)$$

onde a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais equivalentes do elemento *em eixos locais* são

$$\underline{K}'_{ij}{}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \underline{B}_i'^T \underline{\hat{D}}' \underline{B}_j' dx' dy' \quad (3.16)$$

$$\underline{f}'_i{}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \underline{N}'_i{}^T \underline{t}' dx' dy' \quad (3.17)$$

Em (3.17) considerou-se somente a atuação de forças distribuídas sobre a superfície do elemento.

Desenvolvendo-se a expressão (3.16), fazendo uso de (2.12) e (3.7), obtém-se

$$\begin{aligned} \underline{K}'_{ij}{}^{(e)} &= \iint_{A^{(e)}} [\underline{B}'_{mi}{}^T, \underline{B}'_{fi}{}^T, \underline{B}'_{ci}{}^T] \begin{bmatrix} \hat{\underline{D}}'_{m} & \hat{\underline{D}}'_{mf} & 0 \\ \hat{\underline{D}}'_{mf} & \hat{\underline{D}}'_{f} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\underline{D}}'_{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{B}'_{mj} \\ \underline{B}'_{fj} \\ \underline{B}'_{cj} \end{Bmatrix} dx' dy' \\ &= \underline{K}'_{mij}{}^{(e)} + \underline{K}'_{fij}{}^{(e)} + \underline{K}'_{cij}{}^{(e)} + \underline{K}'_{mfij}{}^{(e)} + \underline{K}'_{fmij}{}^{(e)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{K}'_{mij}{}^{(e)} &= \iint_{A^{(e)}} \underline{B}'_{mi}{}^T \hat{\underline{D}}'_{m} \underline{B}'_{mj} dx' dy' \\ \underline{K}'_{fij}{}^{(e)} &= \iint_{A^{(e)}} \underline{B}'_{fi}{}^T \hat{\underline{D}}'_{f} \underline{B}'_{fj} dx' dy' \\ \underline{K}'_{cij}{}^{(e)} &= \iint_{A^{(e)}} \underline{B}'_{ci}{}^T \hat{\underline{D}}'_{c} \underline{B}'_{cj} dx' dy' \\ \underline{K}'_{mfij}{}^{(e)} &= \iint_{A^{(e)}} \underline{B}'_{mi}{}^T \hat{\underline{D}}'_{mf} \underline{B}'_{fj} dx' dy' = \left[ \underline{K}'_{fmij}{}^{(e)} \right]^T \end{aligned} \quad (3.19)$$

são, respectivamente, as matrizes de rigidez de membrana, flexão, cortante e acoplamento membrana-flexão em eixos locais.

Sabe-se que  $\hat{\underline{D}}'_{mf}$  é nula quando o material é homogêneo e está distribuído simetricamente em relação ao plano médio da casca. Dessa forma, as matrizes de acoplamento membrana flexão,  $\underline{K}'_{mfij}{}^{(e)}$  e  $\underline{K}'_{fmij}{}^{(e)}$ , também se anulam. Assim, as matrizes de rigidez de membrana, flexão e cortante do elemento em eixos locais, quando diretamente somadas, contribuem de forma desacoplada para a obtenção da matriz de rigidez total local do elemento de casca, de acordo com a seguinte equação

$$\underline{K}'_{ij}{}^{(e)}{}_{(5 \times 5)} = \begin{bmatrix} (\underline{K}'_{EPT})_{ij}{}_{(2 \times 2)} & \underline{0}_{(2 \times 3)} \\ \underline{0}_{(3 \times 2)} & (\underline{K}'_{PLACA})_{ij}{}_{(3 \times 3)} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u' \\ \leftarrow v' \\ \leftarrow w' \\ \leftarrow \theta'_x \\ \leftarrow \theta'_y \end{array} \quad (3.20)$$

onde,  $\underline{K}_{EPT}^{(e)}$  e  $\underline{K}_{PLACA}^{(e)}$  são as matrizes de rigidez de Estado Plano de Tensões e de Placa, respectivamente.

### 3.3 Formulação de Elementos Finitos de Casca Planos de Kirchhoff

Tal como ocorre no caso de flexão de placas de Kirchhoff, a presença de derivadas de segunda ordem nas expressões das integrais do PTV impõe a utilização de elementos de classe  $C_1$  para discretizar o campo de deslocamentos de flexão. Porém, para os deslocamentos no plano ( $u'$  e  $v'$ ) pode-se utilizar elementos de classe  $C_0$  para estado plano de tensões.

Por simplicidade, para discretizar os campos de deslocamentos de membrana e flexão, supõe-se que sejam utilizados elementos de mesma tipologia e com igual número de nós. Neste caso, o campo de deslocamentos locais se expressa como

$$\underline{u}' = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \underline{d}_i^{(e)} = [\underline{N}_1, \underline{N}_2, \dots, \underline{N}_n] \begin{Bmatrix} \underline{d}_1^{(e)} \\ \underline{d}_2^{(e)} \\ \vdots \\ \underline{d}_n^{(e)} \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{d}^{(e)} \quad (3.21)$$

onde,

$$\underline{u}' = \begin{Bmatrix} u'_o \\ v'_o \\ w'_o \\ \frac{\partial w'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'_o}{\partial y'} \end{Bmatrix}, \quad \underline{d}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u'_{o_i} \\ v'_{o_i} \\ w'_{o_i} \\ \left(\frac{\partial w'_{o_i}}{\partial x'}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w'_{o_i}}{\partial y'}\right)_i \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

e

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \vdots & P_i & \bar{P}_i & \bar{\bar{P}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}_i^m & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{N}_i^f \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Em (3.23),  $\underline{N}_i^m$  é a matriz de funções de forma de classe  $C_0$  do nó  $i$  do elemento de estado plano de tensões utilizado. Por outro lado,  $\underline{N}_i^f$  é a matriz de funções de forma de classe  $C_1$  do nó  $i$  (Polinômios  $P_i$ ,  $\bar{P}_i$  e  $\overline{\bar{P}}_i$ ) correspondente ao elemento de placa de Kirchhoff empregado. Do vetor de deformações generalizadas locais, pode-se deduzir a expressão da matriz  $\underline{B}'$  correspondente, como

$$\underline{B}' = [\underline{B}'_1, \underline{B}'_2, \dots, \underline{B}'_n] \quad \text{com} \quad \underline{B}'_i = \left\{ \begin{array}{c} \underline{B}'_{mi} \\ \underline{B}'_{fi} \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

onde  $\underline{B}'_{mi}$  é idêntica à equação (3.8) e, para  $\underline{B}'_{fi}$ , de acordo com a equação (2.21), tem-se

$$\underline{B}'_{fi} = \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -\frac{\partial^2 P_i}{\partial x'^2} & -\frac{\partial^2 \bar{P}_i}{\partial x'^2} & -\frac{\partial^2 \overline{\bar{P}}_i}{\partial x'^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2 P_i}{\partial y'^2} & -\frac{\partial^2 \bar{P}_i}{\partial y'^2} & -\frac{\partial^2 \overline{\bar{P}}_i}{\partial y'^2} \\ 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 P_i}{\partial x' \partial y'} & -2\frac{\partial^2 \bar{P}_i}{\partial x' \partial y'} & -2\frac{\partial^2 \overline{\bar{P}}_i}{\partial x' \partial y'} \end{array} \right] \quad (3.25)$$

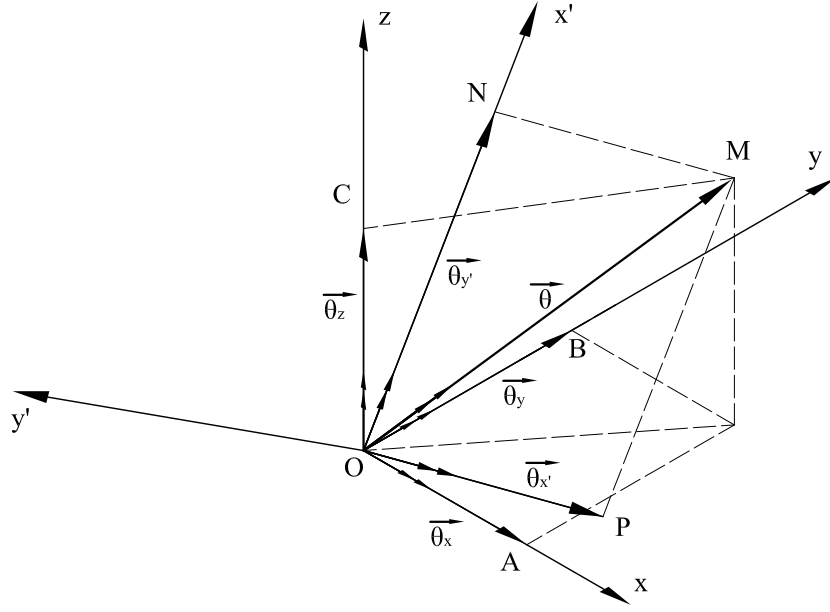
Daí, seguindo um processo similar ao da Seção 3.2, encontra-se a matriz de rigidez do elemento em eixos locais, como

$$\underline{K}'_{ij}{}^{(e)} = \underline{K}'_{mij}{}^{(e)} + \underline{K}'_{fij}{}^{(e)} + \underline{K}'_{mfij}{}^{(e)} + \underline{K}'_{fmij}{}^{(e)} \quad (3.26)$$

onde cada parcela é obtida pela respectiva integração dada nas equações (3.19).

### 3.4 Montagem das Equações Nodais de Equilíbrio

Antes da montagem das equações nodais de equilíbrio, é necessário converter as ações e deslocamentos das direções locais para as globais, como indicado na Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Exemplo de transformação das rotações locais  $(\theta_{x'}, \theta_{y'})$  e globais  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ .

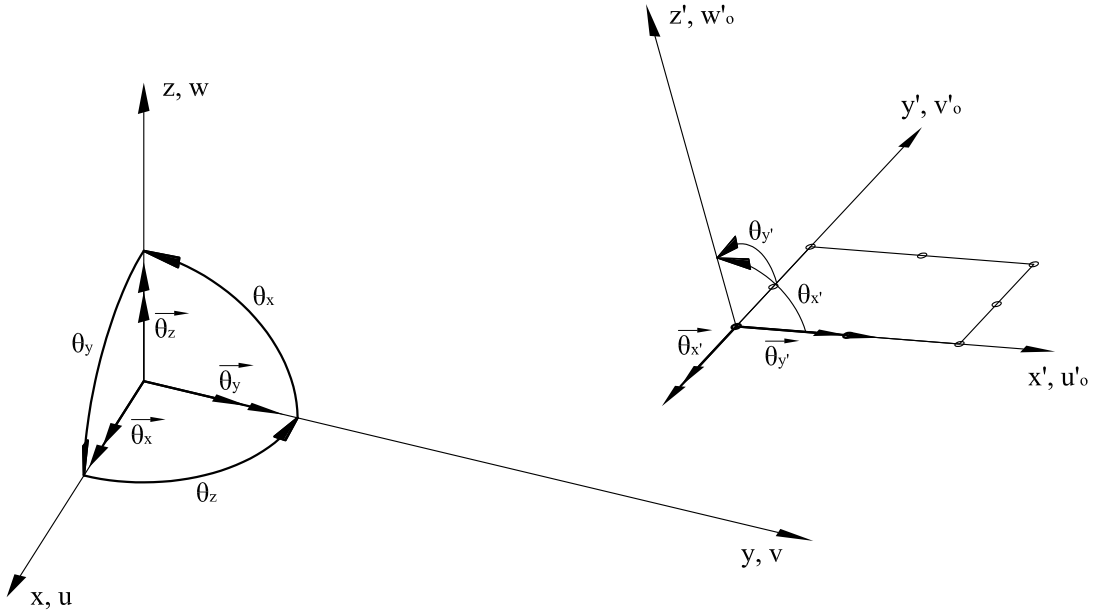
A relação entre as componentes locais e globais de deslocamentos e forças escreve-se como, considerando-se aqui o caso mais geral,

$$\underline{d}_i^{\prime(e)} = \underline{L}_i^{(e)} \underline{d}_i^{(e)} \quad , \quad \underline{f}_i^{\prime(e)} = \underline{L}_i^{(e)} \underline{f}_i^{(e)} \quad (3.27)$$

onde

$$\underline{d}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_{o_i} \\ v_{o_i} \\ w_{o_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{Bmatrix} \quad , \quad \underline{f}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_i} \\ f_{z_i} \\ m_{x_i} \\ m_{y_i} \\ m_{z_i} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

são os vetores de deslocamentos e forças referidos ao sistema global de coordenadas, respectivamente, em que se incluiu uma terceira rotação  $\theta_z$  para se levar em conta a possibilidade da transformação das rotações  $\theta_{x'}$  e  $\theta_{y'}$  possuir componentes sobre o giro global  $z$  (Figuras 3.3 e 3.4). O mesmo ocorre com o momento  $m_z$ .



**Figura 3.4:** Convenção de sinais das rotações locais e globais.

Em (3.27),  $\underline{L}_i^{(e)}$  é a matriz de transformação de deslocamentos e forças nodais de eixos globais para locais. Por se tratar de elemento plano, esta matriz é constante em todos os seus nós. Das regras de matemática vetorial pode-se deduzir que

$$\underline{L}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \underline{\lambda}_i^{(e)} & \underline{0} \\ \underline{0} & \hat{\underline{\lambda}}_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde,

$$\underline{\lambda}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}^{(e)} \quad (3.30)$$

é a matriz de transformação de deslocamentos nodais, em que  $\lambda_{x'x}$  é o cosseno diretor do ângulo que o eixo  $x'$  faz com o  $x$ , etc. Por outro lado, levando-se em conta a convenção de sinais dos vetores de rotações locais e globais da Figura 3.4, obtém-se a matriz de transformação de rotações nodais  $\hat{\underline{\lambda}}_i^{(e)}$  como

$$\hat{\underline{\lambda}}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} -\lambda_{y'x} & -\lambda_{y'y} & -\lambda_{y'z} \\ \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \end{bmatrix}^{(e)} \quad (3.31)$$





como geometria da estrutura, o tipo de elemento, sua forma e a experiência do projetista.

A seguir, será apresentado um dos procedimentos mais utilizados para se definir os eixos locais de um elemento de casca, que é a sua obtenção através da intersecção do elemento de casca com um plano coordenado, e que será utilizado como padrão do **INSANE**. Neste procedimento, define-se um dos eixos  $x'$ ,  $y'$  ou  $z'$  como intersecção do plano do elemento e qualquer um dos planos coordenados globais  $xy$ ,  $xz$  ou  $yz$ . Neste caso, foi adotado o plano coordenado  $xy$  e o eixo  $x'$  é a intersecção do elemento com este plano.

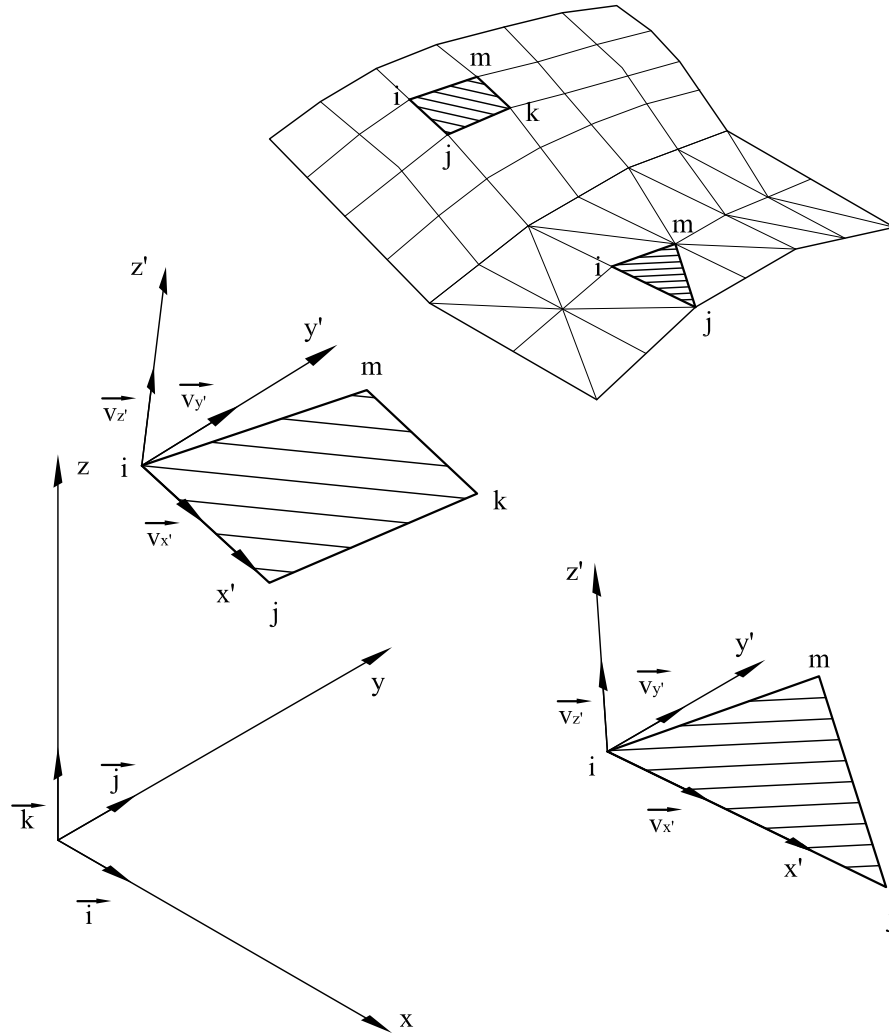
### 3.5.1 Obtenção dos Eixos Locais por Intersecção com o Plano Coordenado $XY$

Primeiramente, é necessário calcular os cossenos diretores da direção normal  $z'$  a partir do produto vetorial de dois lados quaisquer do elemento ( $ij$  e  $im$  da Figura 3.5), como a seguir:

$$\underline{v}_{z'}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \lambda_{z'x} \\ \lambda_{z'y} \\ \lambda_{z'z} \end{Bmatrix}^{(e)} = \frac{1}{|\underline{V}_{ij}^{(e)} \times \underline{V}_{im}^{(e)}|} \left( \underline{V}_{ij}^{(e)} \times \underline{V}_{im}^{(e)} \right) = \frac{1}{d_{z'}^{(e)}} \begin{Bmatrix} y_{ij}z_{im} - z_{ij}y_{im} \\ x_{im}z_{ij} - z_{im}x_{ij} \\ x_{ij}y_{im} - y_{ij}x_{im} \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (3.36)$$

com

$$d_{z'}^{(e)} = \sqrt{[(y_{ij}z_{im} - z_{ij}y_{im})^2 + (x_{im}z_{ij} - z_{im}x_{ij})^2 + (x_{ij}y_{im} - y_{ij}x_{im})^2]^{(e)}}$$



**Figura 3.5:** Definição dos lados  $ij$  e  $im$  e dos vetores  $v_{x'}$ ,  $v_{y'}$  e  $v_{z'}$ .

A seguir, define-se o eixo  $x'$  como a intersecção do elemento com o plano  $xy$  (Figura 3.6). Assim, a projeção de  $x'$  sobre o eixo  $z$  é nula e o vetor de cossenos diretores  $\underline{v}_{x'}^{(e)}$  fica como a seguir:

$$\underline{v}_{x'}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ 0 \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (3.37)$$

que, por ser unitário, tem-se

$$(\lambda_{x'x}^{(e)})^2 + (\lambda_{x'y}^{(e)})^2 = 1 \quad (3.38)$$

Como os vetores  $\underline{v}_{x'}^{(e)}$  e  $\underline{v}_{z'}^{(e)}$  são perpendiculares,

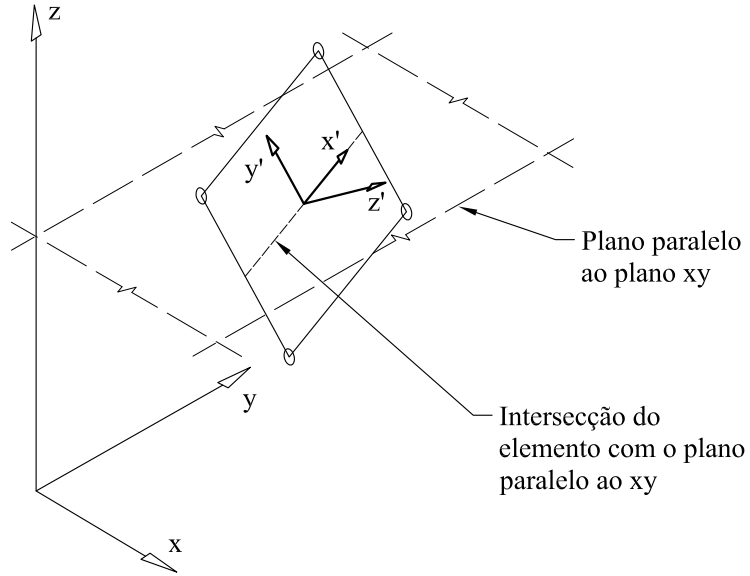
$$\lambda_{x'x}^{(e)}\lambda_{z'x}^{(e)} + \lambda_{x'y}^{(e)}\lambda_{z'y}^{(e)} = 0 \quad (3.39)$$

De (3.38) e (3.39) obtém-se

$$\lambda_{x'x}^{(e)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_{z'x}^{(e)}}{\lambda_{z'y}^{(e)}}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \lambda_{x'y}^{(e)} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_{z'x}^{(e)}}{\lambda_{z'y}^{(e)}}\right)^2}} \quad (3.40)$$

O vetor  $\underline{v}_{y'}^{(e)}$  se obtém como a seguir

$$\underline{v}_{y'}^{(e)} = \frac{\underline{v}_{z'}^{(e)} \times \underline{v}_{x'}^{(e)}}{|\underline{v}_{z'}^{(e)} \times \underline{v}_{x'}^{(e)}|} = \frac{1}{d_{z'}^{(e)}} \begin{Bmatrix} y_{ij}z_{im} - z_{ij}y_{im} \\ x_{im}z_{ij} - z_{im}x_{ij} \\ x_{ij}y_{im} - y_{ij}x_{im} \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (3.41)$$



**Figura 3.6:** Definição do eixo local  $x'$  como a intersecção do elemento com um plano paralelo ao plano  $xy$ .

Pode-se considerar, então, que existe um eixo local definido para cada elemento de casca. Também deve-se considerar, como exceção, o elemento de casca que se encontra sobre o plano  $xy$ . Neste caso, a intersecção do elemento com o plano  $xz$  é o próprio elemento, devendo-se considerar as direções e sentidos dos eixos locais coincidentes com os eixos globais.

## 3.6 Elementos Baseados na Teoria de Reissner-Mindlin - Bloqueio da Solução

### 3.6.1 Conceito de Bloqueio por Efeito de Cortante

Sabe-se que uma das deficiências dos elementos baseados na teoria de placas de Reissner-Mindlin é a superestimativa da rigidez (bloqueio) da solução ao se utilizar elementos de pequena espessura, assim como ocorre com os elementos de viga de Timoshenko. Em ambos os casos, a explicação do fenômeno é a incapacidade da aproximação de deformação por cortante de reproduzir no limite, para quando a espessura tende a zero, as condições de deformação de cortante nula. Entre os vários métodos para evitar o efeito deste bloqueio, destacam-se: a integração reduzida/seletiva dos termos de cortante da matriz de rigidez, e os baseados em técnicas de deformação de cortante imposta.

Conforme discutido por Saliba (2007), considerando-se a matriz de rigidez de um elemento de casca plano de espessura constante  $t$  e desprezando-se o acoplamento local membrana/flexão, a equação de equilíbrio do elemento (equação (3.15)) pode ser escrita, como

$$\left[ t\underline{K}_m^{(e)} + t^3\underline{K}_f^{(e)} + t\underline{K}_c^{(e)} \right] \underline{d}'^{(e)} - \underline{f}'^{(e)} = \underline{p}'^{(e)} \quad (3.42)$$

Pode-se notar que a influência da espessura  $t$  na matriz de rigidez é da mesma ordem nos termos de membrana e de cortante. A equação (3.42) pode ser reescrita como

$$\left[ t^3\underline{K}_f^{(e)} + t \left( \underline{K}_c^{(e)} + \underline{K}_m^{(e)} \right) \right] \underline{d}'^{(e)} - \underline{f}'^{(e)} = \underline{p}'^{(e)} \quad (3.43)$$

A equação (3.43) está referida ao sistema local  $e$ , assim, se todos os elementos fossem coplanares, a equação global de equilíbrio, supondo que somente atuassem cargas de flexão  $\underline{f}'_f^{(e)}$ , poderia ser escrita como

$$\left[ t^3\underline{K}'_f + t\underline{K}'_c \right] \underline{d}'_f = \underline{f}'_f \quad \text{e} \quad \underline{d}'_m = \underline{0} \quad (3.44)$$

e se atuassem somente cargas contidas no plano do elemento

$$t\underline{K}'_m \underline{d}'_m = \underline{f}'_m \quad \text{e} \quad \underline{d}'_f = \underline{0} \quad (3.45)$$

sendo

$$\underline{d}'_{f_i} = \left[ w'_{o_i} \quad \theta'_{x'_i} \quad \theta'_{y'_i} \right]^T \quad \text{e} \quad \underline{d}'_{m_i} = \left[ u'_{o_i} \quad v'_{o_i} \right]^T \quad (3.46)$$

Da equação (3.44), isolando os fatores comuns  $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  e  $Gt$  em  $\underline{K}'_f$  e  $\underline{K}'_c$ , respectivamente, tem-se

$$\left( \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \overline{K}'_f + Gt \overline{K}'_c \right) \underline{d}' = \underline{f}' \quad (3.47)$$

Mas a solução analítica de Kirchhoff é inversamente proporcional a  $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ . Dividindo por este coeficiente a equação anterior, obtém-se

$$\left( \overline{K}'_f + \alpha \overline{K}'_c \right) \underline{d}' = \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} \underline{f}' = O(\underline{d}'_k) \quad (3.48a)$$

com

$$\alpha = \frac{12(1-\nu^2)G}{Et^2} \quad (3.48b)$$

onde  $O(\underline{d}'_k)$  representa a ordem de grandeza da solução analítica de Kirchhoff.

Observando esta equação vemos que para  $t \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ . Assim, ao tornar a placa mais fina, os termos de cortante vão progressivamente dominando a solução, de forma que a contribuição de  $\overline{K}'_f$  pode se depreciar. Assim, quando  $t \rightarrow 0$  a equação (3.48a) tende a

$$\alpha \overline{K}'_c \underline{d}' = O(\underline{d}'_k) \quad \text{e} \quad \overline{K}'_c \underline{d}' = \frac{1}{\alpha} O(\underline{d}'_k) = \underline{0} \quad (3.49)$$

Pode-se observar então que, no limite, para  $\alpha \rightarrow \infty$ , tem-se uma solução infinitamente mais rígida que a correspondente à teoria de placas delgadas de Kirchhoff, e a única forma de obter uma solução diferente da trivial é a matriz  $\overline{K}'_c$  ser singular.

Como discutido por Oñate (1995) e Saliba (2007), a técnica de imposição de deformações de cortante é a alternativa mais eficiente para solucionar o problema de bloqueio acima discutido.

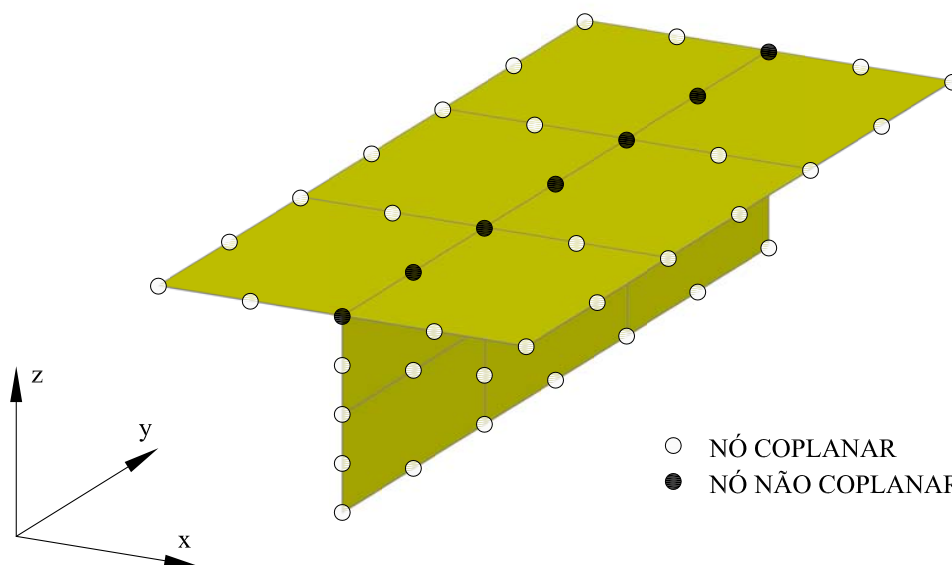
O objetivo da técnica de deformação de cisalhamento imposta é tornar nula a parcela de deformação proveniente dos esforços cisalhantes, uma vez que, ao anular esta parcela, a teoria de Reissner-Mindlin se iguala à de Kirchhoff. Desta maneira, espera-se evitar o bloqueio da solução integrando de forma completa a matriz de rigidez, uma vez que este fenômeno não ocorre na teoria de Kirchhoff (Saliba, 2007).

“(...) Uma das maneiras de tornar o elemento livre de travamento ou torná-lo menos suscetível a esse fenômeno é substituir o campo de deformações de esforço cortante, definido pelos campos de deslocamentos cinematicamente inconsistentes, por outro que seja consistente ou menos inconsistente. Diz-se, então, que o elemento resultante tem campo assumido de deformações” (Soriano e Lima, 1999).

Para se evitar o problema de bloqueio da solução por efeito de cortante é necessário obter a matriz de deformação de cortante transversal substitutiva. Em Saliba (2007) podem ser encontrados os passos para a obtenção da matriz de rigidez substitutiva dos termos de cortante para os diversos elementos de placa implementados no **INSANE**.

### 3.7 Tratamento de Nós Coplanares

Se todos os elementos que contém um nó estão no mesmo plano, diz-se que o nó é *coplanar* (Figura 3.7). Neste caso, todos os vetores  $\theta_{x'_i}$  e  $\theta_{y'_i}$  estão contidos nesse plano comum. Escolhendo para sistema global o sistema local  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , a projeção dos giros sobre o eixo (global)  $z'$  se anula, sendo nulo o correspondente termo diagonal da matriz de rigidez, o que dificulta a solução matemática do sistema de equações globais.



**Figura 3.7:** Exemplos de nós coplanares e não coplanares.

Desta discussão pode-se deduzir que, a montagem da matriz de rigidez de um elemento com nós coplanares referidos a um sistema global qualquer resulta em um sistema de equações que, embora pareça correto, tem um termo diagonal nulo, uma vez que as três equações correspondentes aos giros de cada nó coplanar não são independentes.

Existem diversas maneiras de tratar o problema dos nós coplanares. Entre as maneiras de tratar esse problema destacam-se: a adição de rigidez rotacional fictícia e a utilização de elementos finitos de membrana que incorporam uma rotação adicional  $\theta_z$  (Ibrahimbegovic et al., 1990). A adição de rigidez rotacional fictícia deve ser tratada no pré-processador do programa, e o mesmo será bastante exigido, já que ele deverá ser capaz de identificar os nós coplanares e adicionar a rigidez fictícia somente a eles. No presente trabalho, este problema não foi tratado, deixando a cargo do usuário a adição de molas rotacionais nos nós coplanares, com rigidez da ordem de grandeza do módulo de elasticidade do elemento multiplicado pelo seu volume, como sugerido por Zienkiewicz (1979). Deve-se salientar que a rigidez fictícia deve ser aplicada somente aos nós coplanares, já que a adição da mesma em todos os nós não resolve o problema.



# Capítulo 4

## IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

### 4.1 Introdução

O **INSANE** (INteractive Structural ANalysis Environment) é um projeto de software livre, em desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. O principal objetivo deste projeto é disponibilizar recursos de software para fomentar a pesquisa na área de métodos numéricos e computacionais aplicados à Engenharia. Desenvolvido em linguagem *JAVA*, segundo a metodologia de *Programação Orientada a Objetos*, o **INSANE** é um sistema segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade.

O sistema **INSANE** possui três grandes aplicações: um pré-processador, um processador e um pós-processador. O pré-processador disponibiliza uma interface com recursos que possibilitam ao usuário descrever o problema de forma gráfica e amigável. O pós-processador possui recursos semelhantes ao pré-processador, que possibilitam a visualização dos resultados obtidos pelo processador. O processador é o núcleo numérico do **INSANE**. Este tem a função de obter os resultados dos modelos discretos do **MEF**.

Este trabalho se concentra na implementação de código para a expansão do processador (ou núcleo numérico) do **INSANE**, de forma a torná-lo capaz de solucionar modelos formados por elementos finitos de cascas planas.

Assim, será feita uma apresentação deste núcleo com posterior identificação das classes que foram modificadas e implementadas.

## 4.2 O Núcleo Numérico do Sistema INSANE

Antes que possa ser feita a apresentação do Núcleo Numérico do Sistema **INSANE**, é necessário fazer uma pequena explanação sobre alguns conceitos básicos da Programação Orientada a Objetos (POO). O primeiro conceito a ser explicado é o conceito de objeto. Segundo Eckel (2000), um objeto pode ser pensado como uma variável especial, que armazena informações, mas ao qual se pode solicitar procedimentos a serem operados nele mesmo. Teoricamente, qualquer componente conceitual do problema que deve ser resolvido (cachorros, prédios, etc.) pode ser representado por um objeto no programa. Outro conceito fundamental é o conceito de “Tipo” ou seu sinônimo “Classe”. Cada objeto é uma instância de uma Classe. Por exemplo, os círculos, quadrados e triângulos podem ser pensados como pertencentes à classe das figuras geométricas.

Também é necessário entender os conceitos de *Herança*, *Classes Abstratas* e *Interface*. Segundo Germanio (2005), em POO é possível criar uma nova classe, denominada subclasse, a partir de uma classe já existente, dita superclasse, classe pai ou classe base. Esse processo, no qual os objetos da nova classe constituem um subgrupo da classe original, é denominado herança. Os objetos da subclasse devem possuir todos os atributos dos objetos da superclasse, mas podem possuir pequenas diferenças nesses atributos, bem como possuir atributos adicionais não existentes nos objetos da classe original. Legalmente, o objeto de uma subclasse deve ser invocável em todos os casos nos quais é possível se invocar um objeto da superclasse, mas a recíproca não é verdadeira. *Classes Abstratas* podem ser usadas para declarar métodos abstratos. A classe abstrata declara o método, mas não o implementa, ficando isso como uma obrigatoriedade para todas as classes que herdem da classe abstrata.

As classes abstratas não podem ser instanciadas. Esse recurso é útil quando um método é necessário a uma dada classe, mas é preferível delegar a sua implementação às suas subclasses mais especializadas. A *Interface* possui um mecanismo semelhante ao das classes abstratas, porém, todos os métodos declarados numa interface são abstratos. A interface não declara campos, o que é possível numa classe abstrata, e a implementação de uma interface não se dá pelo mecanismo de herança, podendo ser feito por qualquer classe. Outra diferença importante é que uma classe pode implementar qualquer número de interfaces, mas pode herdar apenas de uma única classe.

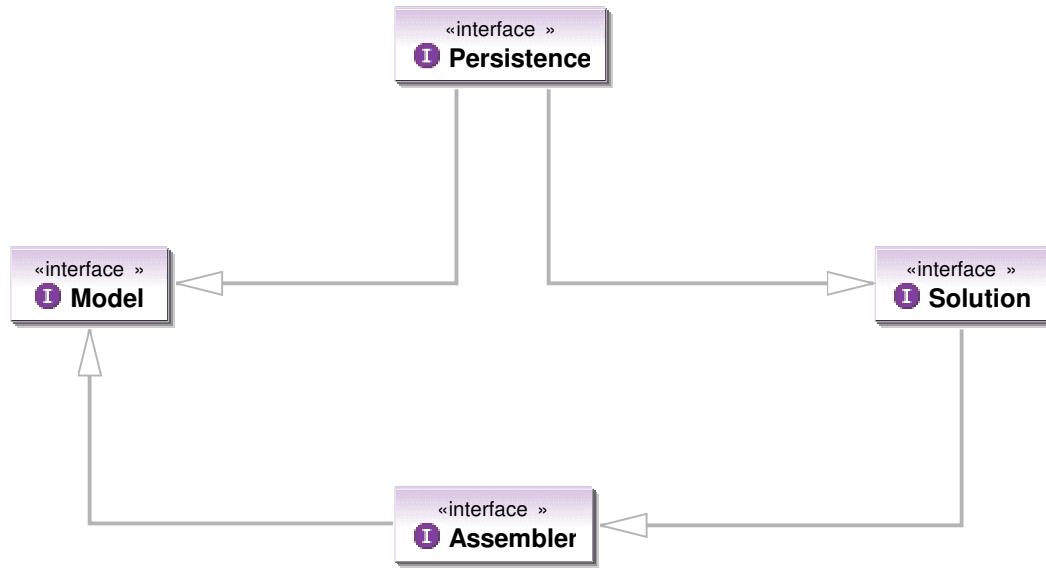
Desenvolvido e/ou modificado por diversos colaboradores como Almeida (2005), Germanio (2005), Fonseca (2006), Saliba (2007), Fonseca (2008) e Fuina (2009), o núcleo numérico do **INSANE** é composto por quatro interfaces principais: **Assembler**, **Solution**, **Model** e **Persistence**, organizadas de acordo com a Figura 4.1.

A interface **Assembler** faz a montagem do sistema de equações que representa o modelo discreto do problema a ser analisado, através da seguinte equação matricial de segunda ordem

$$\underline{A} \ddot{\underline{X}} + \underline{B} \dot{\underline{X}} + \underline{C} \underline{X} = \underline{R} - \underline{F} \quad (4.1)$$

onde  $\underline{X}$  é o vetor de variáveis de estado do problema,  $\dot{\underline{X}}$  sua primeira derivada temporal e  $\ddot{\underline{X}}$  sua segunda derivada temporal.  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  e  $\underline{C}$  são as matrizes dos coeficientes, e  $\underline{R}$  e  $\underline{F}$  são os termos independentes deste sistema de equações.

A interface **Solution** possui os recursos necessários para resolver o sistema de equações montado por **Assembler**. **Model** fornece as informações referentes ao modelo, necessárias para que **Assembler** possa montar suas equações.



**Figura 4.1:** Diagrama simplificado do núcleo numérico do INSANE.

### 4.2.1 Interface Assembler

Como visto, **Assembler** tem como função montar a equação (4.1), que para o método dos elementos finitos aplicado à análise estrutural estática, se reduz à

$$\underline{C} \underline{X} = \underline{R} - \underline{F} \quad (4.2)$$

que pode ser expandida em termos de sub-matrizes da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \underline{C}_{uu} & \underline{C}_{up} \\ \underline{C}_{pu} & \underline{C}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{X}_u \\ \underline{X}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{R}_p \\ \underline{R}_u \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underline{F}_p \\ \underline{F}_u \end{Bmatrix}, \text{ onde} \quad (4.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{R}_p \\ \underline{R}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{N}_p \\ \underline{N}_u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{E}_p \\ \underline{E}_u \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Nas equações acima,  $\underline{C}$  representa a matriz de rigidez do modelo,  $\underline{X}$  o vetor de deslocamentos nodais e  $\underline{F}$  o vetor de forças nodais equivalentes aos esforços internos. O vetor  $\underline{R}$  é composto de duas parcelas: o vetor  $\underline{N}$  e o vetor  $\underline{E}$  que são, respectivamente, o vetor de forças aplicadas diretamente nos nós e o vetor de forças nodais equivalentes às cargas aplicadas no corpo do elemento (cargas de corpo). Os índices  $u$  e  $p$  indicam se a sub-matriz se refere a valores desconhecidos ou prescritos, respectivamente.

A interface `Assembler` é implementada pela classe `FemAssembler` que tem como atributo um objeto do tipo `Model` (Figura 4.2) chamado `FemModel`. Este atributo é que fornece à `Assembler` as informações do modelo necessárias para montar a matriz de rigidez do mesmo. Esta figura também mostra alguns dos métodos desta interface que são capazes de fornecer, com a ajuda de `FemModel`, os elementos do sistema matricial da equação (4.2).

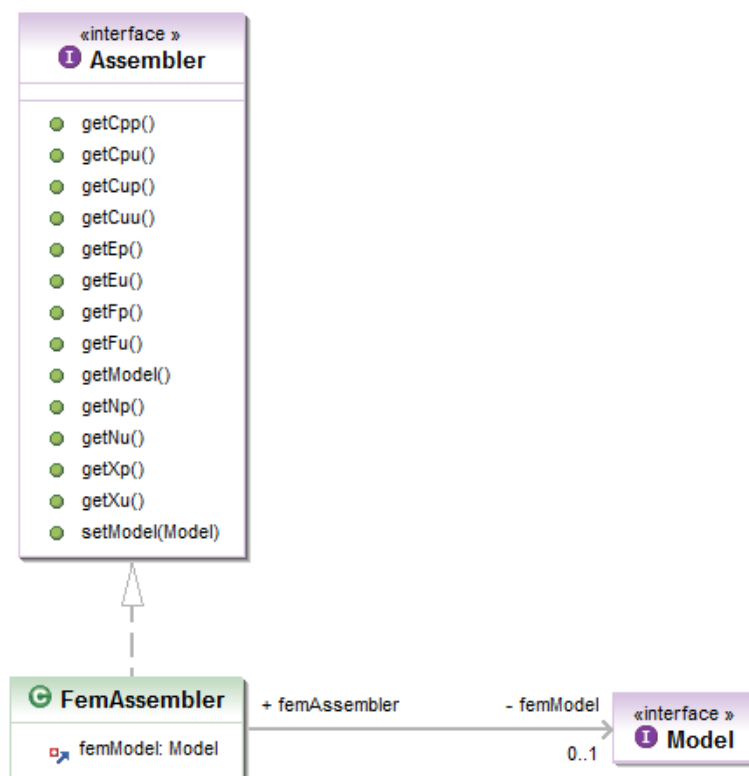


Figura 4.2: Diagrama de classe da interface `Assembler`.

