

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DO  
PROBLEMA INVERSO DE LOCALIZAÇÃO DE DANOS EM  
ESTRUTURAS APORTICADAS**

**MARIANA MARTINO CALDEIRA**

Luciano Mendes Bezerra, PhD – Orientador  
Antônio A. Nepomuceno, Dr. Ing – Examinador Interno  
Selma Hissae Shimura da Nóbrega, DSc – Examinadora  
Externa

**BRASÍLIA – MAIO – 2009**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DO  
PROBLEMA INVERSO DE LOCALIZAÇÃO DE DANOS EM  
ESTRUTURAS APORTICADAS**

**MARIANA MARTINO CALDEIRA**

**ORIENTADOR: Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO  
CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: 007A/09**

**BRASÍLIA/DF: MAIO DE 2009**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DO  
PROBLEMA INVERSO DE LOCALIZAÇÃO DE DANOS EM  
ESTRUTURAS APORTICADAS**

**MARIANA MARTINO CALDEIRA**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE  
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof<sup>o</sup> Luciano Mendes Bezerra, PhD (ENC-UnB)  
(Orientador)**

---

**Prof<sup>o</sup> Antônio A. Nepomuceno, Dr. Ing (ENC-UnB)  
(Examinador Interno)**

---

**Prof<sup>a</sup>. Selma Hissae Shimura da Nóbrega, DSc  
(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, MAIO DE 2009**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**CALDEIRA, MARIANA MARTINO**

Procedimentos Numéricos para Solução do Problema Inverso de Localização de Danos em Estruturas Aporticadas [Distrito Federal] 2009

xxii, 264p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2009).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Problemas Inversos

2. Estruturas planas

3.Procedimentos numéricos

4. Identificação de Danos

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

CALDEIRA, M. M. (2009). Procedimentos Numéricos para Solução do Problema Inverso de Localização de Danos em Estruturas Aporticadas. Dissertação de Mestrado em Estrutura e Construção Civil, Publicação 007A/09, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 264p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTORA: Mariana Martino Caldeira.

TÍTULO: Procedimentos Numéricos para Solução de Problemas Inversos de Localização de Danos em Estruturas Aporticadas.

GRAU: Mestre

ANO: 2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Mariana Martino Caldeira.  
SMPW, Q.16, conj.1, lote 2, casa A  
70745-601 Brasília – DF – Brasil.  
mari\_martino@yahoo.com.br

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço especialmente à minha família: meus queridos pais, Joana Darc Martino Caldeira e Max Roberto Caldeira Nunes, minha irmã, Renata Martino Caldeira e, minha segunda mãe, Maria Lúcia Santos que desde o início de minha caminhada de estudo nunca mediram esforços para me apoiar.

A toda família Martino e Caldeira pelo apoio e torcida.

À minha tia Nazaré Martino de Sá pelas orações.

Aos meus amigos do PECC: Hamilton Lourenço Filho, Maurício Pina, Nelson Ortiz, Gustavo Dumaresq, Wellington Andrade e Marcus Alexandre Noronha de Brito que me ajudaram muito em vários momentos importantes ao longo desta pesquisa.

Ao professor Dr. Luciano Mendes Bezerra pela orientação de todo este trabalho.

A todos os professores e funcionários do PECC/UnB que de forma direta ou indireta colaboraram para que esta pesquisa fosse concluída.

*Mariana Martino Caldeira*

## DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho à minha família: meus pais, Max e Joana, minha irmã Renata e, minha segunda mãe, Lúcia, que são as pessoas mais importantes da minha vida.*

## **RESUMO**

### **PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DE LOCALIZAÇÃO DE DANOS EM ESTRUTURAS PLANAS**

**Autora: Mariana Martino Caldeira**

**Orientador: Luciano Mendes Bezerra, PhD**

**Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, Maio de 2009**

Existe atualmente um grande interesse da comunidade científica nas pesquisas baseadas em métodos numérico-computacionais para a identificação de danos em estruturas como forma de se obter algoritmos confiáveis para auxiliar na inspeção e no diagnóstico estrutural via exames não-destrutivos. A tarefa de inspeção estrutural é uma etapa primordial para a adequada manutenção que deve ser dada às estruturas, principalmente às infra-estruturas, tais como pontes, tubulações de petróleo e viadutos, entre outras. Os métodos numérico-computacionais destacam-se por suas peculiaridades de menor custo financeiro e tempo de execução quando comparados aos custos elevados de diagnósticos gerados por exames não-destrutivos convencionais, como raio-x ou ultra-som, para citar alguns. Entretanto, o problema de detecção de danos estruturais revela-se um problema inverso, mal-postulado, e que tem características de não-unicidade de solução e instabilidade numérica, entre outras dificuldades. Esta pesquisa aborda um aspecto do Problema Inverso de identificação de danos em estruturas que é a análise de assinaturas. Estas assinaturas são aqui analisadas e escritas em termos de características de rigidez, deslocamentos às cargas estáticas e modos de vibrar das estruturas. Neste trabalho, o desempenho destas assinaturas é amplamente explorado com o auxílio gráfico e dos Programas *Microsoft Excel* e *MATLAB 7.0* para as operações matriciais. Para se estudar o desempenho destas assinaturas, e a possibilidade de se localizar danos, estruturas simples, como vigas e pórticos são utilizadas nas aplicações reportadas neste trabalho. Os procedimentos numéricos estudados neste trabalho revelam algumas assinaturas com potencial eficaz na localização de danos em estruturas aperticadas planas.

## **ABSTRACT**

### **NUMERICAL PROCEDURES TO SOLVE THE INVERSE PROBLEMS OF LOCATING DAMAGES IN FRAME STRUCTURES**

**Author: Mariana Martino Caldeira**

**Supervisor: Luciano Mendes Bezerra, PhD**

**Pos-graduation Program In Structures and Civil Construction**

**Brasília, May de 2009**

Currently, there is a great interest in the scientific community in the researches on numerical and computational methods to identify damages in structures. Such research seeks reliable algorithms to assist in the structural inspection and diagnosis usually done through non-destructive examinations. The structural inspection is essential for the appropriate maintenance of structures, especially for infrastructure such as bridges, oil pipelines and viaducts, among others. Numerical and computational methods are cheap and fast compared to high cost and time consuming non-destructive examination such as X-rays or ultrasound, just to name a few. However, the problem of detecting damages in structures is an inverse problem, ill-posed problem, with characteristics such as non-uniqueness of solution and numerical instability, among other difficulties. This research is concerned with one aspect of the inverse problem of identifying damage in structures which is the examination of structural signatures. These signatures are here analyzed and written in terms of structures' stiffness, displacement response to static loads and vibration modes. In this work, the performance of these signatures is largely investigated with the aid of graphic analysis and *Microsoft Excel* and *MATLAB 7.0* programs for matrix operations. To study the performance of these signatures, and the ability to locate damage, simple structures such as beams and frames are used in the applications reported in this research. The numerical procedures studied in this research show that some structural signatures have efficient potential for damage determination in planar frames.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>2</b>
1.1 MOTIVAÇÃO .....	4
1.2 JUSTIFICATIVA.....	6
1.3 OBJETIVOS.....	7
1.4 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO .....	8
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>10</b>
2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA.....	10
2.2 PROBLEMAS INVERSOS (PI).....	12
2.3 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVERSOS .....	17
2.4 ASSINATURAS ESTRUTURAIS CLÁSSICAS .....	24
<b>3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLOGIA.....</b>	<b>28</b>
3.1 CONCEITOS DE ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS .....	28
3.1.1 <i>Matriz de Rigidez do Pórtico Plano</i> .....	31
3.1.2 <i>Matrizes de Massa</i> .....	41
3.2 VARIAÇÃO DE RIGIDEZ E DESLOCAMENTO EM ESTRUTURA COM DANO .....	43
3.2.1 <i>Cálculo do Deslocamento</i> .....	45
3.3 VARIAÇÃO DE FREQUÊNCIAS EM ESTRUTURA COM DANO .....	46
3.3.1 <i>Cálculo das Frequências</i> .....	50
3.4 METODOLOGIA .....	51
3.4.1 <i>Definição das Assinaturas Estruturais</i> .....	52
<b>4. APLICAÇÕES E RESULTADOS .....</b>	<b>57</b>
4.1 DEFINIÇÃO DAS SEÇÕES E MODELOS DAS ESTRUTURAS .....	57
4.2 DEFINIÇÃO DAS CARGAS APLICADAS .....	64
4.3 DEFINIÇÃO DAS LOCALIDADES DE APLICAÇÃO DE DANOS E CARGAS .....	65
4.3.1 <i>Utilização do SAP 2000</i> .....	66
4.4 VIGA EM BALANÇO.....	71
4.4.1 <i>Viga em Balanço para 3 Elementos</i> .....	71
4.4.2 <i>Viga em Balanço para 6 Elementos</i> .....	83
4.4.3 <i>Viga em Balanço para 10 Elementos</i> .....	100
4.5 VIGA BIENGASTADA .....	123
4.5.1 <i>Viga Biengastada para 3 Elementos</i> .....	123
4.5.2 <i>Viga Biengastada para 6 Elementos</i> .....	133
4.5.3 <i>Viga Biengastada para 10 Elementos</i> .....	150
4.6 PÓRTICO .....	173
4.6.1 <i>Pórtico para 3 Elementos</i> .....	173
4.6.2 <i>Pórtico para 6 Elementos</i> .....	183
4.7 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DAS FREQUÊNCIAS NAS ASSINATURAS .....	228
4.8 ANÁLISE DAS MATRIZES DE RIGIDEZ .....	233
<b>5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS.....</b>	<b>264</b>
5.1 CONCLUSÕES .....	264
5.2 SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS .....	268
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>269</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1– Estruturas de pequeno e grande porte de aplicação sócio-econômica: (a) Ponte de madeira que transpõe um córrego no estado do Espírito Santo, Brasil, ligando regiões, (b) Ponte JK em Brasília que atravessa o lago Paranoá, ligando bairros; (c) Estrutura espacial responsável por conectar a Terra ao espaço sideral. ....	2
Figura 1.2 - <i>Strain gage</i> instalado em turbina. ....	5
Figura 2.1 – Diagrama esquemático ilustrando o lançamento de um projétil. ....	11
Figura 2.2– Representação esquemática de problema direto (modificado - Ferreira, 2007) .....	12
Figura 2.3- Exemplo simplificado mostrando a diferenciação de problema direto e inverso. ....	15
Figura 2.4– Representação esquemática de problema inverso (modificado - Ferreira, 2007) .....	16
Figura 2.5 – Representação esquemática da transformação de problema mal-posto em problemas bem-posto.....	17
Figura 2.6 – Representação de mínimos locais e global de uma função $F(\vec{W})$ qualquer (Roberti, 2005). ....	20
Figura 2.7 – Representação esquemática de um neurônio artificial (modificado - Brito, 2008).....	21
Figura 2.8 – Exemplo de uma rede neural artificial de duas camadas com quatro entradas e duas saídas .....	21
Figura 2.9 – Fluxograma dos processos envolvidos em um Algoritmo Genético (modificado - Ferreira, 2007) .....	23
Figura 3.1 – Representação de elemento bidimensional com três graus de liberdade. ....	32
Figura 3.2 – Estrutura genérica sob carga .....	34
Figura 3.3 – Elemento “m” destacado da estrutura. ....	38
Figura 4.1 – Seção 1, que representa o estado intacto.....	57
Figura 4.2 – Seção 2, que representa o estado danificado.....	58
Figura 4.3 – Viga engastada em balanço, dimensão em metros.....	59
Figura 4.4 – Viga biengastada, dimensão em metros .....	59
Figura 4.5 – Pórtico engastado nas extremidades, dimensão em metro.....	60

Figura 4.6 – Representação da subdivisão utilizada na viga engastada em balanço, com as devidas numerações dos nós e dimensões dos subelementos, com unidade em metros. ....	61
Figura 4.7 – Representação da subdivisão utilizada na viga biengastada, com as devidas numerações dos nós e dimensões dos subelementos, com unidade em metros.....	62
Figura 4.8 – Representação da subdivisão utilizada no pórtico, com as devidas numerações dos nós e dimensões dos subelementos, com unidade em metros.....	64
Figura.4.9 – Representação da aplicação de cargas por elemento danificado para o cálculo dos deslocamentos. ....	65
Figura 4.10 (a) a (c) – Representação gráfica da Assinatura $F1(z)$ para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	72
Figura 4.11 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F2(z)$ para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	73
Figura 4.12 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F3(z)$ para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	74
Figura 4.13 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F4(z)$ para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	75
Figura 4.14 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F5(z)$ para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	76
Figura 4.15 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F6(z)$ para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	77
Figura 4.16 (a) a (c)- Representação gráfica das Assinaturas de $F1(z)$ a $F3(z)$ para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado. ....	79
Figura 4.17 – Gráfico para a Assinatura $F1(z)$ mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, adotadas frequências de valores maiores. ....	82
Figura 4.18 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F1(z)$ para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	84
Figura 4.19 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F2(z)$ para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	86

Figura 4.20 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F3(z)$ para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	88
Figura 4.21 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F4(z)$ para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	90
Figura 4.22 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F5(z)$ para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	92
Figura 4.23 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F6(z)$ para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	94
Figura 4.24 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de $F1(z)$ a $F3(z)$ para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado. ....	96
Figura 4.25 – Gráfico da Figura 36(a) ampliado, para a Assinatura $F1(z)$ mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, em maior escala, para viga em balanço dividida em seis elementos. ....	99
Figura 4.26 - Gráfico para a Assinatura $F1(z)$ mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, adotadas frequências de valores maiores, para viga em balanço dividida em seis elementos. ....	99
Figura 4.27 (a) a (d)- Representação gráfica da Assinatura $F1(z)$ para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	101
Figura 4.28 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F2(z)$ para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	104
Figura 4.29 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F3(z)$ para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	107
Figura 4.30 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F4(z)$ para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	110
Figura 4.31 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F5(z)$ para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	113
Figura 4.32 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F6(z)$ para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	116

Figura 4.33 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de $F1(z)$ a $F3(z)$ para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado. ....	120
Figura 4.34 - Gráfico da Figura 45(a) ampliado, para a Assinatura $F1(z)$ mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, em maior escala, para viga em balanço dividida em dez elementos. ....	122
Figura 4.35 - Gráfico para a Assinatura $F1(z)$ mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, adotadas frequências de valores maiores, para viga em balanço dividida em dez elementos. ....	123
Figura 4.36 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F1(z)$ para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	124
Figura 4.37 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F2(z)$ para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	125
Figura 4.38 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F3(z)$ para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	126
Figura 4.39 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F4(z)$ para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	127
Figura 4.40 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F5(z)$ para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	128
Figura 4.41 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F6(z)$ para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	129
Figura 4.42 (a) a (c) – Representação gráfica das Assinaturas de $F4(z)$ a $F6(z)$ para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado. ....	130
Figura 4.43 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F1(z)$ para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	134
Figura 4.44 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F2(z)$ para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	136
Figura 4.45 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F3(z)$ para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	138

Figura 4.46 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F4(z)$ para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	140
Figura 4.47 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F5(z)$ para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	142
Figura 4.48 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura $F6(z)$ para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	144
Figura 4.49 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de $F4(z)$ a $F6(z)$ para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado. ....	146
Figura 4.50 - Gráfico para a Assinatura $F1(z)$ mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, adotadas frequências de valores maiores, para viga biengastada dividida em seis elementos. ....	149
Figura 4.51 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F1(z)$ para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	151
Figura 4.52 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F2(z)$ para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	154
Figura 4.53 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F3(z)$ para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	157
Figura 4.54 - (a) a (f) - Representação gráfica da Assinatura $F4(z)$ para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	160
Figura 4.55 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F5(z)$ para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	163
Figura 4.56 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F6(z)$ para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	166
Figura 4.57 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de $F1(z)$ a $F3(z)$ para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado. ....	169
Figura 4.58 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura $F1(z)$ para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó. ....	174

Figura 4.59 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura $F2(z)$ para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	175
Figura 4.60 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura $F3(z)$ para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	176
Figura 4.61 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura $F4(z)$ para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	177
Figura 4.62 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura $F5(z)$ para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	178
Figura 4.63 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura $F6(z)$ para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	179
Figura 4.64 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de $F4(z)$ a $F6(z)$ para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.....	180
Figura 4.65 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F1(z)$ para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	184
Figura 4.66 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F2(z)$ para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	185
Figura 4.67 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F3(z)$ para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	186
Figura 4.68 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F4(z)$ para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	187
Figura 4.69 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F5(z)$ para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	188
Figura 4.70 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F6(z)$ para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	189
Figura 4.71 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de $F1(z)$ a $F3(z)$ para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.....	190

Figura 4.72 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F1(z)$ para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	194
Figura 4.73 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F2(z)$ para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	199
Figura 4.74 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F3(z)$ para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	204
Figura 4.75 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F4(z)$ para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	209
Figura 4.76 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F5(z)$ para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	214
Figura 4.77 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura $F6(z)$ para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.....	219
Figura 4.78 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de $F1(z)$ a $F3(z)$ para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.....	224
Figura 4.79 (a) a (c) – Representação gráfica comparando as frequências da estrutura intacta e danificada para a viga em balanço dividida em três, seis e dez elementos.	229
Figura 4.80 (a) a (c) – Representação gráfica comparando as frequências da estrutura intacta e danificada para a viga biengastada dividida em três, seis e dez elementos.	230
Figura 4.81 (a) a (c) – Representação gráfica comparando as diferenças entre frequências da estrutura intacta e danificada para a viga em balanço dividida em três, seis e dez elementos.....	231
Figura 4.82 – Representação gráfica comparando as diferenças relativas entre frequências da estrutura intacta e danificada para a viga em balanço dividida em dez elementos. .....	232
Figura 4.83 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em três elementos.....	236
Figura 4.84 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em seis elementos.....	237

Figura 4.85 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em dez elementos. ....	239
Figura 4.86 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em três elementos. ....	243
Figura 4.87 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em seis elementos. ....	244
Figura 4.88 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em dez elementos. ....	246
Figura 4.89 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em três elementos. ....	250
Figura 4.90 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em seis elementos. ....	251
Figura 4.91 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos. ....	253

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Classificação dos Problemas Inversos quanto ao aspecto (modificado – Ferreira, 2007).....	18
Tabela 4.1 – Características físicas da “Seção 1” .....	57
Tabela 4.2 - Características físicas da “Seção 2” .....	58
Tabela 4.3 – Quantificação da redução da área referente ao dano .....	58
Tabela 4.4 – Quantificação da redução do momento de inércia referente ao dano.....	58
Tabelas 4.5 (a)-(d) – Comparação de frequências obtidas para viga em balanço dividida em 3 elementos.....	67
Tabelas 4.6 (a)-(d) – Comparação de frequências obtidas para viga biengastada dividida em 3 elementos.....	68
Tabelas 4.7 (a)-(d) – Comparação de frequências obtidas para o pórtico dividido em 3 elementos.....	69
Tabela 4.8 - Comparação dos deslocamentos ( $u_x$ ) obtidos para viga em balanço dividida em 3 elementos, carga em P2 e dano no elemento 2-3 (unidade em metro).....	70
Tabela 4.9 - Comparação dos deslocamentos ( $u_x$ ) obtidos para a viga biengastada dividida em 3 elementos, carga em P3 e dano no elemento 1-2 (unidade em metro).....	70
Tabela 4.10 - Comparação dos deslocamentos ( $u_x$ e $u_y$ ) obtidos para o pórtico dividido em 3 elementos, carga em P3 e dano no elemento 1-3 (unidade em metro).....	70
Tabela 4.11 – Representação da correspondência entre os termos da Matriz de Rigidez Global e o elemento da estrutura, para uma viga em balanço dividida em 3 elementos.....	233
Tabela 4.12 – Modelo de Tabela utilizada para a montagem dos gráficos para uma viga em balanço dividida em três elementos.....	235

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

### Maiúsculas Latinas:

- $A$  - Área da seção transversal da barra;
- $A_n$  - Área da seção do elemento “n” conectado ao nó  $i$ ;
- $D_k$  - Diferença entre as assinaturas para situações de dano “k” previsto e medido;
- $D_0$  - Matriz dinâmica, para a estrutura intacta;
- $E$  - Módulo de Young (ou módulo de elasticidade);
- $I$  - Matriz identidade;
- $I_z$  - Momento de inércia da seção transversal da barra;
- $[K_0]$  - Matriz de rigidez da estrutura intacta;
- $L$  - Comprimento da barra;
- $L_n$  - Comprimento do elemento “n” conectado ao nó  $i$ ;
- $[M_0]$  - Matriz de massa da estrutura intacta;
- $\{P\}$  - Vetor de cargas aplicadas à estrutura;
- PI - Problema Inverso;
- PD - Problema Direto;
- T - Período;
- $W_x$  - Módulo elástico do aço

### Minúsculas Latinas:

- $f_y$  - Tensão característica do aço utilizado;
- $k_{i,j}$  - Matriz de rigidez local;
- $m_{ii}$  - Matriz de massa local referente ao nó  $i$ ;
- $\{u_0\}$  - Vetor deslocamento da estrutura intacta;
- $\{u\}$  - Vetor de deslocamento da estrutura com dano;

### Minúsculas Gregas:

- $\alpha$  - ângulo entre o eixo local e global da barra;

- $\theta$  - Rotação em torno do eixo  $z$ ;
- $\lambda$  - Autovalor;
- $\rho_n$  - Massa específica do elemento “ $n$ ” conectado ao nó  $i$ ;
- $\{\phi\}_j$  - Autovetor, representando o modo de vibração da  $j$ -ésima frequência natural;
- $\omega_j$  - Frequência natural circular natural;
- $\omega_{j0}$  - Frequência circular natural da estrutura intacta;

### **Maiúsculas Gregas:**

- $[\Delta K]$  - Matriz resultante da variação entre as matrizes de rigidez da estrutura intacta e danificada;
- $\Delta M$  - Diferença entre matriz de massa da estrutura danificada e a da estrutura íntegra;
- $\Delta \omega_j$  - Diferença das frequências naturais circular entre a estrutura intacta e danificada;
- $\Delta \omega_1$  - Diferença de frequências entre a estrutura intacta e danificada no modo 1;
- $\Delta \omega_2$  - Diferença de frequências entre a estrutura intacta e danificada no modo 2;
- $\Delta u^j$  - Diferença entre os deslocamentos nodais da estrutura intacta ( $u_0^j$ ) e da estrutura danificada ( $u^j$ ) nas direções  $x$  e  $y$  para os  $N$  pontos definidos para a estrutura.
- $\Delta \{\phi_i\}$  - Diferença dos autovetores no modo “ $i$ ” entre a estrutura intacta e danificada;

# 1. INTRODUÇÃO

A importância das estruturas para a humanidade é algo inquestionável quando se trata de dar sustentação às construções, vencer distâncias, transpor obstáculos, e mesmo explorar o espaço com aeronaves, entre outras tantas aplicações em nosso cotidiano.

Independente de sua complexidade, as estruturas possuem variadas finalidades que estão diretamente ligadas ao progresso sócio-econômico de qualquer área, como, por exemplo, transpor um pequeno córrego, ligando regiões como na pequena ponte da Figura 1.1a, no estado do Espírito Santo, Brasil; ou na transposição do lago Paranoá, ligando o Lago Sul ao Plano Piloto, como é o caso da Ponte JK, em Brasília (Figura 1.1b) e até mesmo conectar o planeta Terra à imensidão do espaço sideral com aeronaves espaciais (Figura 1.1c).



(a)



(b)



(c)

Figura 1.1– Estruturas de pequeno e grande porte de aplicação sócio-econômica: (a) Ponte de madeira que transpõe um córrego no estado do Espírito Santo, Brasil, ligando regiões, (b) Ponte JK em Brasília que atravessa o lago Paranoá, ligando bairros; (c) Estrutura espacial responsável por conectar a Terra ao espaço sideral.

Atualmente, tanto as estruturas de pequeno ou de grande porte – tais como as que compõem residências, edifícios, barragens, pontes – estão sujeitas aos avanços tecnológicos relacionados a processos construtivos e uso de materiais mais elaborados que objetivam diminuir o tempo de execução da obra e, ao mesmo tempo, aumentar a segurança e resistência da estrutura. Contudo, apesar desta sofisticação, as estruturas podem apresentar patologias, falhas e até colapsos que podem ocorrer mesmo em condições normais de uso.

Ao longo da vida útil de uma estrutura, as ações provenientes de ventos, abalos sísmicos, sobrecargas, acidentes, corrosão, condições de utilização indevida, etc. provocam sua progressiva deterioração. O agravamento desta situação pode provocar grandes prejuízos econômicos e até mesmo gerar perda de vidas humanas. Sendo assim, analisando o custo de reposição e os transtornos gerados, caso a estrutura entre em colapso, torna-se imprescindível o desenvolvimento de metodologias de diagnósticos e conseqüentemente de verificação sistemática da integridade estrutural das edificações que possam facilitar nos processos de manutenção das estruturas.

Silva (2005) descreve um método não-destrutivo natural e comumente utilizado que é a inspeção visual na busca de defeitos estruturais. Contudo, este tipo de avaliação algumas vezes revela-se subjetiva, ineficiente e até inadequada, principalmente devido à crescente complexidade das estruturas. Considera-se ainda que o olho humano não seja de todo capaz de identificar certos danos estruturais como, por exemplo, verificar minúsculas trincas e mesmo danos internos. Além disso, para se analisar uma estrutura complexa e de grande porte, a inspeção visual revela-se um processo impreciso e demorado e, conseqüentemente, ineficaz e caro.

Gadéa (2002) lista em seu trabalho outras técnicas de detecção não-destrutivas de defeitos em estruturas que atualmente são muito utilizadas na engenharia. Como exemplos, podemos citar os métodos que utilizam ultra-som, raios-x, raios laser, termografia, emissão acústica, entre outros. Estas técnicas permitem analisar o dano em uma estrutura sem que ela seja destruída. Porém, apesar de tais técnicas serem comprovadamente eficazes, elas possuem diversas limitações para o uso freqüente e em grande escala exigida em algumas obras da engenharia civil. Nota-se que algumas destas técnicas envolvem grandes aportes financeiros tendo em vista que os aparelhos são, em sua maioria, de alto custo, bem como a mão-de-obra especializada para operá-los. Além disso, sua atuação é relativamente restrita às prováveis zonas de dano e muitas vezes não há condições propícias de acessibilidade nesta área, conseqüentemente, estas técnicas são comumente utilizadas apenas como técnicas complementares.

Na tentativa de buscar métodos de diagnosticar a detecção de danos capazes de fornecer uma indicação mais rigorosa sobre as reais condições da estrutura como um todo, nas últimas décadas, tem havido um interesse crescente da comunidade acadêmica em

pesquisas baseadas em métodos numérico-computacionais usando respostas estruturais estáticas e dinâmicas. Tais modelos partem de idealizações matemáticas do comportamento das estruturas e propiciam, desta forma, redução substancial de custo e maior exatidão nos diagnósticos.

Este crescente interesse deve-se, sobretudo à popularização, eficiência e custo cada vez menor do uso dos computadores digitais na engenharia. As formulações de tais procedimentos numérico-computacionais são de fato formulações matemáticas que visam resolver uma categoria de problema matemático classificado como mal-posto ou inverso. Pesquisar a resolução de problemas inversos, neste caso, propicia uma aplicação mais prática destes procedimentos, já que os dados utilizados não são os de entrada, usualmente utilizados para a solução de problemas diretos ou de valores de contorno. Na resolução de problemas inversos os dados disponíveis estão relacionados a estímulos externos à estrutura lidos em pontos discretos da estrutura como é comum acontecer na realidade da inspeção estrutural (Bezerra e Saigal, 1993).

## 1.1 MOTIVAÇÃO

As técnicas de avaliação das estruturas ou o monitoramento para inspecionar seu comportamento têm como finalidade detectar danos na fase inicial e assim impedir que a deterioração sofrida ao longo de sua vida útil afete sua capacidade de suportar carga fazendo com que surjam outros problemas, tais como fissuração e vibrações excessivas, que possam causar desconforto ou comprometer a segurança dos usuários.

Weathers et al (1985) notam que, para atingir esta finalidade, as avaliações experimentais, por mais desenvolvidas que sejam, ainda trazem altos custos de execução, bem como a necessidade de grande disponibilidade de tempo que se deve empregar na preparação dos ensaios, devido sua complexidade. Isso leva, muitas vezes, a não se tornarem exequíveis as técnicas experimentais para determinados estudos e análise de defeitos em objetos. Ainda assim, os métodos experimentais são muito eficientes, porém apenas na descrição de valores pontuais não conseguindo descrever um objeto de forma mais completa, tal como pode ser observado nas aplicações práticas de potenciômetros ou *strain gages*. Assim como mostra a Figura 1.2, os *strain gages* só podem ser localizados

apenas em pontos discretos dos objetos sob investigação experimental e não em todo o seu contínuo (Barishpolsky, 1980).

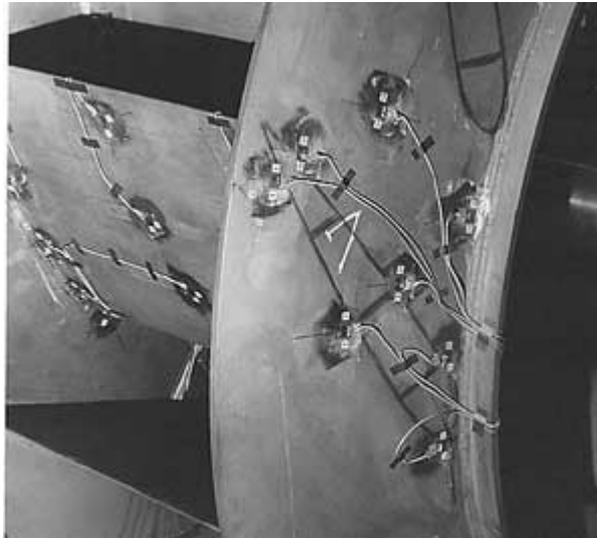


Figura 1.2 - *Strain gage* instalado em turbina.

Com o objetivo de vencer estes empecilhos, estas impossibilidades físicas da descrição ampla de objetos por técnicas experimentais podem ser contornadas pela aplicação de técnicas numérico-computacionais que podem apresentar resultados mais satisfatórios na descrição mais ampla de objetos. Portanto, estas técnicas numérico-computacionais podem vir a auxiliar na obtenção do diagnóstico estrutural.

Neste sentido, este trabalho faz uma simulação do comportamento de estruturas típicas aperticadas e também simula medidas semelhantes às dos experimentos reais, utilizando modelagem baseada no método clássico de análise matricial de estruturas (Método da Rigidez) verificando sempre os resultados com um programa com o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Este trabalho focaliza-se na análise e uso de assinaturas para a solução do problema inverso de identificação de danos em estruturas aperticadas planas. As assinaturas, cuja definição mais completa será abordada adiante, são funções que medem algumas características de respostas das estruturas (como seus deslocamentos ou modos de vibrar) e permitem detectar danos a partir das variações destas assinaturas nas estruturas.

Esta pesquisa propõe-se a contribuir com uma metodologia numérico-computacional que possa auxiliar no diagnóstico não destrutivo de estruturas com defeitos. Os resultados deste trabalho podem ser aplicados em estruturas que apresentem dificuldade de acesso ou impossibilidade de interdição para análises de detecção de defeitos, quando o valor financeiro torna o diagnóstico inexecutável, ou até mesmo nos casos que necessitam de rapidez na detecção de pelo menos uma região onde a probabilidade de encontrar o dano é maior, se comparada a outras técnicas de detecção de dano não destrutivas.

## **1.2 JUSTIFICATIVA**

Em muitos países e em particular no Brasil, a inspeção e manutenção de estruturas, apesar de não dispor da merecida relevância, são áreas importantes da engenharia, pois possibilitam a identificação de danos estruturais, auxiliando desta forma na prevenção do colapso das estruturas, evitando patologias estruturais e impedindo, conseqüentemente, maiores prejuízos para a sociedade (Carrillo, 2007).

A indústria da construção civil relacionada à manutenção está constantemente em busca do desenvolvimento de avaliações e técnicas que aliem eficiência e baixo custo. Contudo, neste tipo de serviço de engenharia que possui certa periodicidade, mão-de-obra qualificada e equipamentos sofisticados, tais características tornam-se ainda mais difíceis de serem obtidas. Logo, é notória a importância do desenvolvimento de tecnologias numérico-computacionais na identificação de danos estruturais, pois além de buscar avanços na área de manutenção estrutural, que é tão carente em investimentos no Brasil, aparece como uma excelente combinação de eficiência e baixo custo.

Apesar de a tecnologia de detecção de danos por métodos numérico-computacionais ser interessante e inovadora, há algumas barreiras em sua aplicação efetiva, como por exemplo, o fato de que na grande maioria dos casos reais os dados são provenientes de respostas aos estímulos gerados em uma estrutura já existente e não da captação de dados de entrada definidos na elaboração da estrutura. Sendo assim, esta análise torna-se mais prática com a resolução de problemas inversos, especialmente no diagnóstico estrutural.

Por isso, a resolução de problemas inversos ou análise inversa para o diagnóstico estrutural tem se tornado atraente para a engenharia civil, visto que é considerada atualmente uma área de grande potencial e enorme campo de aplicação. Este grande interesse se deve ao fato de que, na maior parte das aplicações da engenharia, os parâmetros de entrada para análise direta do problema não são conhecidos ou são fornecidos de forma incompleta ou ambígua sendo, portanto, necessária à identificação de parâmetros físicos e geométricos a partir de dados do domínio medidos experimentalmente (Ferreira, 2007).

A análise inversa torna-se ainda mais vantajosa quando aplicada a modelos numérico-computacionais, pois permite um grande número de simulações de pequenas variações no sistema, enriquecendo a avaliação sem grandes gastos financeiros, uma vez que, a cada dia, as técnicas computacionais são aprimoradas e popularizadas.

Portanto, percebidas tamanhas vantagens, a abordagem deste trabalho de identificação de danos em estruturas planas utilizando problemas inversos com análise estática e dinâmica apresenta-se como mais um estudo e contribuição para o avanço nesta área. Assim, espera-se que haja um aumento de interesse por parte das indústrias e dos órgãos de fomento à pesquisa, o que pode propiciar maiores investimentos.

### **1.3 OBJETIVOS**

O objetivo geral deste trabalho é contribuir para avanços nas pesquisas relacionadas a problemas numérico-computacionais para detecção de danos em estruturas, por meio de procedimentos analíticos e resolução do problema inverso, usando respostas estáticas e dinâmicas estruturais para pórtico e vigas planas.

Dentro deste objetivo geral, apresentam-se os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar a base teórica para o tratamento de problema inverso na análise de estruturas bidimensionais.
- Escolher modelos de estruturas que tenham geometria estrutural conveniente, de modo que os resultados possam ter características práticas.

- Do mesmo modo, escolher cargas adequadas a serem aplicadas aos modelos de estrutura.
- Empregar o programa *MATLAB 7.0*, para cálculos de matrizes de rigidez, deslocamentos e frequências dos modelos de estruturas definidas. Estes parâmetros servirão de base para cálculo das assinaturas estruturais.
- Utilizar o programa *SAP2000*, para análises comparativas destes deslocamentos e frequências.
- Analisar as diversas assinaturas estruturais que possam caracterizar satisfatoriamente o comportamento estrutural do pórtico e vigas planas e usá-las para localizar os danos. Tais assinaturas podem considerar apenas as respostas estáticas ou uma combinação de respostas estáticas e dinâmicas.
- Analisar a relação dos elementos das matrizes de rigidez com os danos na estrutura.

#### **1.4 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO**

O Capítulo 1 introduz o assunto de métodos de detecção de danos em estruturas e os relaciona às tecnologias numérico-computacionais pela solução de problemas inversos, passando pela motivação que levou a esta pesquisa, além de descrever os objetivos deste trabalho.

O Capítulo 2 aborda o surgimento dos problemas inversos na história dentro do campo científico e explica em que consistem esses tipos de problemas, com exemplos de utilização em diversas áreas. Também são descritas as metodologias empregadas na solução de problemas inversos, além de mostrar estudos aplicados nesta área.

O Capítulo 3 apresenta os fundamentos teóricos e a metodologia utilizada na elaboração desta pesquisa definindo a relação física e matemática entre os parâmetros utilizados.

No Capítulo 4, há a definição das expressões matemáticas para as assinaturas estruturais analisadas neste trabalho.

O Capítulo 5 define e detalha as características físicas, seções transversais, cargas aplicadas, localidade de aplicação das cargas, etc. Mostra ainda as aplicações e resultados das assinaturas estruturais escolhidas para as estruturas definidas no capítulo 4, observando-se a eficiência de cada assinatura na localização do dano nas estruturas, além de analisar os resultados das variações de frequências e matrizes de rigidez.

O Capítulo 6 contém as conclusões obtidas com este trabalho e as sugestões para o desenvolvimento deste para aplicações em trabalhos futuros.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA**

Uma das primeiras aplicações de problema inverso na história foi desenvolvida pelo matemático Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que determinou a trajetória do planetóide Ceres (Weiss, 1999).

No início do século XIX, no ano de 1801, o astrônomo italiano, monge Giuseppe Piazzi (1746-1826), descobriu um planetóide, designado Ceres, durante seus trabalhos no observatório de Palermo, na Itália. Porém, os astrônomos só foram capazes de observar o planetóide durante quarenta e um dias. Após este período, Ceres não pôde mais ser visualizado, pois sua luz desapareceu por entre os raios de sol. As buscas para tentar reencontrá-lo foram inúteis apesar de todo esforço feito pelos astrônomos.

O problema chamou a atenção do matemático Gauss, que elaborou um método para localizar o corpo celeste a partir de uns poucos dados observacionais. Graças à resolução deste problema inverso por Gauss, Ceres foi reencontrado (Hall, 1970).

Antes de Gauss, podemos citar ainda a notável observação do matemático grego Arquimedes (287 A.C. - 212 A.C) que conseguiu identificar, sem danificar a coroa de ouro do rei Hiéron, se havia em sua composição uma parte em prata. Arquimedes solucionou este problema aplicando as teorias do empuxo, onde um corpo parcialmente ou inteiramente submerso em um fluido é submetido a forças de igual magnitude ao peso do fluido deslocado por este (Resnick et al., 1992).

Estes exemplos na história demonstram que, na prática, a utilização de problemas inversos sempre esteve presente, já que decorrem de situações naturais. Estes e outros problemas corroboram, portanto, que a solução de um problema inverso consiste em determinar as causas baseadas na observação de um dado efeito, assim como define o pesquisador russo Oleg Mikailivitch Alifanov (Velho, 2002).

Nota-se que a resolução de um problema inverso requer técnicas mais complexas que para a resolução de problemas ditos diretos. As técnicas para a resolução de problemas diretos são mais conhecidas que as técnicas para a resolução de problemas inversos. Entre as dificuldades apontadas por pesquisadores para a resolução de problemas inversos está a instabilidade de diversos algoritmos e o grande número de operações matemáticas necessárias nos métodos numérico-computacionais dirigidos para a solução de problemas inversos. Este assunto será abordado posteriormente neste trabalho. No que diz respeito ao volume de operações geralmente requeridas na resolução de um problema inverso, deve-se notar que recentemente devido o emprego maciço da computação digital o tema tem se tornado alvo de interesse de algumas comunidades científicas que se dedicam ao estudo de problemas inversos.

Atualmente, podemos citar outras diversas aplicações de problemas inversos das mais simples às mais complexas. Podemos utilizar, para ilustrar, os conceitos mais comuns da física cinemática para determinar a aceleração da gravidade local ( $g$ ), sabendo-se que um projétil em movimento retilíneo uniformemente variado lançado a partir da posição de coordenada  $(x_0, y_0) = (0,0)$  com certo ângulo  $(\theta_0)$ , contados a partir da horizontal, com uma velocidade inicial ( $v_0$ ) atingiu a posição  $y=0$ , de coordenada  $(0, x_{\max})$ , no tempo “ $t$ ”, de acordo com a equação  $y = v_0 \cdot t \cdot \text{sen}(\theta_0) - (g \cdot t^2)/2$ . Desta equação que relaciona espaço percorrido ( $y$ ) ao tempo ( $t$ ), pode-se obter a aceleração da gravidade da Terra ( $g$ ) por meio de sucessivas medidas de espaço e de tempo, assim como ilustra a Figura 2.1 a seguir.

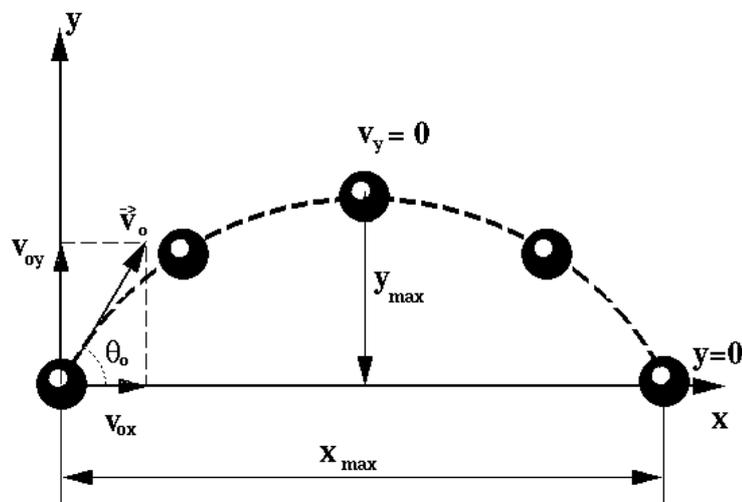


Figura 2.1 – Diagrama esquemático ilustrando o lançamento de um projétil.

O emprego de problemas inversos é também reconhecido em áreas mais complexas como a geofísica, meteorologia, bioengenharia, oceanografia, transferência de calor, estruturas e tantas outras (Velho, 2002). Como exemplos, podemos citar os trabalhos de Pilkington (1982); Rudy e Oster (1992) na engenharia biomédica. Os mesmos autores desenvolveram técnicas que utilizam tomografias computadorizadas e eletrocardiogramas para determinação de anomalias cardíacas. Têm-se também os artigos de Schnur e Zabarás (1990) aplicados à mecânica dos sólidos ou ainda Bezerra e Saigal (1993) para determinação de falhas em estruturas. Estes últimos são considerados no livro de Ingham e Wrobel (1997) como pioneiros, juntamente com Tanaka e Masuda (1986), em detectar falhas internas (ou subsuperficiais) em estruturas planas via técnicas numérico-computacionais utilizando o Método dos Elementos de Contorno e técnicas de otimização.

Para melhor compreensão do que são os problemas inversos e como estes podem ser utilizados em procedimentos para a localização de danos em estruturas, faz-se necessário conhecê-los mais profundamente, o que será feito na próxima seção.

## 2.2 PROBLEMAS INVERSOS (PI)

A definição de problema inverso pode apresentar controvérsias entre matemáticos, engenheiros, entre outros pesquisadores, pois a distinção entre problema direto e problema inverso, para um dado fenômeno, está ligada à interpretação de causa e efeito e estas, às vezes, são de cunho meramente subjetivo.

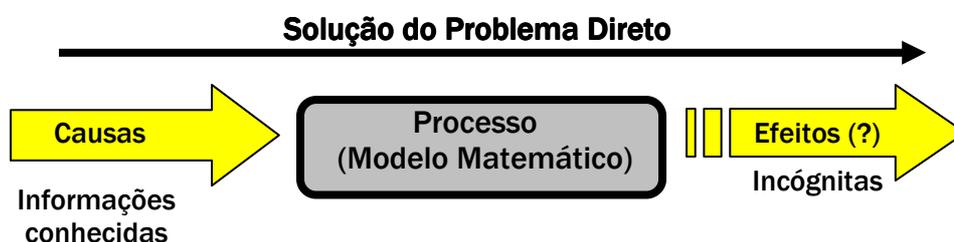


Figura 2.2– Representação esquemática de problema direto (modificado - Ferreira, 2007)

Além disso, do ponto de vista matemático, um problema é dito inverso se não pode ser devidamente enquadrado nas características próprias dos problemas diretos – já tão amplamente estudados na matemática e engenharia. Por isso, de acordo com Beck (1979),

antes de se entrar no âmbito de como se resolver um problema inverso faz-se necessário se ter a noção de problema direto.

A resolução de um problema direto parte do princípio da determinação de “efeitos” a partir das “causas” pré-determinadas, totalmente conhecidas, como ilustra o esquema da Figura 4.

Todavia, existe uma interpretação ambígua na definição das palavras “causa” e “efeito”. Tal ambigüidade reflete-se também na interpretação da dicotomia “direto” *versus* “inverso” que pode ser exemplificada do seguinte modo: se o modelo matemático é expresso por  $[K] \cdot \{u\} = \{f\}$  o modelo inverso pode ser representado por  $[K]^{-1} \cdot \{f\} = \{u\}$ . Por outro lado, ao se definir a matriz  $[B]$  como a inversa  $[K]^{-1}$ , i.e.  $[B] = [K]^{-1}$  o par direto-inverso torna-se  $[B] \cdot \{f\} = \{u\} \Rightarrow [B]^{-1} \cdot \{u\} = \{f\}$ . Portanto, às vezes convencionase chamar problema direto, simplesmente, àquele em que o estudo antecedeu-se historicamente (Velho, 2002).

Entretanto, examinando novamente a equação matricial  $[K] \cdot \{u\} = \{f\}$ , mas considerando desta vez a matriz  $[K]$  como a matriz de rigidez e os vetores  $\{u\}$  e  $\{f\}$ , respectivamente, deslocamentos e forças nodais, pode-se entender o que um problema direto venha a ser. Consideremos neste caso que o vetor das forças  $\{f\}$  e a matriz dos coeficientes  $[K]$  têm todos os seus elementos conhecidos, que a matriz  $[K]$  não tenha singularidade e que todos os valores de deslocamentos  $\{u\}$  sejam desconhecidos, ou seja; incógnitas. Neste caso, achar o valor dos deslocamentos nodais da estrutura, i.e.  $\{u\}$ , constitui um problema direto. Se, porém, alguns valores  $\{f\}$  e, os correspondentes valores de  $\{u\}$  fossem, simultaneamente, conhecidos, este tipo de problema já não seria direto. Seria como se nos pontos onde atua carga, os deslocamentos também fossem prescritos. Nesta situação o problema estaria mal-posto ou considerado como inverso. Portanto, de forma genérica, a característica de um problema direto é o conhecimento dos seguintes itens (Kubo, 1988):

- (a) Geometria do domínio matemático  $\Omega$  do problema e sua fronteira  $\Gamma$ .

- (b) As equações que governam o problema em  $\Omega$  e  $\Gamma$ .
- (c) As condições de contorno em deslocamento (ou força) do problema definidas em toda a fronteira  $\Gamma$ .
- (d) As forças ou deslocamentos, definidas de forma não simultânea, mas complementar, na estrutura.
- (e) As propriedades dos materiais e qualquer outro parâmetro da equação do problema.

Assim, por exemplo, se numa estrutura parte do domínio matemático  $\Omega$  (geometria da seção transversal do pórtico) fosse desconhecido, ou se desconhecido fosse algum parâmetro (propriedade) da equação que governa o problema, então o problema não seria direto, mas sim inverso ou mal-posto.

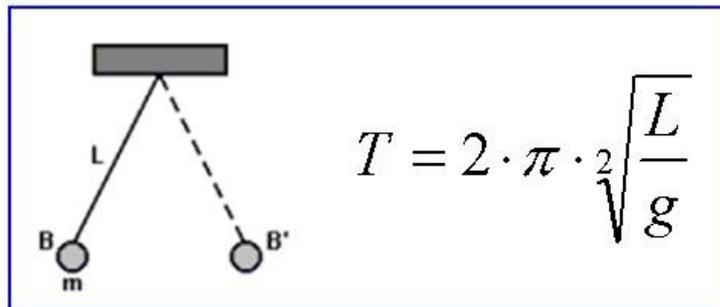
Os problemas diretos diferenciam-se dos problemas inversos, pois em geral requerem o conhecimento completo e preciso das causas para a determinação dos efeitos. Já nos problemas inversos, em geral, as observações dos efeitos são conhecidas, mesmo que de forma incompleta e imprecisa, e deseja-se conhecer as causas destes efeitos ou respostas. É importante ressaltar que as respostas utilizadas para resolução de um problema inverso, na maioria das vezes, podem apresentar dados contaminados por ruídos gerados, comumente, por erros em medidas experimentais ou observacionais.

Por exemplo, a previsão do comportamento de um sistema físico sabendo-se o seu estado atual (propriedades) e as leis físicas que o governam, é um problema tipicamente direto. Já um problema inverso seria a determinação do estado do sistema como a identificação de parâmetros ou propriedades físicas a partir de observações ou experimentações segundo a evolução do sistema e que, portanto, podem estar sujeitas às influências externas podendo, inclusive, produzir grande inexatidão de resultados.

De maneira simplificada, a Figura 2.3 apresenta, para o modelo de um pêndulo simples, a diferença entre problemas direto e inverso. Um problema direto seria a determinação do período do pêndulo ( $T$ ), dado o comprimento ( $L$ ) e o valor da aceleração gravidade ( $g$ ). Um problema inverso seria a determinação da aceleração da gravidade ( $g$ ) a partir de um conjunto de pêndulos de comprimento ( $L$ ) e período ( $T$ ). No segundo caso,

para se ter o período ( $T$ ) como um dado conhecido é necessária a medição deste parâmetro e, neste caso, as medidas estariam sujeitas às imprecisões tão comuns advindas do processo de medição do tempo.

### Lei do Pêndulo Simples para Pequenos Deslocamentos



Problema Direto: Determinação do período ( $T$ ) do pêndulo, conhecidos os dados de entrada de comprimento ( $L$ ) do pêndulo e aceleração da gravidade ( $g$ ).

Problema Inverso: Determinação da aceleração da gravidade ( $g$ ), conhecidos os dados do período ( $T$ ) e do comprimento ( $L$ ) do pêndulo

Figura 2.3- Exemplo simplificado mostrando a diferença entre problema direto e inverso.

Podem ser citados ainda exemplos práticos de aplicação de problemas inversos tal como ocorre na identificação de poluentes em rios, a partir da medição da concentração de poluentes em alguns pontos do rio (efeitos). Em alguns casos estas observações podem permitir também a possível identificação e localização e/ou a intensidade das fontes de poluição (causa). Neste mesmo contexto, outro problema inverso de interesse é a determinação do coeficiente de difusão dos poluentes bem como das propriedades físico-químicas do rio a partir das fontes de poluição e das medidas experimentais da concentração (Alvim, 2004).

Um problema inverso clássico e de extrema importância para a engenharia é a caracterização térmica de materiais pela transferência de calor por condução que está associado à estimativa do fluxo de calor ou da distribuição de temperatura na superfície de contorno do material sob análise. Além deste, outros problemas inversos em condução, com aplicações tecnológicas relevantes, envolvem de forma independente ou de forma

combinada a estimativa de condições iniciais, geometria, termos fonte e propriedades térmicas (Santos et al., 2002).

Portanto, percebe-se que um problema inverso procura por “causas” e condições desconhecidas partindo de características e “consequências” de um fenômeno observado, como ilustra a Figura 2.4.

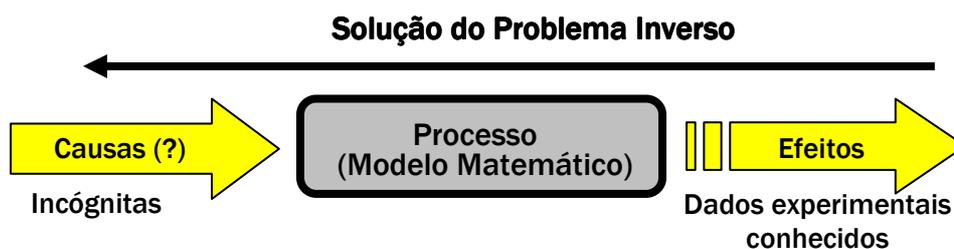


Figura 2.4– Representação esquemática de problema inverso (modificado - Ferreira, 2007)

Os problemas inversos não são lineares, na maioria das vezes, mesmo que o problema direto correspondente o seja. Como já dito anteriormente, os problemas inversos são problemas matemáticos pertencentes à classe de problemas ditos mal-postos ou mal-formulados (do inglês, *Ill-Posed Problems*). Esta é a classe na qual, pelo menos uma das condições características de um problema bem-posto ou bem-formulado não seja atendida. Por exemplo, num problema direto existe a solução, há unicidade na solução e a solução é estável, ou seja, existe dependência contínua da solução com os dados de entrada. Tais características foram postuladas, desde o início do século XX, pelo matemático francês Jacques Hadamard, como afirma Wellington Carlos de Jesus (2006), e não são observadas na solução de problemas inversos. Dito de outra forma, os problemas inversos, às vezes, não apresentam solução, não revelam unicidade nas soluções e nem são estáveis, pois dependem das observações das respostas, da precisão dos dados disponíveis das respostas para se achar as causas.

Durante muito tempo admitiu-se que os problemas que não satisfaziam estas condições eram considerados irrelevantes para fins práticos. Contudo, este entendimento passou a ser obsoleto dado que, atualmente, os problemas mal-postos constituem um campo matemático que atrai cada vez mais a atenção tanto da matemática pura quanto da matemática aplicada, tornando-se, praticamente, uma área da matemática conhecida por

estudar, entre outros problemas, os problemas inversos em diversos ramos da física-matemática e da engenharia. Nota-se que na engenharia existe ainda uma subdivisão para os problemas inversos. Há os problemas inversos que procuram por condições de contorno insuficientes (conhecidos como problemas inversos de reconstrução das condições de contorno) e os problemas inversos de identificação (que procuram pela definição completa do domínio matemático do problema). Inclui-se na última classificação os problemas de identificação de danos nas estruturas.

Para tentar fazer com que os problemas inversos possuam alguma semelhança com os problemas diretos, várias técnicas numéricas foram desenvolvidas nos últimos anos para contornar as características de: (a) falta de solução, (b) falta de unicidade e (c) instabilidade associadas aos problemas inversos. Estas técnicas, em geral, incluem abundância (até redundância) de informações bem como podem passar por uma série de resoluções de problemas diretos associados ao problema inverso.

Em virtude de, em geral, os dados conhecidos de um problema inverso serem insuficientes ou inadequados (condições de contorno conhecidas de forma insuficiente ou não complementar) para que este se torne bem-posto é necessária a incorporação de informações adicionais, como ilustra a Figura 2.5. Grande parte desta informação adicional é obtida por experimentos feitos em laboratório. Nestes casos, muitos parâmetros podem ser determinados e mantidos constantes. Por isso, muitos sistemas tecnológicos atingiram um alto nível de sofisticação devido ao desenvolvimento da identificação das informações adicionais, esperando-se assim, para o futuro, resultados de longo alcance na teoria dos problemas inversos (Brito, 2008).

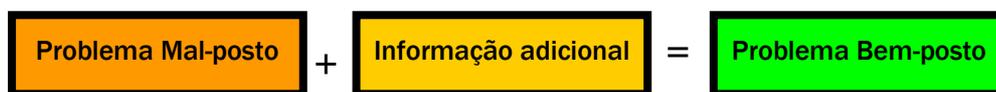


Figura 2.5 – Representação esquemática da transformação de problema mal-posto em problemas bem-posto

### 2.3 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVERSOS

Antes de entender os métodos para resolução de problemas inversos, é interessante ampliar a classificação dos problemas inversos. Se considerarmos sua natureza

matemática, podemos classificá-los em explícitos ou implícitos. Mas, se analisarmos sua natureza estatística, os problemas inversos podem ser determinísticos ou estocásticos. Existem ainda outros tipos de classificações que dependem de diferentes parâmetros como a natureza do problema e a dimensão do problema tal como ilustra a Tabela 2.1 a seguir.

Tabela 2.1 – Classificação dos Problemas Inversos quanto ao aspecto (modificado – Ferreira, 2007).

Aspecto	Classificação do PI
1) Natureza Matemática	- Explícito (Inversão Direta)
	- Implícito
2) Natureza Estatística	- Determinístico
	- Estocástico
3) Natureza da Propriedade Estimada	- Condição Inicial
	- Condição de Contorno
	- Termo fonte / Sumidouro
	- Propriedades do Sistema
4) Natureza da Solução (Beck, 1985)	- Estimativa de Parâmetros
	- Estimativa de Função
5) Dimensão do Modelo Físico e da Quantidade a ser Estimada (Silva Neto/Moura Neto, 2005)	Tipo 1 = PD-f e PI-f
	Tipo 2 = PD- $\infty$ e PI-f
	Tipo 3 = PD- $\infty$ e PI- $\infty$

PD – problema direto; PI – problema inverso; f – finito;  $\infty$  - infinito

A classificação dos itens 1 e 2 da Tabela 2.1 estão ligadas aos métodos de solução, enquanto a do item 3 tipifica o problema inverso de acordo com a causa a ser determinada.

A classificação do item 4, formulada por Beck (1985), tem o objetivo de aplicar a noção de função contínua nos problemas de estimativa de função.

No item 5, é apresentada uma proposta recente de classificação baseada na dimensão do modelo do fenômeno físico (problema direto – PD) e na dimensão da quantidade a ser estimada (problema inverso – PI) se finita (f) ou infinita ( $\infty$ ).

Analisando o aspecto da natureza matemática, para resolver um problema inverso explícito é utilizado o método de inversão direta. Tal método possui certas limitações por só ser aplicado no campo das soluções analíticas e em problemas discretos que apresentam

um sistema inverso bem-posto. Esta situação não é freqüente em problemas reais de engenharia e por isso, seu campo de aplicação torna-se reduzido apresentando um interesse mais acadêmico.

Além do método de inversão direta, várias técnicas têm sido desenvolvidas e utilizadas atualmente, sempre observando que a solução de um problema inverso, considerado quase sempre mal-posto, depende de sua aproximação às características de um problema bem-posto. Existem ainda alguns outros métodos para resolução de problemas inversos:

- Decomposição em valores singulares: mínimos quadrados e variantes (mínimos quadrados ponderados)
- Métodos de regularização
- Outros (algoritmo genético, redes neurais, colônia de formigas)

O método dos mínimos quadrados propõe uma abordagem natural pela determinação da solução de um sistema pelo método dos mínimos quadrados.

Já o método de regularização consiste na determinação da solução aproximada mais suave compatível com os dados de observação, para certo nível de ruído. Como métodos de regularização podemos citar a Regularização de Tikhonov, a Regularização pelo Princípio da Máxima Entropia e ainda outros tais como o método *Simulated Annealing* (Recozimento Simulado), Simplex, Gradiente Conjugado, Método de Levenberg-Marquardt, Newton, Quase-Newton, etc (Roberti, 2005; Velho, 2002).

O Recozimento Simulado é considerado um método estocástico (que corresponde ao aspecto 2 da Tabela 2.1) enquanto o método Simplex, Gradiente Conjugado, Método de Levenberg-Marquardt, Newton e Quase-Newton (Roberti, 2005; Velho, 2000) são métodos determinísticos (também relativo ao aspecto 2 da Tabela 2.1). Os métodos determinísticos caracterizam-se por não considerarem a casualidade dos parâmetros, diferentemente dos métodos estocásticos, já que, pela definição, padrões estocásticos são aqueles que surgem por meio de eventos aleatórios. Ambos apresentam vantagens e desvantagens. Segundo Roberti (2005), os métodos estocásticos necessitam de um maior tempo computacional, no entanto, conseguem fugir de mínimos locais, fornecendo soluções ótimas globais.

Por outro lado, apesar de os métodos determinísticos apresentarem menor custo computacional, possuem o inconveniente de apresentar soluções de mínimos locais, conseqüentemente o ótimo global, considerada a solução do problema, não é encontrada. O gráfico da Figura 2.6 ilustra a diferença entre os mínimos locais e global de uma função qualquer.

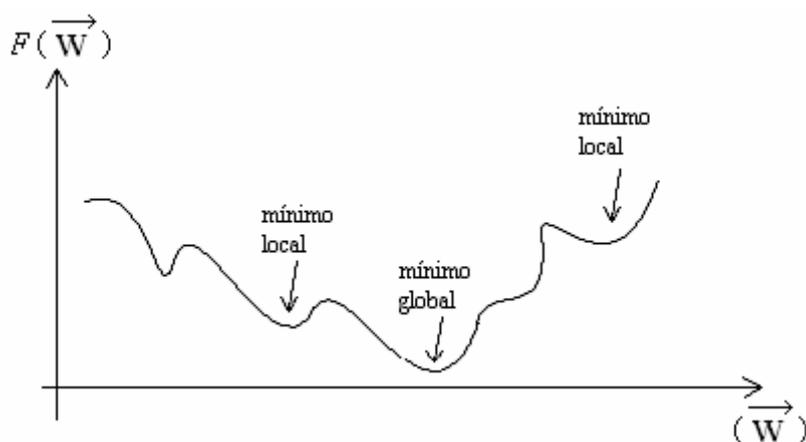


Figura 2.6 – Representação de mínimos locais e global de uma função  $F(\vec{W})$  qualquer (Roberti, 2005).

Outras metodologias muito utilizadas recentemente são: Redes Neurais Artificiais (do inglês, *Artificial Neural Networks*), Algoritmos Genéticos (do inglês, *Genetic Algorithms*) e Colônia de Formigas (do inglês, *Ant Colony System*).

As Redes Neurais Artificiais (RNA) são técnicas computacionais que apresentam um modelo matemático inspirado na estrutura neural de organismos inteligentes e que adquirem conhecimento por meio de experiências (Ferreira, 2007). Consistem em arranjos de elementos de processamento que são comparados a neurônios, criando assim um modelo de neurônio artificial.

O neurônio artificial é uma estrutura lógico-matemática que procura simular a forma, o comportamento e as funções de um neurônio biológico. Assim sendo, os dendritos foram substituídos por entradas, cujas ligações com o corpo celular artificial são realizadas pelos elementos chamados de peso (simulando as sinapses). Os estímulos captados pelas entradas são processados pela função de soma, e o limiar de disparo do neurônio biológico foi substituído pela função de transferência. Este esquema é representado pela Figura 2.7.

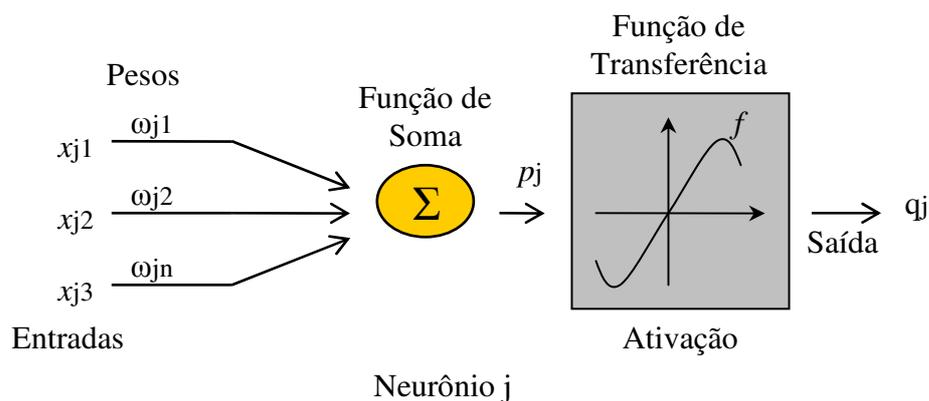


Figura 2.7 – Representação esquemática de um neurônio artificial (modificado - Brito, 2008)

Combinando diversos neurônios artificiais podemos formar o que é chamado de rede neural artificial. As entradas, simulando uma área de captação de estímulos, podem ser conectadas em muitos neurônios, resultando, assim, em uma série de saídas, cada uma representada por um neurônio. A função da conexão é tornar o sinal de saída de um neurônio em um sinal de entrada de outro. As diferentes possibilidades de conexões entre as camadas de neurônios podem gerar  $n$  números de estruturas diferentes. Esta rede pode ser representada de acordo com a Figura 2.8.

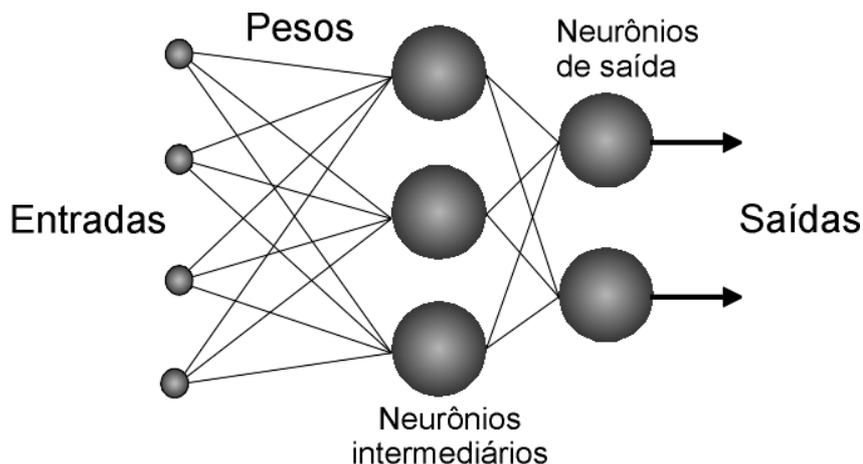


Figura 2.8 – Exemplo de uma rede neural artificial de duas camadas com quatro entradas e duas saídas

Estudos recentes mostram que uma rede neural de três camadas pode ser usada com sucesso no problema de detecção de danos (Luo, Hanagud, 1997).

A utilização de Redes Neurais na solução de problemas inversos vem crescendo e um dos principais motivos é que podem ser usadas mesmo quando não se tem idéia das equações do PI. Podem ser basicamente consideradas “aproximadores universais” de funções.

A implementação das Redes Neurais em *hardware* facilita suas aplicações práticas e as torna ainda mais rápidas que os métodos tradicionais, pois uma vez treinada a fase da identificação dos pesos das conexões, o processo torna-se muito rápido, pois entra na fase de ativação (Brito, 2008).

O método de Colônia de Formigas (CF) é uma técnica que busca representar o comportamento de um conjunto de agentes que cooperam entre si para resolver um problema de otimização por meio de comunicação simples entre os agentes, simulando um comportamento coletivo de formigas na escolha do melhor caminho até a fonte de alimentos.

Associa-se cada formiga a um caminho possível a ser percorrido. Cada caminho simboliza uma solução candidata e é representado em um conjunto particular de vértices de um grafo. A cada geração escolhe-se a formiga que percorreu o melhor caminho, o qual recebe uma quantidade extra de feromônio. Desse modo, as formigas das gerações posteriores serão influenciadas e assim ao final de todas as gerações assume-se que a melhor solução é alcançada. Este procedimento é finalizado quando se atinge um número de gerações em que se consiga uma aproximação ótima das incógnitas em estudo.

Outra metodologia muito utilizada é a de Algoritmo Genético (AG). Esta técnica surgiu em 1975 a partir do modelo da teoria de evolução de Charles Darwin, na qual elementos computacionais geram descendentes para, no final, sobreviverem os mais aptos (Velho, 2002). É uma técnica para achar solução ótima, pela utilização da busca estocástica, para uma função objeto que no caso de PIs podem ser as funções resíduos. O fluxograma da Figura 2.9 descreve de forma geral os procedimentos de um Algoritmo Genético.

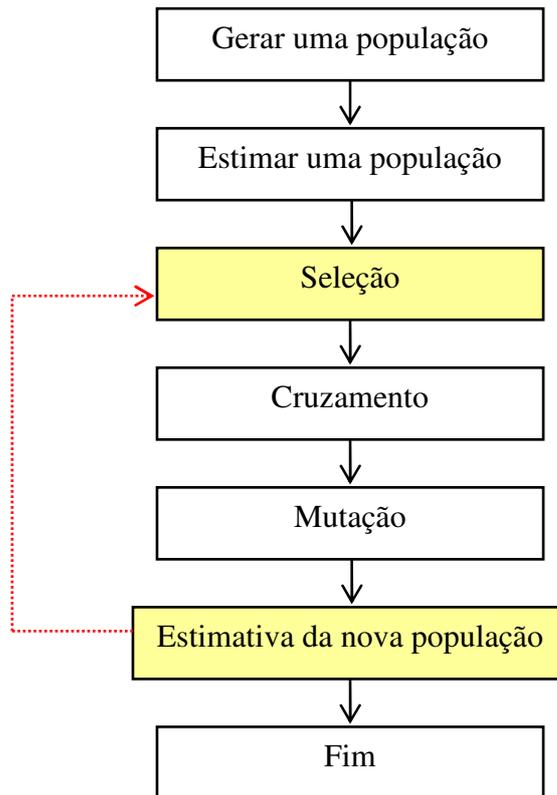


Figura 2.9 – Fluxograma dos processos envolvidos em um Algoritmo Genético (modificado - Ferreira, 2007)

Alguns algoritmos numérico-computacionais são especialmente desenvolvidos para aplicação em resolução de PIs de identificação de danos em estruturas. Estes algoritmos incorporam etapas que envolvem resoluções sequenciais de problemas diretos via Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF) ou Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Ao contrário dos métodos experimentais que envolvem geralmente muito tempo para elaboração além de altos custos, os métodos numéricos podem descrever o objeto em estudo com mais riqueza e minúcia e por isso vêm sendo utilizados em larga escala para a resolução de PIs.

A utilização de métodos numéricos em problemas inversos fica também evidente nas análises das assinaturas estruturais que serão definidas e exemplificadas na seção seguinte.

## 2.4 ASSINATURAS ESTRUTURAIS CLÁSSICAS

As chamadas “Assinaturas Estruturais” são funções que adotam como parâmetros os efeitos dinâmicos e/ou estáticos das estruturas. Estes efeitos são confrontados considerando-se o estado intacto e o estado danificado da mesma estrutura. Tal procedimento de comparação entre certas características estruturais (lidas no estado intacto e no estado danificado) pode viabilizar a identificação e localização de defeitos na estrutura danificada, o que constitui exemplo de resolução de Problemas Inversos uma vez que se busca, a partir de efeitos sobre algumas alterações de certas características estruturais (efeitos na resposta dinâmica e/ou estática) revelar informações sobre determinado dano (causa) das mudanças nas características estruturais. A análise destas funções pode, portanto, detectar a localização, a identificação geométrica e até mesmo a extensão do dano na estrutura.

Um exemplo típico de assinatura para este procedimento de análise é apresentado no trabalho de Wang, Hu e Yao (2000) que comparando as características estáticas e dinâmicas de certas estruturas simples adota as mudanças das frequências naturais e das respostas estáticas de uma viga de alumínio biengastada. O autor citado usa o mesmo procedimento para uma treliça plana feita de aço. A assinatura adotada por Wang, Hu e Yao (2000) é definida no vetor  $\{DS\}$  designado como *Damage Signature* tal como na Equação 2.1.

$$\{DS\} = \frac{\Delta u}{\Delta \omega_j^2} \quad (2.1)$$

Em que:

$\Delta \omega_j$ : é a diferença das frequências naturais circular entre a estrutura intacta e danificada

$\Delta u$ : é um vetor que calcula a diferença de deslocamentos em determinados nós da estrutura entre o deslocamento na estrutura intacta e na estrutura danificada

Nesta formulação proposta por Wang, Hu e Yao (2000), o vetor *Damage Signature* {DS} indica apenas a localização do dano, enquanto a utilização de um algoritmo iterativo de otimização não linear baseado em uma técnica de programação quadrática fornece a extensão do dano na estrutura. O método utilizado apresentou resultados eficientes nos casos previstos, contudo para o cálculo de  $\Delta u$  e de  $\Delta \omega_j$  foram considerados nas análises apresentadas apenas poucos pontos. Seria interessante a utilização de cargas em mais pontos assim como simulação de outros danos para garantir com maior convicção a funcionalidade do método.

Lam, Ko e Wong (1998), utilizando apenas parâmetros dinâmicos, comparam casos numéricos e experimentais para pórticos planos de aço. Também aqui os autores utilizam a estratégia da comparação das características da estrutura com e sem dano e verificam que o método teórico que propõem fornece indicações confiáveis da localização do dano para os exemplos apresentados simulando a prática.

Utilizando a combinação da técnica *Approximate Parameter Change* (APC) com a técnica *Damage Signature Matching* (DSM), a localização do dano foi obtida pela associação de valores dinâmicos para diferentes casos de danos: em verificações numéricas (para um pórtico de seis andares) e experimentais (para um pórtico de dois andares). As duas técnicas são complementares já que a técnica APC apenas aproxima a localização do dano e a técnica DSM refina a busca, identificando onde está o dano na estrutura com maior precisão.

A técnica DSM, que dá maior precisão à localização do dano, emprega o vetor designado *Predicted Damage Signatures* (PDS), visto na Equação 2.2, que fornece a localização teórica calculada, e o vetor designado *Measured Damage Signatures* (MDS), visto na equação 2.3.

Na verificação numérica o vetor MDS referiu-se a valores de uma estrutura simulada em programa computacional, enquanto que na verificação experimental, estes valores (frequências e autovetores) foram medidos em laboratório com a utilização de martelo de impacto, acelerômetros e foi também importante a utilização de softwares que organizam as informações obtidas por tais instrumentos.

$$\{\mathbf{PDS}_{ik}\} = \frac{\Delta\{\phi_i\}}{\Delta\omega_1^2} \quad (2.2)$$

$$\{\mathbf{MDS}_i\} = \frac{\Delta\{\phi_i\}}{\Delta\omega_1^2} \quad (2.3)$$

$\Delta\{\phi_i\}$  : é a diferença dos autovetores no modo “i” entre a estrutura intacta e danificada

$\Delta\omega_1$  : é a diferença de frequências entre a estrutura intacta e danificada no modo 1

Utilizando a técnica DSM, dano foi detectado com precisão nos casos em que ambas assinaturas (Equações 2.2 e 2.3) obtiveram similaridade para todos os modos avaliados. Tal similaridade foi medida pela minimização do resíduo entre PDS e MDS de acordo com a Equação 2.4.

Tanto a verificação numérica quanto a experimental foram satisfatórias.

$$\mathbf{D}_k = \sum_{j=1}^m \|\{\mathbf{PDS}_{ik}\} - \{\mathbf{MDS}_i\}\| \quad (2.4)$$

Onde:

$\mathbf{D}_k$  : diferença entre as assinaturas para situações de dano “k” previsto e medido.

Dems e Mróz (2001) apresentam uma técnica de localização de danos para uma viga plana e uma placa retangular baseada na sensibilidade das variações de suas frequências para duas situações: a primeira variando o posicionamento do apoio da estrutura e a segunda inserindo uma massa adicional ao longo da estrutura. Esta técnica indicou bons resultados na detecção do dano, porém os autores utilizaram uma estratégia pouco prática, pois na formulação apresentada introduziram, entre uma análise e outra, a mudança da posição do apoio nas vigas analisadas. Talvez fosse mais interessante considerar uma carga concentrada móvel, em vez de um apoio móvel em mais pontos assim como simulação de outros danos.

Pode ser citado ainda o trabalho de Brito (2008) que analisou onze assinaturas diferentes para localização de danos em treliças planas e concluiu que a combinação de parâmetros estáticos, como os deslocamentos nodais, juntamente com os dinâmicos, como as frequências da estrutura, mostraram uma maior eficiência no equacionamento de funções objeto destinadas à identificação da localização do dano.

Apesar de, em muitos casos, apenas a análise dinâmica ser a escolhida; nota-se que existem muitos problemas inerentes a estas formulações entre eles:

- (1) Os modelos dinâmicos adotam formulações numéricas que dificultam as verdadeiras características dinâmicas das estruturas de uso na prática, como por exemplo, a hipótese de que não há amortecimento;
- (2) Nos testes de análise modal fica difícil a obtenção mais precisa dos modos de vibrar das estruturas que se apresentam de forma muito rígida, que é o estado mais comum de uma estrutura;
- (3) Em alguns métodos usando análise modal faz-se necessária a determinação de modos de vibrar de alta-ordem que são de difícil obtenção (Hu et al, 2001).

Baseado nestas conclusões, este trabalho utilizou a combinação da análise dinâmica e estática, que é mais simples e mais fácil de ser executada experimentalmente, para a determinação de danos em estruturas com o objetivo de alcançar resultados mais expressivos e de maior aplicação prática.

No capítulo seguinte, os fundamentos teóricos para o cálculo das matrizes de rigidez e de massa, bem como dos deslocamentos, autovalores (frequências) e autovetores será abordado com o intuito de construir assinatura que melhor possam identificar os danos em estruturas aperticadas planas, portanto, com três graus de liberdade por nó.

### 3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLOGIA

#### 3.1 CONCEITOS DE ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

Os conceitos de álgebra matricial, por muito tempo, foram apenas ferramentas utilizadas por matemáticos. Antes da década de 40, poucos eram os artigos científicos com aplicação de matrizes em problemas de engenharia estruturais. Para fazer a análise de sistemas estruturais complexos, com muitos hiperestáticos, os engenheiros negavam-se a aceitar métodos que tinham que manipulavam grandes quantidades de coeficientes advindos de enormes sistemas de equações lineares. Em vez disso, eles preferiam métodos iterativos como, por exemplo, o método de Hardy Cross (Livesley, 1969).

Observa-se que um dos objetivos fundamentais da análise estrutural é a determinação das tensões e deformações com que a estrutura responde aos carregamentos solicitantes. Entretanto, em 1946, o ENIAC (*Electrical Numerical Integrator and Calculator*), tido como o primeiro computador digital, foi apresentado ao mundo. Este acontecimento produziu mudanças substanciais na análise de estruturas. O problema passou a ser não mais a dificuldade em manusear grandes quantidades de coeficientes, mas o de como organizar os coeficientes em matrizes de forma adequada para a manipulação eficiente pelos computadores digitais. Daí em diante foi crescente o número de programas computacionais que utilizavam as técnicas de análise matricial para solução de sistemas estruturais.

A finalidade da análise estrutural, de forma genérica, é a determinação de todas as ações e deslocamentos de um sistema estrutural. Como este trabalho está interessado apenas em pórticos, para se resolver um pórtico faz-se necessário dividir a estrutura em elementos (geralmente vigas e colunas). As propriedades de cada elemento são representadas pela relação entre ações nodais e deslocamentos nodais. Se houver carga distribuída, estas podem ser transformadas em cargas nodais equivalentes, de sorte que a resolução de um pórtico implica no conhecimento de todos os deslocamentos e ações em cada nó do pórtico. Nota-se que, nesta definição, por cargas entende-se forças e momentos; e por deslocamentos, entende-se translações e rotações.

Existem três tipos de equações que as ações nodais e os deslocamentos nodais dos elementos de um pórtico devem satisfazer (Livesley, 1969 e Przemieniecki, 1968):

(a) As equações constitutivas que relacionam as cargas nodais aos deslocamentos nodais para cada elemento individualmente e que são obtidas a partir da relação entre ação e deformação levando em conta as leis constitutivas.

(b) As equações de compatibilidade que igualam apropriadamente os deslocamentos nodais dos elementos que se ligam ao mesmo nó. Estas equações permitem que as partes discretizadas em elementos da estrutura não se superponham nem se separem de forma inadequada e sem sentido físico.

(c) As equações de equilíbrio que estabelecem que em cada nó as ações externas atuantes no nó devem se equilibrar com as cargas reativas de cada elemento que se ligam ao mesmo nó.

De maneira geral, os métodos de análise de estruturas aporticadas podem ser classificados de acordo com a ordem como as equações de compatibilidade e de equilíbrio são utilizadas – condições (b) e (c), no parágrafo anterior. O método dos deslocamentos, por exemplo, utiliza os deslocamentos como incógnitas e requer a solução das equações de equilíbrio. De forma simplificada, o método dos deslocamentos consiste em somar uma série de soluções básicas que satisfazem isoladamente as condições de compatibilidade, mas que não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original, para na superposição restabelecer as condições de equilíbrio. Já o método das forças consiste em somar uma série de soluções básicas que satisfazem as condições de equilíbrio, mas que não satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura original, para na superposição restabelecer as condições de compatibilidade.

Entre os dois métodos, o método dos deslocamentos, também conhecido como método da rigidez, é o mais empregado na análise estrutural, já que é mais comum na bibliografia por fazer a descrição dos carregamentos nodais, ao invés dos deslocamentos, como dado inicial do problema, o que é mais simples na prática. Portanto, neste trabalho escolheu-se o método da rigidez, que utiliza a matriz de rigidez multiplicada pelos

deslocamentos nodais (incógnitas) para satisfazer o equilíbrio nodal e como um todo da estrutura aporticada. O resultado desta operação matemática é um conjunto de equações escritas para um mesmo referencial global da estrutura que relacionam o vetor de carregamentos nodais externo,  $\{\mathbf{P}\}$ , juntamente com o vetor de deslocamentos nodais,  $\{\mathbf{\Delta}\}$ , a uma matriz de coeficientes, conhecida como matriz de rigidez,  $[\mathbf{K}]$ , conforme a equação seguinte.

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{\Delta}\} \quad (3.1)$$

Em que:  $\{\mathbf{P}\}$  é o vetor das forças externas atuantes nos nós da estrutura aporticada e em equilíbrio com as forças reativas dos elementos;  $\{\mathbf{\Delta}\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais e  $[\mathbf{K}]$  é a matriz de rigidez global.

Na Equação 3.1, o número de equações a ser resolvido será igual ao número de deslocamentos não especificados ou número de graus de liberdade da estrutura.

Como este trabalho propõe-se a usar assinaturas estruturais para os pórticos intactos e danificados, e estas assinaturas são funções dos deslocamentos, frequências ou mesmo variações dos termos das matrizes de rigidez; torna-se imprescindível, o conhecimento da montagem da matriz de rigidez dos pórticos bem como do cálculo dos deslocamentos e frequências relativos à estrutura intacta e danificada.

Para alcançar estes objetivos, foi utilizado como ferramenta de cálculo o programa *Microsoft Excel* para a obtenção das matrizes de rigidez local bem como para a montagem da matriz de rigidez global. Também foi utilizado o programa *MATLAB 7.0* para realizar as operações matriciais de modo a resolver o sistema matricial e produzir os resultados em deslocamentos e em frequências naturais da estrutura as quais correspondem aos autovalores do problema dinâmico de vibração livre não amortecido. E ainda, para se certificar da precisão dos resultados, o programa *SAP2000* foi utilizado.

### 3.1.1 Matriz de Rigidez do Pórtico Plano

Na equação 3.1 anterior, o termo  $[\mathbf{K}]$  é formado por elementos  $\mathbf{K}_{ij}$  e tem muita relevância neste trabalho, pois corresponde a uma interpretação física: cada  $\mathbf{K}_{ij}$  da matriz de rigidez estará associado a um ou mais elementos (danificados ou não) da estrutura.

Mantidas as mesmas condições de carregamento e de vínculo, para a mesma estrutura com e sem dano, haverá variações nos termos da matriz de rigidez (local e global) e conseqüentemente nos deslocamentos e nas frequências de vibrar da estrutura. Estas variações serão abordadas nas próximas seções pela construção da matriz de massa bem como pela definição das assinaturas estruturais.

Dada a importância da matriz de rigidez neste trabalho, faz-se nesta seção uma revisão dos principais conceitos envolvidos na montagem das matrizes de rigidez local e global. Nota-se ainda que este trabalho limita-se a pórticos planos com carregamentos no mesmo plano e, portanto, os graus de liberdade associados a cada nó do pórtico são duas translações e uma rotação.

A Figura 3.1 apresenta as translações associadas ao sistema de coordenadas locais são  $u_x$ ,  $u_y$  e a rotação é  $\theta$ ; no sistema global, respectivamente  $U_x$ ,  $U_y$  e  $\theta$ , como representados para um elemento genérico. Os eixos locais estão representados na figura 3.3.

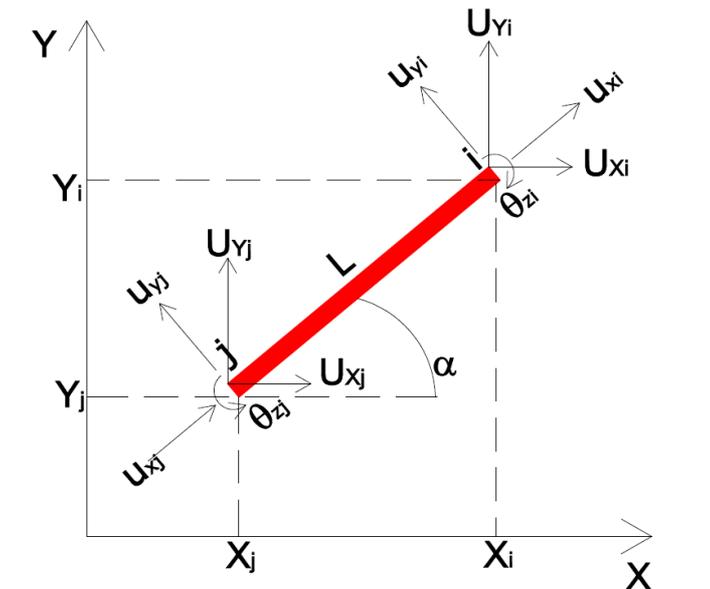


Figura 3.1 – Representação de elemento bidimensional com três graus de liberdade ( $u_x, u_y$  e  $\theta$ ) e comprimento  $L$  no eixo global.

O método aqui adotado parte de princípios gerais para o cálculo da matriz de rigidez local e global e segue os procedimentos adotados nas referências Kardestuncer (1974); Livesley (1969) e Przemieniecki (1968). Nestas referências, a menos de pequenas variações de referencial, a montagem da matriz de rigidez local da estrutura inicia-se com o estabelecimento de um sistema de coordenada local vinculado a cada nó do elemento (conforme ilustrado na Figura 3.1) e também a um sistema de coordenada global único, para que os deslocamentos e forças dos diversos nós que compõem a estrutura aperticada plana possam fazer referências a um sistema único.

Inicialmente, cada nó da estrutura é devidamente identificado de forma única com um número, incluindo os nós dos apoios. Esta numeração corresponde à numeração nodal. Também os elementos de barra que estão definidos entre dois nós extremos da barra são identificados por um número conhecido como número do elemento (ou barra).

Para a montagem da matriz de rigidez de um pórtico alguns princípios devem ser respeitados, tais como:

- (a) admite-se que a estrutura está sujeita apenas a pequenas deformações e rotações.
- (b) os materiais envolvidos na estrutura são todos considerados trabalhando em regime linear e elástico.

- (c) vale o princípio da superposição de efeitos.
- (d) admite-se que haja equilíbrio em cada nó e na estrutura como um todo; e
- (e) há compatibilidade de deslocamento em cada nó e nos vínculos da estrutura.

