

Estabilidade de hipersuperfícies de curvatura média constante em variedades Riemannianas de curvatura seccional constante

Dissertação de Mestrado de
Loisi Carla da Silva Monteiro

Orientadora: Prof^a. Katia Rosenvald Frensel

Pós-Graduação em Matemática
Instituto de Matemática
Universidade Federal Fluminense
Niterói, Rio de Janeiro, 31 de maio de 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

*Aos meus queridos pais Valdete Silva Monteiro
e José da Silva Monteiro por seu exemplo
de coragem, esperança e muito amor.*

Agradecimentos

Ao soberano Deus que sempre esteve ao meu lado, nas minhas fraquezas, nas alegrias e tristezas, nas lutas e controvérsias. Sei que, também agora, neste momento tão importante de minha vida está ao meu lado.

Aos meus pais, por seu apoio, sua força e seu amor gratuito.

Ao meu esposo Eder por sua paciência, compreensão e apoio nos momentos bons e difíceis.

À minha orientadora e amiga Kátia, por sua dedicação e apoio em todos os momentos, a qual sempre terei um profundo carinho.

Ao professor Jorge Delgado pelo seu imenso apoio.

Aos meus amigos, por estarem sempre me incentivando e trazendo um sorriso nos lábios nos momentos de desânimo e cansaço, caminhando junto comigo em todas as horas, especialmente agradeço aos amigos Rogério, Ana Tércia e Mariana.

Aos professores da UFF, que direta e indiretamente contribuíram para a minha formação.

A todos da Secretaria da Pós-Graduação da UFF e da Biblioteca que sempre foram compreensivos e carinhosos comigo.

E a todo aqueles que não pude mencionar, agradeço de todo coração pela força.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	6
2 As hipersuperfícies umbílicas	17
2.1 O espaço hiperbólico	17
2.2 As hipersuperfícies umbílicas do espaço euclidiano	31
2.3 As hipersuperfícies umbílicas da esfera	34
2.4 As hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico	41
3 Espectro da Esfera	54
3.1 Gradiente, Divergência e Laplaciano	54
3.2 Espectro da esfera	64
4 Estabilidade de Hipersuperfícies de curvatura média constante	70
4.1 Problema variacional das hipersuperfícies com curvatura média constante	70
4.2 Demonstração do teorema A	79
A Referencial geodésico	93
B Fórmulas da Primeira e Segunda Variação da Área	96

C Sobre a definição de estabilidade	110
D Campos de Killing e campos de Jacobi em variedades de curvatura média constante	113
Referências Bibliográficas	121

Introdução

Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante de uma variedade Riemanniana conexa orientável n -dimensional M^n em uma variedade Riemanniana orientada $(n+1)$ -dimensional \overline{M}^{n+1} . Assim como as hipersuperfícies mínimas, as hipersuperfícies com curvatura média constante são os pontos críticos de um problema variacional. Mais precisamente, x tem curvatura média constante se, e só se, x é um ponto crítico da n -área $A(t)$ para todas as variações $\{x_t\}$ de x , $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com suporte compacto que preservam o "volume" $V(t)$, isto é, $V(t) = V(0)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (ver capítulo 4).

Em analogia com o método dos multiplicadores de Lagrange, uma maneira de encontrar os pontos críticos do problema variacional acima descrito, consiste em determinar os pontos críticos de $J(t) = A(t) + \lambda V(t)$, $\lambda = \text{const.}$, para todas as variações $\{x_t\}$ com suporte compacto, sem restrições adicionais. Quando $\lambda = nH_0$, onde H_0 é o valor médio da curvatura média, os dois problemas variacionais são equivalentes e os pontos críticos de ambos são as hipersuperfícies de curvatura média constante H_0 (ver proposição 4.6).

Porém, quando se trata da segunda variação, os dois problemas variacionais não são equivalentes, fato abordado na literatura clássica do Cálculo das Variações ([8], pp 472–473). De fato, a segunda variação $A''(0)$ é não-negativa para toda variação com suporte compacto que preserva volume se, e só se, $J''(0)(f) \geq 0$ para toda variação com suporte compacto $\{x_t\}$ que satisfaz a condição adicional $\int_M f dM = 0$, onde f é a componente normal do campo variacional de $\{x_t\}$ (ver proposição 4.9).

Dizemos, então, que uma imersão $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ com curvatura média constante é estável se, e só se, $A''(0) \geq 0$ para toda variação com suporte compacto que preserva volume, ou, de modo

equivalente, se $J''(0)(f) \geq 0$ para toda variação com suporte compacto tal que $\int_M f \, dM = 0$.

Portanto, a questão de estabilidade das hipersuperfícies de curvatura média constante M^n em \overline{M}^{n+1} está relacionada ao problema isoperimétrico em \overline{M}^{n+1} que consiste em determinar dentre todas as hipersuperfícies compactas sem bordo que envolvem o mesmo volume, qual a que tem menor área, pois tal hipersuperfície, caso exista e seja diferenciável, é uma hipersuperfície com curvatura média constante estável em \overline{M}^{n+1} . O primeiro tratamento rigoroso do problema foi feito por Schwarz (1884) que provou que uma tal superfície em \mathbb{R}^3 existe e é a esfera. Posteriormente, foi provado que as esferas geodésicas são as únicas soluções do problema isoperimétrico nos espaços completos, simplesmente conexos, de curvaturas seccionais constantes (ver [26]).

Como todos os outros pontos críticos, e não apenas o mínimo absoluto, são superfícies de curvatura média constante, colocou-se naturalmente a pergunta: *quais são as superfícies compactas sem bordo com $H = \text{const.}$?* Como o único exemplo que se conhecia era a esfera, tornou-se famosa a conjectura de Hopf: *a esfera é a única superfície imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante.* Alguns resultados nesta direção foram provados. H. Hopf (ver [17]), em 1951, provou que se M tem a topologia da esfera, então M é a esfera, e A.D. Alexandrov [3], em 1956, mostrou que se M está mergulhada em \mathbb{R}^3 , isto é, não possui auto-interseções, então M também é, neste caso, uma esfera. E, finalmente, em 1984, J. Barbosa e M. Do Carmo [4] provaram o seguinte resultado: *Sejam M^n uma variedade compacta e $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. Então x é estável se, e só se, $x(M^n)$ é uma esfera.*

As propriedades físicas das películas de sabão têm como conseqüência o fato de que a curvatura média da película em cada ponto é proporcional à diferença de pressão do ar nos dois lados da superfície. Desse modo, uma bolha de sabão tem curvatura média constante, determinada pela diferença de pressão no interior e no exterior. A conjectura de Hopf tem, então, uma versão física bastante interessante: *Uma bolha de sabão pode ter uma outra forma além da esférica?* Sendo fisicamente realizáveis, as bolhas de sabão são estáveis e, portanto, o resultado de J. Barbosa e M. Do Carmo mostra que a resposta à pergunta acima é negativa.

Somente em 1986, H. Wente [31] mostrou a existência de uma superfície compacta imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante que tem a topologia de um toro, dando assim um contra-

exemplo à conjectura de Hopf. Para $n > 2$, em 1983, W. Y. Hsiang, Z.H. Teng e W. Yu [16] já haviam dado exemplos de hipersuperfícies não esféricas compactas imersas em \mathbb{R}^{n+1} com curvatura média constante. Estas hipersuperfícies e o exemplo de Wente, são, portanto, pelo teorema de J. Barbosa e M. Do Carmo, não estáveis.

O objetivo principal desta dissertação é provar o seguinte teorema de J. Barbosa, M. Do Carmo e J. Eschenburg [5], que generaliza o resultado acima citado [4] para hipersuperfícies imersas em uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante c , que será denotada por $\overline{M}^{n+1}(c)$.

Teorema A. *Sejam M^n uma variedade compacta e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão com curvatura média constante. Então x é estável se, e só se, $x(M^n) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ é uma esfera geodésica.*

Vale a pena observar que as esferas geodésicas não são estáveis se consideramos todas as variações, e não apenas aquelas que preservam volume. Em particular, um equador de uma $(n + 1)$ -esfera, como hipersuperfície mínima, não é estável (ver observação 4.15).

Para um espaço ambiente arbitrário, a situação não é tão simples. Por exemplo se $\overline{M}^{n+1} = P^{n+1}\mathbb{K}$ é o espaço projetivo sobre o corpo \mathbb{K} com métrica de diâmetro $\frac{\pi}{2}$ e curvaturas seccionais entre 1 e 4, onde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ e n é par para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então certos tubos ao redor de subespaços projetivos são estáveis e, para $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$, nem todas as esferas geodésicas são estáveis. Além disso, existem em $P^{n+1}\mathbb{K}$, para todo \mathbb{K} , esferas geodésicas estáveis que não são solução para o problema isoperimétrico [5].

Para o caso completo não-compacto, foi provado primeiro que o plano é a única superfície completa mínima estável em \mathbb{R}^3 (Do Carmo e Peng [12], Fischer-Colbrie e Schoen [13], Pogorelov [23]). Posteriormente, A. da Silveira [28] generalizou o resultado para superfícies de curvatura média constante. Mais precisamente, ele provou que quando $x : M^2 \longrightarrow \overline{M}^3(c)$ tem curvatura média constante H e M^2 é completa e não-compacta, então

- (a) se $c = 0$, x é estável se, e somente se, $x(M) \subset \mathbb{R}^3$ é um plano;
- (b) se $c = -1$ e $H \geq 1$, x é estável se, e somente se, $x(M) \subset \mathbb{H}^2(-1)$ é uma horoesfera;
- (c) se $c = -1$ e $0 \leq H < 1$, então existe pelo menos uma família a um parâmetro de mergulhos

estáveis e não umbílicos;

(d) se $c = 1$, então x não é estável.

Para $n > 2$, alguns resultados parciais são conhecidos tanto para $H = 0$ quanto para $H = \text{const.}$ Ver, por exemplo, as referências [2], [6], [25], [27] e [14].

A dissertação está organizada da seguinte maneira. No capítulo 1, damos algumas definições, para fixar a notação, e enunciamos alguns resultados que serão usados ao longo do trabalho. No capítulo 2, fazemos um estudo dos modelos do semi-espaço, da bola e de Lorentz do espaço hiperbólico, determinamos as hipersuperfícies umbílicas de $\overline{M}^{n+1}(c)$ e provamos que as esferas geodésicas são as únicas hipersuperfícies umbílicas compactas de $\overline{M}^{n+1}(c)$. No capítulo 3, provamos alguns resultados gerais sobre o operador Laplaciano de uma variedade Riemanniana, além de determinarmos os valores e espaços próprios do Laplaciano da esfera, que é essencial para a demonstração de que toda esfera geodésica em $\overline{M}^{n+1}(c)$ é estável. No capítulo 4, damos as definições e provamos os resultados básicos do problema variacional das hipersuperfícies com curvatura média constante, além, é claro, de demonstrarmos o teorema principal da dissertação.

Incluimos também 4 apêndices. No apêndice A, provamos a existência de um referencial geodésico diferenciável em torno de qualquer ponto de uma variedade Riemanniana. No apêndice B, provamos as fórmulas da primeira variação e da segunda variação para hipersuperfícies com $H = \text{const.}$ No apêndice C, damos uma definição de estabilidade equivalente à dada no capítulo 4 para hipersuperfícies compactas com ou sem bordo. E finalmente, no apêndice D, apresentamos uma maneira de construir campos de Jacobi a partir dos campos de Killing na variedade ambiente. Apesar dos resultados deste último apêndice não serem utilizados na demonstração do teorema A, resolvemos prová-los, por serem interessantes por si próprios, além de serem fundamentais no restante do artigo [5].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos dar algumas definições, para fixar a notação, e enunciar alguns resultados que serão usados ao longo da dissertação. Para maiores detalhes ver [11].

Definição 1.1. Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$, onde T_pM é o plano tangente de M no ponto p . O campo é *diferenciável* se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável, onde TM é o fibrado tangente de M . O conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

É conveniente pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, do conjunto $\mathfrak{D}(M)$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathcal{F}(M)$ das funções em M , definida por: $(Xf)(p) = df_p(X(p))$. Neste contexto, X é diferenciável se, e somente se, $X : \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$, isto é, $Xf \in \mathfrak{D}(M)$ para todo $f \in \mathfrak{D}(M)$.

Lema 1.2. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então existe um único campo vetorial Z tal que

$$Z(f) = (XY - YX)f,$$

para todo $f \in \mathfrak{D}(M)$.

O campo vetorial Z é diferenciável e é chamado o *colchete* $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y . A operação colchete possui as seguintes propriedades:

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Além dessas, utilizaremos também outra propriedade do colchete, de fácil verificação, dada pelo lema abaixo.

Lema 1.3. Sejam M e N variedades diferenciáveis e seja $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então $dF[X, Y] = [dF(X), dF(Y)]$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Definição 1.4. Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM , que varia diferencialmente, i.e., se $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ é uma função diferenciável em U , para todo $i, j = 1, \dots, n$. As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são chamadas *expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$* . Uma variedade com uma métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

Definição 1.5. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado uma *isometria* se, para todos $p \in M, u, v \in T_pM$,

$$\langle u, v \rangle = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle .$$

Definição 1.6. Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(1) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$$

$$(2) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$$

$$(3) \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Pode-se provar, usando as propriedades acima, que $\nabla_XY(p)$ só depende do valor de X em p e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p .

Proposição 1.7. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial diferenciável V ao longo da curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado *derivada covariante* de V ao longo de c , tal que:

(a)
$$\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

(b)
$$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$$
 onde f é uma função diferenciável em I .

(c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.

Definição 1.8. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é chamado *paralelo* quando $\frac{DV}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Proposição 1.9. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável e $V_0 \in T_{c(t_0)}M$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores diferenciável V paralelo ao longo de c tal que $V(t_0) = V_0$. O campo V é chamado o *transporte paralelo* de V_0 ao longo de c .

No caso em que $c(I)$ está contido numa vizinhança coordenada $x(U)$ de um sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, as coordenadas v_j do vetor $V(t) = \sum_{j=1}^n v_j(t)X_j(c(t))$ satisfazem ao sistema linear de equações diferenciais,

$$0 = \frac{dv_k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t))v_j(t)\frac{dx_i}{dt}(t), \quad k = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

onde $(x_1(t), \dots, x_n(t)) = x^{-1} \circ c(t)$, $\nabla_{X_i}X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ e $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$.

As funções Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, \dots, n$, definidas em $\mathfrak{X}(U)$, são chamadas *símbolos de Christoffel da conexão* ∇ em U .

Definição 1.10. Dizemos que uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é *compatível com a métrica* se, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

E, dizemos que ∇ é *simétrica* se, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Podemos agora enunciar o teorema fundamental sobre conexão.

Teorema 1.11. (Teorema de Levi-Civita)

Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ simétrica e compatível com a métrica de M .

A conexão dada pelo teorema acima é denominada *conexão de Levi-Civita* ou *conexão Riemanniana* de M .

Definição 1.12. Uma aplicação diferenciável $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$ é dita uma *superfície parametrizada* em M . Se (u, v) são as coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^2 , $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \lambda'_v(u)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \delta'_u(v)$ são campos de vetores ao longo de f , onde $\lambda_v(u) = \delta_u(v) = f(u, v)$ para todo $(u, v) \in (a, b) \times (c, d)$. Se V é um campo de vetores ao longo de f , $\frac{DV}{\partial u}$ e $\frac{DV}{\partial v}$ são as derivadas covariantes de V ao longo das curvas λ_v e δ_u , respectivamente.

Lema 1.13. (de simetria) Se M é uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$ é uma superfície parametrizada, então

$$\frac{D}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{D}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right).$$

No que se segue, M será uma variedade Riemanniana conexa munida de sua conexão Riemanniana.

Definição 1.14. Uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ é uma *geodésica* em M se γ' é um campo de vetores paralelo ao longo de γ , ou seja, $\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Vale a pena ressaltar que as geodésicas são invariantes por isometria.

Lema 1.15. Sejam $\phi : M \rightarrow N$ uma isometria e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma geodésica em M . Então, $\phi \circ \gamma$ é uma geodésica em N .

A proposição abaixo resulta, essencialmente, do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Proposição 1.16. Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ , $\gamma : (-2, 2) \times U \longrightarrow M$, $U = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_qM, |w| < \epsilon\}$, tal que $t \mapsto \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $(q, w) \in U$.

Lema 1.17. (Homogeniedade de uma geodésica) Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, está definida no intervalo $\left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$ e $\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$, para todo $t \in \left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$.

Sejam $p \in M$ e $U \subset M$ o aberto dado pela proposição (1.16). A aplicação $\exp : U \longrightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), \quad (q, v) \in U,$$

é chamada a *aplicação exponencial* em U . Pela proposição (1.16), \exp é diferenciável.

Podemos, também, definir $\exp_p : \mathbb{B}_\epsilon(0) \subset T_pM \longrightarrow M$ por

$$\exp_p(v) = \exp(p, v),$$

onde $\mathbb{B}_\epsilon(0)$ é a bola aberta de T_pM de centro na origem e raio ϵ . A aplicação \exp_p é diferenciável e $\exp_p(0) = p$.

Proposição 1.18. Dado $p \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_p : \mathbb{B}_\epsilon(0) \longrightarrow M$ é um difeomorfismo de $\mathbb{B}_\epsilon(0)$ sobre um aberto V de M .

Definição 1.19. Se $0 < r < \epsilon$, o conjunto

$$\mathbb{B}_r(p) = \{\exp_p(v); |v| < r\} = \{\gamma(t, p, w); |w| = 1, t \in [0, r)\}$$

é a *bola geodésica* de M de centro p e raio r , e sua fronteira

$$\mathcal{S}_r(p) = \{\exp_p(v); |v| = r\} = \{\gamma(r, p, w); |w| = 1\}$$

é a *esfera geodésica* de M de centro p e raio r .

Como $\exp_p : \mathbb{B}_\epsilon(0) \longrightarrow V$ é um difeomorfismo, $\mathcal{S}_r(p)$ é uma hipersuperfície (subvariedade de codimensão 1) de M , para todo $0 < r < \epsilon$. As geodésicas em $B_r(p)$, $0 < r < \epsilon$, que partem de p são chamadas *geodésicas radiais*.

Definição 1.20. Uma variedade Riemanniana M é (*geodesicamente*) *completa* se, para todo $p \in M$, a aplicação exponencial \exp_p está definida para todo $v \in T_pM$, i.e., se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas em \mathbb{R} .

Proposição 1.21. Se M é completa, então M é não-estendível, ou seja, não existe uma variedade Riemanniana M' tal que M é isométrica a um subconjunto próprio aberto de M .

Definição 1.22. O *tensor curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é a aplicação

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Se $M = \mathbb{R}^n$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ e $Z = (z_1, \dots, z_n)$ são as componentes do campo Z na base canônica de \mathbb{R}^n , $\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n)$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de \mathbb{R}^n com a métrica usual. Então $\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n)$, o que implica que $R(X, Y)Z = 0$. Portanto, a curvatura R pode ser pensada como uma maneira de medir o quanto a variedade M deixa de ser euclidiana.

Proposição 1.23. O tensor curvatura $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é uma aplicação *trilinear*, tomando como escalares as funções diferenciáveis em M , que goza das seguintes propriedades:

- (a) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle = 0$;
- (b) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle$;
- (c) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$;
- (d) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.

Podemos mostrar, usando a linearidade do operador R , que o valor de $R(X, Y)Z$ no ponto p depende apenas dos valores de X, Y, Z em p . Com isto, $\langle R(x, y)z, w \rangle$ fica definido para todo $x, y, z, w \in T_pM, p \in M$.

Proposição 1.24. Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então,

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 1.25. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, $K(\sigma) = K(x, y)$ é chamada a *curvatura seccional* de σ em p , onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ .

É possível mostrar que a noção de curvatura seccional generaliza a noção de *curvatura Gaussiana* das superfícies.

As variedades Riemannianas que possuem curvatura seccional constante desempenharão um papel fundamental nos principais resultados que serão apresentados. Por isso, enunciaremos o lema abaixo, que dá uma caracterização simples de tais variedades por meio do tensor curvatura R .

Lema 1.26. Uma variedade Riemanniana M tem curvatura seccional constante c se, e somente se,

$$\langle R(x, y)z, w \rangle = c (\langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle),$$

para todos $p \in M, x, y, z, w \in T_pM$.

Daremos agora a definição de curvatura de Ricci, que é uma das possíveis combinações das curvaturas seccionais de uma variedade.

Definição 1.27. Seja $p \in M, x, y \in T_pM$. Considere a aplicação bilinear dada por:

$$Q(x, y) = \text{traço da aplicação: } z \mapsto R(x, z)y.$$

Escolhendo x unitário e uma base ortonormal, $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$ de T_pM , temos

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^n \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle R(y, z_i)x, z_i \rangle = Q(y, x),$$

ou seja, Q é simétrica. A média

$$\text{Ricc}_p(x) = \frac{1}{n-1}Q(x, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle$$

é chamada a *curvatura de Ricci na direção do vetor unitário x em p* .

Observe que a curvatura de Ricci independe da base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x , pois o traço de uma aplicação bilinear independe da base considerada para calculá-lo.

Faremos, a seguir, um resumo de alguns tópicos relativos a imersões isométricas que serão necessários no decorrer do texto.

Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ uma imersão de uma variedade M de dimensão n em uma variedade Riemanniana \overline{M} de dimensão $n + m = k$.

A métrica Riemanniana de \overline{M} induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M da seguinte maneira: se $p \in M$, $v, w \in T_pM$, definimos

$$\langle v, w \rangle_p = \langle dx_p(v), dx_p(w) \rangle_{x(p)}.$$

Deste modo, $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ passa a ser uma imersão isométrica. No que se segue, assumiremos que toda imersão é isométrica.

Visto que toda imersão é localmente um mergulho, podemos identificar p com $x(p)$ e cada vetor $v \in T_pM$ com $dx_p(v) \in T_{x(p)}\overline{M}$, e considerar T_pM como um subespaço de $T_{x(p)}\overline{M} = T_p\overline{M}$.

Usaremos tais identificações para estender um campo local de vetores de M a um campo local de vetores de \overline{M} .

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, todo vetor $v \in T_p\overline{M}$ pode ser decomposto na forma $v = v^T + v^N$, onde $v^T \in T_pM$ é a componente tangente de v e $v^N \in (T_pM)^\perp$ a componente normal de v .

Se X, Y são campos locais de vetores em M e \bar{X} e \bar{Y} são extensões locais a \bar{M} de X, Y , respectivamente, definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T,$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \bar{M} . É fácil verificar que ∇ é a conexão Riemanniana de M relativa à métrica induzida de \bar{M} .

Além disso, usando as propriedades de conexão, podemos provar que o campo local em \bar{M} normal a M dado por $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$ não depende das extensões \bar{X}, \bar{Y} e que a aplicação B , definida por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y,$$

é bilinear e simétrica. Assim, é possível provar que o valor de $B(X, Y)(p)$ só depende de X e Y no ponto p .

Definição 1.28. A segunda forma fundamental de x em p é a aplicação bilinear simétrica

$$B : T_p M \times T_p M \longrightarrow (T_p M)^\perp.$$

Para cada $\eta \in (T_p M)^\perp$, seja $A_\eta : T_p M \longrightarrow T_p M$ a aplicação linear dada por

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = \langle B(x, y), \eta \rangle,$$

para todo $x, y \in T_p M$. Em termos de derivada covariante, $A_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T$, onde N é uma extensão local de η normal a M .

Definição 1.29. A norma $\|B\|$ da segunda forma fundamental é o número real não-negativo dado por:

$$\|B\|^2 = \sum_{i,j=1}^n |B(e_i, e_j)|^2,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$.

Como

$$\|B\|^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle B(e_i, e_j), \eta_k \rangle^2,$$

onde $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ é uma base ortonormal de $(T_p M)^\perp$, e

$$\sum_{i,j=1}^n \langle B(e_i, e_j), \eta_k \rangle^2 = \sum_{i,j=1}^n \langle A_{\eta_k} e_i, e_j \rangle^2 = \text{Traço}(A_{\eta_k}^T A_{\eta_k}),$$

a definição acima independe da base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$.

Definição 1.30. O traço da aplicação bilinear simétrica $B : T_p M \times T_p M \longrightarrow (T_p M)^\perp$, dividido por n , é chamado o *vetor curvatura média* \bar{H} da imersão x em p .

Se e_1, \dots, e_n são campos locais diferenciáveis de vetores tangentes a M , definidas num aberto $U \subset M$, tais que $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$ para todo $p \in U$, o vetor curvatura média em U é dado por:

$$\bar{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N.$$

Assim, \bar{H} é um campo diferenciável de vetores normais a M , globalmente definido em M .

Se $x, y \in T_p M \subset T_p \bar{M}$ são linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\bar{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e \bar{M} , respectivamente, no plano gerado por x e y .

Teorema 1.31. (Equação de Gauss)

Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de $T_p M$. Então,

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2. \tag{1.2}$$

No caso de hipersuperfícies $x : M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+1}$, com as quais trabalharemos nesta dissertação, a fórmula de Gauss (1.2) admite uma expressão mais simples.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_p M \longrightarrow T_p M$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com valores próprios reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, i.e., $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Assim, $\langle A_\eta(e_i), e_i \rangle = \langle B(e_i, e_i), \eta \rangle = \lambda_i$, para todo $i = 1, \dots, n$ e $\langle A_\eta(e_i), e_j \rangle = \langle B(e_i, e_j), \eta \rangle = 0$, se $i \neq j$. Portanto, (1.2) se escreve

$$K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j \tag{1.3}$$

Se M e \overline{M} são orientáveis e estão orientadas, o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base na orientação de M e $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ é uma base na orientação de \overline{M} . Denominamos os e_i *direções principais* e os $\lambda_i = k_i$ *curvaturas principais* da imersão x .

Neste caso, definimos a *curvatura média de x em p* por:

$$H = \langle \overline{H}, \eta \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle B(e_i, e_i), \eta \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i, \quad (1.4)$$

e a norma da segunda forma fundamental é dada por:

$$\|B\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \langle B(e_i, e_j), \eta \rangle^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2.$$

Definição 1.32. Dizemos que uma imersão $x : M \rightarrow \overline{M}$ é *totalmente geodésica* se a segunda forma fundamental B é identicamente nula para todo $p \in M$.

A razão desta terminologia é dada pela seguinte proposição:

Proposição 1.33. Uma imersão $x : M \rightarrow \overline{M}$ é totalmente geodésica se, e somente se, toda geodésica γ de M é uma geodésica de \overline{M} .

Capítulo 2

As hipersuperfícies umbílicas

O objetivo deste capítulo é mostrar que se M^n é uma variedade compacta, $\overline{M}^{n+1}(c)$ é uma variedade completa, simplesmente conexa, de curvatura seccional constante c e $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ é uma imersão umbílica, então $x(M)$ é uma esfera geodésica, ou seja, provar que as esferas geodésicas são as únicas hipersuperfícies umbílicas compactas de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Para alcançar esta finalidade, vamos determinar quais são as hipersuperfícies umbílicas do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , da esfera euclidiana unitária S^n e do espaço hiperbólico \mathbb{H}^n . Mas antes, apresentaremos um modelo do espaço hiperbólico.

2.1 O espaço hiperbólico

Considere o semi-espaço do \mathbb{R}^n dado por:

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\},$$

e introduza em \mathbb{H}^n a métrica

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = \frac{1}{x_n^2} \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad (2.1)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica euclidiana. É claro que \mathbb{H}^n é simplesmente conexo. Vamos mostrar que \mathbb{H}^n , com a métrica (2.1), tem curvatura seccional constante igual a -1 , e é completo. O semi-espaço \mathbb{H}^n é um dos modelos do *espaço hiperbólico de dimensão n* .

Definição 2.1. Seja M uma variedade diferenciável. Duas métricas Riemannianas g e \bar{g} em M são conformes se existe uma função positiva $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{g}(X, Y) = \mu g(X, Y)$ para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 2.2. Se ∇ e $\bar{\nabla}$ são as conexões Riemannianas de g e \bar{g} , respectivamente, então $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)$, onde $S(X, Y) = \frac{1}{2\mu} (X(\mu)Y + Y(\mu)X - g(X, Y) \text{grad } \mu)$ e $\text{grad } \mu$ é calculado na métrica g , isto é, $X(\mu) = g(X, \text{grad } \mu)$.

Demonstração. Pelo Teorema de Levi-Civita, dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim $\bar{\nabla}$ em M que é simétrica e compatível com a métrica \bar{g} . Sendo assim, basta mostrarmos que $\nabla_X Y + S(X, Y)$ é uma conexão simétrica compatível com a métrica \bar{g} . É fácil verificar que $\nabla_X Y + S(X, Y)$ é uma conexão simétrica, pois ∇ é uma conexão simétrica e S é uma aplicação bilinear simétrica.

Resta mostrar que $\bar{\nabla}$ é compatível com a métrica \bar{g} . Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Então,

$$\begin{aligned} \bullet \quad X\bar{g}(Y, Z) &= X(\mu g(Y, Z)) = X(\mu)g(Y, Z) + \mu X(g(Y, Z)) \\ &= X(\mu)g(Y, Z) + \mu g(\nabla_X Y, Z) + \mu g(Y, \nabla_X Z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) &= \mu g(\bar{\nabla}_X Y, Z) = \mu g(\nabla_X Y, Z) + \mu g(S(X, Y), Z) \\ &= \mu g(\nabla_X Y, Z) + \frac{\mu}{2\mu} [X(\mu)g(Y, Z) + Y(\mu)g(X, Z) - g(X, Y)g(\text{grad } \mu, Z)] \\ &= \mu g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} [X(\mu)g(Y, Z) + Y(\mu)g(X, Z) - g(X, Y)Z(\mu)], \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z) &= \mu g(Y, \bar{\nabla}_X Z) = \mu g(\nabla_X Z, Y) + \mu g(S(X, Z), Y) \\ &= \mu g(\nabla_X Z, Y) + \frac{1}{2} [X(\mu)g(Y, Z) + Z(\mu)g(X, Y) - g(X, Z)g(\text{grad } \mu, Y)] \\ &= \mu g(\nabla_X Z, Y) + \frac{1}{2} [X(\mu)g(Y, Z) + Z(\mu)g(X, Y) - g(X, Z)Y(\mu)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Assim, somando (2.3) e (2.4), obtemos:

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z) = \mu(g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_X Y, Z)) + X(\mu)g(Y, Z).$$

Logo, $X\bar{g}(Y, Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$, ou seja, $\bar{\nabla}$ é compatível com a métrica \bar{g} .

Portanto, pelo Teorema de Levi-Civita, $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)$. □

Proposição 2.3. $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, com a métrica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = \frac{1}{x_n^2} \langle \cdot, \cdot \rangle$, tem curvatura seccional -1 , onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica euclidiana.

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^n$ dois vetores ortonormais na métrica euclidiana. Sendo $T_p \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n$ para todo ponto $p \in \mathbb{H}^n$, X e Y definem dois campos de vetores constantes em \mathbb{H}^n . Como as métricas $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ são conformes, pois $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = \mu \langle \cdot, \cdot \rangle$, onde $\mu : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função positiva dada por $\mu(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_n^2}$, temos, pelo Lema 2.2, que $\bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + S(X, Y)$, onde $\bar{\nabla}$ e ∇ são as conexões Riemannianas compatíveis com as métricas $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$, respectivamente.

Vamos calcular $\bar{K}(X, Y) = \langle\langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle\rangle$, onde

$$\bar{R}(X, Y)X = \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X X - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y X + \bar{\nabla}_{[X, Y]} X = \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X X - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y X,$$

já que $[X, Y] = 0$. Como $\langle X, Y \rangle = 0$, $\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 1$, $\nabla_X X = \nabla_Y X = \nabla_X Y = 0$, temos

$$\bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \frac{1}{2\mu} (X(\mu)Y + Y(\mu)X - \langle X, Y \rangle \text{grad } \mu) = \frac{1}{2\mu} (X(\mu)Y + Y(\mu)X).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y X, Y \rangle &= \left\langle \nabla_X \left(\frac{1}{2\mu} (X(\mu)Y + Y(\mu)X) \right) + S \left(X, \frac{1}{2\mu} (X(\mu)Y + Y(\mu)X) \right), Y \right\rangle \\ &= \left\langle X \left(\frac{1}{2\mu} X(\mu) \right) Y, Y \right\rangle + \frac{X(\mu)}{2\mu} \langle \nabla_X Y, Y \rangle + X \left(\frac{Y(\mu)}{2\mu} \right) \langle X, Y \rangle \\ &\quad + \frac{Y(\mu)}{2\mu} \langle \nabla_X X, Y \rangle + \frac{1}{2\mu} \left\langle X(\mu) \left(\frac{1}{2\mu} (X(\mu)Y + Y(\mu)X) \right), Y \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\mu} \left\langle \frac{1}{2\mu} (X(\mu)Y + Y(\mu)X)(\mu)X, Y \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2\mu} \left\langle \frac{1}{2\mu} (X(\mu)Y + Y(\mu)X), X \right\rangle \langle \text{grad } \mu, Y \rangle \\ &= X \left(\frac{1}{2\mu} X(\mu) \right) + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{X(\mu)X(\mu)}{2\mu} - \frac{Y(\mu)Y(\mu)}{2\mu} \right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por outro lado,

$$\bar{\nabla}_X X = \nabla_X X + \frac{1}{2\mu} [2X(\mu)X - \langle X, X \rangle \text{grad } \mu] = \frac{1}{2\mu} [2X(\mu)X - \text{grad } \mu].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X X, Y \rangle &= \left\langle \nabla_Y \left(\frac{1}{2\mu} (2X(\mu)X - \text{grad} \mu) \right), Y \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle S \left(\frac{1}{2\mu} (2X(\mu)X - \text{grad} \mu), Y \right), Y \right\rangle \\
 &= - \left\langle \nabla_Y \left(\frac{1}{2\mu} \text{grad} \mu \right), Y \right\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{Y(\mu)Y(\mu)}{2\mu} + \left\langle \frac{1}{2\mu} (2X(\mu)X - \text{grad} \mu), \text{grad} \mu \right\rangle + \frac{Y(\mu)Y(\mu)}{2\mu} \right) \\
 &= - \left\langle \nabla_Y \left(\frac{1}{2\mu} \text{grad} \mu \right), Y \right\rangle + \frac{X(\mu)X(\mu)}{2\mu^2} - \frac{|\text{grad} \mu|^2}{4\mu^2}. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Subtraindo (2.5) de (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle &= \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X X, Y \rangle - \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y X, Y \rangle \\
 &= -\frac{1}{2\mu} \langle \nabla_Y \text{grad} \mu, Y \rangle - \left\langle Y \left(\frac{1}{2\mu} \right) \text{grad} \mu, Y \right\rangle + \frac{1}{2\mu^2} (X(\mu))^2 - \frac{|\text{grad} \mu|^2}{4\mu^2} \\
 &\quad - X(\mu)X \left(\frac{1}{2\mu} \right) - \frac{1}{2\mu} X(X(\mu)) - \frac{(X(\mu))^2}{4\mu^2} + \frac{(Y(\mu))^2}{4\mu^2} \\
 &= -\frac{1}{2\mu} \langle \nabla_Y \text{grad} \mu, Y \rangle + \frac{1}{2\mu^2} Y(\mu)Y(\mu) + \frac{X(\mu)X(\mu)}{2\mu^2} - \frac{|\text{grad} \mu|^2}{4\mu^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2\mu^2} X(\mu)X(\mu) - \frac{1}{2\mu} X(X(\mu)) - \frac{X(\mu)X(\mu)}{4\mu^2} + \frac{Y(\mu)Y(\mu)}{4\mu^2} \\
 &= \frac{3}{4\mu^2} Y(\mu)Y(\mu) + \frac{3}{4\mu^2} X(\mu)X(\mu) - \frac{|\text{grad} \mu|^2}{4\mu^2} - \frac{1}{2\mu} X(X(\mu)) - \frac{1}{2\mu} Y(Y(\mu)),
 \end{aligned}$$

pois

$$\langle \nabla_Y \text{grad} \mu, Y \rangle = Y \langle \text{grad} \mu, Y \rangle - \langle \text{grad} \mu, \nabla_Y Y \rangle = Y \langle \text{grad} \mu, Y \rangle = Y(Y(\mu)).$$

Tomando $F = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, temos $f = \log F = -\frac{1}{2} \log(\mu)$, e, portanto, $\text{grad} f = -\frac{1}{2\mu} \text{grad} \mu$. Assim,

$$\frac{|\text{grad} \mu|^2}{4\mu^2} = |\text{grad} f|^2, \quad \frac{3}{4\mu^2} Y(\mu)^2 = 3Y(f)^2 \quad \text{e} \quad \frac{3}{4\mu^2} X(\mu)^2 = 3X(f)^2,$$

pois $Y(f) = \langle \text{grad} f, Y \rangle = -\frac{1}{2\mu} Y(\mu)$ e $X(f) = \langle \text{grad} f, X \rangle = -\frac{X(\mu)}{2\mu}$. Além disso,

$$X(X(f)) = X \left(-\frac{X(\mu)}{2\mu} \right) = -X \left(\frac{1}{2\mu} \right) X(\mu) - \frac{1}{2\mu} X(X(\mu)) = \frac{1}{2\mu^2} (X(\mu))^2 - \frac{1}{2\mu} X(X(\mu)),$$

e de modo análogo, $Y(Y(f)) = \frac{1}{2\mu^2} (Y(\mu))^2 - \frac{1}{2\mu} Y(Y(\mu))$.