### 4.2.2 Interface Solution

Uma vez montada a equação do problema, é necessário resolvê-la. Para isso utiliza-se a interface `Solution` (Figura 4.3). Uma das classes que a implementa é a classe `SteadyState`, responsável por resolver sistemas lineares do tipo da equação (4.2). A classe `SteadyState` possui um objeto do tipo `Assembler` e um objeto do

tipo `LinearEquationSystems`, que soluciona o sistema de equações algébricas lineares para o caso de um modelo estático linear. A solução do sistema é alcançada ao se chamar o método `execute()`. Outra classe que implementa `Solution` é a `EquilibriumPath`, utilizada em problemas estáticos não-lineares ou dinâmicos lineares e não-lineares, e não será aqui descrita por não se tratar do escopo deste projeto.

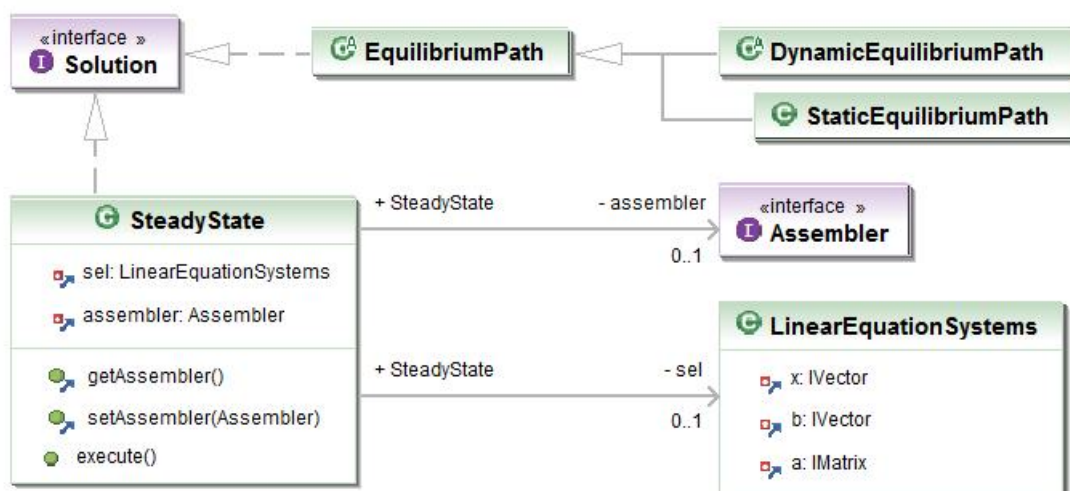


Figura 4.3: Diagrama de classe da interface `Solution`.

### 4.2.3 Interface Model

O modelo discreto a ser analisado é representado no núcleo numérico do sistema `INSANE` pela interface `Model` (Figura 4.4). Atualmente, a única classe que implementa `Model` é a classe `FemModel`, que representa o modelo de elementos finitos a ser analisado. Um objeto `FemModel` possui como atributos listas de nós, elementos, funções de forma, ordens de integração, casos de carga, combinações de carregamento, modelos de análise, materiais, modelos constitutivos e degenerações do modelo a ser analisado. Possui ainda um objeto do tipo `AnalysisModel` e um objeto do tipo `ProblemDriver`.

A lista de objetos do tipo `Node` da classe `FemModel` armazena informações dos nós como deslocamentos e forças. A classe `Element` representa os elementos finitos e é estendida pela classe `ParametricElement`, que representa os elementos finitos

paramétricos (Figura 4.5). Um objeto `Element` tem como atributo uma lista de objetos do tipo `ElementNode`, que representa sua incidência. Uma lista de objetos do tipo `Degeneration`, que representa seus pontos de integração e sua constituição geométrica e física, um objeto `AnalysisModel`, que representa seu modelo de análise, como será visto adiante, um objeto `Shape`, que representa sua função de forma, um objeto `ConstitutiveModel`, que representa seu modelo constitutivo, e um objeto `ProblemDriver`, que armazena informações relativas ao tipo de problema que o elemento modela.

A classe `ParametricElement` possui, além dos atributos de `Element`, um objeto `IntegrationOrder`, que representa a sua ordem de integração numérica. Em sua hierarquia, estão as classes que representam os elementos finitos paramétricos, separadas de acordo com sua geometria: elementos de barra, elementos planos triangulares e quadrilaterais, e elementos sólidos tetraédricos e hexaédricos. Estas sub-classes implementam os métodos relativos à integração numérica (`addDegenerations(Degeneration)` e `initDegenerations()`).

#### 4.2.4 Interface Problemdriver

A interface `ProblemDriver` (Figura 4.6) possui os métodos necessários para informar a `Assembler` as parcelas de cada elemento na equação do modelo. Em sua hierarquia são representados diversos tipos de problemas que podem ser resolvidos através de modelos discretos, sendo de interesse para este estudo os problemas de mecânica dos sólidos representados pela classe `SolidMech`, mais especificamente os problemas lineares desta classe.

#### 4.2.5 Interface Shape

A interface `Shape` possui os métodos responsáveis por fornecer as funções de forma e suas primeiras e segundas derivadas dos elementos finitos implementados no sistema `INSANE` (Figura 4.7).

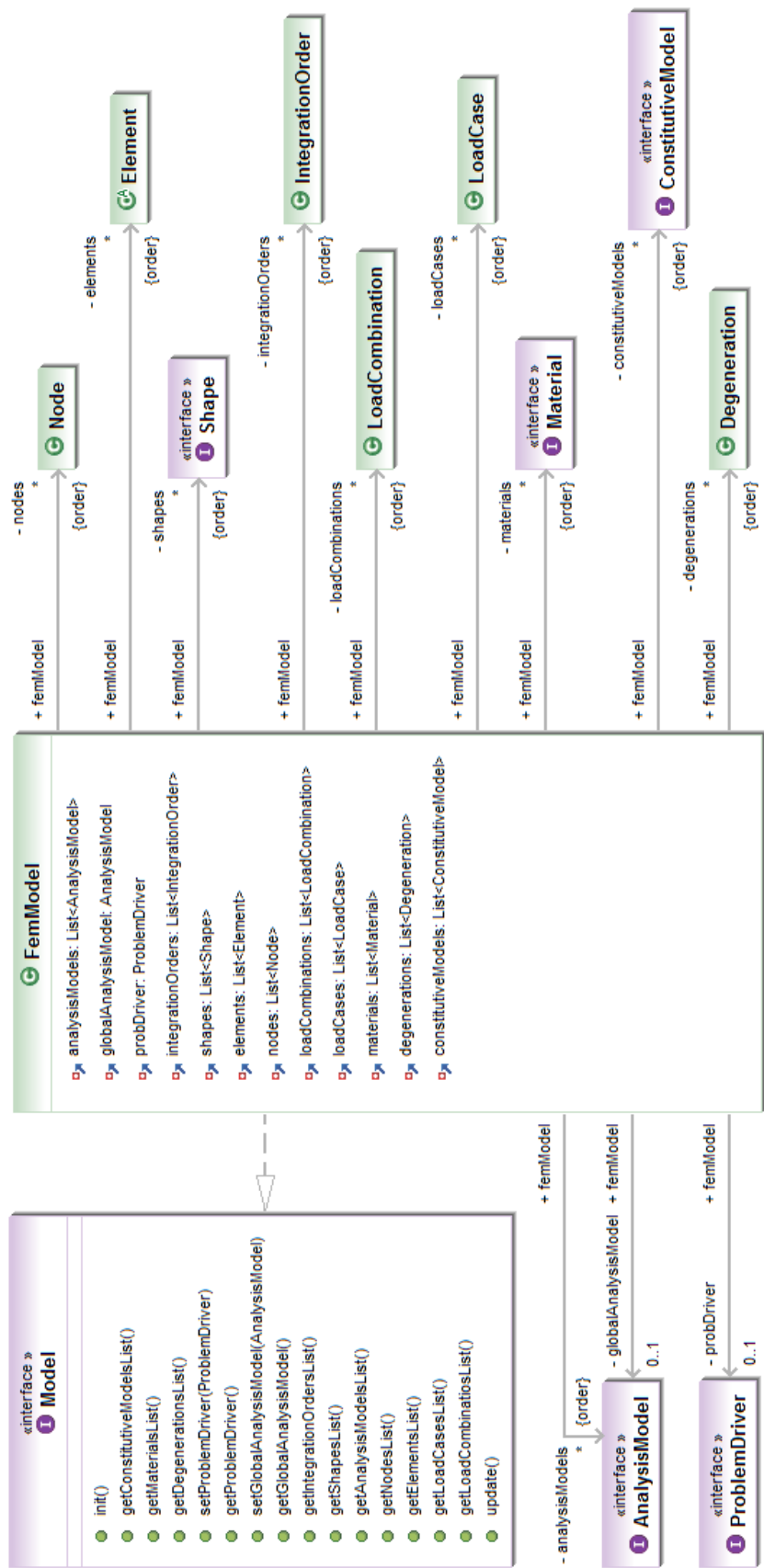


Figura 4.4: Diagrama de classe da interface Model.



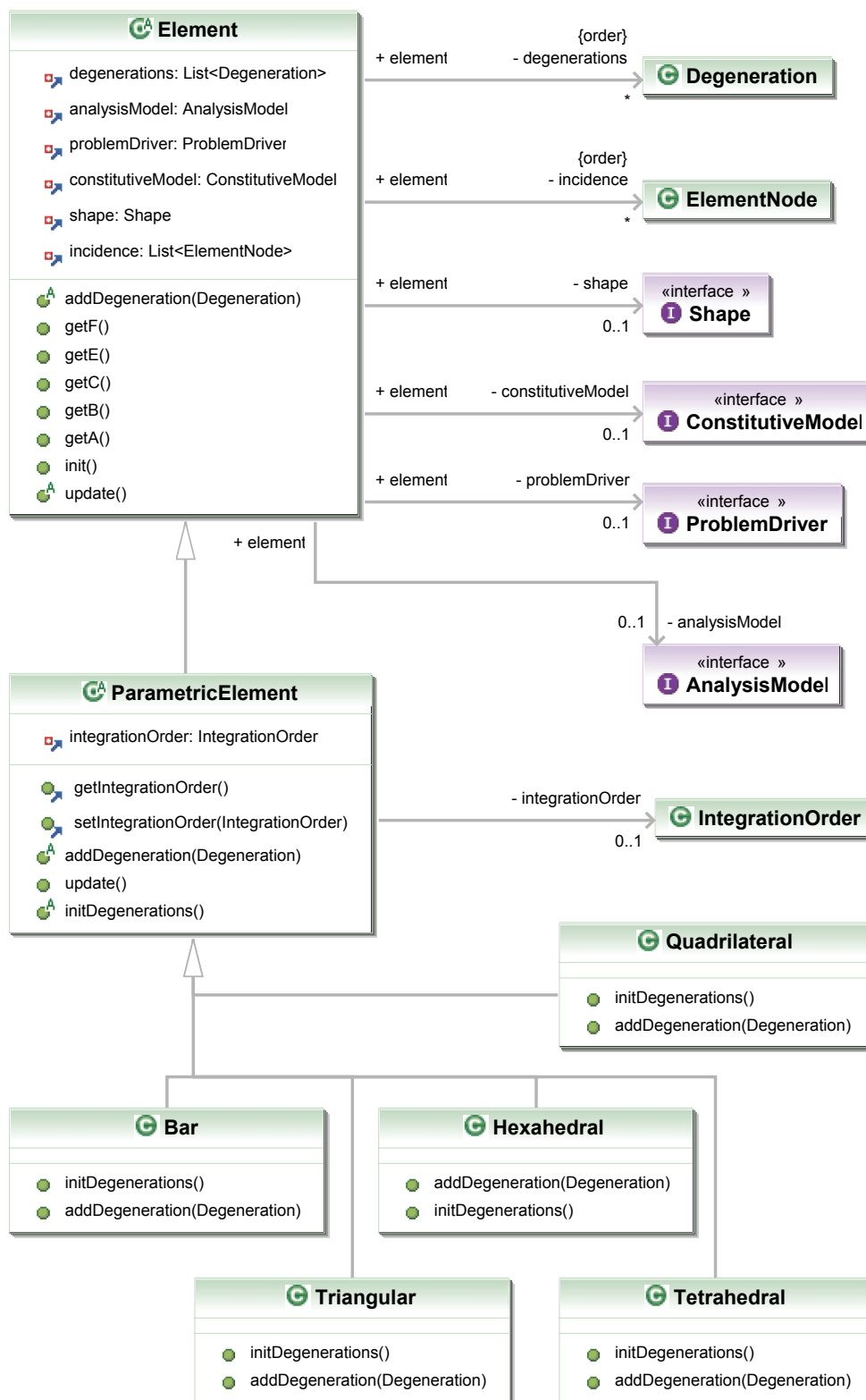


Figura 4.5: Diagrama de classe para Element.

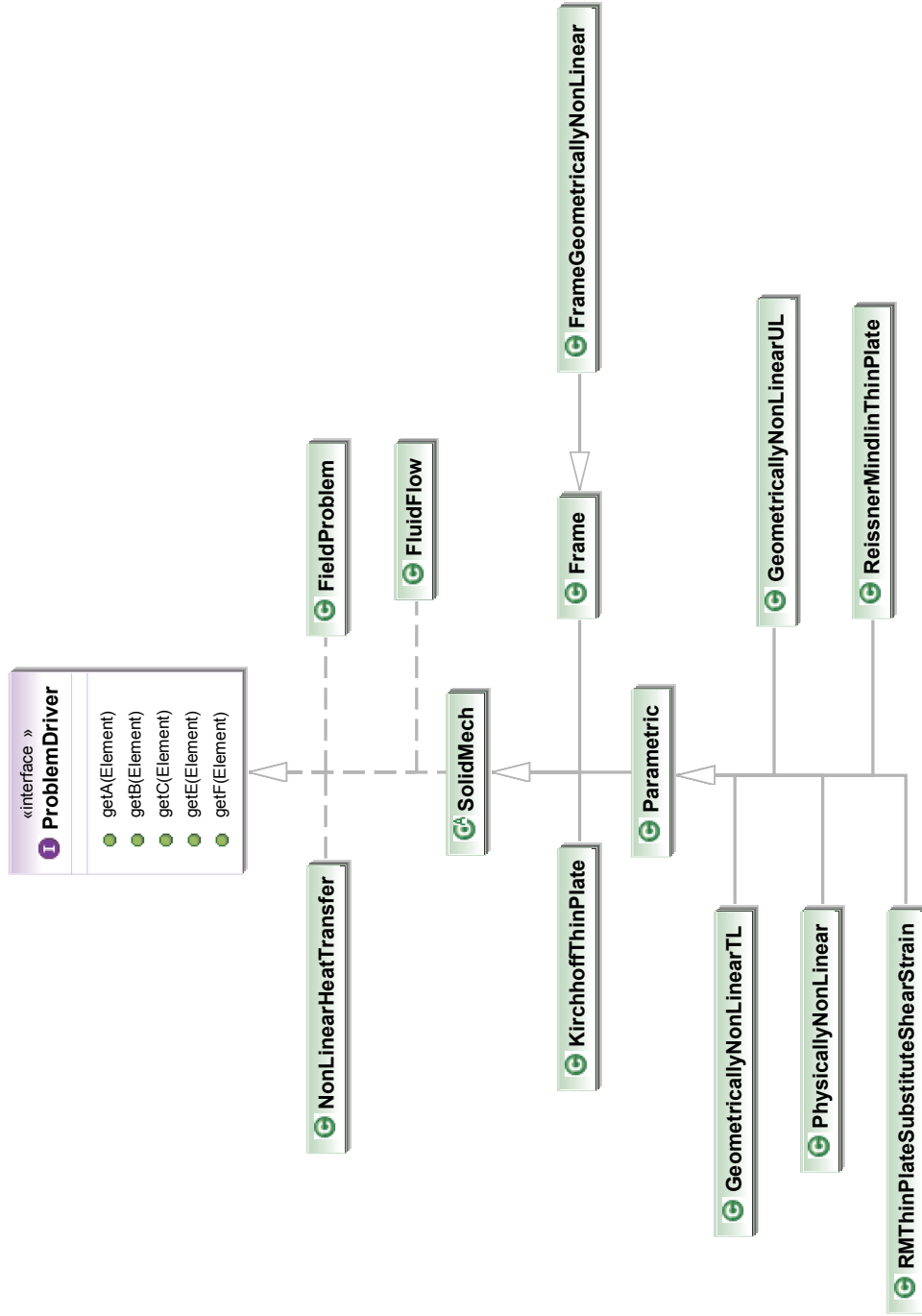


Figura 4.6: Diagrama de classe para ProblemDriver.

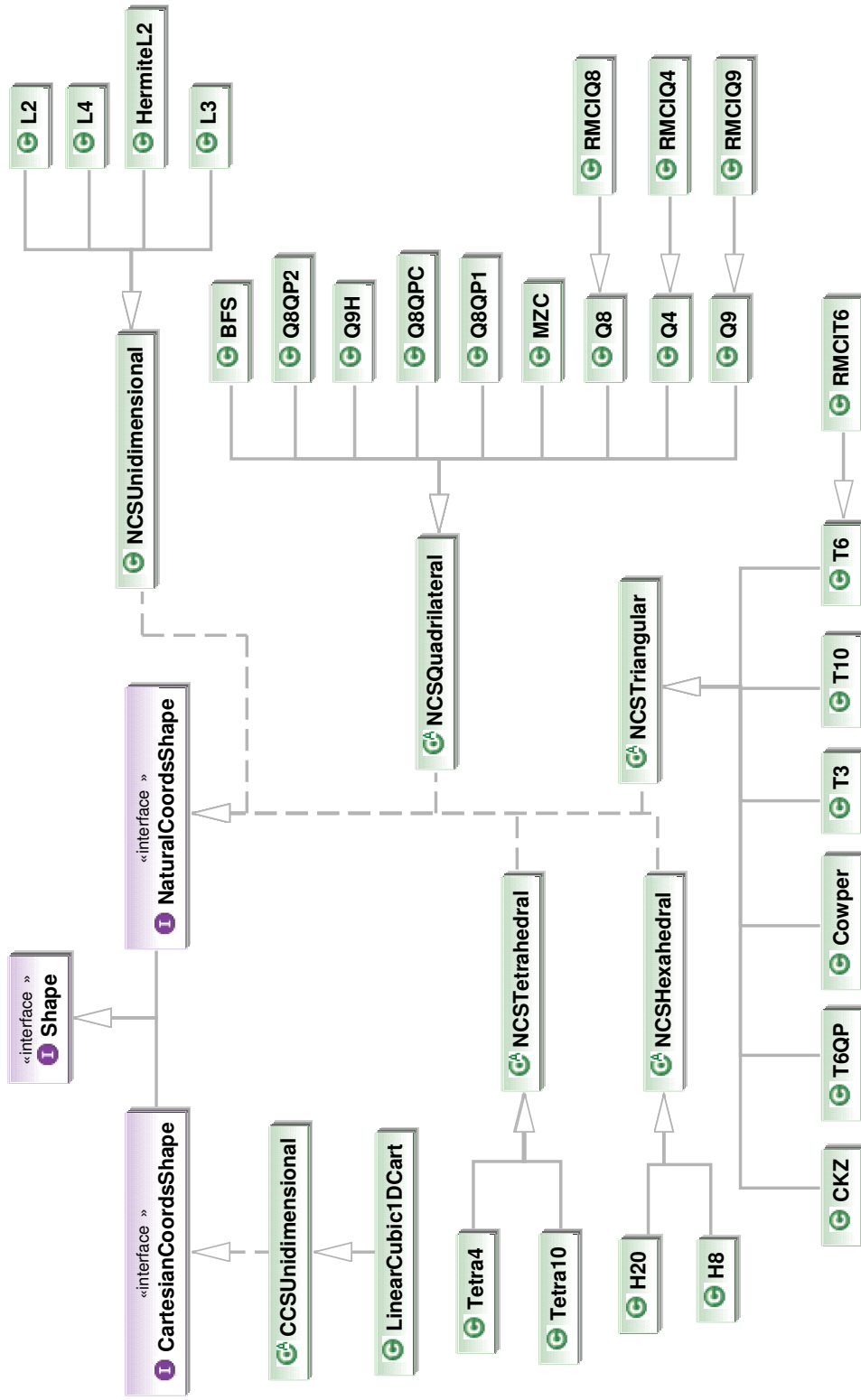
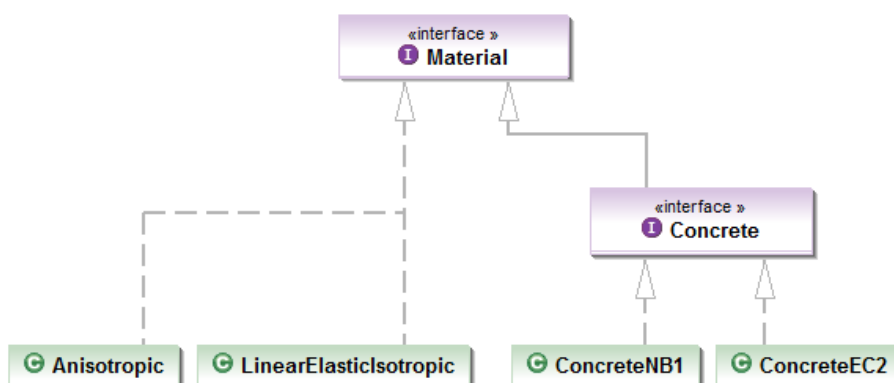


Figura 4.7: Diagrama de classe para a interface Shape.

## 4.2.6 Pacote Materialmedia

O pacote `MaterialMedia` contém as interfaces e classes necessárias para representar da forma mais geral possível a constituição geométrica e física dos elementos finitos. Este pacote é formado, entre outras, pelas seguintes interfaces e classes: interface `Material`, classe `MaterialPoint`, interface `ConstitutiveModel` e a classe `Degeneration`.

A interface `Material` (Figura 4.8) possui os métodos necessários para retornar as informações das diferentes propriedades dos materiais implementados no **INSANE**. A classe `ConcreteNB1`, por exemplo, armazena valores do  $fck$  e coeficiente de Poisson, entre outros.



**Figura 4.8:** Diagrama de classe para `Material`.

A classe `MaterialPoint` (Figura 4.9) que possui o objetivo de representar um ponto no meio material, tem como propriedades um *identificador*, um objeto `IPoint3d`, que o representa como um ponto no espaço, um objeto `IVolume`, que representa o seu volume infinitesimal, um objeto `Material` já descrito, um objeto `AnalysisModel` e um objeto `ConstitutiveModel`.

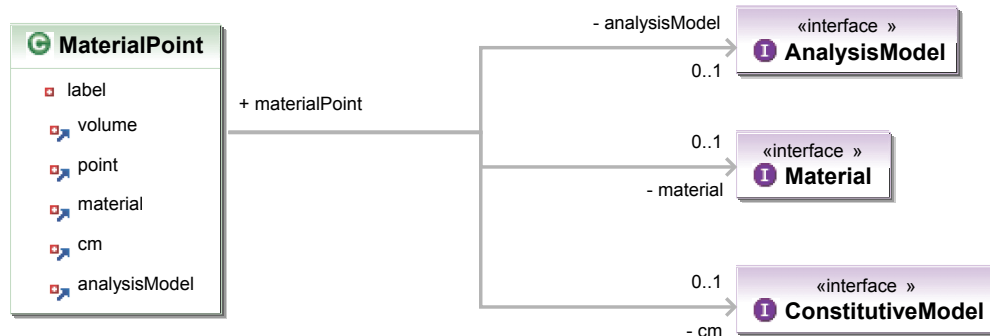


Figura 4.9: Diagrama de classe para a interface MaterialPoint.

ConstitutiveModel (Figura 4.10) é responsável por montar as matrizes constitutivas e calcular as tensões nas degenerações e nos pontos materiais através de informações de suas geometrias, materiais e modelos de análise.

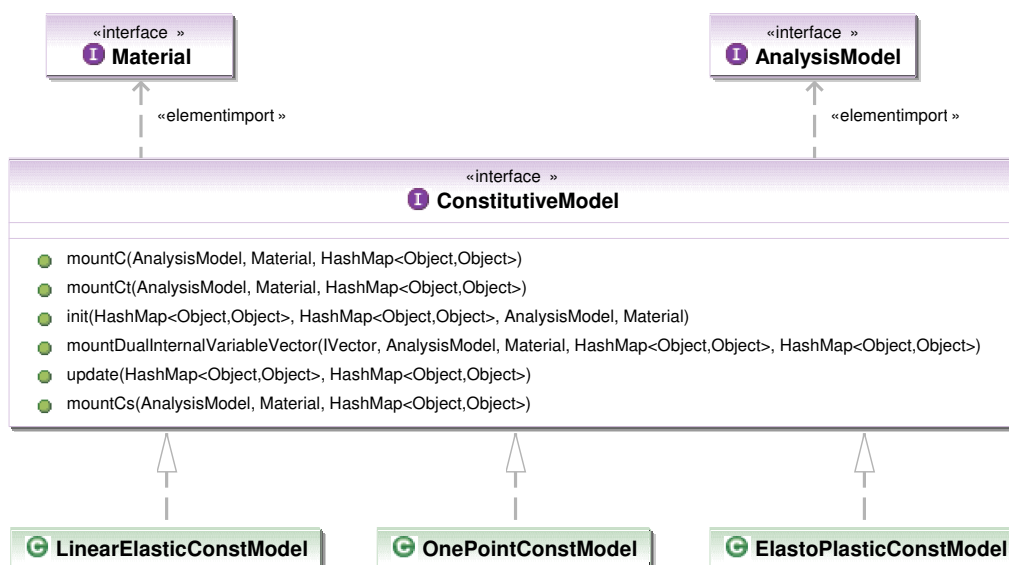


Figura 4.10: Diagrama de classe para a interface ConstitutiveModel.

A classe `Degeneration` representa a degeneração na geometria do elemento (Figura 4.11). Um objeto do tipo `Degeneration` possui uma lista de pontos materiais e um objeto do tipo `Representation`, que tem como objetivo representar a degeneração e possui os atributos necessários à integração numérica.

Um exemplo de degeneração é a classe `CrossSection` (Figura 4.11), que representa a degeneração causada por discretizações com elementos finitos unidimensionais, nas quais se simplifica uma geometria tridimensional em apenas uma linha.

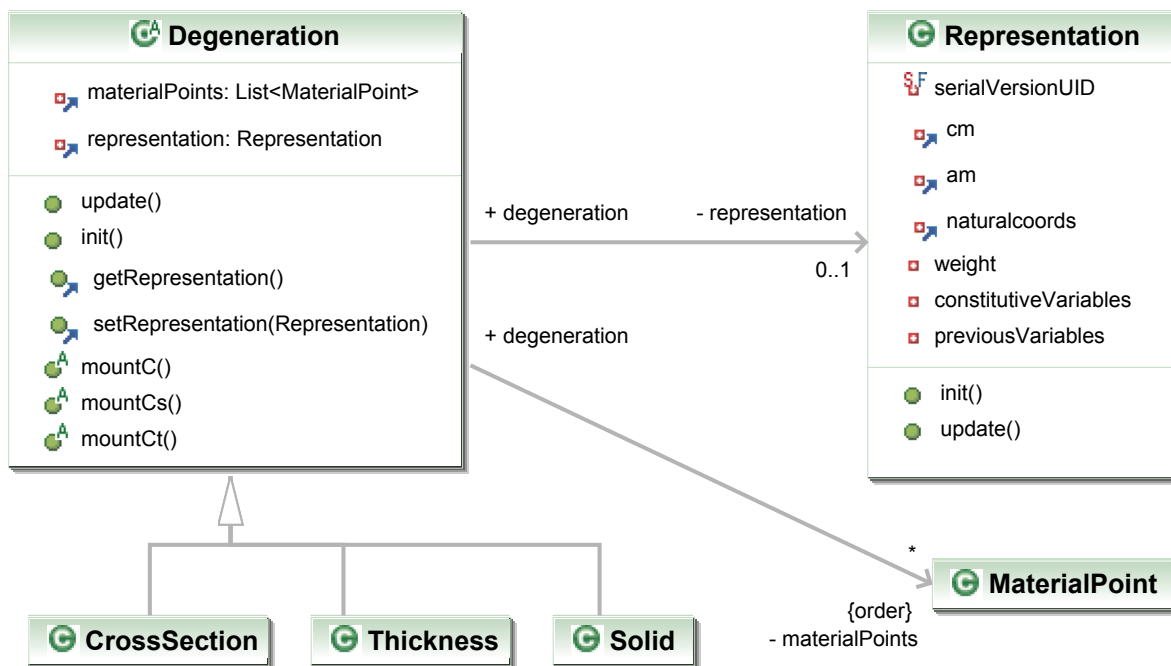


Figura 4.11: Diagrama de classe para a interface `Degeneration`.

### 4.2.7 Interface `AnalysisModel`

A interface `AnalysisModel` (Figura 4.12) possui os métodos responsáveis por fornecer as informações dependentes do modelo de análise, necessárias aos elementos finitos, aos pontos materiais e às representações. Ela é implementada por classes representantes dos diversos modelos de análise, tanto no nível do elemento quanto no nível de seus pontos materiais.

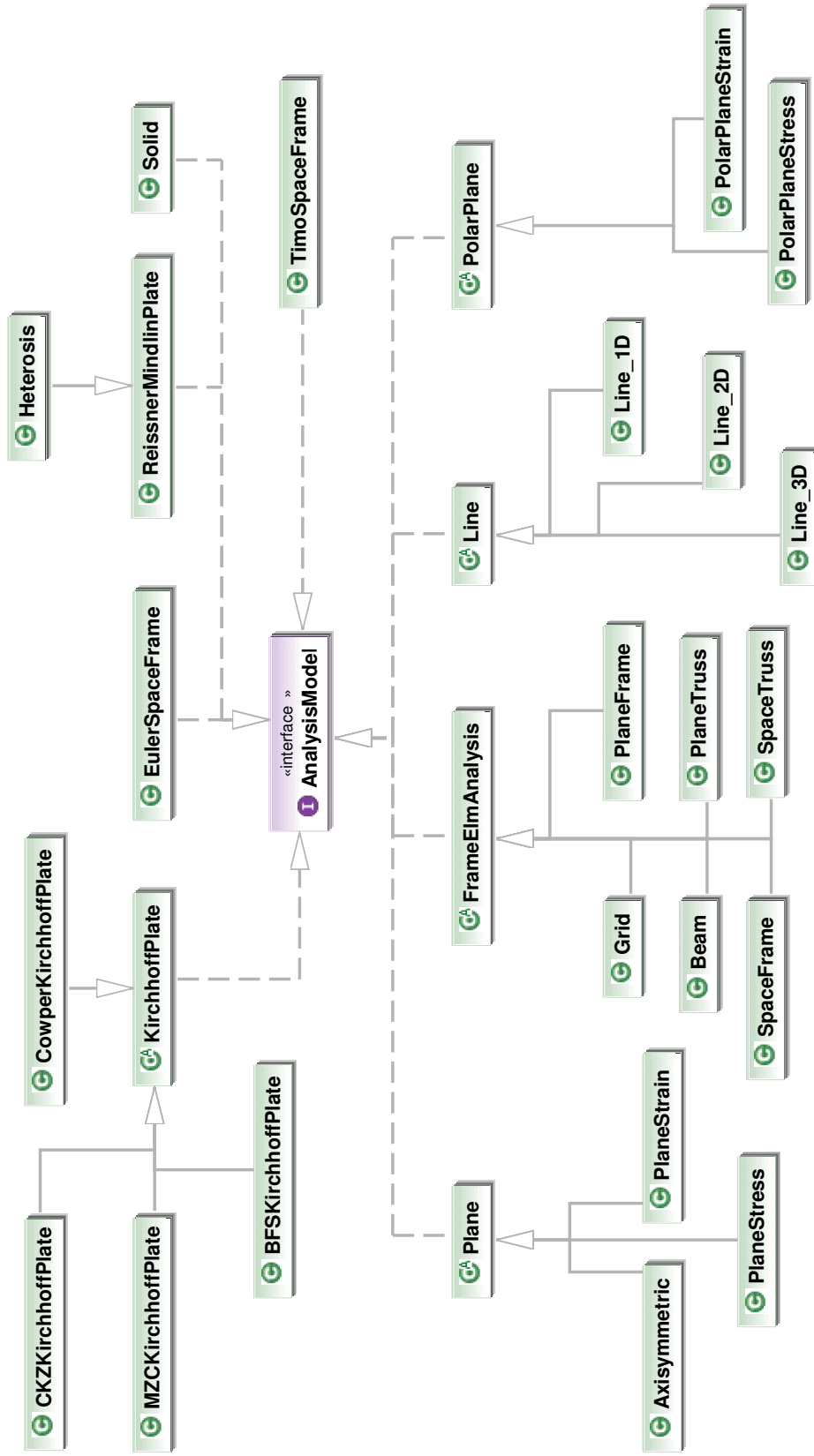


Figura 4.12: Diagrama de classe para a interface AnalysisModel.

### 4.2.8 Relacionamento entre as Classes do Núcleo Numérico

Para ilustrar o inter-relacionamento entre as diversas classes do núcleo numérico discute-se aqui a implementação do método `getC`, da classe `Parametric`, cujo código fonte está mostrado na Figura 4.13. Pode-se observar na Figura 4.6 que `Parametric` estende a classe `SolidMech`, que por sua vez implementa a interface `ProblemDriver`. Assim, a classe `Parametric`, sendo `SolidMech` uma classe abstrata, deve implementar o método `getC` de `ProblemDriver`.

Esse método (Figura 4.13) é utilizado para se obter a matriz de rigidez do elemento paramétrico que lhe é passado como argumento (`Element e`). O próximo passo consiste em se inicializar as matrizes `stiffnessMatrix` e `finalStiffnessMatrix`. Essas matrizes têm dimensão `numberOfDegreesOfFreedom` x `numberOfDegreesOfFreedom`. A variável `numberOfDegreesOfFreedom` é fornecida pelo próprio elemento, conforme pode ser visto na segunda linha de código. Após isso, criam-se as variáveis responsáveis por armazenar a lista de degenerações (`gns`), o modelo de análise (`analysisModel`), a função de forma (`shape`) e as coordenadas cartesianas nodais (`cartesianNodalCoordsMatrix`). Está última variável (`cartesianNodalCoordsMatrix`) foi alterada durante a implementação dos elementos finitos de casca para receber coordenadas locais em vez de globais. Para isso foi criado o método `getLocalCartesianNodalCoordsMatrix()` na classe `Element`.

A seguir, a estrutura de repetição `while` percorre todos os elementos da lista de degenerações (`gns`) a fim de calcular a integração numérica da matriz de rigidez do elemento dada por

$$K^{(e)} = c \sum_{p=1}^{n_p} \underline{B}_p^T \underline{D} \underline{B}_p |J^{(e)}|_p W_p \quad (4.5)$$

onde:  $c$  é uma constante que reflete a dimensão do problema (1D, 2D, 3D, Axissimétrico);  $n_p$  é o número de pontos de integração adotados;  $\underline{B}$  é a matriz da relação deformação  $\times$  deslocamento ou deformação generalizada  $\times$  deslocamento;  $D$  é a matriz da relação tensão  $\times$  deformação ou esforço interno  $\times$  deformação generalizada;



$|J^{(e)}|$  é o determinante da transformação Jacobiana; e  $W_p$  é o peso associado ao ponto de integração corrente (p).

A variável `naturalCoords` armazena as coordenadas naturais da degeneração corrente que, juntamente com as coordenadas cartesianas dos nós do elemento, é repassada para o objeto `shape` a fim de se obter os valores da função de forma do mesmo (`shapeFunction`), sua primeira derivada (`derivedShapeFunction`) e sua segunda derivada (`secondDerivedShapeFunction`), na referida degeneração.

A matriz  $\underline{B}$  da equação (4.5) é representada pela variável `matrixB` do código. Ela é obtida através do método `getInternalVariablesOperator` da classe `AnalysisModel` fornecendo a este as funções de forma, suas derivadas e as coordenadas cartesianas dos nós do elemento. A seguir, a variável `matrixB` é modificada através do método `internalVariableOperatorModifier` da classe `Degeneration`. Esta modificação serve para representar problemas em que a matriz  $\underline{B}$  é alterada por alguma propriedade do material. Através desta mesma classe, obtém-se a matriz  $\underline{D}$  da equação (4.5), representada pela variável `matrixD`, através do método `degeneration.mountD()`.

A seguir, cria-se a variável `k1` e a ela é atribuído o valor da matriz  $\underline{B}$  transposta multiplicada pela matriz  $\underline{D}$ . À variável `stiffnessMatrix`, criada e inicializada anteriormente, atribui-se o valor da variável `k1` multiplicada pela variável `matrixB`. As variáveis `weight` e `jac` são criadas e a elas atribuídas os valores  $W_p$  e  $|J^{(e)}|$ , respectivamente. A variável `coeff` representa o coeficiente  $c$  da equação (4.5).

A variável `matrixT` recebe a matriz de transformação entre coordenadas locais e globais de acordo com o modelo de análise em questão. A matriz `stiffnessMatrix` é multiplicada então à direita por `matrixT` e à esquerda pela transposta de `matrixT` e o resultado é acumulado na variável `finalStiffnessMatrix`, obtendo-se finalmente a rigidez do elemento  $K^{(e)}$ .

```

public IMatrix getC(Element e) throws Exception {
    int numberOfDegreesOfFreedom = e.getNumberofDegreesOfFreedom();
    IMatrix finalStiffnessMatrix = new IMatrix(numberOfDegreesOfFreedom, numberOfDegreesOfFreedom);
    finalStiffnessMatrix.setZero();
    ListIterator<Degeneration> gns = e.getDegenerations().listIterator();
    AnalysisModel analysisModel = e.getAnalysisModel();
    Shape shape = e.getShape();
    IMatrix cartesianNodalCoordsMatrix = e.getLocalCartesianNodalCoordsMatrix();
    while (gns.hasNext()) {
        Degeneration degeneration = gns.next();
        double[] naturalCoords = degeneration.getRepresentation().getNaturalcoords().toDouble();
        IVector shapeFunction = shape.getShapeFunction(naturalCoords, cartesianNodalCoordsMatrix);
        IMatrix derivedShapeFunction = shape.getDerivedShapeFunction(naturalCoords, cartesianNodalCoordsMatrix);
        IMatrix secondDerivedShapeFunction = shape.getSecondDerivedShapeFunction(naturalCoords, cartesianNodalCoordsMatrix);
        IMatrix matrixB = analysisModel.getInternVariableOperator(derShapeFunc, secDerShapeFunc, cartNodalCoordMatrix);
        matrixB = degeneration.internalVariableOperatorModifier(matrixB);
        IMatrix stiffnessMatrix = new IMatrix(matrixB.getNumCol(), matrixB.getNumCol());
        stiffnessMatrix.setZero();
        IMatrix matrixC = degeneration.mountC();
        IMatrix k1 = new IMatrix(matrixB.getNumCol(), matrixC.getNumCol());
        k1.mulTransposeLeft(matrixB, matrixC);
        stiffnessMatrix.mul(k1, matrixB);
        double weight = degeneration.getRepresentation().getWeight();
        double jac = analysisModel.getJacobianTransformation(derivedShapeFunction, cartesianNodalCoordsMatrix);
        double integrationFactor = analysisModel.getIntegrationFactor(shFunc, cartNodalCoordMatrix, deg.getGeomProp());
        double coeff = e.getElmCoefficient() * integrationFactor;
        stiffnessMatrix.setScale(weight * jac * coeff);
        IMatrix matrixT = analysisModel.getTransformationMatrix(derivedShapeFunction, cartesianNodalCoordsMatrix);
        stiffnessMatrix.mul(matrixT);
        matrixT.transpose();
        matrixT.mul(stiffnessMatrix);
        finalStiffnessMatrix.add(matrixT);
    }
    return (finalStiffnessMatrix);
}
}

```

Figura 4.13: Código Java do método getC da classe Parametric.

## 4.3 Expansão do Núcleo Numérico do INSANE

Para a expansão do núcleo numérico do **INSANE** foram aproveitadas e/ou alteradas algumas classes e interfaces existentes, e criadas outras. Para criação dos elementos de cascas planos foram aproveitados alguns elementos de placa, implementados no **INSANE** por Saliba (2007), e de estado plano de tensões, implementados por Almeida (2005).

Assim, foram feitas combinações das classes existentes de forma a originar os novos elementos, mostrados na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1:** Elementos de Casca Planos implementados no **INSANE** e suas siglas

Elementos de Casca		
Elementos de Casca Fina Baseada na Teoria de Reissner-Mindlin com Deformação de Cisalhamento Imposta	Quadrilateral	RMCIQ4
		RMCIQ8
		RMCIQ9
Elementos de Casca Fina Baseada na Teoria de Kirchhoff	Triangular	CKZ
	Retangular	MZC

### 4.3.1 Alterações nas Classes `AnalysisModel`, `ProblemDriver` e `Element`

Os diagramas de classe para `AnalysisModel` (Figura 4.14) e `ProblemDriver` (Figura 4.15) foram modificados de acordo com as figuras abaixo, onde se destacam as novas classes que foram implementadas de forma a atender à implementação deste trabalho.