Desta forma, para uma estrutura genérica mostrada na Figura 3.2 e em relação ao sistema global de coordenadas (X,Y), sob cargas externas nodais representadas pelo vetor de carga no sistema global  $\{\mathbf{P}\} = \{\mathbf{P}_{1X}, \mathbf{P}_{1Y}, \mathbf{M}_1, \mathbf{P}_{2X}, \mathbf{P}_{2Y}, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{P}_{nX}, \mathbf{P}_{nY}, \mathbf{M}_n\}$  e o vetor deslocamentos  $\{\Delta\} = \{\Delta_{1X}, \Delta_{1Y}, \theta_1, \Delta_{2X}, \Delta_{2Y}, \theta_2, \dots, \Delta_{nX}, \Delta_{nY}, \theta_n\}$ , segundo os princípios de energia aplicados a corpos elásticos, a energia potencial total de uma estrutura, geralmente denominada de  $\pi$ , é a soma da energia potencial das forças externas (i. e.  $\mathbf{W}$ ) e da energia total de deformação. Estando a estrutura vinculada de tal forma que não haja deslocamento de corpo rígido, o primeiro variacional da energia potencial total é estacionário ( $\delta\pi = 0$ ). Além disso, sendo o sistema conservativo, entre outros teoremas de casos especiais dos princípios de energia potencial mínima, vale o Primeiro Teorema de Castigliano, que enuncia: “Se um corpo elástico linear, geometricamente, no qual é impedido qualquer movimento de corpo rígido, atuam forças concentradas, independentes entre si, a derivada parcial da energia de deformação em relação ao deslocamento de uma das forças é igual a própria força”. Para mais detalhes ver a referência (Mason e Souza, 1976).

No caso retratado na Figura 3.2, a energia potencial das forças externas  $\mathbf{W}$  a energia de deformação  $\mathbf{W}$  (grandeza escalar) produzida por este conjunto de forças externas sobre o corpo elástico da Figura 3.2 pode ser escrita para um sistema com  $n$  nós, como:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{1X} \Delta_{1X} + \mathbf{P}_{1Y} \Delta_{1Y} + \mathbf{M}_1 \theta_1 + \dots + \mathbf{P}_{iX} \Delta_{iX} + \mathbf{P}_{iY} \Delta_{iY} + \mathbf{M}_i \theta_i + \dots + \mathbf{M}_n \theta_n) \quad (3.2)$$

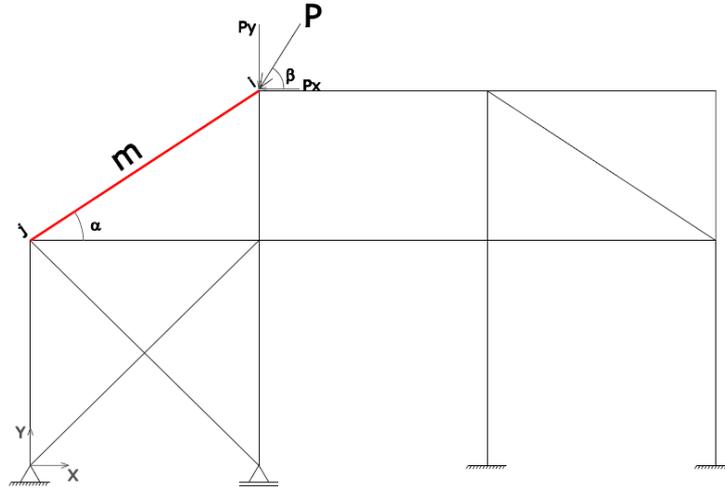


Figura 3.2 – Estrutura genérica sob carga P

Introduzindo-se uma pequena variação no vetor deslocamento  $\Delta_{iX}$  em um nó “1”, por exemplo, podemos calcular a variação da energia  $W$  em relação a esta variação, i.e.  $\partial W/\partial \Delta_{iX}$  na Equação 3.2 anterior, de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial W}{\partial \Delta_{iX}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P_{iX}}{\partial \Delta_{iX}} \Delta_{iX} + \frac{\partial P_{iY}}{\partial \Delta_{iX}} \Delta_{iY} + \frac{\partial M_1}{\partial \Delta_{iX}} \theta_1 + \dots + \frac{\partial P_{iX}}{\partial \Delta_{iX}} \Delta_{iX} + \dots + \frac{\partial M_n}{\partial \Delta_{iX}} \theta_n \right) \quad (3.3)$$

Pelo primeiro teorema de Castigliano, sabe-se que  $\partial W/\partial \Delta_i = P_i$ , e, portanto:

$$P_{iX} = \left[ \frac{\partial P_{iX}}{\partial \Delta_{iX}} \Delta_{iX} + \frac{\partial P_{iY}}{\partial \Delta_{iX}} \Delta_{iY} + \frac{\partial M_1}{\partial \Delta_{iX}} \theta_1 + \dots + \frac{\partial P_{iX}}{\partial \Delta_{iX}} \Delta_{iX} + \dots + \frac{\partial M_n}{\partial \Delta_{iX}} \theta_n \right] \quad (3.4)$$

Ou, de forma mais geral, para uma variação no vetor deslocamento  $\Delta_{iX}$  do nó “i”, a força  $P_{iX} = \partial W/\partial \Delta_{iX}$  e, portanto, tem-se que:

$$P_{iX} = \left[ \frac{\partial P_{iX}}{\partial \Delta_{iX}} \Delta_{iX} + \frac{\partial P_{iY}}{\partial \Delta_{iX}} \Delta_{iY} + \frac{\partial M_1}{\partial \Delta_{iX}} \theta_1 + \dots + \frac{\partial P_{iX}}{\partial \Delta_{iX}} \Delta_{iX} + \dots + \frac{\partial M_n}{\partial \Delta_{iX}} \theta_n \right] \quad (3.5)$$

A equação anterior, escrita de forma matricial, para todas as forças, está representada como segue:

$$\begin{Bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Y} \\ P_{1\theta} \\ \vdots \\ P_{ix} \\ \vdots \\ P_{n\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{1X}}{\partial \Delta_{1X}} & \frac{\partial P_{1Y}}{\partial \Delta_{1X}} & \frac{\partial M_1}{\partial \Delta_{1X}} & \dots & \frac{\partial P_{iX}}{\partial \Delta_{1X}} & \dots & \frac{\partial M_n}{\partial \Delta_{1X}} \\ \frac{\partial P_{1X}}{\partial \Delta_{1Y}} & \frac{\partial P_{1Y}}{\partial \Delta_{1Y}} & \frac{\partial M_1}{\partial \Delta_{1Y}} & \dots & \frac{\partial P_{iX}}{\partial \Delta_{1Y}} & \dots & \frac{\partial M_n}{\partial \Delta_{1Y}} \\ \frac{\partial P_{1X}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{1Y}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial M_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial P_{iX}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial M_n}{\partial \theta_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial P_{ix}}{\partial \Delta_{ix}} & \frac{\partial P_{iY}}{\partial \Delta_{ix}} & \frac{\partial M_i}{\partial \Delta_{ix}} & \dots & \frac{\partial P_{iX}}{\partial \Delta_{ix}} & \dots & \frac{\partial M_n}{\partial \Delta_{ix}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial P_{ix}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial P_{iY}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial M_i}{\partial \theta_n} & \dots & \frac{\partial P_{iX}}{\partial \theta_n} & \dots & \frac{\partial M_n}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \Delta_{ix} \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Chamando  $K_{iXjY} = \partial P_{iX} / \partial \Delta_{jY}$  como o termo da matriz “n x n”, fisicamente podemos interpretar este termo como uma força que surge no nó “i” e na direção global “X” quando há uma variação unitária do deslocamento na direção global “Y” do nó “j”. Portanto, com esta simplificação na notação a Equação 3.6 pode ser reescrita, como:

$$\begin{Bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Y} \\ P_{1\theta} \\ \vdots \\ P_{ix} \\ \vdots \\ P_{n\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1X1X} & K_{1X1Y} & K_{1X1\theta} & \dots & K_{1XiX} & \dots & K_{1Xn\theta} \\ K_{1Y1X} & K_{1Y1Y} & K_{1Y1\theta} & \dots & K_{1YiX} & \dots & K_{1Yn\theta} \\ K_{1\theta1X} & K_{1\theta1Y} & K_{1\theta1\theta} & \dots & K_{1\theta iX} & \dots & K_{1\theta n\theta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{iX1X} & K_{iX1Y} & K_{iX1\theta} & \dots & K_{iXiX} & \dots & K_{iXn\theta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{nX1\theta} & K_{nY1\theta} & K_{n\theta1\theta} & \dots & K_{iXn\theta} & \dots & K_{n\theta n\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \Delta_{ix} \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} \quad \text{ou } \{P\} = [K]\{\Delta\} \quad (3.7)$$

Em que :  $\{P\}$  é o vetor de forças generalizadas (*generalized-force vector*), i.e. forças e momentos nas direções X e Y do sistema de coordenada global;  $[K]$  é a matriz de rigidez global da estrutura e  $\{\Delta\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais generalizados

(*generalized nodal displacement vector*), i.e. rotações e translações nas direções X e Y no sistema de coordenada global.

Nota-se ainda que, segundo a interpretação física dos termos da matriz de rigidez global, os nós não conectados correspondem a termos nulos, pois não há aparecimento de forças nestes nós desconectados devido a variação unitária de deslocamento.

Também fica clara a simetria da matriz de rigidez, tendo em vista que:

$$\mathbf{K}_{injm} = \frac{\partial \mathbf{P}_{in}}{\partial \Delta_{jm}} = \frac{\partial}{\partial \Delta_{jm}} \left( \frac{\partial W}{\partial \Delta_{in}} \right) = \frac{\partial}{\partial \Delta_{in}} \left( \frac{\partial W}{\partial \Delta_{jm}} \right) = \mathbf{K}_{jmin} \quad (3.8)$$

A expressão 3.7 ainda pode ser simplificada adotando-se as seguintes expressões:

$$\{\mathbf{P}_k\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{kX} \\ \mathbf{P}_{kY} \\ \mathbf{M}_k \end{Bmatrix} \text{ e } \{\Delta_k\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{kX} \\ \Delta_{kY} \\ \theta_k \end{Bmatrix} \text{ e } [\mathbf{K}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{iXjX} & \mathbf{K}_{iXjY} & \mathbf{K}_{iXj\theta} \\ \mathbf{K}_{iYjX} & \mathbf{K}_{iYjY} & \mathbf{K}_{iYj\theta} \\ \mathbf{K}_{i\theta jX} & \mathbf{K}_{i\theta jY} & \mathbf{K}_{i\theta j\theta} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

E, portanto, a Equação 3.8 pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_j \\ \mathbf{P}_m \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{im} & \cdots & \mathbf{K}_{in} \\ & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jm} & \cdots & \mathbf{K}_{jn} \\ & \text{sim} & \mathbf{K}_{mm} & \cdots & \mathbf{K}_{mn} \\ \vdots & & & & \\ & & & & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \\ \Delta_m \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Entretanto, a matriz de rigidez global é mais comumente formada a partir das matrizes de rigidez locais de cada barra (ou elemento) da estrutura. Pode-se adotar a estratégia de se determinar a matriz de rigidez local de uma barra genérica “i-j”, com nós “i” e “j” nas extremidades a partir de deslocamentos unitários  $\delta_{ik} = 1$  (em que “i” é o nó e “k” uma direção de deslocamento, i.e. translação local, x ou y, ou rotação,  $\theta$ ) e do conceito do termo de rigidez local associado, i.e.  $\mathbf{k}_{inj}$  que significa a força que surge no nó “i” na direção “n” (x ou y ou  $\theta$ ) quando um deslocamento unitário no nó “j” é aplicado na

direção local “k” ( $x$  ou  $y$  ou  $\theta$ ). Portanto, adotando-se translações e rotações unitárias pode-se obter os termos da matriz de rigidez local.

Para a montagem da matriz, a primeira coisa a se fazer nesta formulação de método matricial é decidir sobre os tipos e orientações das coordenadas axiais. Esta escolha poder ser feita em qualquer barra da estrutura, desde que a estrutura seja totalmente composta de membros rígidos. Contudo, é importante escolher uma orientação que não cause ambigüidade. Por exemplo, se for escolhido o mesmo sistema de coordenadas para ambas extremidades da barra, em qual das extremidades se indicaria a direção da tensão? Alguns textos assumem que seria na extremidade esquerda, outros identificam o que é definido como primeiro número dos dois nós. Todavia, independentemente de como essas definições são estabelecidas, percebe-se que o uso do mesmo sistema de coordenadas para ambas as extremidades pode causar confusão. E assim, na tentativa de evitar tais ambigüidades, os eixos locais neste trabalho são orientados de acordo com a Figura 3.3 na qual nenhuma das extremidades precisa receber preferência. De acordo com a Figura 3.3, as direções positivas dos eixos locais são orientadas por cada extremidade do membro como segue:

- O eixo local  $x$  representa direção da tensão;
- O eixo local  $y$  é perpendicular a  $x$  e, quando gira  $90^\circ$  no sentido horário, é idêntico a  $x$ ;
- O eixo local  $z$ , que representa rotação, é perpendicular ao plano  $xy$  (plano em que se encontra a estrutura), no qual o sentido anti-horário é assumido como positivo (Kardestuncer, 1974).

Para exemplificar a obtenção da matriz de rigidez local e global relativo a um elemento de barra de um pórtico num plano, observe o elemento “m” da Figura 3.3, que foi destacado e ampliado da Figura 3.2, formado pelos nós  $j$  e  $i$ .

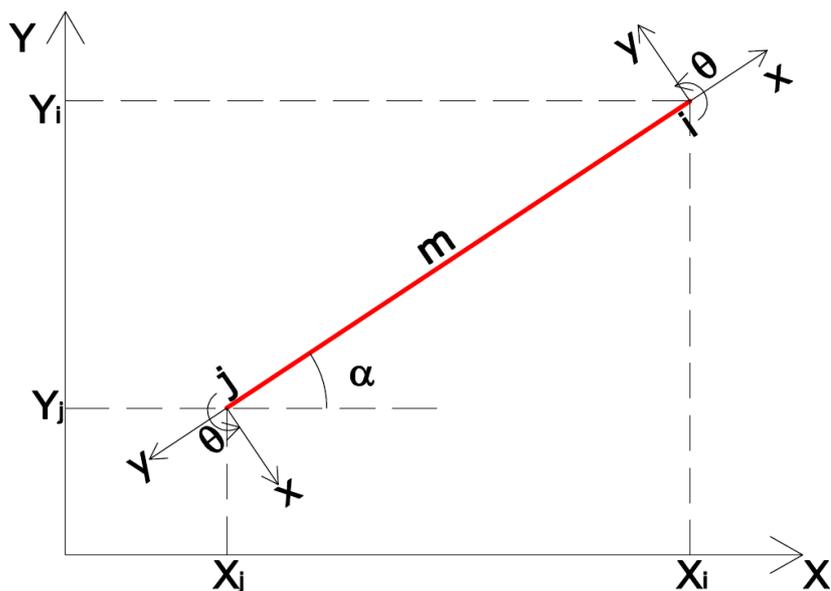


Figura 3.3 – Elemento “m” destacado da estrutura (Kardestuncer, 1974 - modificado)

Neste caso, adotando-se a convenção dos esforços generalizados locais nodais (forças  $p_x, p_y$  e momento  $m$ ) e deslocamentos generalizados locais nodais (translações  $\delta_x, \delta_y$  e rotação  $\theta$ ) nodais, a matriz de rigidez local do elemento de pórtico plano pode ser escrita como segue na Equação 3.11, de acordo com Kardestuncer (1974):

$$\begin{Bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ m_{i\theta} \\ \hline p_{jx} \\ p_{jy} \\ m_{j\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EA}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EA}{L} \\ \hline \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EA}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \theta_{iz} \\ \hline \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \\ \theta_{jz} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Observa-se que as três primeiras linhas da Equação 3.11 são relativas às forças generalizadas que aparecem no nó “i” enquanto as três últimas linhas são relativas ao nó “j”. As três primeiras linhas do vetor deslocamento generalizado são relativas aos deslocamentos no nó “i” e as três últimas ao nó “j”. Assumindo as simplificações

correspondentes à Equação 3.11 anterior, mas para o sistema local, e considerando ainda as forças no “i” para o elemento orientado como “i-j” ou as forças no nó “j” para o elemento orientado como “j-i” podemos escrever:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{iX} \\ \mathbf{p}_{iY} \\ \mathbf{m}_i \end{Bmatrix}_{ij} = \{\mathbf{p}_{ij}\}, \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{jX} \\ \mathbf{p}_{jY} \\ \mathbf{m}_j \end{Bmatrix}_{ji} = \{\mathbf{p}_{ji}\}, \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{iX} \\ \boldsymbol{\delta}_{iY} \\ \boldsymbol{\theta}_i \end{Bmatrix}_{ij} = \{\boldsymbol{\delta}_{ij}\}, \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{jX} \\ \boldsymbol{\delta}_{jY} \\ \boldsymbol{\theta}_j \end{Bmatrix}_{ji} = \{\boldsymbol{\delta}_{ji}\} \quad (3.12)$$

Neste caso a Equação 3.11, pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{ij} \\ \mathbf{p}_{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^j & \mathbf{k}_{ij} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{ij} \\ \boldsymbol{\delta}_{ji} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Impondo a compatibilidade de deslocamentos globais, entre as extremidades das barras (a, b, c) que se conectam ao mesmo nó “i” podemos escrever no sistema de coordenada global:

$$\Delta_i = \Delta_{ia} = \Delta_{ib} = \dots\dots\dots = \Delta_{ic} \quad (3.14)$$

Em seguida impondo o equilíbrio entre as forças que atuam nas extremidades das barras (a, b, c) que se conectam ao mesmo nó “i” e a força externa que atua neste nó  $(\mathbf{P}_i)_{\text{ext}}$ , chegamos, no sistema global a:

$$(\mathbf{P}_i)_{\text{ext}} = \mathbf{P}_{ia} + \mathbf{P}_{ib} + \dots\dots\dots + \mathbf{P}_{ic} \quad (3.15)$$

Cada força na Equação 3.15 no nó “i” pode ser expressa no sistema global:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{K}_{ii} \Delta_i + \mathbf{K}_{ia} \Delta_a + \mathbf{K}_{ib} \Delta_b + \dots\dots\dots + \mathbf{K}_{ic} \Delta_c \quad (3.16)$$

Sendo cada matriz de rigidez obtida a partir da matriz de rigidez local, com a utilização da matriz de rotação  $\mathbf{R}_{ij}$  que, por sua vez, é obtida pela seguinte operação (Kardestuncer, 1974):

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{k}_{ij} \mathbf{R}_{ij} \text{ com } \mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

No caso de estruturas aporticadas de interesse neste trabalho, a matriz local definida na Equação 3.11, após ser pré-multiplicada pela transposta da matriz R e pós-multiplicada pela matriz de rotação R, resulta na seguinte matriz global:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} k_{ii}^j & k_{ij}^j \\ k_{ji}^i & k_{jj}^i \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Em que (Kardestuncer, 1974):

$$\mathbf{K}_{ii}^j = \begin{bmatrix} \left[ \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} \cdot \sin^2 \alpha \right] & \left[ \left( \frac{E \cdot A}{L} - \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \right] & \left[ \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L_2} \cdot \sin \alpha \right] \\ \left[ \left( \frac{E \cdot A}{L} - \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \right] & \left[ \frac{E \cdot A}{L} \cdot \sin^2 \alpha + \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} \cdot \cos^2 \alpha \right] & \left[ -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L_2} \cdot \cos \alpha \right] \\ \left[ \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L_2} \cdot \sin \alpha \right] & \left[ -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L_2} \cdot \cos \alpha \right] & \left[ \frac{4 \cdot E \cdot I_x}{L} \right] \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^i = \begin{bmatrix} \left[ -\left( \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} \cdot \sin^2 \alpha \right) \right] & -\left[ \left( \frac{E \cdot A}{L} - \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \right] & \left[ \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L_2} \cdot \sin \alpha \right] \\ \left[ -\left( \frac{E \cdot A}{L} - \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \right] & \left[ -\left( \frac{E \cdot A}{L} \cdot \sin^2 \alpha + \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} \cdot \cos^2 \alpha \right) \right] & \left[ -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L_2} \cdot \cos \alpha \right] \\ \left[ -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L_2} \cdot \sin \alpha \right] & \left[ \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L_2} \cdot \cos \alpha \right] & \left[ \frac{2 \cdot E \cdot I_x}{L} \right] \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (3.20)$$

Para obter as matrizes  $\mathbf{K}_{jj}^i$  e  $\mathbf{K}_{ji}^j$ , definidas na Equação 3.19 e 3.20, respectivamente, basta substituir  $\alpha$  por  $(180^\circ + \alpha)$ .

Note que:

$$\cos \alpha = \frac{x_i - x_j}{L} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{y_i - y_j}{L} \quad (3.21)$$

Em que:

$k_{ii}^j$ : Submatriz 3x3 (ou Matriz de rigidez Local) para o cálculo da diagonal de  $K$

$k_{ij}$ : Submatriz 3x3 (ou Matriz de rigidez Local) de  $K$

$L$ : é o comprimento total da barra local;

$A$ : é a área da seção transversal da barra local;

$I_z$ : é o momento de inércia da seção transversal da barra local;

$E$ : Módulo de Young (ou módulo de elasticidade) da barra local;

$\alpha$ : ângulo entre as barras que compõem o nó;

$(x_i; x_j)$ : Coordenadas globais no eixo  $x$ ;

$(y_i; y_j)$ : Coordenadas Globais no eixo  $y$ ;

$i, j$ : numeração dos nós do elemento;

Adotando sempre  $i < j$ .

O programa *Microsoft Excel* auxiliou na obtenção das matrizes de rigidez locais e, conseqüentemente, na montagem da matriz de rigidez global completa de cada uma das estruturas. Este programa foi escolhido por ser comumente utilizado para diversas finalidades, pela facilidade de acesso e amplo conhecimento. Porém, o programa *MATLAB* também poderia gerar tais matrizes.

### 3.1.2 Matrizes de Massa

O método adotado para o cálculo da matriz de massa das estruturas deste trabalho é o de Massa Concentrada (ou *Lumped Mass*, em inglês). Em uma análise de um sistema dinâmico, esta é a forma mais simples de se representar as propriedades de inércia de uma estrutura em modelo matemático.

Este procedimento é baseado no equilíbrio de um sistema dinâmico, utilizando o princípio da superposição. Ele consiste em distribuir a massa de cada elemento de uma estrutura em suas extremidades, fazendo com que cada nó concentre uma parte da massa do elemento a que está conectado. Esta concentração de massa nos nós tem como consequência fazer com que a Matriz de Massa Global possua apenas os elementos da diagonal não-nulos (Przemieniecki, 1968).

As massas concentradas referem-se às inércias de translação e rotação do elemento. Porém, a inércia de rotação (ou massa rotacional) será considerada nula nos cálculos desta pesquisa.

Percebe-se, portanto, que para a montagem da matriz de massa global da estrutura (M), similarmente à matriz de rigidez, deve-se primeiramente obter suas submatrizes denominadas matrizes de massa local (m).

As linhas e colunas referentes a impedimentos de movimento devem ser retiradas pois são influenciadas na massa concentrada.

Sendo a massa rotacional nula, a matriz de massa local será:

$$\mathbf{m}_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n \cdot A_n \cdot L_n}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Em que:

$\mathbf{m}_{ii}$  : Matriz de Massa Local referente ao nó  $i$ ;

$\rho_n$  : Massa específica do elemento “n” conectado ao nó  $i$ ;

$A_n$  : Área da seção do elemento “n” conectado ao nó  $i$ ;

$L_n$  : Comprimento do elemento “n” conectado ao nó  $i$ ;

$n$ : número do elemento ( $n \in I$ )

Segundo Przemienieck (1968), na maioria das aplicações práticas este é método mais utilizado devido às significativas vantagens computacionais provindas do fato de a matriz de massa da estrutura ser diagonal.

O programa *Microsoft Excel* auxiliou na obtenção das matrizes de massa locais para, conseqüentemente, ser montada a matriz de massa global completa de cada uma das estruturas. Neste caso também poderia ser utilizado o programa *MATLAB* poderia para gerar tais matrizes.

### 3.2 VARIAÇÃO DE RIGIDEZ E DESLOCAMENTO EM ESTRUTURA COM DANO

Considerando a análise estática de uma estrutura sem defeito, em equilíbrio e submetida à determinada carga, o resultado de seus deslocamentos obedece à seguinte Equação 3.23.

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}_0]\{\mathbf{u}_0\} \quad (3.23)$$

Em que:

$[\mathbf{K}_0]$ : matriz de rigidez da estrutura intacta;

$\{\mathbf{u}_0\}$ : vetor deslocamento da estrutura intacta;

$\{\mathbf{P}\}$ : vetor de cargas aplicadas à estrutura.

Ao analisarmos a mesma estrutura, porém submetida a determinado dano, haverá uma variação  $\Delta\mathbf{K}$  em sua matriz de rigidez. Então, a Equação 3.24 representa uma nova situação de equilíbrio.

$$\{\mathbf{P}\} = ([\mathbf{K}_0] + [\Delta\mathbf{K}])\{\mathbf{u}\} \quad (3.24)$$

Em que:

$\{u\}$  : vetor de deslocamento da estrutura com dano;

$[\Delta K]$ : matriz resultante da variação entre as matrizes de rigidez da estrutura intacta e danificada

A Equação 3.24 também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{u\} = (K_0 + \Delta K)^{-1} \{P\} = K^{-1} \{P\} \quad (3.25)$$

Se considerarmos a inversa da matriz  $K$ , ou seja  $K^{-1}$ , aproximada por uma série de Taylor truncando o desenvolvimento no termo de primeira ordem, resulta-se em:

$$K^{-1} = K_0^{-1} - K_0^{-1}(\Delta K) K_0^{-1} \quad (3.26)$$

E então, substituindo a Equação 3.26, encontrada pela aproximação em série, na expressão 3.25, teremos:

$$\{u\} = K^{-1} \{P\} \approx \left( [K_0^{-1}] - [K_0^{-1}][\Delta K][K_0^{-1}] \right) \{P\} \quad (3.27)$$

E assim a variação  $\{\Delta u\}$  entre estrutura sem e com dano possui a relação apresentada pela Equação 3.28, a seguir:

$$\{\Delta u\} = \{u_0\} - \{u\} = [K_0^{-1}][\Delta K][K_0^{-1}]\{P\} \Rightarrow [K_0]\{\Delta u\} = [\Delta K]\{u_0\} \quad (3.28)$$

A Equação 3.28 foi utilizada no estudo de Wang, Hu e Yao (2000) para a obter o parâmetro  $\{\Delta u\}$  e utilizá-lo dentro da formulação da assinatura. Entretanto existe imprecisão na variação  $\{\Delta u\}$ , pois, para obtê-la, foi utilizado o procedimento experimental que fatalmente incorre em erros de medição, condições físicas, entre outros. Sendo assim, neste trabalho, o cálculo da variação de deslocamento  $\{\Delta u\}$  será feito de forma numérica a

partir de  $\{\mathbf{u}\}$  e  $\{\mathbf{u}_0\}$  que serão calculados pelas suas respectivas matrizes de rigidez  $[\mathbf{K}]$  e  $[\mathbf{K}_0]$ , conferindo dessa forma maior precisão aos resultados.

### 3.2.1 Cálculo do Deslocamento

Os deslocamentos foram obtidos a partir da análise estática das estruturas, utilizando como premissa a Equação 3.5, com o auxílio do programa *MATLAB 7.0*.

No programa *MATLAB 7.0* foram introduzidas as matrizes de rigidez ( $\mathbf{K}$ ) e de força ( $\mathbf{P}$ ) aplicada nos nós de certa estrutura.

A expressão, em linguagem do programa *MATLAB* é representada pelas Equações 3.29, 3.30 e 3.31 para o cálculo do deslocamento.

$$\gg \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \dots & \mathbf{K}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix}; \quad (3.29)$$

$$\gg \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \dots \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix}; \quad (3.30)$$

$$\gg \mathbf{u} = \text{inv}(\mathbf{K}) * \mathbf{P} \quad (3.31)$$

Em que:

K: Matriz de rigidez da estrutura

P: Forças aplicadas nos nós da estrutura

u: Matriz de deslocamento da estrutura;

Em pseudocódigo:

Passo 1: Gerar todos os elementos da matriz de rigidez K na planilha do *Microsoft Excel*.

Passo 2: Gerar todos os elementos da matriz de forças  $\mathbf{P}$  aplicadas na planilha do *Microsoft Excel*.

Passo 3: Entrar no programa *MATLAB 7.0*.

Passo 4: Copiar e definir no *MATLAB 7.0* a matriz  $\mathbf{K}$ , conforme a Equação 3.29

Passo 5: Copiar e definir no *MATLAB 7.0* a matriz  $\mathbf{P}$ , conforme a Equação 3.30.

Passo 6: Resolver a Equação 3.31.

Desse modo, foram calculados os deslocamentos para variação do posicionamento das cargas nos nós da estrutura.

Além da obtenção dos deslocamentos, o próximo passo para que existam parâmetros suficientes para o cálculo das assinaturas, e posterior análise da localização do dano na estrutura, é a obtenção da variação de frequências, como será apresentado a seguir.

### 3.3 VARIAÇÃO DE FREQUÊNCIAS EM ESTRUTURA COM DANO

Considerando agora a equação da análise modal de uma estrutura, a análise dinâmica para obtenção das frequências naturais e os modos de vibração é feita para a estrutura não amortecida e sem aplicação de forças externas teremos (Livesley, 1969):

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{u}(t)\} = \{\mathbf{P}(t)\} \quad (3.32)$$

Em que:

$[\mathbf{K}]$  : é a matriz de rigidez da estrutura;

$[\mathbf{M}]$ : é a matriz de massa;

$\{\mathbf{u}(t)\}$  : vetor deslocamento;

$\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\}$  : vetor aceleração.

A obtenção dos valores de frequências naturais e os modos de vibração são de extrema importância para a análise dinâmica de detecção de danos uma vez que as frequências naturais permitem detectar a existência de danos, já que sofrem alterações em relação à frequência da estrutura intacta, e os modos de vibração fornecem informações

localizadas ao longo de toda a estrutura (Santos, 2007). Nesta pesquisa, somente será trabalhada a localização do dano e, portanto, serão utilizadas apenas as frequências naturais.

Resolvendo a Equação 3.32 para um sistema linear, obteremos:

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \{\phi\}_j \cdot \cos(\omega_j \cdot t) \quad (3.33)$$

Em que:

$\{\phi\}_j$ : autovetor, representando o modo de vibração da j-ésima frequência natural;

$\omega_j$ : j-ésima frequência circular natural;

t : tempo

j = 1, 2, ....., n

Considerando a Equação 3.33, para uma estrutura não-danificada, teremos:

$$(-\omega_{j_0}^2 \cdot [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{K}_0]) \cdot \{\phi_0\}_j = 0 \quad (3.34)$$

Em que:

$[\mathbf{K}_0]$ : matriz de rigidez da estrutura intacta;

$[\mathbf{M}_0]$ : matriz de massa da estrutura intacta;

$\{\phi_0\}_j$ : autovetor da estrutura intacta;

$\omega_{j_0}$ : frequência circular natural da estrutura intacta.

Em uma estrutura rígida, ao longo da qual não existem pontos que permitam rotação e/ou translação livres, como é o caso das estruturas apresentadas neste trabalho; sabe-se que a matriz de rigidez é não-singular.

Sendo assim, assumindo  $\det[\mathbf{K}_0] \neq \{0\}$ , podemos multiplicar a Equação 3.34 por

$\left(\frac{1}{\omega_{j0}^2} \cdot [\mathbf{K}_0]^{-1}\right)$  e obteremos as Equações 3.35 e 3.36.

$$\left(\frac{1}{\omega_{j0}^2} \cdot \mathbf{I} - [\mathbf{K}_0]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_0]\right) \cdot \{\phi_0\}_j = 0 \quad (3.35)$$

$$\left(\frac{1}{\omega_{j0}^2} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{D}_0\right) \cdot \{\phi_0\}_j = 0 \quad (3.36)$$

Em que:

$\mathbf{I}$ : matriz identidade;

$\mathbf{D}_0 = [\mathbf{K}_0]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_0]$ , também chamada “matriz dinâmica”, para a estrutura intacta (Przemieniecki, 1968).

Então, a equação característica das frequências naturais para vibrações livres em uma estrutura rígida é descrita pela Equação 3.37:

$$\left| \frac{1}{\omega_{j0}^2} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{D}_0 \right| = 0 \quad (3.37)$$

Considerando  $\frac{1}{\omega_{j0}^2} = \lambda_0$ , teremos para a vibração livre de uma estrutura não-

danificada, o problema de autovalor que pode ser visto pela Equação 3.38:

$$|\lambda_0 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{D}_0| = 0 \quad (3.38)$$

De forma semelhante, teremos as equações para as estruturas danificadas que se apresentam a seguir:

$$\left(\frac{1}{\omega_j^2} \cdot \mathbf{I} - [\mathbf{K}]^{-1} \cdot [\mathbf{M}]\right) \cdot \{\phi\}_j = 0 \quad (3.39)$$

$$\left( \frac{1}{\omega_j^2} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{D} \right) \cdot \{\phi\}_j = 0 \quad (3.40)$$

$$\left| \frac{1}{\omega_j^2} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{D} \right| = 0 \quad (3.41)$$

$$|\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{D}| = 0 \quad (3.42)$$

Em que:

$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_0] + [\Delta\mathbf{K}]$ : matriz de rigidez da estrutura danificada;

$[\mathbf{M}] = [\mathbf{M}_0] + [\Delta\mathbf{M}]$ : matriz de massa da estrutura danificada;

$\{\phi\}_j = \{\phi_0\}_j + \{\Delta\phi\}_j$ : autovetor da estrutura danificada;

$\omega_j = \omega_0 + \Delta\omega$ : frequência circular natural da estrutura danificada;

$\mathbf{D} = [\mathbf{K}]^{-1} \cdot [\mathbf{M}]$ , também chamada “matriz dinâmica”, para a estrutura danificada.

$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ : autovalor da estrutura danificada.

Usualmente, é assumido que não há perda de massa devido ao dano e assim  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$  ou  $\Delta\mathbf{M} = 0$ . É importante salientar que assumir esta hipótese exerce influência significativa na obtenção dos autovalores  $\lambda$  uma vez que, analisando a Equação 3.42, é notável que o cálculo de  $\lambda$  depende do valor da matriz dinâmica  $\mathbf{D}$ , que por sua vez é diretamente proporcional à matriz de massa  $\mathbf{M}$ . Como  $[\mathbf{M}] = [\mathbf{M}_0] + [\Delta\mathbf{M}]$ , percebe-se que há considerável diferença no valor das frequências entre estruturas que possuem danos que provocam ou não perda de massa. Neste trabalho, será considerado que o dano não provoca perda de massa da estrutura, ou seja, que  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ , como ocorre usualmente. Sendo assim, o dano afeta apenas a matriz de rigidez da estrutura e não a de massa, e então a variação da frequência não leva em consideração a variação de perda de massa.

As assinaturas estruturais analisadas neste trabalho têm como objetivo identificar a localização de dano em estruturas aperticadas planas. Os principais parâmetros a serem aplicados a estas funções levam em conta, além da análise estática já apresentada

anteriormente com o cálculo dos deslocamentos, a análise dinâmica, especialmente, as variações de frequência  $\Delta\omega$ .

### 3.3.1 Cálculo das Freqüências

As freqüências foram obtidas a partir dos autovalores das estruturas, tal como mostram as Equações 3.40, 3.41, 3.42 anteriores, com o auxílio do programa *MATLAB 7.0*.

No programa *MATLAB 7.0* foram introduzidas as matrizes de massa ( $M$ ) e rigidez ( $K$ ) de certa estrutura e assim era obtida a matriz  $D$ , também chamada “matriz dinâmica” em que  $D = [K]^{-1} \cdot [M]$ . Esta expressão é calculada pelo programa de acordo com as expressões 3.43, 3.44 e 3.45, que mostra a linguagem em *MATLAB*:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} & [K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ & K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & K_{n1} & \dots & \dots & K_{nn} \end{matrix} \\ >> \mathbf{K} = & \quad \quad \quad (3.43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} [M_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{22} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & M_{nn} \end{matrix} \\ >> \mathbf{M} = & \quad \quad \quad (3.44) \end{aligned}$$

$$>> \mathbf{D} = \text{inv}(\mathbf{K}) * \mathbf{M} \quad (3.45)$$

Em pseudocódigo:

Passo-1: Gerar todos os elementos da matriz de rigidez ( $K$ ) na planilha do *Microsoft Excel*.

Passo-2: Gerar todos os elementos da matriz de massa ( $M$ ) na planilha do *Microsoft Excel*.

Passo-3: Entrar no programa *MATLAB 7.0*.

Passo-4: Copiar e definir no *MATLAB 7.0* a matriz  $K$ , conforme a Equação 3.43.

Passo-5 Copiar e definir no *MATLAB 7.0* a matriz  $M$ , conforme a Equação 3.44

Passo-6: Resolver a Equação 3.45.

Encontrada a matriz  $\mathbf{D}$ , o próximo passo é a obtenção dos autovalores ( $d$ ), que representam  $\frac{1}{\omega^2}$ , a partir da expressão representada pela expressão 3.46, também em linguagem do programa *MATLAB*.

$$\gg \mathbf{d} = \text{eig}(\mathbf{D}) \quad (3.46)$$

A expressão 3.47 mostra como é exposto o resultado das “n” frequências obtidas no programa *MATLAB 7.0*:

$$\gg \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1/\omega_1^2 \\ 1/\omega_2^2 \\ \dots \\ 1/\omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Sendo  $\omega_n$  a  $n$ ésima frequência natural da estrutura de matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ .

Na Equação 3.47, percebe-se que  $\mathbf{d}$  é uma matriz que contém todos os autovalores de acordo com as Equações 3.40 e 3.41. E então, invertendo e em seguida e extraíndo a raiz quadrada de cada valor desta matriz, teremos como resultado todas as frequências de uma determinada estrutura.

Sabendo-se como obter as frequências e os deslocamentos (descrito na subseção 3.2), resta agora organizá-los para análise de detecção de danos em estruturas o que será feito pela definição das assinaturas estruturais a seguir.

### 3.4 METODOLOGIA

Neste capítulo já foram definidos os parâmetros principais a serem utilizados para a localização do dano, porém estes devem ser organizados de forma a validar uma avaliação e assim atingir o objetivo de localizar um dano em determinada estrutura. Por isso, foram escolhidas algumas assinaturas estruturais.

A assinatura estrutural é uma função cujo objetivo é representar a variação de comportamento de uma estrutura de acordo com o dano a que é submetida. A comparação entre os resultados obtidos para uma mesma assinatura pode identificar se a estrutura contém ou não algum defeito, além de localizá-lo e ainda definir a extensão deste dano. Porém, esta última abordagem não será enfocada neste estudo.

Nota-se que, para uma mesma estrutura, diferentes valores de deslocamentos e frequências resultarão em diferentes valores de uma dada assinatura que dependa destes parâmetros. Os deslocamentos ( $u$ ) variam de acordo com a combinação da localização da carga no nó e do dano simulado, enquanto a frequência ( $\omega$ ) depende da localização e extensão deste dano.

É importante destacar que neste caso, foi utilizada a aplicação de uma carga concentrada em diferentes nós da estrutura para a obtenção dos deslocamentos, o que induz a uma mais aplicação prática, diferentemente do estudo de Dems e Mróz (2001) que apresentaram a variação do posicionamento do apoio da estrutura. Tal procedimento é não é adotado em experimentos reais, especialmente para estruturas de grande porte.

Sem considerar a extensão do dano nesta análise, como já foi citado, foram escolhidas para esta pesquisa algumas assinaturas baseadas apenas em parâmetros estáticos ( $\Delta u$ ), que são mais fáceis de serem obtidos experimentalmente, outras baseadas em combinações de parâmetros estáticos e dinâmicos ( $\Delta u$  e  $\Delta \omega$ , respectivamente), baseados em trabalhos de outros autores, e ainda há uma avaliação pura das frequências e das matrizes de rigidez da estrutura intacta *versus* danificada na tentativa de localização do dano. Todas estas análises serão mais detalhadas a seguir.

#### **3.4.1 Definição das Assinaturas Estruturais**

A definição das assinaturas, que serão apresentadas nesta subseção, fundamenta-se ainda em trabalhos de diversos autores, entre eles Brito (2008), Wang, Hu e Yao (2000), Bezerra e Saigal, (1993) e Silva, (2005).

As assinaturas adotadas neste trabalho buscam melhorar estudos anteriores e até mesmo sanar suas falhas. Desse modo, pretende-se que os gráficos referentes a estas funções apontem a localização do dano com a maior precisão, comprovando assim uma maior sensibilidade para detecção do dano.

A primeira assinatura estrutural analisada,  $F_1(z)$ , é um somatório de coeficientes entre variações de deslocamentos e a primeira e segunda variações de freqüências naturais para todos os  $N$  nós da estrutura, tal como descrito na Equação 3.48.

$$F_1(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right] \quad (3.48)$$

Em que:

$\Delta u^j$ : diferença entre os deslocamentos nodais da estrutura intacta ( $u_0^j$ ) e da estrutura danificada ( $u^j$ ) nas direções  $x$  e  $y$  para os  $N$  pontos definidos para a estrutura.

$\Delta \omega_1^2$  e  $\Delta \omega_2^2$ : quadrados das diferenças entre as freqüências naturais obtidas com a estrutura intacta ( $\omega_0^j$ ) e com a estrutura danificada ( $\omega^j$ ), somente considerando a primeira e a segunda freqüência natural de vibrar da estrutura, respectivamente.

Em uma formulação matemática mais específica, pode-se representar os parâmetros descritos acima pelas Equações 3.49, 3.50, 3.51 e 3.52 a seguir.

$$(\Delta u_x^j)^2 = (u_{0x}^j - u_x^j)^2 \quad (3.49)$$

$$(\Delta u_y^j)^2 = (u_{0y}^j - u_y^j)^2 \quad (3.50)$$

$$\Delta \omega_1^2 = (\omega_{01} - \omega_1)^2 \quad (3.51)$$

$$\Delta \omega_2^2 = (\omega_{02} - \omega_2)^2 \quad (3.52)$$

A segunda assinatura,  $F_2(z)$ , está descrita na Equação 3.53 e considera a razão entre os somatórios das diferenças dos quadrados dos deslocamentos nas direções x e y e das seis primeiras frequências, entre a estrutura intacta e danificada. Os deslocamentos utilizados para o cálculo de  $F_2(z)$  são computados para todos os N nós, enquanto as frequências naturais utilizadas serão apenas as seis primeiras extraídas da estrutura ( $\Delta\omega_k^2$ ).

$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})}{\sum_{k=1}^6 \Delta\omega_k^2} \quad (3.53)$$

Em que:

$$\Delta\omega_k^2 = (\omega_{0k} - \omega_k)^2 \quad (3.54)$$

$\Delta u_x^{j2}$  e  $\Delta u_y^{j2}$  já foram definidos pelas Equações 3.49 e 3.50

A assinatura  $F_3(z)$ , mostrada pela Equação 3.55, é computada apenas para todos os deslocamentos associados aos N nós dos elementos das estruturas, portanto tem uma formulação exclusivamente estática. Esta assinatura utiliza a soma das diferenças de deslocamentos estáticos ao quadrado, nas duas direções x e y, entre a estrutura intacta e a danificada.

$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2}) \quad (3.55)$$

A assinatura  $F_4(z)$ , representada pela Equação 3.56, foi criada pela multiplicação do somatório dos quadrados das diferenças  $\Delta u_j^2$  (entre estrutura intacta e danificada) de todos os N deslocamentos nodais resultantes, nas direções x e y; e do somatório quadrado das diferenças (entre estrutura intacta e danificada) das seis primeiras frequências da estrutura ( $\Delta\omega_k^2$ ).

$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2}) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta\omega_k^2 \quad (3.56)$$

A Equação 3.57 representa a assinatura  $F_5(z)$  é semelhante à assinatura  $F_1(z)$  pelo fato de apresentar apenas parâmetros estáticos. É definida pelo logaritmo da soma das diferenças de deslocamentos ao quadrado, nas direções x e y, somado de 1, para cada nó da estrutura analisada.

$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1) \quad (3.57)$$

O somatório de uma unidade dentro do logaritmo possibilita que, na Equação 3.57, a somatória dos  $\Delta u_x^{j2}$  e  $\Delta u_y^{j2}$  seja nula sem que o número obtido para o cálculo do logaritmo seja nulo. Caso ocorra  $\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} = 0$ , a expressão de  $F_5(z)$  resultará em  $\log(1) = 0$ .

Por fim, a Equação 3.58 define a assinatura  $F_6(z)$  a qual adota o somatório do produto dos quadrados das diferenças (entre estrutura intacta e danificada) dos N deslocamentos resultantes  $\Delta u_j^2$  e das seis primeiras frequências naturais  $\Delta \omega_k^2$ , tomando-se também as seis primeiras frequências assim como nas funções anteriores.

$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2 \quad (3.58)$$

A assinatura  $F_6(z)$  é idêntica a uma das assinaturas de Brito (2008), contudo existe a diferenciação na análise já que  $F_6(z)$  será calculada para estruturas aporticadas e não para treliças.

Observa-se que para as assinaturas aqui definidas há um limite máximo de utilização de seis frequências para o cálculo, pois se considera a dificuldade em se obter, na prática, um grande número de frequências naturais da estrutura.

Considera-se ainda que as seis primeiras frequências naturais referem-se às frequências mais baixas, ou seja, às seis primeiras frequências de menor valor. Na prática, há maior facilidade em medi-las, pois representam períodos maiores. A medição de

períodos maiores diminui os erros experimentais e, conseqüentemente, aproxima os resultados teóricos dos reais.

Como se pôde perceber pelas formulações apresentadas, o parâmetro dinâmico é utilizado em quase todos os casos devido à relação direta que há entre o dano e a variação das freqüências nas estruturas. Portanto, outra tentativa de detecção de dano pode ser feito simplesmente por uma comparação do comportamento entre as freqüências  $\omega$  obtidas para estados intacto e danificado e ainda pela comparação entre variações das freqüências  $\Delta\omega$  observando seus diferentes resultados para as diversas localidades de danos de uma mesma estrutura.

Além das freqüências, o defeito em uma estrutura também está diretamente ligado a sua matriz de rigidez, conforme apresentado na subseção 3.2. Sabe-se que o aparecimento de uma falha na estrutura reflete-se diretamente na perda de rigidez e, portanto torna-se importante uma análise da sensibilidade dos elementos das matrizes de rigidez globais das estruturas. Nota-se que os elementos desta matriz fazem correspondência com os elementos da estrutura e então uma variação da matriz de rigidez pode indicar a localidade do dano na estrutura.

Para todas estas assinaturas aqui apresentadas que possuem a finalidade de localização de defeitos em estruturas, o capítulo seguinte apresentará as estruturas nas quais foram aplicadas estas definições bem como os resultados obtidos para cada uma delas.

## 4. APLICAÇÕES E RESULTADOS

### 4.1 DEFINIÇÃO DAS SEÇÕES E MODELOS DAS ESTRUTURAS

As seções das estruturas definidas para as análises deste trabalho são de aço, possuem perfil “I” e apresentam as características mostradas pelas Figuras 4.1 e 4.2 e as Tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente.

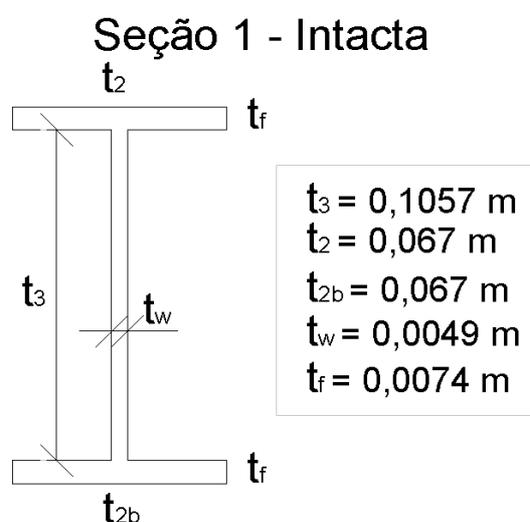


Figura 4.1 – Seção 1, que representa o estado intacto.

Tabela 4.1 – Características físicas da “Seção 1”

Características	Valores	Unidades
$E(\text{aço})$	2,050E+08	KPa
$\rho$	7,65	t/m <sup>3</sup>
Área da seção	1,437E-03	m <sup>2</sup>
$I_{x_1}$	2,71E-06	m <sup>4</sup>
$I_{y_1}$	3,72E-07	m <sup>4</sup>

## Seção 2 - Danificada

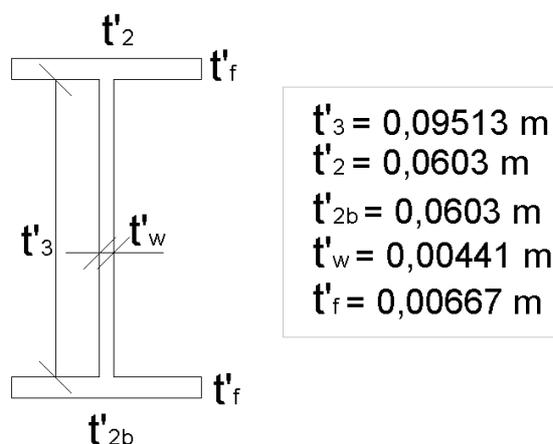


Figura 4.2 – Seção 2, que representa o estado danificado

Tabela 4.2 - Características físicas da “Seção 2”

Parâmetros	Valores	Unidades
E(aço)	2,050E+08	KPa
$\rho$	9,45	t/m <sup>3</sup>
Área da seção	1,164E-03	m <sup>2</sup>
$I_{x_2}$	1,776E-06	m <sup>4</sup>
$I_{y_2}$	2,44E-07	m <sup>4</sup>

A denominada “Seção 1” foi associada ao local sem dano e a “Seção 2” associada ao local com dano. Para representar o dano, no local onde seria considerado danificado, houve uma substituição da “Seção 1” pela “Seção 2” que apresenta, aproximadamente, uma redução de 19% em relação à área da “Seção 1” e redução de 65% em relação à inércia, assim como mostram as Tabelas 4.3 e 4.4 a seguir.

Tabela 4.3 – Quantificação da redução da área referente ao dano

Área Seção 1 (Não Danificada)	Área Seção 2 (Danificada)	Redução de área
1,437E-03 m <sup>2</sup>	1,164E-03 m <sup>2</sup>	19%

Tabela 4.4 – Quantificação da redução do momento de inércia referente ao dano

$I_x$ Seção 1 (Não Danificada)	$I_x$ Seção 2 (Danificada)	Redução de Inércia
2,71E-06 m <sup>2</sup>	1,776E-06 m <sup>4</sup>	65%

Para a escolha da seção danificada, denominada “Seção 2”, considerou-se que uma diminuição em 10% cada dimensão da “Seção 1”, tal como pode ser observado pela comparação das medidas das seções (Figuras 4.2 e 4.3).

Percebe-se que massa específica ( $\rho$ ), das Tabelas 4.1 e 4.2, adotada para a “Seção 2” é maior que a da “Seção 1”. Isto ocorre, pois como a “Seção 2” é menor em dimensões, se a massa específica fosse a mesma, sua massa resultaria menor que a da Seção 1. Porém, como neste trabalho não é considerada a perda de massa quando aplicado o dano, adota-se uma massa específica maior para a “Seção 2”, pois como possui menores dimensões, a massa se mantém constante.

As estruturas escolhidas para análises das assinaturas são: uma viga em balanço, uma viga biengastada e um pórtico simples. Tais estruturas estão representadas pelas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 a seguir.

Viga em Balanço

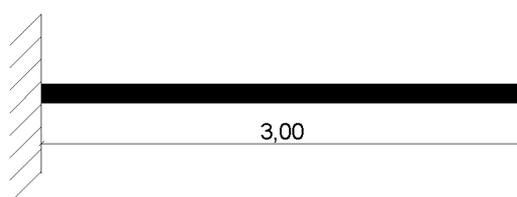


Figura 4.3 – Viga engastada em balanço, dimensão em metros

Viga Biengastada

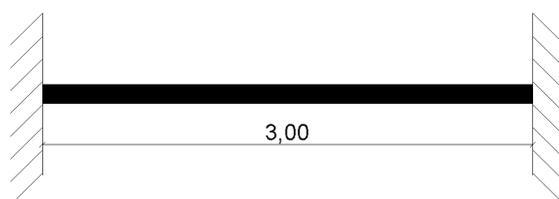


Figura 4.4 – Viga biengastada, dimensão em metros

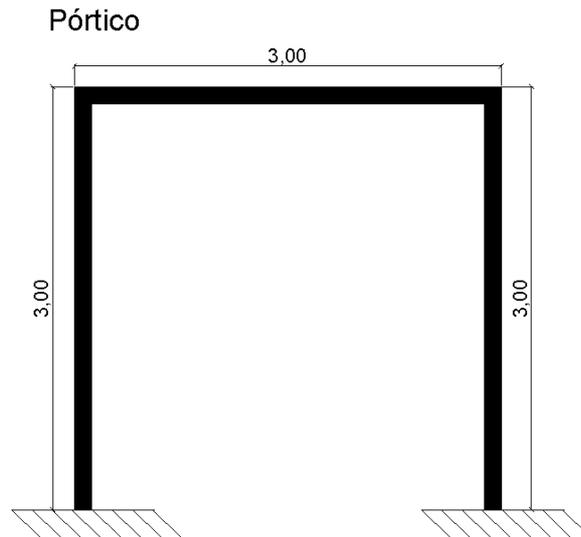
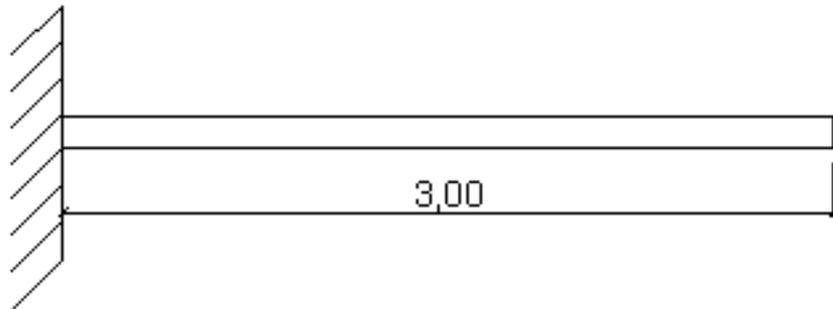


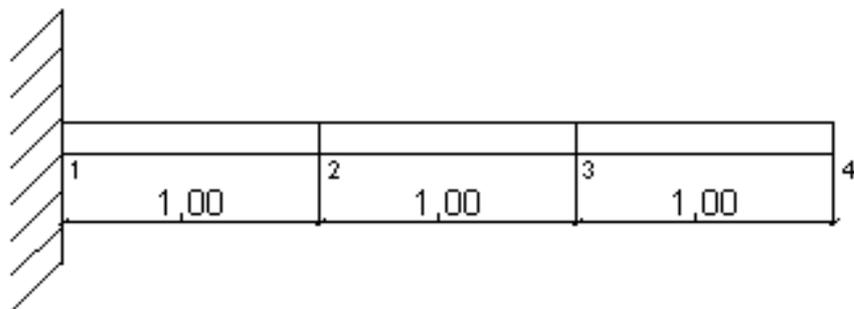
Figura 4.5 – Pórtico engastado nas extremidades, dimensão em metro

As vigas, tanto a biengastada quanto a em balanço, foram divididas em 3, 6 e 10 elementos enquanto o pórtico foi dividido em 3, 6 e 30 elementos de iguais dimensões, com os devidos nós numerados, tal como mostram as Figuras 4.6, 4.7 e 4.8a, 4.8b e 4.8c.

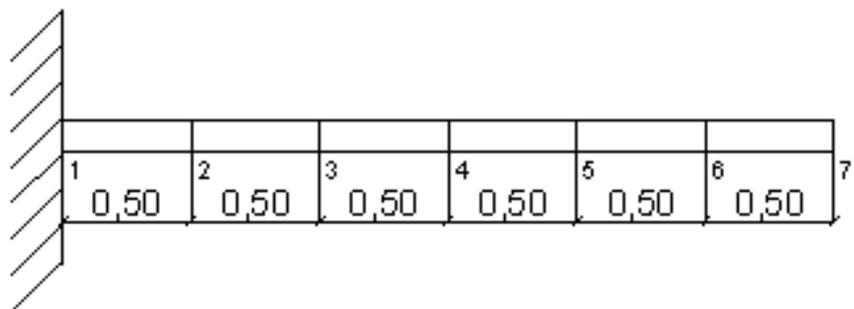
## Viga em Balanço



### 3 Elementos



### 6 Elementos



### 10 Elementos

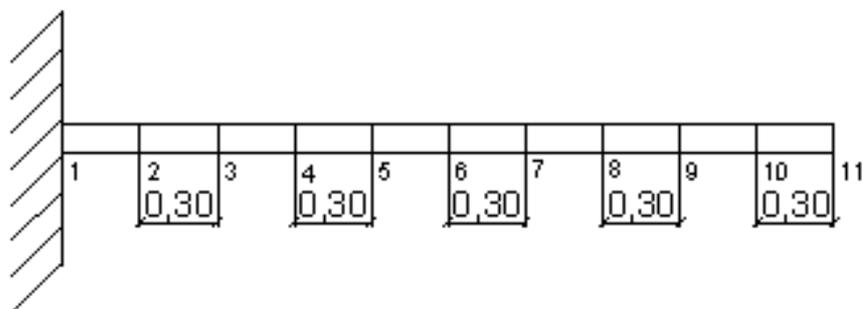
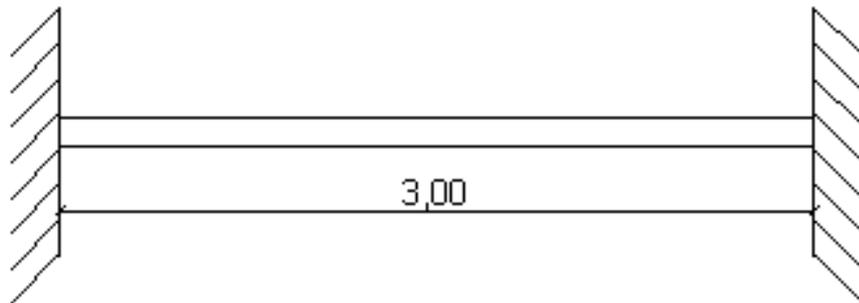
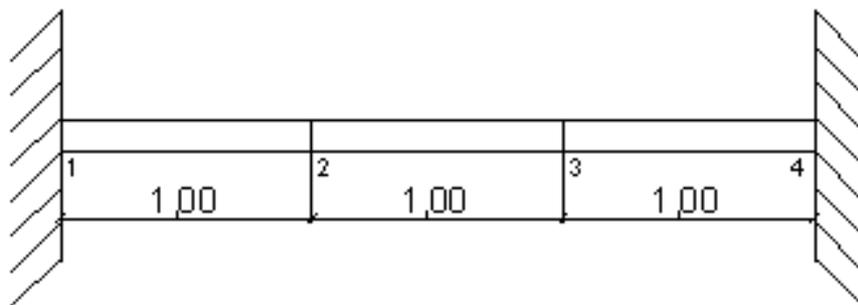


Figura 4.6 – Representação da subdivisão utilizada na viga engastada em balanço, com as devidas numerações dos nós e dimensões dos subelementos, com unidade em metros.

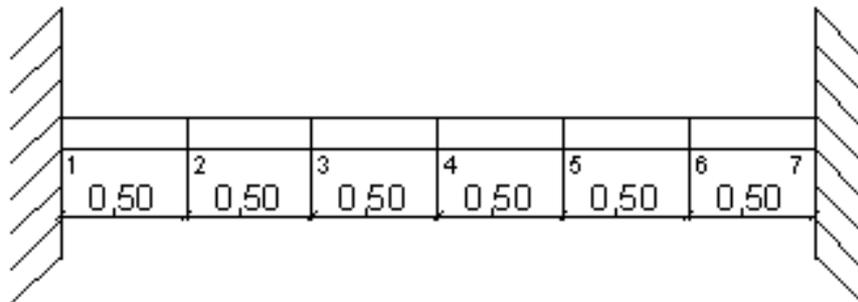
## Viga Biengastada



### 3 Elementos



### 6 Elementos



### 10 Elementos

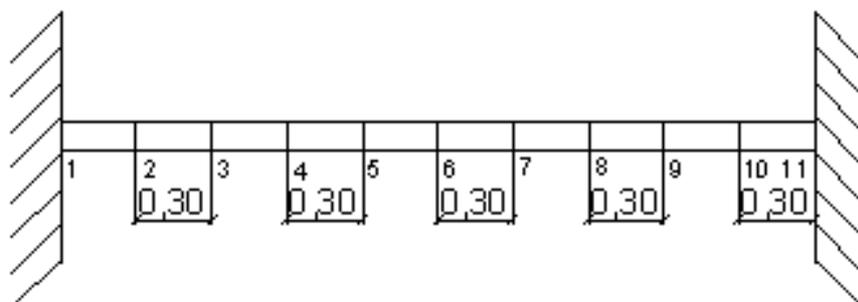
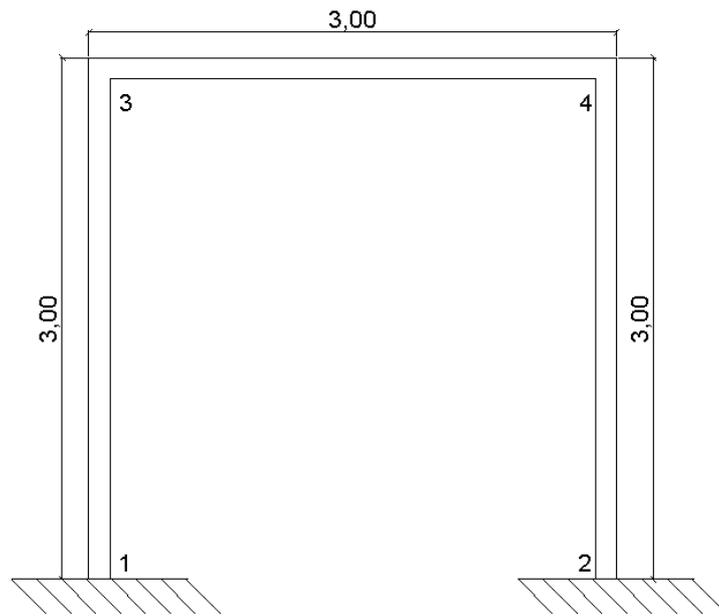


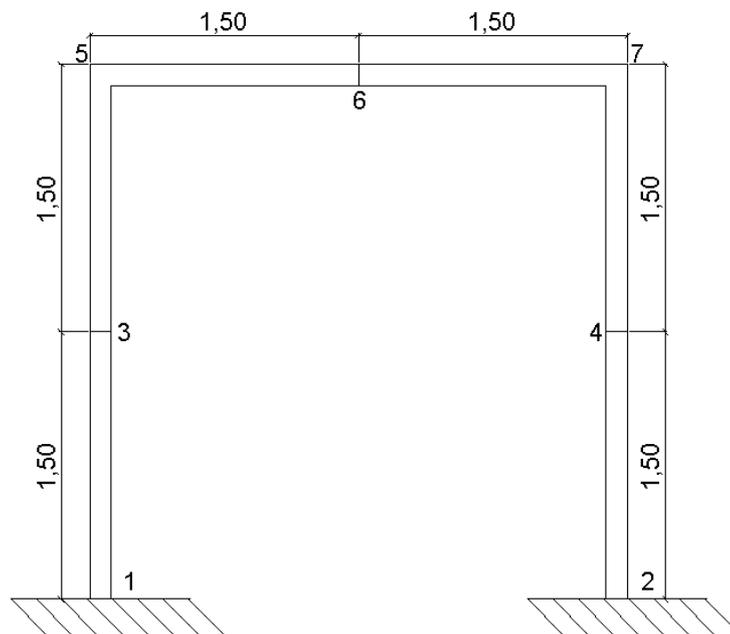
Figura 4.7 – Representação da subdivisão utilizada na viga biengastada, com as devidas numerações dos nós e dimensões dos subelementos, com unidade em metros.

### Pórtico - 3 Elementos



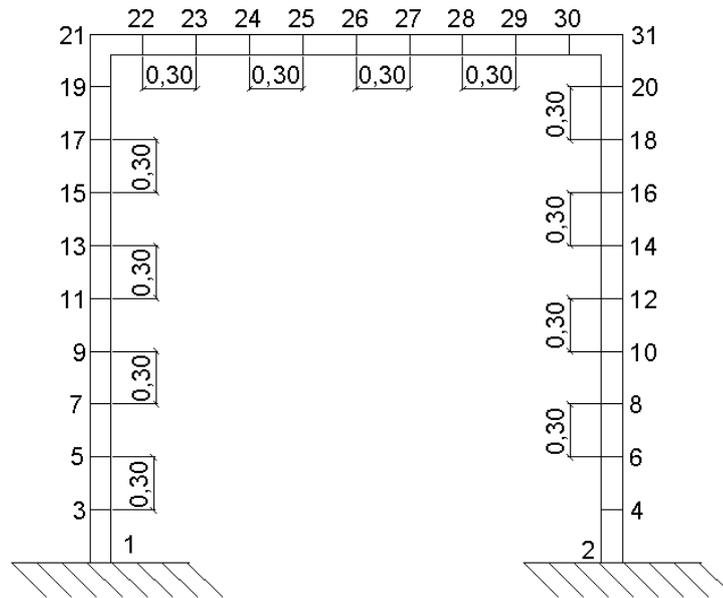
(a)

### Pórtico - 6 Elementos



(b)

### Pórtico - 30 Elementos



(c)

Figura 4.8 – Representação da subdivisão utilizada no pórtico, com as devidas numerações dos nós e dimensões dos subelementos, com unidade em metros

## 4.2 DEFINIÇÃO DAS CARGAS APLICADAS

A carga aplicada para obtenção dos resultados dos deslocamentos (análise estática) foi definida a partir do limite resistência do aço da seção “T” como mostra a Equação 4.1

$$P \leq \frac{W_x \cdot f_y}{L} \quad (4.1)$$

Considerando Aço AR 345:

$f_y = 345\text{MPa}$  é a tensão característica do aço utilizado

$L = 3\text{m}$  é o comprimento total da barra da estrutura

$W_x = 5,25 \cdot 10^{-5}$  é o módulo elástico do aço

$$P \leq 6,037\text{KN}$$

$$\bar{P} \approx 5,0\text{KN}$$

Portanto, a carga adotada a ser utilizada para cálculos dos deslocamentos é de 5,0 KN.

### 4.3 DEFINIÇÃO DAS LOCALIDADES DE APLICAÇÃO DE DANOS E CARGAS

Os danos foram aplicados em cada elemento subdividido da estrutura. A cada aplicação de dano foi calculada uma frequência, e a cada combinação de variação de dano e carga foi calculado um deslocamento. A Figura 4.9 a seguir mostra a viga em balanço dividida em três elementos com seus respectivos elementos danificados e as cargas aplicadas.

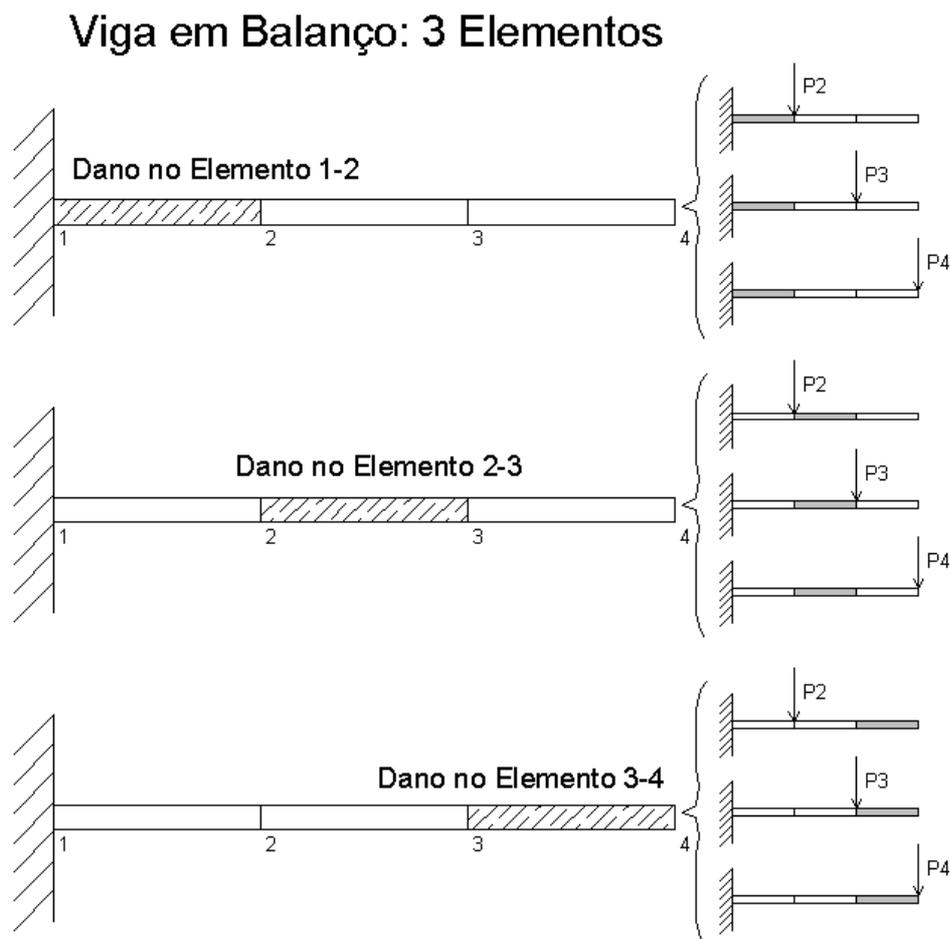


Figura.4.9 – Representação da aplicação de cargas por elemento danificado para o cálculo dos deslocamentos.

Adotou-se que todas as forças (P2, P3, P4, etc.) que foram aplicadas nas estruturas aqui estudadas possuem mesmo módulo de valor 5,0 KN, e sua numeração faz referência ao nó em que foi aplicada.

A nomenclatura dos elementos foi definida de acordo com os nós que os compõem seguindo a ordem da esquerda para direita, no caso das vigas, ou o sentido horário, no caso do pórtico. Por exemplo, pela Figura 4.6 o elemento da viga em balanço dividida em três elementos formada pelos nós 3 e 4 é denominado elemento 3-4.

Vale notar que no caso do pórtico, a análise se resume apenas aos elementos verticais com cargas aplicadas na horizontal, ou seja, nos elementos da barra horizontal não foram aplicados danos ou cargas para análises. No caso específico do pórtico dividido em trinta elementos, os pontos verticais para análise foram escolhidos alternadamente e assim nem todos os pontos verticais foram estudados devido à extensa quantidade de gráficos que resultaria.

Para identificar a localidade do dano, primeiramente, serão analisadas graficamente as assinaturas estruturais, para cada situação das estruturas já apresentadas e, posteriormente, serão analisadas as variações de freqüências e de matrizes de rigidez de cada estrutura.

Os resultados de deslocamentos e freqüências foram calculados com a utilização do programa MATLAB 7.0 e, conferidos com a utilização do programa *SAP2000*, apresentaram ótimas respostas, com erros próximos de zero.

#### **4.3.1 Utilização do SAP 2000**

Para se fazer a conferência dos valores obtidos com o MATLAB 7.0 foi necessário fazer a simulação das estruturas com as respectivas cargas no programa *SAP2000*.

Os parâmetros (como, por exemplo, algumas características do material) tiveram de ser alterados em alguns casos, já que o programa propõe um padrão para certos elementos, devendo estar de acordo com as Tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

Como, neste trabalho, foi considerado que não houve perda de massa no local do dano, a Seção 2, que representa o local danificado, deveria permanecer com a mesma massa da Seção não-danificada (Seção 1). Portanto, foi necessário alterar as características do aço para a Seção 2 para que esta, apesar de esta ser uma seção fisicamente menor (vide tabelas 4.3 e 4.4), permanecesse com a mesma massa da Seção 1.

Tendo a estrutura definida e também a localização do dano, as cargas de 5,0 KN foram aplicadas nó a nó. Então, foram obtidos os valores de deslocamento e frequência que foram comparados com os valores do MATLAB 7.0, tal como pode ser visto em alguns exemplos a seguir:

Tabelas 4.5 (a)-(d) – Comparação de frequências obtidas para viga em balanço dividida em 3 elementos.

**(a) INTACTA**

<b>SAP2000</b>	<b>MATLAB</b>		<b>Erro</b> %
Eigenvalue $w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	1/w <sup>2</sup>	w <sup>2</sup>	
<b>6.9707E+03</b>	1.4344E-04	<b>6.9716E+03</b>	0.01%
<b>2.2212E+05</b>	4.5015E-06	<b>2.2215E+05</b>	0.01%
<b>1.3773E+06</b>	7.2597E-07	<b>1.3775E+06</b>	0.01%
<b>7.1758E+06</b>	1.3936E-07	<b>7.1758E+06</b>	0.00%
<b>5.3561E+07</b>	1.8670E-08	<b>5.3561E+07</b>	0.00%
<b>9.9946E+07</b>	1.0005E-08	<b>9.9946E+07</b>	0.00%

**(b) DANO 1-2**

<b>SAP2000</b>	<b>MATLAB</b>		<b>Erro</b> %
Eigenvalue $w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	1/w <sup>2</sup>	w <sup>2</sup>	
<b>4.9152E+03</b>	2.0330E-04	<b>4.9187E+03</b>	0.07%
<b>1.9506E+05</b>	5.1249E-06	<b>1.9513E+05</b>	0.03%
<b>1.1738E+06</b>	8.5165E-07	<b>1.1742E+06</b>	0.03%
<b>6.2529E+06</b>	1.5991E-07	<b>6.2534E+06</b>	0.01%
<b>5.0179E+07</b>	1.9929E-08	<b>5.0178E+07</b>	0.00%
<b>9.9164E+07</b>	1.0084E-08	<b>9.9163E+07</b>	0.00%

**(c) DANO 2-3**

SAP2000	MATLAB		Erro
Eigenvalue			%
$w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	$1/w^2$	$w^2$	
<b>6.3317E+03</b>	1.5789E-04	<b>6.3335E+03</b>	0.03%
<b>1.8151E+05</b>	5.5069E-06	<b>1.8159E+05</b>	0.04%
<b>1.1679E+06</b>	8.5591E-07	<b>1.1683E+06</b>	0.04%
<b>6.6473E+06</b>	1.5044E-07	<b>6.6473E+06</b>	0.00%
<b>4.9727E+07</b>	2.0110E-08	<b>4.9727E+07</b>	0.00%
<b>9.4134E+07</b>	1.0623E-08	<b>9.4133E+07</b>	0.00%

**(d) DANO 3-4**

SAP2000	MATLAB		Erro
Eigenvalue			%
$w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	$1/w^2$	$w^2$	
<b>6.9200E+03</b>	1.4450E-04	<b>6.9203E+03</b>	0.00%
<b>1.9694E+05</b>	5.0761E-06	<b>1.9700E+05</b>	0.03%
<b>1.2200E+06</b>	8.1944E-07	<b>1.2203E+06</b>	0.03%
<b>7.1002E+06</b>	1.4085E-07	<b>7.0997E+06</b>	-0.01%
<b>4.9150E+07</b>	2.0346E-08	<b>4.9150E+07</b>	0.00%
<b>8.9170E+07</b>	1.1215E-08	<b>8.9170E+07</b>	0.00%

Tabelas 4.6 (a)-(d) – Comparação de frequências obtidas para viga biengastada dividida em 3 elementos.

**(a) INTACTA**

SAP2000	MATLAB		Erro
Eigenvalue			%
$w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	$1/w^2$	$w^2$	
<b>3.0265E+05</b>	3.3037E-06	<b>3.0269E+05</b>	0.01%
<b>1.6343E+06</b>	6.1179E-07	<b>1.6345E+06</b>	0.01%
<b>2.6781E+07</b>	3.7341E-08	<b>2.6780E+07</b>	0.00%
<b>8.0342E+07</b>	1.2447E-08	<b>8.0341E+07</b>	0.00%

**(b) DANO 1-2**

SAP2000	MATLAB		Erro
Eigenvalue			%
$w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	$1/w^2$	$w^2$	
<b>2.6165E+05</b>	3.8206E-06	<b>2.6174E+05</b>	0.03%
<b>1.4249E+06</b>	7.0155E-07	<b>1.4254E+06</b>	0.04%
<b>2.4115E+07</b>	4.1466E-08	<b>2.4116E+07</b>	0.00%
<b>7.7919E+07</b>	1.2834E-08	<b>7.7918E+07</b>	0.00%

(c) DANO 2-3

SAP2000	MATLAB		Erro
Eigenvalue			%
$w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	$1/w^2$	$w^2$	
<b>2.6342E+05</b>	3.7951E-06	<b>2.6350E+05</b>	0.03%
<b>1.3769E+06</b>	7.2598E-07	<b>1.3774E+06</b>	0.04%
<b>2.6782E+07</b>	3.7341E-08	<b>2.6780E+07</b>	-0.01%
<b>7.0165E+07</b>	1.4252E-08	<b>7.0166E+07</b>	0.00%

(d) DANO 3-4

SAP2000	MATLAB		Erro
Eigenvalue			%
$w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	$1/w^2$	$w^2$	
<b>2.6165E+05</b>	3.8206E-06	<b>2.6174E+05</b>	0.03%
<b>1.4249E+06</b>	7.0155E-07	<b>1.4254E+06</b>	0.04%
<b>2.4115E+07</b>	4.1466E-08	<b>2.4116E+07</b>	0.00%
<b>7.7919E+07</b>	1.2834E-08	<b>7.7918E+07</b>	0.00%

Tabelas 4.7 (a)-(d) – Comparação de frequências obtidas para o pórtico dividido em 3 elementos.

(a) INTACTA

SAP2000	MATLAB		Erro
Eigenvalue			%
$w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	$1/w^2$	$w^2$	
<b>5.2243E+03</b>	1.9139E-04	<b>5.2250E+03</b>	0.01%
<b>2.9756E+06</b>	3.3607E-07	<b>2.9756E+06</b>	0.00%
<b>2.9816E+06</b>	3.3539E-07	<b>2.9816E+06</b>	0.00%
<b>5.9550E+06</b>	1.6793E-07	<b>5.9549E+06</b>	0.00%

(b) DANO 1-3

SAP2000	MATLAB		Erro
Eigenvalue			%
$w^2$ (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )	$1/w^2$	$w^2$	
<b>4.4781E+03</b>	2.2323E-04	<b>4.4796E+03</b>	0.03%
<b>2.4127E+06</b>	4.1444E-07	<b>2.4129E+06</b>	0.01%
<b>2.9782E+06</b>	3.3577E-07	<b>2.9782E+06</b>	0.00%
<b>5.9547E+06</b>	1.6794E-07	<b>5.9545E+06</b>	0.00%

(c) DANO 3-4

SAP2000		MATLAB		Erro
Eigenvalue		1/w <sup>2</sup>	w <sup>2</sup>	%
w <sup>2</sup> (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )				
4.6429E+03		2.1533E-04	4.6441E+03	0.03%
2.9758E+06		3.3607E-07	2.9756E+06	-0.01%
2.9808E+06		3.3551E-07	2.9806E+06	-0.01%
4.8235E+06		2.0730E-07	4.8239E+06	0.01%

(d) DANO 4-2

SAP2000		MATLAB		Erro
Eigenvalue		1/w <sup>2</sup>	w <sup>2</sup>	%
w <sup>2</sup> (rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> )				
4.4781E+03		2.2324E-04	4.4796E+03	0.03%
2.4127E+06		4.1444E-07	2.4129E+06	0.01%
2.9782E+06		3.3577E-07	2.9782E+06	0.00%
5.9547E+06		1.6794E-07	5.9545E+06	0.00%

Tabela 4.8 - Comparação dos deslocamentos (u<sub>x</sub>) obtidos para viga em balanço dividida em 3 elementos, carga em P2 e dano no elemento 2-3 (unidade em metro).

Nó	SAP2000 u <sub>x</sub>	Nó	MATLAB u <sub>x</sub>	ERRO
1	0	1	0	0
2	-3.0000E-04	2	-3.0034E-04	0.11%
3	-7.5100E-04	3	-7.5084E-04	-0.02%
4	-1.2010E-03	4	-1.2013E-03	0.03%

Tabela 4.9 - Comparação dos deslocamentos (u<sub>x</sub>) obtidos para a viga biengastada dividida em 3 elementos, carga em P3 e dano no elemento 1-2 (unidade em metro).

Nó	SAP2000 u <sub>x</sub>	Nó	MATLAB u <sub>x</sub>	ERRO
1	0	1	0	0
2	-7.0000E-05	2	-7.0363E-05	0.52%
3	-9.4000E-05	3	-9.4170E-05	0.18%
4	0	4	0	0

Tabela 4.10 - Comparação dos deslocamentos (u<sub>x</sub> e u<sub>y</sub>) obtidos para o pórtico dividido em 3 elementos, carga em P3 e dano no elemento 1-3 (unidade em metro).

Nó	SAP2000		Nó	MATLAB		ERRO	
	u <sub>y</sub>	u <sub>x</sub>		u <sub>y</sub>	u <sub>x</sub>	u <sub>y</sub>	u <sub>x</sub>
1	0	0	1	0	0	0	0
3	1.6930E-03	2.7440E-06	3	1.6927E-03	2.7435E-06	-0.02%	-0.02%
2	0	0	2	0	0	0	0
4	1.6910E-03	-2.2220E-06	4	1.6899E-03	-2.2223E-06	-0.07%	0.01%

## 4.4 VIGA EM BALANÇO

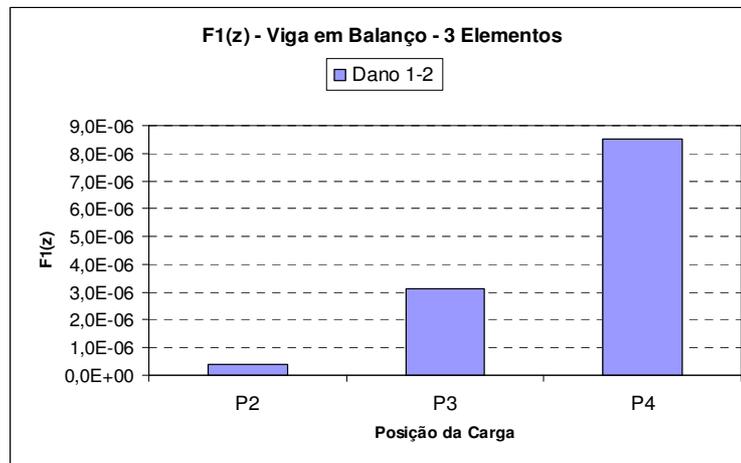
### 4.4.1 Viga em Balanço para 3 Elementos

A viga em balanço dividida em três elementos pode ser ilustrada pela Figura 4.6 que representa suas dimensões, nós e todas suas outras características físicas que foram utilizadas para a obtenção de seus deslocamentos e frequências.

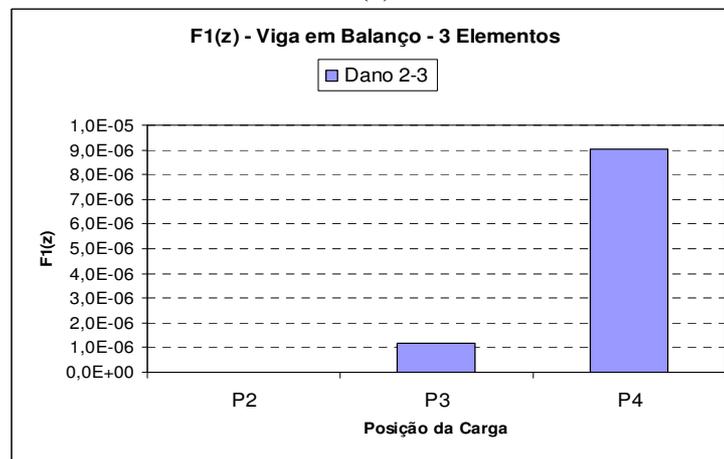
Os resultados de frequência e deslocamentos obtidos foram aplicados a cada uma das seis assinaturas estruturais definidas, combinando variações de localização danos e cargas.

Para as Assinaturas de  $F1(z)$  a  $F6(z)$ , tendo a carga concentrada de 5,0 KN no nó e mantendo o dano no mesmo elemento, tem-se os comportamentos demonstrados pelas Figuras 4.10 a 4.15.

