

**LAURO MASSAO YAMADA DA SILVEIRA**

**MODELO HIDRO-ELÁSTICO PARA  
SIMULAR AS VIBRAÇÕES INDUZIDAS  
POR VÓRTICES EM CABOS SUBMERSOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do  
título de Doutor em Engenharia

São Paulo

2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**LAURO MASSAO YAMADA DA SILVEIRA**

**MODELO HIDRO-ELÁSTICO PARA  
SIMULAR AS VIBRAÇÕES INDUZIDAS  
POR VÓRTICES EM CABOS SUBMERSOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do  
título de Doutor em Engenharia

Área de concentração: Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Clóvis de A. Martins

São Paulo

2009

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência do orientador.**

**São Paulo, 08 de junho de 2009**

---

**Autor**

---

**Orientador**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Silveira, Lauro Massao Yamada da**  
**Modelo hidro-elástico para simular as vibrações induzidas**  
**por vórtices em cabos submersos / L.M.Y. da Silveira. – Edição**  
**Revisada, São Paulo, 2009.**  
**p.163**

**Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de**  
**São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Vórtices dos fluídos (Simulação numérica) 2. Cabos de**  
**amarração 3. Estruturas offshore semi-submersíveis I.Universi-**  
**dade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Enge-**  
**nharia Mecânica II.t.**

Dedico este trabalho à minha esposa, Anapaula.

Sem ela, não sou nada. Com ela, sou tudo.

# AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins, pela orientação, incentivo e amizade durante os onze anos que trabalhamos juntos. Se este trabalho possui algo de bom, deve-se a ele.

À Fapesp, pela bolsa concedida para a realização deste trabalho.

Aos professores Celso Pesce, José Aranha e Júlio Meneghini pelos ensinamentos e pelo convívio agradável de sempre.

Aos meus amigos e colegas do NDF pela camaradagem, incentivo e pelas conversas acadêmicas e não-acadêmicas.

Aos meus amigos e colegas da Prysmian, por me terem me recebido tão bem nesta nova fase da minha vida.

Aos meus amigos de sempre, Samuel e Eduardo, por tudo o que são.

Às minhas duas famílias, Yamada-Silveira e Rossi-Santoro-Oliveira. São elas que me fazem querer ser alguém melhor.

Em especial, agradeço aos meus pais, Roque e Lúcia, e às minhas irmãs, Leda e Luciana por todo o apoio e suporte que sempre me deram.

## RESUMO

O presente trabalho vem propor um estudo numérico qualitativo de um modelo hidro-elástico para simulação das vibrações induzidas por vórtices (VIV) em cabos submersos.

O modelo é composto de um sistema acoplado de equações que descrevem tanto a estrutura quanto o fluido. A estrutura é modelada através de um oscilador elástico clássico e discretizada através de um método de massas concentradas. O fluido é considerado através de osciladores discretos baseados em modelos fenomenológicos com equação de *Van der Pol* ou *Ginzburg-Landau*. O acoplamento entre os dois ocorre na direção transversal ao escoamento local através da força de sustentação.

O estudo foi feito para verificar quais tipos de comportamentos de resposta podem ser obtidos através do uso dos modelos fenomenológicos e, também, avaliar o potencial de tais modelos no ciclo de projeto na indústria atual, com foco na indústria petrolífera. Esta adequabilidade ao uso em projeto leva em conta, em primeiro lugar, a qualidade das respostas, mas também leva em conta a viabilidade da execução de simulações numéricas em tempo apropriado. Assim, um modelo numérico foi desenvolvido para permitir a integração, no domínio do tempo, deste sistema hidro-elástico. Esta integração é feita através de um método explícito de *Euler* e permite tratar não-linearidades dos osciladores elástico e fluido.

Um conjunto de situações foi simulado numericamente, incluindo configurações verticais e também configurações em catenária. As simulações indicam alto grau de acoplamento entre os osciladores, o que leva a ressonância entre ambos na maior parte dos casos. Com relação ao comportamento do oscilador estrutural em si, foi possível observar fenômenos interessantes tais como *lock-in* e *travelling waves*, além do terceiro harmônico da vibração transversal detectado em alguns experimentos reportados em literatura.

Com relação à adequabilidade do uso do modelo em projeto, considera-se que isto seja possível dada a relativa rapidez das simulações e aos resultados promissores que ainda podem ser melhorados.

## ABSTRACT

The present work proposes a qualitative numerical study of a hydro-elastic model in order to simulate vortex-induced vibrations in submerged cables.

The model is composed of a coupled system of equations describing the structure and the fluid. The structure is modeled through a classical elastic oscillator and discretized using a lumped mass approach. The fluid is modeled through discrete oscillators based on phenomenological models using Van der Pol or Ginzburg-Landau type equations. The coupling between these two oscillators is carried by the lift force.

The study was carried in order to verify which response behavior can be obtained by using such phenomenological models and also, to evaluate their potential to be used in the offshore industry. In order to accomplish that, the model must provide reliable answers and must allow fast responses when it comes to simulation time. In this sense, a numerical model was developed to allow the time domain integration of this hydro-elastic model. The numerical integration is performed by a simple explicit Euler algorithm and allows dealing with non-linearities of both oscillators, elastic and fluid.

A set of conditions was numerically simulated, including top tensioned risers and catenary. Simulations indicate a high level of coupling between the two oscillators and thus resonance is achieved in most part of the cases. With respect to the structural oscillator analysis, it was possible to observe interesting phenomena such as lock-in, travelling waves and also the third harmonic observed in some experiments and reported in the literature.

Regarding the feasibility of the model usage in the daily offshore industry life, it seems possible once the model generally runs fast and some promising results were achieved.

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1 Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1 Breve Histórico e Perspectivas da Exploração de Petróleo na Costa Brasileira .....	1
1.2 O Sistema Offshore e o Papel de Risers e Umbilicais.....	4
1.3 O Projeto Estrutural de Risers e Umbilicais.....	12
1.4 Efeito das Vibrações Induzidas por Vórtices no Projeto de Risers e Umbilicais .....	18
1.5 Estado Atual do Cálculo de VIV em Risers e Umbilicais.....	19
1.6 Organização do Texto .....	22
<b>Capítulo 2 Mecanismo de Emissão e Desprendimento de Vórtices num Escoamento ao Redor de um Cilindro .....</b>	<b>24</b>
2.1 Introdução.....	24
2.2 Regiões do Escoamento Perturbado .....	26
2.3 O Processo de Formação dos Vórtices .....	27
2.4 Regimes de Escoamento.....	33
2.5 Forças Fluido-Dinâmicas, VIV, Número de Strouhal e Lock-in .....	35
2.6 Parâmetros Governantes nas Respostas de Amplitude e Fase das VIV .....	40
<b>Capítulo 3 Modelos Fenomenológicos para VIV.....</b>	<b>44</b>
3.1 Introdução.....	44
3.2 A Equação de Van der Pol .....	47
3.3 Solução Assintótica da Equação de Van der Pol: a Equação de Landau ....	48
3.4 A Equação de Ginzburg-Landau .....	50
3.5 O Modelo Fenomenológico de IWAN & BLEVINS (1974).....	54
3.6 O Modelo Fenomenológico de PARRA & ARANHA (1996).....	59
3.7 O “Modelo Fenomenológico” de ARANHA (2004).....	61
3.7.1 Solução Assintótica dos Modelos Fenomenológicos de IWAN & BLEVINS (1974) e PARRA & ARANHA (1996) .....	61
3.7.2 A Extensão Modelo Fenomenológico com Equação de Landau .....	63
3.7.3 O Trabalho de ARANHA (2004).....	64
3.8 Os Modelos Fenomenológicos no Cenário Atual das Predições de VIV em Aplicações Offshore.....	66

<b>Capítulo 4 Modelo Estático .....</b>	<b>69</b>
4.1 Introdução.....	69
4.2 Definição do Problema Estático .....	71
4.3 Sistema de Coordenadas.....	72
4.4 Esforços Atuantes.....	74
4.4.1 Esforços Gravitacionais .....	75
4.4.2 Esforços Hidrostáticos .....	75
4.4.3 Esforços Hidrodinâmicos .....	77
4.4.4 Esforços Totais.....	81
4.5 Equações do Problema Estático .....	82
4.5.1 Equação de Compatibilidade de Deformação .....	82
4.5.2 Equação de Compatibilidade Geométrica.....	83
4.5.3 Equação de Equilíbrio de Forças .....	84
4.5.4 Equação de Equilíbrio de Momentos .....	86
4.5.5 Equações Constitutivas .....	87
4.5.6 A Força Efetiva .....	87
4.5.7 Sistema de Equações .....	89
4.6 O Caso de Rigidez Flexional Nula .....	90
4.6.1 Motivação.....	90
4.6.2 Tratamento da Equação de Momentos.....	90
4.6.3 Sistema de Equações .....	92
4.7 Interação Cabo – Solo .....	93
4.8 Condições de Contorno .....	95
4.8.1 Cabo Totalmente Suspenso .....	96
4.8.2 Cabo Parcialmente Suspenso .....	96
4.9 Solução Numérica .....	97
4.9.1 Cabo Totalmente Suspenso.....	98
4.9.2 Cabo Parcialmente Suspenso .....	99
<b>Capítulo 5 Modelo Dinâmico .....</b>	<b>101</b>
5.1 Introdução.....	101
5.2 Hipóteses e Restrições .....	101
5.2.1 Rigidezes .....	101
5.2.2 Esforços Considerados .....	102
5.2.3 Interação com o Solo Marítimo.....	103
5.3 Definição do Problema Dinâmico .....	103

5.4	Sistema de Coordenadas.....	104
5.4.1	Base Local, Velocidade de Corrente Não-Nula.....	106
5.4.2	Base Local, Velocidade de Corrente Nula ou Paralela à Direção Axial ao Cabo	106
5.5	Esforços Aplicados.....	107
5.5.1	Inércia.....	108
5.5.2	Inércia Adicional.....	108
5.5.3	Arrasto e Sustentação Hidrodinâmicos.....	109
5.5.4	Esforços Totais.....	111
5.5.5	Condições de Contorno.....	111
5.6	Equações do Problema Dinâmico.....	112
5.6.1	Equação de Compatibilidade de Deformação.....	112
5.6.2	Equação de Compatibilidade Geométrica.....	113
5.6.3	Equação de Equilíbrio de Forças.....	114
5.6.4	Equação Constitutiva.....	115
5.6.5	Sistema de Equações.....	115
5.7	Os Modelos Fluidos.....	116
5.7.1	Modelo de IWAN & BLEVINS (1974).....	116
5.7.2	Modelo de PARRA & ARANHA (1996).....	117
5.7.3	Modelo de ARANHA (2004).....	117
5.8	Modelo Discreto Espacial.....	117
5.8.1	Discretização Espacial das Variáveis.....	118
5.8.2	Análise de um Segmento.....	119
5.8.3	Análise de um Nó.....	120
5.8.4	Os Modelos Fluidos Discretos.....	123
5.9	Solução Numérica: Discretização no Tempo.....	124
<b>Capítulo 6 Resultados .....</b>		<b>127</b>
6.1	Introdução.....	127
6.2	Informações e Comentários Gerais.....	128
6.2.1	Descrição do Cabo Submerso Utilizado nas Simulações.....	128
6.2.2	Coeficientes dos Modelos Fenomenológicos.....	129
6.2.3	Tempo Necessário para Estabilização da Resposta.....	129
6.2.4	Passos de Tempo de Integração e Tempo Gasto em Simulação.....	131
6.3	Estudo de Caso 1.....	132
6.4	Estudo de Caso 2.....	137

6.5	Estudo de Caso 3 .....	145
6.6	Estudo de Caso 4 .....	152
<b>Capítulo 7 Considerações Finais e Conclusões.....</b>		<b>154</b>
<b>Referências.....</b>		<b>148</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Produção diária da Petrobras. Dados extraídos de PETROBRAS (2008). .....	2
Figura 1.2 – Reserva provada brasileira. Dados extraídos de PETROBRAS (2008). .	3
Figura 1.3 – Aumento da profundidade de exploração ao longo dos anos. Extraído de PETROBRAS (2008). .....	4
Figura 1.4 – Exemplos de plataformas. Da esquerda pra direita, de cima para baixo: fixa, semi-submersível, FPSO (spread moored), FPSO (turret moored). .....	6
Figura 1.5 – Árvore de Natal Molhada (ANM) . .....	8
Figura 1.6 – Exemplo de esquema submarino simples. ....	9
Figura 1.7 – Configuração em Catenária .....	9
Figura 1.8 – Configuração em Lazy-wave .....	10
Figura 1.9 – Configuração em Lazy-S .....	11
Figura 1.10 – Exemplos de acessórios. Da esquerda para a direita, de cima para baixo: armour pot, cabeça de tração e enrijecedor de curvatura .....	12
Figura 1.11 – Esquema típico de um riser. Cortesia da Technip. ....	13
Figura 1.12 – Esquema típico de um umbilical. Cortesia da Prysmian Cables & Systems.....	14
Figura 1.13 – Exemplos de seções transversais de umbilicais: (i) mangueiras termoplásticas e cabo elétrico; (ii) mangueiras termoplásticas, mangueiras HCR e cabo elétrico; (iii) mangueiras termoplásticas e tubos metálicos. Cortesia de Prysmian Cables & Systems. ....	15
Figura 2.1 – Regiões do escoamento perturbado, extraído de CARMO (2005). .....	26
Figura 2.2 – Contornos de velocidade (a) em “x” (u) e (b) em “y” (v) para escoamento incidente em cilindro circular obtidos por simulação numérica. 27	
Figura 2.3 – Escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re = 0,16$ . Extraído de VAN DYKE (1982). .....	28
Figura 2.4 – Escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re = 1,54$ . Extraído de VAN DYKE (1982). .....	29
Figura 2.5 – Escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re = 9,6$ . Extraído de VAN DYKE (1982). .....	29
Figura 2.6 – Escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re = 13,1$ . Extraído de VAN DYKE (1982). .....	30
Figura 2.7 – Escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re = 26$ . Extraído de VAN DYKE (1982). .....	30
Figura 2.8 – Escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re = 32$ , $Re = 55$ e $Re =$ $65$ . Extraído de ÁSSI (2005). .....	31

Figura 2.9 – escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re = 105$ . Extraído de VAN DYKE (1982) .....	31
Figura 2.10 – escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re = 140$ . Extraído de VAN DYKE (1982) .....	32
Figura 2.11 – O modelo de Gerrard para desprendimento dos vórtices. Extraído de ÁSSI (2005).....	32
Figura 2.12 – Campo de pressões na parede do cilindro; escoamento separado sem desprendimento de vórtices. Extraído de ÁSSI (2005). .....	35
Figura 2.13 – Campo de pressões na parede do cilindro; desprendimento de vórtices iniciado. Extraído de ÁSSI (2005). .....	36
Figura 2.14 – Coeficientes de arrasto e sustentação em função do número de Reynolds. De acordo com Zdravkovich (1997); figura extraída de ÁSSI (2005). .....	38
Figura 2.15 – Curva $St \times Re$ . Adaptada de FEY, KÖNIG, ECKELMANN (1998). .	40
Figura 2.16 – Amplitude de vibração transversal de cilindro rígido. Feng (1968) $m^* = 248$ , $(m^* \zeta) = 3,28$ . Khalak & Williamson (1999) $m^* = 10,1$ , $(m^* \zeta) = 0,13$ . Extraído de Khalak & Williamson (1999). .....	42
Figura 3.1 – Exemplo de comportamento da equação de <i>Van der Pol</i> .....	48
Figura 3.2 – Comportamento qualitativo da equação de <i>Ginzburg-Landau</i> .....	51
Figura 3.3 – Mapa de contorno da norma de A, Simulação 1 .....	52
Figura 3.4 – Mapa de contorno da fase de A, Simulação 1 .....	52
Figura 3.5 – Mapa de contorno da norma de A, Simulação 2 .....	53
Figura 3.6 – Mapa de contorno da fase de A, Simulação 2 .....	53
Figura 3.7 – Cilindro montado em base elástica e sujeito a escoamento uniforme ...	54
Figura 3.8 – Volume de controle.....	55
Figura 4.1 – Esquema tridimensional de um cabo submerso.....	71
Figura 4.2 – Ângulo $\theta_0(s)$ .....	73
Figura 4.3 – Ângulo $\psi_0(s)$ .....	73
Figura 4.4 – Sistemas de referência. ....	74
Figura 4.5 – Diagrama de Forças Equivalentes para a força hidrostática. (Baseado em MARTINS (1984)).....	75
Figura 4.6 – Exemplo de perfil tridimensional de corrente marítima. ....	78
Figura 4.7 – Compatibilidade de deformação. ....	83
Figura 4.8 – Compatibilidade geométrica. ....	83
Figura 4.9 – Equilíbrio de Forças.....	85
Figura 4.10 – Equilíbrio de Momentos. ....	86

Figura 4.11 – Exemplo de projeção horizontal de configuração de cabo submerso apoiado no solo marítimo, caso sem atrito.....	95
Figura 5.1 – Esquema tridimensional de cabo submerso.....	104
Figura 5.2 – Ângulo $\theta(s,t)$ .....	105
Figura 5.3 – Ângulo $\psi(s,t)$ .....	105
Figura 5.4 – Sistemas de referência.....	107
Figura 5.5 – Compatibilidade de deformação.....	113
Figura 5.6 – Compatibilidade geométrica.....	113
Figura 5.7 – Equilíbrio de forças.....	114
Figura 5.8 – Discretização espacial.....	118
Figura 6.1 – Exemplo de resposta por movimento imposto ao topo.....	130
Figura 6.2 – Exemplo de resposta por VIV.....	131
Figura 6.3 – Configuração estática no plano XZ, Estudo de Caso 1, velocidade de corrente 0,100m/s.....	133
Figura 6.4 – Tração efetiva vs. coordenada curvilínea, Estudo de Caso 1, velocidade de corrente 0,100m/s.....	134
Figura 6.5 – Amplitude normalizada vs. Velocidade reduzida, Estudo de Caso 1..	135
Figura 6.6 – Freqüência normalizada vs. Velocidade reduzida, Estudo de Caso 1.	135
Figura 6.7 – Freqüência normalizada vs. Velocidade reduzida, Estudo de Caso 1 (ampliação).....	136
Figura 6.8 – Freqüências naturais vs. Velocidade de corrente.....	137
Figura 6.9 – Envelopes de resposta na direção global Y, Estudo de Caso 2.....	140
Figura 6.10 – Movimento do nó 100 no plano XY, velocidade de corrente 0,30m/s, Estudo de Caso 2.....	141
Figura 6.11 – Espectro de freqüências dos movimentos em X e Y, velocidade de corrente 0,30m/s, Estudo de Caso 2.....	141
Figura 6.12 – Espectro de freqüências dos movimentos em X e Y, velocidade de corrente 0,30m/s, Estudo de Caso 2 (ampliação).....	142
Figura 6.13 – Movimento do nó 100 no plano XY, velocidade de corrente 0,75m/s, Estudo de Caso 2.....	143
Figura 6.14 – Espectro de freqüências dos movimentos em X e Y, velocidade de corrente 0,75m/s, Estudo de Caso 2.....	143
Figura 6.15 – Série temporal das posições Y nó 100, velocidade de corrente 0,75m/s, Estudo de Caso 2.....	144
Figura 6.16 – Instantâneos de valores de pico da primeira meia-onda, velocidade de corrente 0,75m/s, Estudo de Caso 2.....	145

Figura 6.17 – Configuração estática no plano XZ, Estudo de Caso 3, velocidade de corrente 0,20m/s .....	146
Figura 6.18 – Tração efetiva vs. coordenada curvilínea, Estudo de Caso 3, velocidade de corrente 0,20m/s .....	147
Figura 6.19 – Frequências naturais transversais vs. Velocidade de corrente, Estudo de Caso 3 .....	148
Figura 6.20 – Envelopes de resposta na direção global Y, Estudo de Caso 3 .....	149
Figura 6.21 – Espectro de frequências dos movimentos em X, Y e Z, velocidade de corrente 0,20m/s, Estudo de Caso 3 .....	150
Figura 6.22 – <i>Travelling wave</i> , velocidade de corrente 0,20m/s, Estudo de Caso 3. No eixo vertical, amplitude de deslocamento transversal, em metros. No eixo horizontal, coordenada curvilínea do cabo submerso, em metros, com topo na coordenada 850m (à esquerda).....	151
Figura 6.23 – Mapa de fases da resposta da variável que descreve o oscilador fluido (através de equação de Ginzburg-Landau) quando desacoplada do oscilador elástico (acima) e quando acoplada ao oscilador elástico (abaixo). Note o padrão do mapa de fases quando comparado ao modo de vibrar da estrutura. ....	153

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4-1 – Esquema do algoritmo de solução para o problema estático de cabo totalmente suspenso.....	99
Tabela 4-2 – Esquema do algoritmo de solução para o problema estático de cabo parcialmente suspenso.....	100

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANM	Árvore de Natal Molhada
BOE	Barril de Óleo Equivalente
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional ( <i>Computational Fluid Dynamics</i> )
EPR	Borracha Etileno-Propileno ( <i>Ethylene-Propylene Rubber</i> )
FPSO	Flutuação, Produção, Armazenamento e Descarregamento ( <i>Floating, Production, Storage and Offloading</i> )
HCR	Alta Resistência a Colapso ( <i>High Collapse Resistant</i> )
HDPE	Polietileno de alta densidade ( <i>High Density Polyethylene</i> )
LDPE	Polietileno de baixa densidade ( <i>Low Density Polyethylene</i> )
LGN	Gás Natural Liquefeito ( <i>Liquefied Natural Gas</i> )
PP	Polipropileno (Polypropylene)
PVC	Cloreto de Polivinil (Polyvinyl Chloride)
TDP	Ponto de Toque ( <i>Touchdown Point</i> )
VIV	Vibrações Induzidas por Vórtices ( <i>Vortex Induced Vibrations</i> )

## LISTA DE SÍMBOLOS

0	Quando subscripto (como índice), refere-se à variável do problema estático de cabos submersos.
a	Quando subscripto (como índice), refere-se à direção axial ao eixo do cabo submerso.
$a_i$	Coefficientes do modelo fenomenológico de Iwan & Blevins.
$\vec{a}$	Versor na direção axial ao eixo do cabo submerso.
A	Área da seção transversal do cabo submerso / cilindro;  Variável complexa para o oscilador fluido.
AXI	Quando subscripto, indica que vetor está na direção axial ao cabo.
$\vec{c}$	Esforços hidrodinâmicos de arraste devido à corrente marítima aplicados ao cabo submerso (por unidade de comprimento).
$c_d$	Coefficiente de arrasto.
$c_m$	Coefficiente de massa adicional.
$C_A ; C_{AAA} ; C_V ;$ $C_{\dot{V}} ; C_{VVV} ;$ $C_{AAV} ; C_{AVA} ;$ $C_{VVA} ; C_{VAV}$	Coefficientes da força de sustentação do modelo relativo à Equação de Ginzburg-Landau estendida.
D	Diâmetro do cabo submerso / cilindro.
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$	Versores do eixo local de coordenadas.
$\vec{E}$	Força de empuxo.

$EA$	Rigidez axial do cabo submerso.
$EI$	Rigidez flexional do cabo submerso.
$f$	Fator de velocidade do perfil de corrente marítima; Função de forma; Frequência. Quando subscripto, indica que é relativo ao (oscilador) fluido
$f_N$	Frequência natural.
$f_P$	Forçante fluida.
$f_s$	Frequência de emissão de vórtices.
$\{f_V; f_{\dot{V}}; f_{VV}\}$	Coefficientes forçantes da Equação de Ginzburg-Landau estendida.
$\vec{F}$	Força.
$\vec{F}_D$ ou $\vec{F}_d$	Força de arrasto.
$\vec{F}_i$	Força de inércia
$\vec{F}_{ia}$	Força de inércia adicional
$\vec{F}_L$ ou $\vec{F}_l$	Força de sustentação.
$\vec{F}_{ef}$	Força efetiva em dada seção do cabo submerso.
$g$	Aceleração da gravidade.
$h$	Profundidade do local onde o cabo submerso está instalado;

	Esforços hidrostáticos aplicados ao cabo submerso (por unidade de comprimento).
$\vec{H}$	Esforços hidrostáticos aplicados ao cabo submerso.
INL	Quando subscripto, indica que está na direção do escoamento normal ao cabo.
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Versores do eixo global de coordenadas.
$l_T$	Comprimento total do cabo submerso.
$L$	Comprimento do cilindro.
$m$	Massa de um cilindro por unidade de comprimento.
$\vec{M}$	Momento estrutural.
$n$	Quando subscripto, refere-se à direção normal ao cabo submerso.
$O_{xyz}$	Origem do sistema de coordenadas global.
$p$	Pressão ou campo de pressões.
$\vec{p}$	Esforços gravitacionais aplicados ao cabo submerso (por unidade de comprimento).
$\vec{q}$	Esforços totais aplicados ao cabo submerso (por unidade de comprimento).
$\vec{r}$	Posição de uma dada seção do cabo submerso.
Re	Número de Reynolds;  Parte real de um número complexo.
$s$	Coordenada curvilínea.

$S, St$	Número de Strouhal.
$t$	Tempo.
	Quando subscrito (como índice), refere-se à direção transversal ao eixo do cabo submerso.
TRA	Quando subscrito, indica que está na direção transversal ao escoamento e ao cabo.
$\vec{U}$ ou $U$	Velocidade de escoamento ao longe.
$U^*$	Velocidade reduzida.
$T_{ef}$	Tração efetiva em dada seção do cabo submerso.
$\vec{v}_c$	Velocidade da corrente marítima.
$V_o$	Velocidade de um cilindro na direção transversal ao escoamento.
$(X_T, Y_T, Z_T)$	Coordenadas do ponto de conexão do topo.
$Y_o$	Deslocamento de um cilindro na direção transversal ao escoamento.
$\dot{y}$	Velocidade de um cilindro na direção transversal ao escoamento
$z_f$	Oscilador fluido.
$\alpha_i$	Parâmetros do modelo fenomenológico baseado em equação de Van der Pol.
$\Delta$	Quando colocado à esquerda da variável, indica variação da mesma.
$\varepsilon$	Deformação axial.

$\gamma$	Peso do cabo submerso (por unidade de comprimento)
$\gamma_{ef}$	Peso efetivo do cabo submerso (por unidade de comprimento)
$\gamma_o$	Coefficiente de Ginzburg.
$\vec{\lambda}$	Versor da direção da corrente marítima.
$\mu$	Viscosidade absoluta.
$\mu_o$	Coefficiente de Landau.
$\nu_{AAV} ; \nu_{AVA} ;$ $\nu_{VVA} ; \nu_{VAV}$	Coefficientes de interação da Equação de Ginzburg-Landau estendida
$\theta$	Ângulo de declinação.
$\rho$	Massa específica.
$\sigma_o$	Coefficiente de instabilidade.
$\tau$	Escala de variação lenta do tempo.
$\psi$	Ângulo de azimute.
$\omega$	Frequência angular.
$\zeta$	Amortecimento estrutural.

# CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Breve Histórico e Perspectivas da Exploração de Petróleo na Costa Brasileira

A exploração de Petróleo no Brasil confunde-se com a história da Petrobras, estatal brasileira que até recentemente detinha o monopólio das atividades petrolíferas no país (este monopólio chegou ao fim através da Lei nº 9478 de 06 de agosto de 1997, BRASIL, 1997).

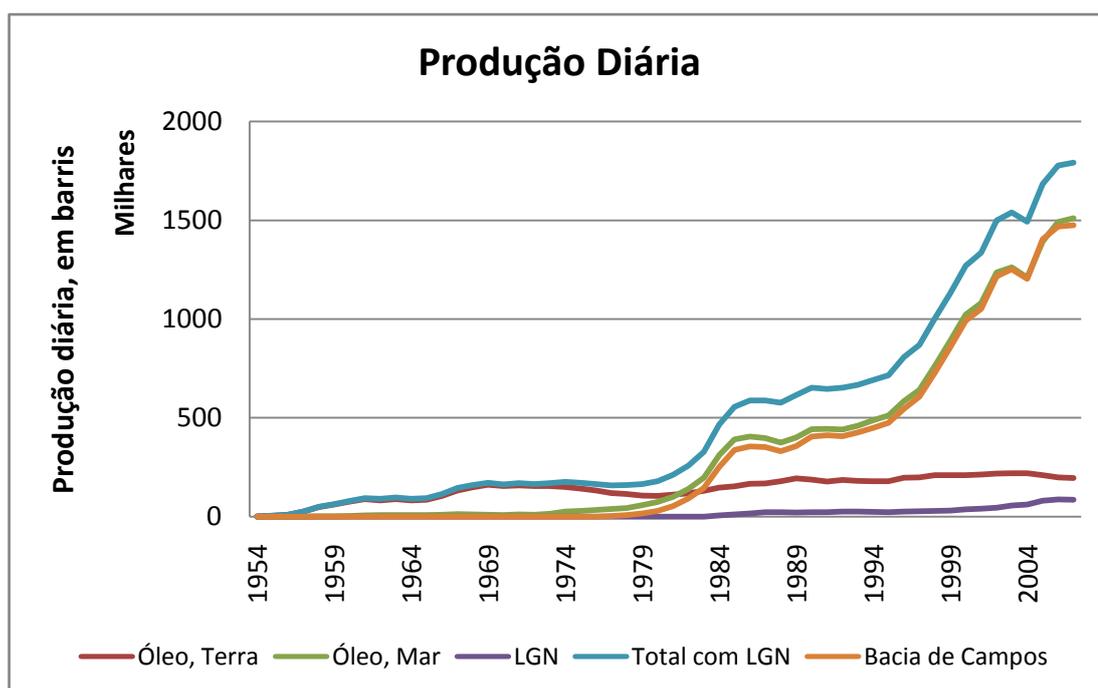
Com produção em terra limitada a baixos níveis, em 1968 a Petrobras decidiu buscar petróleo no mar e iniciou os trabalhos de prospecção. No ano seguinte, descobriu o campo de Guaricema (Sergipe), em lâmina d'água de 30m, iniciando desta forma a produção de petróleo *offshore* no Brasil. Os sucessos desta operação levaram mais tarde à descoberta, no município de Campos no litoral fluminense, da bacia que viria posteriormente a se tornar a maior produtora de petróleo do país. O campo inicial na Bacia de Campos foi Garoupa, descoberto em 1974, seguido pelos campos gigantes de Marlim, Albacora, Barracuda e Roncador, dentre outros.

Sucessivamente, novos campos foram descobertos a profundidades cada vez maiores e, felizmente, o avanço tecnológico em toda a cadeia envolvida (prospecção, perfuração, logística, extração, refino etc.) permitiu a exploração dos mesmos. Assim, o crescimento da produção *offshore* foi espantoso e, em 2006, o Brasil alcançou a marca simbólica da auto-suficiência em petróleo, ou seja, pela primeira vez o país produziu mais petróleo do que consumiu.

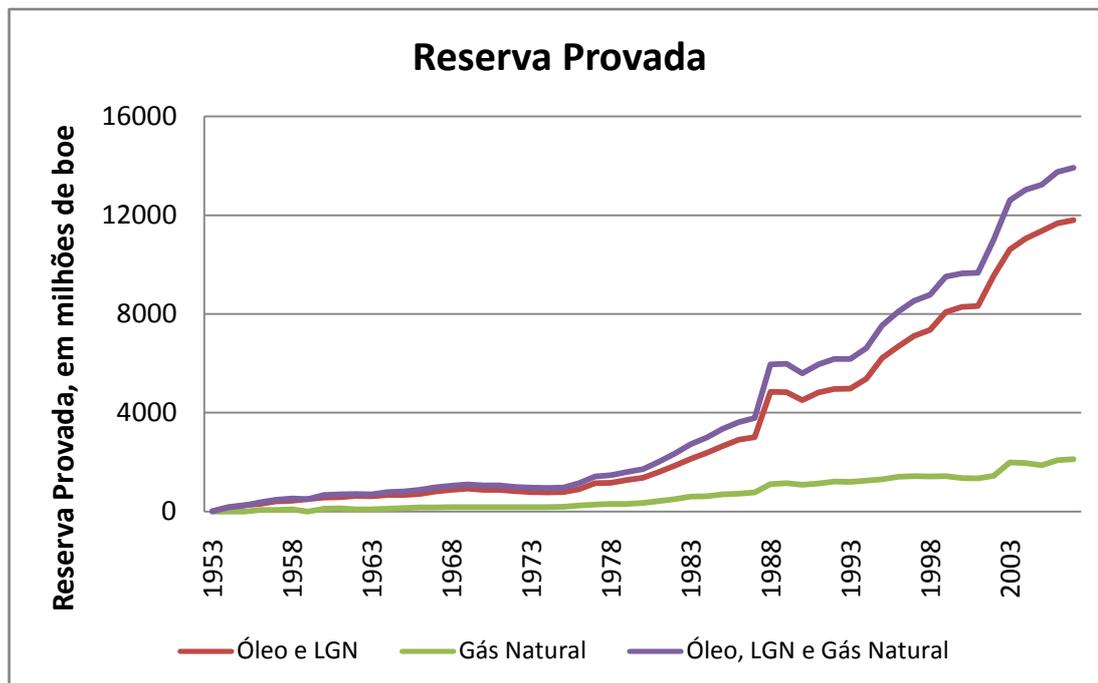
Por sua vez, o trabalho de prospecção manteve-se em plena atividade e, ainda hoje, novos e importantes campos de petróleo e gás são descobertos na costa brasileira.

Podem ser citados os exemplos dos campos de Júpiter e Tupi, na bacia de Santos, em lâmina d'água superior aos 2000m.

O resultado deste processo fica bem claro quando se olha para a evolução da produção e também das reservas provadas de petróleo e gás, como ilustrados, respectivamente, na Figura 1.1 e na Figura 1.2, PETROBRAS (2008).



**Figura 1.1 – Produção diária da Petrobras. Dados extraídos de PETROBRAS (2008).**



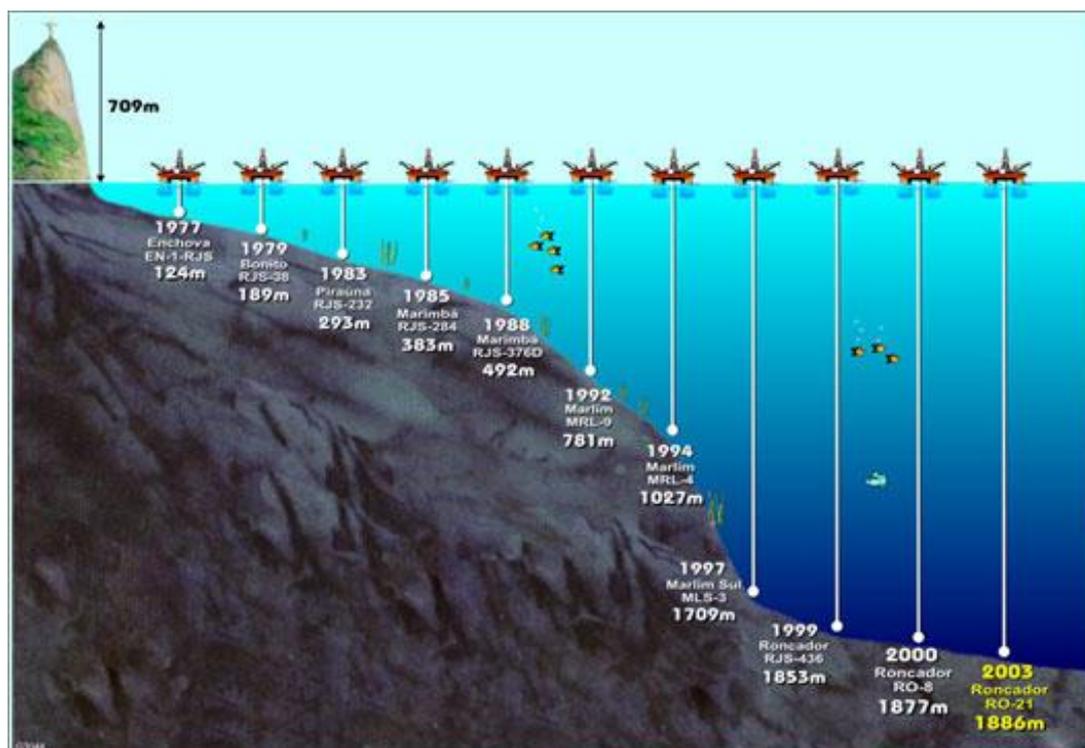
**Figura 1.2 – Reserva provada brasileira. Dados extraídos de PETROBRAS (2008).**

Nos gráficos apresentados, fica claro o percentual das reservas e da produção *offshore* no Brasil, bem como a importância da Bacia de Campos. O aumento das reservas provadas dá um excelente indício da perspectiva futura que não poderia ser outra senão o aumento da produção.

A Petrobras já tem planos para produção-piloto no campo de Tupi, por exemplo, para 2011 (CIRILO JÚNIOR, 2007). Com o fim do monopólio da Petrobras, outras empresas já começam a explorar petróleo no Brasil, como *Shell* e *Statoil-Hydro*, mais um indício de que as operações de exploração de petróleo *offshore* irão continuar em ritmo acelerado.

Apesar do esforço em pesquisa e desenvolvimento na área de fontes renováveis de energia, a necessidade da sociedade pelo petróleo dá sinais que ainda vai perdurar, mesmo porque o setor petroquímico de um modo geral não possui substituto à altura no futuro próximo.

Por fim, visto que os novos campos são descobertos em profundidades cada vez maiores (veja Figura 1.3), o desafio tecnológico envolvido continua, e exigindo da comunidade científica respostas rápidas para a solução dos problemas relacionados a todo este cenário.



**Figura 1.3 – Aumento da profundidade de exploração ao longo dos anos. Extraído de PETROBRAS (2008).**

## 1.2 O Sistema Offshore e o Papel de Risers e Umbilicais

Segundo o artigo de MAGOON & DOW (1994), a existência de petróleo só é possível na presença de quatro elementos (rochas geradoras, rochas-reservatório, rochas selantes e trapas) e dois fenômenos geológicos dependentes do tempo (migração e sincronismo). De maneira bastante superficial, o processo de geração de um campo de petróleo é o descrito a seguir.

As rochas geradoras são rochas sedimentares com elevadas quantidades de material orgânico de qualidade adequada à formação de petróleo, o que ocorre dependendo, é claro, de condições de pressão e temperatura favoráveis. Caso realmente haja a

formação do petróleo, o mesmo provoca um aumento de pressão (já que seu volume é maior do que o material orgânico base), provocando fratura da rocha geradora. Ocorre então a migração do petróleo para zonas de pressões mais baixas que são, em geral, os interstícios de rochas localizadas em regiões mais próximas à superfície. As rochas cujos interstícios ficam repletos de óleo são as rochas reservatório.

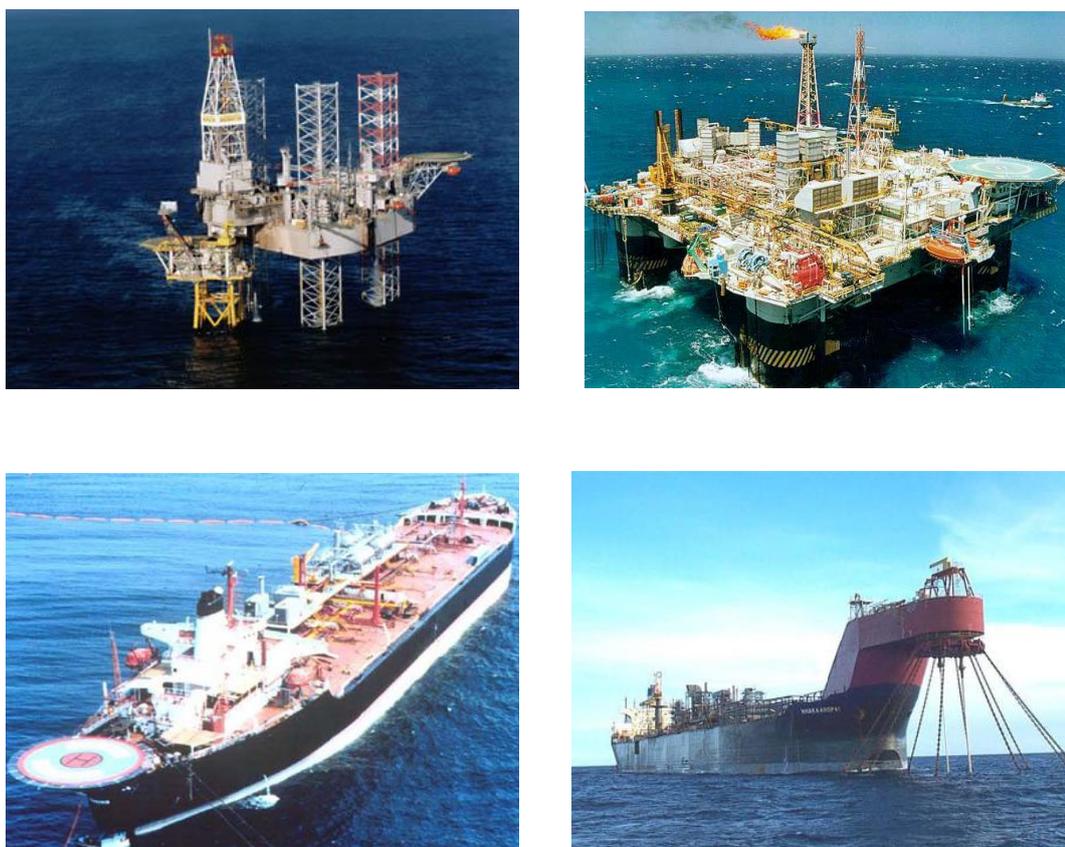
Esta migração deve ser então contida pela trapa, que é uma configuração de rochas propícia para o aprisionamento do petróleo nas rochas reservatório. Além da configuração favorável, as rochas adjacentes devem possuir poros menores, de difícil migração do fluido; estas são as rochas selantes.

Todo este processo precisa, naturalmente, ocorrer numa escala de tempo adequada. Isto é o sincronismo.

A exploração de petróleo e gás *offshore* inicia-se através da prospecção geológica das bacias sedimentares, ou seja, descobrir possíveis localizações da trapa através de imagens de varreduras obtidas com sonar. Este processo é bastante dispendioso economicamente, difícil tecnicamente e com probabilidade de sucesso relativamente pequena, mas que tem retorno financeiro extremamente recompensador uma vez que um campo de grandes proporções é encontrado. A média mundial de sucesso em perfuração de poços exploratórios gira em torno de 20% (a média da Petrobras é de 40%), PETROBRAS (2008).

Como já dito, o petróleo não fica em bolsões, mas sim incrustado nas rochas reservatório, que ficam em profundidades bastante expressivas. Para que se tenha uma idéia, o campo de Tupi fica a uma profundidade total de 5000m, sendo que a lâmina d'água é de "apenas" 2000m. Para que se tenha acesso ao petróleo, é necessário realizar a perfuração e, para isso, existem navios e plataformas projetados especialmente para este fim. Em grandes profundidades, é quase certo que tais unidades flutuantes de perfuração disponham de sistemas de posicionamento dinâmico de modo a anular os efeitos ambientais de corrente marítima, vento e ondas e manter sua posição ideal para o processo da perfuração. Em geral, são perfurados diversos poços num mesmo campo.

Uma vez que se decida pela exploração do campo encontrado, é necessário então que uma plataforma seja designada para as proximidades das cabeças de poço. Existem tipos distintos de plataformas, cada qual com suas vantagens e particularidades. Os principais tipos de plataforma utilizados na costa brasileira são: fixa, semi-submersível e FPSO (*Floating, Production, Storage and Offloading*) e podem ser visualizados na Figura 1.4.



**Figura 1.4 – Exemplos de plataformas. Da esquerda pra direita, de cima para baixo: fixa, semi-submersível, FPSO (spread moored), FPSO (turret moored).**

As plataformas fixas são projetadas para serem apoiadas sobre o fundo do mar através de estruturas metálicas (na maioria das vezes estruturas em treliça) e, obviamente, esbarram em limitação quanto à lâmina d'água; a plataforma fixa PNA-2 da Petrobras é a que exhibe maior lâmina d'água de operação: 170m. Um limite técnico-econômico para a utilização de plataformas fixas fica em torno de 500m de profundidade.

As plataformas tipo FPSO muitas vezes aproveitam a estrutura de antigos petroleiros e apresentam dois tipos principais de ancoragem: *spread* (espalhada) e *turret* (torre). A ancoragem em *spread* “fixa” o aproamento da plataforma e um estudo deve ser feito de modo a definir qual é o melhor aproamento; na Bacia de Campos, com medidas históricas de condições ambientais mais severas vindas de sudoeste, estas plataformas têm suas proas apontadas para esta direção. Já as FPSOs com *turret* são livres para girar ao redor de um eixo que passa pelo centro deste e, portanto, minimizam as condições adversas devido à incidência de ondas em aproamentos desfavoráveis. Contudo, a localização do *turret* é, em geral, próxima à proa e induz um movimento vertical considerável nos *risers* devido ao *pitch* da embarcação.

Já as semi-submersíveis são projetadas especificamente para atuarem em campos petrolíferos e sustentarem diversas estruturas, tanto para produção (*risers* flexíveis) quanto controle (umbilicais), e uma das conseqüências disto são os menores movimentos impostos ao topo dos referidos cabos para uma mesma condição ambiental quando comparada a uma FPSO. Além disso, este tipo de plataforma exibe uma mobilidade maior que as plataformas FPSO e são bastante usadas em produção de poços-piloto. A contrapartida das semi-submersíveis é o fato das mesmas possuírem custo mais elevado quando comparada às demais opções.

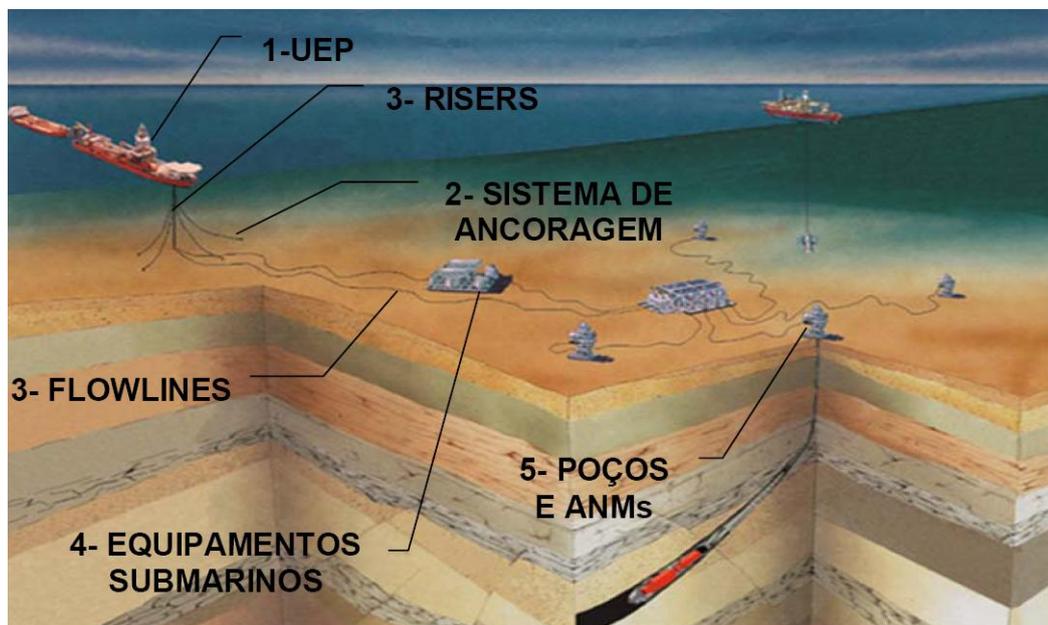
Ressalta-se ainda que a escolha da plataforma a operar em determinado campo pode ser feita não apenas através de critérios técnicos ótimos, mas sim através de critérios econômicos e/ou logísticos (desde que viáveis tecnicamente). As plataformas podem dispor de um conjunto maquinário bastante complexo para até mesmo processar o petróleo explorado. Além disso, possuem também infra-estrutura para manter os trabalhadores nela instalados.

Agora destacando a parte do fundo do mar, no ponto de perfuração, chamado cabeça do poço, é instalado um sistema de conjunto de válvulas que irá controlar a produção. Este equipamento submarino é conhecido como “árvore de Natal molhada”, ou ANM, e um exemplo pode ser visto na Figura 1.5. Importante salientar que não apenas este equipamento submarino é instalado junto à cabeça do poço; contudo, estes outros equipamentos não serão descritos no presente texto.



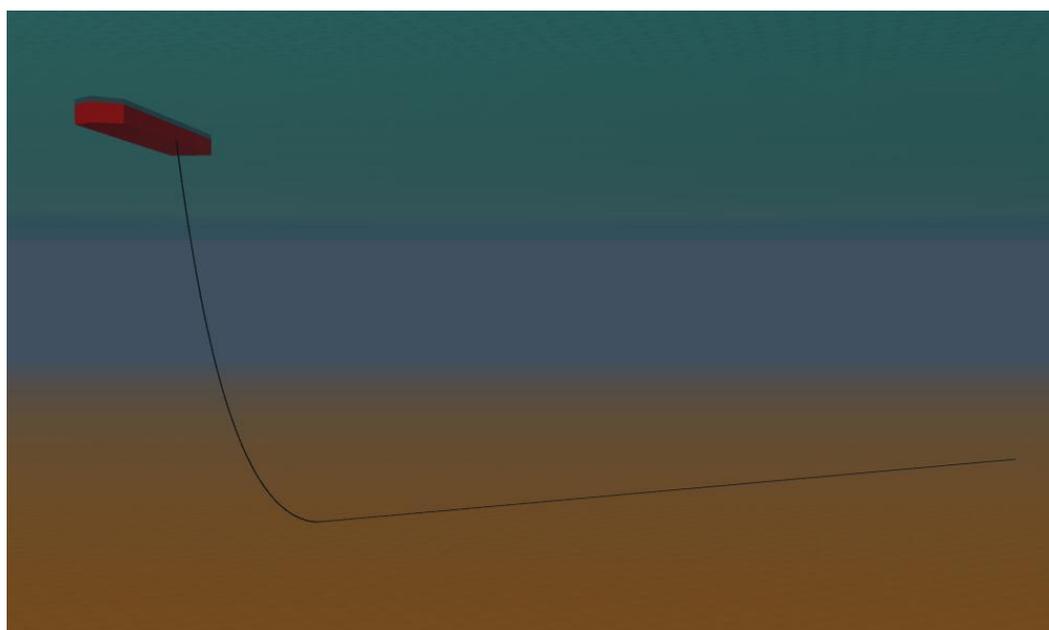
**Figura 1.5 – Árvore de Natal Molhada (ANM) .**

Seguindo esta sucinta descrição, tem-se então o campo de petróleo e/ou gás já descoberto e perfurado, com a ANM instalada na cabeça do poço e com uma plataforma nas proximidades. Faltam os elementos que conectam a plataforma à cabeça do poço: os *risers* e os umbilicais, ou cabos submersos de uma forma geral. Estas estruturas, quase sempre cilíndricas e de grande relação de esbeltez (comprimento muito maior que o diâmetro), são então responsáveis pela conexão física entre a plataforma e o fundo do mar. A Figura 1.6 mostra um arranjo esquemático simplificado de um sistema de exploração de petróleo *offshore*.