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle &= 3(Y(f))^2 + 3(X(f))^2 - |\text{grad } f|^2 + X(X(f)) - \frac{1}{2\mu^2}(X(\mu))^2 + Y(Y(f)) - \frac{1}{2\mu^2}(Y(\mu))^2 \\ &= 3(Y(f))^2 + 3(X(f))^2 - |\text{grad } f|^2 + X(X(f)) - 2(X(f))^2 + Y(Y(f)) - 2(Y(f))^2 \\ &= -|\text{grad } f|^2 + (X(f))^2 + (Y(f))^2 + X(X(f)) + Y(Y(f)). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \bar{R} \left(\frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|} \right) \frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|} \right\rangle \right\rangle &= \frac{\mu \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle}{\mu^2} \\ &= F^2(-|\text{grad } f|^2 + (X(f))^2 + (Y(f))^2 + X(X(f)) + Y(Y(f))). \end{aligned}$$

Como $\mu = \frac{1}{x_n^2}$, $F = x_n$ e $f = \log x_n$. Assim, $\text{grad } f = \frac{1}{x_n} \text{grad } x_n = \frac{(0, \dots, 0, 1)}{x_n} = \frac{e_n}{x_n}$, e, portanto, $|\text{grad } f|^2 = \frac{1}{x_n^2}$, $X(f) = \langle \text{grad } f, X \rangle = \frac{1}{x_n} \langle X, e_n \rangle$, $Y(f) = \langle \text{grad } f, Y \rangle = \frac{1}{x_n} \langle Y, e_n \rangle$, $X(X(f)) = \frac{-\langle X, e_n \rangle^2}{x_n^2}$ e $Y(Y(f)) = \frac{-\langle Y, e_n \rangle^2}{x_n^2}$, pois $\langle X, e_n \rangle$ e $\langle Y, e_n \rangle$ são constantes.

Daí decorre que

$$\begin{aligned} \bar{K} \left(\frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|} \right) &= \left\langle \left\langle \bar{R} \left(\frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|} \right) \frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|} \right\rangle \right\rangle \\ &= x_n^2 \left(-\frac{1}{x_n^2} + (X(f))^2 + (Y(f))^2 - (X(f))^2 - (Y(f))^2 \right) = x_n^2 \left(-\frac{1}{x_n^2} \right) = -1. \end{aligned}$$

Se $p \in \mathbb{H}^n$ e \bar{X}, \bar{Y} são vetores ortonormais de $T_p\mathbb{H}^n$, então $X = \sqrt{\mu(p)} \bar{X}$ e $Y = \sqrt{\mu(p)} \bar{Y}$ são vetores ortonormais de \mathbb{R}^n e, pelo provado acima, $\bar{K}(\bar{X}, \bar{Y})(p) = \bar{K} \left(\frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|} \right) (p) = -1$. Logo $\bar{K}(\bar{X}, \bar{Y})(p) = -1$ para todos $p \in \mathbb{H}^n$ e $\bar{X}, \bar{Y} \in T_p\mathbb{H}^n$ ortonormais, ou seja, \mathbb{H}^n tem curvatura seccional constante igual a -1 . \square

Para mostrar que \mathbb{H}^n é completo, vamos utilizar outro modelo do espaço hiperbólico, chamado *modelo da bola*. Considere a bola $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ de centro na origem e raio 2

$$\mathbb{B}^n = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| < 2\},$$

e introduza em \mathbb{B}^n a métrica

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_p = \frac{\langle \cdot, \cdot \rangle}{\left(1 - \frac{1}{4}|p|^2\right)^2},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica euclidiana.

Lema 2.4. A aplicação $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, dada por $f(p) = 4 \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} - e_n$ é uma isometria, onde $p_0 = (0, \dots, 0, -2) = -2e_n$.

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{B}^n$, $v \in T_p \mathbb{B}^n$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{B}^n$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Então,

$$\begin{aligned} df_p(v) &= \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{4\gamma'(t)|\gamma(t) - p_0|^2 - 8(\gamma(t) - p_0)\langle \gamma'(t), \gamma(t) - p_0 \rangle}{|\gamma(t) - p_0|^4} \right|_{t=0} \\ &= \frac{4v|p - p_0|^2 - 8(p - p_0)\langle v, p - p_0 \rangle}{|p - p_0|^4}. \end{aligned}$$

Assim, $\langle df_p(v), df_p(v) \rangle = \frac{16\langle v, v \rangle}{|p - p_0|^4}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica euclidiana. Por outro lado, se $f = (f_1, \dots, f_n)$, obtemos

$$f_n(p) = \frac{4(x_n + 2)}{|p - p_0|^2} - 1 = \frac{4(x_n + 2) - (x_1^2 + \dots + (x_n + 2)^2)}{|p - p_0|^2} = \frac{4 - |p|^2}{|p - p_0|^2}.$$

Como $|p| < 2$, $f_n(p) > 0$ e, portanto, $f(p) \in \mathbb{H}^n$. Além disso,

$$\langle\langle df_p(v), df_p(v) \rangle\rangle_{f(p)} = \frac{\langle df_p(v), df_p(v) \rangle}{f_n(p)^2} = \frac{|p - p_0|^4}{(4 - |p|^2)^2} \frac{16\langle v, v \rangle}{|p - p_0|^4} = \frac{\langle v, v \rangle}{\left(1 - \frac{|p|^2}{4}\right)^2} = \langle\langle v, v \rangle\rangle_p,$$

onde $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é a métrica do semi-espço superior.

Resta verificar que f é uma bijeção. Seja $q = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n$. Tomando $p = 4 \frac{q + e_n}{|q + e_n|^2} + p_0$, temos:

$$\bullet \quad |p|^2 = \frac{|4(q + e_n) - 2e_n|q + e_n|^2|^2}{|q + e_n|^4} = \frac{4(4|q + e_n|^2 + |q + e_n|^4 - 4|q + e_n|^2\langle q + e_n, e_n \rangle)}{|q + e_n|^4} < 4, \quad (2.7)$$

ou seja, $p \in \mathbb{B}^n$, pois $4|q + e_n|^2(1 - \langle q + e_n, e_n \rangle) = 4|q + e_n|^2(-x_n) < 0$, e

$$\bullet \quad f(p) = \frac{4 \frac{q + e_n}{|q + e_n|^2}}{1} - e_n = q + e_n - e_n = q.$$

Então f é sobrejetiva. A aplicação f é também injetiva, pois se $f(p) = f(p')$:

$$\begin{aligned} \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} = \frac{p' - p_0}{|p' - p_0|^2} &\implies \frac{1}{|p - p_0|} = \frac{1}{|p' - p_0|} \quad \text{e} \quad \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} = \frac{p' - p_0}{|p' - p_0|^2} \\ &\implies p - p_0 = p' - p_0 \implies p = p'. \end{aligned}$$

Logo f é uma isometria de \mathbb{B}^n sobre \mathbb{H}^n . Podemos provar também que $f(\partial \mathbb{B}^n - \{p_0\}) = \partial \mathbb{H}^n$, usando (2.7). □

Proposição 2.5. \mathbb{H}^n é uma variedade Riemanniana completa.

Demonstração. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}^n$ a curva diferenciável dada por $\gamma(t) = 2 \left(\tanh \frac{t}{2} \right) v$, onde $\langle\langle v, v \rangle\rangle_0 = \langle v, v \rangle = 1$. Então $\gamma'(t) = \left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^2 v$ e, portanto,

$$\langle\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle\rangle_{\gamma(t)} = \frac{\left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^4}{\left(1 - \frac{|\gamma(t)|^2}{4} \right)^2} = \frac{\left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^4}{\left(1 - \left(\tanh \frac{t}{2} \right)^2 \right)^2} = 1,$$

ou seja, a curva γ está parametrizada pelo comprimento de arco na métrica da bola.

Como $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ são conformes, com coeficiente de conformalidade $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\mu(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\left(1 - \frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}{4} \right)^2}$, segue-se do Lema 2.2 que:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\gamma'(t)} \gamma'(t) &= \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) + S(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &= \gamma''(t) + \frac{1}{2\mu(\gamma(t))} (2\langle \gamma'(t), \operatorname{grad} \mu(\gamma(t)) \rangle \gamma'(t) - \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \operatorname{grad} \mu(\gamma(t))) \\ &= \gamma''(t) + \frac{1}{\mu(\gamma(t))} \langle \operatorname{grad} \mu(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t) - \frac{1}{2\mu(\gamma(t))} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \operatorname{grad} \mu(\gamma(t)) \\ &= \gamma''(t) + \frac{\left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^4}{\left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^6} \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t) - \left(\tanh \frac{t}{2} \right) \left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^2 v \\ &= \gamma''(t) + 2 \left(\tanh \frac{t}{2} \right) \left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^2 v - \left(\tanh \frac{t}{2} \right) \left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^2 v \\ &= - \left(\tanh \frac{t}{2} \right) \left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^2 v + \left(\tanh \frac{t}{2} \right) \left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^2 v = 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

já que $\gamma''(t) = - \left(\tanh \frac{t}{2} \right) \left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^2 v$, $\mu(\gamma(t)) = \frac{1}{\left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^4}$, $\operatorname{grad} \mu(p) = \frac{p}{\left(1 - \frac{|p|^2}{4} \right)^3}$ e,

portanto, $\operatorname{grad} \mu(\gamma(t)) = \frac{2 \left(\tanh \frac{t}{2} \right)}{\left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^6} v$. Então γ é uma geodésica na métrica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ parametrizada

pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) = 0$ e $\gamma'(0) = v$.

Assim, pelo teorema de existência e unicidade das geodésicas, as curvas $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}^n$, dadas por

$\gamma(t) = \left(2 \tanh \frac{t}{2}\right) v$, onde $\langle v, v \rangle = 1$, determinam todas as geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco de \mathbb{B}^n tais que $\gamma(0) = 0$. Logo, pelo Lema 2.4, as curvas $f(\gamma(t))$ são as geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco de \mathbb{H}^n tais que $f(\gamma(0)) = e_n$.

Se $v = -e_n$,

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= 4 \frac{\gamma(t) - p_0}{|\gamma(t) - p_0|^2} - e_n = 4 \frac{2 \left(-\tanh \frac{t}{2} + 1\right)}{4 \left(-\tanh \frac{t}{2} + 1\right)^2} e_n - e_n \\ &= \left(\frac{2}{1 - \tanh \frac{t}{2}} - 1 \right) e_n = \left(\frac{1 + \tanh \frac{t}{2}}{1 - \tanh \frac{t}{2}} \right) e_n = e^t e_n. \end{aligned}$$

é a semi-reta perpendicular ao $\partial\mathbb{H}^n$ que passa por e_n .

Seja agora $v = (a_1, \dots, a_n)$ tal que $|v| = 1$ e $|a_n| \neq 1$. Então $f(\gamma(t)) \subset S_r^n(c)$, onde $c = \frac{-a_n}{1 - a_n^2} v_0$, $r = \frac{1}{\sqrt{1 - a_n^2}} = \frac{1}{|v_0|}$ e $v_0 = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$.

De fato, como $v = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0) + (0, \dots, 0, a_n) = v_0 + a_n e_n$ e $|v_0|^2 = 1 - a_n^2$, temos:

$$\begin{aligned} \left| f(\gamma(t)) - \left(\frac{-a_n}{1 - a_n^2} \right) v_0 \right|^2 &= \left| 4 \frac{\gamma(t) - p_0}{|\gamma(t) - p_0|^2} - e_n + \frac{a_n}{1 - a_n^2} v_0 \right|^2 \\ &= \frac{16}{|\gamma(t) - p_0|^2} + \frac{a_n^2}{(1 - a_n^2)^2} |v_0|^2 + 1 \\ &\quad + \frac{8}{|\gamma(t) - p_0|^2} \left\langle \frac{a_n}{1 - a_n^2} v_0 - e_n, \gamma(t) - p_0 \right\rangle \\ &= \frac{16}{|\gamma(t) - p_0|^2} + \frac{1}{1 - a_n^2} \\ &\quad + \frac{8}{|\gamma(t) - p_0|^2} \left\langle \frac{a_n}{1 - a_n^2} v_0 - e_n, 2 \left(\tanh \frac{t}{2} \right) v_0 + 2 \left(\left(\tanh \frac{t}{2} \right) a_n + 1 \right) e_n \right\rangle \\ &= \frac{16}{|\gamma(t) - p_0|^2} + \frac{1}{1 - a_n^2} \\ &\quad + \frac{8}{|\gamma(t) - p_0|^2} \left(\frac{2a_n}{1 - a_n^2} |v_0|^2 \tanh \frac{t}{2} - 2a_n \tanh \frac{t}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{16}{|\gamma(t) - p_0|^2} + \frac{1}{1 - a_n^2} - \frac{16}{|\gamma(t) - p_0|^2} = \frac{1}{1 - a_n^2} = r^2. \end{aligned}$$

Logo $f(\gamma(t)) \subset S_r^n(c)$.

Além disso, como $f(\gamma(t))$ pertence ao plano π gerado por v_0 e e_n , o qual passa pelo ponto

$c = -\frac{a_n}{1-a_n^2}v_0 \in \partial\mathbb{H}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\gamma(t)) = \frac{v_0}{1+a_n} \in \partial\mathbb{H}^n$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(\gamma(t)) = \frac{-v_0}{1-a_n} \in \partial\mathbb{H}^n$, temos que $f(\gamma(\mathbb{R}))$ é a semi-circunferência contida no plano π , perpendicular ao bordo de \mathbb{H}^n , com centro no ponto c e raio $\frac{1}{|v_0|}$.

Provamos, assim, que a reta e todas as circunferências perpendiculares ao bordo de \mathbb{H}^n que passam por e_n são as geodésicas de \mathbb{H}^n que passam por esse ponto.

Vamos agora verificar que o mesmo ocorre num ponto $p = (p_1, \dots, p_n)$ qualquer de \mathbb{H}^n . Para isso, consideremos as aplicações $T, L : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, dadas por $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) + (p_1, \dots, p_{n-1}, 0)$ e $L(x_1, \dots, x_n) = p_n(x_1, \dots, x_n)$. Como T e L são isometrias de \mathbb{H}^n que levam retas e semi-circunferências perpendiculares ao bordo de \mathbb{H}^n em retas e semi-circunferências perpendiculares ao bordo de \mathbb{H}^n , respectivamente, temos que a reta e as semi-circunferências perpendiculares ao bordo de \mathbb{H}^n que passam por $(T \circ L)(e_n) = p$ são as geodésicas que passam por esse ponto.

Logo, como as curvas $T \circ L \circ f \circ \gamma$ estão definidas em \mathbb{R} , \mathbb{H}^n é uma variedade Riemanniana geodesicamente completa. \square

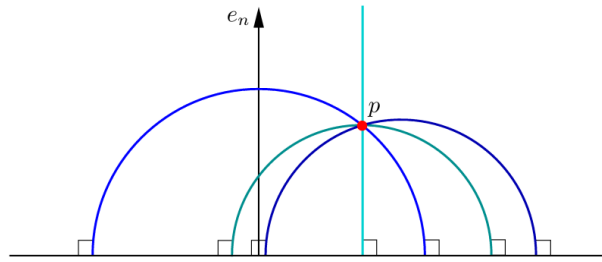


Figura 1: Geodésicas em \mathbb{H}^n passando por p .

Observação 2.6. Não é difícil mostrar que ao multiplicarmos uma métrica Riemanniana por uma constante positiva a , a sua curvatura seccional é multiplicada por $\frac{1}{a}$. Logo, ao trabalharmos com variedades de curvatura seccional constante c , podemos sempre supor, sem perda de generalidade, que $c = 0, 1$ ou -1 . Além disso, como duas variedades completas, simplesmente conexas, de curvaturas seccionais constantes e iguais a c são sempre isométricas (ver [11], p. 181), podemos admitir que tais variedades são o espaço euclidiano \mathbb{R}^n com a métrica usual, no caso $c = 0$; a esfera euclidiana unitária S^n com a métrica induzida de \mathbb{R}^{n+1} , no caso $c = 1$, e um dos modelos do espaço hiperbólico \mathbb{H}^n de curvatura seccional -1 , no caso $c = -1$.

Vamos finalizar esta seção introduzindo outro modelo do espaço hiperbólico, o *modelo de*

Lorentz, que será útil para provarmos o teorema central da dissertação.

Definição 2.7. Uma métrica *pseudo-Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é a escolha, para cada ponto $p \in M$, de uma forma bilinear simétrica não degenerada $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ em T_pM , (i.e., $\langle\langle X, v \rangle\rangle = 0$ para todo $v \in T_pM \Rightarrow X = 0$) que varia diferenciavelmente com p .

Considere \mathbb{R}^{n+1} com a métrica pseudo-Riemanniana dada por:

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

para todo par de vetores $X = (x_0, \dots, x_n), Y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

O espaço vetorial \mathbb{R}^{n+1} , munido com a métrica pseudo-Riemanniana acima, é chamado *espaço de Lorentz* e será indicado por L^{n+1} .

Seja \mathbb{H}_k^n , $k = \frac{-1}{r^2}$, a componente conexa que corresponde a $p_0 > 0$ da hipersuperfície regular de \mathbb{R}^{n+1} dada por $\langle\langle p, p \rangle\rangle = -r^2, r > 0$, isto é,

$$\mathbb{H}_k^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle\langle p, p \rangle\rangle = -r^2 = \frac{1}{k} \text{ e } p_0 > 0\},$$

onde p_0, \dots, p_n são as coordenadas do ponto p .

Geometricamente, $\langle\langle p, p \rangle\rangle = -r^2$ é uma espécie de hiperbolóide de duas folhas e \mathbb{H}_k^n é a folha contida no semi-espaço $p_0 > 0$.

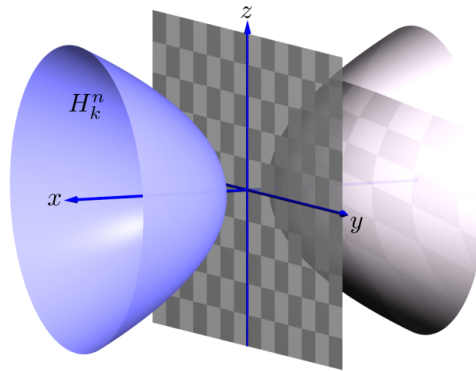


Figura 2: Hiperbolóide de duas folhas, modelo de \mathbb{H}_k^n .

Lema 2.8. A métrica induzida por L^{n+1} em \mathbb{H}_k^n é Riemanniana.

Demonstração. Sejam $p = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{H}_k^n$, $v \in T_p\mathbb{H}_k^n$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}_k^n$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Como $\langle\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle\rangle = \frac{1}{k}$, $2 \langle\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle\rangle = 0$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Então, $\langle\langle v, p \rangle\rangle = 0$. Além disso,

$$V_p = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle\langle v, p \rangle\rangle = 0\}$$

é um subespaço vetorial de dimensão n , pois V_p é o núcleo do funcional linear não-nulo $v \mapsto \langle\langle v, p \rangle\rangle$. Logo, $T_p \mathbb{H}_k^n = V_p$.

Sejam $v_1 = (p_1, p_0, 0, \dots, 0)$, $v_2 = (p_2, 0, p_0, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (p_n, 0, \dots, 0, \dots, p_0)$. Então,

$$\langle\langle v_i, p \rangle\rangle = -p_i p_0 + p_0 p_i = 0,$$

e, portanto, $v_i \in T_p \mathbb{H}_k^n$ para todo $i = 1, \dots, n$. Além disso, v_1, \dots, v_n são linearmente independentes, pois se $\sum_i^n \lambda_i v_i = \left(\sum_i^n \lambda_i p_i, \lambda_1 p_0, \lambda_2 p_0, \dots, \lambda_n p_0 \right) = (0, \dots, 0)$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Logo $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de $T_p \mathbb{H}_k^n$.

Então, dado $v \in T_p \mathbb{H}_k^n - \{0\}$, existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i, \lambda_1 p_0, \dots, \lambda_n p_0 \right),$$

e, portanto, $\langle\langle v, v \rangle\rangle = - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \right)^2 + (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) p_0^2$.

Assim,

$$\begin{aligned} \langle\langle v, v \rangle\rangle &\geq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \left(- \sum_{i=1}^n p_i^2 + p_0^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) (- \langle\langle p, p \rangle\rangle) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \left(-\frac{1}{k} \right) > 0, \end{aligned}$$

pois, $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \right)$.

Como a *pseudo métrica* $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é positiva definida em $T_p \mathbb{H}_k^n$, para todo $p \in \mathbb{H}_k^n$, $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é uma métrica Riemanniana em \mathbb{H}_k^n . \square

Seja a aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{H}_k^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{H}_k^n) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por:

$$(\nabla_Y X)(p) = (\bar{\nabla}_Y X)(p) + k \langle\langle X(p), Y(p) \rangle\rangle p,$$

para todo $p \in \mathbb{H}_k^n$ e para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_k^n)$, onde $\bar{\nabla}$ é a conexão usual de \mathbb{R}^{n+1} .

Lema 2.9. ∇ é uma conexão simétrica e compatível com a métrica em \mathbb{H}_k^n .

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em quatro afirmações.

Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_k^n)$ e $p \in \mathbb{H}_k^n$.

- $(\nabla_Y X)(p) \in T_p \mathbb{H}_k^n$, pois,

$$\begin{aligned} \langle\langle (\nabla_Y X)(p), p \rangle\rangle &= \langle\langle (\bar{\nabla}_Y X)(p), p \rangle\rangle + k \langle\langle X(p), Y(p) \rangle\rangle \left(\frac{1}{k}\right) \\ &= (Y \langle\langle X, p \rangle\rangle)(p) - \langle\langle X(p), Y(p) \rangle\rangle + \langle\langle X(p), Y(p) \rangle\rangle \\ &= (Y \langle\langle X, p \rangle\rangle)(p) = 0, \end{aligned}$$

já que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_k^n)$.

- ∇ é uma conexão.

Seja $f : \mathbb{H}_k^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . Então,

$$\begin{aligned} (\nabla_Y fX)(p) &= (\bar{\nabla}_Y fX)(p) + kf(p) \langle\langle X(p), Y(p) \rangle\rangle p \\ &= (f\bar{\nabla}_Y X + Y(f)X)(p) + kf(p) \langle\langle X(p), Y(p) \rangle\rangle p \\ &= f(p)(\bar{\nabla}_Y X)(p) + k \langle\langle X(p), Y(p) \rangle\rangle p + (Y(f)X)(p) \\ &= (f\nabla_Y X + Y(f)X)(p). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\bar{\nabla}$ é uma conexão afim e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é uma aplicação bilinear, é fácil verificar que

$$\nabla_Y(X + Z) = \nabla_Y X + \nabla_Y Z, \quad \nabla_{fY} X = f\nabla_Y X \quad \text{e} \quad \nabla_{Y+Z} X = \nabla_Y X + \nabla_Z X.$$

Logo, ∇ é uma conexão afim.

- ∇ é simétrica, pois $\nabla_Y X - \nabla_X Y = \bar{\nabla}_Y X - \bar{\nabla}_X Y = [Y, X]$.
- ∇ é compatível com a métrica, pois

$$X \langle\langle Y, Z \rangle\rangle(p) = \langle\langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle\rangle(p) + \langle\langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle\rangle(p) = \langle\langle \nabla_X Y, Z \rangle\rangle(p) + \langle\langle Y, \nabla_X Z \rangle\rangle(p),$$

já que $\langle\langle Z(p), p \rangle\rangle = \langle\langle Y(p), p \rangle\rangle = 0$.

Logo, pelo Teorema de Levi-Civita, ∇ é a conexão Riemanniana de $(\mathbb{H}_k^n, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$. \square

Lema 2.10. \mathbb{H}_k^n tem curvatura seccional constante k .

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{H}_k^n, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_k^n)$. Sendo $\bar{\nabla}_X Z = \nabla_X Z - k \langle\langle Z, X \rangle\rangle p$, temos:

- $\begin{aligned} \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z &= \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z) - \bar{\nabla}_Y (k \langle\langle Z, X \rangle\rangle p) \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z - k \langle\langle \nabla_X Z, Y \rangle\rangle p - k \langle\langle Z, X \rangle\rangle Y - k \langle\langle \nabla_Y Z, X \rangle\rangle p \\ &\quad - k \langle\langle Z, \nabla_Y X \rangle\rangle p. \end{aligned}$
- $\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \nabla_X (\nabla_Y Z) - k \langle\langle \nabla_Y Z, X \rangle\rangle p - k \langle\langle Z, Y \rangle\rangle X \\ &\quad - k \langle\langle \nabla_X Z, Y \rangle\rangle p - k \langle\langle Z, \nabla_X Y \rangle\rangle p. \end{aligned}$
- $\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = \nabla_{[X, Y]} Z - k \langle\langle [X, Y], Z \rangle\rangle p.$

Assim,

$$\langle\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle\rangle = \langle\langle R(X, Y)Z, W \rangle\rangle - k \langle\langle Z, X \rangle\rangle \langle\langle Y, W \rangle\rangle + k \langle\langle Z, Y \rangle\rangle \langle\langle X, W \rangle\rangle.$$

Como $\bar{R}(X, Y)Z = 0$, segue que

$$\langle\langle R(X, Y)Z, W \rangle\rangle = k (\langle\langle Z, X \rangle\rangle \langle\langle Y, W \rangle\rangle - \langle\langle Z, Y \rangle\rangle \langle\langle X, W \rangle\rangle).$$

Logo, pelo Lema 1.26, \mathbb{H}_k^n tem curvatura seccional constante k . \square

Lema 2.11. \mathbb{H}_k^n é geodesicamente completo.

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{H}_k^n, v \in T_p \mathbb{H}_k^n$, e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_k^n$ a curva diferenciável dada por:

$$\gamma(t) = \cosh(t\sqrt{-k})p + \sinh(\sqrt{-k}t) \frac{v}{\sqrt{-k}},$$

onde $\langle\langle v, v \rangle\rangle = 1$. Então, $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(t) = \sqrt{-k} \sinh(\sqrt{-k}t)p + \cosh(\sqrt{-k}t)v$.

Portanto, $\gamma'(0) = v$, e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\langle\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle\rangle = \frac{-k}{k} \left(\sinh(\sqrt{-k}t) \right)^2 + \left(\cosh(\sqrt{-k}t) \right)^2 = 1,$$

ou seja, a curva γ está parametrizada pelo comprimento de arco na métrica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

Pelo Lema 2.9,

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) &= \gamma''(t) + k \langle\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle\rangle \gamma(t) \\ &= \gamma''(t) + k\gamma(t) = -k\gamma(t) + k\gamma(t) = 0,\end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned}\gamma''(t) &= -k \cosh(\sqrt{-k}t) p + \sqrt{-k} \sinh(\sqrt{-k}t) v \\ &= -k \left(\cosh(\sqrt{-k}t) p + \frac{\sinh(\sqrt{-k}t)}{\sqrt{-k}} v \right) = -k\gamma(t).\end{aligned}$$

Então, γ é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Como $p \in \mathbb{H}_k^n$ e $v \in T_p\mathbb{H}_k^n$ são arbitrários, provamos que \mathbb{H}_k^n é geodesicamente completo. \square

Pelos Lemas 2.10 e 2.11, \mathbb{H}_k^n é um modelo do espaço hiperbólico de curvatura seccional constante k , pois \mathbb{H}_k^n é simplesmente conexo.

Para finalizar, vamos caracterizar geometricamente as geodésicas do modelo de Lorentz.

Proposição 2.12. As geodésicas de \mathbb{H}_k^n são as intersecções $\mathbb{P} \cap \mathbb{H}_k^n$, onde \mathbb{P} é um subespaço de dimensão dois de \mathbb{R}^{n+1} tal que $\mathbb{P} \cap \mathbb{H}_k^n \neq \emptyset$.

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{H}_k^n$ e $v \in T_p\mathbb{H}_k^n$, com $\langle\langle v, v \rangle\rangle = 1$. Então a geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_k^n$, dada acima, está contida no subespaço

$$\mathbb{P}_{p,v} = \{ \lambda p + \mu v ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

Na realidade, $\mathbb{P}_{p,v} \cap \mathbb{H}_k^n = \gamma(\mathbb{R})$, pois se $\lambda p + \mu v \in \mathbb{P}_{p,v} \cap \mathbb{H}_k^n$, $\lambda p_0 + \mu v_0 > 0$ e

$$\frac{1}{k} = \langle\langle \lambda p + \mu v, \lambda p + \mu v \rangle\rangle = \frac{\lambda^2}{k} + \mu^2,$$

ou seja, $\lambda^2 + k\mu^2 = 1$.

Como a curva $\mathcal{A} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 ; \lambda^2 + k\mu^2 = 1\}$ possui duas componentes conexas, dadas por,

$$\mathcal{A}_+ = \left\{ \left(\cosh(\sqrt{-k}t), \frac{\sinh(\sqrt{-k}t)}{\sqrt{-k}} \right) ; t \in \mathbb{R} \right\},$$

e

$$\mathcal{A}_- = \left\{ \left(-\cosh(\sqrt{-kt}), \frac{\sinh(\sqrt{-kt})}{\sqrt{-k}} \right); t \in \mathbb{R} \right\},$$

temos que:

$$\mathcal{A}_+^H = \left\{ \cosh(\sqrt{-kt}) p + \frac{\sinh(\sqrt{-kt})}{\sqrt{-k}} v; t \in \mathbb{R} \right\},$$

e

$$\mathcal{A}_-^H = \left\{ -\cosh(\sqrt{-kt}) p + \frac{\sinh(\sqrt{-kt})}{\sqrt{-k}} v; t \in \mathbb{R} \right\},$$

são as componentes conexas de $\mathbb{P}_{p,v} \cap H$, onde $H = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle\langle p, p \rangle\rangle = \frac{1}{k} \right\}$. Logo, como $p \in \mathcal{A}_+^H \cap \mathbb{H}_k^n$, $\mathbb{P}_{p,v} \cap \mathbb{H}_k^n = \mathcal{A}_+^H$. Portanto, $\gamma(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_+^H = \mathbb{P}_{p,v} \cap \mathbb{H}_k^n$.

Seja agora \mathbb{P} um subespaço vetorial de \mathbb{R}^{n+1} de dimensão dois tal que $\mathbb{P} \cap \mathbb{H}_k^n \neq \emptyset$, e seja $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{H}_k^n$. Então existe $v \in \mathbb{P}$ tal que p e v são linearmente independentes. Se tomarmos $w = -k \langle\langle v, p \rangle\rangle p + v$, w e p são linearmente independentes e $w \in T_p \mathbb{H}_k^n$, pois

$$\langle\langle w, p \rangle\rangle = -k \frac{\langle\langle v, p \rangle\rangle}{k} + \langle\langle v, p \rangle\rangle = 0.$$

Logo, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{p,w}$, e, portanto, pelo provado acima, $\mathbb{P} \cap \mathbb{H}_k^n$ é a geodésica de \mathbb{H}_k^n que passa por p com vetor velocidade w . \square

2.2 As hipersuperfícies umbílicas do espaço euclidiano

Seja (\overline{M}^{n+1}, g) uma variedade com métrica Riemanniana g e seja ∇ a sua conexão Riemanniana. Diz-se que uma imersão $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é (totalmente) *umbílica* se, para todo $p \in M$, a segunda forma fundamental B de x em p satisfaz:

$$\langle B(X, Y), N \rangle(p) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle(p), \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},$$

para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica a métrica g em \overline{M} e a métrica induzida por x em M , e N é um campo unitário normal a $x(M)$

Lema 2.13. Nas hipóteses acima, se \overline{M}^{n+1} tem curvatura seccional constante, então λ não depende do ponto p .