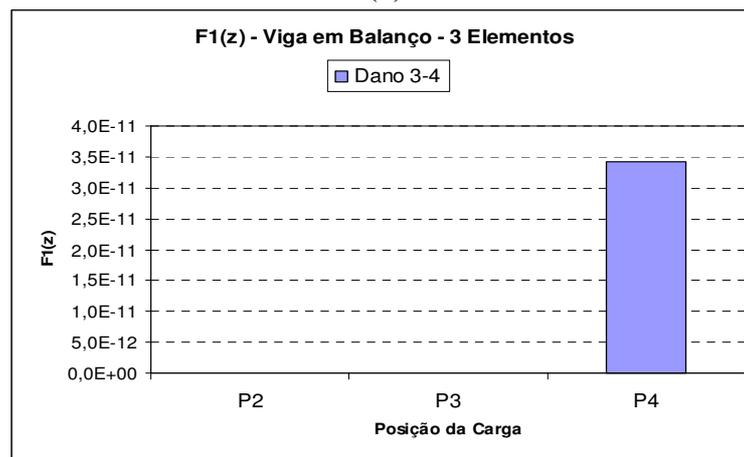
$$F_I(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right]$$



(a)



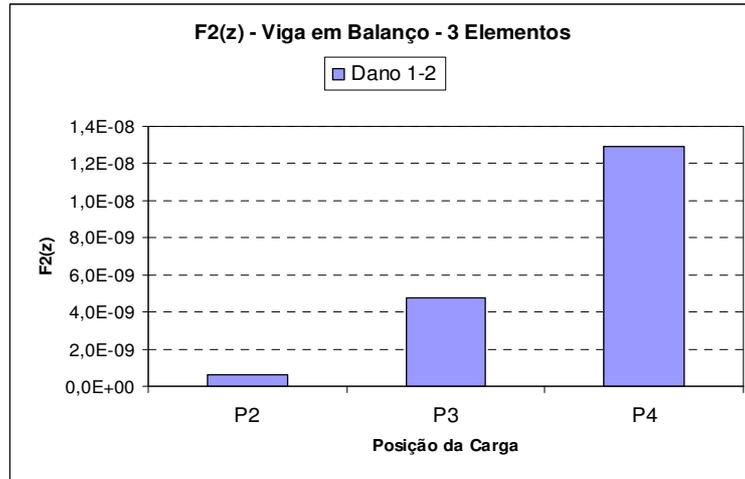
(b)



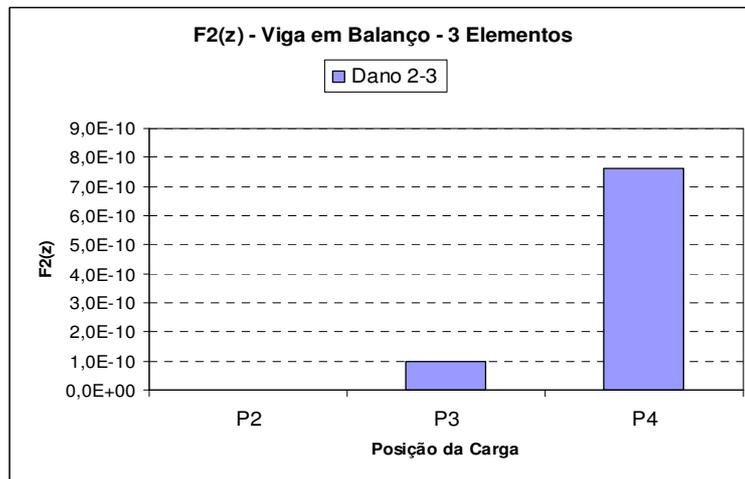
(c)

Figura 4.10 (a) a (c) – Representação gráfica da Assinatura  $F_I(z)$  para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

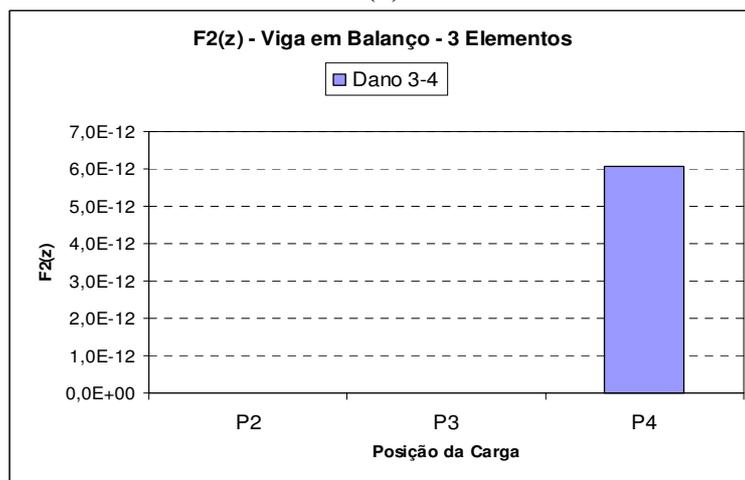
$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})}{\sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2}$$



(a)



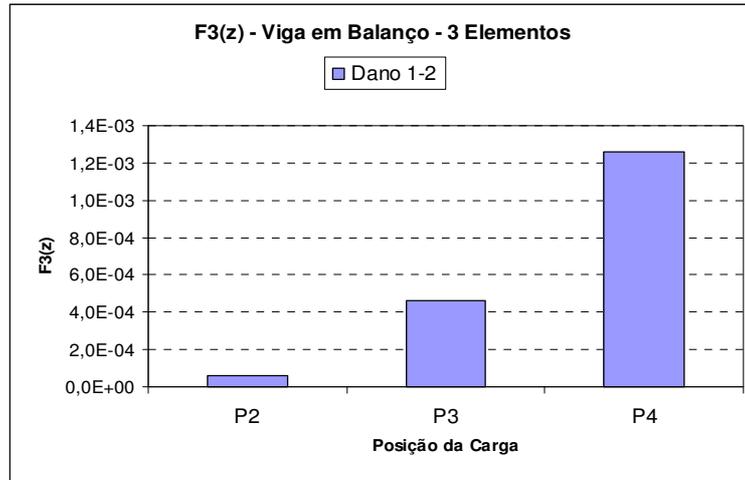
(b)



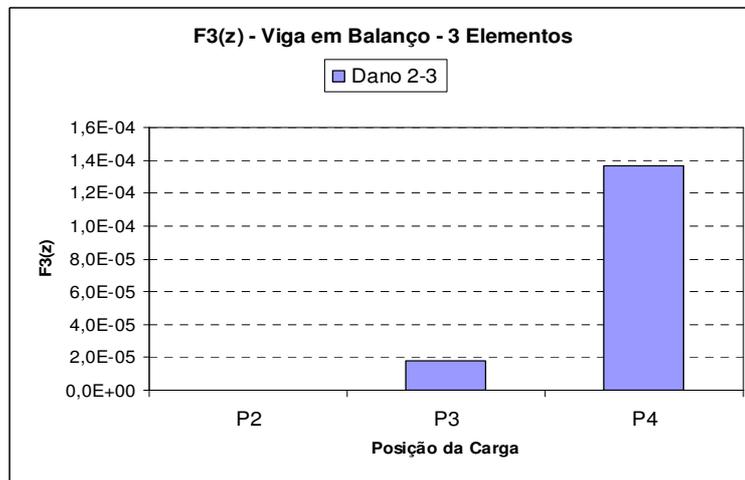
(c)

Figura 4.11 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_2(z)$  para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

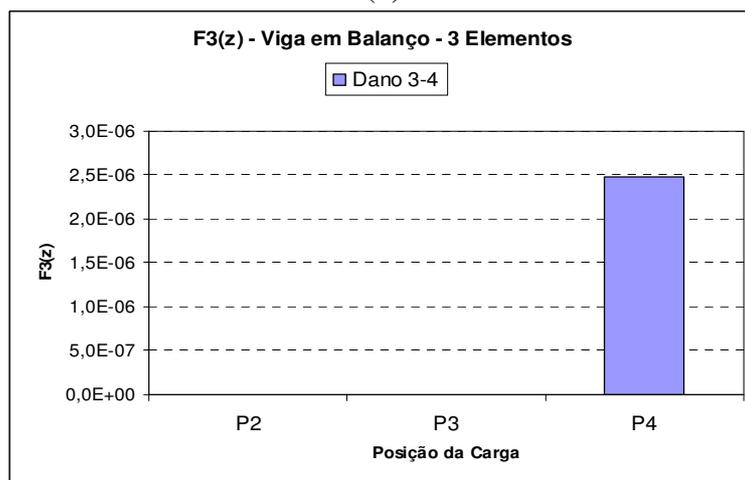
$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})$$



(a)



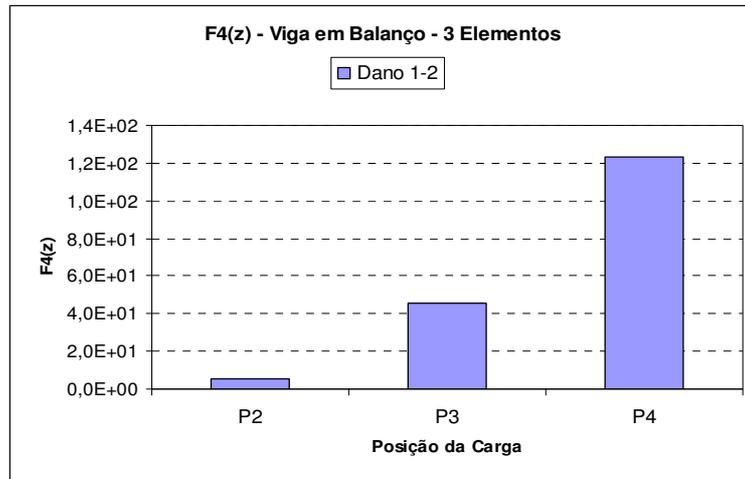
(b)



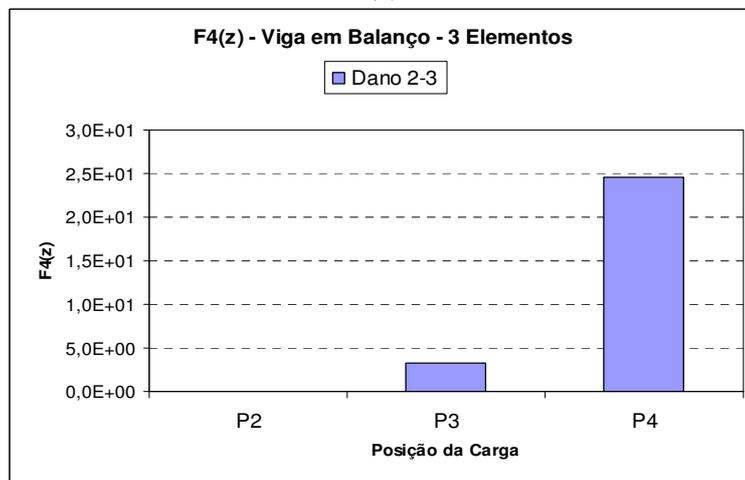
(c)

Figura 4.12 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_3(z)$  para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

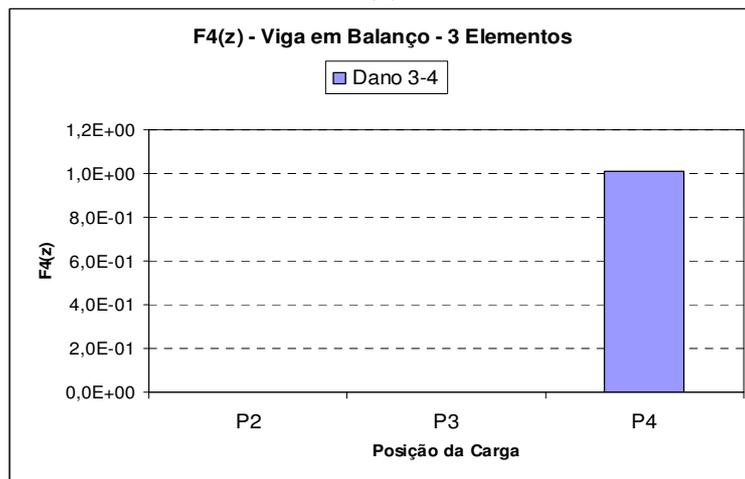
$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2}) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2$$



(a)



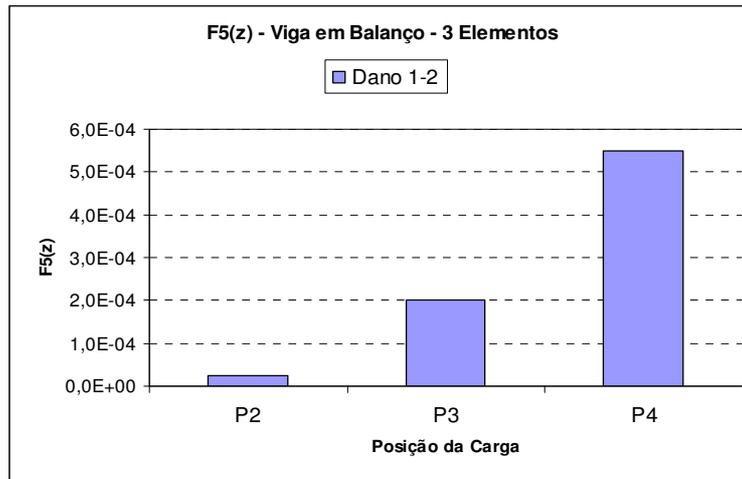
(b)



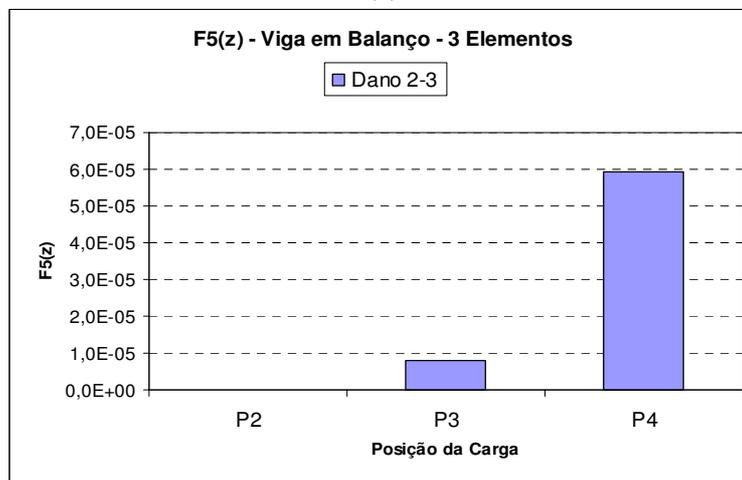
(c)

Figura 4.13 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_4(z)$  para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

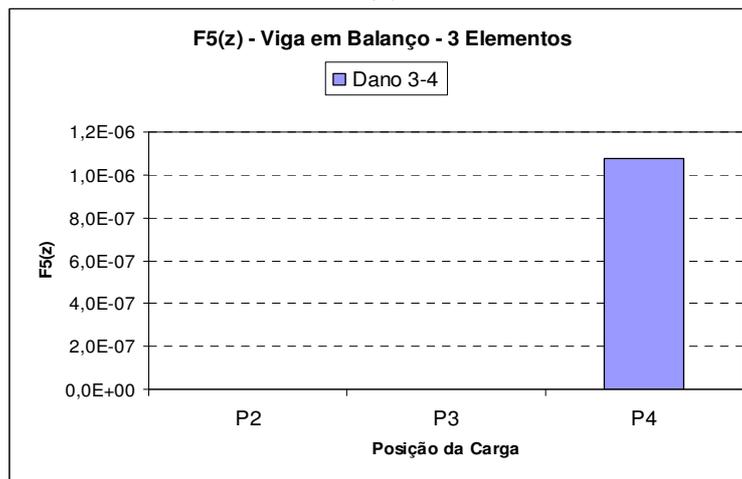
$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1)$$



(a)



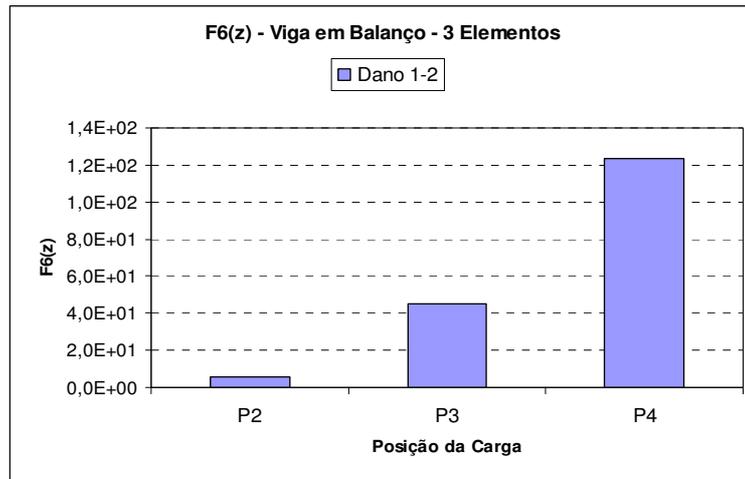
(b)



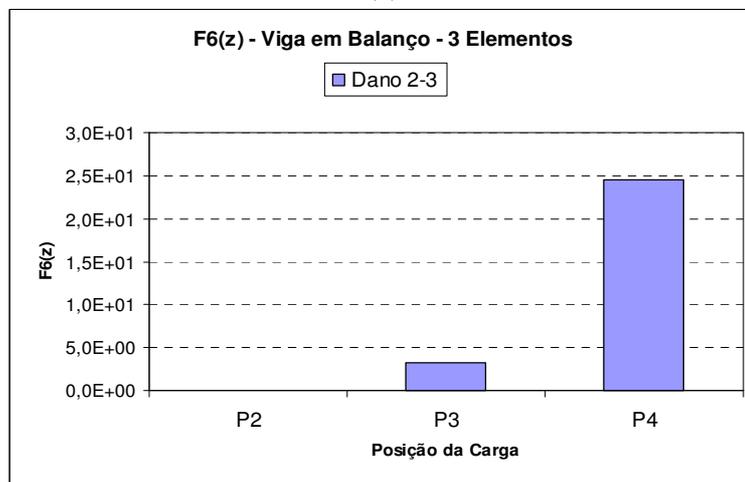
(c)

Figura 4.14 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_5(z)$  para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

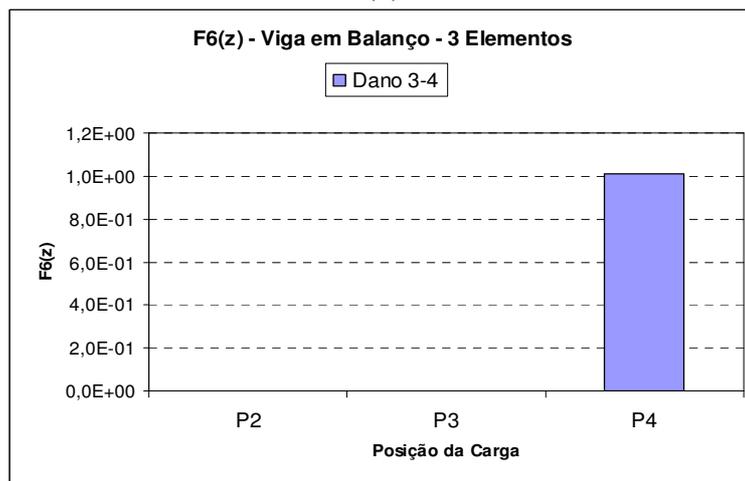
$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2$$



(a)



(b)



(c)

Figura 4.15 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_6(z)$  para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

Pode-se perceber que todos os gráficos representativos das Assinaturas possuem um comportamento semelhante entre si.

Analisando apenas o comportamento dos gráficos, sem observar os valores absolutos entre cada Assinatura, pode-se perceber que quando o dano está no elemento 1-2, o menor patamar das barras do gráfico ocorre quando a carga está aplicada no nó 2 (P2). Mas se o elemento 2-3 está danificado, dentre os valores significativos, o mínimo ocorre quando a carga está aplicada no nó 3 (P3). Por fim, caso o elemento 3-4 seja o danificado, só há valor significativo para a Assinatura se a aplicação de carga for no nó 4 (P4). Considera-se neste caso que um “valor significativo” é aquele que aparece representado no gráfico, ou seja, não é um valor nulo ou muito próximo de zero se comparado aos outros valores de uma mesma assinatura.

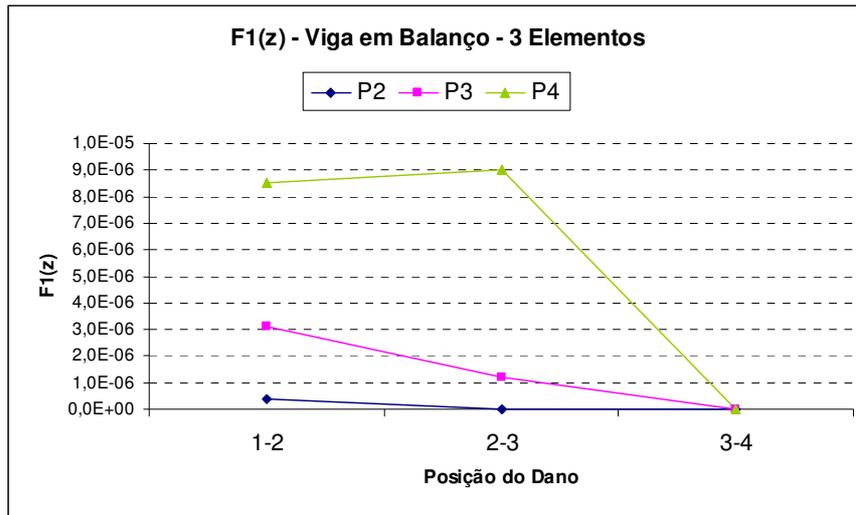
Portanto, pode-se determinar pelo comportamento dos gráficos qual a localidade do dano de acordo com a posição da carga: em uma viga em balanço qualquer, dividida em três elementos, passando uma carga de valor fixo a cada nó, o valor da Assinatura apresentará o menor valor significativo estará sempre à direita do nó referente ao elemento danificado. Por exemplo, se o valor mínimo significativo for obtido para a carga P3, significa que o dano está no elemento 2-3.

Vale ainda notar que em todos os casos para a viga em balanço de três elementos, o maior valor absoluto para cada Assinatura sempre aparece quando a carga é aplicada no nó 4 (P4), independentemente de qual seja o elemento danificado. Isto já era esperado uma vez que uma viga em balanço apresenta uma maior sensibilidade a uma determinada carga quanto mais a carga estiver distante do engaste.

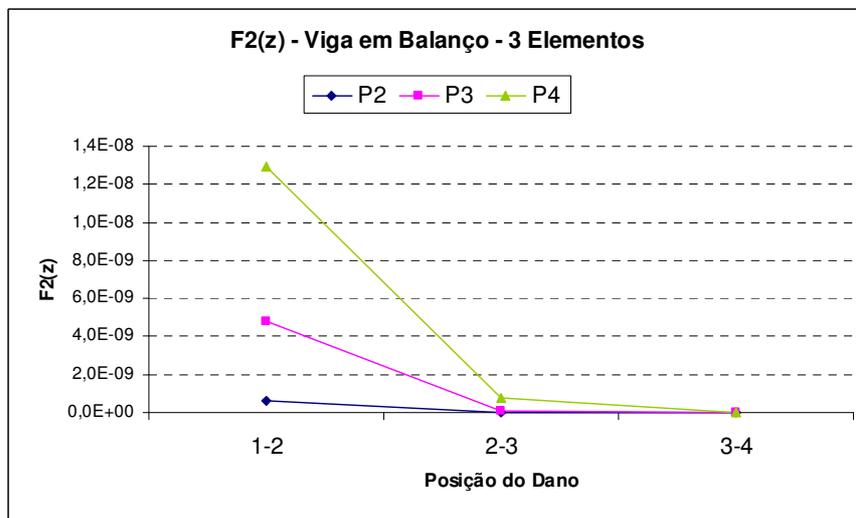
Fazendo agora uma análise das assinaturas com variação do dano a cada elemento e mantendo a carga fixa<sup>1</sup>, observou-se que o valor das assinaturas diminui gradualmente quanto mais o elemento danificado está afastado do engaste, como pode ser ilustrado pelos gráficos das Figuras de 4.16(a) a 4.16(f).

---

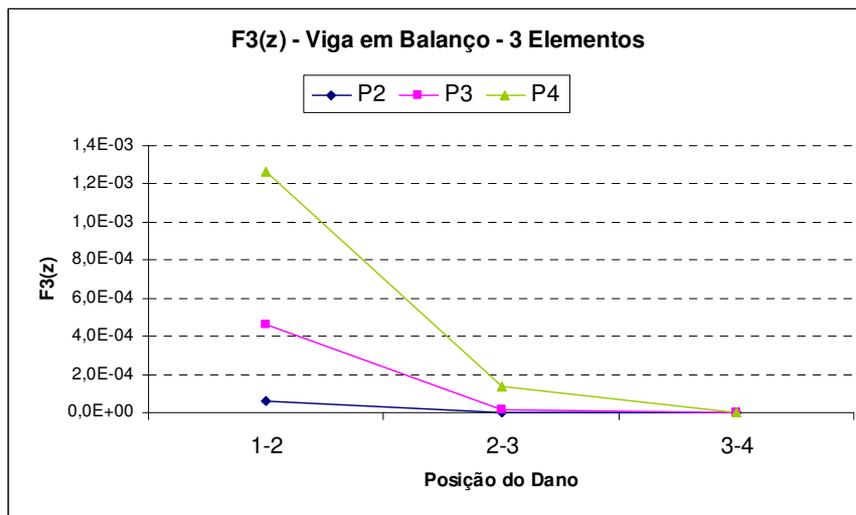
<sup>1</sup> Esta situação é obtida por teoria, já que na prática não é coerente variar o elemento danificado, mas sim a carga, como demonstrou a análise anterior.



(a)

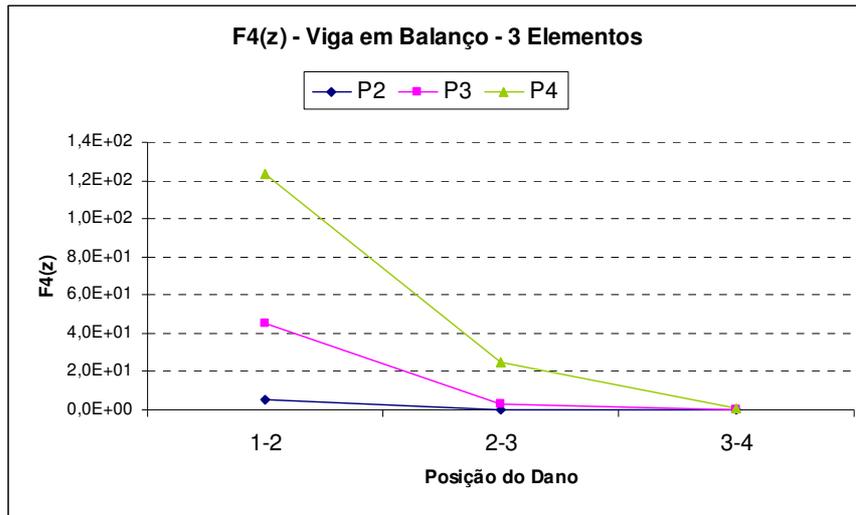


(b)

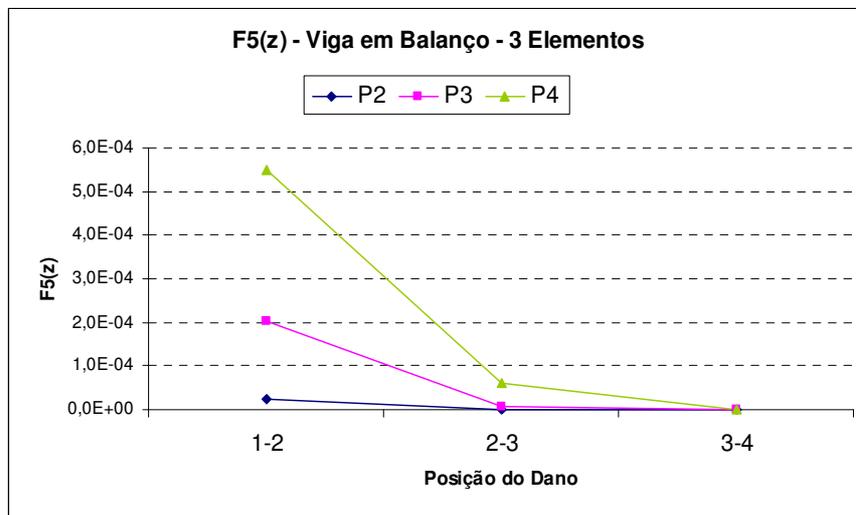


(c)

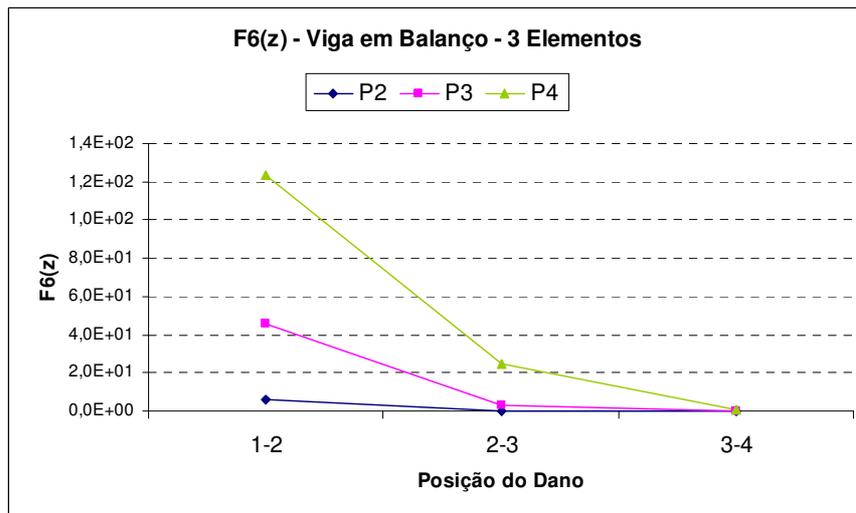
Figura 4.16 (a) a (c)- Representação gráfica das Assinaturas de  $F1(z)$  a  $F3(z)$  para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.



(d)



(e)



(f)

Figura 4.16 (d) a (f)- Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para a viga em balanço dividida em três elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.

Nas Figuras de 4.16(a) a 4.16(f), os gráficos apresentam comportamento semelhante entre si com exceção do 4.16(a).

Esperava-se que o valor da Assinatura  $F_1(z)$ , no elemento 2-3 fosse menor que o do elemento 1-2 para todos os pontos de carga aplicada, já que o elemento 2-3 está relativamente mais afastado do engaste e, portanto, é menos sensível às variações de deslocamentos ( $\Delta u$ ). Se, do elemento 1-2 para o 2-3, o  $\Delta u$  diminui, sendo  $\Delta u^2$  um termo diretamente proporcional, a tendência de  $F_1(z)$  é diminuir neste intervalo. No entanto, houve um aumento do valor de  $F_1(z)$  no elemento 2-3 quando a carga é aplicada no nó 4 (P4).

Este comportamento ocorre apenas em  $F_1(z)$  para P4, pois, como já foi dito, o extremo da viga em balanço é o local onde a aplicação de carga é mais sensível aos deslocamentos, resultando em maiores valores absolutos para as Assinaturas. Logo, este caso apresenta maiores condições de representatividade, visto que os outros valores absolutos (P2 e P3), são menores e se aproximam mais de zero.

Por isso, pode-se concluir que este comportamento divergente é reflexo da maneira de como a variação da frequência ( $\Delta\omega$ ) é aplicada em  $F_1(z)$ .

Ocorre que para as duas frequências mais baixas escolhidas ( $\omega_1$  e  $\omega_2$ ) em  $F_1(z)$ , a diferença entre as da estrutura intacta e danificada (ou  $\Delta\omega_1$  e  $\Delta\omega_2$ ) é pequena, quando se trata do elemento 2-3 comparada aos outros elementos.

Sendo assim, analisando matematicamente a assinatura  $F_1(z)$ , para cada nó  $j$ ,  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$  são inversamente proporcionais. Logo, se  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$  tendem a zero, cada  $F_{1j}$  tenderá a infinito e, portanto,  $F_1(z)$  tenderá a infinito, como pode ser ilustrado pelas Expressões 4.2 e 4.3 a seguir.

$$F_{1j} \propto \frac{1}{\Delta\omega_1^2} \quad (4.2)$$

$$\Delta\omega_1^2 \rightarrow 0 \Rightarrow F_{1j} \rightarrow \infty \Rightarrow F_1(z) \rightarrow \infty$$

$$F_{1j} \propto \frac{1}{\Delta\omega_2^2} \quad (4.3)$$

$$\Delta\omega_2^2 \rightarrow 0 \Rightarrow F_{1j} \rightarrow \infty \Rightarrow F_1(z) \rightarrow \infty$$

Para comprovar esta conclusão basta observar o gráfico da Figura 4.17 que foi elaborado aplicando os maiores valores obtidos de  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$  (e não os menores como foi adotado anteriormente) para  $F_1(z)$ , utilizados igualmente para todas as combinações (P2, P3 e P4). Assim, escolhidos estes novos valores e refazendo os cálculos, chega-se ao resultado de gráfico esperado.

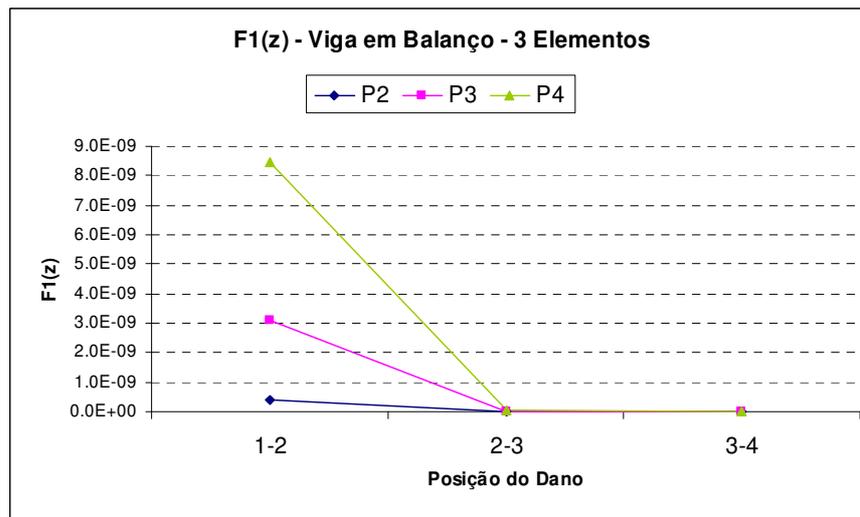


Figura 4.17 – Gráfico para a Assinatura  $F1(z)$  mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, adotadas as freqüências de maiores valores.

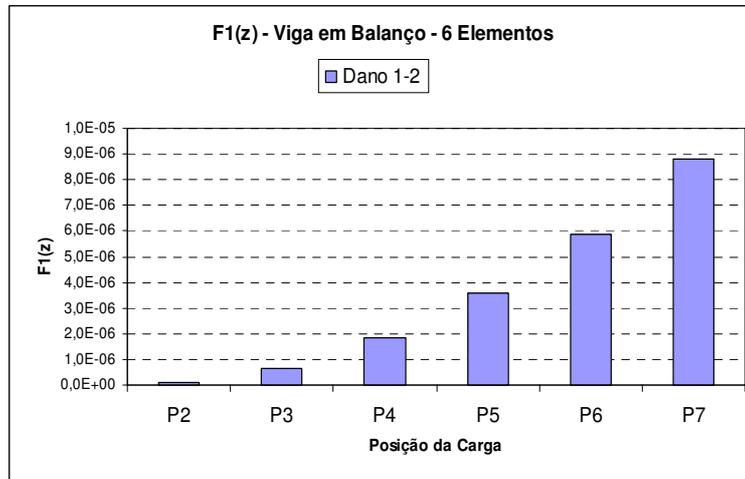
#### **4.4.2 Viga em Balanço para 6 Elementos**

A viga em balanço dividida em seis elementos pode ser ilustrada pela Figura 4.6 que representa suas dimensões, nós e todas suas outras características físicas que foram utilizadas para a obtenção de seus deslocamentos e frequências.

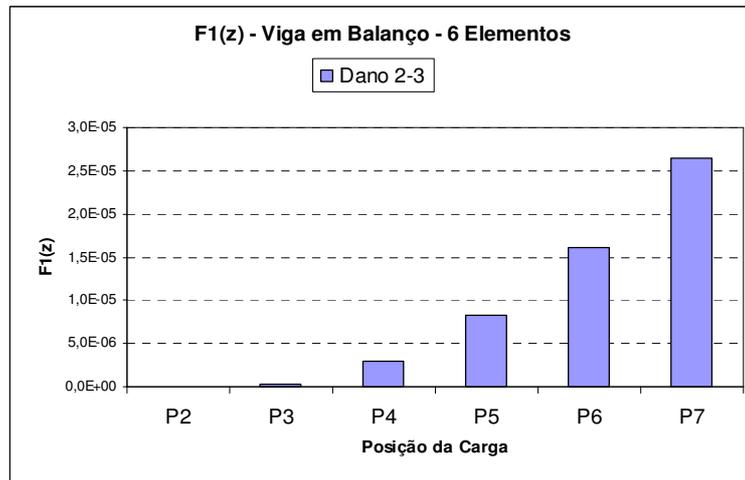
Os resultados de frequência e deslocamentos obtidos foram aplicados a cada uma das seis assinaturas estruturais definidas, combinando variações de localização de danos e cargas da mesma maneira que para a viga em balanço de três elementos.

Para as assinaturas de  $F_1(z)$  a  $F_6(z)$ , tendo a carga concentrada de 5,0 KN no nó e mantendo o dano no mesmo elemento, têm-se os comportamentos demonstrados pelas Figuras 4.18 a 4.23.

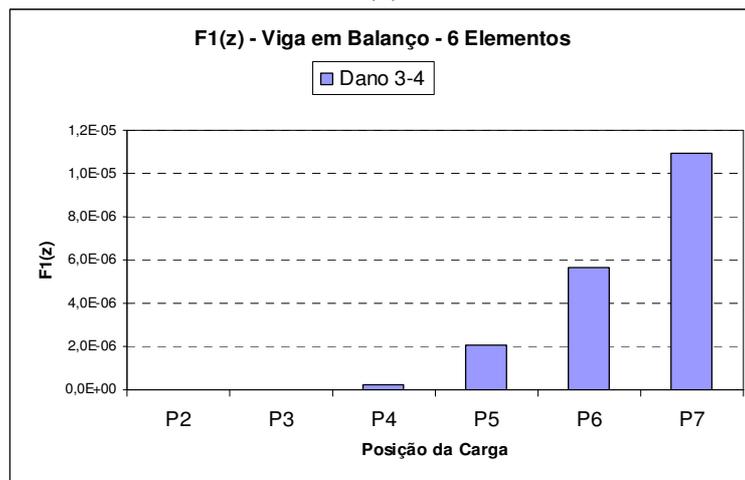
$$F_1(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right]$$



(a)

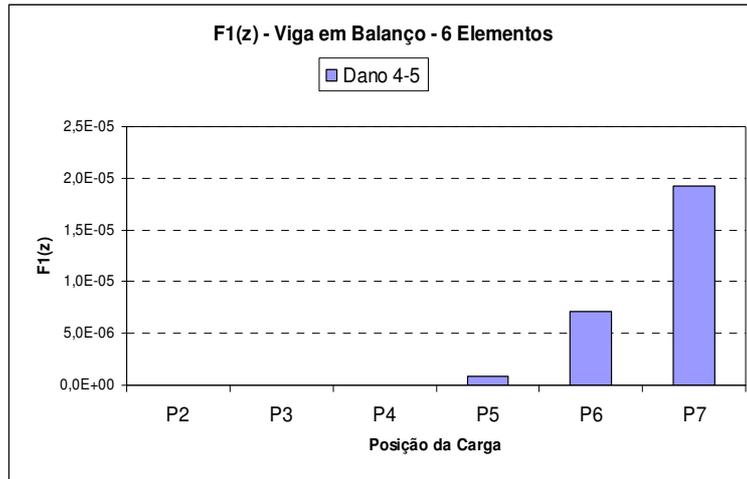


(b)

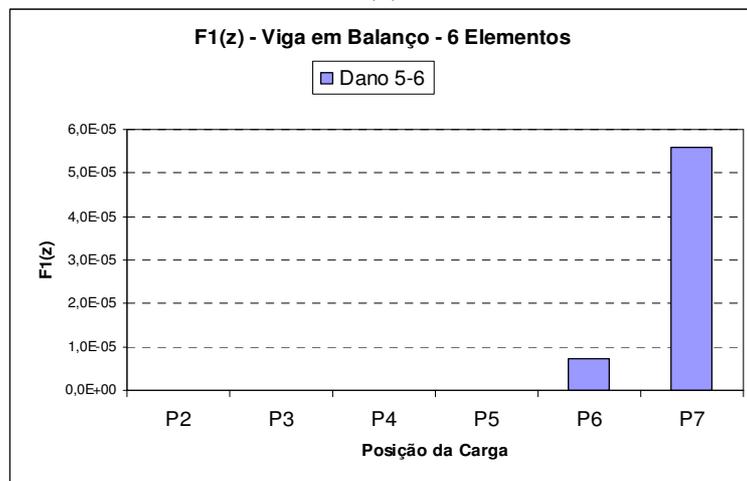


(c)

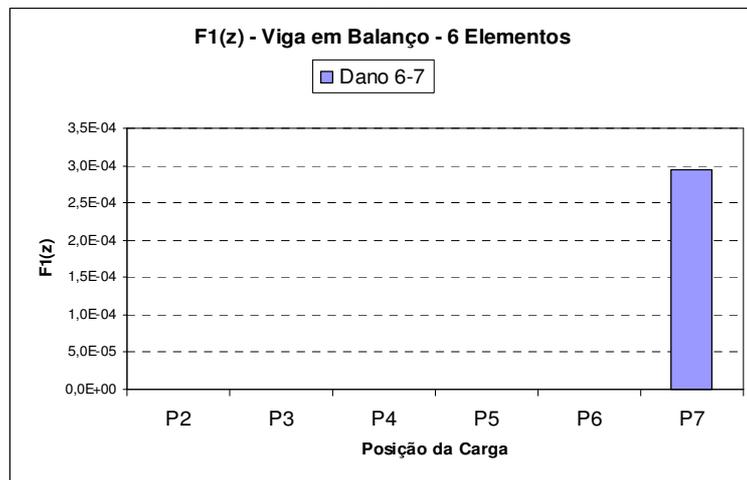
Figura 4.18 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



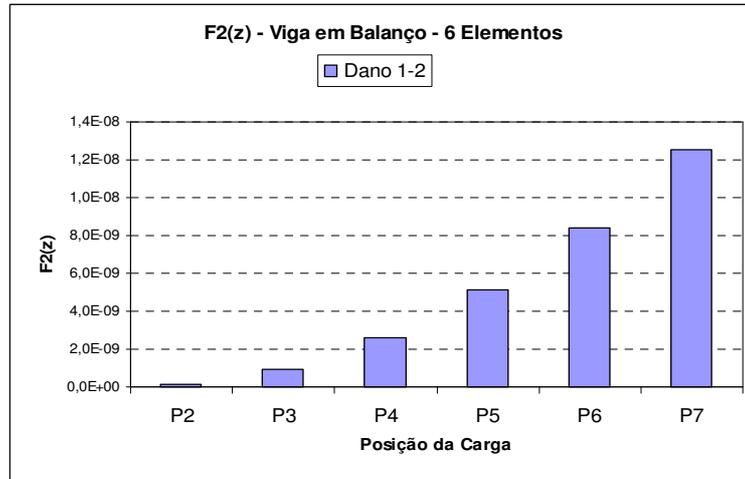
(e)



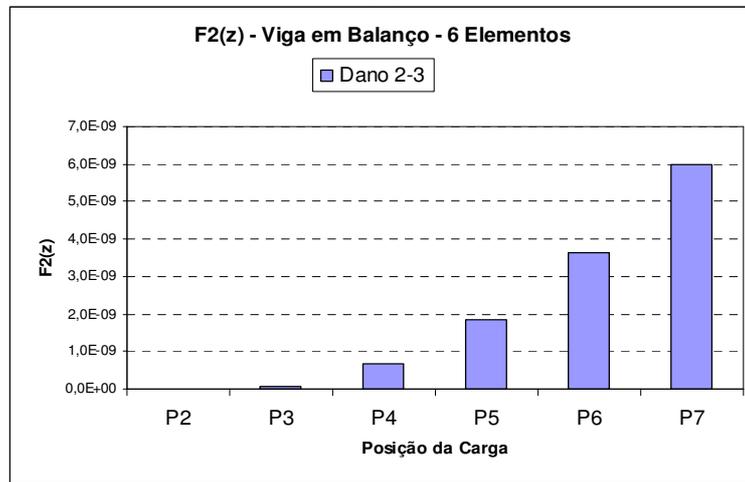
(f)

Figura 4.18 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

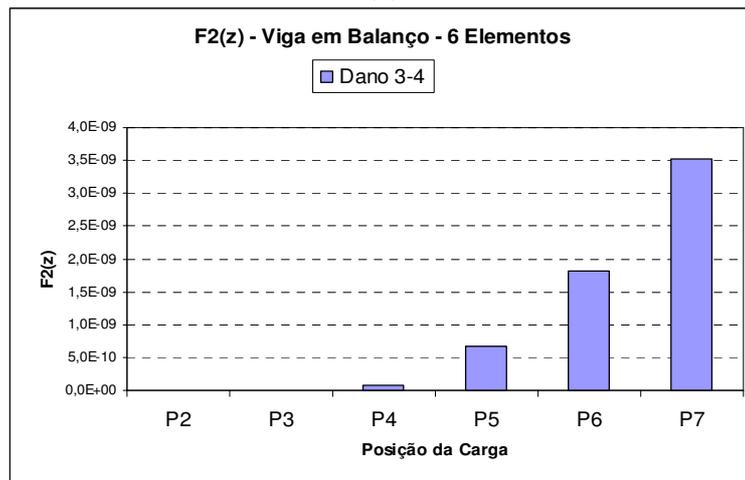
$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})}{\sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2}$$



(a)

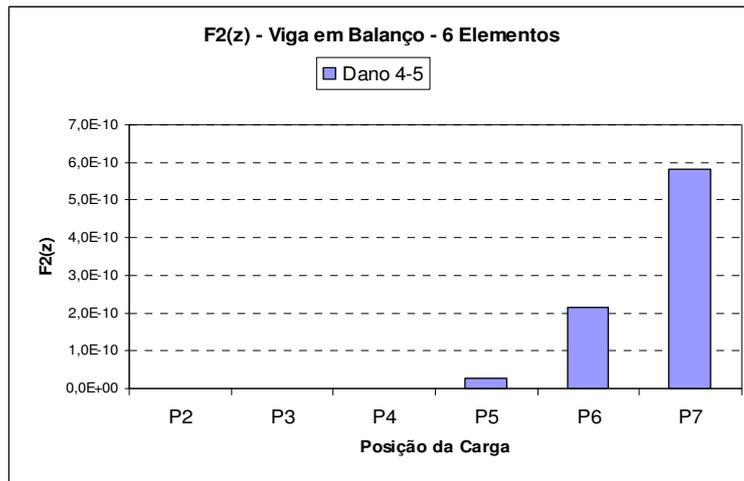


(b)

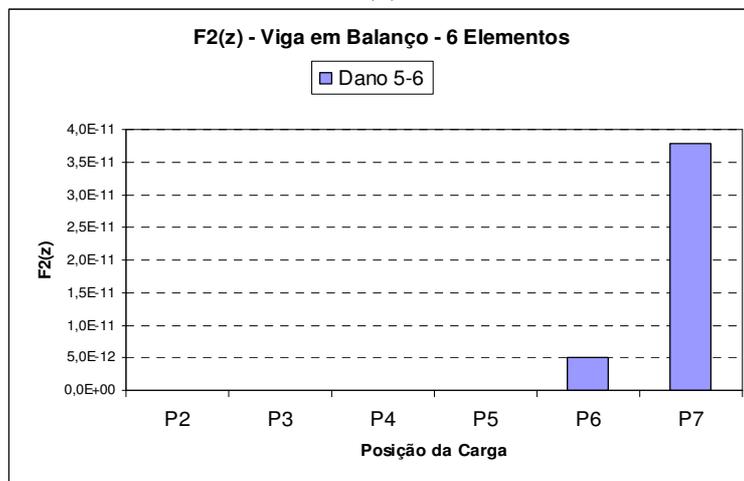


(c)

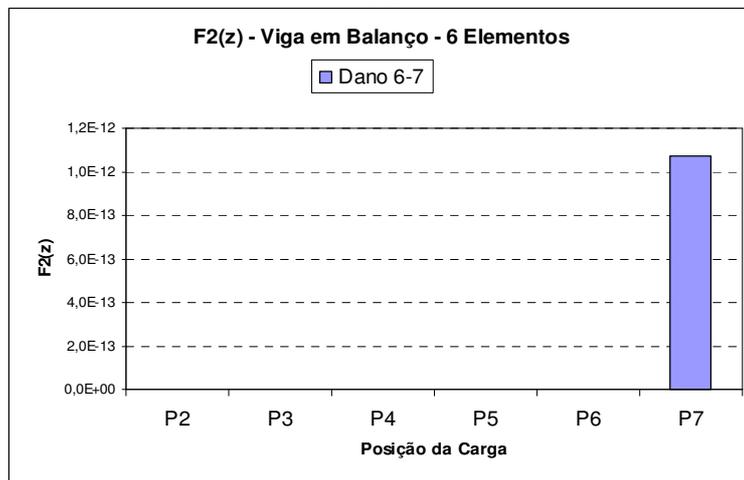
Figura 4.19 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_2(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



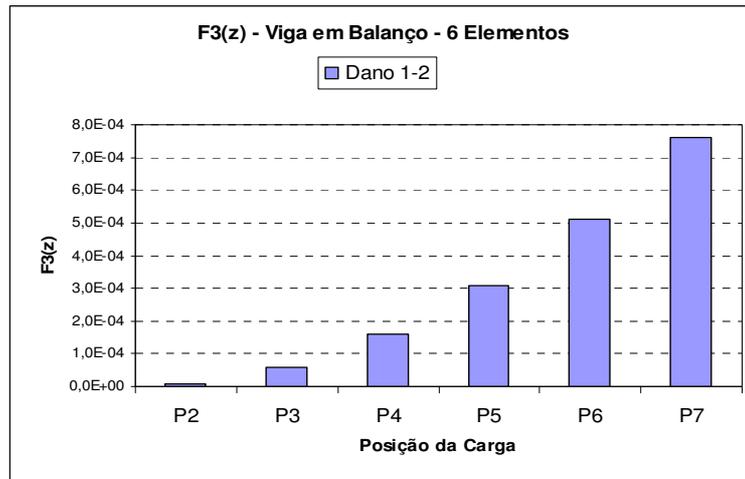
(e)



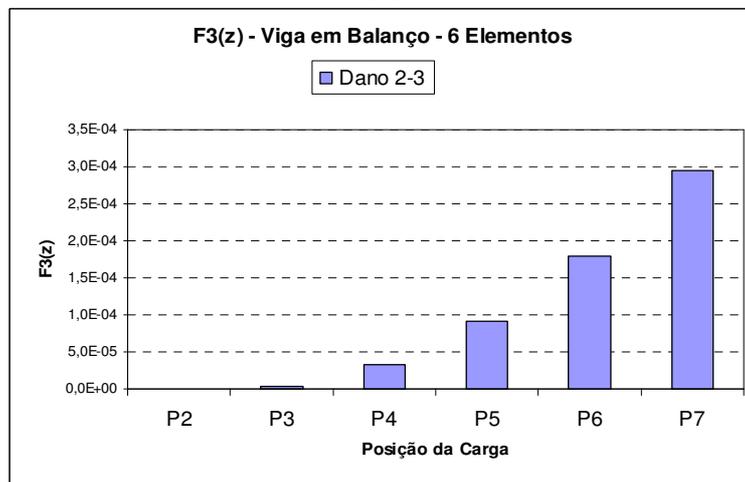
(f)

Figura 4.19 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

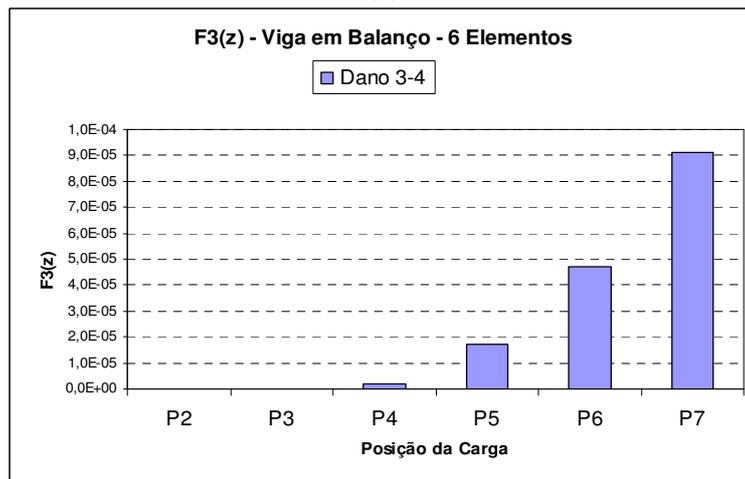
$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})$$



(a)

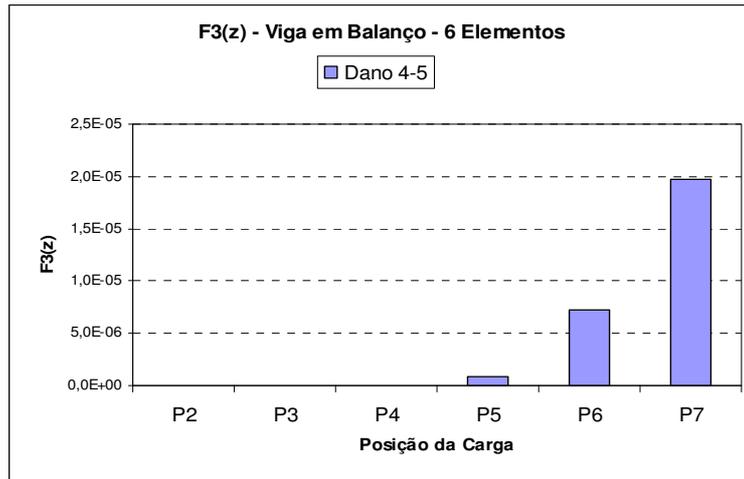


(b)

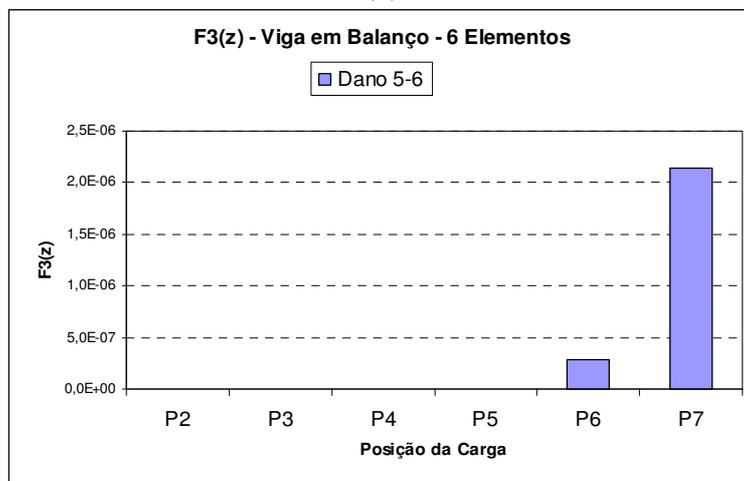


(c)

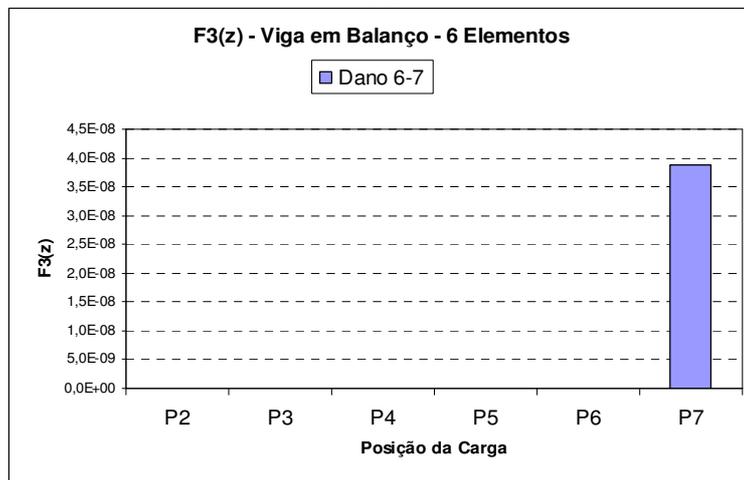
Figura 4.20 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_3(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



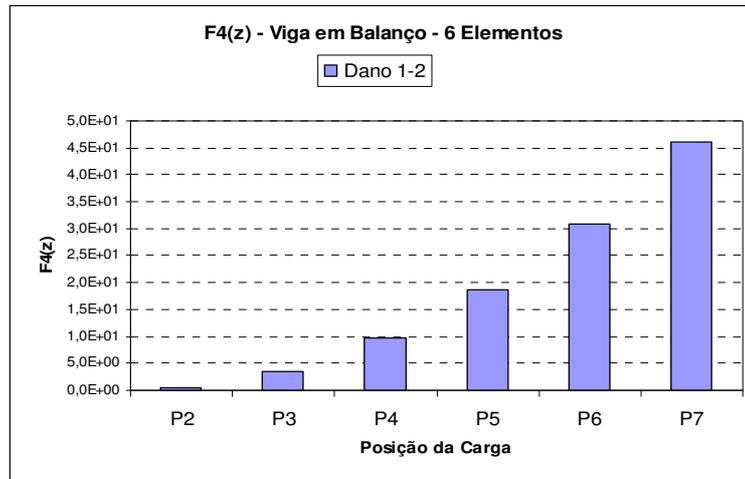
(e)



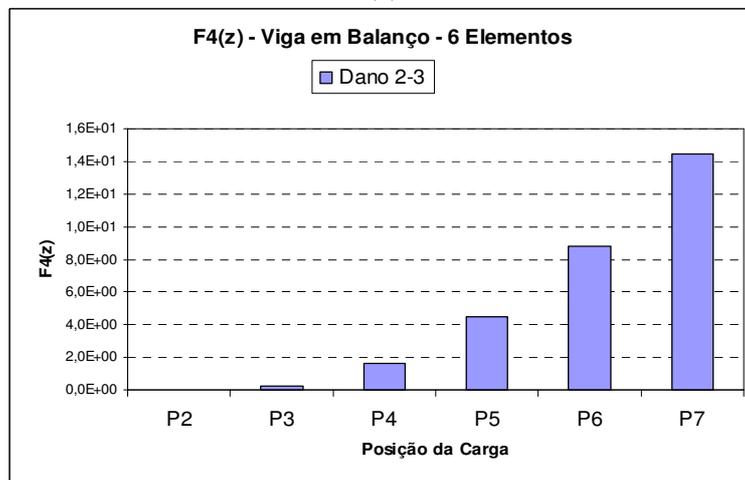
(f)

Figura 4.20 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F3(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

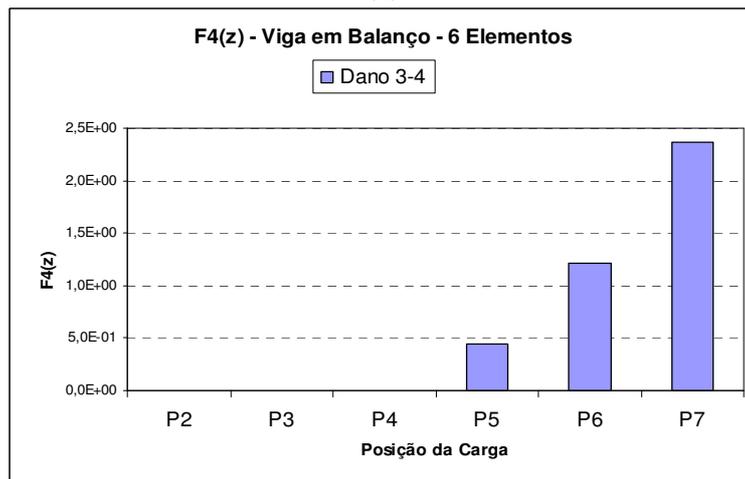
$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2}) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2$$



(a)

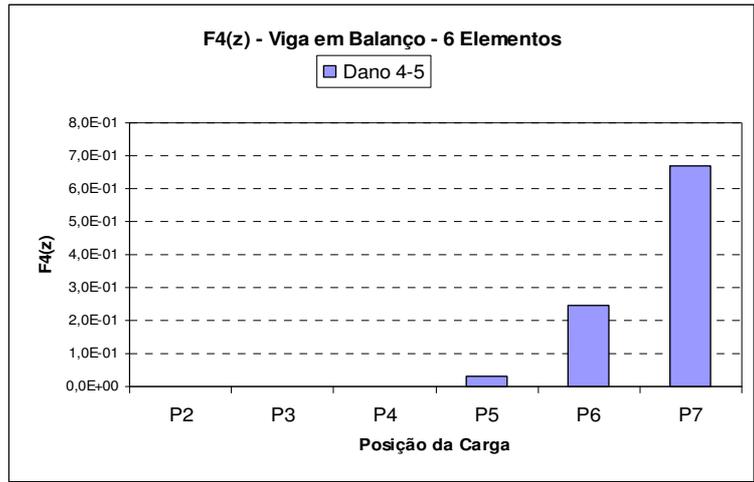


(b)

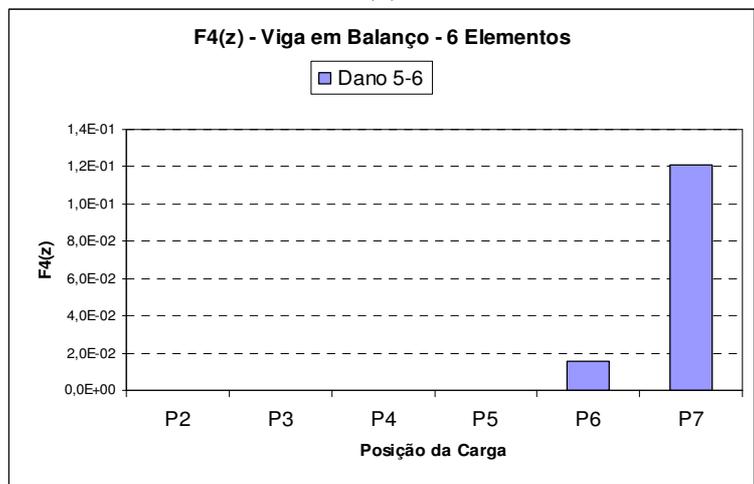


(c)

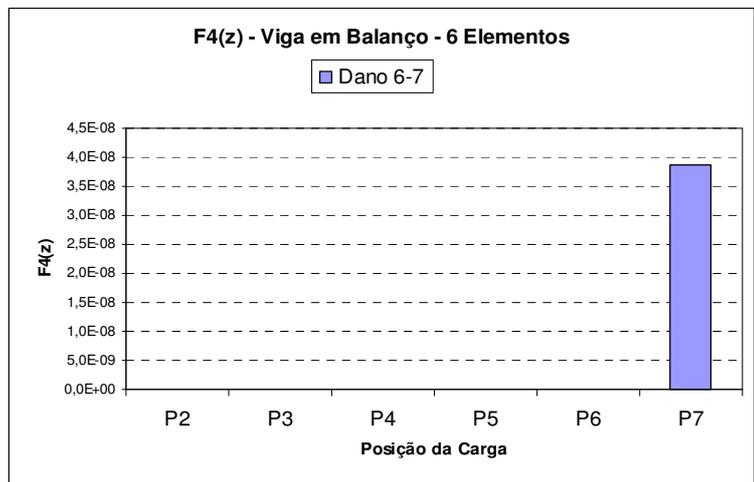
Figura 4.21 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_4(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



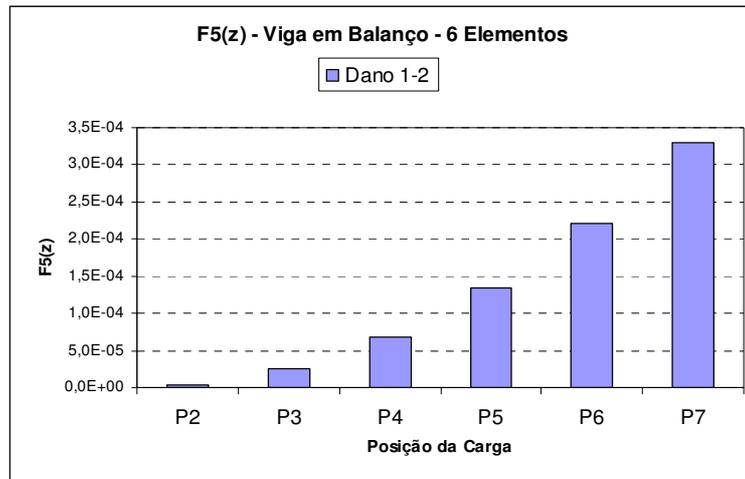
(e)



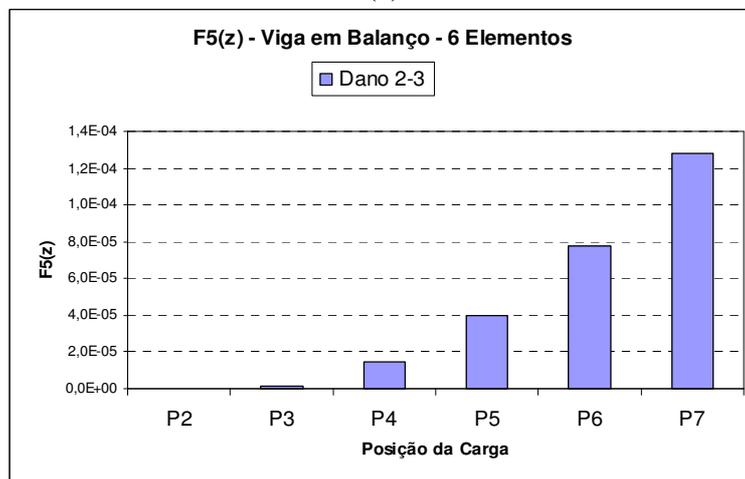
(f)

Figura 4.21 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

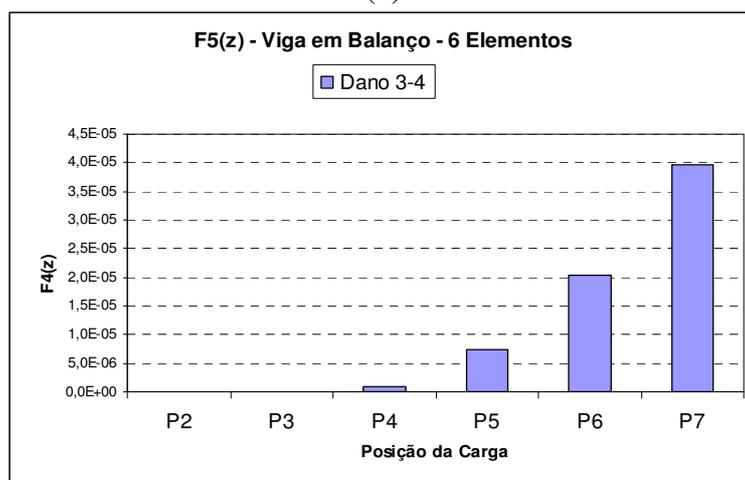
$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1)$$



(a)

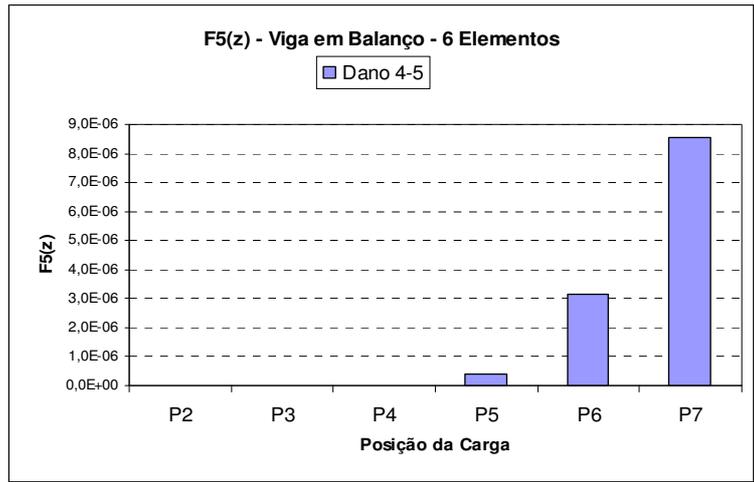


(b)

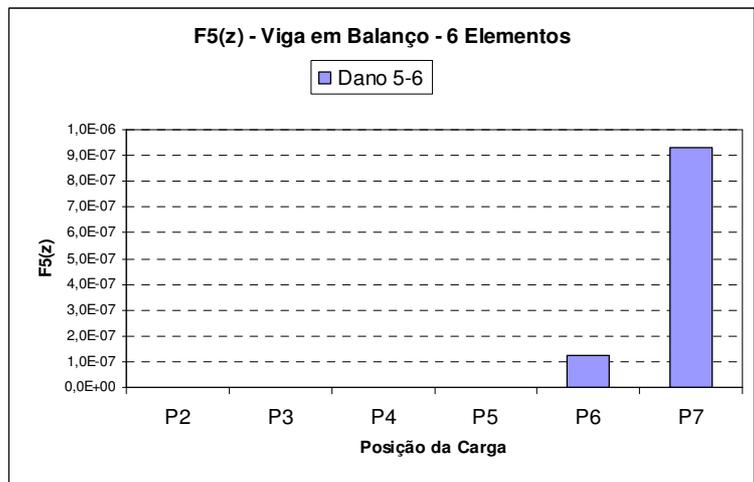


(c)

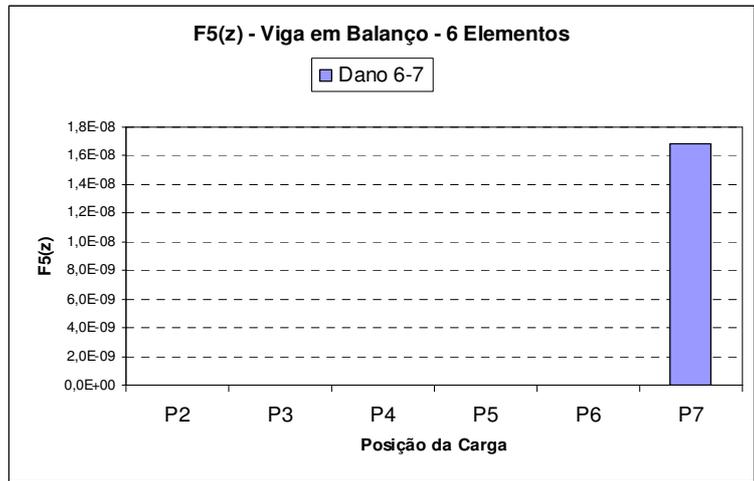
Figura 4.22 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_5(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



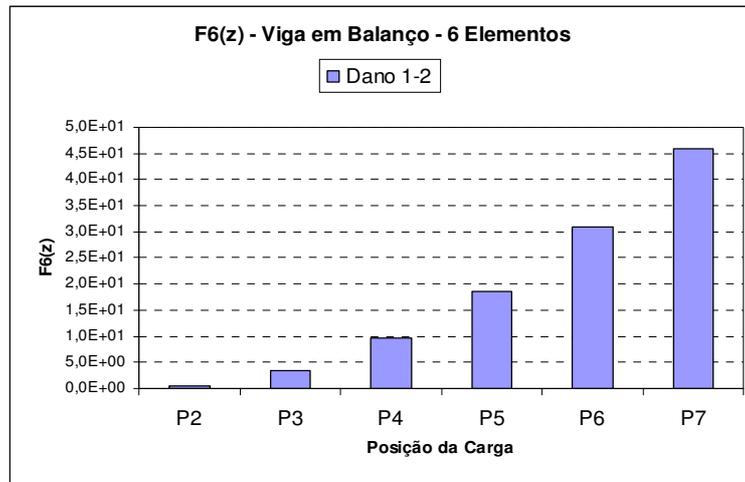
(e)



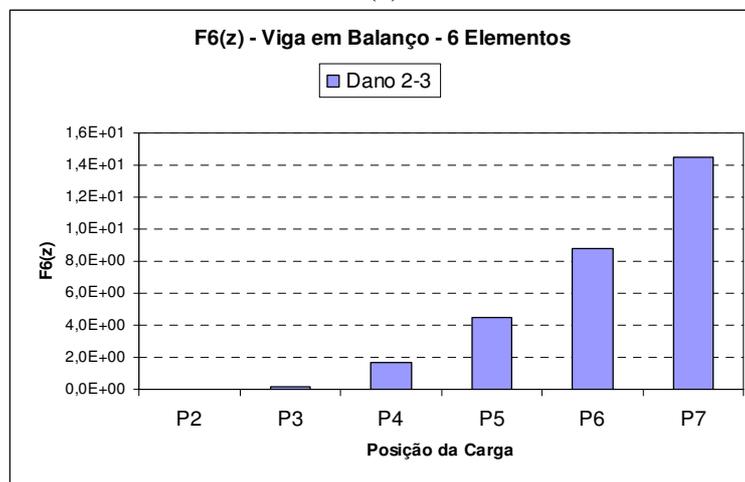
(f)

Figura 4.22 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

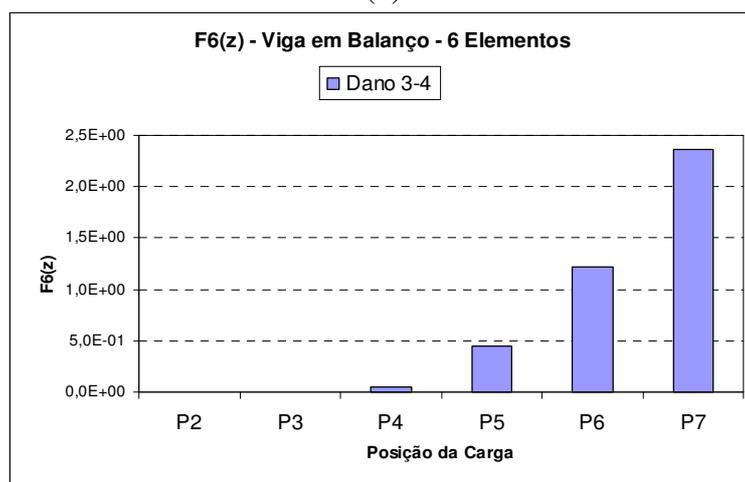
$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2$$



(a)

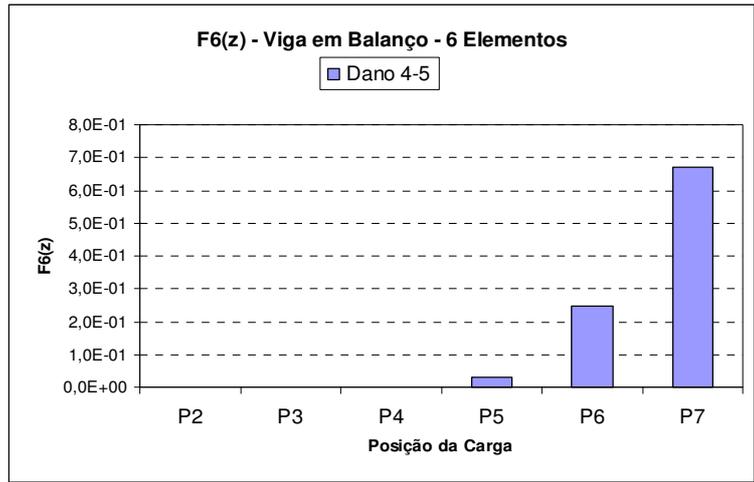


(b)

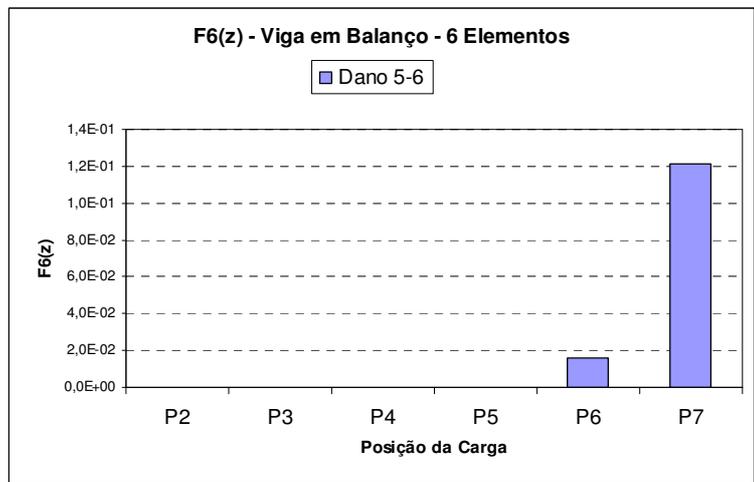


(c)

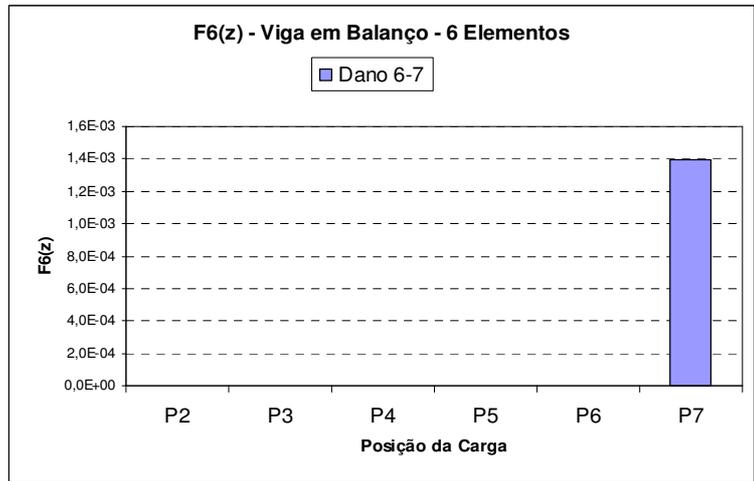
Figura 4.23 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_6(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)

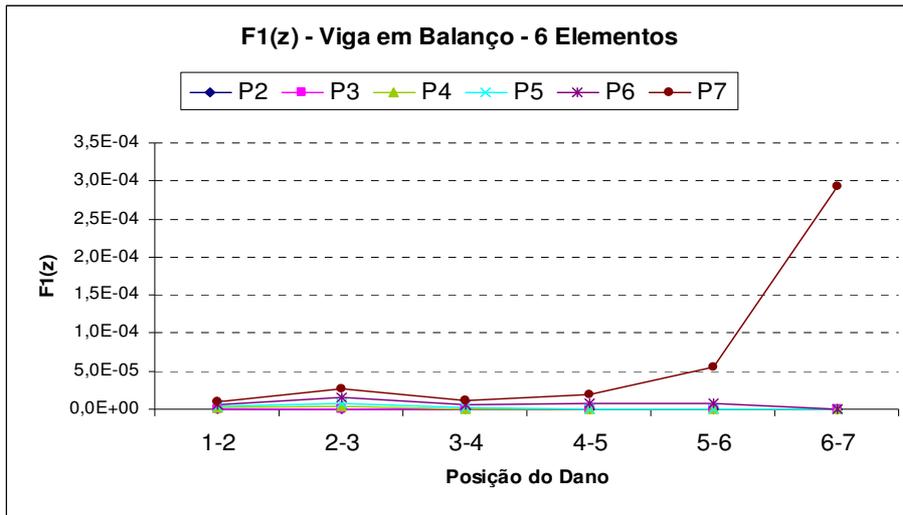


(e)

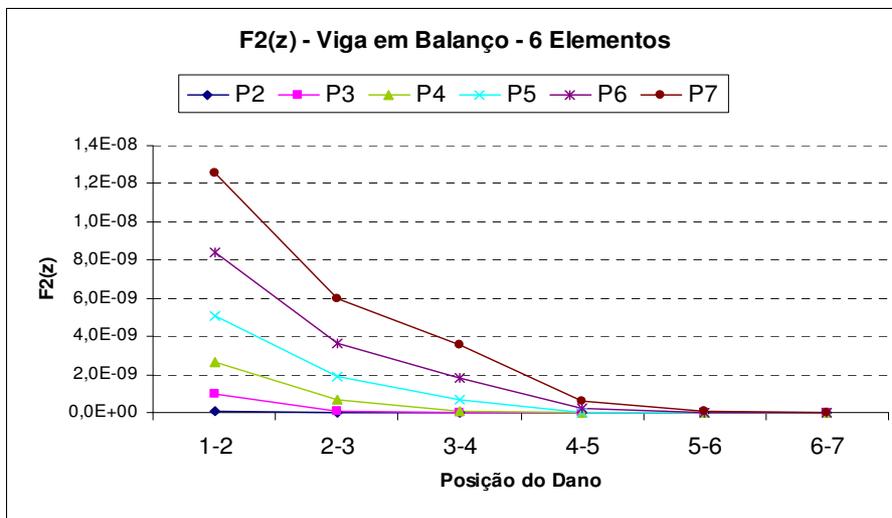


(f)

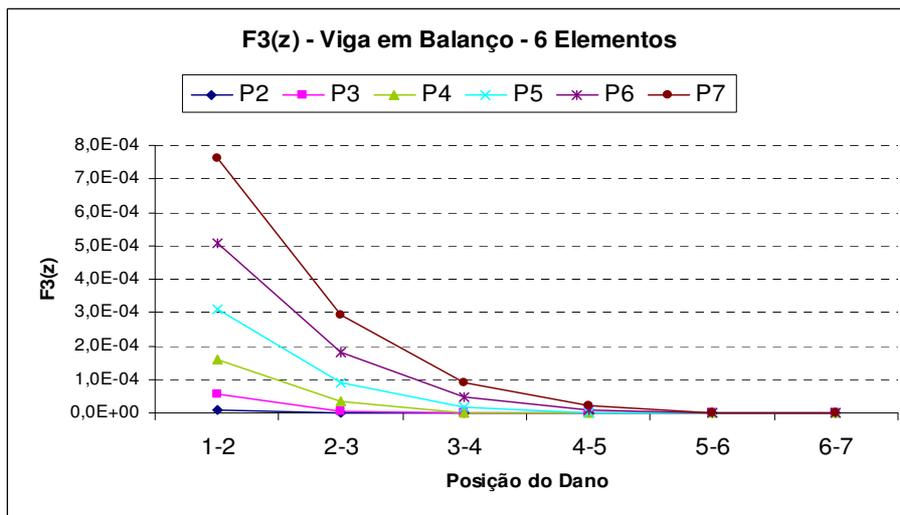
Figura 4.23 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F6(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(a)

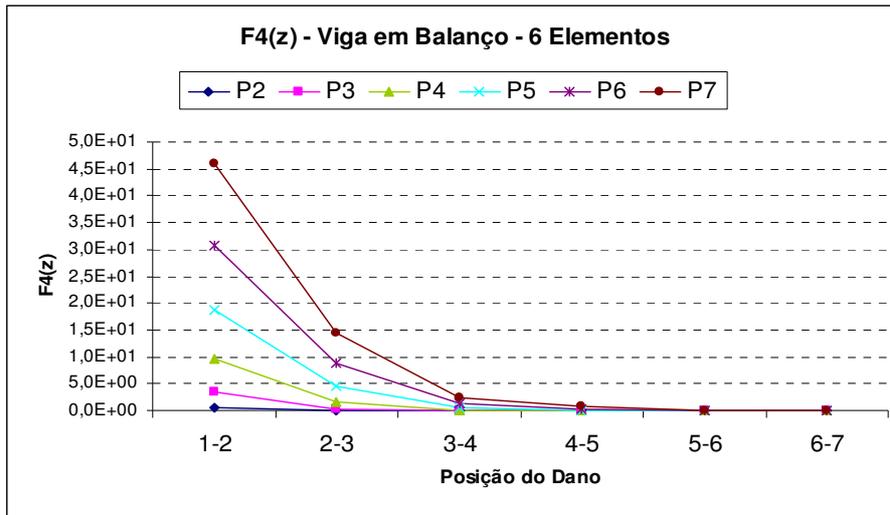


(b)

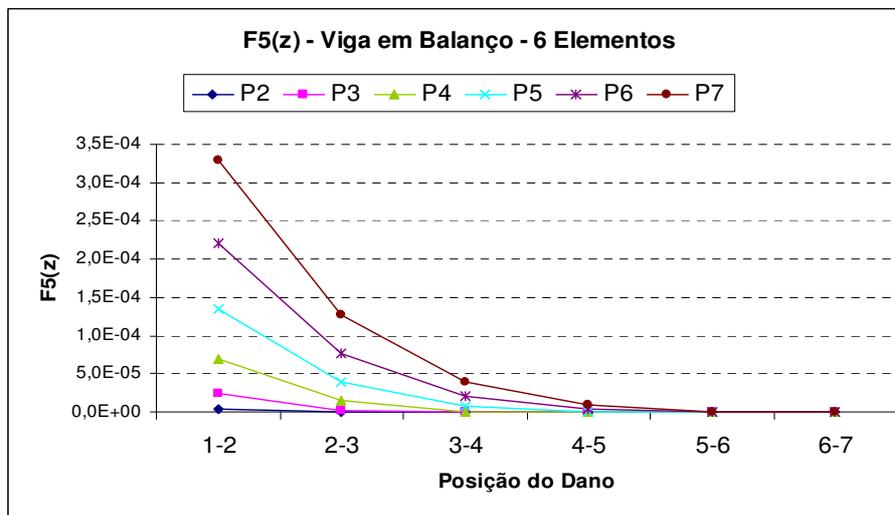


(c)

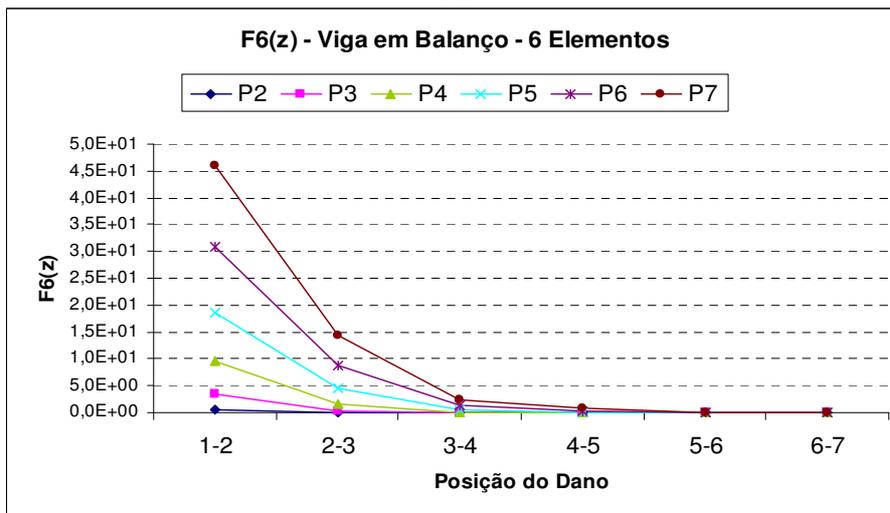
Figura 4.24 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F1(z)$  a  $F3(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.



(d)



(e)



(f)

Figura 4.24 (d) a (f) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para a viga em balanço dividida em seis elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.

O comportamento dos gráficos, das Figuras de 4.18 a 4.23, seguiu o mesmo padrão dos gráficos da viga em balanço dividida em três elementos. Portanto, comprova as mesmas conclusões e ratifica que é possível determinar, pelo comportamento dos gráficos, qual a localidade do dano de acordo com a posição da carga. Por exemplo, se o valor mínimo significativo de uma Assinatura for obtido para a carga P6, significa que o dano está no elemento 5-6.

Da mesma maneira, o comportamento dos gráficos das Figuras 4.24(a) a 4.24(f) foi semelhante à análise para três elementos, sendo apenas a assinatura  $F_1(z)$  díspare aos outros gráficos como mostra o gráfico da Figura 4.24(a).

Novamente, a divergência aparece para  $F_1(z)$  com maior expressividade para quando a carga é aplicada na extremidade da viga em balanço (P7), representado pela linha marrom - gráfico 4.24(a).

Contudo, neste caso, é notório que as diferenças entre as frequências das estruturas intacta e danificada ( $\Delta\omega_1$  e  $\Delta\omega_2$ ) se aproximam mais de zero quando o dano está no elemento 6-7 (elemento mais extremo da viga). Isto acontece, pois para a carga aplicada P7 combinada ao dano localizado no elemento 6-7, o deslocamento  $\Delta u$  apresenta um valor muito maior. Tendo-se esta situação e ainda um pequeno valor das variações  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$ , o valor de  $F_1(z)$  tende a aumentar muito neste ponto.

Porém, observando o gráfico 4.24(a) com maior minúcia é interessante mudar esta escala, tal como mostra a Figura 4.25, para que se visualize com clareza sua total falta de uniformidade, se comparado aos outros gráficos - 4.24(b) a (f). Percebe-se que os pontos do gráfico da Figura 4.25 não apresentam a mesma uniformidade se comparados aos de  $F_2(z)$ ,  $F_3(z)$ ,  $F_4(z)$ ,  $F_5(z)$  e  $F_6(z)$ .