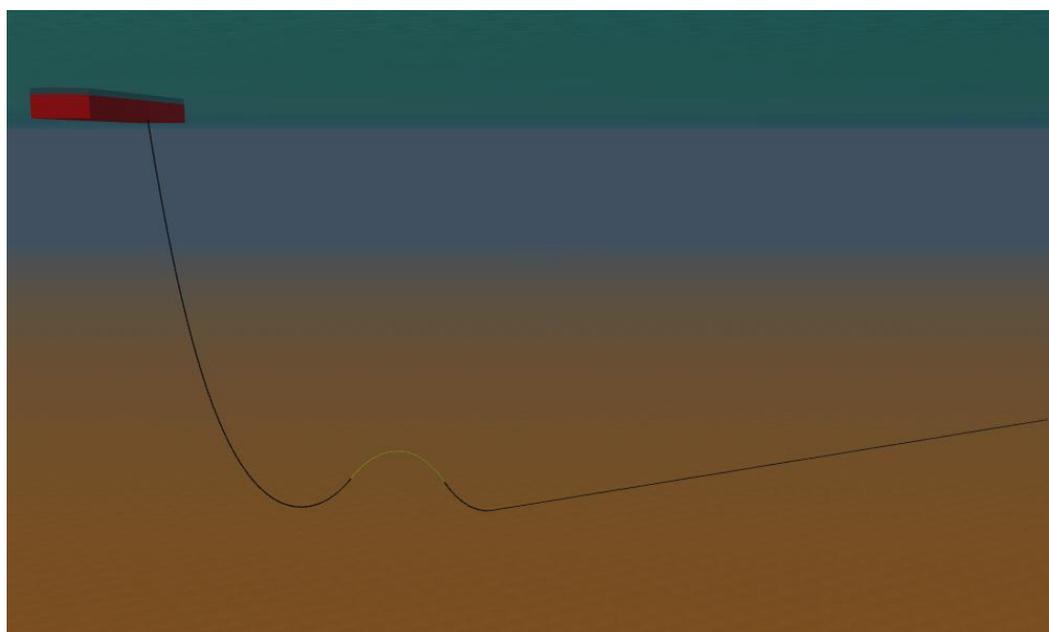
**Figura 1.6 – Exemplo de esquema submarino simples.**

A maneira mais simples de se efetuar a ligação entre a plataforma e o fundo do mar é “pendurar” o cabo na plataforma. Esta configuração, chamada catenária e ilustrada na Figura 1.7, é a mais utilizada justamente devido a esta simplicidade natural.



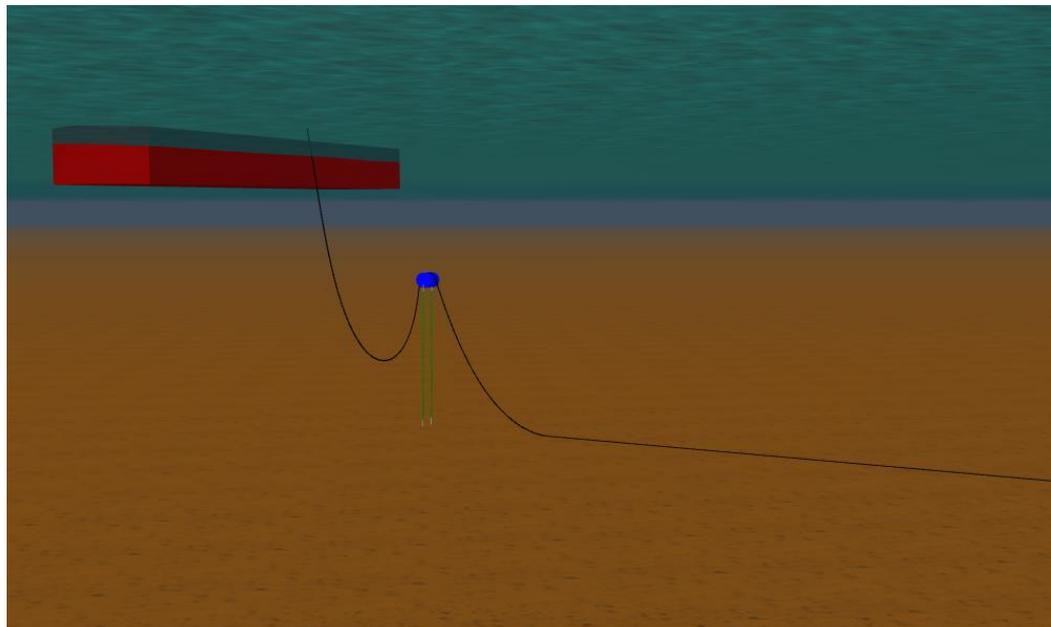
**Figura 1.7 – Configuração em Catenária**

Entretanto, em alguns projetos a configuração em catenária não é tecnicamente viável. Em profundidades muito elevadas, a força de tração pode atingir níveis inaceitáveis e uma das formas de se aliviar esta força é introduzir elementos de flutuação ao longo de determinado trecho do cabo submerso. Esta configuração, mais complacente, é chamada *lazy-wave*. Pode-se observar um exemplo na Figura 1.8. Note que esta configuração já exige o projeto dos elementos de flutuação, elevando o custo e introduzindo dificuldades nos processos de instalação.



**Figura 1.8 – Configuração em Lazy-wave**

Existem situações, no entanto, em que a catenária livre torna-se inviável em profundidades muito baixas nas quais a plataforma não é fixa. Nestes casos, o trecho dinâmico do cabo submerso é muito pequeno e torna-se incapaz de absorver os movimentos da plataforma. A configuração em *lazy-wave* pode ser uma alternativa; contudo, como a mesma tende a ser maleável em demasia, pode-se lançar mão de uma grande estrutura flutuante, presa ao fundo do mar, que serve de “apoio” para os cabos submersos. Esta estrutura, denominada *mid water arch*, impede excessiva movimentação dos cabos submersos devido aos esforços de arraste e também alivia as forças de tração. A configuração resultante é chamada *lazy-S* e pode ser vista na Figura 1.9. Note que a complexidade aumenta ainda mais, pois um novo elemento de grandes proporções deve ser projetado e ancorado ao fundo do mar.



**Figura 1.9 – Configuração em Lazy-S**

As três configurações descritas são as mais comuns no cenário *offshore* atual.

Com relação aos cabos submersos, existe uma gama de acessórios que devem ser projetados para possibilitarem a correta instalação e a correta operação dos mesmos. Segue breve descrição para alguns dos acessórios.

- *Armour pot*: a transferência dos esforços axiais para as armaduras de tração é feita através de uma resina epóxi, ou seja, por adesão. Para tal, a capa externa do cabo submerso é cortada de modo a expor as armaduras de tração; o  *armour pot* é nada mais que um “copo” que contém as armaduras e é preenchido com a resina epóxi.
- Suporte de topo (*hang-off*): é uma estrutura metálica bipartida que serve de suporte para que o  *armour pot* fique apoiado na plataforma.
- Cabeça de tração (*pull-in head*): é uma estrutura utilizada apenas na operação de puxamento (*pull-in*) do cabo submerso do fundo do mar até a plataforma. É preso ao  *armour pot* através de flanges com parafusos. Após a operação de puxamento, o mesmo é desmontado. A cabeça de tração também é importante porque protege o “*pig-tail*” (pequenos trechos de cabo elétrico, cabo ótico, tubos e/ou mangueiras que são conectados aos equipamentos da plataforma) nos umbilicais.

- Enrijecedor de curvatura (*bend stiffener*): estrutura que contém cone polimérico cuja função é realizar a transição de rigidez flexional do cabo submerso na região de conexão com a plataforma.

A Figura 1.10 ilustra alguns dos acessórios de topo descritos anteriormente.



**Figura 1.10 – Exemplos de acessórios. Da esquerda para a direita, de cima para baixo: armour pot, cabeça de tração e enrijecedor de curvatura**

No presente trabalho, os elementos de interesse serão os cabos submersos e, portanto, mais detalhes sobre os mesmos serão mostrados a seguir.

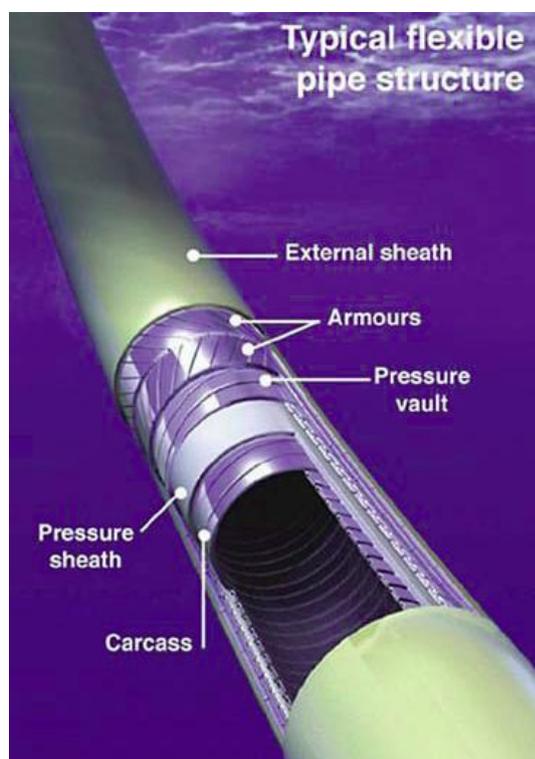
### 1.3 O Projeto Estrutural de Risers e Umbilicais

Os *risers* são estruturas responsáveis pelo transporte de óleo e gás do poço até a plataforma. Contudo, dificilmente o petróleo que está nos interstícios das rochas reservatório possui pressão suficiente para ser elevado até a superfície. Logo, outra função dos *risers* é a de injeção de água no poço com o intuito de elevar a pressão do

reservatório e permitir a extração do petróleo. Perceba que os *risers* são conectados à ANM e a injeção de água ou extração de petróleo é comandada pelas válvulas. Importante salientar que a palavra *riser* no presente trabalho refere-se ao *riser* flexível. Os principais fabricantes de *risers* flexíveis atualmente são: *Technip*, *Wellstream* e *NKT*.

Já os umbilicais são responsáveis, grosso modo, por viabilizar o controle da produção através do controle das válvulas da ANM. Diferentemente dos *risers*, os umbilicais não possuem sua seção “oca”, mas sim preenchida por condutores elétricos e mangueiras e/ou tubos de aço para acionamentos hidráulicos. Os principais fabricantes de umbilicais para o mercado brasileiro atualmente são: *Oceaneering Multiflex*, *Kvaerner*, *Duco*, *Nexans* e *Prysmian*.

Esquemas típicos de *risers* e umbilicais podem ser vistos, respectivamente, na Figura 1.11 e na Figura 1.12.



**Figura 1.11 – Esquema típico de um riser. Cortesia da Technip.**

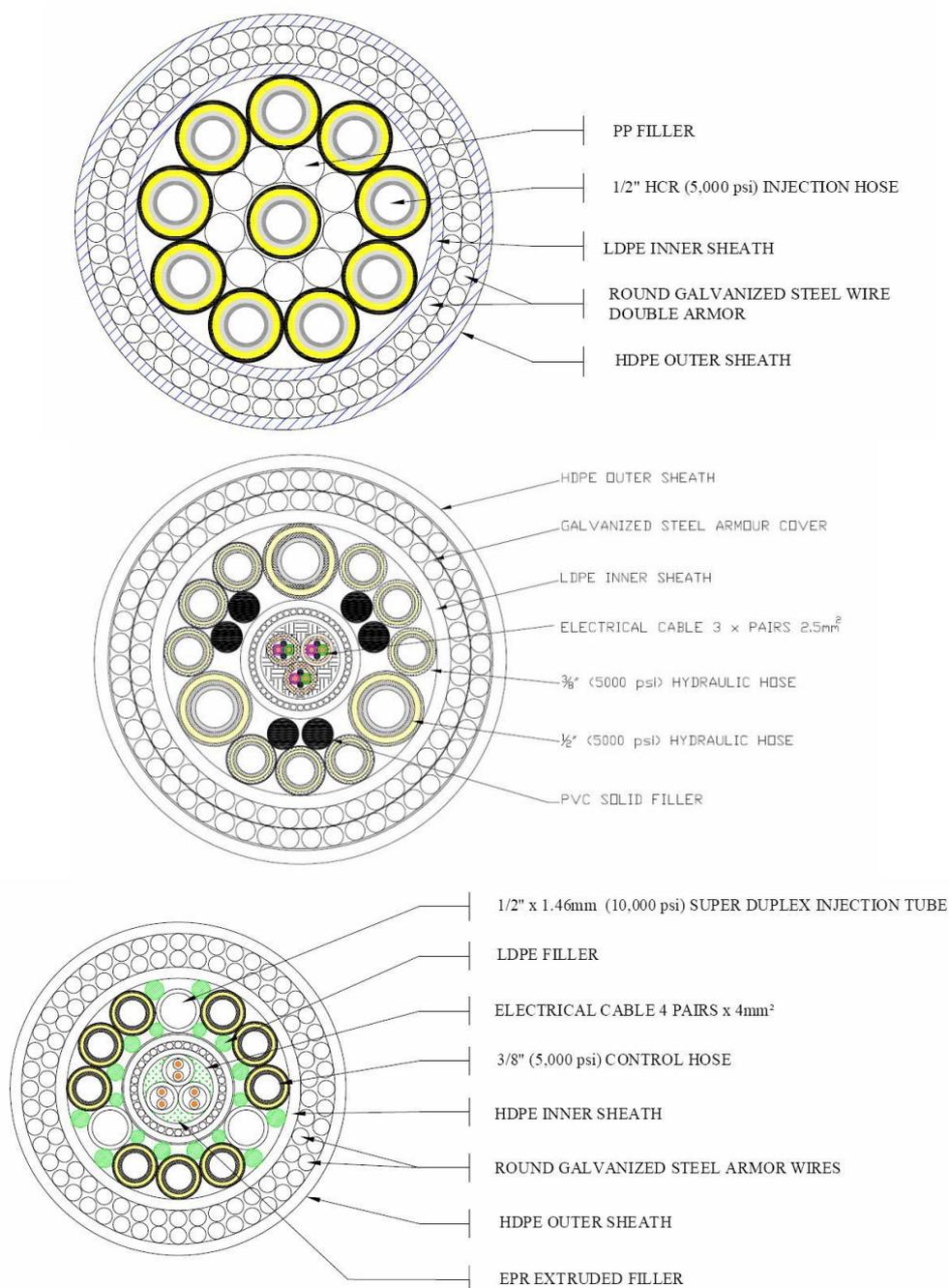


**Figura 1.12 – Esquema típico de um umbilical. Cortesia da Prysmian Cables & Systems.**

Pode-se notar que a construção destas estruturas é baseada em camadas (ou camadas de elementos) com diferentes funções. Nos *risers*, por exemplo, a carcaça intertravada (elemento mais interno) deve prover resistência ao colapso devido à pressão hidrostática; a capa polimérica de pressão deve manter a estanqueidade do fluido transportado e, em geral, deve ser resistente quimicamente a substâncias tais como ácido sulfídrico; a armadura de pressão (também conhecida como camada zeta) deve resistir à pressão interna de trabalho; as armaduras de tração devem prover resistência aos esforços axiais, que se tornam cada vez mais elevados com o aumento de profundidade; a capa externa polimérica deve proteger o *riser* da água do mar e também de choques mecânicos. Além destes elementos, outros elementos podem estar presentes num projeto: fitas poliméricas para evitar desgaste, capas poliméricas de isolamento térmico etc.

Nos umbilicais, também existem a capa externa polimérica e as armaduras de tração. Em geral, também existe uma capa polimérica abaixo da armadura de tração interna. Abaixo desta capa interna, porém, a variedade de arranjos das camadas é bastante

grande: praticamente um novo projeto de seção transversal é feito para cada solicitação. Com relação às funções, porém, pode-se dizer que existem cinco tipos básicos de elementos: condutores de sinal elétrico, condutores de potência elétrica, mangueiras termoplásticas, tubos metálicos e fibra ótica. A Figura 1.13 mostra exemplos de seções transversais de umbilicais.



**Figura 1.13 – Exemplos de seções transversais de umbilicais: (i) mangueiras termoplásticas e cabo elétrico; (ii) mangueiras termoplásticas, mangueiras HCR e cabo elétrico; (iii) mangueiras termoplásticas e tubos metálicos. Cortesia de Prysmian Cables & Systems.**

Do ponto de vista de projeto estrutural, portanto, é necessário que cada elemento resista a um determinado tipo de esforço. Carcaças intertravadas e camadas zeta devem resistir às pressões de trabalho; armaduras de tração devem resistir às cargas máximas previstas em operação; os cabos elétricos podem ou não precisar de uma armadura própria, de modo a livrar o condutor de cobre de solicitações mecânicas excessivas; tubos metálicos para acionamentos hidráulicos devem ter sua parede dimensionada para resistir à pressão, curvatura e tração.

Tome por exemplo as armaduras de tração. As cargas axiais dependem de fatores tais como profundidade, condições ambientais, características da plataforma à qual o cabo submerso estará conectado, pressão interna etc. Além disso, o projeto deve prever que a aplicação de esforços de tração nas armaduras, que são helicoidais, leva a um efeito de compressão das camadas internas (estrangulamento) e, portanto, o ângulo de assentamento destas camadas deve ser estudado com cuidado. Além disso, os cabos submersos são projetados para operação em 30 anos; logo, uma análise de vida útil à fadiga deve ser avaliada.

Atualmente, o projeto estrutural de cabos submersos possui certa metodologia aceita pelo mercado, que é exposta aqui de modo bastante sucinto.

- A partir de medições oceânicas e meteorológicas históricas no campo de operação, é feita uma seleção de casos extremos de operação que envolve montar combinações de correntes marítimas e ondas atingindo a plataforma em determinado aproamento (que vai depender do tipo de plataforma).
- Com base nestes casos de carregamento extremo, são feitas análises dinâmicas (numéricas) do comportamento do cabo submerso quando submetido a tais condições. Os resultados desta análise são os esforços de tração máximos esperados durante a operação do mesmo, além das rotações máximas junto ao ponto de conexão com a plataforma. Diversos *softwares* podem ser utilizados nesta etapa (exemplos: *Orcaflex*, *DeepLines*, *FlexCom*, *Poliflex*, *Poliflex 3D* etc).
- Com base nos resultados obtidos da etapa anterior, são feitos os projetos dos acessórios associados ao cabo submerso: cabeça de tração, *armour pot*, *bend stiffener*, suporte de topo etc. Estes acessórios serão utilizados em operações de instalação do cabo submerso (cabeça de tração, por exemplo) e/ou durante toda a vida do mesmo (*bend stiffener*, por exemplo).

- A partir de medições oceânicas e meteorológicas históricas no campo de operação, é feito um estudo estatístico de condições ambientais de modo que se possa montar combinações de correntes marítimas e ondas, com suas respectivas probabilidades, de casos de operação significativos da vida de projeto do cabo submerso.
- Com base nestes casos de carregamento operacional, são feitas análises dinâmicas (numéricas) do comportamento do cabo submerso quando submetido a tais condições. Os resultados desta análise são as amplitudes dos esforços de tração e também as amplitudes das rotações junto ao ponto de conexão com a plataforma.
- Os resultados globais de tração e rotações (curvatura e momento fletor em última instância), aliados ao projeto da seção transversal do cabo submerso e também considerando os acessórios (*especialmente o bend stiffener*) devem ser transformados em tensões máximas e tensões alternadas nas camadas do cabo submerso. Em especial para umbilicais, que possuem seções transversais mais complexas e mais genéricas, esta etapa ainda não encontra no mercado *softwares* adequados; cada fabricante desenvolve sua ferramenta própria.
- As tensões máximas indicam se o projeto é viável em termos de condições extremas de operação. Já as tensões alternadas, aliadas às suas probabilidades de ocorrência, indicam se o projeto é viável em termos de vida útil à fadiga.

Durante o projeto dos cabos submersos, fica fácil observar que apenas algumas seções do mesmo são importantes em termos de verificação de tensões. No caso de uma configuração em catenária simples, a mais usual, estas seções de interesse são: junto à conexão com a plataforma (na região do *bend stiffener*) e no ponto de contato com o fundo do mar. Nestas seções são esperadas, respectivamente, as maiores cargas de tração e as maiores variações de curvatura.

Ressalta-se aqui o caráter simplificado das considerações sobre projeto de cabos submersos uma vez que o intuito desta seção é mostrar um panorama geral deste processo.

## 1.4 Efeito das Vibrações Induzidas por Vórtices no Projeto de Risers e Umbilicais

Na seção anterior, foi feita uma breve descrição da metodologia de projeto dos *risers* e umbilicais aceita atualmente pelo mercado. Em nenhum momento, contudo, foi mencionada a questão da influência das vibrações induzidas por vórtices (VIV).

De fato, embora seja um fenômeno conhecido, mas ainda com fundamentos em estudo, somente agora as VIV têm sido incluídas, de forma gradativa, no escopo dos projetos estruturais de cabos submersos. Por exemplo, a especificação técnica da Petrobras para cálculo estrutural de umbilicais, PETROBRAS (2003) sequer menciona VIV. Já a especificação técnica mais recente para qualificação de umbilicais, PETROBRAS (2004), exige cálculos e testes de fadiga incluindo este fenômeno. A DET NORSKE VERITAS (2005) também sugere a inclusão de cálculo de dano acumulado por VIV no projeto de *risers*.

Num cilindro imerso em água, montado em suportes elásticos e sujeito ao fenômeno de VIV, é sabido que a ordem de grandeza das oscilações é dada pelo próprio diâmetro do cilindro, SARPKAYA (2004). Logo, a amplitude destas oscilações, em geral, não induz nos cabos submersos tensões próximas às do limite dos materiais que os compõem. Contudo, é sabido também que a frequência destas oscilações pode ser bastante elevada e, portanto, as VIV possuem potencial de levar o cabo submerso à falha por fadiga.

Ficam então duas perguntas. Se os cabos submersos são utilizados no Brasil desde a década de 1970 e o fenômeno de VIV é certamente estudado desde a primeira metade do século XX<sup>1</sup> e, mais ainda, possui potencial de levar o cabo submerso à falha, porque somente agora considerá-lo no projeto estrutural? Por outro lado, se houvesse falha comprovada de um cabo submerso devido a efeitos de VIV (e aqui se fala em nível mundial), com certeza as empresas exploradoras de petróleo *offshore* iriam exigir que tais efeitos fossem sempre considerados em projetos futuros, o que não é verdade; por que então considerar VIV no projeto estrutural?

---

<sup>1</sup> Atribui-se a Leonardo da Vinci a “descoberta” do fenômeno de VIV em 1504 quando observou que cordas suspensas entre prédios emitiam um som ao qual batizou “Eolian Tones”.

Entrando agora um pouco no campo da especulação, provavelmente, até mesmo pela posição do mercado ao longo dos anos, não deve ter havido relato de falha comprovada de cabos submersos devido ao fenômeno de VIV. Um dos motivos pode ser o alto fator de segurança adotado nos cálculos de fadiga, da ordem de três para umbilicais e 10 para *risers* flexíveis. Outro motivo pode ser o amortecimento interno, já que há atrito substancial entre as camadas que compõem o cabo submerso no caso de umbilicais e *risers* flexíveis.

Entretanto, o fato é que se tem gasto uma quantia substancial para prevenir os efeitos das VIV em estruturas como *risers* rígidos, por exemplo, através do uso de *strakes*. Estes são “fitas” metálicas aplicadas de forma helicoidal à estrutura e que visam provocar o descolamento do escoamento – em helicóide – de modo a minimizar a possibilidade de correlação do desprendimento de vórtices ao longo do comprimento do cabo submerso.

Por outro lado, e agora voltando ao campo não-especulativo, não se pode negar que critérios e premissas de projetos evoluem com o passar do tempo. A engenharia evolui, e o fato de se dar início à inclusão dos efeitos das VIV no cálculo estrutural de cabos submersos seria apenas mais um pequeno ponto nesta curva de evolução. Um fator também muito importante neste cenário é que no presente momento existem no mercado ferramentas para predição dos efeitos das VIV na vida útil à fadiga de cabos submersos. Um pouco mais sobre os métodos atuais de cálculo serão abordados na próxima seção.

## **1.5 Estado Atual do Cálculo de VIV em Risers e Umbilicais**

Segundo SARPKAYA (2004), “*VIV is not a small perturbation superimposed on a mean steady motion. VIV is an inherently nonlinear, self-governed or self-regulated, multi-degree-of-freedom phenomenon*”. Esta afirmação dá a idéia inicial da dimensão das dificuldades associadas à solução de um problema envolvendo VIV.

Do ponto de vista da física, o problema de se determinar os movimentos resultantes de um cilindro submetido a um escoamento qualquer não está fechado. Apesar de

grandes avanços nos últimos anos, muito ainda há de se trilhar para que este objetivo seja atingido. Isto ficou claro na última edição do “*Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations*”, realizado em dezembro de 2007 com a presença dos principais grupos de pesquisadores do assunto.

Contudo, do ponto de vista da engenharia, é necessário que alguma estimativa das VIV, mesmo que majorada, seja feita de modo que se permita avaliar os impactos e ações necessárias para controlar tais impactos. Desta forma, na mesma linha do que é hoje feito com relação à análise dinâmica tradicional, o mercado de cabos submersos busca uma alternativa viável para o dia-a-dia de projeto. Um destes caminhos é justamente o uso de ferramentas computacionais.

Em se tratando de um problema de interação fluido-estrutura, uma alternativa seria a adoção de códigos baseados em CFD (*Computational Fluid Dynamics*) tridimensional. Porém, o gasto computacional envolvido em simulações para a profundidade atual seria inviável, pois a malha gerada seria muito grande. Também por conta disto, alguns códigos bidimensionais (isto é, por seções ao longo do eixo do cilindro) começam a ser usados; o acoplamento entre as seções, neste caso, tem que ser feito através do modelo estrutural.

Atualmente, as ferramentas computacionais mais aceitas pelo mercado para o projeto de cabos submersos com relação à VIV são: VIVA (TRYANTAFYLLOU, 2003), VIVANA (LARSEN, 2000) e Shear7 (VANDIVER, 1999).

O Shear7 realiza basicamente superposição de modos naturais. A partir da análise modal de cabos sob tração (esta variando linearmente ao longo do comprimento), o programa tenta identificar os modos mais prováveis de serem excitados e a partir daí obtém a solução estacionária da amplitude transversal ao escoamento do movimento devido à VIV. Como os coeficientes hidrodinâmicos têm comportamento não-linear, iterações são feitas para buscar o equilíbrio entre a força de sustentação e a força de dissipação viscosa para cada nó da malha de elementos finitos representando o cabo. A (ao menos aparente) desvantagem reside no fato desta ferramenta ter toda sua base de dados voltada para cabos verticais, sendo necessária uma aproximação para casos de catenária, por exemplo.

O VIVA tem metodologia muito similar à do Shear7 e também busca identificar os modos mais prováveis de excitação. As amplitudes de movimento são computadas a partir de uma base de dados do comportamento do coeficiente de sustentação que está em fase ou anti-fase com relação à velocidade. O programa possui duas formas de cálculo: assumindo a excitação de apenas um modo ou a excitação de diversos modos simultaneamente. Uma funcionalidade do VIVA é a atualização das frequências naturais da estrutura de acordo com alterações da massa adicional.

O VIVANA também é bastante similar aos dois programas apresentados, mas não realiza superposição modal, trabalhando com respostas em frequência única. O coeficiente de sustentação é obtido a partir da frequência e da amplitude do movimento transversal. Da mesma forma que o VIVA, as frequências naturais da estrutura são atualizadas de acordo com alterações da massa adicional. Como vantagem, este programa trabalha com distribuição arbitrária de tração ao longo do cabo.

Por fim, outra alternativa para a predição dos efeitos de VIV em cabos submersos pode ser feita mediante a representação do fluido através de um oscilador, resultando então em dois osciladores acoplados, estrutural e fluido. Obviamente, todo o problema nesta terceira opção reside em se definir de maneira correta os parâmetros deste oscilador fluido. Desta forma, a excitação modal não é imposta, mas sim resultante do próprio carregamento imposto.

A forma mais conhecida deste oscilador é a equação de *Van der Pol* e que tem sido utilizada como modelo fenomenológico. Contudo, recentemente, ARANHA (2004) mostrou de forma consistente que o comportamento do fluido pode sim ser representado por meio de um oscilador que, matematicamente, é uma equação de *Ginzburg-Landau*. Além disto, também mostrou que os parâmetros deste oscilador variam com o número de *Reynolds* e podem ser obtidos através de simulações em CFD. Nesse panorama, o presente trabalho encontra sua motivação.

O presente trabalho vem propor um estudo numérico de um modelo hidro-elástico para simulação das vibrações induzidas por vórtices (VIV) em cabos submersos.

O modelo é composto de um sistema acoplado de equações que descrevem tanto a estrutura quanto o fluido. A estrutura é modelada através de um oscilador elástico clássico e discretizada através de um método de massas concentradas. O fluido é considerado através de osciladores discretos baseados em modelos fenomenológicos com equação de *Van der Pol* ou *Ginzburg-Landau*. O acoplamento entre os dois ocorre na direção transversal ao escoamento local através da força de sustentação.

O estudo foi feito para verificar quais tipos de comportamentos de resposta podem ser obtidos através do uso dos modelos fenomenológicos e, também, avaliar o potencial de tais modelos no ciclo de projeto na indústria atual, com foco na indústria petrolífera. Esta adequabilidade ao uso em projeto leva em conta, em primeiro lugar, a qualidade das respostas, mas também leva em conta a viabilidade da execução de simulações numéricas em tempo apropriado.

Uma vez que o foco está na resposta global da estrutura, algumas simplificações poderão (às vezes deverão) ser feitas para que este foco não seja perdido. Ao longo do texto, as devidas simplificações serão apresentadas e discutidas.

## 1.6 Organização do Texto

O presente texto está organizado da seguinte forma:

O Capítulo 1 introduz o tema de exploração de petróleo *offshore*, apresenta as estruturas de *risers* flexíveis e umbilicais e mostra o estágio atual do mercado com relação às VIV em cabos submersos. Também aqui são expostos os objetivos da tese.

O Capítulo 2 trata do mecanismo de emissão e desprendimento de vórtices ao redor de um cilindro e mostra como este é afetado pelos esforços hidrodinâmicos resultantes do fenômeno em questão. É aqui que são encontrados subsídios que dão fôlego aos modelos fenomenológicos para descrição das VIV.

O Capítulo 3 apresenta os modelos fenomenológicos tratados neste trabalho e que são baseados nas equações de *Van der Pol*, *Landau* e *Ginzburg-Landau*. É mostrado como a equação de *Landau* surge através de solução assintótica da equação de *Van*

*der Pol.* Também é feito um estudo qualitativo do comportamento destas equações que explica por que as mesmas servem para o modelo de VIV.

O Capítulo 4 mostra o modelo estático de um cabo submerso, ou seja, como a configuração de um cabo submerso sujeito a esforços gravitacionais, hidrostáticos e hidrodinâmicos é obtida. É apresentada a base teórica e também é delineada a implementação numérica.

O Capítulo 5 mostra o modelo dinâmico de um cabo submerso, ou seja, como este responde a excitações de ordem dinâmica tais como movimento da plataforma e também esforços de sustentação hidrodinâmica. Com relação a este tipo de esforço, é detalhado como os modelos fenomenológicos são incorporados. Novamente, é apresentada a base teórica e também delineada a solução numérica deste problema.

O Capítulo 6 mostra algumas simulações e os resultados obtidos utilizando-se o modelo construído nos capítulos anteriores. Fenômenos interessantes como *lock-in*, vibração na direção do escoamento, *travelling waves* são obtidos e discutidos.

O Capítulo 7 apresenta as principais conclusões deste trabalho e uma perspectiva para trabalhos subseqüentes.

# CAPÍTULO 2 MECANISMO DE EMISSÃO E DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES NUM ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO

## 2.1 Introdução

Imagine um fluido em escoamento uniforme. Se no domínio fluido em questão for imerso um cilindro, é fato que este irá perturbar o escoamento original. A extensão desta perturbação irá depender de diversos fatores, tais como a velocidade do escoamento não perturbado, as dimensões do local onde o escoamento ocorre, a viscosidade do fluido, o diâmetro do cilindro etc. Em diversos cenários, entretanto, um dos resultados desta perturbação do escoamento é a emissão e o desprendimento de vórtices ao redor do cilindro.

O mecanismo de emissão e desprendimento de vórtices ao redor de um cilindro é um fenômeno bastante complexo e que tem sido estudado já há algum tempo e continua recebendo grande atenção da comunidade científica em nível mundial. O motivo prático de tamanho interesse curiosamente não reside no fluido, mas nos efeitos que o escoamento provoca no cilindro. Este interesse vem crescendo na medida em que a cada dia aumenta o número de instalações de estruturas *offshore*, atenção especial à indústria do petróleo. Dentre estas estruturas, destacam-se as linhas flexíveis e os umbilicais, que são corpos cilíndricos.

A análise global tradicional da mecânica de cabos submersos considera que a escala de tempo da variação da corrente marítima é muito maior que a escala de tempo do movimento da plataforma flutuante, movimento este que é responsável pela maior

parcela da resposta dinâmica do cabo, PESCE (1997), e que possui mesma escala de tempo das ondas. A corrente marítima pode então ser considerada como um escoamento permanente. Sendo assim, numa instalação *offshore*, um cabo submerso sob a ação de uma corrente marítima fica submetido a dois tipos de esforços hidrodinâmicos.

O primeiro é a força de arrasto, que pode ser obtida através da clássica fórmula de *Morison*, ver, por exemplo, MARTINS (1984) e FALTINSEN (1990), e atua no plano do escoamento considerado. Este esforço, embora não-linear (é quadrático na velocidade relativa entre o fluido e o cabo), é já bastante conhecido e pode ser predito com bastante eficácia na resolução do problema estático.

O segundo esforço atua no plano perpendicular ao do escoamento considerado (“sustentação”) e está relacionado ao desprendimento alternado de vórtices, possuindo, portanto, caráter oscilatório. É este segundo tipo de esforço que causa o conhecido fenômeno de vibrações induzidas por vórtices (VIV), descrito, por exemplo, por FALTINSEN (1990) e SARPKEYA (2004), e é nele que este capítulo será focado.

Como é de se esperar, existem particularidades para cada tipo de escoamento. Para cada um destes casos é necessário examinar um número elevado de parâmetros de modo a exaurir completamente o problema. No presente capítulo, contudo, será feita apenas uma análise qualitativa do mecanismo de emissão e desprendimento de vórtices ao redor de um cilindro único, imerso num escoamento uniforme com seu eixo perpendicular à velocidade do escoamento incidente original.

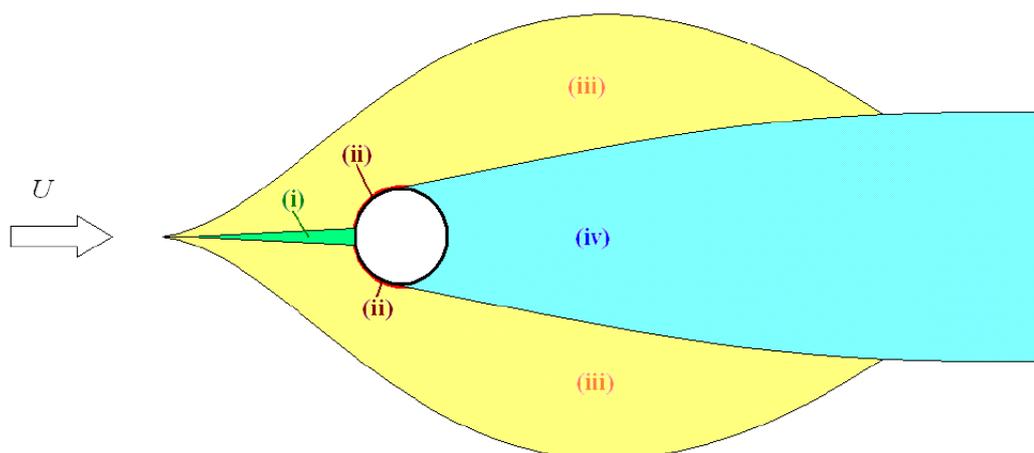
Esta restrição do escopo não causa perda de informação. Ao contrário, ela filtra as características importantes para o foco primário do trabalho que são os modelos fenomenológicos para representação do fenômeno de VIV.

O capítulo irá descrever, de maneira básica, sucinta e qualitativa, os aspectos relacionados ao mecanismo de emissão e desprendimento de vórtices num escoamento ao redor de um cilindro. Isto servirá como base para o entendimento dos modelos fenomenológicos que serão apresentados posteriormente neste trabalho.

## 2.2 Regiões do Escoamento Perturbado

Como já dito, um escoamento é perturbado pela presença de um corpo imerso. Obviamente, o domínio fluido não é afetado em toda a sua extensão da mesma maneira. CARMO (2005) apresenta quatro regiões distintas para esta perturbação, conforme pode ser observado na Figura 2.1:

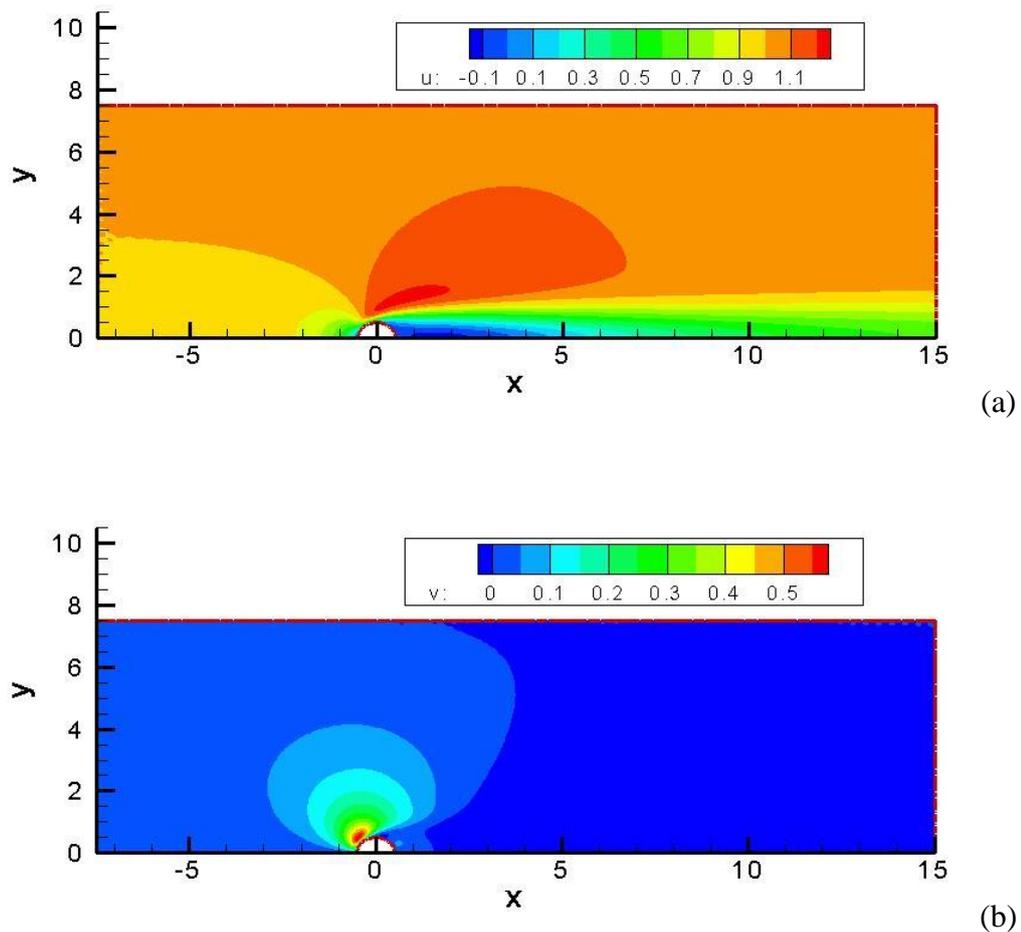
- (i) Uma região estreita de escoamento retardado;
- (ii) Duas camadas limite na superfície do cilindro;
- (iii) Duas regiões laterais de fluido deslocado e acelerado;
- (iv) Uma região a jusante, com escoamento separado, denominada região de esteira.



**Figura 2.1 – Regiões do escoamento perturbado, extraído de CARMO (2005)**

Apenas como exemplo, a Figura 2.2 apresenta o contorno de velocidades para um escoamento ao redor de um cilindro obtido através de simulação numérica<sup>2</sup> para número de *Reynolds* 45 (veja seção 2.3). Neste caso específico, a velocidade do escoamento não perturbado é igual a 1m/s. Note que, dada a simetria do problema, apenas uma metade do domínio está representada.

<sup>2</sup> Esta simulação faz parte de arquivo pessoal do autor durante estudos com o subespaço solenoidal, ver ARANHA (2004).



**Figura 2.2 – Contornos de velocidade (a) em “x” (u) e (b) em “y” (v) para escoamento incidente em cilindro circular obtidos por simulação numérica.**

### 2.3 O Processo de Formação dos Vórtices

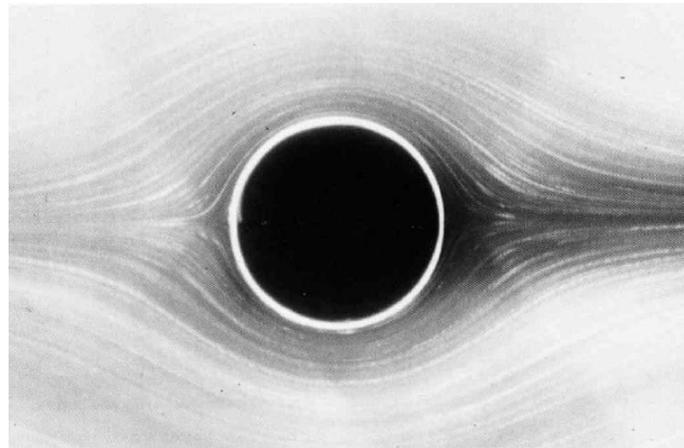
O principal parâmetro governante de um escoamento incompressível ao redor de um corpo cilíndrico é o número de *Reynolds*, conforme expresso na equação (2.1):

$$\text{Re} = \frac{\rho_f U D}{\mu_f} \quad (2.1)$$

onde  $\rho_f$  é a densidade do fluido,  $\mu_f$  é a viscosidade dinâmica do fluido,  $U$  é a velocidade do escoamento não-perturbado (velocidade ao longe) e  $D$  é o diâmetro

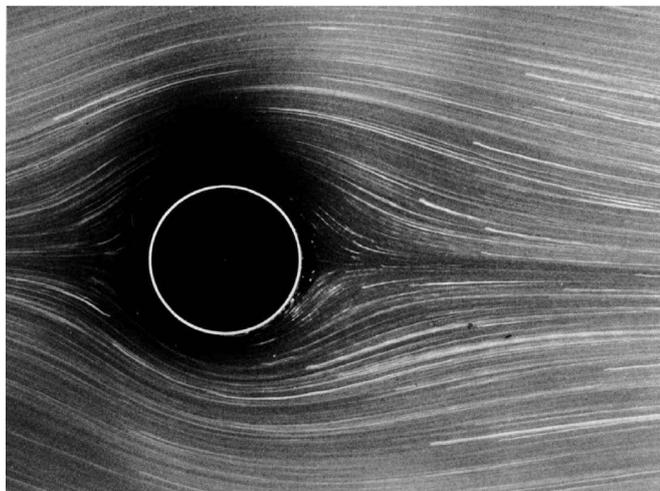
do cilindro. O número de *Reynolds* expressa a relação entre as forças de inércia e as forças viscosas num dado escoamento.

Quando o número de *Reynolds* é baixo, ou seja, as forças de inércia não conseguem sobrepor-se às forças viscosas, o escoamento ao redor de um cilindro não se separa das paredes do mesmo. Esta situação pode ser observada na Figura 2.3. Note que o escoamento é simétrico não apenas com relação a um eixo horizontal passando pelo centro do cilindro, mas também com relação a um eixo vertical passando também pelo centro do cilindro.



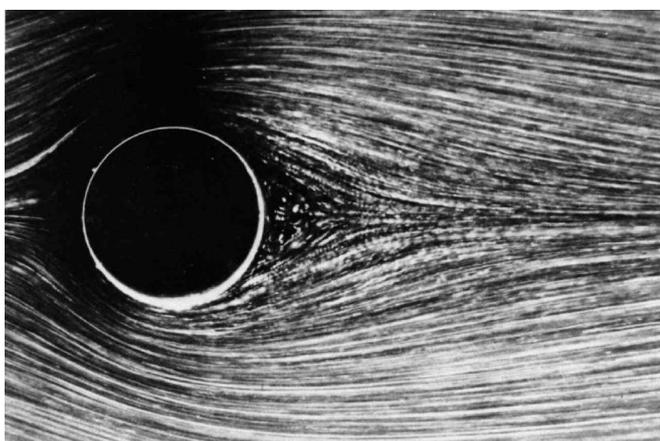
**Figura 2.3 – Escoamento ao redor de um cilindro circular,  $Re = 0,16$ . Extraído de VAN DYKE (1982).**

Aumentando o número de *Reynolds*, pode-se perceber perda da simetria com relação ao eixo vertical passando pelo centro do cilindro. Isto pode ser visto na Figura 2.4.



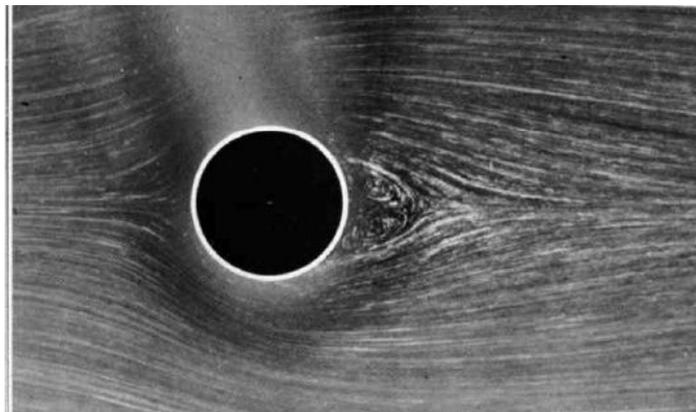
**Figura 2.4 – escoamento ao redor de um cilindro circular,  $Re = 1,54$ . Extraído de VAN DYKE (1982).**

Aumentando mais ainda o número de *Reynolds*, nota-se que o escoamento separa-se da parede do cilindro. Podem ser observadas pequenas bolhas de recirculação junto ao cilindro, à jusante, na Figura 2.5.

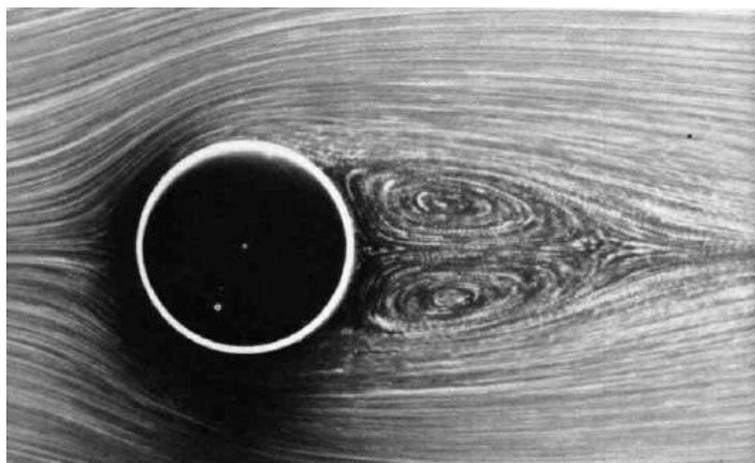


**Figura 2.5 – escoamento ao redor de um cilindro circular,  $Re = 9,6$ . Extraído de VAN DYKE (1982).**

Continuando a aumentar o número de *Reynolds*, as bolhas de recirculação crescem e tornam-se alongadas na direção do escoamento original. Este fato pode ser observado na Figura 2.6 e na Figura 2.7. Note que ainda há simetria com relação a um eixo horizontal passando pelo centro do cilindro.

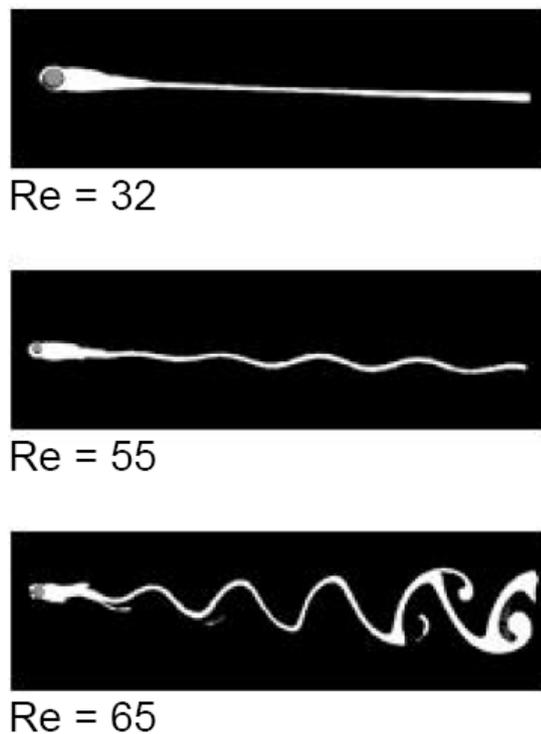


**Figura 2.6 – Escoamento ao redor de um cilindro circular,  $Re = 13,1$ . Extraído de VAN DYKE (1982).**



**Figura 2.7 – Escoamento ao redor de um cilindro circular,  $Re = 26$ . Extraído de VAN DYKE (1982).**

As bolhas continuam a crescer com o aumento do número de *Reynolds* até que, por volta de  $Re = 30$  a  $Re = 65$  a região da esteira começa a apresentar sinais de instabilidade, conforme ilustrado na Figura 2.8.

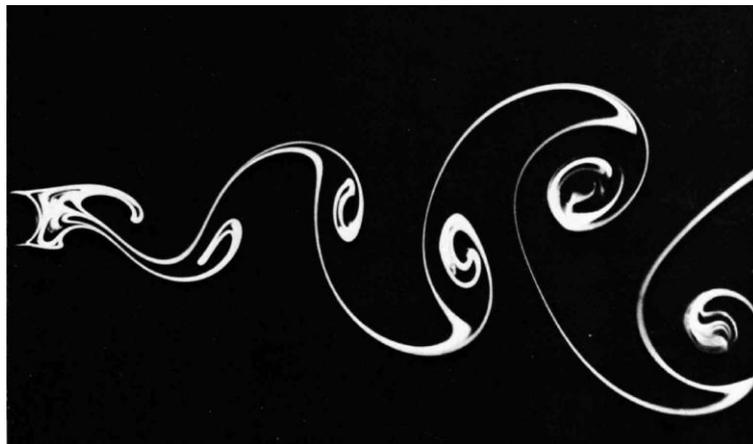


**Figura 2.8 – Escoamento ao redor de um cilindro circular,  $Re = 32$ ,  $Re = 55$  e  $Re = 65$ . Extraído de ÁSSI (2005).**

Por fim, esta instabilidade faz com que vórtices se desprendam e sejam “convectados”, fazendo assim com que a chamada esteira de vórtices de *von Kármán* se desenvolva, ver Figura 2.9 e Figura 2.10.