Demonstração. Sejam $X, Y, T \in \mathfrak{X}(M)$. Como, por hipótese,

$$\langle -\nabla_X N, Y \rangle = \langle B(X, Y), N \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle \quad \text{e} \quad \langle -\nabla_T N, Y \rangle = \langle B(T, Y), N \rangle = \lambda \langle T, Y \rangle, \quad (2.9)$$

temos

$$\begin{aligned} T \langle \nabla_X N, Y \rangle &= -T(\lambda) \langle X, Y \rangle - \lambda \langle \nabla_T X, Y \rangle - \lambda \langle X, \nabla_T Y \rangle, \\ X \langle \nabla_T N, Y \rangle &= -X(\lambda) \langle T, Y \rangle - \lambda \langle \nabla_X T, Y \rangle - \lambda \langle T, \nabla_X Y \rangle, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\langle \nabla_T \nabla_X N, Y \rangle + \langle \nabla_X N, \nabla_T Y \rangle = -T(\lambda) \langle X, Y \rangle - \lambda \langle \nabla_T X, Y \rangle - \lambda \langle X, \nabla_T Y \rangle, \quad (2.10)$$

$$\langle \nabla_X \nabla_T N, Y \rangle + \langle \nabla_T N, \nabla_X Y \rangle = -X(\lambda) \langle T, Y \rangle - \lambda \langle \nabla_X T, Y \rangle - \lambda \langle T, \nabla_X Y \rangle. \quad (2.11)$$

Subtraindo (2.11) de (2.10), obtemos:

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_T \nabla_X N, Y \rangle - \langle \nabla_X \nabla_T N, Y \rangle + \langle \nabla_X N, \nabla_T Y \rangle - \langle \nabla_T N, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle - \lambda \langle \nabla_T X, Y \rangle - \lambda \langle X, \nabla_T Y \rangle + \lambda \langle \nabla_X T, Y \rangle + \lambda \langle T, \nabla_X Y \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle N, N \rangle = 1$, $\langle \nabla_X N, N \rangle = \langle \nabla_Y N, N \rangle = 0$. Logo, $(\nabla_X N)^\perp = (\nabla_Y N)^\perp = 0$ e, portanto, por (2.9), $\nabla_X N = -\lambda X$ e $\nabla_T N = -\lambda T$. Assim,

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_T \nabla_X N, Y \rangle - \langle \nabla_X \nabla_T N, Y \rangle - \lambda \langle X, \nabla_T Y \rangle + \lambda \langle T, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle - \lambda \langle \nabla_T X, Y \rangle - \lambda \langle X, \nabla_T Y \rangle + \lambda \langle \nabla_X T, Y \rangle + \lambda \langle T, \nabla_X Y \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T \nabla_X N - \nabla_X \nabla_T N, Y \rangle &= \langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle + \lambda \langle [X, T], Y \rangle \\ &= \langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle - \langle \nabla_{[X, T]} N, Y \rangle. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, \overline{M} tem curvatura seccional constante c temos, pelo Lema 1.26, que:

$$\langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle = \langle \overline{R}(X, T)N, Y \rangle = c(\langle X, N \rangle \langle T, Y \rangle - \langle T, N \rangle \langle X, Y \rangle) = 0.$$

Logo, $\langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle = 0$ quaisquer que sejam $X, Y, T \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja X_1, \dots, X_n um referencial ortonormal local. Tomando $X = X_i$, $Y = T = X_j$, $i \neq j$, obtemos que:

$$X_i(\lambda) = \langle X_i(\lambda)X_j - X_j(\lambda)X_i, X_j \rangle = 0,$$

para todo $i = 1, \dots, n$, provando que λ é localmente constante. Como M é conexa, segue que λ é constante. \square

Teorema 2.14. Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Se $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão umbílica, então $x(M)$ é um n -plano ou uma n -esfera de \mathbb{R}^{n+1} . Reciprocamente, se M^n é um n -plano ou uma n -esfera, então a inclusão $i : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão umbílica.

Demonstração. Já sabemos, pelo Lema 2.13, que λ é constante. Se $\lambda = 0$, $\langle \nabla_X N, Y \rangle = 0$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, $\nabla_X N = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e, portanto, N é constante, pois estamos supondo M conexa. Assim, $Y \langle x(p), N \rangle = \langle Y, N \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então, existe $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\langle x(p), N \rangle = k_0$ para todo $p \in M$, ou seja, $x(M)$ está contida no hiperplano $\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle y, N \rangle = k_0\}$. Sendo M completa, $x(M) = \mathcal{P}$.

Se $\lambda \neq 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda > 0$. Consideremos a aplicação $y : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $y(p) = x(p) + \frac{N(p)}{\lambda}$.

Como $\nabla_X N = -\lambda X$, $dy(X) = dx(X) + \frac{dN(X)}{\lambda} = X - \frac{\lambda X}{\lambda} = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, ou seja, a aplicação y é constante. Logo existe $y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $x(p) + \frac{N(p)}{\lambda} = y_0$ para todo $p \in M$. Então, $|x(p) - y_0| = \frac{|N(p)|}{|\lambda|} = \frac{1}{\lambda}$ para todo $p \in M$ e, portanto, $x(M)$ está contida na esfera $S_{\frac{1}{\lambda}}^n(y_0)$ de centro y_0 e raio $\frac{1}{\lambda}$. Sendo M completa, $x(M) = S_{\frac{1}{\lambda}}^n(y_0)$.

Seja, agora, M^n um n -plano ortogonal ao vetor unitário N_0 , ou seja,

$$M^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, N_0 \rangle = c\},$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Então, como $N(p) = N_0$, $p \in M^n$, é um campo diferenciável unitário normal à imersão $i : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, temos que $\bar{\nabla}_X N \equiv 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$. Assim, todas as curvaturas principais da imersão são iguais a zero. Logo, por (1.3) e (1.4), $K \equiv 0$ é a curvatura seccional e $H \equiv 0$ é a curvatura média de M^n com a métrica induzida de \mathbb{R}^{n+1} .

Se $M^n = S_r^n(p_0)$ é a n -esfera de centro p_0 e raio r , então $N(p) = \frac{-(p-p_0)}{r}$ é um campo diferenciável unitário normal à imersão $i : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Sendo $\bar{\nabla}_X N = -\frac{1}{r}X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$, temos que todas as curvaturas principais da imersão são iguais a $\frac{1}{r}$. Logo $K \equiv \frac{1}{r^2}$ é a curvatura seccional e $H \equiv \frac{1}{r}$ é a curvatura média de M^n com a métrica induzida de \mathbb{R}^{n+1} . \square

2.3 As hipersuperfícies umbílicas da esfera

Seja $S_r^{n+1}(c) = \{p \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle p-c, p-c \rangle = r^2\}$ a esfera euclidiana $(n+1)$ -dimensional de centro $c \in \mathbb{R}^{n+2}$ e raio $r > 0$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica euclidiana usual.

Teorema 2.15. Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Se $x : M \rightarrow S_r^{n+1}(c)$ é uma imersão umbílica, então $x(M)$ é uma esfera euclidiana n -dimensional, e, portanto, $x(M)$ é uma esfera geodésica de $S_r^{n+1}(c)$.

Demonstração. Sejam ∇ , $\bar{\nabla}$ e $\overline{\bar{\nabla}}$ as conexões Riemannianas de M^n , $S_r^{n+1}(c)$ e \mathbb{R}^{n+2} , respectivamente.

Sejam $p \in M$, $v \in T_{x(p)}S_r^{n+1}(c)$, e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_r^{n+1}(c)$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = x(p)$ e $\gamma'(0) = v$. Como $\langle \gamma(t) - c, \gamma(t) - c \rangle = r^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\langle \gamma'(0), \gamma(0) - c \rangle = 0$, ou seja, $\langle v, x(p) - c \rangle = 0$. Logo, $x(p) - c \in (T_{x(p)}S_r^{n+1}(c))^\perp$ para todo $p \in M$.

Então, para $X, Y \in \mathfrak{X}(S_r^{n+1}(c))$,

$$\overline{\bar{\nabla}}_Y X = \bar{\nabla}_Y X + \left\langle \bar{\nabla}_Y X, \frac{x-c}{r} \right\rangle \frac{x-c}{r},$$

e, portanto, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\overline{\bar{\nabla}}_Y X = \nabla_Y X + \langle \bar{\nabla}_Y X, N \rangle N + \left\langle \bar{\nabla}_Y X, \frac{x-c}{r} \right\rangle \frac{x-c}{r}, \quad (2.12)$$

onde N é um campo unitário normal a M^n em $S_r^{n+1}(c)$.

Sendo $\left\langle X, \frac{x-c}{r} \right\rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(S_r^{n+1}(c))$,

$$\left\langle \overline{\bar{\nabla}}_Y X, \frac{x-c}{r} \right\rangle = - \left\langle X, \overline{\bar{\nabla}}_Y \frac{x-c}{r} \right\rangle = -\frac{1}{r} \langle X, Y \rangle,$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(S_r^{n+1}(c))$.

Por outro lado, por (2.12), para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\langle \overline{\nabla}_Y X, N \rangle = \langle \nabla_Y X, N \rangle$ e, portanto, por hipótese, existe uma função diferenciável $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle \overline{\nabla}_Y X, N \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle$, ou seja,

$$\langle \overline{\nabla}_Y N, X \rangle = -\lambda \langle X, Y \rangle. \quad (2.13)$$

Resumindo, para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\langle \overline{\nabla}_Y X, \frac{x-c}{r} \rangle = -\frac{1}{r} \langle X, Y \rangle$ e $\langle \overline{\nabla}_Y X, N \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle$.

Afirmção 1. *A aplicação $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é constante.*

Sejam $T, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Como, por (2.13), $\langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle = -\lambda \langle X, Y \rangle$ e $\langle \overline{\nabla}_T N, Y \rangle = -\lambda \langle T, Y \rangle$,

$$\begin{aligned} T \langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle - X \langle \overline{\nabla}_T N, Y \rangle &= -T(\lambda) \langle X, Y \rangle - \lambda \langle \overline{\nabla}_T X, Y \rangle - \lambda \langle X, \overline{\nabla}_T Y \rangle \\ &\quad + X(\lambda) \langle T, Y \rangle + \lambda \langle \overline{\nabla}_X T, Y \rangle + \lambda \langle T, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle + \lambda \langle [X, T], Y \rangle \\ &\quad + \lambda \langle T, \overline{\nabla}_X Y \rangle - \lambda \langle X, \overline{\nabla}_T Y \rangle. \end{aligned}$$

Usando (2.13), segue que:

$$\begin{aligned} T \langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle - X \langle \overline{\nabla}_T N, Y \rangle &= \langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle - \langle \overline{\nabla}_{[X, T]} N, Y \rangle \\ &\quad - \langle \overline{\nabla}_T N, (\overline{\nabla}_X Y)^T \rangle + \langle \overline{\nabla}_X N, (\overline{\nabla}_T Y)^T \rangle, \end{aligned}$$

onde $(\overline{\nabla}_X Y)^T$ e $(\overline{\nabla}_T Y)^T$ são as componentes tangentes a M de $\overline{\nabla}_X Y$ e $\overline{\nabla}_T Y$, respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_X N - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_T N, Y \rangle + \langle \overline{\nabla}_X N, (\overline{\nabla}_T Y)^\perp \rangle - \langle \overline{\nabla}_T N, (\overline{\nabla}_X Y)^\perp \rangle \\ = \langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle - \langle \overline{\nabla}_{[X, T]} N, Y \rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde $(\overline{\nabla}_T Y)^\perp$ e $(\overline{\nabla}_X Y)^\perp$ são as componentes normais a M^n de $\overline{\nabla}_T Y$ e $\overline{\nabla}_X Y$, respectivamente.

Sendo $\langle N, N \rangle = 1$ e $\langle N, \frac{x-c}{r} \rangle = 0$,

$$\langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \overline{\nabla}_X N, \frac{x-c}{r} \rangle = 0, \quad (2.15)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, $(\overline{\nabla}_X N)^\perp = 0$, onde $(\overline{\nabla}_X N)^\perp$ é a componente normal a M^n de $\overline{\nabla}_X N$. Portanto, por (2.14),

$$\langle \overline{R}(X, T)N, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_X N - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_T N + \overline{\nabla}_{[X, T]} N, Y \rangle = \langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle,$$

onde \overline{R} é a curvatura de \mathbb{R}^{n+2} .

Então, como $\overline{R} = 0$, segue que $\langle X(\lambda)T - T(\lambda)X, Y \rangle = 0$ para quaisquer $X, Y, T \in \mathfrak{X}(M)$. Usando o argumento feito no final da demonstração do Lema 2.13, obtemos que λ é constante em M , provando, assim, a afirmação 1.

Seja $V : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ o campo diferenciável dado por:

$$V(p) = \lambda N(p) - \frac{1}{r} \left(\frac{x(p) - c}{r} \right),$$

para todo $p \in M$.

Então $\|V(p)\|^2 = \lambda^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{\lambda^2 r^2 + 1}{r^2} = \mu^2$, onde $\mu = \frac{\sqrt{\lambda^2 r^2 + 1}}{r}$, e, portanto, $N^* = \frac{V}{\mu}$ é um campo unitário normal a M , com respeito a imersão $i \circ x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, onde $i : S_r^{n+1}(c) \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ é a aplicação de inclusão.

Consideremos o campo $U : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ dado por $U(p) = \frac{N(p)}{r} + \lambda \left(\frac{x(p) - c}{r} \right)$ para todo $p \in M$. Então $U(p)$ é perpendicular a $N^*(p)$ para todo $p \in M$, e sendo M conexa, U é constante, pois, por (2.13) e (2.15), $\overline{\nabla}_X N = -\lambda X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, e, portanto,

$$\overline{\nabla}_X U = \frac{1}{r} \overline{\nabla}_X N + \frac{\lambda}{r} X = -\frac{1}{r} \lambda X + \frac{\lambda}{r} X = 0.$$

Assim, $Y \langle x, U \rangle = \langle Y, U \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então, $\langle x(p), U \rangle = k_0$, para todo $p \in M$, onde k_0 é constante. Ou seja, $x(M) \subset \mathcal{P}$, onde \mathcal{P} é o hiperplano de \mathbb{R}^{n+2} dado por

$$\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle y, U \rangle = k_0\}.$$

Consideremos agora a aplicação $y : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ dada por: $y(p) = x(p) + \frac{1}{\mu} N^*$. Então, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} dy(X) &= X + \frac{1}{\mu} \overline{\nabla}_X N^* = X + \frac{1}{\mu^2} \overline{\nabla}_X V = X + \frac{1}{\mu^2} \left(\lambda \overline{\nabla}_X N - \frac{1}{r^2} X \right) \\ &= X - \frac{1}{\mu^2} \left(\lambda^2 + \frac{1}{r^2} \right) X = X - \frac{1}{\mu^2} \mu^2 X = 0. \end{aligned}$$

Sendo M conexa, existe $y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $y(p) = y_0$ para todo $p \in M$. Logo,

$$|x(p) - y_0|^2 = \frac{|N^*|^2}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} = \frac{r^2}{\lambda^2 r^2 + 1},$$

ou seja, $x(M) \subset S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0)$, onde $\tilde{r} = \frac{r}{\sqrt{\lambda^2 r^2 + 1}}$.

Como $\langle y_0, U \rangle = \left\langle x(p) + \frac{1}{\mu} N^*, U \right\rangle = \langle x(p), U \rangle = k_0$, pois $\langle U, N^*(p) \rangle = 0$ para todo $p \in M$, obtemos que o centro y_0 da esfera pertence ao hiperplano \mathcal{P} .

Sendo assim, $x(M) \subset S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) \cap \mathcal{P} \cap S_r^{n+1}(c)$

Afirmção 2. $S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) \cap \mathcal{P} \subset S_r^{n+1}(c)$ e $S_r^{n+1}(c) \cap \mathcal{P} = S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) \cap \mathcal{P}$.

• $S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) \cap \mathcal{P} \subset S_r^{n+1}(c)$.

Seja $p \in S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) \cap \mathcal{P}$. Então $p = y_0 + \tilde{r}v$, onde o vetor $v = \frac{p - y_0}{\tilde{r}}$ tem norma 1 e é perpendicular ao vetor U , e portanto, perpendicular ao vetor $y_0 - c$, pois

$$\begin{aligned} y_0 - c &= x(p) - c + \frac{1}{\mu^2} V = (x(p) - c) + \frac{r^2}{\lambda^2 r^2 + 1} \left(\lambda N - \frac{1}{r} \left(\frac{x(p) - c}{r} \right) \right) \\ &= \left(r - \frac{r}{\lambda^2 r^2 + 1} \right) \left(\frac{x(p) - c}{r} \right) + \frac{r^2 \lambda}{\lambda^2 r^2 + 1} N \\ &= \frac{r^3 \lambda}{\lambda^2 r^2 + 1} \left(\lambda \left(\frac{x(p) - c}{r} \right) + \frac{N}{r} \right) \\ &= \frac{r^3 \lambda}{\lambda^2 r^2 + 1} U. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Logo,

$$|p - c|^2 = |y_0 - c|^2 + \tilde{r}^2 = \frac{r^6 \lambda^2}{(\lambda^2 r^2 + 1)^2} |U|^2 + \frac{r^2}{\lambda^2 r^2 + 1} = \frac{r^6 \lambda^2}{(\lambda^2 r^2 + 1)^2} \left(\frac{1 + \lambda^2 r^2}{r^2} \right) + \frac{r^2}{\lambda^2 r^2 + 1} = r^2,$$

ou seja, $p \in S_r^{n+1}(c)$.

No caso $\lambda = 0$, $\tilde{r} = r$, $y_0 = c$ e $\overline{\nabla}_X N = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Logo N é constante, $U = \frac{N}{r}$ e $x(M) \subset S_r^{n+1}(c) \cap \mathcal{P}$. Sendo \mathcal{P} um hiperplano que passa por $y_0 = c$, $S_r^{n+1}(c) \cap \mathcal{P}$ é uma esfera n -dimensional de centro c e raio r , ou seja, $S_r^{n+1}(c) \cap \mathcal{P}$ é um equador de $S_r^{n+1}(c)$.

• $S_r^{n+1}(c) \cap \mathcal{P} = S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) \cap \mathcal{P}$.

Pelo que foi demonstrado acima, basta mostrar que $S_r^{n+1}(c) \cap \mathcal{P} \subset S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) \cap \mathcal{P}$, no caso $\lambda \neq 0$. Seja $p \in S_r^{n+1}(c) \cap \mathcal{P}$. Então $p - y_0$ é perpendicular a U , e, por (2.16), $p - y_0$ é perpendicular a $y_0 - c$. Logo,

$$|p - c|^2 = |p - y_0|^2 + |y_0 - c|^2,$$

e, portanto,

$$|p - y_0|^2 = |p - c|^2 - |y_0 - c|^2 = r^2 - \frac{r^4 \lambda^2}{\lambda^2 r^2 + 1} = \frac{r^2}{\lambda^2 r^2 + 1} = \tilde{r}^2,$$

ou seja, $p \in S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0)$. Provando a afirmação 2.

Pela afirmação acima, $x(M) \subset \mathcal{P} \cap S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) = \mathcal{P} \cap S_r^{n+1}(c)$. Como estamos supondo M completa, $x(M) = S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) \cap \mathcal{P}$, ou seja, $x(M)$ é a esfera de dimensão n de centro y_0 e raio \tilde{r} contida no hiperplano \mathcal{P} .

Afirmação 3. $S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0) \cap \mathcal{P}$ é uma esfera geodésica de $S_r^{n+1}(c)$.

No caso $\lambda \neq 0$, seja $q_0 = c + r \frac{y_0 - c}{|y_0 - c|}$. Então, por (2.16), $q_0 - c$ é normal ao hiperplano \mathcal{P} e, portanto, $T_{q_0}(S_r^{n+1}(c))$ é paralelo ao hiperplano \mathcal{P} .

Sejam $v \in T_{q_0}(S_r^{n+1}(c))$, $|v| = 1$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ a curva diferenciável dada por

$$\gamma(t) = r \left(\left(\cos \frac{t}{r} \right) \frac{q_0 - c}{r} + \left(\sen \frac{t}{r} \right) v \right) + c.$$

Então, $\gamma(0) = q_0$ e $\gamma'(0) = v$. Além disso, $|\gamma(t) - c|^2 = r^2 \left(\left(\cos \frac{t}{r} \right)^2 + \left(\sen \frac{t}{r} \right)^2 \right) = r^2$, e, portanto, $\gamma(t) \in S_r^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $\gamma'(t) = - \left(\sen \frac{t}{r} \right) \frac{q_0 - c}{r} + \left(\cos \frac{t}{r} \right) v$, $|\gamma'(t)| = \left(\sen \frac{t}{r} \right)^2 + \left(\cos \frac{t}{r} \right)^2 = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, γ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

E, sendo

$$\gamma''(t) = \frac{-1}{r} \left(\cos \frac{t}{r} \right) \frac{q_0 - c}{r} - \frac{1}{r} \left(\sen \frac{t}{r} \right) v = \frac{-1}{r^2} (\gamma(t) - c),$$

temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{dt}\gamma'(t) &= \bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = \bar{\bar{\nabla}}_{\gamma'}\gamma' - \left\langle \bar{\bar{\nabla}}_{\gamma'}\gamma', \frac{\gamma(t)-c}{r} \right\rangle \frac{\gamma(t)-c}{r} \\
 &= \gamma''(t) - \left\langle \gamma''(t), \frac{\gamma(t)-c}{r} \right\rangle \frac{\gamma(t)-c}{r} \\
 &= \frac{-1}{r^2}(\gamma(t)-c) + \frac{r^2}{r^4}(\gamma(t)-c) = 0.
 \end{aligned}$$

Logo γ é a geodésica de $S_r^{n+1}(c)$ tal que $\gamma(0) = q_0$ e $\gamma'(0) = v$.

Supondo $\lambda > 0$, existe $t_0 \in \left(0, \frac{\pi r}{2}\right)$ tal que $\cos \frac{t_0}{r} = \frac{|y_0 - c|}{r} = \frac{\lambda r}{\sqrt{\lambda^2 r^2 + 1}}$. Então,

$$\gamma(t_0) = r \left(\left(\cos \frac{t_0}{r}\right) \frac{y_0 - c}{|y_0 - c|} + \left(\sin \frac{t_0}{r}\right) v \right) + c = r \left(\sin \frac{t_0}{r}\right) v + y_0,$$

e

$$|\gamma(t_0) - y_0| = r \left(\sin \frac{t_0}{r}\right) = \frac{r}{\sqrt{\lambda^2 r^2 + 1}} = \tilde{r},$$

ou seja, $\gamma(t_0) \in \mathcal{P} \cap S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0)$. Portanto, a esfera geodésica de centro q_0 e raio t_0 está contida em $\mathcal{P} \cap S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0)$.

Na realidade, $\mathcal{P} \cap S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0)$ é a esfera geodésica de centro q_0 e raio t_0 , pois se $p \in \mathcal{P} \cap S_{\tilde{r}}^{n+1}(y_0)$, então $p = y_0 + \tilde{r}w$, onde $w = \frac{p - y_0}{\tilde{r}}$ é um vetor unitário paralelo a \mathcal{P} e, portanto, paralelo a $T_{q_0}(S_r^{n+1}(c))$.

Logo,

$$\gamma_{w, q_0}(t_0) = r \left(\sin \frac{t_0}{r}\right) w + y_0 = \frac{r}{\sqrt{\lambda^2 r^2 + 1}} w + y_0 = \tilde{r}w + y_0 = p,$$

ou seja, p pertence à esfera geodésica de centro q_0 e raio t_0 .

Para $\lambda = 0$, N é constante, perpendicular a \mathcal{P} , $c \in \mathcal{P}$, e, portanto, $\mathcal{P} \cap S_r^{n+1}(c)$ é a esfera geodésica de centro $q_0 = rN + c$ e raio $\frac{\pi r}{2}$.

De fato, se p pertence a esfera geodésica de centro q_0 e raio $\frac{\pi r}{2}$, existe $v \in T_{q_0}S_r^{n+1}(c)$, $|v| = 1$, tal que $p = \gamma\left(\frac{\pi r}{2}\right)$, onde $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S_r^{n+1}(c)$, dada por $\gamma(t) = r \left(\left(\cos \frac{t}{r}\right) \frac{(q_0 - c)}{r} + \left(\sin \frac{t}{r}\right) v \right) + c$, é a geodésica de $S_r^{n+1}(c)$ tal que $\gamma(0) = q_0$ e $\gamma'(0) = v$. Como $\left\langle \gamma\left(\frac{\pi r}{2}\right) - c, N \right\rangle = 0$, $\gamma\left(\frac{\pi r}{2}\right) \in \mathcal{P}$ e, portanto, $p \in S_r^{n+1}(c) \cap \mathcal{P}$.

Reciprocamente, se $p \in \mathcal{P} \cap S_r^{n+1}(c)$, $v = \frac{p - c}{r}$ é um vetor unitário paralelo a \mathcal{P} , logo, paralelo a

$T_{q_0}S_r^{n+1}(c)$, tal que $\gamma_{v,q_0}\left(\frac{\pi r}{2}\right) = rv + c = p$, ou seja, p pertence a esfera geodésica de centro q_0 e raio $\frac{\pi r}{2}$.

Observemos, também, que para $\lambda = 0$, M é uma hipersuperfície totalmente geodésica de $S_r^{n+1}(c)$, pois,

$$\bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \langle \bar{\nabla}_Y X, N \rangle N = \nabla_Y X.$$

Assim, $B(X, Y) = 0$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. □

Mostraremos, agora, que todas as esferas geodésicas são hipersuperfícies umbílicas de $S_r^{n+1}(c)$.

Proposição 2.16. Se \mathcal{S} é uma esfera geodésica de $S_r^{n+1}(c)$, então \mathcal{S} é uma hipersuperfície compacta umbílica de $S_r^{n+1}(c)$ com curvatura média constante.

Demonstração. Se \mathcal{S} é uma esfera geodésica de centro $q_0 \in S_r^{n+1}(c)$ e raio r_0 , $0 < r_0 \leq \frac{\pi r}{2}$, então

$$\mathcal{S} = \left\{ r \left(\left(\cos \frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{q_0 - c}{r} \right) + \left(\sin \frac{r_0}{r} \right) v \right) + c; v \perp q_0 - c \text{ e } |v| = 1 \right\},$$

pois $\gamma(t) = r \left(\left(\cos \frac{t}{r} \right) \left(\frac{q_0 - c}{r} \right) + \left(\sin \frac{t}{r} \right) v \right) + c$, $t \in \mathbb{R}$, é a geodésica de $S_r^{n+1}(c)$ tal que $\gamma(0) = q_0$ e $\gamma'(0) = v$. Logo $\mathcal{S} = S_r^{n+1}(c) \cap \mathcal{P}$, onde \mathcal{P} é o hiperplano de \mathbb{R}^{n+2} que passa pelo ponto $c + \left(\cos \frac{r_0}{r} \right) (q_0 - c)$ e é perpendicular ao vetor $q_0 - c$. Portanto, \mathcal{S} é uma subvariedade de dimensão n de $S_r^{n+1}(c)$.

Se $p = r \left(\left(\cos \frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{q_0 - c}{r} \right) + \left(\sin \frac{r_0}{r} \right) v_0 \right) + c$ é um ponto de \mathcal{S} , onde $|v_0| = 1$ e $v_0 \perp (q_0 - c)$,

$$N(p) = - \left(\sin \frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{q_0 - c}{r} \right) + \left(\cos \frac{r_0}{r} \right) v_0,$$

é um vetor normal a \mathcal{S} no ponto p .

De fato, como toda curva diferenciável em \mathcal{S} que passa por p , em $s = 0$, é da forma:

$$\lambda(s) = c + r \left(\cos \frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{q_0 - c}{r} \right) + r \left(\sin \frac{r_0}{r} \right) v(s),$$

onde $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ é uma curva diferenciável tal que $v(0) = v_0$, $|v(s)| = 1$, $\langle v(s), q_0 - c \rangle = 0$, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, temos que

$$\lambda'(0) = r \left(\sin \frac{r_0}{r} \right) v'(0),$$

e, portanto, $\langle \lambda'(0), N(p) \rangle = 0$, pois $\langle v'(0), v_0 \rangle = \langle v'(0), q_0 - c \rangle = 0$.

Então, se $X = \lambda'(0)$ e $Y \in T_{q_0}\mathcal{S}$,

$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\lambda'(0)} N, Y \rangle = \left\langle \left. \frac{dN \circ \lambda}{ds}(s) \right|_{s=0}, Y \right\rangle = \left\langle \left(\cos \frac{r_0}{r} \right) v'(0), Y \right\rangle = \frac{1}{r} \left(\cot \frac{r_0}{r} \right) \langle X, Y \rangle,$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de $S_r^{n+1}(c)$.

Logo \mathcal{S} é uma subvariedade umbílica de $S_r^{n+1}(c)$ com curvatura média constante $-\frac{1}{r} \left(\cot \frac{r_0}{r} \right)$. \square

2.4 As hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico

Antes de determinarmos as hipersuperfícies umbílicas do modelo do semi-espaço superior do espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} , precisamos provar o seguinte lema.

Lema 2.17. Sejam $x : M^n \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, g)$ uma imersão umbílica e $\bar{g} = \mu g$ uma métrica conforme a g . Então a imersão $x : M^n \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$ também é umbílica, e

$$\bar{g} \left(\bar{\nabla}_X \left(\frac{N}{\sqrt{\mu}} \right), Y \right) = \frac{-2\lambda\mu + N(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \bar{g}(X, Y), \quad (2.17)$$

onde $g(\nabla_X N, Y) = -\lambda g(X, Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, N é um campo unitário normal a M com respeito à métrica g , ∇ e $\bar{\nabla}$ são as conexões de \bar{M} compatíveis com as métricas g e \bar{g} , respectivamente.

Demonstração. Observemos, primeiro, que $\frac{N}{\sqrt{\mu}}$ é normal e unitário na métrica \bar{g} , pois,

$$\bar{g} \left(\frac{N}{\sqrt{\mu}}, \frac{N}{\sqrt{\mu}} \right) = \frac{1}{\mu} \mu g(N, N) = 1.$$

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Pelo Lema 2.2,

$$\begin{aligned}
 \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X\left(\frac{N}{\sqrt{\mu}}\right), Y\right) &= \bar{g}\left(\nabla_X\left(\frac{N}{\sqrt{\mu}}\right) + S\left(X, \frac{N}{\sqrt{\mu}}\right), Y\right) \\
 &= \bar{g}\left(\nabla_X\left(\frac{N}{\sqrt{\mu}}\right), Y\right) + \bar{g}\left(S\left(X, \frac{N}{\sqrt{\mu}}\right), Y\right) \\
 &= \bar{g}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla_X N, Y\right) + \bar{g}\left(X\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)N, Y\right) \\
 &\quad + \bar{g}\left(\frac{1}{2\mu}\left(X(\mu)\frac{N}{\sqrt{\mu}} + \frac{N(\mu)}{\sqrt{\mu}}X - g\left(X, \frac{N}{\sqrt{\mu}}\right)\text{grad } \mu, Y\right)\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\bar{g}(\nabla_X N, Y) + \frac{N(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}}\bar{g}(X, Y) \\
 &= \frac{2\mu\bar{g}(\nabla_X N, Y) + N(\mu)\bar{g}(X, Y)}{2\mu\sqrt{\mu}}
 \end{aligned}$$

Como $\bar{g}(\nabla_X N, Y) = -\lambda\bar{g}(X, Y)$, segue que:

$$\bar{g}\left(\bar{\nabla}_X\left(\frac{N}{\sqrt{\mu}}\right), Y\right) = \left(\frac{-2\lambda\mu + N(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}}\right)\bar{g}(X, Y).$$

□

Teorema 2.18. Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Se $x : M^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ é uma imersão umbílica, então $x(M)$ é a interseção de \mathbb{H}^{n+1} com um n -plano ou uma n -esfera de \mathbb{R}^{n+1} .

Demonstração. Como a métrica do espaço hiperbólico é conforme à métrica euclidiana, temos, pelo Lema 2.17, que $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ também é uma imersão umbílica e

$$\left\langle\left\langle\bar{\nabla}_X\left(\frac{N}{\sqrt{\mu}}\right), Y\right\rangle\right\rangle = \left(\frac{-2\lambda\mu + N(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}}\right)\langle\langle X, Y \rangle\rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = \mu\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica usual de \mathbb{R}^{n+1} , $\mu(p) = \frac{1}{x_{n+1}^2}$, $p = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1}$, $\bar{\nabla}$ é a conexão de \mathbb{H}^{n+1} , $\langle\nabla_X N, Y\rangle = -\lambda\langle X, Y\rangle$, ∇ é a conexão usual de \mathbb{R}^{n+1} e N um campo normal à imersão $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle N, N \rangle \equiv 1$.

Então, pelo Lema 2.13, λ é constante. Temos, assim, dois casos a considerar.

1º caso: $\lambda = 0$.

Neste caso, como foi provado no Teorema 2.14, o campo unitário normal N é constante e $x(M^n) \subset \mathcal{P} \cap \mathbb{H}^{n+1}$, onde $\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle y, N \rangle = k_0\}$ é um hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} . Como estamos supondo M^n completa com a métrica induzida da imersão $x : M^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, $x(M^n) = \mathcal{P} \cap \mathbb{H}^{n+1}$.

Seja $\alpha \in [0, \pi]$ o ângulo entre N e e_{n+1} . Se $N = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$, temos $\cos \alpha = \langle N, e_{n+1} \rangle = a_{n+1}$, ou seja, $N = (a_1, \dots, a_n, \cos \alpha)$.

Sejam $p \in M, x(p) = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$ e $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ a curva diferenciável dada por $\beta(t) = x(p) + tN$. Então,

$$N(\mu)(p) = d\mu(N)(p) = \left. \frac{d}{dt}(\mu \circ \beta)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(t \cos \alpha + p_{n+1})^2} \right) \right|_{t=0} = \frac{-2 \cos \alpha}{(p_{n+1})^3}.$$

Logo,

$$\bar{\lambda}(p) = - \left(\frac{-2\lambda\mu + N(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \right) (p) = \left(\frac{2 \cos \alpha}{p_{n+1}^3} \frac{1}{2} (p_{n+1})^3 \right) = \cos \alpha,$$

para todo $p \in M$, ou seja, as curvaturas principais da imersão $x : M^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ são todas iguais a $\cos \alpha$, em todos os pontos de M .

Assim, $H = \cos \alpha$ é a curvatura média de M e, pela equação de Gauss (Teorema 1.30), a curvatura seccional de M é $K = -1 + (\cos \alpha)^2 = -(\sin \alpha)^2$.

Portanto, para:

- $\alpha = 0$, temos: $H = 1, K = 0, N = e_{n+1}$ e \mathcal{P} é um hiperplano paralelo a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$.

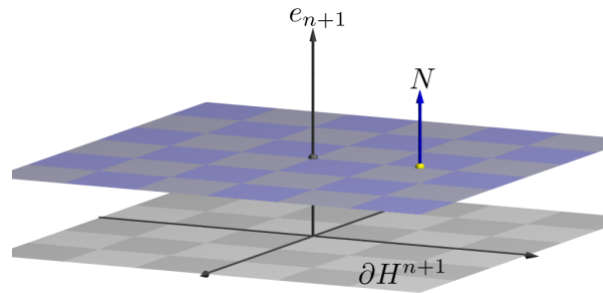
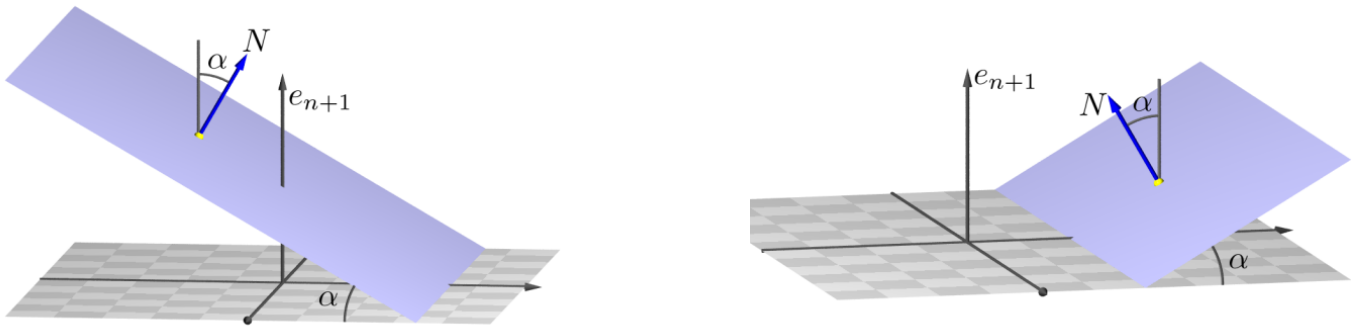


Figura 3:

- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, temos: $0 < H = \cos \alpha < 1, -1 < K = -(\sin \alpha)^2 < 0, N$ aponta para o semi-espaço superior de $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ e \mathcal{P} é um hiperplano que corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo o ângulo α .