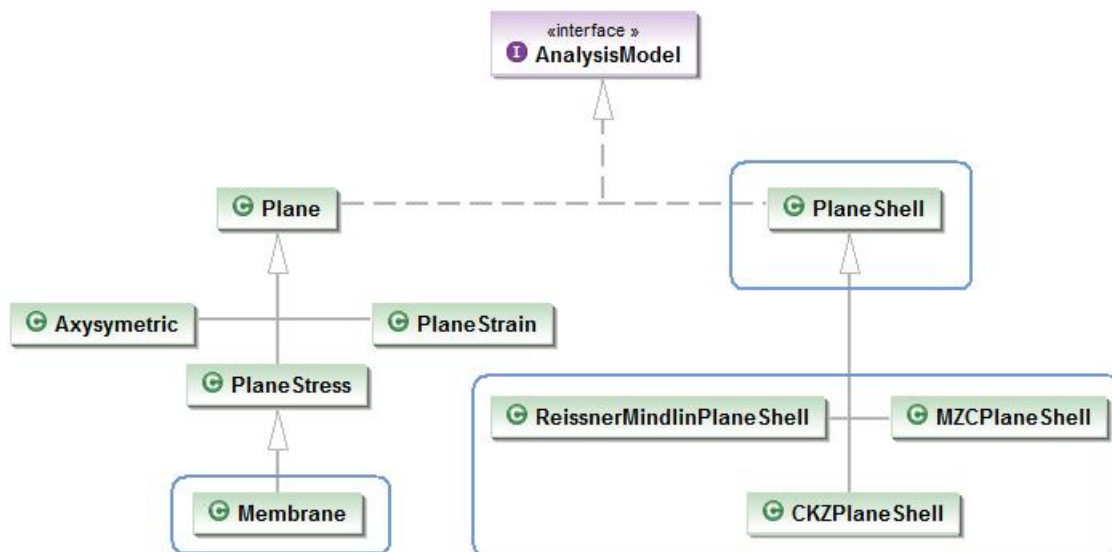


Figura 4.14: Diagrama de classe modificado para a interface `AnalysisModel`.

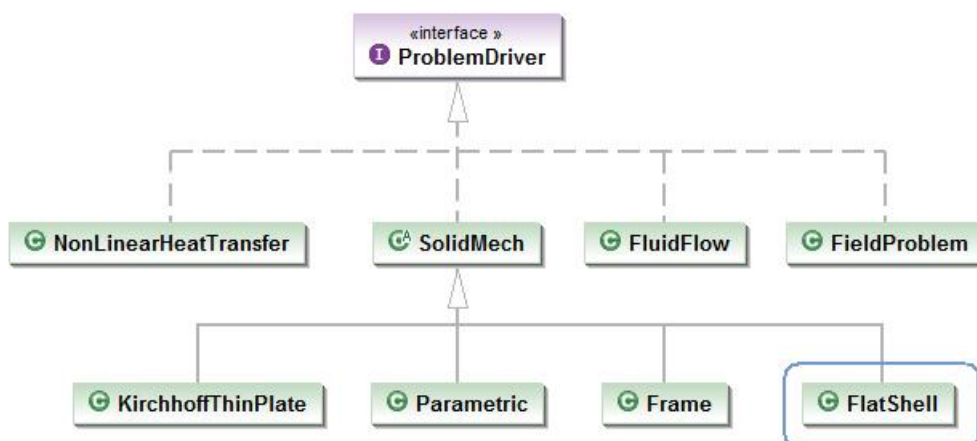


Figura 4.15: Diagrama de classe modificado para a interface `ProblemDriver`.

Para criação do elemento de casca plano, sendo ele a combinação de um elemento de membrana com um elemento de placa, foi inserida no sistema **INSANE**, como pode ser observado na Figura 4.14, uma classe chamada `Membrane`, que representa uma derivação da `PlaneStress` para tratar de problema de estado plano de tensões no espaço. Para isso, foi criado o seguinte método nessa nova classe: `getLocalCartesianNodalCoordsMatrix(IMatrix cn)`. Este método é responsável

por obter as coordenadas cartesianas locais do elemento, recebendo como parâmetro as coordenadas cartesianas globais do elemento.

O elemento de casca plano é representado pela classe abstrata `PlaneShell`. Esta classe tem como atributos os elementos de membrana e placa que são utilizados para gerar o elemento de casca correspondente. São eles: `planeAnalysisModel`, que é inicializado como um objeto do tipo `Membrane`, e `plateAnalysisModel`, que é inicializado pelas classes derivadas de `PlaneShell`. As classes derivadas de `PlaneShell` são: `ReissnerMindlinPlaneShell`, `MZCPlaneShell` e `CKZPlaneShell`, que irão inicializar os elementos de placa como `ReissnerMindlinPlate`, `MZCKirchhoffPlate` e `CKZKirchhoffPlate`, respectivamente.

A Figura 4.16 ilustra o método `getC(Element e)` da classe `FlatShell`, derivada da classe `ProblemDriver`. Este método tem a função de combinar a matriz de rigidez local de membrana com a matriz de rigidez local de placa do elemento, formando assim a matriz de rigidez de casca  $\underline{K}'^{(e)}$  da equação 3.20, reescrita a seguir:

$$\underline{K}'_{ij(5 \times 5)}^{(e)} = \left[ \begin{array}{cc|c} (\underline{K}'_{EPT})_{ij(2 \times 2)} & \underline{0}_{(2 \times 3)} & \\ \hline \underline{0}_{(3 \times 2)} & (\underline{K}'_{PLACA})_{ij(3 \times 3)} & \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow u' \\ \leftarrow v' \\ \\ \leftarrow w' \\ \leftarrow \theta'_x \\ \leftarrow \theta'_y \end{array} \quad (4.6)$$

Pode-se observar na Figura 4.16 que o método `getC(Element e)` da classe `FlatShell` possui três atributos: `initialAnalysisModel`, `initialProblemDriver` e `initialShape`. Esses três atributos são inicializados com os valores iniciais do modelo de análise, `ProblemDriver` do elemento e de sua função de forma. Feito isso, o modelo de análise do elemento é trocado para o modelo de análise `Membrane` e o `ProblemDriver` para `Parametric`. Calcula-se, então, a matriz de rigidez local de membrana do elemento  $(\underline{K}'_m)^{(e)}$ .

```

public IMatrix getC(Element e) throws Exception {
    PlaneShell initialAnalysisModel = (PlaneShell) e.getAnalysisModel();
    ProblemDriver initialProblemDriver = e.getProblemDriver();
    Shape initialShape = e.getShape();

    e.setAnalysisModel(initialAnalysisModel.getPlaneAnalysisModel());
    e.setProblemDriver(this.getMembraneProblemDriver());

    for (int i = 0; i < e.getDegenerations().size(); i++) {
        Degeneration dgn = e.getDegenerations().get(i);
        dgn.getRepresentation().setAnalysisModel(e.getAnalysisModel());
    }

    IMatrix km = e.getProblemDriver().getC(e);

    e.setAnalysisModel(initialAnalysisModel.getPlateAnalysisModel());
    e.setProblemDriver(this.getBendingProblemDriver());
    e.setShape(e.getBendingShapeFunction());

    for (int i = 0; i < e.getDegenerations().size(); i++) {
        Degeneration dgn = e.getDegenerations().get(i);
        dgn.getRepresentation().setAnalysisModel(e.getAnalysisModel());
    }

    IMatrix kf = e.getProblemDriver().getC(e);

    e.setAnalysisModel(initialAnalysisModel);
    e.setProblemDriver(initialProblemDriver);
    e.setShape(initialShape);

    for (int i = 0; i < e.getDegenerations().size(); i++) {
        Degeneration dgn = e.getDegenerations().get(i);
        dgn.getRepresentation().setAnalysisModel(e.getAnalysisModel());
    }

    int nNodes = e.getIncidence().size();
    int numberOfDegreesOfFreedom = 5 * nNodes;
    IMatrix globalStiffnessMatrix = new IMatrix(ndof, ndof);
    globalStiffnessMatrix.setZero();

    for (int i = 0; i < nNodes; i++) {
        for (int j = 0; j < nNodes; j++) {
            km.copySubMatrix(2*i, 2*j, 2, 2, 5*i, 5*j, globalK);
            kf.copySubMatrix(3*i, 3*j, 3, 3, 5*i+2, 5*j+2, globalK);
        }
    }

    IMatrix matrixT = e.getAnalysisModel().getTransformationMatrix();
    matrixT.transpose();
    matrixT.mul(globalStiffnessMatrix);

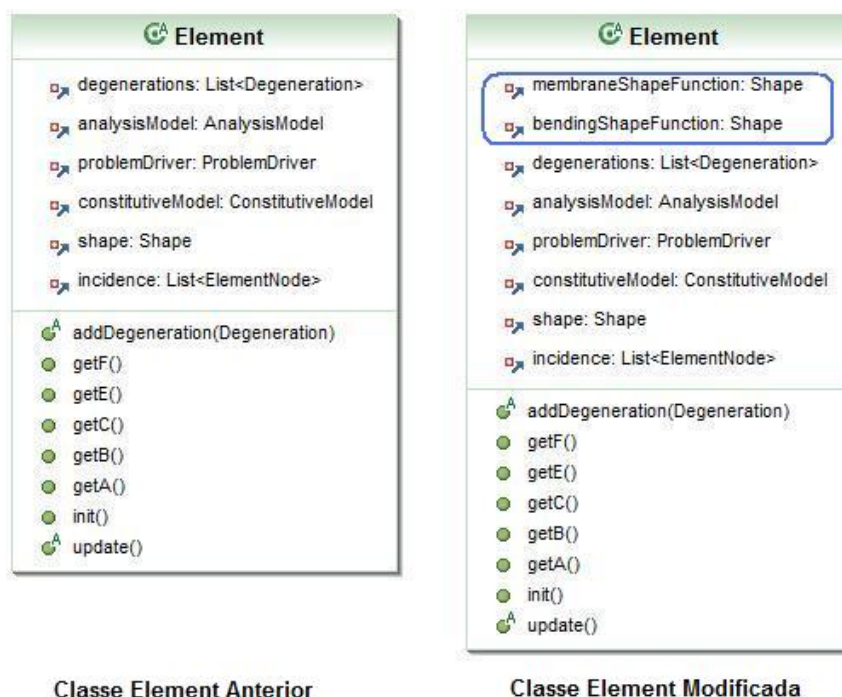
    return matrixT;
}

```

Figura 4.16: Código Java do método `getC` da classe `FlatShell`.

O próximo passo consiste em se calcular a matriz de rigidez local de placa do elemento ( $\underline{K}'^{(e)}$ ). Para isso, o modelo de análise do elemento é trocado para o modelo de análise de placa, o `ProblemDriver` para o `ProblemDriver` de placa e a função de forma para função de forma de placa. Estando as duas matrizes prontas, recupera-se os modelos de análise, `ProblemDriver` e função de forma iniciais e, através da estrutura de repetição `while`, combinam-se as duas matrizes calculadas de forma a se originar a matriz local do elemento de casca  $\underline{K}'^{(e)}$ .

Como dito acima, o cálculo da matriz de rigidez (Figura 4.16) envolve a especificação de funções de forma para aproximação dos problemas de membrana e flexão. Para tanto, conforme mostra a Figura 4.17, foram adicionados dois novos atributos à classe `Element`, a saber: `bendingShapeFunction`, que representa a função de forma de flexão, e `membraneShapeFunction`, que representa a função de forma de membrana.



**Figura 4.17:** Diagramas da classe `Element` anterior e modificada.

## Capítulo 5

# TESTES DA MALHA DE *IRONS* (*PATCH TESTS*)

Qualquer que seja o modelo de elementos finitos, as características do elemento têm que satisfazer certas condições necessárias para assegurar que, com o refinamento da malha, os resultados computados venham a convergir para a solução analítica. Não se pode confiar em um elemento que forneça bons resultados para uma malha particular e maus resultados quando esta malha é refinada. A realidade é que para problemas práticos normalmente não se conhece a resposta analítica, conseqüentemente, não é possível assegurar os resultados obtidos. Se o elemento converge, o problema está resolvido qualitativamente (se não quantitativamente). Mas, quando não se conhece nada sobre as propriedades de convergência do elemento, até mesmo os resultados de uma malha refinada tornam-se suspeitos (Razzaque, 1986).

Para solucionar este inconveniente, um teste para validação da formulação de um elemento foi desenvolvido por Bruce Irons, chamado de “Patch Test”. A princípio este teste verificava simplesmente se uma discretização com elementos de tamanhos aleatórios reproduzia exatamente o comportamento de um material elástico quando submetido a deslocamentos compatíveis com deformação constante. Esta motivação física levou-o a desenvolver um teste mais formal que se tornou um procedimento largamente usado para verificação de elementos finitos e programas relacionados (Taylor et al., 1986).

Pode-se dizer que o “Patch Test” serve para estudar a convergência correta de



uma formulação de elemento finito. Nesse teste, utiliza-se uma discretização com elementos de tamanhos aleatórios de tal maneira que ao menos um nó fique completamente cercado por elementos. Aplicam-se restrições nodais ao contorno, juntamente com deslocamentos ou cargas compatíveis com um estado de deformação constante. Calculando as deformações (ou tensões) do modelo, o “Patch Test” será satisfeito se, em todos os pontos dentro dos elementos, as deformações (ou tensões) calculadas forem constantes (Cook et al., 1989).

Neste capítulo, apresentam-se os “Patch Tests” dos elementos de Kirchhoff e Reissner-Mindlin implementados, referentes a esforços de flexão e membrana.

## 5.1 Descrição do Problema

Para este teste, uma casca retangular formada por elementos com geometria irregular é submetida a deslocamentos prescritos em suas bordas, que teoricamente impõem um campo de tensões constante sobre o modelo. Sua geometria e carregamentos são como descritos em Macneal e Harder (1985). Os nós das bordas da estrutura são impedidos de se deslocar e de girar nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Os deslocamentos prescritos são aplicados aos graus de liberdade impedidos desses nós.

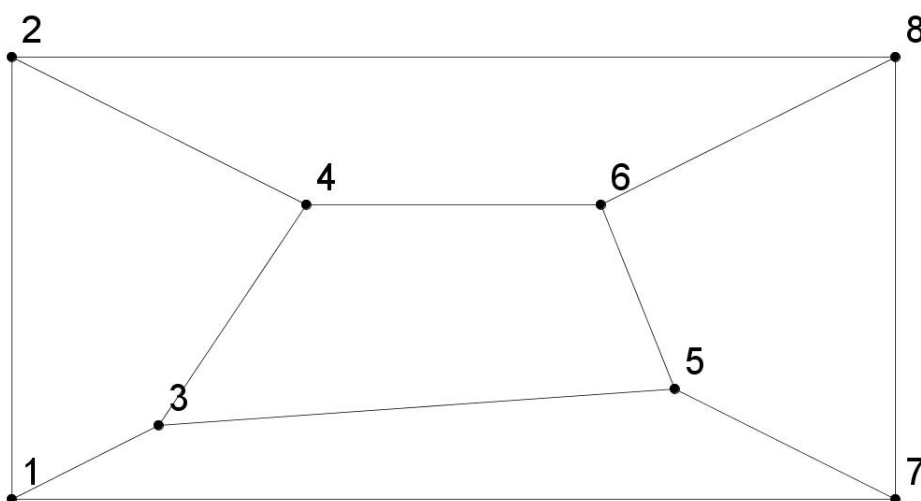
A malha utilizada para este exemplo é dada nas Figuras 5.1 e 5.2 para os elementos retangulares e triangulares, respectivamente. A espessura da casca ( $t$ ) é igual a  $0,001 uc$ . O coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) é  $0,25$  e o módulo de elasticidade ( $E$ ) é  $10^6 uf/uc^2$ , para o teste de membrana, e  $10^{12} uf/uc^2$  para o teste de flexão<sup>1</sup>. As dimensões da casca são de  $0,24 uc \times 0,12 uc$  e as coordenadas dos nós são dadas na Tabela 5.1.

---

<sup>1</sup> $uf$  - unidades de força,  $uc$  - unidades de comprimento.

**Tabela 5.1:** Coordenadas dos nós para o Patch Test em  $uc$ .

Nó	x	y	z	Nó	x	y	z
1	0,00	0,00	0,00	5	0,18	0,03	0,00
2	0,00	0,12	0,00	6	0,16	0,08	0,00
3	0,04	0,02	0,00	7	0,24	0,00	0,00
4	0,08	0,08	0,00	8	0,24	0,12	0,00



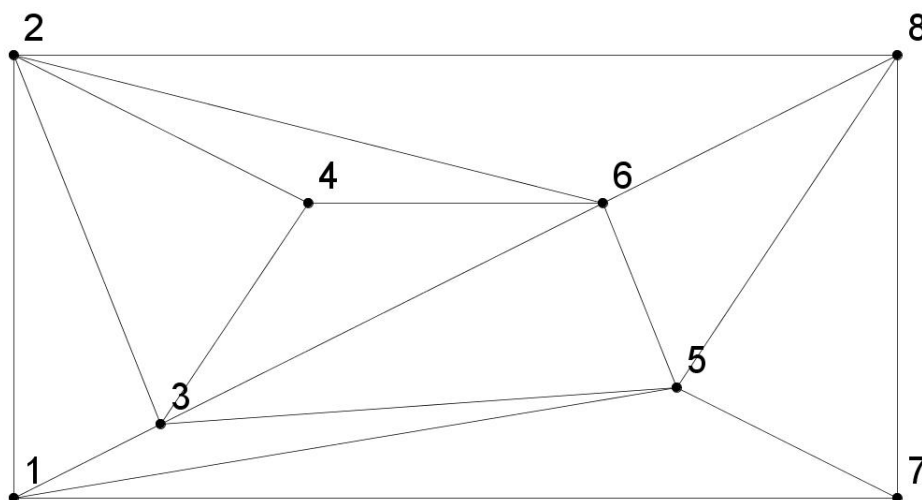
$$E = 1,0 \times 10^6 uf/uc^2 \text{ para membrana}$$

$$E = 1,0 \times 10^{12} uf/uc^2 \text{ para flexão}$$

$$t = 0,001 uc$$

$$\nu = 0,25$$

**Figura 5.1:** Malha utilizada para os elementos quadriláteros.



$E = 1,0 \times 10^6 uf/uc^2$  para membrana

$E = 1,0 \times 10^{12} uf/uc^2$  para flexão

$t = 0,001 uc$

$\nu = 0,25$

**Figura 5.2:** Malha utilizada para os elementos triangulares.

## 5.2 Carregamentos

Diferentes carregamentos são especificados para os testes dos comportamentos de membrana e de flexão.

### 5.2.1 Comportamento de Membrana

O carregamento para o comportamento de membrana é aplicado na forma de deslocamentos prescritos para  $u$  e  $v$ , que são impostos nos nós 1, 2, 7 e 8 (Figuras 5.1 e 5.2). Esses deslocamentos são governados pelas seguintes equações.

$$u = \frac{x + \frac{y}{2}}{1000} \quad e \quad v = \frac{y + \frac{x}{2}}{1000} \quad (5.1)$$

A Tabela 5.2 mostra os deslocamentos prescritos calculados a partir das equações

5.1 para cada um dos nós da borda da estrutura.

**Tabela 5.2:** Deslocamentos prescritos para o comportamento de membrana.

Nó	$x$ (uc)	$y$ (uc)	$u$ (uc)	$v$ (uc)
1	0,00	0,00	0,00000	0,00000
2	0,00	0,12	0,00006	0,00012
7	0,24	0,00	0,00024	0,00012
8	0,24	0,12	0,00030	0,00024

### 5.2.2 Comportamento de Placa

O carregamento para o comportamento de placa também é aplicado na forma de deslocamentos prescritos nas bordas da estrutura. Desta vez, para os graus de liberdade  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , aplicados nos nós 1, 2, 7 e 8 (Figuras 5.1 e 5.2). Esses deslocamentos e rotações são governados pelas Equações 5.2.

$$w = \frac{x^2 + xy + y^2}{2000}, \quad \theta_x = \frac{y + \frac{x}{2}}{1000} \quad e \quad \theta_y = \frac{-x - \frac{y}{2}}{1000} \quad (5.2)$$

A Tabela 5.2 mostra os deslocamentos prescritos calculados a partir das equações 5.2 para cada um dos nós da borda da estrutura.

**Tabela 5.3:** Deslocamentos prescritos para o comportamento de placa.

Nó	$x$ (uc)	$y$ (uc)	$w$ (uc)	$\theta_x$ (rad)	$\theta_y$ (rad)
1	0,00	0,00	0,0000000	0,00000	0,00000
2	0,00	0,12	0,0000072	0,00012	-0,00006
7	0,24	0,00	0,0000288	0,00012	-0,00024
8	0,24	0,12	0,0000504	0,00024	-0,00030

### 5.3 Resultados

Os resultados do comportamento de membrana são comparados com os resultados obtidos em Timoshenko e Goodier (1951) e os resultados do comportamento de placa são comparados com os obtidos em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).

As Tabelas 5.4 a 5.8 mostram os resultados para os diversos elementos implementados.

**Tabela 5.4:** Resultados para o elemento RMCIQ4.

Comportamento	Tensão/Esforço	Analítico	INSANE RMCIQ4	Resultado
Membrana	$\sigma_{xx} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{yy} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{xy} (uf/uc^2)$	400	400	Passa
Placa	$M_{xx} (uf.uc/uc)$	0,1111	0,1111	Passa
	$M_{yy} (uf.uc/uc)$	0,1111	0,1111	Passa
	$M_{xy} (uf.uc/uc)$	0,0333	0,0333	Passa

**Tabela 5.5:** Resultados para o elemento RMCIQ8.

Comportamento	Tensão/Esforço	Analítico	INSANE RMCIQ8	Resultado
Membrana	$\sigma_{xx} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{yy} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{xy} (uf/uc^2)$	400	400	Passa
Placa	$M_{xx} (uf.uc/uc)$	0,1111	0,1111	Passa
	$M_{yy} (uf.uc/uc)$	0,1111	0,1111	Passa
	$M_{xy} (uf.uc/uc)$	0,0333	0,0333	Passa

**Tabela 5.6:** Resultados para o elemento RMCIQ9.

Comportamento	Tensão/Esforço	Analítico	INSANE RMCIQ9	Resultado
Membrana	$\sigma_{xx} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{yy} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{xy} (uf/uc^2)$	400	400	Passa
Placa	$M_{xx} (uf.uc/uc)$	0,1111	0,1111	Passa
	$M_{yy} (uf.uc/uc)$	0,1111	0,1111	Passa
	$M_{xy} (uf.uc/uc)$	0,0333	0,0333	Passa

**Tabela 5.7:** Resultados para o elemento CKZ.

Comportamento	Tensão/Esforço	Analítico	INSANE CKZ	Resultado
Membrana	$\sigma_{xx} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{yy} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{xy} (uf/uc^2)$	400	400	Passa
Placa	$M_{xx} (uf.uc/uc)$	0,1111	0,1414	Não Passa
	$M_{yy} (uf.uc/uc)$	0,1111	0,1778	Não Passa
	$M_{xy} (uf.uc/uc)$	0,0333	0,0422	Não Passa

**Tabela 5.8:** Resultados para o elemento MZC.

Comportamento	Tensão/Esforço	Analítico	INSANE MZC	Resultado
Membrana	$\sigma_{xx} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{yy} (uf/uc^2)$	1333	1333	Passa
	$\sigma_{xy} (uf/uc^2)$	400	400	Passa
Placa	$M_{xx} (uf.uc/uc)$	0,1111	1,1931	Não Passa
	$M_{yy} (uf.uc/uc)$	0,1111	0,5758	Não Passa
	$M_{xy} (uf.uc/uc)$	0,0333	0,2041	Não Passa

Pode-se observar pelos resultados que, para o teste de membrana, todos os elementos atendem ao “Patch Test”. No caso de flexão, somente os elementos de Reissner-Mindlin com Cortante Imposto (RMCI) passam no teste. Entretanto, o insucesso dos elementos nos “Patch Tests” não invalida sua utilização prática se este elemento apresentar um bom comportamento em estudos baseados em refinamentos sucessivos de malha, o que será visto no próximo capítulo.

# Capítulo 6

## TESTES DE CONVERGÊNCIA

### 6.1 Introdução

Conforme exposto no capítulo anterior, o insucesso dos elementos nos “Patch Tests” não invalida sua utilização prática. Dessa forma, o desempenho dos elementos implementados será avaliado, também, através do estudo de convergência dos seguintes exemplos numéricos:

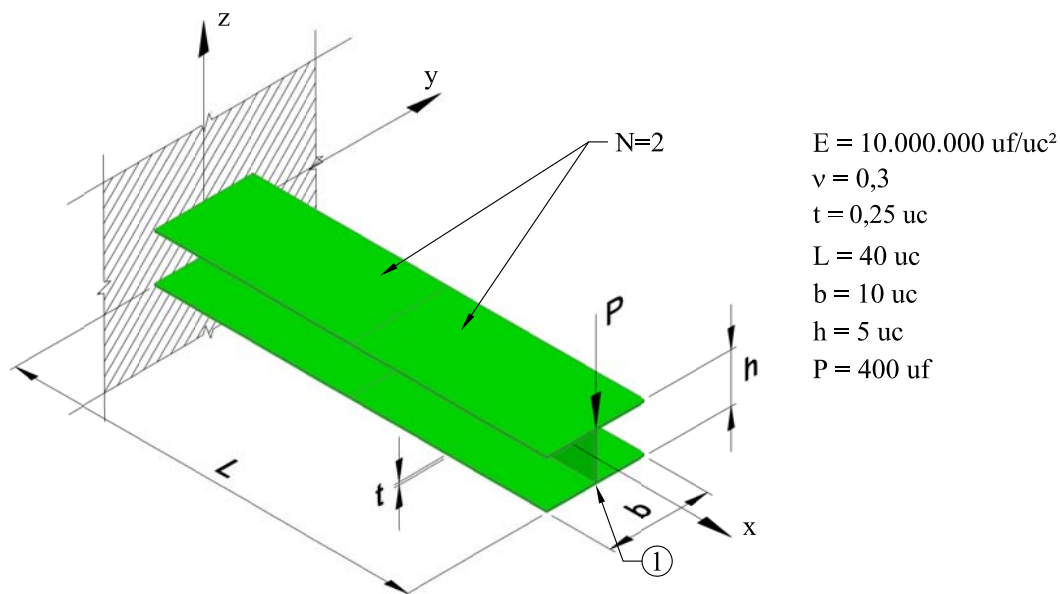
1. Viga de seção I engastada, com três casos de carga;
2. Casca dobrada simplesmente apoiada em dois lados opostos;
3. Caixa com furos carregada com duas cargas concentradas opostas.

### 6.2 Viga de Seção I Engastada

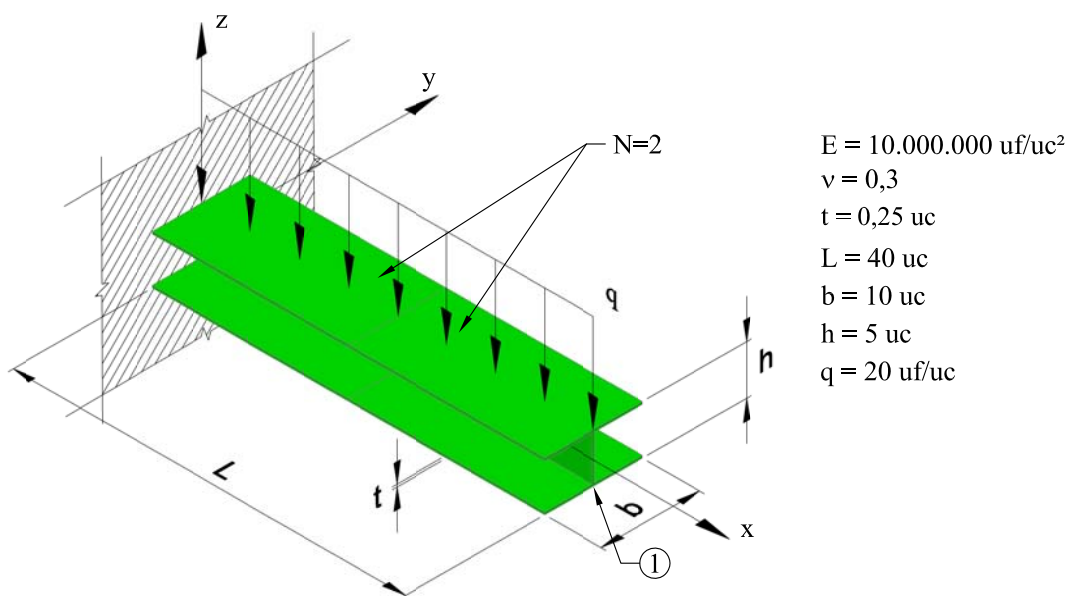
Neste primeiro exemplo, sugerido por Jin (1994), os deslocamentos são calculados para uma viga de seção I. Três casos de carga são considerados. No primeiro, o deslocamento vertical é medido, no ponto 1, para uma carga concentrada na extremidade livre do balanço (Figura 6.1). No segundo, o deslocamento vertical é medido, também no ponto 1, para uma carga uniformemente distribuída na linha de centro do flange superior (Figura 6.2). E no terceiro, os deslocamentos horizontal  $v$  e vertical  $w$  são medidos no flange inferior da seção I, ponto 1, para um momento de torção



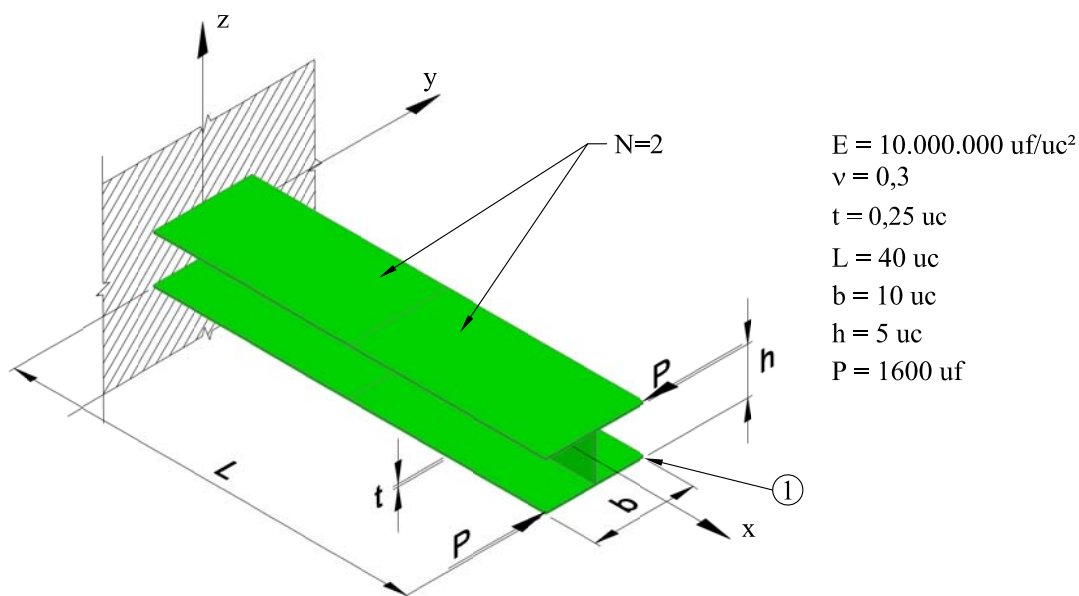
aplicado na extremidade livre (Figura 6.3). Os resultados obtidos são comparados com os valores analíticos para os dois primeiros casos de carga e de acordo com Jin (1994) no terceiro.



**Figura 6.1:** Viga I submetida à carga concentrada na extremidade.



**Figura 6.2:** Viga I submetida à carga distribuída.



**Figura 6.3:** Viga I submetida à torção.

### 6.2.1 Resultados

Para a viga com carga concentrada  $P$  da Figura 6.1, de acordo com a teoria de flexão de vigas com efeito de cisalhamento, o deslocamento vertical na borda livre é expresso por

$$w = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{A_w G} \quad (6.1)$$

onde o segundo termo representa o efeito de cisalhamento.  $P$  é a carga e  $L$  é o comprimento da viga.  $I = 33,8802 \text{ uc}^4$  é o momento de inércia da seção transversal da viga e  $A_w = 1,1875 \text{ uc}^2$  é a área da alma da viga. Assim, com os demais parâmetros dados pela Figura 6.1 e com  $E/G = 2,5$ , chega-se ao seguinte valor

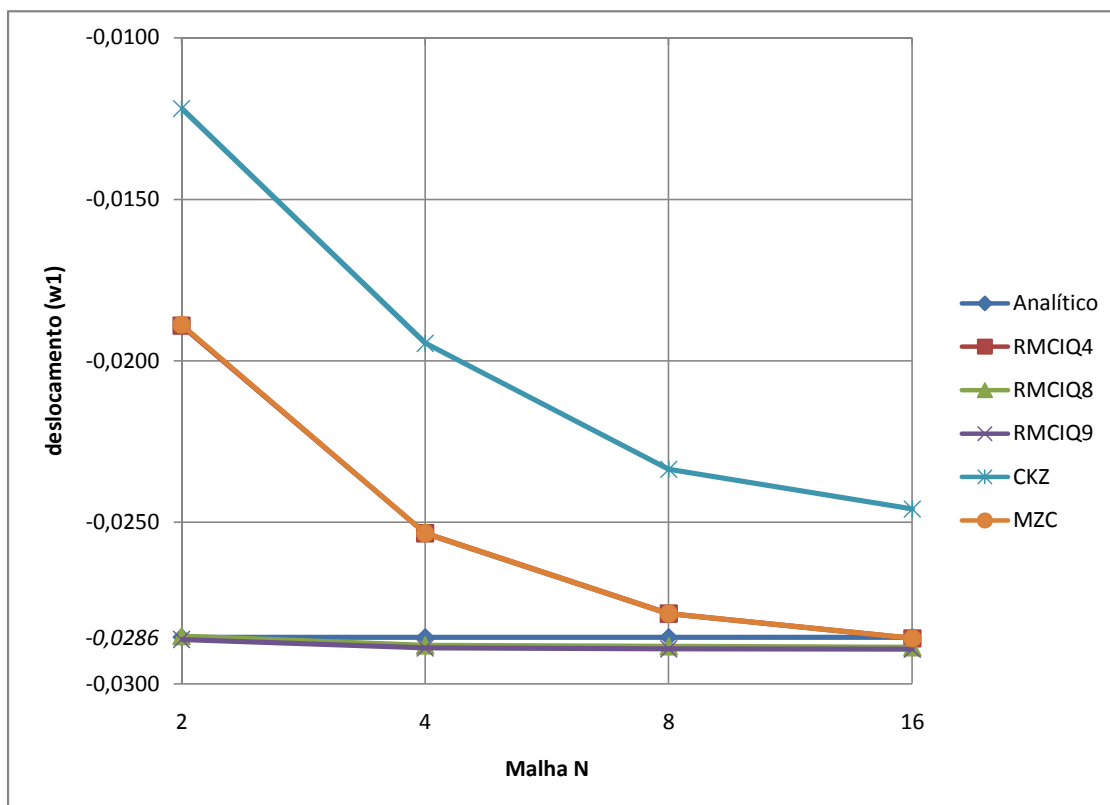
$$w = 2,85552 \times 10^{-2} \text{ uc} \quad (6.2)$$

Os resultados numéricos obtidos são apresentados na Tabela 6.1 e Figura 6.4.

**Tabela 6.1:** Deslocamento vertical na extremidade livre da viga I com carga concentrada em  $uc$  (Figura 6.1).

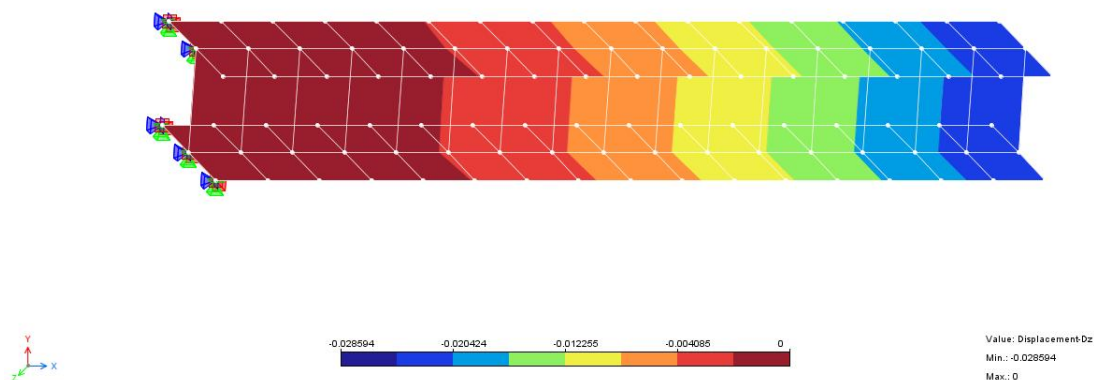
Malha N	RMCIQ4	RMCIQ8	RMCIQ9	CKZ	MZC
2	-0,0189	-0,0285	-0,0286	-0,0122	-0,0189
4	-0,0253	-0,0288	-0,0289	-0,0195	-0,0253
8	-0,0278	-0,0288	-0,0289	-0,0234	-0,0278
16	-0,0286	-0,0289	-0,0289	-0,0246	-0,0286

Analítico: -0,0286



**Figura 6.4:** Deslocamento vertical na extremidade livre da viga I com carga concentrada em  $uc$ .

Para ilustrar os resultados do sistema **INSANE**, apresenta-se na Figura 6.5 a variação dos deslocamentos verticais  $w$  obtida para a malha  $N = 16$  formada por elementos MZC, para o caso de carga concentrada.



**Figura 6.5:** Variação dos deslocamentos verticais  $w$  para a malha  $N = 16$  formada por elementos MZC, para o caso de carga concentrada.

Da mesma forma, para a viga com carga distribuída (Figura 6.2), o deslocamento vertical na borda livre é expresso por

$$w = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{qL^2}{2A_w G} \quad (6.3)$$

onde o segundo termo, também neste caso, representa o efeito de cisalhamento. Assim, com os demais parâmetros dados pela Figura 6.2 e com  $E/G = 2,5$ , chega-se ao seguinte valor

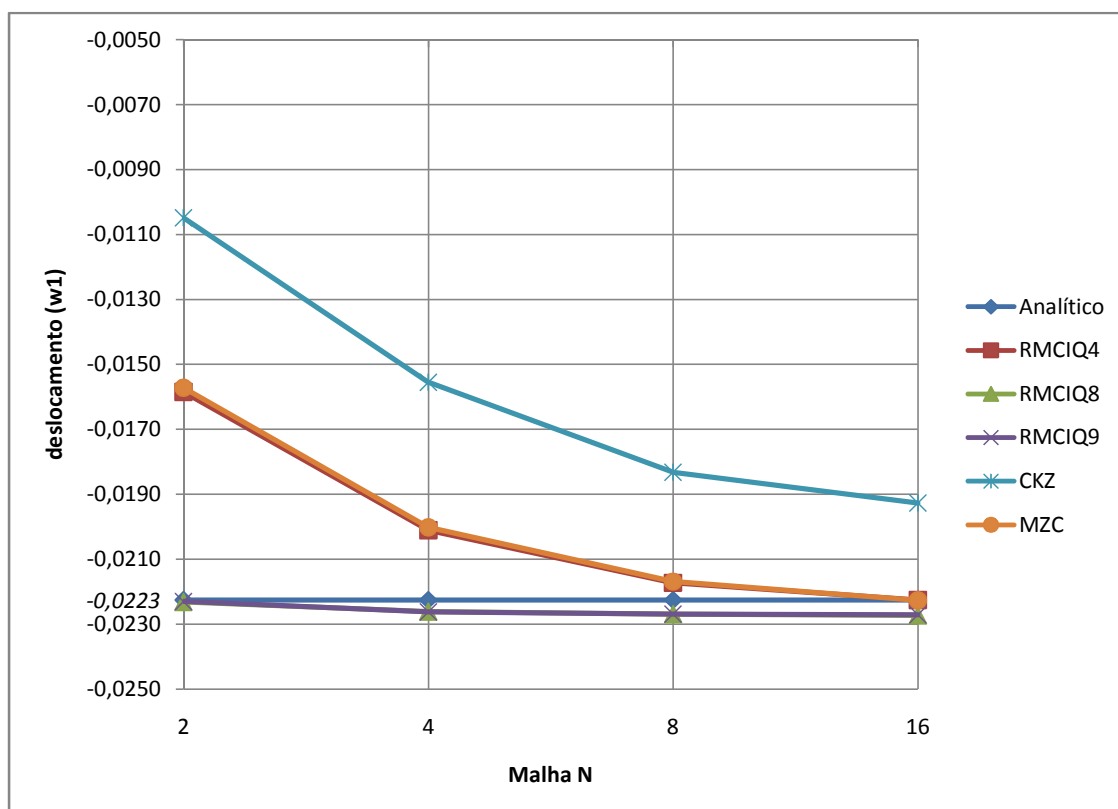
$$w = 2,22585 \times 10^{-2} \text{ uc} \quad (6.4)$$

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6.2 e Figura 6.6.