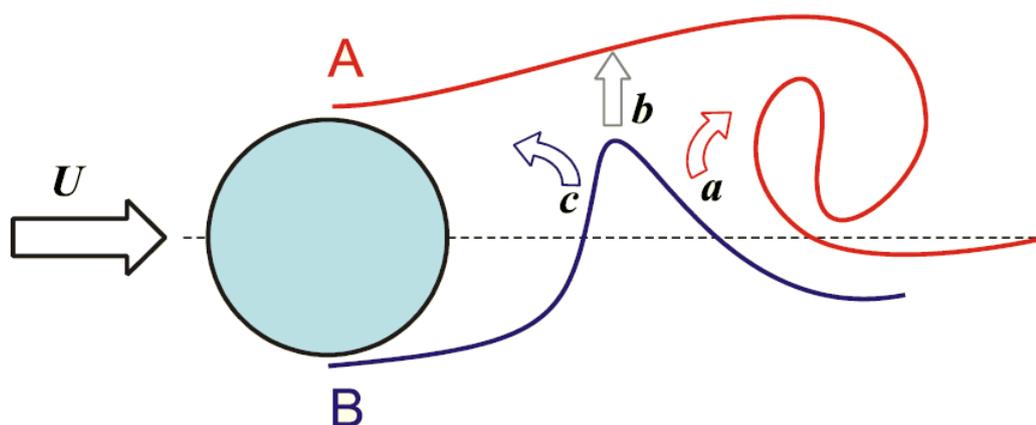


**Figura 2.9 – Escoamento ao redor de um cilindro circular,  $Re = 105$ . Extraído de VAN DYKE (1982)**



**Figura 2.10 – Escoamento ao redor de um cilindro circular,  $Re = 140$ . Extraído de VAN DYKE (1982)**

Um modelo que descreve o mecanismo de emissão dos vórtices apresentado anteriormente é devido a GERRARD (1996). Segundo este modelo, o desprendimento de vórtices ocorre de acordo com a interação das camadas cisalhantes que se originam das partes superior e inferior do cilindro, conforme ilustra a Figura 2.11.



**Figura 2.11 – O modelo de Gerrard para desprendimento dos vórtices. Extraído de ÁSSI (2005)**

De acordo com a Figura 2.11 e com a evolução do escoamento anteriormente apresentada, a camada cisalhante superior alimenta o vórtice que está sendo gerado (em vermelho) devido à sua circulação. Em um dado momento, a vorticidade gerada na parte superior torna-se grande o suficiente para “atrair” a camada cisalhante da parte inferior do cilindro (em azul). Uma vez “atraída”, esta camada cisalhante pode seguir por três caminhos:

- (a) Em direção ao vórtice em formação. Como as circulações das camadas cisalhantes têm sinais opostos, há diminuição da circulação total no vórtice que está sendo formado.
- (b) Em direção à camada cisalhante oposta. Neste caso, a camada cisalhante superior é “quebrada”, ajudando a desprender o vórtice que estava em formação.
- (c) Em direção à zona de recirculação. Neste caso, começa o processo de formação de um novo vórtice, agora junto à parte inferior do cilindro.

Resumindo, num escoamento ao redor de um cilindro um par de vórtices (simétrico) é inicialmente gerado devido à separação do escoamento a partir de um determinado número de *Reynolds*. Devido a uma instabilidade inerente a este processo, esta esteira começa a oscilar e, posteriormente, os vórtices desprendem-se e são convectados de maneira alternada, segundo o modelo de *Gerrard*.

O modelo de *Gerrard* mostra que o fenômeno de emissão e desprendimento de vórtices é auto-limitado, pois à medida que um vórtice torna-se muito forte, aumenta a atração da camada cisalhante oposta que ou irá diminuir a circulação total (caminho “a”) ou irá cortar o crescimento deste vórtice (caminho “b”). Mostra, ainda, que o fenômeno é também auto-sustentado, pois assim que um vórtice é convectado, imediatamente outro vórtice do lado oposto começa a crescer (caminho “c”).

## 2.4 Regimes de Escoamento

Foi mostrado anteriormente o surgimento da esteira de vórtices de *von Kármán*. Interessante o fato de que a mesma aparece em  $Re \approx 50$ , mas perdura até  $Re > 10^6$  e, dada esta extensa faixa, é de se esperar que existam variações no comportamento

desta esteira. De fato, o escoamento passa por algumas transições em função do aumento do número de *Reynolds* e, com isso, a esteira também tem seu comportamento alterado. Em última instância, alterações no mecanismo de emissão e despreendimento de vórtices podem levar a alterações nos efeitos transmitidos aos cilindros.

- $0 < Re < 2 \times 10^2$ . Esteira completamente laminar, seja sem separação das camadas limite, seja com separação e com a esteira oscilando de forma harmônica, seja com esteira de *von Kármán* plenamente desenvolvida. Este regime, em teoria, é o mais simples de ser estudado (exceção feita à *Re* próximo à transição).
- $2 \times 10^2 < Re < 4 \times 10^2$ , transição na esteira. A esteira começa a apresentar sinais de turbulência, mas não há alteração apreciável nas camadas limite ou na região da esteira próxima ao cilindro.
- $4 \times 10^2 < Re < 2 \times 10^5$ , transição nas camadas cisalhantes. As camadas limite, no entanto, continuam com comportamento laminar. Podem surgir turbilhões junto à face do cilindro voltada para jusante. É o limite superior característico de uma aplicação de *risers offshore*.
- $Re > 2 \times 10^5$ , transição nas camadas-limite. A esteira é fortemente perturbada e os vórtices são formados numa região mais distante do cilindro; por isto, há uma acentuada redução no arrasto.

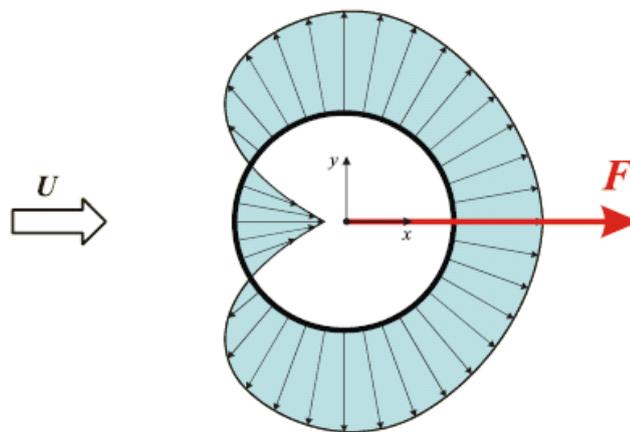
Cada uma das transições pode ser influenciada por pequenas perturbações de diversas naturezas, por exemplo, alterando um pouco o escoamento à montante. Desta forma, os limites dos números de *Reynolds* apresentados servem apenas como uma referência em termos de ordem de grandeza.

Note que, sendo a viscosidade cinemática da água aproximadamente  $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  a  $20^\circ \text{ C}$ , para cilindros de diâmetro  $2 \times 10^{-1} \text{ m}$ , a condição  $4 \times 10^2 < Re < 2 \times 10^5$  é válida para escoamentos com velocidades  $2 \times 10^{-3} \text{ m/s} < U < 1 \times 10^0 \text{ m/s}$ . Estes valores são típicos, por exemplo, para estudo de umbilicais em plataformas de petróleo.

## 2.5 Forças Fluido-Dinâmicas, VIV, Número de Strouhal e Lock-in

É muito claro que, estando o cilindro imerso em um escoamento fluido, haverá um campo de pressões aplicado em toda a sua superfície, campo este que basicamente depende do campo de velocidades gerado no escoamento. A ação desta pressão resulta em uma força fluida aplicada ao cilindro.

Inicialmente, considere o escoamento ao redor de um cilindro com separação das camadas cisalhantes, mas sem o desprendimento de vórtices. Nesta situação, o campo de pressões pode ser observado na Figura 2.12.



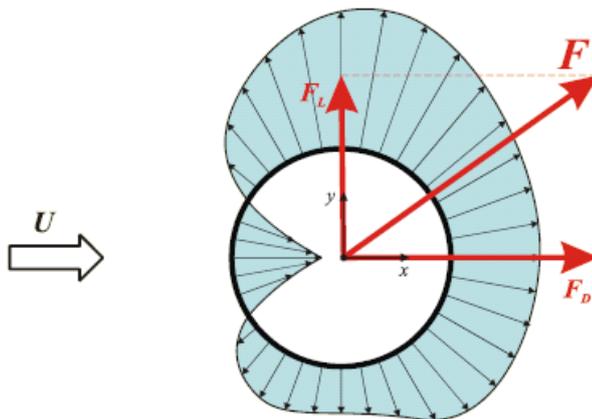
**Figura 2.12 – Campo de pressões na parede do cilindro; escoamento separado sem desprendimento de vórtices. Extraído de ÁSSI (2005).**

Neste caso, note que o campo de pressões é simétrico com relação ao eixo horizontal, de modo que a resultante da força fluida aplicada ao cilindro tem a mesma direção do escoamento incidente (não-perturbado). Esta força, resultado da integral do campo de pressões na superfície do cilindro é chamada força de arrasto (*drag*, em inglês) devido ao campo de pressões,  $F_{dp}$ .

Existe ainda uma força de arrasto de fricção, resultante do atrito entre o fluido viscoso e o cilindro,  $F_{Df}$ . A força de arrasto total  $F_D$  é então o resultado da soma destas duas componentes, segundo mostra a Equação (2.2):

$$F_D = F_{Dp} + F_{Df} \quad (2.2)$$

Suponha agora que a o desprendimento alternado de vórtices tenha se iniciado. O campo de pressões é alterado e varia ao longo do tempo. Em determinado instante, devido à formação de vórtices, o campo de pressões fica como esquematizado na Figura 2.13.



**Figura 2.13 – Campo de pressões na parede do cilindro; desprendimento de vórtices iniciado. Extraído de ÁSSI (2005).**

Neste caso, o campo de pressões perde a simetria no eixo horizontal, de modo que a força fluida aplicada ao cilindro, novamente resultado da integral do campo de pressões na superfície do cilindro, tem uma componente na direção do escoamento não-perturbado e uma componente na direção perpendicular ao escoamento não-perturbado.

Como já visto, a parcela da força que tem a direção do escoamento não-perturbado é chamada força de arrasto  $F_D$ . A outra parcela é chamada força de sustentação (*lift*, em inglês)  $F_L$ .

O interessante é que, à medida que os ciclos de emissão e desprendimento de vórtices vão transcorrendo, as forças de arrasto (em menor escala) e de sustentação vão variando; para um cilindro, é de se esperar uma variação muito próxima de harmônica. Podem-se dividir as forças de arrasto e sustentação totais em suas parcelas médias e oscilantes, segundo a Equação (2.3):

$$\begin{aligned} F_D &= \bar{F}_D + F_D' \\ F_L &= \bar{F}_L + F_L' \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde as parcelas  $\bar{F}_D$  e  $\bar{F}_L$  são as parcelas médias e  $F_D'$  e  $F_L'$  são as parcelas oscilantes. Como será visto a seguir, o valor médio da sustentação é nulo.

Para um cilindro isolado, a força de arrasto total mantém seu sentido (de montante para jusante) durante todo o processo. Já a força de sustentação inverte seu sentido de acordo com o local de maior vorticidade, isto é, quando um vórtice está à beira de se desprender da parte superior do cilindro, a força de sustentação “empurra” o cilindro para cima e vice-versa.

Desta forma, devido à própria natureza de emissão e desprendimento alternado de vórtices, a oscilação das forças fluidas, principalmente da força de sustentação, causa o fenômeno de vibrações induzidas por vórtices (VIV) num cilindro flexível ou rígido montado em base elástica.

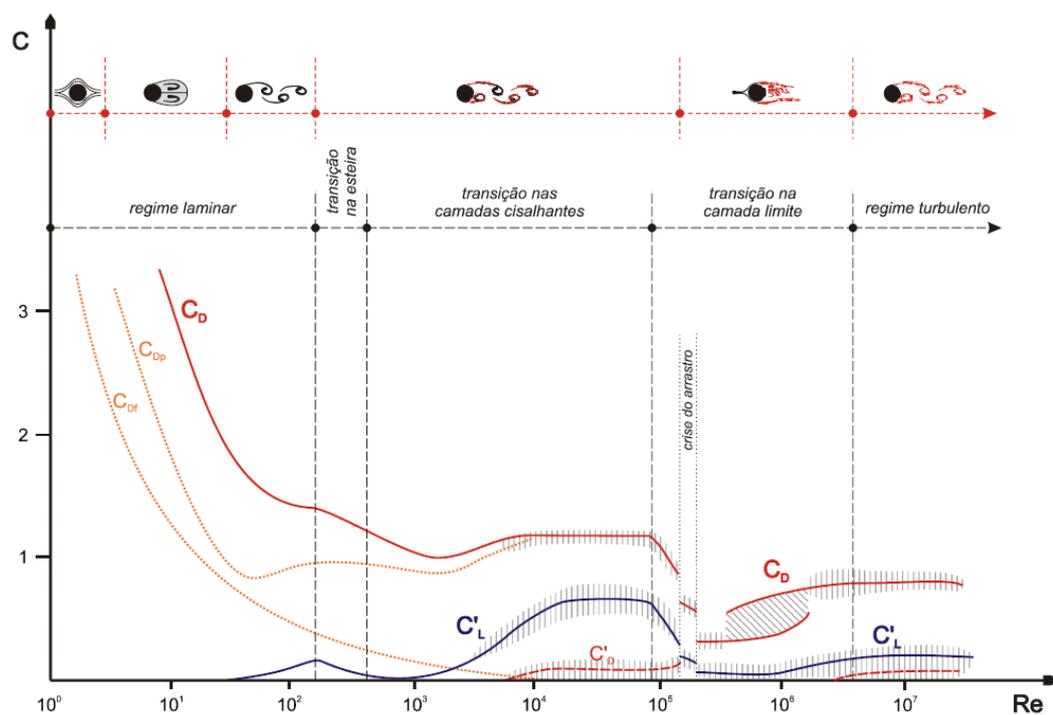
Na prática, a medição que se obtém através de experimentos não é o campo de pressões, mas sim a força aplicada sobre o cilindro. É possível então adimensionalizar tais forças utilizando para tal a pressão dinâmica  $\frac{1}{2}\rho U^2$  e a área projetada do cilindro exposta ao escoamento  $LD$ , sendo  $L$  o comprimento do cilindro e  $D$  seu diâmetro. Desta forma, são introduzidos os coeficientes de arrasto  $C_D$  e o coeficiente de sustentação  $C_L$  segundo a Equação (2.4):

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 LD}; \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 LD} \quad (2.4)$$

Como já feito com as forças, os coeficientes de arrasto e sustentação podem ser separados em suas componentes médias e oscilantes segundo a Equação (2.5):

$$C_D = \bar{C}_D + C_D'; \quad C_L = \bar{C}_L + C_L' \quad (2.5)$$

Os coeficientes de arrasto e sustentação variam de acordo com o regime de escoamento. Este comportamento, para um cilindro isolado, pode ser visualizado na Figura 2.14.



**Figura 2.14 – Coeficientes de arrasto e sustentação em função do número de Reynolds. De acordo com Zdravkovich (1997); figura extraída de ÁSSI (2005).**

Note que, na região de interesse do ponto de vista de estruturas cilíndricas *offshore*, o coeficiente de arrasto é praticamente constante ao redor de 1,2 e, a partir de  $Re = 10^4$  existe uma parcela não-nula de  $C_D'$  muito menor, em torno de 0,1. Já o  $C_L'$  varia de 0,0 em  $Re = 10^3$  até 0,6 em  $10^4 < Re < 10^5$ ; note que o valor médio da sustentação é nulo, dada a simetria do cilindro com respeito ao diâmetro paralelo ao escoamento incidente. Percebe-se então que a parcela dominante das forças oscilantes é a força de sustentação.

Visto que as forças aplicadas pelo fluido ao cilindro são oscilantes, surge então uma variável que diz respeito à frequência destas oscilações de força. Obviamente, a frequência das oscilações de força está diretamente relacionada com a frequência da emissão e desprendimento de vórtices, aqui denominada  $f_s$  (*shedding*, em inglês).

Observe, ainda, que a própria natureza do fenômeno faz com que se espere uma frequência na flutuação da força de sustentação igual à frequência de desprendimento dos vórtices e uma frequência duas vezes maior para flutuação da força de arrasto, pois cada vórtice desprendido corresponde a meio ciclo de oscilação do cilindro na direção transversal ao escoamento e um ciclo completo de oscilação da direção da força de arrasto.

Por fim, deve ser lembrado que um cilindro flexível, imerso ou emerso, possui infinitas frequências naturais de vibração; a  $i$ -ésima frequência natural da estrutura é denominada  $f_{N,i}$ .

Imagine agora um escoamento ao redor de um cilindro flexível ou montado em base elástica no qual a velocidade vai sendo aumentada gradualmente. O aumento da velocidade faz com que a emissão e o desprendimento de vórtices ocorram de forma mais rápida, ou seja,  $f_s$  aumenta e a estrutura é excitada com esta mesma frequência. Quando  $f_s$  se aproxima de  $f_{N,i}$ , ocorre então o fenômeno de ressonância e as amplitudes de oscilação do cilindro aumentam. Seria de se esperar que, com o aumento da velocidade do escoamento, continuasse havendo o correspondente aumento em  $f_s$  com o cilindro respondendo de acordo (e cessando então a ressonância). Contudo, um interessante fenômeno ocorre.

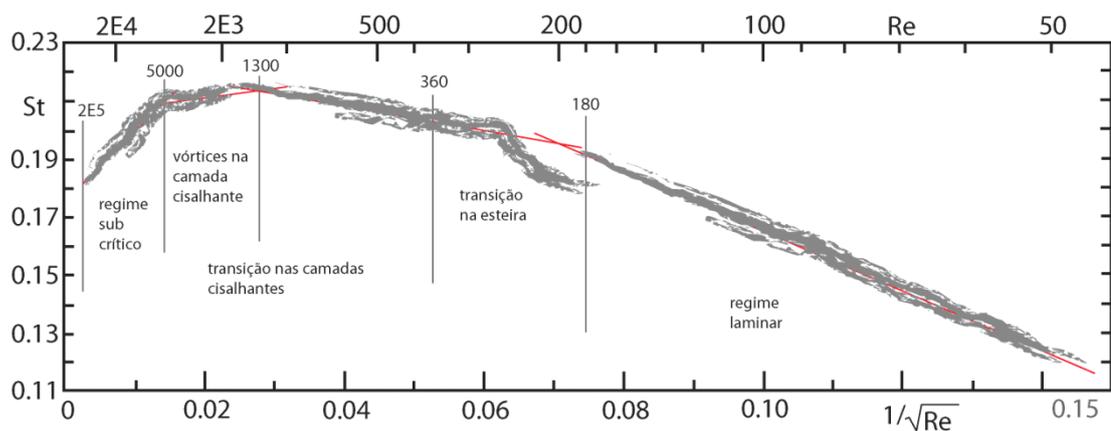
O mecanismo de emissão e desprendimento de vórtices depende da interação entre as camadas cisalhantes e esta interação depende de suas posições que, por sua vez dependem do movimento do cilindro. Ao entrar em ressonância, como as amplitudes de oscilação ficam elevadas, o movimento do cilindro passa a ter um papel importante na manutenção do mecanismo de desprendimento de vórtices e a frequência deste desprendimento passa a ser governada pelo movimento do cilindro.

Este fenômeno é chamado na literatura de *lock-in* e é justamente na região de *lock-in* que o fenômeno de VIV ganha importância prática.

Um adimensional bastante utilizado para descrever a frequência de desprendimento dos vórtices é o número de *Strouhal*, definido segundo a Equação (2.6):

$$St = \frac{f_s D}{U} \quad (2.6)$$

Para um cilindro isolado, o número de *Strouhal*, embora dependente do número de Reynolds, mantém-se praticamente constante, com valores em torno de 0,20 na faixa de  $4 \times 10^2 < Re < 2 \times 10^5$  ( $0,002 < 1/\sqrt{Re} < 0,05$ ). Isto pode ser visualizado na Figura 2.15.



**Figura 2.15 – Curva St x Re. Adaptada de FEY, KÖNIG, ECKELMANN (1998).**

Interessante notar na Figura 2.15 que as transições entre os regimes de escoamento podem ser observadas como descontinuidades ou alterações no comportamento da curva do número de *Strouhal*.

## 2.6 Parâmetros Governantes nas Respostas de Amplitude e Fase das VIV

Segundo SARPKAYA (2004), os parâmetros que governam as vibrações induzidas por vórtices na direção transversal ao escoamento de um cilindro rígido montado em

base elástica são: a densidade do fluido  $\rho_f$ , a viscosidade dinâmica do fluido  $\mu_f$ , a velocidade do escoamento não-perturbado  $U$ , o diâmetro do cilindro  $D$ , o comprimento do cilindro  $L$ , a constante da mola  $k$  (para cilindros rígidos montados em base elástica), a rugosidade média da superfície do cilindro  $k_r$ , o fator de amortecimento estrutural  $\zeta$ , a massa do cilindro  $m$  (sem massa adicional), a componente cisalhante média do escoamento  $dU/dy$ , a conicidade  $dD/dy$  (em caso de cilindro com seção transversal variante, como um tronco de cone), o nível de turbulência  $\varepsilon_t$ , a escala integral de comprimento do escoamento  $I_{ils}$  e os parâmetros de *Schewe*  $Sp$ , os quais se referem aos parâmetros que não podem ser controlados ou variados sistematicamente e estão relacionados às instalações locais, seja um laboratório ou uma instalação industrial.

Ainda segundo SARPKEYA (2004), tanto a amplitude de oscilação normalizada pelo diâmetro do cilindro ( $A/D$ ) bem como a fase  $\phi$  desta resposta com relação à fase da excitação podem ser escritas como função do seguinte grupo adimensional:

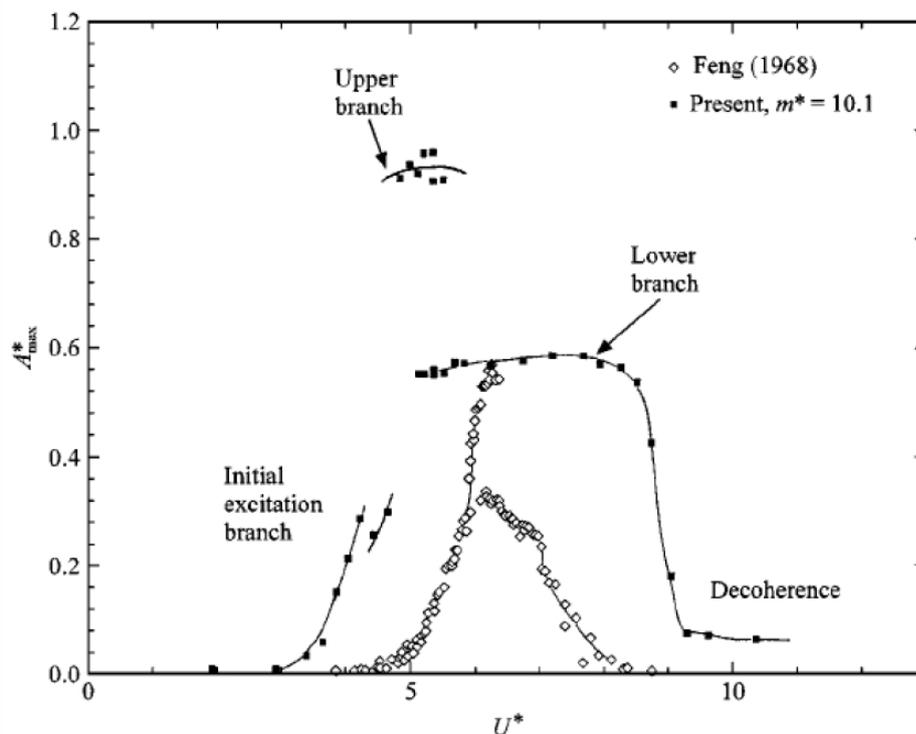
$$\frac{A}{D}, \phi = F \left\{ \begin{array}{l} \zeta, \frac{\rho_f U D}{\mu_f}, \frac{L}{D}, \frac{4m}{\rho_f \pi L D^2}, \frac{D}{U} \left( \frac{k}{m} \right)^{1/2}, \text{Re}_{st}, \\ \text{Re}_{cr}, \frac{D}{U^2} \frac{dU}{dt}, \frac{D}{U} \frac{dU}{dy}, \frac{dD}{dy}, \varepsilon_t, \frac{k_r}{D}, \frac{I_{ils}}{D}, Sp \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

onde  $\text{Re}_{st}$  é o número de *Reynolds* no qual ocorre a transição nas camadas cisalhantes e  $\text{Re}_{cr}$  é o número de *Reynolds* no qual o número de *Strouhal* do cilindro oscilante exibe uma transição suave para um valor superior (cerca de 0,24) com relação ao seu valor em escoamento permanente (0,20). Já o parâmetro  $(D/U^2)(dU/dt)$  indica a relação entre a aceleração local e a aceleração convectiva: se este parâmetro for pequeno, o escoamento pode ser aproximado por justaposição de escoamentos permanentes; se este parâmetro for grande, o fluido exibe um efeito de “memória” e a descrição do fluido em geral torna-se bastante complexa.

Nota-se que o conjunto de parâmetros é bastante grande. Contudo, é interessante observar que as medições experimentais já feitas colocam um máximo em termos de

amplitude de vibração da ordem de  $1,0D$  a  $1,5D$ . Refletindo isto em projeto, por exemplo, a PETROBRAS (2004), em uma de suas mais recentes especificações técnicas, sugere que programas de teste de fadiga incluam a emulação de um movimento devido à VIV da ordem de 0,35 vezes o diâmetro e 1Hz.

A Figura 2.16 mostra resultados experimentais de FENG (1968) e KHALAK & WILLIAMSON (1999) com respeito à amplitude de vibração normalizada pelo diâmetro do cilindro ( $A^* = A/D$ ) em função da velocidade reduzida ( $U^* = U/(fD)$ ), sendo  $U$  a velocidade não-perturbada do fluido e  $f$  a frequência não-amortecida do sistema) para diferentes valores do parâmetro de massa ( $m^* = m/m_f$ , sendo  $m$  a massa total do sistema e  $m_f$  a massa do volume fluido deslocado) e parâmetro de amortecimento ( $\zeta = c/c_{cr}$ , onde  $c$  é o amortecimento estrutural e  $c_{cr}$  é o amortecimento crítico).



**Figura 2.16 – Amplitude de vibração transversal de cilindro rígido. Feng (1968)  $m^* = 248$ ,  $(m^*\zeta) = 3,28$ . Khalak & Williamson (1999)  $m^* = 10,1$ ,  $(m^*\zeta) = 0,13$ . Extraído de Khalak & Williamson (1999).**

Interessante notar que o pico de resposta ocorre por volta de velocidade reduzida igual a 5,0, o que, lembrando a equação (2.6), corresponde a *Strouhal* 0,2.

O comportamento de resposta mostrado na Figura 2.16 é bastante conhecido e tem sido motivo de diversos estudos numéricos que buscam recuperar o ramo inferior de resposta (“*lower branch*”).

Desta forma, apesar da extrema complexidade física envolvida no fenômeno, que abrange diversas variáveis em inúmeras situações, o resultado final do esforço fluido aplicado ao cilindro recai em um conjunto aparentemente limitado em termos de amplitudes e frequências. Estas constatações dão fôlego à representação das VIV através de modelos fenomenológicos, conforme será visto no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 3    MODELOS

### FENOMENOLÓGICOS PARA VIV

#### 3.1 Introdução

Conforme apresentado no Capítulo 2, o fenômeno de emissão e desprendimento de vórtices num escoamento ao redor de um cilindro é bastante complexo e depende de diversos parâmetros. Contudo, os efeitos causados no cilindro acabam caindo num conjunto “limitado” de situações quanto à amplitude e frequência de vibração, ver Figura 2.15 e Figura 2.16.

Este cenário é ideal para o uso dos chamados modelos fenomenológicos. Estes modelos partem de uma observação física, mas não derivam, necessariamente, das leis físicas que regem o fenômeno que se queira representar: basta encontrar uma equação matemática que consiga recuperar as características do mesmo.

Transportando estas idéias para o fenômeno de VIV, toda a complexidade teórica envolvida pode ser “substituída” por uma função matemática que consiga representar o caráter oscilatório, auto-excitado e auto-limitado inerente à emissão e desprendimento de vórtices ao redor de um cilindro oscilando. Experimentos, no entanto, são fundamentais para que o modelo fenomenológico seja calibrado dentro de seus limites de aplicação. Assim, em se tratando de modelos fenomenológicos, interpolações são válidas; extrapolações podem ser bastante questionáveis.

Do ponto de vista computacional, os modelos fenomenológicos encontram um ambiente bastante favorável, pois é relativamente simples tratar uma função matemática bem definida num domínio igualmente bem definido. Além disso, o tempo computacional para cálculos envolvendo uma função simples é bastante

reduzido se compararmos a procedimentos para descrição de teorias complexas, como é o caso do estudo computacional envolvendo fluidos.

Na literatura podem ser encontrados modelos fenomenológicos que representam desde população de espécies marinhas (NERO, 2000) até amortecedores magneto-reológicos (SPENCER *et al*,1997), passando por fluência em liga de cobre e alumínio, ABO-ELSOUD (2006).

No caso específico de modelos fenomenológicos para VIV, os pioneiros BISHOP & HASSAN (1964) indicaram que o comportamento do fluido poderia ser representado por um simples oscilador não-linear. HARTLEN & CURRIE (1970) aplicaram tal idéia através de um modelo com equação de *Van der Pol* para representar o fluido.

IWAN & BLEVINS (1974) continuaram nesta mesma linha e propuseram um dos modelos mais conhecidos nesta área. Segundo este modelo, o fluido também é representado por um oscilador via equação de *Van der Pol* acoplado a um oscilador estrutural que é excitado com uma força de sustentação que depende do oscilador fluido. Mais tarde, PARRA & ARANHA (1996) revisitaram o trabalho de IWAN & BLEVINS (1974) e construíram um modelo similar. Estes dois modelos serão tratados em mais detalhes nas seções 3.5 e 3.6.

Também FALCO, FOSSATI & RESTA (1999) e FACCHINETTI, DE LANGRE & BIOLLEY (2004) trouxeram contribuições apresentando osciladores acoplados para o fluido e para o cilindro. O primeiro utiliza um oscilador não-linear que depende da velocidade do fluido e dos deslocamentos e velocidades de ambos os osciladores. O segundo utiliza um oscilador tipo *Van der Pol* para descrever a dinâmica do fluido.

Todos estes modelos citados até aqui têm em comum o fato de serem desenvolvidos para um problema bidimensional.

CUNHA (2005) estudou e comparou, de modo analítico-numérico, os modelos listados a seguir, chegando às seguintes conclusões.

- HARTLEN & CURRIE (1970): adequado para problemas em ar, não em água, mesmo porque foi calibrado com resultados de FENG (1968) em túneis de vento; CUNHA não recomenda o uso deste modelo na prática.

- IWAN & BLEVINS (1974): apresentou boa capacidade de reproduzir amplitude de pico para diversas combinações de parâmetro de massa e parâmetro de amortecimento (ver seção 2.6); não recupera o ramo inferior, ver Figura 2.16.
- FACCHINETTI, DE LANGRE & BIOLLEY (2004): subestima a amplitude de vibração e, de acordo com CUNHA (2005), seu uso na prática deve ser restrito.

Já ALBAREDÈ (1990) foi o primeiro a propor a utilização da Equação de *Ginzburg-Landau*, que leva em conta a variação do oscilador fluido ao longo do eixo do cilindro, introduzindo assim um caráter tridimensional no modelo. LEWEKE & PROVANSAL (1994) e MONKEWITZ (1996) também utilizaram esta equação em seus estudos.

O interessante é que ARANHA (2004) mostrou em seu trabalho que a equação de *Ginzburg-Landau* resulta da solução assintótica das equações discretas de *Navier-Stokes*. Uma vez que é possível mostrar que a equação de *Landau* é solução assintótica da equação de *Van der Pol* (ver seção 3.3), tem-se um resultado bastante expressivo: os modelos que eram tratados até então como puramente fenomenológicos podem, na verdade, ter um forte suporte físico.

Apesar disto, o presente trabalho irá tratar o modelo de ARANHA (2004) como um modelo puramente fenomenológico por dois motivos. O primeiro deles é que o trabalho de ARANHA (2004) é bastante recente e relativamente complexo, envolvendo um conjunto significativo de coeficientes que ainda não estão disponíveis. O segundo motivo é que, como será apresentado na seção 3.7, é possível fazê-lo! Isto mantém a linha de pensamento do presente trabalho sem prejuízo na parte teórica ou mesmo no estudo de aplicação do modelo.

O presente trabalho aplica os modelos de IWAN & BLEVINS (1974), PARRA & ARANHA (1996) e ARANHA (2004). Sendo assim, este Capítulo irá apresentar tais modelos em mais detalhes. Antes, porém, será feito um pequeno estudo qualitativo das equações de *Van der Pol* e *Ginzburg-Landau*, além de mostrar a derivação da equação de *Landau* como solução assintótica da equação de *Van der Pol*. Por fim, um panorama dos modelos fenomenológicos para VIV dentro do cenário atual em termos de projeto em engenharia *offshore* será exposto.

## 3.2 A Equação de Van der Pol

A equação de *Van der Pol* é uma equação clássica no estudo de sistemas dinâmicos que apresenta solução oscilatória, auto-excitada e auto-limitada, tal como é o fenômeno de VIV e, não por acaso, foi historicamente a primeira a ser utilizada como modelo fenomenológico para o oscilador fluido. A equação de *Van der Pol*<sup>3</sup> adimensional é a seguinte:

$$\ddot{w} - \mu(1 - \dot{w}^2)\dot{w} + w = 0 \quad (3.1)$$

O coeficiente  $\mu$  em (3.1) deve ser sempre positivo. Se  $\mu = 0$ , a equação (3.1) torna-se a equação de um oscilador harmônico simples.

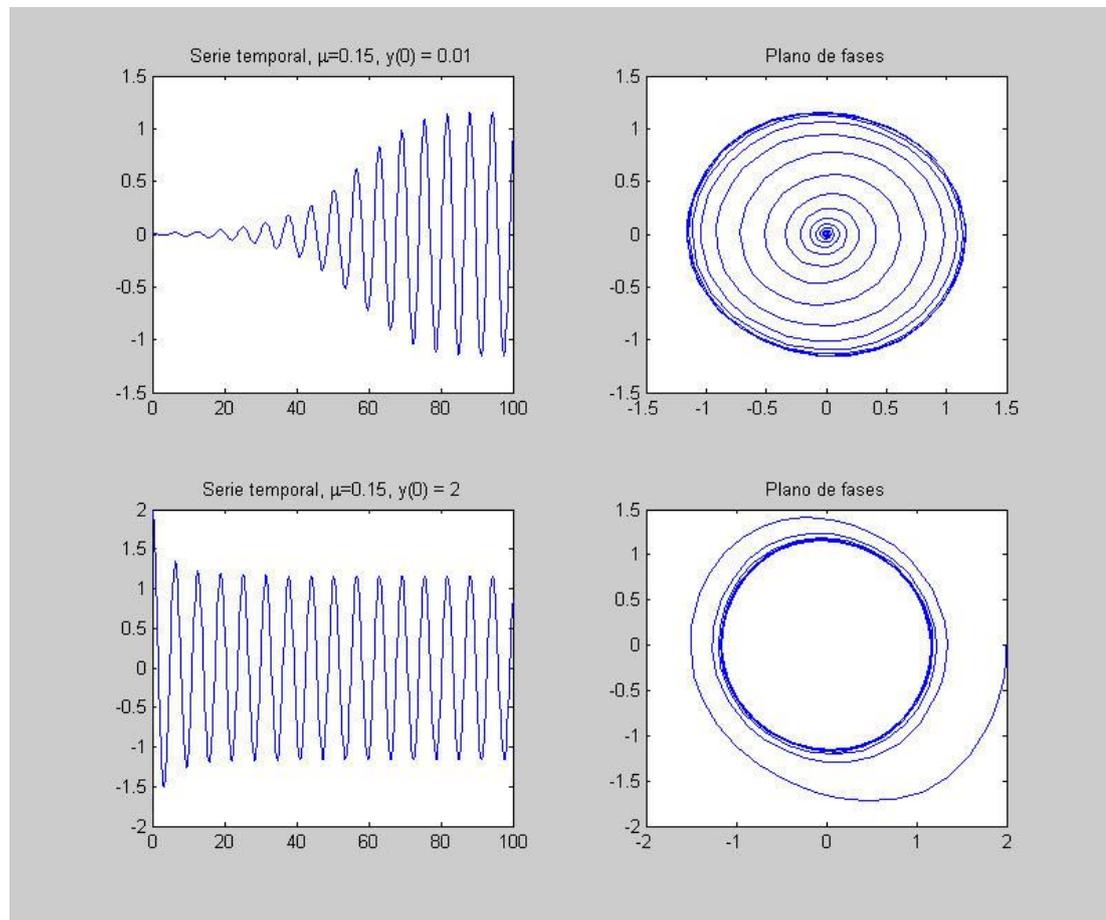
A equação de *Van der Pol* apresenta sua peculiaridade justamente no termo de amortecimento, composto de duas parcelas. A primeira, linear, equivale a um amortecimento negativo; a segunda, não-linear (cúbica), equivale a um amortecimento positivo.

O que ocorre é o seguinte. Para  $w$  “pequeno”, o amortecimento linear negativo predomina, a solução fica instável e cresce; ao crescer, o amortecimento não-linear positivo passa a predominar e a solução fica limitada. O mesmo ocorre no caminho inverso: para  $w$  “grande”, o amortecimento não-linear positivo predomina, a solução fica instável e diminui; ao diminuir, o amortecimento linear negativo passa a predominar e a solução fica limitada. Tem-se então o mecanismo de solução oscilatória, auto-excitada e auto-limitada.

Um exemplo de simulação numérica para  $\mu = 0,15$  é ilustrado na Figura 3.1. Esta simulação foi feita no *software* MATLAB® usando a função “ode15s”. Nesta figura, os gráficos superiores mostram a situação em que a variável  $w$  parte de um valor “pequeno” ( $w(0) = 0,01$ ) e os gráficos inferiores mostram a situação em que a variável  $w$  parte de um valor “grande” ( $w(0) = 2,00$ ).

---

<sup>3</sup> A equação (3.1) pode ser referida como equação de *Rayleigh*; a forma mais comum da equação de *Van der Pol* apresenta o termo  $(1 - w^2)\dot{w}$  ao invés do termo  $(1 - \dot{w}^2)\dot{w}$ . CUNHA (2005) trata da dualidade *Rayleigh – Van der Pol*.



**Figura 3.1 – Exemplo de comportamento da equação de *Van der Pol***

Note que na Figura 3.1 pode-se observar uma solução periódica do tipo ciclo-limite, no qual, durante um período, a energia recebida pelo amortecimento linear negativo é dissipada pelo amortecimento não-linear positivo.

### **3.3 Solução Assintótica da Equação de Van der Pol: a Equação de Landau**

Se, na equação (3.1), o parâmetro  $\mu$  for muito menor do que a unidade, é possível obter sua solução assintótica através de técnicas de escalas múltiplas, ver BENDER & ORSZAG (1978). Note que, ao longo do texto, a notação (\*) indica o número complexo conjugado.

Se  $\mu = 0$ , a solução natural da equação (3.1) é  $w(t) = Ae^{it} + (*)$ . Se  $\mu \neq 0$ , esta solução é perturbada por termos proporcionais a  $\mu$  e esta perturbação pode ser avaliada fazendo a constante  $A$  variar lentamente com o tempo. Assim, supõe-se uma solução da forma

$$w(t) = \left( A(\tau)e^{it} + (*) \right) + \mu w_1(t) + O(\mu^2) \quad (3.2)$$

onde  $\tau = \mu t$  é a escala de variação lenta no tempo e  $w_1(t)$  é a perturbação.

A primeira e a segunda derivadas temporais da equação (3.2) podem ser calculadas, resultando em

$$\begin{aligned} w(t) &= \left[ A(\tau)e^{it} + (*) \right] + \mu w_1(t) \\ \dot{w}(t) &= \left[ \left( \mu \frac{dA(\tau)}{d\tau} + iA(\tau) \right) e^{it} + (*) \right] + \mu \dot{w}_1(t) \\ \ddot{w}(t) &= \left[ \left( \mu^2 \frac{d^2 A(\tau)}{d\tau^2} + i2\mu \frac{dA(\tau)}{d\tau} - A(\tau) \right) e^{it} + (*) \right] + \mu \ddot{w}_1(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.1) e desprezando os termos em  $\mu^2$  e ordens superiores, chega-se à seguinte expressão

$$\ddot{w}_1 + w_1 = \left\{ -i \left[ 2 \frac{dA(\tau)}{d\tau} - \mu A(\tau) + 3\mu |A(\tau)|^2 A(\tau) \right] e^{it} + (*) \right\} + \left[ i(A(\tau))^3 e^{3it} + (*) \right] \quad (3.4)$$

Para que a perturbação  $w_1(t)$  permaneça limitada, a parcela ressonante de sua excitação deve ser nula, ou seja,

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} - \sigma_L A(\tau) + \mu_L |A(\tau)|^2 A(\tau) = 0 \quad (3.5)$$

onde  $\sigma_L = \mu/2$  e  $\mu_L = 3\mu/2$ .

A equação (3.5) é a equação de *Landau* e, como na equação de *Van der Pol*, apresenta termos lineares e cúbicos em  $A(\tau)$ .

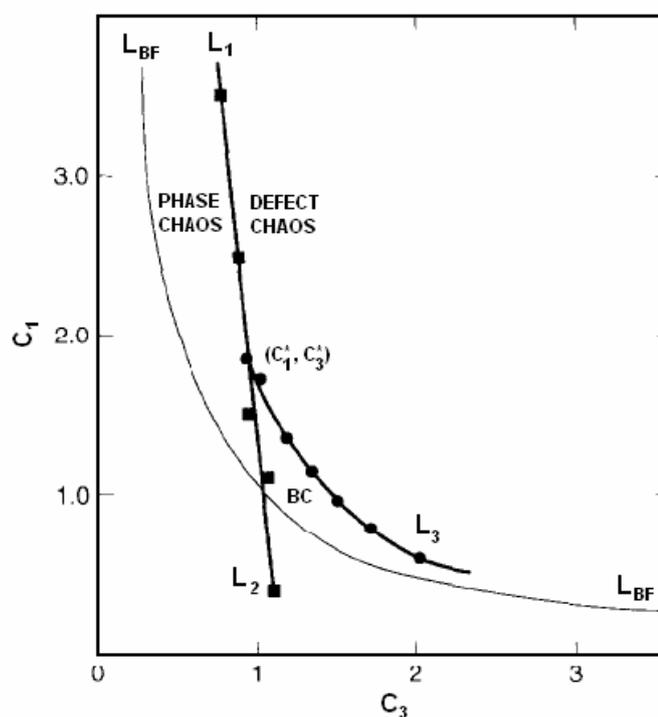
### 3.4 A Equação de Ginzburg-Landau

A equação de *Ginzburg-Landau* adimensional pode ser escrita como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - A - (1 + ic_1) \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + (1 - ic_3) |A|^2 A = 0 \quad (3.6)$$

Comparando a equação (3.6) com a equação (3.5) e com a equação (3.1), nota-se que existe uma nova variável,  $z$ , que confere à equação de *Ginzburg-Landau* uma nova dimensão espacial.

SHRAIMAN et al (1992) apresentaram um estudo qualitativo da resposta de (3.6) de acordo com os valores reais  $(c_1; c_3)$ . Este comportamento é apresentado na Figura 3.2.



### Figura 3.2 – Comportamento qualitativo da equação de Ginzburg-Landau

Na região abaixo da linha  $(c_1 \cdot c_3)=1$  (indicada como “L<sub>BF</sub>”), a equação (3.6) apresenta comportamento estável e bem-comportado. Nas regiões acima desta linha, o comportamento da equação (3.6) torna-se caótico (“*phase chaos*” / “*defect chaos*”)

Apenas como exemplo, são apresentados os resultados de duas simulações numéricas feitas através de um método de integração explícito utilizando passo de tempo 0,01. O *software* SCILAB® foi utilizado. Em ambas,  $0 \leq z \leq 100$  e a discretização, feita através de um método de diferenças finitas, inclui 201 nós no total ( $\Delta z = 0,5$ ). As características principais das duas simulações são:

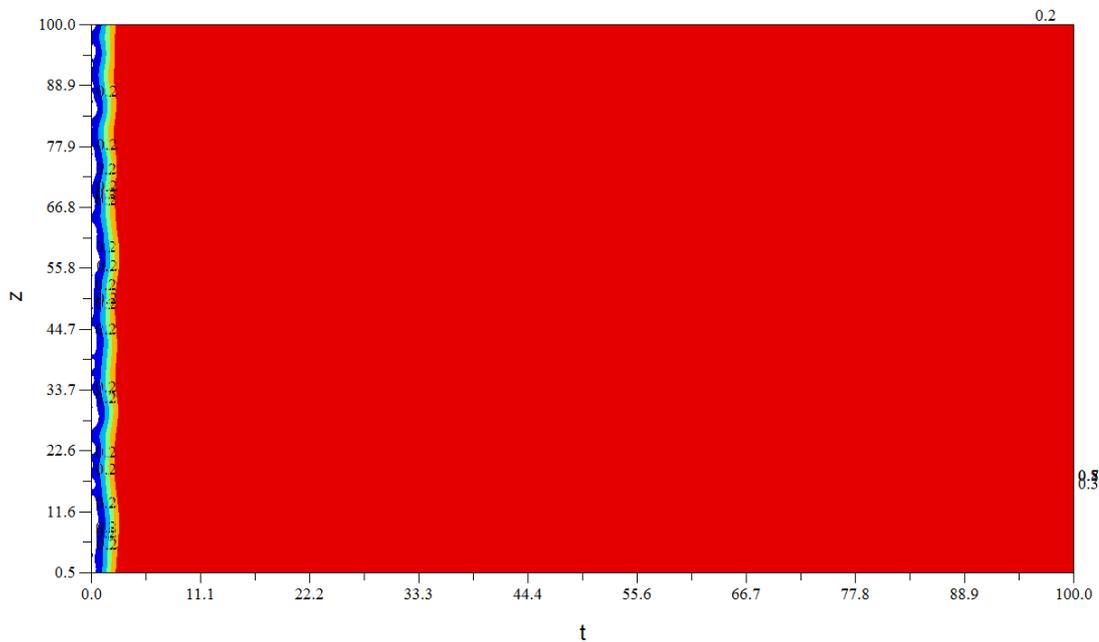
- “Simulação 1”:  $c_1 = 0,5$ ,  $c_3 = 0,5$  e condições iniciais randômicas  $0,25 \text{rand}()$ , onde  $\text{rand}()$  é uma função que atribui valores aleatórios entre 0 e 1.
- “Simulação 2”:  $c_1 = 2,0$ ,  $c_3 = 1,25$  e condições iniciais constantes iguais a 0,25 mais uma perturbação senoidal da forma  $0,01 \text{sen}(\pi m / N)$ , onde  $0 \leq m \leq 200$  refere-se a cada nó.

Analisando apenas as condições iniciais, poder-se-ia imaginar que a “Simulação 2” apresentaria um resultado mais bem-comportado em relação à Simulação 1. Contudo, os coeficientes  $(c_1; c_3)$  da “Simulação 1” estão na faixa estável ao passo que os coeficientes  $(c_1; c_3)$  da “Simulação 2” estão na faixa de “*defect chaos*”, ver Figura 3.2.

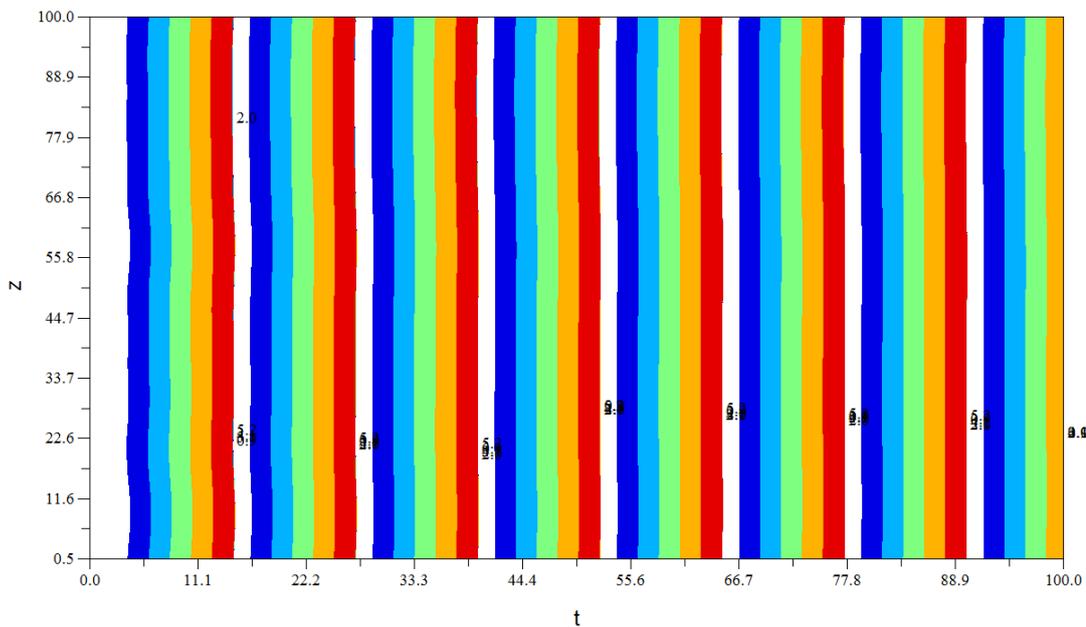
Assim, os resultados obtidos e apresentados na Figura 3.3 e Figura 3.4 (“Simulação 1”) e Figura 3.5 e Figura 3.6 (“Simulação 2”) mostram uma grande diferença qualitativa no comportamento da norma e da fase do complexo  $A(z, t)$ .

- Na “Simulação 1”, o sistema que teve início randômico (caótico) logo alcançou um equilíbrio tanto na norma de  $A$  quanto em sua fase. Percebe-se que todos os nós da malha discreta oscilam com mesma magnitude e fase.
- Na “Simulação 2”, o sistema que teve início regular acabou, após certo tempo, com comportamento caótico. Percebe-se que há certa influência de um nó em seus adjacentes, ou seja, o comportamento mostrado na Figura

3.5 e na Figura 3.6 não é condizente com osciladores totalmente desacoplados, mas o comportamento mesmo assim é caótico.