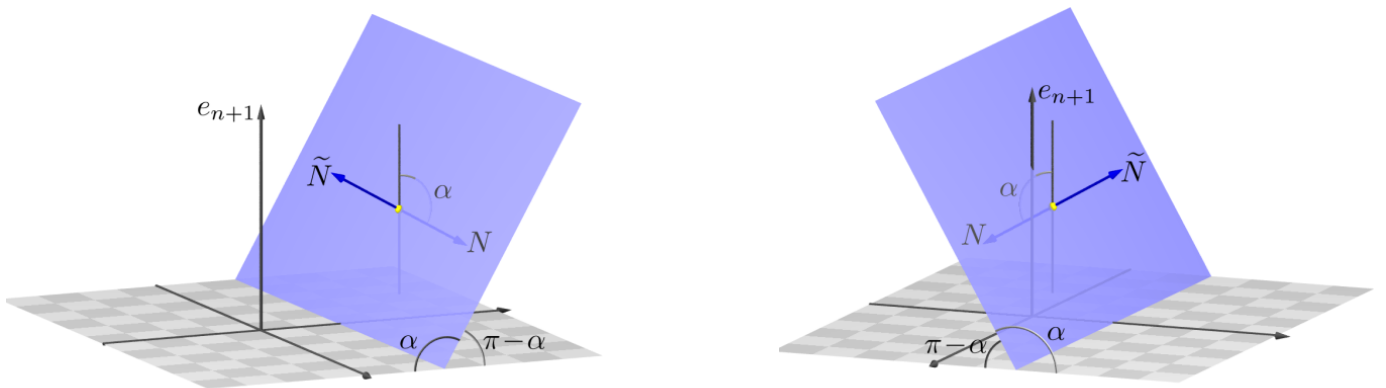


ou

Figura 4:

- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, temos: $-1 < H = \cos \alpha < 0$, $-1 < K = -(\sin \alpha)^2 < 0$, N aponta para o semi-espaço inferior de $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ e \mathcal{P} é um hiperplano que faz um ângulo $\pi - \alpha$ com o hiperplano $\partial\mathbb{H}^{n+1}$.

Mas, tomando $\tilde{N} = -N$, a curvatura média \tilde{H} , relativa ao vetor normal \tilde{N} (que aponta para o semi-espaço superior de $\partial\mathbb{H}^{n+1}$), é $0 < \tilde{H} = -\cos \alpha < 1$, recaindo, assim, no caso anterior.



ou

Figura 5:

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$, temos: $H = 0$, $K = -1$ e \mathcal{P} é um hiperplano perpendicular a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$.

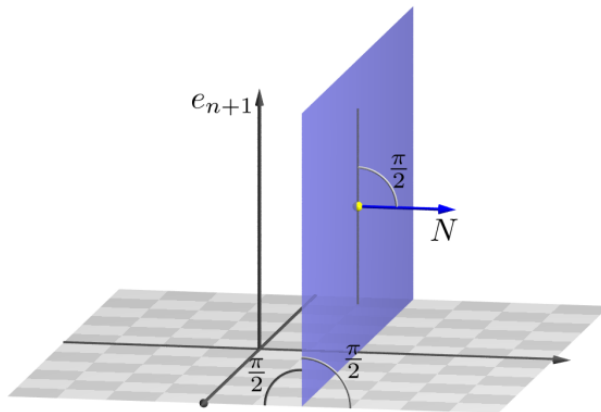


Figura 6:

2º caso: $\lambda \neq 0$.

Supondo $\lambda > 0$, existe, pelo Teorema 2.14, $y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $x(p) + \frac{N(p)}{\lambda} = y_0$ para todo $p \in M^n$, ou seja, $x(M^n) \subset S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(y_0) \cap \mathbb{H}^{n+1}$ e $N(p)$ aponta para dentro de $S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(y_0)$ para todo $p \in M^n$. Como M^n é completa com a métrica induzida de \mathbb{H}^{n+1} pela imersão $x : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, $x(M^n) = S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c) \cap \mathbb{H}^{n+1}$.

Sejam $p \in M^n$, $x(p) = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$ e $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ a curva diferenciável dada por $\beta(t) = x(p) + tN(p)$. Então,

$$N(\mu)(p) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(\langle \beta(t), e_{n+1} \rangle)^2} \right) \Big|_{t=0} = \frac{-2\langle \beta'(0), e_{n+1} \rangle}{(\langle \beta(0), e_{n+1} \rangle)^3} = \frac{-2\langle N(p), e_{n+1} \rangle}{(\langle x(p), e_{n+1} \rangle)^3} = \frac{2\lambda \langle x(p) - y_0, e_{n+1} \rangle}{p_{n+1}^3}.$$

Logo, para todo $p \in M$,

$$\bar{\lambda}(p) = - \left(\frac{-2\lambda\mu + N(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \right) (p) = -\frac{p_{n+1}^3}{2} \left(\frac{-2\lambda}{p_{n+1}^2} + \frac{2\lambda}{p_{n+1}^2} - \frac{2\lambda \langle y_0, e_{n+1} \rangle}{p_{n+1}^3} \right) = \lambda \langle y_0, e_{n+1} \rangle.$$

Portanto, para:

- $\langle y_0, e_{n+1} \rangle = 0$, ou seja, $y_0 \in \partial\mathbb{H}^{n+1}$, temos: $\bar{\lambda} = 0$, $K = -1$, $H = 0$ e $S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(y_0)$ é uma n -esfera que corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ ortogonalmente.

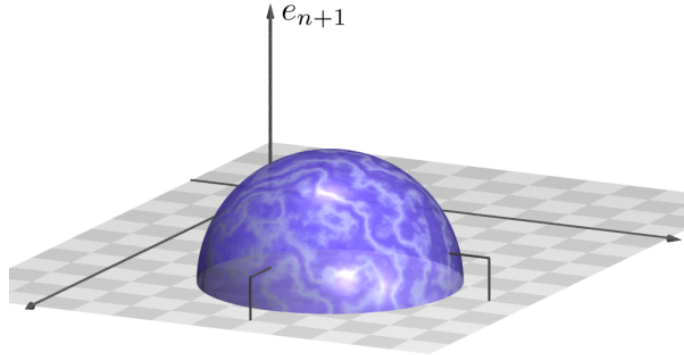


Figura 7:

- $0 < |\langle y_0, e_{n+1} \rangle| < \frac{1}{\lambda}$.

Seja $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ o ângulo que o vetor normal $N(p)$ a $S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c)$, que aponta para dentro de $S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c)$, em um ponto $p \in S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c) \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$, faz com o vetor e_{n+1} .

Como, por continuidade, $y_0 = p + \frac{N(p)}{\lambda}$ para todo $p \in \partial\mathbb{H}^{n+1}$, $\langle y_0, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle N(p), e_{n+1} \rangle = \frac{\cos \alpha}{\lambda}$ e, portanto, $\bar{\lambda} = \cos \alpha$. Assim, $H = \cos \alpha$ e $K = -1 + (\cos \alpha)^2 = -(\sin \alpha)^2$.

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $0 < H = \cos \alpha < 1$, $-1 < K = -(\sin \alpha)^2 < 0$, $N(p)$ aponta para o semi-espaço

superior de $\partial\mathbb{H}^{n+1}$, para todo $p \in S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c) \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$, e $S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c)$ é uma n -esfera que corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo o ângulo α .

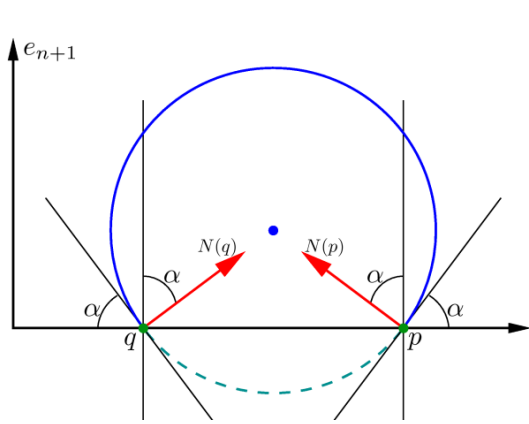


Figura 8:

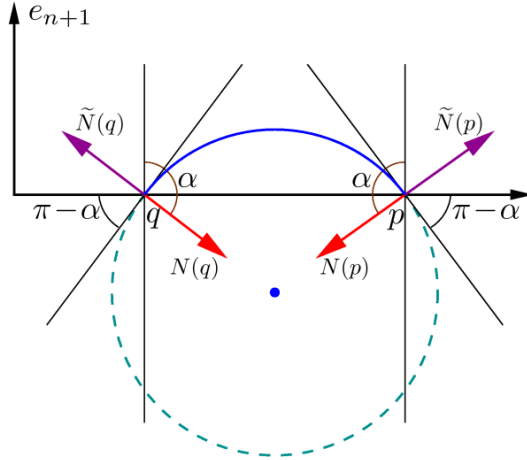


Figura 9:

Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $-1 < H = \cos \alpha < 0$, $-1 < K = -(\text{sen } \alpha)^2 < 0$, $N(p)$ aponta para o semi-espaço inferior de $\partial\mathbb{H}^{n+1}$, para todo $p \in S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c) \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$, e $S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c)$ é uma n -esfera que corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo o ângulo $\pi - \alpha$, (figura 9).

Tomando $\tilde{N}(p) = -N(p)$, a curvatura média \tilde{H} , relativa ao vetor normal \tilde{N} (que, ao longo de $\partial\mathbb{H}^{n+1}$, aponta para o semi-espaço superior de $\partial\mathbb{H}^{n+1}$), é $0 < \tilde{H} = -\cos \alpha < 1$.

• $\langle y_0, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\lambda}$, temos: $\bar{\lambda} = 1$, $H = 1$, $K = 0$, N aponta para dentro de $S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c)$ e $S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c)$ é uma n -esfera que tangencia $\partial\mathbb{H}^{n+1}$.

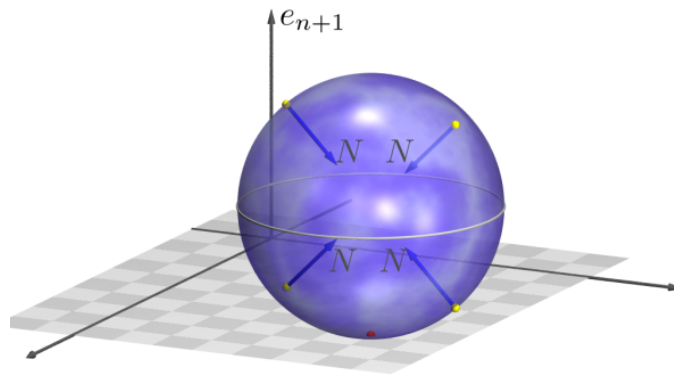


Figura 10:

• $\langle y_0, e_{n+1} \rangle > \frac{1}{\lambda}$, temos: $\bar{\lambda} > 1$, $H = \bar{\lambda} > 1$, $K = -1 + \bar{\lambda}^2 > 0$ e $S_{\frac{1}{\lambda}}^{n+1}(c)$ é uma n -esfera totalmente contida em \mathbb{H}^{n+1} . □

Agora vamos caracterizar geometricamente as hipersuperfícies $\Sigma \cap \mathbb{H}^{n+1}$, onde Σ é um hiperplano ou uma n -esfera de \mathbb{R}^{n+1} .

- Se Σ é ortogonal a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$, $\Sigma \cap \mathbb{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície umbílica de \mathbb{H}^{n+1} com $H = 0$ e $K = -1$. Logo $\Sigma \cap \mathbb{H}^{n+1}$ são as hipersuperfícies *totalmente geodésicas* de \mathbb{H}^{n+1} (Figs. 6 e 7).
- Se Σ é um hiperplano paralelo a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ ou uma n -esfera tangente a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$, $\Sigma \cap \mathbb{H}^{n+1}$ é chamada uma *horo esfera*. Logo, as horoesferas são as hipersuperfícies umbílicas de \mathbb{H}^{n+1} com $K = 0$ e $H = 1$, com respeito ao vetor normal orientado como nas figuras 3 e 10.

Tais hipersuperfícies são obtidas como limite de n -esferas. De fato, sejam $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ e L uma reta ortogonal a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ que passa por p . Então, $(L - \{p\}) \cap \mathbb{H}^{n+1} = L_1 \cup L_2$ possui duas componentes conexas L_1 e L_2 .

Para cada $q \in L_i$, $i = 1, 2$, considere a n -esfera de centro q que passa por p . Se L_1 é a componente ilimitada em \mathbb{R}^{n+1} , o limite Σ_1 de tais n -esferas, quando $q \rightarrow \infty$, é o hiperplano perpendicular a L que passa por p . Em L_2 , o limite Σ_2 , quando $q \rightarrow p_0$, $\{p_0\} = L \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$, é a n -esfera tangente a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ que passa por p .

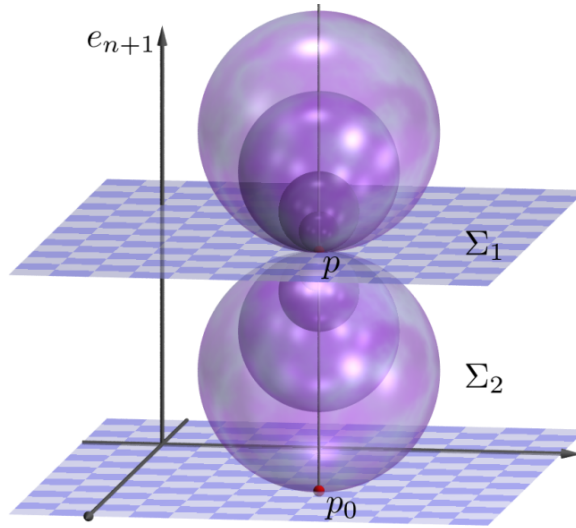


Figura 11:

- Se Σ corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo um ângulo α , $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\Sigma \cap \mathbb{H}^{n+1}$ é chamada *hipersuperfície eqüidistante*. Logo, as hipersuperfícies eqüidistantes são as hipersuperfícies umbílicas de \mathbb{H}^{n+1} com $-1 < K < 0$ e $0 < H < 1$, com respeito ao vetor normal que aponta para o semi-espaço superior de $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ (ver figuras 4, 5, 8 e 9).

Vamos mostrar que todos os pontos de uma hipersuperfície eqüidistante estão a uma distância constante da hipersuperfície totalmente geodésica de \mathbb{H}^{n+1} que possui o mesmo bordo assintótico.

Para isto, basta considerar o caso em que Σ é um hiperplano que faz um ângulo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ com $\partial\mathbb{H}^{n+1}$, pois se Σ' é uma n -esfera que corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo o ângulo α , é possível mostrar que a inversão de \mathbb{R}^{n+1} , por um ponto $p_0 \in \Sigma' \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$, é uma isometria de \mathbb{H}^{n+1} que leva Σ' em um hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} que corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo o mesmo ângulo α .

Seja, então, o hiperplano Q ortogonal a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ tal que $Q \cap \partial\mathbb{H}^{n+1} = \Sigma \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$.

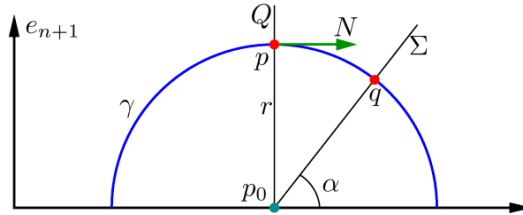


Figura 12:

Sejam $p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \in Q \cap \mathbb{H}^{n+1}$, $r = p_{n+1}$, $p_0 = (p_1, \dots, p_n, 0)$ e $N = (N_1, \dots, N_n, 0)$ o vetor normal a $Q \cap \mathbb{H}^{n+1}$ que aponta para $\Sigma \cap \mathbb{H}^{n+1}$, tal que $\langle N, N \rangle = 1$.

Então a curva $\gamma : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, dada por:

$$\gamma(\theta) = \cos(\theta)(p - p_0) + r \operatorname{sen}(\theta)N + p_0,$$

é uma reparametrização da geodésica de \mathbb{H}^{n+1} que passa por p e tem vetor velocidade paralelo a N neste ponto, pois $\gamma(-\pi, \pi)$ é a semi-circunferência de centro p_0 e raio r , contida no plano gerado por $p - p_0$ e N que passa por p_0 .

Assim, $\gamma\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = q$ é um ponto de $\Sigma \cap \mathbb{H}^{n+1}$ e

$$d(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \sqrt{\langle \gamma'(\theta), \gamma'(\theta) \rangle_{\gamma(\theta)}} d\theta$$

é a distância hiperbólica de p a q . Como $\gamma'(\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)(p - p_0) + r \cos(\theta)N$,

$$\langle \gamma'(\theta), \gamma'(\theta) \rangle_{\gamma(\theta)} = \frac{r^2}{(\operatorname{sen}(\theta))^2 p_{n+1}^2} = \frac{1}{(\operatorname{sen}(\theta))^2}.$$

Logo $d(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} d\theta$ para todo $p \in Q \cap \mathbb{H}^{n+1}$, ou seja, a distância de um ponto $p \in Q \cap \mathbb{H}^{n+1}$ a hipersuperfície $\Sigma \cap \mathbb{H}^{n+1}$ independe do ponto p . Portanto, $\Sigma \cap \mathbb{H}^{n+1}$ é obtida tomando geodésicas

perpendiculares à hipersuperfície totalmente geodésica $Q \cap \mathbb{H}^{n+1}$ e marcando sobre elas uma distância (hiperbólica) fixa.

No caso em que Σ é uma n -esfera que corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo um ângulo α , Q é a n -esfera ortogonal a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ tal que $Q \cap \partial\mathbb{H}^{n+1} = \Sigma \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$.

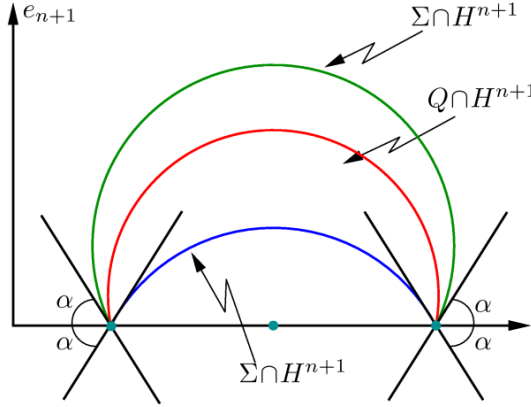


Figura 13:

Resta apenas caracterizar, geometricamente, as hipersuperfícies umbílicas compactas do espaço hiperbólico, que possuem curvatura média constante $H > 1$ e curvatura seccional constante $K > 0$.

Teorema 2.19. As hipersuperfícies umbílicas compactas do espaço hiperbólico são as esferas geodésicas.

Demonstração. Vimos na demonstração do Teorema 2.18 que as hipersuperfícies umbílicas compactas de \mathbb{H}^{n+1} são as n -esferas de \mathbb{R}^{n+1} totalmente contidas em \mathbb{H}^{n+1} , quando \mathbb{H}^{n+1} é o modelo do semi-espaço superior.

Vamos, então, mostrar que toda n -esfera euclidiana contida em \mathbb{H}^{n+1} é uma esfera geodésica de \mathbb{H}^{n+1} , e, reciprocamente, que toda esfera geodésica de \mathbb{H}^{n+1} é uma n -esfera euclidiana contida em \mathbb{H}^{n+1} . Para provarmos este resultado, vamos utilizar, novamente, o modelo da bola \mathbb{B}^{n+1} do espaço hiperbólico.

No decorrer da demonstração da proposição 2.5, provamos que as geodésicas de \mathbb{B}^{n+1} que passam pela origem são dadas por: $\gamma(t) = 2 \left(\tanh \frac{t}{2} \right) v$, $t \in \mathbb{R}$, onde $\langle v, v \rangle = \langle\langle v, v \rangle\rangle_0 = 1$. Logo, nesse modelo, a esfera geodésica de centro 0 e raio $r > 0$ é a esfera euclidiana de centro 0 e raio $2 \tanh \frac{r}{2}$.

Seja a inversão em $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ dada por: $g(p) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} + p_0$, $p \in \mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\}$. Então, $g(p) \neq p_0$ para todo $p \in \mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\}$ e $g^2 = id$, pois $|g(p) - p_0| = \frac{1}{|p - p_0|}$ e, portanto,

$$g(g(p)) = \frac{g(p) - p_0}{|g(p) - p_0|^2} + p_0 = \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} |p - p_0|^2 + p_0 = p_0.$$

Assim, $g : \mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\}$ é um difeomorfismo de classe C^∞ .

Afirmção 1. *Se a esfera euclidiana $S_r^n(q_0)$ está contida em $\mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\}$, então $g(S_r^n(q_0))$ é a esfera euclidiana de centro $c = p_0 + \frac{q_0 - p_0}{|p_0 - q_0|^2 - r^2}$ e raio $\tilde{r} = \frac{r}{|p_0 - q_0|^2 - r^2}$.*

Seja $p \in S_r^n(q_0)$. Então,

$$\begin{aligned} |g(p) - c|^2 &= \left| \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} - \frac{q_0 - p_0}{|p_0 - q_0|^2 - r^2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{|p - p_0|^2} \left(1 + \frac{|q_0 - p_0|^2 |p - p_0|^2}{(|p_0 - q_0|^2 - |p - q_0|^2)^2} - 2 \frac{\langle p - p_0, q_0 - p_0 \rangle}{|p_0 - q_0|^2 - |p - q_0|^2} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como $|p_0 - q_0|^2 - |p - q_0|^2 = 2\langle p - p_0, q_0 - p_0 \rangle - |p - p_0|^2$, temos, por (2.18),

$$\begin{aligned} |g(p) - c|^2 &= \frac{1}{|p - p_0|^2} \left(2 \frac{\langle p - p_0, q_0 - p_0 \rangle - |p - p_0|^2}{|p_0 - q_0|^2 - |p - q_0|^2} + \frac{|q_0 - p_0|^2 |p - p_0|^2}{(|p_0 - q_0|^2 - |p - q_0|^2)^2} - \frac{2\langle p - p_0, q_0 - p_0 \rangle}{|p_0 - q_0|^2 - |p - q_0|^2} \right) \\ &= \frac{|p - p_0|^2}{|p - p_0|^2} \left(\frac{-1}{|p_0 - q_0|^2 - |p - q_0|^2} + \frac{|q_0 - p_0|^2}{(|p_0 - q_0|^2 - |p - q_0|^2)^2} \right) \\ &= \frac{|p - q_0|^2}{(|p_0 - q_0|^2 - |p - q_0|^2)^2} = \frac{r^2}{(|p_0 - q_0|^2 - r^2)^2} = \tilde{r}^2. \end{aligned}$$

Logo $g(S_r^n(q_0)) \subset S_{\tilde{r}}^n(c)$. Por outro lado, $g(S_{\tilde{r}}^n(c))$ está contida, pelo que acabamos de provar, na esfera euclidiana de centro $\tilde{c} = p_0 + \frac{c - p_0}{|p_0 - c|^2 - \tilde{r}^2}$ e raio $\tilde{\tilde{r}} = \frac{\tilde{r}}{||p_0 - c|^2 - \tilde{r}^2|}$. Mas, como

$$c - p_0 = \frac{|q_0 - p_0|}{|p_0 - q_0|^2 - r^2}, \text{ temos } |c - p_0|^2 = \frac{|q_0 - p_0|^2}{(|p_0 - q_0|^2 - r^2)^2} \text{ e, portanto, } |p_0 - c|^2 - \tilde{r}^2 = \frac{1}{|p_0 - q_0|^2 - r^2}.$$

Assim,

$$\tilde{c} = p_0 + (c - p_0)(|p_0 - q_0|^2 - r^2) = p_0 + q_0 - p_0 = q_0,$$

e

$$\tilde{\tilde{r}}^2 = \frac{\tilde{r}^2}{(|p_0 - c|^2 - \tilde{r}^2)^2} = (|p_0 - q_0|^2 - r^2)^2 \frac{r^2}{(|p_0 - q_0|^2 - r^2)^2} = r^2.$$

Ou seja, $g(S_{\tilde{r}}^n(c)) \subset S_r^n(q_0)$. Como $g^2 = id$, temos que $S_{\tilde{r}}^n(c) \subset g(S_r^n(q_0))$. Então $g(S_r^n(q_0)) = S_{\tilde{r}}^n(c)$, provando a afirmação 1.

Sejam agora os difeomorfismos $g : \mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\}$, $h : \mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \left\{\frac{p_0}{8}\right\}$ e $L : \mathbb{R}^{n+1} - \left\{\frac{p_0}{8}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{\bar{e}_{n+1}\}$, dados por: $g(p) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} + p_0$, $h(p) = p + L_0$ e $L(p) = 4p$, onde $p_0 = -2e_{n+1}$ e $L_0 = \frac{-7}{8}p_0$.

Então $h \circ L \circ g(p) = 4 \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} - e_{n+1}$, para todo $p \in \mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\}$, isto é, $h \circ L \circ g|_{\mathbb{B}^{n+1}} = f$, onde $f : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, dada por $f(p) = 4 \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} - e_{n+1}$, é uma isometria do modelo da bola \mathbb{B}^{n+1} sobre o modelo do semi-plano superior \mathbb{H}^{n+1} .

Seja a esfera euclidiana $S_{2 \tanh \frac{r}{2}}^n(0)$ de centro 0 e raio $2 \tanh \frac{r}{2}$ em \mathbb{B}^{n+1} . Então, pela afirmação 1, $g(S_{2 \tanh \frac{r}{2}}^n(0)) = S_{\tilde{r}}^n(c)$, onde

$$c = \frac{(-p_0)}{|p_0|^2 - r_0^2} + p_0 = p_0 \left(1 - \frac{1}{4 - r_0^2}\right) = p_0 \left(\frac{3 - r_0^2}{4 - r_0^2}\right),$$

$\tilde{r} = \frac{r_0}{4 - r_0^2}$ e $r_0 = 2 \tanh \frac{r}{2}$. Logo $f(S_{r_0}^n(0)) = S_{4\tilde{r}}^n(4(c + L_0))$, onde

$$4(c + L_0) = 4p_0 \left(\frac{3 - r_0^2}{4 - r_0^2} - \frac{7}{8}\right) = \frac{-p_0}{2} \left(\frac{4 + r_0^2}{4 - r_0^2}\right) = \left(\frac{1 + \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}{1 - \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}\right) e_{n+1} = (\cosh r) e_{n+1}.$$

e

$$4\tilde{r} = \frac{8 \tanh \frac{r}{2}}{4 - 4 \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2} = 2 \left(\sinh \frac{r}{2}\right) \left(\cosh \frac{r}{2}\right) = \sinh r.$$

Ou seja, $f(S_{r \tanh \frac{r}{2}}^n(0))$ é a esfera euclidiana de centro $(\cosh r)e_{n+1}$ e raio $\sinh r$.

Por outro lado, como $S_{r \tanh \frac{r}{2}}^n(0)$ é a esfera geodésica de centro 0 e raio r de \mathbb{B}^{n+1} e $f : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ é uma isometria, $f(S_{r \tanh \frac{r}{2}}^n(0))$ é a esfera geodésica de centro e_{n+1} e raio r de \mathbb{H}^{n+1} . Assim, a esfera euclidiana de centro $(\cosh r)e_{n+1}$ e raio $\sinh r$ é a esfera geodésica de centro e_{n+1} e raio r de \mathbb{H}^{n+1} .

Seja $S_\lambda^n(q_0)$ a esfera euclidiana de centro q_0 e raio $\lambda > 0$ contida em \mathbb{H}^{n+1} , e considere a isometria $T : \mathbb{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ dada por $T(p) = p - (q_1^0, \dots, q_n^0, 0)$, onde $q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0, q_{n+1}^0)$, $q_{n+1}^0 > 0$.

Como $\lambda < q_{n+1}^0$, pois $S_\lambda^n(q_0) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, e $\tanh : (0, \infty) \longrightarrow (0, 1)$ é uma bijeção crescente, existe um único $r > 0$ tal que $\tanh r = \frac{\lambda}{q_{n+1}^0}$.

Tomando $\delta = \frac{\cosh r}{q_{n+1}^0}$, temos $\delta\lambda = (\cosh r) \frac{\lambda}{q_{n+1}^0} = (\cosh r)(\tanh r) = \sinh r$. Logo,

$$(L \circ T)(S_\lambda^n(q_0)) = L(S_\lambda^n(q_{n+1}^0 e_{n+1})) = S_{\delta\lambda}^n(\delta q_{n+1}^0 e_{n+1}) = S_{\sinh r}^n((\cosh r) e_{n+1}),$$

onde $L : \mathbb{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ é a isometria de \mathbb{H}^{n+1} dada por $L(p) = \delta p$.

Como $S_{\text{senh } r}^n((\cosh r)e_{n+1})$ é a esfera geodésica de centro e_{n+1} e raio r de \mathbb{H}^{n+1} e $L \circ T : \mathbb{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ é uma isometria,

$$S_\lambda^n(q_0) = (T^{-1} \circ L^{-1})(S_{\text{senh } r}^n((\cosh r)e_{n+1}))$$

é a esfera geodésica de \mathbb{H}^{n+1} de raio r e centro

$$(T^{-1} \circ L^{-1})(e_{n+1}) = T^{-1} \left(\frac{q_{n+1}^0}{\cosh r} e_{n+1} \right) = \frac{q_{n+1}^0}{\cosh r} e_{n+1} + (q_1^0, \dots, q_n^0, 0) = \left(q_1^0, \dots, q_n^0, \frac{q_{n+1}^0}{\cosh r} \right).$$

Seja, agora, $\tilde{S}_r(u_0)$ a esfera geodésica de \mathbb{H}^{n+1} de centro $u_0 = (u_1^0, \dots, u_n^0, u_{n+1}^0)$ e raio $r > 0$, e considere as isometrias $T_1 : \mathbb{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, $L_1 : \mathbb{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, dadas por:

$$T_1(p) = p - (u_1^0, \dots, u_n^0, 0) \quad \text{e} \quad L_1(p) = \frac{p}{u_{n+1}^0}.$$

Então $(L_1 \circ T_1)(u_0) = e_{n+1}$ e $(L_1 \circ T_1)(\tilde{S}_r(u_0))$ é a esfera geodésica de \mathbb{H}^{n+1} de centro e_{n+1} e raio r , que, por sua vez, é a esfera euclidiana de centro $(\cosh r)e_{n+1}$ e raio $\text{senh } r$.

Logo $\tilde{S}_r(u_0) = (T_1^{-1} \circ L_1^{-1})(S_{\text{senh } r}^n((\cosh r)e_{n+1}))$ é a esfera euclidiana de raio $u_{n+1}^0 \text{senh } r$ e centro $(u_1^0, \dots, u_n^0, (\cosh r)u_{n+1}^0)$. □

Podemos, portanto, reescrever o Teorema 2.18 da seguinte maneira.

Teorema 2.20. As hipersuperfícies umbílicas de \mathbb{H}^{n+1} são as hipersuperfícies totalmente geodésicas, as horoesferas, as hipersuperfícies equidistantes e as esferas geodésicas.

No modelo da bola \mathbb{B}^{n+1} do espaço hiperbólico, as hipersuperfícies totalmente geodésicas são dadas pela interseção de \mathbb{B}^{n+1} com hiperplanos ou n -esferas de \mathbb{R}^{n+1} que cortam $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ ortogonalmente; as horoesferas são as n -esferas de \mathbb{R}^{n+1} , contidas em $\bar{\mathbb{B}}^{n+1}$, que tangenciam $\partial\mathbb{H}^{n+1}$; as hipersuperfícies equidistantes são dadas pela interseção de \mathbb{B}^{n+1} com hiperplanos e n -esferas de \mathbb{R}^{n+1} que cortam $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo um ângulo $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, e as esferas geodésicas são as n -esferas de \mathbb{R}^{n+1} contidas em \mathbb{B}^{n+1} . Para verificar estes fatos, basta considerar a isometria $f : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, dada por $f(p) = 4 \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} - e_{n+1}$, onde $p_0 = -2e_{n+1}$, e verificar que f leva hiperplanos e n -esferas de \mathbb{R}^{n+1} , que passam por p_0 , em hiperplanos de \mathbb{R}^{n+1} , e hiperplanos e n -esferas de \mathbb{R}^{n+1} , que não

passam por p_0 , em n -esferas de \mathbb{R}^{n+1} , sendo os ângulos que estes hiperplanos e n -esferas fazem com $\partial\mathbb{B}^{n+1}$ iguais aos que suas imagens fazem com $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ (ver [24] e [29] cap. 7).

No modelo de Lorentz, pode-se provar, com argumentos análogos aos usados no Teorema 2.15, que as hipersuperfícies totalmente geodésicas são as interseções de \mathbb{H}_{-1}^{n+1} com hiperplanos de \mathbb{R}^{n+2} que passam pela origem; as horoesferas são as interseções de \mathbb{H}_{-1}^{n+1} com hiperplanos de \mathbb{R}^{n+2} que fazem ângulo $\frac{\pi}{4}$ com e_{n+1} ; as hipersuperfícies equidistantes são as interseções de \mathbb{H}_{-1}^{n+1} com hiperplanos de \mathbb{R}^{n+2} que fazem um ângulo $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ com o vetor e_{n+1} e não passam pela origem; e as esferas geodésicas são as interseções de \mathbb{H}_{-1}^{n+1} com hiperplanos de \mathbb{R}^{n+2} que fazem um ângulo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ com e_{n+1} . Portanto, as hipersuperfícies umbílicas deste modelo são todas do tipo $\mathcal{P} \cap \mathbb{H}^{n+1}$, onde \mathcal{P} é um hiperplano de \mathbb{R}^{n+2} tal que $\mathcal{P} \cap \mathbb{H}^{n+1} \neq \emptyset$.

Capítulo 3

Espectro da Esfera

O objetivo principal deste capítulo é provar que o primeiro valor próprio não-nulo do Laplaciano de uma n -esfera euclidiana de raio r é nr , o que será essencial para mostrarmos que todas as esferas geodésicas de uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, de curvatura seccional constante são estáveis.

3.1 Gradiente, Divergência e Laplaciano

Nesta seção definiremos o gradiente, o divergente e o Laplaciano em uma variedade Riemanniana, e provaremos alguns resultados básicos que serão utilizados na seção e no capítulo seguinte.

Seja M uma variedade Riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão ∇ .