**Tabela 6.2:** Deslocamento vertical na extremidade livre da viga I com carga distribuída em  $uc$ .

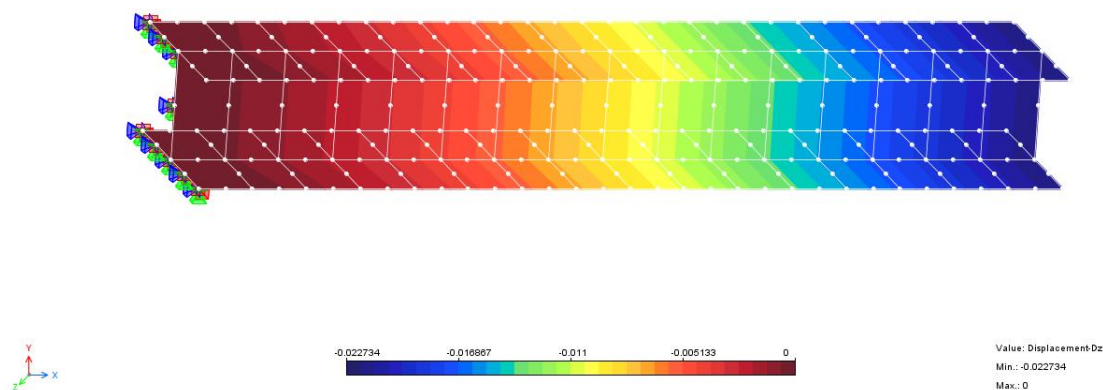
Malha N	RMCIQ4	RMCIQ8	RMCIQ9	CKZ	MZC
2	-0,0158	-0,0223	-0,0223	-0,0105	-0,0157
4	-0,0201	-0,0226	-0,0226	-0,0156	-0,0200
8	-0,0217	-0,0227	-0,0227	-0,0183	-0,0217
16	-0,0223	-0,0227	-0,0227	-0,0193	-0,0223

Analítico: -0,0223



**Figura 6.6:** Deslocamento vertical na extremidade livre da viga I com carga distribuída em  $uc$ .

Para ilustrar os resultados do sistema **INSANE**, apresenta-se na Figura 6.7 a variação dos deslocamentos verticais  $w$  obtida para a malha  $N = 16$  formada por elementos RMCIQ8, para o caso de carga distribuída.

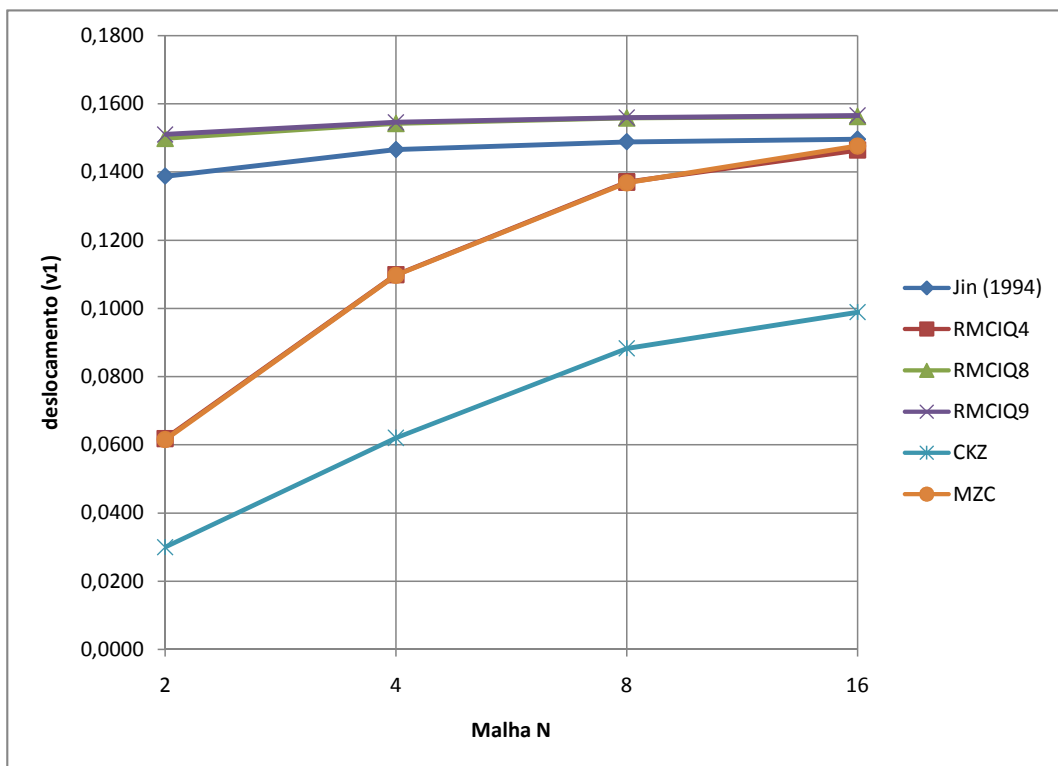


**Figura 6.7:** Variação dos deslocamentos verticais  $w$  para a malha  $N = 16$  formada por elementos RMCIQ8, para o caso de carga distribuída.

Para a viga sujeita à torção, os resultados são comparados com os obtidos por Jin (1994). Dois deslocamentos são medidos no ponto 1 da Figura 6.3, o deslocamento ao longo da direção  $y$ ,  $v$ , e o deslocamento na direção  $z$ ,  $w$ . As Tabelas 6.3 e 6.4 e as Figuras 6.8 a 6.11 ilustram os resultados obtidos.

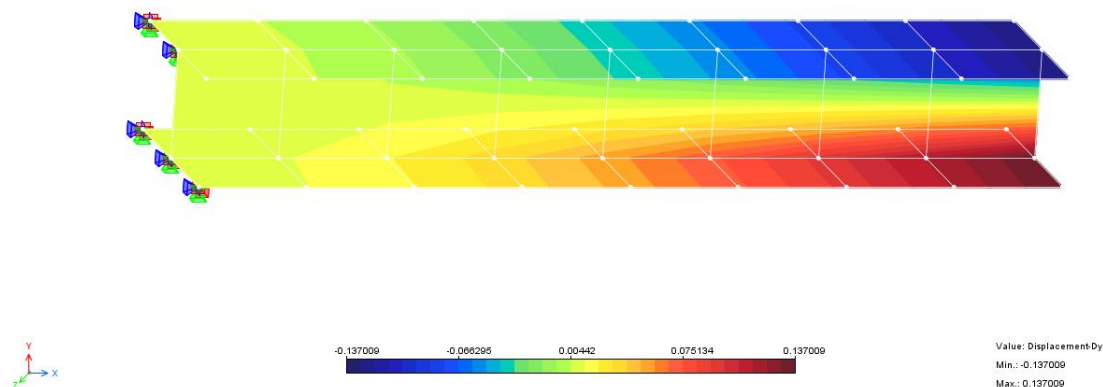
**Tabela 6.3:** Deslocamento  $v$  do ponto 1 da viga I submetida à torção em  $uc$ .

Malha N	Jin (1994)	RMCIQ4	RMCIQ8	RMCIQ9	CKZ	MZC
2	0,1388	0,0618	0,1499	0,1510	0,0300	0,0615
4	0,1466	0,1098	0,1543	0,1546	0,0620	0,1097
8	0,1488	0,1370	0,1559	0,1559	0,0883	0,1368
16	0,1496	0,1464	0,1563	0,1566	0,0989	0,1476



**Figura 6.8:** Deslocamento  $v$  do ponto 1 da viga I submetida à torção em  $uc$ .

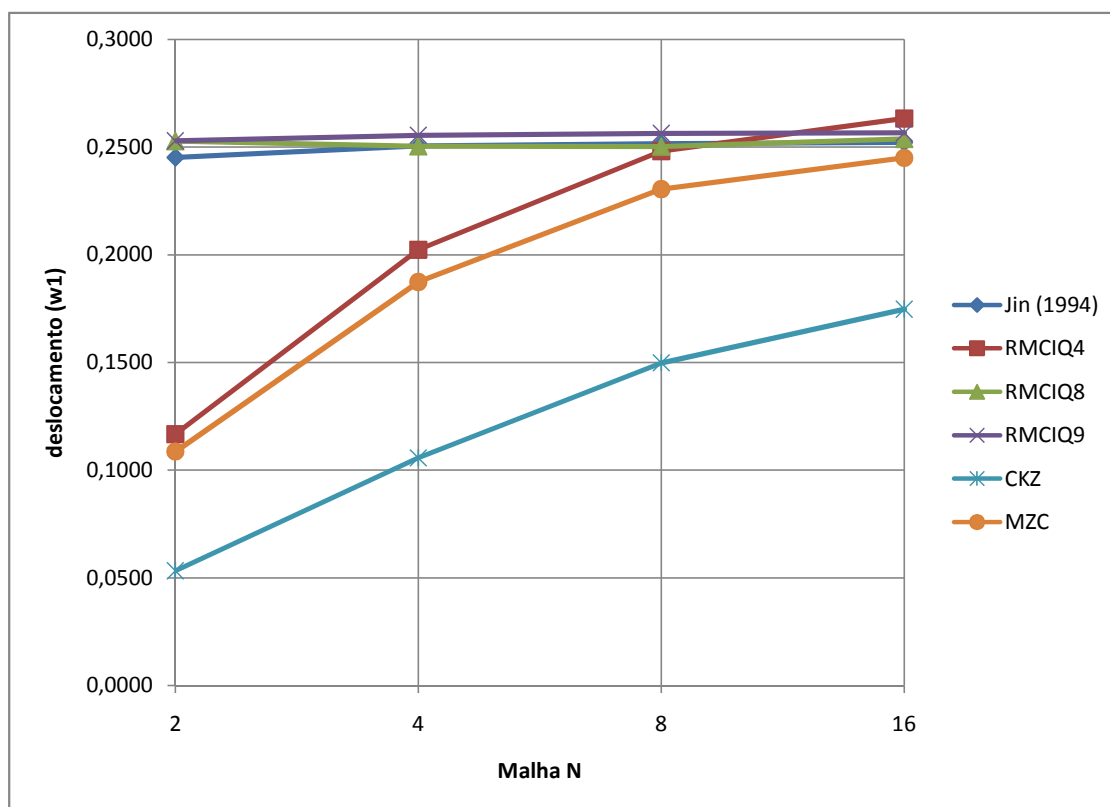
Para ilustrar os resultados do sistema **INSANE**, apresenta-se na Figura 6.9 a variação dos deslocamentos  $v$  obtida para a malha  $N = 8$  formada por elementos RMCIQ4, para viga submetida à torção.



**Figura 6.9:** Variação dos deslocamentos horizontais  $v$  para a malha  $N = 8$  formada por elementos RMCIQ4, submetida à torção.

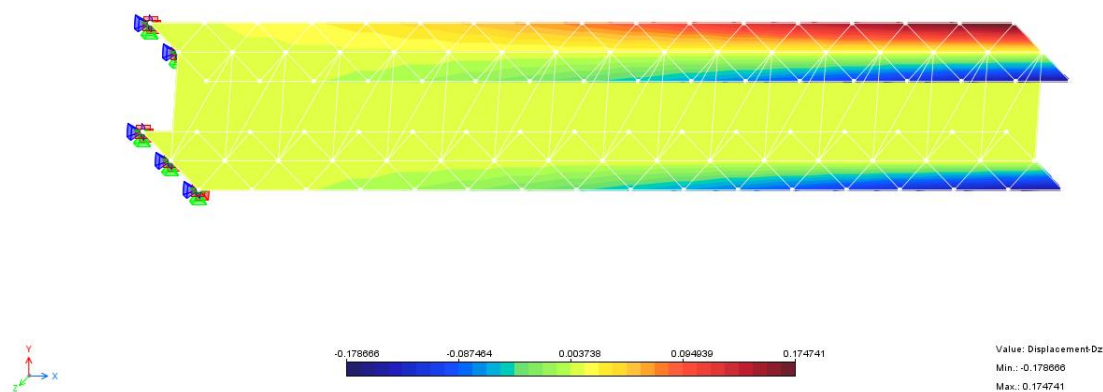
**Tabela 6.4:** Deslocamento  $w$  do ponto 1 da viga I submetida à torção em  $uc$ .

Malha N	Jin (1994)	RMCIQ4	RMCIQ8	RMCIQ9	CKZ	MZC
2	0,2451	0,1168	0,2528	0,2528	0,0533	0,1086
4	0,2505	0,2023	0,2503	0,2554	0,1057	0,1874
8	0,2515	0,2481	0,2502	0,2563	0,1498	0,2305
16	0,2521	0,2633	0,2538	0,2566	0,1747	0,2450

**Figura 6.10:** Deslocamento  $w$  do ponto 1 da viga I submetida à torção em  $uc$ .

Para ilustrar os resultados do sistema **INSANE**, apresenta-se na Figura 6.11 a variação dos deslocamentos verticais  $w$  obtida para a malha  $N = 16$  formada por elementos CKZ, para viga submetida à torção.





**Figura 6.11:** Variação dos deslocamentos verticais  $w$  para a malha  $N = 16$  formada por elementos CKZ, submetida à torção.

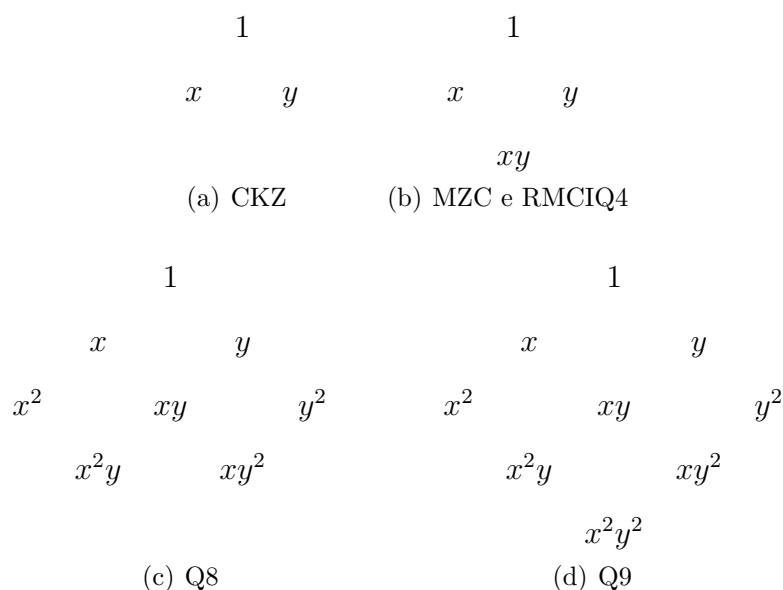
## 6.2.2 Discussão dos Resultados

Conforme mostram as Figuras 6.4, 6.6 e 6.8, todos os elementos apresentaram convergência monotônica por baixo. Isto pode ser explicado pela predominância de esforços de membrana, quando estes elementos comportam-se como elementos de estado plano de tensões.

Essas figuras também mostram a coincidência dos resultados dos elementos MZC e RMCIQ4. Mais uma vez, a predominância dos esforços de membrana explica o ocorrido, uma vez que a aproximação para estado plano de tensões desses elementos é a mesma (bilinear).

A predominância de esforços de membrana também explica os resultados melhores obtidos através dos elementos RMCIQ8 e RMCIQ9, pois, como mostra a Figura 6.12, esses elementos possuem aproximações de ordem superior. Essa figura também permite esclarecer o desempenho bastante inferior do elemento CKZ observado nas Figuras 6.4, 6.6, 6.8 e 6.10.

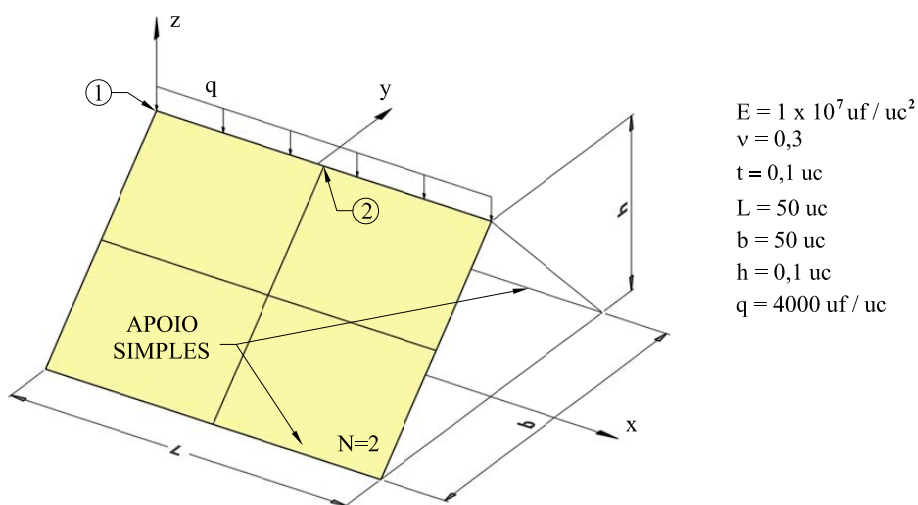
Observa-se, na Figura 6.10, que a coincidência entre os elementos MZC e RMCIQ4 deixa de existir. Isto pode ser explicado pela influência de esforços de flexão no deslocamento vertical da mesa inferior para a solicitação de torção.



**Figura 6.12:** Aproximação dos elementos para o comportamento de membrana

### 6.3 Casca Dobrada Simplesmente Apoiada em Dois Lados Opostos

Neste exemplo, que pode ser encontrado em Jin (1994), apresenta-se uma casca dobrada simplesmente apoiada em dois lados opostos (Figura 6.13). Malhas com  $N = 1, 2, 4$  e  $8$  são utilizadas e os resultados para os deslocamentos verticais  $w$  nos pontos 1 e 2 são comparados.



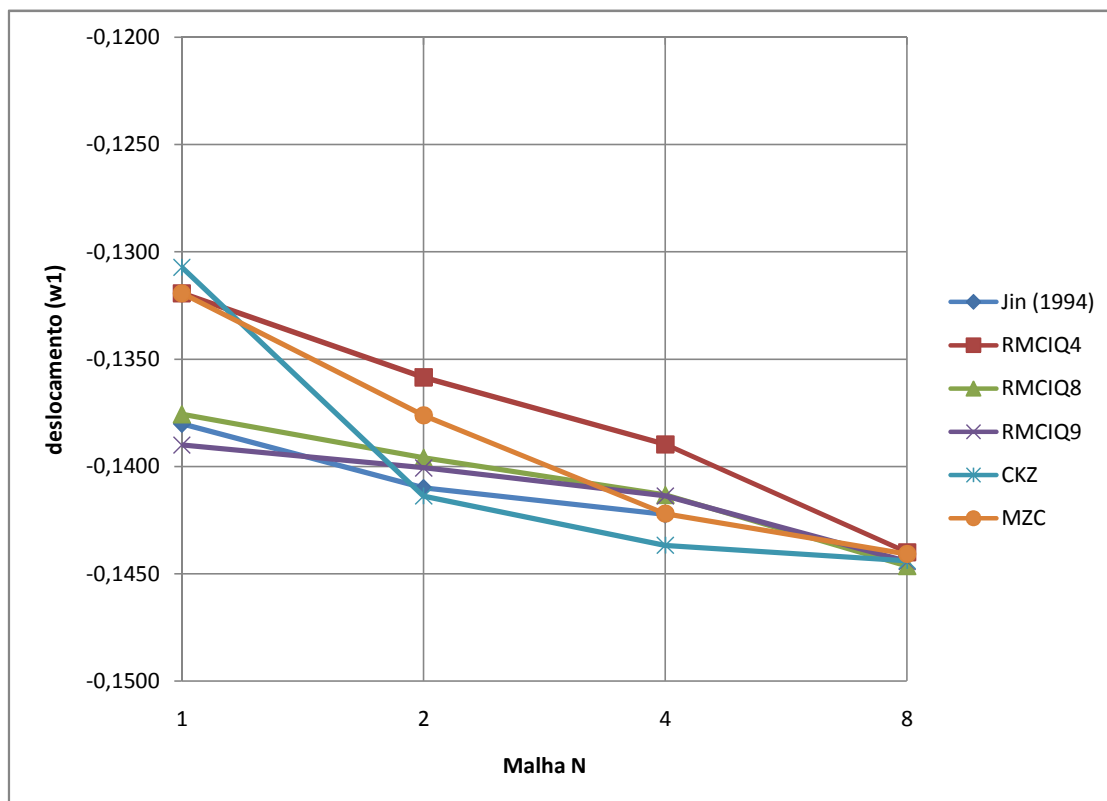
**Figura 6.13:** Casca dobrada simplesmente apoiada em dois lados opostos.

### 6.3.1 Resultados

Para este exemplo os deslocamentos verticais dos pontos 1 e 2, para as malhas  $N = 1, 2, 4$  e  $8$ , são apresentados nas Tabelas 6.5 e 6.6 e nas Figuras 6.14 e 6.15. No caso da Tabela 6.6, não foi apresentado o resultado para a malha  $N = 1$ , ponto 2, devido a inexistência deste ponto para esta malha. Ambos os deslocamentos são comparados com os resultados obtidos por Jin (1994).

**Tabela 6.5:** Deslocamento vertical do ponto 1 ( $w_1$ ) (Figura 6.13).

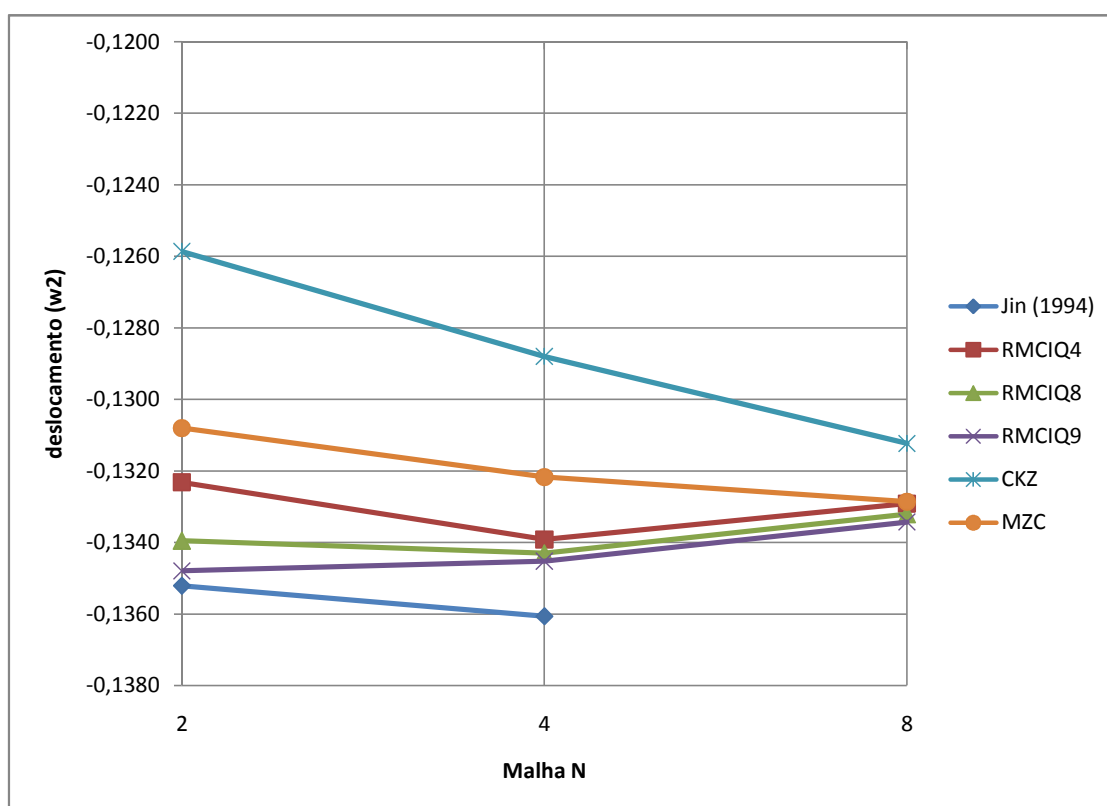
Malha N	Jin (1994)	RMCIQ4	RMCIQ8	RMCIQ9	CKZ	MZC
1	-0,1380	-0,1319	-0,1376	-0,1390	-0,1307	-0,1319
2	-0,1410	-0,1358	-0,1396	-0,1401	-0,1414	-0,1376
4	-0,1422	-0,1390	-0,1413	-0,1414	-0,1437	-0,1422
8	—	-0,1440	-0,1446	-0,1444	-0,1444	-0,1441



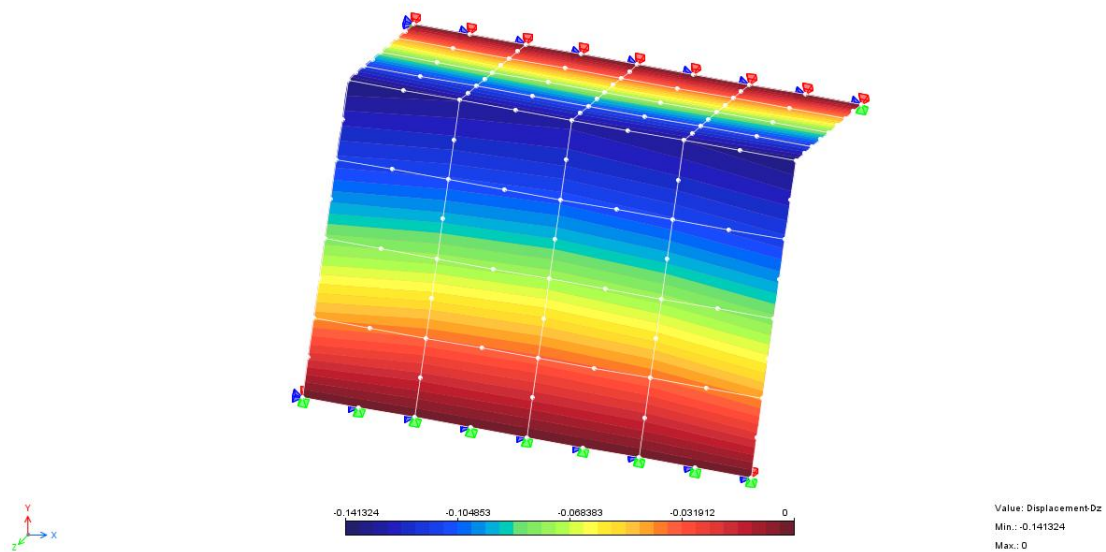
**Figura 6.14:** Deslocamento vertical do ponto 1 ( $w_1$ ) da casca dobrada.

**Tabela 6.6:** Deslocamento vertical do ponto 2 ( $w_2$ ) (Figura 6.13).

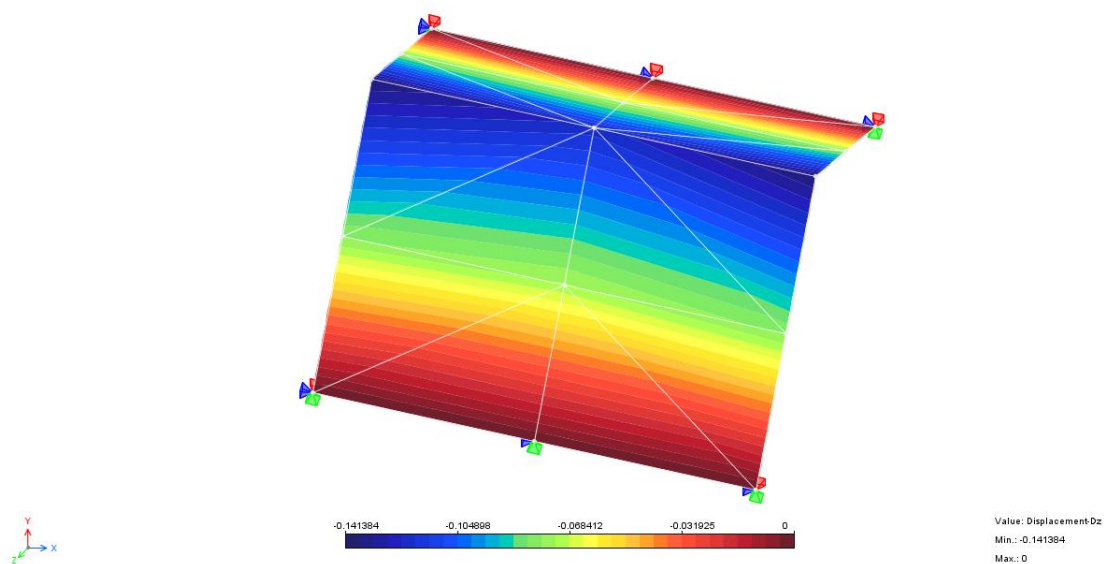
Malha N	Jin (1994)	RMCIQ4	RMCIQ8	RMCIQ9	CKZ	MZC
2	-0,1352	-0,1323	-0,1340	-0,1348	-0,1259	-0,1308
4	-0,1361	-0,1339	-0,1343	-0,1345	-0,1288	-0,1322
8	—	-0,1329	-0,1332	-0,1334	-0,1312	-0,1329

**Figura 6.15:** Deslocamento vertical do ponto 2 ( $w_2$ ) da casca dobrada.

Para ilustrar os resultados do sistema **INSANE**, apresentam-se nas Figuras 6.16 e 6.17 a variação dos deslocamentos verticais  $w$  obtida para a malha  $N = 4$  formada por elementos RMCIQ8 e malha  $N = 2$  formada por elementos CKZ, respectivamente, para viga submetida à torção.



**Figura 6.16:** Variação dos deslocamentos verticais  $w$  para a malha  $N = 4$  formada por elementos RMCIQ8.



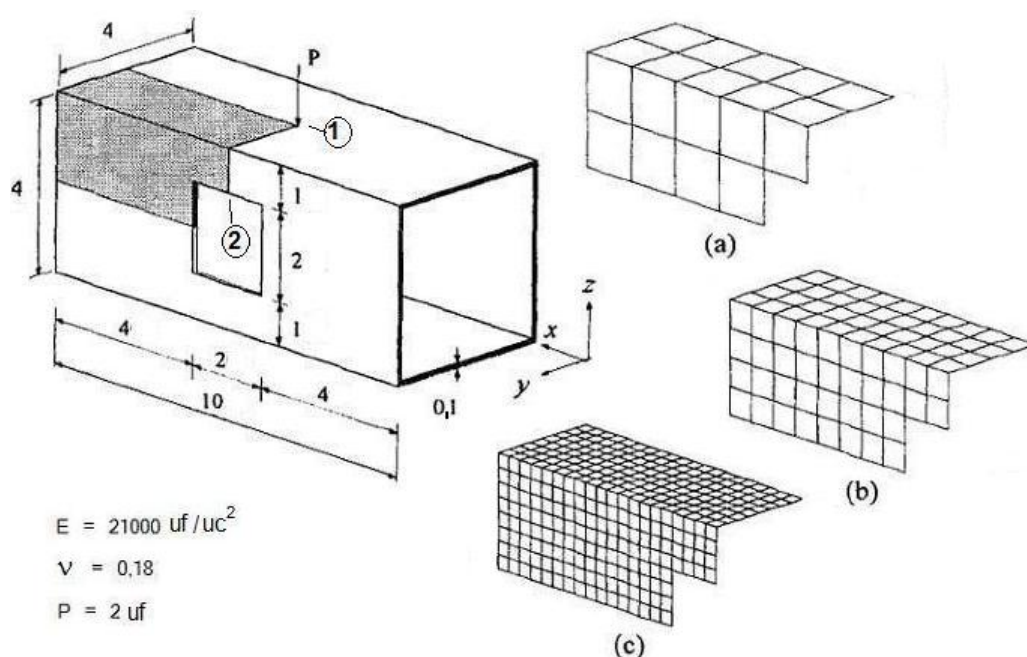
**Figura 6.17:** Variação dos deslocamentos verticais  $w$  para a malha  $N = 2$  formada por elementos CKZ.

### 6.3.2 Discussão dos Resultados

Como mostram as Figuras 6.14 e 6.15, a exceção do CKZ, todos os elementos convergiram para o mesmo resultado com a malha  $N = 8$  ( $2 \times 8 \times 8 = 128$  elementos). Como já esperado o elemento CKZ converge mais lentamente, devido à sua menor ordem de aproximação. Particularmente a malha com 4 elementos CKZ ( $N = 1$ ) apresenta resultado influenciado pela inevitável perda de simetria.

## 6.4 Caixa com Furos Carregada com Duas Cargas Concentradas Opostas

Em Choi e Lee (1996), uma caixa com furos, conforme pode ser visto na Figura 6.18, é carregada em dois lados opostos com cargas concentradas centralizadas. Utilizando simetria, apenas 1/8 da estrutura é de fato analisado. As malhas utilizadas são refinadas sequencialmente sendo que na malha (a) o número de nós é igual a 29, em (b) tem-se 95 nós e em (c) 341 nós (Figura 6.18).



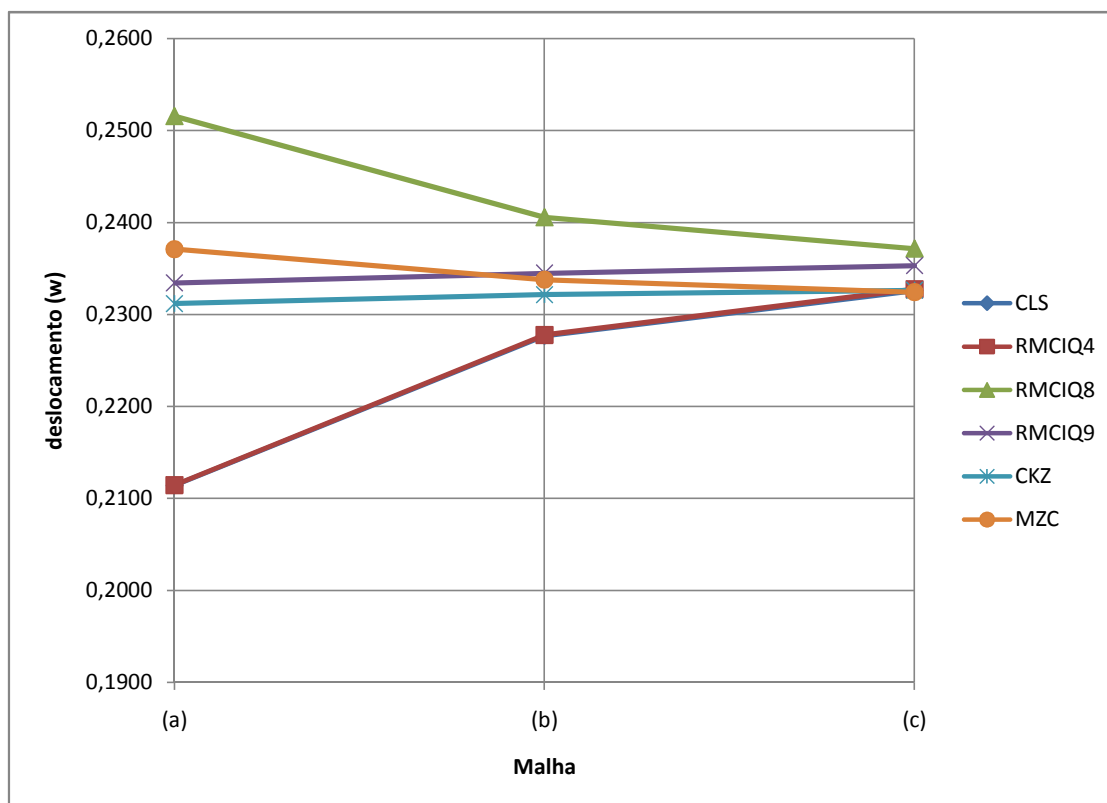
**Figura 6.18:** Caixa com furos (dimensões em  $uc$ ). Adaptado de (Choi e Lee, 1996).

### 6.4.1 Resultados

Os resultados do deslocamento vertical do ponto 1, juntamente com os valores encontrados para o elemento de casca “CLS” de Choi e Lee (1996), que é um elemento que apresenta um número de nós intermediários variável e com grau de liberdade rotacional  $\theta_{z'}$ , podem ser visualizados na Tabela 6.7 e Figura 6.19, a seguir:

**Tabela 6.7:** Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga (Ponto 1).

Malha	CLS	RMCIQ4	RMCIQ8	RMCIQ9	CKZ	MZC
(a)	0,2114	0,2115	0,2516	0,2334	0,2312	0,2371
(b)	0,2277	0,2278	0,2406	0,2345	0,2322	0,2338
(c)	0,2326	0,2328	0,2372	0,2353	0,2326	0,2324



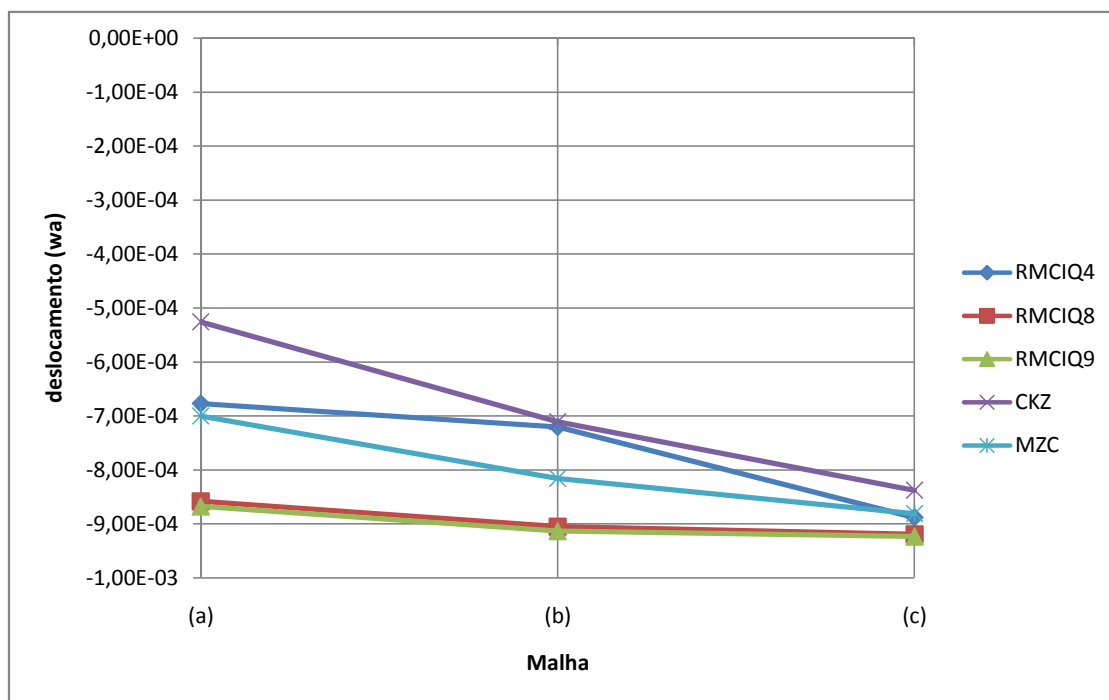
**Figura 6.19:** Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga (Ponto 1).

Os resultados do deslocamento vertical do ponto 2 podem ser visualizados na

Tabela 6.8 e Figura 6.20.

**Tabela 6.8:** Deslocamento vertical do ponto 2.

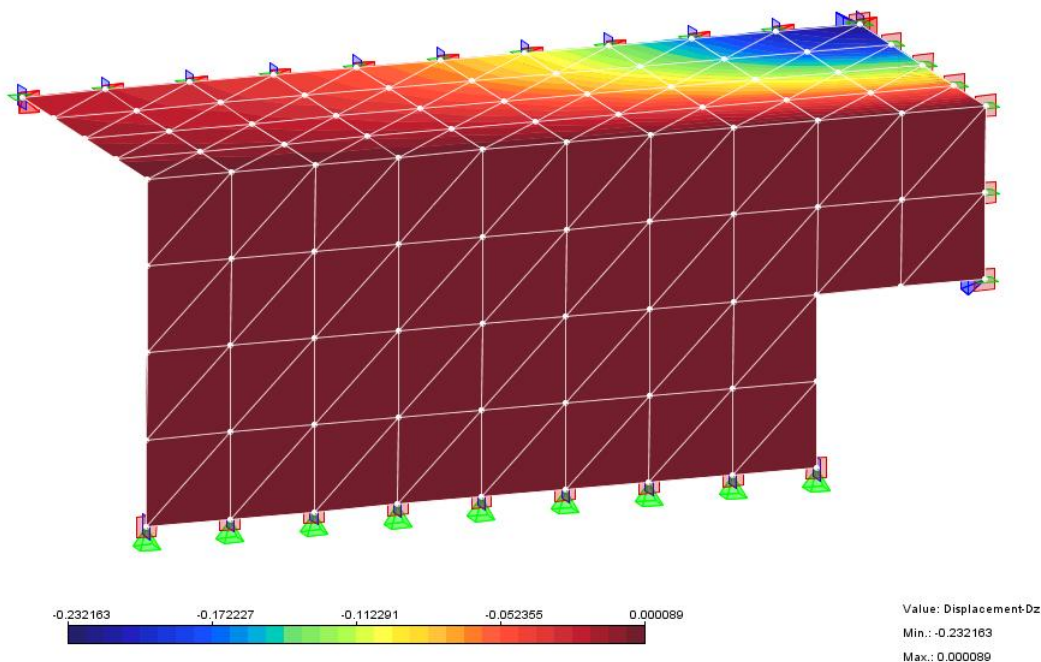
Malha	RMCIQ4	RMCIQ8	RMCIQ9	CKZ	MZC
(a)	-6,77E-04	-8,58E-04	-8,68E-04	-5,26E-04	-7,00E-04
(b)	-7,20E-04	-9,05E-04	-9,13E-04	-7,11E-04	-8,16E-04
(c)	-8,88E-04	-9,19E-04	-9,23E-04	-8,38E-04	-8,81E-04



**Figura 6.20:** Deslocamento vertical do ponto 2.

Para ilustrar os resultados do sistema **INSANE**, apresenta-se na Figura 6.21 a variação de deslocamentos verticais  $w$  para a malha (b) formada por elementos CKZ.