**Figura 3.3 – Mapa de contorno da norma de A, Simulação 1**

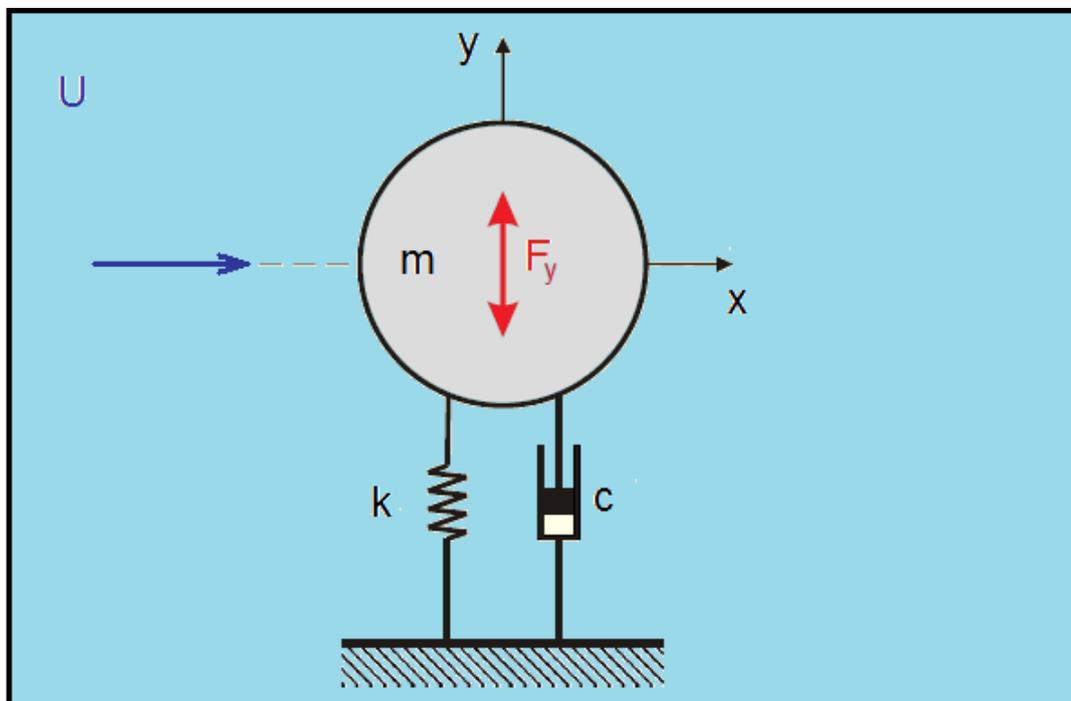


**Figura 3.4 – Mapa de contorno da fase de A, Simulação 1**



### 3.5 O Modelo Fenomenológico de IWAN & BLEVINS (1974)

Seja um cilindro de diâmetro  $D$  e massa (mais massa adicional) por unidade de comprimento  $m$  imerso em um fluido de densidade  $\rho$  montado em base elástica (constante  $k$ ) e sujeito a um escoamento uniforme com velocidade ao longe  $U$ . O cilindro possui apenas um grau de liberdade na direção perpendicular ao escoamento incidente (direção  $y$ ). A Figura 3.7 ilustra esta situação.



**Figura 3.7 – Cilindro montado em base elástica e sujeito a escoamento uniforme**

Sabe-se que a emissão e o desprendimento de vórtices irão causar uma força de sustentação oscilatória  $F_y$  e que esta irá levar ao fenômeno de VIV. Deseja-se uma formulação que permita estimar a resposta estrutural diretamente dos parâmetros do escoamento.

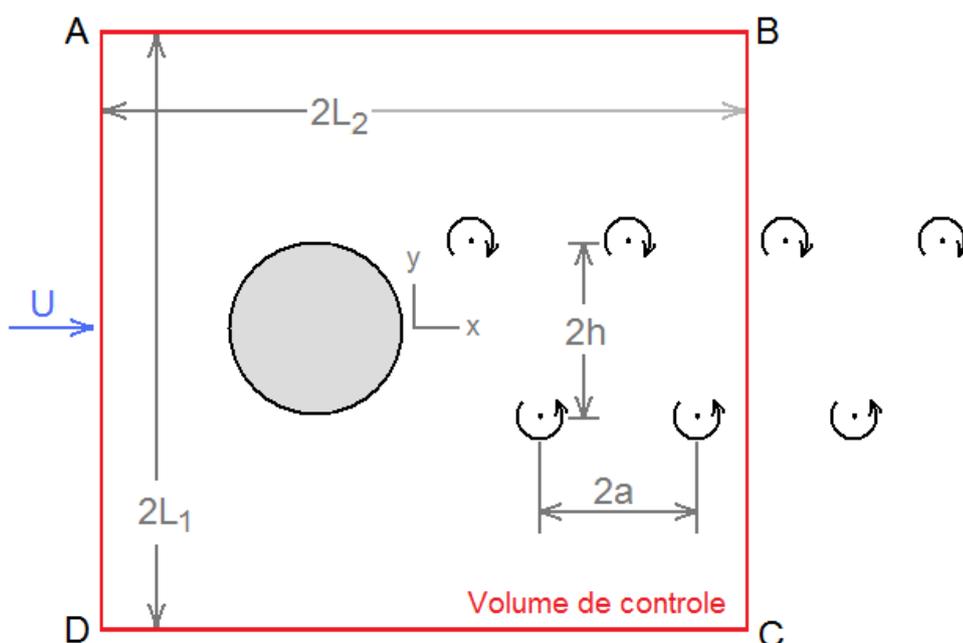
Como visto, a modelagem deste fenômeno é bastante complexa e uma alternativa é utilizar um modelo fenomenológico tal como proposto por IWAN & BLEVINS (1974).

Apesar do caráter fenomenológico, IWAN & BLEVINS (1974) buscaram uma formulação que ligasse os parâmetros do modelo aos parâmetros físicos do problema. Esta formulação é agora apresentada de forma resumida.

As seguintes hipóteses foram feitas pelos autores:

- Longe da esteira de vórtices, o escoamento pode ser considerado invíscido;
- Existe uma esteira de vórtices bem formada e com uma frequência de desprendimento bem definida;
- A vorticidade é gerada apenas na região próxima ao cilindro; vórtices crescem uniformemente até atingirem máxima magnitude e serem convectados;
- O escoamento é bi-dimensional;
- A força exercida pelo fluido no cilindro depende apenas da velocidade e da aceleração do escoamento médio relativo ao cilindro.

A partir destas hipóteses, a formulação foi feita considerando um volume de controle mostrado na Figura 3.8.



**Figura 3.8 – Volume de controle**

Escrevendo a equação de quantidade de movimento para o volume de controle, na direção  $y$ , tem-se

$$P_y = \frac{dJ_y}{dt} + S_y + F_y \quad (3.7)$$

onde  $F_y$  é a força fluida no cilindro,  $P_y$  é a força de pressão na superfície de controle na direção do eixo  $y$ ,  $S_y$  é o fluxo de quantidade de movimento através da superfície de controle e  $J_y$  é a quantidade de movimento dentro do volume de controle, o qual é dado por

$$J_y = \iint_A \rho v dx dy \quad (3.8)$$

onde  $v$  é a componente vertical da velocidade fluida.

Se for definida uma variável que representa a dinâmica do fluido  $w$  tal que  $\dot{w}$  seja entendida como a média ponderada da componente transversal (ao escoamento incidente) do fluxo dentro do volume de controle, pode-se escrever que

$$J_y = a_0 \rho \dot{w} D^2 \quad (3.9)$$

onde  $a_0$  é uma constante de proporcionalidade.

Uma vez que o fluxo induzido pela esteira de vórtices diminui de modo proporcional ao inverso da distância até a mesma, a aplicação da equação de *Bernoulli* fornece o campo de pressões que, integrado ao longo das linhas AB e CD (ver Figura 3.8), resulta em

$$P_y = 0 \quad (3.10)$$

no limite para  $L_1 \rightarrow \infty$ , com  $L_2$  finito.

Já o fluxo da quantidade de movimento pode ser expresso como a integral de linha ao longo dos lados BC e AD. Se a componente oscilatória do fluxo transversal (ao escoamento incidente) à montante do cilindro fosse nula, o fluxo da quantidade de

movimento ficaria  $|S_y| = \rho u_t \Gamma$ , sendo  $u_t$  a velocidade de translação da esteira de vórtices e  $\Gamma$  a circulação de um vórtice. Assumindo que a componente oscilatória do fluxo transversal (ao escoamento incidente) à montante do cilindro é muito pequena, pode-se considerar que

$$|S_y| = \rho u_t \Gamma + \text{"termos de correção"} \quad (3.11)$$

A circulação pode ser estimada sob a hipótese de que a mesma é proporcional à componente média transversal da velocidade, ou seja,  $\Gamma = K|\dot{w}|D$ , sendo  $K$  uma constante de proporcionalidade. Os “termos de correção” podem ser expressos como séries ímpares de  $w$  e  $\dot{w}$ . Por simplicidade, apenas os termos linear e cúbico em  $\dot{w}$  serão retidos. Assumindo ainda que  $w$  oscila harmonicamente na frequência de desprendimento de vórtices  $\omega_s$ , chega-se a

$$S_y = K\rho u_t \omega_s w D - a_1 \rho U D \dot{w} + a_2 \rho \dot{w}^3 D / U \quad (3.12)$$

onde  $a_1, a_2 \ll K$  são constantes adimensionais.

Por fim, a força fluida no cilindro é assumida como dependente apenas das médias ponderadas de velocidade e aceleração do fluido com relação ao cilindro. Mais ainda, esta força pode ser escrita na forma de um coeficiente de sustentação cuja magnitude é proporcional ao ângulo relativo entre o escoamento incidente e a componente normal do fluxo sobre o cilindro. Para pequenos deslocamentos, este ângulo é  $(\dot{w} - \dot{y})/U$  e a força fica

$$F_y = a_3 \rho D^2 (\ddot{w} - \ddot{y}) + a_4 \rho D U (\dot{w} - \dot{y}) \quad (3.13)$$

Substituindo as equações (3.9), (3.10), (3.12) e (3.13) na equação (3.7), tem-se o oscilador fluido

$$\begin{aligned} (a_0 \rho D^2) \ddot{w} + (K \rho D u_t \omega_s) w = & a_1 \rho U D \dot{w} - a_2 \rho \dot{w}^3 D / U + \\ & - \{ a_3 \rho D^2 (\ddot{w} - \ddot{y}) + a_4 \rho D U (\dot{w} - \dot{y}) \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Na equação (3.14), o termo proporcional a  $w$  pode ser rescrito multiplicando e dividindo esta parcela por  $(a_0 DU)$ . Observando que resultados experimentais para uma ampla faixa de número de *Reynolds* indicam que  $u_t/U$  constante, escrevendo então a constante  $Ku_t/U$  como  $2\pi St$  e observando a equação (2.6), chega-se a

$$\begin{aligned} (a_0 \rho D^2) \ddot{w} + (a_0 \rho D^2) \omega_s^2 w = a_1 \rho U D \dot{w} - a_2 \rho \dot{w}^3 D/U + \\ - \{a_3 \rho D^2 (\ddot{w} - \ddot{y}) + a_4 \rho D U (\dot{w} - \dot{y})\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Já o oscilador elástico pode ser escrito como

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = a_3 \rho D^2 (\ddot{w} - \ddot{y}) + a_4 \rho D U (\dot{w} - \dot{y}) \quad (3.16)$$

O modelo fenomenológico é então obtido através do sistema acoplado composto pelas equações (3.14) e (3.16). Para determinação dos coeficientes de proporcionalidade  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$  IWAN & BLEVINS (1974) estudaram duas situações.

Tomando-se o caso de cilindro rígido estacionário,  $y \equiv 0$ , chega-se a relações entre  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$  e os parâmetros  $u_t$ ,  $\Gamma$  e  $F_y$ . Por outro lado, supondo o caso de cilindro com movimento forçado  $y = A_y \sin(\omega_y t + \phi_y)$ , se for buscada a faixa de frequências  $\Delta\omega_s$  na qual ocorre o fenômeno de *lock-in*, chega-se a relações entre  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$  e os parâmetros  $\beta = \Delta\omega_s / \omega_s$  e a taxa de aumento da força de sustentação com a amplitude de vibração  $\partial F_y / \partial A_y$ .

Na realidade, este processo leva a quatro equações com cinco coeficientes a determinar. Com base em resultados experimentais advindos da literatura da época, os autores chegaram ao seguinte conjunto de parâmetros:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,48 \\ a_1 &= 0,44 \\ a_2 &= 0,20 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= 0,38 \end{aligned} \quad (3.17)$$

No presente trabalho, o amortecimento estrutural foi considerado muito menor que o amortecimento viscoso, de modo que  $c = 0$ .

Assim sendo, eis o modelo fenomenológico de IWAN & BLEVINS (1974) considerado no presente trabalho:

$$\begin{cases} (a_0 \rho D^2) \ddot{w} + (a_0 \rho D^2) \omega_s^2 w = a_1 \rho D U \dot{w} - a_2 \rho \frac{D}{U} \dot{w}^3 - a_4 \rho D U (\dot{w} - \dot{y}) \\ m \ddot{y} + k y = a_4 \rho D U (\dot{w} - \dot{y}) \end{cases} \quad (3.18)$$

Note que a forma do oscilador fluido, primeira relação na equação (3.18), corresponde à equação de *Van der Pol*, tal como estudada na seção 3.2, mas com uma forçante  $[-a_4 \rho D U (\dot{w} - \dot{y})]$ ; a “reação” desta é aplicada no oscilador elástico.

### 3.6 O Modelo Fenomenológico de PARRA & ARANHA (1996)

Tomando o mesmo problema descrito no início da seção anterior (ver Figura 3.7), será apresentado agora o modelo fenomenológico proposto por PARRA & ARANHA (1996). Sempre que possível, a mesma nomenclatura será mantida.

Estes autores já partem da premissa de que o fluido é representado por um oscilador na variável  $w$  que obedece a uma equação tipo *Van der Pol* e que é excitado por um esforço que é proporcional ao – nas palavras dos autores – “ângulo de ataque”  $(\dot{w} - \dot{y})/U$ . Assim,

$$\begin{aligned} m_f \ddot{w} - 2m_f \omega_s c_1 \left( 1 - c_2 \frac{\dot{w}^2}{U^2} \right) \dot{w} + (m_f \omega_s^2) w &= -f_L \\ f_L &= \frac{1}{2} \rho U^2 D \alpha_4 \frac{\dot{w} - \dot{y}}{U} \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $m_f = \alpha_0 \rho \pi D^2 / 4$  é a “inércia” do oscilador fluido.

Após renomear<sup>4</sup> alguns termos, a equação do oscilador fluido fica

$$m_f \ddot{w} - 2m_f \omega_s \alpha_1 \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{3} \frac{\dot{w}^2}{U^2} \right) \dot{w} + (m_f \omega_s^2) w = \frac{1}{2} \rho U D \alpha_4 \dot{y} \quad (3.20)$$

O modelo elástico, com único grau de liberdade na direção transversal ao escoamento, fica simplesmente

$$m\ddot{y} + ky = f_L \quad (3.21)$$

Os coeficientes  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$  foram obtidos através de resultados experimentais de cilindros rígidos estacionários e também cilindros rígidos com movimento forçado, de maneira similar à como conduzida por IWAN & BLEVINS (1974). A diferença reside em quais informações foram utilizadas.

PARRA & ARANHA (1996) utilizaram medidas de força de sustentação para o cilindro estacionário, a faixa de *lock-in* para o cilindro com movimento forçado em amplitude constante (frequência variável) e no valor máximo da força de sustentação – e o correspondente valor da amplitude de oscilação – no caso de cilindro com movimento forçado em frequência constante de *Strouhal* (amplitude variável).

Com base em resultados experimentais de literatura, os coeficientes são

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0,48 \\ \alpha_1 &= 0,05 \\ \alpha_2 &= 3,01 \\ \alpha_4 &= 0,75 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Assim, o modelo fenomenológico de PARRA & ARANHA (1996) considerado no presente trabalho foi o seguinte

---

<sup>4</sup> Esta opção foi feita por PARRA & ARANHA (1996) para que a solução assintótica deste oscilador, similar ao que foi apresentado na seção (3.3), recaísse na forma “adimensional” da equação de *Landau*.

$$\begin{cases} m_f \ddot{w} - 2m_f \omega_s \alpha_1 \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{3} \frac{\dot{w}^2}{U^2} \right) \dot{w} + (m_f \omega_s^2) w = \frac{1}{2} \rho U D \alpha_4 \dot{y} \\ m \ddot{y} + ky = \frac{1}{2} \rho U D \alpha_4 (\dot{w} - \dot{y}) \end{cases} \quad (3.23)$$

Para que os modelos fenomenológicos de IWAN & BLEVINS (1974) e PARRA & ARANHA (1996) possam ser comparados de um modo bastante simplista, pode-se reescrever as equações (3.18) e (3.23) fazendo uso dos valores dos coeficientes de cada modelo, equações (3.17) e (3.22) e assumindo o número de *Strouhal* constante  $St = 0,2$ . Desta maneira,

*IWAN & BLEVINS*

$$\begin{cases} (0,48D) \ddot{w} - (0,06U) \left( 1 - 3,33 \frac{\dot{w}^2}{U^2} \right) \dot{w} + (0,48D \omega_s^2) w = (0,38U) \dot{y} \\ m \ddot{y} + ky = (0,38 \rho D U) (\dot{w} - \dot{y}) \end{cases} \quad (3.24)$$

*PARRA & ARANHA*

$$\begin{cases} (0,38D) \ddot{w} - (0,047U) \left( 1 - 4,01 \frac{\dot{w}^2}{U^2} \right) \dot{w} + (0,38D \omega_s^2) w = (0,375U) \dot{y} \\ m \ddot{y} + ky = (0,375 \rho D U) (\dot{w} - \dot{y}) \end{cases}$$

Apesar de algumas diferenças, não deixa de ser notória a semelhança entre os dois modelos fenomenológicos, ainda mais considerando que a base experimental utilizada para a calibração dos coeficientes foi diferente.

### 3.7 O “Modelo Fenomenológico” de ARANHA (2004)

#### 3.7.1 Solução Assintótica dos Modelos Fenomenológicos de IWAN & BLEVINS (1974) e PARRA & ARANHA (1996)

Conforme apresentado na seção 3.3, a solução assintótica da equação de *Van der Pol* resulta na equação de *Landau* assumindo o parâmetro  $\mu \ll 1$  na equação (3.1). Uma abordagem similar pode ser feita com os modelos fenomenológicos baseados na equação de *Van der Pol* que foram apresentados nas seções 3.5 e 3.6.

No modelo de IWAN & BLEVINS (1974), equação (3.18), isto equivale a assumir que  $\delta = (a_1 - a_4)$  é o “parâmetro pequeno”. Já no modelo de PARRA & ARANHA, equação (3.23), o “parâmetro pequeno” é  $\delta = \alpha_1$ .

Em ambos os casos, procedendo de modo similar ao da seção 3.3, pode-se escrever

$$\begin{aligned} w(t) &= \left[ A(\tau) e^{i\omega_s t} + (*) \right] + \delta w_1(t) \\ \dot{w}(t) &= \left[ \left( \mu \frac{dA(\tau)}{d\tau} + iA(\tau) \right) e^{i\omega_s t} + (*) \right] + \delta \dot{w}_1(t) \\ \ddot{w}(t) &= \left[ \left( \mu^2 \frac{d^2 A(\tau)}{d\tau^2} + i2\mu \frac{dA(\tau)}{d\tau} - A(\tau) \right) e^{i\omega_s t} + (*) \right] + \delta \ddot{w}_1(t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde  $\tau = \delta t$  é a escala de variação lenta no tempo e  $w_1(t)$  é a perturbação.

Além disto, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(\tau) e^{i\omega_s t} + (*) \\ \dot{y}(t) &= V(\tau) e^{i\omega_s t} + (*) = \left( \dot{Y}(\tau) + i\omega_s Y(\tau) \right) e^{i\omega_s t} + (*) \end{aligned} \quad (3.26)$$

O roteiro que se segue, ver seção 3.3, é:

- Em cada um dos modelos fenomenológicos, equações (3.18) e (3.23), utilizar as equações (3.25) e (3.26);
- Desprezar todos os termos em  $\delta^2$  ou ordem superior;
- Para que a perturbação  $w_1(t)$  permaneça limitada, os termos que pulsam com  $e^{i\omega_s t}$  devem ser nulos;

Procedendo desta maneira, chega-se às expressões dos modelos fenomenológicos de IWAN & BLEVINS (1974) e PARRA & ARANHA (1996) com equação de *Landau*:

IWAN & BLEVINS

$$\begin{cases} \frac{dA(\tau)}{dt} - \left[ \frac{(a_1 - a_4)U}{2a_0 D} \right] A(\tau) + \left[ \frac{3a_2 \omega_s^2}{2a_0 UD} \right] |A(\tau)|^2 A(\tau) = -i \frac{a_4}{2a_0} \frac{U}{\omega_s D} V \\ m\ddot{y} + ky = \left[ ia_4 \rho DU \omega_s A e^{i\omega_s t} + (*) \right] - \left[ a_4 \rho D U V e^{i\omega_s t} + (*) \right] \end{cases} \quad (3.27)$$

PARRA & ARANHA

$$\begin{cases} \frac{dA(\tau)}{dt} - [\alpha_1 \omega_s] A(\tau) + \left[ 4\alpha_1 \alpha_2 \frac{\omega_s^3}{U^2} \right] |A(\tau)|^2 A(\tau) = -i \frac{\alpha_4}{\pi \alpha_0} \frac{U}{\omega_s D} V \\ m\ddot{y} + ky = \left[ i \frac{\alpha_4}{2} \rho D U \omega_s A e^{i\omega_s t} + (*) \right] - \left[ \frac{\alpha_4}{2} \rho D U V e^{i\omega_s t} + (*) \right] \end{cases}$$

Note que, nas expressões dos osciladores elásticos, a variação lenta de  $A(\tau)$  e a perturbação  $w_1(t)$  foram desprezadas. Desprezando esta variação lenta também na equação (3.26), pode-se escrever

$$\begin{aligned} y(t) &= Y e^{i\omega_s t} + (*) \\ \dot{y}(t) &= V e^{i\omega_s t} + (*) = i\omega_s Y e^{i\omega_s t} + (*) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Após manipulação algébrica, chega-se a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Y(t)) &= \frac{1}{2} y(t) \cos(\omega_s t) - \frac{1}{2\omega_s} \dot{y}(t) \operatorname{sen}(\omega_s t) \\ \operatorname{Im}(Y(t)) &= -\frac{1}{2} y(t) \operatorname{sen}(\omega_s t) - \frac{1}{2\omega_s} \dot{y}(t) \cos(\omega_s t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

A equação (3.29), como será visto no Capítulo 5, é importante, pois permite obter a velocidade complexa  $V$  (que realimenta o oscilador fluido) a partir dos valores reais conhecidos  $y(t)$  e  $\dot{y}(t)$ .

### 3.7.2 A Extensão Modelo Fenomenológico com Equação de Landau

Conforme mostrado na seção 3.7.1, um modelo equivalente ao modelo com equação de *Van der Pol* para o oscilador fluido é o modelo com equação de *Landau*, escrito genericamente na forma

$$\begin{cases} \frac{dA(\tau)}{dt} - \sigma A(\tau) + \mu |A(\tau)|^2 A(\tau) = f_V V \\ m\ddot{y} + ky = [C_A A e^{i\omega_s t} + (*)] + [C_V V e^{i\omega_s t} + (*)] \end{cases} \quad (3.30)$$

Este modelo pode ser estendido, de maneira heurística, assumindo uma tridimensionalidade fraca na direção do eixo do cilindro (ver Figura 3.7), a qual será chamada  $z$ . Isto, matematicamente, é feito assumindo agora que  $A = A(z, t)$  e também introduzindo uma parcela que indique a variação de  $A$  nesta direção. Para não “privilegiar” sentido no eixo  $z$  e de modo a tomar o modelo mais simples possível, esta parcela é escolhida como sendo a segunda derivada parcial de  $A(z, t)$  nesta direção. Assim, uma extensão do modelo de Landau (equação 3.30) é dada por

$$\begin{cases} \frac{dA(\tau)}{dt} - \sigma A(\tau) - \gamma \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mu |A(\tau)|^2 A(\tau) = f_V V \\ m\ddot{y} + ky = C_A [A e^{i\omega_s t} + (*)] + C_V [V e^{i\omega_s t} + (*)] \end{cases} \quad (3.31)$$

Note que a forma do oscilador fluido, primeira relação na equação (3.31), corresponde à equação de *Ginzburg-Landau*, tal como estudada na seção 3.4, mas com um termo forçante proporcional à velocidade complexa do cilindro.

O presente trabalho considerou o modelo fenomenológico com equação de *Ginzburg-Landau* como apresentado na equação (3.31).

### 3.7.3 O Trabalho de ARANHA (2004)

ARANHA (2004) mostrou que a equação de *Ginzburg-Landau* pode ser obtida a partir da solução assintótica das equações de *Navier-Stokes* e, desta forma, pode representar o oscilador fluido não mais apenas como um modelo fenomenológico.

Uma descrição deste trabalho, de modo muito sucinto, é a que segue. ARANHA (2004) escreve as equações de *Navier-Stokes* para uma região fluida finita (similar à apresentada na Figura 3.7) e as discretiza através de um método de elementos finitos. As condições de contorno na borda perpendicular ao escoamento incidente, à jusante do cilindro, são escritas através da definição de uma “impedância fluida”.

As equações discretas de *Navier-Stokes* são então projetadas no subespaço solenoidal, que é um subespaço de divergência nula e que, portanto, desacopla os termos de pressão e velocidade possibilitando a determinação do campo de velocidades. Isto leva o equacionamento a um sistema dinâmico no qual técnicas usuais de solução assintótica podem ser aplicadas. Esta solução assintótica resulta na equação de *Landau*.

Partindo da equação de *Landau*, é feita uma consideração sobre a parcela da perturbação do escoamento na direção perpendicular ao plano considerado até então que acaba levando à equação de *Ginzburg-Landau*.

O modelo completo, incorporando o acoplamento com um cilindro que possui velocidade tal como expressa na equação (3.26), resulta, do lado do oscilador fluido,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_o}{\partial t} - \sigma_o A_o - \gamma_o \frac{\partial^2 A_o}{\partial z^2} + \mu_o |A_o|^2 A_o + \\ & + \nu_{AAV} |A_o|^2 V_o + \nu_{AVA} A_o^2 V_o^* + \nu_{VVA} |V_o|^2 A_o + \nu_{VAV} V_o^2 A_o^* = \\ & = f_V \cdot V_o + f_{\dot{V}} \cdot \dot{V}_o + f_{VV} \cdot |V_o|^2 V_o \end{aligned} \quad (3.32)$$

e, do lado do oscilador elástico (desprezando o amortecimento estrutural),

$$m(\dot{V} + i\omega_o V) + \omega_n^2 Y = \int_0^L C_L(z, t) dz \quad (3.33)$$

O coeficiente de sustentação  $C_L(z, t)$  é dado por

$$\begin{aligned} C_L(z, t) = & C_A A_o + C_{AAA} |A_o|^2 A_o + \\ & + C_V V_o + C_{\dot{V}} \dot{V}_o + C_{VV} |V_o|^2 V_o + \\ & + C_{AAV} |A_o|^2 V_o + C_{AVA} A_o^2 V_o^* + \\ & + C_{VVA} |V_o|^2 A_o + C_{VAV} V_o^2 A_o^* \end{aligned} \quad (3.34)$$

Este modelo baseado na equação de *Ginzburg-Landau* tem 16 coeficientes a determinar além dos coeficientes de instabilidade  $\sigma$ , de *Ginzburg*  $\gamma$  e de *Landau*  $\mu$ . Os coeficientes de interação  $\{\nu_{AAV}; \nu_{AVA}; \nu_{VVA}; \nu_{VAV}\}$  modificam a estrutura da

*Equação de Ginzburg-Landau*, incorporando parcelas proporcionais à velocidade transversal. Os coeficientes forçantes  $\{f_v; f_{\dot{v}}; f_{v\dot{v}}\}$  descrevem como o movimento transversal do oscilador força o modo instável do escoamento. Estes sete primeiros coeficientes podem ser determinados através da solução de um conjunto de sistemas lineares (ARANHA, 2004). Determinados  $\{A_o(z,t); V_o(t)\}$ , os campos de velocidade e pressão podem ser obtidos e, com eles, os nove coeficientes  $\{C_A; C_{AAA}; C_V; \dots; C_{VAV}\}$  da força  $C_L(t)$ , resultantes do campo de pressões na superfície do cilindro. Note que o trabalho de ARANHA (2004) apresenta um método para cálculo dos coeficientes, ou seja, estes não são simplesmente calibrados.

Comparando a equação (3.31) com as equações (3.32), (3.33) e (3.34), pode-se pensar que a primeira é uma “simplificação” com a qual este trabalho irá ser conduzido. Mesmo porque o conjunto completo de coeficientes do modelo de ARANHA (2004) encontra-se ainda indeterminado.

### **3.8 Os Modelos Fenomenológicos no Cenário Atual das Predições de VIV em Aplicações Offshore**

Como toda vibração, a VIV tem potencial de levar uma estrutura à falha por fadiga, devido à alta frequência envolvida. Do ponto de vista de aplicações *offshore*, um cabo umbilical ou uma linha flexível devem ser projetados para uma vida à fadiga da ordem de 30 anos, sem contar os fatores de segurança envolvidos, que podem chegar a 10. Logo, saber prever os efeitos das VIV é algo desejável dentro de um projeto de estruturas com este tipo de aplicação.

Devido às grandes profundidades dos campos de petróleo explorados hoje em dia, a realização de experimentos em escala real, é virtualmente impossível do ponto de vista de viabilidade econômica e até mesmo de viabilidade técnica no que tange à questão de instrumentação de modo a garantir observabilidade satisfatória. BEYNET et al (2008), conseguiram medir VIV em algumas posições instrumentadas de um *riser* de perfuração no Golfo do México, mas foi uma situação atípica. Poder-se-ia

pensar então na realização de experimentos em escala reduzida; porém, a enorme diferença entre as ordens de magnitude da profundidade e do diâmetro das estruturas coloca um entrave também virtualmente intransponível, sem mencionar a dificuldade em se reproduzir o número de *Reynolds* apropriado.

Desta forma, uma opção simples e exequível é realizar experimentos com cilindros rígidos montados em base elástica em laboratórios e então, a partir dos resultados obtidos, construir modelos que possam ser incorporados em ferramentas computacionais.

Atualmente, as ferramentas computacionais desenvolvidas para a predição de VIV em cabos submersos podem ser divididas em três grupos principais:

- os baseados em simulações CFD (Computational Fluid Dynamics, em inglês);
- os baseados em bases de dados de experimentos realizados com cilindros rígidos montados em base elástica;
- os baseados em modelos fenomenológicos.

Cada um destes grupos possui implementações computacionais diversas.

Recentemente, CHAPLIN et al (2005) conduziu uma série de experimentos de VIV com um cabo flexível de cerca de 13m de comprimento em configuração vertical. Este cabo foi colocado em diferentes níveis de tração e sujeito a diferentes níveis de corrente uniforme em cerca de 45% de seu comprimento inferior. Os parâmetros do experimento, mas não seus resultados, foram submetidos a 11 grupos de pesquisa em nível mundial para que estes tentassem reproduzir numericamente os resultados do ensaio, o chamado teste-cego.

Do primeiro grupo, que utilizou ferramentas baseadas em CFD, houve quatro representantes: *Norsk-Hydro*, Universidade de São Paulo, *DeepFlow* (*Institut Français Du Pétrole*) e *VIVIC* (*Imperial College*). Todos os modelos são baseados em simulações bidimensionais ao redor de um cilindro para diversas seções ao longo do comprimento do mesmo. A interação entre o fluido e a estrutura ocorre através da seguinte maneira: para cada seção, as forças fluidas são computadas e aplicadas ao

cilindro; as posições, velocidades e acelerações do mesmo são então calculadas e realimentam o cálculo de CFD.

Do segundo grupo, que utilizou ferramentas baseadas em bases de dados de experimentos com cilindros rígidos montados em base elástica, houve cinco representantes: VIVA (*Massachusetts Institute of Technology*), VIVANA (*Norwegian University of Science and Technology – NTNU*), Shear7 (*Massachusetts Institute of Technology*), ViCoMo (*Norwegian University of Science and Technology – NTNU*) e ABAVIV (*Technip*). Todos os modelos tentam identificar a amplitude dos modos com maior probabilidade de serem excitados, com base na análise de modos e frequências naturais de vibrar.

Do terceiro grupo, que utilizou ferramentas baseadas em modelos heurísticos ou fenomenológicos houve um representante participando com dois modelos: *Orcina Vortex-Tracking* (heurístico) e *Orcina Wake Oscillator (Milan)* (fenomenológico). A metodologia empregada nestas ferramentas é muito similar às das ferramentas de CFD. Contudo, ao invés de uma simulação de CFD para cada seção, é feito um cálculo muito mais simples com base na equação utilizada pelo modelo fenomenológico.

Pode-se perceber que os participantes deste teste cego possuem grande renome internacional, tanto do lado acadêmico quanto do lado da indústria. Após analisar todos os resultados enviados CHAPLIN (2005) notou que, com relação aos deslocamentos na direção perpendicular à do escoamento não-perturbado, o modelo fenomenológico tipo *wake oscillator* e também os códigos VIVA, VIVANA, ViCoMo, Shear7 e ABAVIV indicaram valores entre 85% e 105% dos valores medidos em laboratório. Para os códigos tipo CFD, os resultados indicaram entre 65% e 90% do valor medido em laboratório.

Embora este trabalho não possa afirmar que há uma ferramenta melhor que as demais, uma coisa é certa: não se pode desprezar o poder dos modelos fenomenológicos, uma vez que a ferramenta baseada em modelo fenomenológico atinge os mesmos objetivos práticos, ou seja, o cálculo das VIV em estruturas *offshore*.

## CAPÍTULO 4    MODELO ESTÁTICO

### 4.1 Introdução

A análise estática consiste em se determinar a configuração de equilíbrio de um cabo submerso conhecendo-se as suas propriedades físico-mecânicas, os pontos aos quais as suas extremidades estão conectadas e também as condições ambientais do local onde o mesmo está instalado.

Além de possibilitar um estudo prévio de viabilidade com relação a algumas grandezas mecânicas (como tração e curvatura estáticas) e geométricas (como ângulo no topo e interferência com outros cabos submersos), a análise estática serve como base para a análise dinâmica, uma vez que esta última pode ser considerada uma perturbação da configuração estática inicial, MARTINS (1984).

Neste capítulo, primeiramente é apresentado o modelo estático para um cabo submerso extensível, com rigidez flexional não-nula, livre para torcer e que está sujeito a esforços gravitacionais, hidrostáticos e hidrodinâmicos devidos ao arrasto causado pela corrente marítima. Posteriormente, o caso de rigidez flexional nula será derivado e analisado em maior grau de detalhamento.

Não será tratada aqui a interação entre o cabo e o solo, ou seja, o trecho do cabo apoiado sobre o fundo do mar pode deslizar livremente. Além disso, o solo será considerado plano, horizontal e infinitamente rígido.

Por fim, algumas questões sobre a implementação de um algoritmo para a integração numérica do sistema de equações diferenciais resultantes para o caso simplificado de um cabo extensível e perfeitamente flexível serão abordadas.

As simplificações do modelo estático consideradas no presente texto são motivadas pelos objetivos da tese, mas em geral tais simplificações encontram embasamento físico e proporcionam grandes vantagens numéricas. Os prejuízos atrelados às simplificações propostas são sentidos apenas localmente, especialmente nas regiões das extremidades do cabo submerso (por exemplo, topo e TDP em se tratando de cabos submersos em catenária simples), e não serão importantes no estudo de VIV pensando em termos qualitativos de resposta global.

No caso da torção, por exemplo, os cabos submersos são instalados de modo a eliminá-la. As linhas flexíveis e os umbilicais contêm, em sua capa externa, uma linha guia que auxilia a instalação com um nível de torção muito pequeno. Níveis elevados de torção não são usuais nas aplicações *offshore*.

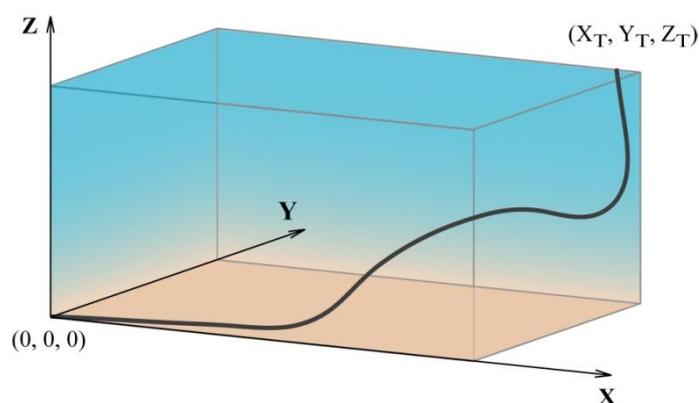
Para o caso da flexão, a diferença nos valores de curvatura entre o caso de rigidez flexional nula para o caso de rigidez flexional não-nula é desprezível para os casos usuais encontrados nas instalações *offshore*, SILVEIRA & MARTINS (2005). Isto se deve à enorme relação de esbeltez destas estruturas (comprimento muito maior que o diâmetro), o que faz com que a rigidez flexional tenha papel importante apenas nas regiões de tração muito baixa, TRIANTAFYLLOU (1984), ou então quando o modo de vibrar é extremamente alto, de modo que seu correspondente comprimento de onda seja da mesma ordem que o comprimento de flexão associado, PESCE & MARTINS (2005). O efeito de rigidez flexional também não poderá ser desprezado se um estudo mais detalhado da região do TDP ou do topo for desejado, em especial no cálculo de fadiga.

Já as questões referentes à interação entre o cabo submerso e o fundo do mar são importantes, mas possuem um efeito localizado junto à região do TDP. Esta interação introduz um esforço computacional bastante elevado, em especial no problema dinâmico.

Muitas outras simplificações serão assumidas: invariância das propriedades da água com a temperatura, invariância do coeficiente de arrasto com o número de *Reynolds* etc. Contudo, todas elas são adequadas ao objetivo do estudo das VIV que o presente texto se propõe a fazer.

## 4.2 Definição do Problema Estático

Considere um cabo submerso preso em uma das extremidades numa unidade flutuante e, na outra extremidade, preso ao fundo do mar (aqui suposto plano, horizontal e perfeitamente rígido) através de uma ligação com a Árvore de Natal, por exemplo. O cabo em questão pode ser um *riser* rígido ou um umbilical e pode inclusive apresentar propriedades mecânicas que variam ao longo de seu comprimento, como é usual nos casos de configurações em *lazy-wave*. A Figura 4.1 ilustra um exemplo de um cabo submerso em configuração *lazy-wave*.



**Figura 4.1 – Esquema tridimensional de um cabo submerso.**

Serão tratados aqui, entretanto, apenas os casos em que se têm trechos distintos de cabo com propriedades bem definidas, ou seja, constantes por trechos.

Tipicamente, numa instalação *offshore*, estes cabos são sujeitos a esforços gravitacionais, hidrostáticos e hidrodinâmicos (ação do arrasto da corrente marítima, cuja componente média é assumida constante).

A análise estática consiste na determinação da configuração de equilíbrio assumida por este cabo. Para isso, devem ser conhecidas (i) a geometria do problema, (ii) as propriedades mecânicas do cabo e (iii) as condições ambientais.

Pela geometria do problema entendem-se as coordenadas  $(X_T, Y_T, Z_T)$  do topo (ou seja, o ponto onde o cabo é preso à unidade flutuante), e também o comprimento total do cabo,  $l_T$ . As propriedades geométricas e mecânicas incluem o diâmetro  $D$ ,

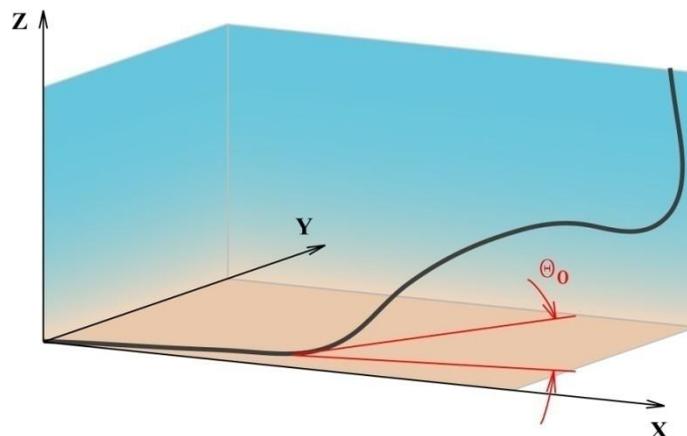
o peso por unidade de comprimento  $\gamma$ , a rigidez axial  $EA$ , a rigidez flexional  $EI$  e os coeficientes de arrasto da seção do cabo nas direções normal,  $c_{d,n}$  e axial,  $c_{d,a}$ . Já as condições ambientais de interesse são: a profundidade (lâmina de água)  $h$ , a densidade da água  $\rho_a$ , a aceleração da gravidade local  $g$  e o perfil de corrente marítima local  $\vec{v}_c$ .

Para que os esforços sejam modelados, porém, é necessário um sistema de coordenadas claramente definido. Isto será feito na seção seguinte.

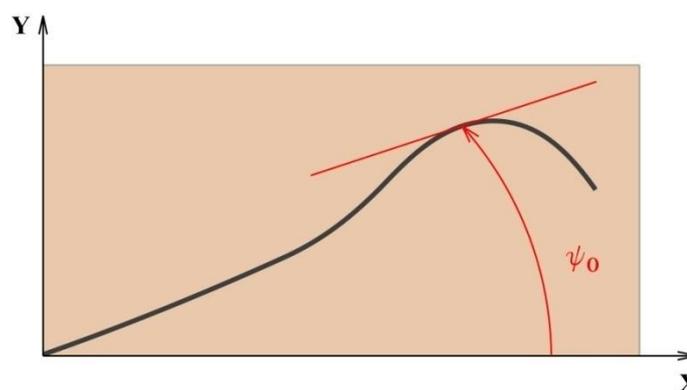
### 4.3 Sistema de Coordenadas

O sistema global de coordenadas da modelagem aqui desenvolvida é um sistema cartesiano com origem  $O$  na extremidade do cabo que está presa ao fundo do mar e com os eixos direcionados de tal modo que  $Oz$  é vertical e aponta para a superfície e  $Ox$  e  $Oy$  são paralelos ao solo (este último, por hipótese, plano e horizontal). Além deste sistema global de coordenadas, pode-se definir também a coordenada curvilínea  $s$ , com origem no mesmo ponto  $O$  e orientação positiva indo-se da origem à extremidade suspensa.

Finalmente, pode-se definir uma base ortonormal local. Seja  $\theta_0(s)$  o ângulo entre o plano horizontal e a reta tangente ao cabo no ponto de coordenada  $s$  (Figura 4.2) e seja  $\psi_0(s)$  o ângulo entre o eixo  $Ox$  e a projeção da reta tangente ao cabo no plano  $Oxy$  no ponto de coordenada  $s$  (Figura 4.3). Note que o subscrito “0” indica que se trata de uma variável do problema estático.



**Figura 4.2 – Ângulo  $\theta_0(s)$ .**



**Figura 4.3 – Ângulo  $\psi_0(s)$ .**

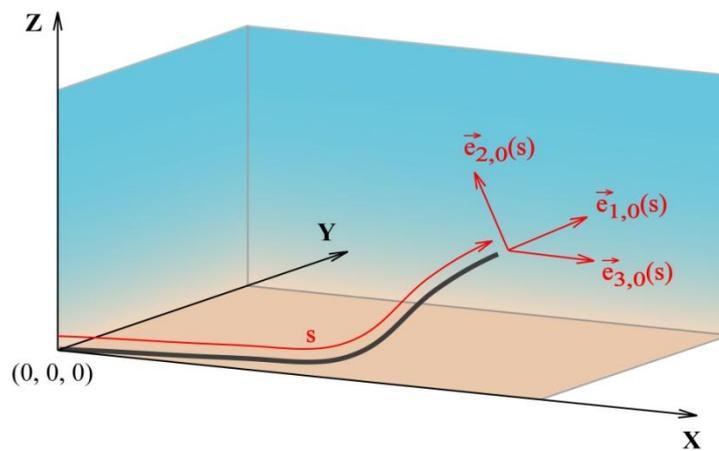
Podemos associar para cada ponto da coordenada curvilínea  $s$  um vetor tangente  $\vec{e}_{1,0}(s)$  que, expresso no sistema global, fica:

$$\vec{e}_{1,0}(s) = \cos \theta_0(s) \cos \psi_0(s) \vec{i} + \cos \theta_0(s) \sin \psi_0(s) \vec{j} + \sin \theta_0(s) \vec{k} \quad (4.1)$$

onde  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  é a base ortonormal do sistema global  $Oxyz$  e  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  apontam, respectivamente, nas direções dos eixos  $Ox, Oy$  e  $Oz$ . A base local pode ser completada de várias formas. Uma delas é escolher um versor  $\vec{e}_{3,0}(s)$  paralelo ao plano horizontal, resultando na seguinte base:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_{1,0}(s) = \cos \theta_0(s) \cos \psi_0(s) \vec{i} + \cos \theta_0(s) \sin \psi_0(s) \vec{j} + \sin \theta_0(s) \vec{k} \\ \vec{e}_{2,0}(s) = -\sin \theta_0(s) \cos \psi_0(s) \vec{i} - \sin \theta_0(s) \sin \psi_0(s) \vec{j} + \cos \theta_0(s) \vec{k} \\ \vec{e}_{3,0}(s) = \sin \psi_0(s) \vec{i} - \cos \psi_0(s) \vec{j} \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

Na realidade, poder-se-ia tomar o versor  $\vec{e}_{3,0}(s)$  apontando no sentido oposto ao apresentado, o que resultaria numa outra base ( $\vec{e}_{2,0}(s)$  seria também diferente). Outro modo seria usar a base do triedro de *Frenet*. A Figura 4.4 expressa os dois sistemas de referência, global e local, descritos aqui.



**Figura 4.4 – Sistemas de referência.**

De posse desses dois sistemas de referência, pode-se agora modelar os esforços atuantes no cabo, o que será feito na próxima seção.

## 4.4 Esforços Atuantes

Os esforços considerados são de três naturezas distintas: gravitacionais, hidrostáticos e hidrodinâmicos. As expressões desses três tipos de esforços considerados serão escritas para um trecho de cabo de comprimento  $\Delta s$ . O intuito é obter as expressões dos esforços por unidade de comprimento. Isto será muito útil na seção seguinte, na qual as equações do modelo estático em si serão derivadas.

#### 4.4.1 Esforços Gravitacionais

Este é o tipo mais simples de esforço e seu modelo é dado simplesmente por:

$$\vec{p}_0(s) = -\gamma(s)\vec{k} \quad (4.3)$$

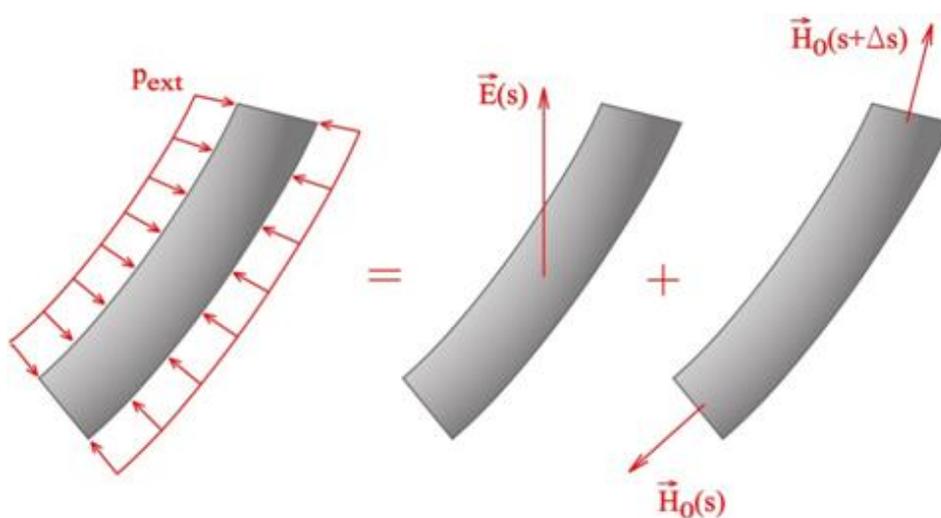
Note que o peso por unidade de comprimento do cabo,  $\gamma(s)$ , pode variar com a coordenada curvilínea devido a mudanças de propriedades do cabo, como no caso de trechos de cabo com flutuadores.

#### 4.4.2 Esforços Hidrostáticos

Segundo o princípio de Arquimedes, um corpo imerso num meio fluido experimenta uma força de empuxo igual, em magnitude, ao peso do volume do fluido deslocado. Um trecho de cabo de comprimento  $\Delta s$  e com as extremidades tampadas seria então submetido a uma força de empuxo dada por

$$\vec{E}(s) = \gamma_a A(s)\Delta s\vec{k} \quad (4.4)$$

onde  $\gamma_a = \rho_a g$  é o peso específico por unidade de volume do fluido e  $A(s)$  é a área da seção transversal do cabo.



**Figura 4.5 – Diagrama de Forças Equivalentes para a força hidrostática. (Baseado em MARTINS (1984))**

Porém, como o cabo é contínuo, um trecho de cabo de comprimento  $\Delta s$  não está sujeito à força de empuxo expressa na equação (4.4). Para tornar este fato mais claro, observe a Figura 4.5, onde um diagrama de forças equivalentes é apresentado. A força atuante sobre o trecho considerado é então igual ao empuxo somado a uma força de tração variável com a profundidade, ou seja,

$$\vec{h}_0(s)\Delta s = \vec{E} + \vec{H}_0(s + \Delta s) - \vec{H}_0(s) \quad (4.5)$$

onde  $\vec{h}_0(s)\Delta s$  é a força hidrostática que age num trecho de cabo de comprimento  $\Delta s$ ,  $\vec{E}$  é a força de empuxo dada pela equação (4.4) e  $\vec{H}_0(s)$  é uma força de tração oposta à resultante da pressão hidrostática que agiria na tampa do elemento de cabo fechado e isolado, de modo que

$$\vec{H}_0(s) = \gamma_a A(s)(h - z_0(s))\vec{e}_{1,0}(s) \quad (4.6)$$

lembrando que  $h$  é a profundidade. Dividindo a equação (4.5) por  $\Delta s$  tem-se então a força por unidade de comprimento  $\vec{h}_0(s)$ :

$$\vec{h}_0(s) = \frac{1}{\Delta s} (\vec{E} + \vec{H}_0(s + \Delta s) - \vec{H}_0(s)) \quad (4.7)$$

e que, utilizando a equação (4.4), fica

$$\vec{h}_0(s) = \gamma_a A(s)\vec{k} + \frac{\vec{H}_0(s + \Delta s) - \vec{H}_0(s)}{\Delta s} \quad (4.8)$$

Tomando-se o limite para  $\Delta s \rightarrow 0$  (ou seja, um elemento infinitesimal), tem-se

$$\vec{h}_0(s) = \gamma_a A(s)\vec{k} + \frac{d\vec{H}_0}{ds}(s) \quad (4.9)$$

e que, utilizando-se a equação (4.6), fica

$$\vec{h}_0(s) = \gamma_a A(s) \left\{ \vec{k} + \frac{d}{ds} [(h - z_0(s))\vec{e}_{1,0}(s)] \right\} \quad (4.10)$$

onde foi considerado que  $\frac{dA(s)}{ds} = 0$ , ou seja, a área da seção transversal é invariante dentro de um trecho. Lembrando que o versor  $\vec{e}_{1,0}(s)$  da base local pode ser escrito na base global, equação (4.2), tem-se que

$$\vec{h}_0(s) = \gamma_a A(s) \vec{k} + h_{0,x}(s) \vec{i} + h_{0,y}(s) \vec{j} + h_{0,z}(s) \vec{k} \quad (4.11)$$

onde as componentes são dadas por

$$\begin{aligned} h_{0,x}(s) &= \gamma_a A(s) \frac{d}{ds} [(h - z_0(s)) \cos_0 \theta(s) \cos \psi_0(s)] \\ h_{0,y}(s) &= \gamma_a A(s) \frac{d}{ds} [(h - z_0(s)) \cos \theta_0(s) \text{sen} \psi_0(s)] \\ h_{0,z}(s) &= \gamma_a A(s) \frac{d}{ds} [(h - z_0(s)) \text{sen} \theta_0(s)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

### 4.4.3 Esforços Hidrodinâmicos

Uma vez que a corrente marítima é variável no tempo, a princípio pode parecer estranho considerar tais esforços hidrodinâmicos numa análise estática. A explicação, entretanto, é simples. A escala de tempo da variação da corrente marítima está ligada à escala de tempo da variação dos fenômenos atmosféricos, que é tipicamente da ordem de horas. Já a escala de tempo do movimento dinâmico do cabo está ligada à escala de tempo do período das ondas, que é da ordem de segundos. Como a corrente marítima varia muito lentamente, este tipo de esforço pode então ser considerado estático.