Definição 3.1. O *gradiente* de uma função $f \in \mathfrak{D}(M)$ é o campo vetorial $\text{grad } f$ definido por:

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle = df_p(v), \quad \text{para todo } p \in M \text{ e todo } v \in T_p M.$$

Definição 3.2. A *divergência* de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é a função $\text{div } X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\text{div } X(p) = \text{traço da aplicação linear } : Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p), \quad \text{para todo } p \in M.$$

Definição 3.3. O *Laplaciano* de M é o operador $\Delta : \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$ definido por:

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f), \quad \text{para toda } f \in \mathfrak{D}(M).$$

Se e_1, \dots, e_n é um referencial ortonormal local definido num aberto $U \subset M$,

$$\text{grad } f(q) = \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } f, e_i(q) \rangle e_i(q) = \sum_{i=1}^n (e_i(f)) e_i(q),$$

para todo $q \in M$.

Lema 3.4. Seja e_1, \dots, e_n um referencial geodésico em $p \in M$. Então:

(a) $\text{div } X(p) = \sum_{i=1}^n e_i(f_i)(p)$, onde $X = \sum_{i=1}^n f_i e_i$;

(b) $\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))(p)$.

Demonstração.

(a) Temos:

$$\begin{aligned} \text{div } X(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle(p) = \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i} (f_j e_j), e_i \rangle(p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n f_j(p) \langle \nabla_{e_i} e_j(p), e_i(p) \rangle + \sum_{i,j=1}^n e_i(f_j) \langle e_j, e_i \rangle(p) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(f_i)(p), \end{aligned}$$

pois $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$, para todos $i, j = 1, \dots, n$, e $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, se $i \neq j$.

(b) Temos:

$$\begin{aligned} \Delta f(p) = \text{div}(\text{grad } f)(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \text{grad } f, e_i \rangle(p) = \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i} (e_j(f) e_j), e_i \rangle(p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n e_i(e_j(f)) \langle e_j, e_i \rangle(p) + \sum_{i,j=1}^n (e_j(f)) \langle \nabla_{e_i} e_j, e_i \rangle(p) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))(p). \end{aligned} \quad \square$$

Lema 3.5. Sejam $f, g \in \mathfrak{D}(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então:

(a) $\text{div}(fX) = f \text{div } X + \langle \text{grad } f, X \rangle$;

(b) $\text{grad}(fg) = f \text{grad } g + g \text{grad } f$;

(c) $\Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle$.

Demonstração. Seja e_1, \dots, e_n um referencial ortonormal local em M . Então,

$$\operatorname{div}(fX) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} fX, e_i \rangle = f \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n e_i(f) \langle X, e_i \rangle = f \operatorname{div} X + \langle X, \operatorname{grad} f \rangle.$$

Como $e_i(fg) = ge_i(f) + fe_i(g)$,

$$\operatorname{grad}(fg) = \sum_{i=1}^n (e_i(fg))e_i = f \sum_{i=1}^n (e_i(g))e_i + g \sum_{i,j=1}^n (e_i(f))e_i = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta(fg) = \operatorname{div} \operatorname{grad}(fg) &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f) \\ &= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle + g \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle \\ &= f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Lema 3.6. Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. Então, para toda $f \in \mathfrak{D}(M)$,

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{dt^2}(0),$$

onde $\gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é a geodésica de M tal que $\gamma_i(0) = p$ e $\gamma_i'(0) = e_i, i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Seja $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ um referencial geodésico em p tal que $\bar{e}_i(p) = e_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Então, pelo Lema 3.4, $\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n \bar{e}_i(\bar{e}_i f)(p)$.

Por outro lado, $\bar{e}_i(\bar{e}_i f)(p) = \left. \frac{d(\bar{e}_i f)(\gamma_i(t))}{dt} \right|_{t=0}$ e $(\bar{e}_i f)(\gamma_i(t)) = \frac{d(f \circ \gamma_i)}{dt}(t)$, pois $\bar{e}_i(\gamma_i(t)) = \gamma_i'(t)$.

Logo,

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{dt^2}(t) \right|_{t=0}. \quad \square$$

Proposição 3.7. Sejam M, N variedades Riemannianas e $\varphi : M \rightarrow N$ uma isometria. Então, para toda $f \in \mathfrak{D}(N)$,

$$\Delta^M(f \circ \varphi) = (\Delta^N f) \circ \varphi.$$

Demonstração. Sejam $p \in M$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$, e $\gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ a geodésica de M tal que $\gamma_i(0) = p$ e $\gamma_i'(0) = e_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Então, $\{d\varphi_p(e_1), \dots, d\varphi_p(e_n)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\varphi(p)}N$ e, pelo Lema 1.14, a curva $\lambda_i = \varphi \circ \gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ é uma geodésica de N tal que $\lambda_i(0) = \varphi(p)$ e $\lambda_i'(0) = d\varphi_p(e_i)$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Logo, pelo lema acima,

$$\Delta^M(f \circ \varphi)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{d^2(f \circ \varphi \circ \gamma_i)}{dt^2}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{d^2(f \circ \lambda_i)}{dt^2}(0) = (\Delta^N f)(\varphi(p)). \quad \square$$

Teorema 3.8. (Teorema de Stokes) [10]

Seja w uma forma diferencial de classe C^1 e grau n numa variedade diferenciável orientada compacta, com bordo, de dimensão $n + 1$, cujo bordo ∂M é munido da orientação induzida. Então,

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w.$$

Definição 3.9. Seja M uma variedade Riemanniana orientada. A *forma elemento de volume* de M é a forma diferencial dM de grau $n = \dim M$, definida do seguinte modo:

$$dM(v_1, \dots, v_n)(p) = \pm \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} = \text{vol.orient.}\{v_1, \dots, v_n\}, \quad p \in M,$$

onde $v_1, \dots, v_n \in T_p M$ são linearmente independentes, e o sinal é $+$ ou $-$ conforme a base $\{v_1, \dots, v_n\}$ pertença à orientação de M ou não.

Definição 3.10. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. O *produto interior* $i(X)dM$ de X por dM é a $(n - 1)$ -forma diferencial, dada por:

$$i(X)dM(v_2, \dots, v_n)(p) = dM(X(p), v_2, \dots, v_n)(p),$$

para todo $p \in M$, e todos $v_2, \dots, v_n \in T_p M$.

Lema 3.11. Seja w uma k -forma diferenciável em uma variedade M , e $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$. Então,

$$\begin{aligned} dw(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i w(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+1} w([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

onde \widehat{X}_i significa que X_i não está presente.

Demonstração. Ver [10], pp 49–50. □

Teorema 3.12. Seja M uma variedade Riemanniana orientada. Então, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$d(i(X)\nu) = \operatorname{div}(X)\nu,$$

onde $\nu = dM$ é o elemento de volume de M .

Demonstração. Sejam $p \in M$ e e_1, \dots, e_n um referencial positivo geodésico em p .

Sejam w_i as formas locais de grau 1 duais de e_i , ou seja, $w_i(e_j) = \delta_{ij}$, para todos $i, j = 1, \dots, n$, e sejam as formas locais θ_i de grau $(n-1)$ dadas por:

$$\theta_i = w_1 \wedge \dots \wedge \widehat{w}_i \wedge \dots \wedge w_n, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Então, sendo $X = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, e $Y_2, \dots, Y_n \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} i(X)\nu(Y_2, \dots, Y_n) &= \nu(X, Y_2, \dots, Y_n) = \sum_{i=1}^n f_i \nu(e_i, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i (w_1 \wedge \dots \wedge w_n)(e_i, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i (w_1 \wedge \dots \wedge w_n)(Y_2, \dots, Y_i, e_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i (w_1 \wedge \dots \wedge \widehat{w}_i \wedge \dots \wedge w_n)(Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \theta_i \right) (Y_2, \dots, Y_n), \end{aligned}$$

pois $\nu = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$, já que o espaço das formas diferenciais de grau n em M^n tem dimensão igual a 1 (ver [20], Cap. VII). Decorre daí que:

$$d(i(X)\nu) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i d\theta_i.$$

Mas $d\theta_i(p) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, pois, pelo Lema 3.11,

$$dw_k(e_i, e_j)(p) = (e_i w_k(e_j) - e_j w_k(e_i) - w_k([e_i, e_j]))(p) = w_k(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i)(p) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

já que $\nabla_{e_j} e_i(p) = \nabla_{e_i} e_j(p) = 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} d(i(X)\nu)(p) &= \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i \right) (p) = \left(\sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+1} e_j(f_i) w_j \wedge \theta_i \right) (p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n e_i(f_i) w_1 \wedge \cdots \wedge w_n \right) (p) = \operatorname{div} X(p) \nu. \end{aligned} \quad \square$$

No caso em que M^n é uma variedade orientada com bordo ∂M com orientação induzida de M , e η o campo unitário normal a ∂M tal que $\{\eta(p), v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é uma base positiva de $T_p M$, para toda base positiva $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ de $T_p(\partial M)$, temos que:

$$i(X)\nu(p) = \langle X(p), \eta(p) \rangle d(\partial M)(p),$$

para todo $p \in \partial M$, pois se $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_p(\partial M)$,

$$\begin{aligned} i(X)\nu(p)(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \nu(p)(X(p), v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= \langle X(p), \eta(p) \rangle \nu(p)(\eta(p), v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= \langle X(p), \eta(p) \rangle. \end{aligned}$$

Corolário 3.13. (Teorema da divergência)

Sejam M uma variedade Riemanniana orientada compacta com bordo e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle d(\partial M).$$

Corolário 3.14. Seja M uma variedade Riemanniana orientada compacta (sem bordo). Então,

$$\int_M f \Delta g dM = - \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle dM,$$

para todas $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Em particular, para todas $f, g \in \mathfrak{D}(M)$,

$$\int_M f \Delta g dM = \int_M g \Delta f dM, \quad (3.1)$$

e

$$\int_M f \Delta f dM = - \int_M |\operatorname{grad} f|^2 dM. \quad (3.2)$$

Demonstração. Seja $X = f \operatorname{grad} g \in \mathfrak{X}(M)$. Então, pelo Lema 3.5,

$$\operatorname{div} X = f \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle = f \Delta g + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle.$$

Logo, pelo Teorema 3.12,

$$\int_M (f \Delta g + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle) dM = \int_M \operatorname{div} X dM = \int_M d(i(X)\nu) = \int_{\partial M} i(X)\nu = 0. \quad \square$$

Assim, o Laplaciano $\Delta : \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$ é um operador simétrico, negativo definido com respeito ao produto interno:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_0 : \mathfrak{D}(M) \times \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

dado por $\langle f, g \rangle_0 = \int_M f g dM$, para todas $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

A topologia de $\mathfrak{D}(M)$ dada pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ é chamada a *topologia da convergência em média quadrática*.

Corolário 3.15. Seja M uma variedade Riemanniana orientada, compacta (sem bordo), e seja $f \in \mathfrak{D}(M)$. Então $\Delta f = 0$ se, e somente se, f é constante.

Definição 3.16. Um número real λ é um *valor próprio do Laplaciano* de uma variedade Riemanniana M quando existe $f \in \mathfrak{D}(M)$, $f \neq 0$, tal que $\Delta f + \lambda f = 0$. O conjunto dos valores próprios do Laplaciano é chamado o *espectro* da variedade M e será denotado por $\operatorname{Spec}(M)$.

Uma função $f \in \mathfrak{D}(M)$ tal que $\Delta f + \lambda f = 0$, com $\lambda \in \operatorname{Spec}(M)$, é dita uma *função própria associada ao valor próprio λ* . O subespaço $\mathcal{P}_\lambda(M)$ de $\mathfrak{D}(M)$ formado pelas funções próprias associadas ao valor próprio λ é chamado *espaço próprio* associado a λ . Enfim, o subespaço gerado por todas as funções próprias é chamado o *espaço próprio* de M e será denotado por $\mathcal{P}(M)$.

As propriedades do Laplaciano, dadas pelo teorema abaixo, são essenciais para o estudo do espectro de uma variedade Riemanniana compacta (sem bordo).

Teorema 3.17. ([1], Teorema 4.6 e seção 16)

- (1) $\operatorname{Spec}(M)$ forma uma seqüência discreta $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots\}$ que tende para $+\infty$.
- (2) Para todo $\lambda \in \operatorname{Spec}(M)$, $\mathcal{P}_\lambda(M)$ é um subespaço de dimensão finita.

(3) $\mathcal{P}(M)$ é denso em $\mathfrak{D}(M)$ na topologia da convergência uniforme e, portanto, na topologia da convergência em média quadrática.

O subespaço $\mathcal{P}_{\lambda_i}(M)$ será denotado por $\mathcal{P}_i(M)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e sua dimensão, m_i , chamada a *multiplicidade de λ_i* .

A multiplicidade do valor próprio 0 é sempre 1, pois, pelo Corolário 3.15, $\mathcal{P}_0(M)$ é o subespaço das funções constantes em M . Além disso, por (3.1), funções próprias associadas a valores próprios distintos são ortogonais com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.

Para cada $i = 0, 1, 2, \dots$, seja β_i uma base ortonormal de \mathcal{P}_i . Então, pelo Teorema 3.17, o espaço gerado por $\beta = \bigcup_{i=0}^{\infty} \beta_i$ é denso em $\mathfrak{D}(M)$ na topologia da convergência em média quadrática.

Logo, por um resultado de análise funcional ([30], pag. 37), para toda $f \in \mathfrak{D}(M)$,

$$|f|_0^2 = \langle f, f \rangle_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle_0^2, \quad (3.3)$$

onde $\beta = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots\}$, com os φ_i 's ordenados de modo que se $\varphi_i \in \beta_k$ e $\varphi_{i+1} \in \beta_j$, então $k \leq j$.

Seja $\varphi \in \mathcal{P}_1(M)$. Então $\int_M \varphi dM = 0$, pois φ é ortogonal à função constante 1. Além disso, como $\Delta\varphi = -\lambda_1\varphi$, temos, por (3.2), que

$$-\int_M |\text{grad } \varphi|^2 dM = \int_M \varphi \Delta\varphi dM = -\lambda_1 \int_M \varphi^2 dM,$$

ou seja, $\lambda_1 = \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|^2 dM}{\int_M \varphi^2 dM}$.

O lema abaixo permite caracterizar o primeiro valor próprio não-nulo do Laplaciano por meio dos quocientes

$$R(f) = \frac{\int_M |\text{grad } f|^2 dM}{\int_M f^2 dM},$$

conhecidos como *quocientes de Rayleigh-Ritz*, onde $f \in \mathfrak{D}(M)$, $\int_M f dM = 0$ e $f \neq 0$.

Se $f, g \in \mathfrak{D}(M)$, usaremos a notação:

$$\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle_0 = \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle dM \quad \text{e} \quad |\text{grad } f|_0^2 = \int_M |\text{grad } f|^2 dM.$$

Lema 3.18. $\lambda_1 = \inf \left\{ R(f); f \in \mathfrak{D}(M), f \neq 0, \int_M f dM = 0 \right\}$ e $R(f) = \lambda_1$ se, e somente se, $f \in \mathcal{P}_1(M), f \neq 0$.

Demonstração. Seja $f \in \mathfrak{D}(M), f \neq 0, \int_M f dM = 0$. Para cada $i \geq 0$, seja $a_i = \langle \varphi_i, f \rangle_0$. Então, pelo Corolário 3.14, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \text{grad } f - \sum_{i=0}^n a_i \text{grad } \varphi_i \right|_0^2 &= |\text{grad } f|_0^2 - 2 \sum_{i=0}^n a_i \langle \text{grad } f, \text{grad } \varphi_i \rangle_0 + \sum_{i=0}^n a_i^2 |\text{grad } \varphi_i|_0^2 \\ &= |\text{grad } f|_0^2 + 2 \sum_{i=0}^n a_i \langle f, \Delta \varphi_i \rangle_0 - \sum_{i=0}^n a_i^2 \langle \varphi_i, \Delta \varphi_i \rangle_0 \\ &= |\text{grad } f|_0^2 - 2 \sum_{i=0}^n a_i^2 \mu_i + \sum_{i=0}^n a_i^2 \mu_i = |\text{grad } f|_0^2 - \sum_{i=0}^n a_i^2 \mu_i, \end{aligned}$$

onde μ_i é o valor próprio associado a função própria φ_i . Observe, pela maneira em que as funções φ_i foram escolhidas, $0 = \mu_0 < \mu_1 = \lambda_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$.

Logo,

$$|\text{grad } f|_0^2 \geq \sum_{i=1}^n \mu_i a_i^2 \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad (3.4)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, por (3.3) e porque $a_0 = \langle \varphi_0, f \rangle_0 = 0$, temos $|\text{grad } f|_0^2 \geq \lambda_1 |f|_0^2$. Como a igualdade se verifica para $f = \varphi_1$, obtemos:

$$\lambda_1 = \inf \left\{ R(f); f \in \mathfrak{D}(M), f \neq 0, \int_M f dM = 0 \right\}.$$

Suponhamos agora que $R(f) = \lambda_1$, ou seja, $|\text{grad } f|_0^2 = \lambda_1 |f|_0^2$. Então, por (3.4), $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_i \neq \lambda_1$. Logo,

$$\left| \text{grad } f - \sum_{i=1}^{m_1} a_i \text{grad } \varphi_i \right|_0^2 = \int_M \left| \text{grad } f - \sum_{i=1}^{m_1} a_i \text{grad } \varphi_i \right|^2 dM = 0,$$

onde m_1 é a multiplicidade do valor próprio λ_1 .

Assim, $f - \sum_{i=1}^{m_1} a_i \varphi_i$ é constante igual a zero, pois, $\int_M \left(f - \sum_{i=1}^{m_1} a_i \varphi_i \right) dM = 0$, ou seja, $f = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \varphi_i$ é uma função própria associada ao valor próprio λ_1 . \square

A proposição abaixo segue imediatamente da proposição 3.7.

Proposição 3.19. Sejam M e N variedades Riemannianas compactas isométricas. Então, $\text{Spec}(M) = \text{Spec}(N)$ e, para todo valor próprio λ , $\mathcal{P}_\lambda(M) = \{f \circ \xi; f \in \mathcal{P}_\lambda(N)\}$, onde $\xi : M \rightarrow N$ é uma isometria de M sobre N .

Seja M uma variedade Riemanniana com métrica g , e consideremos a métrica \bar{g} , conforme à métrica g , dada por $\bar{g}(X, Y) = \mu g(X, Y)$, para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável positiva.

Lema 3.20. Se Δ e $\bar{\Delta}$ são os Laplacianos associados às métricas g e \bar{g} , respectivamente, então,

$$\bar{\Delta}f = \frac{1}{\mu} \Delta f + \frac{(n-2)}{2\mu^2} g(\text{grad } f, \text{grad } \mu),$$

para toda $f \in \mathfrak{D}(M)$.

Demonstração. Seja e_1, \dots, e_n um referencial local ortonormal com respeito à métrica \bar{g} . Então, $\sqrt{\mu}e_1, \dots, \sqrt{\mu}e_n$ é um referencial local ortonormal com respeito à métrica g .

Pelo Lema 2.2, para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y),$$

onde $S(X, Y) = \frac{1}{2\mu}(X(\mu)Y + Y(\mu)X - g(X, Y)\text{grad } \mu)$ e $\text{grad } \mu$ é o gradiente relativo à métrica g .

Além disso, dada $f \in \mathfrak{D}(M)$, o gradiente $\overline{\text{grad}}f$ com respeito a métrica \bar{g} é igual a $\frac{1}{\mu} \text{grad } f$, pois

$$df_p(v) = \bar{g}(\overline{\text{grad}}f(p), v) = \mu(p)g(\overline{\text{grad}}f(p), v) = g(\mu(p)\overline{\text{grad}}f(p), v),$$

para todos $p \in M$, $v \in T_p M$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 \overline{\Delta}f &= \sum_{i=1}^n \overline{g}(\nabla_{e_i} \overline{\text{grad} f}, e_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mu g(\nabla_{e_i} \overline{\text{grad} f}, e_i) + \frac{\mu}{2\mu} \sum_{i=1}^n [g(e_i(\mu) \overline{\text{grad} f} + g(\overline{\text{grad} f}, \text{grad } \mu) e_i - g(e_i, \overline{\text{grad} f}) \text{grad } \mu, e_i)] \\
 &= \sum_{i=1}^n \mu g\left(\nabla_{e_i} \left(\frac{\text{grad } f}{\mu}\right), e_i\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[g(\text{grad } \mu, e_i) \frac{g(\text{grad } f, e_i)}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} g(\text{grad } f, \text{grad } \mu) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\mu} g(\text{grad } f, e_i) g(\text{grad } \mu, e_i) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{-1}{\mu} g(\text{grad } \mu, e_i) g(\text{grad } f, e_i) + \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} \text{grad } f, e_i) + \frac{n}{2\mu^2} g(\text{grad } f, \text{grad } \mu) \\
 &= \frac{-1}{\mu^2} \sum_{i=1}^n g(\text{grad } \mu, \sqrt{\mu} e_i) g(\text{grad } f, \sqrt{\mu} e_i) + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n g(\nabla_{\sqrt{\mu} e_i} \text{grad } f, \sqrt{\mu} e_i) \\
 &\quad + \frac{n}{2\mu^2} g(\text{grad } f, \text{grad } \mu) \\
 &= \left(\frac{n-2}{2\mu^2}\right) g(\text{grad } f, \text{grad } \mu) + \frac{1}{\mu} \Delta f. \quad \square
 \end{aligned}$$

3.2 Espectro da esfera

Seja S^n a n -esfera euclidiana de centro na origem e raio 1 com a métrica induzida de \mathbb{R}^{n+1} . O lema abaixo será fundamental para determinarmos os espaços próprios e o espectro de S^n .

Lema 3.21. Seja M uma variedade Riemanniana compacta, e seja $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de subespaços não-nulos de $\mathfrak{D}(M)$ que satisfazem as seguintes condições:

- (a) Para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta\varphi + \lambda_i\varphi = 0$ para todo $\varphi \in V_i$.
- (b) A soma $\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$ é densa em $\mathfrak{D}(M)$ com respeito a topologia da convergência em média quadrática.

Então, o espectro de M é o conjunto dos λ_i e, para todo $i \in \mathbb{N}$, $V_i = \mathcal{P}_i(M)$.

Demonstração. É claro que $\lambda_i \in \text{Spec}(M)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, pois estamos supondo $V_i \neq \{0\}$.

Seja $\lambda \in \text{Spec}(M)$. Suponhamos que $\lambda \neq \lambda_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $\varphi \in \mathcal{P}_\lambda(M)$, $\varphi \neq 0$. Como $\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$ é denso em $\mathfrak{D}(M)$ na topologia da convergência em média quadrática, existe uma seqüência de funções $\varphi_n \in \sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$, tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Uma contradição, pois $\langle \varphi_n, \varphi \rangle_0 \rightarrow \langle \varphi, \varphi \rangle_0$, $\langle \varphi_n, \varphi \rangle_0 = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\varphi \neq 0$. Logo $\text{Spec}(M) = \{\lambda_i; i \in \mathbb{N}\}$ e $V_i \subset \mathcal{P}_i(M)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que $V_i \neq \mathcal{P}_i(M)$. Como $\mathcal{P}_i(M)$ tem dimensão finita, existe $\varphi \in \mathcal{P}_i(M)$, $\varphi \neq 0$, ortogonal a V_i . Por outro lado, φ também é ortogonal a V_j , para todo $i \neq j$, pois $\lambda_i \neq \lambda_j$ e $V_j \subset \mathcal{P}_j(M)$. Logo, φ é ortogonal a V_j para todo $j \in \mathbb{N}$, uma contradição, pois $\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$ é denso em $\mathfrak{D}(M)$. \square

Para provarmos a densidade de um subespaço em $\mathfrak{D}(M)$, vamos precisar do Teorema de Stone-Weierstrass ([21] p.261).

Lema 3.22. Seja M uma variedade compacta e seja \mathcal{A} uma subálgebra de $\mathfrak{D}(M)$. Se \mathcal{A} contém as constantes e separa pontos, então \mathcal{A} é denso em $C^0(M)$, e, portanto, em $\mathfrak{D}(M)$, na topologia da convergência uniforme.

Denotaremos por Δ e $\bar{\Delta}$ o Laplaciano de S^n e \mathbb{R}^{n+1} , respectivamente.

Lema 3.23. Para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$\bar{\Delta}f(x) = \Delta\tilde{f}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + n \frac{\partial f}{\partial x}(x),$$

para todo $x \in S^n$, onde $\tilde{f} = f|_{S^n}$.

Demonstração. Seja $x \in S^n$. Então existem $x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $\{x_1 = x, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} e, portanto, $\{x_2, \dots, x_{n+1}\}$ é uma base ortonormal de $T_x S^n$.

Para todo $i = 2, \dots, n+1$,

$$\gamma_i(t) = \cos tx + \sin tx_i$$

é a geodésica de S^n tal que $\gamma_i(0) = x$ e $\gamma_i'(0) = x_i$ (ver demonstração do Teorema 2.14, afirmação 3).

Como, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$(f \circ \gamma_i)'(t) = -(\sin t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_i(t)) + (\cos t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_i(t)),$$

obtemos

$$\frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{dt^2}(0) = \frac{-\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

Logo, pelo Lema 3.6,

$$\Delta \tilde{f}(x) = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{dt^2}(0) = -n \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x). \quad (3.5)$$

Por outro lado, $\lambda_i(t) = x + tx_i, i = 1, \dots, n+1$, são as geodésicas de \mathbb{R}^{n+1} tais que $\lambda_i(0) = x$ e $\lambda_i'(0) = x_i$. Logo, pelo Lema 3.6,

$$\bar{\Delta} f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{d^2(f \circ \lambda_i)}{dt^2}(0) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

Portanto, por (3.5),

$$\bar{\Delta} f(x) = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = \Delta \tilde{f}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + n \frac{\partial f}{\partial x}(x). \quad \square$$

Seja H um polinômio homogêneo de grau $k, k \geq 0$, e $\tilde{H} = H|_{S^n}$. Como $H(tx) = t^k \tilde{H}(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e todo $x \in S^n$, $\frac{\partial H}{\partial x}(tx) = kt^{k-1} \tilde{H}(x)$, e, portanto, $\frac{\partial H}{\partial x}(x) = k \tilde{H}(x)$ e $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) = k(k-1) \tilde{H}(x)$, para todo $x \in S^n$.

Logo, pelo Lema 3.23, para todo $x \in S^n$,

$$\Delta \tilde{H}(x) = \bar{\Delta} H(x) - k(k-1) \tilde{H}(x) - nk \tilde{H}(x) = \bar{\Delta} H(x) - k(n+k-1) \tilde{H}(x). \quad (3.6)$$

Se, além disso, H é harmônico em \mathbb{R}^{n+1} , ou seja, $\bar{\Delta} H = 0$, temos

$$\Delta \tilde{H} = -k(n+k-1) \tilde{H}.$$

Portanto, \tilde{H} é uma função própria relativa ao valor próprio $k(n+k-1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja \mathcal{H}_k o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau k harmônicos em \mathbb{R}^{n+1} , e seja $\tilde{\mathcal{H}}_k = \{H|_{S^n}; H \in \mathcal{H}_k\}$. Então $\tilde{\mathcal{H}}_k$ está contido no espaço próprio do Laplaciano de S^n associado ao valor próprio $\lambda_k = k(n+k-1)$. Na realidade, como mostraremos a seguir, $\tilde{\mathcal{H}}_k$ é o espaço próprio associado ao valor próprio λ_k e $\text{Spec}(S^n) = \{\lambda_k; k \geq 0\}$.

Seja \mathbf{P}_k o espaço vetorial de todos os polinômios homogêneos de grau k em \mathbb{R}^{n+1} , provido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ dado por:

$$\langle P, Q \rangle_1 = \int_{S^n} \tilde{P} \tilde{Q} \nu,$$

para todo $P, Q \in \mathbf{P}_k$, onde $\tilde{P} = P|_{S^n}$, $\tilde{Q} = Q|_{S^n}$ e ν é o elemento de volume de S^n .

Como P e Q são polinômios homogêneos, é fácil verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ realmente satisfaz as condições para ser um produto interno em \mathbf{P}_k , para todo $k \geq 0$.

Lema 3.24. Para todo $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{2k} &= \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-2} \oplus \cdots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_0, \\ \mathbf{P}_{2k+1} &= \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-1} \oplus \cdots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_1, \end{aligned}$$

e os subespaços da decomposição são dois a dois ortogonais, onde $r(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$, para todo $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Para $k = 0$, $\mathbf{P}_0 = \mathcal{H}_0$ e $\mathbf{P}_1 = \mathcal{H}_1$, pois \mathbf{P}_0 é formado pelas funções constantes e \mathbf{P}_1 é o conjunto dos funcionais lineares de \mathbb{R}^{n+1} .

Suponhamos o resultado válido para todo $0 \leq l \leq k$, l ímpar, caso k seja ímpar, e l par, se k é par. Então, $\mathbf{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2 \mathbf{P}_{k-2}$.

Para provarmos que a decomposição vale para $k+2$, basta mostrarmos que $\mathbf{P}_{k+2} = \mathcal{H}_{k+2} \oplus r^2 \mathbf{P}_k$, e que \mathcal{H}_{k+2} , $r^2 \mathbf{P}_k$ são ortogonais com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, o que equivale a provar que $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ e $\tilde{\mathbf{P}}_k$ são ortogonais com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.

Como $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ está contido no espaço próprio de S^n associado ao valor próprio $\lambda_{k+2} = (k+2)(n+k+1)$ e $\tilde{\mathbf{P}}_k$ está contido, pela hipótese de indução, na soma dos espaços próprios correspondentes a valores próprios distintos de λ_{k+2} , $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ e $\tilde{\mathbf{P}}_k$ são ortogonais, pois espaços próprios relativos a valores próprios distintos são ortogonais.

Além disso, $\mathcal{H}_{k+2} + r^2 \mathbf{P}_k \subset \mathbf{P}_{k+2}$. Logo, para concluirmos a demonstração do lema, é suficiente mostrar que se P é um elemento de \mathbf{P}_{k+2} ortogonal a $r^2 \mathbf{P}_k$, então P é harmônico em \mathbb{R}^{n+1} , ou seja, $\overline{\Delta} P = 0$.

Como $\overline{\Delta} P \in \mathbf{P}_k$, temos, pela hipótese de indução, que $\overline{\Delta} P = 0$ se, e somente se, $\overline{\Delta} P$ é ortogonal a $r^{2l} \mathcal{H}_{k-2l}$, para todo $0 \leq 2l \leq k$. Ou seja, $\overline{\Delta} P = 0$ se, e somente se, $\overline{\Delta} P$ é ortogonal a $\tilde{\mathcal{H}}_{k-2l}$, para todo $0 \leq 2l \leq k$.

Seja P um elemento de \mathbf{P}_{k+2} ortogonal a $r^2\mathbf{P}_k$ (i.e., \tilde{P} é ortogonal a $\tilde{\mathbf{P}}_k$) e seja $H \in r^{2l}\mathcal{H}_{k-2l}$, $0 \leq 2l \leq k$.

Então, como

$$\begin{aligned} \Delta \widetilde{PH} &= (\Delta \tilde{P})\tilde{H} + 2\langle \text{grad } \tilde{P}, \text{grad } \tilde{H} \rangle + \tilde{P}\Delta \tilde{H} \\ \Delta \tilde{H} &= -(k-2l)(n+k-2l-1)\tilde{H}, \end{aligned}$$

temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^n} \Delta(\widetilde{PH}) \nu = \int_{S^n} (\Delta \tilde{P})\tilde{H} \nu + 2 \int_{S^n} \langle \text{grad } \tilde{P}, \text{grad } \tilde{H} \rangle \nu - \int_{S^n} (k-2l)(n+k-2l-1)\tilde{H}\tilde{P} \nu \\ &= \int_{S^n} (\Delta \tilde{P})\tilde{H} \nu + 2 \int_{S^n} \langle \text{grad } \tilde{P}, \text{grad } \tilde{H} \rangle \nu, \end{aligned} \quad (3.7)$$

pois \tilde{H} e \tilde{P} são ortogonais.

Mas, por (3.6), $\Delta \tilde{P} = \widetilde{\Delta P} - (k+2)(n+k+1)\tilde{P}$. Logo,

$$\int_{S^n} (\Delta \tilde{P})\tilde{H} \nu = \int_{S^n} (\widetilde{\Delta P})\tilde{H} \nu - (k+2)(n+k+1) \int_{S^n} \tilde{P}\tilde{H} d(S^n) = \int_{S^n} (\widetilde{\Delta P})\tilde{H} \nu.$$

Assim, por (3.7) e pelo Corolário 3.14,

$$\int_{S^n} (\widetilde{\Delta P})\tilde{H} \nu = -2 \int_{S^n} \langle \text{grad } \tilde{P}, \text{grad } \tilde{H} \rangle \nu = 2 \int_{S^n} (\Delta \tilde{H})\tilde{P} \nu = -2(k-2l)(n+k-2l-1) \int_{S^n} \tilde{H}\tilde{P} \nu = 0,$$

o que conclui a demonstração. \square

Teorema 3.25. O espectro de S^n é o conjunto formado pelos números $\lambda_k = k(n+k-1)$, $k \geq 0$, e o espaço próprio associado a λ_k é $\tilde{\mathcal{H}}_k$, para todo $k \geq 0$.

Demonstração. Como $\sum_{k \geq 0} \tilde{\mathbf{P}}_k$ é uma subálgebra de $\mathfrak{D}(S^n)$ que contém as constantes e separa pontos, temos, pelo Teorema de Stone-Weierstrass, que $\sum_{k \geq 0} \tilde{\mathbf{P}}_k$ é denso em $\mathfrak{D}(S^n)$ na topologia da convergência uniforme e, portanto, na topologia da convergência em média quadrática.

Por outro lado, pelo Lema 3.24, para todo $k \geq 0$, $\tilde{\mathbf{P}}_k$ é uma soma de subespaços $\tilde{\mathcal{H}}_\ell$, para certos $\ell \leq k$. Logo $\sum_{\ell \geq 0} \tilde{\mathcal{H}}_\ell = \sum_{k \geq 0} \tilde{\mathbf{P}}_k$ e, portanto, $\sum_{\ell \geq 0} \tilde{\mathcal{H}}_\ell$ é denso em $\mathfrak{D}(S^n)$ na topologia da convergência em média quadrática. Assim, pelo Lema 3.21, $\text{Spec}(S^n) = \{k(n+k-1); k \geq 0\}$ e $\tilde{\mathcal{H}}_k = \mathcal{P}_k(S^n)$ para todo $k \geq 0$. \square

Corolário 3.26. Seja $S_r^n(0)$ a esfera euclidiana de centro na origem e raio r com a métrica induzida de \mathbb{R}^{n+1} . Então,

$$\text{Spec}(S_r^n(0)) = \left\{ \frac{k(n+k-1)}{r^2}; k \geq 0 \right\}.$$

Demonstração. Se considerarmos $S_r^n(0)$ com a métrica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = \frac{1}{r^2} \langle \cdot, \cdot \rangle$, conforme à métrica euclidiana usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos, pelo Lema 3.20, que $\overline{\Delta} = r^2 \Delta$, onde $\overline{\Delta}$ e Δ são os Laplacianos de $S_r^n(0)$ com respeito às métricas $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$, respectivamente.