Ressalta-se que a avaliação deste comportamento não interfere na localização do dano na estrutura, mas analisa e compara as expressões quanto a uniformidade de seus

comportamentos matemáticos. Isto é importante, pois pode influenciar em análises posteriores.

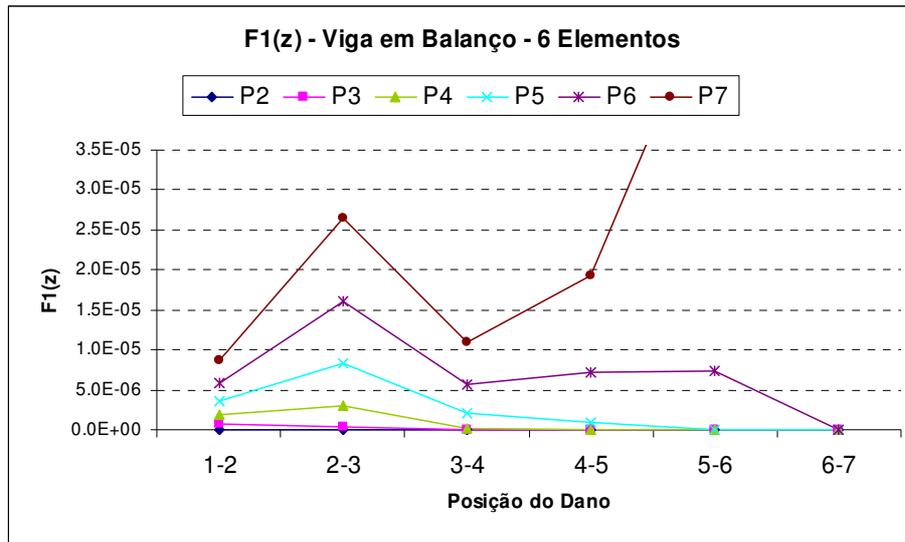


Figura 4.25 – Gráfico ampliado, para a Assinatura  $F1(z)$  mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, em maior escala, para viga em balanço dividida em seis elementos.

O gráfico da Figura 4.26, a seguir, apresenta o padrão esperado que deveria ocorrer no gráfico 4.24(a). Este novo gráfico da Figura 4.26 foi elaborado baseado na assinatura  $F1(z)$  com valores escolhidos que resultam em valores mais distantes de zero para  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$ . Isto comprova que o aparecimento dos máximos locais na Figura 4.24 (a) é influência dos valores das diferenças de frequências ( $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$ ).

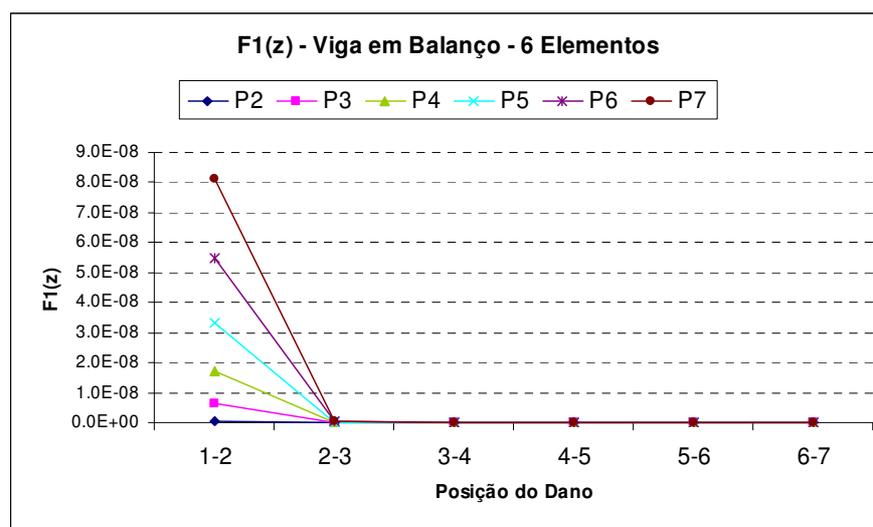


Figura 4.26 - Gráfico para a Assinatura  $F1(z)$  mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, adotadas frequências de valores maiores, para viga em balanço dividida em seis elementos.

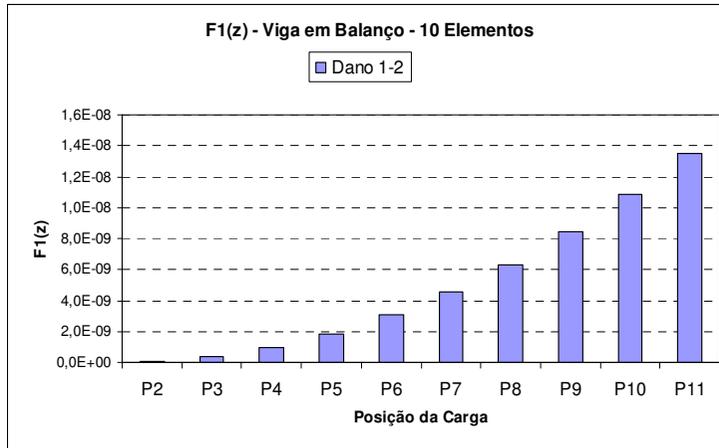
#### **4.4.3 Viga em Balanço para 10 Elementos**

A viga em balanço dividida em dez elementos pode ser ilustrada pela Figura 4.6 que representa suas dimensões, nós e todas suas outras características físicas que foram utilizadas para a obtenção de seus deslocamentos e frequências.

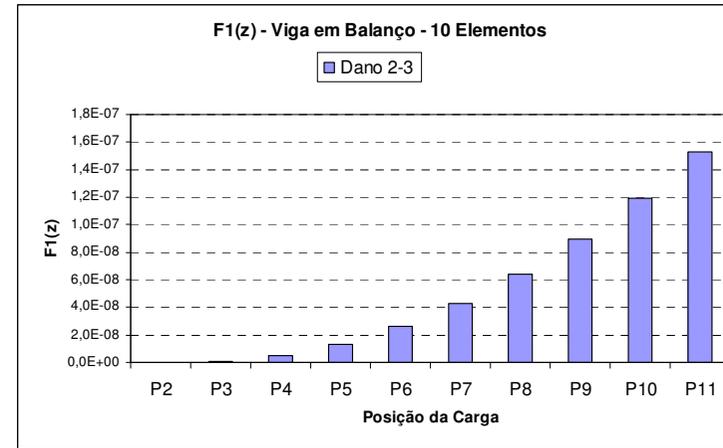
Para cada uma das seis Assinaturas os resultados de frequência e deslocamentos obtidos foram aplicados da mesma maneira que para a viga em balanço de três e seis elementos.

Para as Assinaturas de  $F1(z)$  a  $F6(z)$ , tendo a carga concentrada de 5,0 KN no nó e mantendo o dano no mesmo elemento, têm-se os comportamentos demonstrados pelas Figuras 4.27 a 4.32.

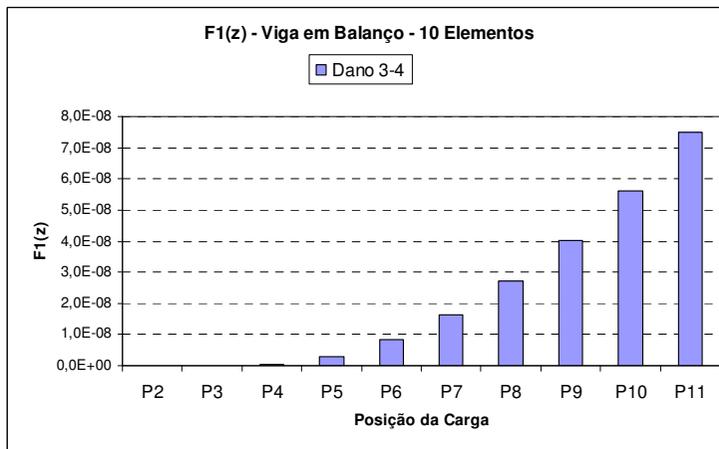
$$F_1(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right]$$



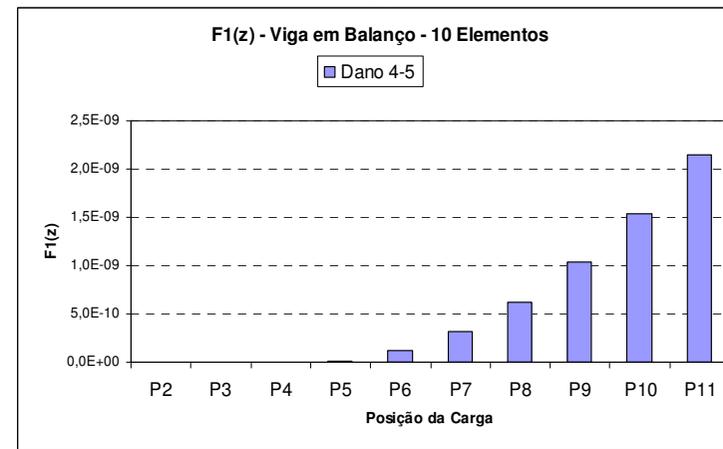
(a)



(b)

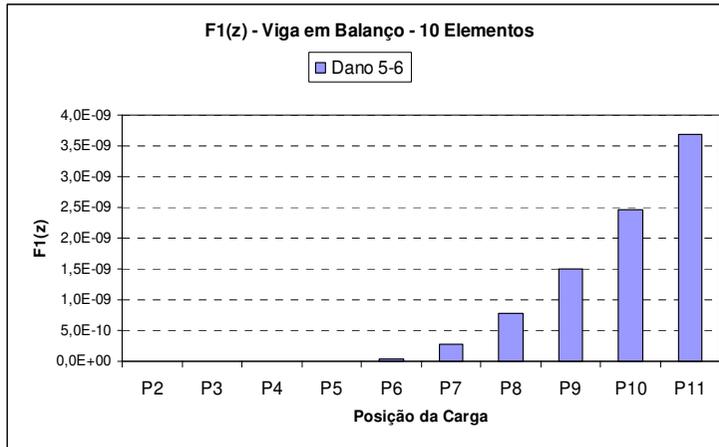


(c)

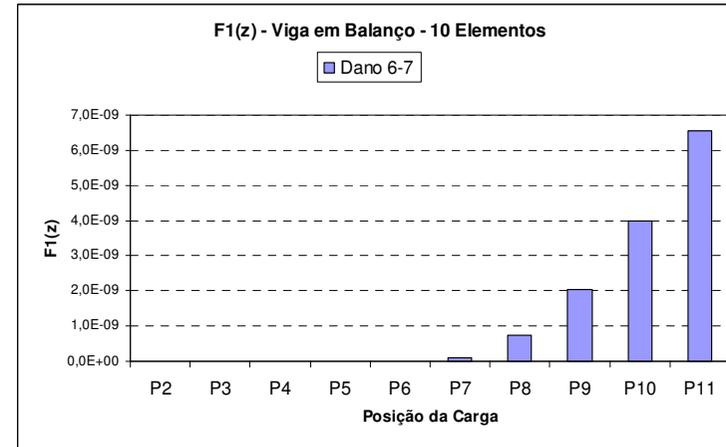


(d)

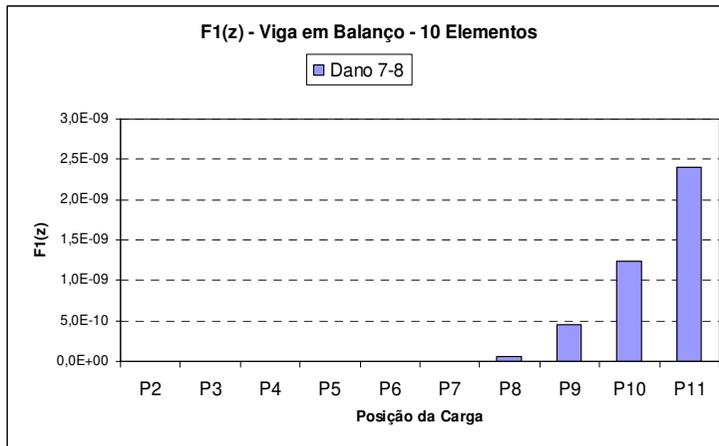
Figura 4.27 (a) a (d)- Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



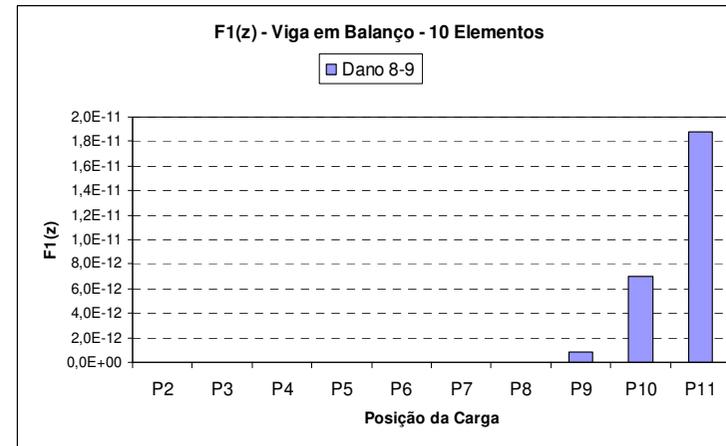
(e)



(f)

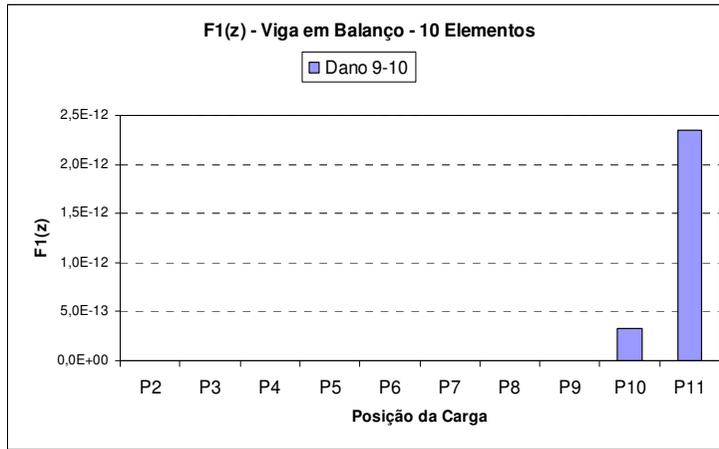


(g)

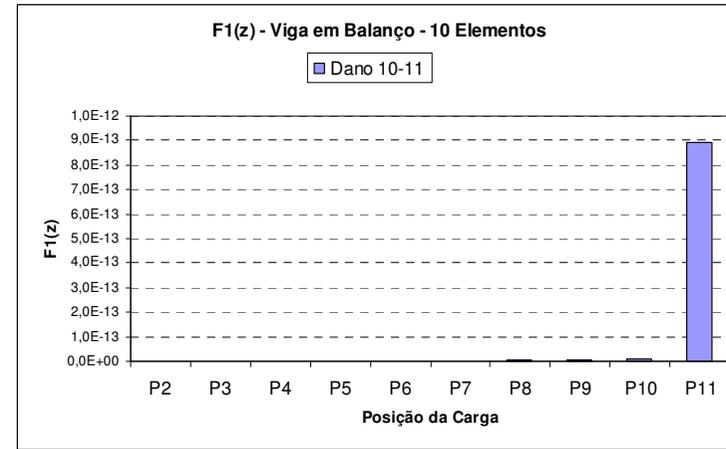


(h)

Figura 4.27 (e) a (h)- Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



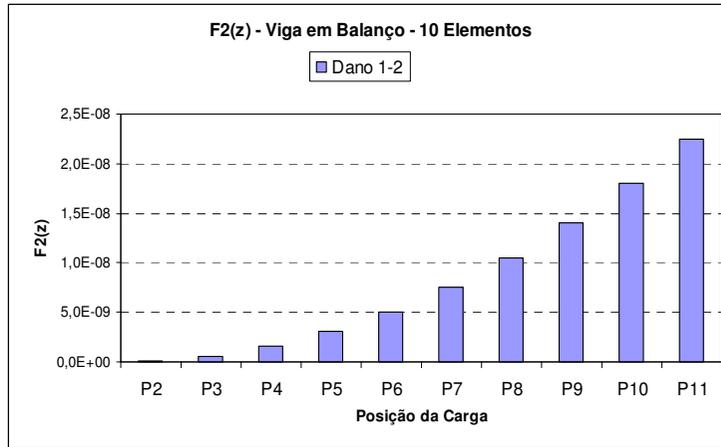
(i)



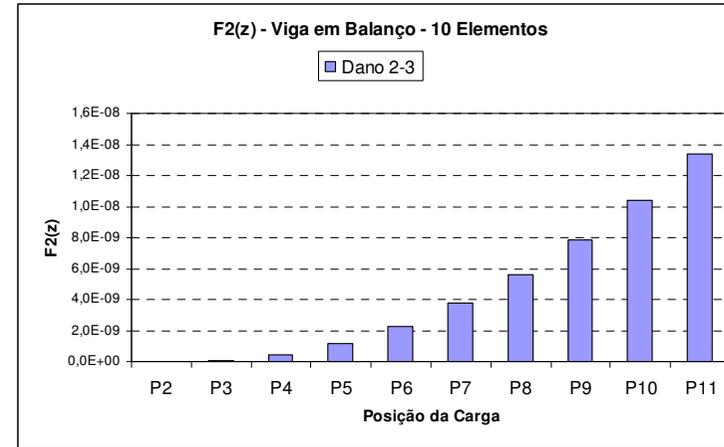
(j)

Figura 4.27 (i) a (j)- Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

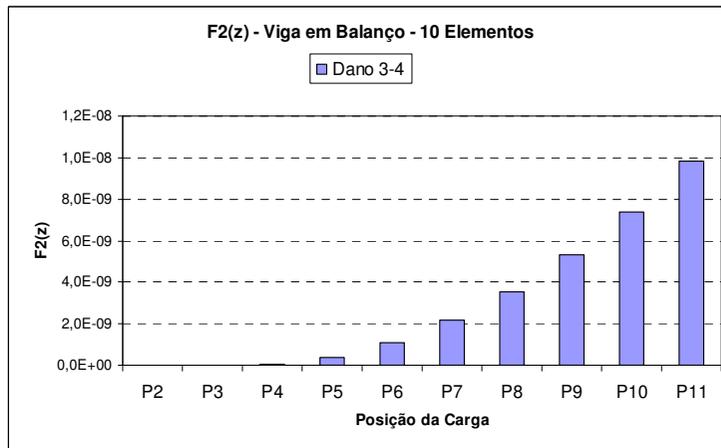
$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})}{\sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2}$$



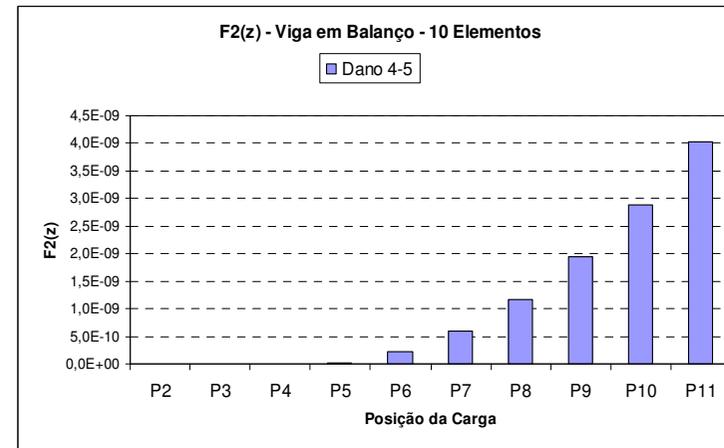
(a)



(b)

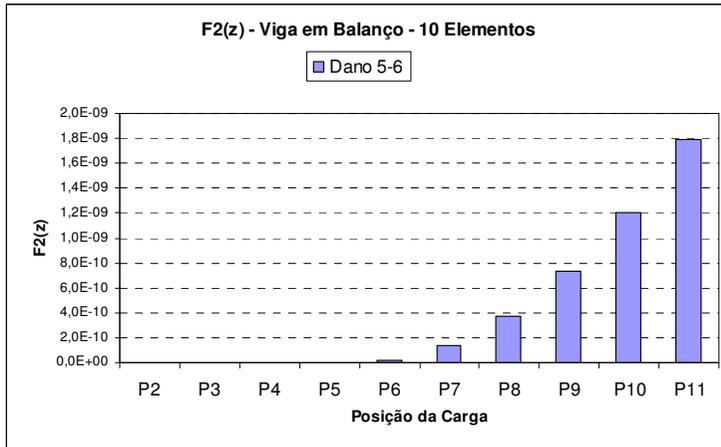


(c)

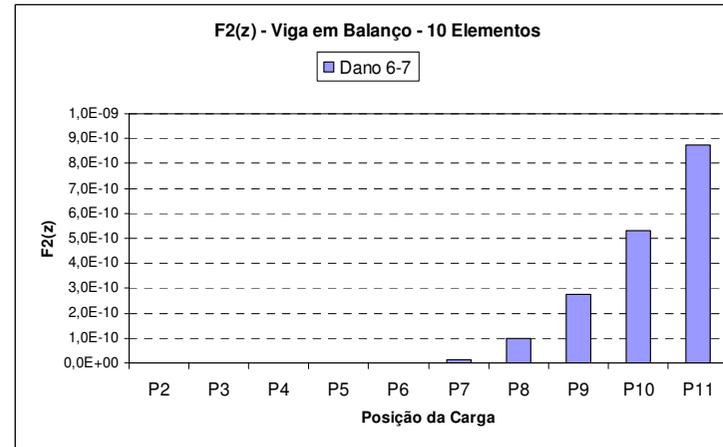


(d)

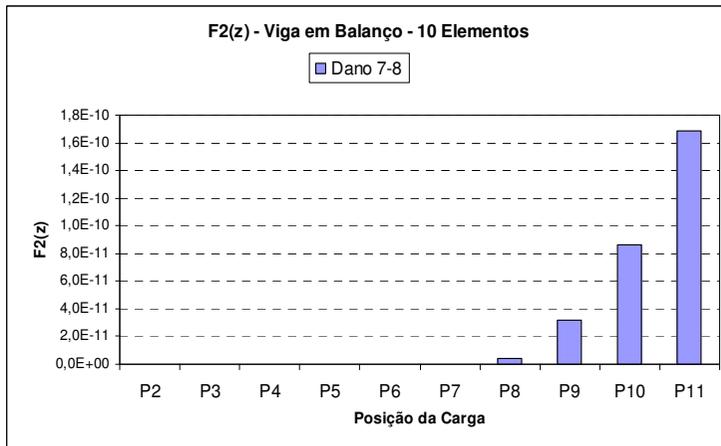
Figura 4.28 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_2(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



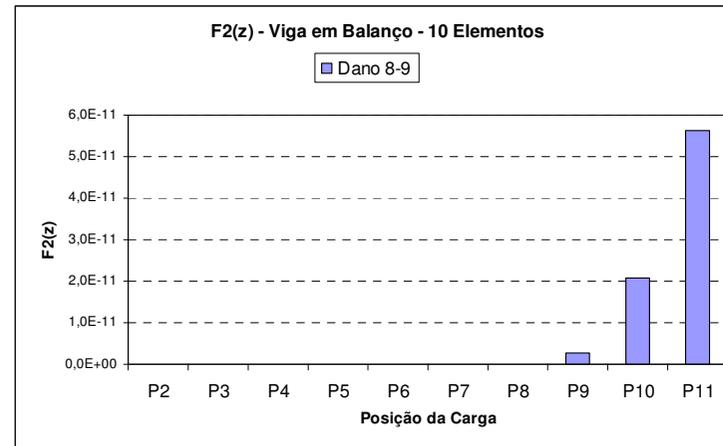
(e)



(f)

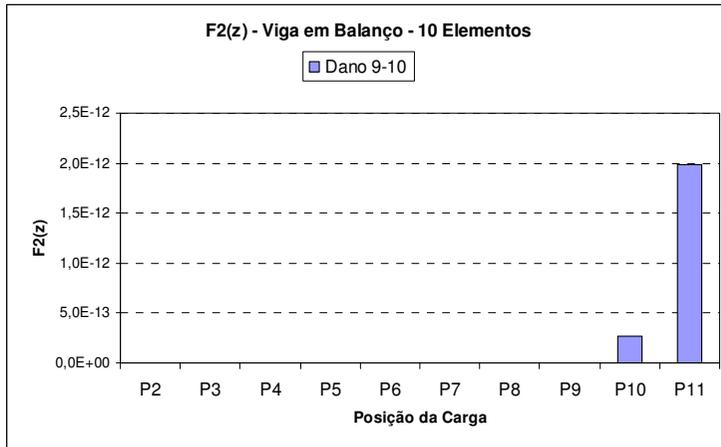


(g)

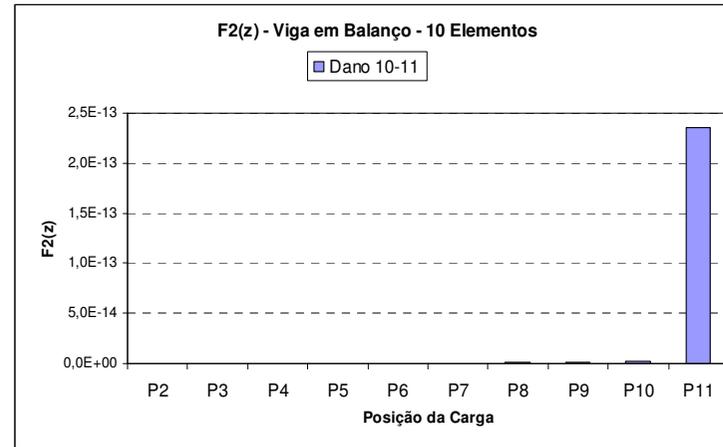


(h)

Figura 4.28 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



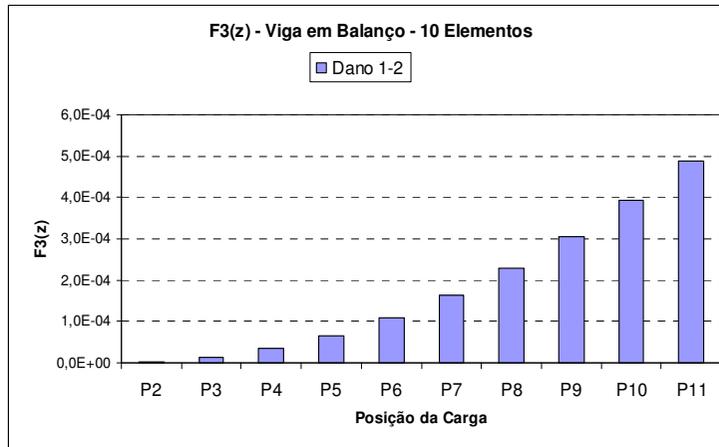
(i)



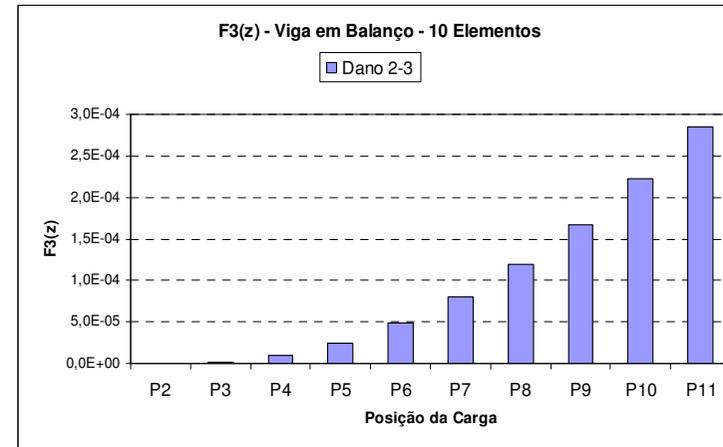
(j)

Figura 4.28 (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

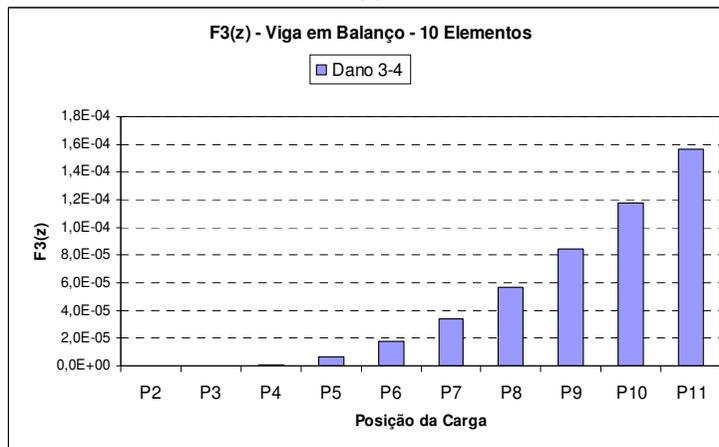
$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})$$



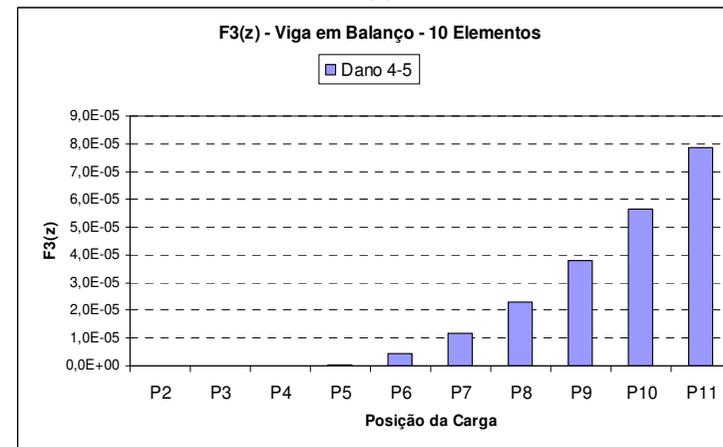
(a)



(b)

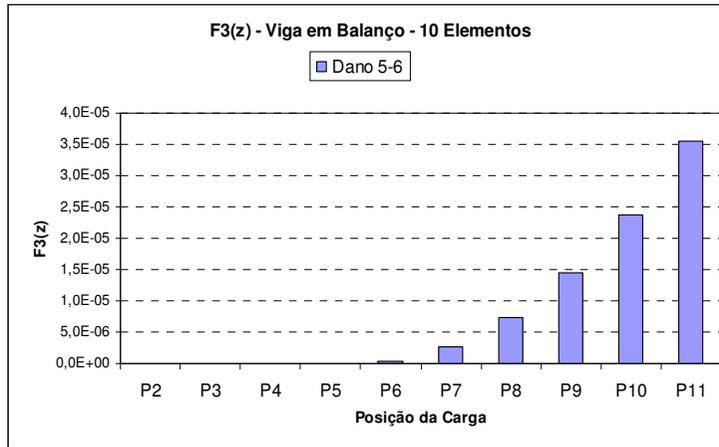


(c)

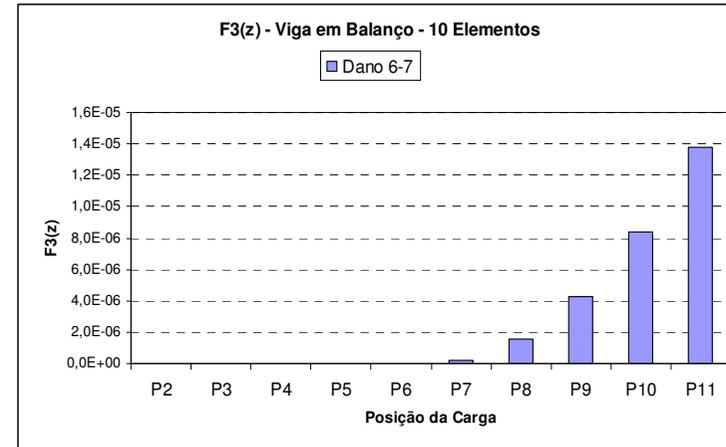


(d)

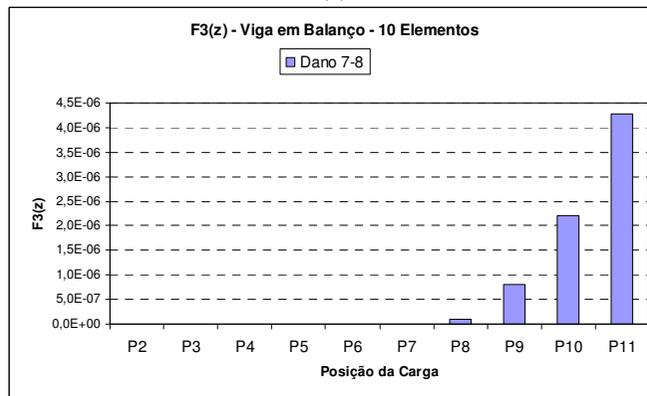
Figura 4.29 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_3(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



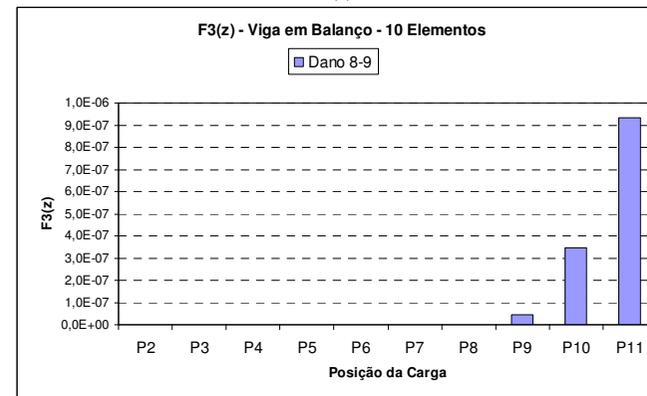
(e)



(f)

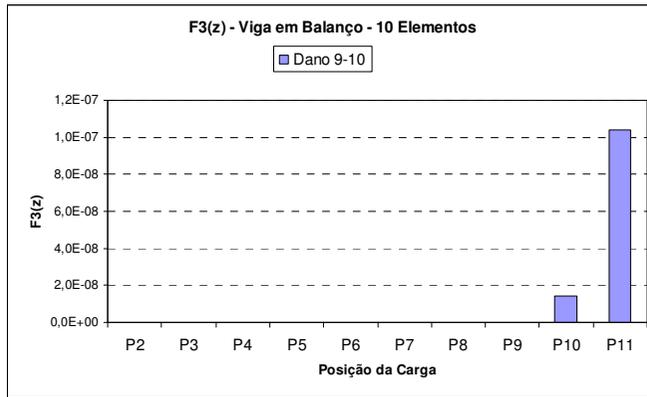


(g)

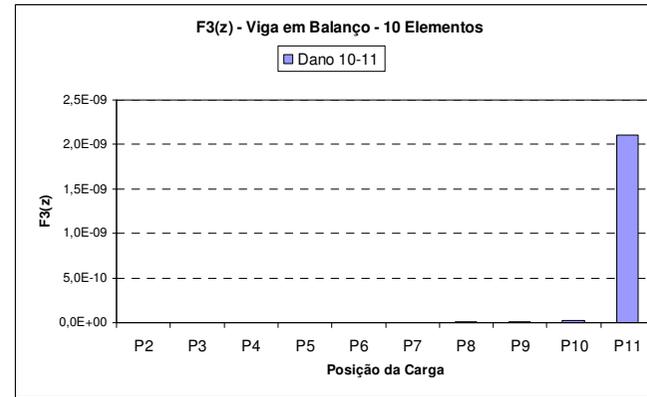


(h)

Figura 4.29 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F3(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



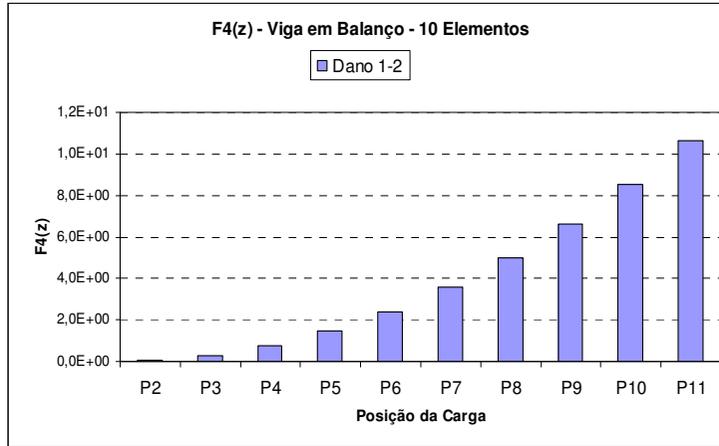
(i)



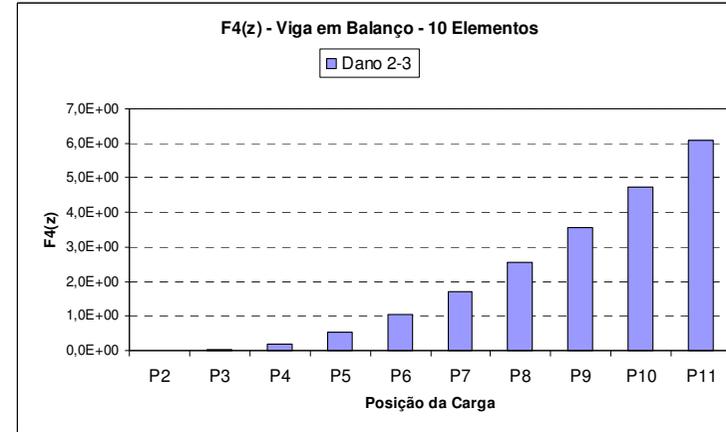
(j)

Figura 4.29 (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F3(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

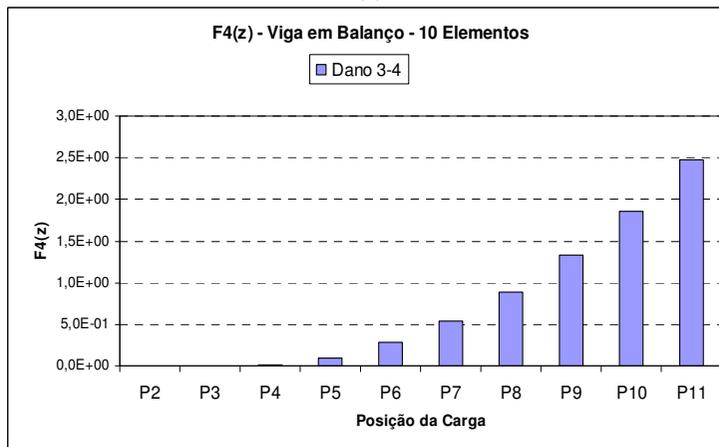
$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N \left( \Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} \right) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2$$



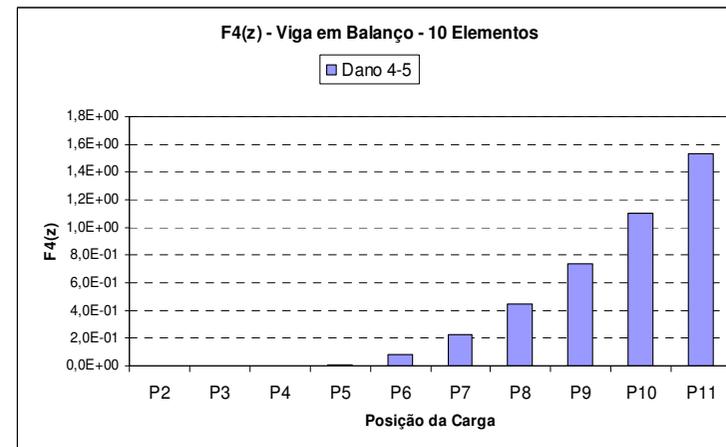
(a)



(b)

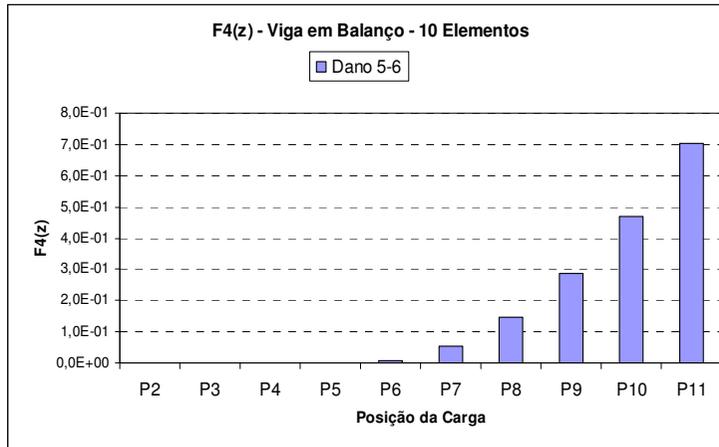


(c)

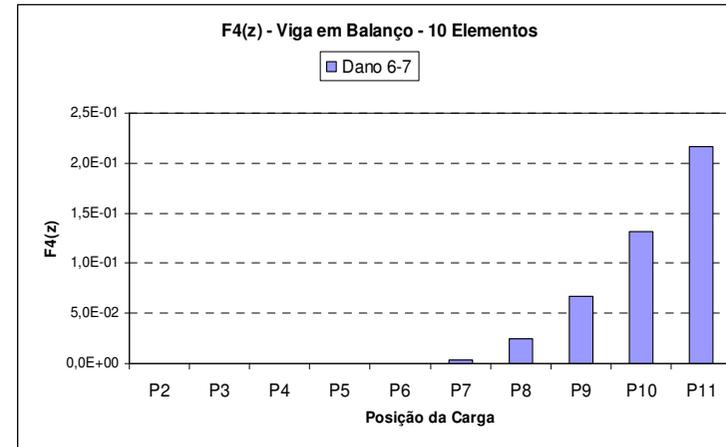


(d)

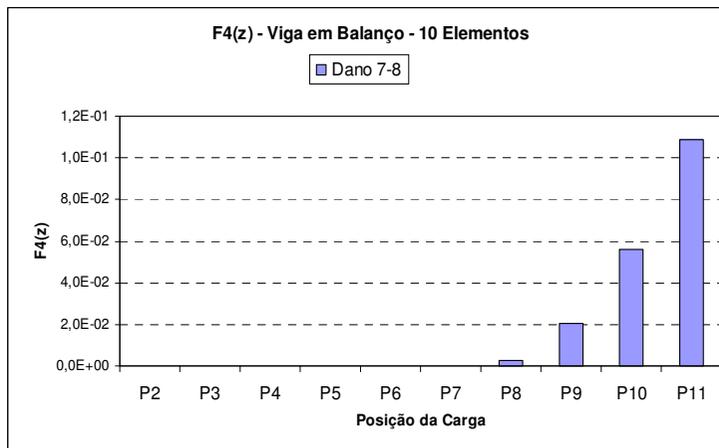
Figura 4.30 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_4(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



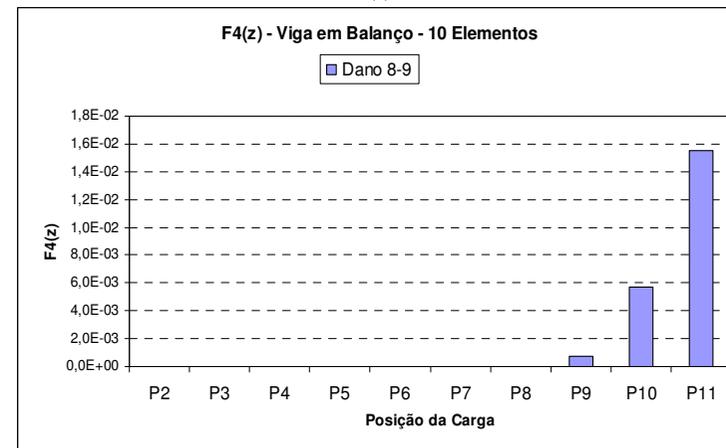
(e)



(f)

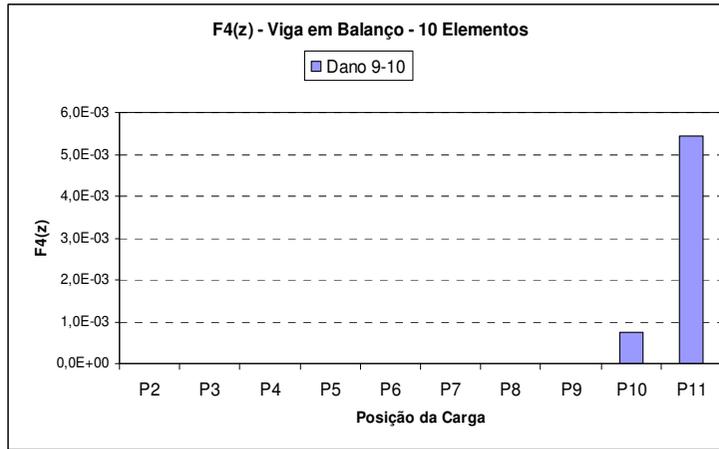


(g)

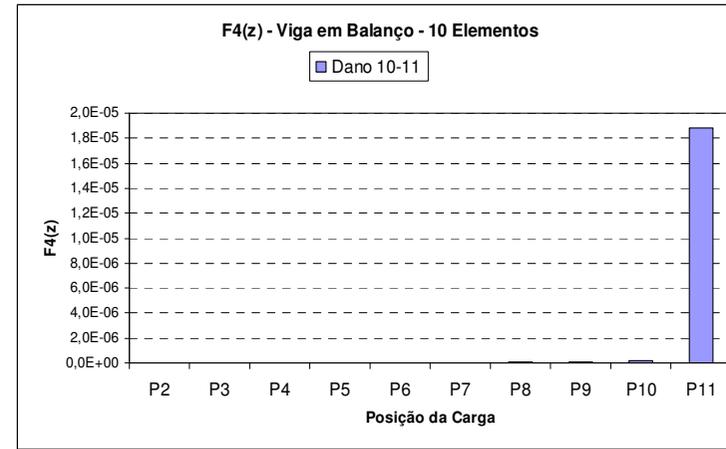


(h)

Figura 4.30 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



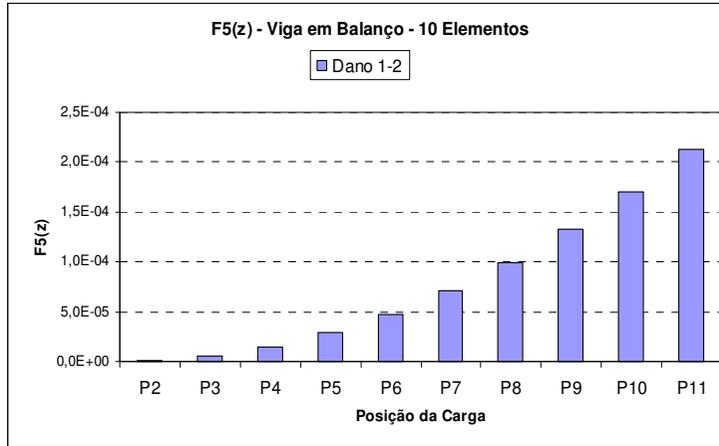
(i)



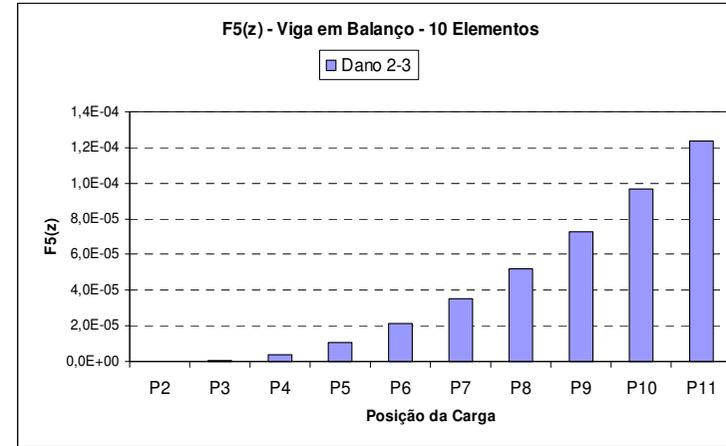
(j)

Figura 4.30 (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

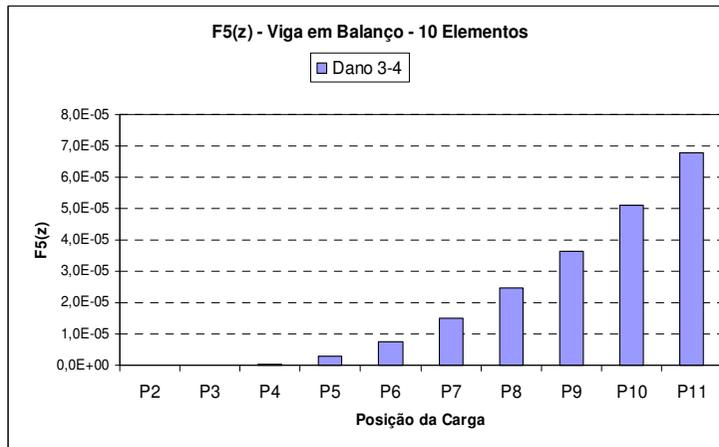
$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1)$$



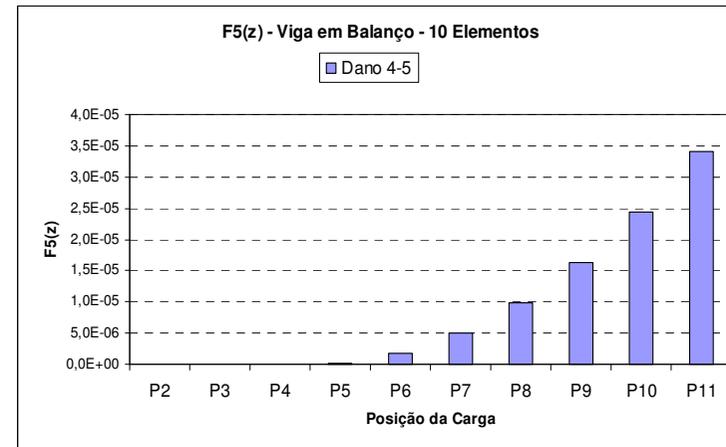
(a)



(b)

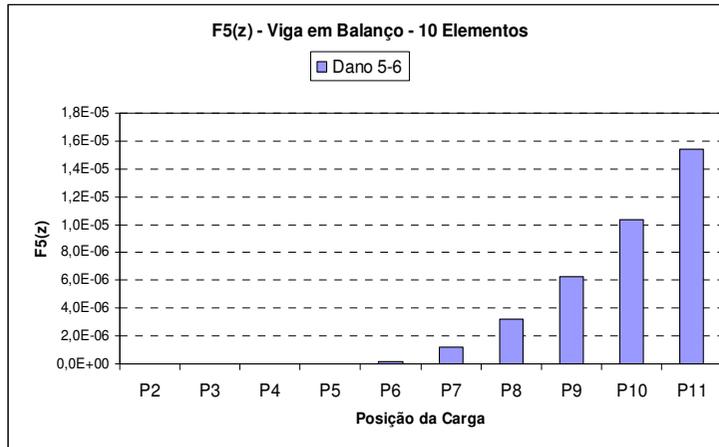


(c)

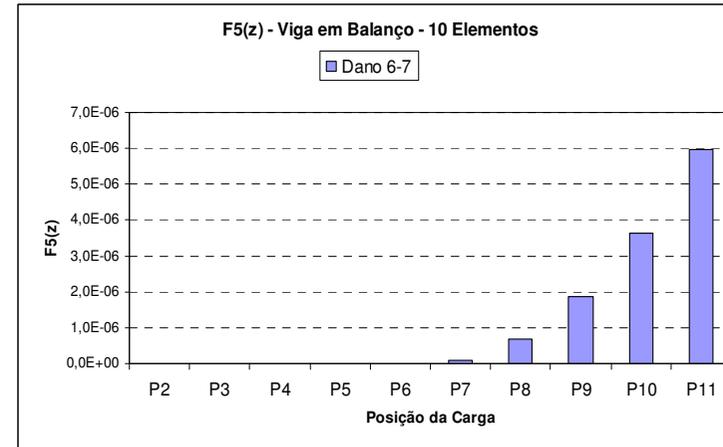


(d)

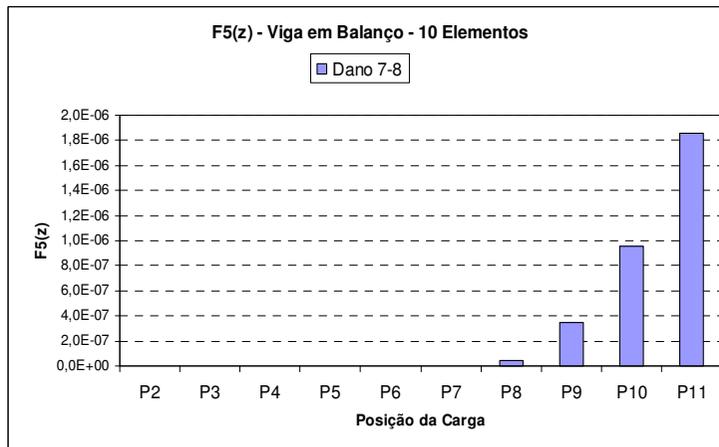
Figura 4.31 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_5(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



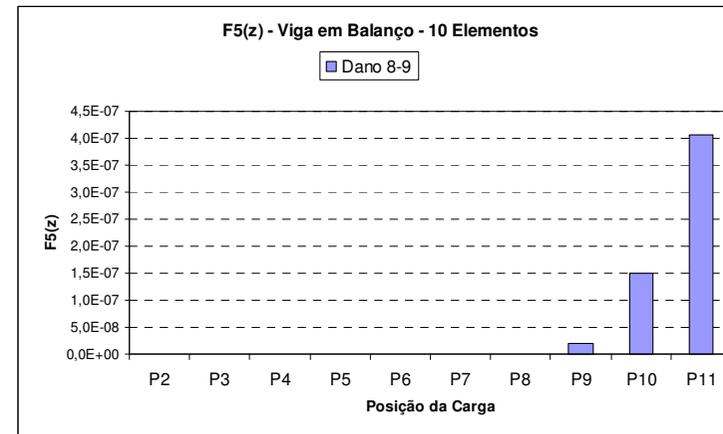
(e)



(f)

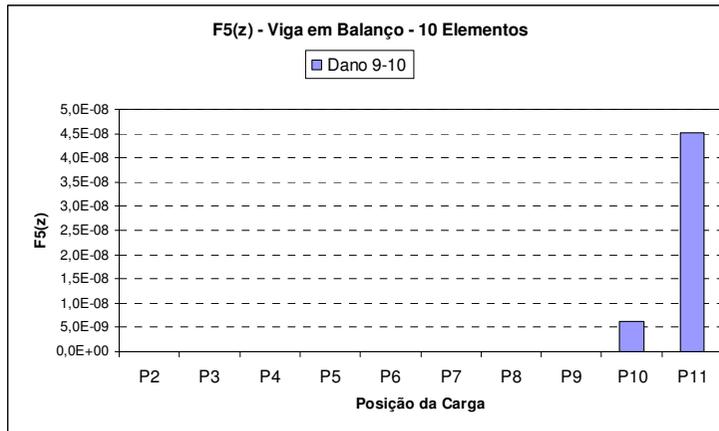


(g)

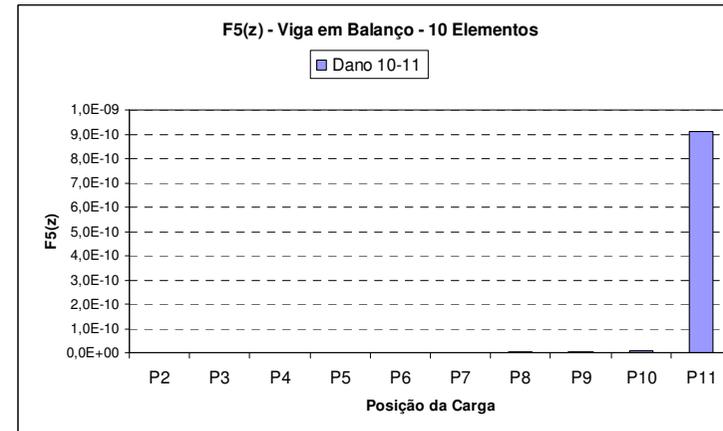


(h)

Figura 4.31 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



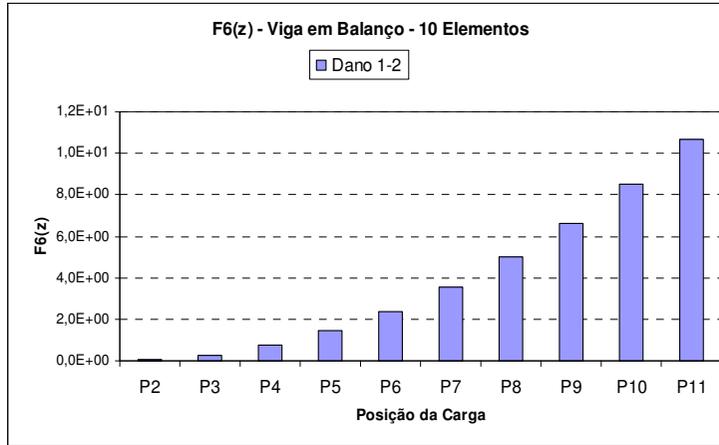
(i)



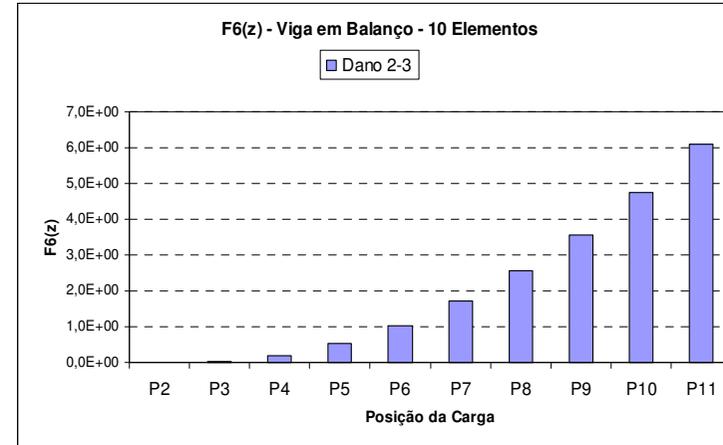
(j)

Figura 4.31 (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

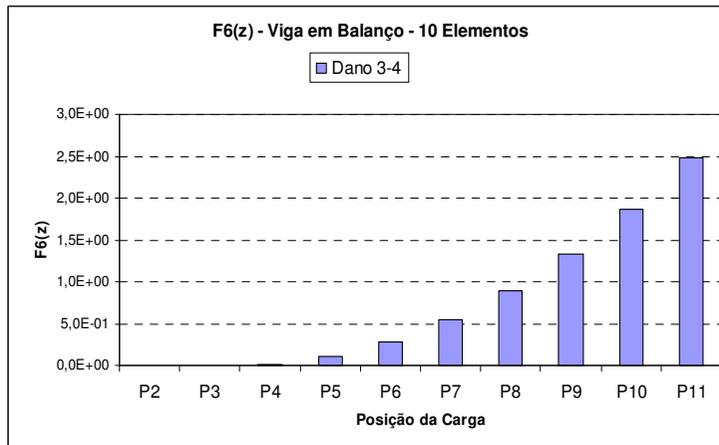
$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2$$



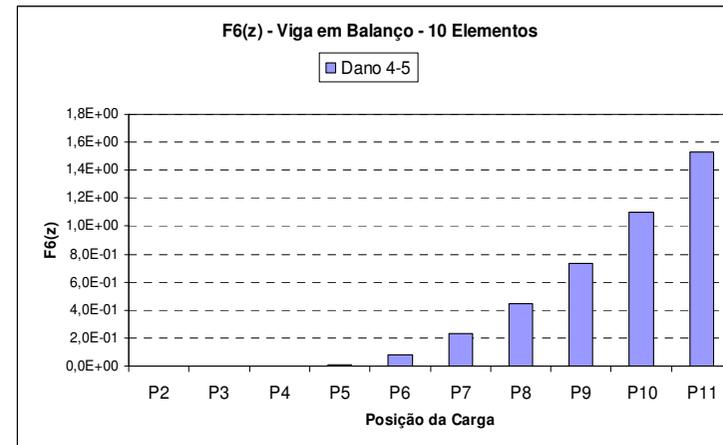
(a)



(b)

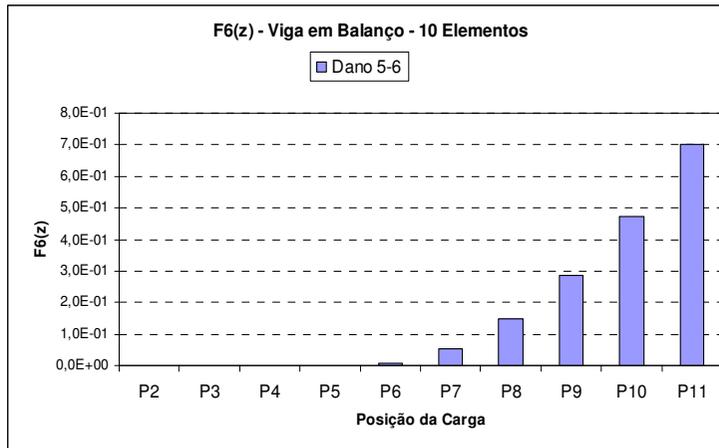


(c)

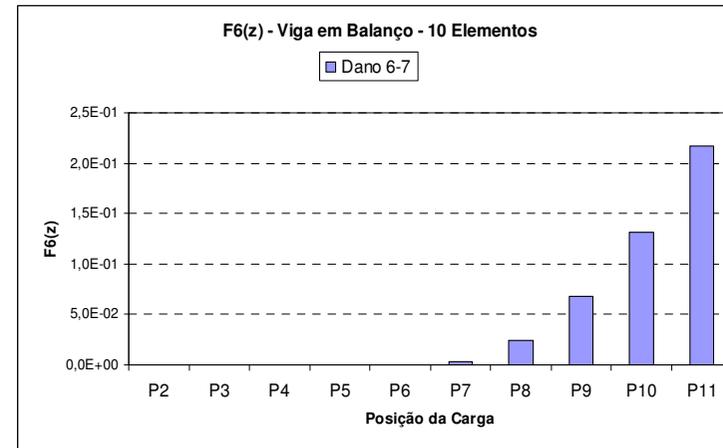


(d)

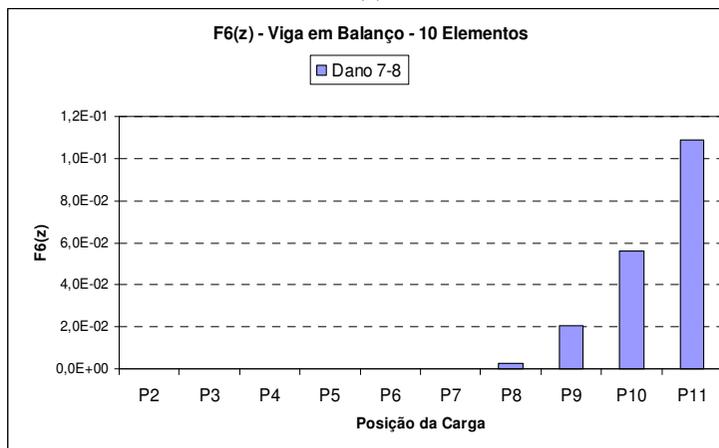
Figura 4.32 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_6(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



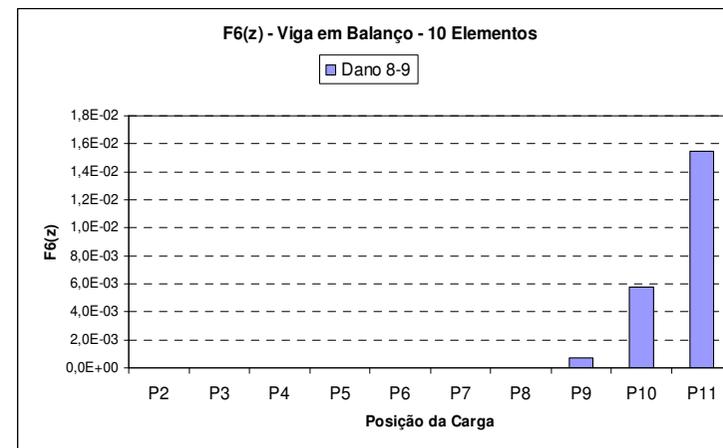
(e)



(f)

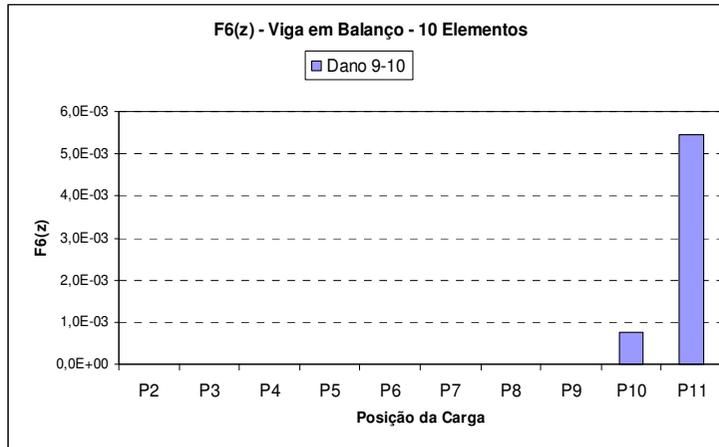


(g)

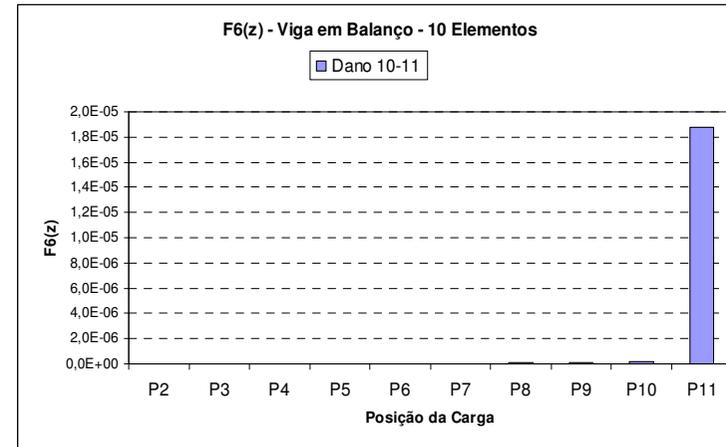


(h)

Figura 4.32 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F6(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(i)



(j)

Figura 4.32 (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

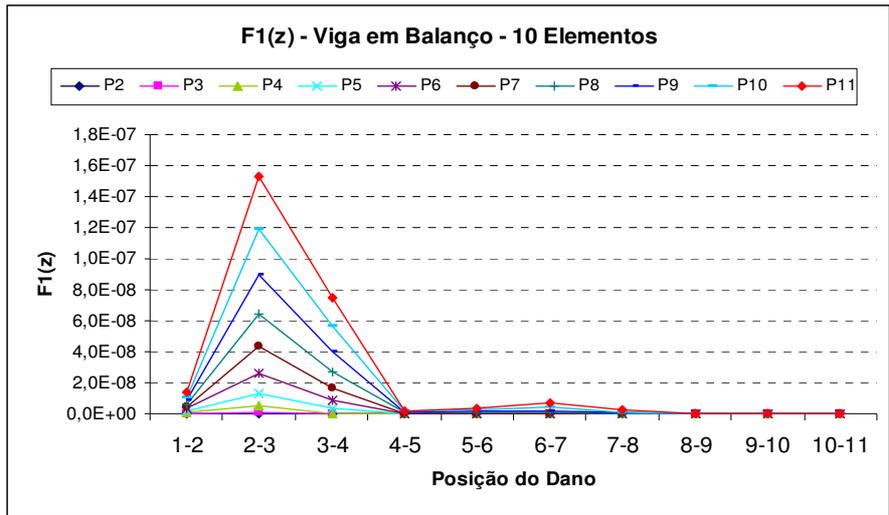
O padrão dos gráficos das Figuras de 4.37 a 4.32 é o mesmo dos gráficos da viga em balanço dividida em três e seis elementos.

Vale notar que para a situação em que o dano está no elemento 10-11, conforme gráficos 4.27(j), 4.28(j), 4.30(j), 4.31(j) e 4.32(j) existe um pequeno patamar para quando a carga está nos nós 8 (P8), 9 (P9) e 10 (P10) e ainda, conforme o gráfico 4.29(j) existe um pequeno patamar apenas para quando a carga está no nó 10 (P10). Tal situação não é observada para a viga dividida em três ou seis elementos. Contudo, ainda é possível identificar qual a localidade do dano nestes gráficos e não confundi-los com qualquer um dos gráficos de danos em outros elementos, visto que, com exceção de quando o dano está no elemento 10-11, os patamares possuem um comportamento mais gradual.

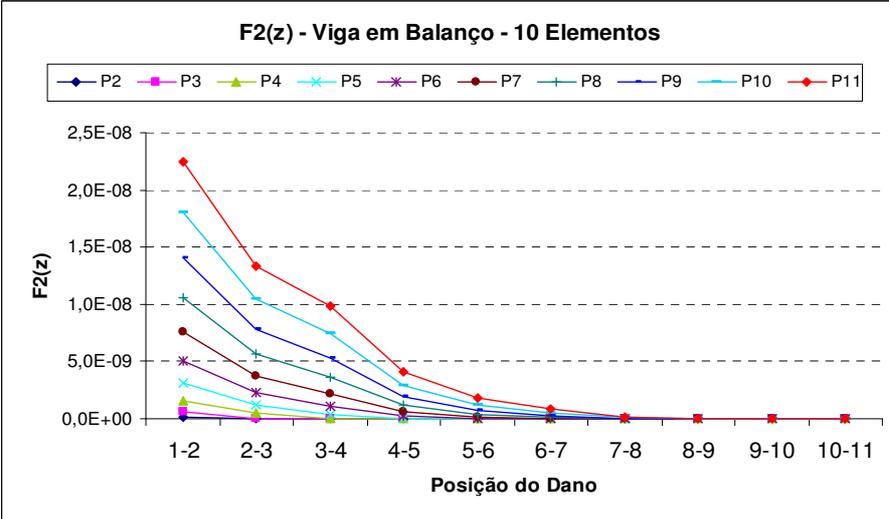
Podem-se comparar como exemplo os gráficos 4.32(g) e 4.32(j). Fica claro que em 4.32(g) o dano está em 7-8, já que o patamar do gráfico se inicia em P8 e o restante dos valores aparece de maneira gradual. Já o gráfico 4.32(j) mostra um súbito aumento quando a carga está em P11 e assim fica claro que o dano está no elemento 10-11, como se os patamares de P8, P9 e P10 pudessem ser considerados nulos.

Sendo assim, percebe-se que mais importante que a representação do valor significativo da Assinatura nos gráficos para a localização do dano é observar a variação entre os patamares dos gráficos. Pois os gráficos 4.27(j), 4.28(j), 4.29(j), 4.30(j), 4.31(j) e 4.32(j) mostram que valores muito pequenos e não graduais em P8, P9 e/ou P10 em relação a P11, representam, que o dano está no elemento 10-11.

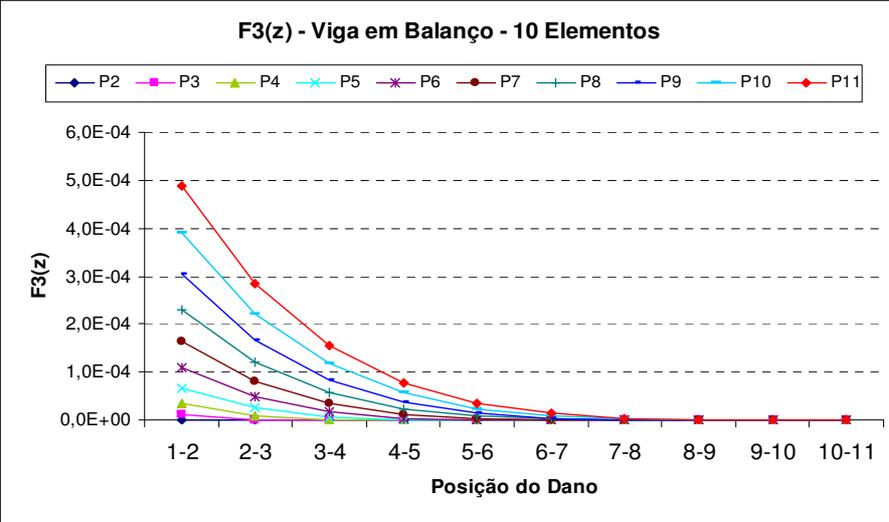
É possível, portanto, determinar pelo comportamento dos gráficos qual a localidade do dano de acordo com a posição da carga. Por exemplo, se o valor mínimo significativo, comparadas as devidas proporções, for obtido para a carga P9, significa que o dano está no elemento 8-9.



(a)

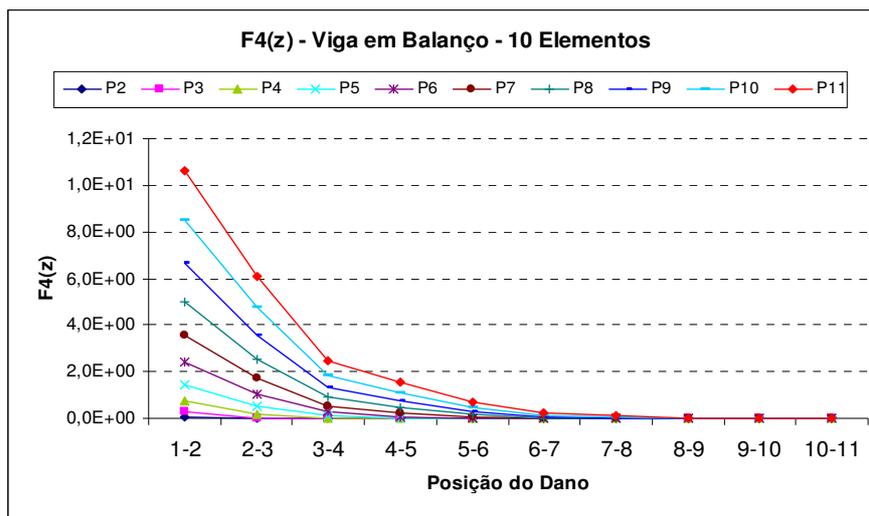


(b)

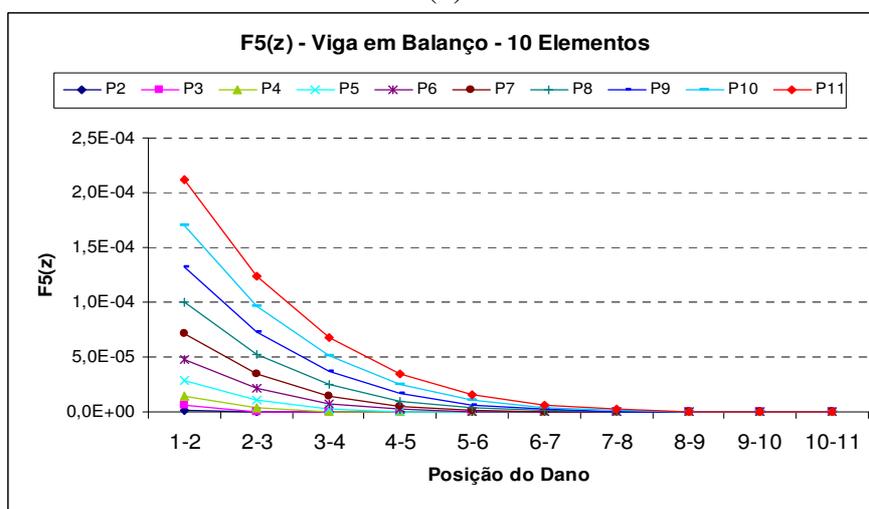


(c)

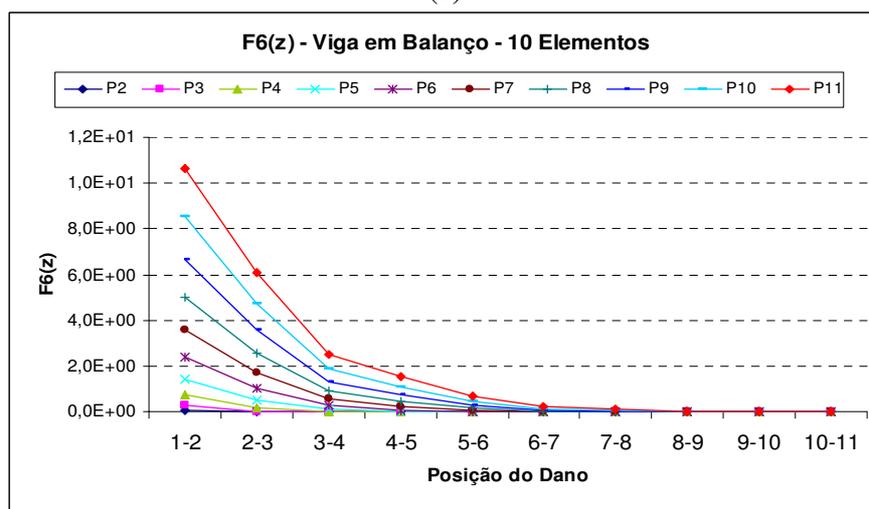
Figura 4.33 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F1(z)$  a  $F3(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.



(d)



(e)



(f)

Figura 4.33 (d) a (f) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para a viga em balanço dividida em dez elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.

Como mostra a comparação dos gráficos das Figuras de 4.33(a) a 4.33(f), novamente, apenas a Assinatura  $F_1(z)$  não possui comportamento semelhante aos outros gráficos.

A divergência aparece em maior valor absoluto para  $F_1(z)$  quando a carga é aplicada na extremidade da viga em balanço (P10), representado pela linha vermelha. Mas, neste caso, observa-se que  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$  são menores para quando o dano é aplicado nos elementos 2-3 e em 6-7. Na Figura 4.34 em que a escala do gráfico foi alterada, estas variações ficam mais evidentes.

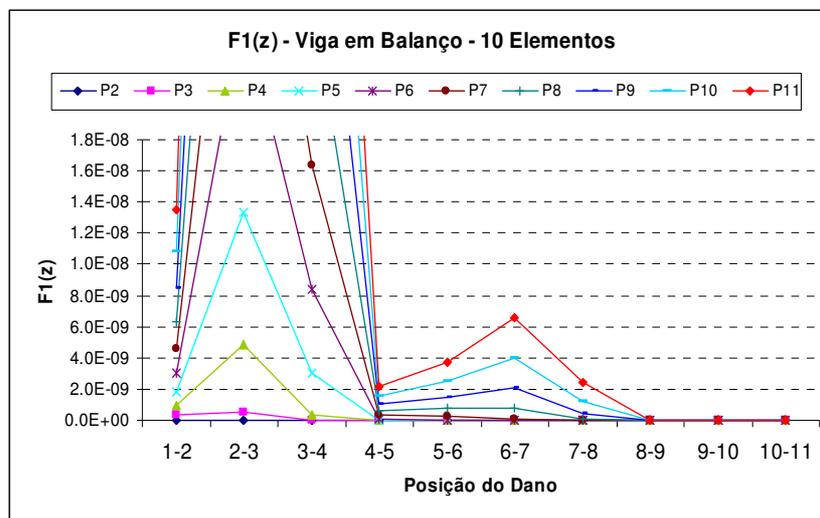


Figura 4.34 - Gráfico da Figura 45(a) ampliado, para a Assinatura  $F_1(z)$  mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, em maior escala, para viga em balanço dividida em dez elementos.

A Figura 4.35 apresenta o gráfico elaborado escolhidas as frequências de maiores diferenças, sem a disparidade de pontos, e ratifica que, os termos da equação  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$  realmente possuem influência na uniformidade dos valores de  $F_1(z)$ .

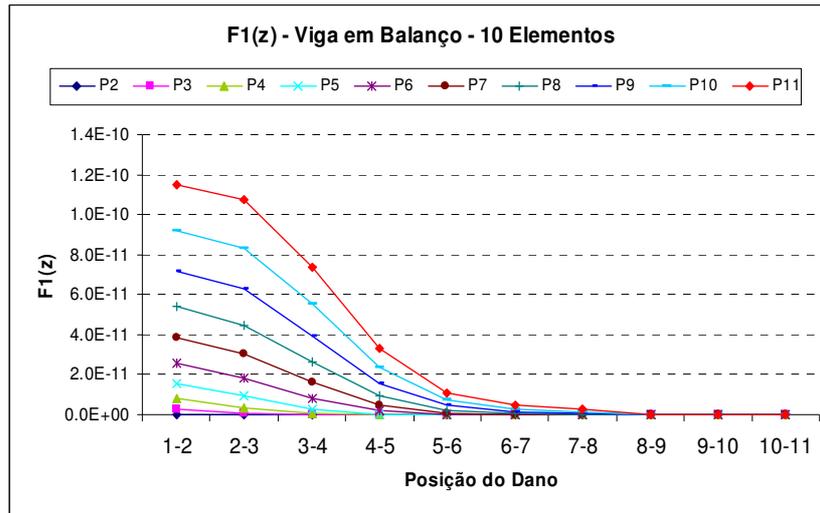


Figura 4.35 - Gráfico para a Assinatura  $F_1(z)$  mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, adotadas frequências de valores maiores, para viga em balanço dividida em dez elementos.

## 4.5 VIGA BIENGASTADA

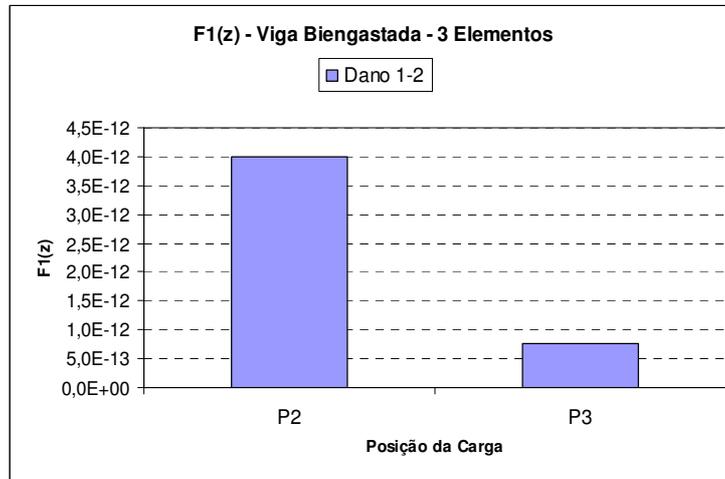
### 4.5.1 Viga Biengastada para 3 Elementos

A viga biengastada dividida em três elementos pode ser ilustrada pela Figura 4.7 que representa suas dimensões, nós e todas suas outras características físicas que foram utilizadas para a obtenção de seus deslocamentos e frequências.

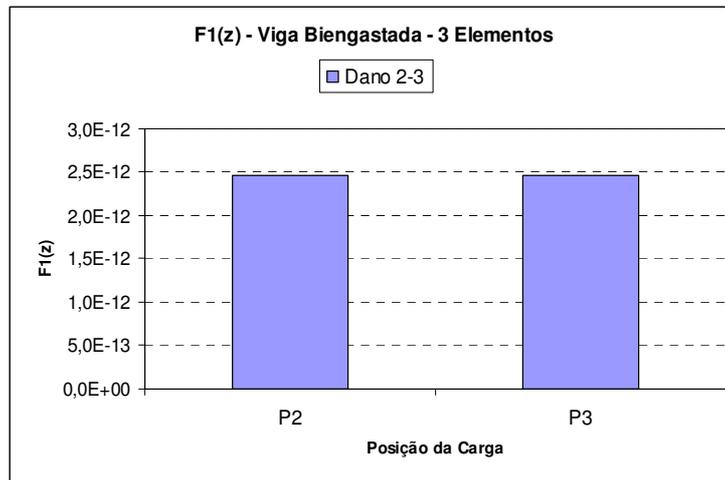
Para cada uma das seis assinaturas os resultados de frequência e deslocamentos obtidos foram aplicados da mesma maneira que para a viga em balanço de três e seis elementos.

Para as Assinaturas de  $F_1(z)$  a  $F_6(z)$ , tendo a carga concentrada de 5,0 KN no nó e mantendo o dano no mesmo elemento, teremos os comportamentos demonstrados pelas Figuras 4.36 a 4.41.