A corrente marítima pode alterar significativamente a configuração de um cabo submerso, alterando assim a rigidez geométrica da instalação. Além disso, a tridimensionalidade do problema é devida, em quase sua totalidade, aos esforços hidrodinâmicos. Outra fonte de tridimensionalidade é o atrito entre o cabo e o fundo do mar, o qual, como já dito, não é considerado no presente trabalho.

Como mostrado no Capítulo 2, uma corrente marítima constante induz sobre o cabo dois tipos de esforços. O primeiro deles é a força de arrasto, na direção do próprio escoamento, e de caráter estático. O segundo é a força de sustentação, na direção

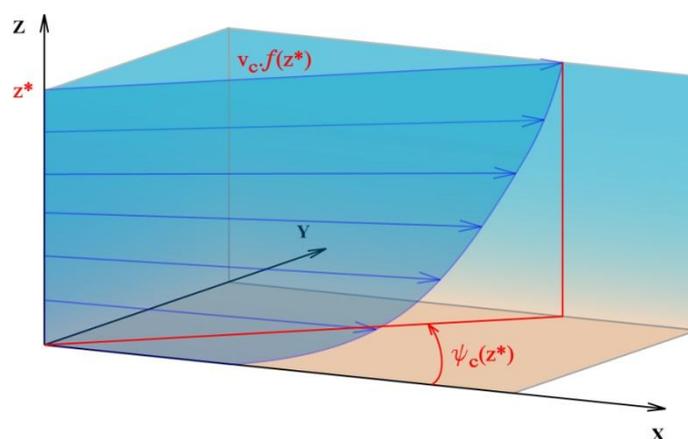
perpendicular ao escoamento, e que produz o fenômeno de VIV, ou seja, é essencialmente dinâmico. Obviamente, apenas a força de arrasto será considerada no modelo estático. A parcela referente ao VIV pode ser considerada no modelo dinâmico, ver Capítulo 5.

Na realidade, como também mostrado no Capítulo 2, as VIV causam uma flutuação do arrasto que poderia ser incorporada no modelo dinâmico. No entanto, este fato não será modelado neste trabalho: o coeficiente de arrasto será sempre constante.

A força de arrasto pode ser obtida através da clássica fórmula de *Morison*, *FALTINSEN* (1990). Considerando que o perfil da corrente marítima pode variar com a profundidade tanto em direção quanto em intensidade e considerando que o perfil é sempre horizontal, podemos escrever a velocidade de corrente como

$$\vec{v}_c(z_0) = v_c f(z_0) [\cos \psi_c(z_0) \vec{i} + \text{sen} \psi_c(z_0) \vec{j}] \quad (4.13)$$

onde  $v_c$  é uma constante que, multiplicada pela função  $f(z_0)$ , determina a intensidade da correnteza para cada cota  $z_0$ ;  $\psi_c(z_0)$  é o ângulo medido entre o eixo global  $Ox$  e a projeção da velocidade da corrente na cota  $z_0$ . A Figura 4.6 ilustra um perfil de corrente.



**Figura 4.6 – Exemplo de perfil tridimensional de corrente marítima.**

A força de arrasto por unidade de comprimento, na coordenada  $s$ , é então obtida pela fórmula de *Morison*:

$$\vec{c}_0(s) = \frac{1}{2} c_d(s) D(s) \rho_a \vec{v}_c(z_0) |\vec{v}_c(z_0)| \quad (4.14)$$

lembrando que  $c_d(s)$  é o coeficiente de arrasto,  $D(s)$  é o diâmetro externo do cabo,  $\rho_a$  é a densidade da água e  $\vec{v}_c(z_0)$  é a velocidade de corrente.

Esta força de arrasto pode ser pensada como a soma de uma parcela que age na direção axial do cabo (ou seja, na direção de  $\vec{e}_{1,0}(s)$ ) e uma parcela que age no plano normal ao cabo (definido pelos versores  $\vec{e}_{2,0}(s)$  e  $\vec{e}_{3,0}(s)$ ). No caso de um cilindro liso, o arrasto na direção axial é de pelo menos duas ordens de magnitude menor que o arrasto no plano normal. Contudo, a inclusão de elementos supressores de vórtices como *strakes* podem aumentar significativamente esta parcela.

Seja o versor

$$\vec{\lambda}_c(s) = \cos \psi_c(z_0) \vec{i} + \sin \psi_c(z_0) \vec{j} \quad (4.15)$$

o qual determina a direção da velocidade de corrente na cota  $z_0$ . O vetor que determina a direção da componente da velocidade de corrente contida no plano normal ao cabo é obtido subtraindo-se a parcela de  $\vec{\lambda}_c(s)$  que é tangente ao cabo:

$$\vec{n}_{0,c}(s) = \vec{\lambda}_c(s) - (\vec{\lambda}_c(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s)) \vec{e}_{1,0}(s) \quad (4.16)$$

Assim, pode-se escrever que a parcela da velocidade de corrente normal ao cabo é dada por

$$\vec{v}_{c,n}(s) = v_c f(z_0) \vec{n}_{0,c}(s) \quad (4.17)$$

de modo que a força de arrasto por unidade de comprimento na direção normal ao cabo é dada por

$$\vec{c}_{0,n}(s) = \frac{1}{2} c_{d,n}(s) D(s) \rho_a v_c^2 f(z_0) \vec{n}_{0,c}(s) |f(z_0) \vec{n}_{0,c}(s)| \quad (4.18)$$

Escrevendo no sistema global de coordenadas, tem-se

$$\vec{c}_{0,n}(s) = c_{0,n,x}(s)\vec{i} + c_{0,n,y}(s)\vec{j} + c_{0,n,z}(s)\vec{k} \quad (4.19)$$

onde as componentes são dadas por

$$\begin{aligned} c_{0,t,x}(s) &= \bar{c}_{0,t}(s) \left[ \cos \psi_c(z_0) - (\cos \theta_0(s) \cos \psi_0(s)) \vec{\lambda}_c(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s) \right] \\ c_{0,t,y}(s) &= \bar{c}_{0,t}(s) \left[ \sin \psi_c(z_0) - (\cos \theta_0(s) \sin \psi_0(s)) \vec{\lambda}_c(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s) \right] \\ c_{0,t,z}(s) &= \bar{c}_{0,t}(s) \left[ 0 - (\sin \theta_0(s)) \vec{\lambda}_c(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

com  $\vec{\lambda}_c(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s) = \cos \theta_0(s) \cos \psi_0(s) \cos \psi_c(z_0) + \cos \theta_0(s) \sin \psi_0(s) \sin \psi_c(s)$  e

$$\bar{c}_{0,t}(s) = \frac{1}{2} c_{d,t}(s) D(s) \rho_a v_c^2 f(z_0) |f(z_0) \vec{n}_{0,c}(s)|.$$

Da mesma forma, o vetor que determina a componente da velocidade de corrente contida na direção axial ao cabo é dado por

$$\vec{a}_{0,c}(s) = (\vec{\lambda}_c(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s)) \vec{e}_{1,0}(s) \quad (4.21)$$

Assim, pode-se escrever que a parcela da velocidade de corrente transversal ao cabo é dada por

$$\vec{v}_{c,a}(s) = v_c f(z_0) \vec{a}_{0,c}(s) \quad (4.22)$$

de modo que a força de arrasto por unidade de comprimento na direção transversal ao cabo é dada por

$$\vec{c}_{0,a}(s) = \frac{1}{2} c_{d,a}(s) D(s) \rho_a v_c^2 f(z_0) \vec{a}_{0,c}(s) |f(z_0) \vec{a}_{0,c}(s)| \quad (4.23)$$

Escrevendo no sistema global de coordenadas, tem-se

$$\vec{c}_{0,a}(s) = c_{0,a,x}(s)\vec{i} + c_{0,a,y}(s)\vec{j} + c_{0,a,z}(s)\vec{k} \quad (4.24)$$

onde as componentes são dadas por

$$\begin{aligned}
c_{0,a,x}(s) &= \bar{c}_{0,a}(s) \left[ (\cos \theta_0(s) \cos \psi_0(s)) \bar{\lambda}_c(s) \cdot \bar{e}_{1,0}(s) \right] \\
c_{0,a,y}(s) &= \bar{c}_{0,a}(s) \left[ (\cos \theta_0(s) \sin \psi_0(s)) \bar{\lambda}_c(s) \cdot \bar{e}_{1,0}(s) \right] \\
c_{0,a,z}(s) &= \bar{c}_{0,a}(s) \left[ (\sin \theta_0(s)) \bar{\lambda}_c(s) \cdot \bar{e}_{1,0}(s) \right]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

com  $\bar{\lambda}_c(s) \cdot \bar{e}_{1,0}(s) = \cos \theta_0(s) \cos \psi_0(s) \cos \psi_c(z_0) + \cos \theta_0(s) \sin \psi_0(s) \sin \psi_c(s)$  e

$$\bar{c}_{0,a}(s) = \frac{1}{2} c_{a,t}(s) D(s) \rho_a v_c^2 f(z_0) |f(z_0) \bar{a}_{0,c}(s)|.$$

Desta forma, pode-se escrever que

$$\bar{c}_0 = \bar{c}_{0,t} + \bar{c}_{0,a} \tag{4.26}$$

#### 4.4.4 Esforços Totais

O esforço estático total por unidade de comprimento atuante sobre o cabo, escrito como  $\bar{q}_0(s) = q_{0,x}(s)\bar{i} + q_{0,y}(s)\bar{j} + q_{0,z}(s)\bar{k}$ , nada mais é que a soma dos três tipos de esforços apresentados, ou seja,

$$\bar{q}_0(s) = \bar{p}_0(s) + \bar{h}_0(s) + \bar{c}_0(s) \tag{4.27}$$

Usando as equações (4.3), (4.10), (4.26), (4.18) e (4.23), escreve-se

$$\begin{aligned}
\bar{q}_0(s) &= -\gamma(s)\bar{k} + \gamma_a A(s) \left[ \bar{k} + \frac{d}{ds} \left( (h - z_0(s)) \bar{e}_{1,0}(s) \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{2} c_{d,t}(s) D(s) \rho_a v_c^2 f(z_0) \bar{n}_{0,c}(s) |f(z_0) \bar{n}_{0,c}(s)| + \\
&+ \frac{1}{2} c_{d,a}(s) D(s) \rho_a v_c^2 f(z_0) \bar{a}_{0,c}(s) |f(z_0) \bar{a}_{0,c}(s)|
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Definindo-se o peso efetivo por unidade de comprimento,  $\gamma_{ef}(s)$ , ou seja, o peso imerso por unidade de comprimento, por

$$\gamma_{ef}(s) = \begin{cases} \gamma(s) - \gamma_a A(s), & z \leq h \\ \gamma(s), & z > h \end{cases} \tag{4.29}$$

pode-se reescrever a equação (4.28) como

$$\begin{aligned} \bar{q}_0(s) = & -\gamma_{ef}(s)\bar{k} + \gamma_a A(s) \frac{d}{ds} \left( (h - z_0(s)) \bar{e}_{1,0}(s) \right) + \\ & + \frac{1}{2} c_{d,t}(s) D(s) \rho_a v_c^2 f(z_0) \bar{n}_{0,c}(s) |f(z_0) \bar{n}_{0,c}(s)| + \\ & + \frac{1}{2} c_{d,a}(s) D(s) \rho_a v_c^2 f(z_0) \bar{a}_{0,c}(s) |f(z_0) \bar{a}_{0,c}(s)| \end{aligned} \quad (4.30)$$

De posse dos esforços aplicados sobre o cabo, pode-se partir agora para as equações que compõem o modelo estático.

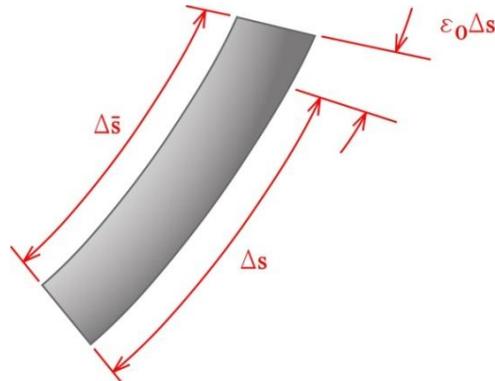
## 4.5 Equações do Problema Estático

As equações do problema estático são obtidas por meio das equações clássicas (i) de compatibilidade de deformação, (ii) de equilíbrio de forças, (iii) de compatibilidade geométrica, (iv) de equilíbrio de momentos, (v) constitutivas. Trataremos de cada uma delas a seguir.

### 4.5.1 Equação de Compatibilidade de Deformação

Considere um elemento de cabo de comprimentos  $\Delta s$  e  $\Delta \bar{s}$  nas suas configurações indeformada e deformada, respectivamente. Seja  $\varepsilon_0(s)$  a deformação axial do elemento. Conforme ilustrado na Figura 4.7, pode-se escrever que

$$\Delta \bar{s} = \Delta s + \varepsilon_0(s) \Delta s \quad (4.31)$$



**Figura 4.7 – Compatibilidade de deformação.**

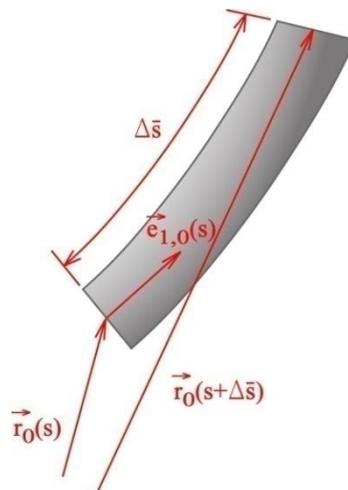
Dividindo-se a equação (4.31) por  $\Delta s$  e tomando-se o limite para  $\Delta s \rightarrow 0$ , obtém-se

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = 1 + \varepsilon_0(s) \quad (4.32)$$

#### 4.5.2 Equação de Compatibilidade Geométrica

Seja  $\vec{r}_0(s)$  o vetor de posição que liga a origem do sistema global de coordenadas  $Oxyz$  ao ponto de coordenada curvilínea  $s$ . Pode-se escrever então que

$$\vec{r}_0(s) = x_0(s)\vec{i} + y_0(s)\vec{j} + z_0(s)\vec{k} \quad (4.33)$$



**Figura 4.8 – Compatibilidade geométrica.**

Como observado na Figura 4.8, pode-se escrever que,

$$\vec{r}_0(s) + \vec{e}_{1,0}(s)\Delta\bar{s} = \vec{r}_0(s + \Delta\bar{s}) \quad (4.34)$$

Dividindo-se a equação (4.34) por  $\Delta\bar{s}$  e tomando-se o limite para  $\Delta\bar{s} \rightarrow 0$ , obtém-se

$$\frac{d\vec{r}_0(s)}{d\bar{s}} = \vec{e}_{1,0}(s) \quad (4.35)$$

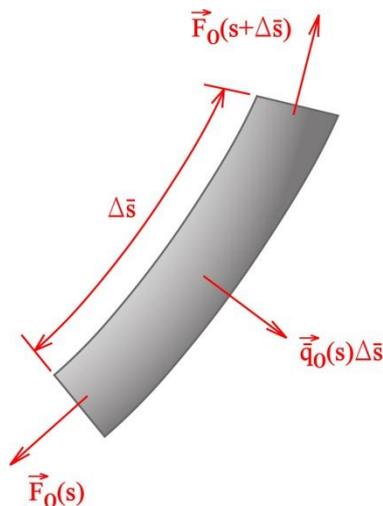
que por sua vez, com o auxílio da equação (4.32), fica

$$\frac{d\vec{r}_0(s)}{ds} = (1 + \varepsilon_0(s))\vec{e}_{1,0}(s) \quad (4.36)$$

### 4.5.3 Equação de Equilíbrio de Forças

Considere um elemento de cabo na situação deformada, conforme ilustrado na Figura 4.9. Nesta situação, é aplicado sobre este elemento um esforço externo igual a  $\bar{\bar{q}}_0(s)\Delta\bar{s}$ , onde a barra escrita sobre as variáveis indica que estas se referem à situação deformada. Os esforços internos que solicitam a seção transversal do elemento são indicados por  $\vec{F}_0(s) = F_{0,x}(s)\vec{i} + F_{0,y}(s)\vec{j} + F_{0,z}(s)\vec{k}$ . O equilíbrio de forças impõe que

$$\vec{F}_0(s + \Delta\bar{s}) + \bar{\bar{q}}_0(s)\Delta\bar{s} - \vec{F}_0(s) = \vec{0} \quad (4.37)$$



**Figura 4.9 – Equilíbrio de Forças.**

Entretanto, a resultante dos esforços externos deve ser a mesma tanto na situação deformada quanto na indeformada, de modo que

$$\vec{q}_0(s)\Delta\bar{s} = \vec{q}_0(s)\Delta s \quad (4.38)$$

Dividindo-se a equação (4.37) por  $\Delta\bar{s}$  e usando a equação (4.38), obtém-se

$$\frac{\vec{F}_0(s + \Delta\bar{s}) - \vec{F}_0(s)}{\Delta\bar{s}} + \vec{q}_0(s)\frac{\Delta s}{\Delta\bar{s}} = \vec{0} \quad (4.39)$$

Tomando o limite para  $\Delta\bar{s} \rightarrow 0$  obtém-se finalmente que

$$\frac{d\vec{F}_0(s)}{d\bar{s}} + \vec{q}_0(s)\frac{ds}{d\bar{s}} = \vec{0} \quad (4.40)$$

ou ainda,

$$\frac{d\vec{F}_0(s)}{ds} = -\vec{q}_0(s) \quad (4.41)$$

#### 4.5.4 Equação de Equilíbrio de Momentos

Novamente, tomando um elemento de cabo na situação deformada, conforme ilustrado na Figura 4.10, o equilíbrio de momentos é escrito com relação ao ponto central da extremidade superior do elemento, obtendo-se assim

$$\vec{M}_0(s + \Delta\bar{s}) - \vec{M}_0(s) + (\vec{F}_0(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s))\Delta\bar{s} + (\vec{q}_0(s)\Delta\bar{s} \wedge \vec{e}_{1,0}(s))\frac{\Delta\bar{s}}{2} = \vec{0} \quad (4.42)$$

onde  $\vec{M}_0(s) = M_{0,x}(s)\vec{i} + M_{0,y}(s)\vec{j} + M_{0,z}(s)\vec{k}$  é o momento fletor na seção  $s$ .

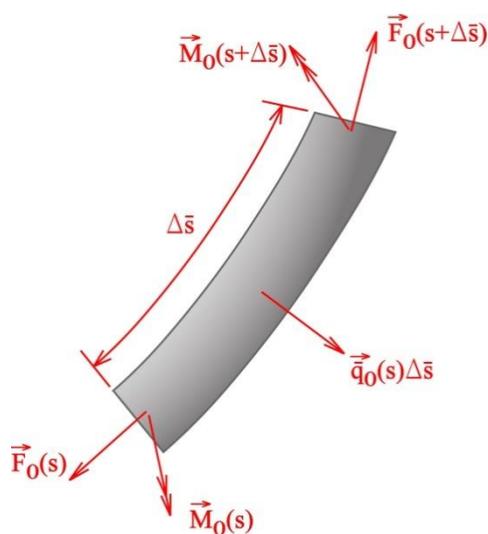


Figura 4.10 – Equilíbrio de Momentos.

Dividindo-se a equação (4.42) por  $\Delta\bar{s}$ , obtém-se

$$\frac{\vec{M}_0(s + \Delta\bar{s}) - \vec{M}_0(s)}{\Delta\bar{s}} + (\vec{F}_0(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s)) + (\vec{q}_0(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s))\frac{\Delta\bar{s}}{2} = \vec{0} \quad (4.43)$$

Tomando-se o limite para  $\Delta\bar{s} \rightarrow 0$ , tem-se

$$\frac{d\vec{M}_0(s)}{d\bar{s}} = \vec{F}_0(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s) \quad (4.44)$$

ou ainda, com auxílio da equação (4.32),

$$\frac{d\vec{M}_0(s)}{ds} = (1 + \varepsilon_0(s))(\vec{F}_0(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s)) \quad (4.45)$$

### 4.5.5 Equações Constitutivas

Admitindo que o cabo seja constituído por um material elástico linear e que trabalhe apenas em seu regime elástico e em estado uniaxial de sollicitação, pode-se escrever, segundo a Lei de Hooke, que

$$\varepsilon_0(s) = \frac{\vec{F}_0(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s)}{EA(s)} \quad (4.46)$$

onde  $\varepsilon_0(s)$  é a deformação axial,  $\vec{F}_0(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s)$  é a componente axial do esforço interno do cabo (tração sollicitante) e  $EA(s)$  é a rigidez axial.

Outra expressão interessante relaciona a mudança na direção do versor tangente com a curvatura do cabo. Esta relação é dada por

$$\frac{d\vec{e}_{1,0}(s)}{ds} = \frac{\vec{M}_0(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s)}{EI(s)} \quad (4.47)$$

onde  $\vec{M}_0(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s)$  é a componente fletora do momento e  $EI(s)$  é a rigidez flexional.

### 4.5.6 A Força Efetiva

A força efetiva desempenha papel fundamental no estudo da mecânica de cabos submersos. “É ela, e não a força sollicitante do ponto de vista estrutural, que determina a configuração de equilíbrio estática e rege a rigidez geométrica do cabo a deslocamentos transversais, esta última a principal condicionante de sua resposta dinâmica.” (PESCE, 1997, p. 3 – 3). A idéia fundamental de se desenvolver a expressão da força efetiva é notar que podemos separar o efeito da pressão hidrostática. Pode-se escrever que

$$\vec{F}_0(s) = \vec{F}_{ef0}(s) + \vec{F}_h(s) \quad (4.48)$$

onde  $\vec{F}_{ef0}(s) = F_{ef,0,x}(s)\vec{i} + F_{ef,0,y}(s)\vec{j} + F_{ef,0,z}(s)\vec{k}$  é a força efetiva e  $\vec{F}_h(s)$  é a “força de tração hidrostática”, dada por (ver equações (4.10), (4.11) e (4.12))

$$\frac{d\vec{F}_h(s)}{ds} = -h_{0,x}\vec{i} - h_{0,y}\vec{j} - h_{0,z}\vec{k} = -\gamma_a A(s) \frac{d}{ds} [(h - z_0(s))\vec{e}_{1,0}(s)] \quad (4.49)$$

A equação (4.49) pode ser integrada, resultando em

$$\vec{F}_h(s) = -\gamma_a A(s)(h - z_0(s))\vec{e}_{1,0}(s) + \gamma_a \int \frac{dA(s)}{ds} [(h - z_0(s))\vec{e}_{1,0}(s)] ds \quad (4.50)$$

Como já mencionado na definição do problema (seção 4.2), o modelo trata de cabos compostos por trechos bem definidos e, se a integração for feita sempre por partes dentro destes trechos, a parcela  $\frac{dA(s)}{ds}$  torna-se nula, de modo que<sup>5</sup>

$$\vec{F}_h(s) = -\gamma_a A(s)(h - z_0(s))\vec{e}_{1,0}(s) \quad (4.51)$$

Note que a força efetiva participa ativamente da equação de momentos, equação (4.45), enquanto a parcela  $\vec{F}_h$  não influi nessa mesma equação por ser paralela a  $\vec{e}_{1,0}(s)$ .

Escrevendo o carregamento efetivo aplicado sobre o cabo como

$$\begin{aligned} \vec{q}_{ef0}(s) &= q_{ef,0,x}(s)\vec{i} + q_{ef,0,y}(s)\vec{j} + q_{ef,0,z}(s)\vec{k} \\ \vec{q}_{ef0}(s) &= -\gamma_{ef}(s)\vec{k} + \\ &\quad + \frac{1}{2}c_{d,t}(s)D(s)\rho_a v_c^2 f(z_0)\vec{n}_{0,c}(s)|f(z_0)\vec{n}_{0,c}(s)| + \\ &\quad + \frac{1}{2}c_{d,a}(s)D(s)\rho_a v_c^2 f(z_0)\vec{a}_{0,c}(s)|f(z_0)\vec{a}_{0,c}(s)| \end{aligned} \quad (4.52)$$

pode-se reescrever a equação de equilíbrio de forças, equação (4.41), como

<sup>5</sup> No caso de um riser com pressão interna, a parcela pressão interna vezes a área interna deve ser considerada também.

$$\frac{d\vec{F}_{ef,0}(s)}{ds} = -\vec{q}_{ef,0}(s) \quad (4.53)$$

Note que, segundo a equação (4.51),  $\vec{F}_h(s)$  tem a direção do versor tangente  $\vec{e}_{1,0}(s)$  e, desta forma, esta parcela não introduz momento fletor. Pode-se reescrever a equação (4.45):

$$\frac{d\vec{M}_0(s)}{ds} = (1 + \varepsilon_0(s)) \left[ (\vec{F}_{ef,0}(s) + \vec{F}_h(s)) \wedge \vec{e}_{1,0}(s) \right] \quad (4.54)$$

Como  $\vec{F}_h(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s) = \vec{0}$ , tem-se então que

$$\frac{d\vec{M}_0(s)}{ds} = (1 + \varepsilon_0(s)) (\vec{F}_{ef,0}(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s)) \quad (4.55)$$

#### 4.5.7 Sistema de Equações

O modelo do problema estático então é um sistema de equações, composto pelas equações (4.36), (4.53), (4.55), (4.47), (4.46) e escrito a seguir por conveniência.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{r}_0(s)}{ds} = (1 + \varepsilon_0(s)) \vec{e}_{1,0}(s) \\ \frac{d\vec{F}_{ef,0}(s)}{ds} = -\vec{q}_{ef,0}(s) \\ \frac{d\vec{M}_0(s)}{ds} = (1 + \varepsilon_0(s)) (\vec{F}_{ef,0}(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s)) \\ \frac{d\vec{e}_{1,0}(s)}{ds} = \frac{\vec{M}_0(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s)}{EI(s)} \\ \varepsilon_0(s) = \frac{\vec{F}_0(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s)}{EA(s)} \end{array} \right. \quad (4.56)$$

Pode-se agora considerar o caso particular proposto na introdução deste capítulo, o de cabo extensível e perfeitamente flexível. Isto será feito na seção seguinte.

## 4.6 O Caso de Rigidez Flexional Nula

### 4.6.1 Motivação

A motivação para o estudo do caso de cabos perfeitamente flexíveis reside em dois fatos. O primeiro deles é que a importância da rigidez flexional no comportamento da mecânica global dos cabos submersos está restrita às regiões do *touchdown point* (TDP), do topo e dos pontos nos quais há mudança de peso submerso, MARTINS (2000). Aliado a este fato, a integração numérica do sistema de equações quando a rigidez flexional é considerada torna-se bastante difícil e computacionalmente muito onerosa, SILVEIRA & MARTINS (2004) e SILVEIRA & MARTINS (2005).

Logo, a análise estática global de cabos perfeitamente flexíveis tem sua importância e possibilita um tratamento inicial bastante satisfatório para a maioria dos casos usuais. Mais ainda, a análise estática sem rigidez flexional sempre pode ser feita, porque a curvatura obtida com a solução de fio flexível é sempre maior e, assim, a favor da segurança.

### 4.6.2 Tratamento da Equação de Momentos

Um cabo perfeitamente flexível não resiste a esforços cortantes ou momentos fletores. Sendo assim, a equação de momentos dada em (4.56) fica reduzida a

$$\vec{F}_{ef,0}(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s) = \vec{0} \quad (4.57)$$

o que representa matematicamente que a força efetiva está alinhada com a direção do versor tangente  $\vec{e}_{1,0}(s)$ , ou seja, é uma força de tração. Logo, pode-se escrever que

$$\begin{cases} F_{ef,0,1}(s) = \vec{F}_{ef,0}(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s) = T_{ef,0}(s) \\ F_{ef,0,2}(s) = \vec{F}_{ef,0}(s) \cdot \vec{e}_{2,0}(s) = 0 \\ F_{ef,0,3}(s) = \vec{F}_{ef,0}(s) \cdot \vec{e}_{3,0}(s) = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

Para evitar sobrecarga na notação, a partir deste momento a dependência explícita das variáveis com a coordenada curvilínea  $s$  não será evidenciada nas equações.

Usando a definição da base local, equação (4.2), pode-se reescrever a equação (4.58) como

$$\begin{cases} F_{ef,0,x} \cos \theta_0 \cos \psi_0 + F_{ef,0,y} \cos \theta_0 \sin \psi_0 + F_{ef,0,z} \sin \theta_0 = T_{ef,0} \\ F_{ef,0,x} \sin \theta_0 \cos \psi_0 + F_{ef,0,y} \sin \theta_0 \sin \psi_0 - F_{ef,0,z} \cos \theta_0 = 0 \\ F_{ef,0,x} \sin \psi_0 - F_{ef,0,y} \cos \psi_0 = 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

Derivando a terceira equação em (4.59) com relação à coordenada curvilínea  $s$ , tem-se

$$\frac{dF_{ef,0,x}}{ds} \sin \psi_0 - \frac{dF_{ef,0,y}}{ds} \cos \psi_0 + \frac{d\psi_0}{ds} (F_{ef,0,x} \cos \psi_0 + F_{ef,0,y} \sin \psi_0) = 0 \quad (4.60)$$

Usando a equação (4.53), chega-se a

$$\frac{d\psi_0}{ds} = \frac{q_{ef,0,x} \sin \psi_0 - q_{ef,0,y} \cos \psi_0}{F_{ef,0,x} \cos \psi_0 + F_{ef,0,y} \sin \psi_0} \quad (4.61)$$

Multiplicando a primeira equação em (4.59) por  $(\cos \theta_0)$ , multiplicando a segunda equação em (4.59) por  $(\sin \theta_0)$  e somando os resultados obtidos, tem-se  $F_{ef,0,x} \cos \psi_0 + F_{ef,0,y} \sin \psi_0 = T_{ef,0} \cos \theta_0$ . Logo, a variação de  $\psi_0$  ao longo de  $s$  é dada por

$$\frac{d\psi_0}{ds} = \frac{q_{ef,0,x} \sin \psi_0 - q_{ef,0,y} \cos \psi_0}{T_{ef,0} \cos \theta_0} \quad (4.62)$$

Derivando a segunda equação em (4.59) com relação à coordenada curvilínea  $s$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{dF_{ef,0,x}}{ds} \sin \theta_0 \cos \psi_0 + \frac{dF_{ef,0,y}}{ds} \sin \theta_0 \sin \psi_0 - \frac{dF_{ef,0,z}}{ds} \cos \theta_0 + \\ & + \frac{d\theta_0}{ds} (F_{ef,0,x} \cos \theta_0 \cos \psi_0 + F_{ef,0,y} \cos \theta_0 \sin \psi_0 + F_{ef,0,z} \sin \theta_0) + \\ & - \sin \theta_0 \frac{d\psi_0}{ds} (F_{ef,0,x} \sin \psi_0 - F_{ef,0,y} \cos \psi_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Usando a equação (4.53) e a primeira e terceira equações em (4.59), chega-se a

$$\frac{d\theta_0}{ds} = \frac{q_{ef,0,x} \operatorname{sen} \theta_0 \cos \psi_0 + q_{ef,0,y} \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \psi_0 - q_{ef,0,z} \cos \theta_0}{T_{ef,0}} \quad (4.64)$$

### 4.6.3 Sistema de Equações

Pode-se agora obter o sistema de equações para o problema de cabo extensível e perfeitamente flexível. Na forma vetorial, a equação (4.56) fica

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{r}_0(s)}{ds} = (1 + \varepsilon_0(s))\vec{e}_{1,0}(s) \\ \frac{d\vec{F}_{ef,0}(s)}{ds} = -\vec{q}_{ef,0}(s) \\ \vec{F}_{ef,0}(s) \wedge \vec{e}_{1,0}(s) = \vec{0} \\ \varepsilon_0(s) = \frac{\vec{F}_0(s) \cdot \vec{e}_{1,0}(s)}{EA(s)} \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Expandindo-se as equações vetoriais utilizando os resultados obtidos nas equações (4.62) e (4.64), obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias em  $s$  para o caso de rigidez axial finita e rigidez flexional nula:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dx_0}{ds} = (1 + \varepsilon_0) \cos \theta_0 \cos \psi_0 \\
 \frac{dy_0}{ds} = (1 + \varepsilon_0) \cos \theta_0 \sin \psi_0 \\
 \frac{dz_0}{ds} = (1 + \varepsilon_0) \sin \theta_0 \\
 \frac{dF_{ef,0,x}}{ds} = -q_{ef,0,x} \\
 \frac{dF_{ef,0,y}}{ds} = -q_{ef,0,y} \\
 \frac{dF_{ef,0,z}}{ds} = -q_{ef,0,z} \\
 \frac{d\psi_0}{ds} = \frac{q_{ef,0,x} \sin \psi_0 - q_{ef,0,y} \cos \psi_0}{T_{ef,0} \cos \theta_0} \\
 \frac{d\theta_0}{ds} = \frac{q_{ef,0,x} \sin \theta_0 \cos \psi_0 + q_{ef,0,y} \sin \theta_0 \sin \psi_0 - q_{ef,0,z} \cos \theta_0}{T_{ef,0}} \\
 \varepsilon_0 = \frac{T}{EA}
 \end{array} \right. \quad (4.66)$$

Note que, na equação da deformação axial a tração considerada é a tração solicitante e não a tração efetiva.

## 4.7 Interação Cabo – Solo

O sistema descrito na equação (4.66) modela a parcela suspensa de um cabo submerso e é suficiente para um *riser* em configuração vertical, por exemplo. Se, no entanto, o objeto de estudo for uma configuração com trechos apoiados sobre o fundo do mar, como a configuração em catenária ou a configuração *lazy-wave*, é necessário um modelo que trate da parcela de cabo apoiada sobre o fundo do mar.

Existem algumas alternativas para a modelagem do trecho do cabo que fica apoiado sobre o fundo do mar, embora ainda não exista um consenso sobre o assunto, DET NORSKE VERITAS (2002). Por exemplo, MARTINS (1984) apresenta um modelo elasto-plástico; já SANTOS (2003) apresenta um modelo de atrito de Coulomb, inclusive com sua implementação numérica. Sabe-se ainda que o cabo pode ficar

enterrado ou mesmo numa espécie de “trincheira”, casos nos quais a modelagem ficaria bem mais complicada.

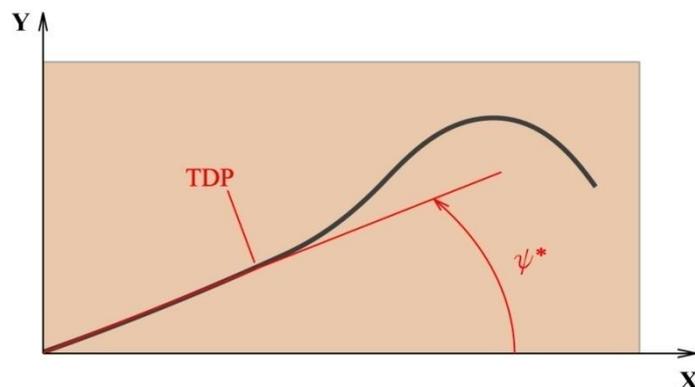
O presente capítulo não irá apresentar modelo de atrito entre o cabo e o fundo do mar. Será considerado que o cabo pode deslizar livremente sobre o solo marítimo plano, de modo que o trecho apoiado irá apresentar curvatura nula em todos os seus pontos. Mesmo assim, é possível escrever um sistema de equações similar ao apresentado na equação (4.66).

Como hipótese apresentada na seção 4.2, o fundo do mar é suposto plano, horizontal e perfeitamente rígido. Sendo assim, o trecho apoiado sobre o solo irá possuir  $z_0(s) = 0$ ,  $F_{ef,0,z}(s) = 0$  e  $\theta_0(s) = 0$  para toda coordenada curvilínea  $s$  tal que  $0 \leq s \leq s_{TDP}$ , onde  $s_{TDP}$  é a coordenada curvilínea do TDP. Obviamente, essas restrições aplicam-se somente aos casos nos quais exista uma porção de cabo com comprimento não-nulo apoiado sobre o fundo do mar (ou seja, não se aplicam aos *risers* verticais, por exemplo).

É fácil ver que, para o caso em questão, as equações que regem a configuração da parcela de cabo apoiada sobre o solo é:

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{ds} = (1 + \varepsilon_0) \cos \psi_0 \\ \frac{dy_0}{ds} = (1 + \varepsilon_0) \sin \psi_0 \\ \varepsilon_0 = \frac{T}{EA} \end{cases} \quad (4.67)$$

Do sistema apresentado em (4.67), bastante simples, resulta que o cabo está posicionado ao longo de uma reta com ângulo  $\psi^*$  constante, conforme pode ser observado na Figura 4.11, por exemplo.



**Figura 4.11 – Exemplo de projeção horizontal de configuração de cabo submerso apoiado no solo marítimo, caso sem atrito.**

Isto decorre do fato que, no presente modelo, não são considerados os esforços hidrodinâmicos na parcela de cabo apoiada sobre o fundo do mar.

## 4.8 Condições de Contorno

Aos sistemas (4.66) e (4.67) devem ser atribuídas condições de contorno para que a solução seja única e corresponda ao modelo físico apresentado. Cada um dos sistemas possui nove equações. Entretanto, para o caso de um cabo perfeitamente flexível, os ângulos  $\theta_0(s)$  e  $\psi_0(s)$  podem ser escritos em função das componentes da força efetiva:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \arctan\left(\frac{F_{ef,0,y}}{F_{ef,0,x}}\right) \\ \theta_0 &= \arctan\left(\frac{F_{ef,0,z}}{\sqrt{F_{ef,0,x}^2 + F_{ef,0,y}^2}}\right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Além disso, a deformação axial  $\varepsilon_0(s)$  pode ser escrita em função das componentes da força solicitante e dos ângulos  $\theta_0(s)$  e  $\psi_0(s)$ :

$$\varepsilon_0 = \frac{F_{0,x} \cos \theta_0 \cos \psi_0 + F_{0,y} \cos \theta_0 \sin \psi_0 + F_{0,z} \sin \theta_0}{EA} \quad (4.69)$$

As condições de contorno apresentam certas diferenças caso o cabo possua ou não um trecho apoiado sobre o solo marítimo. Sendo assim, nas seções seguintes serão apresentadas separadamente as condições de contorno para (i) o caso de um cabo em configuração vertical, isto é, sem qualquer parcela apoiada sobre o fundo do mar e (ii) o caso de cabo que possua uma parcela apoiada sobre o fundo do mar, como nas configurações em catenária ou *lazy-wave*.

### 4.8.1 Cabo Totalmente Suspenso

Para um cabo em configuração vertical, apenas o sistema apresentado em (4.66) é resolvido. Com base nas equações (4.68) e (4.69), existem seis incógnitas:  $x_0(s)$ ,  $y_0(s)$ ,  $z_0(s)$ ,  $F_{ef,0,x}(s)$ ,  $F_{ef,0,y}(s)$  e  $F_{ef,0,z}(s)$ . Logo, são necessárias seis condições de contorno.

Estas condições de contorno dizem respeito aos pontos de conexão, do cabo com a unidade flutuante e do cabo com o fundo do mar. Segundo apresentado na definição do problema estático, seção 4.2, o ponto de suspensão do cabo é um dado do problema e o ponto de ancoragem do cabo é considerado a origem do sistema coordenado cartesiano global. Logo, as condições de contorno são

$$\begin{aligned}
 x_0(l_T) &= X_T \\
 y_0(l_T) &= Y_T \\
 z_0(l_T) &= Z_T \\
 x_0(0) &= 0 \\
 y_0(0) &= 0 \\
 z_0(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.70}$$

Note que este é um problema de condições de contorno em dois pontos distintos.

### 4.8.2 Cabo Parcialmente Suspenso

Para um cabo que possua uma parcela de seu comprimento apoiada sobre o solo marítimo, os sistemas expressos nas equações (4.66) e (4.67) devem ser utilizados da

seguinte forma: o sistema (4.66) deve ser utilizado em  $s_{TDP} \leq s \leq l_T$ ; o sistema (4.67) deve ser utilizado em  $0 \leq s < s_{TDP}$ .

Para a parcela suspensa, descrita pela equação (4.66), as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} x_0(l_T) &= X_T \\ y_0(l_T) &= Y_T \\ z_0(l_T) &= Z_T \\ z_0(s_{TDP}) &= 0 \\ F_{ef,0,z}(s_{TDP}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Note que as condições  $z(s_{TDP})$  e  $F_{ef,0,z}(s_{TDP})$  valem porque, por hipótese, o fundo do mar é plano, horizontal e infinitamente rígido.

Para a parcela apoiada, descrita pela equação (4.67), as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} x_0(0) &= 0 \\ y_0(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.72}$$

No total, as equações (4.71) e (4.72) apresentam sete condições de contorno, o que parece inconsistente com as aparentes seis incógnitas do problema,  $x_0(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$ ,  $F_{ef,0,x}(s)$ ,  $F_{ef,0,y}(s)$  e  $F_{ef,0,z}(s)$ . Contudo, a posição do TDP,  $s_{TDP}$  é desconhecida *a priori* e, portanto, é mais uma incógnita do problema. Desta forma, o problema de cabos com TDP possui sete incógnitas e sete condições de contorno a serem satisfeitas.

## 4.9 Solução Numérica

Nesta seção serão apresentados os métodos de solução numérica do problema estático para o caso de um cabo totalmente suspenso e para o caso de um cabo parcialmente suspenso.

Para ambos os casos, o método utilizado para realizar a integração numérica dos sistemas de equações diferenciais de primeira ordem é um método tipo *Runge-Kutta* 3-4 com passo adaptativo, sendo o tamanho do passo inversamente proporcional à curvatura local. Este método foi desenvolvido por MARTINS (1998) para uso em seu código *Poliflex*.

Note que as condições de contorno dadas pela equação (4.70) ou pelas equações (4.71) e (4.72) impõem um problema de condições de contorno em dois pontos (conhecido como *two-point boundary-value problem*). A princípio pode-se, portanto, partir a integração do sistema em  $s=0$  ou em  $s=l_T$  e utilizar, por exemplo, um método de estimativa (*shooting method*) para resolver o problema, KELLER (1968).

#### 4.9.1 Cabo Totalmente Suspenso

Aqui será apresentado o método utilizado para a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (4.66) com as condições de contorno (4.70).

A integração numérica irá começar do ponto  $s=l_T$  e, neste ponto, existem apenas três condições de contorno:  $x_0(l_T) = X_T$ ,  $y_0(l_T) = Y_T$  e  $z_0(l_T) = Z_T$ . Utilizando a metodologia do *shooting method*, KELLER (1968), estimam-se ou arbitram-se valores para  $F_{ef,0,x}(l_T)$ ,  $F_{ef,0,y}(l_T)$  e  $F_{ef,0,z}(l_T)$ . Com isso, através das equações (4.68) e (4.69), estimam-se valores para  $\theta_0(l_T)$ ,  $\psi_0(l_T)$  e  $\varepsilon_0(l_T)$ . De posse desses valores iniciais, faz-se a integração numérica de (4.66) até  $s=0$ .

A integração visa atingir os valores  $x_0(0) = 0$ ,  $y_0(0) = 0$  e  $z_0(0) = 0$ . Obviamente, isso provavelmente não irá ocorrer na primeira tentativa, ou seja, os valores arbitrados para  $F_{ef,0,x}(l_T)$ ,  $F_{ef,0,y}(l_T)$  e  $F_{ef,0,z}(l_T)$  provavelmente não serão os valores corretos.

É possível, entretanto, realizar um estudo qualitativo da solução, ou seja, conhecer qual o comportamento dos valores de  $x_0(0)$ ,  $y_0(0)$  e  $z_0(0)$  com relação a uma mudança dos valores de  $F_{ef,0,x}(l_T)$ ,  $F_{ef,0,y}(l_T)$  e  $F_{ef,0,z}(l_T)$ .

Com esta informação, é possível construir um algoritmo de busca alterando-se sucessivamente os valores de  $F_{ef,0,x}(l_T)$ ,  $F_{ef,0,y}(l_T)$  e  $F_{ef,0,z}(l_T)$  até que as condições de contorno em  $s=0$  sejam obtidas. Este algoritmo é feito através de laços concatenados segundo ilustra a Tabela 4-1.

**Tabela 4-1 – Esquema do algoritmo de solução para o problema estático de cabo totalmente suspenso.**

<p><b>Laço 1:</b> Encontrar <math>F_{ef,0,x}(l_T)</math> tal que <math>x_0(0) = 0</math></p> <p><b>Laço 2:</b> Encontrar <math>F_{ef,0,y}(l_T)</math> tal que <math>y_0(0) = 0</math>. Dentro deste laço, <math>F_{ef,0,x}(l_T)</math> é constante.</p> <p><b>Laço 3:</b> Encontrar <math>F_{ef,0,z}(l_T)</math> tal que <math>z_0(0) = 0</math>. Dentro deste laço, <math>F_{ef,0,x}(l_T)</math> e <math>F_{ef,0,y}(l_T)</math> são constantes.</p> <p>Integração numérica do sistema (4.66).</p>
--

### 4.9.2 Cabo Parcialmente Suspenso

Aqui será apresentado o método utilizado para a solução dos sistemas de equações diferenciais ordinárias (4.66) e (4.67) com as condições de contorno (4.71) e (4.72).

A integração numérica irá começar do ponto  $s = l_T$  e, neste ponto, existem apenas três condições de contorno:  $x_0(l_T) = X_T$ ,  $y_0(l_T) = Y_T$  e  $z_0(l_T) = Z_T$ . Utilizando a metodologia do *shooting method*, KELLER (1968), estimam-se ou arbitram-se valores para  $F_{ef,0,x}(l_T)$ ,  $F_{ef,0,y}(l_T)$  e  $F_{ef,0,z}(l_T)$ . Com isso, através das equações (4.68) e (4.69), estimam-se valores para  $\theta_0(l_T)$ ,  $\psi_0(l_T)$  e  $\varepsilon_0(l_T)$ . De posse desses valores iniciais, faz-se a integração numérica de (4.66) até que  $F_{ef,0,z}(0) = 0$ , obtendo também um valor para  $s_{TDP}$ . Utilizando os valores neste ponto, faz-se agora a integração de (4.67) até  $s = 0$ .

A integração visa atingir os valores  $x_0(0) = 0$ ,  $y_0(0) = 0$  e  $z_0(0) = 0$ . Obviamente, isso provavelmente não irá ocorrer na primeira tentativa, ou seja, os valores

arbitrados para  $F_{ef,0,x}(l_T)$ ,  $F_{ef,0,y}(l_T)$  e  $F_{ef,0,z}(l_T)$  provavelmente não serão os valores corretos. O valor obtido para  $s_{TDP}$  também provavelmente estará incorreto.

É possível, entretanto, realizar um estudo qualitativo da solução, ou seja, conhecer qual o comportamento dos valores de  $x_0(0)$ ,  $y_0(0)$  e  $z_0(0)$  com relação a uma mudança dos valores de  $F_{ef,0,x}(l_T)$ ,  $F_{ef,0,y}(l_T)$  e  $F_{ef,0,z}(l_T)$ .

Com esta informação, é possível construir um algoritmo de busca alterando-se sucessivamente os valores de  $F_{ef,0,x}(l_T)$ ,  $F_{ef,0,y}(l_T)$  e  $F_{ef,0,z}(l_T)$  até que as condições de contorno em  $s = 0$  sejam obtidas e a posição do TDP seja obtida. Este algoritmo é feito através de laços concatenados segundo ilustra a Tabela 4-2.

**Tabela 4-2 – Esquema do algoritmo de solução para o problema estático de cabo parcialmente suspenso.**

**Laço 1:** Encontrar  $F_{ef,0,x}(l_T)$  tal que  $x_0(0) = 0$

**Laço 2:** Encontrar  $F_{ef,0,y}(l_T)$  tal que  $y_0(0) = 0$ .  
Dentro deste laço,  $F_{ef,0,x}(l_T)$  é constante.

**Laço 3:** Encontrar  $F_{ef,0,z}(l_T)$  tal que  $z_0(0) = 0$ .  
Dentro deste laço,  $F_{ef,0,x}(l_T)$  e  $F_{ef,0,y}(l_T)$  são constantes.

Integração numérica do sistema (4.66) até que  $F_{ef,0,z}(s^*)=0$ , onde  $s^*$  é a posição estimada do TDP.

Integração numérica do sistema (4.67) até que  $s = 0$ .

## CAPÍTULO 5    MODELO DINÂMICO

### 5.1 Introdução

A análise dinâmica consiste em se determinar os deslocamentos – lineares e angulares – e os esforços resultantes da imposição de esforços variantes no tempo a um dado cabo submerso cuja configuração de equilíbrio estático é conhecida.

A importância da análise dinâmica é clara. Em primeiro lugar, ela possibilita um estudo de extremos de esforços e de curvaturas aos quais o cabo é submetido. Também possibilita um estudo de extremos de deslocamentos e variações de ângulo no topo, fatores importantes para análise de colisões ou projeto de restritores de curvatura (*bend stiffeners*), por exemplo. Por fim, possibilita uma análise de fadiga com base nas amplitudes de tensão dinâmica.

O modelo dinâmico proposto neste trabalho possui algumas restrições que serão abordadas a seguir.

### 5.2 Hipóteses e Restrições

#### 5.2.1 Rigidezes

O cabo submerso, da mesma forma como apresentado no modelo estático, equação (4.66), possui rigidez axial finita, rigidez flexional nula e rigidez torcional igualmente nula. O ponto crítico aqui é saber que existem condições nas quais a rigidez flexional passa a ter influência significativa no comportamento global da resposta oscilatória, por exemplo, em modos muito altos de vibrar, com comprimento

de onda vibratória da ordem da escala do comprimento de flexão  $\lambda_f$  tal como em PESCE & MARTINS (2005):

$$\lambda_f(s) = \sqrt{\frac{EI(s)}{T_{ef}(s)}} \quad (5.1)$$

A rigidez geométrica inicial do modelo dinâmico será calculada com base na configuração resultante do problema estático.

### 5.2.2 Esforços Considerados

Os esforços externos aplicados ao cabo submerso e considerados neste modelo são os esforços de inércia e os esforços hidrodinâmicos, este último resultando em inércia adicional, arrasto e sustentação. Outro efeito que o modelo consegue representar é o de movimento imposto ao topo do cabo submerso. No entanto, este efeito não é considerado simultaneamente ao esforço de sustentação pelo seguinte motivo.

Os modelos fenomenológicos apresentados no Capítulo 3 acoplam o oscilador fluido com o oscilador elástico assumindo que apenas um grau de liberdade – o movimento na direção perpendicular ao escoamento – existe. O acoplamento se dá pela velocidade nesta direção, a qual depende do esforço aplicado pelo oscilador fluido e pulsa na frequência de *Strouhal*. A adição de um movimento imposto altera completamente o campo de velocidades do cabo submerso e iria realimentar o oscilador fluido com componentes diferentes das quais o modelo fenomenológico prevê. Como já reproduzido aqui, segundo SARPKEYA (2004), “*VIV is not a small perturbation superimposed on a mean steady motion. VIV is an inherently nonlinear, self-governed or self-regulated, multi-degree-of-freedom phenomenon*”.