Por outro lado, como a aplicação $\phi : (S_r^n(0), \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle) \longrightarrow (S_1^n(0), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dada por $\phi(p) = \frac{p}{r}$, $p \in S_r^n(0)$, é uma isometria, temos, pela proposição 3.19, que $\text{Spec}(S_r^n(0), \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle) = \text{Spec}(S_1^n(0), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $\mathcal{P}_\lambda(S_r^n(0), \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle) = \{f \circ \phi; f \in \mathcal{P}_\lambda(S_1^n(0), \langle \cdot, \cdot \rangle)\}$, para todo $\lambda \in \text{Spec}(S_1^n(0), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Assim, como $\Delta = \frac{1}{r^2} \overline{\Delta}$, segue do Teorema 3.25, que $\text{Spec}(S_r^n(0), \langle \cdot, \cdot \rangle) = \left\{ \frac{k(n+k-1)}{r^2}; k \geq 0 \right\}$ e $\mathcal{P}_k(S_r^n(0), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é o conjunto dos polinômios homogêneos em \mathbb{R}^{n+1} restritos a esfera $S_r^n(0)$. \square

As demonstrações feitas nesta seção foram retiradas do livro [7], capítulo 3.

Capítulo 4

Estabilidade de Hipersuperfícies de curvatura média constante

4.1 Problema variacional das hipersuperfícies com curvatura média constante

Seja \overline{M}^{n+1} uma variedade Riemanniana orientada e $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão de uma variedade diferenciável, orientável, conexa, compacta com bordo ∂M , possivelmente vazio, em \overline{M}^{n+1} . Seja N um campo diferenciável unitário normal a M . Dizemos que $e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N$ é um *referencial ortonormal adaptado* numa vizinhança $x(U) \subset \overline{M}$ de $x(p)$, $p \in M$, quando $\{e_1(q), \dots, e_n(q), e_{n+1}(q)\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_q \overline{M}$, para todo $q \in x(U)$, e e_1, \dots, e_n são tangentes a $x(M)$.

Seja $\Omega(M)$ o conjunto de todas as imersões $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$. É possível dar a $\Omega(M)$ uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão infinita. Aqui nos limitaremos a indicar o significado geométrico do "espaço tangente" a $\Omega(M)$ num "ponto" x , que é o aspecto de sua estrutura de variedade que realmente utilizaremos.

Um "vetor tangente" num ponto $x \in \Omega(M)$ é obtido, em analogia com o caso de dimensão finita, tomando uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega(M)$, com $\alpha(0) = x$. Associada a α , temos

a aplicação diferenciável $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \overline{M}$ dada por $\beta(t, p) = \alpha(t)(p)$. Obtemos $E \in T_x(\Omega(M))$, fazendo $E = \alpha'(0)$, isto é, $E(p) = \left. \frac{\partial \beta}{\partial t}(t, p) \right|_{t=0}$. Assim, um elemento $E \in T_x(\Omega(M))$ é uma aplicação de M em $T\overline{M}$, onde $E(p) \in T_{x(p)}\overline{M}$ para todo $p \in M$. Ou seja, E é um campo vetorial ao longo da imersão x .

Uma *variação de uma imersão* x é uma família a um parâmetro de imersões $\{x_t\}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tal que a aplicação $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \overline{M}$, dada por $X(t, p) = x_t(p)$, é de classe C^∞ , $x_0 = x$, $x_t : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão e $x_t|_{\partial M} = x|_{\partial M}$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Vemos, então, que uma variação de x define uma curva $t \rightarrow x_t$ em $\Omega(M)$ que passa, em $t = 0$, pelo ponto x , cujo "vetor tangente", em $t = 0$, é o campo variacional associado a variação $\{x_t\}$ de x dado por:

$$E(p) = \left. \frac{\partial X}{\partial t}(t, p) \right|_{t=0} = dX_{(0,p)}(1, 0),$$

onde $(1, 0)$ é o campo vetorial canônico ao longo de $(-\varepsilon, \varepsilon)$ no produto $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$. Observe que $E(p) = 0$ para todo $p \in \partial M$.

Sejam $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ as funções *área* e *volume* da variação $\{x_t\}$ definidas por:

$$A(t) = \int_M dM_t, \quad \text{e} \quad V(t) = \int_{[0,t] \times M} X^* d\overline{M},$$

onde dM_t é o elemento de volume de M na métrica induzida por x_t e

$$X^* d\overline{M}(t, x)((0, v_1), \dots, (0, v_n), (1, 0)) = d\overline{M}(X(t, p)) \left(dx_t(v_1), \dots, dx_t(v_n), \frac{\partial X}{\partial t}(t, p) \right),$$

para toda n -lista de vetores $v_1, \dots, v_n \in T_p M$.

A definição de volume da variação $\{x_t\}$ dada acima é inspirada quando $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ e M é compacta (sem bordo) e mergulhada em \mathbb{R}^{n+1} , pois, neste caso, pode-se provar que $\frac{1}{n+1} \int_M \langle x, N \rangle dM$ é o volume da região limitada por M em \mathbb{R}^{n+1} e

$$\int_{[0,t] \times M} X^* d\overline{M} = \frac{1}{n+1} \int_M \langle x_t, N_t \rangle dM_t - \frac{1}{n+1} \int_M \langle x, N \rangle dM,$$

onde N_t é o campo vetorial unitário normal à imersão x_t (ver [20], pag. 492).

Lema 4.1. Seja $A(t) = (a_{i,j})(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma família diferenciável de matrizes $n \times n$ tal que $A(0) = Id$. Então,

$$\left. \frac{d}{dt} \det A(t) \right|_{t=0} = \text{tr}(A'(0)).$$

Demonstração. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, sejam $A_1(t), \dots, A_n(t)$ os vetores colunas da matriz $A(t)$, e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Como o determinante $\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação n -linear alternada e $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \det(A(t)) \right|_{t=0} &= \sum_{k=1}^n \det(A_1(t), \dots, A'_k, \dots, A_n(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^n \det(e_1, \dots, A'_k(0), \dots, e_n) \\ &= \sum_{k=1}^n a'_{kk}(0) = \text{tr}(A'(0)). \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 4.2. (Fórmula da Primeira Variação da Área)

$$\frac{dA}{dt}(0) = - \int_M nHf \, dM,$$

onde H é a curvatura média da imersão x e $f = \langle E, N \rangle$.

Demonstração. Ver o apêndice B. □

Proposição 4.3. $\frac{dV}{dt}(0) = \int_M f \, dM$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N$ um referencial ortonormal positivo adaptado em torno de $x(p)$. Então,

$$X^*(d\bar{M}) = a(t, p) \, dM \wedge dt,$$

onde

$$\begin{aligned} a(t, p) &= X^*(d\bar{M})((0, e_1), \dots, (0, e_n), (1, 0)) \\ &= d\bar{M} \left(dx_t(e_1), \dots, dx_t(e_n), \frac{\partial X}{\partial t} \right) \\ &= \text{vol} \left(dx_t(e_1), \dots, dx_t(e_n), \frac{\partial X}{\partial t} \right) \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle \sqrt{\det(\langle dx_t(e_i), dx_t(e_j) \rangle)}. \end{aligned}$$

e N_t é campo vetorial unitário normal à imersão x_t . Logo,

$$\frac{dV}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \left(\int_{[0,t] \times M} a(t,p) dM \wedge dt \right) \Big|_{t=0} = \int_M a(0,p) dM = \int_M \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0), N \right\rangle dM = \int_M f dM.$$

□

Definição 4.4. Dizemos que uma variação de x *preserva volume* quando $V(t) = V(0)$ para todo t , e que é *normal* quando o seu campo variacional E é paralelo a N .

Lema 4.5. Dada $f \in \mathfrak{D}(M)$, com $f|_{\partial M} = 0$ e $\int_M f dM = 0$, existe uma variação de x normal que preserva volume, cujo campo variacional é fN .

Demonstração. Considere a variação $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow \overline{M}$ dada por:

$$X(t, p) = \exp_{x(p)}(\varphi(t, p)N(p)),$$

onde $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\varphi(0, p) = 0$ para todo $p \in M$.

Então X é uma variação normal de x , cujo campo variacional é

$$E(p) = \frac{\partial X}{\partial t}(0, p) = d(\exp_{x(p)})_0 \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) (0, p) N(p) \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, p) N(p),$$

para todo $p \in M$.

Vamos mostrar que podemos escolher a função φ de modo que a variação X satisfaça as condições do lema.

Como $X = e \circ \psi$, onde $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ é a aplicação dada por $\psi(t, p) = (\varphi(t, p), p)$, e $e : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \overline{M}$ é a aplicação $e(u, p) = \exp_{x(p)}(uN(p))$, temos que:

$$dX_{(t,p)}(1, 0) = de_{\psi(t,p)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p), 0 \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) de_{\psi(t,p)}(1, 0),$$

e

$$dX_{(t,p)}(0, e_i(p)) = de_{\psi(t,p)}(d\varphi_{(t,p)}(0, e_i(p)), e_i(p)) = d\varphi_{(t,p)}(0, e_i(p)) de_{\psi(t,p)}(1, 0) + de_{\psi(t,p)}(0, e_i(p)),$$

para todo $i = 1, \dots, n$, onde $e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N$ é um referencial adaptado ortonormal.

Logo $X^*(d\bar{M}) = a(t, p)dM \wedge dt$, onde

$$\begin{aligned}
 a(t, p) &= X^*(d\bar{M})((0, e_1(p)), \dots, (0, e_n(p)), (1, 0)) \\
 &= d\bar{M}(dX_{(t,p)}(0, e_1(p)), \dots, dX_{(t,p)}(0, e_n(p)), dX_{(t,p)}(1, 0)) \\
 &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) d\bar{M}(de_{\psi(t,p)}(0, e_1(p)), \dots, de_{\psi(t,p)}(0, e_n(p)), de_{\psi(t,p)}(1, 0)) \\
 &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) \det(de_{(\varphi(t,p), p)}).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$V(t) = \int_M \left(\int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) W(\varphi(t, p), p) dt \right) dM, \quad (4.1)$$

onde $W(u, p) = \det(de_{(u,p)})$.

Seja $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}$ a solução da equação diferencial a um parâmetro,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) = \frac{f(p)}{W(\varphi(t, p), p)}, \quad (4.2)$$

com condição inicial $\varphi(0, p) = 0$ para todo $p \in M$.

Como, por hipótese, $\int_M f(p) dM = 0$, temos, por (4.1), que $V(t) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, ou seja, X é uma variação que preserva volume.

Além disso, $W(0, p) = \det(e_1(p), \dots, e_n(p), N(p)) = 1$. Conseqüentemente, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, p) = f(p)$ e, portanto, $E(p) = f(p)N(p)$ para todo $p \in M$.

Observe também que $\varphi(t, p) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e todo $p \in \partial M$, pois, $\varphi(0, p) = 0$ e, por (4.2), $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) = 0$ para todo $p \in \partial M$ e todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, já que $f|_{\partial M} = 0$. Logo $X(t, p) = x(p)$ para todo $p \in \partial M$. Ou seja, X é realmente uma variação de x . \square

Dada uma variação X de uma imersão $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, seja $H_0 = A^{-1} \int_M H dM$, onde $A = A(0)$, e defina $J : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por $J(t) = A(t) + nH_0V(t)$.

Proposição 4.6. Seja $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) x tem curvatura média constante H_0 ;
- (ii) Para toda variação preservando volume, $A'(0) = 0$;
- (iii) Para toda variação, $J'(0) = 0$.

Demonstração. Observe, primeiro, que se H é constante, então $H = H_0$.

Com efeito, se H é constante, então

$$H_0 = A^{-1} \int_M H dM = HA^{-1} \int_M dM = HA^{-1}A = H.$$

(i) \implies (iii): Como $J'(0) = A'(0) + nH_0V'(0)$, temos, pelo teorema 4.2 e pela proposição 4.3:

$$J'(0) = - \int_M nH_0f dM + nH_0 \int_M f dM = 0.$$

(iii) \implies (ii): Por hipótese, para toda variação, $J'(0) = 0$. Em particular, $J'(0) = 0$ para toda variação que preserva volume. Como $V'(0) = 0$ para tais variações,

$$A'(0) = A'(0) + nH_0V'(0) = J'(0) = 0.$$

(ii) \implies (i): Suponhamos que existe $p \in M$ tal que $(H - H_0)(p) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $(H - H_0)(p) > 0$.

Sejam $M^+ = \{q \in M; (H - H_0)(q) > 0\}$, e $M^- = \{q \in M; (H - H_0)(q) < 0\}$.

Como $M^+ \neq \emptyset$, $M^- \neq \emptyset$, pois, caso contrário, teríamos $(H - H_0)(q) \geq 0$ para todo $q \in M$, e portanto, $\int_M (H - H_0) dM > 0$, o que contraria o fato de que $\int_M (H - H_0) dM = 0$.

Sejam U um aberto limitado, tal que $\bar{U} \subset M^+$, e uma função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ com suporte compacto contido em M^+ tal que $0 \leq \varphi(q) \leq 1$, para todo $q \in M$, e $\varphi(q) = 1$, se $q \in \bar{U}$ (ver [20], pag. 433). Assim,

$$L = \int_M \varphi(H - H_0) dM > 0.$$

De maneira análoga, existem um aberto limitado V , tal que $\bar{V} \subset M^-$, e uma função $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ com suporte compacto contido em M^- tal que $0 \leq \xi(q) \leq 1$ para todo $q \in M$, e $\xi(q) = 1$ se $q \in \bar{V}$. Logo,

$$S = \int_M \xi(H - H_0) dM < 0.$$

Tomando $\psi = -\frac{L}{S} \xi$, obtemos que

$$\int_M (\varphi + \psi)(H - H_0) dM = 0.$$

Seja $f = (\varphi + \psi)(H - H_0)$. Então, $f|_{\partial M} = 0$ e $\int_M f dM = 0$. Logo, pelo lema 4.5, existe uma variação normal preservando volume, cujo campo variacional é fN . Como, por hipótese, $A'(0) = -\int_M nHf dM = 0$ para tal variação, chegamos a uma contradição, pois

$$0 = \int_M f(H - H_0) dM = \int_M (\varphi + \psi)(H - H_0)^2 dM > 0.$$

Assim, $H = H_0$ em M . □

A proposição acima nos mostra que, no que diz respeito à primeira variação, os problemas variacionais descritos em (ii) e (iii) são equivalentes e os pontos críticos de ambos são as hipersuperfícies com curvatura média constante. Porém, quando se trata do estudo da segunda variação de tais pontos críticos, a equivalência acima já não é verdadeira, fato abordado na literatura clássica do Cálculo Variacional (Bolza, pp 472-473).

Observe que as hipersuperfícies mínimas ($H_0 = 0$) estão incluídas entre os pontos críticos das variações que preservam volume, o que é natural, já que elas são os pontos críticos da função área para toda variação.

Para calcular a segunda variação de J , observemos que:

$$\frac{dJ}{dt}(t) = \frac{dA}{dt}(t) + nH_0 \frac{dV}{dt}(t) = \int_M (-nH_t + nH_0)f_t dM,$$

onde H_t é a curvatura média da imersão x_t , $f_t = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle$ e N_t é o campo vetorial unitário normal a x_t . Logo,

$$J''(0) = -\int_M n \left(\frac{\partial H_t}{\partial t} \right) (0) f dM.$$

Teorema 4.7. (Fórmula da Segunda Variação)

Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H e seja X uma variação de x . Então $J''(0)$ depende somente de f e é dada por:

$$J''(0)f = \int_M (-f\Delta f - (\overline{R} + \|B\|^2)f^2) dM,$$

onde Δ é o Laplaciano de M na métrica induzida, $\|B\|$ é a norma da segunda forma fundamental de x , $\overline{R} = n\overline{\text{Ric}}(N)$ e $\overline{\text{Ric}}(N)$ é a curvatura de Ricci de \overline{M} na direção N .

Demonstração. Ver o apêndice B. □

Definição 4.8. Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta com ou sem bordo e $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. A imersão x é *estável* se $A''(0) \geq 0$ para toda variação de x que preserva volume. Se M é não-compacta, dizemos que x é estável quando $x|_{\widetilde{M}}$ é estável para toda subvariedade compacta com bordo $\widetilde{M} \subset M$. No apêndice C, daremos uma definição equivalente de estabilidade.

Seja \mathfrak{F} o conjunto das funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, com $f|_{\partial M} = 0$ e $\int_M f dM = 0$.

Proposição 4.9. $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é estável se, e somente se, $J''(0)f \geq 0$ para toda $f \in \mathfrak{F}$.

Demonstração. Suponhamos que $J''(0)(f) \geq 0$ para toda $f \in \mathfrak{F}$. Seja $x_t : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma variação de x que preserva volume e seja $E^N = fN$ a componente normal do campo variacional E de x_t . Como $E|_{\partial M} = 0$, temos que $f|_{\partial M} = 0$ e, pela proposição 4.3,

$$\int_M f dM = V'(0) = 0.$$

Logo $f \in \mathfrak{F}$. Além disso, como x_t é uma variação que preserva volume,

$$J''(0)(f) = A''(0) + nH_0V''(0) = A''(0).$$

Então, por hipótese, $A''(0) = J''(0)(f) \geq 0$.

Suponhamos agora que $A''(0) \geq 0$ para toda variação de x que preserva volume. Seja $f \in \mathfrak{F}$. Então, pelo lema 4.5, existe uma variação de x normal que preserva volume, cujo o campo variacional é $E = fN$. Logo $V''(0) = 0$ e, por hipótese, $J''(0)(f) = A''(0) \geq 0$. □

Seja a aplicação bilinear $I : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$I(f, g) = \int_M g(-\Delta f - (\overline{R} + \|B\|^2)f) dM.$$

Observe que I é simétrica, pois, pelo Corolário 3.14, $\int_M g\Delta f dM = \int_M f\Delta g dM$.

O *índice* da forma quadrática associada a I é a dimensão do maior subespaço V de \mathfrak{F} onde I é negativa definida, i.e., $I(f, f) < 0$ para toda $f \in V - \{0\}$. Como veremos, tal índice, chamado *índice de Morse*, é finito.

De forma análoga ao caso de superfícies mínimas, existe a noção de *campo de Jacobi* para hipersuperfícies com curvatura média constante.

Definição 4.10. Um campo vetorial $V = fN$, $f \in \mathfrak{F}$, normal a uma imersão $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ com curvatura média constante é um *campo de Jacobi* se $f \in \ker(I)$, isto é, $I(f, g) = 0$ para toda $g \in \mathfrak{F}$.

Um tipo particular de campo de Jacobi é obtido por meio dos *campos de Killing* em \overline{M} (ver o apêndice D).

Proposição 4.11. Seja $f \in \mathfrak{F}$. Então fN é um campo de Jacobi se, e somente se,

$$\Delta f + (\overline{R} + \|B\|^2)f = \text{const.} \quad (4.3)$$

Demonstração. Se $f \in \mathfrak{F}$ e $\Delta f + (\overline{R} + \|B\|^2)f = m_0$, $m_0 \in \mathbb{R}$, então

$$I(f, g) = \int_M -g (\Delta f + (\overline{R} + \|B\|^2)f) dM = -m_0 \int_M g dM = 0,$$

para toda $g \in \mathfrak{F}$, pois $\int_M g dM = 0$. Logo, $f \in \ker(I)$.

Reciprocamente, seja $F_0 = A^{-1} \int_M F dM$, onde $A = \int_M dM$ e $F = \Delta f + (\overline{R} + \|B\|^2)f$. Então, como $f \in \ker(I)$, $\int_M g(F - F_0) dM = 0$ para toda $g \in \mathfrak{F}$. Logo, por um argumento similar ao usado na proposição (4.6), $F = F_0$. \square

Seja $\{g_s\}_{0 \leq s < 1}$ uma família a um parâmetro de difeomorfismos de M em M_s , onde $M_s \subset M$, tal que $g_0 = \text{identidade}$ e a aplicação $(s, p) \mapsto g_s(p)$ é de classe C^∞ . Dizemos que $\{g_s\}_{0 \leq s < 1}$ é uma *contração de M* se:

- (1) $M_t \subseteq M_s$ e $\text{int}(M_s - M_t) \neq \emptyset$, se $t > s$;
- (2) $\lim_{s \rightarrow 1} \text{área}(M_s) = 0$.

Seja \mathfrak{F}_s , $0 \leq s < 1$, o espaço das funções $f \in C^\infty(M_s)$ tais que $f|_{\partial M_s} = 0$ e $\int_{M_s} f dM_s = 0$. Dizemos que o bordo ∂M_s , $s \in [0, 1)$, é *conjugado* se a aplicação bilinear $I_s : \mathfrak{F}_s \times \mathfrak{F}_s \rightarrow \mathbb{R}$ tem núcleo não trivial, isto é, se existe $f \in \mathfrak{F}_s$, $f \neq 0$, tal que $I_s(f, g) = 0$ para toda $g \in \mathfrak{F}_s$. A *multiplicidade do bordo conjugado* ∂M_s é a dimensão do núcleo da forma I_s .

Teorema 4.12. (Teorema do Índice de Morse para hipersuperfícies com curvatura média constante)

Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante e $\{g_s\}_{0 \leq s < 1}$ uma contração de M . Então existe apenas um número finito de bordos conjugados ∂M_{s_i} , $0 \leq s_i < 1$, e o índice de I é finito e igual ao número de bordos conjugados ∂M_s , $0 < s < 1$, contados com suas multiplicidades.

Demonstração. Ver [15]. □

Como aplicação do teorema do índice de Morse, provaremos que os cilindros de revolução em \mathbb{R}^3 são superfícies não-compactas com curvatura média constante que não são estáveis.

Seja

$$S^1 \times \mathbb{R} = \{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 = r^2 \} ,$$

o cilindro circular reto de raio r . Então $S^1 \times \mathbb{R}$ é uma superfície de \mathbb{R}^3 com curvatura média constante $\frac{1}{2r}$ e $\|B\|^2 = \frac{1}{r^2}$. Considere a função $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \sin \frac{t}{r}$. É fácil verificar, usando a expressão do Laplaciano em coordenadas locais, que f é uma solução da equação de Jacobi

$$\Delta f + \frac{1}{r^2} f = 0 .$$

Seja D o domínio de $S^1 \times \mathbb{R}$ limitado pelos círculos $t = 0$ e $t = 2\pi r$. Então $J = fN$ é um campo de Jacobi em D , pois $f|_{\partial D} = 0$ e $\int_D f = 0$, onde N é um campo unitário normal a $S^1 \times \mathbb{R}$. Logo, pelo teorema do índice de Morse, todo domínio do cilindro que contém D tem, no mínimo, índice um, e, portanto, não é estável. Assim, $S^1 \times \mathbb{R}$ não é estável.

4.2 Demonstração do teorema A

Para provarmos uma das implicações do teorema A, precisaremos do seguinte lema.

Lema 4.13. Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média H . Então $\|B\|^2 \geq nH^2$, e a igualdade ocorre em um ponto $p \in M$ se, e somente se, p é umbílico.

Demonstração. Sejam k_1, \dots, k_n as curvaturas principais da imersão $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ em $p \in M$.

Então, $\|B\|^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2$ e

$$\|B\|^2 - n^2 H^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2 - \left(\sum_{j=1}^n k_j \right)^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2 - \left(2 \sum_{i<j=1}^n k_i k_j + \sum_{k=1}^n k_k^2 \right) = -2 \sum_{i<j=1}^n k_i k_j. \quad (4.4)$$

Mostraremos, por indução, que para todo $n \geq 2$:

$$\sum_{i<j=1}^n (k_i^2 + k_j^2) = (n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2.$$

Para $n = 2$,

$$\sum_{i<j=1}^2 (k_i^2 + k_j^2) = k_1^2 + k_2^2 = (2-1) \sum_{i=1}^2 k_i^2.$$

Suponhamos o resultado válido para n . Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i<j=1}^n (k_i^2 + k_j^2) &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{j-1} (k_i^2 + k_j^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (k_i^2 + k_{n+1}^2) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} (k_i^2 + k_j^2) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i^2 + n k_{n+1}^2 + (n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n k_i^2 + n k_{n+1}^2 = n \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2. \end{aligned}$$

Logo, por (4.4),

$$\begin{aligned} \sum_{i<j=1}^n (k_i - k_j)^2 &= \sum_{i<j=1}^n (k_i^2 - 2k_i k_j + k_j^2) \\ &= \sum_{i<j=1}^n (k_i^2 + k_j^2) - 2 \sum_{i<j=1}^n k_i k_j \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2 - 2 \sum_{i<j=1}^n k_i k_j \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2 + \|B\|^2 - n^2 H^2 \\ &= (n-1) \|B\|^2 + \|B\|^2 - n^2 H^2 \\ &= n(\|B\|^2 - n H^2). \end{aligned}$$

Assim, $\|B\|^2 - nH^2 \geq 0$, e $(\|B\|^2 - nH^2)(p) = 0$ se, e somente se, $k_1(p) = \dots = k_n(p)$, ou seja, $\|B\|^2 = nH^2$ em p se, e somente se, p é um ponto umbílico. \square

Lema 4.14. As esferas geodésicas $S^n \subseteq \overline{M}^{n+1}(c)$ são estáveis.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $c = 0$, $c = 1$ ou $c = -1$. Pelas Proposições 2.13 e 2.15 e pelo Teorema 2.18, as esferas geodésicas são hipersuperfícies compactas umbílicas de $\overline{M}^{n+1}(c)$ com curvatura média constante H . Logo, pelo lema 4.13, $\|B\|^2 = nH^2$. Além disso, $\lambda = \overline{R} + \|B\|^2 = n(c + H^2)$, pois $\text{Ricc}(N) = c$.

Por outro lado, pela equação de Gauss (Teorema 1.30), S^n tem curvatura seccional constante $c + H^2$. Sendo S^n uma variedade completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante $c + H^2 > 0$, S^n é isométrica a esfera euclidiana n -dimensional de centro na origem e raio $\frac{1}{\sqrt{c + H^2}}$. Assim, pela proposição 3.19 e pelo corolário 3.26, o primeiro autovalor não-nulo de S^n é $\lambda_1 = n(c + H^2) = \lambda$. Logo, pelo Corolário 3.14 e pelo Lema 3.18,

$$J''(0)f = \int_M (-f\Delta f - \lambda f^2) dM \geq (\lambda_1 - \lambda) \int_M f^2 dM = 0,$$

para toda $f \in \mathfrak{F}$.

Portanto, as esferas geodésicas são estáveis. \square

Observação 4.15. Para hipersuperfícies mínimas compactas, com bordo ou sem bordo, pode-se provar, usando argumentos similares aos da proposição (4.6), que uma imersão $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ tem curvatura média $H = 0$ se, e somente se, $A'(0) = 0$ para toda variação de x . Dizemos, nesse caso, que x é estável se $A''(0) \geq 0$ para toda variação de x , ou, de modo equivalente, $J''(0)(f) \geq 0$, para toda função f de classe C^∞ tal que $f|_{\partial M} = 0$.

Assim, quando $c > 0$, o equador $S^n(c) \subset S^{n+1}(c)$ é uma hipersuperfície mínima de $S^{n+1}(c)$ e, como tal, não é estável, pois, para $f = 1$,

$$J''(0)(f) = \int_M -f\Delta f - (\|B\|^2 + \overline{R})f^2 dM = -nc \text{ vol}(M) < 0.$$

Mas, como hipersuperfície de curvatura média constante, isto é, considerando apenas variações que preservam o volume, $S^n(c)$ é estável pelo lema 4.14.

De modo análogo, podemos verificar que nenhuma esfera geodésica $S^n \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ é estável, quando consideramos todas as variações, e não apenas aquelas que preservam volume, pois, para $f \equiv 1$,

$$J''(0)(f) = -n(c + H^2) \text{vol}(M) < 0,$$

já que as esferas geodésicas de $\overline{M}^{n+1}(c)$ têm curvatura seccional $c + H^2$ positiva.

Seja $\overline{M}^{n+1}(c)$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante c . Consideraremos $\overline{M}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$, no caso $c = 0$, e

$$\overline{M}^{n+1}(c) = S_{\frac{1}{\sqrt{c}}}^{n+1}(0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle y, y \rangle = \frac{1}{c} \right\},$$

no caso $c > 0$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica Riemanniana canônica de \mathbb{R}^{n+2} .

Para $c < 0$, vamos tomar $\overline{M}^{n+1}(c)$ como sendo o modelo de Lorentz do espaço hiperbólico de dimensão $n + 1$ com curvatura seccional constante c , i.e.,

$$\overline{M}^{n+1}(c) = \left\{ y \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle\langle y, y \rangle\rangle = \frac{1}{c}, y_0 > 0 \right\},$$

onde \mathbb{L}^{n+2} é o espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+2} com a *pseudo-métrica* Riemanniana dada por:

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle = -v_0w_0 + v_1w_1 + \cdots + v_{n+1}w_{n+1},$$

para todos $v = (v_0, v_1, \dots, v_{n+1})$ e $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n+1})$ pertencentes a \mathbb{L}^{n+2} . Para simplificar a notação, utilizaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para designar também $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

A proposição abaixo, cuja demonstração encontra-se no apêndice A, será de extrema utilidade na prova dos resultados abaixo.

Proposição 4.16. Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Então existem uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $e_1, \dots, e_n \in \mathfrak{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U , tais que $\nabla_{e_j} e_i(p) = 0, i, j = 1, \dots, n$. Uma tal família e_1, \dots, e_n de campos de vetores é chamada um *referencial (local) geodésico* em p .

Para calcularmos o Laplaciano de algumas funções definidas em M , precisaremos do seguinte resultado.

Lema 4.17. Sejam $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão, $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial local ortonormal e N um campo vetorial unitário normal à imersão x . Então,

$$(i) \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = -\|B\|^2.$$

Se, além disso, x tem curvatura média constante H , \overline{M}^{n+1} tem curvatura seccional constante e e_1, \dots, e_n é um referencial geodésico em p , $p \in M$,

$$(ii) \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle(p) = 0 \text{ para todo } k = 1, \dots, n.$$

Demonstração. Denotemos por $\overline{\nabla}$ a conexão de \overline{M}^{n+1} e por ∇ a conexão induzida em M pela imersão x .

(i) Sendo $\langle N, N \rangle = 1$, $\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, isto é, $\overline{\nabla}_{e_i} N$ é um campo local tangente a M . Assim ,

$$0 = e_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \rangle,$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle e_j, \sum_{k=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle e_k \right\rangle \\ &= - \sum_{i,j}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle^2 = -\|B\|^2. \end{aligned}$$

(ii) Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em $p \in M$. Então $\nabla_{e_j} e_i(p) = 0$, $[e_i, e_j](p) = 0$ e $\overline{\nabla}_{e_i} e_j(p) \in (TM)^\perp$, para todos $i, j = 1, \dots, n$. Como $\langle N, e_k \rangle = 0$, $\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle = -\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \rangle$. Logo,

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = -\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \rangle - \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} e_k \rangle.$$

Sendo $\overline{\nabla}_{e_i} N$ um vetor tangente e $\overline{\nabla}_{e_i} e_k(p)$ um vetor normal, obtemos

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle(p) = -\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} e_k \rangle(p). \quad (4.5)$$

Por outro lado,

$$\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k - \overline{\nabla}_{e_k} e_i \rangle = \langle N, [e_i, e_k] \rangle = \langle N, \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{e_k} e_i \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = \langle N, \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle.$$

Então,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle,$$

e, portanto,

$$\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle(p) = \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle(p).$$

Logo, por (4.5),

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle(p) = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle(p) = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle(p). \quad (4.6)$$

Como \bar{M}^{n+1} tem curvatura seccional constante c , segue do lema 1.26, que:

$$\langle \bar{R}(e_i, e_k)e_i, N \rangle = c(\langle e_i, e_i \rangle \langle e_k, N \rangle - \langle e_k, e_i \rangle \langle e_i, N \rangle) = 0,$$

ou seja,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i + \bar{\nabla}_{[e_i, e_k]} e_i, N \rangle = 0.$$

Então, em p ,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle(p) = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i, N \rangle(p). \quad (4.7)$$

Assim, por (4.6) e (4.7),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle(p) &= -\sum_{i=1}^n \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle(p) \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle N, \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle(p) \\ &= -\left\langle N, \bar{\nabla}_{e_k} \left(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle(p). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\langle N, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = nH$ é constante,

$$\left\langle \bar{\nabla}_{e_k} N, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle = -\left\langle N, \bar{\nabla}_{e_k} \left(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle (p) = \left\langle \bar{\nabla}_{e_k} N, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle (p) = 0. \quad \square$$

Seja $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}(c)$ uma imersão com curvatura média H , e seja v um vetor fixo de \mathbb{R}^{n+1} , no caso $c = 0$, e um vetor fixo de \mathbb{R}^{n+2} quando $c \neq 0$. Consideremos as funções $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$g(p) = \langle x(p), v \rangle \quad \text{e} \quad f(p) = \langle N(p), v \rangle, \quad (4.8)$$

onde N é um campo unitário normal à imersão x .

Lema 4.18. Se Δ denota o Laplaciano de M , com a métrica induzida de x , então:

(a) $\Delta g = nHf - cng$.

Se, além disso, $H = \text{constante}$,

(b) $\Delta f = -\|B\|^2 f + cnHg$.

Demonstração. Suponhamos $c \neq 0$.

(a) Sejam $p \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico local em p . Então, como $\{N(p), x(p), e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ é uma base ortogonal de \mathbb{R}^{n+2} ,

$$v = c\langle v, x(p) \rangle x(p) + \langle v, N(p) \rangle N(p) + \sum_{k=1}^n \langle v, e_k(p) \rangle e_k(p).$$

Além disso, como $\langle x, e_i \rangle = 0$, temos $\langle e_i, e_i \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = 0$, ou seja, $\langle x, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = -1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta g(p) &= \sum_{i=1}^n e_i (e_i \langle x, v \rangle) (p) = \sum_{i=1}^n (e_i \langle e_i, v \rangle) (p) = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, v \rangle (p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle (p) \right) \langle N(p), v \rangle + \left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, x(p) \rangle \right) c \langle x(p), v \rangle \\ &= nH(p)f(p) - ncg(p). \end{aligned}$$

pois $\bar{\nabla}_{e_i} e_i(p)$ é um vetor ortogonal a $T_p M$.

(b) Pelo lema 4.17,

$$\begin{aligned}
 \Delta f(p) &= \sum_{i=1}^n e_i(e_i f)(p) = \sum_{i=1}^n e_i(\langle v, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle)(p) = \sum_{i=1}^n \langle v, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle(p) \right) \langle v, N(p) \rangle + c \left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, x \rangle(p) \right) \langle x(p), v \rangle \\
 &= -\|B\|^2 f(p) + cg(p) \left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, x \rangle(p) \right).
 \end{aligned}$$

Como $\langle N, x \rangle = 0$,

$$0 = \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, x \rangle + \langle N, e_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, x \rangle.$$

Logo,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, x \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle,$$

e portanto,

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle = nH.$$

Assim,

$$\Delta f(p) = -\|B\|^2 f(p) + cnHg(p).$$

Para $c = 0$, as demonstrações de (a) e (b) são análogas, com a única diferença de que, neste caso,

$$v = \langle N(p), v \rangle N(p) + \sum_{k=1}^n \langle e_k(p), v \rangle e_k(p). \quad \square$$

Observação 4.19. Utilizando o lema acima, podemos provar que as esferas são as únicas superfícies de revolução de \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não-nula que são estáveis.