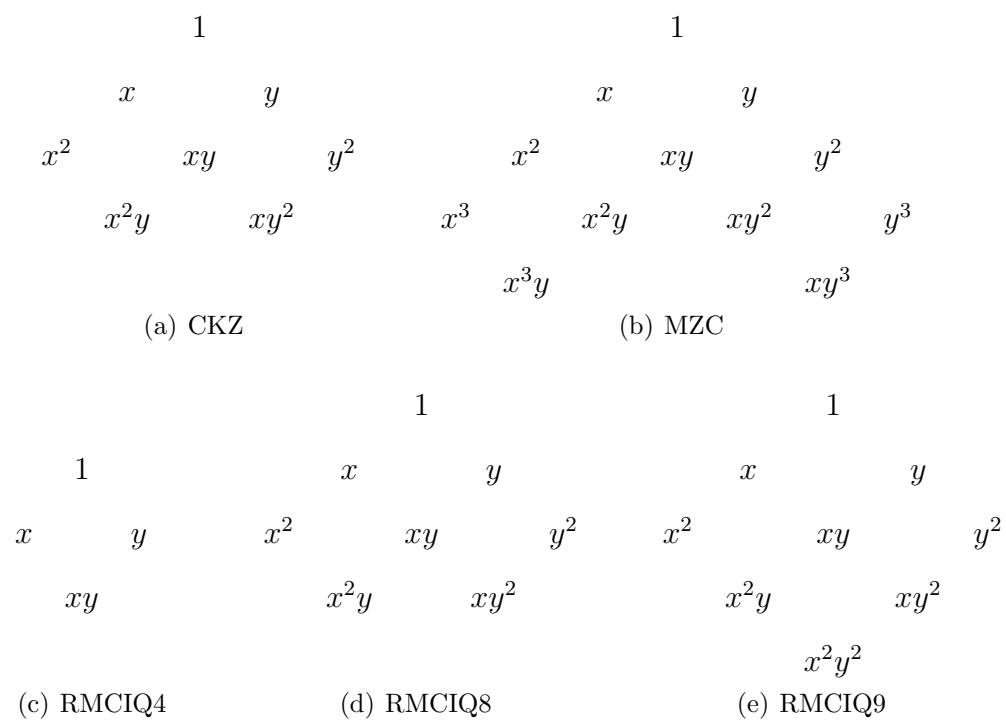


**Figura 6.21:** Resultado para o elemento CKZ, malha (b).

## 6.4.2 Discussão dos Resultados

Neste problema, onde há predominância de flexão, observa-se que o elemento RMCIQ4 apresenta convergência monotônica por baixo (Figura 6.19), e os demais por cima, confirmando Saliba (2007). Os elementos MZC e CKZ apresentam convergência mais rápida que os elementos RMCIQ4 e RMCIQ8, o que pode ser confirmado pela ordem de aproximação de suas funções de forma, para a parcela de flexão, dadas na Figura 6.22.

Nos demais exemplos, existe a predominância de esforços de membrana. Assim, todos os elementos convergem monotonicamente por baixo e os elementos que possuem maior número de nós convergem mais rapidamente.



**Figura 6.22:** Aproximação dos elementos para o comportamento de flexão

# Capítulo 7

## EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 7.1 Introdução

As possíveis aplicações dos elementos de cascas planos em engenharia civil são inúmeras. Como exemplo, pode-se citar sua utilização no cálculo de reservatórios, edifícios, pontes, muros, coberturas, etc. Isto torna esse elemento um dos mais utilizados no cálculo dessas estruturas. Além disso, eles também possuem diversas aplicações em engenharia mecânica, naval e aeronáutica, entre outras. Serão apresentadas neste capítulo, algumas aplicações dentro da engenharia civil, já que apresentar as possíveis aplicações em todos os campos está fora do alcance deste trabalho. Em todos os exemplos, o elemento utilizado foi o RMC1Q4.

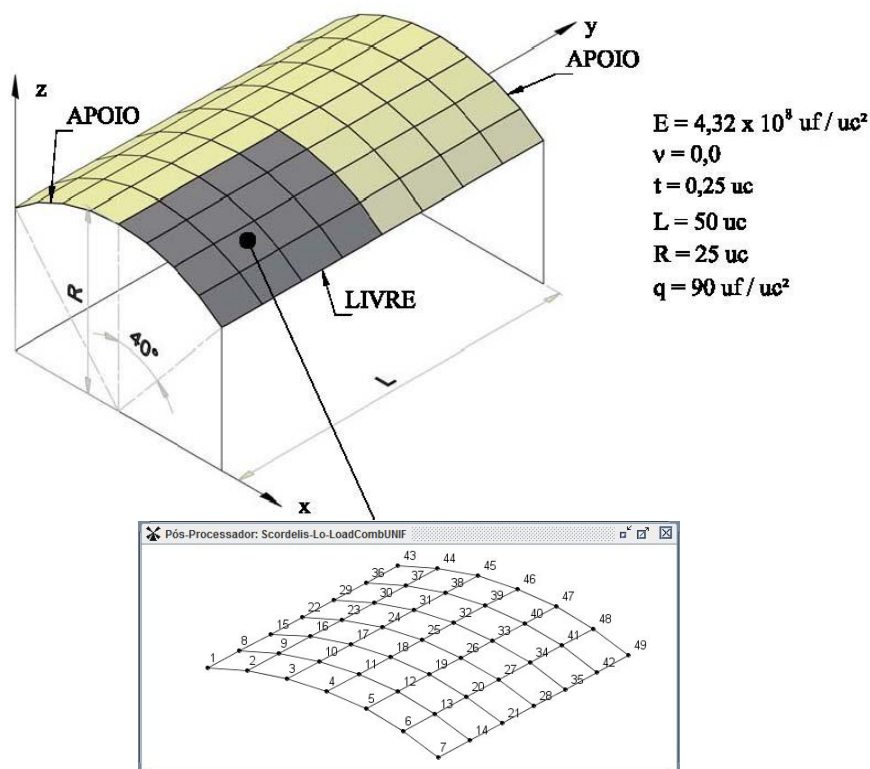
### 7.2 Telhado Cilíndrico de Scordelis-Lo

Neste exemplo, um telhado em abóboda cilíndrica é analisado com cargas distribuídas. Os deslocamentos e momentos fletores ao longo do apoio e ao longo da seção central também são comparados com resultados teóricos.

#### 7.2.1 Geometria e Propriedades

A geometria, propriedades e carregamento são como sugeridos por Macneal e Harder (1985) e estão mostrados na Figura 7.1. Com uma espessura igual a  $0,25 uc$

e comprimento entre apoios igual a  $50 uc$ , a estrutura é simplesmente apoiada (restrições em  $u$  e  $w$ ) ao longo de sua borda curva e sua borda reta é livre. O telhado tem um raio de  $25 uc$  com um ângulo central de  $40^\circ$ . Aproveitando sua simetria, apenas  $1/4$  da estrutura é de fato analisada e uma malha de  $6 \times 6$  elementos é utilizada. As condições de simetria são impostas através da restrição dos graus de liberdade  $v$  e  $\theta_x$  dos nós 44 ao 49; restringindo os graus de liberdade  $u$  e  $\theta_y$  dos nós 1, 8, 15, 22, 29 e 36; e restringindo  $v$ ,  $\theta_x$ ,  $u$  e  $\theta_y$  para o nó 43. O carregamento é de  $90 uf/uc^2$ , distribuído ao longo de todo o telhado na direção  $-z$ .

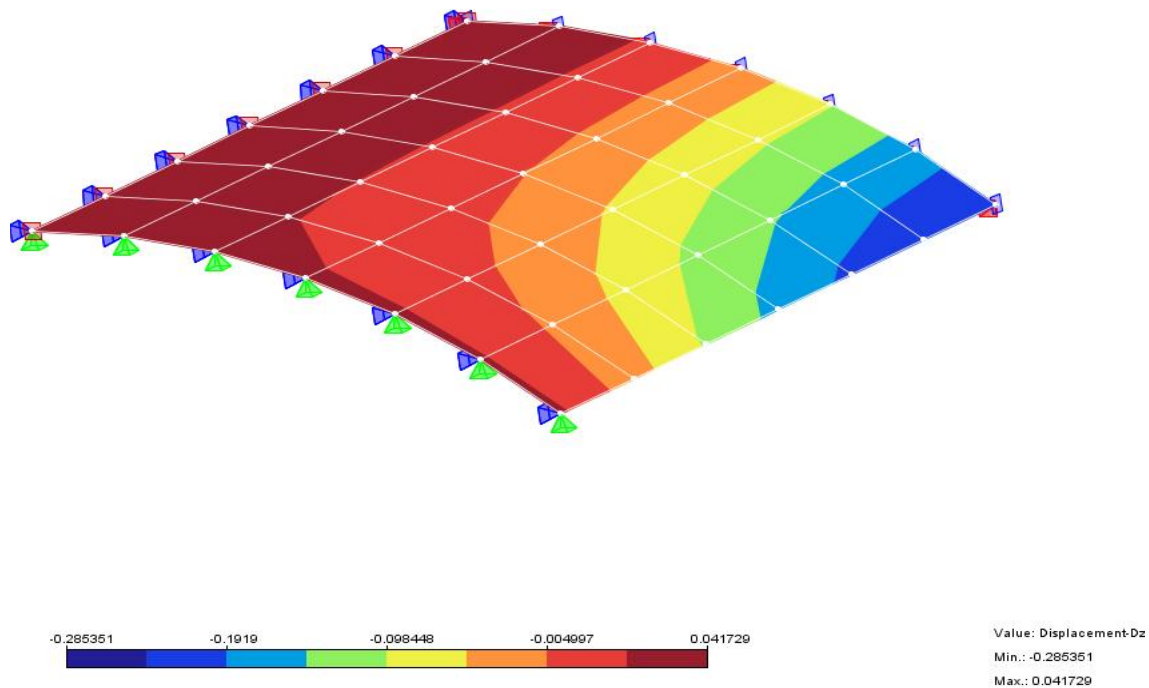


**Figura 7.1:** Geometria, propriedades e malha com numeração dos nós utilizada para o telhado cilíndrico de Scordelis-Lo.

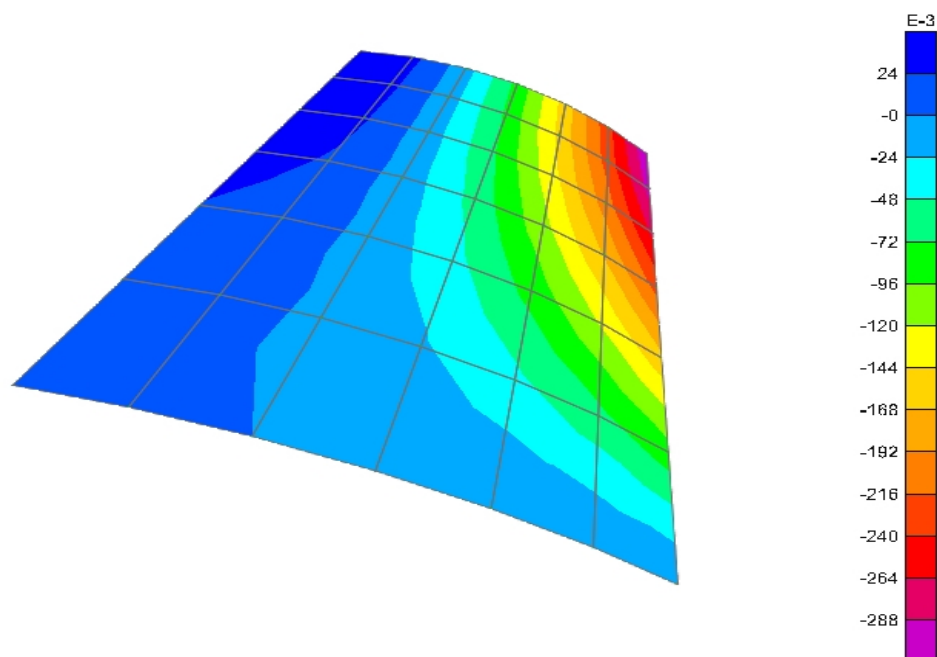
## 7.2.2 Resultados

Os resultados do **INSANE** são comparados aos resultados teóricos e com o elemento “*shell-thick*” do programa comercial **SAP2000 - Versão 11.0.8**. Os resultados teóricos para os deslocamentos e momentos fletores ao longo do apoio (nós 1

a 7) e da seção central (nós 43 a 49) foram obtidos por Zienkiewicz (1977), utilizando a teoria apresentada em Scordelis e Lo (1964).



**Figura 7.2:** Deslocamentos verticais obtidos pelo **INSANE**.



**Figura 7.3:** Deslocamentos verticais obtidos pelo **SAP2000 - Versão 11.0.8**.

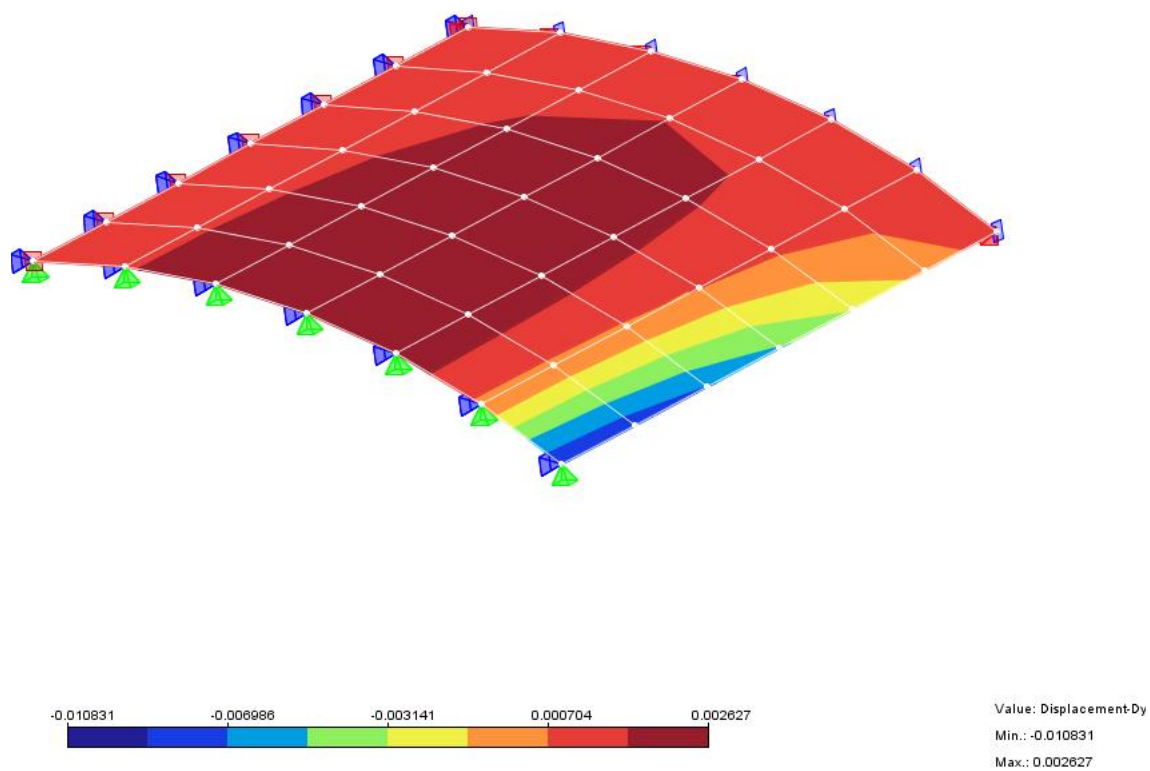


Figura 7.4: Deslocamentos  $v$  obtidos pelo INSANE.

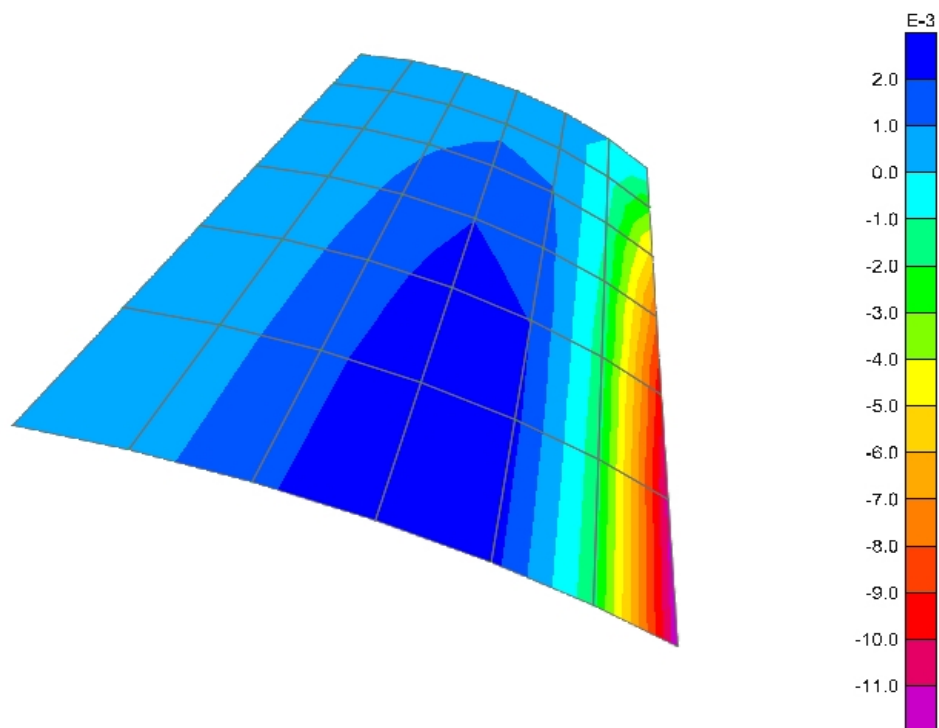


Figura 7.5: Deslocamentos  $v$  obtidos pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.

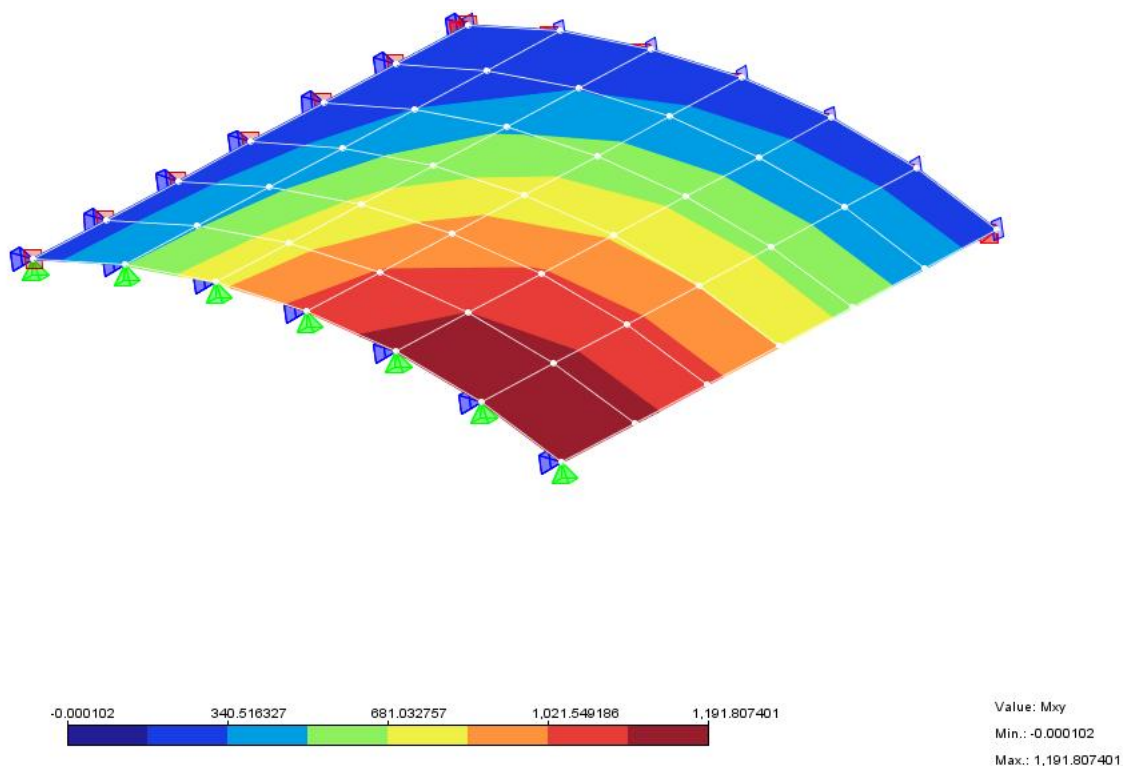


Figura 7.6: Momentos de torção  $M_{x'y'}$  obtidos pelo INSANE.

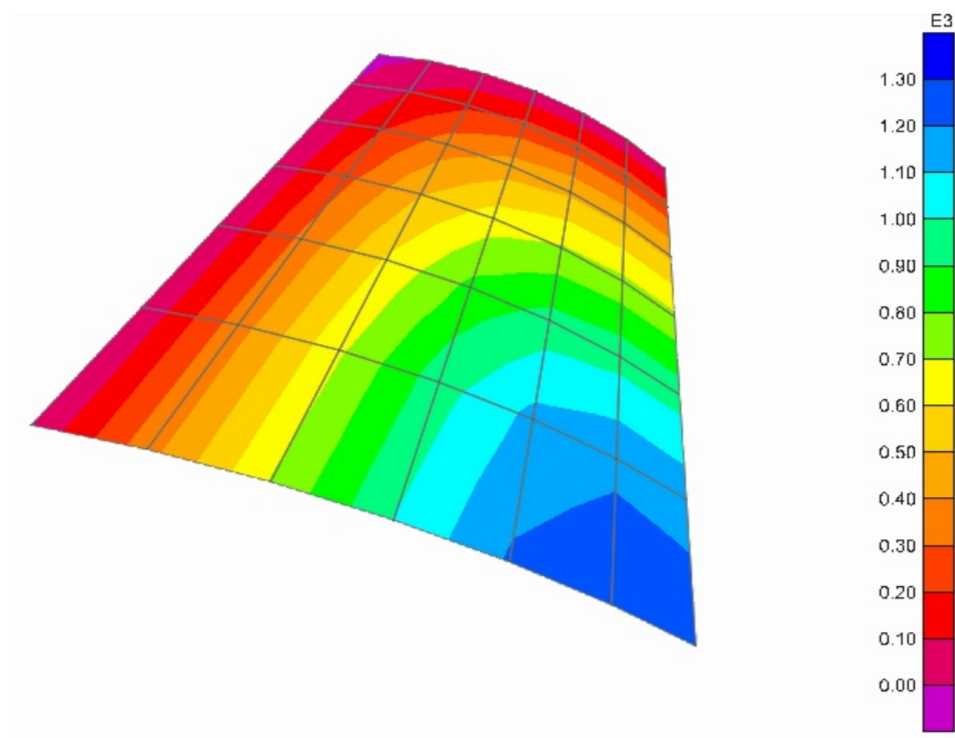


Figura 7.7: Momentos de torção  $M_{x'y'}$  obtidos pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.

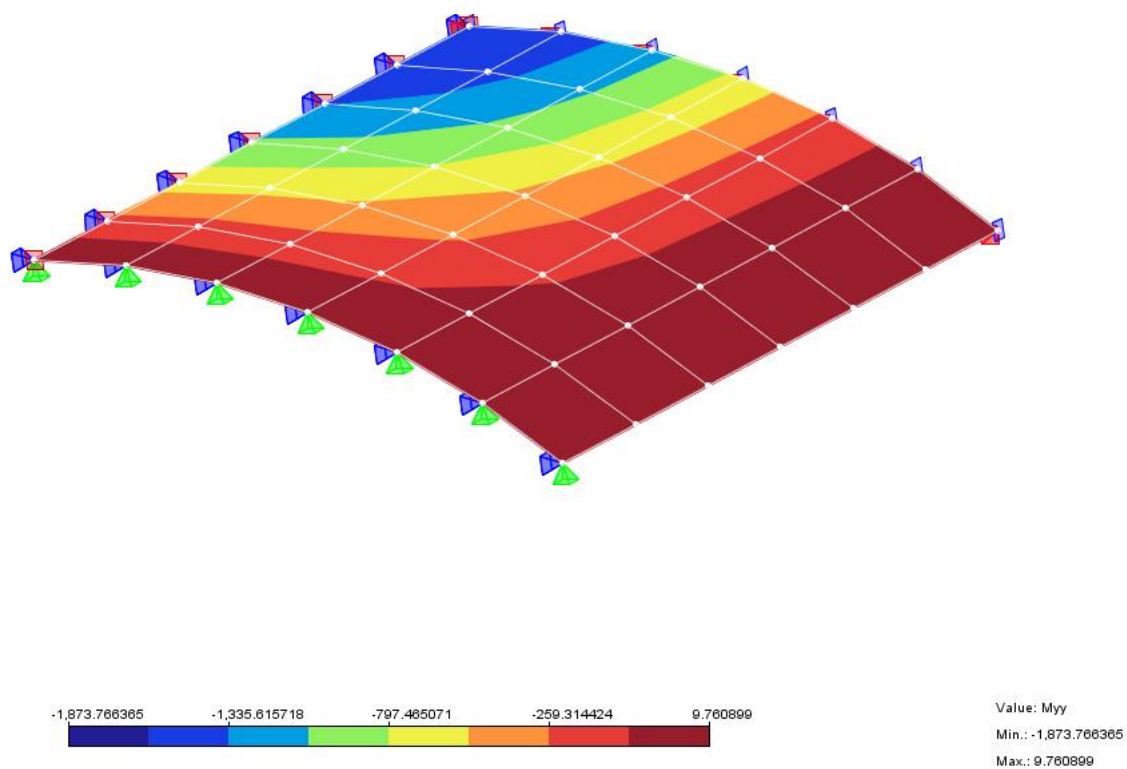


Figura 7.8: Diagrama de momentos  $M_{y'}$  obtidos pelo INSANE.

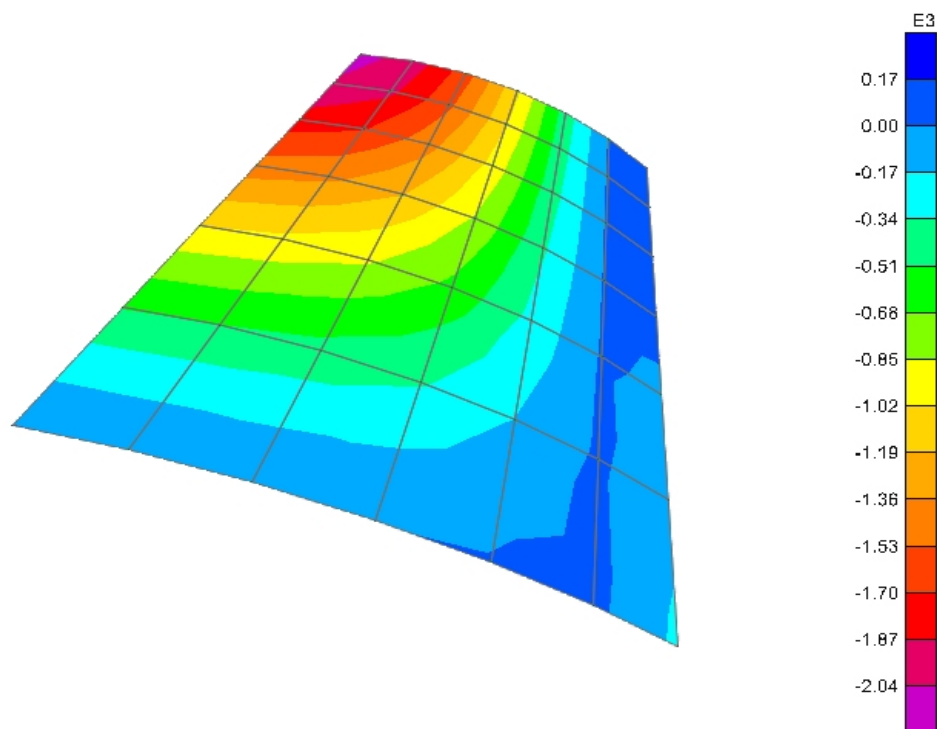


Figura 7.9: Diagrama de momentos  $M_{y'}$  obtidos pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.



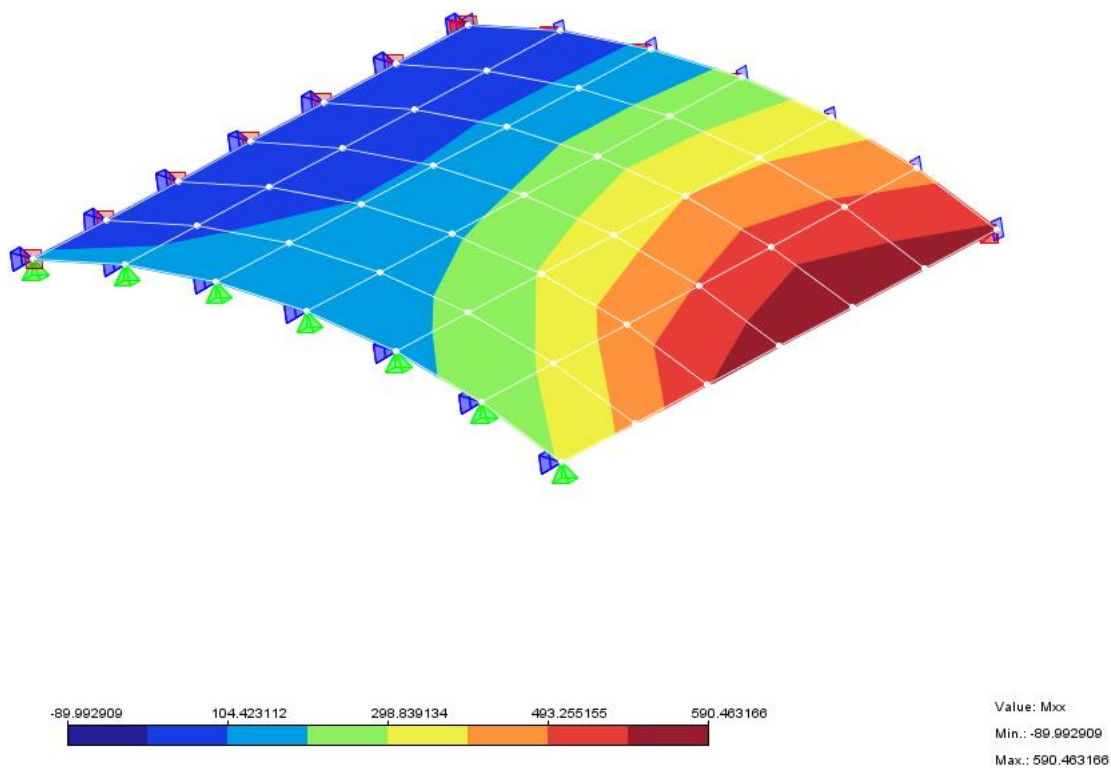


Figura 7.10: Diagrama de momentos  $M_{x'}$  obtidos pelo INSANE.

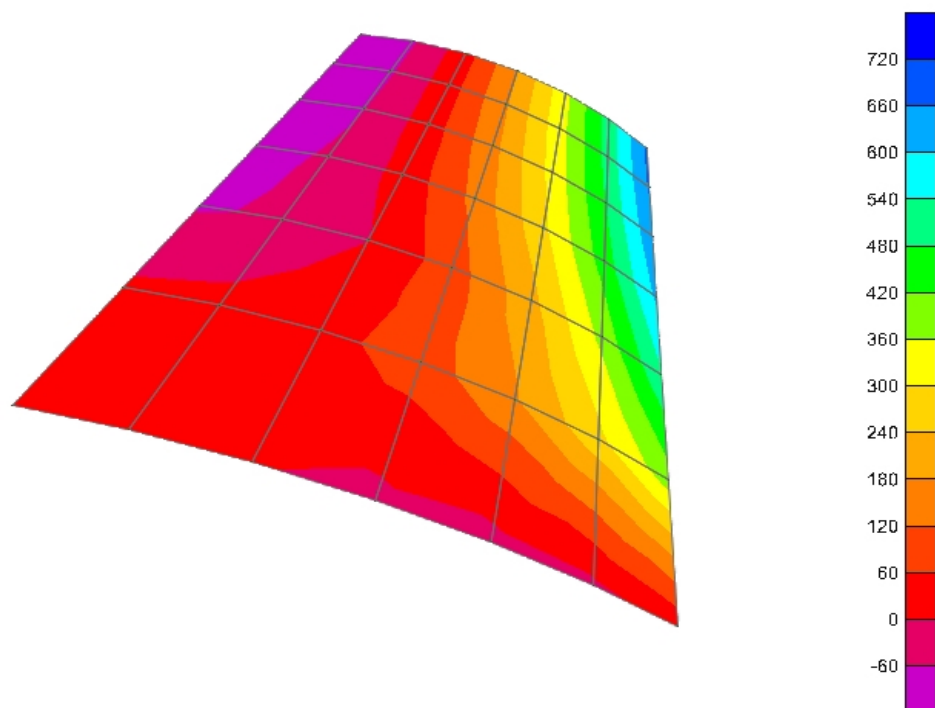
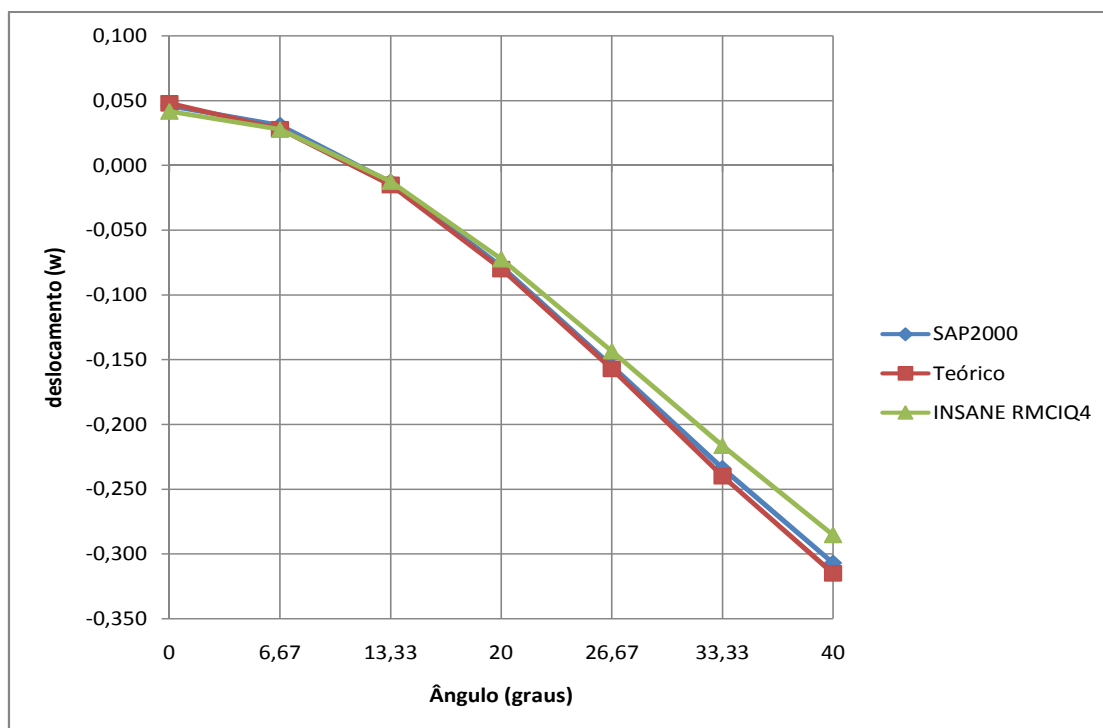


Figura 7.11: Diagrama de momentos  $M_{x'}$  obtidos pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.

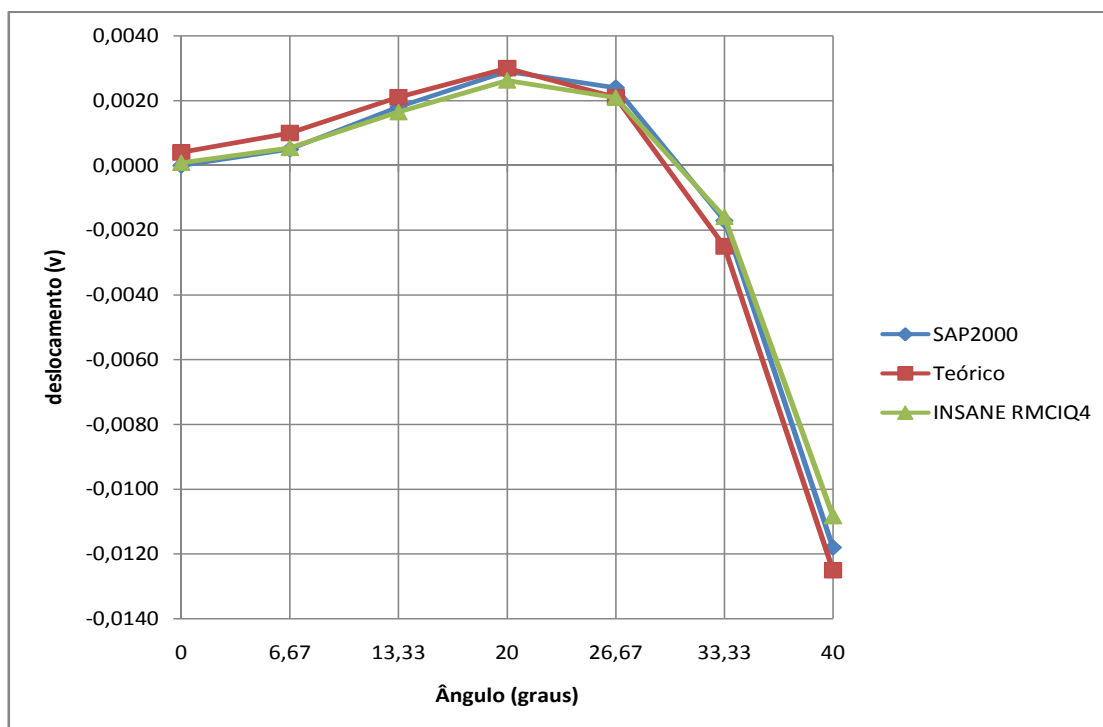
**Tabela 7.1:** Deslocamentos verticais ( $w$ ) na seção central.

Ângulo	Parâmetro	SAP2000	Teórico	INSANE RMCIQ4
$0^\circ$	$w$ (Nó 43)	0,046	0,048	0,042
$6,67^\circ$	$w$ (Nó 44)	0,031	0,028	0,028
$13,33^\circ$	$w$ (Nó 45)	-0,013	-0,015	-0,012
$20^\circ$	$w$ (Nó 46)	-0,078	-0,080	-0,072
$26,67^\circ$	$w$ (Nó 47)	-0,155	-0,157	-0,143
$33,33^\circ$	$w$ (Nó 48)	-0,234	-0,240	-0,217
$40^\circ$	$w$ (Nó 49)	-0,307	-0,315	-0,285

**Figura 7.12:** Deslocamentos verticais ( $w$ ) na seção central.

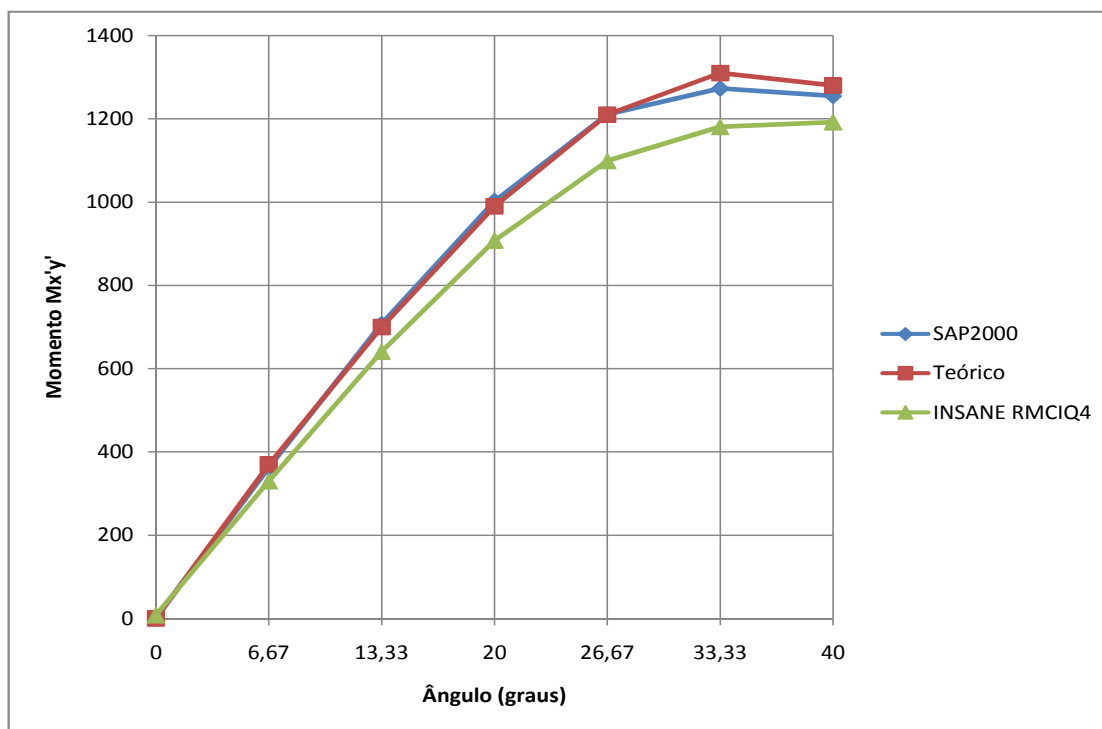
**Tabela 7.2:** Deslocamentos  $v$  no apoio.