O estudo de como separar o movimento gerado por VIV via modelo fenomenológico do movimento resultante da imposição de movimento ao topo do cabo submerso pode ser parte de outro trabalho. Filtros numéricos, por exemplo, podem ser uma alternativa quando o movimento imposto ao topo possui frequências substancialmente menores que a frequência de *Strouhal*. Mesmo assim, um estudo cuidadoso precisa ser conduzido.

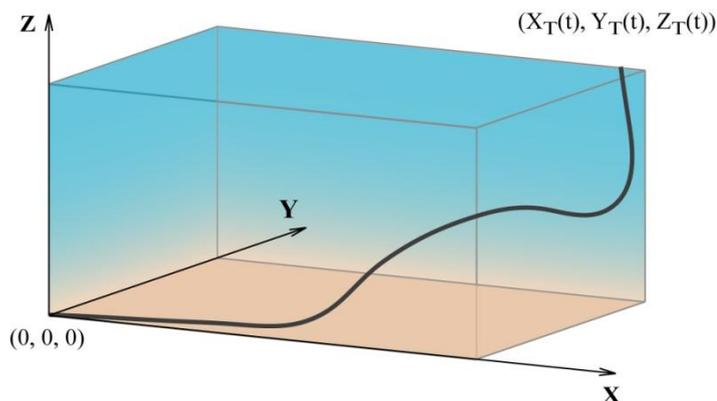
### 5.2.3 Interação com o Solo Marítimo

Apenas a parcela suspensa do cabo será considerada no modelo dinâmico: o cabo será considerado perfeitamente rotulado no topo e no ponto de toque (TDP – *touchdown point*) e, desta forma, não será tratada a interação entre o cabo e o solo. Esta simplificação do problema é motivada pelo objetivo da tese: a análise dinâmica global não deverá ser influenciada pela interação entre o cabo submerso e o fundo do mar se a profundidade for bem maior que o diâmetro do mesmo. Este modelo não serve, no entanto, para estudar as curvaturas dinâmicas nas vizinhanças do TDP e do topo.

## 5.3 Definição do Problema Dinâmico

Considere um cabo submerso preso em uma das extremidades numa unidade flutuante e, na outra extremidade, preso ao fundo do mar (aqui suposto plano, horizontal e perfeitamente rígido) através de uma ligação com a Árvore de Natal, por exemplo. O cabo em questão pode ser um *riser* rígido ou um umbilical e pode inclusive apresentar propriedades mecânicas que variem ao longo de seu comprimento, como é usual nos casos de configurações em *lazy-wave*. A Figura 5.1 ilustra um exemplo de um cabo submerso em configuração *lazy-wave*.

Serão tratados aqui, entretanto, apenas os casos em que há trechos distintos de cabo com propriedades bem definidas, ou seja, as propriedades do cabo são constantes por trechos: dentro de um mesmo trecho não há mudança de qualquer uma das propriedades.



**Figura 5.1 – Esquema tridimensional de cabo submerso**

O problema dinâmico pode ser definido como segue. Dada a configuração estática tridimensional de um cabo submerso e dados os esforços dinâmicos aplicados ao mesmo, devem-se obter as séries temporais dos deslocamentos aos quais o cabo é submetido.

Além dos dados do problema estático, é necessário conhecer qual o movimento da unidade flutuante à qual o cabo está conectado,  $(X_T(t), Y_T(t), Z_T(t))$ . É necessário também fornecer a força hidrodinâmica aplicada ao cabo, bem como o coeficiente de massa adicional nas direções normal,  $c_{m,n}(s)$  e axial ao cabo,  $c_{m,a}(s)$ .

Para que os esforços sejam modelados, porém, é necessário um sistema de coordenadas claramente definido. Isto será feito na seção seguinte.

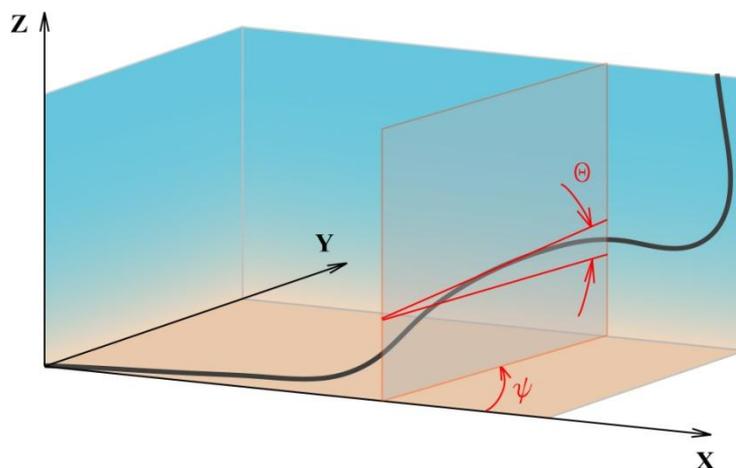
## 5.4 Sistema de Coordenadas

O sistema global de coordenadas da modelagem aqui desenvolvida é um sistema cartesiano com origem  $O$  na extremidade do cabo que está presa ao fundo do mar e com os eixos direcionados de tal modo que  $Oz$  é vertical e aponta para a superfície e  $Ox$  e  $Oy$  são paralelos ao solo (este último, por hipótese, plano e horizontal). Além deste sistema global de coordenadas, pode-se definir também a coordenada curvilínea  $s$ , com origem no mesmo ponto  $O$  e orientação positiva indo-se da

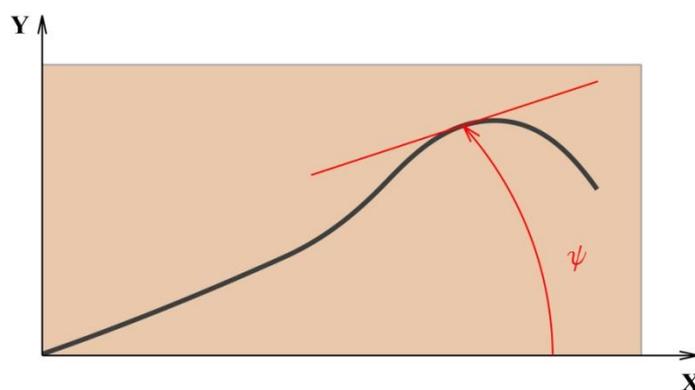
origem à extremidade suspensa. Assim, as coordenadas cartesianas globais de uma dada seção do cabo são  $x(s,t)$ ,  $y(s,t)$  e  $z(s,t)$  ou, na forma vetorial,

$$\vec{r}(s,t) = x(s,t)\vec{i} + y(s,t)\vec{j} + z(s,t)\vec{k} \quad (5.2)$$

Os ângulos principais são definidos a seguir. A declinação  $\theta(s,t)$  é o ângulo entre o plano horizontal e a reta tangente ao cabo no ponto de coordenada  $s$  no instante  $t$  (Figura 5.2). O azimute  $\psi(s,t)$  é o ângulo entre o eixo  $Ox$  e a projeção da reta tangente ao cabo no plano  $Oxy$  no ponto de coordenada  $s$  no instante  $t$  (Figura 4.3).



**Figura 5.2 – Ângulo  $\theta(s,t)$ .**



**Figura 5.3 – Ângulo  $\psi(s,t)$ .**

Estes ângulos permitem a construção de uma base local de versores que, no presente trabalho, podem depender ainda da direção da velocidade relativa entre a corrente marítima e o cabo submerso.

#### 5.4.1 Base Local, Velocidade de Corrente Não-Nula

Dada uma seção do cabo submerso na coordenada curvilínea  $s$ , a cota global de profundidade desta seção é  $z(s)$ . Se a velocidade de corrente marítima nesta cota for não-nula, ou seja,  $\vec{v}_c(z(s,t)) \neq \vec{0}$ , a base local será dada em função de  $\vec{v}_c(z(s,t))$  da seguinte forma:

$$\left. \begin{cases} \vec{e}_{AXI}(s,t) = \cos \theta(s,t) \cos \psi(s,t) \vec{i} + \cos \theta(s,t) \sin \psi(s,t) \vec{j} + \sin \theta(s,t) \vec{k} \\ \vec{e}_{TRA}(s,t) = \frac{\vec{e}_{AXI}(s,t) \times \vec{v}_c(z(s,t))}{\|\vec{e}_{AXI}(s,t) \times \vec{v}_c(z(s,t))\|} \\ \vec{e}_{INL}(s,t) = \vec{e}_{TRA}(s,t) \times \vec{e}_{AXI}(s,t) \end{cases} \right\} \quad (5.3)$$

onde  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  é a base ortonormal do sistema global  $Oxyz$  e  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  apontam, respectivamente, nas direções dos eixos  $Ox, Oy$  e  $Oz$ . Esta escolha, como será visto adiante, é apropriada no momento do cálculo dos esforços hidrodinâmicos.

#### 5.4.2 Base Local, Velocidade de Corrente Nula ou Paralela à Direção Axial ao Cabo

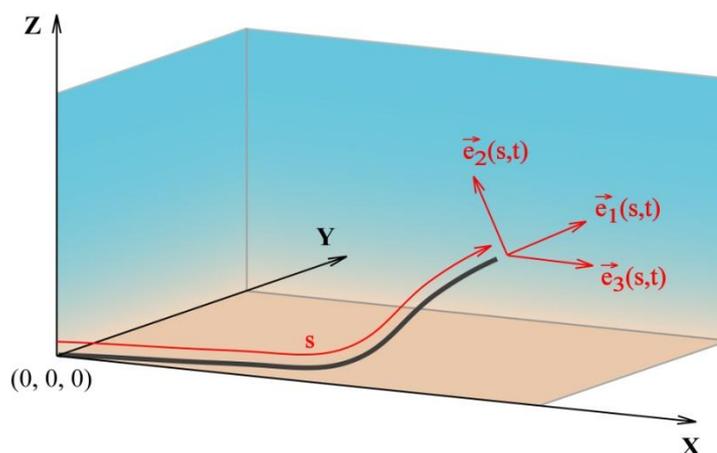
Dada uma seção do cabo submerso na coordenada curvilínea  $s$ , a cota global de profundidade desta seção é  $z(s)$ . Se a velocidade de corrente marítima nesta cota for nula, ou seja,  $\vec{v}_c(z(s,t)) = \vec{0}$ , segundo a equação (5.3) haveria uma indefinição na direção  $\vec{e}_{TRA}(s,t)$ . O mesmo ocorre no caso de  $\vec{e}_{AXI}(s,t) \wedge \vec{v}_c(z(s,t)) = \vec{0}$ , ou seja, quando a velocidade de corrente é paralela à direção axial do cabo.

Desta forma, optou-se por utilizar uma base local similar à que foi usada no modelo estático, equação (4.2), e que escrita para o modelo dinâmico fica

$$\left. \begin{cases} \vec{e}_{AXI}(s,t) = \cos \theta(s,t) \cos \psi(s,t) \vec{i} + \cos \theta(s,t) \sin \psi(s,t) \vec{j} + \sin \theta(s,t) \vec{k} \\ \vec{e}_{TRA}(s,t) = -\sin \theta(s,t) \cos \psi(s,t) \vec{i} - \sin \theta(s,t) \sin \psi(s,t) \vec{j} + \cos \theta(s,t) \vec{k} \\ \vec{e}_{INL}(s,t) = \sin \psi(s,t) \vec{i} - \cos \psi(s,t) \vec{j} \end{cases} \right\} \quad (5.4)$$

onde  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  é a base ortonormal do sistema global  $Oxyz$  e  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  apontam, respectivamente, nas direções dos eixos  $Ox, Oy$  e  $Oz$ . Note que o versor axial é o mesmo da equação (5.3) e, em algumas situações, pode ser referenciado por  $\vec{e}_1(s,t)$ .

A Figura 5.4 ilustra o sistema de referência global e uma possível base local.



**Figura 5.4 – Sistemas de referência.**

## 5.5 Esforços Aplicados

O modelo dinâmico no presente trabalho considera que os esforços de inércia e os esforços hidrodinâmicos estão aplicados ao cabo submerso. Neste último grupo, estão inclusos os efeitos de massa adicional, arrasto e sustentação.

A massa adicional e o arrasto hidrodinâmico são modelados através da clássica fórmula de *Morison*, ver FALTINSEN (1990). A sustentação é considerada através dos modelos fenomenológicos apresentados no Capítulo 3, equações (3.18), (3.23), (3.30) ou (3.31).

Detalhes sobre estes esforços são delineados a seguir. Antes, porém, as variáveis utilizadas no modelo dinâmico serão apresentadas.

### 5.5.1 Inércia

Sendo o comprimento do cabo muito maior que seu diâmetro, despreza-se aqui a inércia rotacional, simplificação esta usual na teoria de vigas esbeltas. Como dito por MARTINS (2000), segundo o Princípio de D'Alembert, o efeito da inércia pode ser visto como um esforço de magnitude igual ao produto da massa do cabo pela aceleração do mesmo e que atua na mesma direção, mas em sentido oposto ao da aceleração. Assim, a força de inércia por unidade de comprimento é

$$\vec{F}_i(s,t) = -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \vec{r}(s,t)}{\partial t^2} \quad (5.5)$$

### 5.5.2 Inércia Adicional

Ao acelerar quando imerso em um fluido de densidade  $\rho$ , o cabo submerso acelera também certa massa de fluido. Esse efeito hidrodinâmico equivale a um acréscimo na massa do cabo submerso e é conhecido como massa adicional. Como outros efeitos hidrodinâmicos, a massa adicional depende da forma do corpo e pode ser pensada como a soma de uma força na direção axial ao cabo submerso e outra força na direção normal a ele.

Logo, as componentes da força de inércia por unidade de comprimento nas direções axial e normal podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ia,a}(s,t) &= -c_{m,a}(s)\rho S \left( \frac{\partial^2 \vec{r}(s,t)}{\partial t^2} \cdot \vec{e}_{AXI}(s,t) \right) \vec{e}_{AXI}(s,t) \\ \vec{F}_{ia,n}(s,t) &= -c_{m,n}(s)\rho S \left[ \frac{\partial^2 \vec{r}(s,t)}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 \vec{r}(s,t)}{\partial t^2} \cdot \vec{e}_{AXI}(s,t) \right) \vec{e}_{AXI}(s,t) \right] \\ \vec{F}_{ia}(s,t) &= \vec{F}_{ia,a}(s,t) + \vec{F}_{ia,n}(s,t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde  $S$  é a área da seção transversal do cabo.

### 5.5.3 Arrasto e Sustentação Hidrodinâmicos

Em cada seção do cabo, e a cada instante de tempo, as forças de arrasto e sustentação dependem do resultado de  $\vec{e}_{AXI}(s,t) \wedge \vec{v}_c(z(s,t))$ . Quando esta expressão é nula, não existe o motor que impulsiona o modelo fenomenológico e, assim, não existe força de sustentação, apenas força de arrasto.

De qualquer modo, independente do resultado de  $\vec{e}_{AXI}(s,t) \wedge \vec{v}_c(z(s,t))$ , como expresso nas equações (5.3) e (5.4), é possível calcular a base local em uma dada seção do cabo submerso,  $(\vec{e}_{AXI}(s,t); \vec{e}_{TRA}(s,t); \vec{e}_{INL}(s,t))$ .

Pode ser calculada então a velocidade relativa entre a corrente marítima e o cabo submerso, bem como suas projeções nas três direções da base local:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{rel}(s,t) &= \vec{v}_c(z(s,t)) - \frac{\partial \vec{r}(s,t)}{\partial t} \\ \vec{v}_{rel,AXI}(s,t) &= (\vec{v}_{rel}(s,t) \cdot \vec{e}_{AXI}(s,t)) \vec{e}_{AXI}(s,t) \\ \vec{v}_{rel,TRA}(s,t) &= (\vec{v}_{rel}(s,t) \cdot \vec{e}_{TRA}(s,t)) \vec{e}_{TRA}(s,t) \\ \vec{v}_{rel,INL}(s,t) &= (\vec{v}_{rel}(s,t) \cdot \vec{e}_{INL}(s,t)) \vec{e}_{INL}(s,t)\end{aligned}\tag{5.7}$$

É, ainda, calculada a velocidade relativa normal ao cabo, que é composta pelas parcelas nas direções  $\vec{e}_{TRA}(s,t)$  e  $\vec{e}_{INL}(s,t)$ , mas que pode ser escrita como

$$\vec{v}_{rel,n}(s,t) = \vec{v}_{rel}(s,t) - \vec{v}_{rel,AXI}(s,t)\tag{5.8}$$

Desta forma, a definição dos esforços de arrasto  $\vec{F}_d(s,t)$  e sustentação  $\vec{F}_l(s,t)$  hidrodinâmicos fica dada como segue. Na direção de  $\vec{e}_{AXI}(s,t)$ , só pode haver força de arrasto:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{d,AXI}(s,t) &= \frac{1}{2} \rho D(s) c_{d,a}(s) \|\vec{v}_{rel,AXI}(s,t)\| \vec{v}_{rel,AXI}(s,t) \\ \vec{F}_{l,AXI}(s,t) &= \vec{0}\end{aligned}\tag{5.9}$$

Na direção de  $\vec{e}_{INL}(s,t)$  também só pode haver força de arrasto

$$\begin{aligned}\vec{F}_{d,INL}(s,t) &= \frac{1}{2} \rho D(s) c_{d,n}(s) \|\vec{v}_{rel,n}(s,t)\| \vec{v}_{rel,INL}(s,t) \\ \vec{F}_{l,INL}(s,t) &= \vec{0}\end{aligned}\quad (5.10)$$

Já na direção de  $\vec{e}_{TRA}(s,t)$ , podem acontecer duas situações. Na primeira situação, a expressão  $\vec{e}_{AXI}(s,t) \wedge \vec{v}_c(z(s,t))$  é nula e, assim, não existe força de sustentação:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{d,TRA}(s,t) &= \frac{1}{2} \rho D(s) c_{d,n}(s) \|\vec{v}_{rel,n}(s,t)\| \vec{v}_{rel,TRA}(s,t) \\ \vec{F}_{l,TRA}(s,t) &= \vec{0}\end{aligned}\quad (5.11)$$

Na segunda situação, a expressão  $\vec{e}_{AXI}(s,t) \wedge \vec{v}_c(z(s,t))$  não é nula. Desta forma, não existe arrasto, mas sim sustentação que tem formulação de acordo com o modelo fenomenológico empregado.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{d,TRA}(s,t) &= \vec{0} \\ \vec{F}_{l,TRA}(s,t) &= \begin{cases} a_4 \rho D(s) U(s,t) [\dot{w}(s,t) - \dot{y}(s,t)] \vec{e}_{TRA}, & \text{Iwan \& Blevins} \\ \frac{1}{2} \alpha_4 \rho D(s) U(s,t) [\dot{w}(s,t) - \dot{y}(s,t)] \vec{e}_{TRA}, & \text{Parra \& Aranha} \\ [(C_A A(s,t) + C_V V(s,t)) e^{i\omega t} + (*)] \vec{e}_{TRA}, & \text{Aranha} \end{cases}\end{aligned}\quad (5.12)$$

Na equação (5.12),  $\dot{w}(s,t)$  é a velocidade do oscilador fluido dos modelos fenomenológicos de IWAN & BLEVINS (1974) ou PARRA & ARANHA (1996), mantendo-se notação conforme o Capítulo 3. Já a velocidade do fluxo a ser considerada no modelo fenomenológico  $U(s,t)$  e a velocidade do cabo submerso na direção transversal a este fluxo são calculadas como

$$\begin{aligned}U(s,t) &= \vec{v}_c(z(s,t)) \cdot \vec{e}_{INL}(s,t) \\ \dot{y}(s,t) &= \frac{\partial \vec{r}(s,t)}{\partial t} \cdot \vec{e}_{TRA}(s,t)\end{aligned}\quad (5.13)$$

No caso do modelo de ARANHA (2004),  $A(s,t)$  é a variável do oscilador fluido, também mantendo notação conforme o Capítulo 3. Já a velocidade complexa  $V(s,t)$  é calculada com o auxílio das equações (3.28) e (3.29), sendo que, de modo similar ao cálculo de  $\dot{y}(s,t)$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned}
y(s,t) &= [\bar{r}(s,t) - \bar{\bar{r}}(s,t)] \cdot \bar{e}_{TRA}(s,t) \\
\bar{\bar{r}}(s,t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \bar{r}(s,t) dt
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Na equação (5.14), a parcela  $\bar{\bar{r}}(s,t)$  é o valor médio, num período  $T$ , da posição de uma dada seção do cabo submerso. Isto deve ser feito porque as equações dos modelos fenomenológicos enxergam  $y(s,t)$  oscilando em torno da sua posição de equilíbrio inicial. Como será visto na parte de resultados, é comum ocorrer, quando levamos em conta um cabo submerso longo e “flexível”, da posição média ser alterada com o decorrer da simulação. Por isto é essencial realizar esta correção.

Assim, pode-se enfim escrever que as forças hidrodinâmicas de arrasto e sustentação são dadas por

$$\begin{aligned}
\bar{F}_d(s,t) &= \bar{F}_{d,AXI}(s,t) + \bar{F}_{d,TRA}(s,t) + \bar{F}_{d,INL}(s,t) \\
\bar{F}_l(s,t) &= \bar{F}_{l,AXI}(s,t) + \bar{F}_{l,TRA}(s,t) + \bar{F}_{l,INL}(s,t)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde as componentes de  $\bar{F}_d(s,t)$  e  $\bar{F}_l(s,t)$  são expressas nas equações (5.9), (5.10) e (5.11) ou (5.12).

#### 5.5.4 Esforços Totais

O esforço total, por unidade de comprimento, atuante sobre o cabo é escrito como  $\bar{q}(s,t)$  nada mais é que a soma dos esforços apresentados nas equações (5.5), (5.6) e (5.15), ou seja,

$$\bar{q}(s,t) = \bar{F}_i(s,t) + \bar{F}_{ia}(s,t) + \bar{F}_d(s,t) + \bar{F}_l(s,t) \tag{5.16}$$

#### 5.5.5 Condições de Contorno

Conforme exposto na seção 5.2.2, no âmbito da solução do problema de um cabo submerso sob efeitos de VIV, o movimento de topo não será considerado. Também conforme exposto na seção 5.2.3, o TDP será preso ao fundo do mar através de uma articulação. Deste modo, as condições de contorno são, simplesmente,

$$\begin{aligned}\vec{r}(s_{TDP}, t) &= \vec{0} \\ \vec{r}(l_T, t) &= \vec{0}\end{aligned}\tag{5.17}$$

onde  $s_{TDP}$  é a coordenada curvilínea do TDP conforme solução do problema estático (ver Capítulo 4) e  $l_T$  é o comprimento total do cabo e corresponde à coordenada curvilínea do topo.

O trabalho de SANTOS (2003) também considera o TDP articulado, mas leva em conta o trecho apoiado sobre o solo marítimo através de uma rigidez adicional. Contudo, nos casos usuais de catenária, esta rigidez é bem maior que a rigidez geométrica de modo que, em geral, ela possui pouca influência na análise global.

## 5.6 Equações do Problema Dinâmico

Serão tratadas aqui as equações básicas do modelo dinâmico: compatibilidade de deformação, compatibilidade geométrica, equilíbrio de forças e constitutiva.

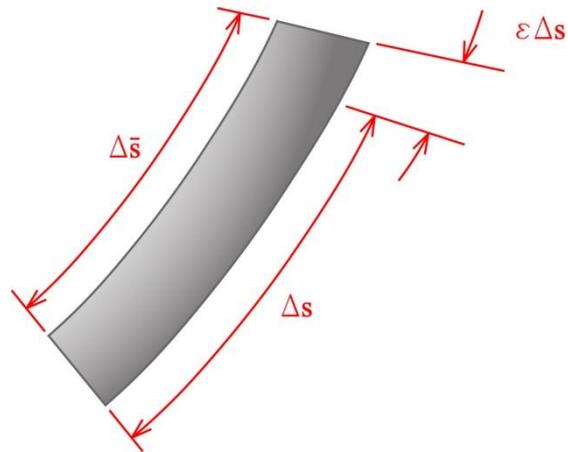
### 5.6.1 Equação de Compatibilidade de Deformação

Considere um elemento de cabo de comprimentos  $\Delta s$  e  $\Delta \bar{s}$  nas suas configurações indeformada e deformada, respectivamente. Seja  $\varepsilon(s, t)$  a deformação axial do elemento num dado instante de tempo. Conforme ilustrado na Figura 5.5, pode-se escrever

$$\Delta \bar{s} = \Delta s + \varepsilon \Delta s\tag{5.18}$$

Dividindo a equação (5.18) por  $\Delta s$  e tomando-se o limite quando  $\Delta s \rightarrow 0$ , obtém-se

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial s} = 1 + \varepsilon\tag{5.19}$$

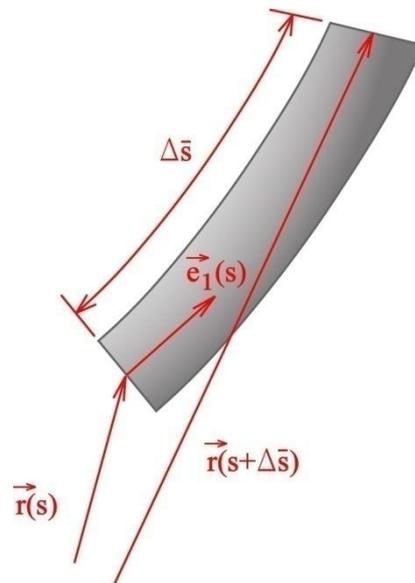


**Figura 5.5 – Compatibilidade de deformação**

### 5.6.2 Equação de Compatibilidade Geométrica

Sendo  $\vec{r}(s,t)$  o vetor de posições de um dado ponto do cabo submerso nas coordenadas cartesianas globais no instante  $t$ , pode-se escrever que

$$\vec{r}(s,t) = x(s,t)\vec{i} + y(s,t)\vec{j} + z(s,t)\vec{k} \quad (5.20)$$



**Figura 5.6 – Compatibilidade geométrica**

Como observado na Figura 5.6, pode-se escrever que

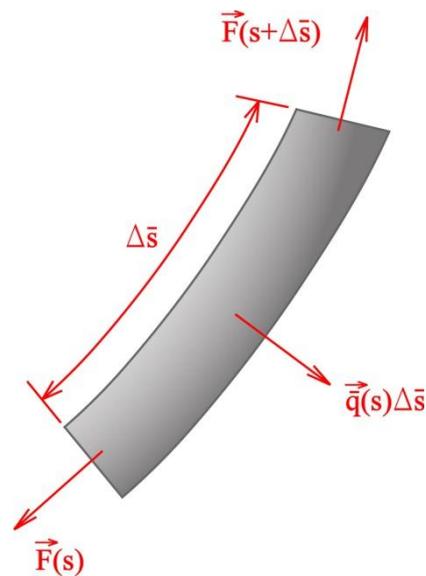
$$\vec{r}(s, t) + \vec{e}_1(s, t)\Delta\bar{s} = \vec{r}(s + \Delta s, t) \quad (5.21)$$

Dividindo-se a equação (5.21) por  $\Delta\bar{s}$ , tomando-se o limite para  $\Delta\bar{s} \rightarrow 0$  e usando a equação de compatibilidade de deformação (5.19) chega-se a

$$\frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial s} = (1 + \varepsilon(s, t))\vec{e}_1(s, t) \quad (5.22)$$

### 5.6.3 Equação de Equilíbrio de Forças

Considere um elemento de cabo na situação deformada, conforme ilustrado na Figura 5.7. Nesta situação, é aplicado sobre este elemento um esforço externo igual a  $\vec{q}(s, t)\Delta\bar{s}$ , onde a barra escrita sobre as variáveis indica que estas se referem à situação deformada.



**Figura 5.7 – Equilíbrio de forças**

Os esforços internos que solicitam a seção transversal do elemento são indicados por  $\vec{F}(s, t) = F_x(s, t)\vec{i} + F_y(s, t)\vec{j} + F_z(s, t)\vec{k}$ . O equilíbrio de forças impõe que

$$\vec{F}(s + \Delta\bar{s}, t) + \vec{q}(s, t)\Delta\bar{s} - \vec{F}(s, t) = 0 \quad (5.23)$$

Entretanto, a resultante dos esforços externos deve ser a mesma tanto na situação deformada quanto na indeformada, de modo que

$$\bar{\bar{q}}(s,t)\Delta\bar{s} = \bar{q}(s,t)\Delta s \quad (5.24)$$

Dividindo a equação (5.23) por  $\Delta\bar{s}$ , usando a equação (5.24) e tomando-se o limite para  $\Delta\bar{s} \rightarrow 0$ , obtém-se

$$\frac{\partial\bar{F}(s,t)}{\partial\bar{s}} + \bar{q}(s,t)\frac{\partial s}{\partial\bar{s}} = 0 \quad (5.25)$$

Por fim, usando o resultado da equação (5.19) chega-se a

$$\frac{\partial\bar{F}(s,t)}{\partial s} = -\bar{q}(s,t) \quad (5.26)$$

#### 5.6.4 Equação Constitutiva

Admitindo-se que o cabo seja constituído por um material elástico-linear e que trabalha apenas em seu regime elástico, segundo a Lei de *Hooke*,

$$\varepsilon(s,t) = \frac{T(s,t)}{EA(s)} \quad (5.27)$$

$$T(s,t) = \bar{F}(s,t) \cdot \bar{e}_1(s,t)$$

Na equação (5.27),  $T(s,t)$  é a componente axial do esforço interno do cabo, dito tração de parede ou estrutural e não a efetiva.

#### 5.6.5 Sistema de Equações

O sistema de equações para o modelo dinâmico é formado pelas equações (5.22), (5.26) e (5.27) e fica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{r}(s,t)}{\partial s} &= (1 + \varepsilon(s,t)) \bar{e}_1(s,t) \\
\frac{\partial \bar{F}(s,t)}{\partial s} &= -\bar{q}(s,t) \\
\varepsilon(s,t) &= \frac{T(s,t)}{EA(s)}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

## 5.7 Os Modelos Fluidos

O modelo fluido empregado no problema dinâmico será um modelo fenomenológico

- de IWAN & BLEVINS (1974), equação (3.18)
- de PARRA & ARANHA (1996), equação (3.23)
- de ARANHA (2004), equação (3.31)

Nestas equações supracitadas, o oscilador elástico é aquele descrito na equação (5.28) e está acoplado ao oscilador fluido.

Seja qual for o modelo fenomenológico empregado, a cada coordenada curvilínea  $s$  do cabo submerso corresponde um oscilador fluido que é forçado por um termo proporcional à velocidade do cabo submerso.

### 5.7.1 Modelo de IWAN & BLEVINS (1974)

O oscilador fluido é apresentado na equação (3.18) e reapresentado aqui por conveniência.

$$\begin{aligned}
& \left[ a_0 \rho (D(s))^2 \right] \ddot{w}(s,t) + \left[ a_0 \rho (D(s))^2 \right] \omega_s^2 w(s,t) = \\
& = a_1 \rho D(s) U(s,t) \dot{w}(s,t) - a_2 \rho \frac{D(s)}{U(s,t)} [\dot{w}(s,t)]^3 - a_4 \rho D(s) U(s,t) [\dot{w}(s,t) - \dot{y}(s,t)]
\end{aligned} \tag{5.29}$$

As velocidades  $U(s,t)$  e  $\dot{y}(s,t)$  são calculadas conforme explicado na seção 5.5.3 de modo que a única incógnita fica sendo  $w(s,t)$ .

### 5.7.2 Modelo de PARRA & ARANHA (1996)

O oscilador fluido é apresentado na equação (3.23) e rerepresentado aqui por conveniência.

$$m_f(s)\ddot{w}(s,t) - 2m_f(s)\omega_s\alpha_1 \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{3} \frac{(\dot{w}(s,t))^2}{(U(s,t))^2} \right] \dot{w}(s,t) + m_f(s)\omega_s^2 w(s,t) = \frac{1}{2} \rho U(s,t) D(s) \alpha_4 \dot{y}(s,t) \quad (5.30)$$

As velocidades  $U(s,t)$  e  $\dot{y}(s,t)$  são calculadas conforme explicado na seção 5.5.3 de modo que a única incógnita fica sendo  $w(s,t)$ .

### 5.7.3 Modelo de ARANHA (2004)

O oscilador fluido é apresentado na equação (3.31) e rerepresentado aqui por conveniência.

$$\frac{dA(s, \tau(t))}{dt} - \sigma A(s, \tau(t)) - \gamma \frac{\partial^2 A(s, \tau(t))}{\partial z(s)^2} + \mu |A(s, \tau(t))|^2 A(s, \tau(t)) = f_v V(s, t) \quad (5.31)$$

A velocidade  $V(s,t)$  é calculada conforme explicado na seção 5.5.3 de modo que a única incógnita fica sendo  $A(s, \tau(t))$ .

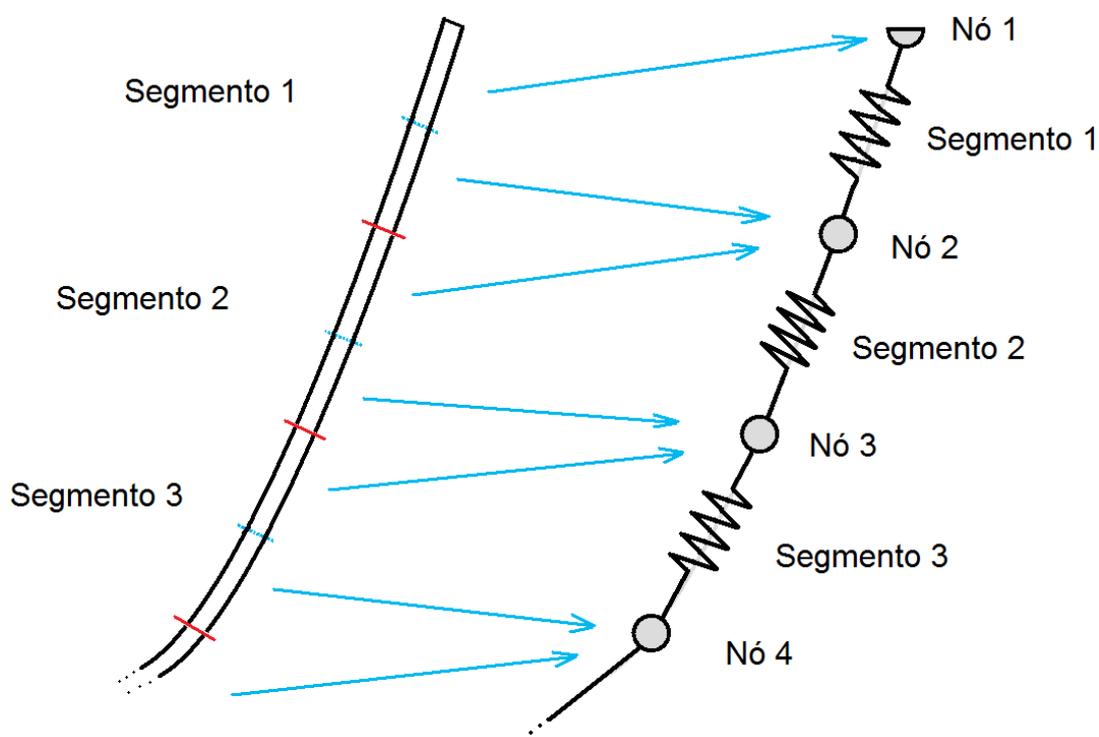
## 5.8 Modelo Discreto Espacial

Para resolver o sistema de equações do problema dinâmico, equação (5.28), faz-se uso de um método de discretização espacial simples, intuitivo e que se mostrou bastante eficaz na obtenção das soluções.

Este método de discretização espacial divide o cabo submerso contínuo em  $N$  segmentos, não necessariamente do mesmo comprimento. Estes segmentos representam as propriedades de rigidez axial do cabo submerso e são modelados como barras sem massa presas a um nó em cada extremidade.

Os  $N + 1$  nós modelam a massa do cabo submerso. Mais especificamente, cada nó acumula metade da massa dos dois elementos adjacentes, ou seja, a massa fica concentrada nos nós. Todas as forças externas  $\bar{q}(s,t)$ , vide equação (5.16), são aplicadas aos nós. Além disto, as forças internas – neste caso a tração dos segmentos – também são aplicadas aos nós como pares ação e reação.

Atenção ao fato de que os nós extremos (TDP e topo) estão conectados a apenas um segmento. A Figura 5.8 ilustra a discretização espacial usada no modelo dinâmico deste trabalho.



**Figura 5.8 – Discretização espacial**

### 5.8.1 Discretização Espacial das Variáveis

As variáveis  $\bar{r}(s,t)$ ,  $\bar{F}(s,t)$ ,  $\bar{q}(s,t)$ ,  $\bar{e}_1(s,t)$ ,  $\theta(s,t)$ ,  $\psi(s,t)$  e  $\varepsilon(s,t)$  devem ser discretizadas espacialmente para possibilitar a passagem matemática do modelo contínuo para o modelo discreto.

É fácil imaginar que a forma mais simples de se fazer isto é transformar cada uma destas variáveis em um vetor do tipo  $\{\Omega(t)\}_{m \times 1}$ . A dimensão  $m$ , no entanto, pode ser igual a  $N$  ou  $N + 1$  dependendo da variável em questão.

Os nós são responsáveis por guardar os extremos dos segmentos. Também é nos nós que as forças externas são aplicadas. Por outro lado, orientações estão relacionadas ao “caminho” entre dois nós. As forças internas e a deformação também são propriedades axiais que devem recair sobre os elementos. Logo, é natural que a discretização resulte em

$$\begin{aligned}
 \vec{r}(s,t) &= \{\vec{\tilde{r}}(t)\}_{N+1,1} \\
 \vec{q}(s,t) &= \{\vec{\tilde{q}}(t)\}_{N+1,1} \\
 \theta(s,t) &= \{\tilde{\theta}(t)\}_{N,1} \\
 \psi(s,t) &= \{\tilde{\psi}(t)\}_{N,1} \\
 \varepsilon(s,t) &= \{\tilde{\varepsilon}(t)\}_{N,1} \\
 \vec{F}(s,t) &= \{\vec{\tilde{F}}(t)\}_{N,1} \\
 \vec{e}_1(s,t) &= \{\vec{\tilde{e}}_1(t)\}_{N,1}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

### 5.8.2 Análise de um Segmento

Um segmento está sempre conectado a dois nós, um em cada uma de suas extremidades. Sendo assim, as coordenadas de suas extremidades estão definidas. A deformação de cada um dos segmentos pode então ser calculada como

$$\tilde{\varepsilon}_j(t) = \frac{\|\vec{\tilde{r}}_{j+1}(t) - \vec{\tilde{r}}_j(t)\| - L_j}{L_j} \tag{5.33}$$

onde o subscrito  $j$  refere-se ao  $j$ -ésimo elemento e  $L_j$  refere-se ao comprimento original do segmento (indeformado).

As orientações de cada um dos elementos também podem ser obtidas diretamente a partir dos valores de posição nodal da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_j(t) &= \arcsen \left[ \frac{(\tilde{r}_{j+1}(t) - \tilde{r}_j(t)) \cdot \vec{k}}{\|\tilde{r}_{j+1}(t) - \tilde{r}_j(t)\|} \right] \\ \tilde{\psi}_j(t) &= \arctg \left[ \frac{(\tilde{r}_{j+1}(t) - \tilde{r}_j(t)) \cdot \vec{j}}{(\tilde{r}_{j+1}(t) - \tilde{r}_j(t)) \cdot \vec{i}} \right]\end{aligned}\quad (5.34)$$

Com base nos resultados da equação (5.34), a base local para cada segmento pode ser obtida. Particularmente, o versor axial da base local é dado por

$$\tilde{e}_{1,j}(t) = \cos \tilde{\theta}_j(t) \cos \tilde{\psi}_j(t) + \cos \tilde{\theta}_j(t) \sin \tilde{\psi}_j(t) + \sin \tilde{\theta}_j(t) \quad (5.35)$$

As equações (5.33), (5.34) e (5.35) podem ser vistas como correspondência discreta da primeira expressão na equação (5.28).

A tração de parede pode ser calculada a partir do valor da deformação em cada segmento pela simples relação constitutiva.

$$\tilde{T}_j(t) = EA_j \tilde{\varepsilon}_j(t) \quad (5.36)$$

A tração efetiva pode ser obtida a partir da tração de parede. Recordando as equações (4.48), (4.51) e usando a equação (5.36), chega-se a

$$\tilde{T}_{ef,j}(t) = EA_j \tilde{\varepsilon}_j(t) + \rho g A_j \left[ h - \frac{1}{2} (\tilde{r}_{j+1}(t) + \tilde{r}_j(t)) \cdot \vec{k} \right] \quad (5.37)$$

As equações (5.36) e (5.37) podem ser vistas como correspondência discreta da terceira expressão na equação (5.28). Veja, ainda, que as forças internas são escritas como

$$\tilde{F}_j(t) = \tilde{T}_{ef,j}(t) \tilde{e}_{1,j}(t) \quad (5.38)$$

### 5.8.3 Análise de um Nó

Com exceção dos nós extremos do cabo submerso (TDP e topo), um nó está sempre conectado a dois elementos e “herda” a massa e os esforços externos aplicados à metade de cada um dos elementos adjacentes. Como a massa é vista no termo de

força de inércia, pode-se entender um nó como um ponto em equilíbrio dinâmico com relação às forças externas, forças de inércia e forças internas aplicadas por cada um dos segmentos adjacentes. Assim, em um nó,

$$\tilde{\vec{F}}_j(t) - \tilde{\vec{F}}_{j-1}(t) = \tilde{q}_j(t) \frac{L_j}{2} + \tilde{q}_{j-1}(t) \frac{L_{j-1}}{2} \quad (5.39)$$

A equação (5.39) pode ser entendida como a correspondência discreta da segunda expressão na equação (5.28). No caso de nós extremos, ou  $\tilde{\vec{F}}_j(t)$  ou  $\tilde{\vec{F}}_{j-1}(t)$  é substituído por uma força de vínculo, bem como ou  $(\tilde{q}_j(t); L_j)$  ou  $(\tilde{q}_{j-1}(t); L_{j-1})$  é composto por valores nulos.

Pensando agora em termos de cada um dos esforços que compõe os  $\tilde{q}_j(t)$ , pode escrever

- Força de inércia:

$$\tilde{\vec{F}}_{i,j}(t) = -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \tilde{r}_j(t)}{\partial t^2} \quad (5.40)$$

- Força de inércia adicional:

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{F}}_{ia,a,j}(t) &= -c_{m,a}(s) \rho S \left( \frac{\partial^2 \tilde{r}(t)}{\partial t^2} \cdot \tilde{\vec{e}}_{AXI,j}(t) \right) \tilde{\vec{e}}_{AXI,j}(t) \\ \tilde{\vec{F}}_{ia,n,j}(t) &= -c_{m,n}(s) \rho S \left[ \frac{\partial^2 \tilde{r}(t)}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 \tilde{r}(s,t)}{\partial t^2} \cdot \tilde{\vec{e}}_{AXI,j}(t) \right) \tilde{\vec{e}}_{AXI,j}(t) \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\tilde{\vec{F}}_{ia,j}(t) = \tilde{\vec{F}}_{ia,a,j}(t) + \tilde{\vec{F}}_{ia,n,j}(t)$$

- Força de arrasto se  $\tilde{\vec{e}}_{AXI,j}(t) \wedge \vec{v}_c(\tilde{z}_j(t)) = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{F}}_{d,AXI,j}(t) &= \frac{1}{2} \rho D(s) c_{d,a}(s) \left\| \tilde{\vec{v}}_{rel,AXI,j}(t) \right\| \tilde{\vec{v}}_{rel,AXI,j}(t) \\ \tilde{\vec{F}}_{d,INL,j}(t) &= \frac{1}{2} \rho D(s) c_{d,n}(s) \left\| \tilde{\vec{v}}_{rel,n,j}(t) \right\| \tilde{\vec{v}}_{rel,INL,j}(t) \\ \tilde{\vec{F}}_{d,TRA,j}(t) &= \frac{1}{2} \rho D(s) c_{d,n}(s) \left\| \tilde{\vec{v}}_{rel,n,j}(t) \right\| \tilde{\vec{v}}_{rel,TRA,j}(t) \end{aligned} \quad (5.42)$$

- Força de sustentação se  $\tilde{\mathbf{e}}_{AXI,j}(t) \wedge \bar{\mathbf{v}}_c(\tilde{\mathbf{z}}_j(t)) = \bar{\mathbf{0}}$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{l,j}(t) = \bar{\mathbf{0}} \quad (5.43)$$

- Força de arrasto se  $\tilde{\mathbf{e}}_{AXI,j}(t) \wedge \bar{\mathbf{v}}_c(\tilde{\mathbf{z}}_j(t)) \neq \bar{\mathbf{0}}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{d,AXI,j}(t) &= \frac{1}{2} \rho D(s) c_{d,a}(s) \|\tilde{\mathbf{v}}_{rel,AXI,j}(t)\| \tilde{\mathbf{v}}_{rel,AXI,j}(t) \\ \tilde{\mathbf{F}}_{d,INL,j}(t) &= \frac{1}{2} \rho D(s) c_{d,n}(s) \|\tilde{\mathbf{v}}_{rel,n,j}(t)\| \tilde{\mathbf{v}}_{rel,INL,j}(t) \\ \tilde{\mathbf{F}}_{d,TRA,j}(t) &= \bar{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

- Força de sustentação se  $\tilde{\mathbf{e}}_{AXI,j}(t) \wedge \bar{\mathbf{v}}_c(\tilde{\mathbf{z}}_j(t)) \neq \bar{\mathbf{0}}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{l,AXI,j}(t) &= \bar{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{l,INL,j}(t) &= \bar{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{l,TRA,j}(t) &= \begin{cases} a_4 \rho D(s) \tilde{U}_j(t) [\dot{\tilde{w}}_j(t) - \dot{\tilde{y}}_j(t)] \tilde{\mathbf{e}}_{TRA,j}(t), & \text{Iwan \& Blevins} \\ \frac{1}{2} \alpha_4 \rho D(s) \tilde{U}_j(t) [\dot{\tilde{w}}_j(t) - \dot{\tilde{y}}_j(t)] \tilde{\mathbf{e}}_{TRA,j}(t), & \text{Parra \& Aranha} \\ \left[ (C_A \tilde{A}_j(t) + C_V \tilde{V}(t)) e^{i\omega t} + (*) \right] \tilde{\mathbf{e}}_{TRA,j}(t), & \text{Aranha} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Note que a as velocidades e as velocidades relativas empregam também suas respectivas formas discretas, a saber,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}_{rel,j}(t) &= \tilde{\mathbf{v}}_c(\tilde{\mathbf{z}}_j(t)) - \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t} \\
\tilde{\mathbf{v}}_{rel,AXI,j}(t) &= \left( \tilde{\mathbf{v}}_{rel,j}(t) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{AXI,j}(t) \right) \tilde{\mathbf{e}}_{AXI,j}(t) \\
\tilde{\mathbf{v}}_{rel,TRA,j}(t) &= \left( \tilde{\mathbf{v}}_{rel,j}(t) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{TRA,j}(t) \right) \tilde{\mathbf{e}}_{TRA,j}(t) \\
\tilde{\mathbf{v}}_{rel,INL,j}(t) &= \left( \tilde{\mathbf{v}}_{rel,j}(t) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{INL,j}(t) \right) \tilde{\mathbf{e}}_{INL,j}(t)
\end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{rel,n,j}(t) = \tilde{\mathbf{v}}_{rel,j}(t) - \tilde{\mathbf{v}}_{rel,AXI,j}(t)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_j(t) &= \tilde{\mathbf{v}}_c(\tilde{\mathbf{z}}_j(t)) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{INL,j}(t) \\
\dot{\tilde{\mathbf{y}}}_j(t) &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{TRA,j}(t)
\end{aligned}$$

#### 5.8.4 Os Modelos Fluidos Discretos

Empregando discretização similar, as variáveis fluidas para os modelos baseados em equação de *Van der Pol* ou equação de *Ginzburg-Landau* podem ser escritos em suas formas discretas como

$$\begin{aligned}
w(s,t) &= \{\tilde{w}(t)\}_{N+1,1} \\
A(s,\tau(t)) &= \{\tilde{A}(\tau(t))\}_{N+1,1}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Os osciladores fluidos discretizados no espaço ficam então:

- IWAN & BLEVINS (1974), equação (3.18):

$$\begin{aligned}
& [a_0 \rho D_j^2] \ddot{\tilde{w}}_j(t) + [a_0 \rho D_j^2] \omega_s^2 \tilde{w}_j(t) = \\
& = a_1 \rho D_j \tilde{U}_j(t) \dot{\tilde{w}}_j(t) - a_2 \rho \frac{D_j}{\tilde{U}_j(t)} [\dot{\tilde{w}}_j(t)]^3 - a_4 \rho D_j \tilde{U}_j(t) [\dot{\tilde{w}}_j(t) - \dot{\tilde{y}}_j(t)]
\end{aligned} \tag{5.48}$$

- PARRA & ARANHA (1996), equação (3.23)

$$\begin{aligned}
m_{f,j} \ddot{\tilde{w}}_j(t) - 2m_{f,j} \omega_s \alpha_1 \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{3} \frac{(\dot{\tilde{w}}_j(t))^2}{(\tilde{U}_j(t))^2} \right] \dot{\tilde{w}}_j(t) + \\
+ m_{f,j} \omega_s^2 \tilde{w}_j(t) = \frac{1}{2} \rho \tilde{U}_j(t) D_j \alpha_4 \dot{\tilde{y}}_j(t)
\end{aligned} \tag{5.49}$$

- ARANHA (2004), equação (3.31)

$$\frac{d\tilde{A}_j(\tau(t))}{dt} - \sigma\tilde{A}_j(\tau(t)) - \gamma \frac{\partial^2 \tilde{A}_j(\tau(t))}{\partial \tilde{z}_j^2} + \mu |\tilde{A}_j(\tau(t))|^2 \tilde{A}_j(\tau(t)) = f_V \tilde{V}_j(t) \quad (5.50)$$

## 5.9 Solução Numérica: Discretização no Tempo

O modelo dinâmico discreto no espaço pode ser visto como  $N + 1$  equações temporais, uma para cada nó. Cada uma destas equações é composta pelo oscilador elástico, equação (5.39), e por apenas um oscilador fluido, equações (5.48), (5.49) ou (5.50).

Genericamente, cada uma das  $N + 1$  equações do oscilador elástico poderia ser escrita como o habitual sistema de segunda ordem

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_j(\tilde{\mathbf{r}}_j(t)) \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t^2} + \tilde{\mathbf{C}}_j(\tilde{\mathbf{r}}_j(t), \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t} + \tilde{\mathbf{K}}_j(\tilde{\mathbf{r}}_j(t)) \tilde{\mathbf{r}}_j(t) = \\ = \tilde{\mathbf{P}}_j(\tilde{\mathbf{r}}_j(t), \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t^2}, \tilde{\mathbf{w}}_j(t)) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Note que  $\tilde{\mathbf{P}}_j$  exibe sua dependência com o oscilador fluido, assumido  $\tilde{\mathbf{w}}_j(t)$ , mas que poderia ser escrito  $\tilde{A}_j(\tau(t))$ . Note ainda que o oscilador é não-linear.

O oscilador fluido, por sua vez, poderia ser escrito de forma genérica como

$$\tilde{\mathbf{M}}_{f,j} \ddot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t) + \tilde{\mathbf{C}}_{f,j}(\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t)) \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t) + \tilde{\mathbf{K}}_{f,j} \tilde{\mathbf{w}}_j(t) = \tilde{\mathbf{P}}_{f,j}(\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t}, \tilde{\mathbf{w}}_j(t)) \quad (5.52)$$

Note que  $\tilde{\mathbf{P}}_{f,j}$  exibe sua dependência com o oscilador elástico e note que este oscilador também é não-linear.