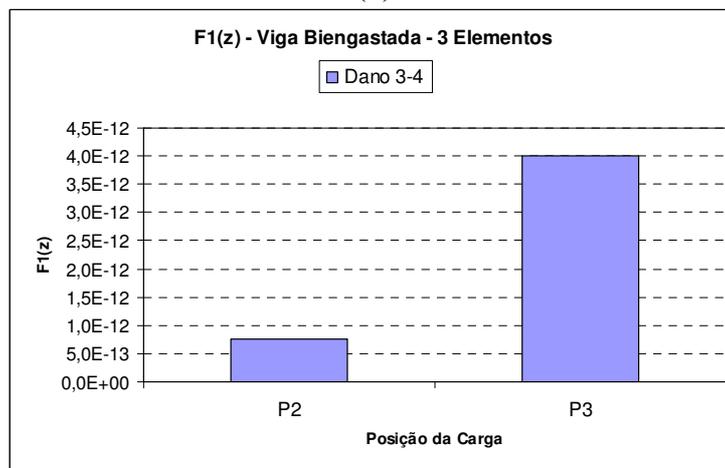
$$F_I(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right]$$



(a)



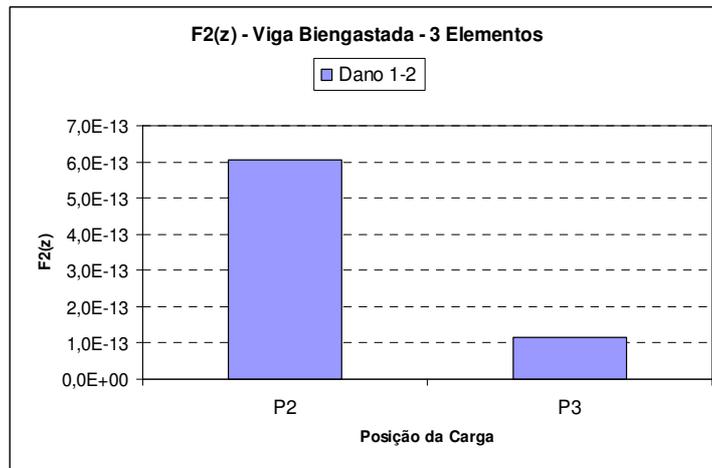
(b)



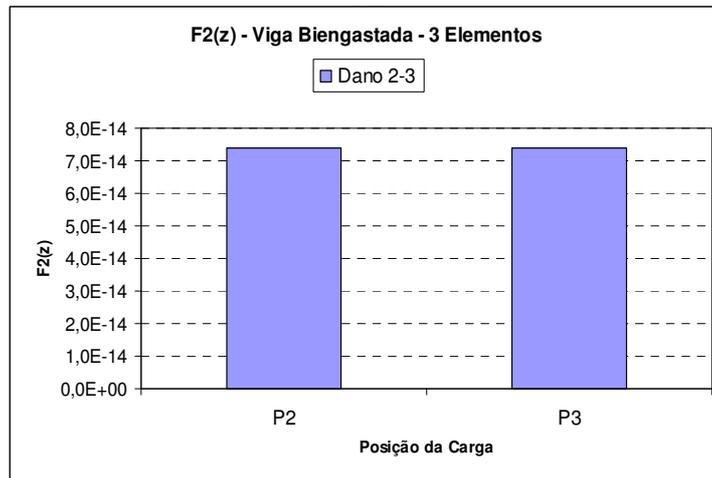
(c)

Figura 4.36 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_I(z)$  para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

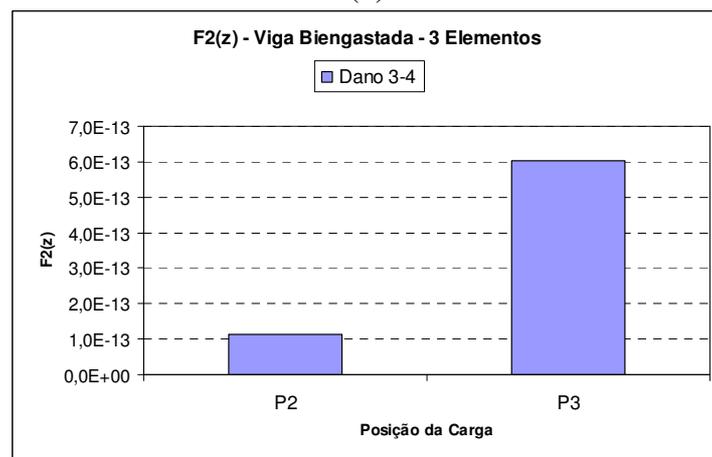
$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})}{\sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2}$$



(a)



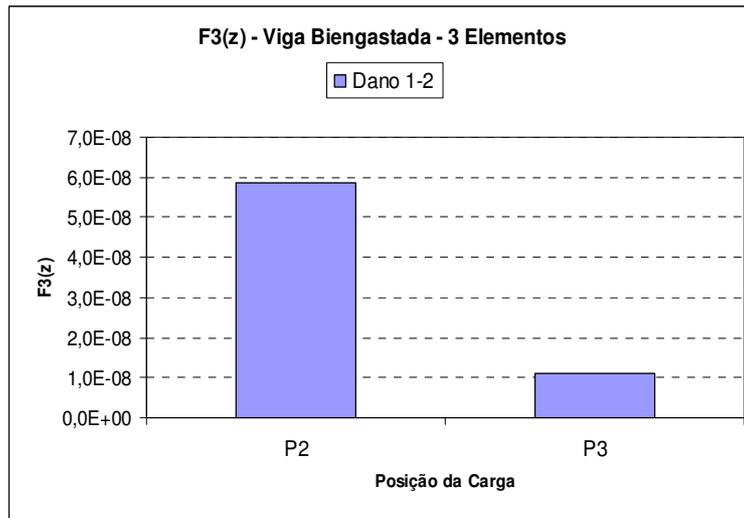
(b)



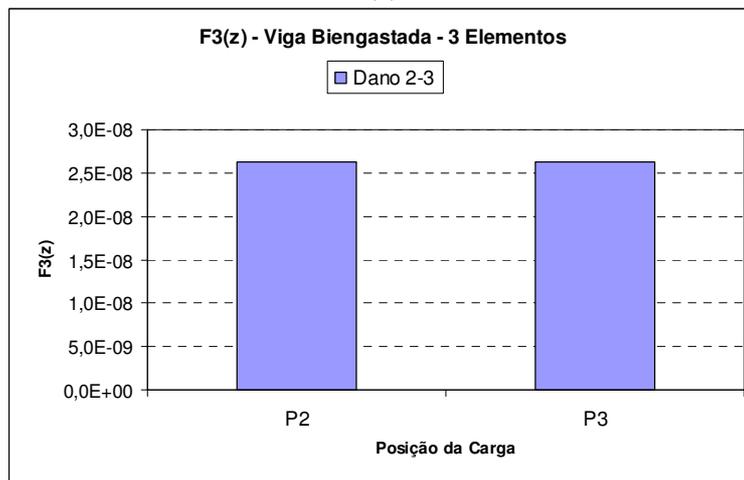
(c)

Figura 4.37 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_2(z)$  para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

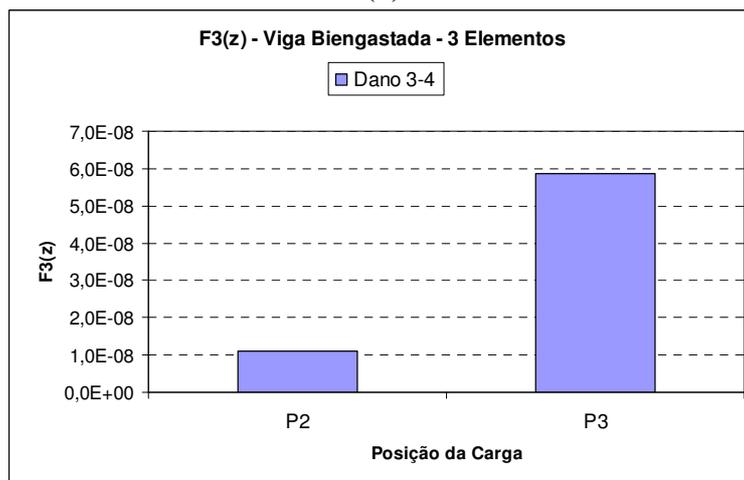
$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})$$



(a)



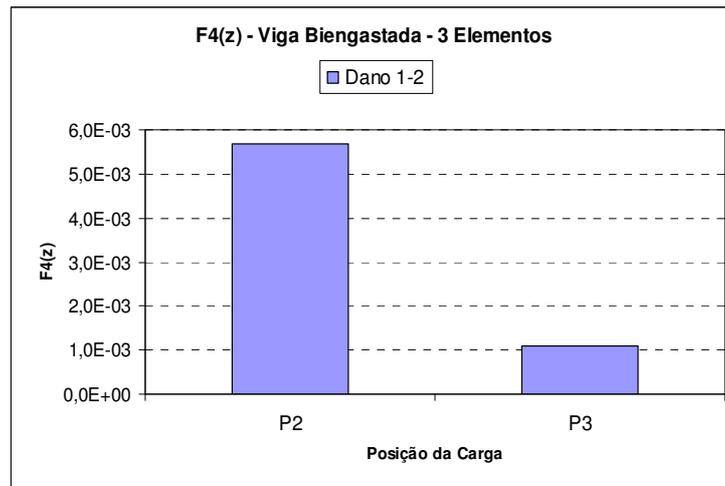
(b)



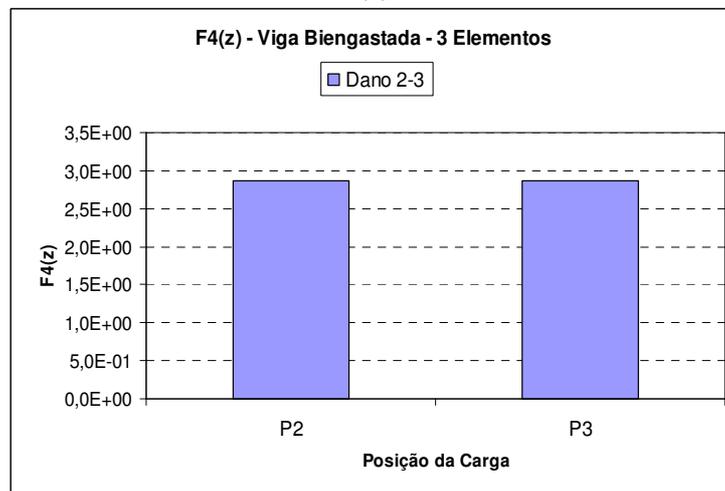
(c)

Figura 4.38 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_3(z)$  para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

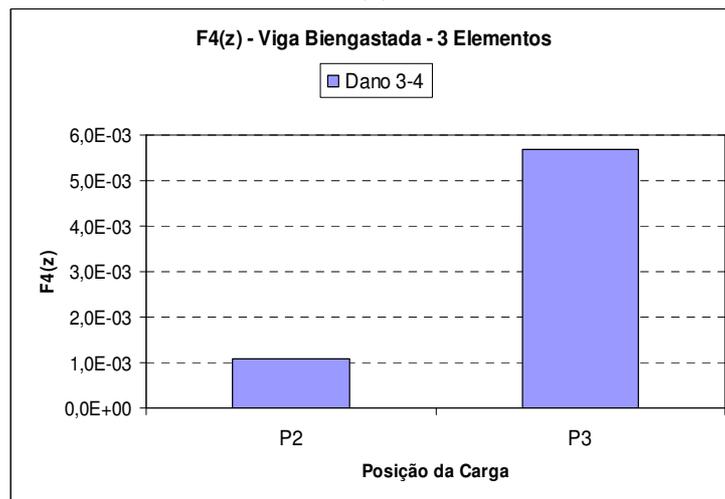
$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2}) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2$$



(a)



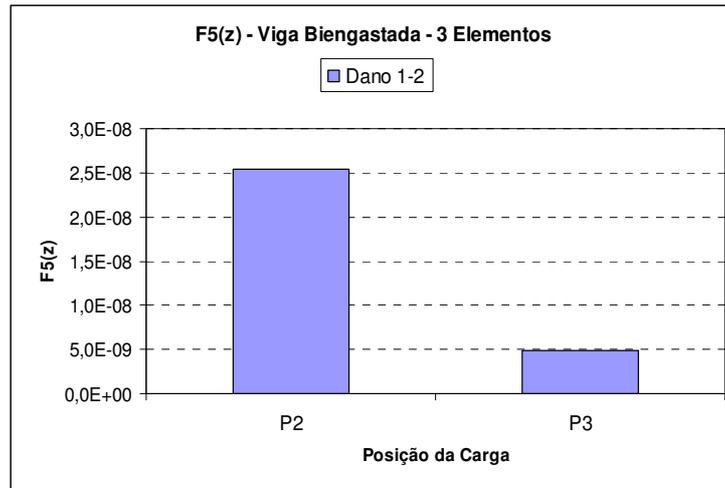
(b)



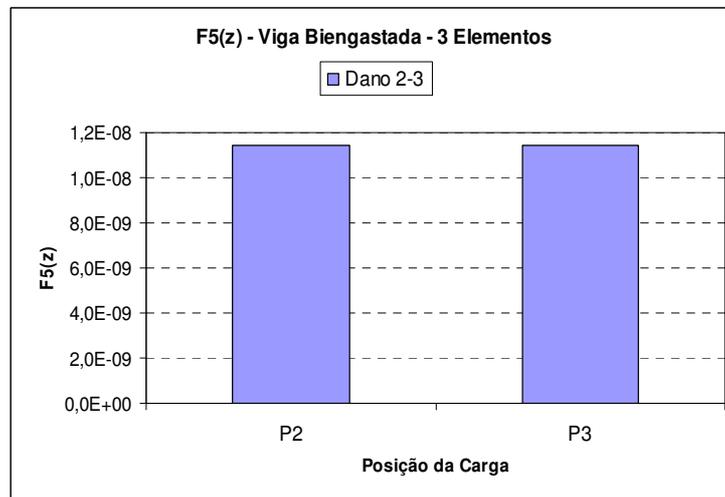
(c)

Figura 4.39 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_4(z)$  para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

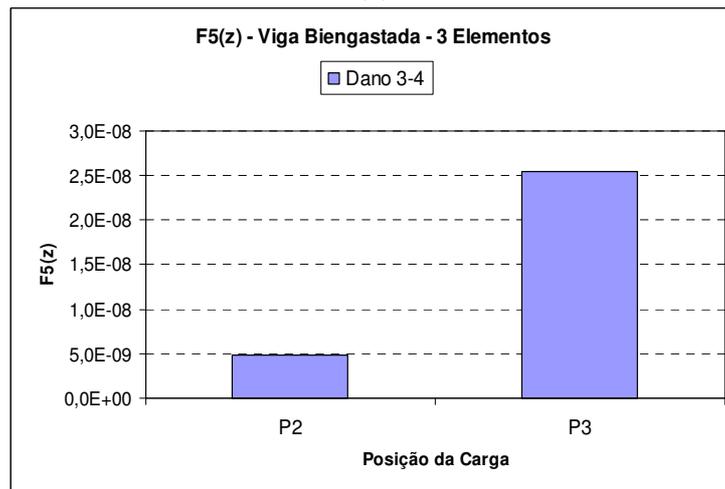
$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1)$$



(a)



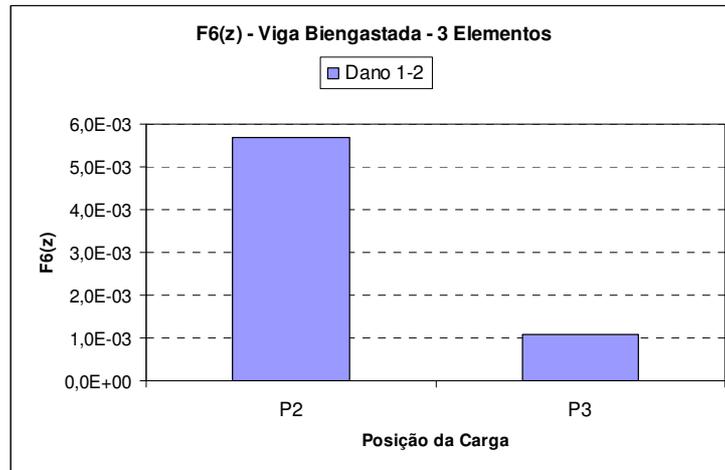
(b)



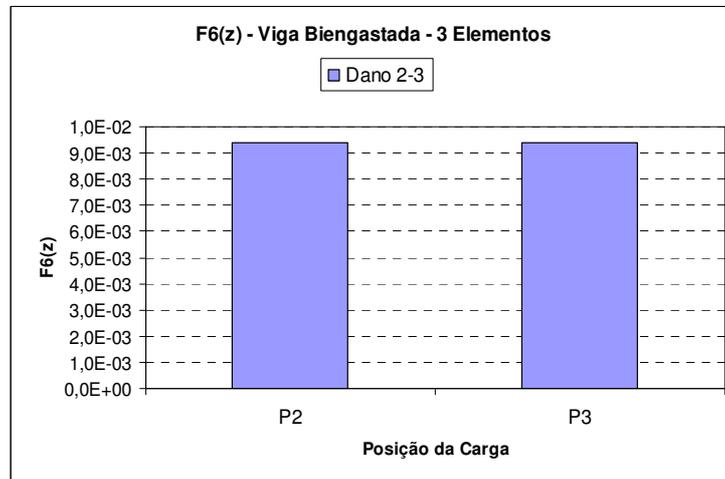
(c)

Figura 4.40 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_5(z)$  para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

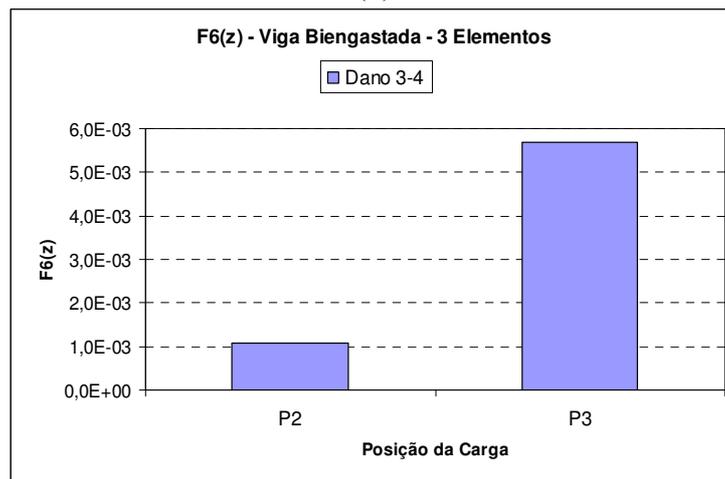
$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2$$



(a)

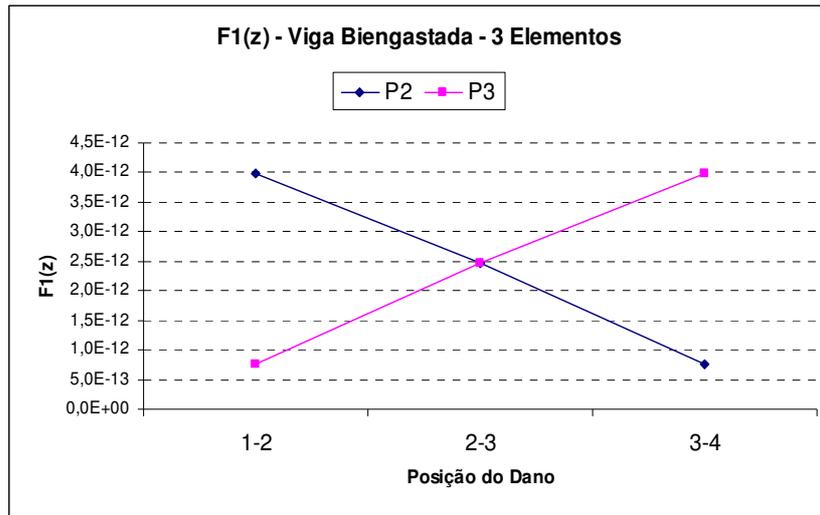


(b)

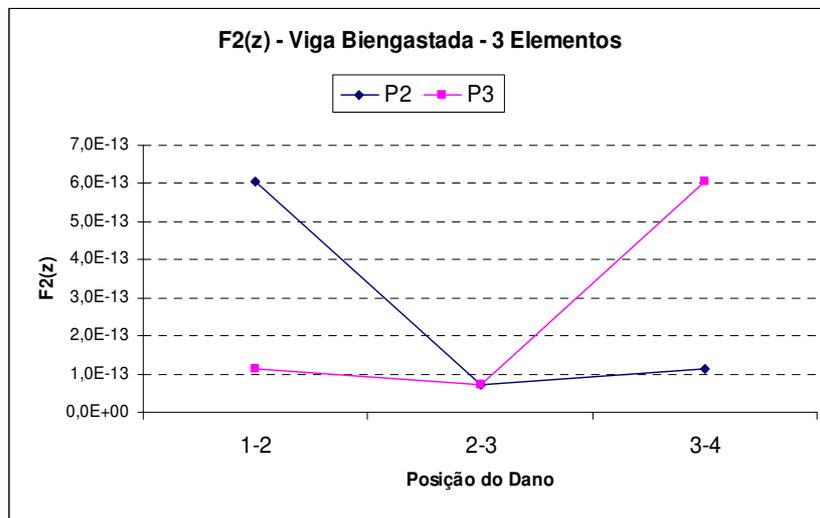


(c)

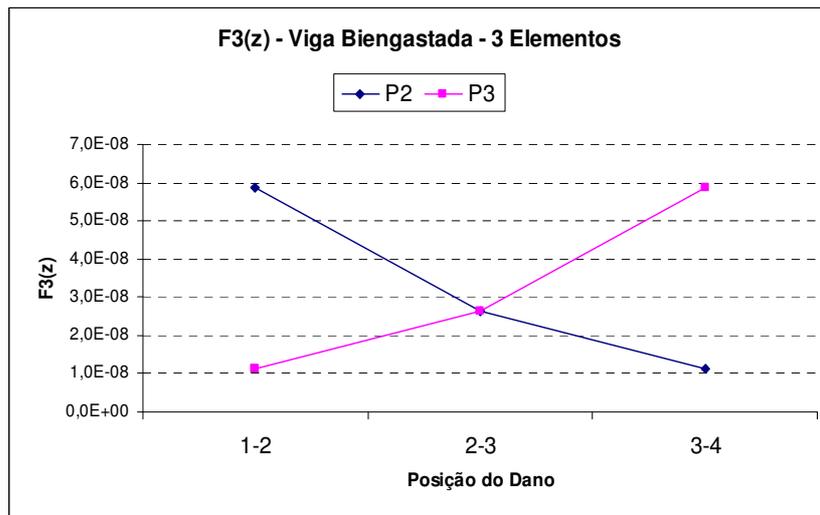
Figura 4.41 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_6(z)$  para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(a)

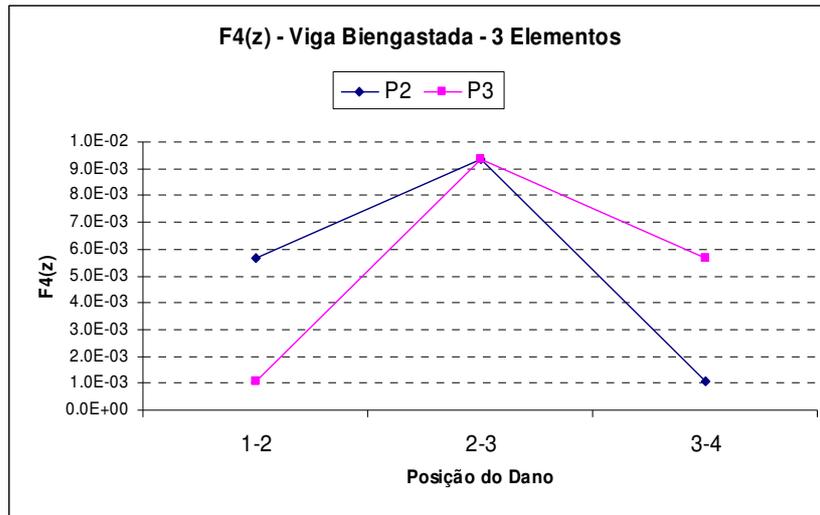


(b)

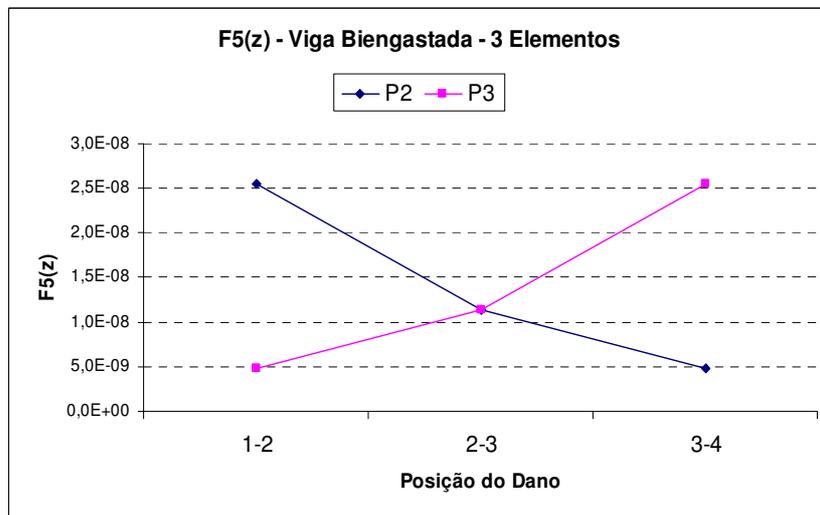


(c)

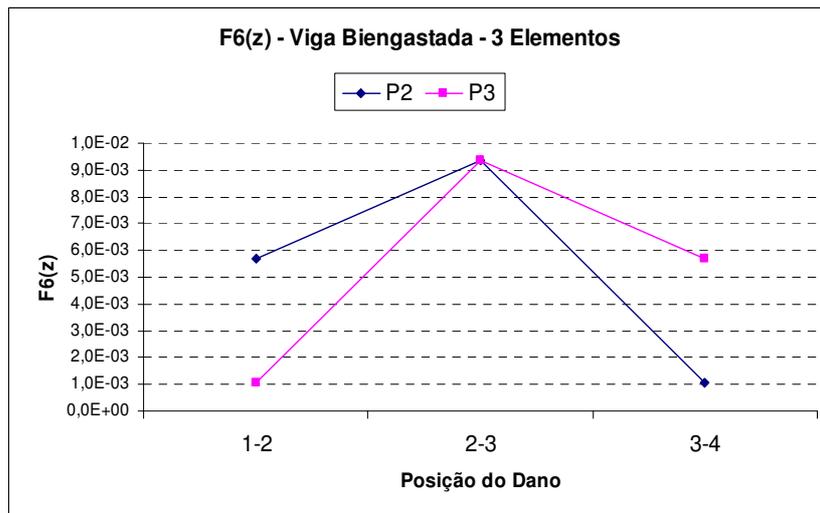
Figura 4.42 (a) a (c) – Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.



(d)



(e)



(f)

Figura 4.42 (d) a (f) – Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para a viga biengastada dividida em três elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.

Observa-se que dividindo a viga biengastada em três elementos, existirá uma simetria entre os dois elementos das extremidades e restará um central. Portanto, é fácil prever o comportamento neste caso, já que existe uma perfeita simetria.

Por isso, para a viga biengastada dividida em três elementos, podemos concluir que, de acordo com os gráficos de 4.36 a 4.41, quando houver dano no elemento 1-2, haverá um pico no nó 2 (P2), simetricamente, se o dano for em 3-4, haverá um pico no nó 3 (P3) e por fim se o dano for em 2-3, o elemento do meio, os patamares se igualam.

Dentre os gráficos das Figuras 4.42 (a) a (f), os gráficos 4.42(b), 4.42 (d) e 4.42 (f) apresentaram um comportamento fora da linearidade esperada, apesar de continuarem com simetria. Isto ocorre porque as assinaturas  $F_2(z)$ ,  $F_4(z)$  e  $F_6(z)$ , respectivamente relacionadas aos gráficos anteriormente citados, estão subordinadas à diferença de frequências ( $\Delta\omega^2$ ). O termo  $\sum \Delta\omega^2$  para o elemento 2-3, coincidentemente, possui um valor maior para todos os casos. Isto provocou um pico em  $F_4(z)$  e  $F_6(z)$ , já que a expressão tem  $\Delta\omega^2$  na multiplicação de termos, e provocou uma pequena depressão em  $F_2(z)$ , já que esta expressão possui o termo  $\Delta\omega^2$  no denominador.

No entanto a assinatura  $F_1(z)$ , que também possui em sua expressão o elemento  $\Delta\omega^2$  no denominador, não possui esta falta de uniformidade. Acontece que, para o elemento 2-3 o resultado para  $\Delta\omega_1^2$ , adotando-se os valores mais baixos de frequência intacta e danificada para se chegar ao valor de  $\Delta\omega_1^2$  (como foi definido inicialmente para elaboração dos gráficos), resultou em um valor nulo e, portanto, o valor usual teve que ser substituído por outras frequências mais altas para resultar diferente de zero. Então, esta substituição de frequências levou o gráfico de  $F_1(z)$  a se comportar de maneira esperada. Ou seja, este comportamento esperado não significa que, para a viga biengastada,  $F_1(z)$  se comporte de maneira uniforme, como poderá ser comprovado nos casos a seguir.

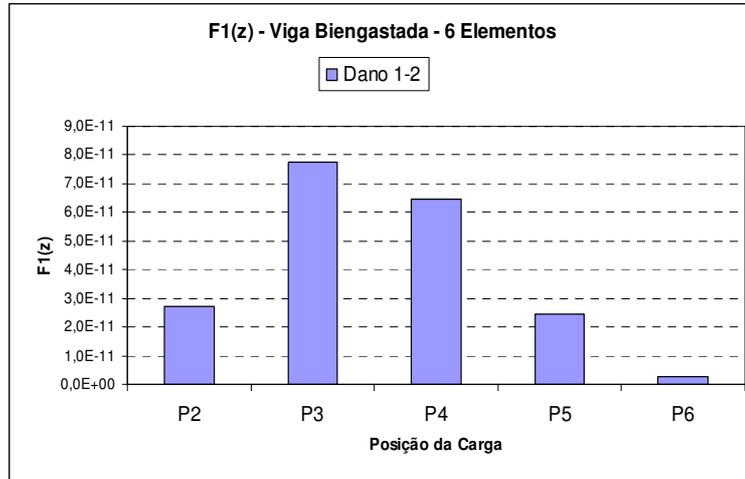
#### 4.5.2 Viga Biengastada para 6 Elementos

A viga biengastada dividida em seis elementos pode ser ilustrada pela Figura 4.7 que representa suas dimensões, nós e todas suas outras características físicas que foram utilizadas para a obtenção de seus deslocamentos e frequências.

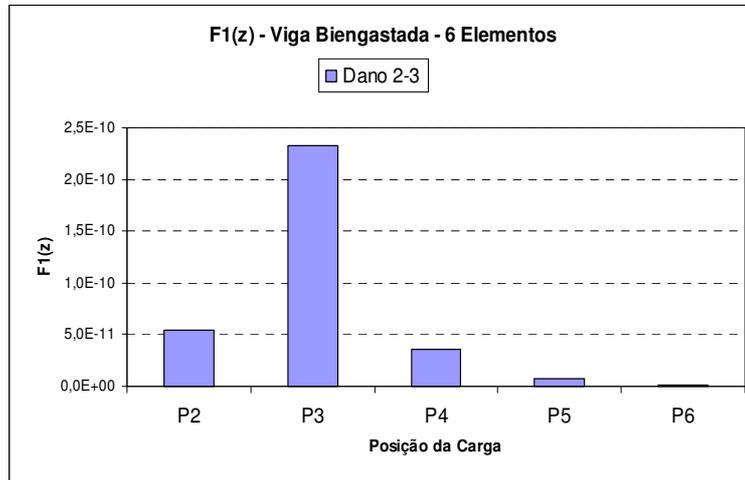
Para cada uma das seis assinaturas os resultados de frequência e deslocamentos obtidos foram aplicados da mesma maneira que para a viga em balanço de três e seis elementos.

Para as assinaturas de  $F_1(z)$  a  $F_6(z)$ , tendo a carga concentrada de 5,0 KN no nó e mantendo o dano no mesmo elemento, têm-se os comportamentos demonstrados pelas Figuras 4.43 a 4.48.

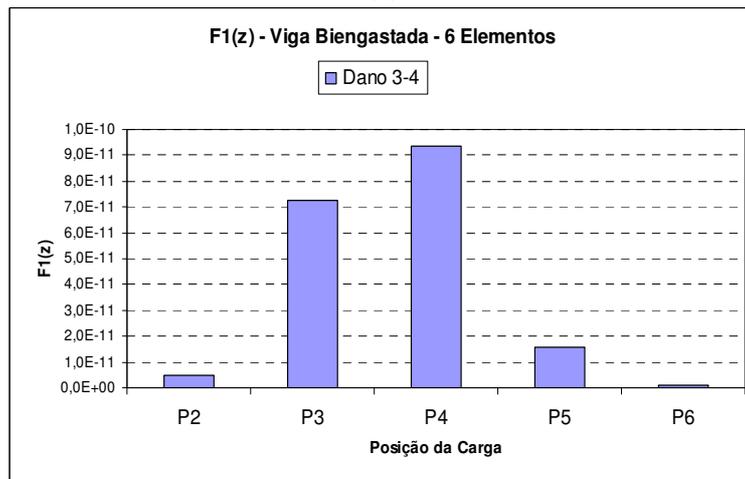
$$F_1(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right]$$



(a)

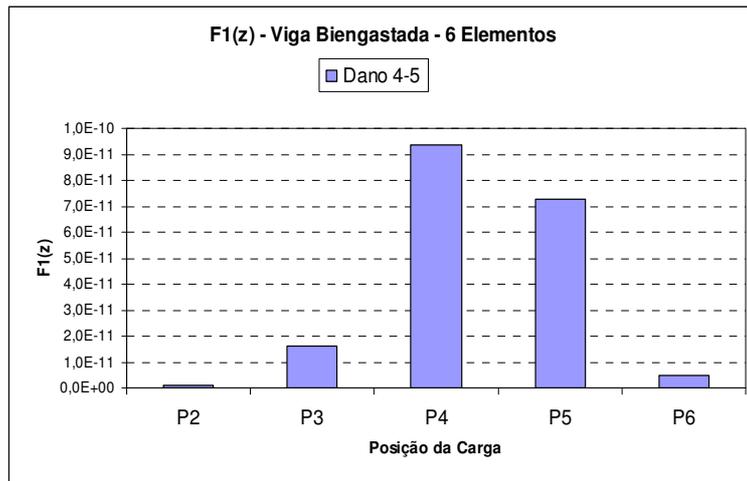


(b)

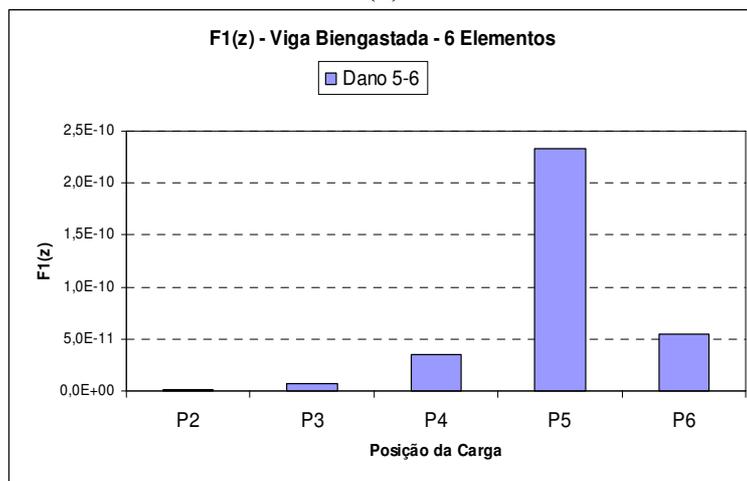


(c)

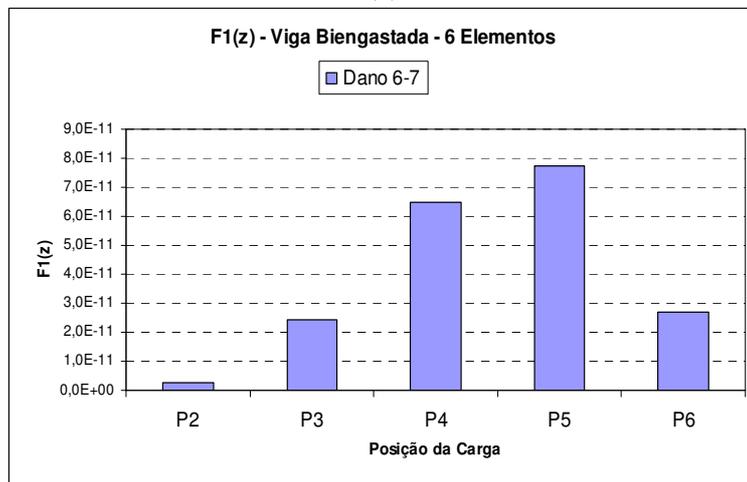
Figura 4.43 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



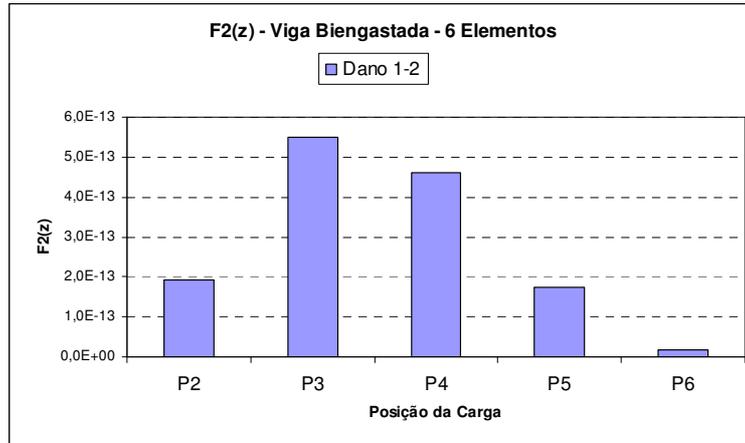
(e)



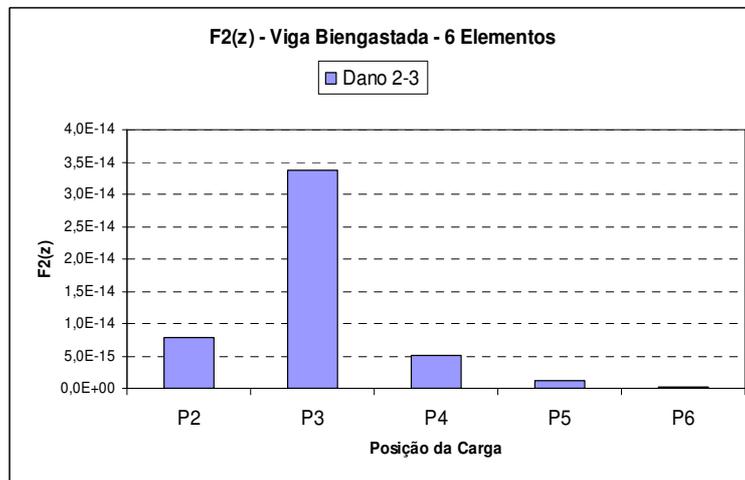
(f)

Figura 4.43 (d) a (f)- Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

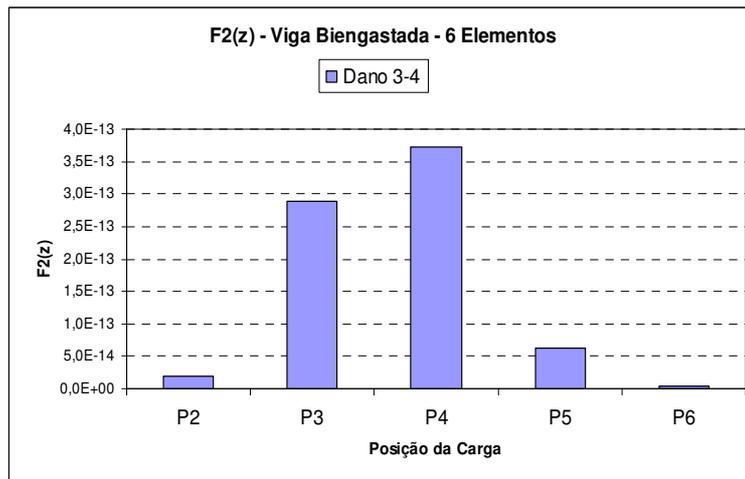
$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})}{\sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2}$$



(a)

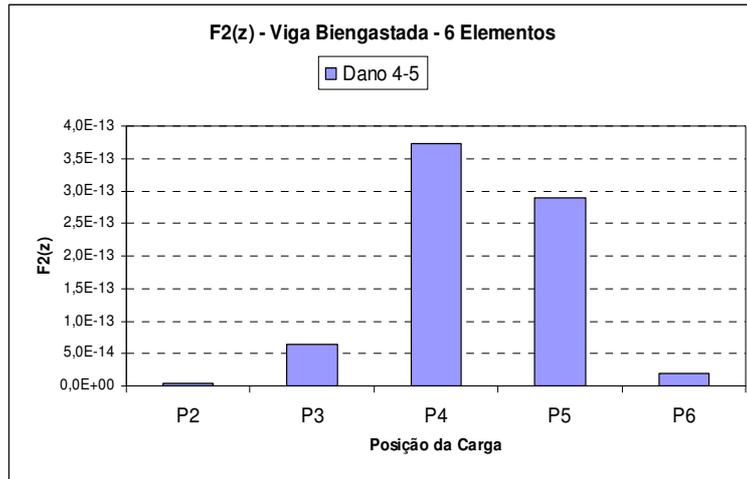


(b)

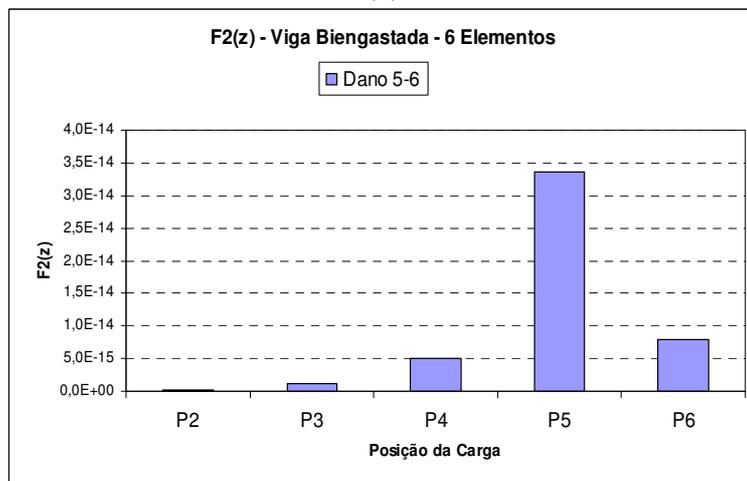


(c)

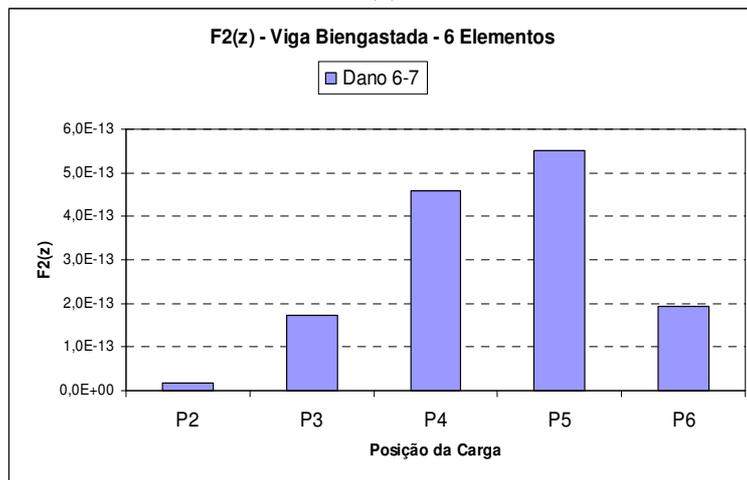
Figura 4.44 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_2(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



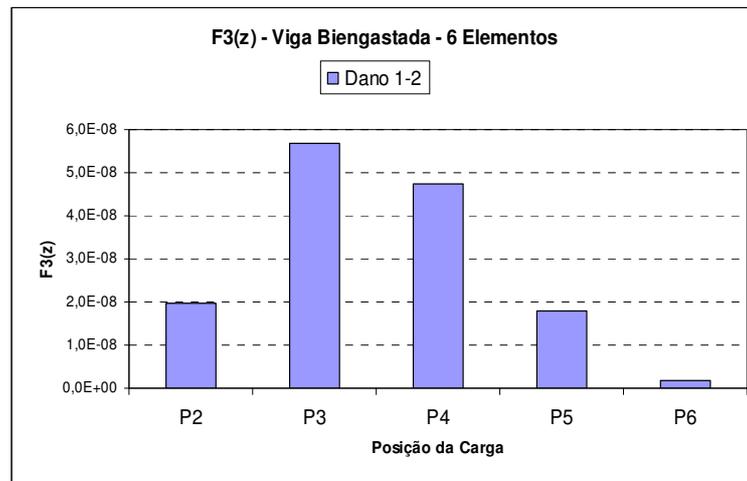
(e)



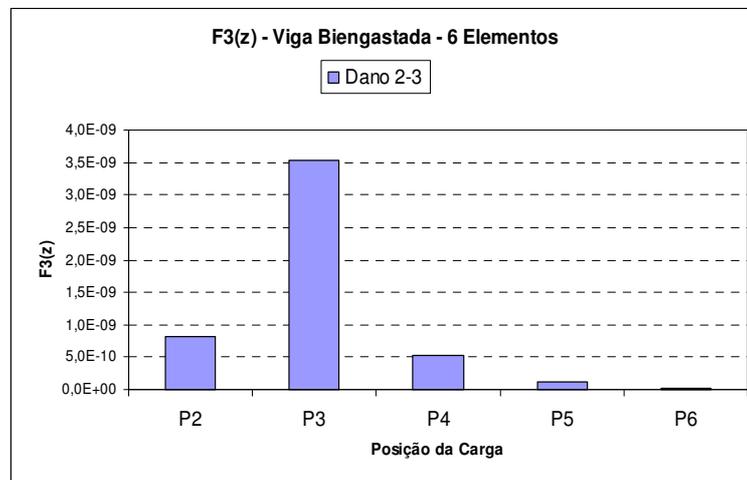
(f)

Figura 4.44 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

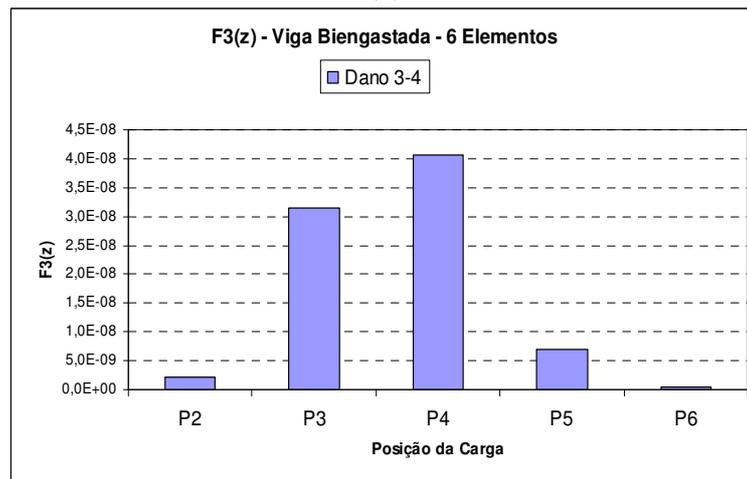
$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})$$



(a)

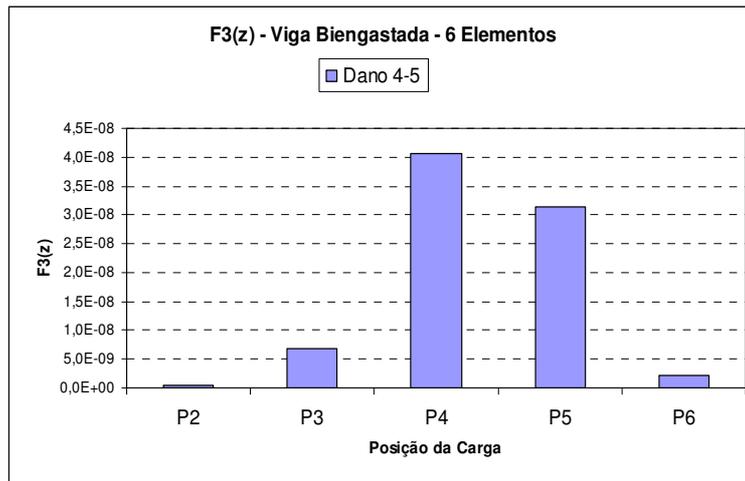


(b)

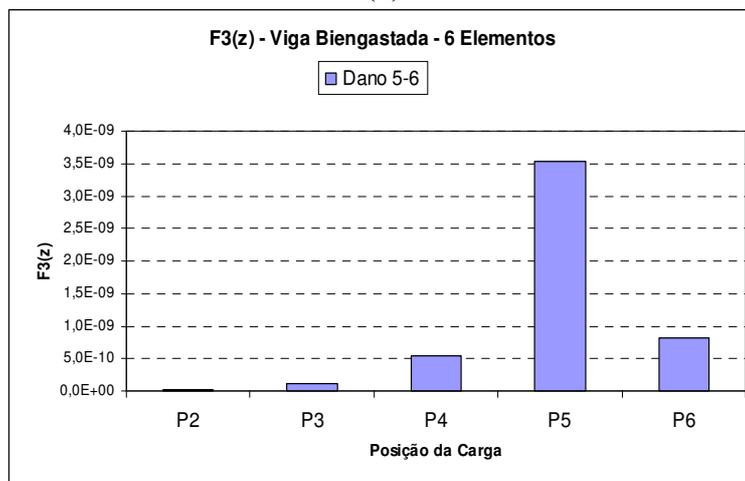


(c)

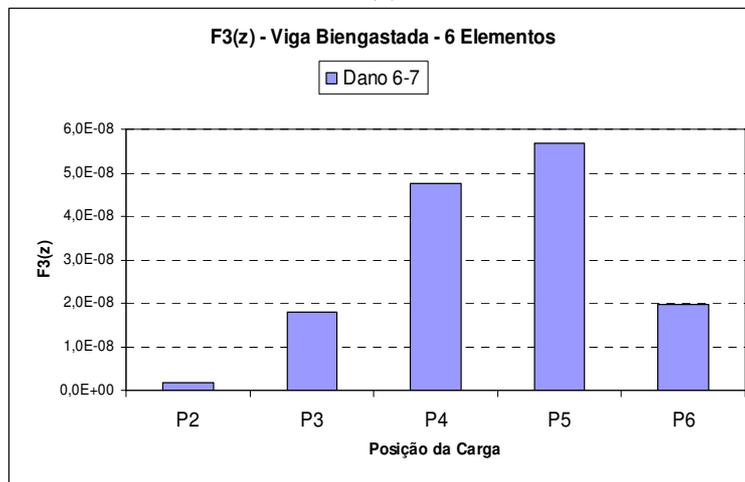
Figura 4.45 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_3(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



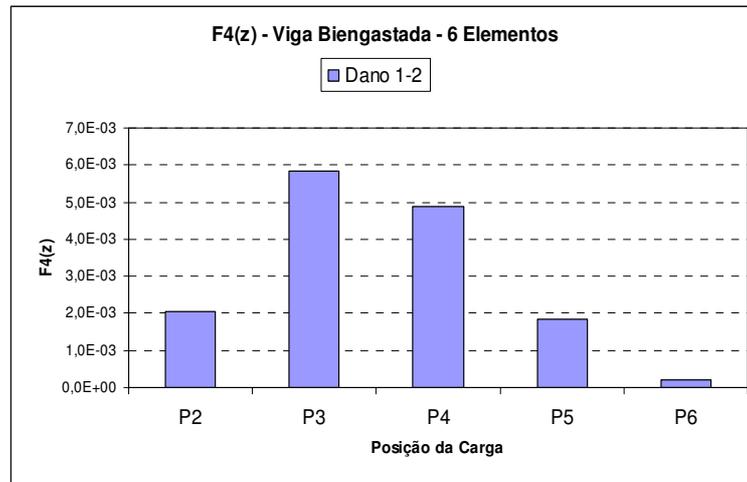
(e)



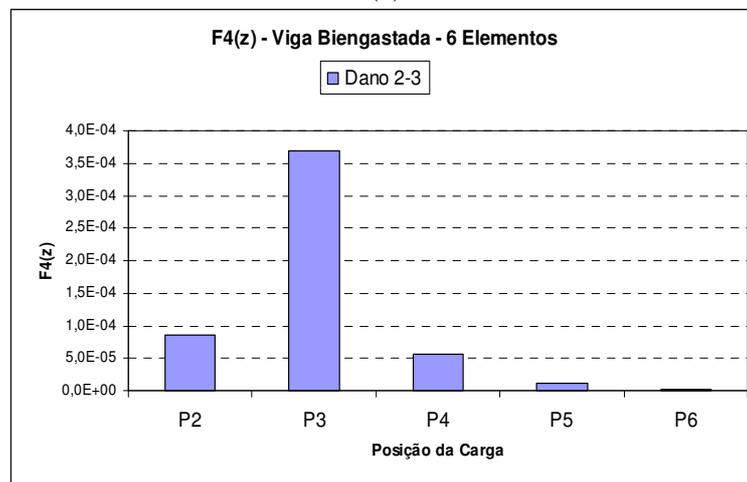
(f)

Figura 4.45 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F3(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

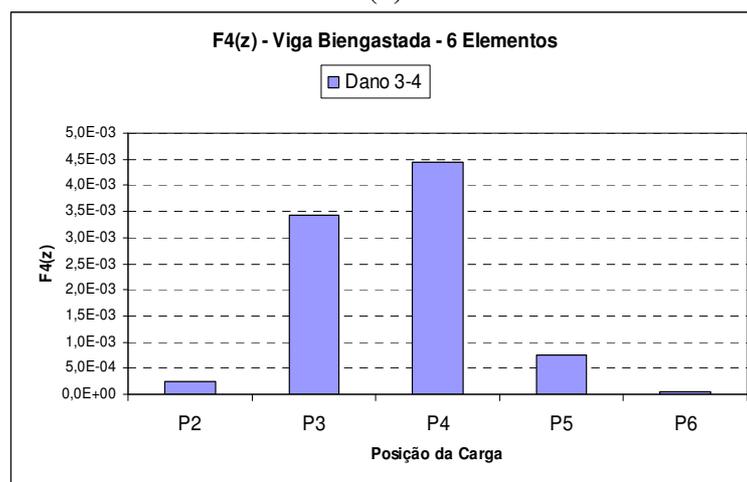
$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N \left( \Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} \right) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2$$



(a)

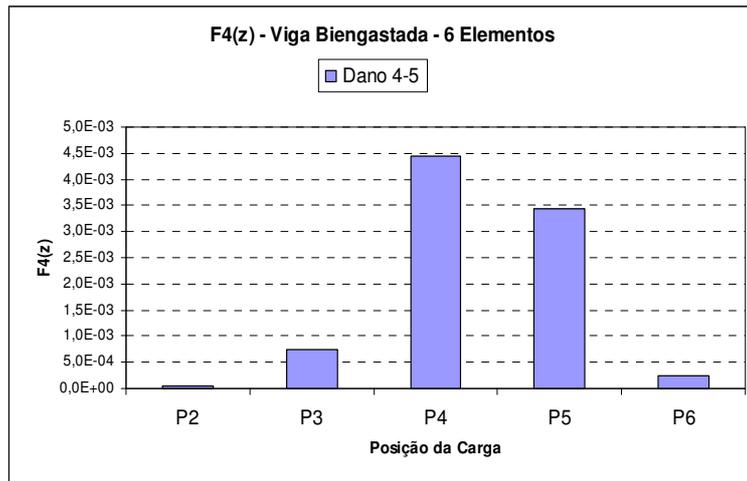


(b)

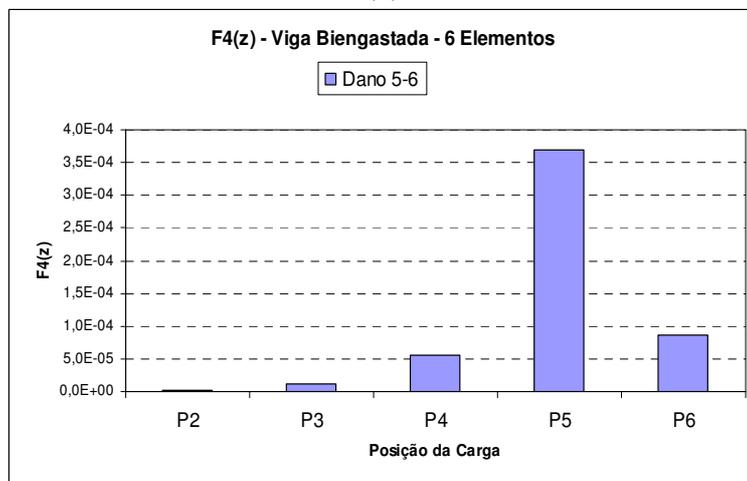


(c)

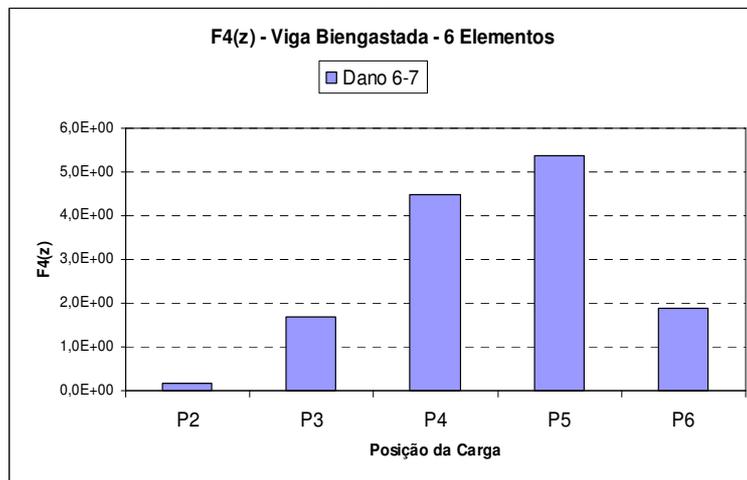
Figura 4.46 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_4(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



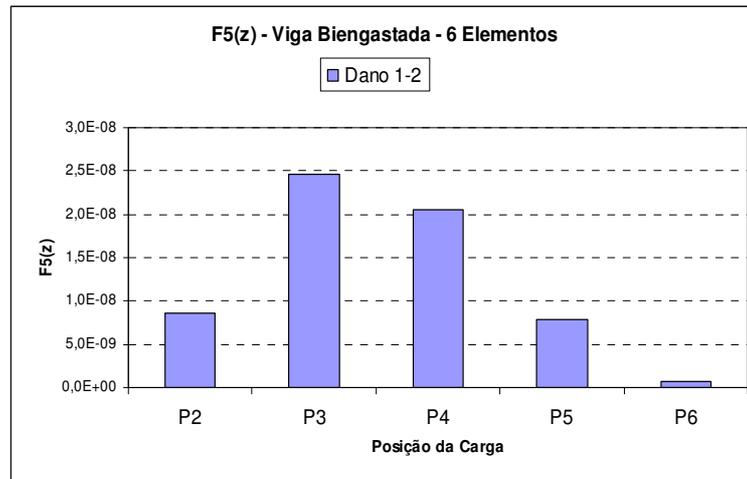
(e)



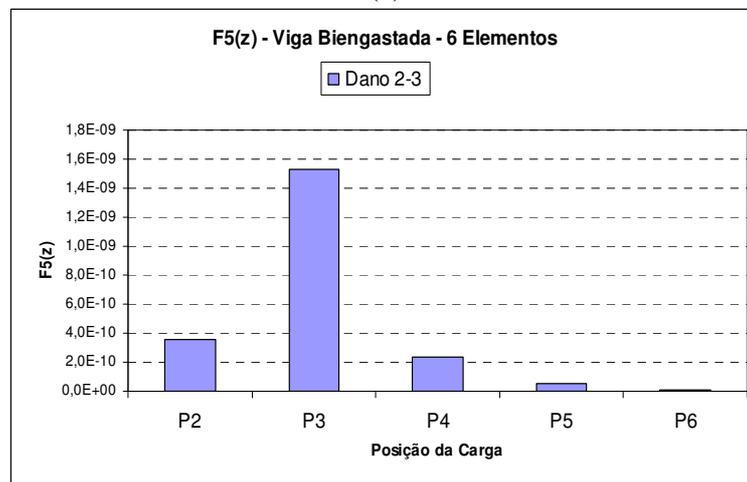
(f)

Figura 4.46 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

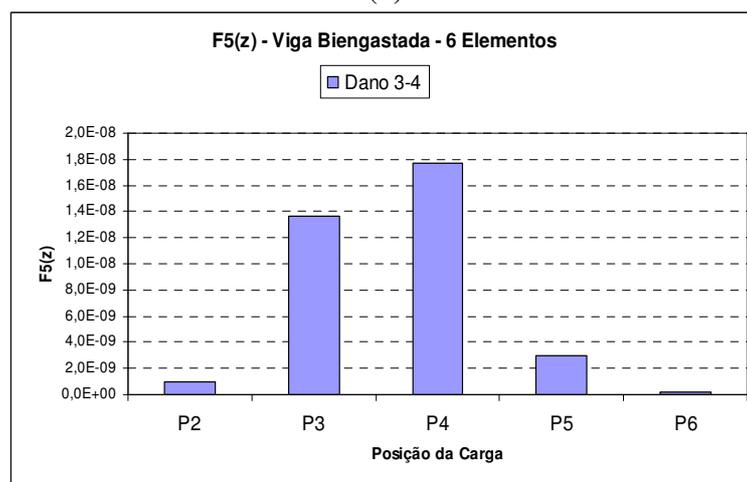
$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1)$$



(a)

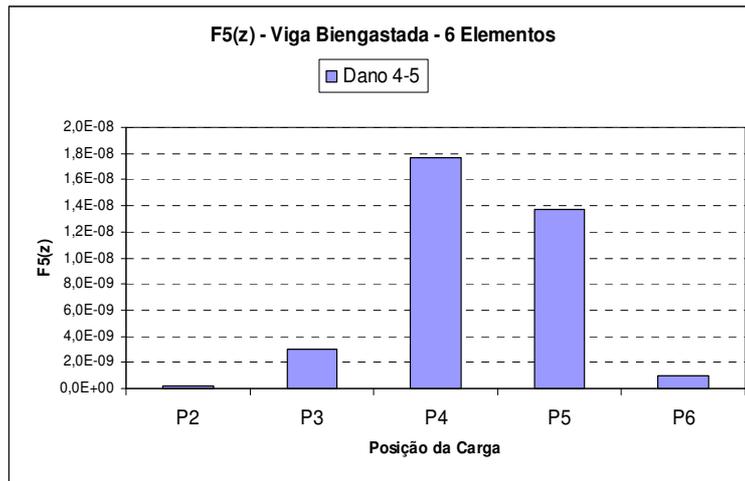


(b)

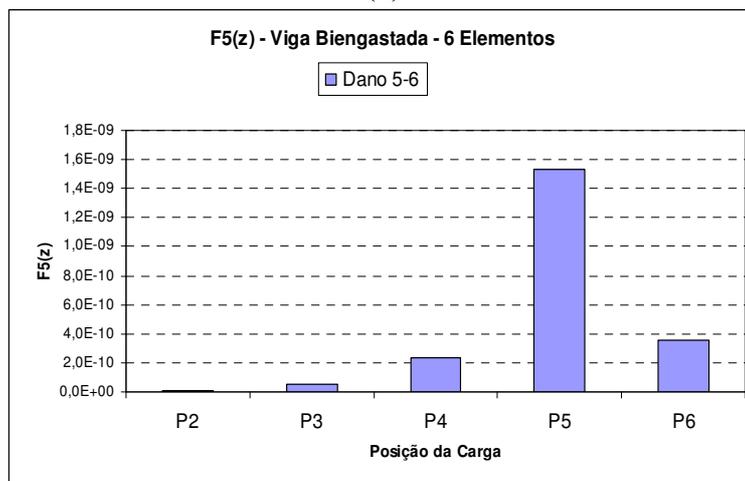


(c)

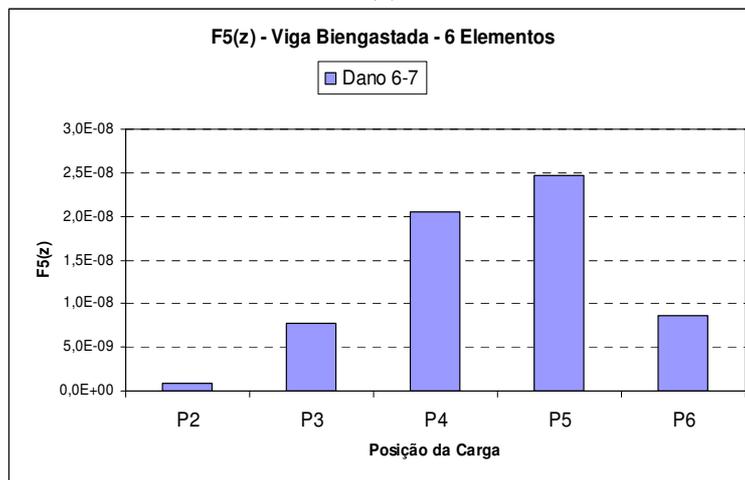
Figura 4.47 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_5(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)



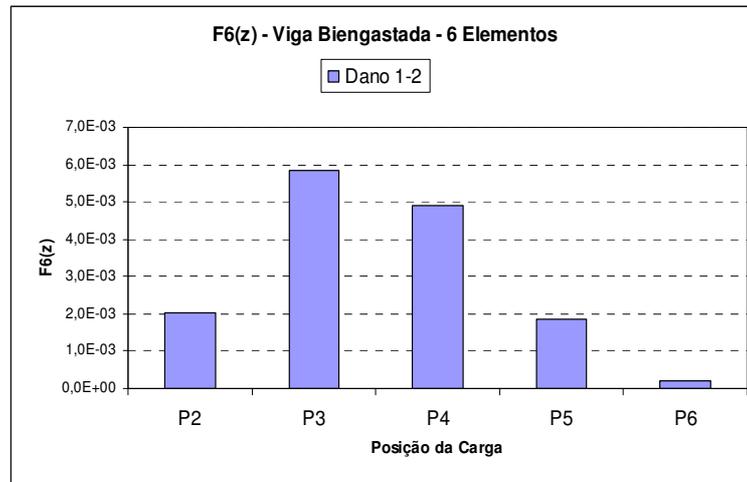
(e)



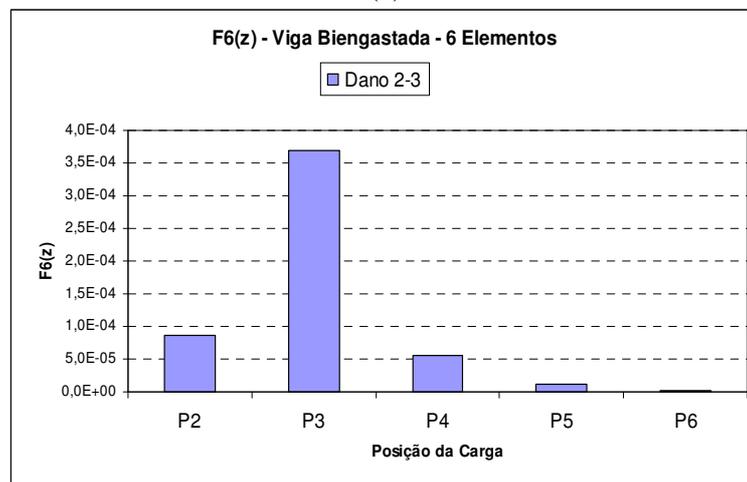
(f)

Figura 4.47 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

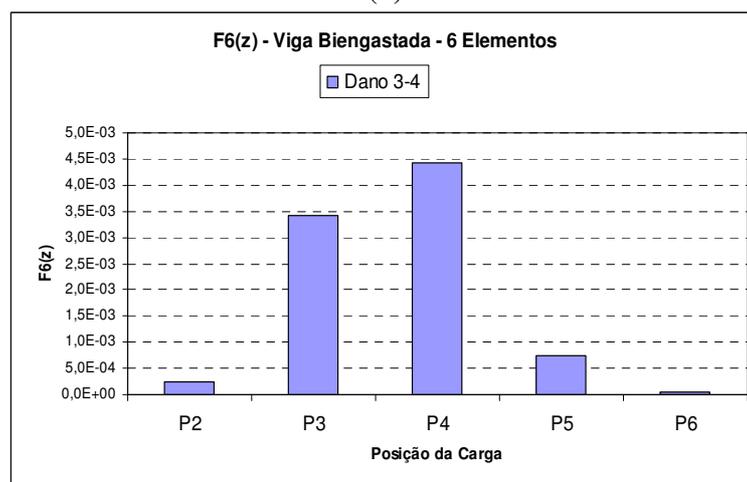
$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2$$



(a)

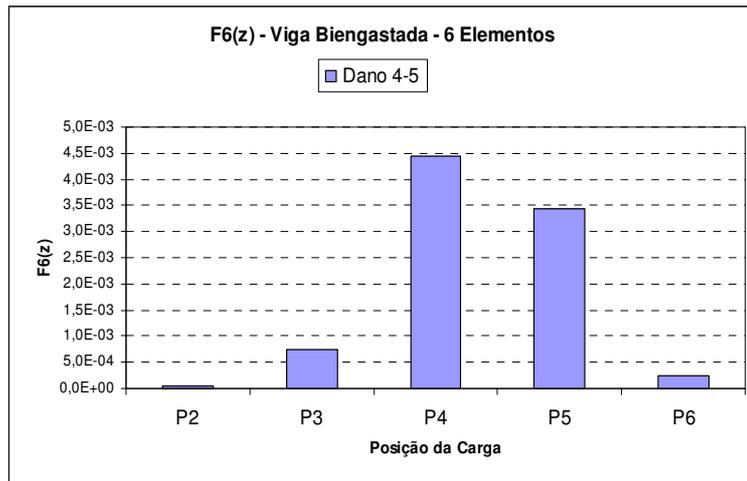


(b)

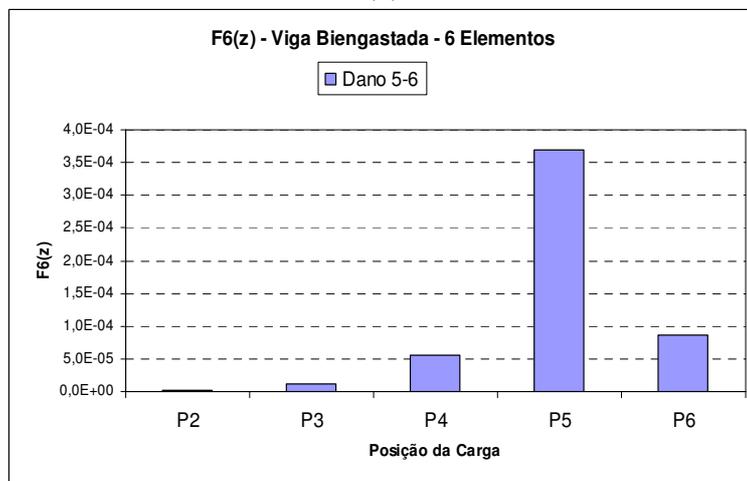


(c)

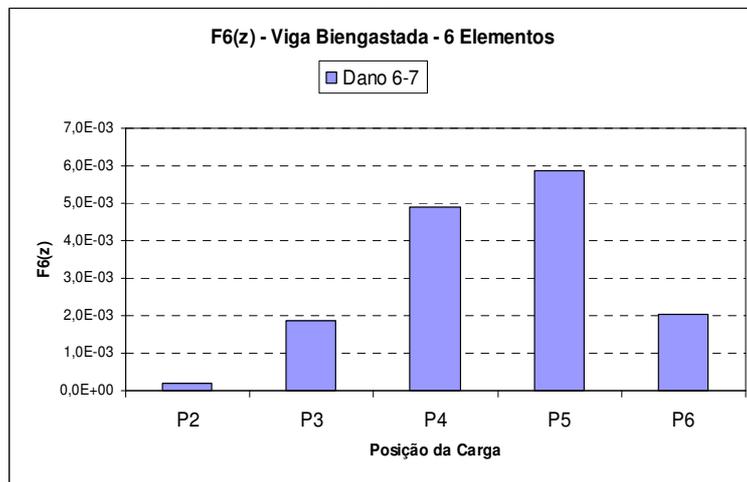
Figura 4.48 (a) a (c) - Representação gráfica da Assinatura  $F_6(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(d)

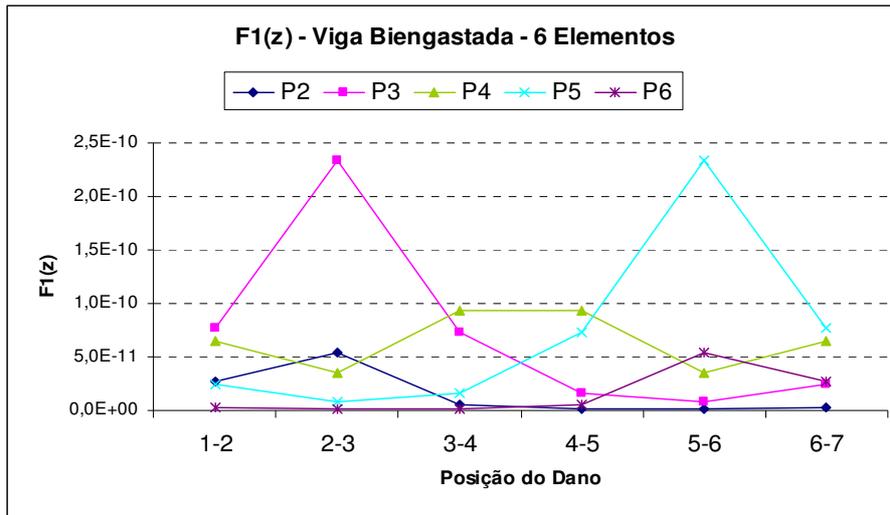


(e)

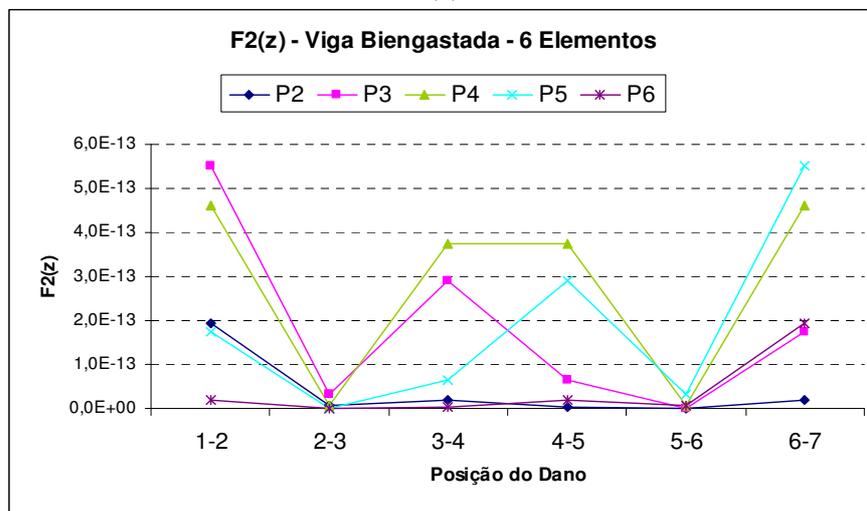


(f)

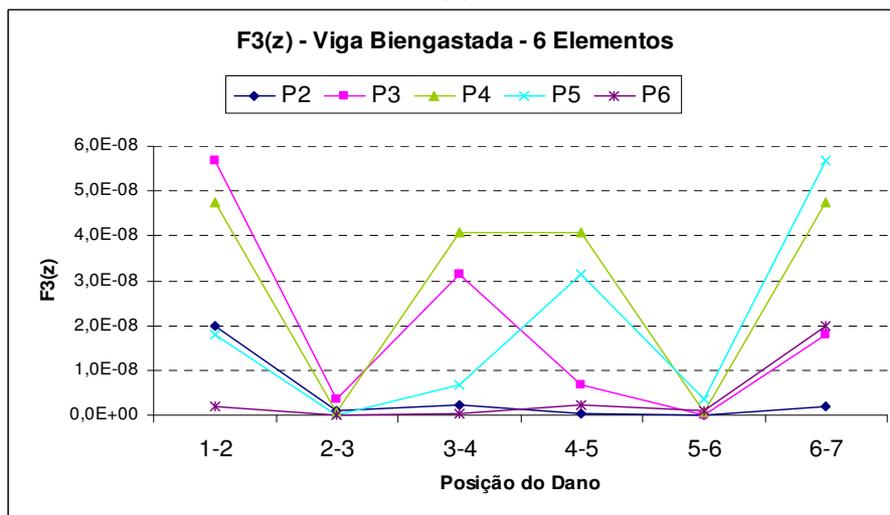
Figura 4.48 (d) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F6(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(a)

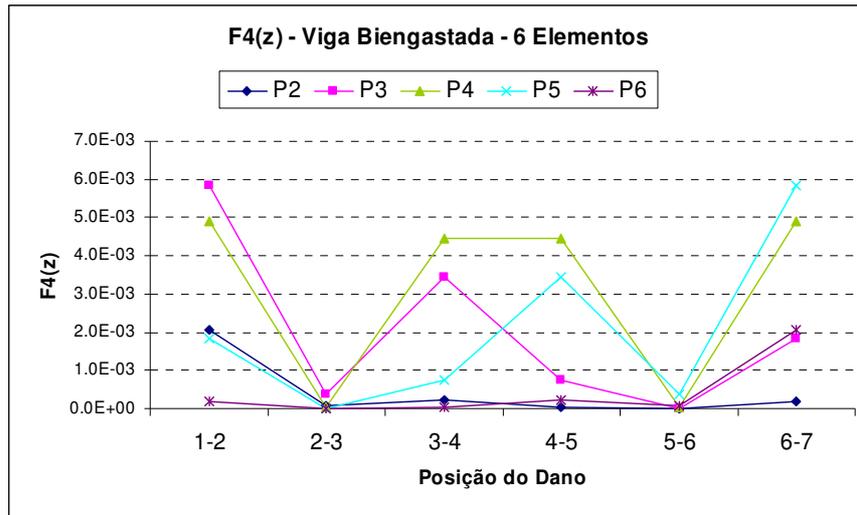


(b)

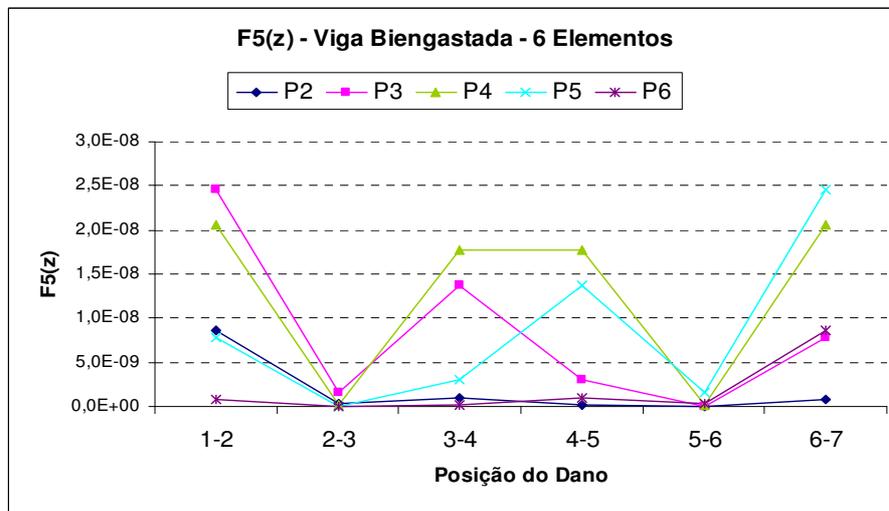


(c)

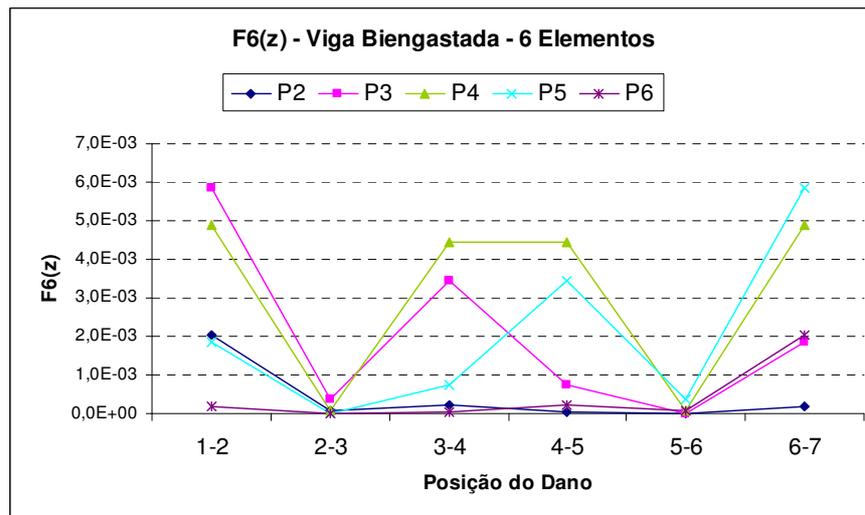
Figura 4.49 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.



(d)



(e)



(f)

Figura 4.49 (d) a (f) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para a viga biengastada dividida em seis elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.

Para a viga biengastada dividida em seis elementos, nas Figuras de 4.43 a 4.48, nota-se que é possível localizar o dano observando o maior e o segundo maior patamar do gráfico, caso o dano não esteja localizado nas extremidades. Por exemplo, na Figura 4.48(d), o maior patamar ocorre quando a carga está no nó 4 (P4) e o segundo maior patamar, ocorre quando a carga está no nó 5 (P5), e assim conclui-se que o dano está localizado no elemento 4-5.

Contudo, se o dano está localizado nas extremidades, ou seja, no elemento 1-2 ou elemento 6-7, o gráfico apresenta outro tipo de comportamento. É possível perceber que, para quando o dano está no elemento 1-2, Figuras 4.43(a), 4.44(a), 4.45(a), 4.46(a), 4.47(a) e 4.48(a), os dois maiores patamares estão no nó 3 (P3) e no nó 4 (P4), respectivamente. Porém não se pode confundir com um dano no elemento 3-4, pois o comportamento dos gráficos citados é mais suave. Comparando, por exemplo, a Figura 4.46(a) com a 4.46(c) observa-se que os patamares de P3 e P4 no gráfico 4.46(c), em que o dano está no elemento 3-4, se sobressaem com clareza dos outros patamares (P2, P5 e P6), o que não ocorre na Figura 4.46(a), onde gráfico revela mais suavidade na variação de seus patamares.

Similarmente, quando o dano é no elemento 6-7, Figuras 4.43(f), 4.44(f), 4.45(f), 4.46(f), 4.47(f) e 4.48(f), em que os maiores patamares estão em P5 e P4, respectivamente, não é possível confundir estes gráficos como localização de dano no elemento 4-5. Pois, além da suavidade de variação dos patamares dos gráficos, o que não ocorre nas Figuras 4.43(d), 4.44(d), 4.45(d), 4.46(d), 4.47(d) e 4.48(d), observa-se que, no caso de o dano ser no elemento 4-5, os dois maiores patamares serão em P4 e P5, respectivamente, contudo quando o dano é no elemento 6-7, ocorre o inverso, ou seja, os dois maiores patamares são em P5 e P4, respectivamente.

Nas Figuras de 4.49(a) a 4.49(f), o único gráfico fora do padrão esperado é o da Figura 4.49(a), correspondente à assinatura  $F_1(z)$ . Mais uma vez isso, pode ser explicado pela utilização de maneira singular ou pontual das variações de frequências ( $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$ ). Na Figura 4.50 a seguir, o gráfico apresenta o comportamento esperado, pois foram trocadas as frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  de modo que os valores de  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$  se distanciassem do valor zero.

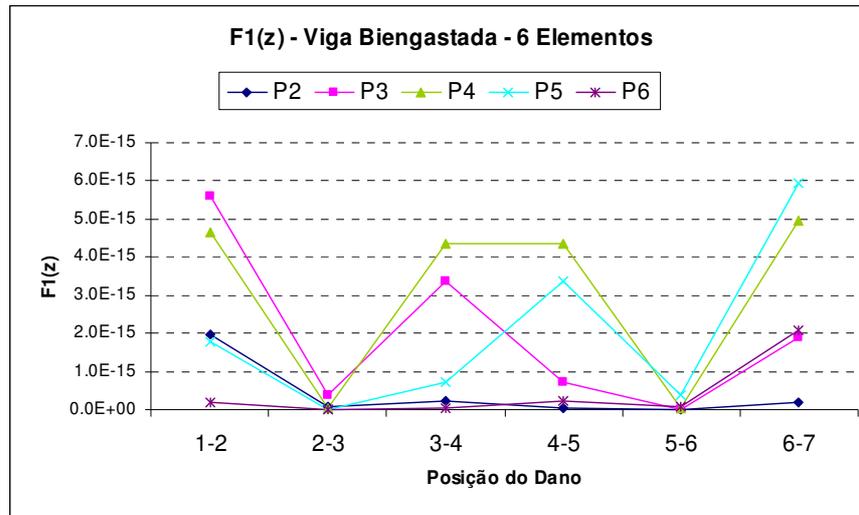


Figura 4.50 - Gráfico para a Assinatura  $F1(z)$  mantendo a carga concentrada no nó e variando o elemento danificado, adotadas frequências de valores maiores, para viga biengastada dividida em seis elementos.

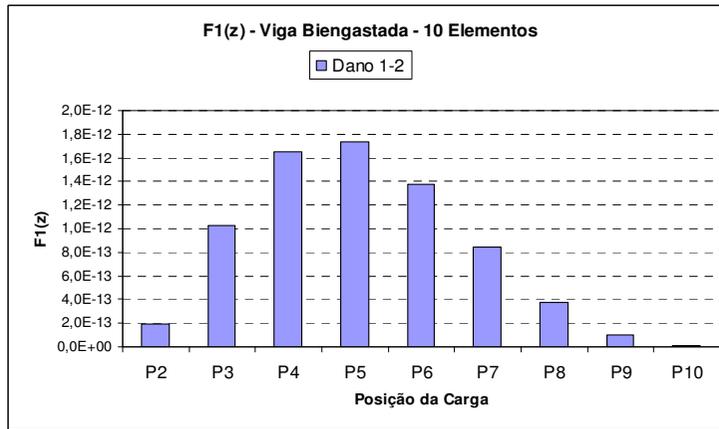
### 4.5.3 Viga Biengastada para 10 Elementos

A viga biengastada dividida em seis elementos pode ser ilustrada pela Figura 4.7 que representa suas dimensões, nós e todas suas outras características físicas que foram utilizadas para a obtenção de seus deslocamentos e frequências.

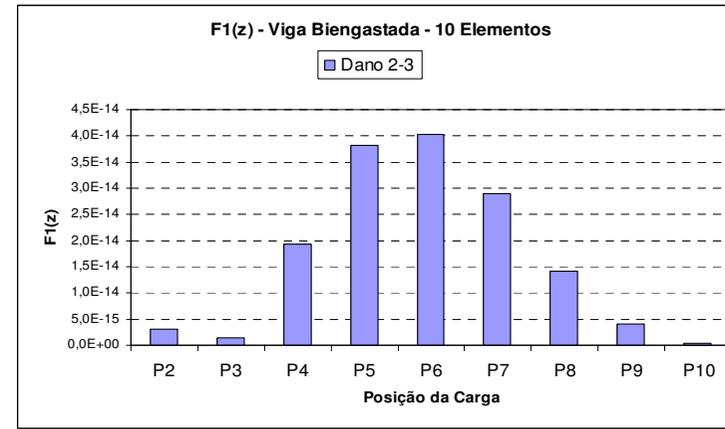
Para cada uma das seis assinaturas os resultados de frequência e deslocamentos obtidos foram aplicados da mesma maneira que para a viga em balanço de três e seis elementos.

Para as assinaturas de  $F_1(z)$  a  $F_6(z)$ , tendo a carga concentrada de 5,0 KN no nó e mantendo o dano no mesmo elemento, têm-se os comportamentos demonstrados pelas Figuras 4.51 a 4.56.