Ângulo	Parâmetro	SAP2000	Teórico	INSANE RMCIQ4
$0^\circ$	$v$ (Nó 1)	0,0000	0,0004	0,0001
$6,67^\circ$	$v$ (Nó 2)	0,0005	0,0010	0,0005
$13,33^\circ$	$v$ (Nó 3)	0,0018	0,0021	0,0017
$20^\circ$	$v$ (Nó 4)	0,0029	0,0030	0,0026
$26,67^\circ$	$v$ (Nó 5)	0,0024	0,0021	0,0021
$33,33^\circ$	$v$ (Nó 6)	-0,0017	-0,0025	-0,0016
$40^\circ$	$v$ (Nó 7)	-0,0118	-0,0125	-0,0108

**Figura 7.13:** Deslocamentos  $v$  no apoio.

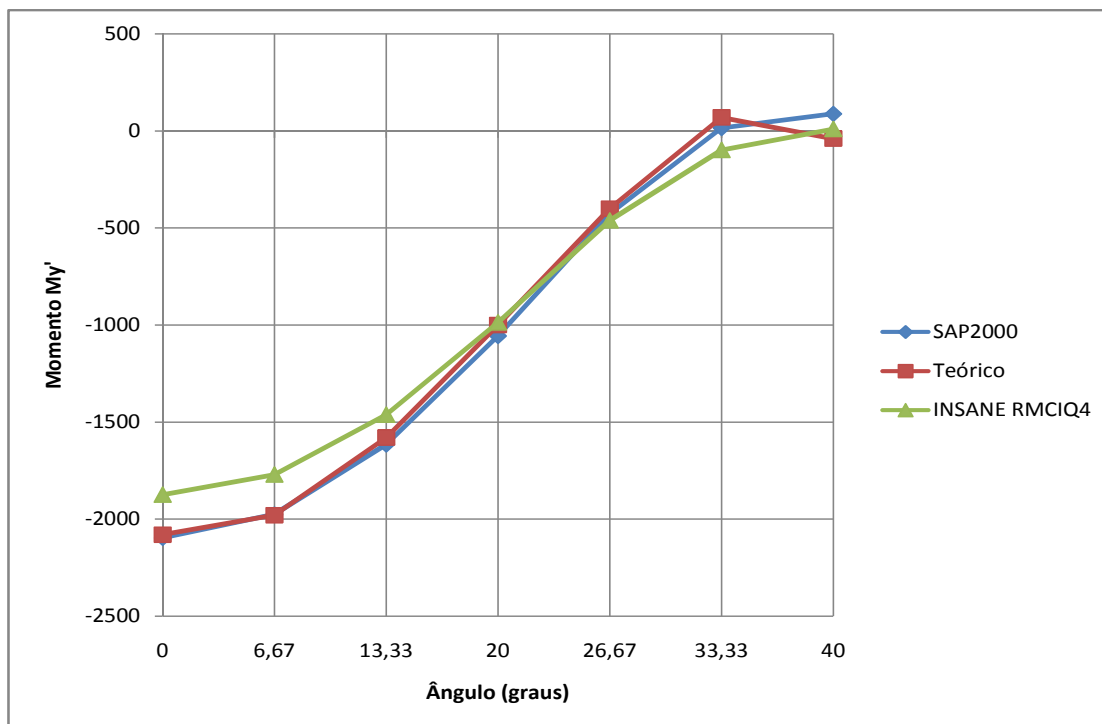
**Tabela 7.3:** Momento de torção no apoio ( $M_{x'y'}$ ).

Ângulo	Parâmetro	SAP2000	Teórico	INSANE RMCIQ4
0°	$M_{x'y'}$ (Nó 1)	1	0	8
6,67°	$M_{x'y'}$ (Nó 2)	362	370	330
13,33°	$M_{x'y'}$ (Nó 3)	707	700	641
20°	$M_{x'y'}$ (Nó 4)	1003	990	908
26,67°	$M_{x'y'}$ (Nó 5)	1211	1210	1099
33,33°	$M_{x'y'}$ (Nó 6)	1273	1310	1181
40°	$M_{x'y'}$ (Nó 7)	1255	1280	1192

**Figura 7.14:** Momento de torção no apoio ( $M_{x'y'}$ ).

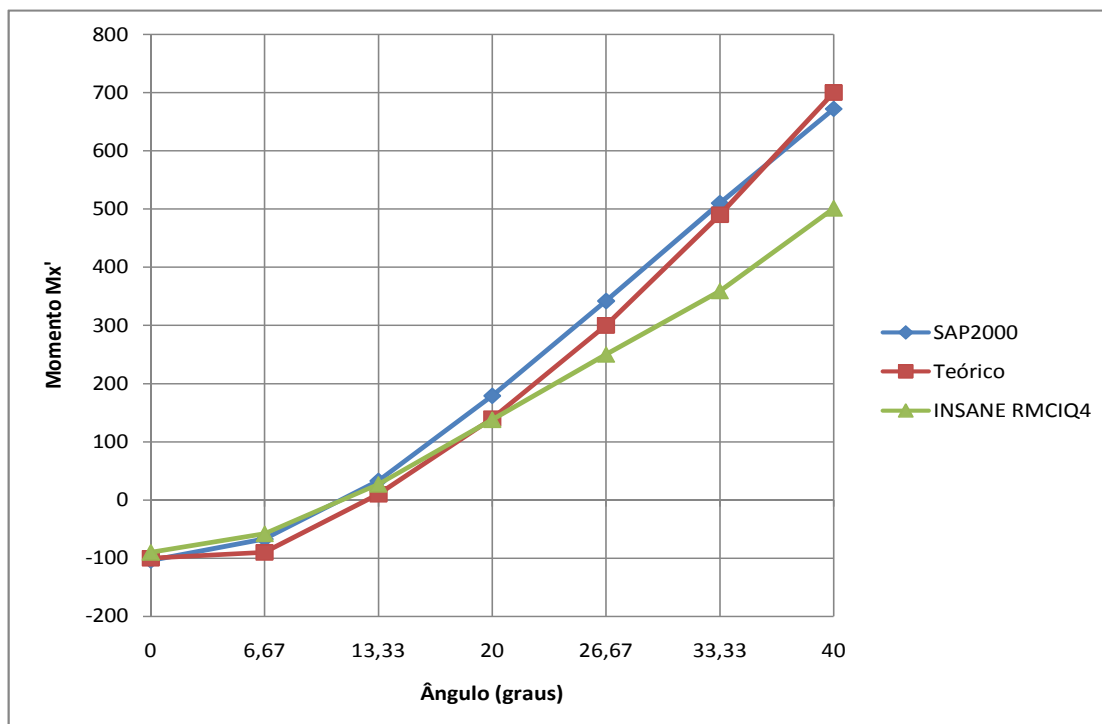
**Tabela 7.4:** Momentos transversais na seção central ( $M_{y'}$ ).

Ângulo	Parâmetro	SAP2000	Teórico	INSANE RMCIQ4
0°	$M_{y'}$ (Nó 43)	-2097	-2080	-1874
6,67°	$M_{y'}$ (Nó 44)	-1976	-1980	-1770
13,33°	$M_{y'}$ (Nó 45)	-1616	-1580	-1462
20°	$M_{y'}$ (Nó 46)	-1056	-1000	-986
26,67°	$M_{y'}$ (Nó 47)	-427	-400	-461
33,33°	$M_{y'}$ (Nó 48)	16	70	-98
40°	$M_{y'}$ (Nó 49)	89	-40	10

**Figura 7.15:** Momentos transversais na seção central ( $M_{y'}$ ).

**Tabela 7.5:** Momentos longitudinais na seção central ( $M_{x'}$ ).

Ângulo	Parâmetro	SAP2000	Teórico	INSANE RMCIQ4
0°	$M_{x'}$ (Nó 43)	-104	-100	-90
6,67°	$M_{x'}$ (Nó 44)	-67	-90	-58
13,33°	$M_{x'}$ (Nó 45)	33	10	27
20°	$M_{x'}$ (Nó 46)	179	140	138
26,67°	$M_{x'}$ (Nó 47)	342	300	250
33,33°	$M_{x'}$ (Nó 48)	510	490	359
40°	$M_{x'}$ (Nó 49)	672	700	501

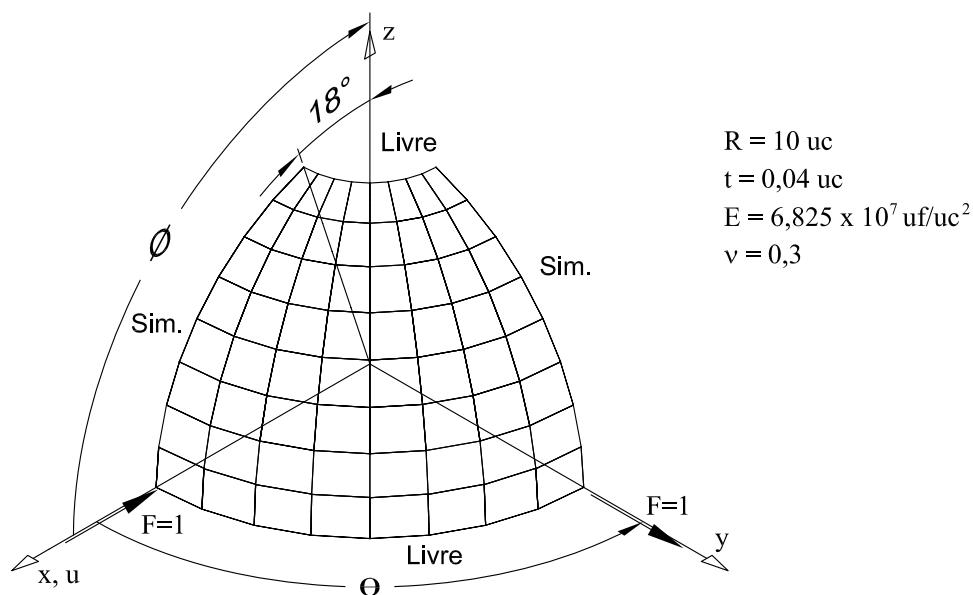
**Figura 7.16:** Momentos longitudinais na seção central ( $M_{x'}$ ).

## 7.3 Casca Esférica Aberta com Cargas Pontuais Radiais

### Radiais

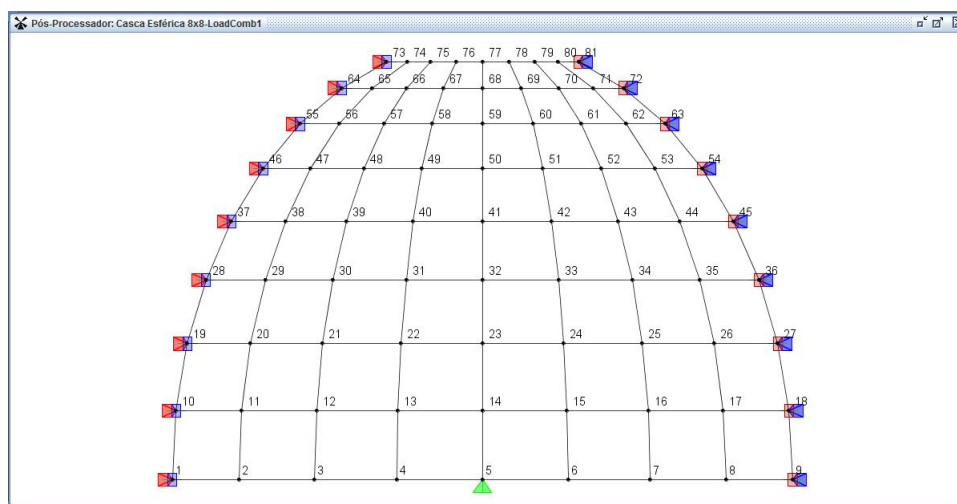
Neste exemplo, uma estrutura em casca hemisférica é analisada com um carregamento de quatro cargas pontuais com sentidos alternados, a cada  $90^\circ$  ao longo do equador do hemisfério, com intensidade igual a  $2 uf$ . Utilizando simetria, apenas  $1/4$  da estrutura é analisada, sendo assim a carga aplicada passa a ser de  $1 uf$  por quadrante.

A geometria, propriedades e carregamentos são como dados pela Figura 7.17. Nesta mesma figura, pode ser observada uma abertura no topo do hemisfério. Tanto a borda superior como a inferior são livres.



**Figura 7.17:** Casca esférica aberta com cargas pontuais radiais.

A malha de elementos finitos utilizada para o problema é a da Figura 7.18.



**Figura 7.18:** Malha de elementos finitos utilizada para a casca esférica.

Para representar as condições de simetria de 1/4 da casca esférica foram restringidos os graus de liberdade  $u$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$  para os nós situados no plano  $x = 0$  e os graus de liberdade  $v$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_z$  para os nós situados no plano  $y = 0$ .

Deve-se ressaltar, no entanto, que o procedimento acima descrito não representa exatamente a simetria do problema, pois esses graus de liberdade rotacionais deveriam ser restringidos em termos de eixos locais. Resumidamente, os graus de liberdade que deveriam ser restringidos são de fato os graus de liberdade  $\theta_{x'}$  e  $\theta_{y'}$ , dependendo da forma com se adota os eixos locais dos nós.

### 7.3.1 Resultados

Os resultados do **INSANE**, para o elemento RMCIQ4, são comparados aos resultados do elemento “*shell-thick*” do programa comercial **SAP2000 - Versão 11.0.8**.



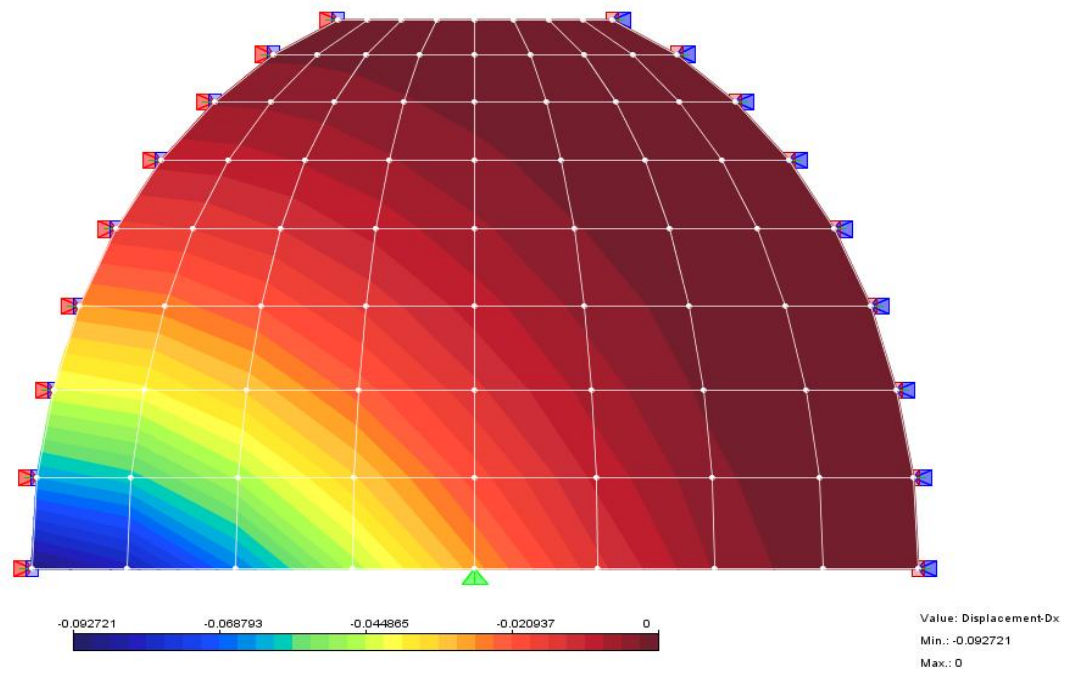


Figura 7.19: Deslocamentos  $u$  obtidos pelo INSANE.

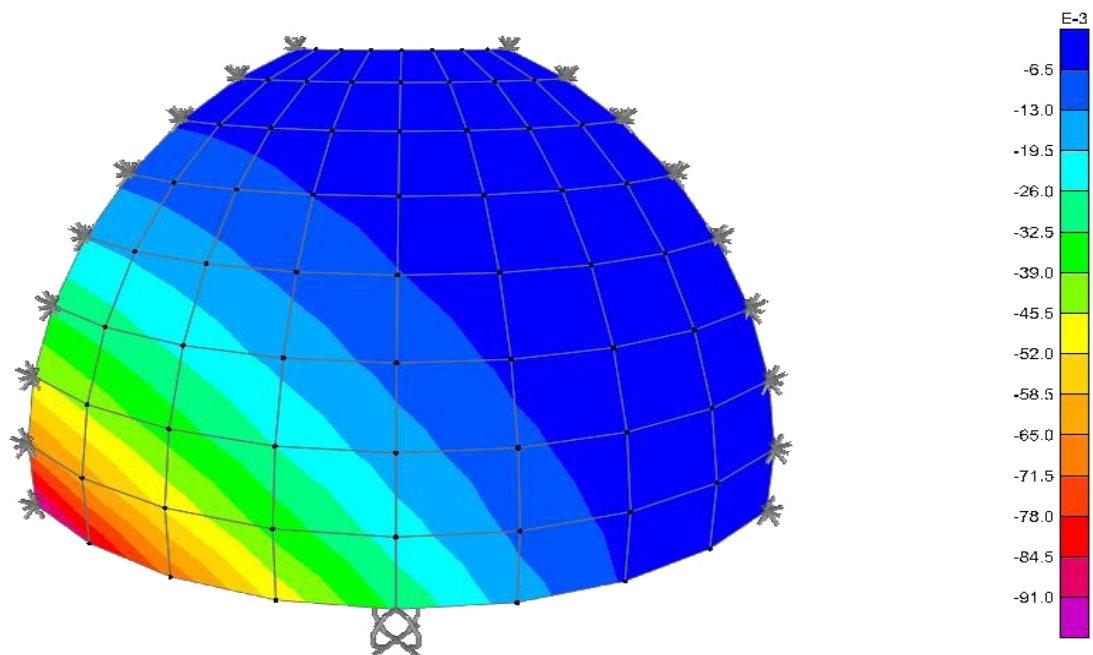


Figura 7.20: Deslocamentos  $u$  obtidos pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.

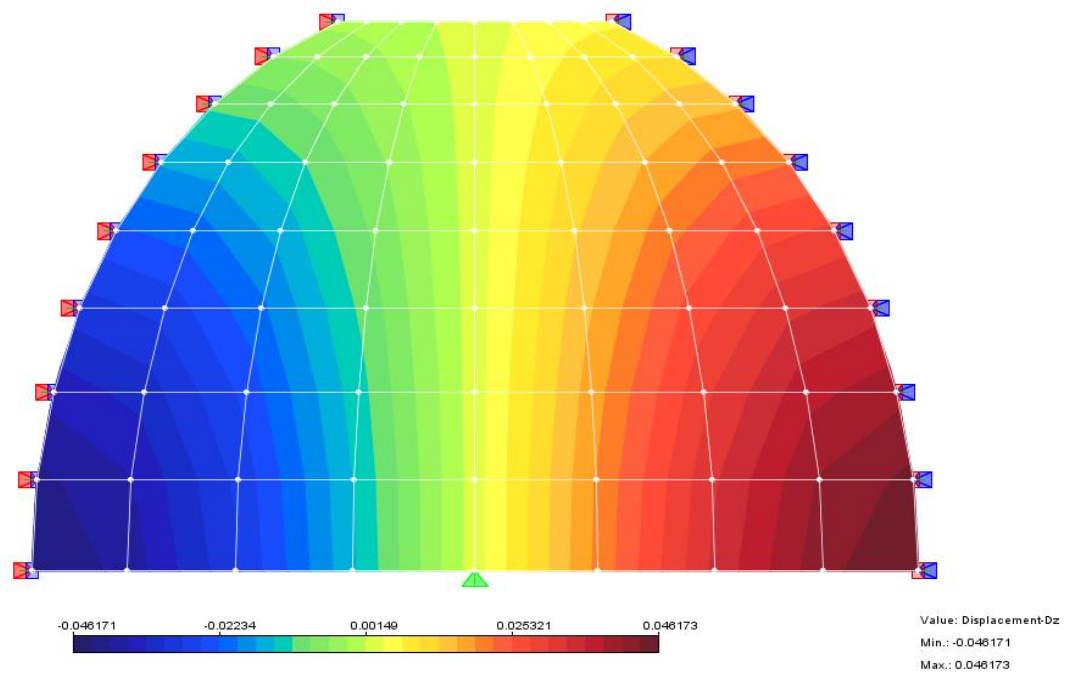


Figura 7.21: Deslocamentos  $w$  obtidos pelo INSANE.

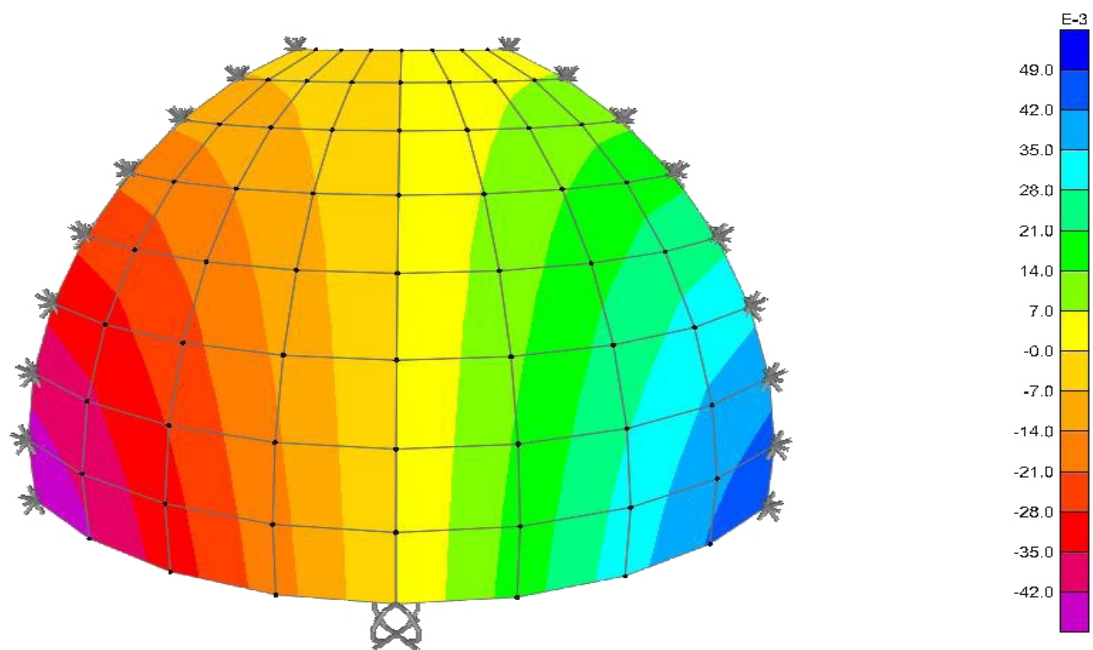


Figura 7.22: Deslocamentos  $w$  obtidos pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.

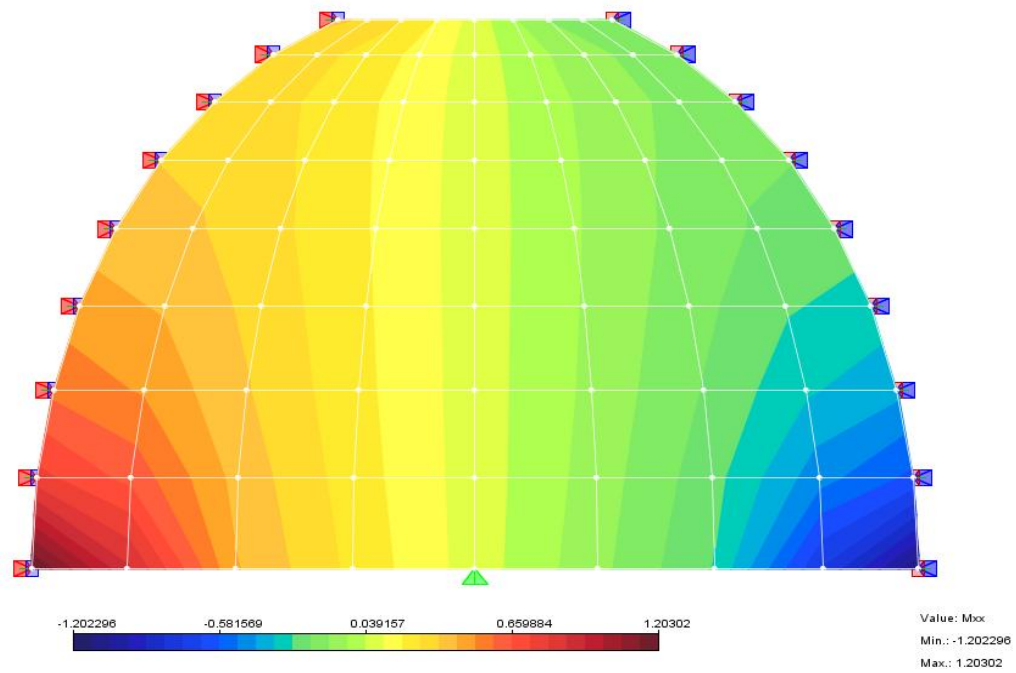


Figura 7.23: Momento  $Mx'$  obtido pelo INSANE.

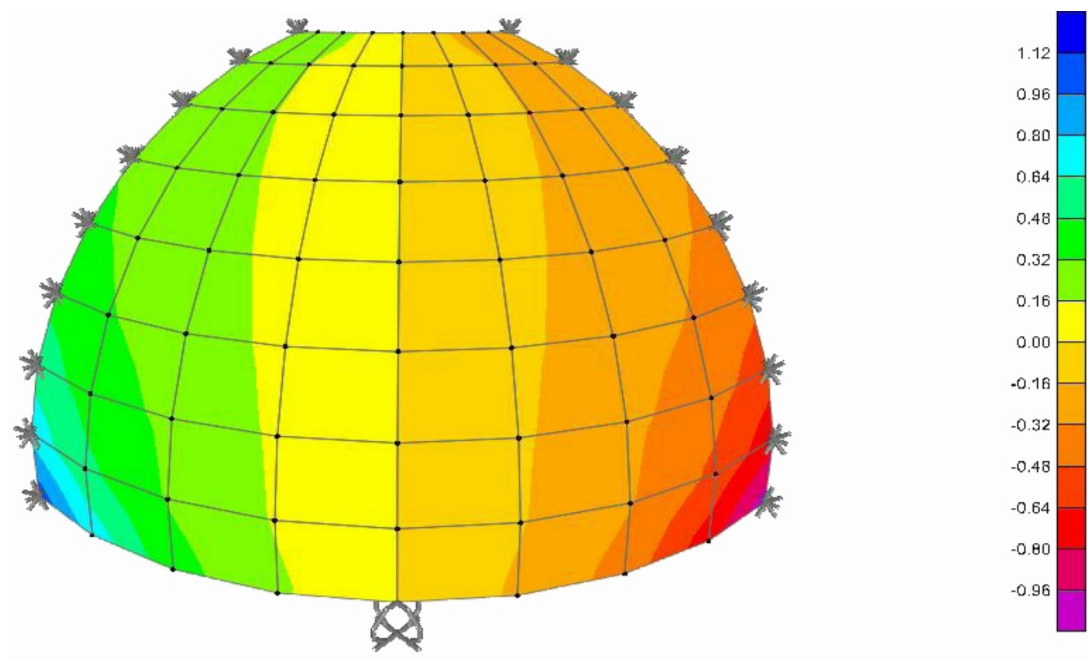


Figura 7.24: Momento  $Mx'$  obtido pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.

**Tabela 7.6:** Deslocamentos  $u$ ,  $w$  e momento  $Mx'$  obtidos pelo **INSANE**.

Coordenada				INSANE		
Nó	$x$	$y$	$z$	$u$	$w$	$M_{x'}$
1	10,0000	0,0000	0,0000	-9,270E-02	-4,617E-02	1,203E+00
2	9,8079	1,9509	0,0000	-8,558E-02	-4,232E-02	8,271E-01
3	9,2388	3,8268	0,0000	-6,908E-02	-3,192E-02	3,565E-01
4	8,3147	5,5557	0,0000	-4,983E-02	-1,709E-02	1,728E-01
5	7,0711	7,0711	0,0000	-3,126E-02	0,000E+00	1,290E-04
6	5,5557	8,3147	0,0000	-1,602E-02	1,709E-02	-1,724E-01
7	3,8268	9,2388	0,0000	-5,700E-03	3,191E-02	-3,571E-01
8	1,9509	9,8079	0,0000	-7,125E-04	4,233E-02	-8,275E-01
9	0,0000	10,0000	0,0000	0,000E+00	4,617E-02	-1,202E+00

**Tabela 7.7:** Deslocamentos  $u$ ,  $w$  e momento  $Mx'$  obtidos pelo **SAP2000 - Versão 11.0.8**.

Coordenada				SAP2000 - Versão 11.0.8		
Nó	$x$	$y$	$z$	$u$	$w$	$M_{x'}$
1	10,0000	0,0000	0,0000	-9,448E-02	-4,674E-02	1,053E+00
2	9,8079	1,9509	0,0000	-8,612E-02	-4,270E-02	7,340E-01
3	9,2388	3,8268	0,0000	-6,957E-02	-3,218E-02	3,826E-01
4	8,3147	5,5557	0,0000	-5,022E-02	-1,723E-02	1,854E-01
5	7,0711	7,0711	0,0000	-3,154E-02	0,000E+00	0,000E+00
6	5,5557	8,3147	0,0000	-1,622E-02	1,723E-02	-1,854E-01
7	3,8268	9,2388	0,0000	-5,865E-03	3,218E-02	-3,826E-01
8	1,9509	9,8079	0,0000	-8,360E-04	4,270E-02	-7,340E-01
9	0,0000	10,0000	0,0000	0,000E+00	4,674E-02	-1,053E+00

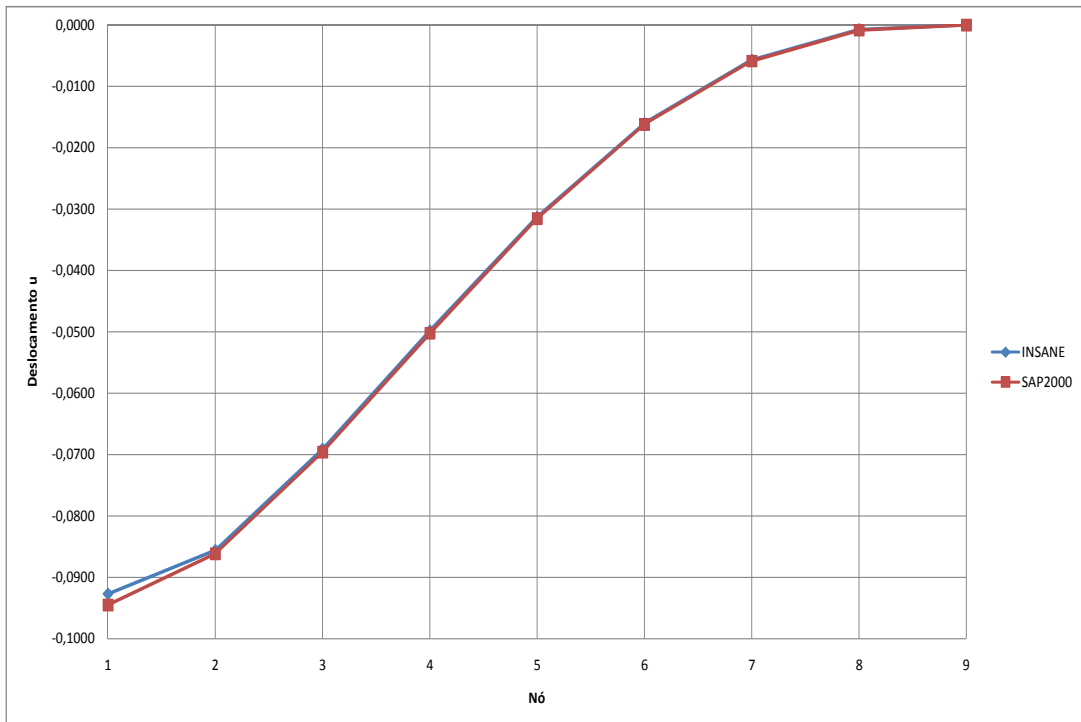


Figura 7.25: Deslocamento  $u$  dos nós 1 a 9.

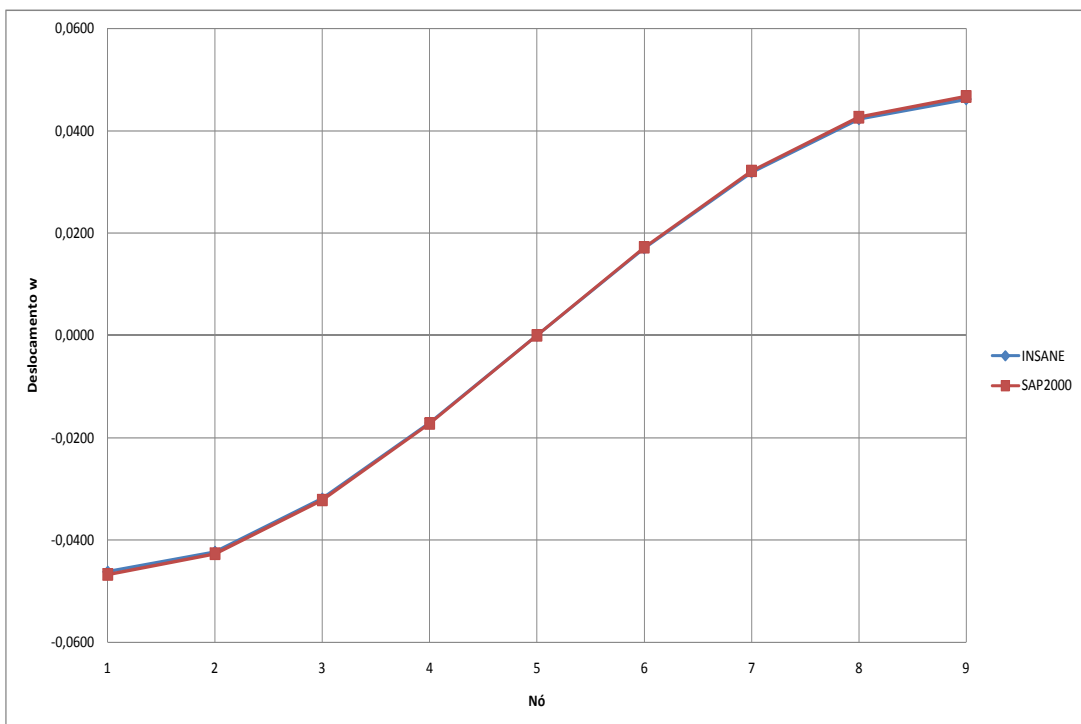
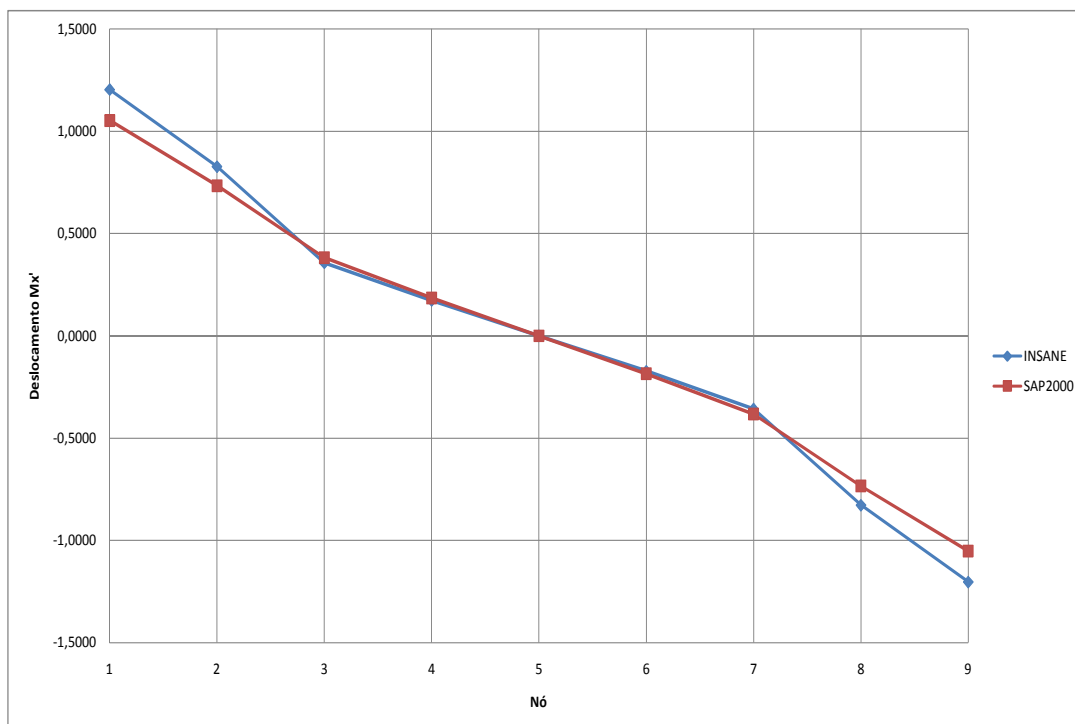


Figura 7.26: Deslocamento  $w$  dos nós 1 a 9.



**Figura 7.27:** Momento  $M_{x'}$  nos nós 1 a 9.

## 7.4 Reservatório Cônico-Cilíndrico

Um exemplo de estrutura bastante utilizada na área da indústria de mineração, química e de tratamento de esgoto é um reservatório de formato cônico-cilíndrico como o da Figura 7.28. Este tipo de estrutura pode ser enterrada, parcialmente enterrada ou elevada. Neste exemplo, foi considerada uma estrutura elevada apoiada em pilares, que por sua vez possuem suas bases simplesmente apoiadas (restrições translacionais em  $x$ ,  $y$  e  $z$ ).

### 7.4.1 Geometria e Propriedades

Utilizando simetria, apenas 1/4 da estrutura é analisada. Este reservatório é apoiado em 16 pilares de seção circular de diâmetro igual a  $0,5 uc$  (2 pilares a cada  $45^\circ$ ) que elevam a estrutura  $3 uc$  acima do nível de referência. O diâmetro total do reservatório é de  $20 uc$ . A altura total do reservatório é de  $4 uc$  ( $2,5 uc$  da parte

cilíndrica e  $1,5 uc$  da parte cônica). O reservatório é carregado com uma pressão que varia linearmente: igual a  $0 uf/uc^2$  na elevação  $7 uc$  até  $4 uf/uc^2$  na elevação  $3 uc$ . As paredes e a laje de fundo do reservatório são enrijecidas por vigas de dimensões transversais iguais a  $0,3 uc \times 0,9 uc$ . Tanto os pilares como as vigas são modelados através de elementos de barra de pórtico espacial (6 graus de liberdade por nó).

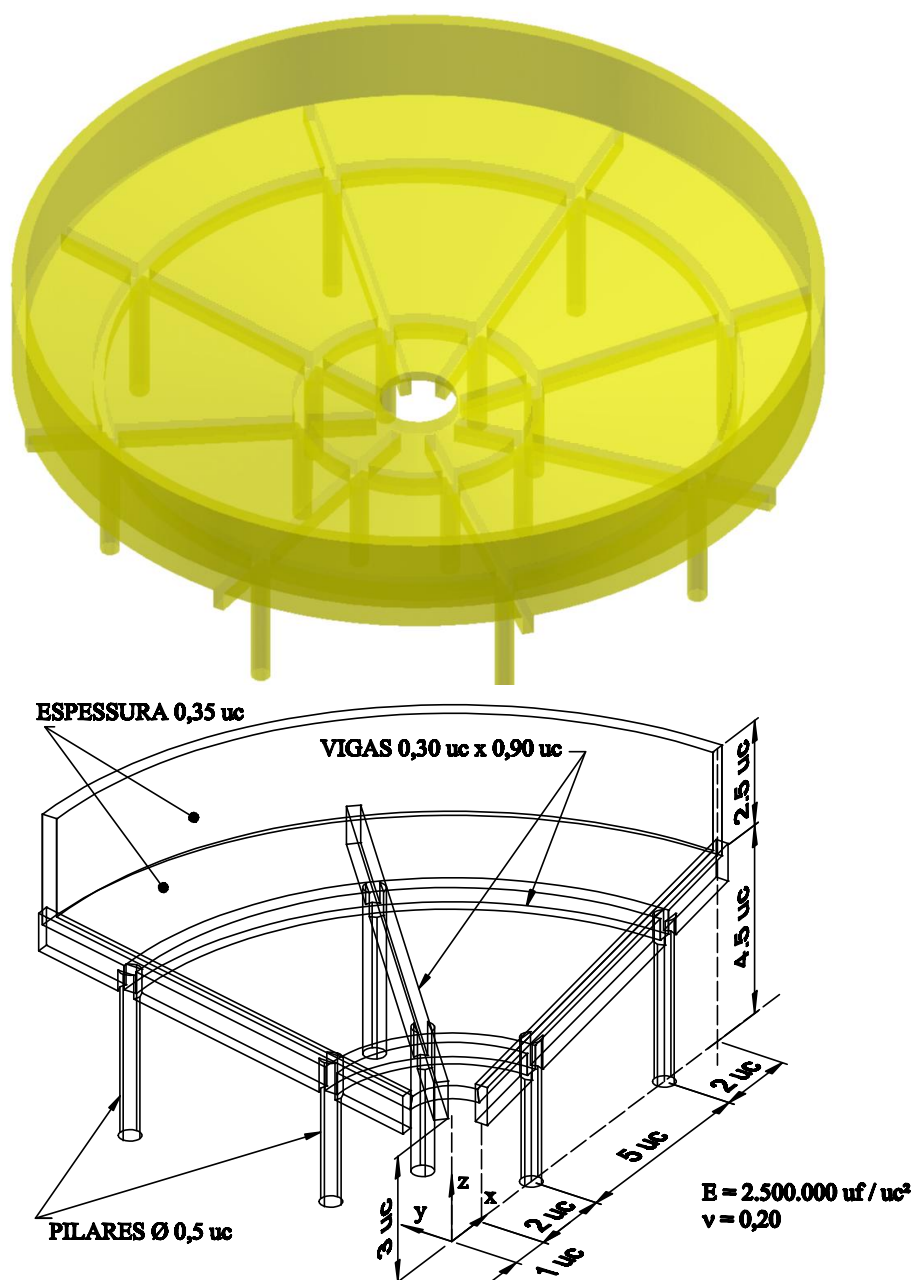


Figura 7.28: Reservatório cônico-cilíndrico.