De fato, já provamos que as esferas são estáveis e os cilindros de revolução não são estáveis. Além dessas, temos os ondulóides e os nodóides, que completam a lista de todas superfícies de revolução de \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não-nula (ver [18]).

Tomando dois paralelos consecutivos de raio mínimo no ondulóide ou no nodóide, e D o domínio limitado por esses círculos, temos, pelo lema 4.18, que $J = fN$ é um campo de Jacobi em D , pois $f|_{\partial D} = 0$ e $\int_D f = 0$, onde $f(p) = \langle v, N \rangle$ e v é um vetor paralelo ao eixo de revolução.

Logo, pelo teorema do índice de Morse, todo domínio que contém D tem, no mínimo, índice um e, portanto, não é estável. Assim, os ondulóides e os nodóides não são estáveis. Para finalizar a lista de todas as superfícies de revolução de \mathbb{R}^3 com curvatura média constante resta, ainda, o catenóide, que também não é estável, nem como superfície mínima nem como superfície de curvatura média constante ([22]).

Na realidade, esta observação segue do seguinte resultado, provado por A.M da Silveira [28]: *Se M^2 é completa e não compacta e $x : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão com curvatura média constante estável, então $x(M^2)$ é um plano.* Ou seja, não existe superfície completa não-compacta com curvatura média constante não-nula estável em \mathbb{R}^3 .

Para provarmos o teorema A no caso $c = 0$, precisamos ainda calcular o Laplaciano da função suporte $g = \langle x, N \rangle$ de x , que nos dá a distância "orientada" da origem do \mathbb{R}^{n+1} ao hiperplano tangente a $x(M^n)$ em $x(p)$.

Lema 4.20. *Seja $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H . Então a função suporte g de x , $g = \langle x, N \rangle$, satisfaz:*

$$\Delta g = -nH - \|B\|^2 g. \quad (4.9)$$

Demonstração. Sejam $p \in M$, N um campo vetorial unitário normal a M , e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em p . Então, como $\bar{\nabla}_{e_i} x = e_i$ e $\langle e_i, N \rangle = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta g(p) &= \sum_{i=1}^n (e_i(e_i \langle x, N \rangle))(p) = \sum_{i=1}^n (e_i (\langle \bar{\nabla}_{e_i} x, N \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle))(p) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle)(p) = \sum_{i=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} x, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle)(p) \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle)(p) \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle(p) + \langle x, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p). \end{aligned}$$

Logo, pelo lema 4.17,

$$\begin{aligned}
 \Delta g(p) &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle(p) - \|B\|^2 \langle x, N \rangle(p) \\
 &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle(p) - \|B\|^2 g(p) \\
 &= -nH - \|B\|^2 g(p). \quad \square
 \end{aligned}$$

Lema 4.21. (Fórmula Integral de Minkowski)

Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta e $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Então,

$$\int_M H g dM = - \int_M dM,$$

onde $g = \langle x, N \rangle$ e H é a curvatura média da imersão x .

Demonstração. Sejam e_1, \dots, e_n um referencial ortonormal local e $X(p) = x(p)$ o vetor posição em \mathbb{R}^{n+1} .

Indiquemos por div_M a divergência em M , e por X^T e X^N as componentes tangente e normal, respectivamente, do vetor X . Como $\langle X^N, e_i \rangle = 0$, temos que:

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} X^N, e_i \rangle = - \langle X^N, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = - \langle X^N, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle = - \langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle. \quad (4.10)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \text{div}_M(X^T) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(X^T), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i}(X^N), e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle + \langle X, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle = n$ e $\sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N = nHN$. Logo,

$$\text{div}_M(X^T) = n + nHg.$$

Integrando em M e usando o teorema da divergência, obtemos:

$$0 = \frac{1}{n} \int_M \text{div}_M(X^T) dM = \int_M dM + \int_M Hg dM,$$

ou seja,

$$\int_M Hg \, dM = - \int_M dM. \quad \square$$

Pelo Lema 4.14, toda esfera geodésica em $\overline{M}^{n+1}(C)$ é uma hipersuperfície compacta com curvatura média constante estável em $\overline{M}^{n+1}(C)$. Então, para completarmos a demonstração do teorema principal, basta mostrarmos, pelo lema 4.13, que a estabilidade da imersão $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ implica que $\|B\|^2 = nH^2$, pois já provamos, no capítulo 2, que as únicas hipersuperfícies compactas umbílicas de $\overline{M}^{n+1}(c)$ são as esferas geodésicas.

Iremos dividir a demonstração em três casos: $c = 0$, $c < 0$ e $c \neq 0$.

Primeiro caso: $c = 0$.

Como H é constante e M é compacta sem bordo, obtemos, integrando (4.9) em M e usando o teorema da divergência, que

$$- \int_M \|B\|^2 Hg \, dM = nH^2 \int_M dM. \quad (4.11)$$

Seja $f = Hg + 1$. Então, pelo Lema 4.21, $\int_M f \, dM = 0$, i.e., $f \in \mathfrak{F}$, e pelo Lema 4.20,

$$\begin{aligned} -f\Delta f - \|B\|^2 f^2 &= -(Hg + 1)(H\Delta g) - \|B\|^2 (Hg + 1)^2 \\ &= -(Hg + 1)H(-nH - \|B\|^2 g) - \|B\|^2 (Hg + 1)^2 \\ &= -(Hg + 1)[-nH^2 - H\|B\|^2 g + \|B\|^2 Hg + \|B\|^2] \\ &= -(Hg + 1)(-nH^2 + \|B\|^2) = nH^2 f - \|B\|^2 f. \end{aligned}$$

Como x é estável e $f \in \mathfrak{F}$, tem-se, pela Proposição 4.9, que

$$J''(0)(f) = \int_M (-f\Delta f - \|B\|^2 f^2) \, dM = - \int_M \|B\|^2 (Hg + 1) \, dM \geq 0, \quad (4.12)$$

Então, por (4.11), (4.12) e pelo Lema 4.13,

$$\int_M nH^2 \, dM = - \int_M \|B\|^2 Hg \, dM \geq \int_M \|B\|^2 \, dM \geq \int_M nH^2 \, dM,$$

e, portanto, $\int_M \|B\|^2 \, dM = \int_M nH^2 \, dM$. Logo $\|B\|^2 = nH^2$. Assim, para $c = 0$, o Teorema está demonstrado. \square

Suponhamos, agora, $c \neq 0$.

Seja $u = -Hf + cg$, onde f e g são dadas por (4.8). Pelo Lema 4.18 e pelo Teorema da Divergência,

$$\int_M u \, dM = \int_M (-Hf + cg) \, dM = -\frac{1}{n} \int_M \Delta g \, dM = 0,$$

pois M é compacta sem bordo.

Então, pelo Lema 4.18,

$$\begin{aligned} J''(0)(u) &= - \int_M (u\Delta u + (\|B\|^2 + nc)u^2) \, dM \\ &= - \int_M ((-Hf + cg)(-H\Delta f + c\Delta g) + (\|B\|^2 + nc)(-Hf + cg)^2) \, dM \\ &= - \int_M (-Hf + cg) [H\|B\|^2 f - cnH^2 g + cnHf - c^2 ng \\ &\quad - \|B\|^2 Hf + \|B\|^2 cg - nHfc + nc^2 g] \, dM \\ &= - \int_M (-Hf + cg)(-cnH^2 g + \|B\|^2 cg) \, dM \\ &= - \int_M (-cH\|B\|^2 fg + cnH^3 fg - c^2 nH^2 g^2 + c^2 g^2 \|B\|^2) \, dM \\ &= - \int_M (\|B\|^2 - nH^2)(c^2 g^2 - Hc fg) \, dM. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Trataremos separadamente os casos $c > 0$ e $c < 0$. Sem perda de generalidade, assumiremos $c = 1$ quando $c > 0$, e $c = -1$ para $c < 0$.

Segundo caso: $c = 1$.

Seja $a_A = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $A = 0, 1, \dots, n+1$, a base canônica do \mathbb{R}^{n+2} com a métrica usual.

Sejam f_A e g_A as funções definidas em (4.8) para $v = a_A$, $A = 0, 1, \dots, n+1$. Seja $u_A = -Hf_A + cg_A$.

Como x é estável e $u_A \in \mathfrak{F}$, temos, pela Proposição 4.9 e por (4.13), que

$$J''(0)(u_A) = - \int_M (\|B\|^2 - nH^2)(g_A^2 - Hf_A g_A) \, dM \geq 0.$$

Então,

$$0 \leq \sum_{A=0}^{n+1} J''(0)(u_A) = - \int_M (\|B\|^2 - nH^2) \left(\sum_{A=0}^{n+1} g_A^2 - H \sum_{A=0}^{n+1} f_A g_A \right) \, dM.$$

Como $x(M)$ está contida na esfera unitária centrada na origem de \mathbb{R}^{n+2} , temos:

$$\sum_{A=0}^{n+1} g_A^2 = \sum_{A=0}^{n+1} \langle x, a_A \rangle \langle x, a_A \rangle = \langle x, x \rangle = 1,$$

e

$$\sum_{A=0}^{n+1} f_{AgA} = \sum_{A=0}^{n+1} \langle N, a_A \rangle \langle x, a_A \rangle = \langle N, x \rangle = 0.$$

Logo

$$- \int_M (\|B\|^2 - nH^2) dM \geq 0.$$

Mas, como $\|B\|^2 \geq nH^2$, $\|B\|^2 = nH^2$, o que conclui a demonstração no caso $c = 1$.

Terceiro caso: $c = -1$.

Pelos Lemas 3.5 e 4.18,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta g^2 &= g \Delta g + |\text{grad } g|^2 = nHfg + ng^2 + |\text{grad } g|^2; \\ \frac{1}{2} \Delta f^2 &= f \Delta f + |\text{grad } f|^2 = -\|B\|^2 f^2 - nHgf + |\text{grad } f|^2; \\ \Delta(fg) &= f \Delta g + g \Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle \\ &= nHf^2 + ngf - \|B\|^2 fg - nHg^2 + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} H^2 \Delta g^2 + H \Delta(fg) + \frac{1}{2} \Delta f^2 \\ &= nH^3 fg + nH^2 g^2 + H^2 |\text{grad } g|^2 + nH^2 f^2 + nHgf - \|B\|^2 Hfg \\ &\quad - nH^2 g^2 + 2H \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle - \|B\|^2 f^2 - nHfg + |\text{grad } f|^2 \\ &= H^2 |\text{grad } g|^2 + |\text{grad } f|^2 + 2H \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle + (nH^2 - \|B\|^2)(f^2 + Hfg) \\ &= -(\|B\|^2 - nH^2)(f^2 + Hfg) + H^2 |\text{grad } g|^2 + |\text{grad } f|^2 + 2H \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle. \end{aligned}$$

Integrando a expressão acima e utilizando o fato de que M é compacta sem bordo, obtemos:

$$\int_M (\|B\|^2 - nH^2)(f^2 + Hfg) dM = \int_M (H^2 |\text{grad } g|^2 + |\text{grad } f|^2 + 2H \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle) dM. \quad (4.14)$$

Como

$$|2H\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle| \leq 2H|\text{grad } f||\text{grad } g|,$$

temos

$$2H\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle \geq -2H|\text{grad } f||\text{grad } g|,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} H^2|\text{grad } g|^2 + |\text{grad } f|^2 + 2H\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle &\geq H^2|\text{grad } g|^2 + |\text{grad } f|^2 - 2H|\text{grad } f||\text{grad } g| \\ &= (H|\text{grad } g| - |\text{grad } f|)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Logo, por (4.13),(4.14), (4.15),

$$\begin{aligned} J''(0)(u) &= \int_M (\|B\|^2 - nH^2)(-Hfg - g^2) dM \\ &= \int_M (\|B\|^2 - nH^2)(-Hfg - f^2 + f^2 - g^2) dM \\ &= \int_M (\|B\|^2 - nH^2)(-Hfg - f^2) dM + \int_M (\|B\|^2 - nH^2)(f^2 - g^2) dM \\ &\leq \int_M (\|B\|^2 - nH^2)(f^2 - g^2) dM. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Seja $v \in \mathbb{L}^{n+2}$ tal que $\langle v, v \rangle = -1$, e seja e_1, \dots, e_n um referencial ortonormal local tangente a $x(M)$, definido numa vizinhança de um ponto $x(p)$, $p \in M$. Então,

$$v = -\langle v, x \rangle x + \langle v, N \rangle N + \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i,$$

e

$$\text{grad } g = \sum_{i=1}^n e_i(g)e_i = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} x, v \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle e_i, v \rangle e_i.$$

Assim,

$$-1 = \langle v, v \rangle = -\langle v, x \rangle^2 + \langle v, N \rangle^2 + \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle^2 = -g^2 + f^2 + |\text{grad } g|^2,$$

ou seja, $f^2 - g^2 = -(1 + |\text{grad } g|^2)$. Logo, como x é estável e $u \in \mathfrak{F}$,

$$0 \leq J''(0)(u) \leq - \int_M (\|B\|^2 - nH^2)(1 + |\text{grad } g|^2) dM \leq 0,$$

pois $\|B\|^2 \geq nH^2$. Portanto $\|B\|^2 = nH^2$, concluindo a demonstração no caso $c = -1$. ■

Apêndice A

Referencial geodésico

Sejam $p \in M$ e $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(0) = p$, $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Pela Proposição 1.17, existe $\varepsilon > 0$ tal que a aplicação exponencial $\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_p M \rightarrow V$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V \subset x(U)$. Além disso, pela Proposição 1.15, podemos tomar $\varepsilon > 0$ de tal modo que as geodésicas $\gamma(t)$, que passam por p em $t = 0$ com vetor velocidade $w \in B_\varepsilon(0)$, estejam definidas para todo $t \in (-2, 2)$.

Considere as funções diferenciáveis $g : B_\varepsilon(0) \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h_{ij}^k : B_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $g(w, v) = d(x^{-1} \circ \exp_p)_w(v)$ e $h_{ij}^k(w) = \Gamma_{ij}^k(x^{-1} \circ \exp_p(w))$, onde identificamos $T_w(T_p M)$ com $T_p M$, para todo $w \in T_p M$, e Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, \dots, n$, são os símbolos de Christoffel da conexão de M com respeito ao sistema de coordenadas x .

Finalmente, considere a aplicação diferenciável $F : \mathbb{R}^n \times B_\varepsilon(0) \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n \times T_p M \times T_p M$, dada por $F(y, w, v) = (A(w, v)y, v, 0)$, onde $A(w, v)$ é a matriz cujas entradas são

$$A_{k,j}(w, v) = -\langle H_{kj}(w), g(w, v) \rangle,$$

sendo $H_{kj}(w) = (h_{1j}^k(w), \dots, h_{nj}^k(w))$.

Então, pelo Teorema de existência e unicidade de equações diferenciais, dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $v_0 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$, existe $0 < \delta \leq 2$ e uma única curva diferenciável $z : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n \times B_\varepsilon(0) \times T_p M$, $z(t) = (y(t), w(t), v(t))$, tal que

$$\begin{cases} z(0) = (y_0, 0, v_0) \\ z'(t) = F(y(t), w(t), v(t)) = (A(w(t), v(t))y(t), v(t), 0). \end{cases}$$

Como, $v'(t) = 0$ e $w'(t) = v(t)$, temos $v(t) = v_0$ e $w(t) = v_0 t$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$.

Sejam $\gamma_{v_0} : (-2, 2) \rightarrow M$ a geodésica de M tal que $\gamma_{v_0}(0) = p$ e $\gamma'_{v_0}(0) = v_0$, e

$$c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = (x^{-1} \circ \exp_p)(tv_0) = (x^{-1} \circ \gamma_{v_0})(t),$$

as coordenadas locais de $\gamma_{v_0}(t)$. Então,

$$g(w(t), v(t)) = d(x^{-1} \circ \exp_p)_{tv_0}(v_0) = c'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)),$$

$$h_{ij}^k(w(t)) = \Gamma_{ij}^k(x^{-1} \circ \exp_p(tv_0)) = \Gamma_{ij}^k(c(t)),$$

e

$$A_{kj}(w(t)) = - \sum_{i=1}^n h_{ij}^k(w(t)) x'_i(t) = - \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) x'_i(t).$$

Logo, como $y'(t) = A(w(t), v(t))y(t)$,

$$y'_k(t) = - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) x'_i(t) \right) y'_j(t), \quad (1)$$

para todo $k = 1, \dots, n$.

Portanto, por (1.1), $\bar{y}(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(c(t))$, $t \in (-\delta, \delta)$, é o transporte paralelo do vetor

$\bar{y}_0 = \sum_{k=1}^n y_k^0 \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, $y_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$, ao longo da geodésica γ_{v_0} . Além disso, como o sistema (1) é

linear, a solução está definida para todo $t \in (-2, 2)$, ou seja, podemos tomar $\delta = 2$.

Pelo Teorema de dependência diferenciável das trajetórias de um campo vetorial com respeito às condições iniciais, a aplicação $\varphi : (-2, 2) \times \mathbb{R}^n \times B_{\varepsilon/2}(0) \rightarrow \mathbb{R}^n \times T_p M \times T_p M$, tal que $t \mapsto \varphi(t, y, v) = (\phi(t, y, v), tv, v)$ é a única trajetória de F com $\varphi(0, y, v) = (y, 0, v)$, é de classe C^∞ .

Assim, o campo \tilde{y} em $W = \exp_p(B_{\varepsilon/2}(0))$, dado por

$$\tilde{y}(q) = \sum_{j=1}^n \phi_j(1, y, (\exp_p)^{-1}q) \frac{\partial}{\partial x_j}(q), \quad q \in W,$$

é um campo diferenciável, obtido transportando $\bar{y} = \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial}{\partial x_j}(p)$ paralelamente ao longo das geodésicas radiais que partem do ponto p .

Definição 1. Se $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ é uma base ortonormal de T_pM , dizemos que $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ é um *referencial geodésico local em p* , onde $\tilde{e}_i(q) = \sum_{j=1}^n \phi_j(1, e_i^0(p), (\exp_p)^{-1}(q)) e_i^0(p)$ e $e_i^0(p)$ é o vetor em \mathbb{R}^n cujas coordenadas canônicas são iguais às do vetor $e_i(p)$ na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$ de T_pM , $i = 1, \dots, n$.

Observe que, como \tilde{e}_i , $i = 1, \dots, n$, são obtidos transportando $e_i(p)$ paralelamente ao longo das geodésicas radiais que partem do ponto p , $\{\tilde{e}_1(q), \dots, \tilde{e}_n(q)\}$ é uma base ortonormal de T_qM para todo $q \in W$, e para todos $i, j = 1, \dots, n$, $\nabla_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j(p) = \frac{D(\tilde{e}_j \circ \gamma_i)}{dt}(0) = 0$, onde $\gamma_i : (-2, 2) \rightarrow M$ é a geodésica em M tal que $\gamma_i(0) = p$ e $\gamma_i'(0) = e_i(p)$.

Apêndice B

Fórmulas da Primeira e Segunda Variação da Área

A demonstração da fórmula da primeira variação da área, que faremos a seguir, foi retirada do livro [19]. Mas a fórmula da segunda variação feita em [19] para hipersuperfícies mínimas teve de ser adaptada para hipersuperfícies com curvatura média constante, tornando-se muito longa para ser inserida no capítulo 4.

Teorema 1. (Fórmula da Primeira Variação da Área)

$$\left. \frac{d}{dt} A(t) \right|_{t=0} = - \int_M nHf \, dM,$$

onde H é a curvatura média da imersão x e $f = \langle E, N \rangle$.

Demonstração. Utilizando a definição de integral, sendo M compacta e a variação X diferenciável, é possível provar que:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{d}{dt} \int_M dM_t = \int_M \frac{d}{dt} (dM_t).$$

Basta, então, mostrar que $\left. \frac{d}{dt} (dM_t) \right|_{t=0} = -nHf \, dM + d\Omega$, onde Ω é uma $(n-1)$ -forma em M tal que $\Omega|_{\partial M} = 0$.

Seja $p \in M$ e seja e_1, \dots, e_n um referencial local positivo geodésico em p definido numa vizinhança

U de p . Então $dM(e_1, \dots, e_n)(q) = 1$ para todo $q \in U$ e $\nabla_{e_i} e_i(p) = (\bar{\nabla}_{x^*(e_j)} x^*(e_i))^T(p) = 0$, para todos $i, j = 1, \dots, n$, onde $x^* = dx$.

Se w_1, \dots, w_n são as 1-formas locais duais de e_1, \dots, e_n , a métrica induzida por x_t é dada por:

$$ds_t^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(t) w_i \otimes w_j,$$

onde $g_{i,j}(t) = \langle dx_t(e_i), dx_t(e_j) \rangle$ e $w_i \otimes w_j(X, Y) = w_i(X)w_j(Y)$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$.

Afirmção 1. *Seja dM_t a forma elemento de volume na métrica induzida por x_t . Então $dM_t = \sqrt{g(t)} dM$, onde $g(t) = \det g_{i,j}(t)$, para todo $t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

De fato, como dM_t e dM pertencem a $\mathcal{A}_n(T_p M)$, onde $\mathcal{A}_n(T_p M)$ é o espaço das aplicações n -lineares alternadas de $T_p M$, e $\dim \mathcal{A}_n(T_p M) = 1$, segue que, para cada $t \in I$, existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tal que $dM_t = \lambda(t) dM$. Como $dM(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, $\lambda(t) = dM_t(e_1, \dots, e_n)$.

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal positiva de $T_q M$, $q \in M$, na métrica induzida por x_t . Então, $e_i = \sum_{j=1}^n \langle e_i, v_j \rangle_t v_j$ para todo $i = 1, \dots, n$, e, portanto, $dM_t(e_1, \dots, e_n) = \det A(t)$, onde

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1, v_1 \rangle_t & \cdots & \langle e_n, v_1 \rangle_t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_1, v_n \rangle_t & \cdots & \langle e_n, v_n \rangle_t \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$g_{i,j}(t) = \langle x_t^*(e_i), x_t^*(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle_t = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle e_i, v_k \rangle_t v_k, \sum_{l=1}^n \langle e_j, v_l \rangle_t v_l \right\rangle_t = \sum_{k=1}^n \langle e_i, v_k \rangle_t \langle e_j, v_k \rangle_t,$$

ou seja, $g_{i,j}(t) = (A^T A)_{i,j}$. Logo $(\det A(t))^2 = \det(A^T A)(t) = \det(g_{i,j}(t))$. Como $\det A > 0$, pois $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ são bases positivas, $\det A(t) = \sqrt{g(t)}$, ou seja, $dM_t = \sqrt{g(t)} dM$.

Isto prova a afirmação 1.

Assim,

$$\left. \frac{d}{dt} dM_t \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \sqrt{g(t)} \right|_{t=0} dM = \frac{1}{2} \frac{dg}{dt}(0) dM,$$

já que $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ para todos $i, j = 1, \dots, n$. Como, pelo Lema (4.1), $\frac{dg}{dt}(0) = \sum_{k=1}^n \frac{dg_{kk}}{dt}(0)$, temos

$$\left. \frac{d}{dt} (dM_t) \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} g_{kk}(0) dM. \quad (1)$$

Vamos estender e_1, \dots, e_n ao produto $I \times U$ da seguinte maneira: $\bar{e}_k(t, p) = (0, e_k(p))$.

Afirmção 2. $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \bar{e}_k \right] = 0$.

Sejam $(t_0, q) \in I \times U$, $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow I \times U$ a curva diferenciável dada por $\gamma(s) = (s + t_0, q)$, $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ uma curva diferenciável tal que $\varphi(0) = q$ e $\varphi'(0) = e_k(q)$, e $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow I \times M$ a curva diferenciável $\beta(s) = (t_0, \varphi(s))$. Então, $\beta(0) = (t_0, q)$ e $\beta'(0) = (0, e_k(q)) = \bar{e}_k(t_0, q)$.

Assim, $\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \bar{e}_k \right) (t_0, q) = (0, 0)$ e $\left(\bar{\nabla}_{\bar{e}_k} \frac{\partial}{\partial t} \right) (t_0, q) = (0, 0)$, pois:

$$\left. \frac{d}{ds} (\bar{e}_k \circ \gamma(s)) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (\bar{e}_k(\gamma(s))) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (0, e_k(q)) \right|_{s=0} = (0, 0).$$

e

$$\left. \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial}{\partial t} \circ \beta(s) \right) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial}{\partial t} (t_0, \varphi(s)) \right) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (0, 0) \right|_{s=0} = (0, 0).$$

Mostrando a afirmação 2.

Denotemos por $\tilde{E}, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ as imagens por X dos campos de vetores $\frac{\partial}{\partial t}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, ou seja,

$$\tilde{E}(X(t, q)) = dX(t, q) \left(\frac{\partial}{\partial t} (t, q) \right) \quad \text{e} \quad \tilde{e}_k(X(t, q)) = dX(t, q) (\bar{e}_k(t, q)).$$

Então, pela afirmação 2 e o Lema 1.3,

$$[\tilde{E}, \tilde{e}_k] = dX \left[\frac{\partial}{\partial t}, \bar{e}_k \right] = 0. \quad (2)$$

Em particular, em $t = 0$,

$$[E, x^*(e_k)] = 0. \quad (3)$$

Afirmção 3. $g_{kk}(t) = \langle x_t^*(e_k), x_t^*(e_k) \rangle = \langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle$ em $X(t, q)$.

Sejam $(t, q) \in I \times U$, $\varphi : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ uma curva diferenciável tal que $\varphi(0) = q$ e $\varphi'(0) = e_k(q)$, e $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow I \times M$ a curva diferenciável dada por $\gamma(s) = (t, \varphi(s))$. Então, $\gamma(0) = (t, q)$ e $\gamma'(0) = \bar{e}_k(t, q)$. Assim,

$$\tilde{e}_k(X(t, q)) = dX(t, q) \bar{e}_k(t, q) = \left. \frac{d}{ds}(X \circ \gamma(s)) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} x_t(\varphi(s)) \right|_{s=0} = x_t^*(e_k(q)).$$

Logo, $\langle x_t^*(e_k), x_t^*(e_k) \rangle = \langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle$ em $X(t, q)$.

Concluindo a afirmação 3.

Afirmação 4. $\frac{dg_{kk}}{dt}(t) = \tilde{E}\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle$.

De fato, sejam $(t_0, q) \in I \times U$, $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow I \times M$ a curva diferenciável $\gamma(t) = (t + t_0, q)$, e $\lambda = X \circ \gamma$. Então, $\gamma(0) = (t_0, q)$, $\gamma'(0) = (1, 0) = \frac{\partial}{\partial t}(t_0, q)$, $\lambda(0) = X(\gamma(0)) = X(t_0, q)$, e

$$\lambda'(0) = dX(t_0, q) (\gamma'(0)) = dX(t_0, q) \left(\frac{\partial}{\partial t}(t_0, q) \right) = \tilde{E}(X(t_0, q)).$$

Assim,

$$\tilde{E}\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle_{X(t_0, q)} = \left. \frac{d}{dt}(\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle \circ \lambda(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle \circ X(t + t_0, q)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle_{X(t, q)}) \right|_{t=t_0}.$$

Portanto, pela afirmação 3, $\tilde{E}\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle_{X(t_0, q)} = \frac{d}{dt}g_{kk}(t_0)$, Como $(t_0, q) \in I \times U$ é arbitrário, $\frac{d}{dt}g_{kk}(t) = \tilde{E}\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle$, para todo $t \in I$.

Concluimos, assim, a afirmação 4.

Por (2) e pela afirmação 4,

$$\frac{dg_{kk}}{dt}(t) = \tilde{E}\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle = 2\langle \bar{\nabla}_{\tilde{E}} \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle = 2\langle \bar{\nabla}_{\tilde{e}_k} \tilde{E}, \tilde{e}_k \rangle = 2[\tilde{e}_k \langle \tilde{E}, \tilde{e}_k \rangle - \langle \tilde{E}, \bar{\nabla}_{\tilde{e}_k} \tilde{e}_k \rangle].$$

Como e_1, \dots, e_n é um referencial geodésico em p ,

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_{\tilde{e}_k} \tilde{e}_k)(X(0, p)) &= (\bar{\nabla}_{\tilde{e}_k} \tilde{e}_k)^T(X(0, p)) + (\bar{\nabla}_{\tilde{e}_k} \tilde{e}_k)^N(X(0, p)) \\ &= (\bar{\nabla}_{x^*(e_k)} x^*(e_k))^T(x(p)) + (\bar{\nabla}_{x^*(e_k)} x^*(e_k))^N(x(p)) \\ &= (\bar{\nabla}_{e_k} e_k)^N(p), \end{aligned}$$

onde estamos identificando e_k com $x^*(e_k)$.

Logo, sendo $n\bar{H}(p) = \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_k} e_k)^N(p)$ o vetor curvatura média da imersão x no ponto p , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{d}{dt} g_{kk}(0) &= - \left\langle E, \sum_{k=1}^n (\bar{\nabla}_{e_k} e_k)^N \right\rangle (p) + \sum_{k=1}^n \tilde{e}_k \left\langle \tilde{E}, \tilde{e}_k \right\rangle (X(0, p)) \\ &= - \langle E, n\bar{H} \rangle (p) + \sum_{k=1}^n e_k \langle E, e_k \rangle (p), \end{aligned} \quad (4)$$

pois $\tilde{e}_k \langle \tilde{E}, \tilde{e}_k \rangle (X(0, q)) = e_k \langle E, e_k \rangle (q)$ para todo $q \in M$.

Seja $\Omega = i(E^T) dM$ o produto interior de E^T por dM . Então, pelo Teorema 3.12, $d\Omega = (\operatorname{div} E^T) dM$, e portanto,

$$d\Omega_p(e_1, \dots, e_n) = (\operatorname{div} E^T)(p) = \sum_{k=1}^n e_k \langle E, e_k \rangle (p).$$

Logo, por (1) e (4), em p ,

$$\left. \frac{d}{dt} (dM_t) \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{dg_{kk}}{dt} (0) dM = - \langle E, n\bar{H} \rangle dM + d\Omega.$$

Como p é arbitrário, $\left. \frac{d}{dt} (dM_t) \right|_{t=0} = - \langle E, n\bar{H} \rangle dM + d\Omega$ em M . Além disso, como $E(q) = 0$ para todo $q \in \partial M$, $\Omega|_{\partial M} = 0$.

Assim, pelo Teorema de Stokes,

$$\frac{d}{dt} A(0) = \int_M \left. \frac{d}{dt} dM_t \right|_{t=0} = - \int_M \langle E, n\bar{H} \rangle dM + \int_M d\Omega = - \int_M \langle E, n\bar{H} \rangle dM = - \int_M n f H dM,$$

onde $H = \langle \bar{H}, N \rangle$ é a curvatura média da imersão x e $f = \langle E, N \rangle$. □

Teorema 2. (Fórmula da Segunda Variação)

Seja $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H e seja X uma variação de x . Então $J''(0)$ depende somente de f e é dada por

$$J''(0)f = \int_M (-f \Delta f - (\bar{R} + \|B\|^2) f^2) dM,$$

onde Δ é o Laplaciano de M na métrica induzida, $\|B\|$ é a norma da segunda forma fundamental de x , $\bar{R} = n \overline{\operatorname{Ricc}}(N)$ e $\overline{\operatorname{Ricc}}(N)$ é a curvatura de Ricci de \bar{M} na direção N .

Demonstração. Sejam $p \in M$, e_1, \dots, e_n um referencial local positivo geodésico em p , definido num aberto $U \subset M$, e, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, seja N_t o campo unitário normal a x_t , tal que $\{dx_t(q)(e_1), \dots, dx_t(q)(e_n), N_t(q)\}$ é uma base positiva de $T_{x(q)}\overline{M}$, para todo $q \in x_t(U)$. Denotaremos N_0 por N .

Seja $g_{i,j}(t) = \langle x_t^*(e_i), x_t^*(e_j) \rangle$. Para simplificar a notação, denotaremos $x_t^*(e_j)$ por e_j e \tilde{E} por E , sempre que o significado for claro.

Afirmção 1. $n\overline{H}_t = \sum_{i,j=1}^n g^{i,j}(t)(\overline{\nabla}_{e_i}e_j)^N$, onde $G_t^{-1} = (g^{i,j}(t))$ é a inversa da matriz $G_t = (g_{i,j}(t))$.

De fato, sejam $q \in M$, $A_t : T_qM \rightarrow T_qM$ a aplicação linear auto-adjunta dada por

$$\langle A_t(x), y \rangle_t = \langle B_t(x, y), N_t \rangle,$$

onde $x, y \in T_qM$, e B_t é a segunda forma fundamental da imersão x_t .

Assim, se $A_t(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^t e_j$, e $B_t = (b_{ik}^t) = (\langle A_t(e_i), e_k \rangle_t)$, obtemos:

$$b_{ik}^t = \langle A_t(e_i), e_k \rangle_t = \sum_{j=1}^n a_{ij}^t \langle e_j, e_k \rangle_t = \sum_{j=1}^n a_{ij}^t g_{jk}(t) = (A_t G_t)_{ik}.$$

ou seja, $a_{ij}^t = (B_t G_t^{-1})_{ij}$. Logo,

$$\begin{aligned} nH_t = \text{tr } A_t &= \sum_{i=1}^n a_{ii}^t = \sum_{i=1}^n \langle A_t(e_i), e_i \rangle_t g^{ii}(t) \\ &= \sum_{j=1}^n g^{ij}(t) \langle B_t(e_j, e_i), N_t \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n g^{ij}(t) \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j - (\overline{\nabla}_{e_i} e_j)^T, N_t \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n g^{ij}(t) \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, N_t \rangle, \end{aligned} \tag{5}$$

isto é, $n\overline{H}_t = \sum_{i=1, j}^n g^{ij}(t)(\overline{\nabla}_{e_i}e_j)^N$ é o vetor curvatura média da imersão x_t com respeito ao vetor normal N_t .

Isto termina com a prova da afirmação 1.

Assim, por (5)

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial t} nH_t \right|_{t=0} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{i,j}}{dt}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle + \sum_{i,j=1}^n g^{i,j}(0) [E \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N_t \rangle] \Big|_{t=0} \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{i,j}}{dt}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle + \sum_{i,j=1}^n g^{i,j}(0) [\langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, \bar{\nabla}_E N_t \Big|_{t=0} \rangle] \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{i,j}}{dt}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle + \sum_{i=1}^n [\langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \bar{\nabla}_E N_t \Big|_{t=0} \rangle] . \tag{6}
 \end{aligned}$$

Passaremos agora a analisar cada parcela de (6) no ponto p .

Afirmção 2. $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \bar{\nabla}_E N_t \Big|_{t=0} \rangle(p) = 0$.

Com efeito, como $(\bar{\nabla}_{e_j} e_i)^T(p) = 0$ segue que $(\bar{\nabla}_{e_j} e_i)(p) = (\bar{\nabla}_{e_j} e_i)^N(p)$. Assim,

$$\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_j} e_i(p) = nH_0 N(p) . \tag{7}$$

Além disso, como $\langle N_t, N_t \rangle = 1$,

$$0 = E \langle N_t, N_t \rangle(p) \Big|_{t=0} = 2 \langle N, \bar{\nabla}_E N_t \Big|_{t=0} \rangle(p) . \tag{8}$$

Logo, por (7) e (8)

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \bar{\nabla}_E N_t \Big|_{t=0} \rangle(p) = \langle nH_0 N, \bar{\nabla}_E N_t \Big|_{t=0} \rangle(p) = 0 .$$

Isso verifica a afirmação 2.