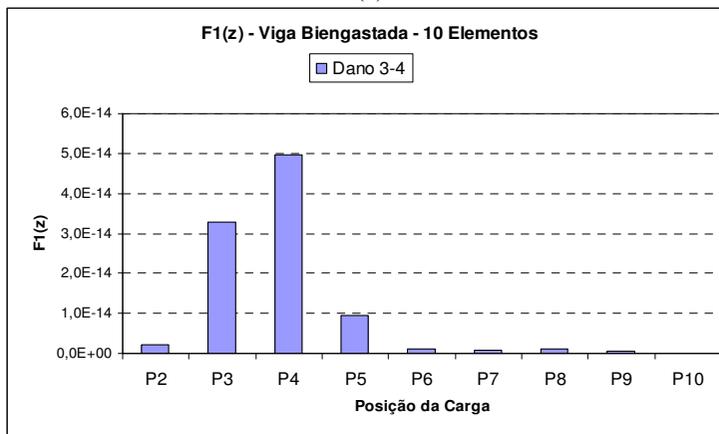
$$F_1(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right]$$



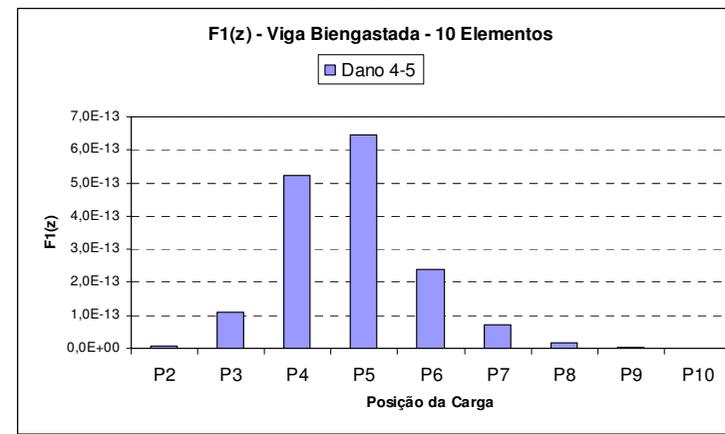
(a)



(b)

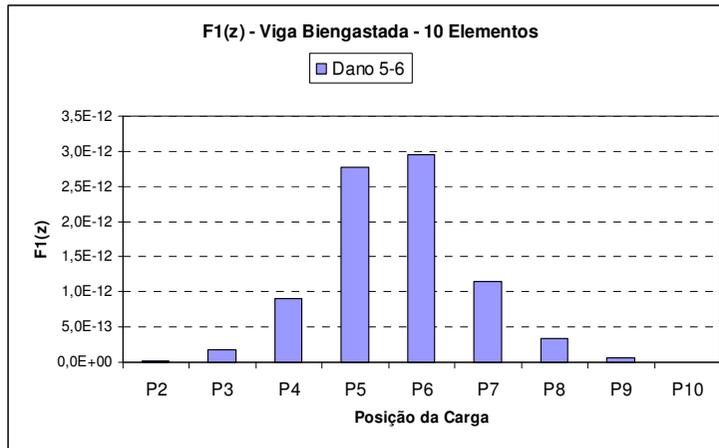


(c)

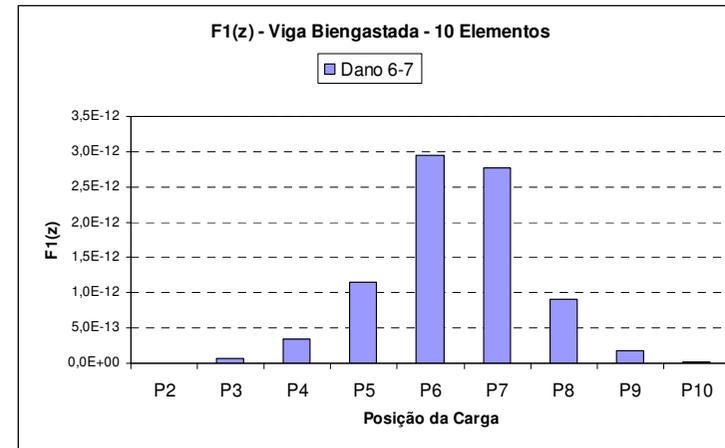


(d)

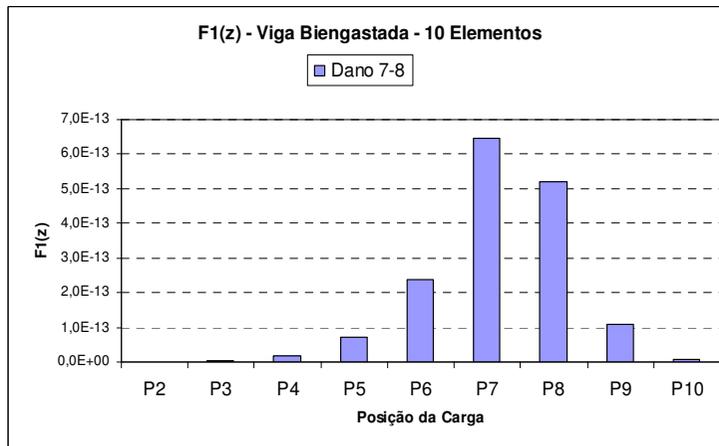
Figura 4.51 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



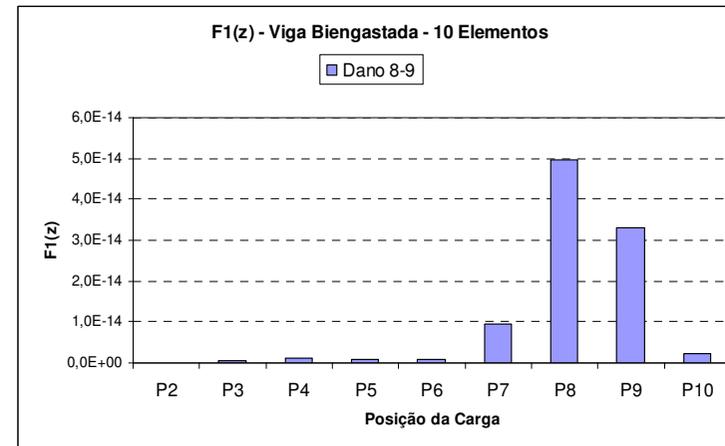
(e)



(f)

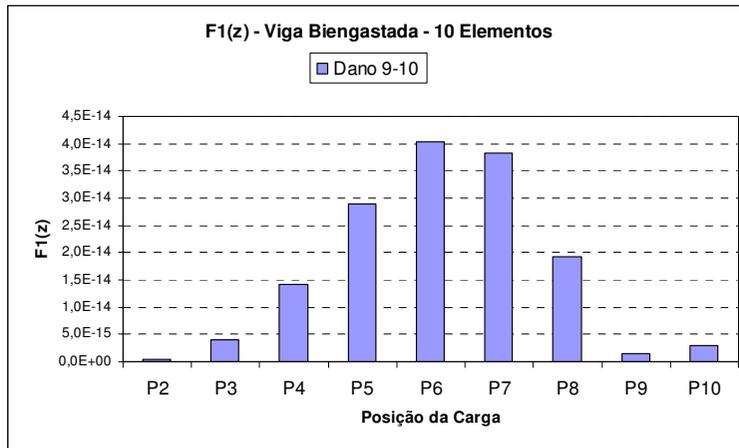


(g)

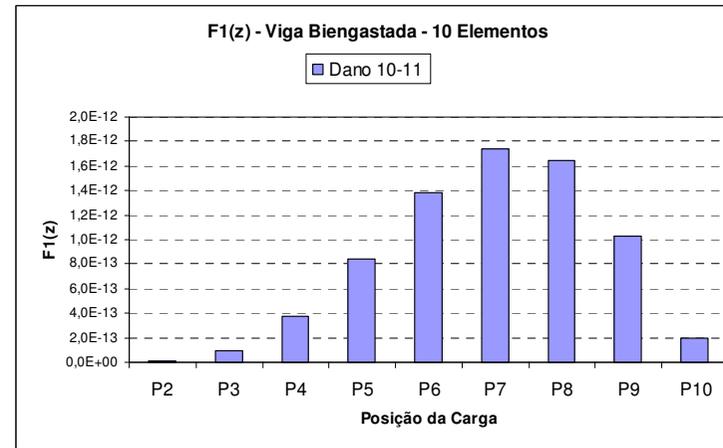


(h)

Figura 4.51 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



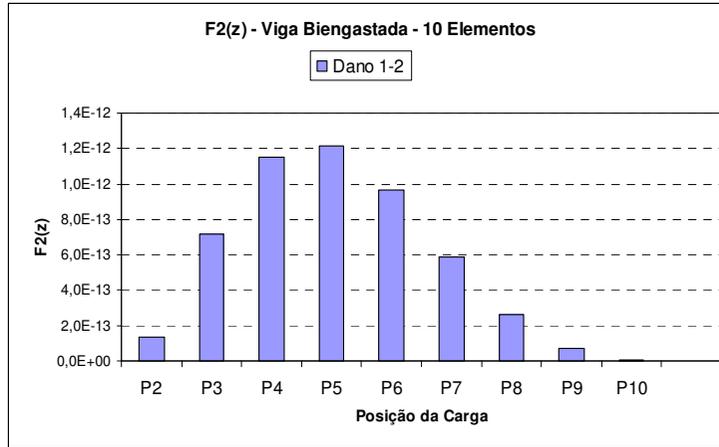
(i)



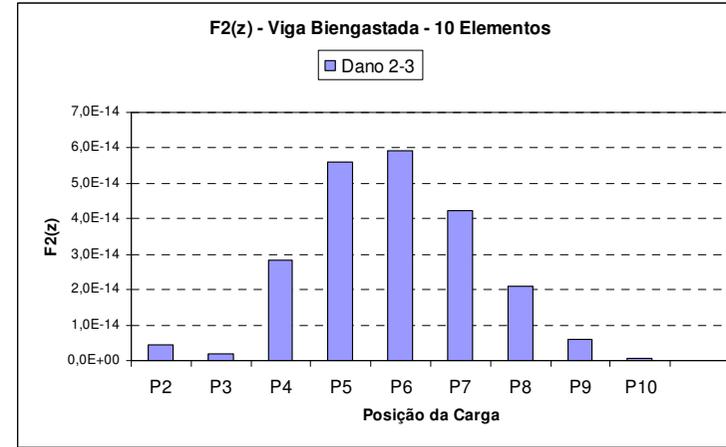
(j)

Figura 4.51 (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

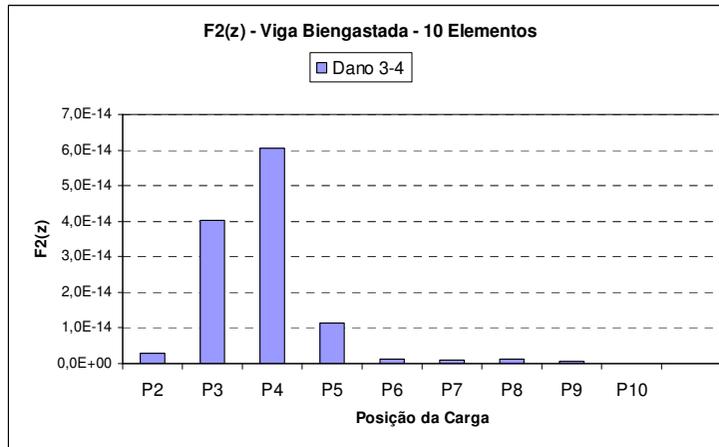
$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})}{\sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2}$$



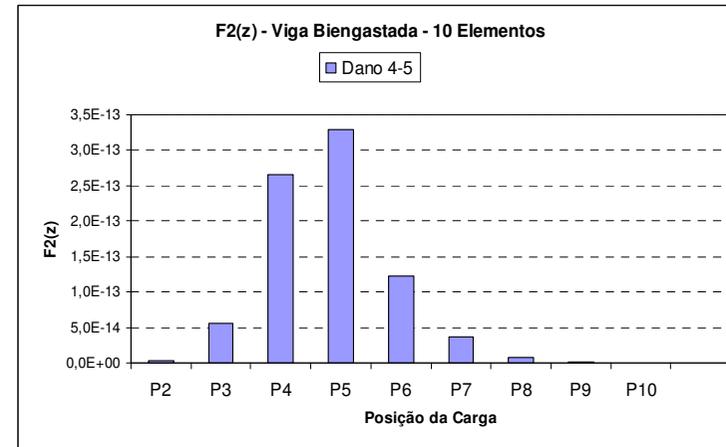
(a)



(b)

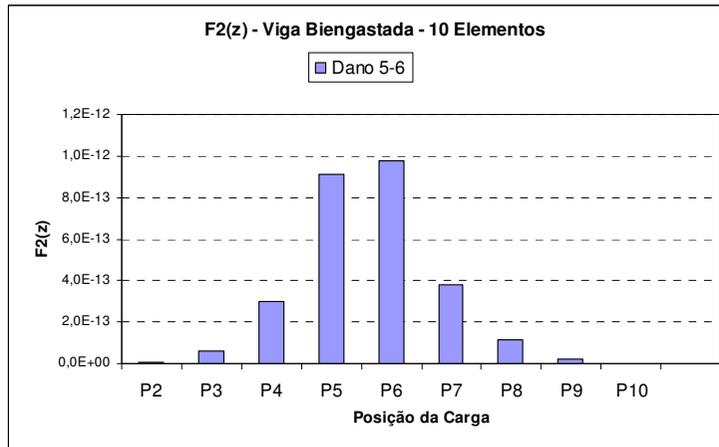


(c)

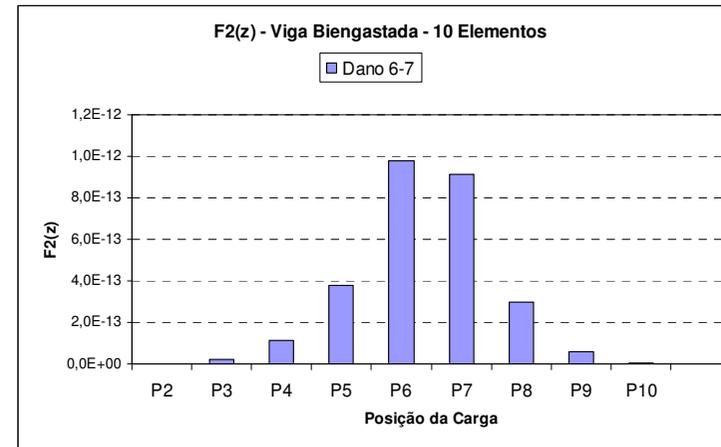


(d)

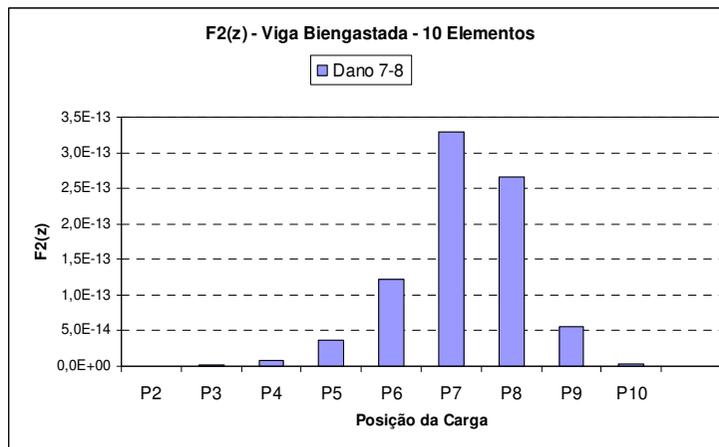
Figura 4.52 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_2(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



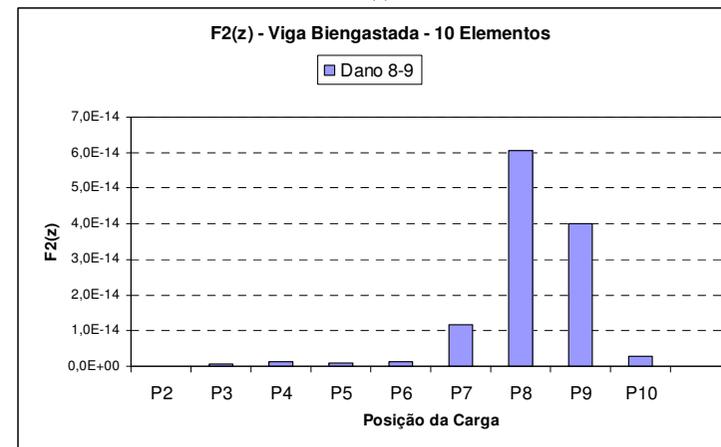
(e)



(f)

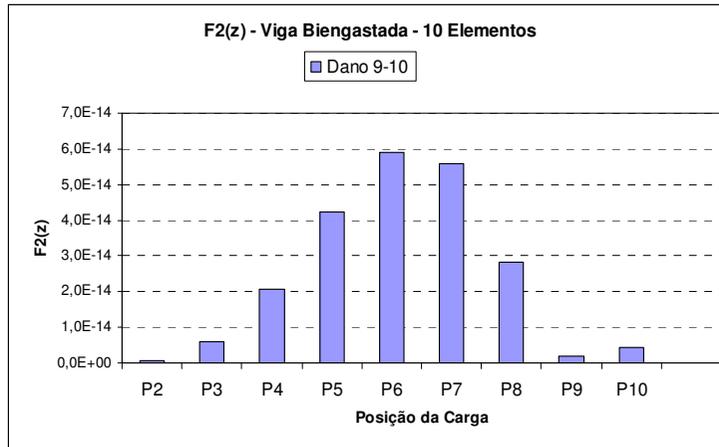


(g)

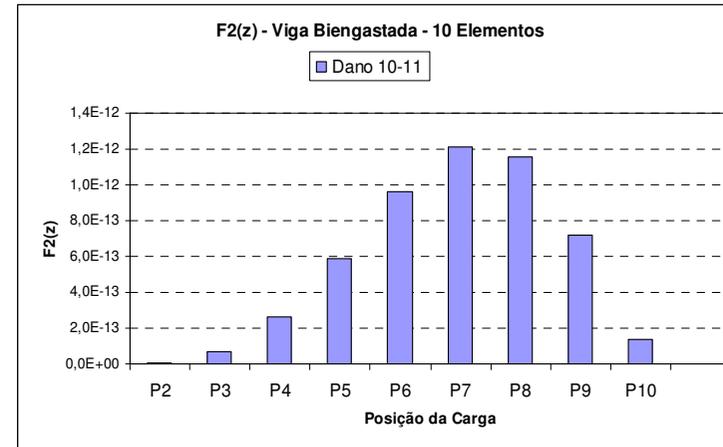


(h)

Figura 4.52 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



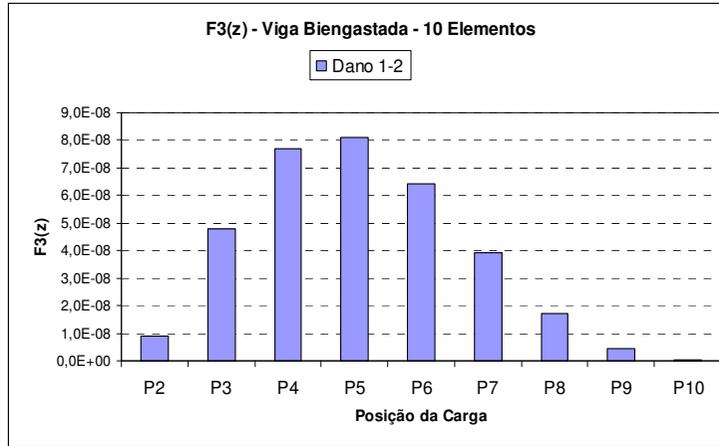
(i)



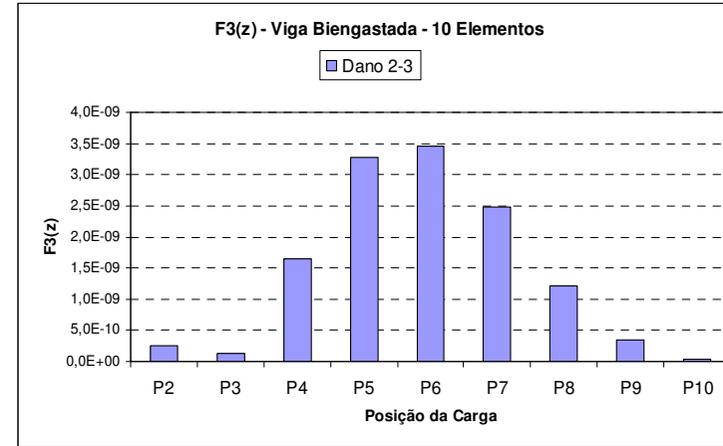
(j)

Figura 4.52 (g) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

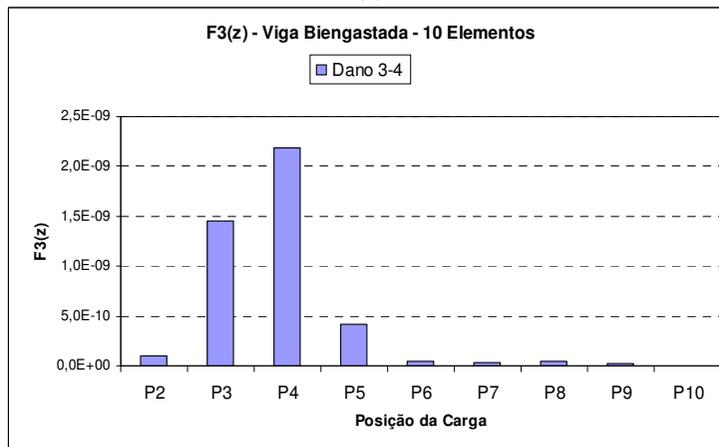
$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})$$



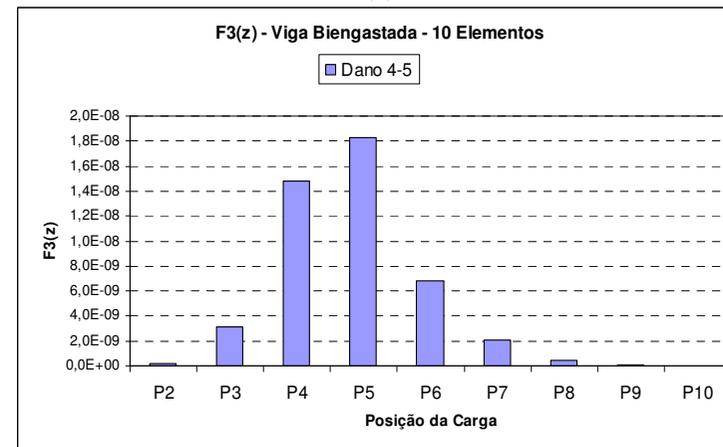
(a)



(b)

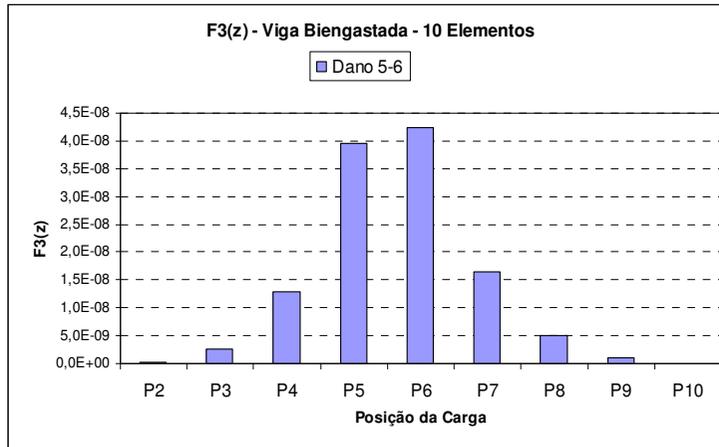


(c)

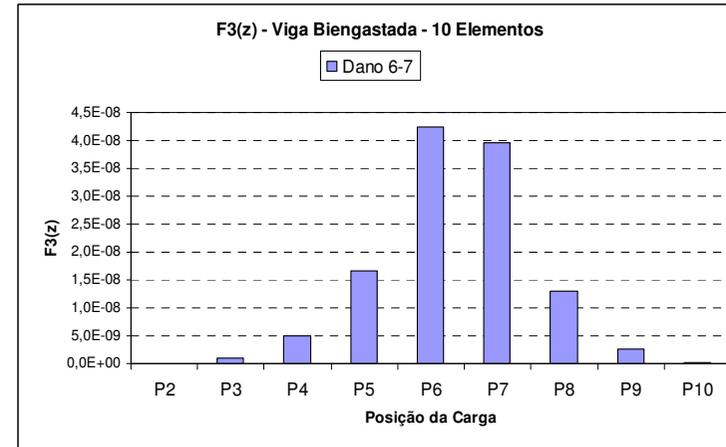


(d)

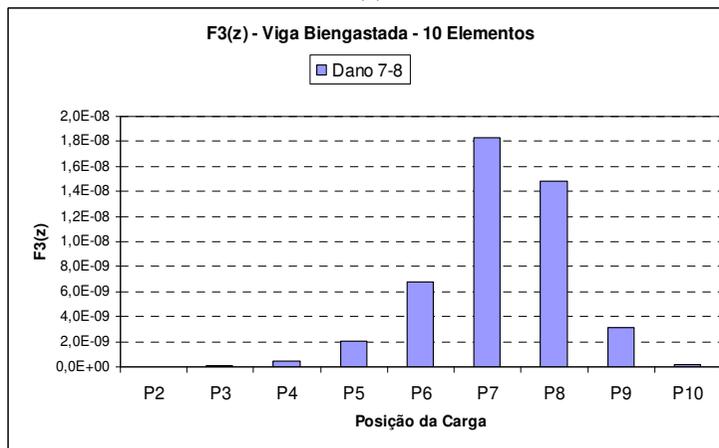
Figura 4.53 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_3(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



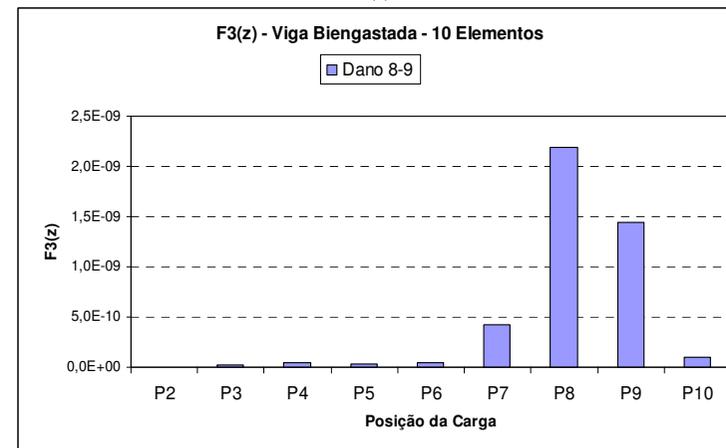
(e)



(f)

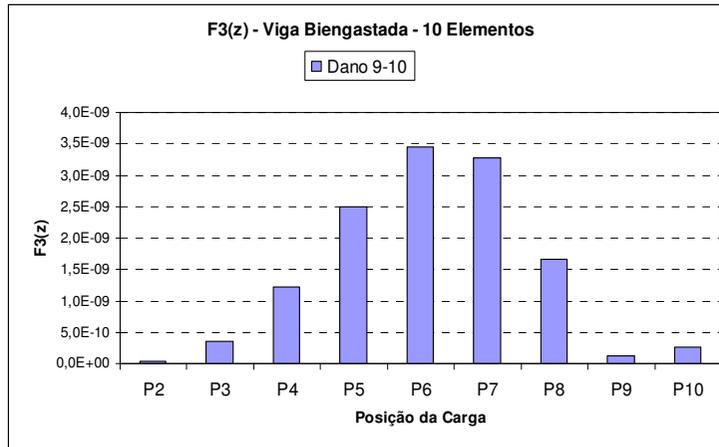


(g)

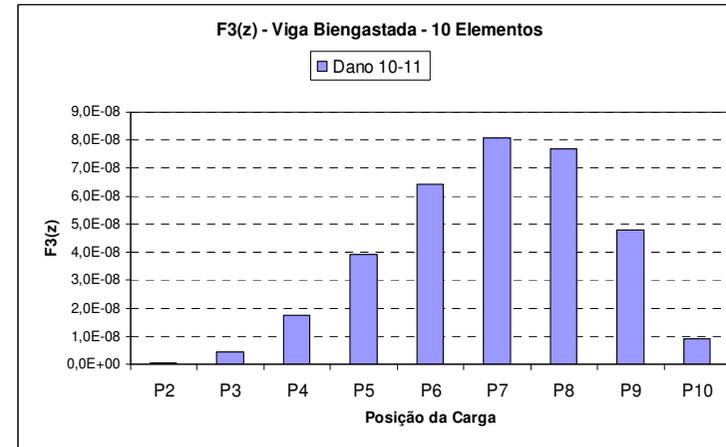


(h)

Figura 4.53 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F3(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



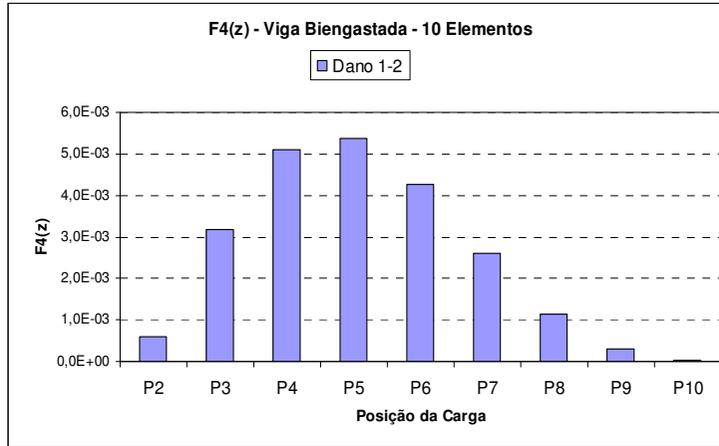
(i)



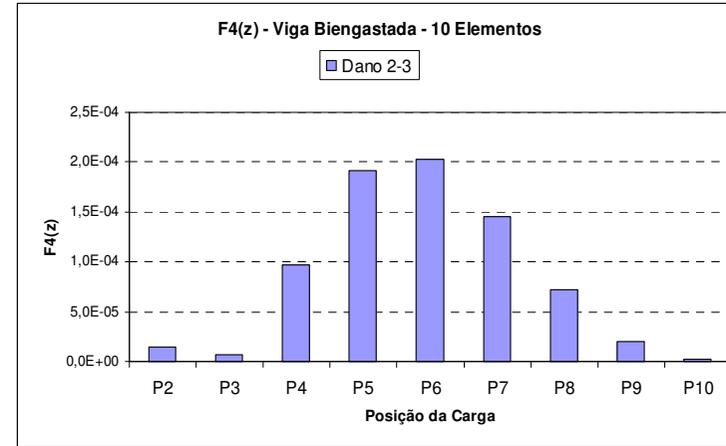
(j)

Figura 4.53 (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

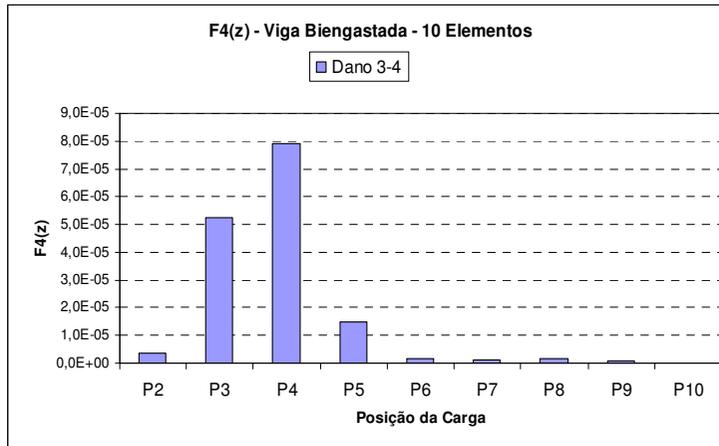
$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N \left( \Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} \right) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2$$



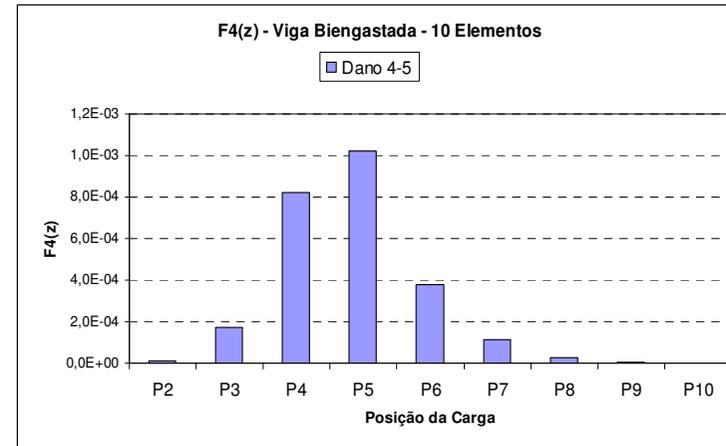
(a)



(b)

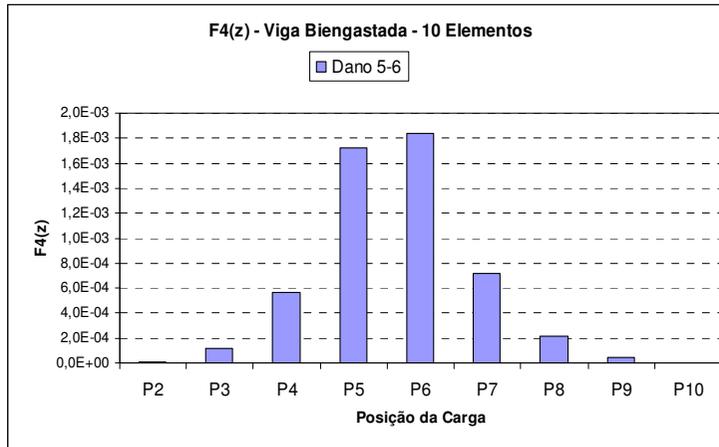


(c)

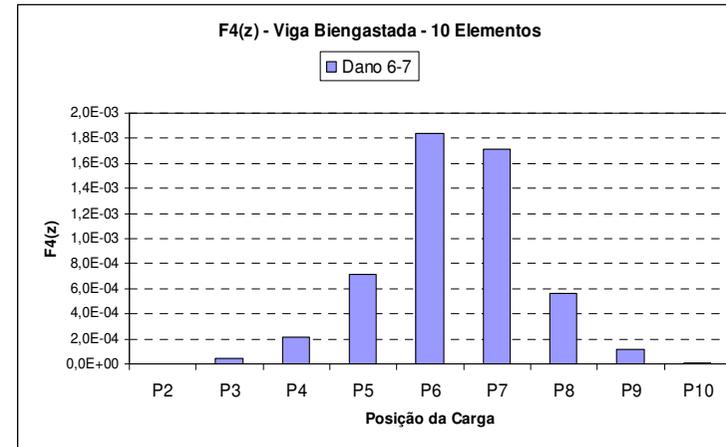


(d)

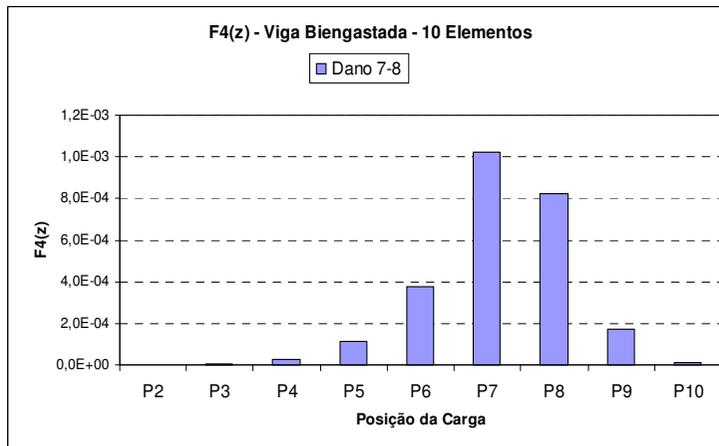
Figura 4.54 - (a) a (f) - Representação gráfica da Assinatura  $F_4(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



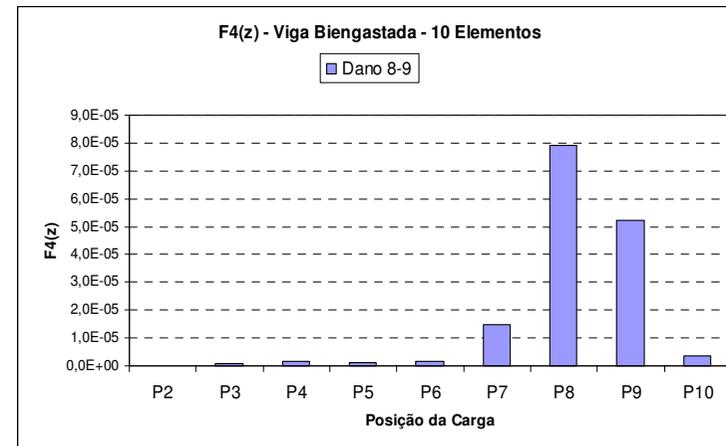
(e)



(f)

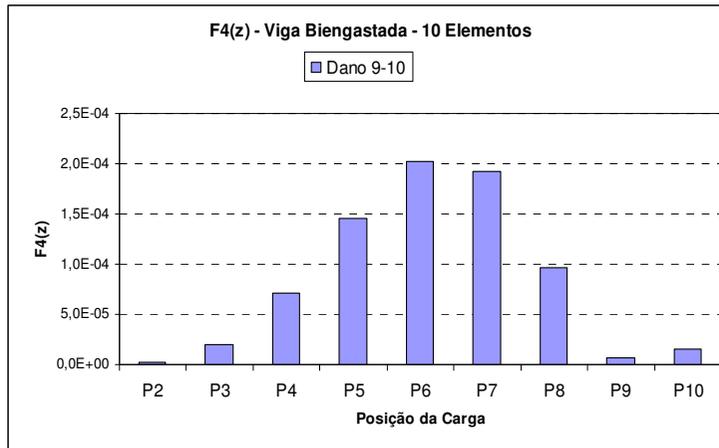


(g)

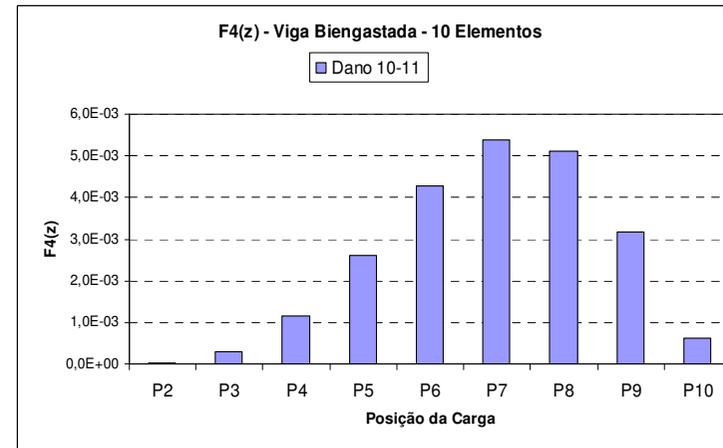


(h)

Figura 4.54 - (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F_4(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



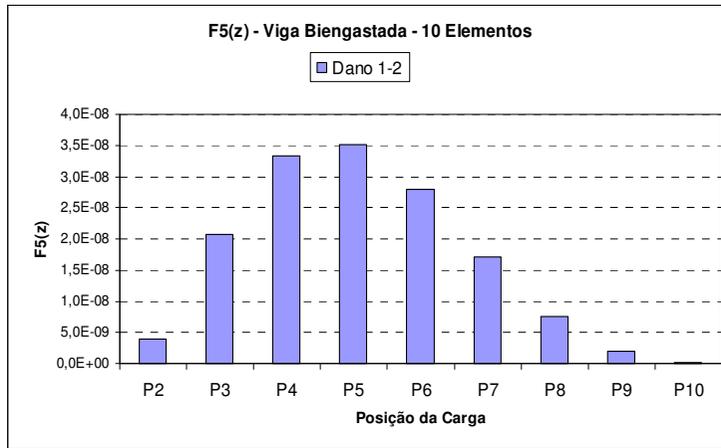
(i)



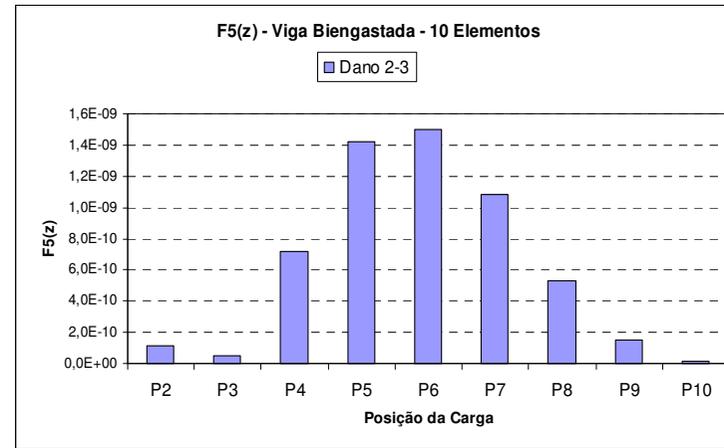
(j)

Figura 4.54 - (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

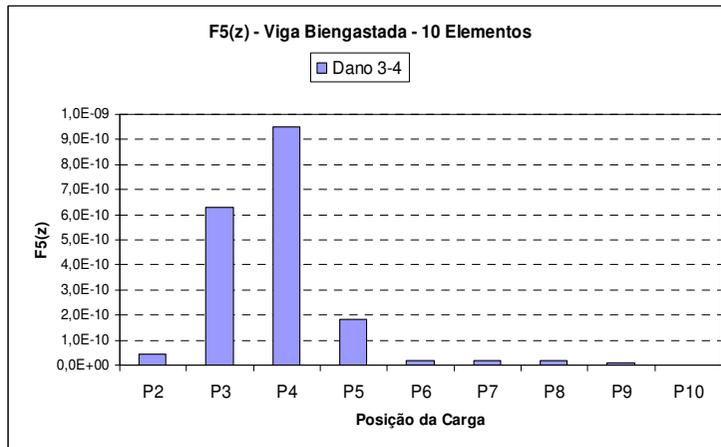
$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1)$$



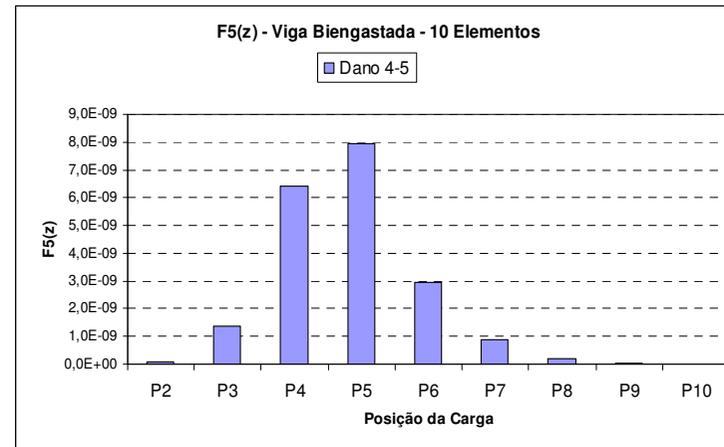
(a)



(b)

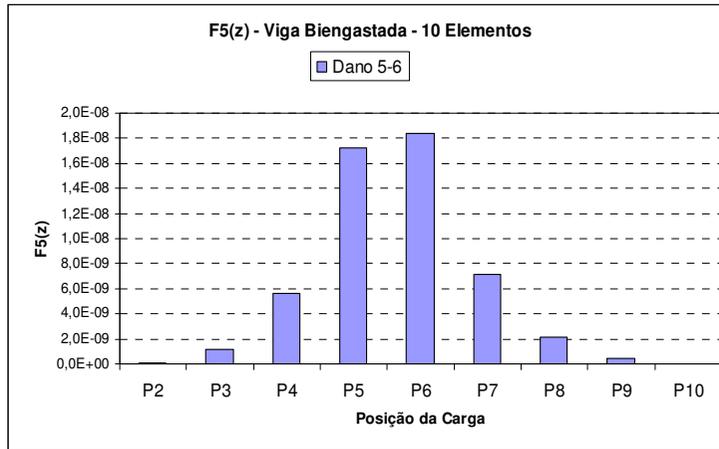


(c)

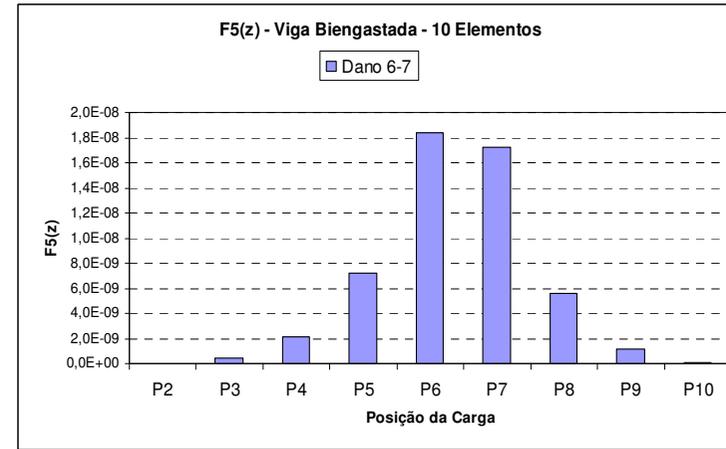


(d)

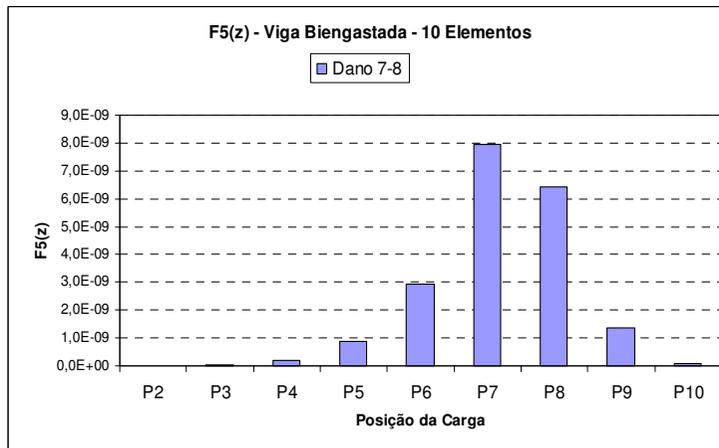
Figura 4.55 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_5(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



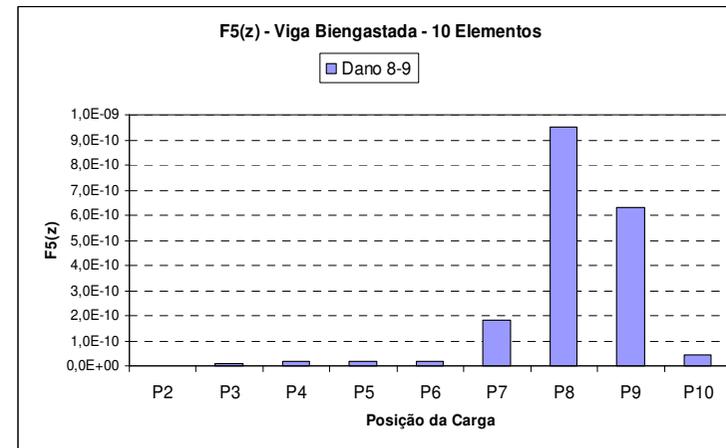
(e)



(f)

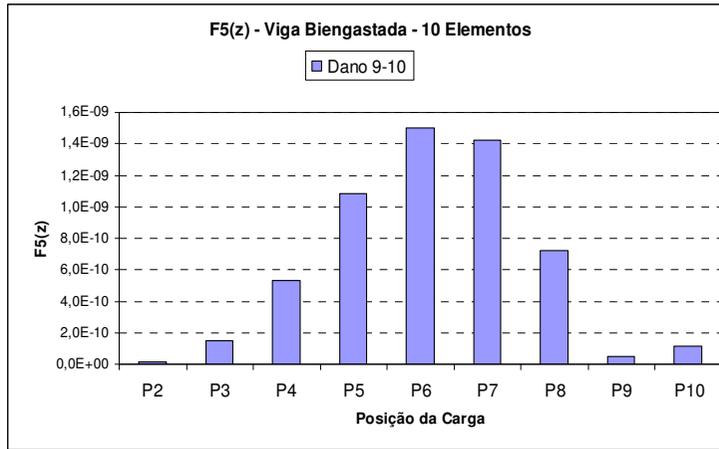


(g)

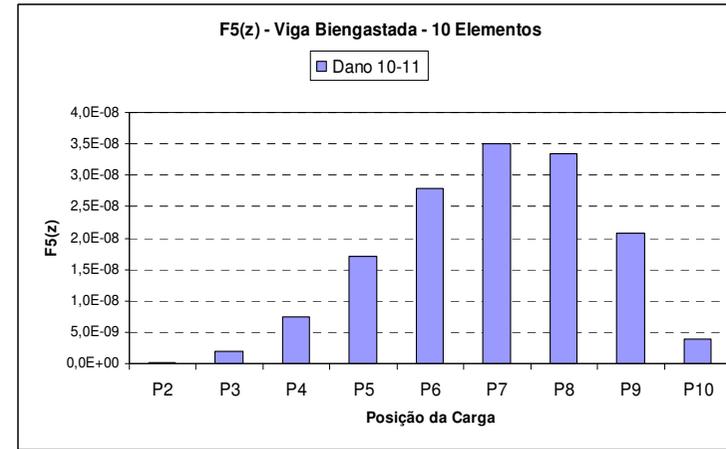


(h)

Figura 4.55 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



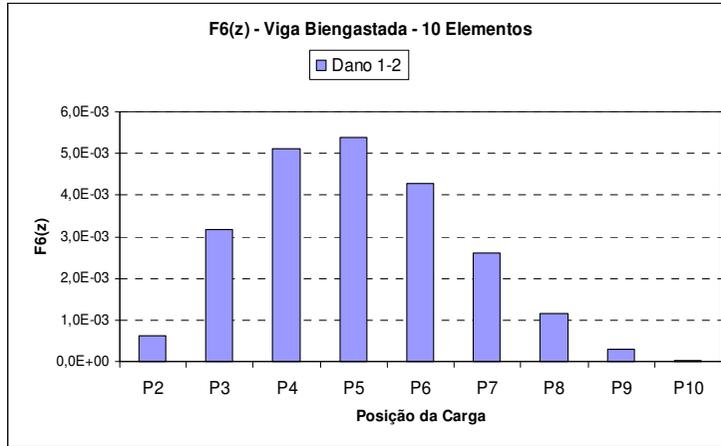
(i)



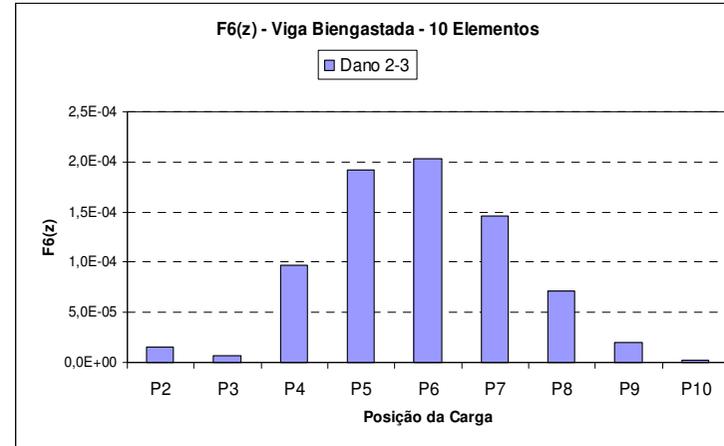
(j)

Figura 4.55 (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

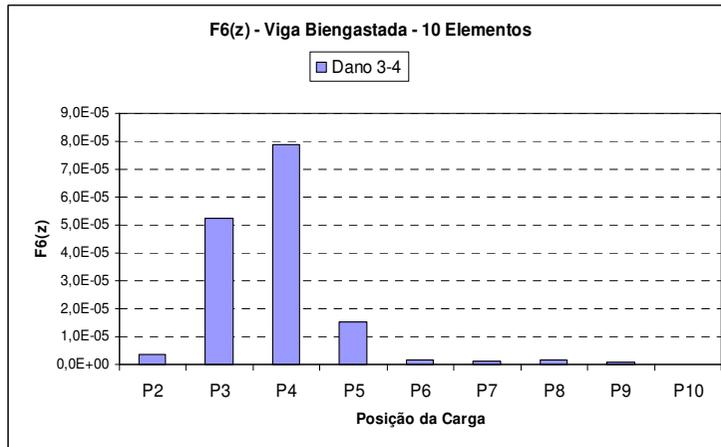
$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2$$



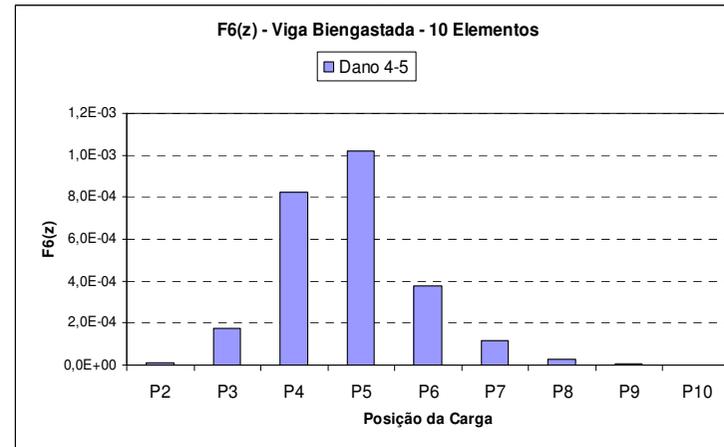
(a)



(b)

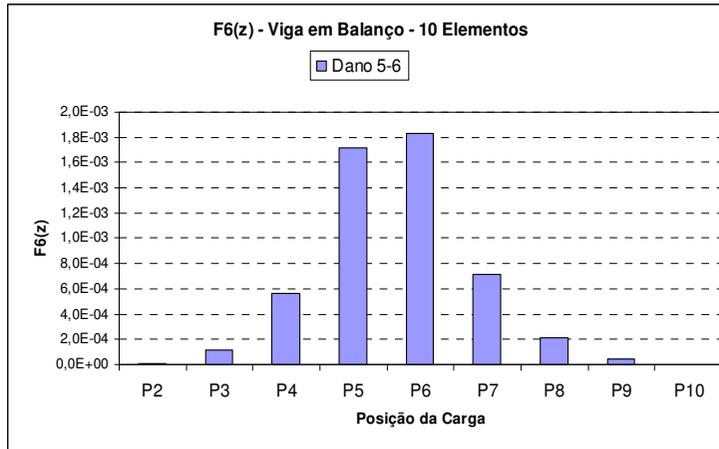


(c)

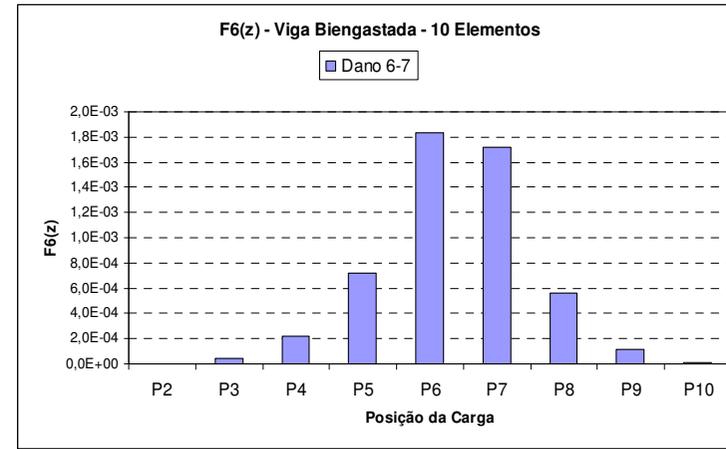


(d)

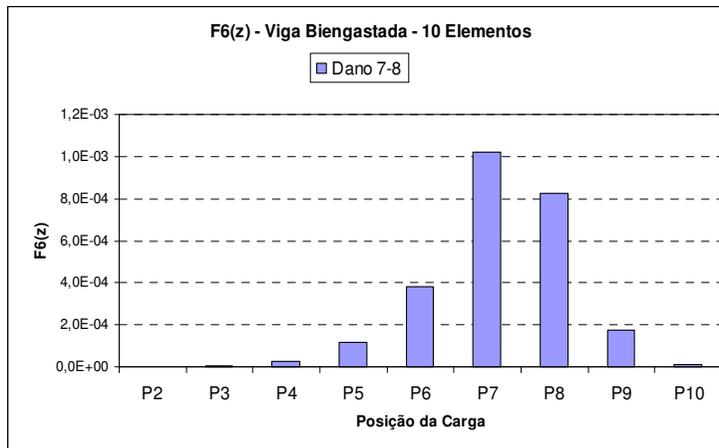
Figura 4.56 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_6(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



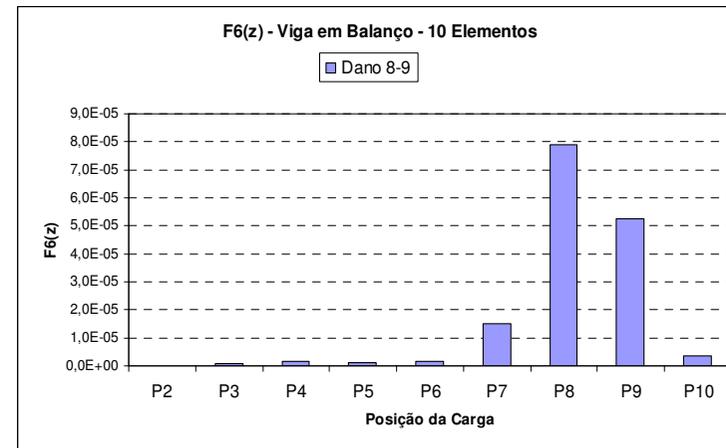
(e)



(f)

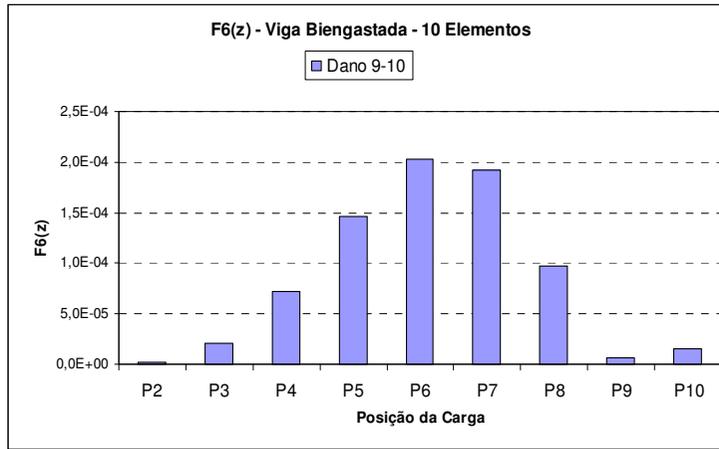


(g)

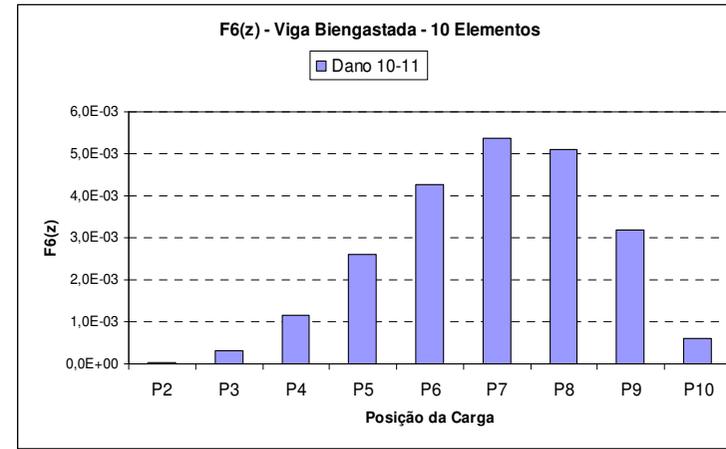


(h)

Figura 4.56 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F6(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

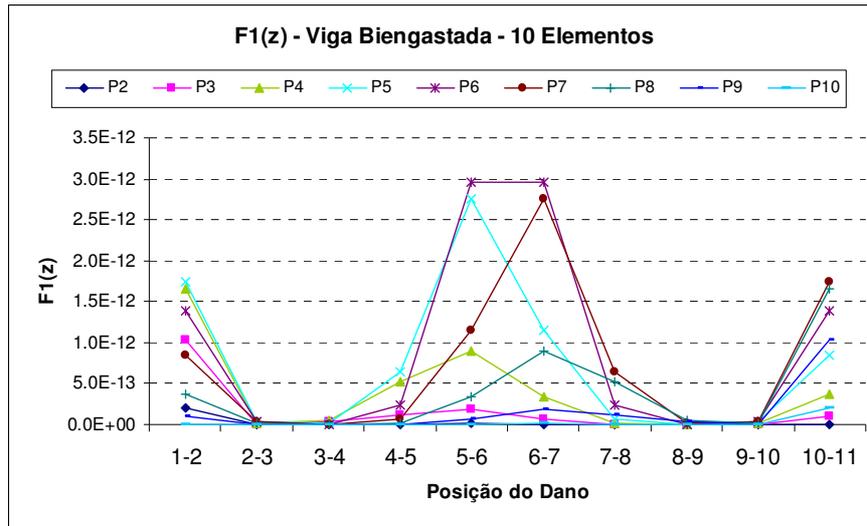


(i)

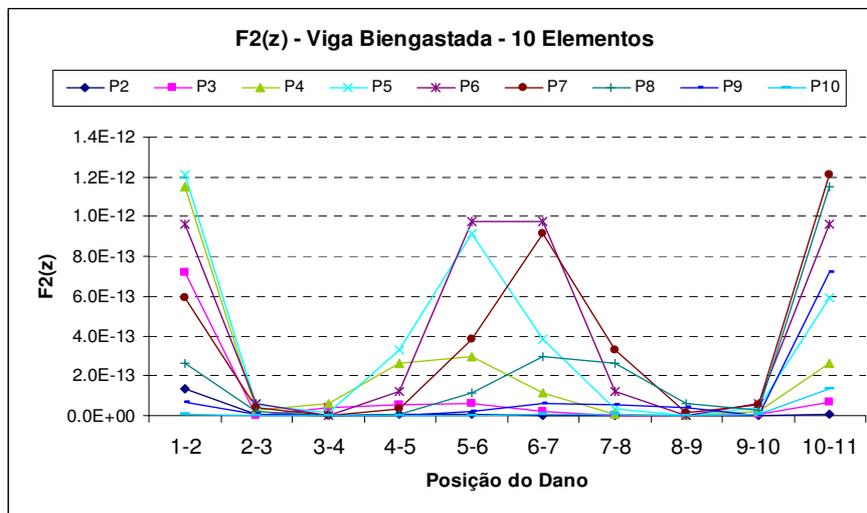


(j)

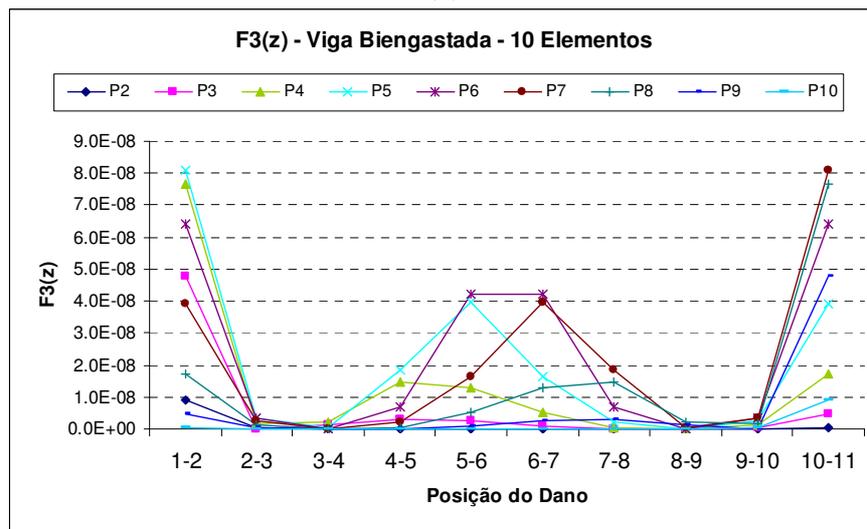
Figura 4.56 (i) a (j) - Representação gráfica da Assinatura  $F6(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(a)

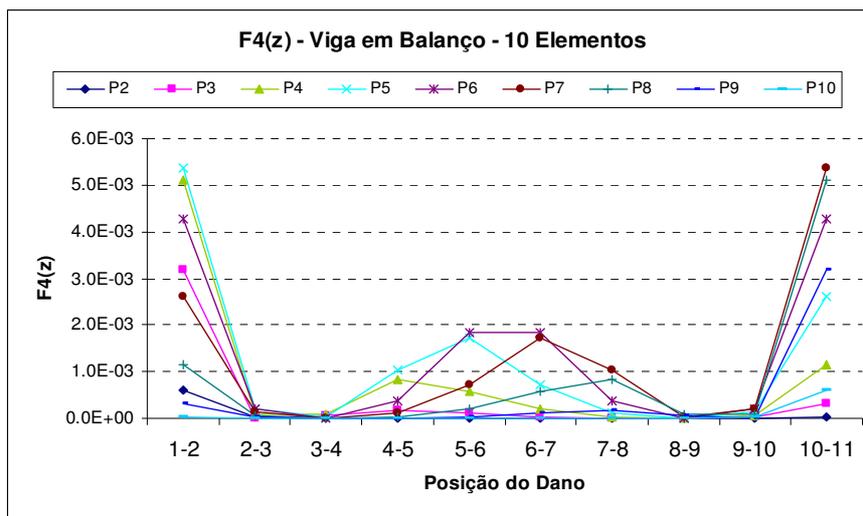


(b)

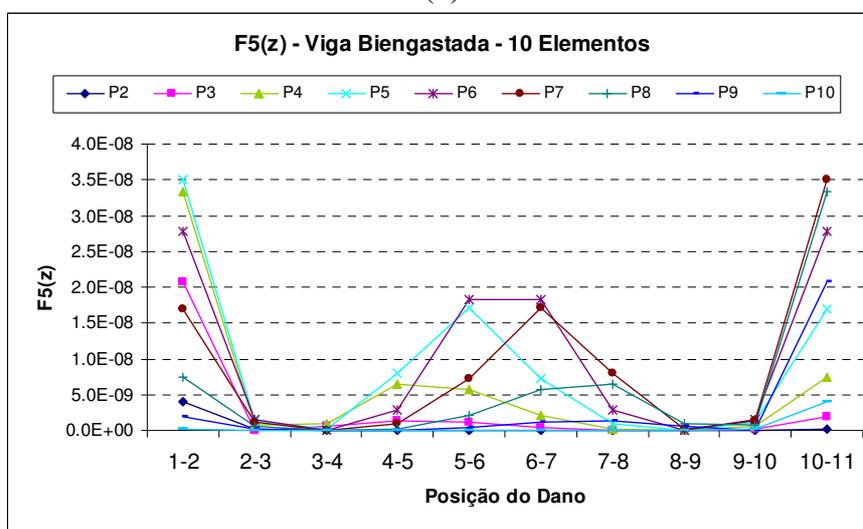


(c)

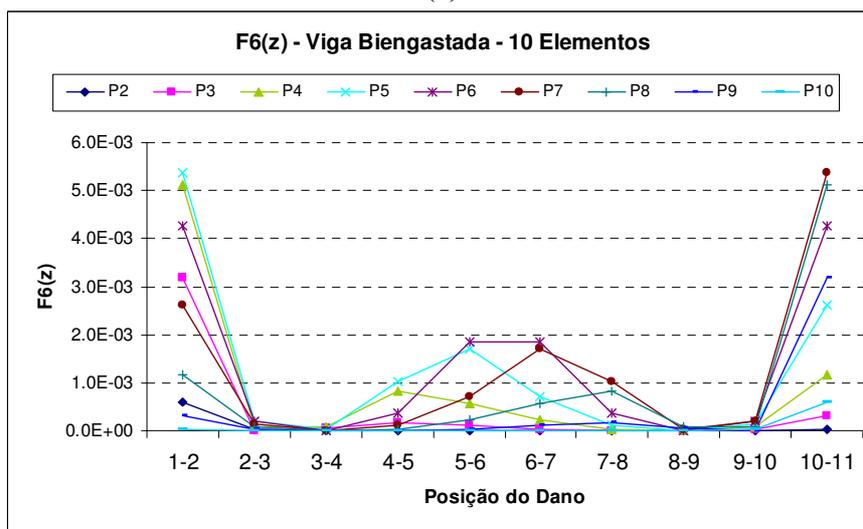
Figura 4.57 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F1(z)$  a  $F3(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.



(d)



(e)



(f)

Figura 4.57 (d) a (f) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para a viga biengastada dividida em dez elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.

Nos gráficos das Figuras de 4.51 a 4.56, para a viga biengastada dividida em dez, há uma confirmação das análises feitas para a viga biengastada dividida em seis elementos. Portanto, também é possível localizar o dano observando o maior e o segundo maior patamar do gráfico, porém, neste caso o dano não pode estar localizado nos dois últimos elementos próximos ao engaste. Por exemplo, na Figura 4.56(g), o maior patamar ocorre quando a carga está no nó 7 (P7) e o segundo maior patamar, ocorre quando a carga está no nó 8 (P8), e assim conclui-se que o dano está localizado no elemento 7-8.

Se o dano está localizado no penúltimo elemento mais extremo, ou seja, no elemento 2-3 ou elemento 9-10, ocorre outro tipo de comportamento. É possível perceber que, para quando o dano está no elemento 2-3, Figuras 4.51(b), 4.52(b), 4.53(b), 4.54(b), 4.55 (b) e 4.56(b), há uma queda no patamar de P2 para P3 e depois os patamares sobem e voltam ao comportamento padrão. Esta queda de valor, apenas de P2 para P3, ocorre exclusivamente para quando o dano está localizado no elemento 2-3. No caso de o dano estar localizado no elemento 9-10, Figuras 4.51(i), 4.52 (i), 4.53 (i), 4.54 (i), 4.55(i) e 4.56(i), ocorre um aumento no patamar de P9 para P10, quando era esperado que este diminuísse, segundo os padrões dos outros gráficos.

Finalmente, se o dano está localizado nos elementos mais extremos, ou seja, elemento 1-2 ou elemento 10-11, ocorre um comportamento semelhante ao da viga biengastada dividida em seis elementos. No caso de o elemento 10-11 ser o danificado, Figuras 4.51(j), 4.52 (j), 4.53 (j), 4.54 (j), 4.55(j) e 4.56(j), os dois maiores patamares estão no nó 7 (P7) e no nó 8 (P8), respectivamente. Porém não se pode confundir com um dano no elemento 7-8, pois o comportamento dos gráficos citados é mais suave. Comparando, por exemplo, a Figura 4.56(g) com a 4.56(j) observa-se que os patamares de P7 e P8 no gráfico 4.56(g), em que o dano está no elemento 7-8, se sobressaem com clareza dos outros patamares, o que não ocorre na Figura 4.56(j), onde gráfico revela mais suavidade na variação de seus patamares. Similarmente, se elemento 1-2 for o danificado, Figuras 4.51(a), 4.52(a), 4.53(a), 4.54(a), 4.55(a) e 4.56(a), os dois maiores patamares estão no nó 4 (P4) e no nó 5 (P5), respectivamente. Porém, não se pode confundir com um dano no elemento 4-5, pois existe a suavidade de variação dos patamares dos gráficos, o que não ocorre nas Figuras 4.51(d), 4.52 (d), 4.53 (d), 4.54 (d), 4.55(d) e 4.56(d).

Nas Figuras de 4.57(a) a 4.57(f), os gráficos apresentaram-se praticamente com o mesmo padrão. Neste caso, a assinatura  $F_1(z)$  não apresentou problemas, pois já foi calculada com valores escolhidos de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  de modo que os valores de  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$  se distanciassem do valor zero.

## 4.6 PÓRTICO

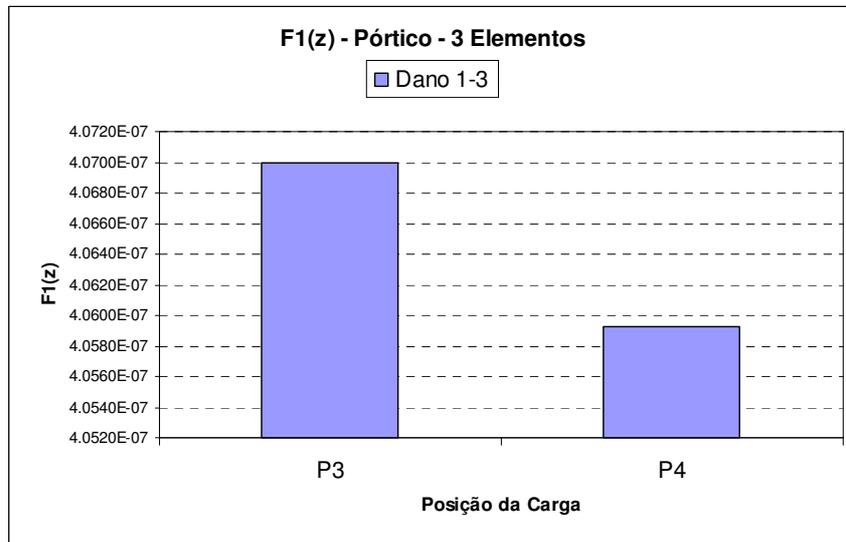
### 4.6.1 Pórtico para 3 Elementos

O pórtico dividido em três elementos pode ser ilustrado pela Figura 4.8(a) que representa suas dimensões, nós e todas suas outras características físicas que foram utilizadas para a obtenção de seus deslocamentos e frequências.

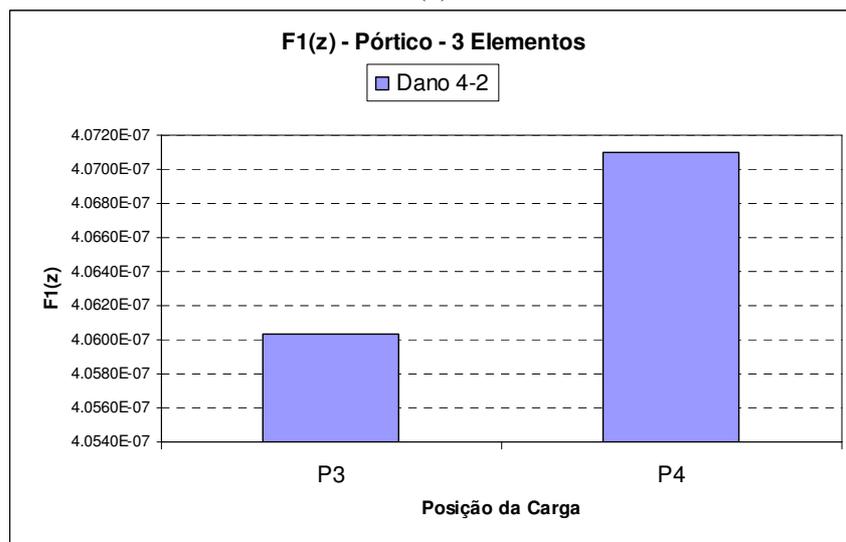
Para cada uma das seis assinaturas os resultados de frequência e deslocamentos obtidos foram aplicados para os elementos verticais do pórtico.