A malha utilizada é apresentada na Figura 7.29.

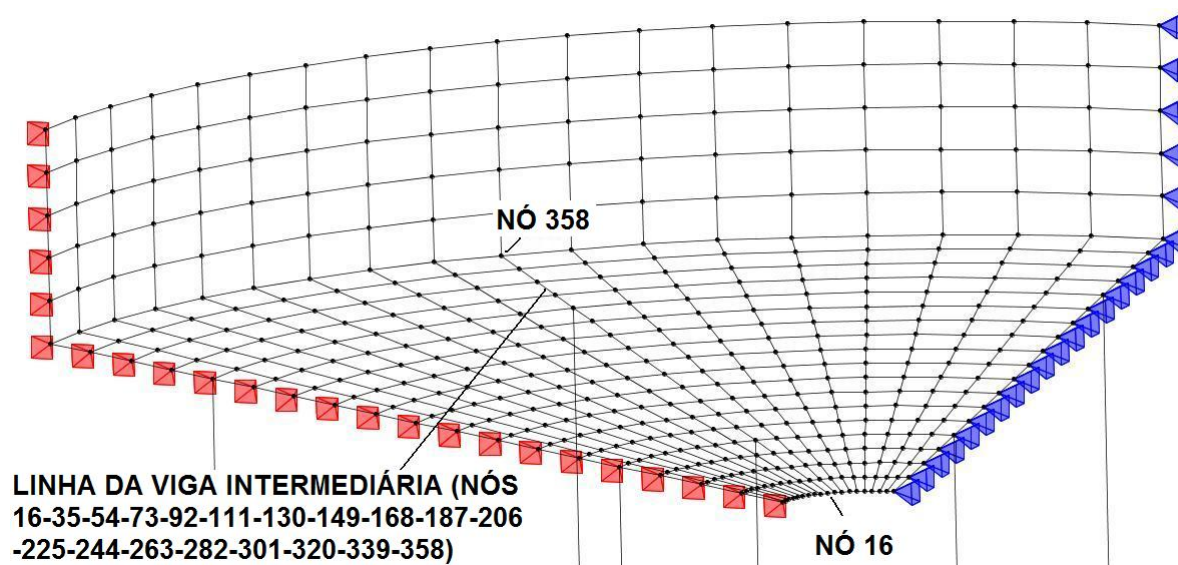


Figura 7.29: Malha utilizada para o modelo do reservatório cônico-cilíndrico.

## 7.4.2 Resultados

Os resultados obtidos pelo **INSANE**, para o elemento **RMCIQ4**, são comparados com o elemento “*shell-thick*” do **SAP2000 - Versão 11.0.8** de acordo com as Figuras 7.30 até 7.35.



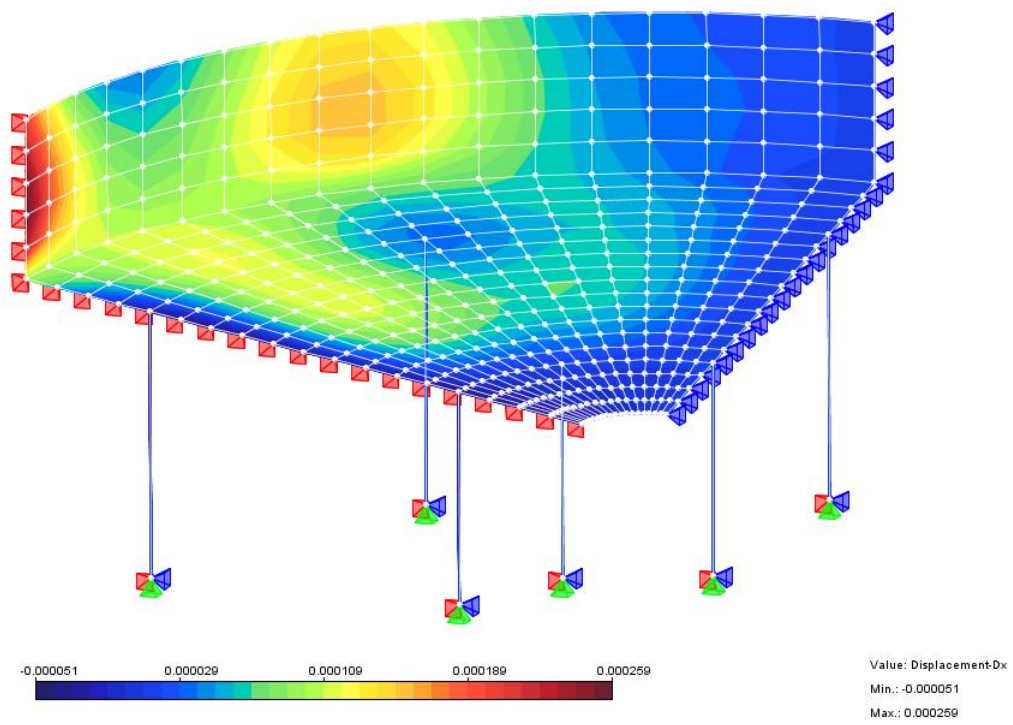


Figura 7.30: Deslocamento  $u$  obtido pelo INSANE.

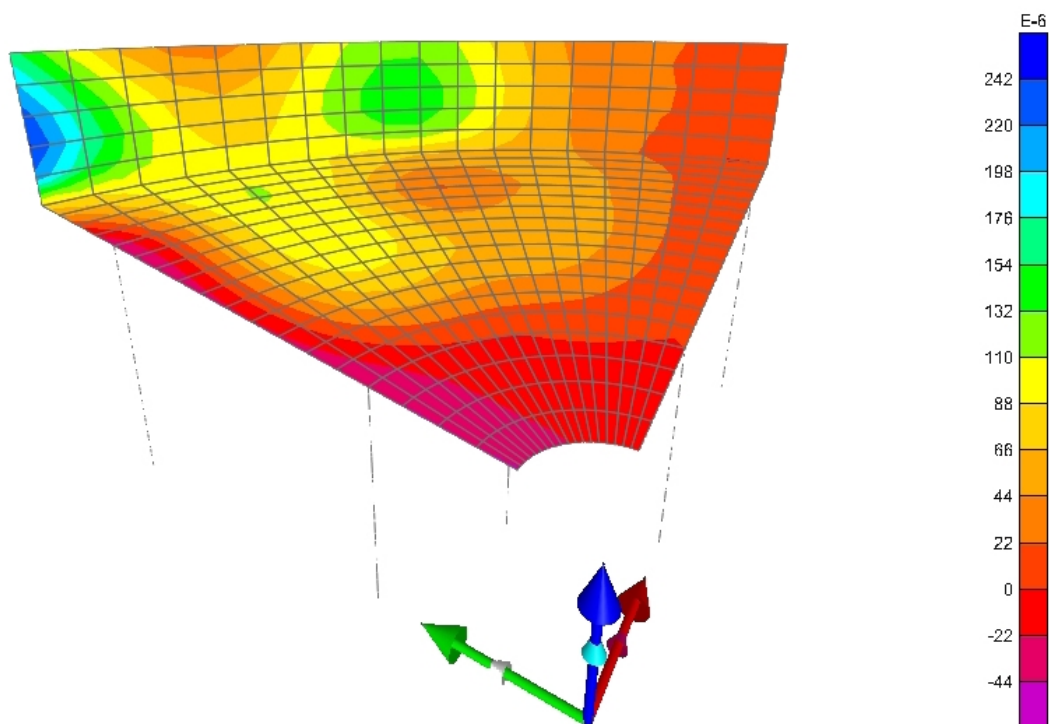


Figura 7.31: Deslocamento  $u$  obtido pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.

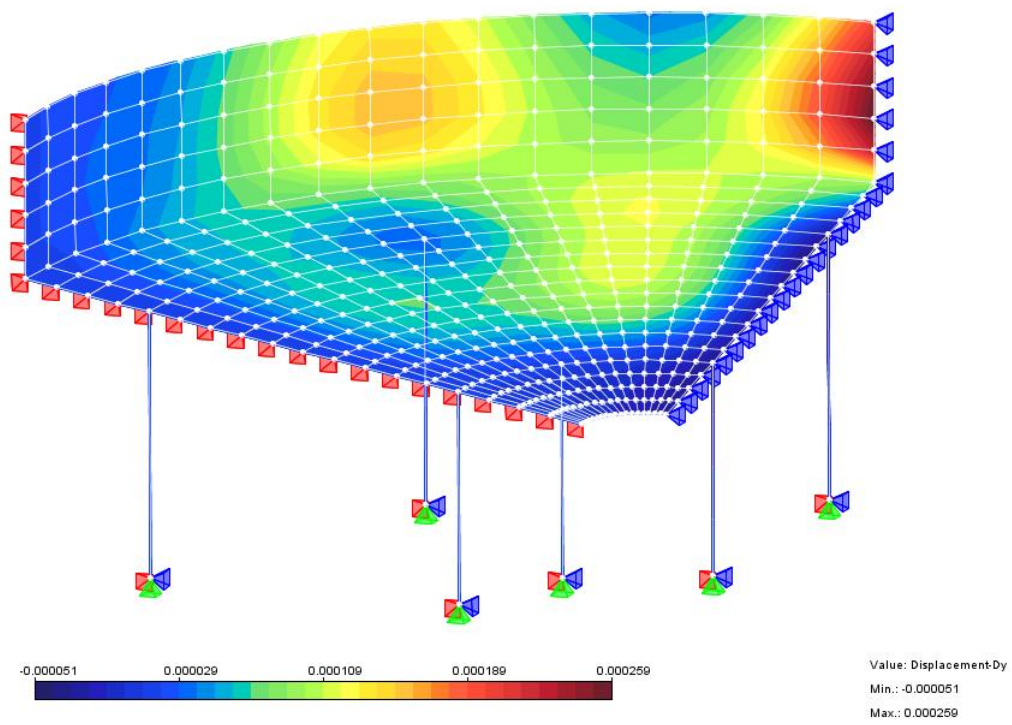


Figura 7.32: Deslocamento  $v$  obtido pelo INSANE.

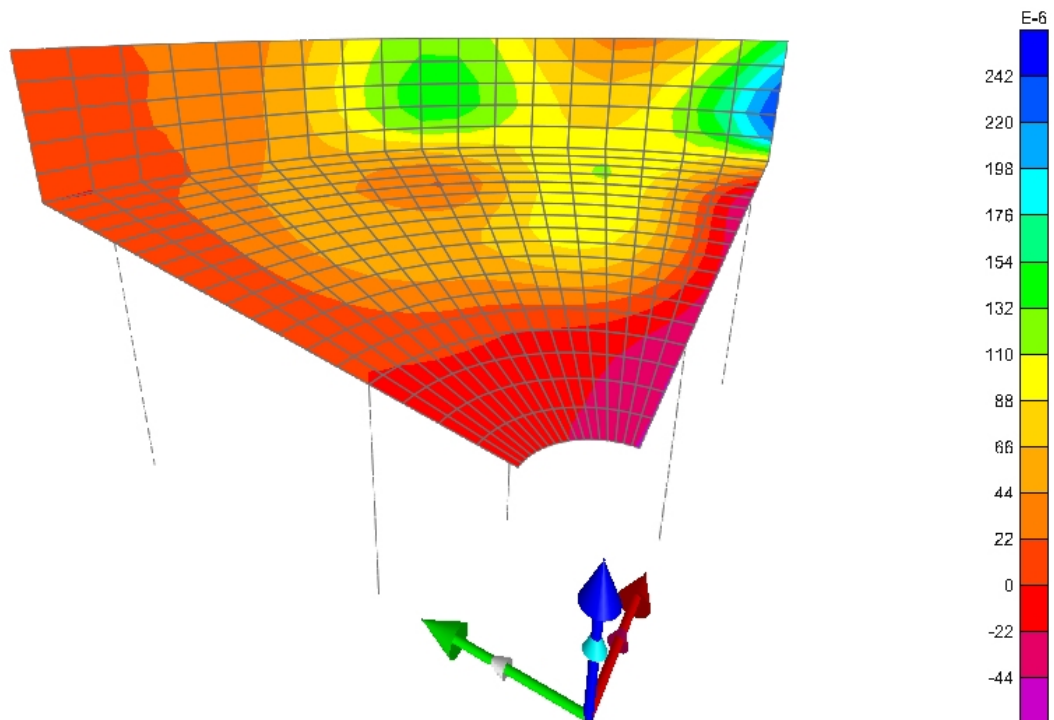
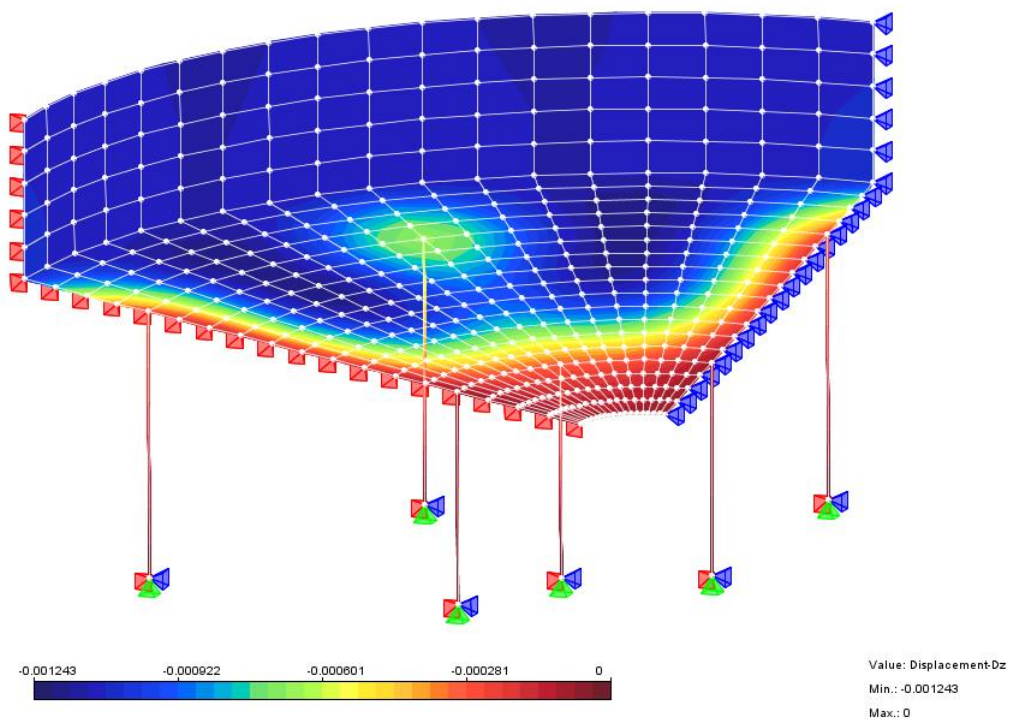
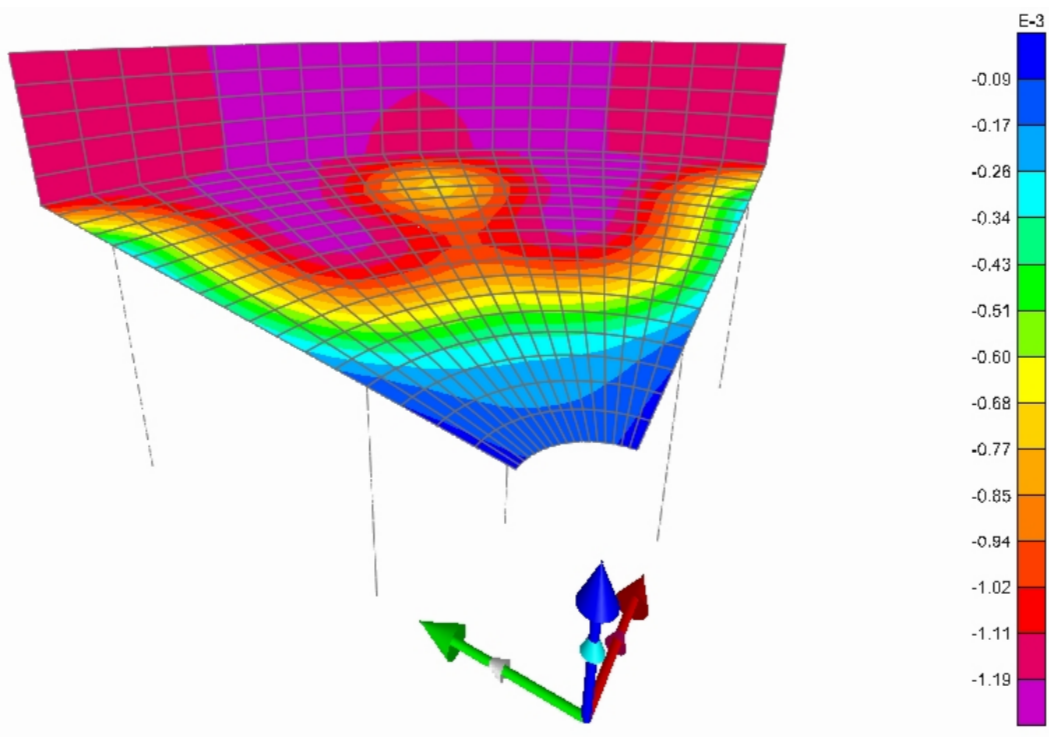


Figura 7.33: Deslocamento  $v$  obtido pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.



**Figura 7.34:** Deslocamento  $w$  obtido pelo INSANE.



**Figura 7.35:** Deslocamento  $w$  obtido pelo SAP2000 - Versão 11.0.8.

Os resultados das Figuras 7.30 até a Figura 7.35 são apresentados nas Tabelas 7.8 e 7.9 e Figuras 7.36 e 7.37.

**Tabela 7.8:** Deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  dos nós da viga intermediária obtidos através do INSANE.

Coordenada				INSANE		
Nó	x	y	z	u	v	w
16	0,7071	0,7071	3,0000	-2,219E-05	-2,219E-05	-1,050E-04
35	1,0607	1,0607	3,0833	-1,795E-05	-1,795E-05	-1,431E-04
54	1,4142	1,4142	3,1667	-1,385E-05	-1,385E-05	-1,874E-04
73	1,7678	1,7678	3,2500	-8,087E-06	-8,087E-06	-2,495E-04
92	2,1213	2,1213	3,3333	1,723E-06	1,723E-06	-3,466E-04
111	2,4749	2,4749	3,4167	1,561E-05	1,561E-05	-4,937E-04
130	2,8284	2,8284	3,5000	3,206E-05	3,206E-05	-6,604E-04
149	3,1820	3,1820	3,5833	4,673E-05	4,673E-05	-8,095E-04
168	3,5355	3,5355	3,6667	5,672E-05	5,672E-05	-9,158E-04
187	3,8891	3,8891	3,7500	6,047E-05	6,047E-05	-9,664E-04
206	4,2426	4,2426	3,8333	5,780E-05	5,780E-05	-9,595E-04
225	4,5962	4,5962	3,9167	4,976E-05	4,976E-05	-9,041E-04
244	4,9498	4,9498	4,0000	3,871E-05	3,871E-05	-8,202E-04
263	5,3033	5,3033	4,0833	2,831E-05	2,831E-05	-7,387E-04
282	5,6569	5,6569	4,1667	2,372E-05	2,372E-05	-7,028E-04
301	6,0104	6,0104	4,2500	2,743E-05	2,743E-05	-7,540E-04
320	6,3640	6,3640	4,3333	3,877E-05	3,877E-05	-8,662E-04
339	6,7176	6,7176	4,4166	5,341E-05	5,341E-05	-1,004E-03
358	7,0711	7,0711	4,5000	6,853E-05	6,853E-05	-1,142E-03

**Tabela 7.9:** Deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  dos nós da viga intermediária obtidos através do **SAP2000 - Versão 11.0.8.**

Coordenada				SAP2000 - Versão 11.0.8		
Nó	x	y	z	u	v	w
16	0,7071	0,7071	3,0000	-2,200E-05	-2,200E-05	-1,180E-04
35	1,0607	1,0607	3,0833	-1,700E-05	-1,700E-05	-1,620E-04
54	1,4142	1,4142	3,1667	-1,300E-05	-1,300E-05	-2,070E-04
73	1,7678	1,7678	3,2500	-8,004E-06	-8,005E-06	-2,640E-04
92	2,1213	2,1213	3,3333	-5,081E-08	-5,146E-08	-3,450E-04
111	2,4749	2,4749	3,4167	1,600E-05	1,600E-05	-5,130E-04
130	2,8284	2,8284	3,5000	3,300E-05	3,300E-05	-6,890E-04
149	3,1820	3,1820	3,5833	4,800E-05	4,800E-05	-8,430E-04
168	3,5355	3,5355	3,6667	5,900E-05	5,900E-05	-9,520E-04
187	3,8891	3,8891	3,7500	6,300E-05	6,300E-05	-1,004E-03
206	4,2426	4,2426	3,8333	6,000E-05	6,000E-05	-9,970E-04
225	4,5962	4,5962	3,9167	5,100E-05	5,100E-05	-9,390E-04
244	4,9498	4,9498	4,0000	4,000E-05	4,000E-05	-8,480E-04
263	5,3033	5,3033	4,0833	2,700E-05	2,700E-05	-7,510E-04
282	5,6569	5,6569	4,1667	2,000E-05	2,000E-05	-6,880E-04
301	6,0104	6,0104	4,2500	2,600E-05	2,600E-05	-7,660E-04
320	6,3640	6,3640	4,3333	3,900E-05	3,900E-05	-8,930E-04
339	6,7176	6,7176	4,4166	5,500E-05	5,500E-05	-1,037E-03
358	7,0711	7,0711	4,5000	7,000E-05	7,000E-05	-1,176E-03

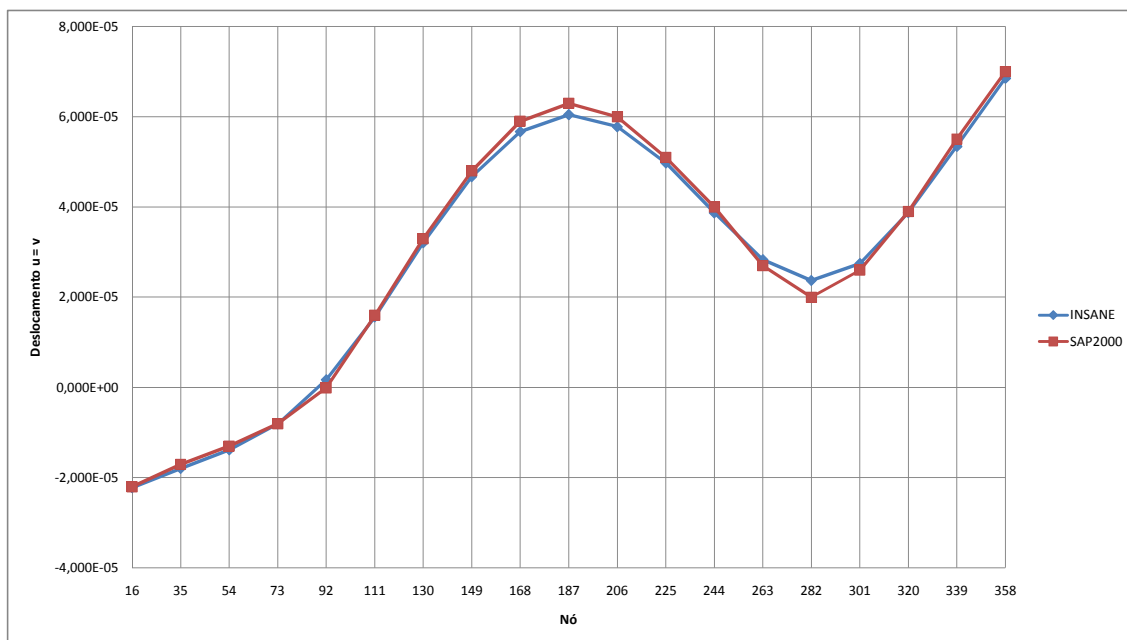


Figura 7.36: Deslocamento  $u = v$  dos nós da viga intermediária.

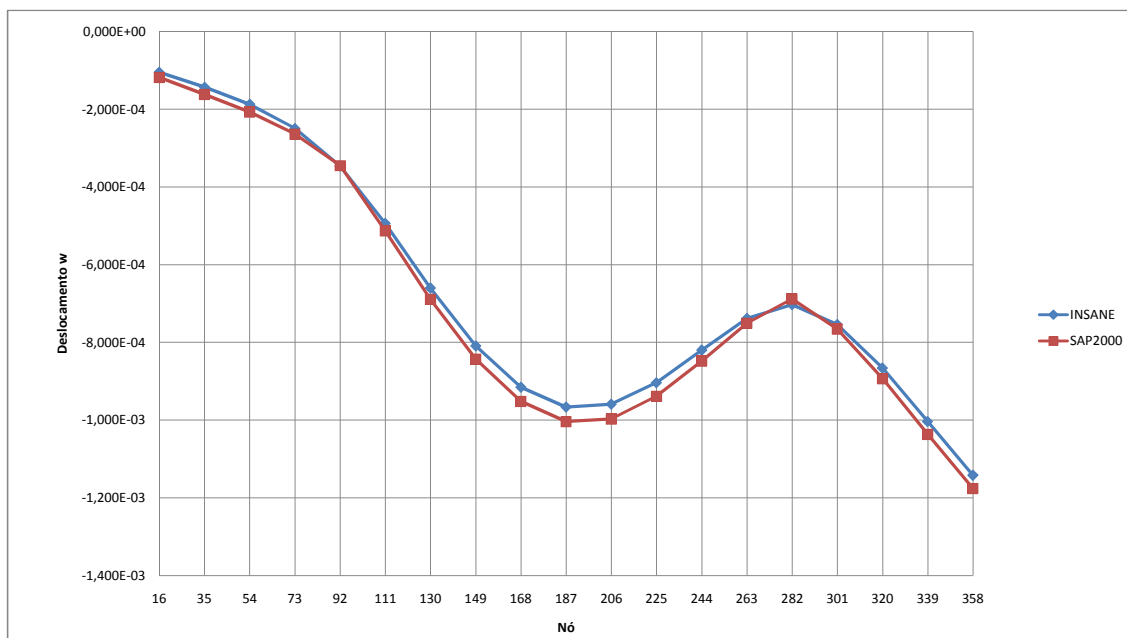


Figura 7.37: Deslocamento  $w$  dos nós da viga intermediária.

## 7.5 Barragem em Arco

Outro exemplo de estrutura que pode ser modelada através dos elementos finitos de casca são as barragens em arco. A Barragem da Venda Nova (Portugal) ilustrada na Figura 7.38 é uma barragem em arco-gravidade e não em arco como a que será modelada neste exemplo, e tão pouco suas dimensões são as mesmas. A intenção desta figura é a de ilustrar este tipo de barragem e de como a água fica situada na parte convexa da barragem. Este tipo de estrutura exemplifica o que foi dito no Capítulo 1 sobre a capacidade portante das estruturas em casca, que devidamente utilizadas, podem suportar a maior parte das cargas através dos esforços normais. Neste caso, os esforços normais de compressão são os responsáveis por absorver a maior parte do carregamento e, em se tratando de estrutura de concreto, gera grande economia, o que reforça a reputação das estruturas de casca de serem estruturas bastante econômicas.



Fonte: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Barragem\\_da\\_venda\\_nova.jpg](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Barragem_da_venda_nova.jpg)

**Figura 7.38:** Barragem da Venda Nova (Portugal) em arco-gravidade.

### 7.5.1 Geometria e Propriedades

A geometria e propriedades da estrutura foram adotadas de acordo com Zienkiewicz e Taylor (2000). Esses valores estão listados na Figura 7.39. A malha de elementos finitos utilizada é mostrada na Figura 7.40:

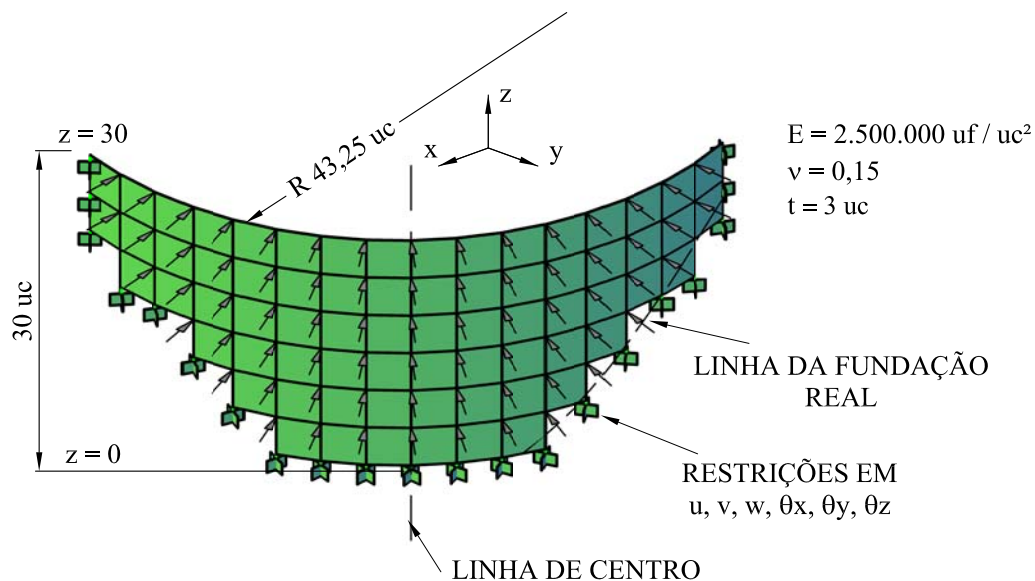


Figura 7.39: Barragem em arco.

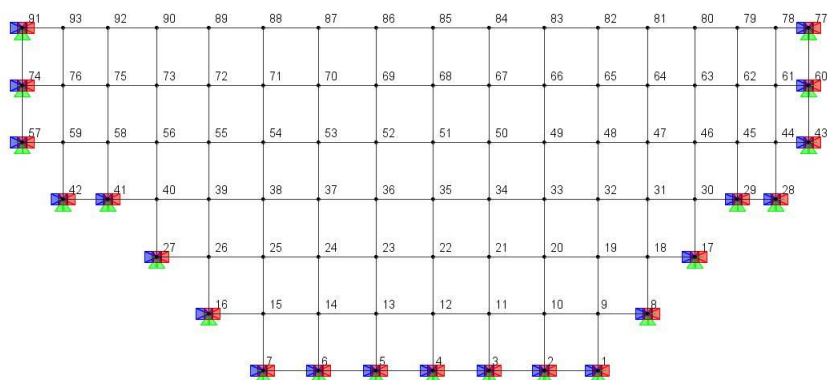


Figura 7.40: Malha utilizada para o exemplo da barragem em arco.

### 7.5.2 Resultados

Os resultados obtidos com o elemento "RMCIQ4" do **INSANE** são comparados aos dos elementos "shell-thick" do **SAP2000 - Versão 11.0.8** e apresentados nas Figuras 7.41 a 7.57 e Tabelas 7.10 a 7.13.



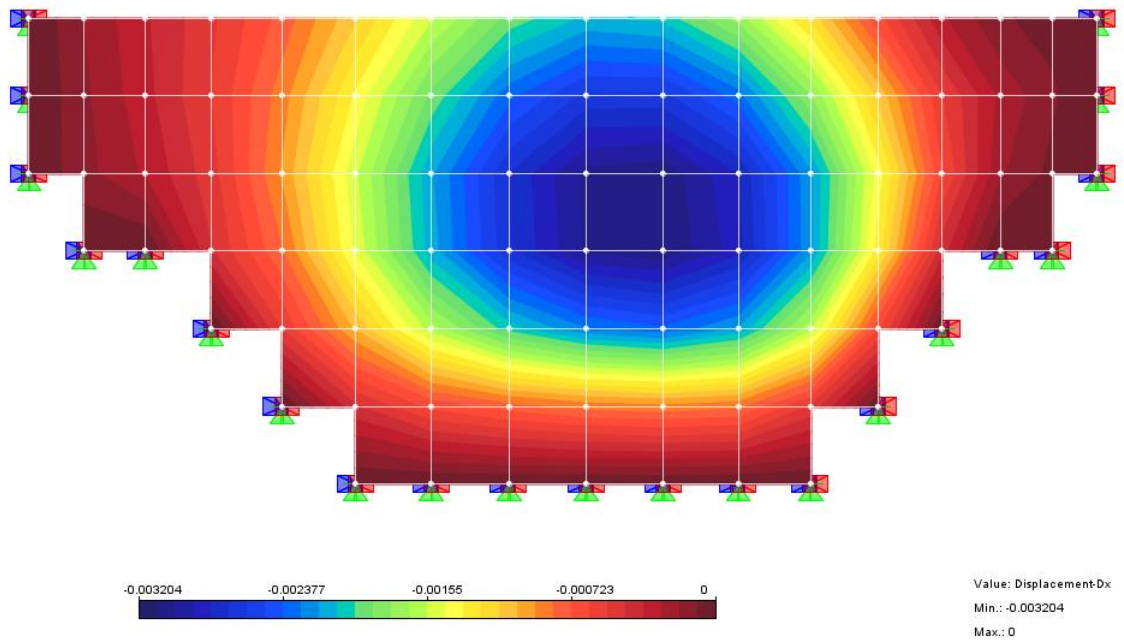


Figura 7.41: Deslocamentos  $u$  do INSANE.

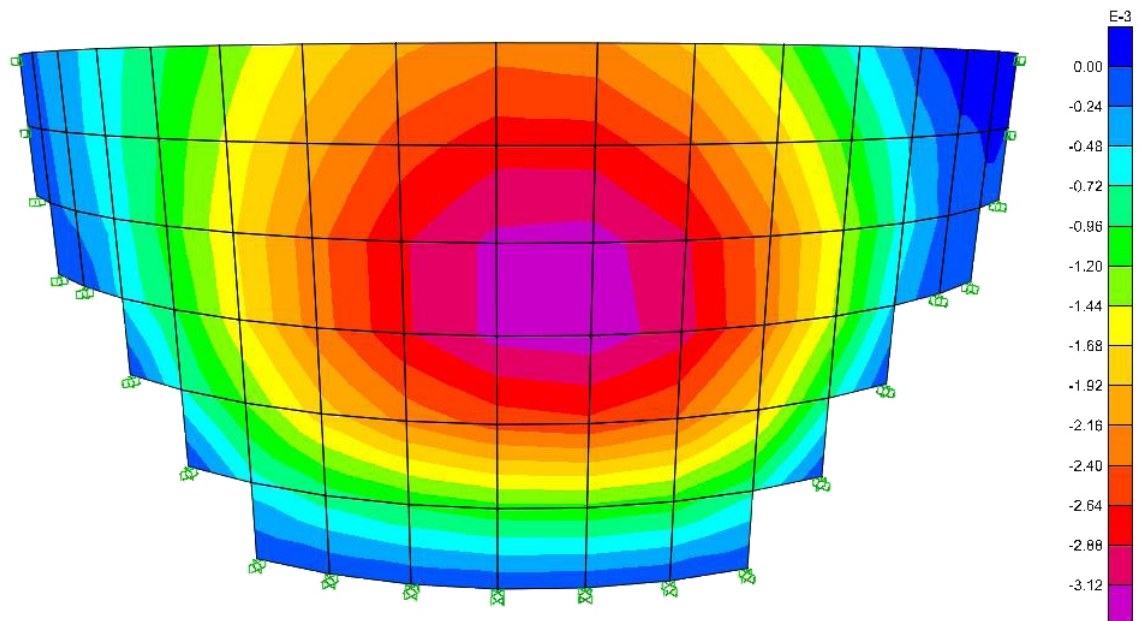


Figura 7.42: Deslocamentos  $u$  do SAP2000 - Versão 11.0.8.

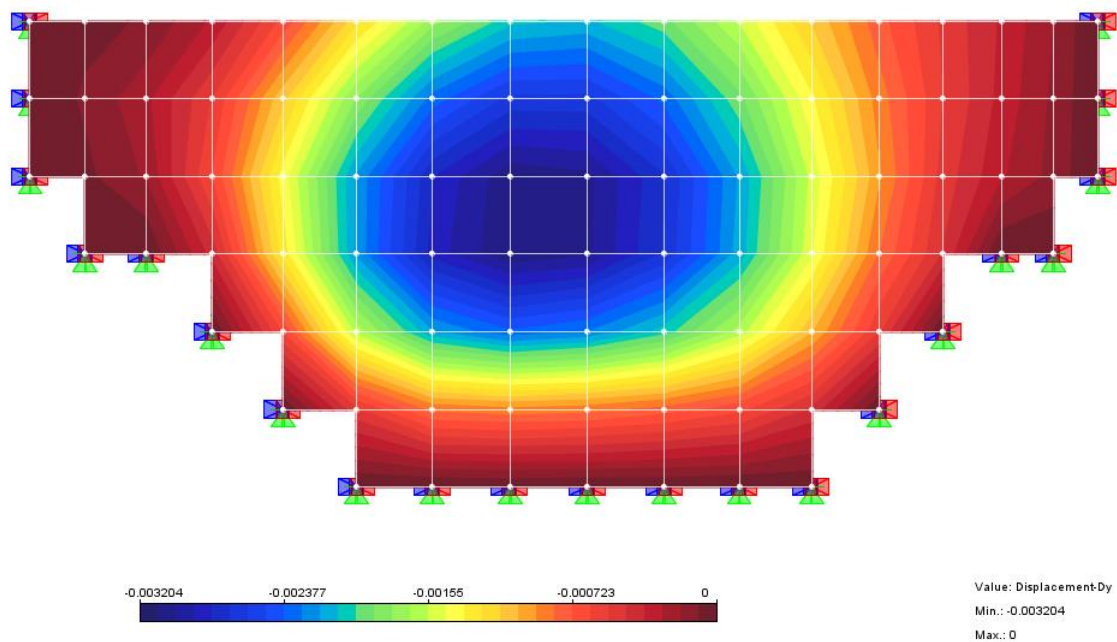


Figura 7.43: Deslocamentos  $v$  do INSANE.

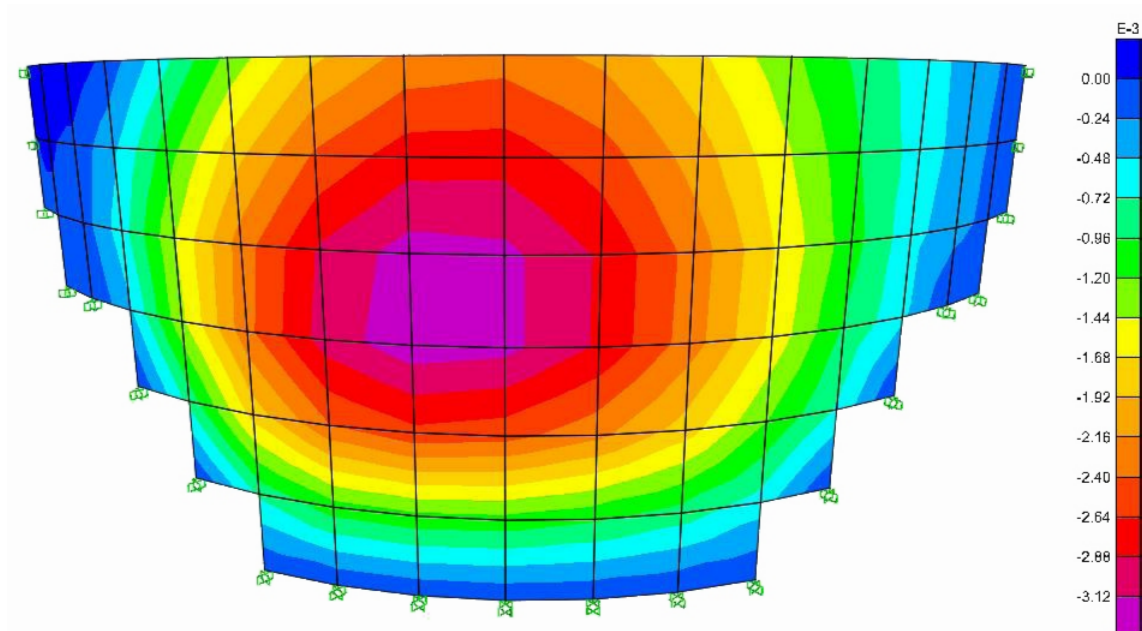


Figura 7.44: Deslocamentos  $v$  do SAP2000 - Versão 11.0.8.

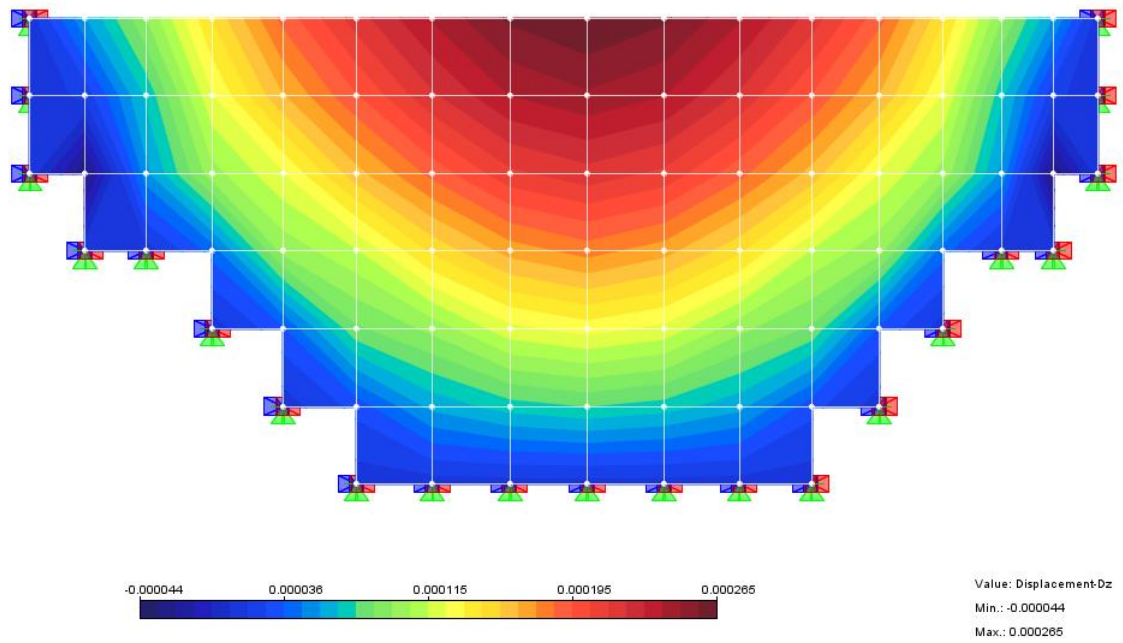


Figura 7.45: Deslocamentos  $w$  do INSANE.