Como o sistema acoplado é não-linear, é necessário um método numérico para resolver o sistema de equações (5.51) e (5.52) no domínio do tempo. O método empregado no presente trabalho foi um método de integração de *Euler* explícito, de

modo que cada nó pode ser resolvido independentemente dos demais da seguinte forma.

- Calculam-se os termos  $\tilde{\mathbf{M}}_j(\tilde{\mathbf{r}}(t))$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_j(\tilde{\mathbf{r}}_j(t), \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_j(\tilde{\mathbf{r}}_j(t)) \tilde{\mathbf{r}}_j(t)$  e  $\tilde{\mathbf{P}}_j(\tilde{\mathbf{r}}_j(t), \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t^2}, \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t))$  no instante  $t$ .

- Através da solução da equação (5.51), obtém-se  $\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t^2}$
- Calculam-se  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t + \Delta t)}{\partial t}$  e  $\tilde{\mathbf{r}}_j(t + \Delta t)$ , onde  $\Delta t$  é o passo de tempo da integração numérica através da fórmula

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t + \Delta t)}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t^2} \Delta t \\ \tilde{\mathbf{r}}_j(t + \Delta t) &= \tilde{\mathbf{r}}_j(t) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t + \Delta t)}{\partial t} \Delta t \end{aligned} \quad (5.53)$$

- Calculam-se os termos  $\tilde{\mathbf{M}}_{t,j}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{t,j}(\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t)) \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_{t,j} \tilde{\mathbf{w}}_j(t)$  e  $\tilde{\mathbf{P}}_{t,j}(\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_j(t)}{\partial t}, \tilde{\mathbf{w}}_j(t))$  no instante  $t$ .

- Através da solução da equação (5.52), obtém-se  $\ddot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t)$
- Calculam-se  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t + \Delta t)$  e  $\tilde{\mathbf{w}}_j(t + \Delta t)$  através da fórmula

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t + \Delta t) &= \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t) + \ddot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t) \Delta t \\ \tilde{\mathbf{w}}_j(t + \Delta t) &= \tilde{\mathbf{w}}_j(t) + \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_j(t + \Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (5.54)$$

- Faz-se o avanço do tempo numérico, retornando ao primeiro passo

O processo descrito acima se repete até atingir o tempo desejado para a simulação numérica.

O ponto de partida das posições nodais,  $\tilde{\mathbf{r}}_j(0)$ , foi a solução do problema estático e, neste caso, as velocidades e acelerações nodais são nulas. Para o oscilador fluido, a

condição inicial foi uma perturbação aleatória com valor no intervalo de  $-0,5$  a  $+0,5$ . Isto é necessário para acelerar o processo de solução. O fato de a escolha ser aleatória tornam mínimas as chances de esta escolha afetar a resposta final.

## CAPÍTULO 6 RESULTADOS

### 6.1 Introdução

Os modelos apresentados ao longo deste texto foram implementados numa ferramenta computacional que permite, dentre outras funcionalidades, entrar dados e parâmetros do problema que se deseja estudar, resolver o problema estático, resolver o problema dinâmico e extrair ou visualizar resultados.

O foco do trabalho e, portanto, das simulações, foi a resposta do cabo submerso quando sujeito aos esforços de sustentação gerados pelos modelos fenomenológicos descritos no Capítulo 3.

As simulações foram feitas de modo a buscar validações sempre que possível. Estas validações dizem respeito à análise dos comportamentos esperados em algumas respostas e, quando possível, à eventual comparação com algum resultado conhecido.

Não é o objetivo aqui fazer uso desta ferramenta – dentro do escopo deste trabalho – para fins de projeto, embora um dos objetivos seja avaliar se há potencial da mesma nesta função.

As simulações foram divididas em quatro grandes grupos. Nos três primeiros, foi utilizado o modelo de IWAN & BLEVINS (1974) por ser o mais simples e mais difundido na literatura especializada. Conforme mostrado na seção 3.6, no entanto, poder-se-ia ter optado pelo modelo de PARRA & ARANHA (1996). No quarto grupo, foi utilizado o modelo de ARANHA (2004).

No primeiro grupo, foi feito um estudo de um problema com apenas um nó livre e, portanto, três graus de liberdade, apenas um grau de liberdade na direção transversal

ao escoamento. O objetivo aqui é tentar correlacionar os resultados obtidos com os estudos dos modelos fenomenológicos com cilindro rígido.

No segundo, foi feito um estudo similar ao primeiro, com o cabo submerso em configuração vertical e bastante tracionado, mas agora com diversos nós na discretização espacial do cabo submerso. O objetivo é verificar qual o tamanho da mudança com relação ao problema de apenas um nó livre sem perder demais a referência dos experimentos, quase em sua totalidade realizados com este tipo de configuração.

No terceiro, a configuração estudada foi a de catenária simples, bem mais complacente que a configuração vertical e, portanto, supostamente sujeita a modos de vibrar mais altos para mesmas velocidades de corrente quando comparada à configuração vertical.

Por fim, foram feitas algumas simulações com o modelo de *Ginzburg-Landau*. Por simplicidade e facilidade na interpretação de possíveis diferenças, foi utilizada a configuração de cabo na vertical.

Antes de apresentar as soluções específicas de cada um destes grupos, algumas informações e comentários de aspecto geral serão abordados.

## **6.2 Informações e Comentários Gerais**

### **6.2.1 Descrição do Cabo Submerso Utilizado nas Simulações**

Em todos os estudos de caso, um mesmo tipo de cabo submerso foi utilizado. Isto não causa, no entanto, uma limitação de observabilidade do fenômeno. Em primeiro lugar porque em termos de resposta global não existem grandes diferenças comportamentais entre um *riser* flexível e um umbilical, por exemplo. Em segundo lugar, porque um dos elementos chave na questão de resposta global de um cabo submerso é a rigidez geométrica, e esta foi inserida nos parâmetros de análise quando houve a troca de configuração do cabo submerso, de vertical para catenária livre.

Os parâmetros deste cabo são, portanto, os seguintes:

- Diâmetro: 103,7mm
- Peso emerso por unidade de comprimento: 213,8N/m
- Rigidez axial:  $158 \times 10^3$  kN

Os parâmetros hidrodinâmicos utilizados foram os seguintes:

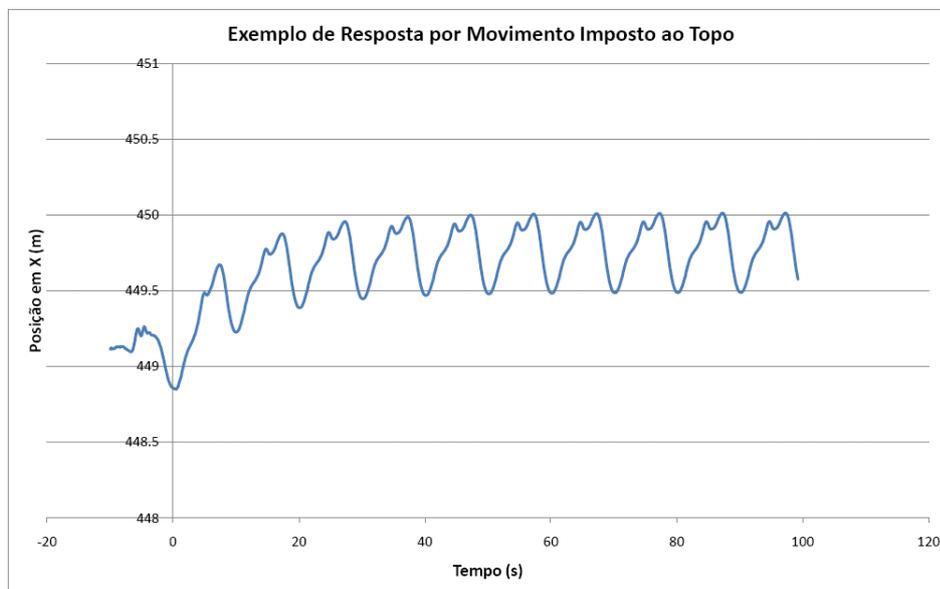
- Coeficiente de massa adicional axial: 0,0
- Coeficiente de massa adicional normal: 1,0
- Coeficiente de arrasto axial: 0,0
- Coeficiente de arrasto normal: 1,2

### **6.2.2 Coeficientes dos Modelos Fenomenológicos**

Os coeficientes dos modelos fenomenológicos utilizados foram sempre os apresentados pelos autores originais. Uma vez que tais coeficientes foram determinados a partir de experimentos, apenas com base em algo similar poder-se-ia avaliar novos valores.

### **6.2.3 Tempo Necessário para Estabilização da Resposta**

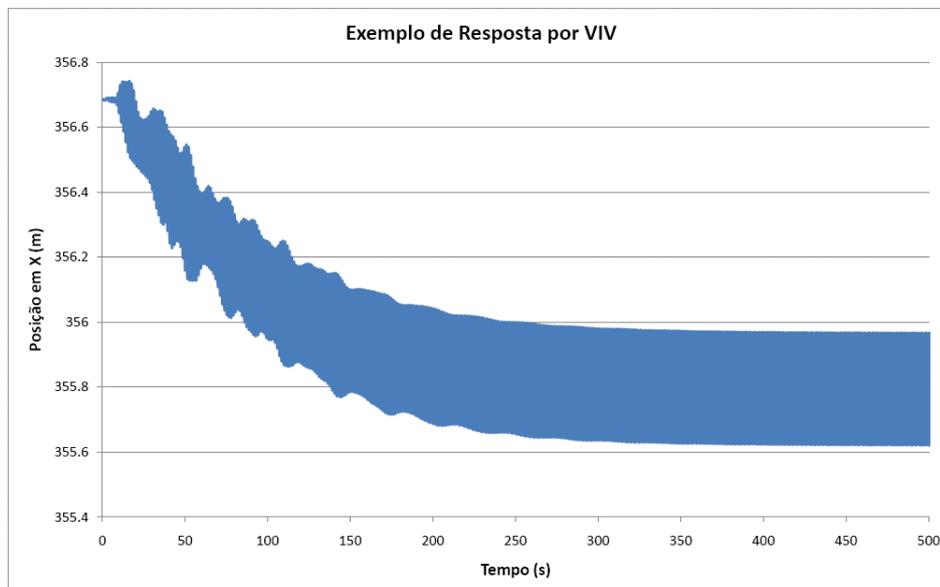
Na área de estudos numéricos de cabos submersos, quando se está acostumado a realizar simulações numéricas com excitações regulares, muitas vezes harmônicas, em geral trabalha-se com períodos de excitação da ordem de 10 segundos e nos quais ocorre uma “estabilização” do resultado após poucos (cerca de cinco) períodos. Em particular, este é o cenário de análises dinâmicas globais para projeto de cabos submersos que se realiza hoje na indústria. Um exemplo disto é ilustrado na Figura 6.1, na qual um cabo em configuração de catenária simples em 500m de lâmina d’água sofre uma excitação de topo vertical de amplitude 5,0m e horizontal de amplitude 3,0m, ambas com período 10,0s.



**Figura 6.1 – Exemplo de resposta por movimento imposto ao topo**

No caso dos modelos fenomenológicos para VIV, no entanto, apesar do caráter aparentemente harmônico tal como apresentado pelas equações nas quais são baseadas, notou-se, que a estabilização das respostas muitas vezes era obtida após vários períodos de resposta que, no caso de VIV são bem menores que os períodos típicos de onda, chegando à ser da ordem de menos de 1s. Um exemplo deste fato é apresentado na Figura 6.2, na qual o mesmo cabo do exemplo anterior, na mesma configuração inicial, é sujeito à excitação flutuante de sustentação; o período das oscilações é cerca de 1,33s.

Este fato exige certo cuidado no momento de se avaliar os resultados. Durante as simulações apresentadas a seguir, não foi raro realizar integração numérica superior a 500 segundos.



**Figura 6.2 – Exemplo de resposta por VIV**

#### **6.2.4 Passos de Tempo de Integração e Tempo Gasto em Simulação**

Um ponto fraco dos métodos de integração explícita, com o método de *Euler* empregado neste trabalho, é a necessidade da utilização de passos de tempo bastante reduzidos. Nas simulações apresentadas a seguir, os passos de tempo variaram um pouco, mas não saíram da faixa  $3,5 \times 10^{-4}$  s a  $7,5 \times 10^{-4}$  s.

Como dito na seção 6.2.3, em diversas simulações foi necessário estender bastante o tempo final. De um modo geral, o tempo total de simulação ficava por volta de 200 a 300 segundos e, em alguns casos, chegava a 600 segundos.

Combinando as informações dos últimos parágrafos, nota-se que um número bastante elevado de passos de integração foi necessário, da ordem de 2 milhões.

Em contrapartida, a vantagem do método de *Euler* explícito neste trabalho foi fazer com que cada nó estrutural tivesse seu cálculo desacoplado dos demais. Em termos computacionais, a necessidade de inverter matrizes de grande porte faz uma grande diferença e, aqui, isto não foi preciso. A única matriz que necessitava ser invertida era a matriz de massa de cada nó, mas que possui dimensão  $3 \times 3$ .

Na prática, simulações de 600 segundos com 200 nós de discretização foram feitas sem problemas em um PC “comum” em tempos inferiores a duas horas nos casos extremos (com passos de tempo reduzidos). É claro que ainda existe espaço para melhoria do código desenvolvido neste trabalho para acelerar o processo de solução numérica. Mesmo assim, considerando os modernos computadores multi-processados de hoje, é de se esperar que estes tempos não sejam um fator limitante para uso em projetos de engenharia.

### 6.3 Estudo de Caso 1

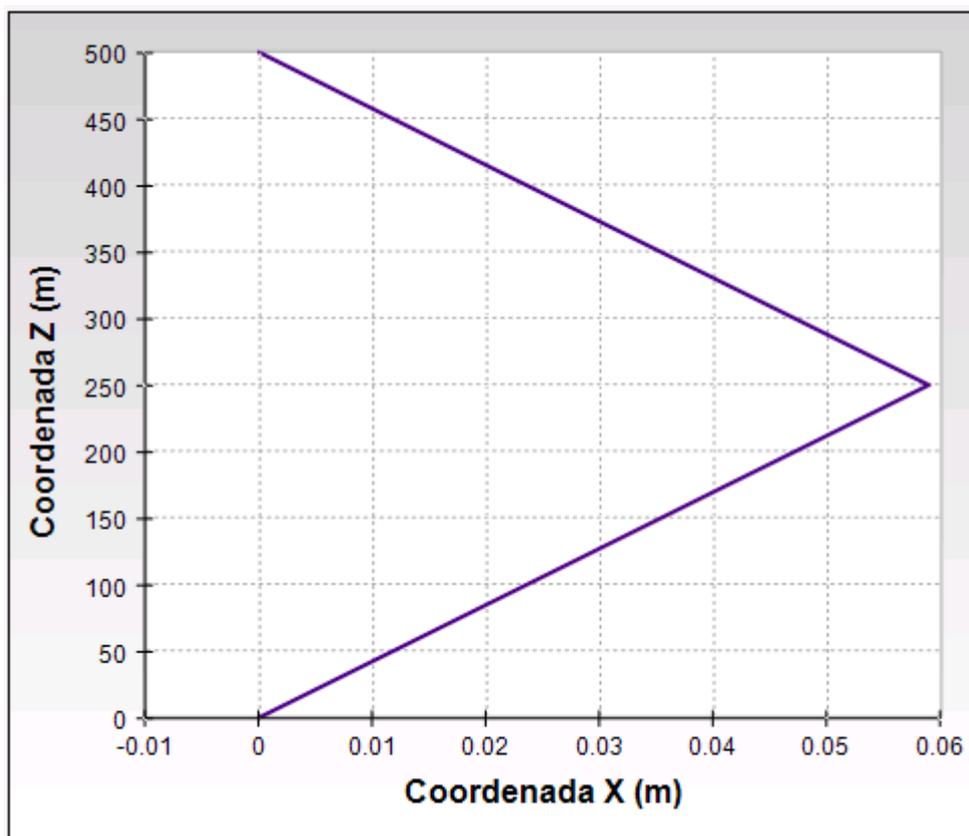
Neste estudo de caso, o cabo submerso (ver seção 6.2.1) possui 499,0m de comprimento, está em configuração vertical com coordenadas de topo (0; 0; 500)m. Apenas dois elementos compõe esta cabo, ou seja, existem três nós, dois presos (condições de contorno nulas) e um nó livre para se mover.

A corrente está totalmente orientada no eixo X global e é sempre constante, embora esta magnitude varie de simulação para simulação. Foram feitas, ao todo, 35 simulações com velocidades de corrente de 0,005m/s a 0,150m/s em incrementos de 0,005m/s e de 0,160m/s a 0,200m/s em incrementos de 0,010m/s.

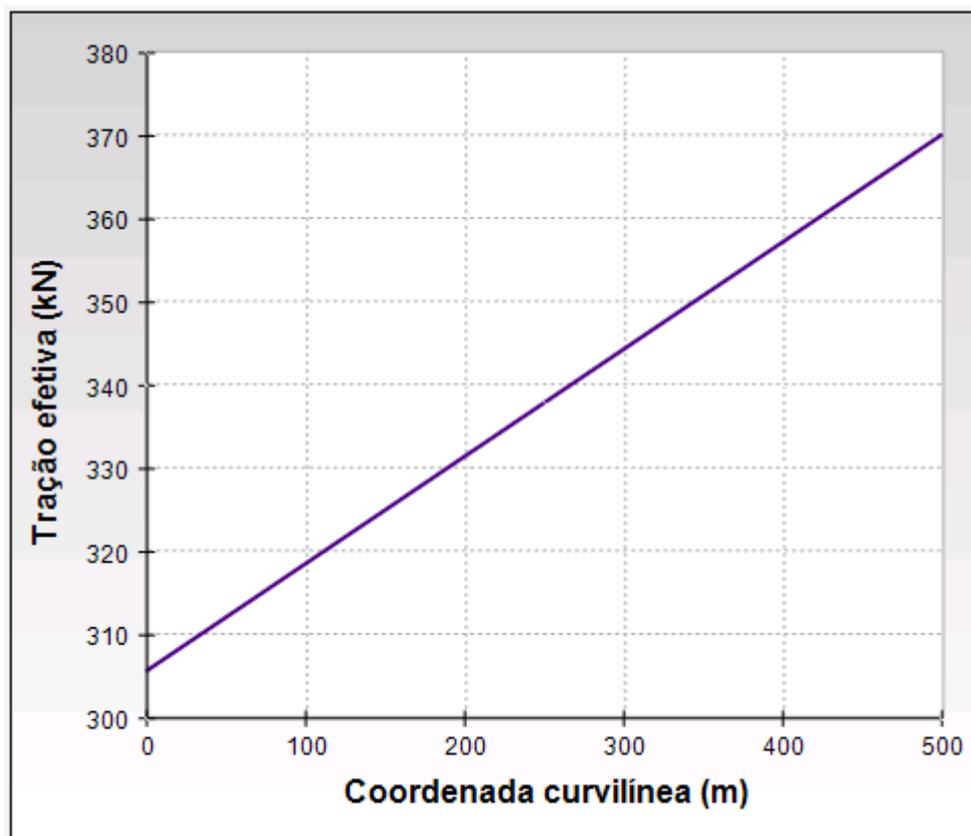
A Figura 6.3 ilustra a situação estática (gráfico não-proporcional) para velocidade de corrente 0,100m/s. Neste caso em particular, o modo de vibrar possui o mesmo formato da estática e, no conjunto de velocidades de corrente simulados, devido à alta força de tração (e conseqüente alta rigidez geométrica), o valor da frequência natural não-amortecida fica praticamente inalterado e igual a 0,108Hz tanto na direção da corrente quanto na direção transversal a ela. O gráfico da força de tração efetiva resultante do problema estático nas mesmas condições de velocidade de corrente (0,010m/s) pode ser visto na Figura 6.4. Note que a tração é bastante elevada quando comparada à rigidez axial do cabo.<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup> Não está sendo considerada aqui a análise estrutural do cabo em questão, ou seja, não está sendo avaliada a resistência estrutural do mesmo. A seleção dos níveis de tração envolvidos tem como objetivo permitir um cenário favorável ao estudo das VIV quando geradas através dos modelos fenomenológicos



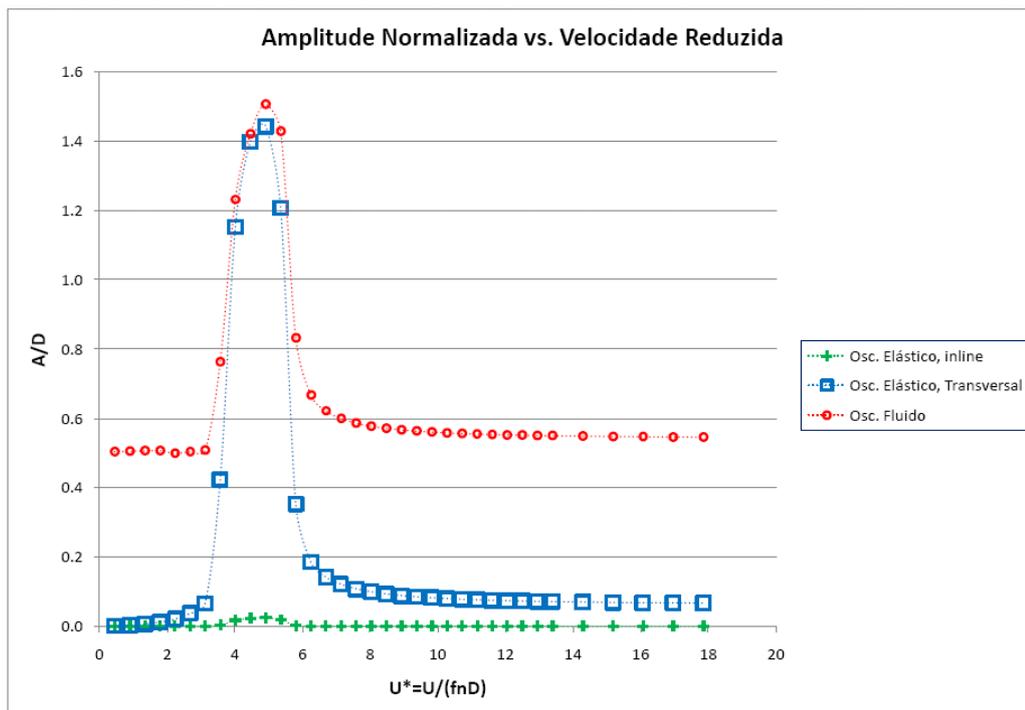
**Figura 6.3 – Configuração estática no plano XZ, Estudo de Caso 1, velocidade de corrente 0,100m/s**



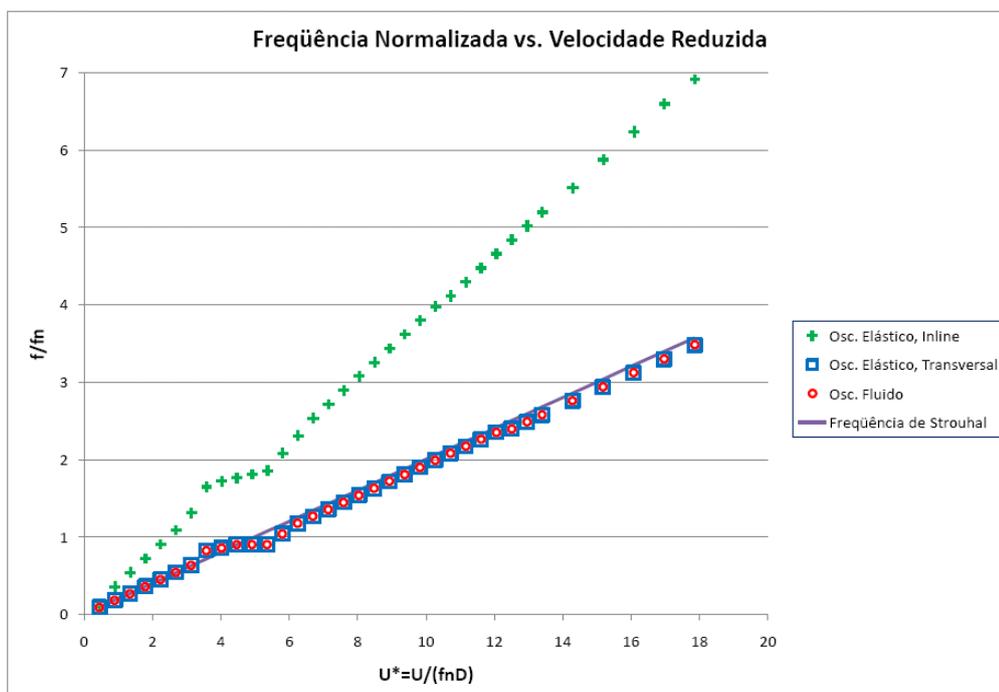
**Figura 6.4 – Tração efetiva vs. coordenada curvilínea, Estudo de Caso 1, velocidade de corrente 0,100m/s**

A variação da velocidade de corrente induz uma alteração na frequência de *Strouhal* ( $f_s = StU / D$ ), que é a frequência de excitação. Uma vez que só existe uma frequência natural na direção transversal ao escoamento e que esta é praticamente constante, a frequência de *Strouhal* estará “perto” da frequência natural  $f_n$ , neste caso, quando a velocidade de corrente for igual a  $U = 0,108 \times 0,1037 / 0,2 = 0,056 \text{ m/s}$  e, assim, quando a velocidade reduzida for  $U^* = 0,56 / (0,108 \times 0,1037) = 5$ .

Feitas as simulações, foram compiladas as respostas em amplitude e frequência de oscilação do nó, as quais são apresentadas na Figura 6.5 e na Figura 6.6. Os resultados são bastante satisfatórios e condizem com os obtidos também por CUNHA (2005). A máxima amplitude normalizada pelo diâmetro ficou ao redor de 1,5, com pico em velocidade reduzida igual a 5,0.



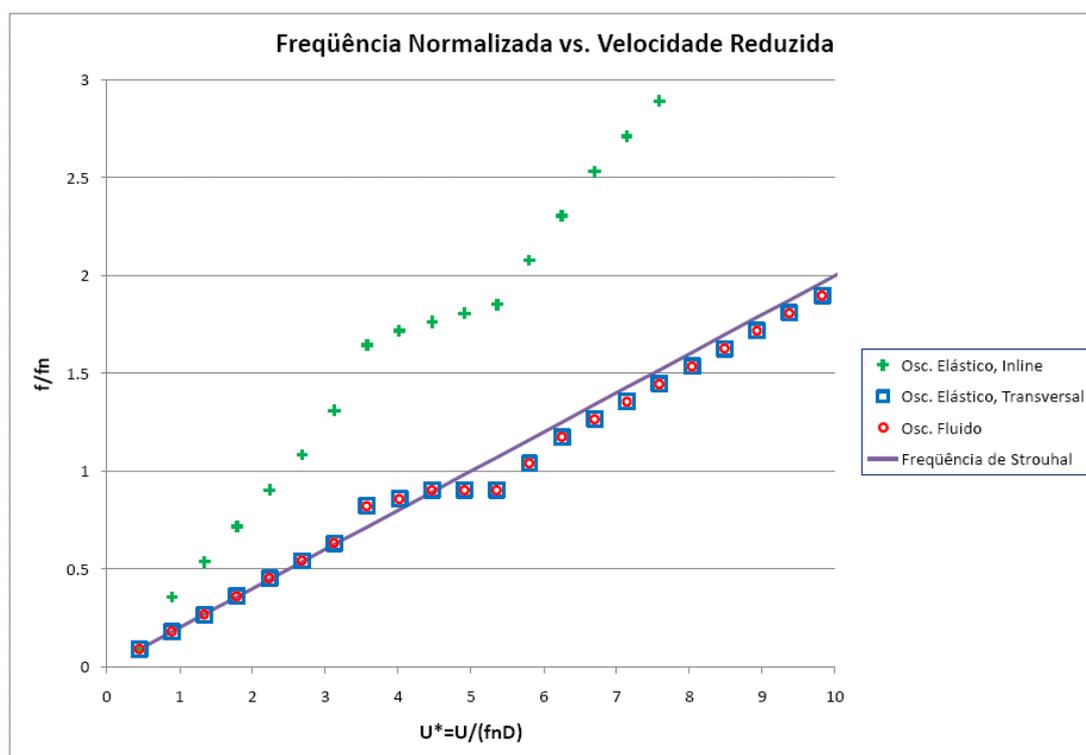
**Figura 6.5 – Amplitude normalizada vs. Velocidade reduzida, Estudo de Caso 1**



**Figura 6.6 – Frequência normalizada vs. Velocidade reduzida, Estudo de Caso 1**

Interessante notar que existe uma componente oscilatória na direção da velocidade de corrente que vibra com amplitude bem menor (amplitude normalizada pelo diâmetro aproximadamente 0,025) quando comparada à oscilação na direção transversal, mas que pulsa com o dobro da frequência de *Strouhal*, como observado em experimentos e como o mecanismo de desprendimento de vórtices leva a supor. Uma vez que o coeficiente de arrasto foi mantido constante durante toda a simulação, é de se imaginar que as forças internas de restituição elástica são as responsáveis por este fato. De qualquer forma, o estudo de como são alterados os coeficientes de arrasto poderiam ajudar a melhorar a acurácia deste modelo nesta direção.

Outro ponto interessante é notar o fenômeno de *lock-in* observado nas velocidades reduzidas de 3,5 a 6,5. A Figura 6.7 mostra uma ampliação da faixa de *lock-in*.



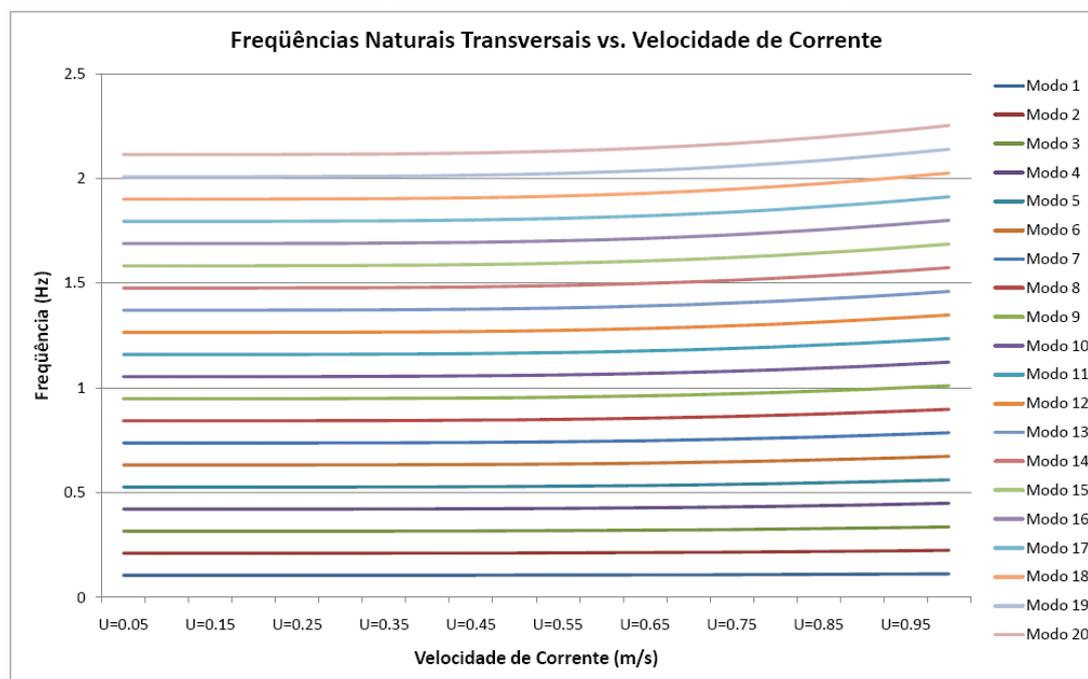
**Figura 6.7 – Frequência normalizada vs. Velocidade reduzida, Estudo de Caso 1 (ampliação)**

## 6.4 Estudo de Caso 2

Este estudo de caso é, em termos de parâmetros, similar ao anterior: o cabo submerso (ver seção 6.2.1) possui 499,0m de comprimento, está em configuração vertical com coordenadas de topo (0; 0; 500)m. Contudo, o número de elementos utilizado na discretização espacial é de 200.

A corrente está totalmente orientada no eixo X global e é sempre constante, embora esta magnitude varie de simulação para simulação. Foram feitas, ao todo, 20 simulações com velocidades de corrente de 0,05m/s a 1,00m/s em incrementos de 0,05m/s.

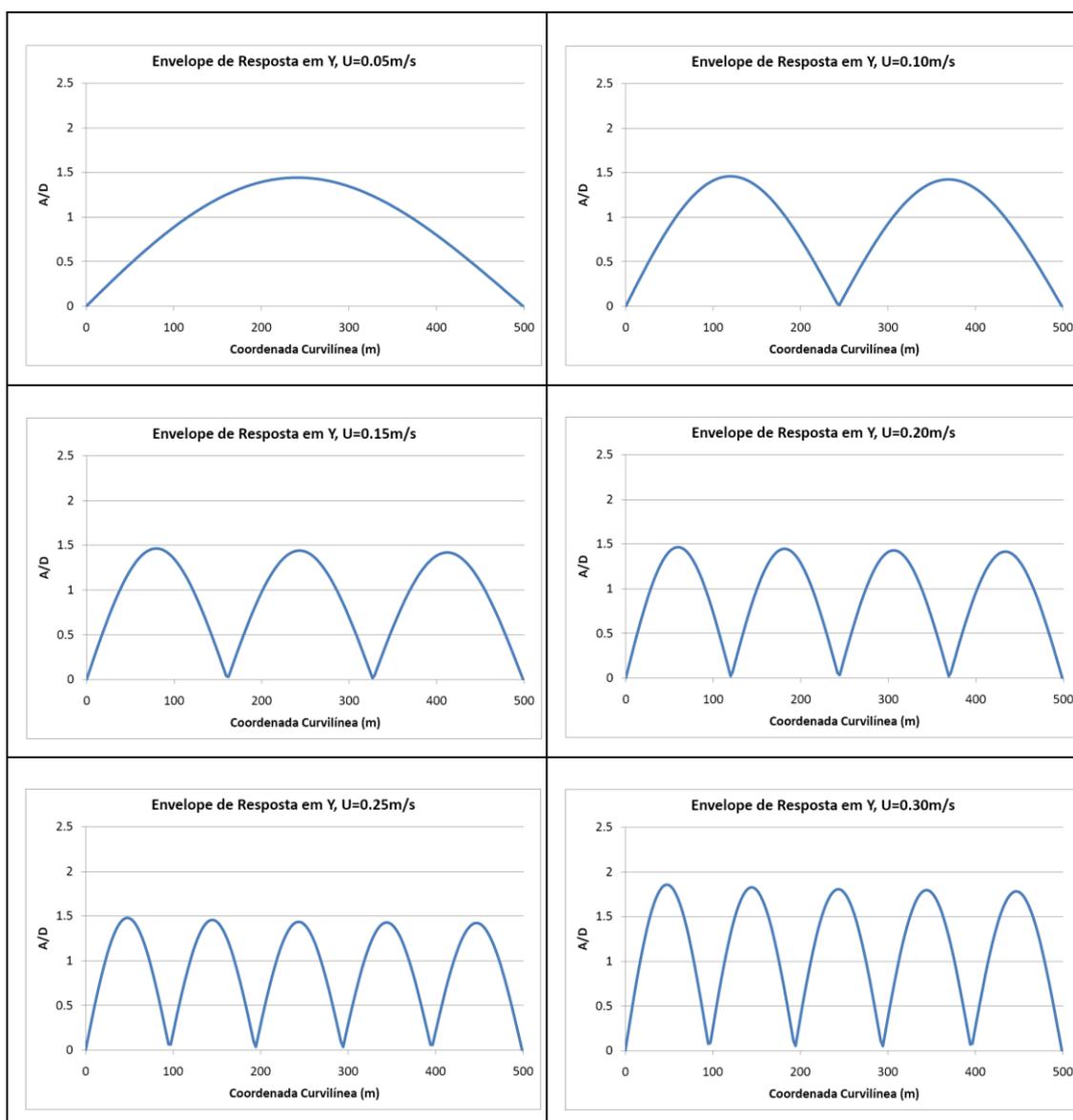
O fato de agora existirem 200 elementos faz com que não mais exista apenas uma frequência natural na direção perpendicular ao escoamento. A Figura 6.8 mostra as 20 primeiras frequências naturais em função da velocidade de corrente de cada uma das 20 simulações mencionadas.

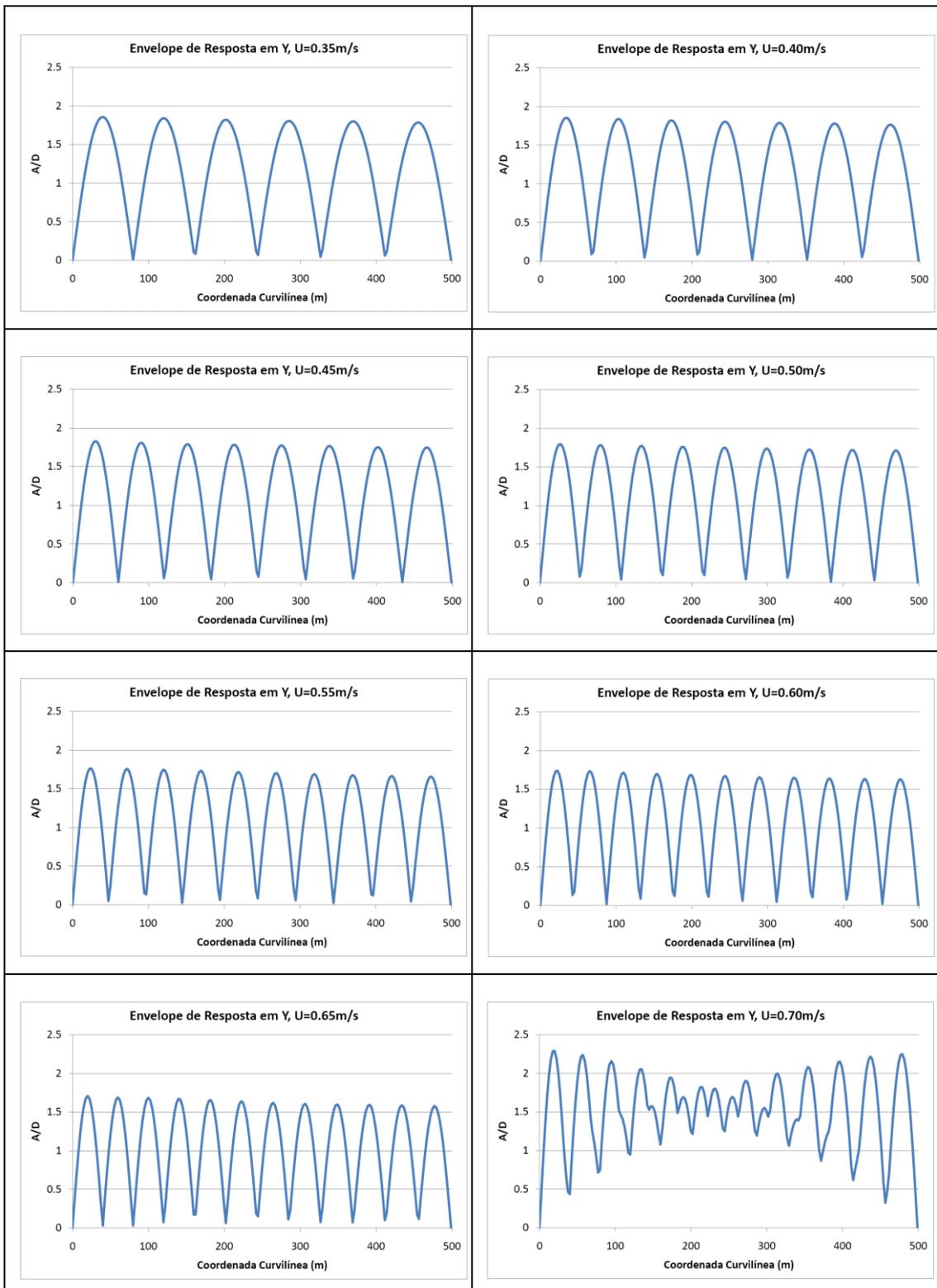


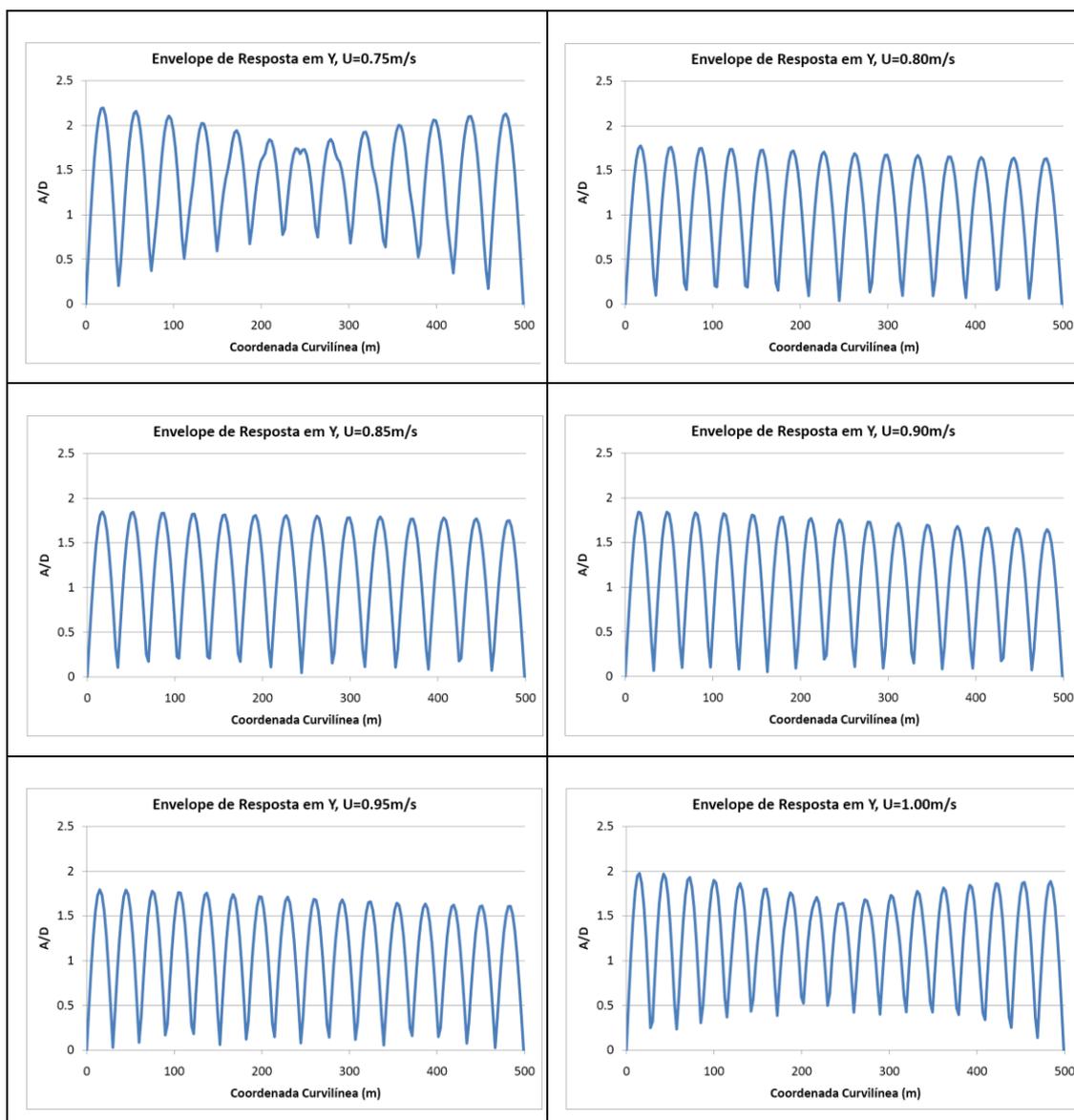
**Figura 6.8 – Frequências naturais vs. Velocidade de corrente**

Devido à alta força de tração neste caso, percebe-se que as primeiras frequências naturais são praticamente constantes, pois o acréscimo de tração ou a alteração de geometria devido à corrente marítima é muito reduzido quando comparado aos valores da solução do problema estático. Em termos de frequência de *Strouhal*, a faixa de velocidades de corrente simulada coloca um intervalo de  $0,0964Hz \leq f_s \leq 1,93Hz$ , o que seria suficiente para excitar, na direção transversal, desde o primeiro modo até por volta do 18º segundo a Figura 6.8.

Para verificar o comportamento, uma série de envelopes de movimentos na direção global Y serão apresentados na Figura 6.9.

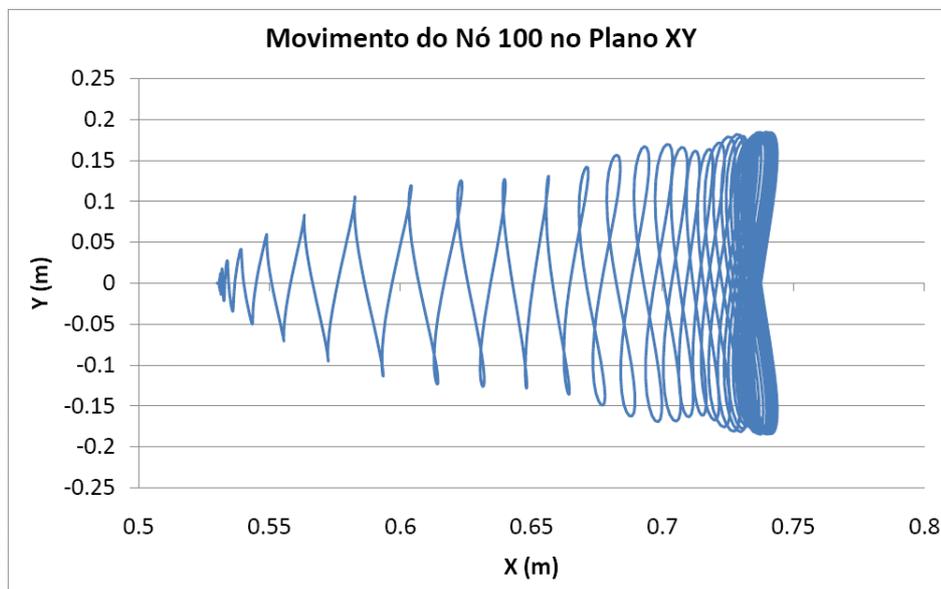




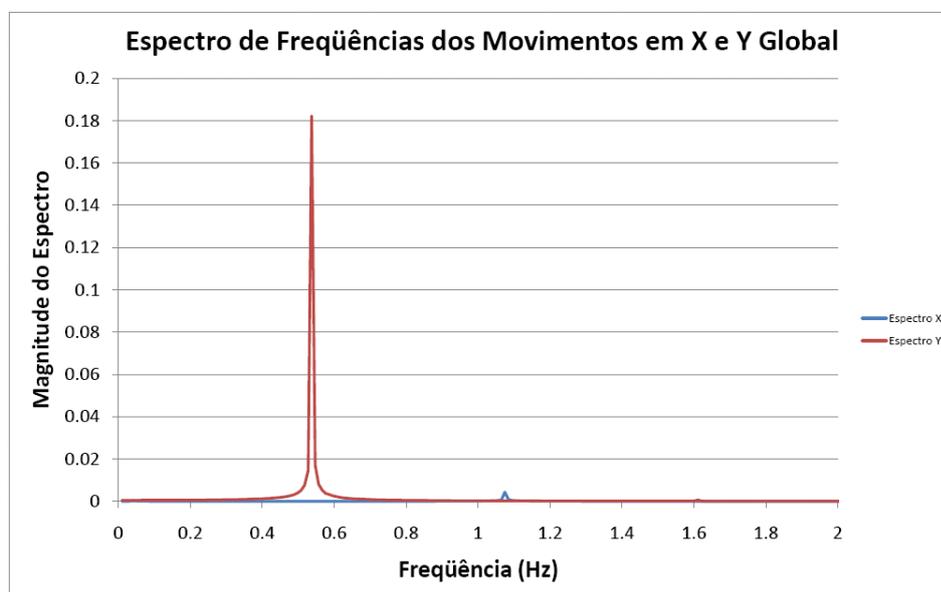


**Figura 6.9 – Envelopes de resposta na direção global Y, Estudo de Caso 2**

Observe que até velocidade de corrente 0,65m/s os envelopes foram muito “bem comportados”, com a identificação de nós estacionários que conferem a forma dos modos de vibrar com muita clareza. Apenas como caráter ilustrativo, a Figura 6.10 apresenta o caminho que o nó do centro do cabo (nó 100) faz no plano XY, a conhecida forma em “8”. Já a Figura 6.11 apresenta o espectro de frequências para o caso de velocidade de corrente 0,30m/s.



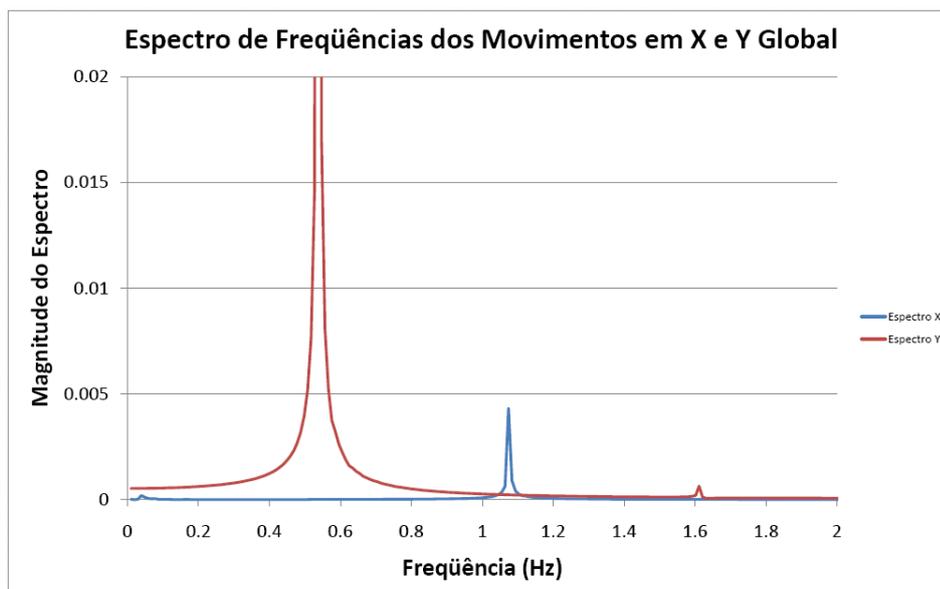
**Figura 6.10 – Movimento do nó 100 no plano XY, velocidade de corrente 0,30m/s, Estudo de Caso 2**



**Figura 6.11 – Espectro de frequências dos movimentos em X e Y, velocidade de corrente 0,30m/s, Estudo de Caso 2**

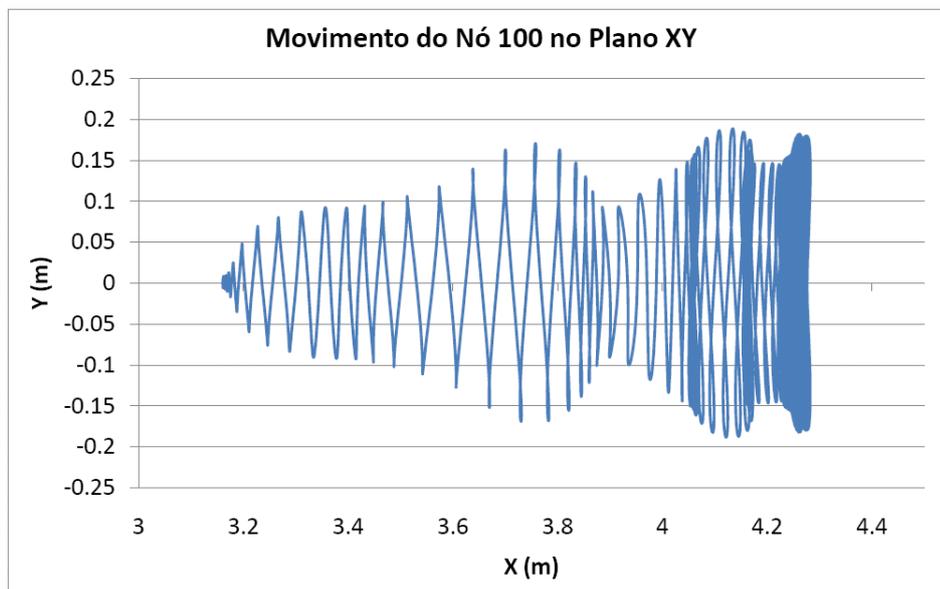
Interessante notar (veja ampliação na Figura 6.12) que existem os dois picos de frequências já esperados: o pico principal, do movimento na direção transversal ao escoamento, em 0,537Hz (a frequência de *Strouhal* neste caso é 0,579Hz), e o pico

secundário, do movimento na direção do escoamento, em 1,074Hz, o dobro do valor da frequência do primeiro pico. O curioso é que, de maneira bem discreta, aparece um terceiro pico em 1,611Hz, o triplo da frequência principal e na mesma direção. Este é o terceiro harmônico relatado na literatura, por exemplo, em BEYNET et al (2008).