Para as assinaturas de  $F1(z)$  a  $F6(z)$ , tendo a carga horizontal concentrada de 5,0 KN no nó e mantendo o dano no mesmo elemento, têm-se os comportamentos demonstrados pelas Figuras 4.58 a 4.63.

$$F_1(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right]$$



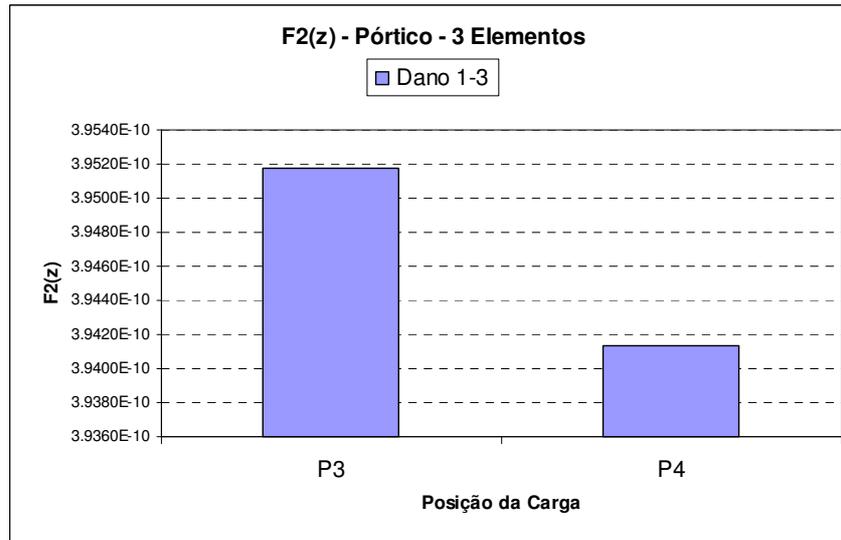
(a)



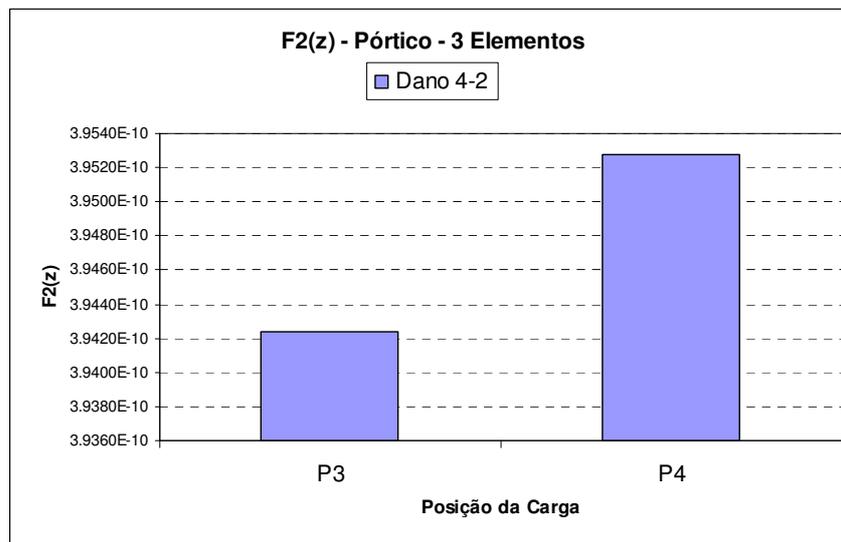
(b)

Figura 4.58 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})}{\sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2}$$



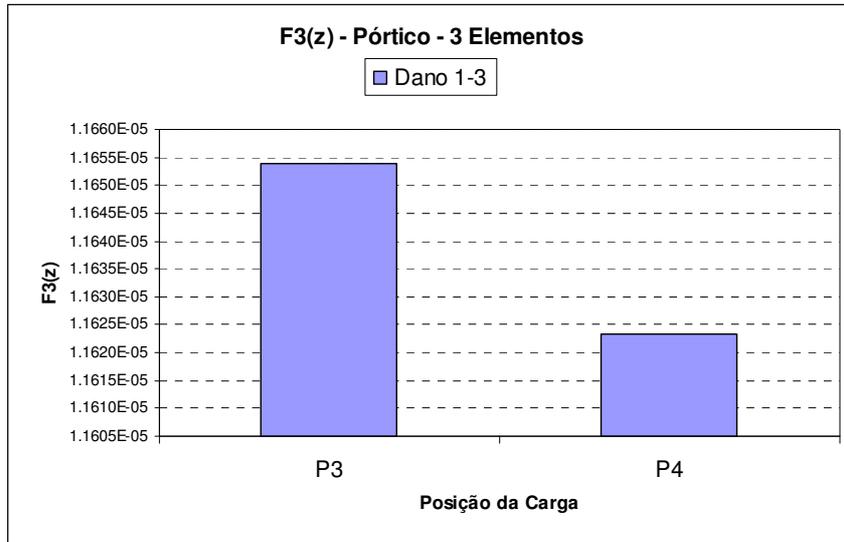
(a)



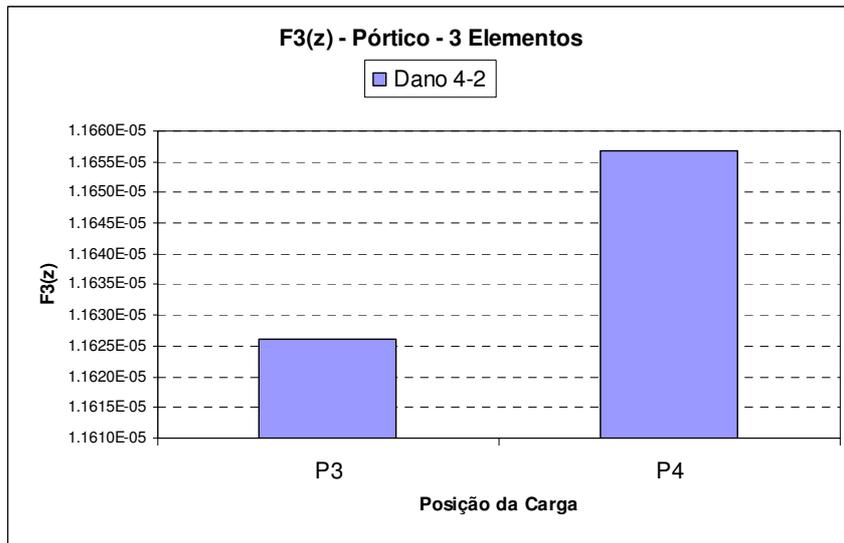
(b)

Figura 4.59 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura  $F_2(z)$  para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})$$



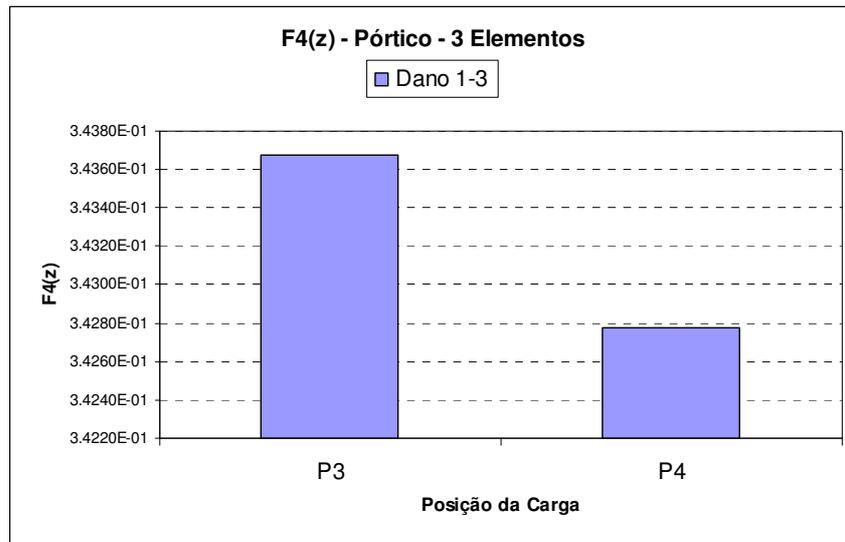
(a)



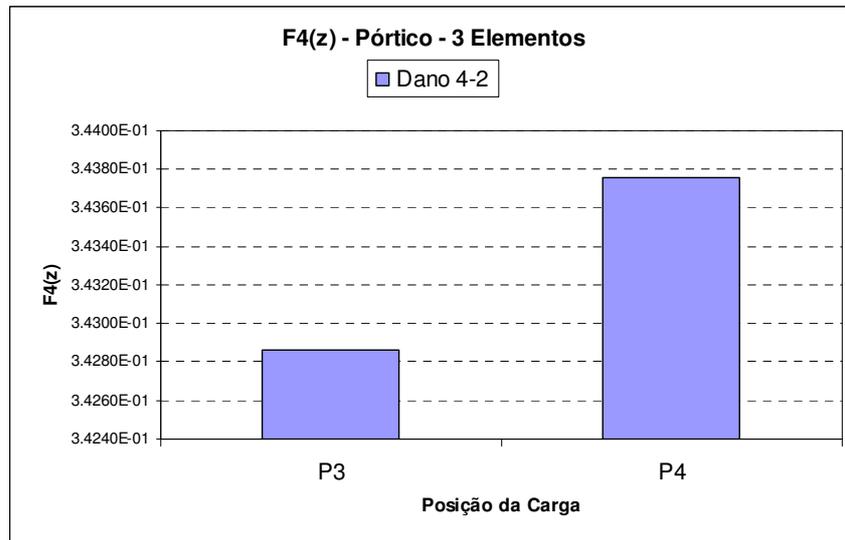
(b)

Figura 4.60 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura  $F_3(z)$  para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2}) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2$$



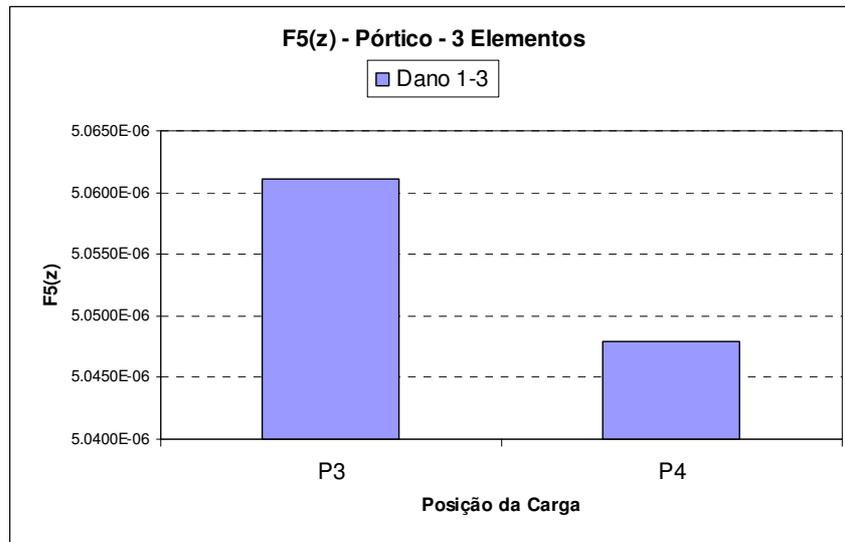
(a)



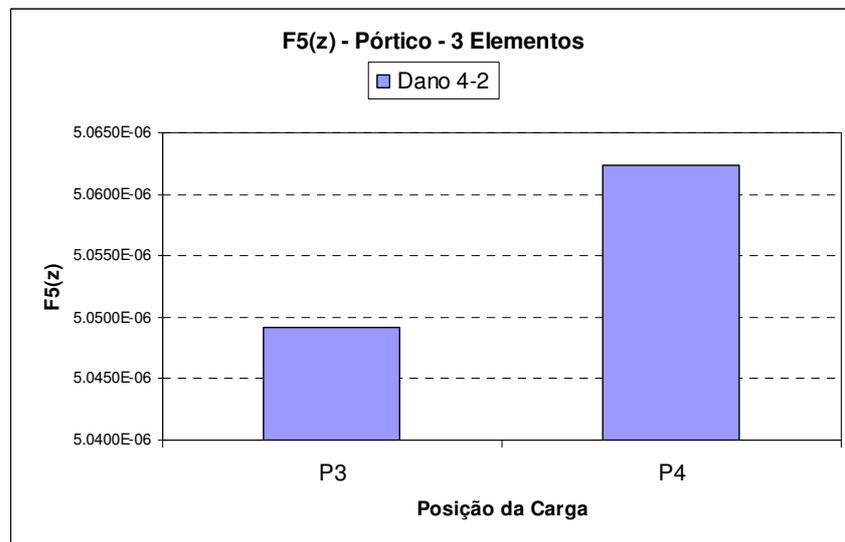
(b)

Figura 4.61 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura  $F_4(z)$  para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1)$$



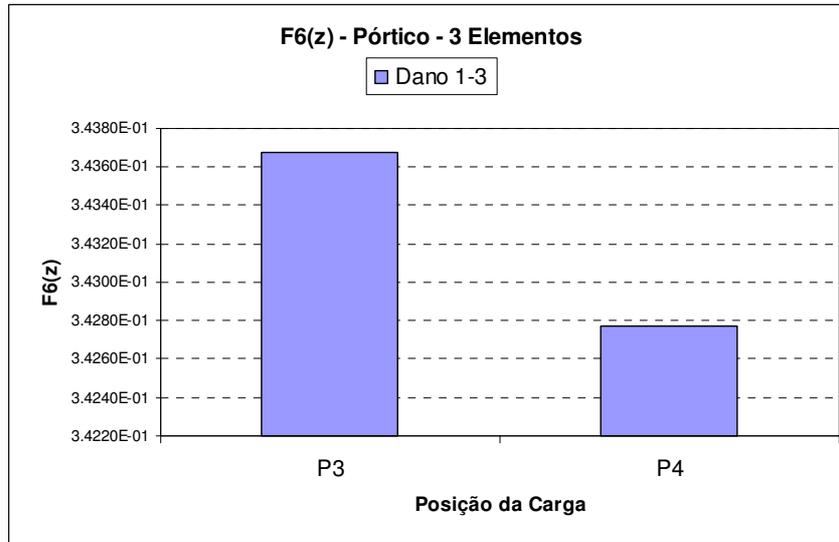
(a)



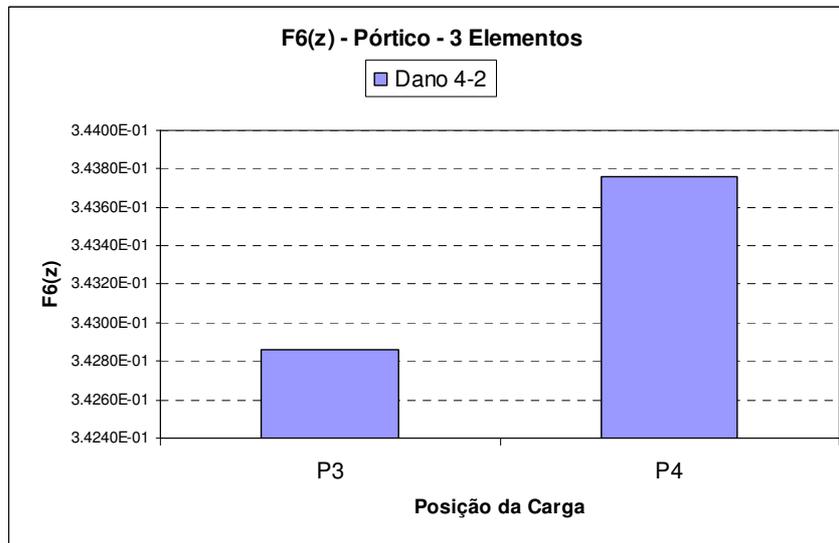
(b)

Figura 4.62 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura  $F_5(z)$  para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2$$

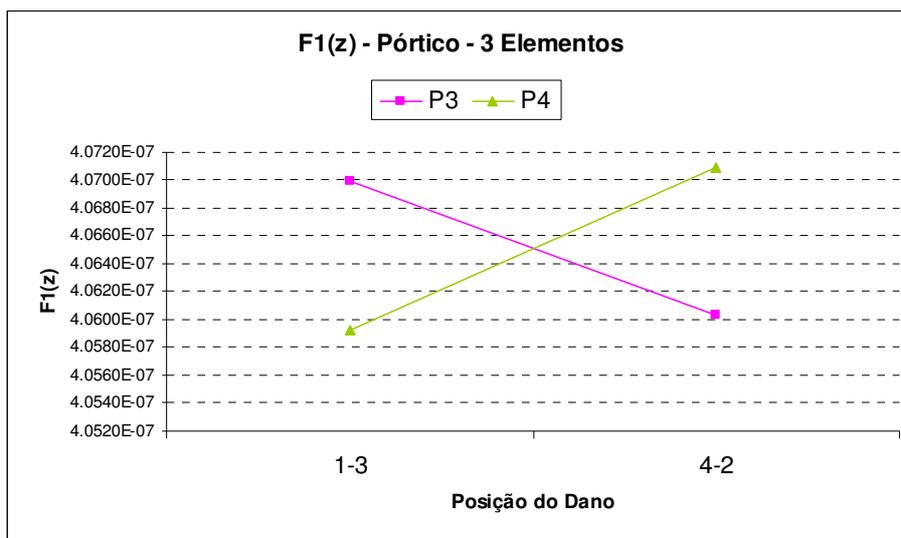


(a)

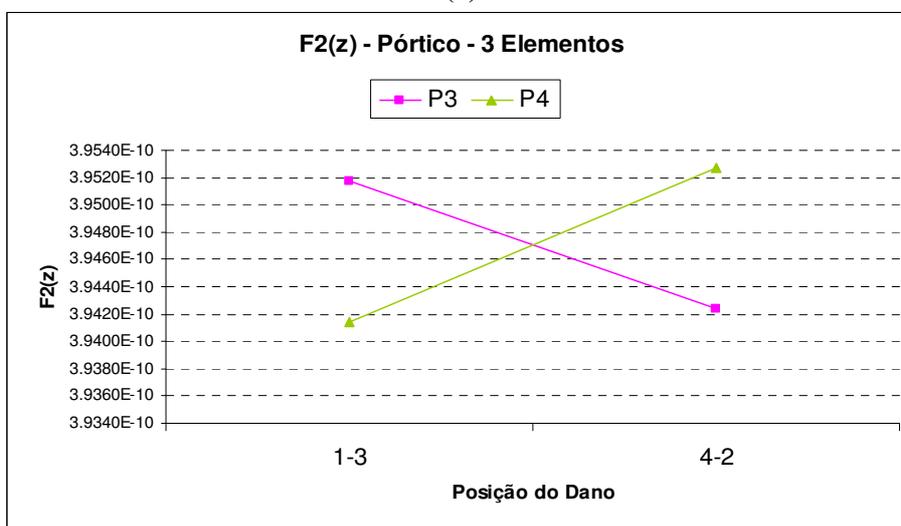


(b)

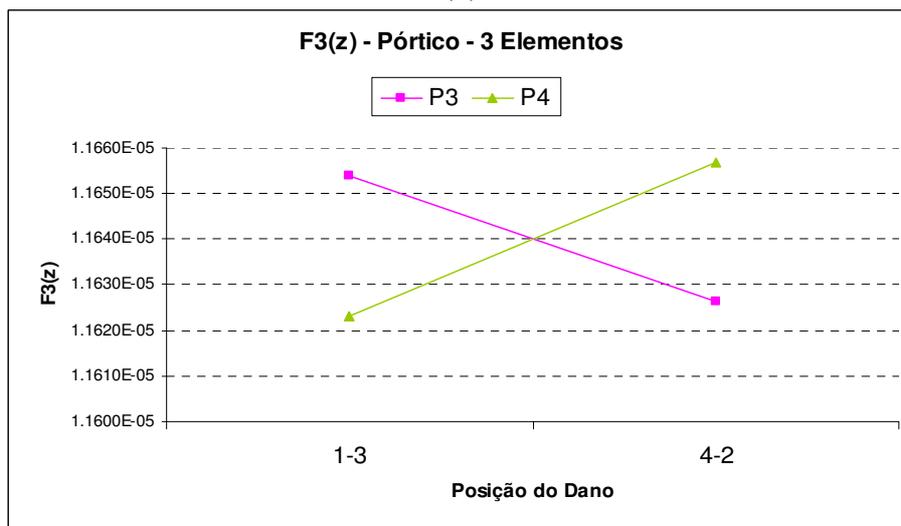
Figura 4.63 (a) e (b) - Representação gráfica da Assinatura  $F_6(z)$  para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(a)

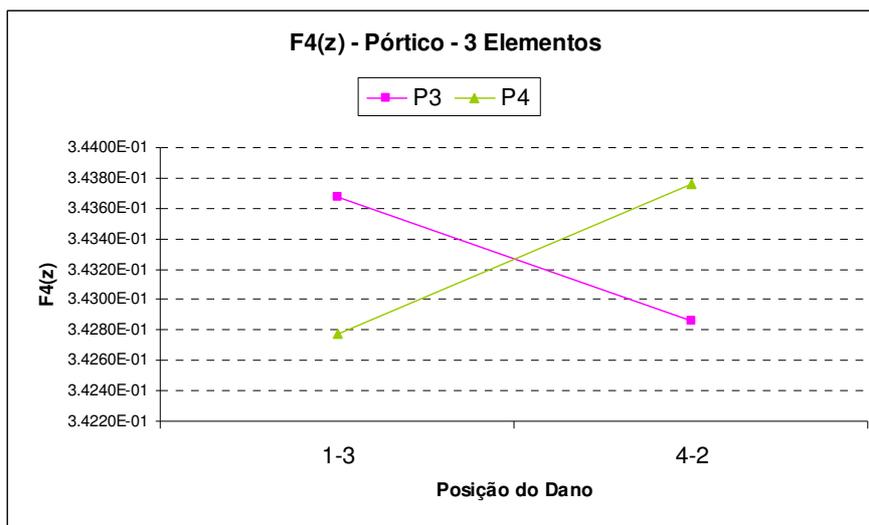


(b)

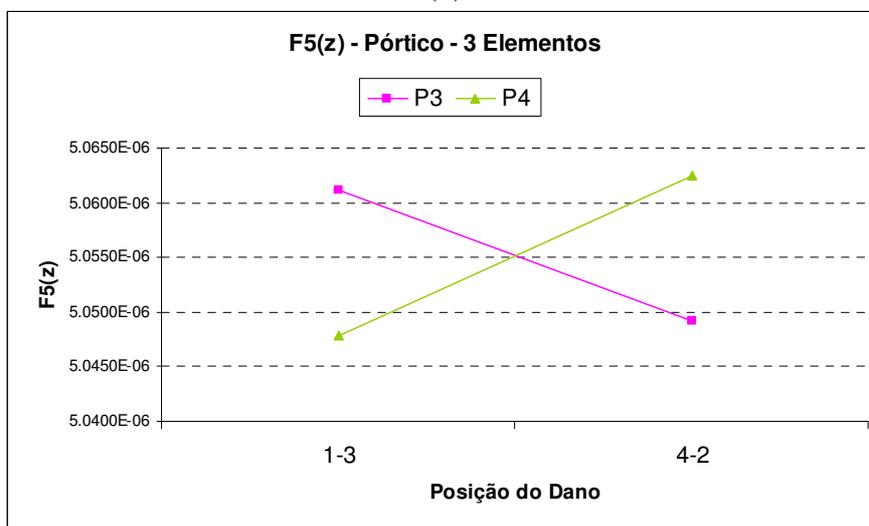


(c)

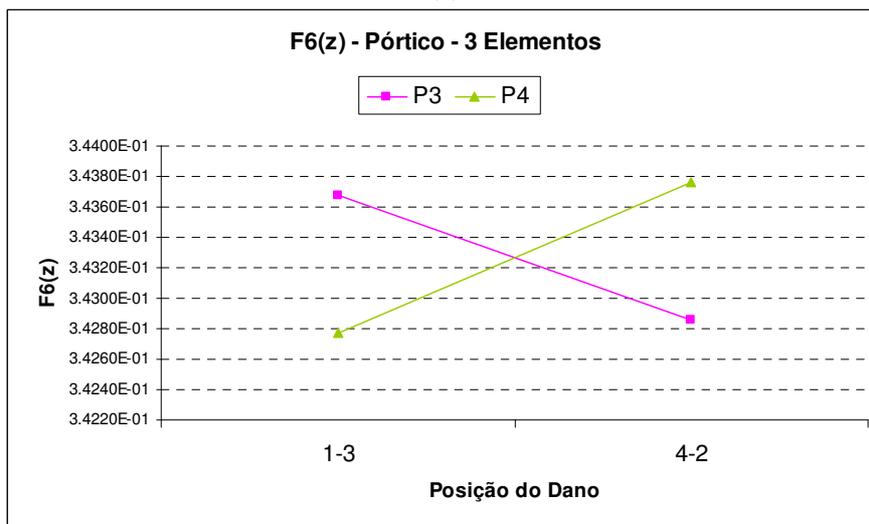
Figura 4.64 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.



(d)



(e)



(f)

Figura 4.64 (d) a (f) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para o pórtico dividido em três elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.

O pórtico dividido em três elementos mostra gráficos simétricos, não apresentando, portanto maiores riquezas de detalhes. Então para as Figuras de 4.58 a 4.63, pode-se dizer que o dano estará relacionado ao maior patamar, ou seja, se o maior patamar é P3, o elemento 1-3 é o danificado, porém se o maior patamar for P4, o dano está localizado no elemento 4-2.

Os gráficos das Figuras de 4.64(a) a 4.64(f) comportaram-se dentro do padrão esperado, sem apresentar variações. Vale notar que, neste caso as frequências de menores valores adotadas ( $\omega_1$  e  $\omega_2$ ) são as que resultam em valores de  $\Delta\omega_1^2$  e  $\Delta\omega_2^2$  mais distantes de zero.

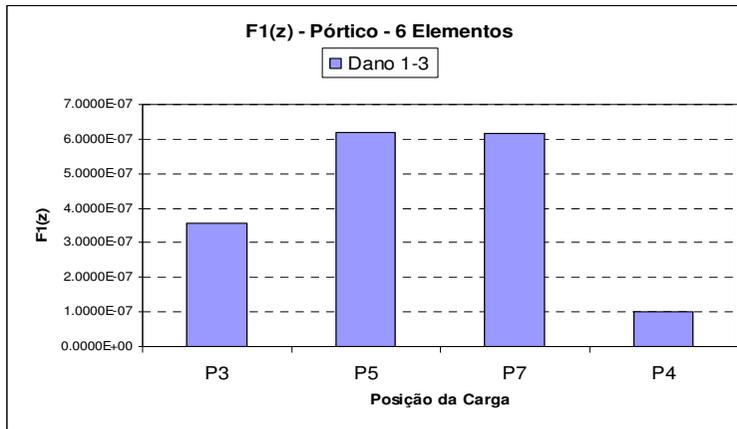
#### 4.6.2 Pórtico para 6 Elementos

O pórtico dividido em seis elementos pode ser ilustrado pela Figura 4.8(b) que representa suas dimensões, nós e todas suas outras características físicas que foram utilizadas para a obtenção de seus deslocamentos e frequências.

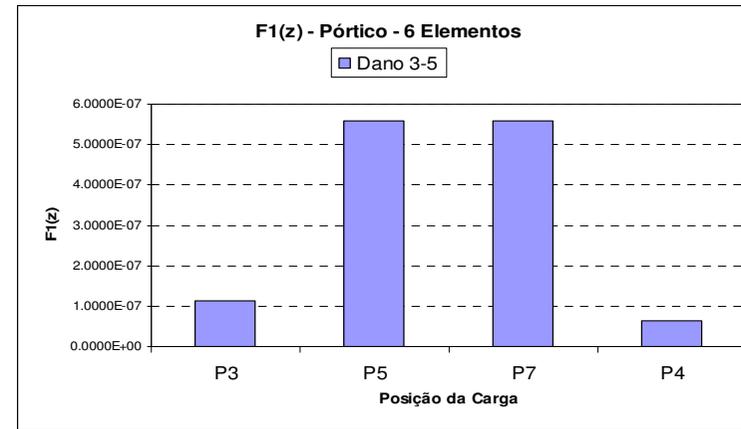
Para cada uma das seis assinaturas os resultados de frequência e deslocamentos obtidos foram aplicados para os elementos verticais do pórtico.

Para as assinaturas de  $F_1(z)$  a  $F_6(z)$ , tendo a carga horizontal concentrada de 5,0 KN no nó e mantendo o dano no mesmo elemento, têm-se os comportamentos demonstrados pelas Figuras 4.65 a 4.70.

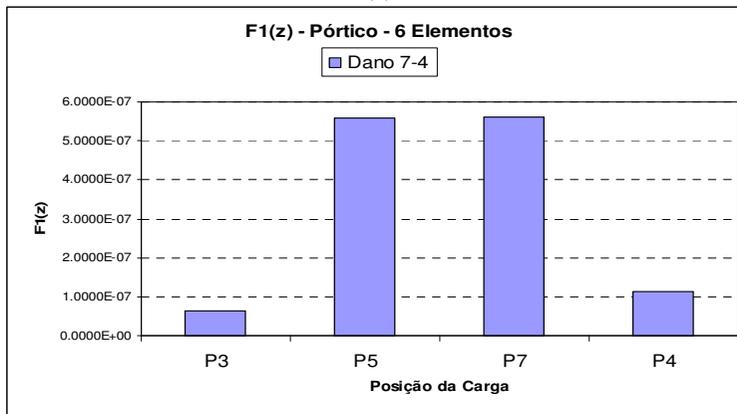
$$F_1(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right]$$



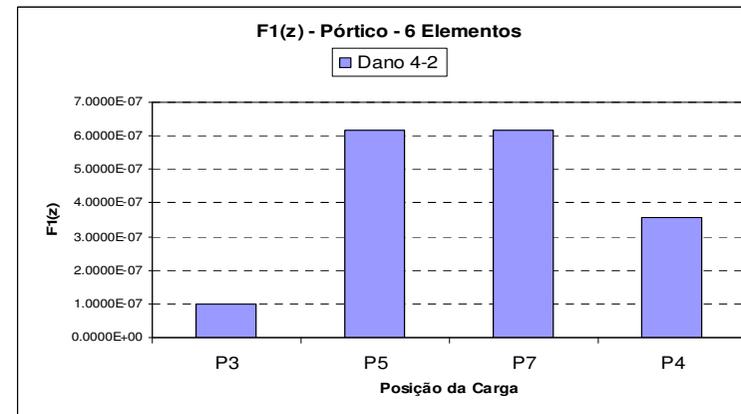
(a)



(b)



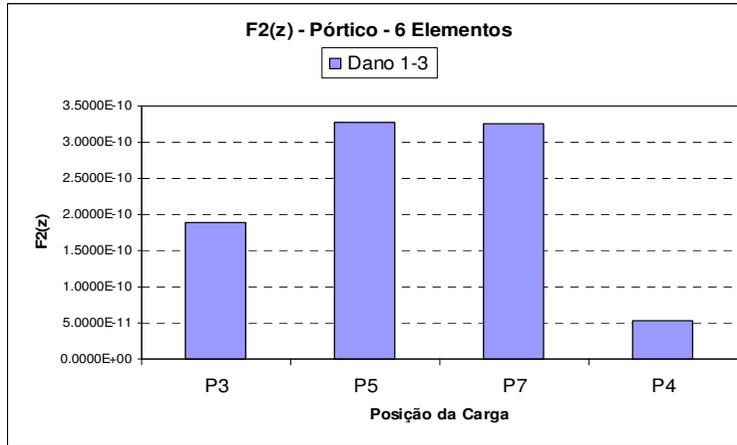
(c)



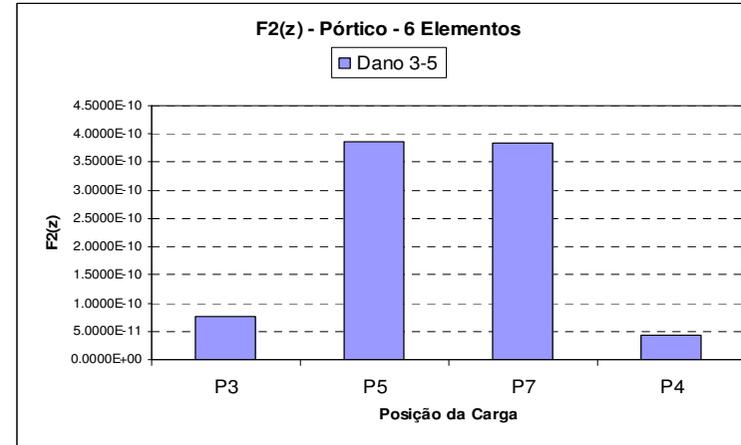
(d)

Figura 4.65 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

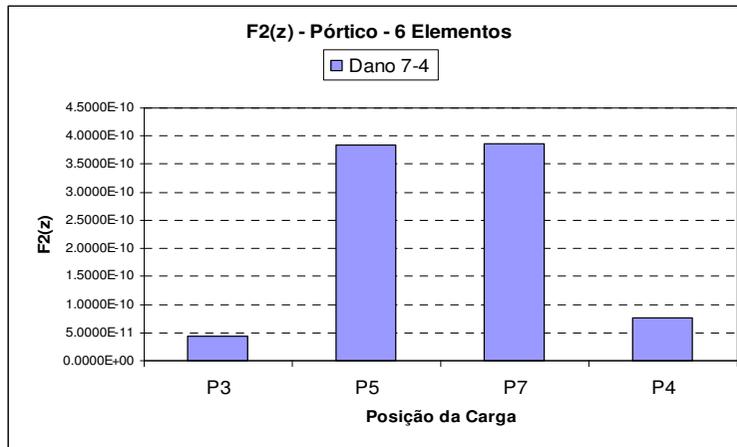
$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^j)^2 + (\Delta u_y^j)^2}{\sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2}$$



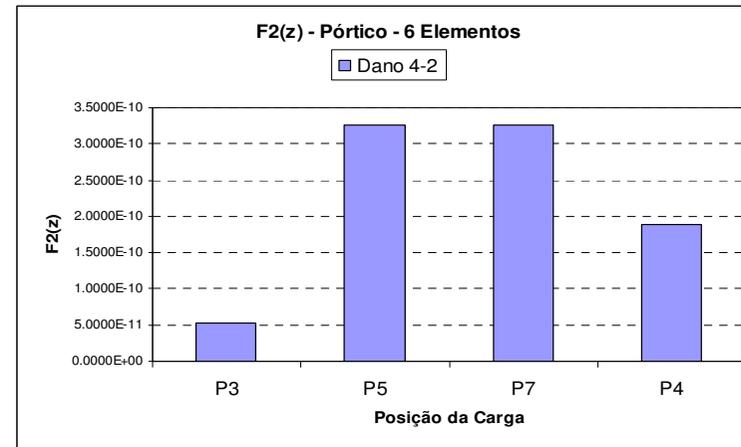
(a)



(b)



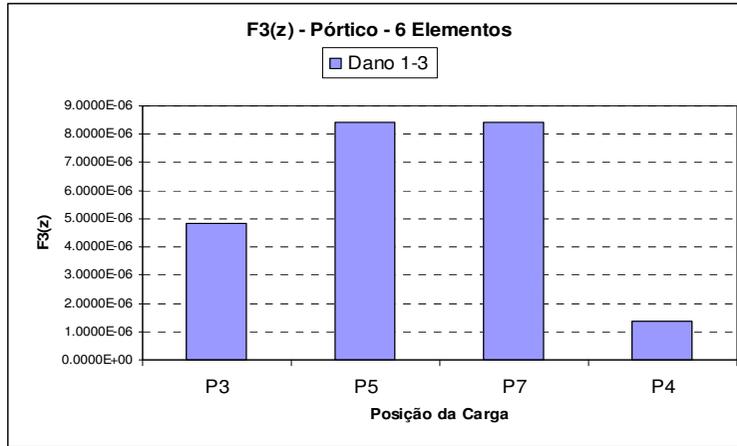
(c)



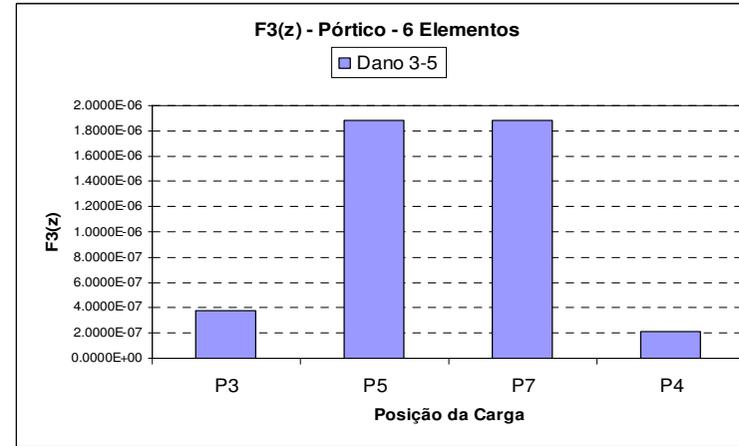
(d)

Figura 4.66 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_2(z)$  para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

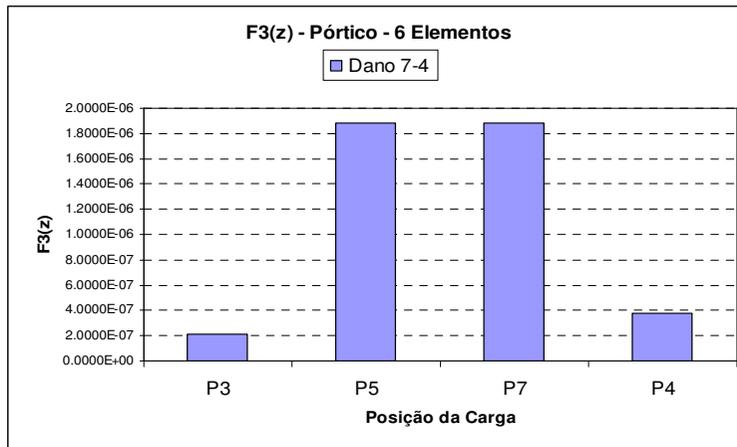
$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})$$



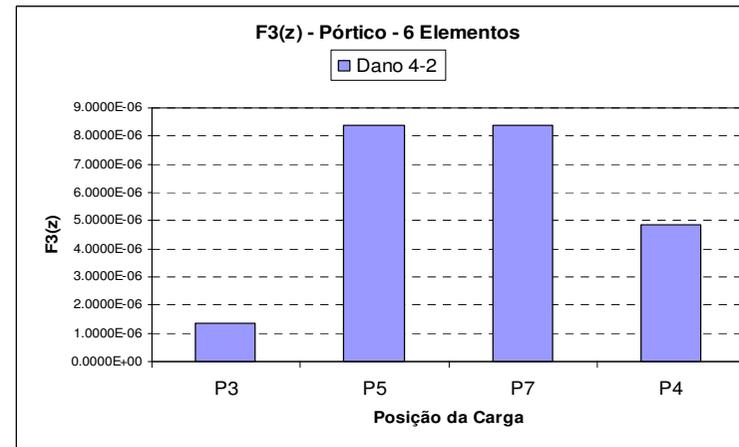
(a)



(b)



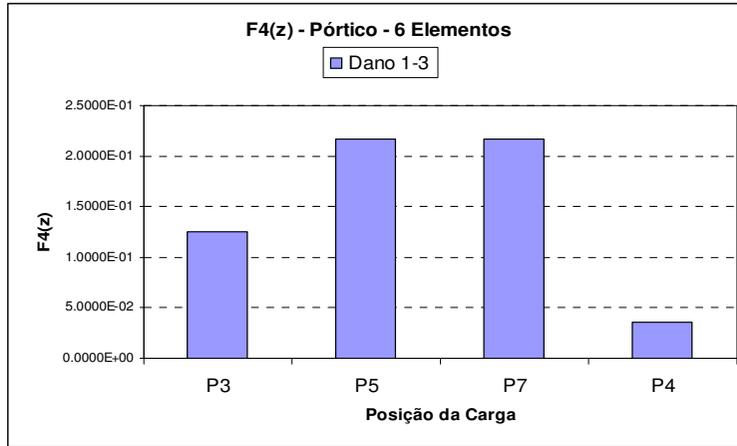
(c)



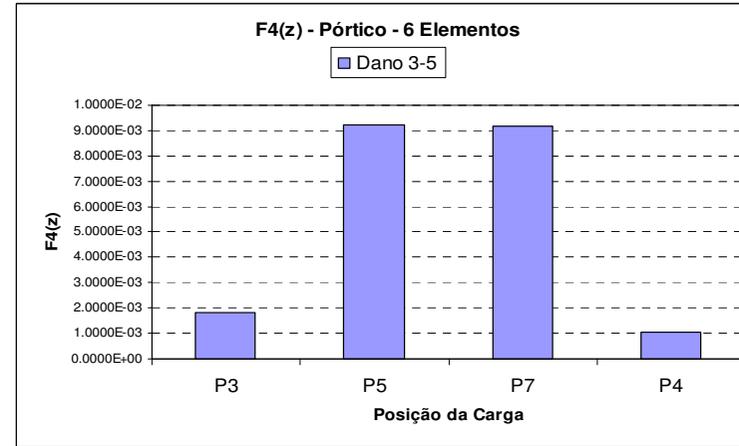
(d)

Figura 4.67 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_3(z)$  para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

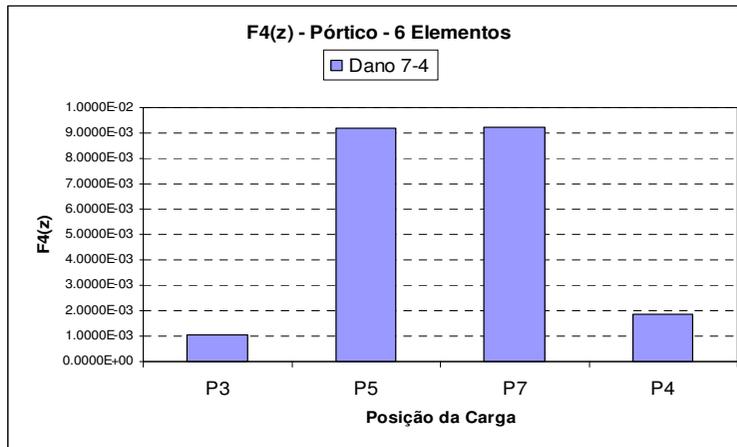
$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N \left( \Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} \right) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2$$



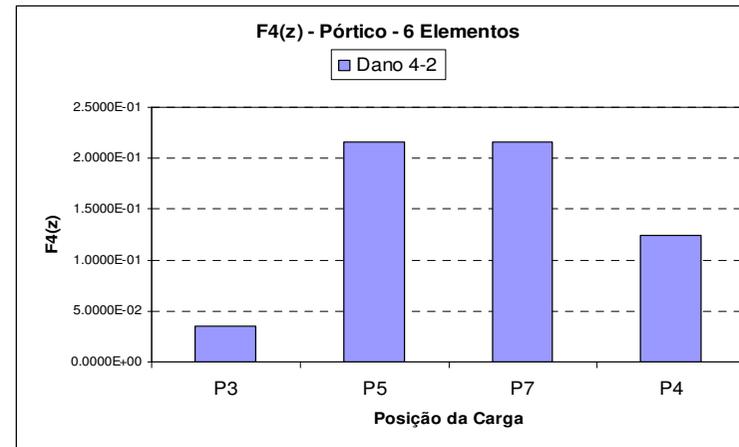
(a)



(b)



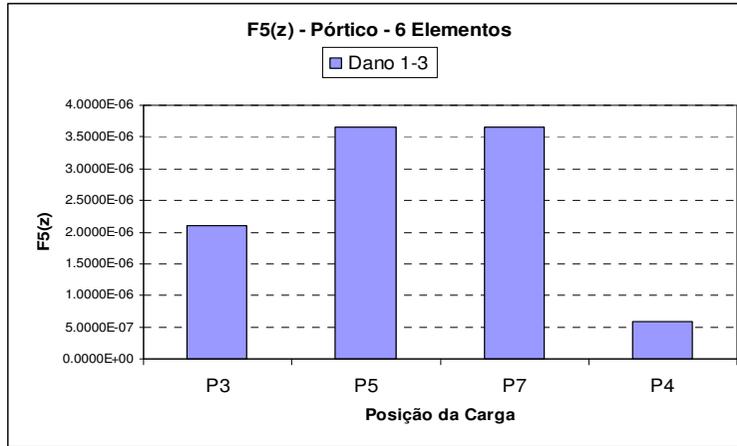
(c)



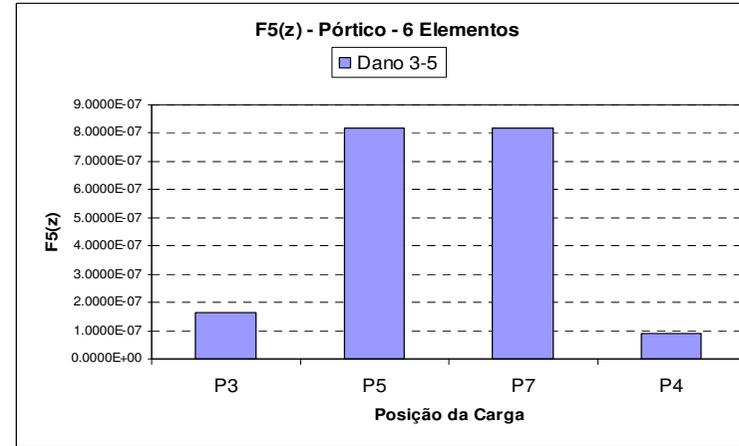
(d)

Figura 4.68 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

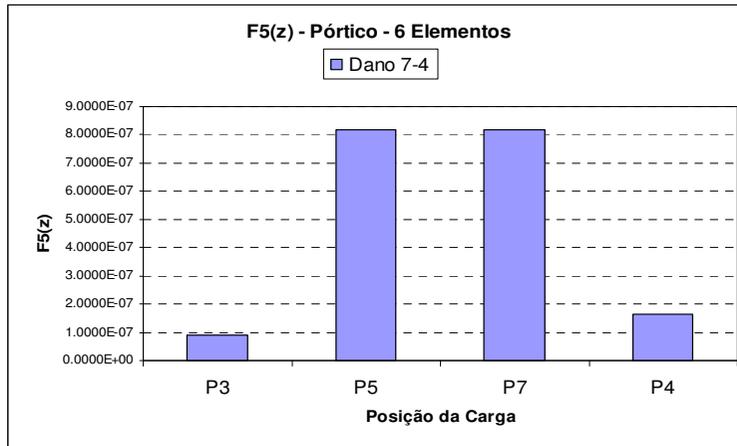
$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1)$$



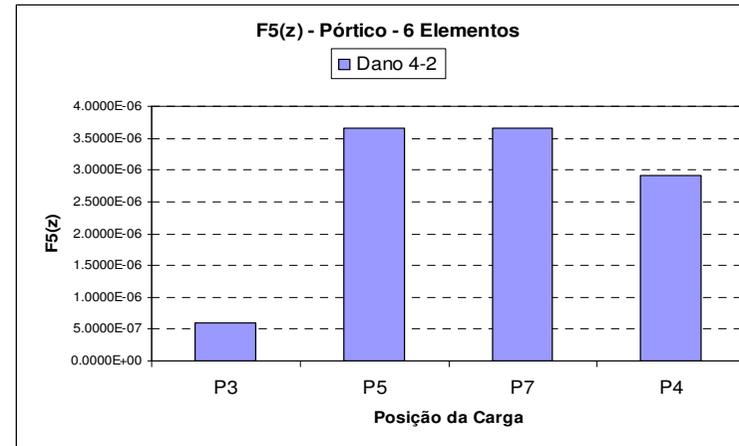
(a)



(b)



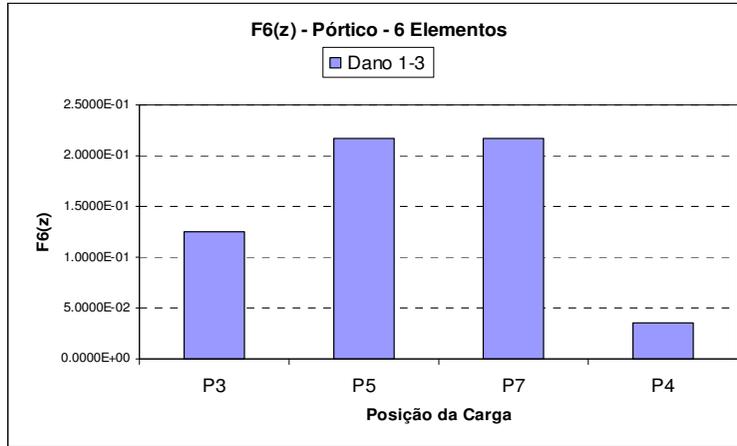
(c)



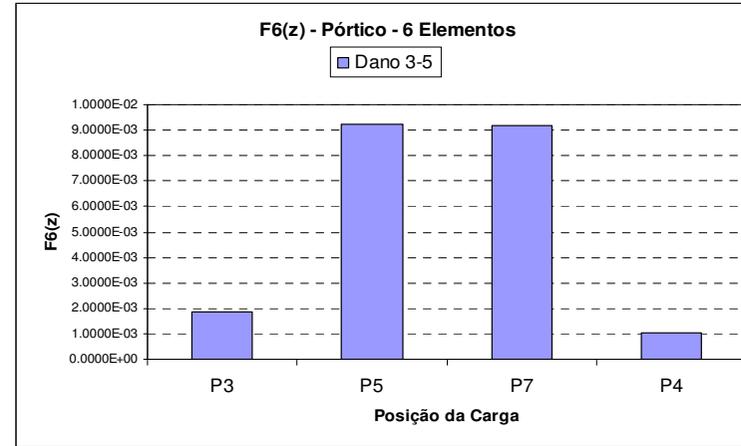
(d)

Figura 4.69 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_5(z)$  para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

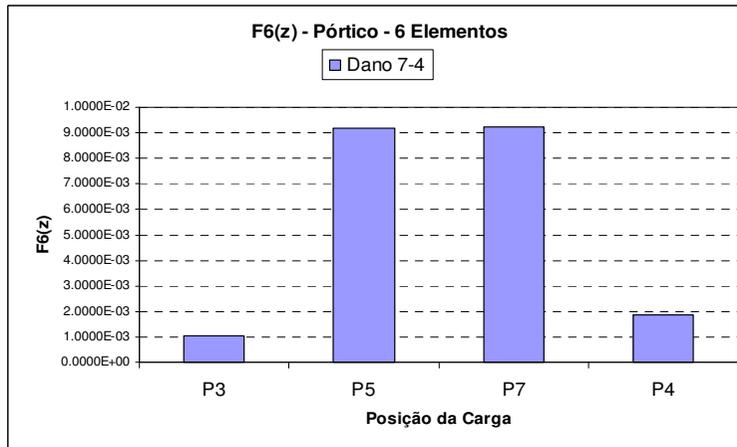
$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2$$



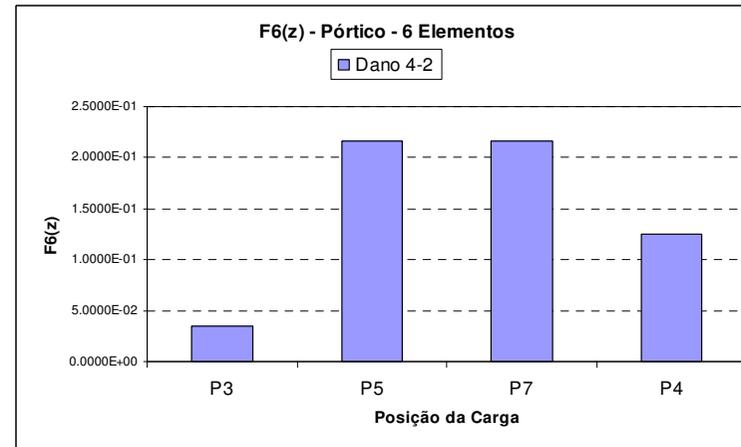
(a)



(b)

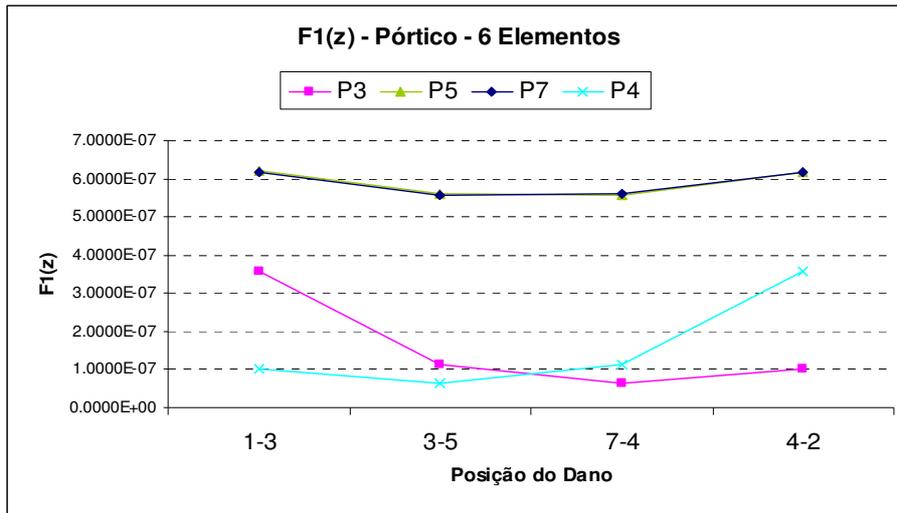


(c)

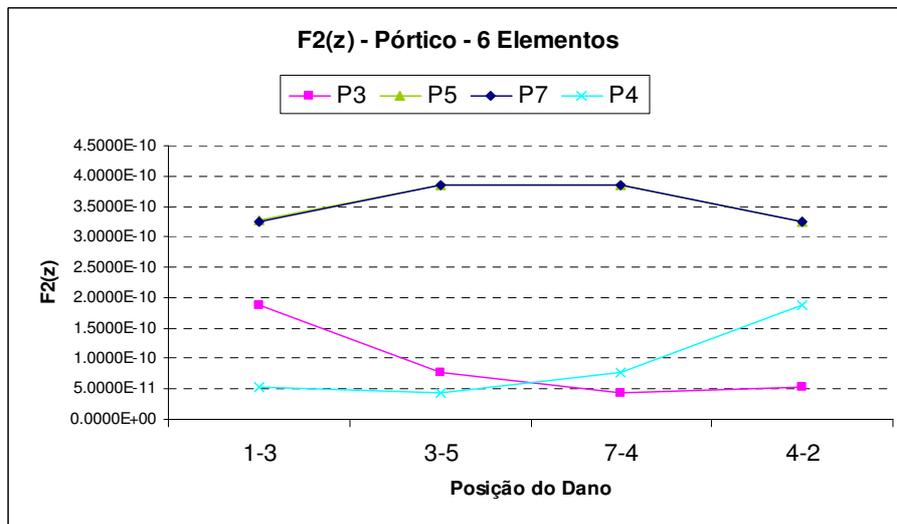


(d)

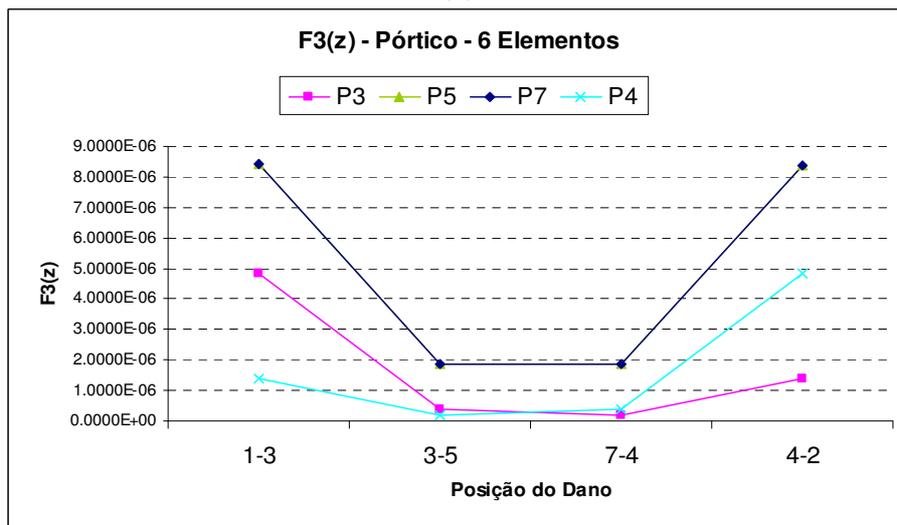
Figura 4.70 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_6(z)$  para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(a)

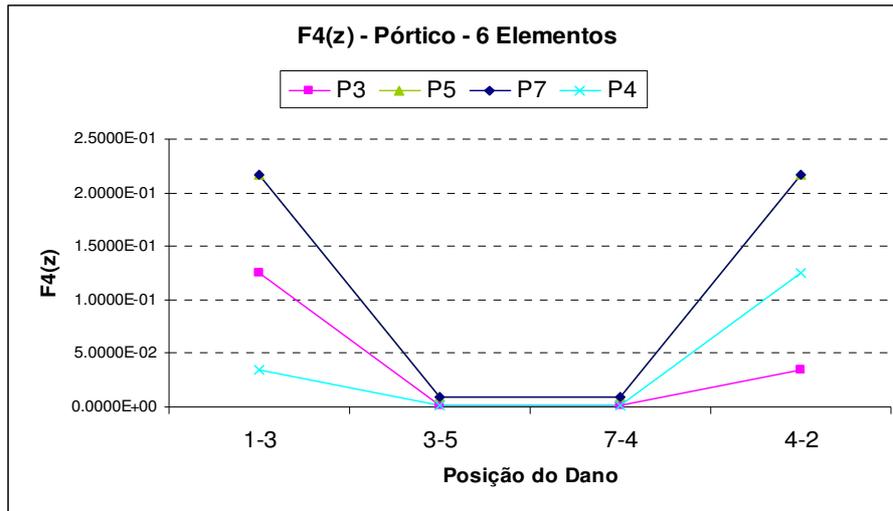


(b)

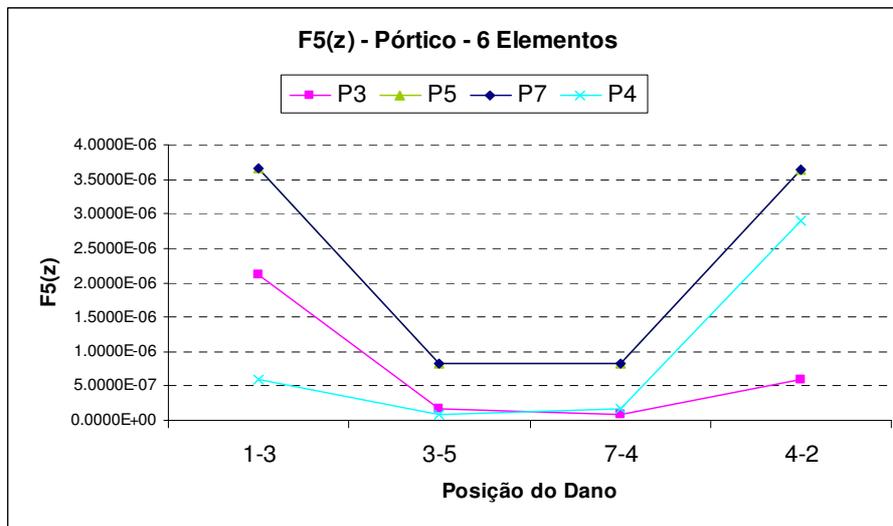


(c)

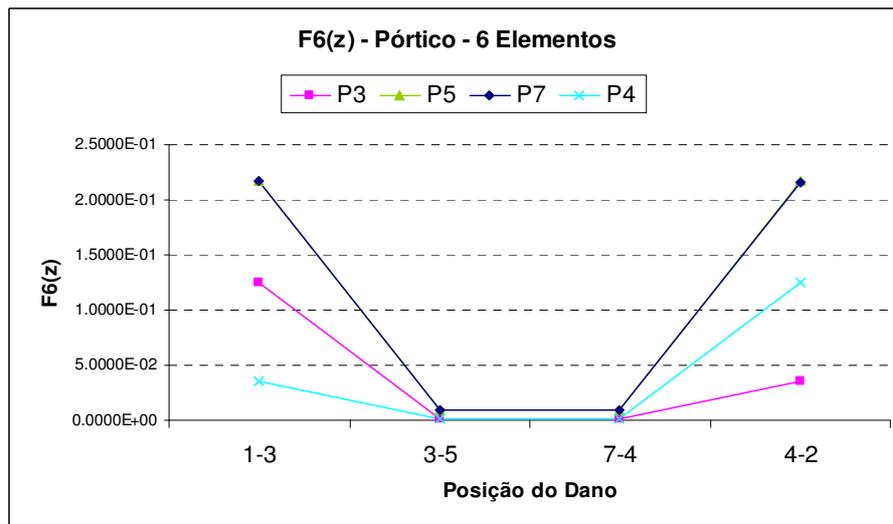
Figura 4.71 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F1(z)$  a  $F3(z)$  para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.



(d)



(e)



(f)

Figura 4.71 (d) a (f) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para o pórtico dividido em seis elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.

Como era esperado, o p3rtico dividido em seis elementos apresenta resultados um pouco mais expressivos do que os do p3rtico dividido em tr3s elementos.

Para as Figuras de 4.65 a 4.70, pode-se observar que pela simetria os patamares de P5 e P7 sempre est3o na mesma altura e, portanto, o dano pode ser localizado pela compara3o dos outros patamares (P3 e P4). Observando ent3o apenas as varia33es dos patamares de P3 e P4, nota-se que, se P3 tem o patamar maior que P4, o dano s3o pode estar nos elementos 1-3 ou 3-5. Percebe-se que comparando os gr3ficos das Figuras 4.65(a), 4.66(a), 4.67(a), 4.68(a), 4.69(a) e 4.70(a) aos gr3ficos das Figuras 4.65(b), 4.66(b), 4.67(b), 4.68(b), 4.69(b) e 4.70(b), respectivamente, P4 corresponde a 28% do valor de P3 para quando o elemento danificado 3 o 1-3, que 3 o mais pr3ximo ao engaste. Por3m, quando o dano estiver localizado no elemento 3-5, P4 corresponde a 56% do valor de P3

De maneira semelhante, se o patamar de P4 for maior que o patamar P3, o dano s3o pode estar nos elementos 7-4 ou 4-2. Assim, comparando os gr3ficos das Figuras 4.65(d), 4.66(d), 4.67(d), 4.68(d), 4.69(d) e 4.70(d) aos gr3ficos das Figuras 4.65(c), 4.66(c), 4.67(c), 4.68(c), 4.69(c) e 4.70(c), respectivamente, P3 corresponde a 28% do valor de P4 para quando o elemento danificado 3 o 4-2, que 3 o mais pr3ximo ao engaste. Todavia, quando o dano estiver localizado no elemento 7-4, P3 corresponde a 56% do valor de P4.

Os gr3ficos das Figuras de 4.71(a) a 4.71(f) apresentaram-se dentro do padr3o esperado, com exce3o dos gr3ficos: 4.71(a), correspondente 3 assinatura  $F_1(z)$ , e 4.71(b), correspondente 3 assinatura  $F_2(z)$ . As assinaturas  $F_1(z)$  e  $F_2(z)$  s3o as 3nicas que apresentam a rela3o de freq3ncia no denominador e por isso est3o fora do padr3o gr3fico.

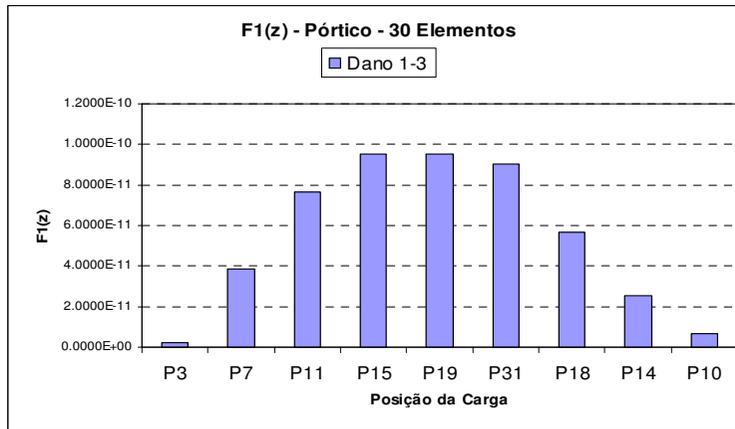
### 4.6.3 Pórtico para 30 Elementos

O pórtico dividido em trinta elementos pode ser ilustrado pela Figura 4.8(c) que representa suas dimensões, nós e todas suas outras características físicas que foram utilizadas para a obtenção de seus deslocamentos e frequências.

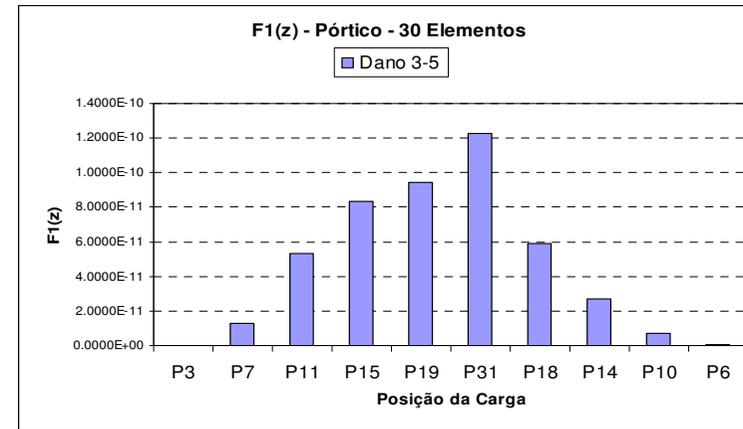
Para cada uma das seis assinaturas os resultados de frequência e deslocamentos obtidos foram aplicados para os elementos verticais do pórtico. A aplicação da carga concentrada foi definida alternadamente por nó. Portanto, os nós submetidos à carga neste caso foram, do lado esquerdo, nós 3, 7, 11, 15,19 e do lado direito, nós 6, 10, 14, 18,31. Porém os danos foram aplicados a todos os elementos verticais.

Para as assinaturas de  $F_1(z)$  a  $F_6(z)$ , tendo a carga horizontal concentrada de 5,0 KN no nó e mantendo o dano no mesmo elemento, têm-se os comportamentos demonstrados pelas Figuras 4.72 a 4.77.

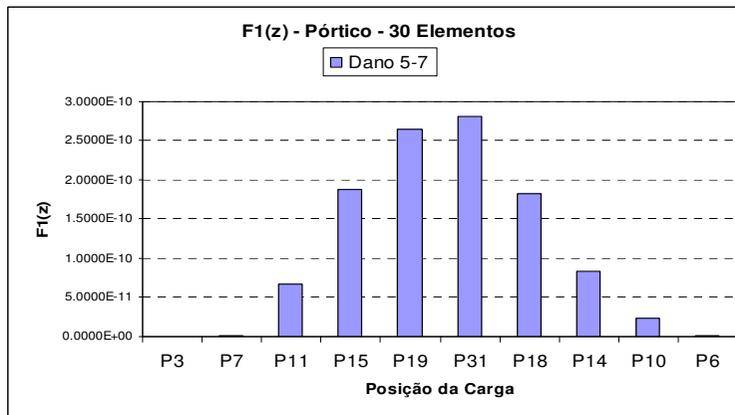
$$F_1(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_x^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_1^2} \right) + \left( \frac{(\Delta u_y^j)^2}{\Delta \omega_2^2} \right) \right]$$



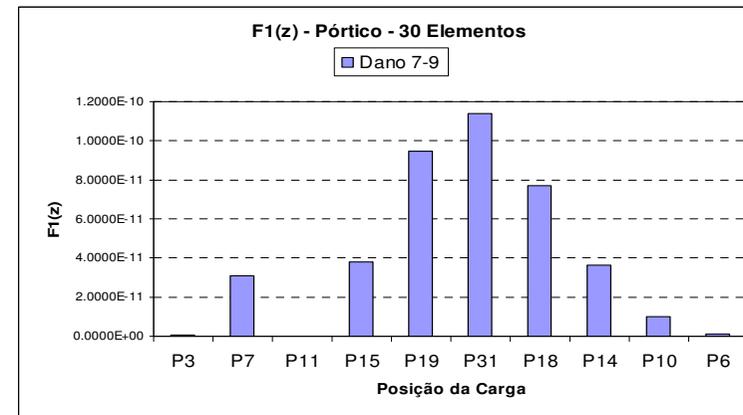
(a)



(b)

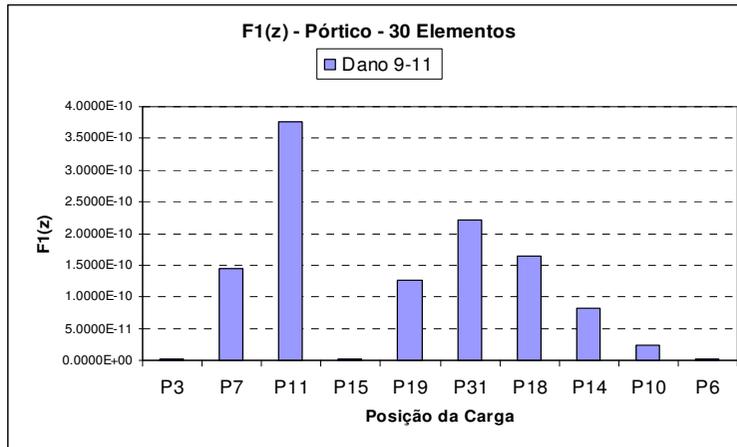


(c)

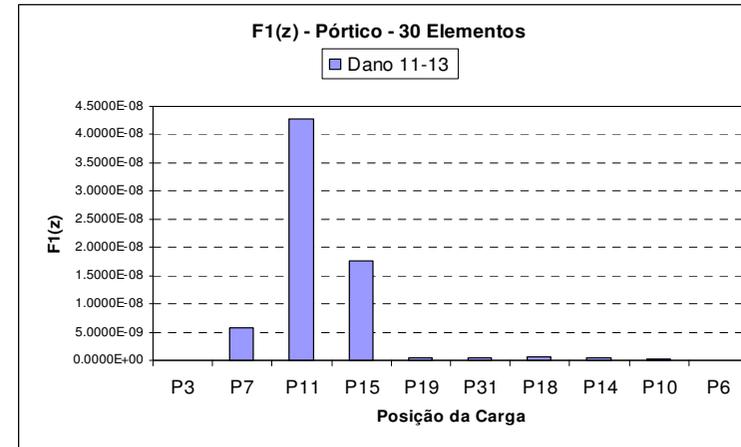


(d)

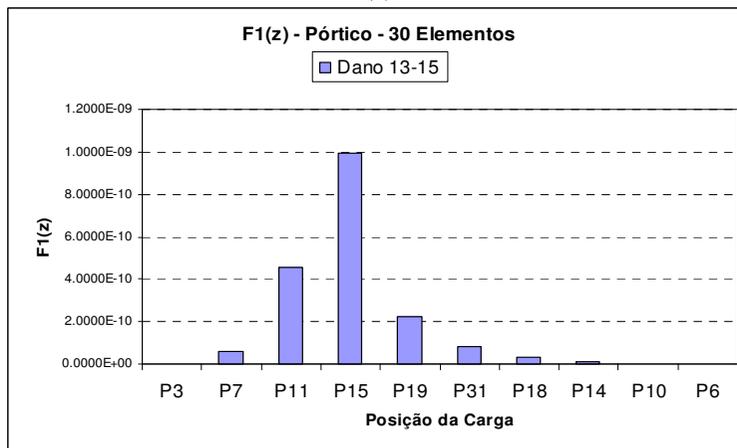
Figura 4.72 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



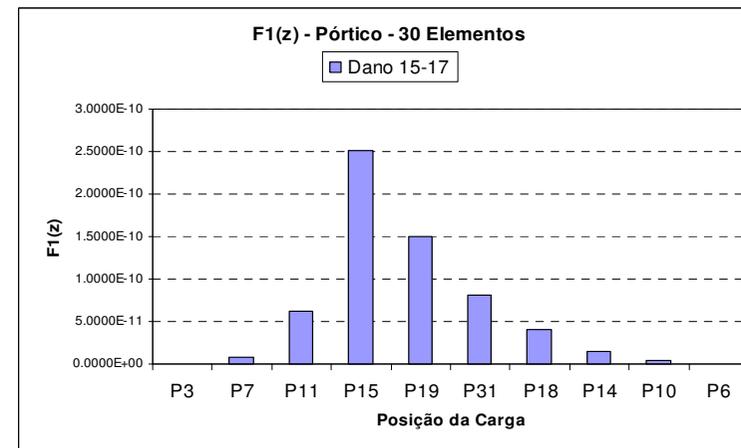
(e)



(f)

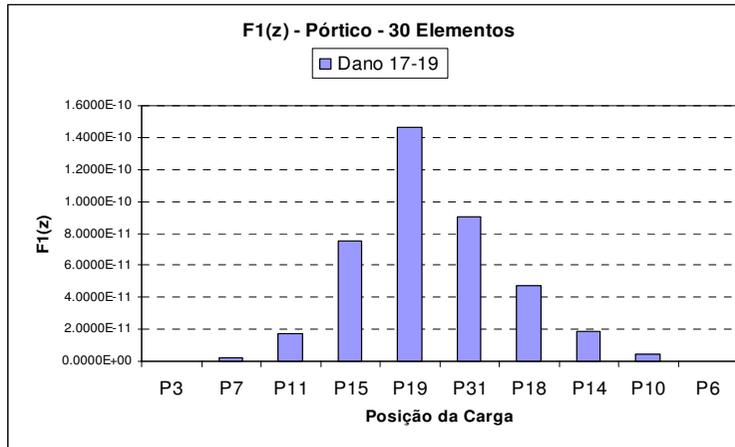


(g)

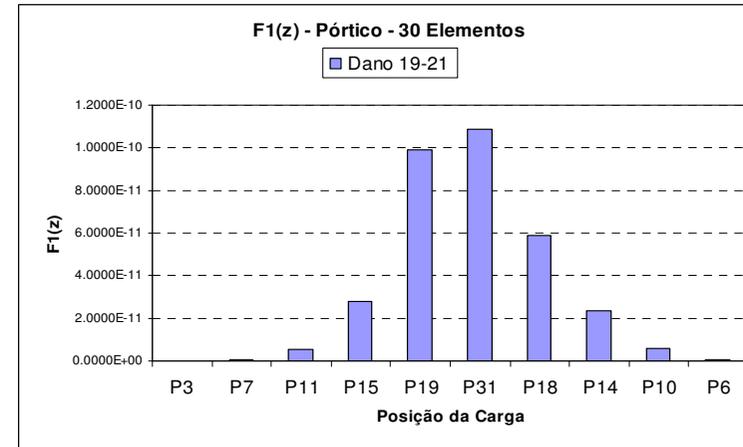


(h)

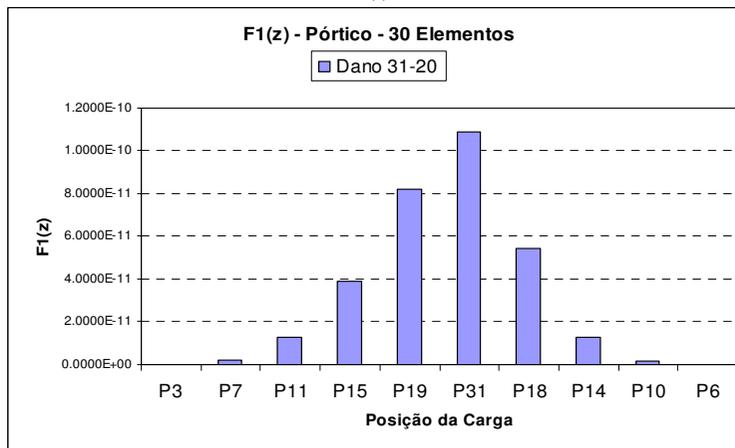
Figura 4.72 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



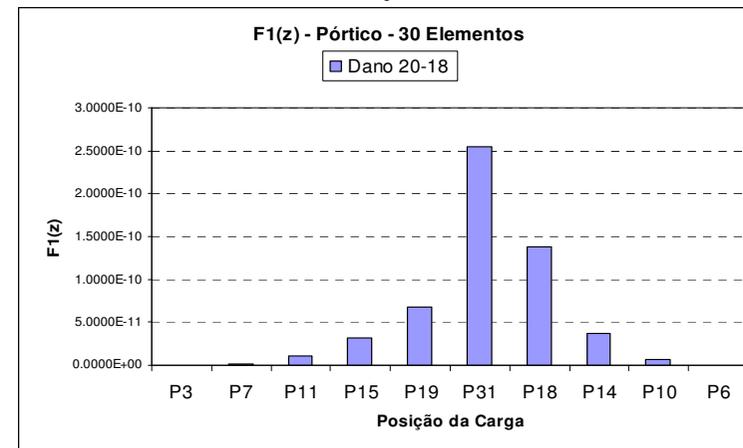
(i)



(j)

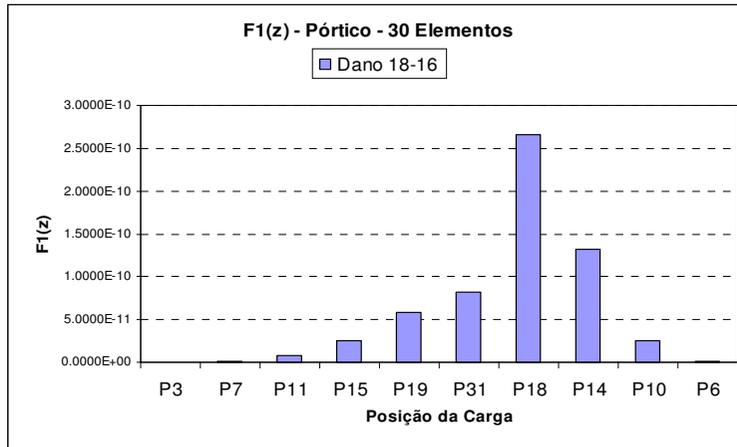


(k)

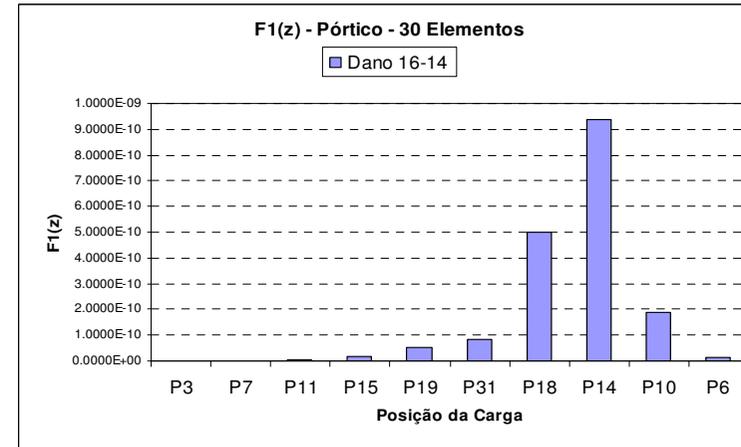


(l)

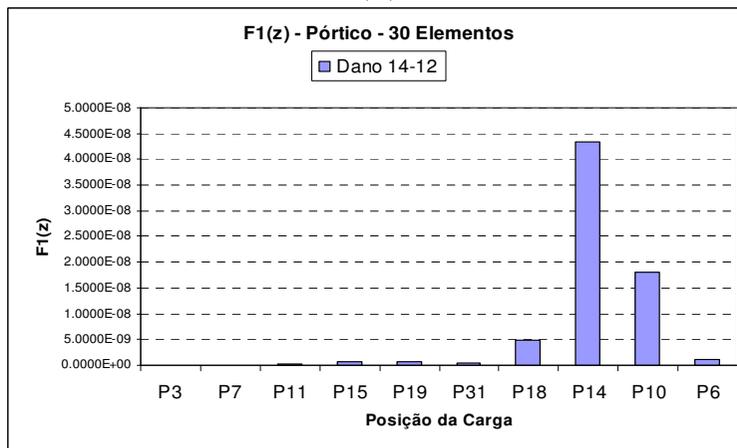
Figura 4.72 (i) a (l) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



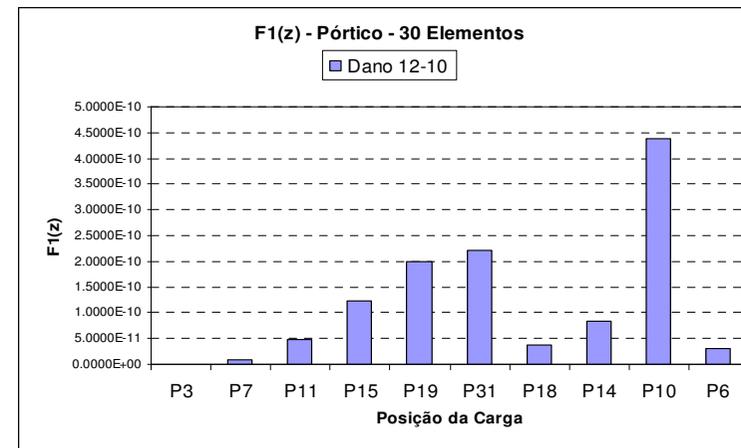
(m)



(n)

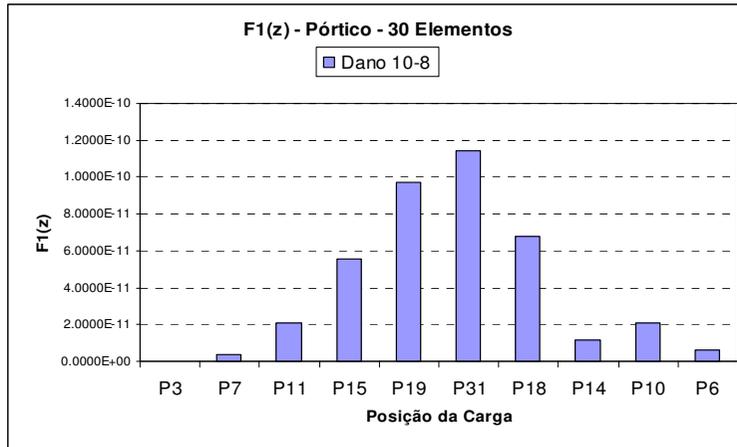


(o)

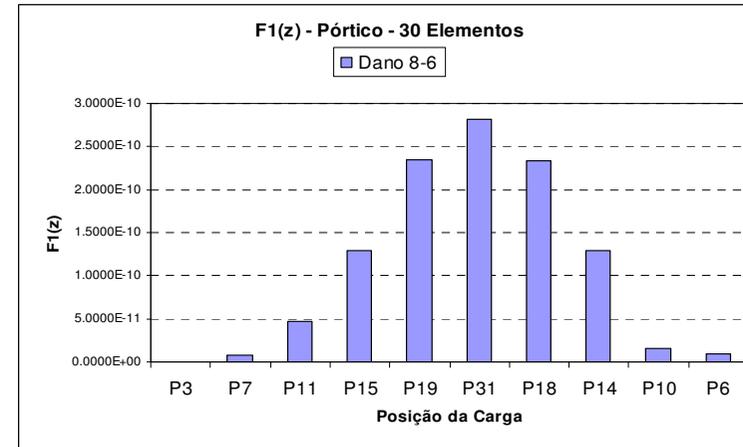


(p)

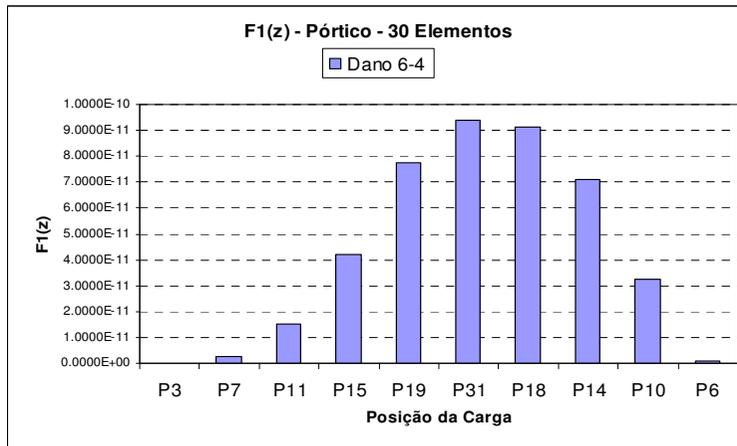
Figura 4.72 (m) a (p) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



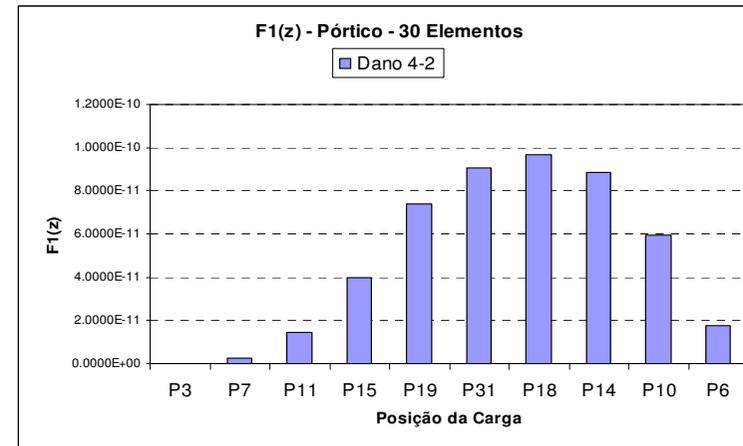
(q)



(r)



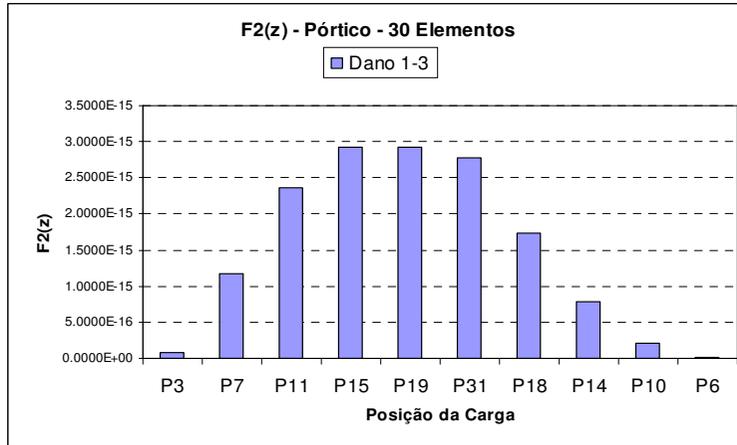
(s)



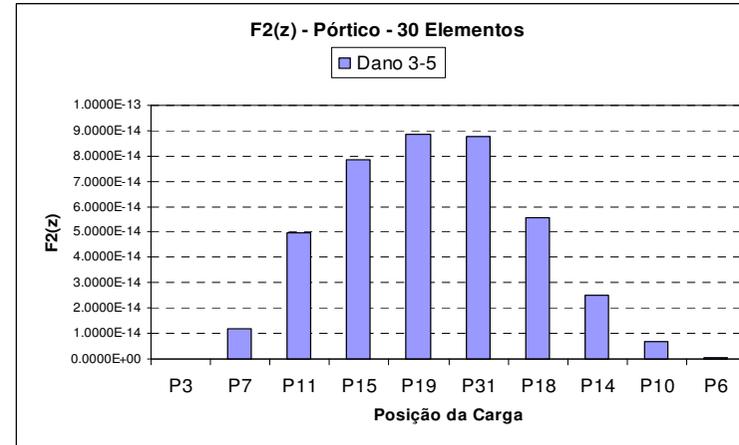
(t)

Figura 4.72(q) a (t) - Representação gráfica da Assinatura  $F1(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

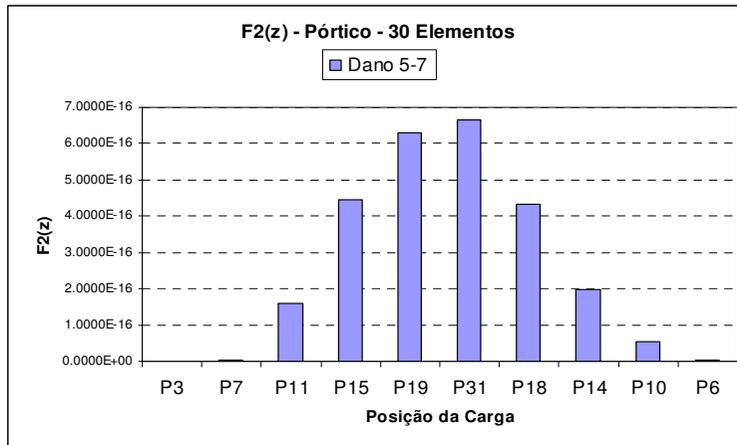
$$F_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})}{\sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2}$$



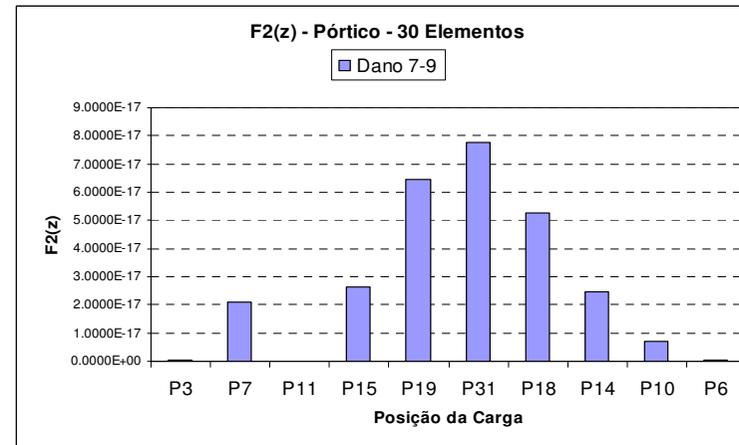
(a)



(b)

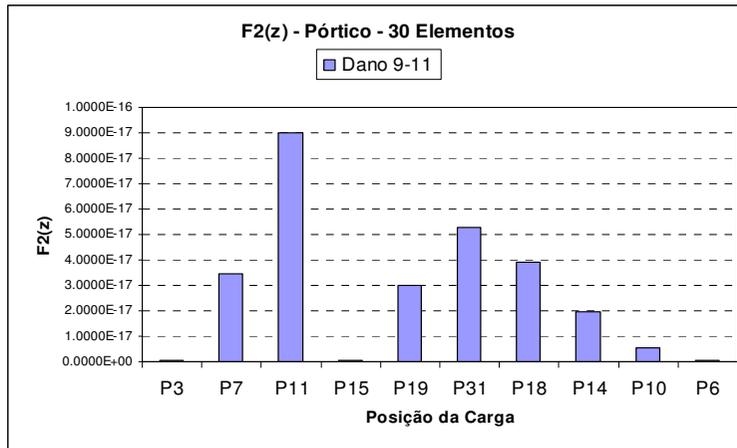


(c)

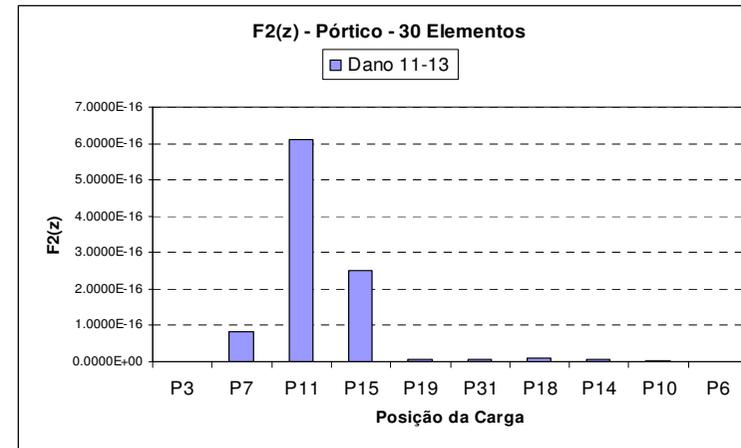


(d)

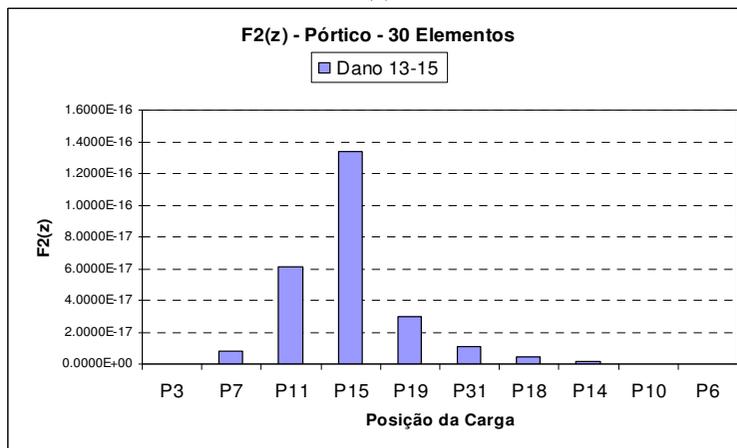
Figura 4.73 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_2(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



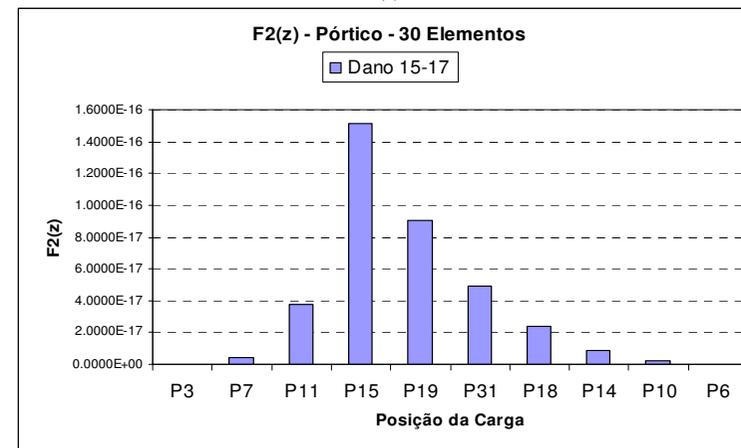
(e)



(f)

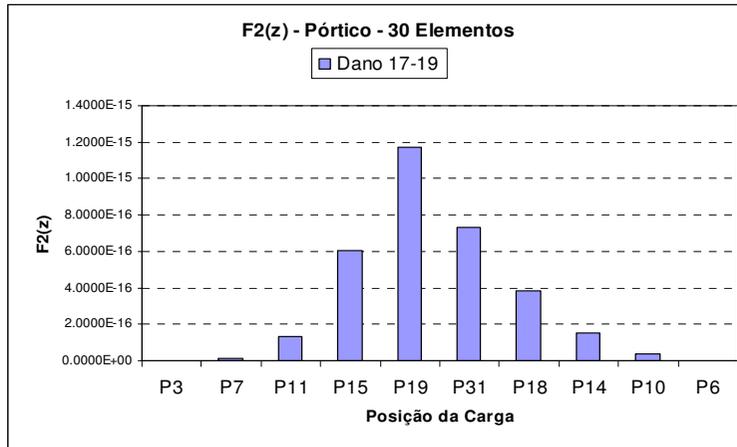


(g)

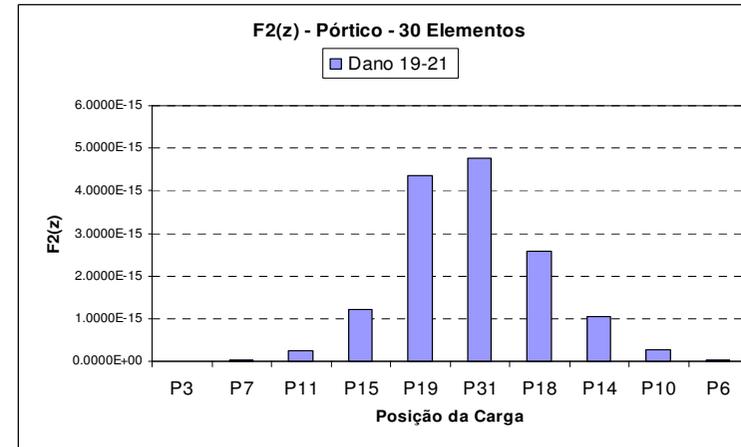


(h)

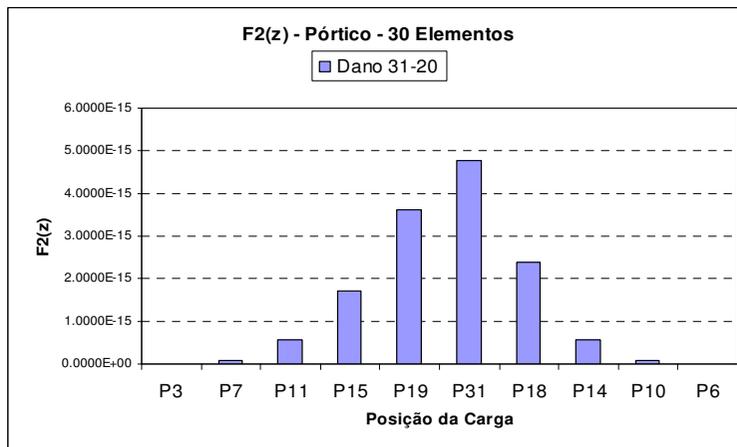
Figura 4.73 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



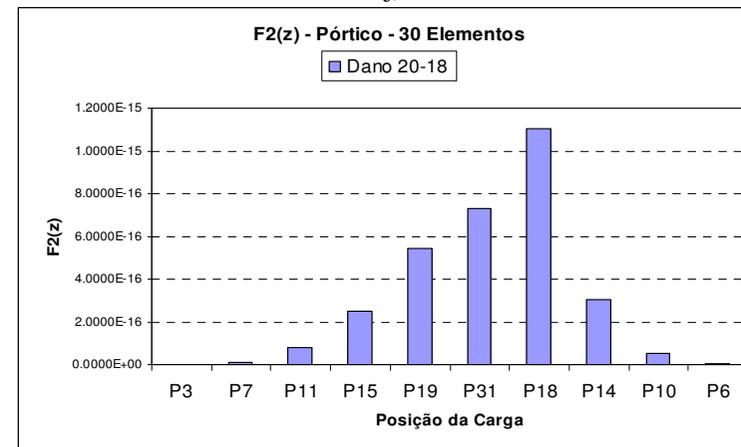
(i)



(j)