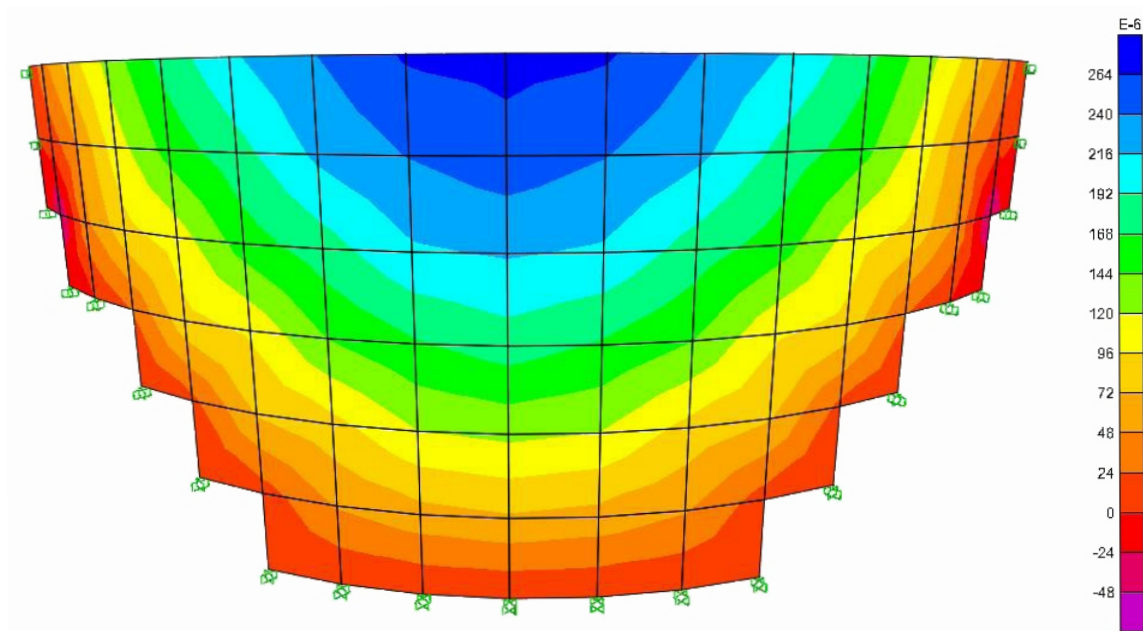


Figura 7.46: Deslocamentos  $w$  do SAP2000 - Versão 11.0.8.

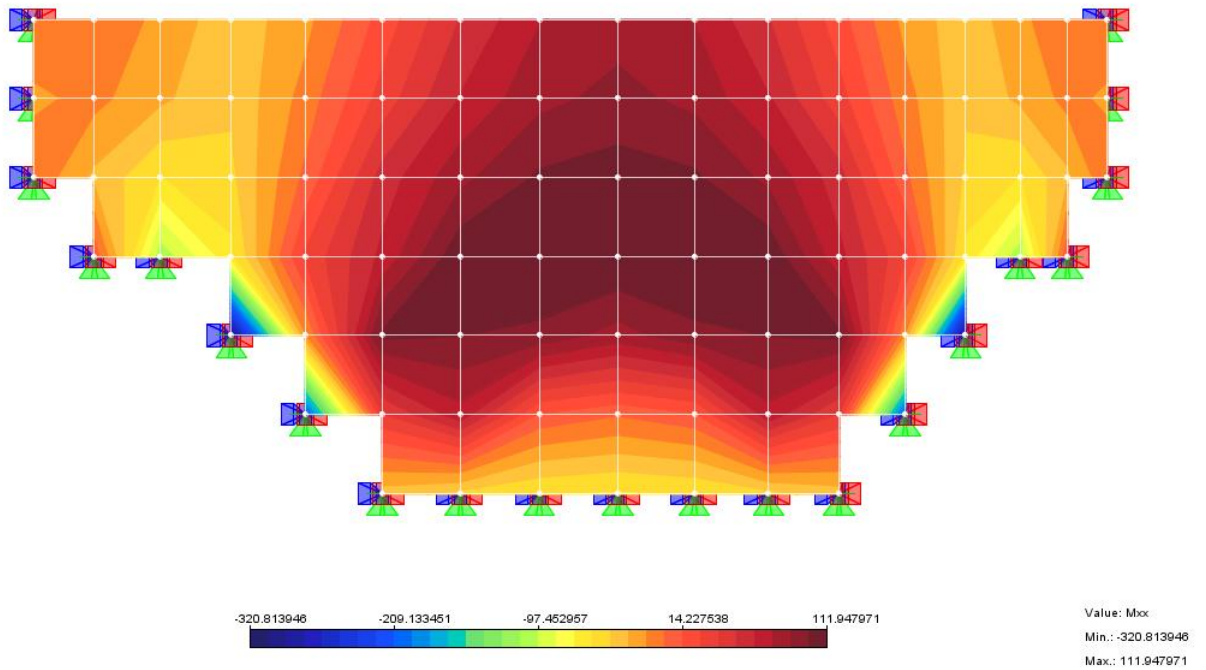


Figura 7.47: Momento Fletor  $M_{x'}$  do INSANE.

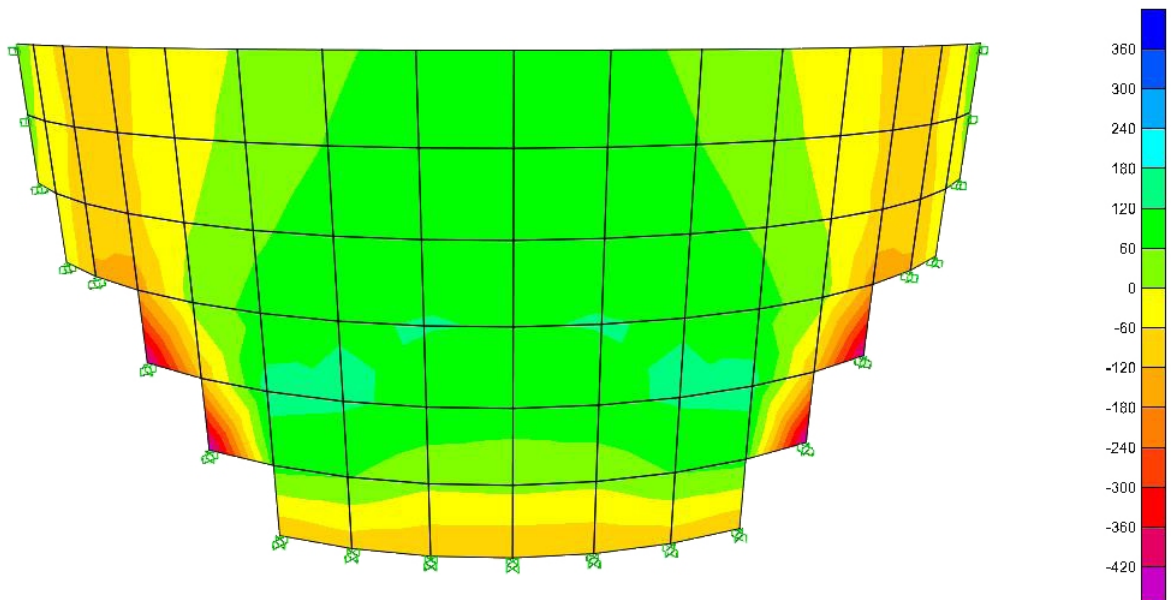


Figura 7.48: Momento Fletor  $M_{x'}$  do SAP2000 - Versão 11.0.8.

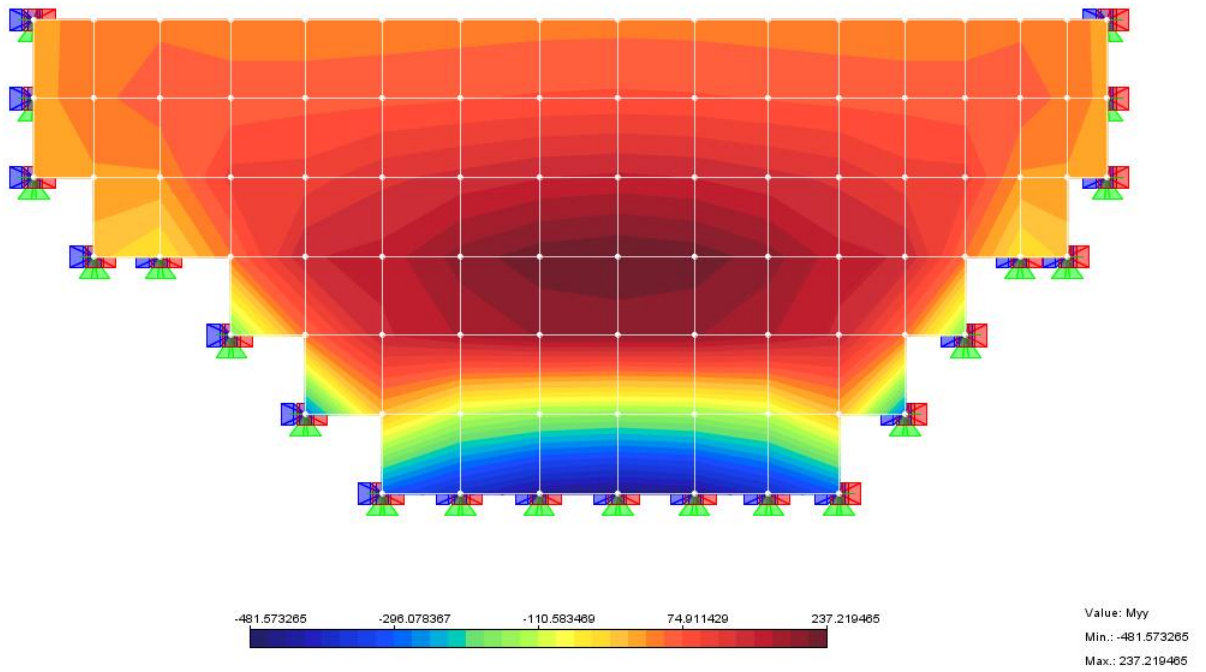


Figura 7.49: Momento Fletor  $M_y$  do INSANE.

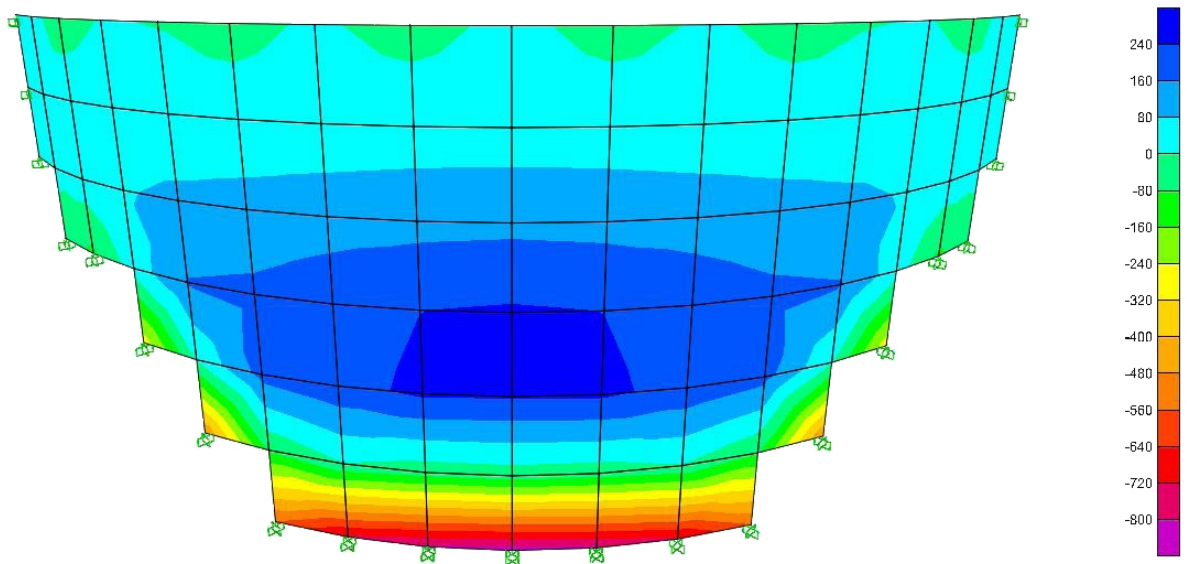
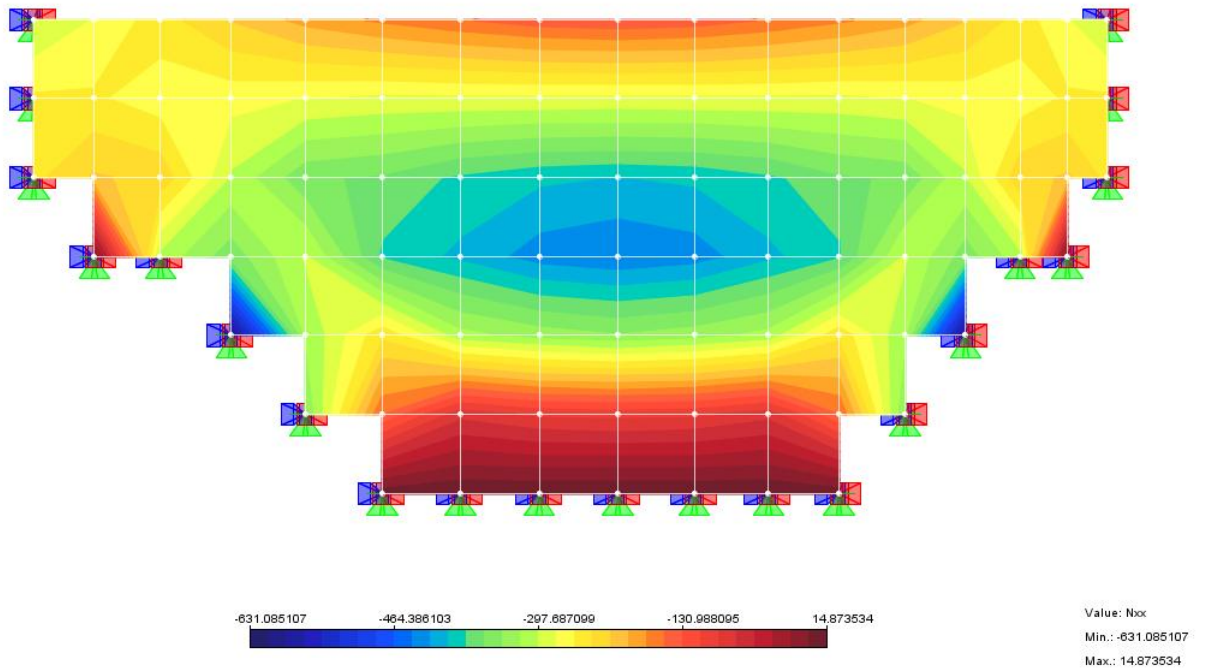
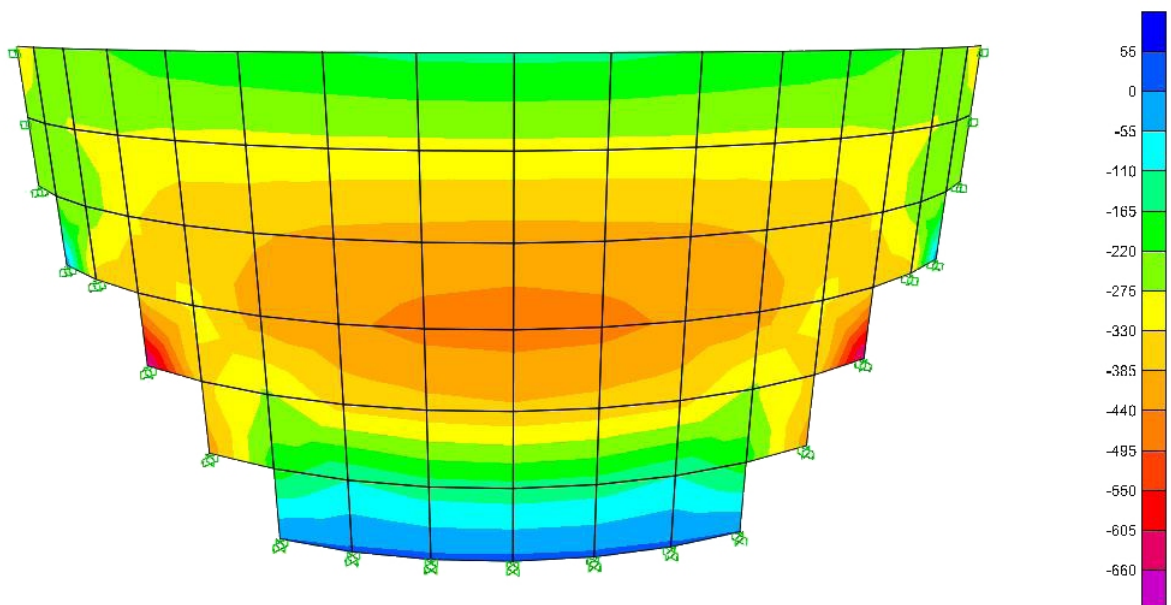


Figura 7.50: Momento Fletor  $M_y$  do SAP2000 - Versão 11.0.8.



**Figura 7.51:** Esforço normal  $N_{x'}$  do INSANE.



**Figura 7.52:** Esforço normal  $N_{x'}$  do SAP2000 - Versão 11.0.8.

**Tabela 7.10:** Deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  sobre a linha de centro da barragem obtidos através do **INSANE**.

Coordenada				INSANE		
Nó	$x$	$y$	$z$	$u$	$v$	$w$
4	30,5824	30,5824	0,0000	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
12	30,5824	30,5824	5,0000	-9,790E-04	-9,790E-04	6,462E-05
22	30,5824	30,5824	10,0000	-2,382E-03	-2,382E-03	1,192E-04
35	30,5824	30,5824	15,0000	-3,126E-03	-3,126E-03	1,689E-04
51	30,5824	30,5824	20,0000	-3,137E-03	-3,137E-03	2,105E-04
68	30,5824	30,5824	25,0000	-2,728E-03	-2,728E-03	2,433E-04
85	30,5824	30,5824	30,0000	-2,201E-03	-2,201E-03	2,650E-04

**Tabela 7.11:** Deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  sobre a linha de centro da barragem obtidos pelo **SAP2000 - Versão 11.0.8**.

Coordenada				SAP2000 - Versão 11.0.8		
Nó	$x$	$y$	$z$	$u$	$v$	$w$
4	30,5824	30,5824	0,0000	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
12	30,5824	30,5824	5,0000	-1,111E-03	-1,111E-03	6,900E-05
22	30,5824	30,5824	10,0000	-2,490E-03	-2,490E-03	1,250E-04
35	30,5824	30,5824	15,0000	-3,195E-03	-3,195E-03	1,800E-04
51	30,5824	30,5824	20,0000	-3,188E-03	-3,188E-03	2,180E-04
68	30,5824	30,5824	25,0000	-2,787E-03	-2,787E-03	2,550E-04
85	30,5824	30,5824	30,0000	-2,290E-03	-2,290E-03	2,720E-04

**Tabela 7.12:** Esforços  $M_{x'}$ ,  $M_{y'}$  e  $N_{x'}$  sobre a linha de centro da barragem obtidos pelo **INSANE**.

Coordenada				INSANE		
Nó	$x$	$y$	$z$	$M_{x'}$	$M_{y'}$	$N_{x'}$
4	30,5824	30,5824	0,0000	-7,224E+01	-4,816E+02	1,487E+01
12	30,5824	30,5824	5,0000	-1,247E+01	-1,815E+02	-1,190E+02
22	30,5824	30,5824	10,0000	7,776E+01	1,940E+02	-3,594E+02
35	30,5824	30,5824	15,0000	1,119E+02	2,372E+02	-4,628E+02
51	30,5824	30,5824	20,0000	1,050E+02	1,486E+02	-4,238E+02
68	30,5824	30,5824	25,0000	8,807E+01	5,608E+01	-3,045E+02
85	30,5824	30,5824	30,0000	7,841E+01	1,940E+01	-1,576E+02

**Tabela 7.13:** Esforços  $M_{x'}$ ,  $M_{y'}$  e  $N_{x'}$  sobre a linha de centro da barragem obtidos pelo **SAP2000 - Versão 11.0.8**.

Coordenada				SAP2000 - Versão 11.0.8		
Nó	$x$	$y$	$z$	$M_{x'}$	$M_{y'}$	$N_{x'}$
4	30,5824	30,5824	0,0000	-1,230E+02	-8,434E+02	1,583E+01
12	30,5824	30,5824	5,0000	1,733E+01	-4,080E+01	-1,435E+02
22	30,5824	30,5824	10,0000	8,666E+01	2,476E+02	-3,749E+02
35	30,5824	30,5824	15,0000	1,177E+02	2,508E+02	-4,644E+02
51	30,5824	30,5824	20,0000	1,114E+02	1,412E+02	-4,170E+02
68	30,5824	30,5824	25,0000	9,355E+01	3,888E+01	-2,932E+02
85	30,5824	30,5824	30,0000	8,607E+01	1,357E+01	-1,505E+02



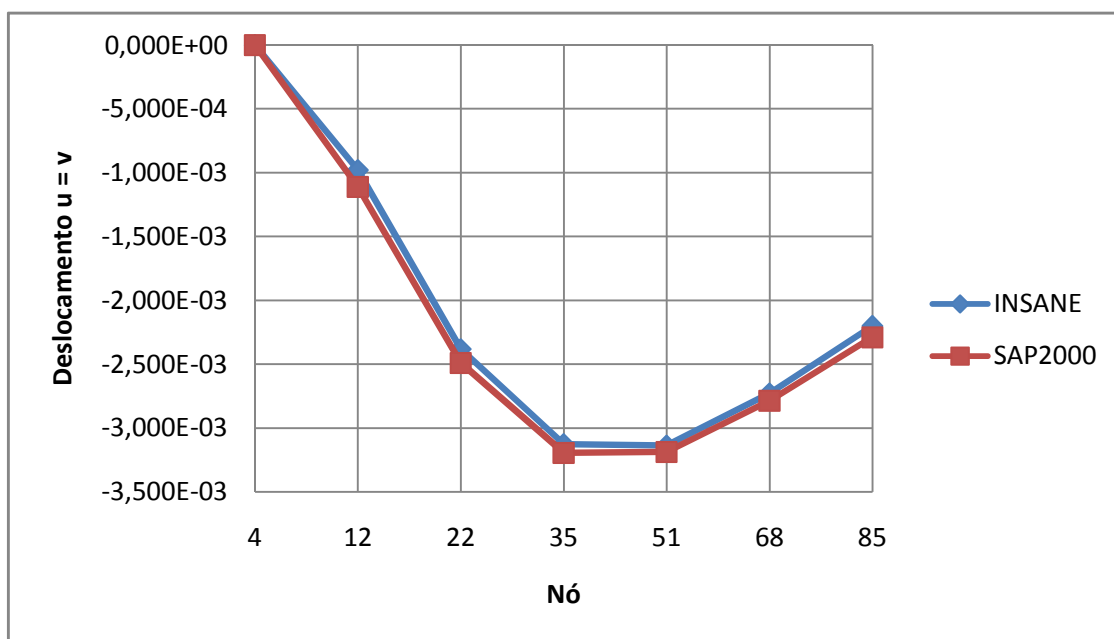


Figura 7.53: Deslocamentos  $u = v$  dos nós da linha de centro da barragem.

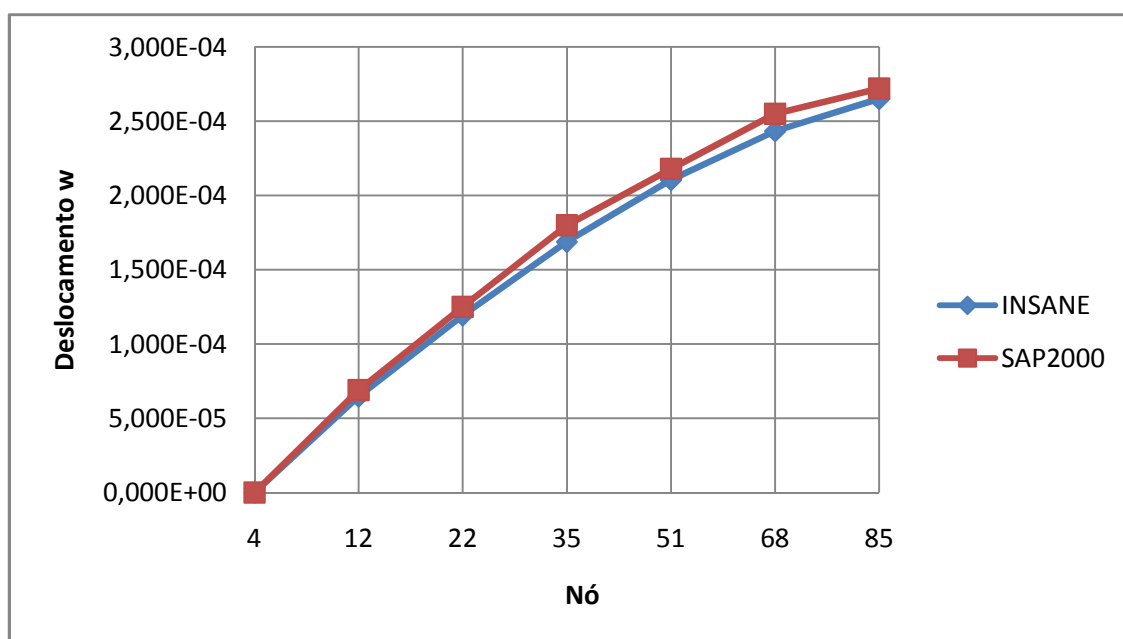


Figura 7.54: Deslocamentos  $w$  dos nós da linha de centro da barragem.

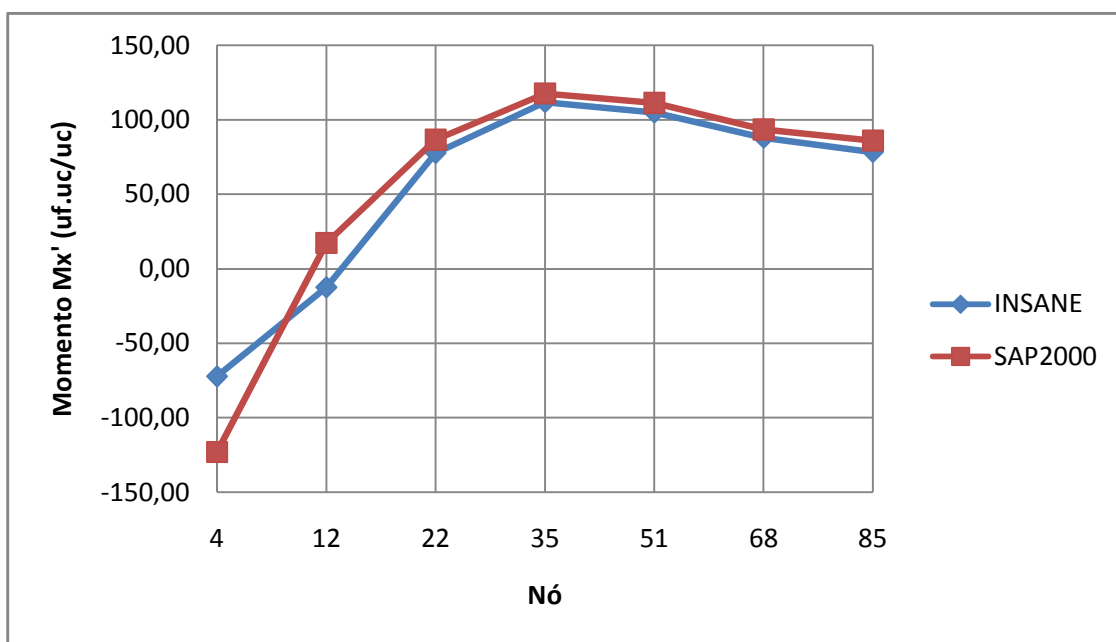


Figura 7.55: Momento fletor  $M_{x'}$  na linha de centro da barragem.

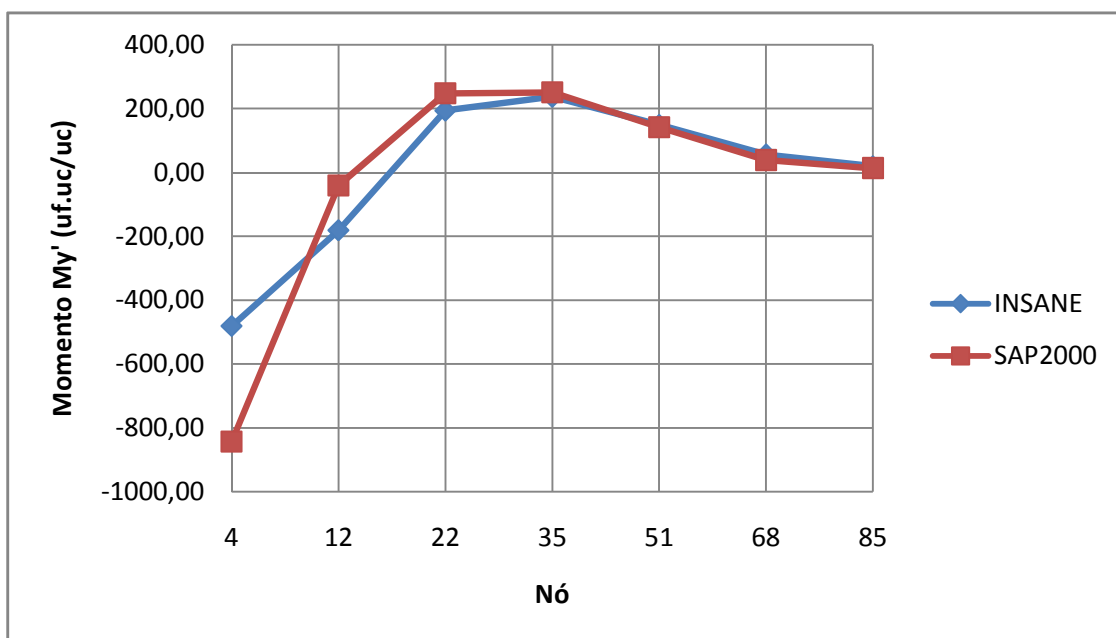


Figura 7.56: Momento fletor  $M_{y'}$  na linha de centro da barragem.

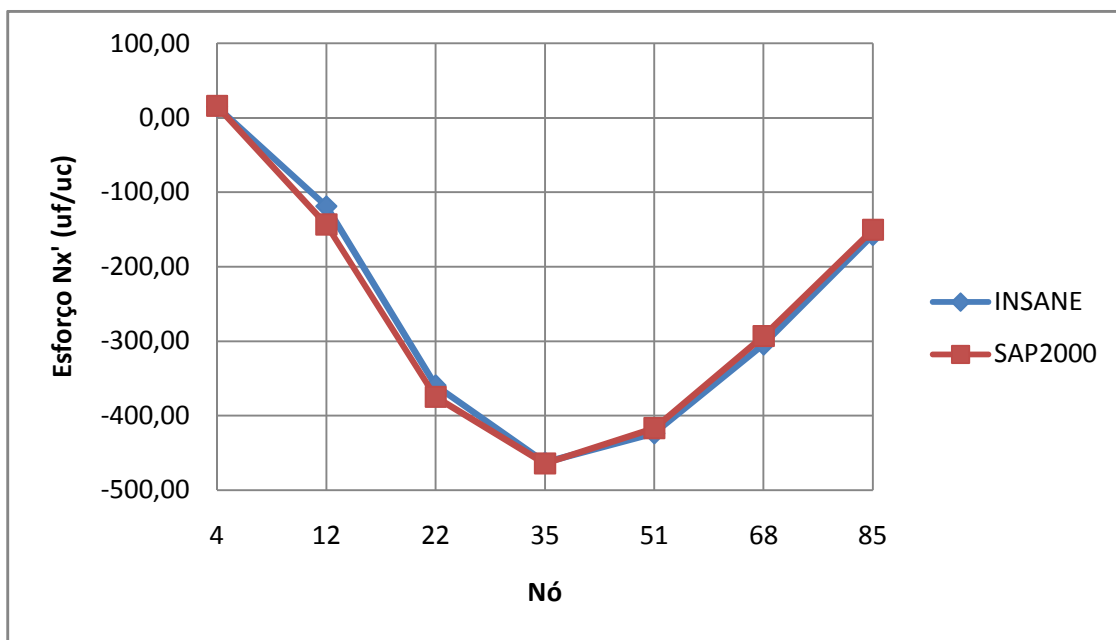


Figura 7.57: Esforço normal  $N_{x'}$  na linha de centro da barragem.

## 7.6 Discussão dos Resultados

Os quatro exemplos apresentados neste capítulo mostram bons resultados obtidos pelo sistema **INSANE**, quando comparados com as soluções teóricas e com o software **SAP2000 - Versão 11.0.8**. Além disso, a rigidez rotacional fictícia mostrou-se bastante adequada à solução dos problemas que apresentam nós coplanares, já que os resultados do **INSANE** estão bastante próximos do teórico e do **SAP2000 - Versão 11.0.8**, que utiliza um elemento com rigidez rotacional  $\theta_{z'}$  para a solução desse problema.

# Capítulo 8

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

“A implementação atual do núcleo numérico do **INSANE** permite ampliá-lo, reutilizá-lo ou adaptá-lo para outras aplicações, com poucas mudanças. Pode-se afirmar que esta característica existe devido à utilização da programação orientada a objetos (POO) que propõe o encapsulamento de dados segundo suas características e isto permite alterar partes do sistema sem prejudicar outras” (Fonseca, 2008). Isto pode ser comprovado neste trabalho, onde se pôde combinar os elementos de placa, implementados por Saliba (2007), com os elementos de membrana, implementados por Almeida (2005), para obter os elementos de casca disponibilizados agora no **INSANE**.

### 8.1 Conclusões

O principal objetivo deste trabalho foi ampliar o núcleo numérico do sistema **INSANE** incluindo a possibilidade de se realizar análises estáticas com elementos finitos de cascas planos. Este objetivo foi alcançado com sucesso.

O Capítulo 5 mostrou que, para o carregamento de membrana, todos os elementos passaram no “Patch Test”. Isto já era esperado já que todos eles são conformes. Já para o carregamento de flexão, os elementos não conformes MZC e CKZ não passaram nos referidos testes.

Contudo, os testes de convergência apresentados no Capítulo 6 mostraram que os

“Patch Tests” sozinhos não são suficientes para decidir sobre a aplicabilidade dos elementos não conformes, pois todos os elementos apresentaram bom comportamento nos testes de convergência.

A validação da implementação computacional também se fez nos diversos exemplos apresentados no Capítulo 7, comparando-se os resultados obtidos pelo sistema **INSANE** com as soluções teóricas e com o software **SAP2000 - Versão 11.0.8**.

Pode-se observar também que, quando há predominância de esforços de membrana, os elementos com maior número de nós apresentam melhores resultados. Já quando a predominância é de flexão os elementos não-conformes de classe C1 (MZC e CKZ), apresentam melhores resultados.

## 8.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

“O trabalho de se desenvolver bons elementos finitos parece nunca terminar. Pesquisadores, voltam, mais e mais, às mesmas configurações de nós e descobrem alguma maneira de extrair alguma melhoria” (Macneal, 1992). Sendo assim, sempre haverá uma maneira de aprimorar ainda mais o programa **INSANE**, o que de fato é bom, pois o torna uma fonte inesgotável para a pesquisa e treinamento de professores, alunos e engenheiros. Neste sentido, a seguir são apresentadas algumas sugestões do que ainda pode ser feito no **INSANE** para o estudo de cascas:

1. Utilização de elementos finitos de membrana com grau de liberdade rotacional para o tratamento de nós coplanares, como o sugerido por Ibrahimbegovic et al. (1990);
2. Criação de um sistema de eixos locais para os nós dos elementos de forma a possibilitar aplicação de restrições, molas e carregamentos, em termos desses eixos de forma direta;
3. Implementação dos carregamentos de superfície para as cascas;

4. Implementação da possibilidade de alteração do sistema de eixos locais dos elementos para que o usuário possa escolher esses eixos da forma que mais lhe convém. Segundo o manual do SAP2000 - Analysis Reference Manual (Versão 11.0.8), “Cabe ao usuário do programa definir o melhor sistema de coordenadas locais que mais simplifique a entrada de dados e a interpretação dos resultados”;
5. Implementação de elementos finitos de casca curvos;
6. Implementação de um pré-processador que forneça ferramentas para a criação e edição de malhas de elementos finitos de casca em três dimensões;
7. Criação de uma ferramenta que possibilite a entrada de dados, edição e apresentação dos resultados em forma de tabelas para planilhas eletrônicas.

# Referências Bibliográficas

- Almeida, M. L., 2005. Elementos finitos paramétricos implementados em Java. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Andrade, L. G., 2005. Análise estática e dinâmica de placas e cascas de materiais compósitos laminados usando elementos finitos hexaédricos de oito nós com integração reduzida. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Carrijo, E. C., 2001. Processamento Paralelo Aplicado em Análise Não Linear de Cascas. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Choi, C.-K. e Lee, W.-H., 1996. ‘Versatile variable-node flat-shell element’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 122, pp. 432–441.
- Cook, R. D., Malthus, D. S. e Plesha, M. E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3ª Edição*. John Wiley & Sons Inc., Madison, EUA.
- Dym, C. L. e Shames, I. I., 1973. *Solid mechanics: A variational approach*. McGraw-Hill, Inc., Tokyo.
- Eckel, B., 2000. *Thinking in Java, 2nd Edition*. Prentice Hall, New Jersey.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Fuina, J. S., 2009. Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Germanio, L., 2005. Implementação orientada a objetos da solução de problemas estruturais dinâmicos via método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Guedes, G. T. A., 2005. *UML 2, Guia de Consulta Rápida*. Novatec Editora, São Paulo.
- Ibrahimbegovic, A., Taylor, R. L. e Wilson, E. L., 1990. ‘A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, pp. 445–457.
- Ibrahimbegovic, A. e Wilson, E. L., 1991. ‘A unified formulation for triangular and quadrilateral flat shell finite elements with six nodal degrees of freedom’. *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 7, pp. 1–9.
- Jin, L., 1994. Analysis and evaluation of a shell finite element with drilling degree of freedom. Dissertação de Mestrado, University of Maryland, Institute for Systems Research, University of Maryland, College Park, EUA.
- Kansara, K., 2004. Development of membrane, plate and flat shell elements in java. Dissertação de Mestrado, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, USA.
- Lima, S. R. F. F., 1972. O método dos elementos finitos aplicado a problemas de cascas e estruturas laminares utilizando-se elementos triangulares planos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Macneal, R. H., 1992. ‘On the limits of finite element perfectability’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, pp. 1589–1601.
- Macneal, R. H. e Harder, R. L., 1985. *A Proposed Set of Problems to Test Finite Element Accuracy*. Vol. 1. Citado por SAP2000 - Software Verification (Versão 11.0.8).



- Oñate, E., 1995. *Calculo de Estructuras por el Metodo de Elementos Finitos*. Artes Gráficas Torres, S.A., Barcelona.
- Pierossi, M. A., 1996. Estudo comparativo entre elementos finitos isoparamétricos das famílias serendipity e lagrangeana para análise estática de cascas e placas. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Pimpinelli, G., 2004. 'An assumed strain quadrilateral element with drilling degrees of freedom'. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 41, pp. 267–283.
- Razzaque, A., 1986. *The patch test for elements*. Vol. 22. Citado por Saliba (2007).
- Saliba, S. S., 2007. Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- SAP2000 - Analysis Reference Manual, Versão 11.0.8. *CSI Analysis Reference Manual*. Computers and Structures, Inc., Berkeley, USA.
- SAP2000 - Software Verification, Versão 11.0.8. *Software Verification Examples*. Computers and Structures, Inc., Berkeley, USA.
- Scordelis, A. e Lo, K. S., 1964. 'Computer analysis of cylindrical shells'. *Journal of the American Concrete Association*, . Citado por SAP2000 - Software Verification (Versão 11.0.8).
- Soriano, H. L. e Lima, S. S., 1999. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. UFRJ, Rio de Janeiro.
- Taylor, R. L., Simó, J. C., Zienkiewics, O. e Chan, A. C. H., 1986. *The patch test - a condition for assessing fem convergence*. Vol. 22(1). Citado por Saliba (2007).
- Timoshenko, S. e Goodier, J. N., 1951. *Theory of Elasticity, 2nd Edition*. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, NY.
- Timoshenko, S. e Woinowsky-Krieger, S., 1959. *Theory of Plates and Shells, 2nd Edition*. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, NY.

Zienkiewicz, O. C., 1977. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company.

Citado por SAP2000 - Software Verification (Versão 11.0.8).

Zienkiewicz, O. C., 1979. *El Método de los Elementos Finitos, 3era Edición*. Ed.

Reverté, Barcelona.

Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L., 2000. *The Finite Element Method, 5ª Edition*.

Butterworth-Heinemann, Massachusetts, USA.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)