Assim, em p ,

$$n \left. \frac{\partial H_t}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle . \tag{9}$$

Afirmção 3. $\sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = 2f \|B\|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n e_i(a_j) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle$ em p , onde a_j é a j -ésima coordenada da componente tangente do campo E com respeito a base $\{e_1, \dots, e_n\}$, ou seja, $E^T = \sum_{j=1}^n a_j e_j$.

Observemos, primeiro, que:

$$0 = \frac{d\delta_{ik}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n g^{ij}(t)g_{jk}(t)|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{dg^{ij}}{dt}(0) g_{jk}(0) + g^{ij}(0) \frac{dg_{jk}}{dt}(0) \right] = \frac{dg^{ik}}{dt}(0) + \frac{dg_{ik}}{dt}(0),$$

pois $g_{jk}(0) = \delta_{jk}$, e $g^{ij}(0) = \delta_{ij}$, para todos $i, j, k = 1, \dots, n$.

Logo, por (3),

$$\begin{aligned} \frac{dg^{ij}}{dt}(0) &= -\frac{dg_{ij}}{dt}(0) = -E\langle e_i, e_j \rangle = -[\langle \bar{\nabla}_E e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_E e_j \rangle] \\ &= -[\langle \bar{\nabla}_{e_i} E, e_j \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} E \rangle] \\ &= -[\langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, e_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^N, e_j \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} E^T \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} E^N \rangle]. \end{aligned} \quad (10)$$

Por outro lado, como $\langle E^N, e_j \rangle = 0$,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} E^N, e_j \rangle = -\langle E^N, \bar{\nabla}_{e_i} e_j \rangle = -f\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_j \rangle. \quad (11)$$

Assim, por (10) e (11), em p ,

$$\begin{aligned} \frac{dg^{ij}}{dt}(0) &= -[\langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, e_j \rangle - f\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_j \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} E^T \rangle - f\langle N, \bar{\nabla}_{e_j} e_i \rangle] \\ &= 2f\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_j \rangle - [\langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, e_j \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} E^T \rangle], \end{aligned}$$

pois $[e_i, e_j](p) = 0$.

Logo, em p ,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{i,j}}{dt}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle &= \sum_{i,j=1}^n [2f\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_j \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, e_j \rangle - \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} E^T \rangle] \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle \\ &= 2f \sum_{i,j=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle)^2 - \sum_{i,j=1}^n [\langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, e_j \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} E^T \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle] \\ &= 2f \sum_{i,j=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle)^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, e_j \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle \\ &= 2f\|B\|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, e_j \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $E^T = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ e $(\bar{\nabla}_{e_i} e_j)^T(p) = 0$, temos que, em p ,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} (a_k e_k), e_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_k, e_j \rangle + \sum_{k=1}^n e_i(a_k) \langle e_k, e_j \rangle = a_i(e_j).$$

Portanto, em p ,

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{d}{dt} g^{ij}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = 2f \|B\|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n e_i(a_j) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle$$

Afirmção 4. $-2f \sum_{i,j=1}^n e_i(a_j) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = 2f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle$ em p .

Como $\langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle$,

$$e_i \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = \sum_{j=1}^n e_i(a_j) \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \sum_{j=1}^n a_j \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \sum_{j=1}^n a_j \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle.$$

Além disso, sendo $(\bar{\nabla}_{e_i} e_j)(p) = (\bar{\nabla}_{e_i} e_j)^N(p)$ e $\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0$, temos que, em p ,

$$e_i \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = \sum_{j=1}^n e_i(a_j) \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \sum_{j=1}^n a_j \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^n e_i(a_j) \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = e_i \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle - \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle.$$

Portanto, como $\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle$, temos:

$$-2f \sum_{i,j=1}^n e_i(a_j) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = 2f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle.$$

Verificando a afirmação 4.

Das afirmações 3 e 4, segue que, em p ,

$$\left(\sum_{i,j=1}^n \frac{d}{dt} g^{ij}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle \right) f = 2f^2 \|B\|^2 + 2f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \quad (12)$$

Vamos agora analisar, em p , a segunda parcela $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle$, da igualdade:

$$n \frac{\partial H_t}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{d g^{ij}}{dt}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle.$$

Afirmção 5. $f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle = n f^2 \text{ Ricc}(N) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} E, E^N \rangle$

Com efeito, como $E^N = fN$ e $[E, e_i] = 0$, temos que

$$f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, E^N \rangle,$$

e

$$\bar{R}(E, e_i) e_i = \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_E e_i - \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(E, e_i) e_i, E^N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_E e_i, E^N \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E) e_i, E^N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_E e_i, E^N \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^N) e_i, E^N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_E e_i, E^N \rangle \\ &= f^2 \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, N) e_i, N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_E e_i, E^N \rangle \\ &= n f^2 \text{ Ricc}(N) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} E, E^N \rangle, \end{aligned}$$

pois $\bar{\nabla}_{e_i} E = \bar{\nabla}_E e_i$.

Concluindo a afirmação 5.

Então,

$$\begin{aligned} f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle &= n f^2 \text{ Ricc}(N) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle + \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E, E^N \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle, \\ &= n f^2 \text{ Ricc}(N) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle + \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E, E^N \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^N, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle, \end{aligned} \tag{13}$$

cujas parcelas serão analisadas abaixo.

Afirmção 6. $\sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E, E^N \rangle = \frac{1}{2} \Delta(f^2) + \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, E^N \rangle$ em p .

De fato, em p ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E, E^N \rangle - \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, E^N \rangle &= \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^N, E^N \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i (e_i \langle E^N, E^N \rangle) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i e_i (f^2) = \frac{1}{2} \Delta(f^2), \end{aligned}$$

pois e_1, \dots, e_n é um referencial geodésico em p .

O que mostra a afirmação 6.

Afirmção 7. $-\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^N, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle = -|\text{grad } f|^2 - f^2 \|B\|^2$ em p .

De fato, lembrando que $\bar{\nabla}_{e_i} N$ é um vetor tangente, temos que, em p ,

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^N, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle &= -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} f N, \bar{\nabla}_{e_i} f N \rangle = -\sum_{i=1}^n \langle f \bar{\nabla}_{e_i} N + e_i(f) N, f \bar{\nabla}_{e_i} N + e_i(f) N \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n e_i(f) e_i(f) - \sum_{i=1}^n f^2 \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= -|\text{grad } f|^2 - f^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle)^2 \\ &= -|\text{grad } f|^2 - f^2 \|B\|^2, \end{aligned}$$

pois $\bar{\nabla}_{e_i} N = \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle e_j$, e $\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_k, N \rangle$.

Afirmção 8. $-\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle = -\sum_{i=1}^n e_i(f) \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, N \rangle - f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle$.

De fato, como $E^N = fN$,

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle &= -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} f N \rangle = -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, f \bar{\nabla}_{e_i} N + e_i(f) N \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n f \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle - \sum_{i=1}^n e_i(f) \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, N \rangle, \end{aligned}$$

mostrando, assim, a afirmação 8.

Logo,

$$-\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle + 2f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle - e_i(f) \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, N \rangle,$$

onde $2f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle$ é a segunda parcela do segundo membro da igualdade (12).

Além disso, como $\langle N, E^T \rangle = 0$, temos $\langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, N \rangle = -\langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle$. Então,

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle + 2f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n f \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle + \sum_{i=1}^n e_i(f) \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(f \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle) - \sum_{i=1}^n f \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, E^N \rangle - \sum_{i=1}^n f \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Logo, por (9), (12), (13) e pelas afirmações 6, 7, segue que, em p ,

$$\begin{aligned} & f \left(\frac{\partial}{\partial t} nH_t \Big|_{t=0} \right) = \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt}(0) \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle \right) f + \left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle \right) f \\ &= 2f^2 \|B\|^2 + 2f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + nf^2 \operatorname{Ricc}(N) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \Delta(f^2) + \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, E^N \rangle - |\operatorname{grad} f|^2 - f^2 \|B\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, \bar{\nabla}_{e_i} E^N \rangle \quad (\text{por (14)}) \\ &= 2f^2 \|B\|^2 - \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, E^N \rangle - \sum_{i=1}^n f \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + nf^2 \operatorname{Ricc}(N) \\ &+ \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle + \frac{1}{2} \Delta(f^2) + \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} E^T, E^N \rangle - |\operatorname{grad} f|^2 - f^2 \|B\|^2 \\ &= f^2 \|B\|^2 + nf^2 \operatorname{Ricc}(N) + \frac{1}{2} \Delta(f^2) - |\operatorname{grad} f|^2 - \sum_{i=1}^n f \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Afirmção 9.

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T)e_i, E^N \rangle - \sum_{i=1}^n f \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = 0. \quad (16)$$

De fato, como $\langle N, e_j \rangle = 0$, $e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = -e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle$. Logo,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_j \rangle,$$

e, portanto, em p ,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle \quad (17)$$

já que $\bar{\nabla}_{e_i} e_j(p)$ é um vetor normal e $\bar{\nabla}_{e_i} N$ é um vetor tangente.

Por outro lado, como $\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle$, temos que:

$$e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = e_i \langle \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle.$$

Assim, em p ,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle. \quad (18)$$

Logo, de (17) e (18),

$$-\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle(p) = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle(p). \quad (19)$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T)e_i, E^N \rangle(p) &= \sum_{i,j=1}^n a_j f (\langle \bar{R}(e_i, e_j)e_i, N \rangle)(p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_j f (\langle \bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle(p) - \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle)(p), \end{aligned}$$

temos, por (19), que:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T)e_i, E^N \rangle(p) - \sum_{i=1}^n f \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_j f \langle \bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle(p) - \sum_{i,j=1}^n a_j f \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle(p) - \sum_{i,j=1}^n a_j f \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j f \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle(p). \end{aligned}$$

Sendo $\sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N = HN$, segue que $\left\langle \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle = H$ é constante.

Logo $e_j \left\langle \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle = 0$, e, portanto, $\left\langle \bar{\nabla}_{e_j} \left(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right), N \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \bar{\nabla}_{e_j} N \right\rangle = 0$.

Assim, $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle (p) = 0$, e, portanto,

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, E^T) e_i, E^N \rangle (p) - \sum_{i=1}^n f \langle E^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle (p) = 0.$$

Mostrando, assim, a afirmação 9.

Finalmente, por (15) e (16), segue que:

$$n \frac{\partial}{\partial t} H_t(0) f = f^2 \|B\|^2 + n f^2 \text{Ric}(N) - |\text{grad } f|^2 + \frac{1}{2} \Delta(f^2).$$

Logo,

$$J''(0) f = - \int_M n \frac{\partial}{\partial t} H_t(0) f dM = - \int_M \left(f^2 \|B\|^2 + n f^2 \text{Ric}(N) - |\text{grad } f|^2 + \frac{1}{2} \Delta(f^2) \right) dM.$$

Pelo Teorema de Stokes e pelo Teorema 3.12,

$$\frac{1}{2} \int_M \Delta f^2 dM = \frac{1}{2} \int_M \text{div}(\text{grad } f^2) dM = \int_M \text{div}(f \text{grad } f) dM = 0,$$

pois $f|_{\partial M} = 0$, já que $E^N = fN$ e $E|_{\partial M} = 0$.

Portanto, pelo corolário 3.14,

$$J''(0) f = \int_M (-f^2 \|B\|^2 - n f^2 \text{Ric}(N) - f \Delta f) dM = \int_M (-f \Delta f - (\bar{R} + \|B\|^2) f^2) dM,$$

onde $\bar{R} = n \text{Ric}(N)$. □

Apêndice C

Sobre a definição de estabilidade

Neste apêndice, daremos outra definição de estabilidade para hipersuperfícies compactas, com ou sem bordo, e mostraremos que esta definição é equivalente a dada no capítulo 4, apesar de ser aparentemente mais restritiva.

Definição 1. Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante e seja $D \subset M$ um domínio relativamente compacto com bordo ∂D diferenciável, podendo ser $\partial D \neq \emptyset$, se M é compacta sem bordo e $D = M$. O domínio D é estável se $A''(0) \geq 0$ para toda variação de $x|_D : D \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ que preserva volume. A imersão $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é *estável* se todo domínio $D \subset M$ relativamente compacto com bordo diferenciável ($\partial D = \emptyset$, se M é compacta e $D = M$) é estável.

Para mostrarmos que as definições são equivalentes, basta provarmos que se $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é estável segundo a definição dada no capítulo 4, então todo domínio $D \subset M$ relativamente compacto com bordo diferenciável é estável. Ou seja,

$$I_D(f, f) = \int_D [-f \Delta f - (\overline{R} + \|B\|^2) f^2] dM \geq 0 ,$$

para toda $f \in C^\infty(D)$ tal que $f|_{\partial D} = 0$ e $\int_D f dM = 0$, onde $I_D(f, f)$ é a forma quadrática da aplicação bilinear simétrica dada por:

$$I_D(f, g) = \int_D [-f \Delta g - (\overline{R} + \|B\|^2) fg] dM = \int_D (\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle - (\overline{R} + \|B\|^2) fg) dM ,$$

para todas $f, g \in C^\infty(D)$.

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ o produto interno em $C^\infty(M)$ definido por:

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle dM + \int_M fg dM, \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Então, existe uma constante real $B > 0$ tal que

$$|I(f, g)| \leq B \|f\|_1 \|g\|_1, \quad (1)$$

para todas $f, g \in C^\infty(M)$.

De fato, se $A = \max\{|\overline{R}(q) + \|B\|^2(q)|; q \in M\}$,

$$\begin{aligned} |I(f, g)| &\leq \int_M |\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle| dM + A \int_M |fg| dM \\ &\leq \int_M |\text{grad } f| |\text{grad } g| dM + A \int_M |f| |g| dM \\ &\leq \left(\int_M |\text{grad } f|^2 dM \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\text{grad } g|^2 dM \right)^{\frac{1}{2}} + A \left(\int_M |f|^2 dM \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |g|^2 dM \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_1 + A \|f\|_1 \|g\|_1 \\ &\leq B \|f\|_1 \|g\|_1, \end{aligned}$$

onde $B = 1 + A$.

Seja $f \in C^\infty(M)$ tal que $f|_{\partial D} = 0$ e $\int_D f dM = 0$. Por um resultado de Análise (ver [9], Lema 9), existe uma seqüência de funções $f_n \in C^\infty(D)$ tais que $\text{supp}(f_n) \subset D$ e $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Assim, definindo $\overline{f}_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $\overline{f}_n(p) = f_n(p)$, se $p \in D$, e $\overline{f}_n(p) = 0$, se $p \in M - D$, temos que $\overline{f}_n \in C^\infty(M)$ e $\overline{f}_n|_{\partial M} = 0$.

Seja $c_n = \int_M \overline{f}_n dM$. Então, $c_n \rightarrow 0$, pois $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ e

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \int_D f_n dM - \int_D f dM \right| \leq \int_D |f_n - f| dM \\ &\leq (\text{vol}(D))^{\frac{1}{2}} \left(\int_D |f_n - f|^2 dM \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\text{vol}(D)} \|f_n - f\|_1. \end{aligned}$$

Seja, agora, $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que $\text{supp } \psi \subset D$ e $\int_M \psi dM = 1$.

Então, tomando $g_n = \bar{f}_n - c_n \psi$, temos que $g_n \in C^\infty(M)$, $g_n|_{\partial M} = 0$ e $\int_M g_n dM = 0$. Além disso, $\|g_n - \bar{f}_n\|_1 \rightarrow 0$, pois $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ e $c_n \rightarrow 0$.

Logo, por (1), $I_D(g_n, g_n) \rightarrow I_D(f, f)$, pois,

$$\begin{aligned} |I_D(g_n, g_n) - I_D(f, f)| &= |I_D(g_n, g_n - f) - I_D(f - g_n, f)| \\ &\leq |I_D(g_n, g_n - f)| + |I_D(f - g_n, f)| \\ &\leq B(\|g_n\|_1 \|g_n - f\|_1 + \|f - g\|_1 \|f\|_1). \end{aligned}$$

Como estamos supondo $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ estável segundo a definição dada no capítulo 4, $I_D(g_n, g_n) = I_M(g_n, g_n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $I_D(f, f) \geq 0$. Assim provamos que D é estável.

Apêndice D

Campos de Killing e campos de Jacobi em variedades de curvatura média constante

Embora os resultados deste apêndice não sejam utilizados na demonstração do Teorema A, resolvemos incluí-los porque, além de serem interessantes, são importantes no restante do artigo [5], que não será abordado nesta tese.

Definição 1. Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sejam $p \in M$, $U \subset M$ uma vizinhança de p e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável tais que, para todo $q \in U$, a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$ (U e φ são dados pelo Teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias). X é chamado um *campo de Killing* se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\varphi_{t_0} : U \subset M \rightarrow M$ é uma isometria local.

Definimos a *derivada de Lie*, $L_X w$, de uma p -forma w com respeito a X do seguinte modo:

$$(L_X w)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (w(x_0) - (\varphi_{-t})^* w(x_0)),$$

onde $(\varphi_{-t})^* w(x_0)(v_1, \dots, v_p) = w(x_0)(d\varphi_{-t}(v_1), \dots, d\varphi_{-t}(v_p))$ para quaisquer $v_1, \dots, v_p \in T_{x_0} M$.

Proposição 2. X é um campo de Killing de M se, e somente se, $L_X g \equiv 0$, onde $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica de M .

Demonstração. Seja X um campo de Killing. Então $\varphi_t : U \rightarrow M$ é uma isometria local para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sejam $p \in U$ e $Y, Z \in T_p M$. Como

$$(\varphi_{-t})^* g(p)(Y, Z) = \langle d(\varphi_{-t})_p Y, d(\varphi_{-t})_p Z \rangle_{\varphi_{-t}(p)} = \langle Y, Z \rangle_p = g(p)(Y, Z),$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$L_X(g)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(p) - (\varphi_{-t})^* g(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(p) - g(p)) = 0.$$

Suponhamos agora que $\frac{d}{dt} (\langle d(\varphi_{-t})_p Y, d(\varphi_{-t})_p Z \rangle_{\varphi_{-t}(p)}) \Big|_{t=0} = 0$ para todo $p \in U$ e para quaisquer $Y, Z \in T_p M$. Tomemos $\tilde{Y} = d(\varphi_s)_p(Y)$, $\tilde{Z} = d(\varphi_s)_p(Z) \in T_{\tilde{p}} M$, onde $\tilde{p} = \varphi(s, p)$, e $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Assim, por hipótese, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\frac{d}{dt} (\langle d(\varphi_{-t})_{\varphi_s(p)} (d(\varphi_s)_p Y), d(\varphi_{-t})_{\varphi_s(p)} (d(\varphi_s)_p Z) \rangle_{\varphi(s-t, p)}) \Big|_{t=0} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} (\langle d(\varphi_{s-t})_p Y, d(\varphi_{s-t})_p Z \rangle_{\varphi(s-t, p)}) \Big|_{t=0} = 0,$$

Logo, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\frac{d}{du} (\langle d(\varphi_u)_p Y, d(\varphi_u)_p Z \rangle_{\varphi(u, p)}) \Big|_{u=s} = 0.$$

Então $\langle d(\varphi_u)_p Y, d(\varphi_u)_p Z \rangle_{\varphi(u, p)}$ é constante em $(-\varepsilon, \varepsilon)$, e portanto,

$$\langle d(\varphi_u)_p Y, d(\varphi_u)_p Z \rangle_{\varphi(u, p)} = \langle Y, Z \rangle_p.$$

Daí decorre que $\varphi_u : U \rightarrow M$ é uma isometria local para todo $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, isto é, X é um campo de Killing. □

Proposição 3. X é um campo de Killing se e somente se,

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, Z \rangle + \langle \bar{\nabla}_Z X, Y \rangle = 0,$$

quaisquer que sejam $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Basta mostrar que, para todo $p \in M$,

$$L_X(g)(p)(Y, Z) = -\langle \bar{\nabla}_Y X, Z \rangle(p) - \langle Y, \bar{\nabla}_Z X \rangle(p).$$

Sejam $p \in M$, $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ uma curva diferenciável tal que $\lambda(0) = p$, $\lambda'(0) = Y(p)$ e $\mu : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ uma curva diferenciável tal que $\mu(0) = p$, $\mu'(0) = Z(p)$. Assim,

$$d(\varphi_{-t})_p Y(p) = \left. \frac{d}{ds} (\varphi_{-t}(\lambda(s))) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (\varphi(-t, \lambda(s))) \right|_{s=0},$$

$$d(\varphi_{-t})_p Z(p) = \left. \frac{d}{ds} (\varphi_{-t}(\mu(s))) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (\varphi(-t, \mu(s))) \right|_{s=0}.$$

Consideremos as superfícies parametrizadas $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ e $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$, dadas por: $f(t, s) = \varphi(-t, \lambda(s))$ e $g(t, s) = \varphi(-t, \mu(s))$. Então,

$$\begin{aligned} (L_X g)(p)(Y(p), Z(p)) &= \left. \frac{d}{dt} \langle d(\varphi_{-t})_p Y(p), d(\varphi_{-t})_p Z(p) \rangle \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left\langle \left. \frac{d\varphi}{ds}(-t, \lambda(s)) \right|_{s=0}, \left. \frac{d\varphi}{ds}(-t, \mu(s)) \right|_{s=0} \right\rangle \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0), \frac{\partial g}{\partial s}(t, 0) \right\rangle \right|_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) \right), \frac{\partial g}{\partial s}(t, 0) \right\rangle \Big|_{t=0} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0), \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial s}(t, 0) \right) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)(0, 0), \frac{\partial g}{\partial s}(0, 0) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0), \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial s} \right)(0, 0) \right\rangle. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 1.12,

$$(L_X g)(p)(Y(p), Z(p)) = \left\langle \frac{D}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) \right), \frac{\partial g}{\partial s}(0, 0) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0), \frac{D}{ds} \left(\frac{\partial g}{\partial t}(0, 0) \right) \right\rangle.$$

Como $f(t, s) = \varphi(-t, \lambda(s))$, temos $\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = -X(\varphi(-t, \lambda(s)))$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, s) = -X(\varphi(0, \lambda(s))) = -X(\lambda(s)).$$

Assim,

$$\left. \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(0, s) \right|_{s=0} = - \left. \frac{D}{ds} X(\lambda(s)) \right|_{s=0} = -\bar{\nabla}_{\lambda'(0)} X(p) = -(\bar{\nabla}_Y X)(p).$$

De modo análogo, $\frac{D}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial t}(0, 0) = -(\bar{\nabla}_Z X)(p)$. Além disso, como $f(0, s) = \lambda(s)$ e $g(0, s) = \mu(s)$, temos $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \lambda'(0) = Y(p)$ e $\frac{\partial g}{\partial s}(0, 0) = \mu'(0) = Z(p)$.

Portanto, $(L_X g)(p)(Y(p), Z(p)) = -\langle \bar{\nabla}_Y X, Z \rangle(p) - \langle \bar{\nabla}_Z X, Y \rangle(p)$. \square

Proposição 4. Seja $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante e W um campo vetorial de Killing em \bar{M} . Então $f = \langle W, N \rangle$ satisfaz a equação:

$$\Delta f + (\bar{R} + \|B\|^2)f = 0.$$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e e_1, \dots, e_n um referencial geodésico em p . Então, pelo Lema 3.4,

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n e_i(e_i \langle W, N \rangle)(p) = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} W, N \rangle(p) + 2 \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) + \sum_{i=1}^n \langle W, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p).$$

Como W é um campo de Killing, temos, pela Proposição 3, que $\langle \bar{\nabla}_{e_i} W, e_j \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_j} W, e_i \rangle$ e $\langle \bar{\nabla}_{e_i} W, e_i \rangle = 0$. Logo,

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) = \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W, e_j \rangle \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} W, N \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0, \quad (1)$$

pois $\langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} N \rangle$ e $\bar{\nabla}_{e_i} N$ é um vetor tangente. Assim,

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} W, N \rangle(p) + \sum_{i=1}^n \langle W^N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p).$$

Sendo $W^N = fN$, temos, pelo Lema 4.16, que

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} W, N \rangle(p) - f \|B\|^2 + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p).$$

Por outro lado, como $\langle \bar{\nabla}_{e_i} W, N \rangle = -\langle \bar{\nabla}_N W, e_i \rangle$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} W, N \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_N W, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle.$$

Por (1) e pelo fato de que $\langle \bar{\nabla}_N W, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle(p) = 0$, pois $\bar{\nabla}_{e_i} e_i(p)$ é normal e $\langle \bar{\nabla}_N W, N \rangle = 0$, segue que:

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} W, N \rangle(p) = - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W, e_i \rangle(p).$$

Logo, em p ,

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle - f \|B\|^2 \\
 &= -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W^T, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle - f \|B\|^2 \\
 &= -f \|B\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, N) e_i, W^N \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{e_i} W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{[e_i, N]} W^N, e_i \rangle \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W^T, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\
 &= -f \|B\|^2 - \bar{R}f - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{e_i} W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{[e_i, N]} W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W^T, e_i \rangle \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle.
 \end{aligned}$$

Resta, então, provar que:

$$-\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{e_i} W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{[e_i, N]} W^N, e_i \rangle(p) - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W^T, e_i \rangle(p) + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) = 0.$$

Lembrando que $\langle \bar{\nabla}_{e_i} W, e_i \rangle = 0$, segue que $\langle \bar{\nabla}_{e_i} W^N, e_i \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} W^T, e_i \rangle$. Portanto,

$$\langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{e_i} W^N, e_i \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^N, \bar{\nabla}_N e_i \rangle = -\langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{e_i} W^T, e_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^T, \bar{\nabla}_N e_i \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 &-\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{e_i} W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{[e_i, N]} W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W^T, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{e_i} W^T, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^T, \bar{\nabla}_N e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^N, \bar{\nabla}_N e_i \rangle \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{[e_i, N]} W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W^T, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Mas, como, em p ,

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^N, \bar{\nabla}_N e_i \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^N, [N, e_i] \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\
 &= -\langle \bar{\nabla}_{e_i} W^T, [N, e_i] \rangle - \langle \bar{\nabla}_{[N, e_i]} W^N, e_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_{[N, e_i]} W^T, e_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle,
 \end{aligned}$$

pois

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} W, [N, e_i] \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{[N, e_i]} W, e_i \rangle \quad \text{e} \quad \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} W^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p),$$

obtemos que a expressão (2), em p , é igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{e_i} W^T, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^T, \bar{\nabla}_N e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^T, [N, e_i] \rangle \\ & - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{[N, e_i]} W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{[N, e_i]} W^T, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W^T, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ & - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{[e_i, N]} W^N, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W^T, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ & = \sum_{i=1}^n (\langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{e_i} W^T, e_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_{[N, e_i]} W^T, e_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_N W^T, e_i \rangle) + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ & = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, N) W^T, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle. \end{aligned}$$

Sendo $W^T = \sum_{j=1}^n \langle W, e_j \rangle e_j$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, N) W^T, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle W^T, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle W, e_j \rangle \langle R(e_i, N) e_j, e_i \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle W, e_j \rangle \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle W, e_j \rangle \langle R(e_j, e_i) e_i, N \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle W, e_j \rangle \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle. \end{aligned}$$

Logo, como

$$\langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} e_i \rangle(p),$$

por (4.6) do Lema 4.16, e $[e_i, e_j](p) = 0$, temos que, em p ,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \langle W, e_j \rangle \langle R(e_j, e_i) e_i, N \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle W, e_j \rangle \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ & = \sum_{i,j=1}^n \langle W, e_j \rangle (\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[e_j, e_i]} e_i, N \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle) \\ & = -\sum_{i,j=1}^n \langle W, e_j \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle = -\sum_{j=1}^n \left\langle W, e_j \left\langle \bar{\nabla}_{e_j} \left(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right), N \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\left\langle \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle = H$ é constante, e, portanto,

$$\left\langle \bar{\nabla}_{e_j} \left(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right), N \right\rangle (p) = - \left\langle \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \bar{\nabla}_{e_j} N \right\rangle (p) = 0,$$

pois $\bar{\nabla}_{e_i} e_i(p)$ é um vetor normal e $\bar{\nabla}_{e_j} N$ é tangente.

Assim, $\Delta f(p) = -f\|B\|^2(p) - \bar{R}f(p)$, e pela arbitrariedade de p , $\Delta f + f\|B\|^2 + \bar{R}f = 0$ em M . \square

Sejam M^n uma variedade compacta sem bordo e $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão para as quais existem uma variedade compacta N^{n+1} e uma imersão $y : N \rightarrow \bar{M}$ satisfazendo $\partial N = M$ e $y|_M = x$. Neste caso, se W é um campo de Killing de \bar{M} e $f = \langle W, N \rangle$, temos, pelo Teorema da divergência (corolário 3.13), que

$$\int_M f dM = \int_{\partial N} f dM = \int_{\partial N} \langle W, N \rangle dM = \int_N \operatorname{div} W dN = 0,$$

pois $\operatorname{div} W = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} W, e_i \rangle = 0$.

Se, além disso, M é uma hipersuperfície com curvatura média constante tal que $\bar{R} + \|B\|^2 = \lambda$ é constante, então λ é um valor próprio do Laplaciano de M , desde que exista um campo de Killing em \bar{M} que não seja tangente a M em todos os pontos. Neste caso, temos o seguinte critério de estabilidade.

Proposição 5. Sejam M uma variedade compacta sem bordo e $x : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão satisfazendo as condições acima. Então M é estável se, e somente se, $\lambda = \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro valor próprio não-nulo do Laplaciano de M .

Demonstração. Seja W um campo de Killing em \bar{M} que não é tangente a M em todos os pontos. Primeiro observemos que $\lambda \neq 0$, pois, caso contrário, $\Delta f = 0$, e portanto, pelo corolário 3.15, a função $f = \langle W, N \rangle$ seria identicamente nula, já que $\int_M f dM = 0$. Uma contradição, pois W não é um campo tangente a M . Então $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda > \lambda_1$.

Se $\lambda = \lambda_1$, temos, pelo Lema 3.18, que,

$$I(g, g) = \int_M (-g\Delta g - \lambda g^2) dM = \int_M (|\operatorname{grad} g|^2 - \lambda g^2) dM \geq (\lambda_1 - \lambda) \int_M g^2 dM = 0,$$

para toda $g \in \mathfrak{F}$. Logo M é estável.

No caso em que $\lambda > \lambda_1$, seja f uma função própria do Laplaciano associada ao valor próprio λ_1 .

Então, $f \in \mathfrak{F}$ e $I(f, f) = (\lambda_1 - \lambda) \int_M f^2 dM < 0$. Portanto, M não é estável. \square

Referências Bibliográficas

- [1] S. AGMON. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand, (1965).
- [2] H. ALENCAR E M. DO CARMO. *Hypersurfaces with constant mean curvature in space forms*. An. Acad. Bras. Ciênc. **66**, (1994) 265–274.
- [3] A. D. ALEXANDROV. *A characteristic property of spheres*. Annali di Matematica. (1962) 303–315.
- [4] J. L. BARBOSA E M. DO CARMO. *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*. Math. Zeitschrift. **185**, (1984) 339–353.
- [5] J. L. BARBOSA, M. DO CARMO E J. ESCHENBURG. *Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds*. Math. Zeitschrift. **197**, (1988) 123–138.
- [6] P. BERARD E W. SANTOS. *Curvature estimates and stability properties of CMC-submanifolds in space forms*. Matematica Contemporanea, Brasil, v. 17, p. 77–98, (2000).
- [7] M. BERGER, P. GAUDUCHON E E. MAZET. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. Lecture Notes in Mathematics. **194**, Springer-Verlag (1971).
- [8] O. BOLZA. *Lectures on the Calculus of Variations*. Chelsea Pub. Co., New York. (1973)
- [9] F. BROWDER. *On the spectral theory of elliptic differential operators I*. Math. Annales. **142**, (1961) 22–130.
- [10] M. DO CARMO. *Differential Forms and Applications*. Universitext, Springer-Verlag, New York (1994).

- [11] M. DO CARMO. *Geometria Riemanniana*. 3ª Ed. Projeto Euclides, IMPA (2005).
- [12] M. DO CARMO E C. K. PENG. *Stable complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 are planes*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **1**, 903–906 (1979).
- [13] D. FISCHER-COLBRIE E R. SCHOEN. *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*. Comm. Pure Appl. Math. **35**, 199–211 (1980).
- [14] K. FRENSEL. *Stable complete surfaces with constant mean curvature*. Bol. Soc. Bras. Mat. **27**, 129–144 (1996).
- [15] H. FRID. *O teorema do índice de Morse*. Tese de Mestrado. IMPA. (1982).
- [16] W. Y. HSIANG, Z. H. TENG E W. YU. *New examples of constant mean curvature immersions of $(2k - 1)$ -spheres into Euclidean $2k$ -space*. Ann. Math. **117**, 609–625 (1983).
- [17] H. HOPF. *Lectures on Differential Geometry in the Large*. Lecture Notes in Mathematics. **1000**, Springer-Verlag (1983).
- [18] K. KENMOTSU. *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*. Tôhoku Math J. **32**, 147–153 (1980).
- [19] B. LAWSON. *Lectures on Minimal Submanifolds*, Vol. I. Publish or Perish Inc., Berkeley (1980).
- [20] E. LIMA. *Curso de Análise, vol. II, 8a. Ed., Projeto Euclides, IMPA (2005)*.
- [21] E. LIMA. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, IMPA (1977).
- [22] F. LOPEZ E A. ROS. *Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces*. Coment. Math. Helvetici. **64**, (1989) 34–43.
- [23] A. V. POGORELOV. *On the stability of minimal surfaces*. Soviet Math. Dokl. **24**, (1981) 274–276.
- [24] M. E. RODRIGUES. *A geometria das transformações de Möbius de \mathbb{R}^n* . Tese de Mestrado. Instituto de Matemática–UFF. (2000).

- [25] Y. SHEN E X. H. ZHU. *On stable complete minimal hypersurfaces in \mathbb{R}^{n+1}* . Amer. J. Math. **120**, (1998) 103–116.
- [26] E. SCHMIDT. *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im Hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionszahl*. Math. Zeitschrift. **49**, (1943/44).
- [27] R. SCHOEN. *Estimates for stable minimal surfaces in three dimensional manifolds*. Seminar on minimal submanifolds. Ed. E. Bombieri. Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press. (1983).
- [28] A. M. SILVEIRA. *Stable complete surfaces with constant mean curvature*. Math. Ann. **277**, 629–638 (1987).
- [29] M. SPIVAK. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. IV. 2^a Ed. Publish or Perish Inc., Houston (1979).
- [30] J. THAYER. *Operadores auto-adjuntos e equações diferenciais parciais*. Projeto Euclides, IMPA (1987).
- [31] H. WENTE. *Counter-example to the Hopf conjecture*. Pac. J. Math. **121**, 193–244 (1986).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)