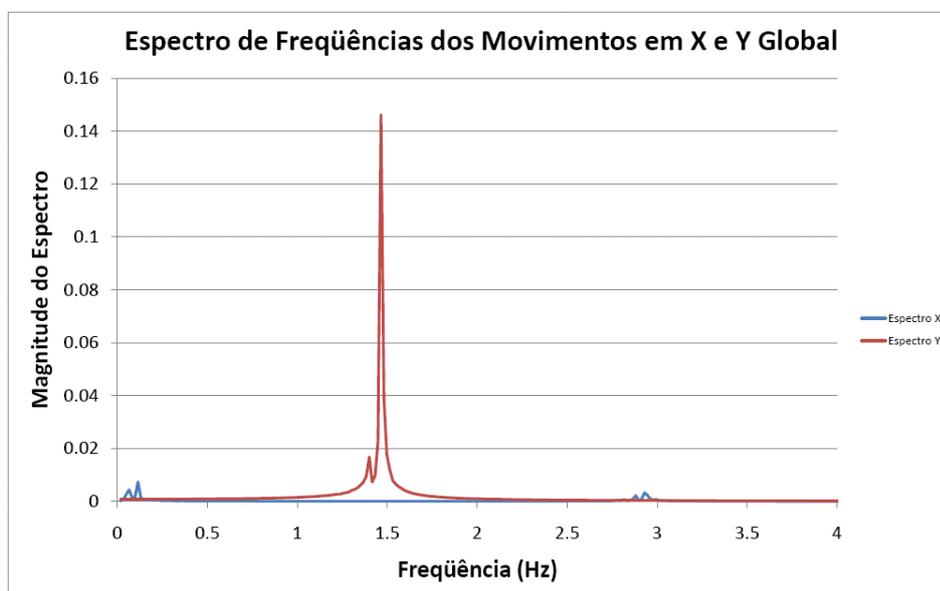


**Figura 6.12 – Espectro de frequências dos movimentos em X e Y, velocidade de corrente 0,30m/s, Estudo de Caso 2 (ampliação)**

Por outro lado, investigando agora o que ocorre no caso de velocidade de corrente 0,75m/s, os mesmos gráficos são apresentados. A Figura 6.13 apresenta o caminho que o nó do centro do cabo (nó 100) faz no plano XY. Já a Figura 6.14 apresenta o espectro de frequências para o caso de velocidade de corrente 0,75m/s.



**Figura 6.13 – Movimento do nó 100 no plano XY, velocidade de corrente 0,75m/s, Estudo de Caso 2**

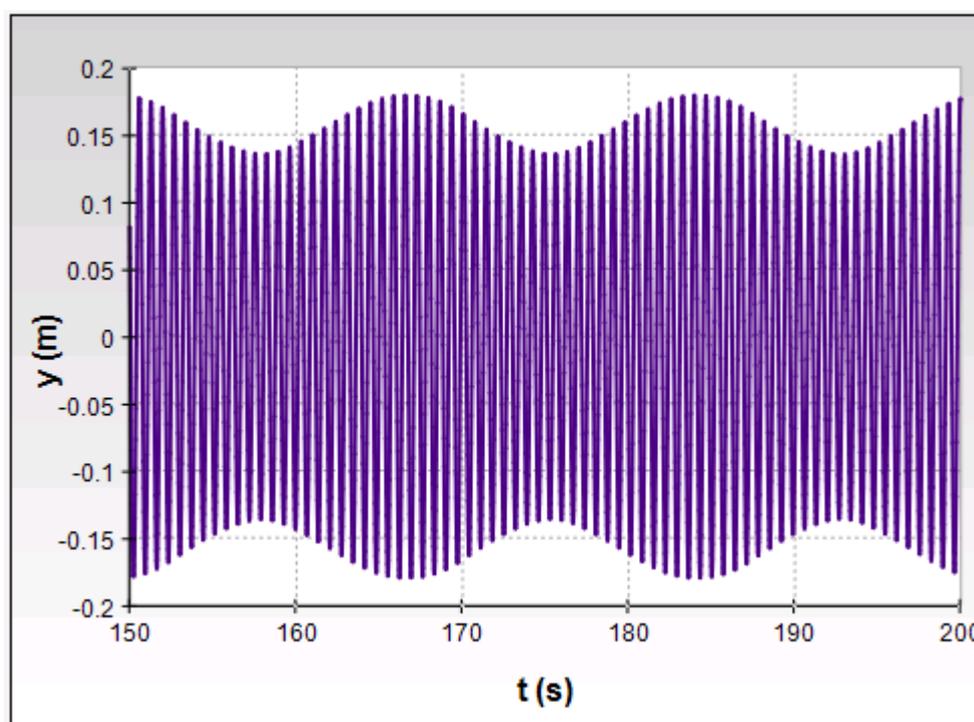


**Figura 6.14 – Espectro de frequências dos movimentos em X e Y, velocidade de corrente 0,75m/s, Estudo de Caso 2**

O pico principal do espectro indica frequência de VIV em 1,464Hz (a frequência de *Strouhal* neste caso é 1,446Hz) e existe um pico secundário em 2,929Hz, o dobro do

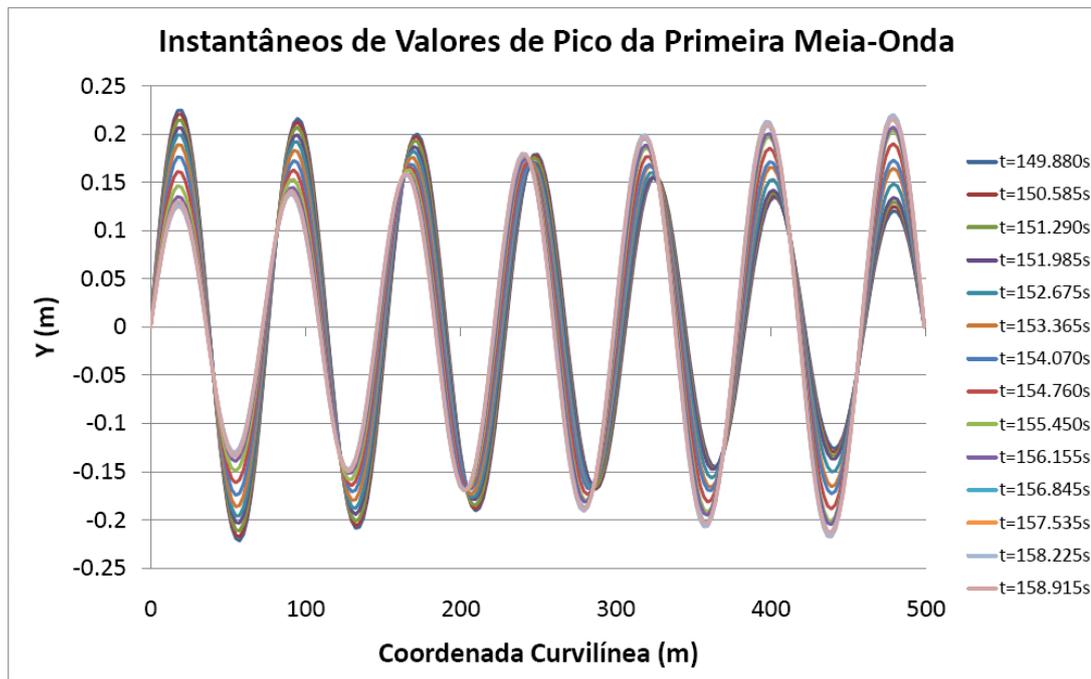
valor da frequência do primeiro pico. Existe outro pico, com relação à direção do escoamento, em frequência mais baixa.

Para entender então porque o gráfico de envelopes de movimento na direção global Y não apresenta nós estacionários, foi feito o seguinte. Observou-se que a série temporal das posições, embora regular e em equilíbrio, apresentava comportamento distinto dos demais casos conforme mostra a Figura 6.15.



**Figura 6.15 – Série temporal das posições Y nó 100, velocidade de corrente 0,75m/s, Estudo de Caso 2**

Foram buscados os instantes de tempo em que a primeira meia-onda de oscilação era máxima ao longo de diversos períodos. Percebeu-se que, devido ao comportamento da série temporal “irregular”, os máximos da primeira meia-onda – e de toda a extensão do cabo – são alterados conforme ilustra a Figura 6.16. Perceba que não é possível definir um nó estacionário ao longo de toda a extensão do cabo, embora próximo às extremidades ele quase exista. É como se além da oscilação na frequência de *Strouhal* houvesse também outra onda correndo pela extensão do cabo, talvez com a frequência do segundo pico de frequência do “Espectro Y” da Figura 6.14.



**Figura 6.16 – Instantâneos de valores de pico da primeira meia-onda, velocidade de corrente 0,75m/s, Estudo de Caso 2**

De qualquer forma, pode-se perceber que, num sistema com diversos graus de liberdade (que aumentam de acordo com o aumento do número de segmentos usados na discretização espacial do problema), o oscilador fluido dita a frequência (de *Strouhal*) e em geral haverá alguma frequência natural do oscilador elástico próxima o suficiente para que o sistema entre em ressonância.

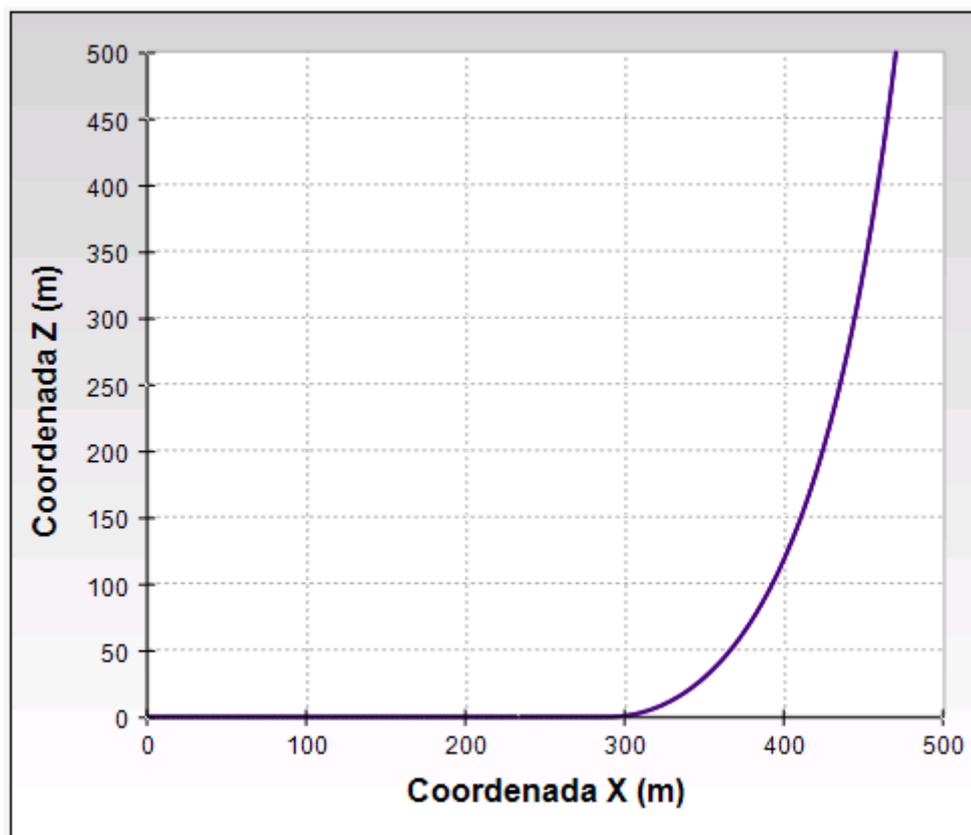
## 6.5 Estudo de Caso 3

Este estudo de caso é em catenária, ao contrário dos dois estudos de caso anteriores. O cabo submerso (ver seção 6.2.1) possui 850,0m de comprimento e tem coordenadas de topo (470; 0; 500)m. O número de elementos utilizado na discretização espacial é de 400, sendo que destes 260 são dinâmicos (os demais estão no trecho apoiado no solo na solução estática).

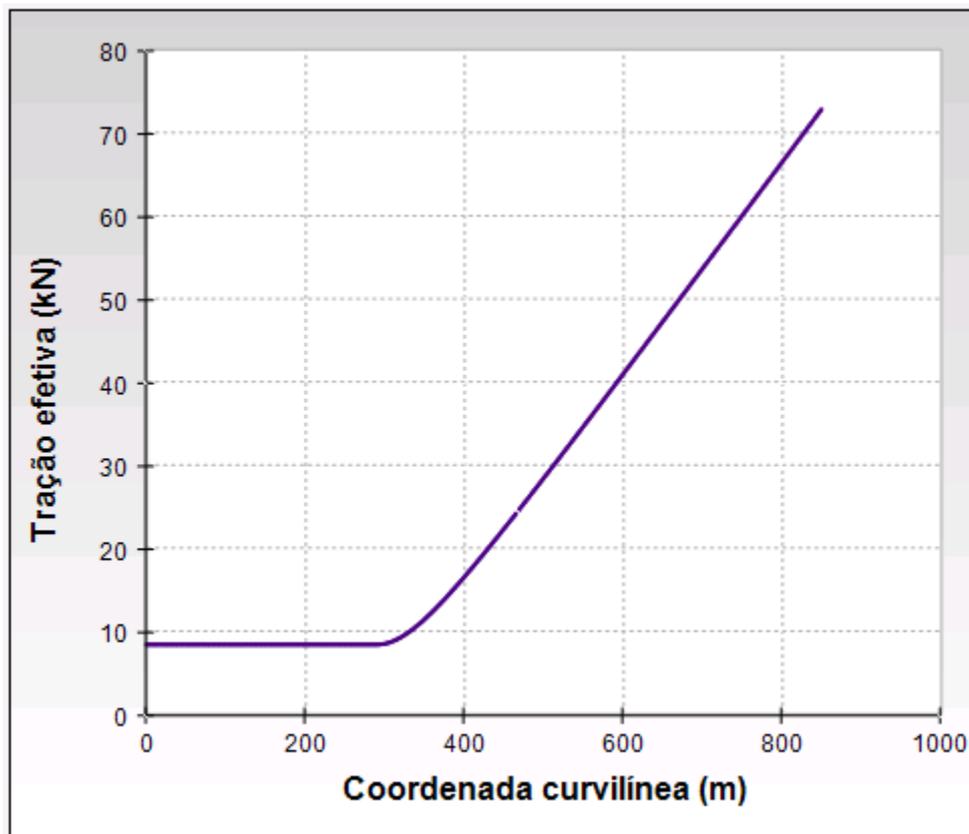
A corrente está totalmente orientada no eixo X global e é sempre constante, embora esta magnitude varie de simulação para simulação. Foram feitas, ao todo, 8

simulações com velocidades de corrente 0,05m/s, 0,10m/s, 0,15m/s, 0,20m/s, 0,25m/s, 0,30m/s, 0,40m/s e 0,5m/s.

Expondo agora os resultados da análise estática, na Figura 6.17, pode-se observar a configuração da cabo submerso no plano XY; já na Figura 6.18 é apresentada a força efetiva em cada seção do cabo. Note que esta força é bem menor que as forças envolvidas no problema de cabo vertical.

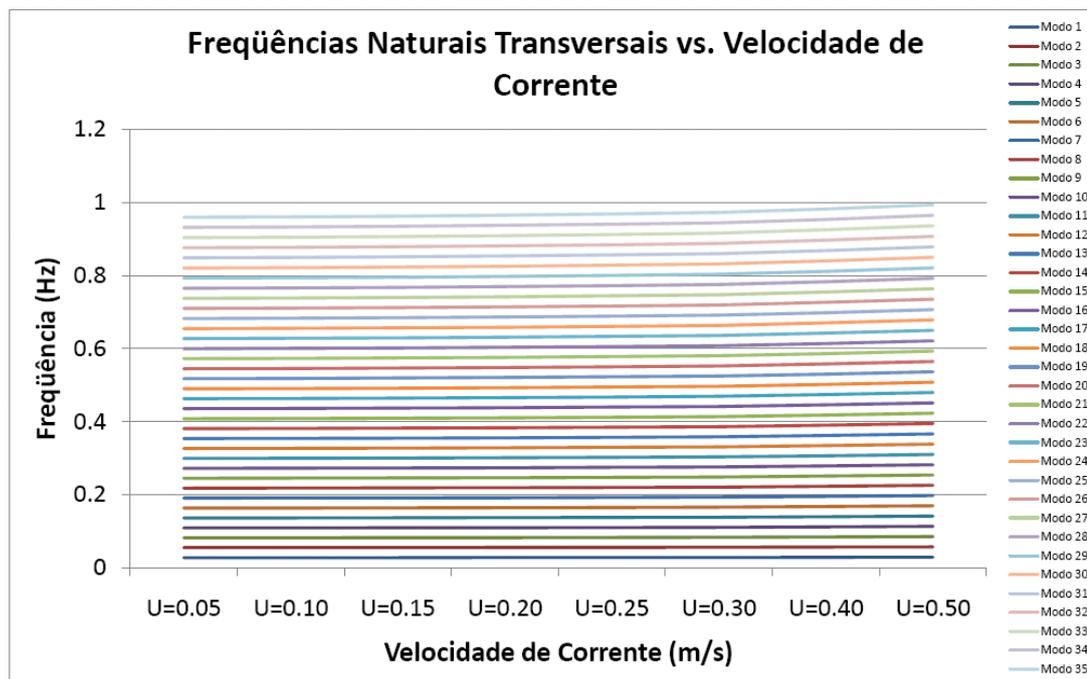


**Figura 6.17 – Configuração estática no plano XZ, Estudo de Caso 3, velocidade de corrente 0,20m/s**



**Figura 6.18 – Tração efetiva vs. coordenada curvilínea, Estudo de Caso 3, velocidade de corrente 0,20m/s**

A Figura 6.19 mostra as 35 primeiras frequências naturais em função da velocidade de corrente de cada uma das oito simulações mencionadas. Quando comparada com a Figura 6.8, nota-se que na catenária as frequências naturais ficam mais “aglomeradas”. Provavelmente é mais difícil ocorrer uma situação de modo único nesta situação.

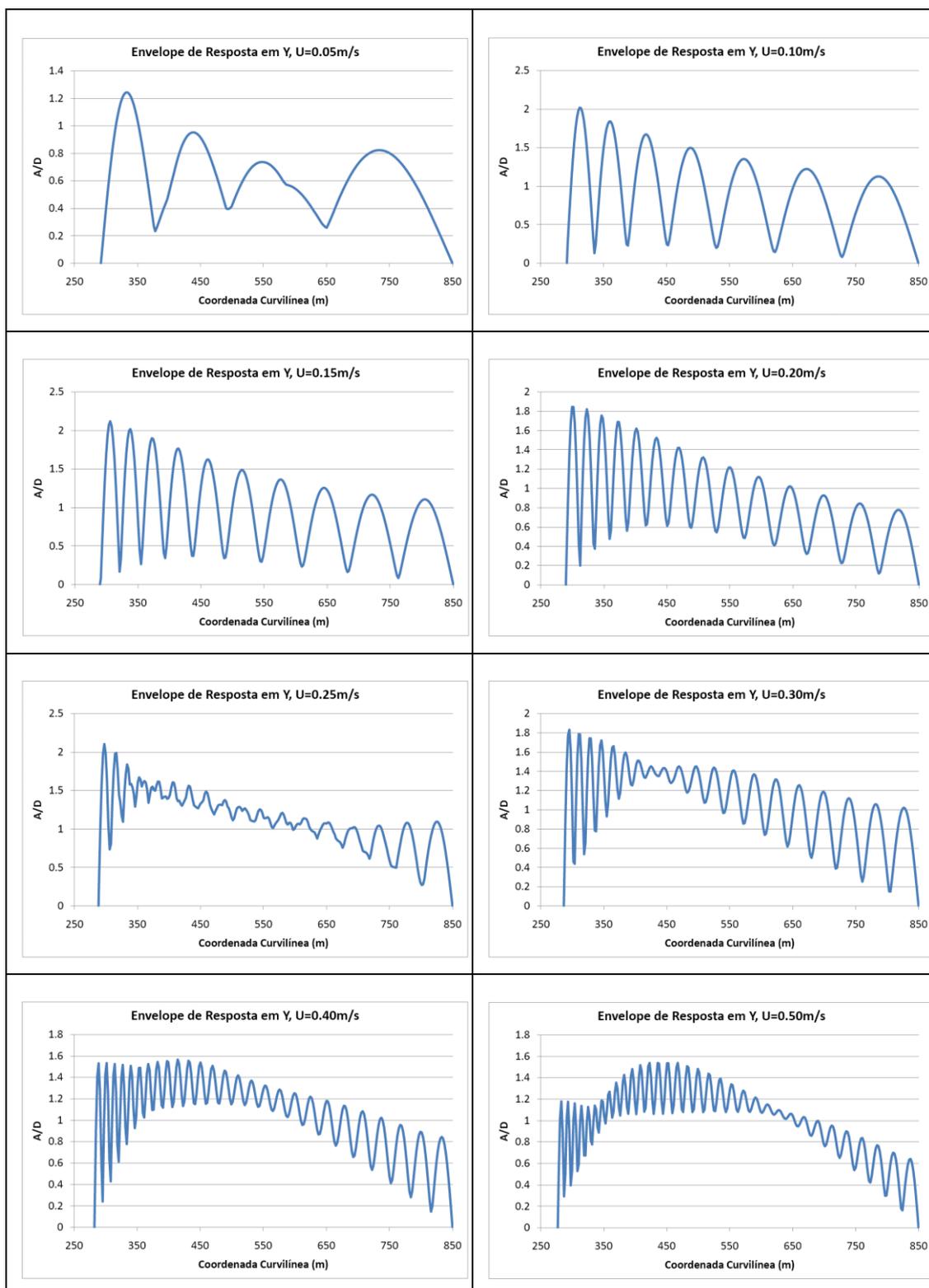


**Figura 6.19 – Frequências naturais transversais vs. Velocidade de corrente, Estudo de Caso 3**

Em termos de frequência de *Strouhal*, a faixa de velocidades de corrente simulada coloca um intervalo de  $0,0964Hz \leq f_s \leq 0,964Hz$ , o que seria suficiente para excitar desde o quarto modo até por volta do 34º modo, na direção transversal, segundo a Figura 6.19.

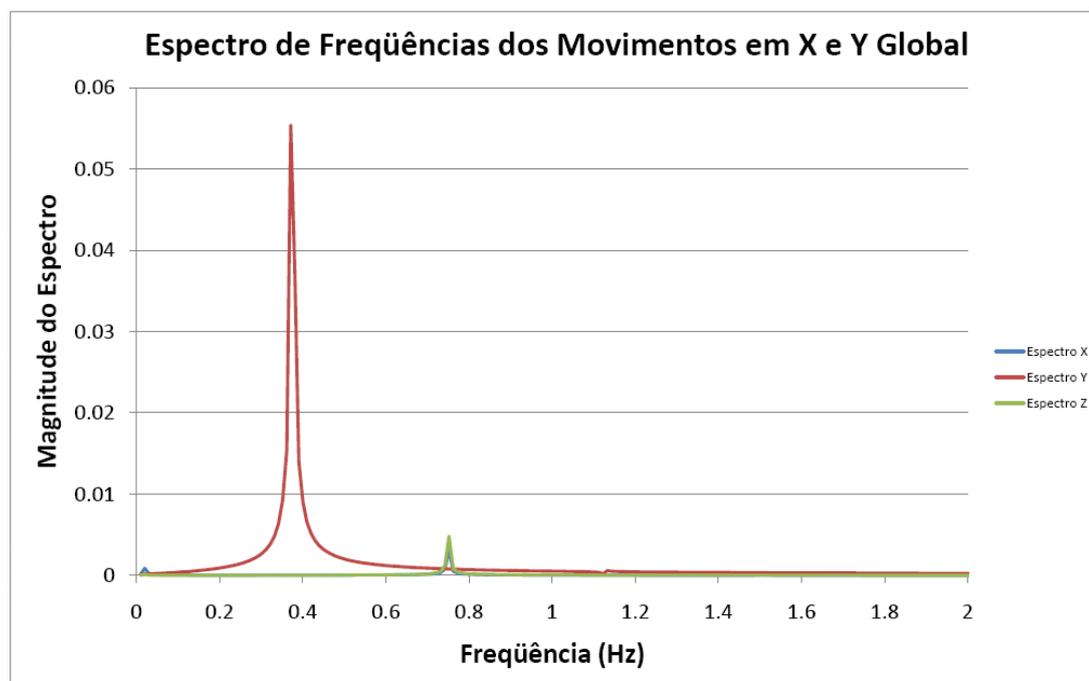
Veja que, comparando com o caso de configuração vertical, uma faixa mais estreita de velocidades, cerca de metade, excita uma faixa bem maior de frequências, cerca do dobro!

Para verificar o comportamento, uma série de envelopes de movimentos na direção global Y será apresentada na Figura 6.20.



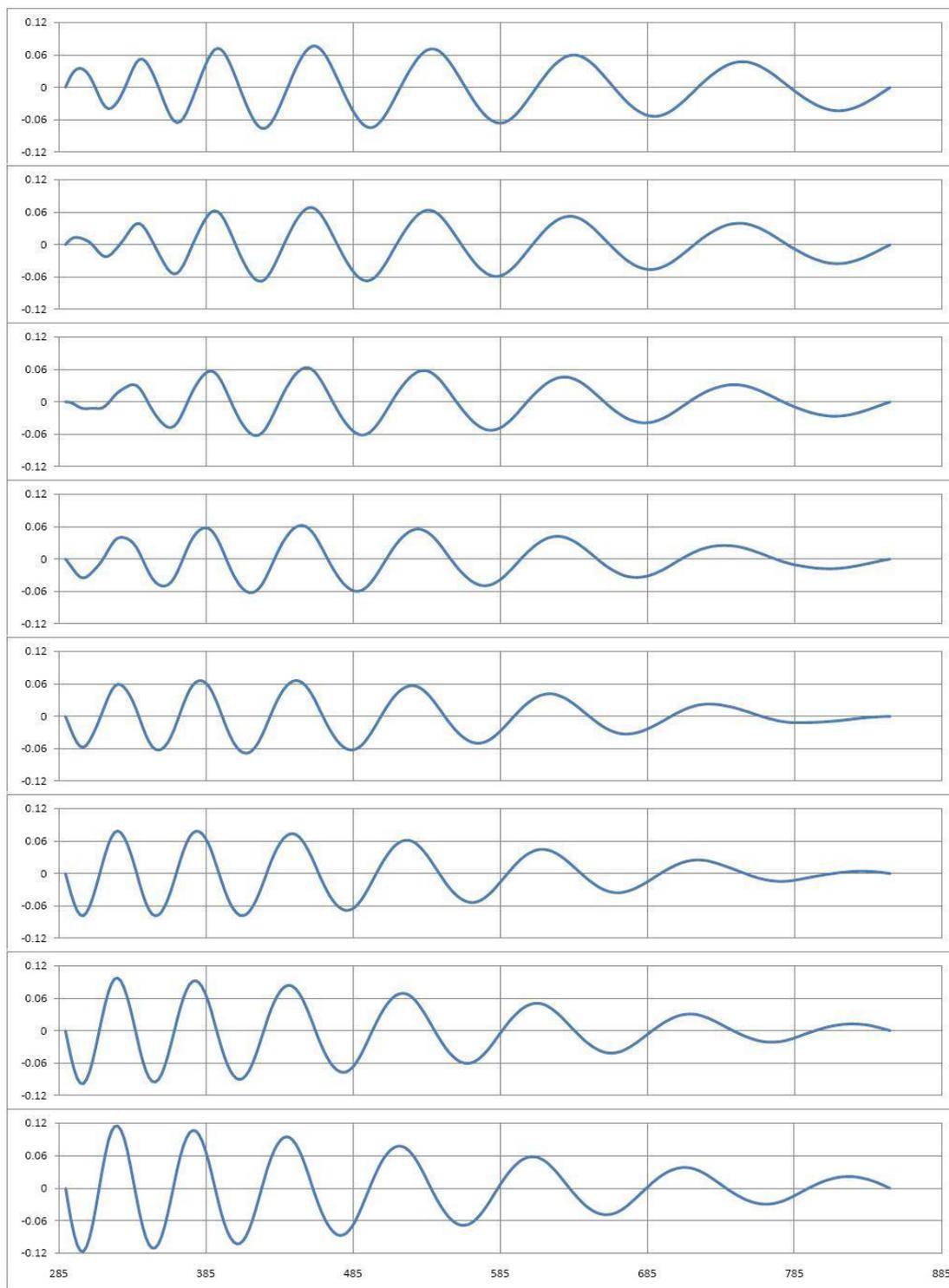
**Figura 6.20 – Envelopes de resposta na direção global Y, Estudo de Caso 3**

Para aprofundar um pouco mais o estudo, o caso com velocidade de corrente 0,20m/s será analisado em mais detalhes. Em primeiro lugar, a Figura 6.21 mostra o espectro de frequências considerando agora as três direções.



**Figura 6.21 – Espectro de frequências dos movimentos em X, Y e Z, velocidade de corrente 0,20m/s, Estudo de Caso 3**

Veja que o espectro é bem definido, com a frequência principal no movimento transversal em 0,371Hz (a frequência de *Strouhal* neste caso é 0,386Hz) e segunda frequência no movimento em X e Z em 0,752Hz, o dobro. Novamente, o motivo de não aparecer nós estacionários nos envelopes de frequência deve-se à dinâmica do oscilador elástico. Veja a Figura 6.22 que mostra uma “onda” viajando da direita para a esquerda. Este fenômeno é chamado “*travelling wave*”, ver BEYNET et al (2008).



**Figura 6.22 – Travelling wave, velocidade de corrente 0,20m/s, Estudo de Caso 3.**  
No eixo vertical, amplitude de deslocamento transversal, em metros. No eixo horizontal, coordenada curvilínea do cabo submerso, em metros, com topo na coordenada 850m (à esquerda).

## 6.6 Estudo de Caso 4

A idéia aqui é avaliar qual a alteração imposta pelo termo de variação  $\gamma \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$  que diferencia o modelo fenomenológico baseado em equação de *Van der Pol* (*Landau*) do baseado em equação de *Ginzburg-Landau*.

O caso escolhido como ponto de partida foi o do Estudo Caso 2 com velocidade de corrente igual a 0,20m/s. De modo a avaliar a implementação, optou-se por partir do modelo equivalente de *Landau*, equação (3.27). Feitas as simulações, observou-se que o resultado era o mesmo.

Para chegar ao modelo de *Ginzburg-Landau*, foi necessário arbitrar alguns valores. Tomando a notação da equação (3.31), os testes buscaram

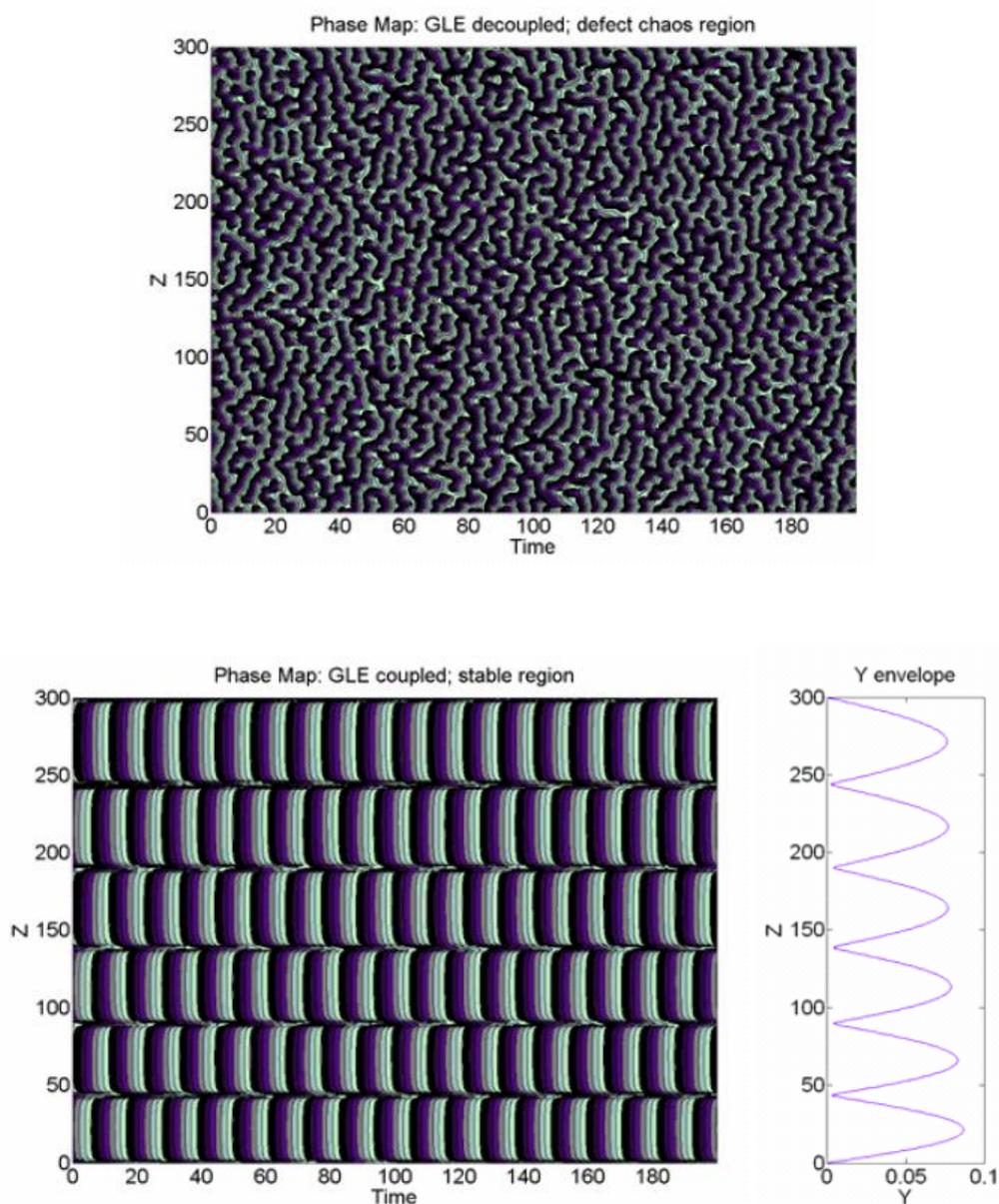
- Incluir parcela imaginária no coeficiente  $\mu$ ,
- Incluir parcela imaginária no coeficiente  $\mu$  e incluir parcela real no coeficiente  $\gamma$
- Incluir parcela imaginária no coeficiente  $\mu$  e incluir parcelas real e imaginária no coeficiente  $\gamma$ .

Em geral as escolhas tinham por base o valor de  $\text{Re}(\mu)$  (múltiplos) e também as relações entre  $\mu$  e  $\gamma$  juntamente com os critérios de estabilidade da equação de *Ginzburg-Landau*, ver seção 3.4.

Em nenhum momento foi obtida variação de frequência no oscilador elástico. Foi obtida variação da amplitude de vibrar, curiosamente num caso onde  $\gamma = 0$ . Mesmo assim, deve ser salientado que os coeficientes  $\text{Im}(\mu)$  e  $\gamma$  foram arbitrados ou, em outras palavras, não é possível varrer todo o domínio de valores possíveis e pode ocorrer de um conjunto de valores não testado neste trabalho produza resultados diversos.

Contudo, isto, de certa forma, repete os resultados encontrados por SILVEIRA, MARTINS & ARANHA (2007). No trabalho destes autores, foi mostrado que a

dinâmica do cabo submerso domina sobre a dinâmica do fluido. Assim, a correlação entre os nós dos osciladores fluidos no comprimento suspenso acaba influenciando pouco na resposta final. A Figura 6.23, extraída do trabalho mencionado, ilustra o mapa de fases caótico da resposta do oscilador fluido quando desacoplado do oscilador elástico e como este mapa de fases torna-se organizado quando este acoplamento existe. Note que esta organização está de acordo com o modo de vibrar da estrutura.



**Figura 6.23 – Mapa de fases da resposta da variável que descreve o oscilador fluido (através de equação de Ginzburg-Landau) quando desacoplada do oscilador elástico (acima) e quando acoplada ao oscilador elástico (abaixo). Note o padrão do mapa de fases quando comparado ao modo de vibrar da estrutura.**

## CAPÍTULO 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram apresentados modelos fenomenológicos usados para prever as vibrações induzidas por vórtices, a saber, modelos de IWAN & BLEVINS (1974), PARRA & ARANHA (1996) e ARANHA (2004).

Um dos objetivos deste trabalho era o de expandir os modelos fenomenológicos unidimensionais para serem incorporados em modelos tridimensionais discretos no tempo e no espaço. Este objetivo foi alcançado por meio do algoritmo delineado no Capítulo 5, mais especificamente na seção 5.5.3. Foram necessários diversos testes em fase de implementação e programação para se chegar ao melhor meio de inserir os modelos fenomenológicos no modelo dinâmico estrutural.

Um objetivo implícito foi o de adequar uma solução numérica que fosse viável em termos de tempo e esforço computacionais. A integração com método implícito, na realidade, foi a primeira escolha durante o desenvolvimento. Contudo, a falta de confiabilidade nos resultados apresentados e o ganho computacional não muito elevado fizeram com que o método explícito fosse empregado. Explica-se: vários métodos implícitos são incondicionalmente estáveis e como em geral utilizam-se passos de integração elevados para tornar o processo de inversão de matrizes atrativo, é “perigoso” passar por cima de oscilações de alta frequência que não são espúrias.

De posse do modelo numérico implementado numa ferramenta computacional, as simulações foram feitas e acabaram por exibir resultados interessantes. O comportamento qualitativo da resposta com um modelo relativamente simples não deixa de ser uma boa surpresa.

O *lock-in* foi verificado através da ressonância observada na quase totalidade dos casos estudados, que pulsaram muito próximos à frequência de Strouhal. Em

particular, o teste com o cabo de apenas um grau de liberdade obteve boa aderência aos resultados encontrados na literatura em geral no que tange à modelagem numérica do fenômeno.

Considerando que foram simuladas situações de cabos bastante tracionados (vertical) e cabos menos tracionados (catenária), a amplitude máxima de vibração normalizada pelo diâmetro ficou na faixa de 1,5 a 2,0, valores que são perfeitamente aceitáveis mas que podem ser um pouco elevados nos modos mais altos.

Outro fato que o modelo foi capaz de prever refere-se à oscilação na direção do escoamento, fato este que se deve à restituição elástica, mas que o modelo naturalmente inclui. Se for levado em conta que o coeficiente de arrasto é mantido constante – em outras palavras, o modelo pode ser melhorado neste aspecto – o resultado é ainda mais animador.

A frequência observada no movimento paralelo ao escoamento também foi predita de modo correto (assumindo que a frequência de oscilação transversal seja a correta) com valor de duas vezes a frequência de movimento transversal.

Ainda com relação à frequências, foi possível observar harmônicos superiores, mas especificamente, foi observado um terceiro harmônico que é relatado em experimentos.

Por fim, foi possível observar não só as “*standing waves*” as “*travelling waves*”. A observabilidade deste fenômeno foi mais fácil no caso de catenária, uma configuração mais complacente que a de cabo vertical. Neste último, foi visto que não necessariamente o modelo fica restrito às ondas estacionárias.

Assim, no que se refere aos objetivos propostos neste texto, pode-se dizer que foram atingidos. Um ponto que não ficou conclusivo foi a influência da parcela  $\gamma \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$  no modelo fenomenológico de *Ginzburg-Landau*. Este trabalho indica, mas não garante, que o fato dos osciladores fluidos interagirem com seus adjacentes fica em segundo plano, pois o acoplamento com o oscilador elástico é muito mais forte. Entretanto, como já dito, este ponto ficou inconclusivo.

Mesmo assim, não se pode negar a extensão de comportamentos preditos pelos modelos fenomenológicos. Há, com certeza, potencialidade do modelo para que seja empregado no uso da indústria *offshore*, pois é simples, rápido e exhibe resultados e comportamentos adequados em termos de amplitudes e frequências de oscilação.

Obviamente, é preciso que as pesquisas nesta linha sejam continuadas e, neste aspecto, são feitas três sugestões.

A primeira é avaliar a viabilidade de se introduzirem coeficientes hidrodinâmicos (arrasto e massa adicional) variáveis com o número de *Reynolds*. Esta situação, já analisada por FUJARRA (2002) pode ser promissora em busca de melhorar as amplitudes de oscilação na direção paralela ao fluxo hidrodinâmico.

A segunda é estudar como trabalhar com movimentos impostos ao topo do cabo submerso junto com o modelo fenomenológico para predição de VIV. Como já mencionado na seção 5.2.2, é preciso um estudo cuidadoso para verificar como as velocidades induzidas pelo movimento imposto influem nas forças de sustentação. Esta sugestão pode estar diretamente ligada à primeira sugestão, mas há de se investigar.

Por fim, a terceira sugestão está relacionada a um estudo sobre os coeficientes da equação de *Ginzburg-Landau* mais apurado. ARANHA (2004) expõe o modelo como solução assintótica das equações de *Navier-Stokes* de modo que os coeficientes podem ser calculados. Um esforço neste sentido irá indicar de modo mais consistente se o oscilador elástico realmente se sobrepõe à interação entre os osciladores fluidos adjacentes.

## REFERÊNCIAS

ABO-ELSOUD, M. Phenomenological model for creep behavior in Cu-8.5 at.% Al Alloy. **Progress in Physics**, v. 3, p. 88 – 90, 2006.

ALBAREDE, P.; PROVANSAL, M.; BOYER, L. Modélisation par l'équation Ginzburg-Landau du sillage tridimensionnel d'un obstacle allongé. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences**, v. 310, n.5, p. 459 – 464, 1990.

ARANHA, J. A. P. Weak three dimensionality of a flow around a slender cylinder: The Ginzburg-Landau Equation. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXVI, No. 4, p. 355 – 367, 2004.

ÁSSI, G. R. S. **Estudo experimental do efeito de interferência no escoamento ao redor de cilindros alinhados**. São Paulo: Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2005.

BRASIL. Lei n. 9478 de 6 de agosto de 1997. Dispõe sobre a política energética nacional, as atividades relativas ao monopólio do petróleo, institui o Conselho Nacional de Política Energética e a Agência Nacional do Petróleo. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 7 ago. 1997.

BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, International Series in Pure and Applied Mathematics. New York: McGraw-Hill, 1978, p. 544 – 566.

BEYNET, P.; SHILLING, R.; CAMPBELL, M.; TELLIER, E.; HOWELLS, H. Full Scale VIV response measurements of a drill pipe in the Gulf of Mexico loop currents. **Proceedings of the 27th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**. Estoril: 2008.

BISHOP, R. E. D.; HASSAN, A. Y. The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing field. **Proceedings of the Royal Society**, v. 277, series A, p. 51 – 75, 1964.

CARMO, B. S. **Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros alinhados**. São Paulo: Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2005.

CHAPLIN, J. R. et al. Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. **Journal of Fluids and Structures**, v. 21, p. 25 – 40, 2005.

CIRILO JÚNIOR. **Petrobras prevê produção-piloto de 100 mil barris em Tupi a partir de 2011**. Sítio do jornal Folha de S. Paulo. Disponível em: <<http://www1.folha.uol.com.br/folha/dinheiro/ult91u343991.shtml>>. Acesso em 06 abr. 2008.

CUNHA, L. D. **Vibração induzida por vórtices: análise crítica de modelos fenomenológicos**. São Paulo: Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2005.

DET NORSKE VERITAS. Free spanning pipelines. **Recommended Practice RP-F105**, 2002.

DET NORSKE VERITAS. Riser Fatigue. **Recommended Practice RP-F204**, 2005.

FACCHINETTI, M.; DE LANGRE, E.; BIOLLEY, F. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. **Journal of Fluids and Structures**, v. 19 (2), p. 123 – 140, 2004.

FALCO, M., FOSSATI, F., RESTA, F. On the vortex induced vibration of submarine cables: design optimization of wrapped cables for controlling vibrations. **Proceedings of the Third International Symposium on Cable Dynamics**. Trondheim: 1999.

FALTINSEN, O. M. **Sea loads on ships and offshore structures**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990, 327pp.

FENG, C.C. **The measurements of vortex-induced effects in flow past a stationary and oscillating circular and D-section cylinders**. Vancouver: Dissertação (Mestrado), University of British Columbia, 1968.

FEY, U.; KÖNIG, M.; ECKELMANN, H. A New Strouhal-Reynolds number relationship for the circular cylinder in the range  $47 < Re < 2 \times 10^5$ . **Physics of Fluids**, v. 10, n.7, p. 1547 – 1549, 1998.

FUJARRA, A. L. C. **Estudos Experimentais e Analíticos das Vibrações Induzidas pela Emissão de Vórtices em Cilindros Flexíveis e Rígidos**. São Paulo: Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 234p, 2002.

GERRARD, J. H. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 25, n.2, p. 401 – 413, 1966.

HARTLEN, R. T.; CURRIE, I. G. Lift oscillator model of vortex-induced vibrations. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 96 (5), p. 577 – 591, 1970.

IWAN, W. D.; BLEVINS, R. D. A model for vortex-induced oscillation of structures. **Journal of Applied Mechanics**, v. 41, p. 581 – 586, 1974.

KHALAK, T.; WILLIAMSON, C. H. K. Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping. **Journal of Fluids and Structures**; v. 13, p.813 – 851, 1999.

KELLER, H. B. Numerical methods for two-point boundary-value problems. Waltham: Blaisdel, 1968, 184pp.

LARSEN, C.M., et al. **VIVANA – Theory manual**. Trondheim: Marintek, 2000.

LEWEKE, T.; PROVANSAL, M. Model for the transition in bluff body wakes. **Physical Review Letters**, v. 72 (20), p. 3174 – 3177, 1994.

MAGOON, L. B.; DOW, W. G. The petroleum system. In: MAGOON, L. B; DOW, W. G. **The petroleum system – from source to trap**. Tulsa: AAPG Memoir 60, 1994, p. 3-24.

MARTINS, C. A. **Análise dinâmica da operação de resgate lateral de oleoduto submarino**. São Paulo: Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 284p, 1984.

MARTINS, C. A. **Poliflex versão 1.0**: Manual do usuário. São Paulo: Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1998.

MARTINS, C. A. **Uma ferramenta expedita para estudo de viabilidade de risers rígidos em catenária**. São Paulo: Tese (Livre-Docência) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2000.

MONKEWITZ, P. A. Modeling of self-excited wake oscillations. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 12, p. 175 – 183, 1996.

NERO, R. W. A phenomenological model to predict the density and distribution of pacific hake by season and geography. Arlington: Naval Research Laboratory, 2000.

PARRA, P; ARANHA, J. A. P. Vibrações induzidas por emissão de vórtices: modelo fenomenológico e experimentos. São Paulo: EPUSP/PNV, 1996. 46 p. (Apostila).

PESCE, C. P. **Mecânica de cabos e tubos submersos lançados em catenária**: Uma abordagem analítica e experimental. São Paulo: Tese (Livre-Docência) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1997.

PESCE, C. P.; MARTINS, C. A. Numerical computation of riser dynamics. In: CHAKRABARTI, S. K. **Numerical models in fluid-structure interaction**: Series: advances in fluid mechanics, v. 42. Southampton: WIT Press, 2005. Capítulo 7, p. 253 – 310.

PETROBRAS. Sítio institucional da Petrobras S.A. Disponível em: <<http://www.petrobras.com.br>>. Acesso em: 06 abr. 2008.

PETROBRAS. **Structural analysis of umbilicals**. Rio de Janeiro: Petrobras, 2003.

PETROBRAS. Requisitos adicionais de qualificação e testes de umbilicais. Rio de Janeiro: Petrobras, 2004.

SANTOS, M. F. **Mecânica global tridimensional de linhas submersas**. São Paulo: Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2003.

SARPKAYA, T. A critical review of the intrinsic nature of vortex induced vibrations. **Journal of Fluids and Structures**, v. 19 (4), p. 389 – 447, 2004.

SHRAIMAN, B.; PUMIR, A.; VAN SAARLOS, W.; HOHENBERG, P.; CHATÉ, H.; HOLEN, M. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. **Physica**, v. 57, p. 241 – 248, 1992.

SILVEIRA, L. M. Y.; MARTINS, C. A. A numerical method to solve the static problem of a catenary riser. **Proceedings of the 23rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**. Vancouver: 2004.

SILVEIRA, L. M. Y.; MARTINS, C. A. A numerical method to solve the three-dimensional static problem of a riser with bending stiffness. **Proceedings of the 24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**. Halkidiki: 2005.

SILVEIRA, L. M. Y.; MARTINS, C. A.; CUNHA, L. D.; PESCE, C. P. An investigation on the effect of tension variation on VIV of risers. **Proceedings of the 26th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**. San Diego: 2005.

SILVEIRA, L. M. Y.; MARTINS, C. A.; ARANHA, J. A. P. A qualitative study of the response of the Ginzburg-Landau Equation when coupled to the structural model of a submerged cable. **Proceedings of the 5th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations**, Costa do Sauípe, 2007.

SPENCER JUNIOR, B. F.; DYKE, S. J.; SAIN, M. K.; CARLSON, J. D. Phenomenological model of a magneto-rheological damper. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 123, p. 230 – 238, 1997.

TRANTAFYLLOU, M. S. The dynamics of taut inclined cables. **Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics**, v. 37, Pt. 3, 1984.

TRANTAFYLLOU, M. S. **VIVA extended user's manual**. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, Department of Ocean Engineering, 2003.

VANDIVER, J. K. **User guide for SHEAR7**. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, Department of Ocean Engineering, 1999.

VAN DYKE, M. **An album of fluid motion**. The Parabolic Press, 1982.

ZDRAVKOVICH, M. M. **Flow around circular cylinders – Vol. 1: Fundamentals**. Oxford: Oxford University Press, 1997.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)