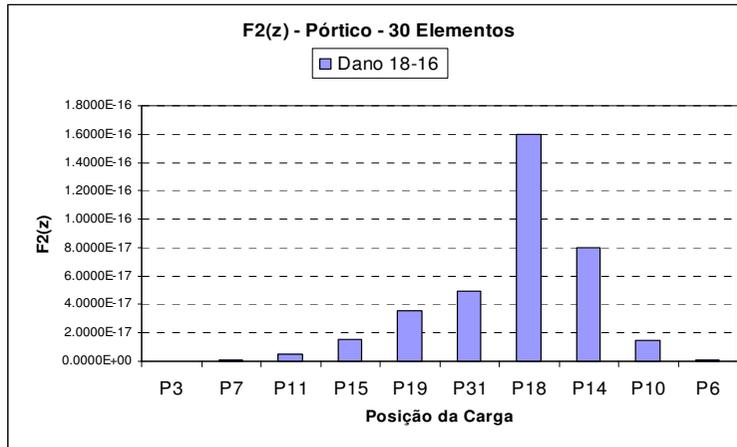


(k)

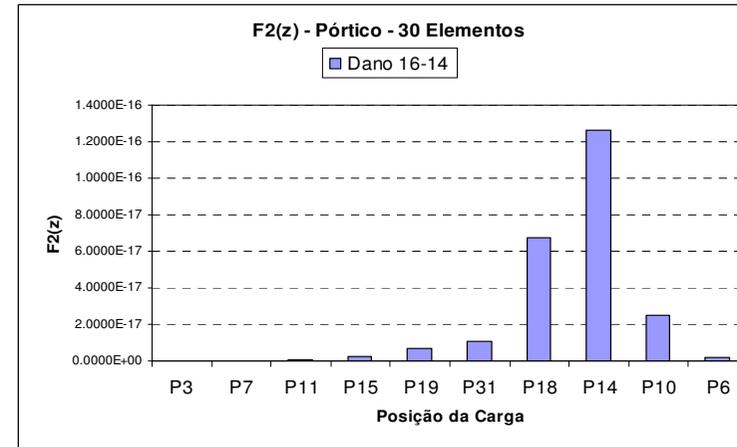


(l)

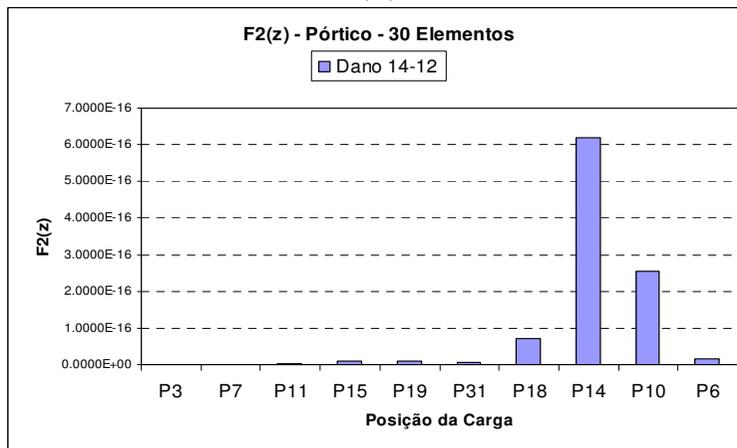
Figura 4.73 (i) a (l) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



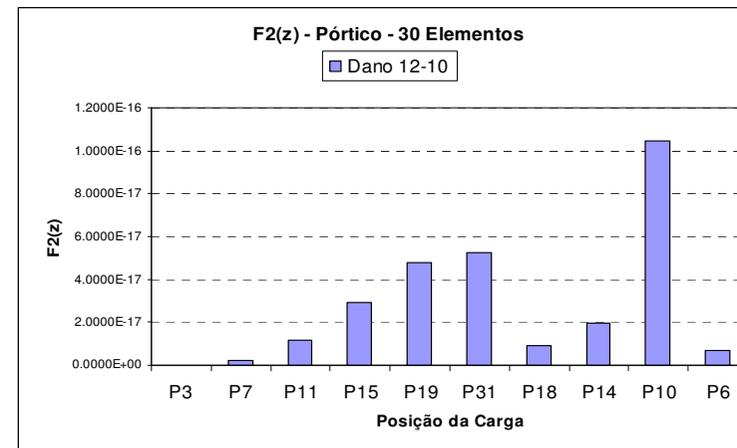
(m)



(n)

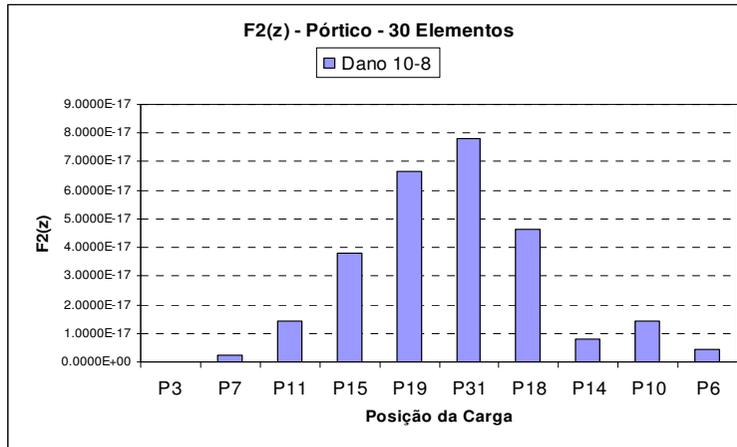


(o)

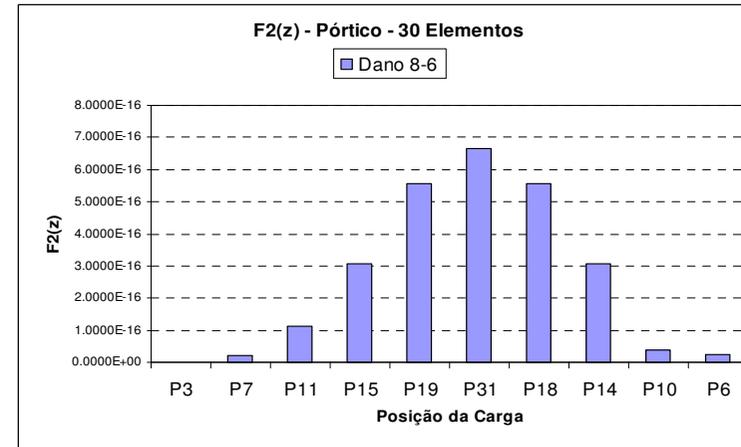


(p)

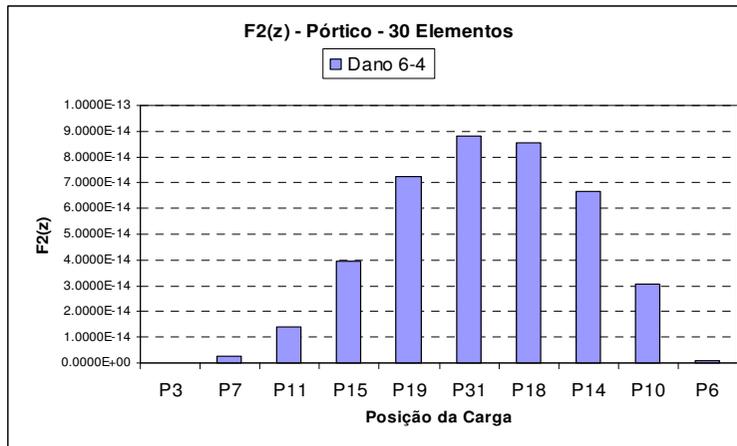
Figura 4.73 (m) a (p) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



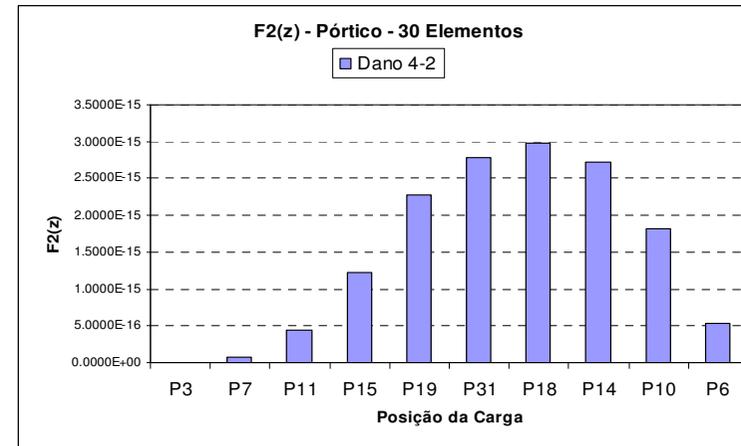
(q)



(r)



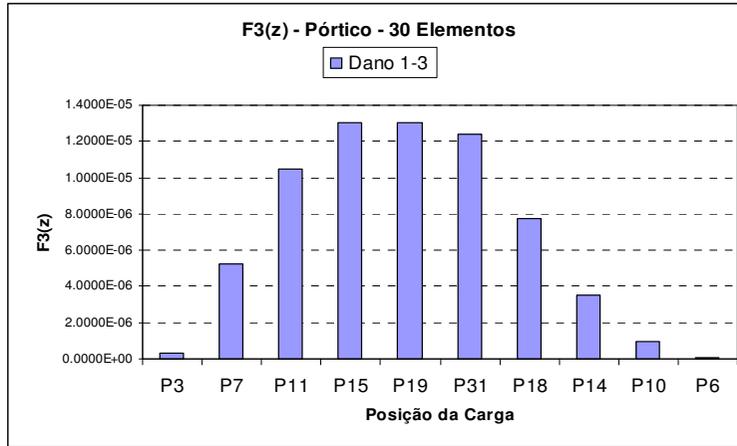
(s)



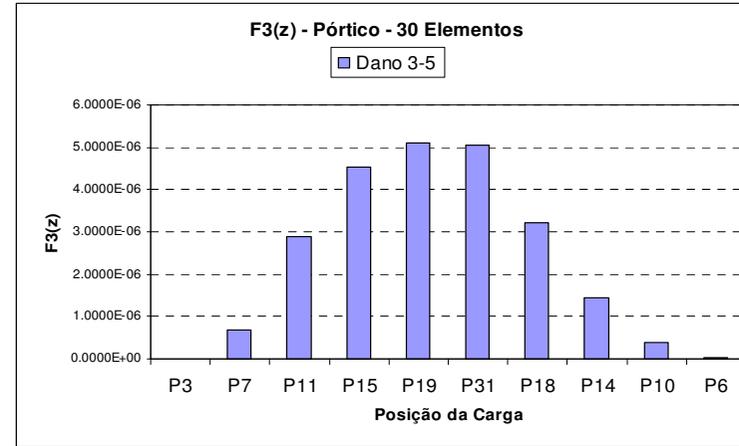
(t)

Figura 4.73 (q) a (t) - Representação gráfica da Assinatura  $F2(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

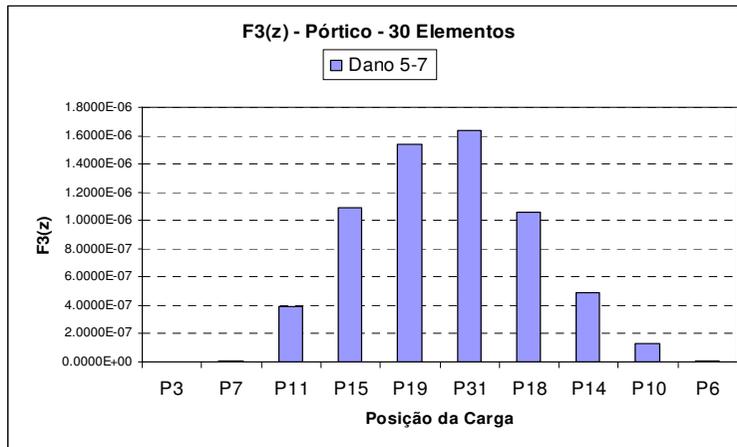
$$F_3(z) = \sum_{j=1}^N (\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2})$$



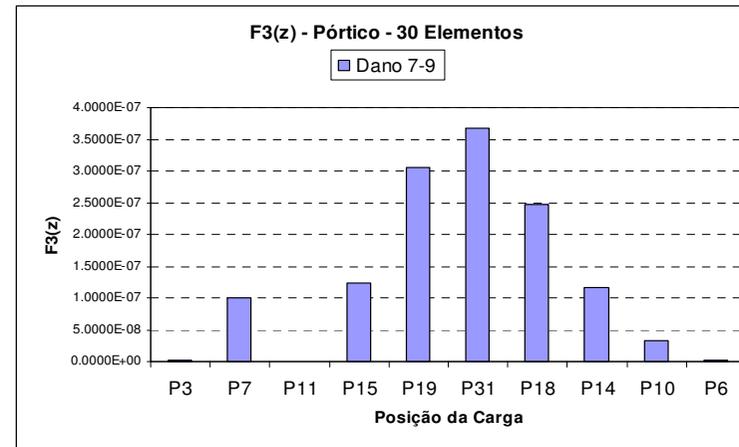
(a)



(b)

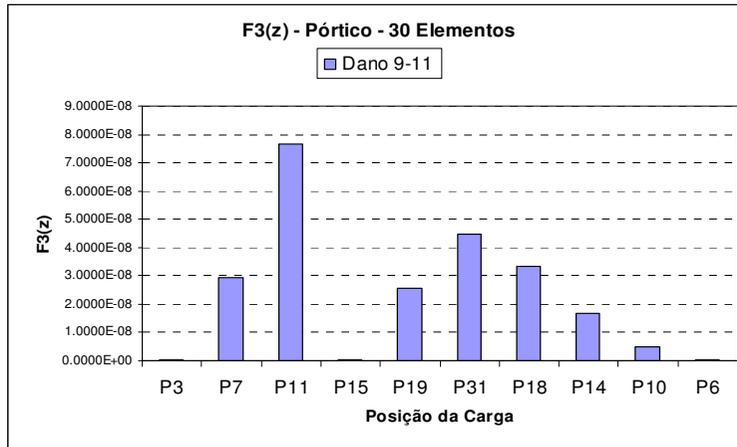


(c)

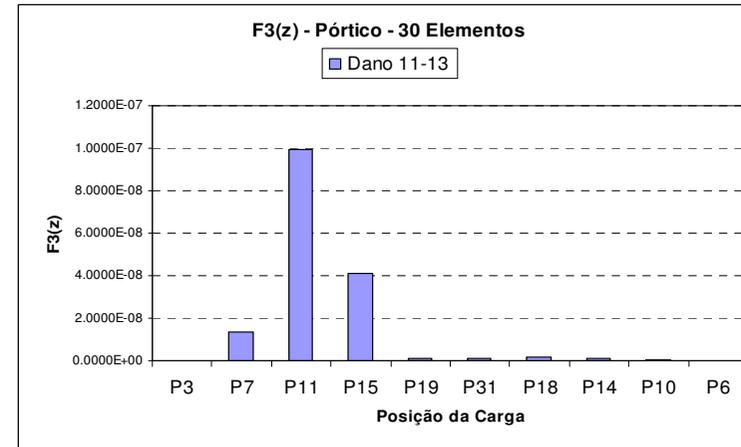


(d)

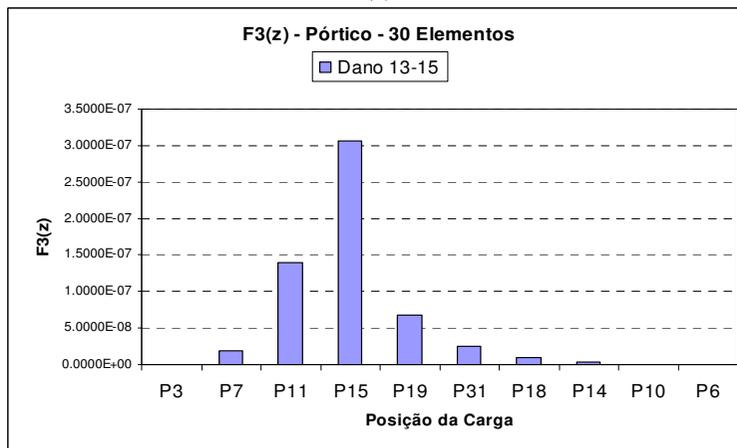
Figura 4.74 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_3(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



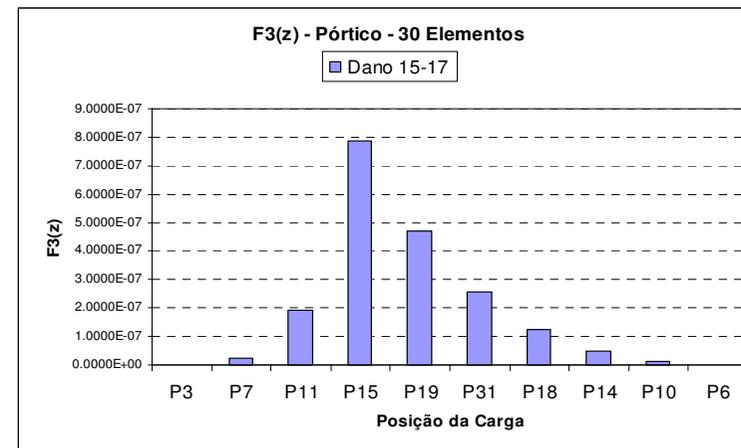
(e)



(f)

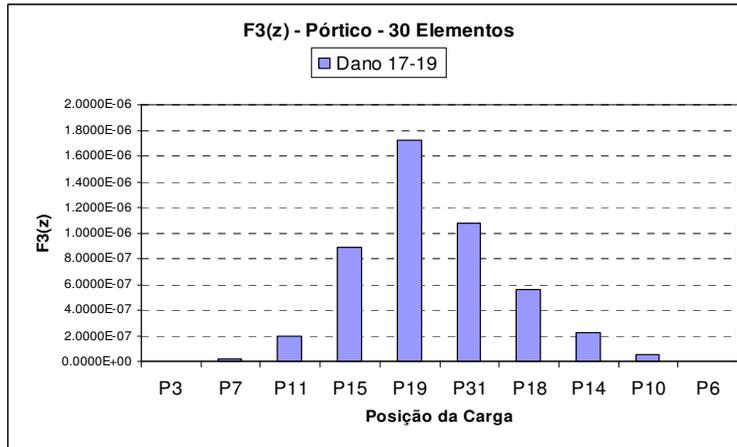


(g)

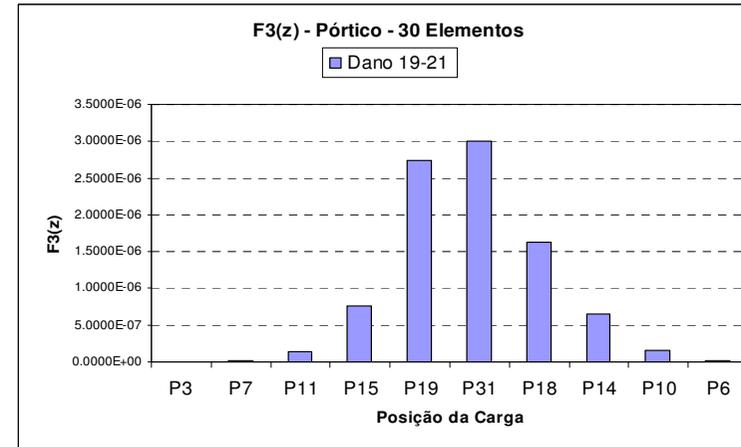


(h)

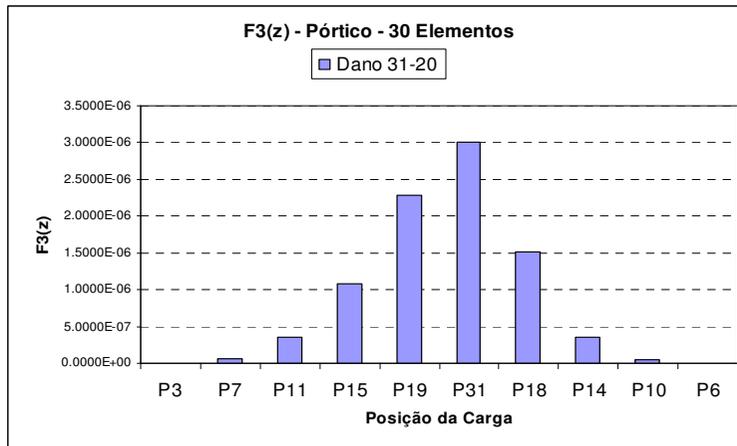
Figura 4.74 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F3(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



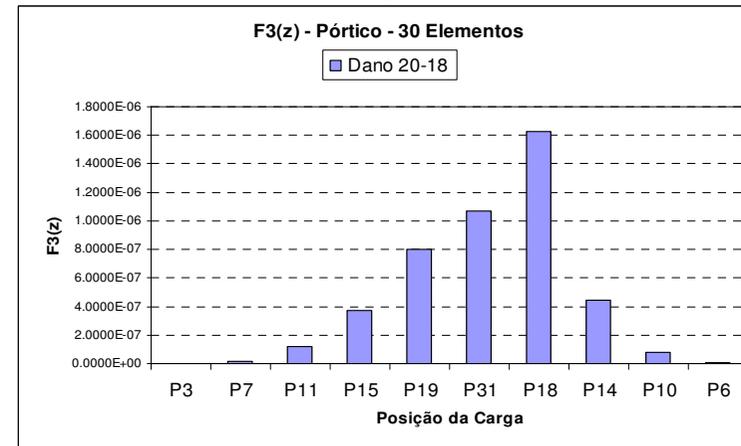
(i)



(j)

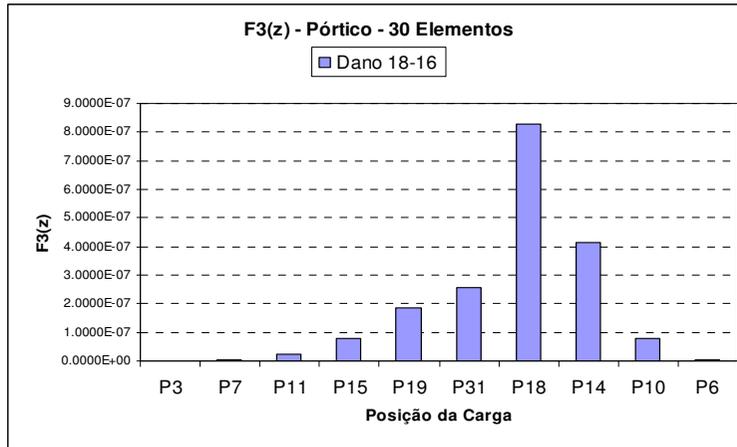


(k)

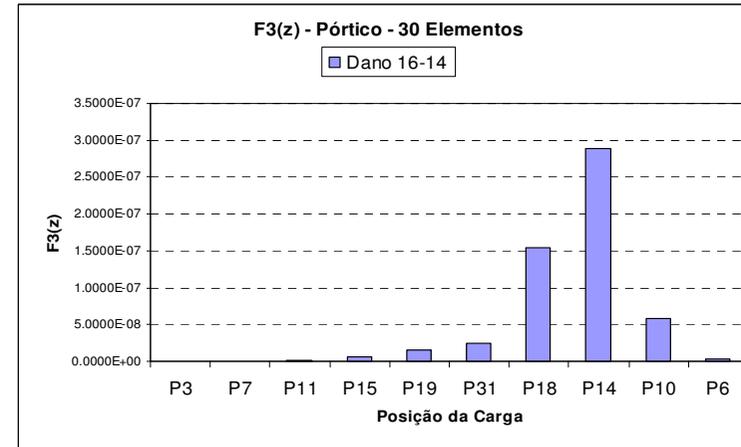


(l)

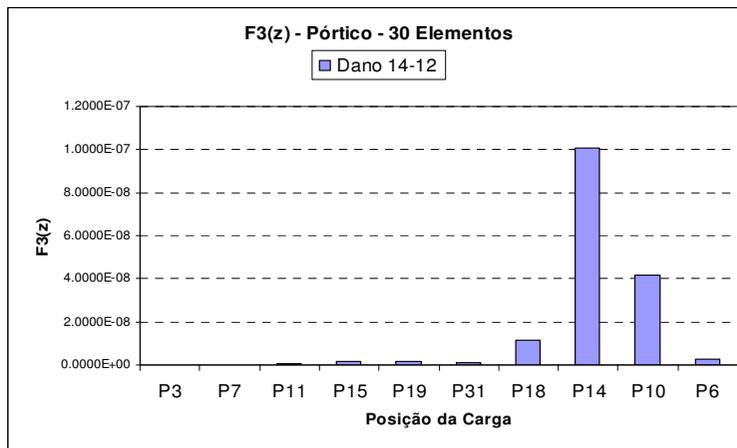
Figura 4.74(i) a (l) - Representação gráfica da Assinatura  $F3(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



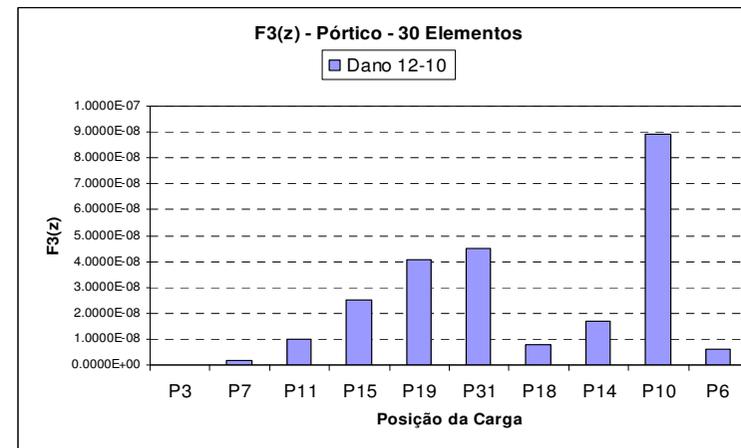
(m)



(n)

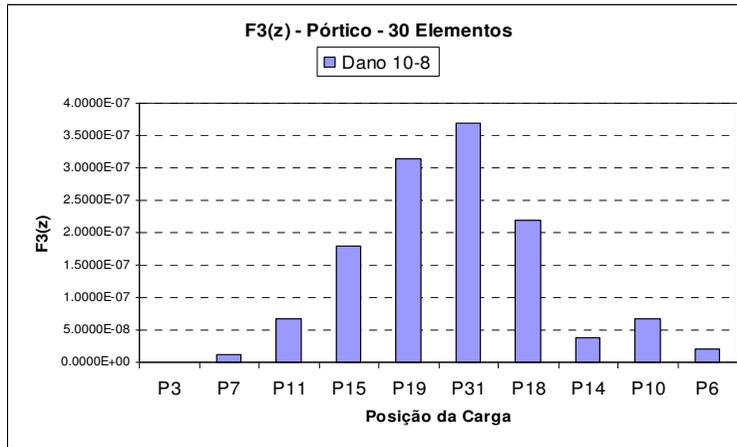


(o)

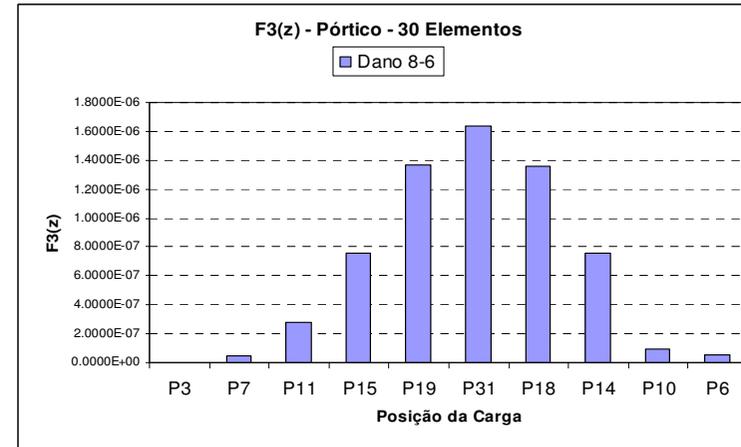


(p)

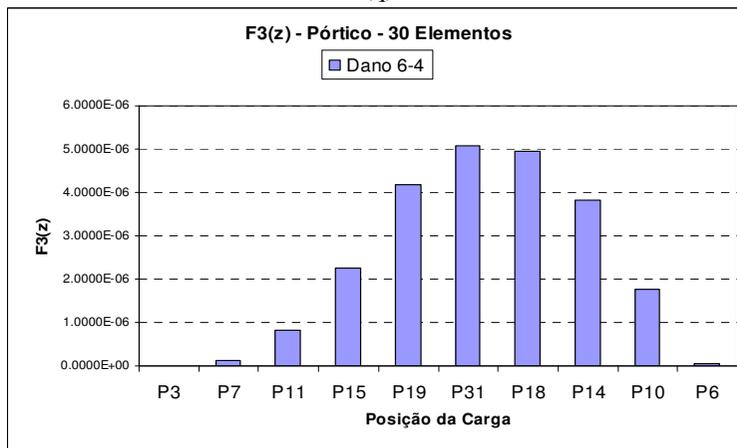
Figura 4.74 (m) a (p) - Representação gráfica da Assinatura  $F3(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



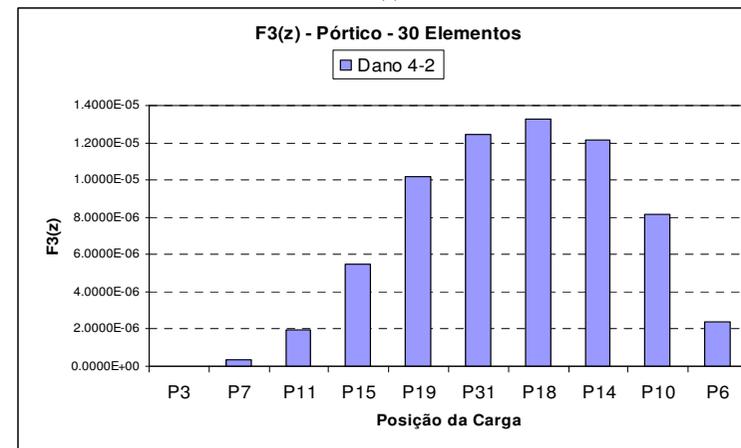
(q)



(r)



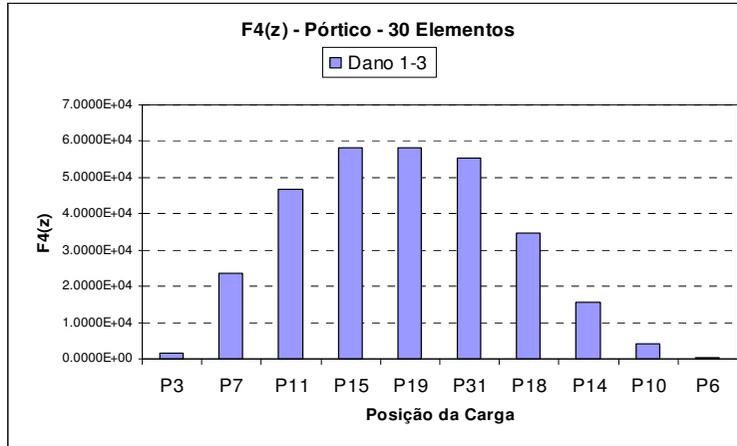
(s)



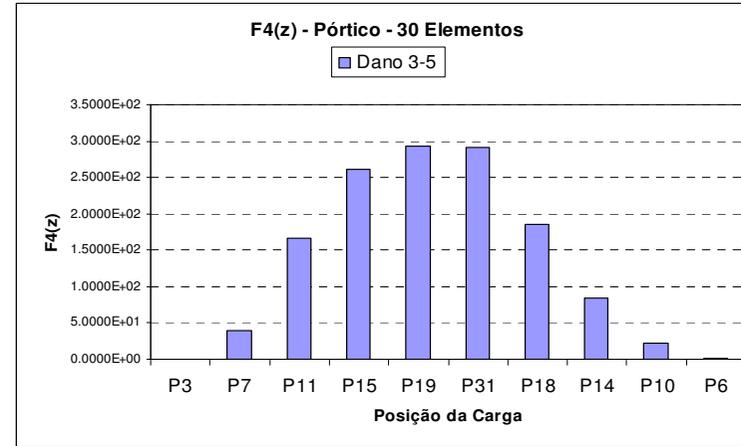
(t)

Figura 4.74 (q) a (t) - Representação gráfica da Assinatura  $F3(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

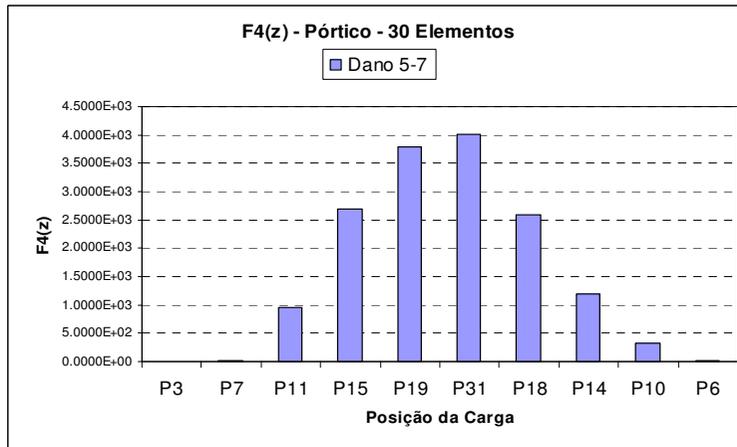
$$F_4(z) = \sum_{j=1}^N \left( \Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} \right) \cdot \sum_{k=1}^6 \Delta \omega_k^2$$



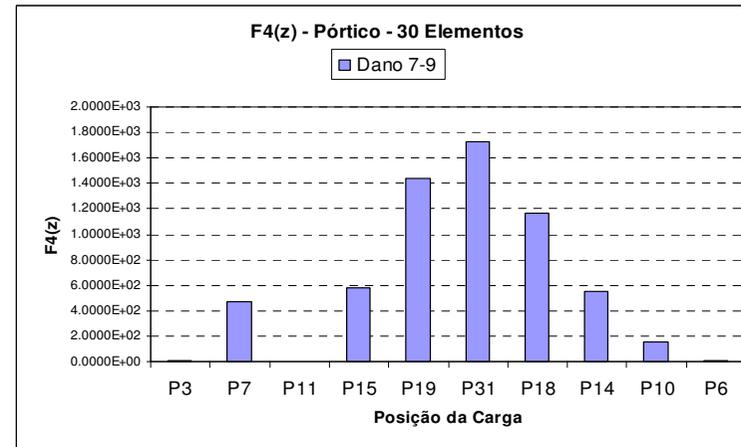
(a)



(b)

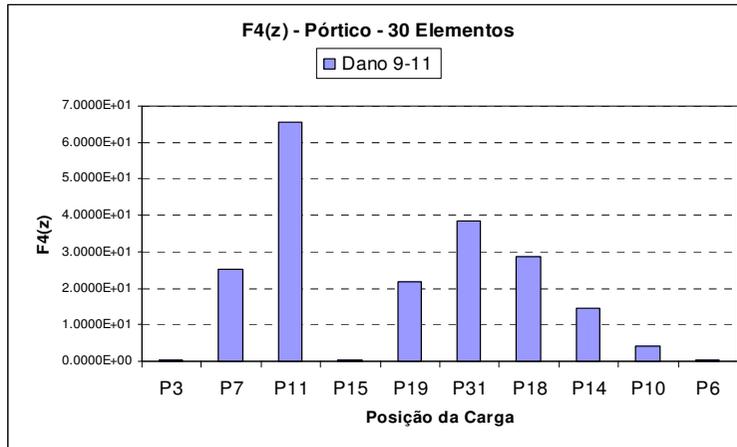


(c)

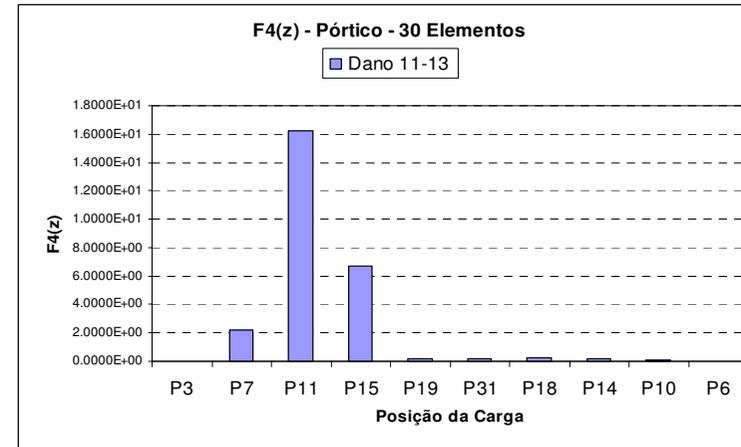


(d)

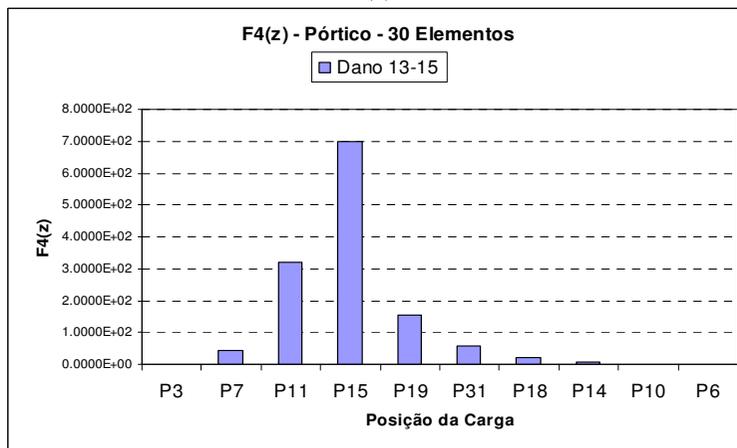
Figura 4.75 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



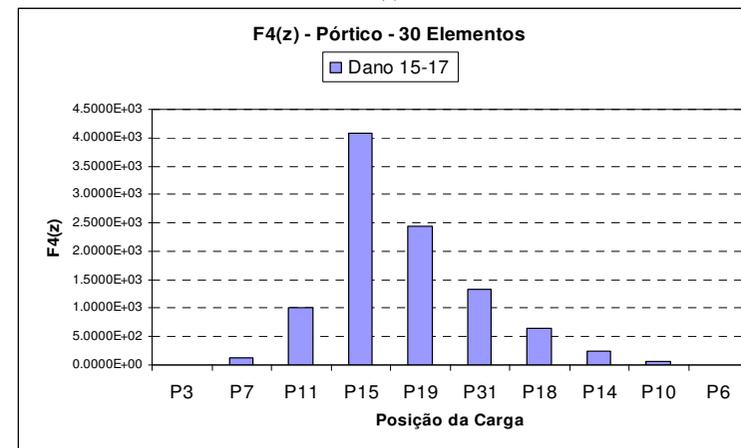
(e)



(f)

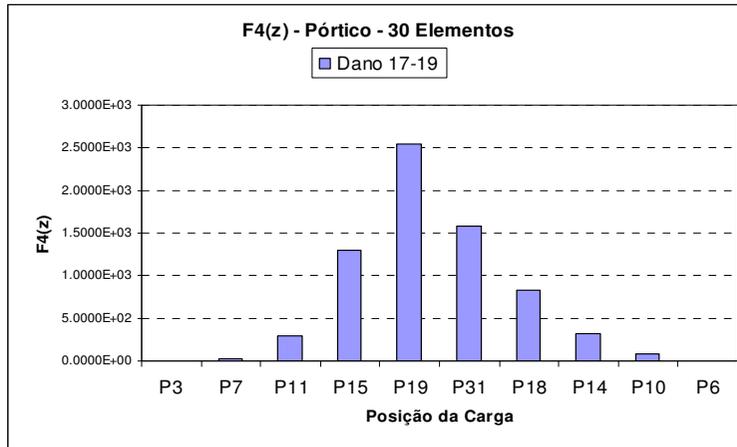


(g)

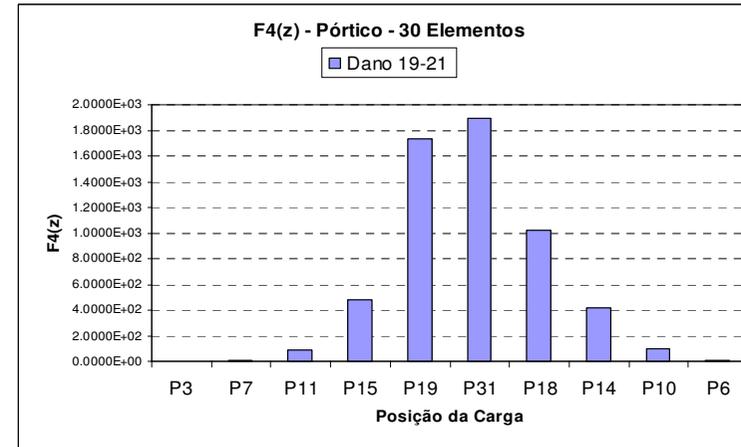


(h)

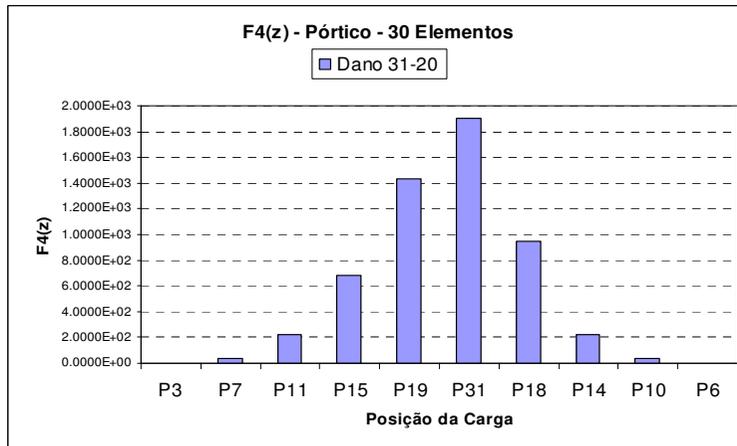
Figura 4.75 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



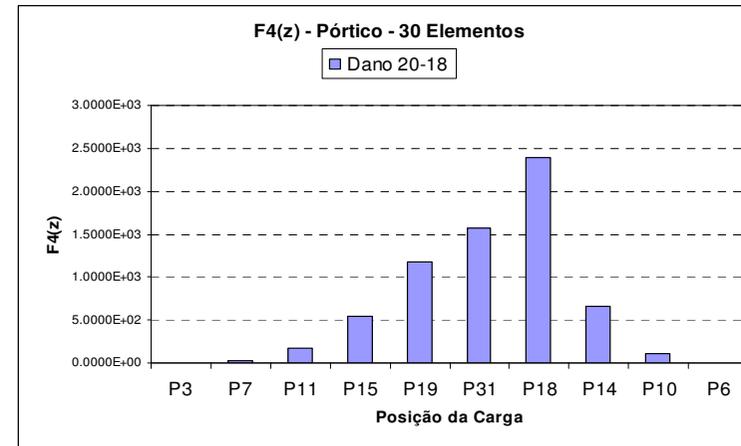
(i)



(j)

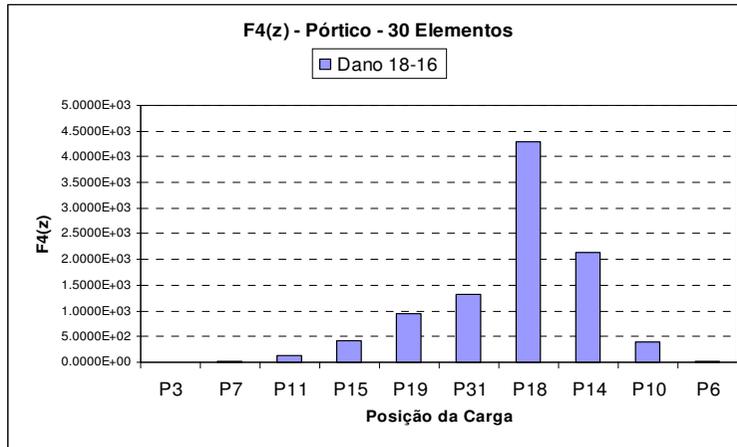


(k)

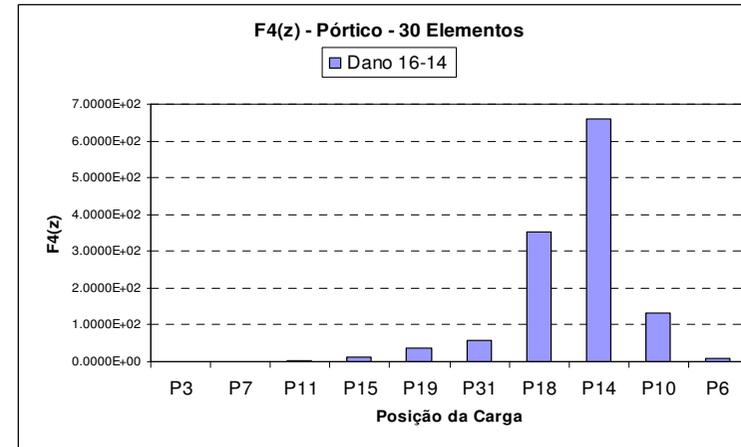


(l)

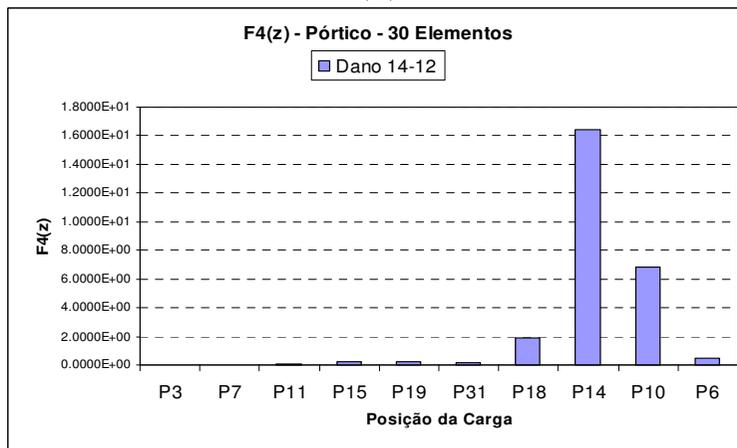
Figura 4.75(i) a (l) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



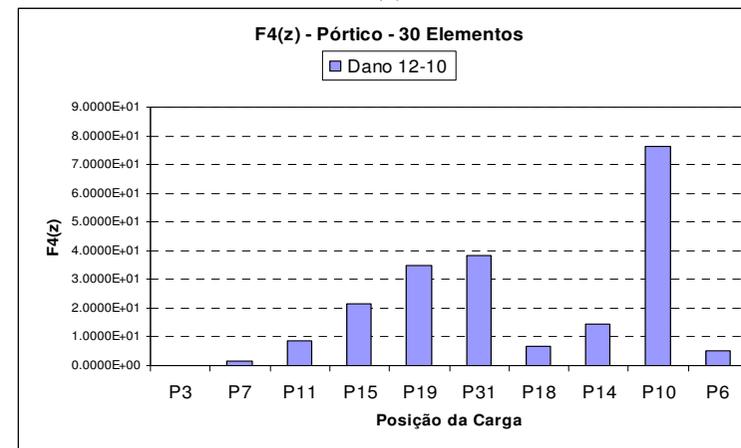
(m)



(n)

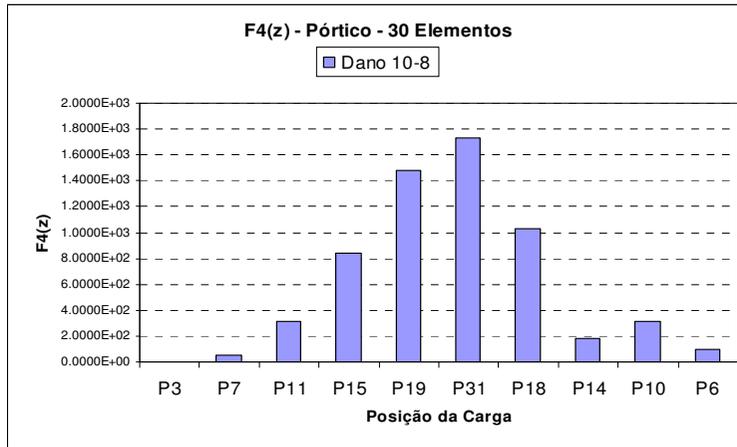


(o)

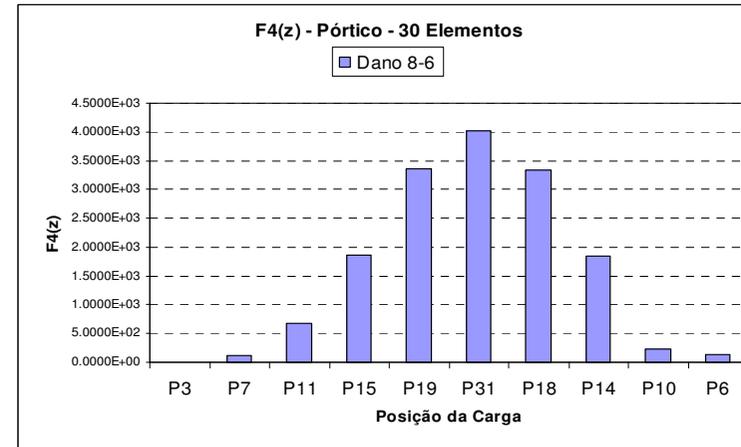


(p)

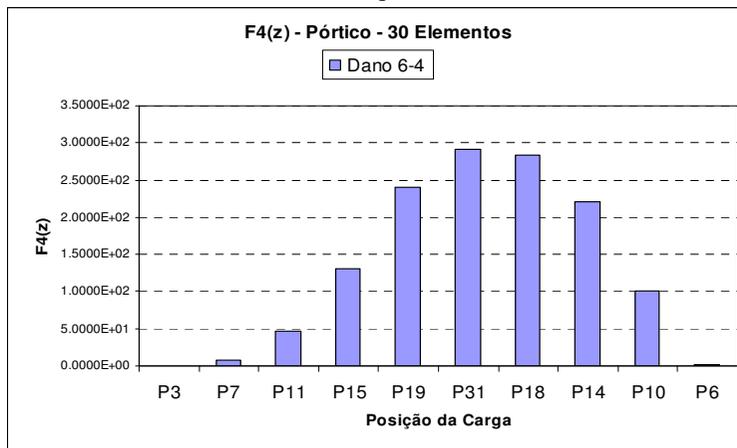
Figura 4.75 (m) a (p) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



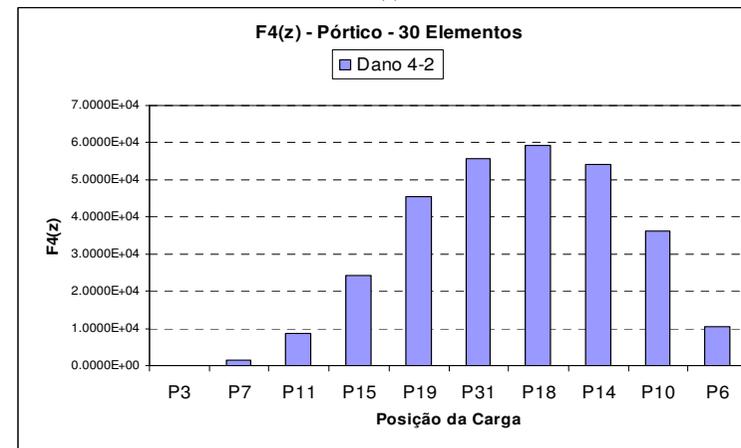
(q)



(r)



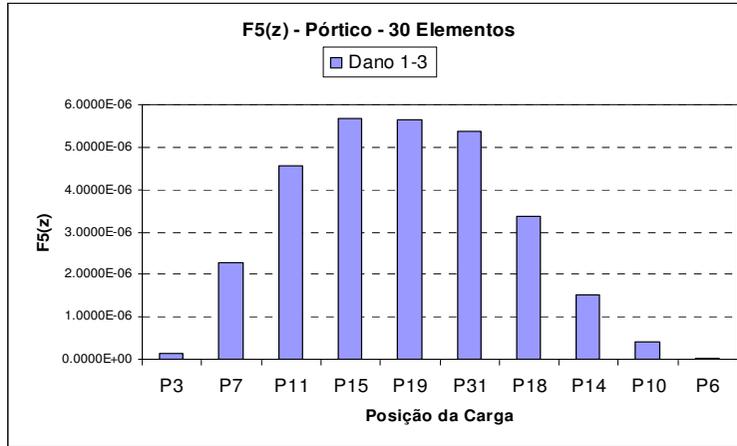
(s)



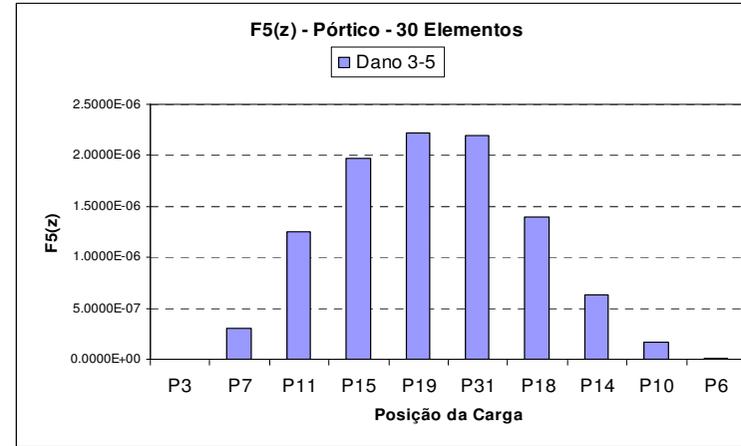
(t)

Figura 4.75 (q) a (t) - Representação gráfica da Assinatura  $F4(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

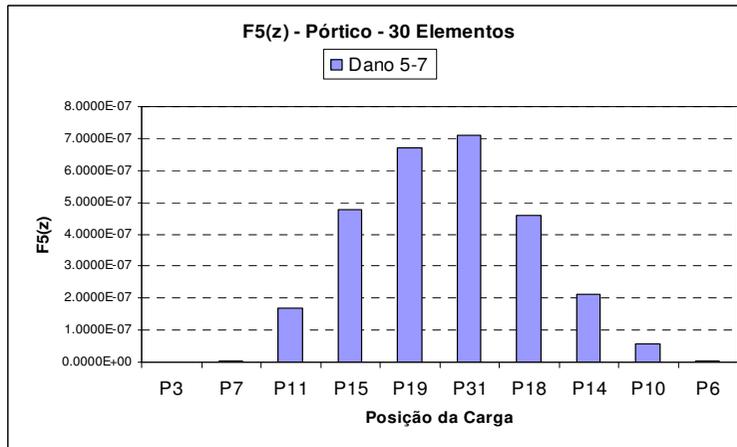
$$F_5(z) = \sum_{j=1}^N \log(\Delta u_x^{j2} + \Delta u_y^{j2} + 1)$$



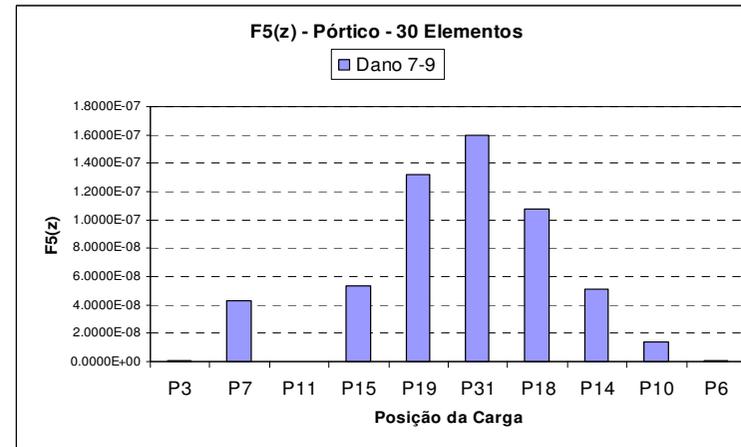
(a)



(b)

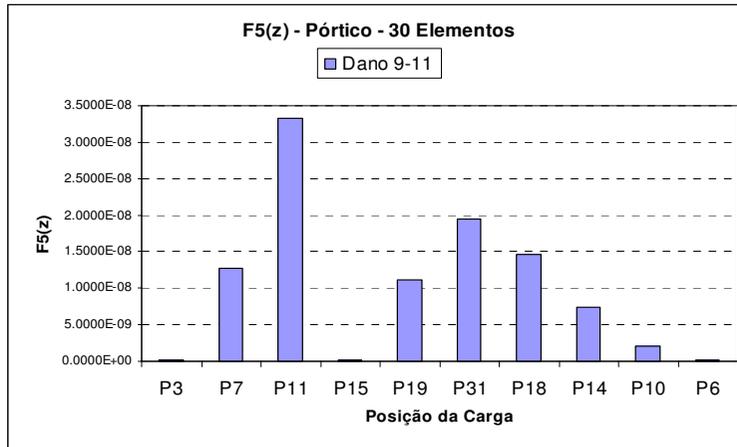


(c)

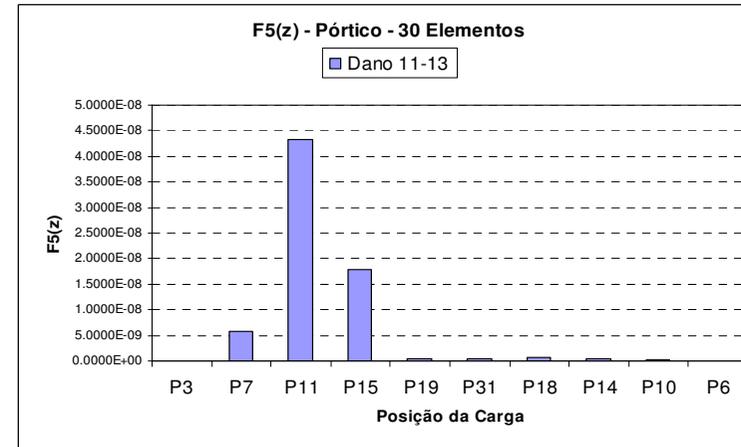


(d)

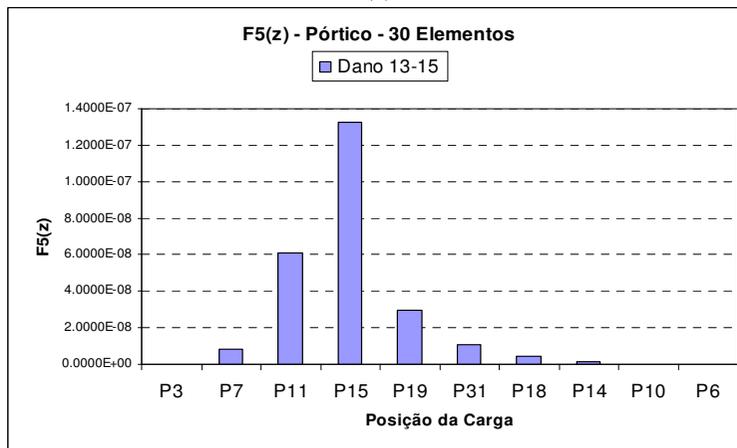
Figura 4.76 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_5(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



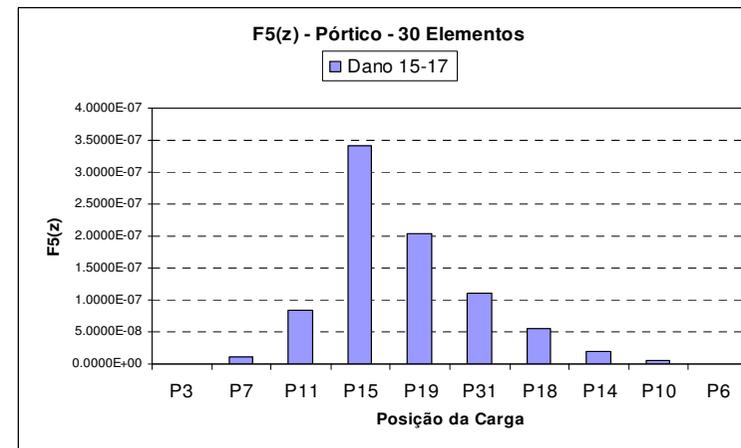
(e)



(f)

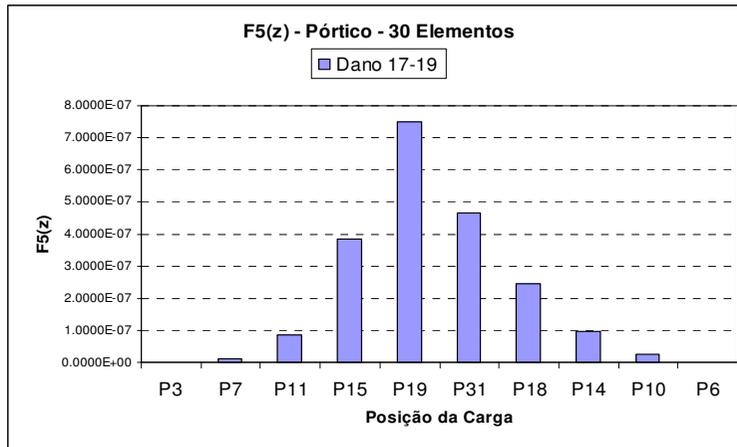


(g)

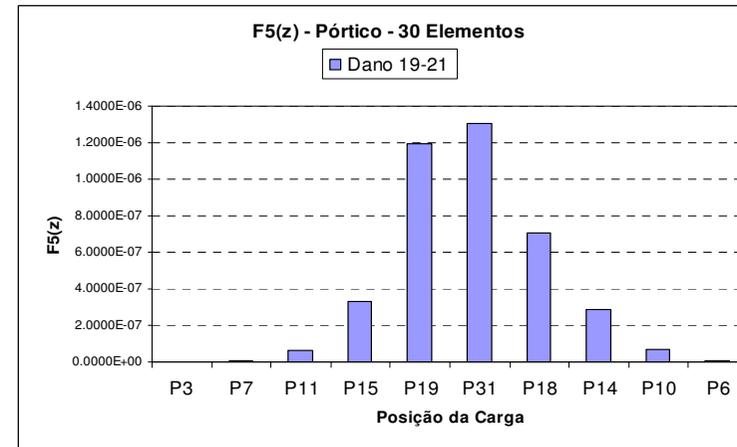


(h)

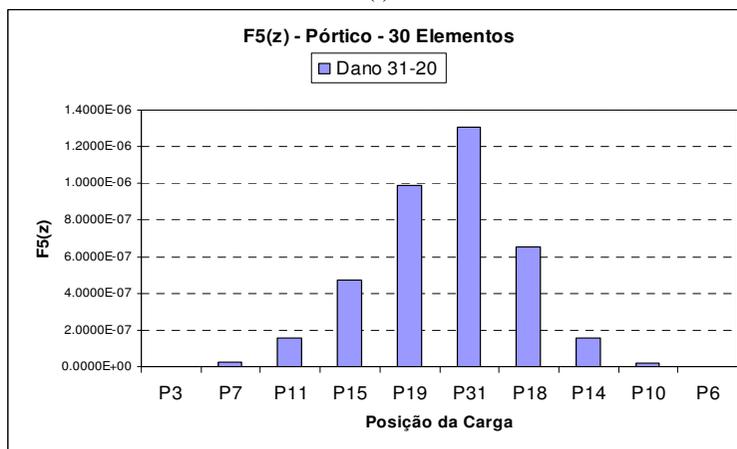
Figura 4.76 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



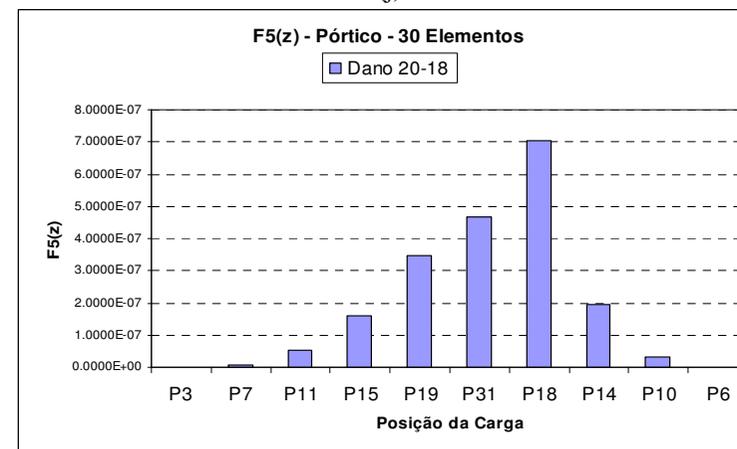
(i)



(j)

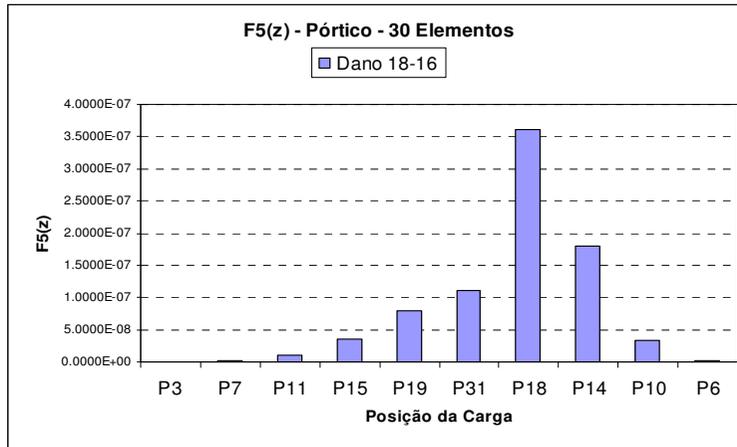


(k)

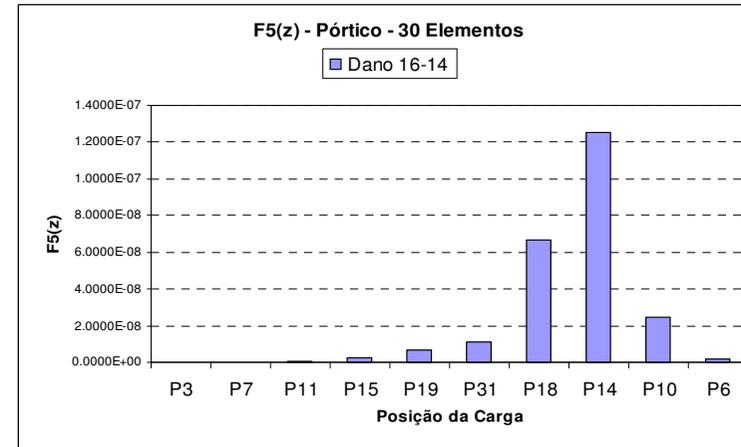


(l)

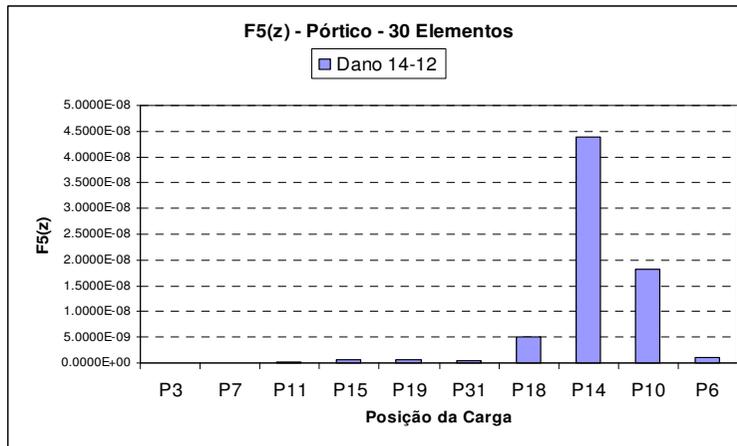
Figura 4.76 (i) a (l) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



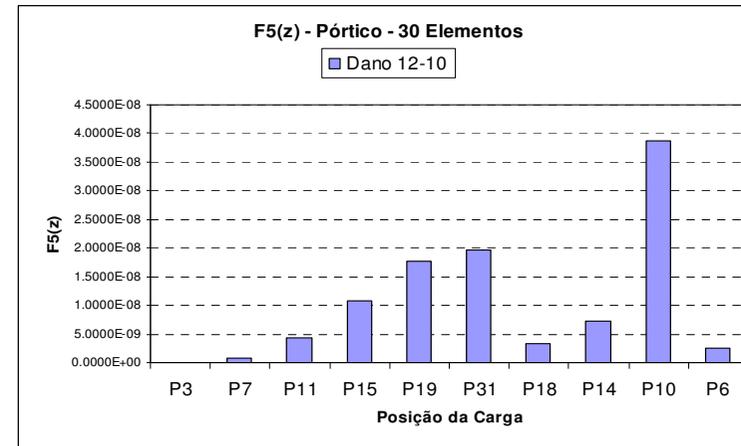
(m)



(n)

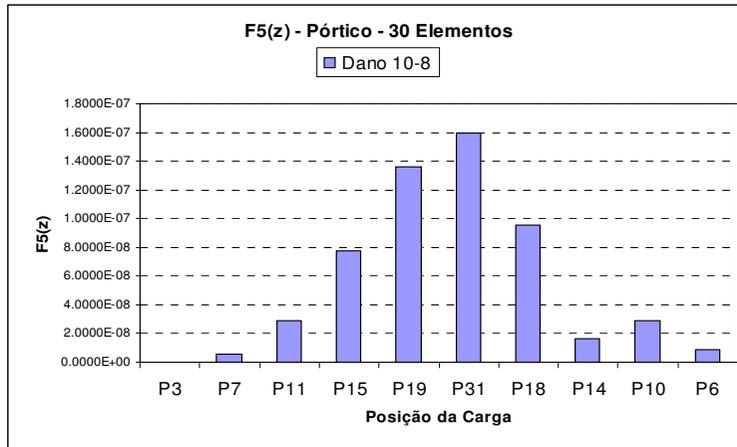


(o)

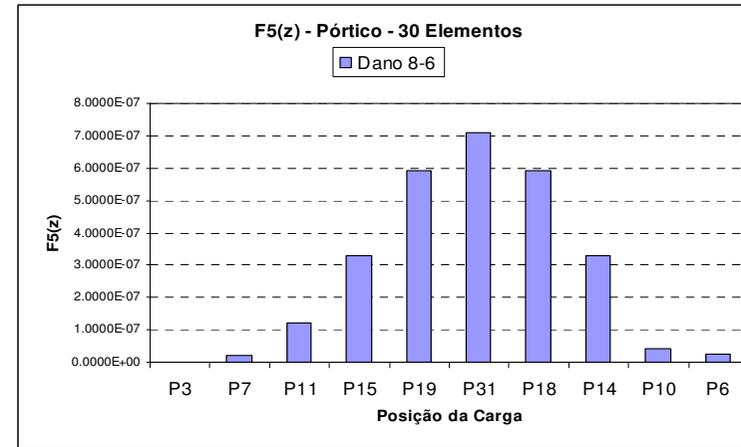


(p)

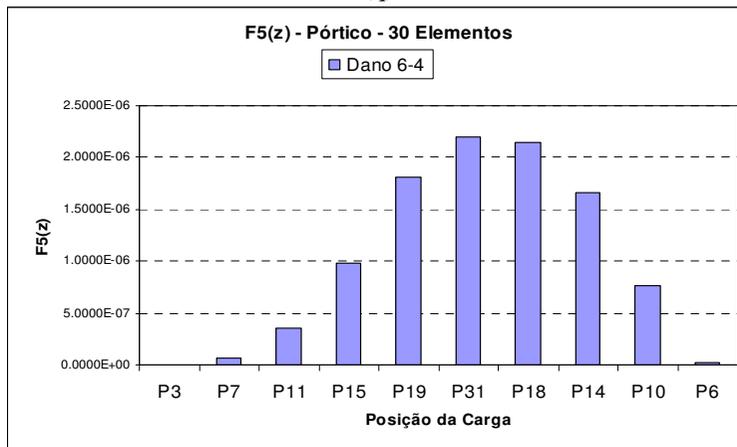
Figura 4.76 (m) a (p) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



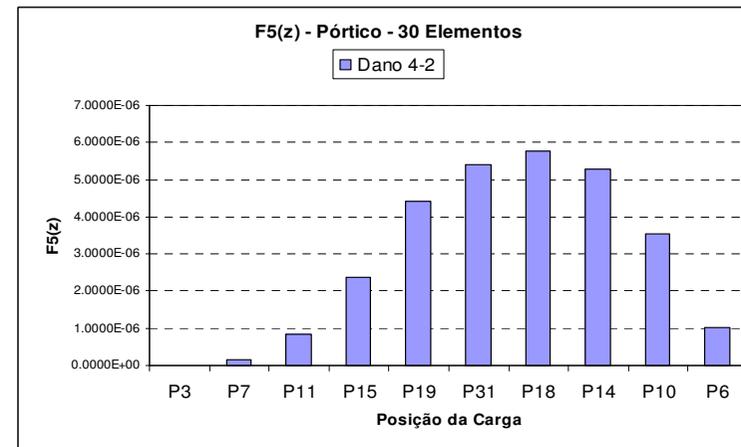
(q)



(r)



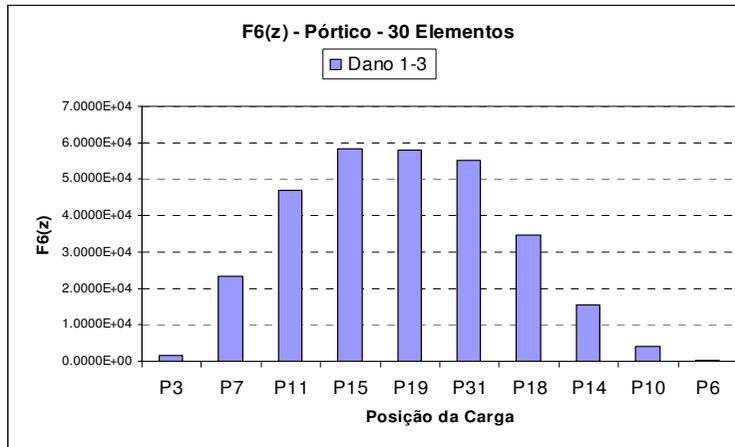
(s)



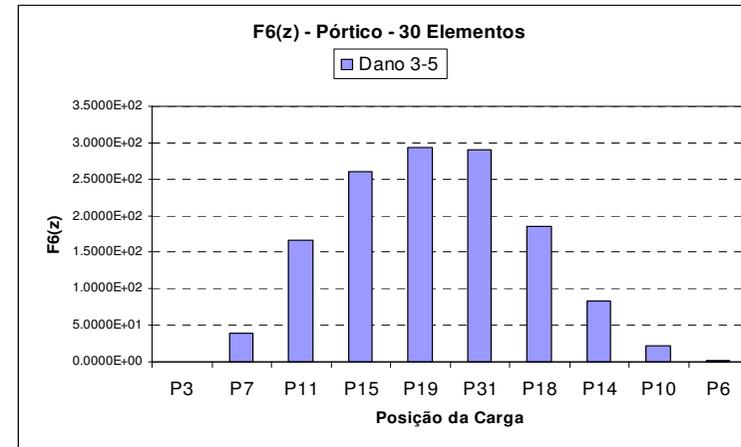
(t)

Figura 4.76 (p) a (t) - Representação gráfica da Assinatura  $F5(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.

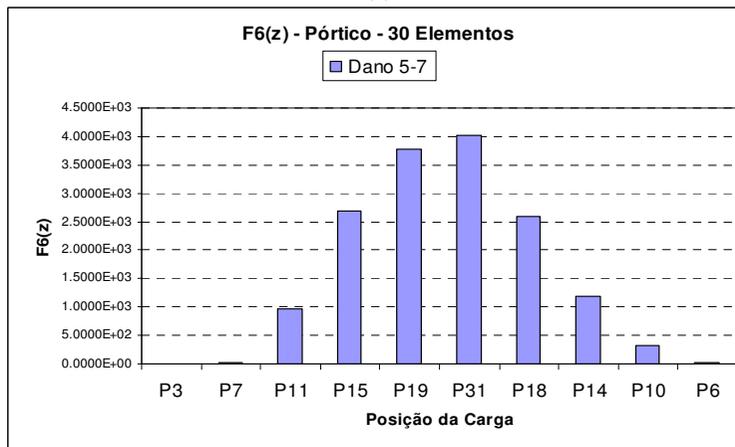
$$F_6(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \Delta u_j^2 \cdot \Delta \omega_k^2$$



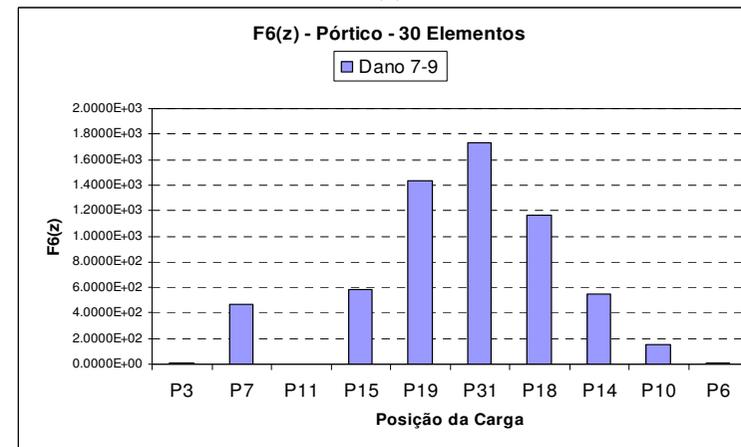
(a)



(b)

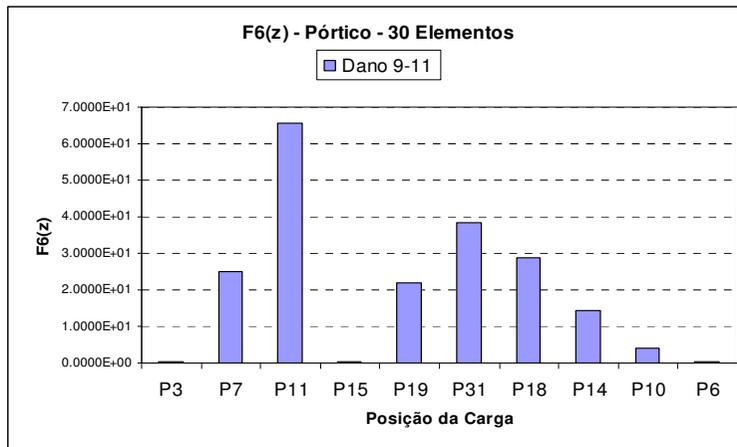


(c)

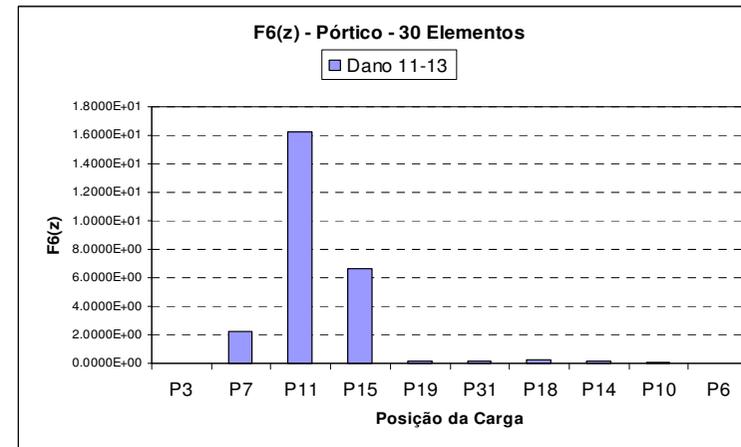


(d)

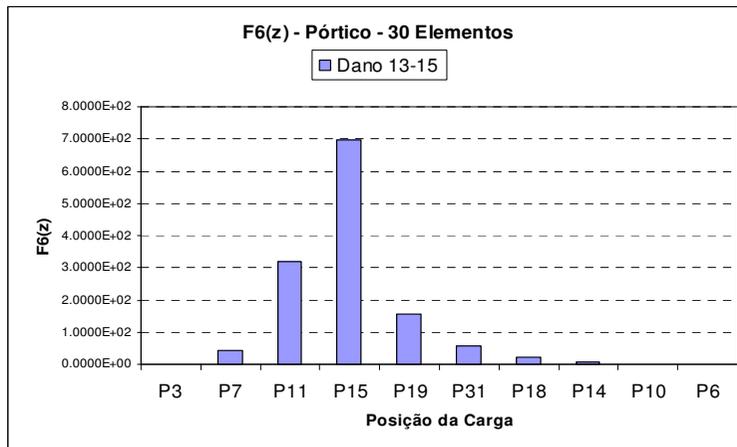
Figura 4.77 (a) a (d) - Representação gráfica da Assinatura  $F_6(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



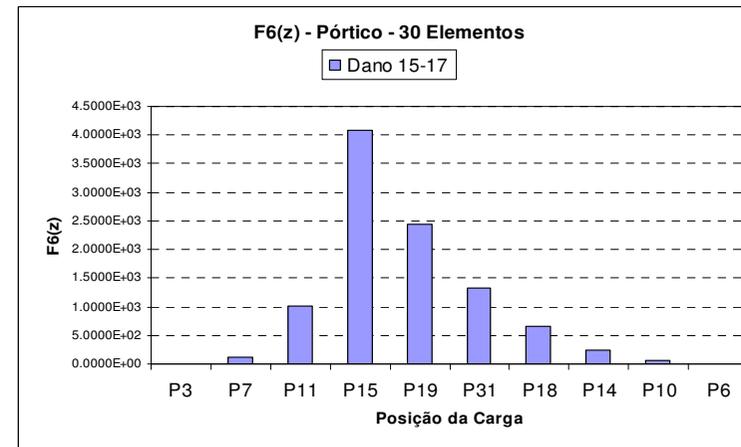
(e)



(f)

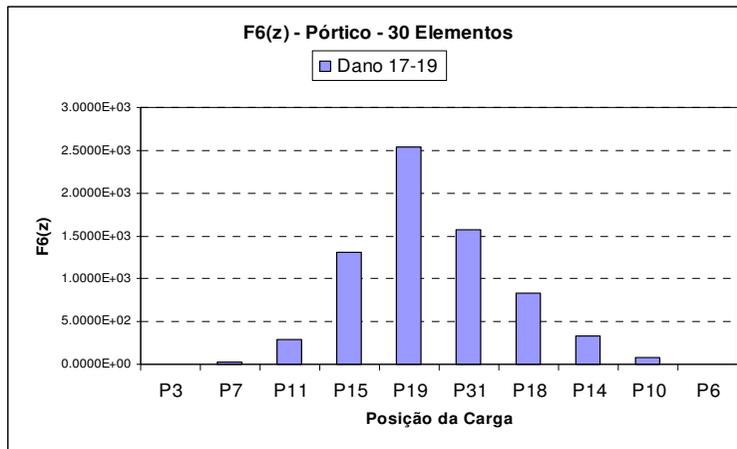


(g)

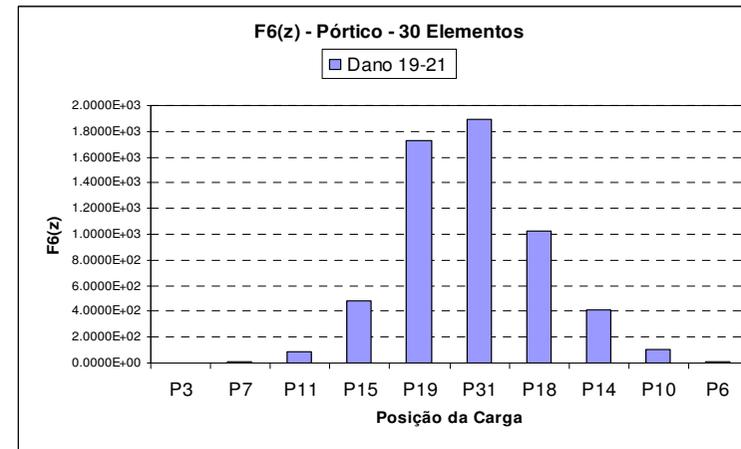


(h)

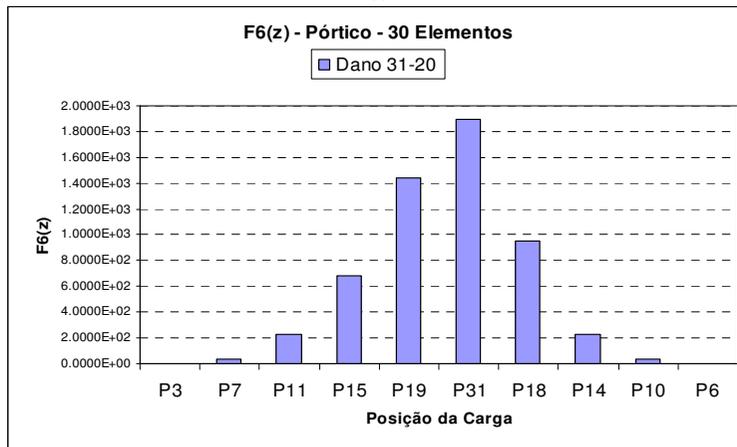
Figura 4.77 (e) a (h) - Representação gráfica da Assinatura  $F6(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



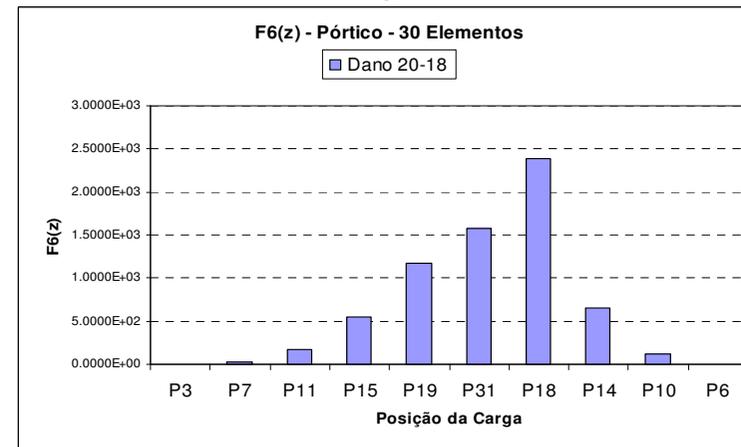
(i)



(j)

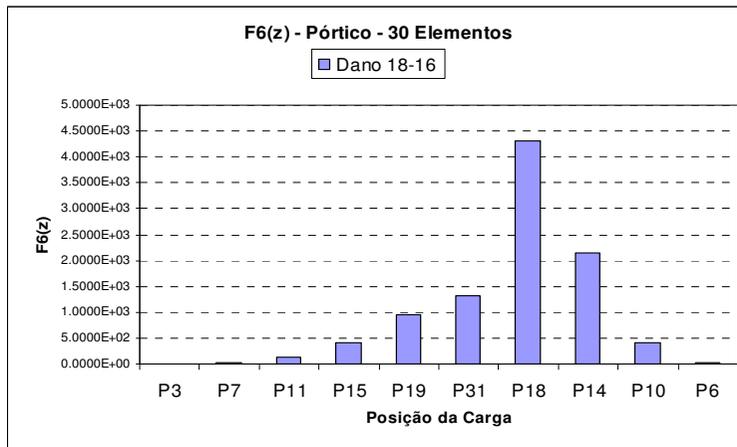


(k)

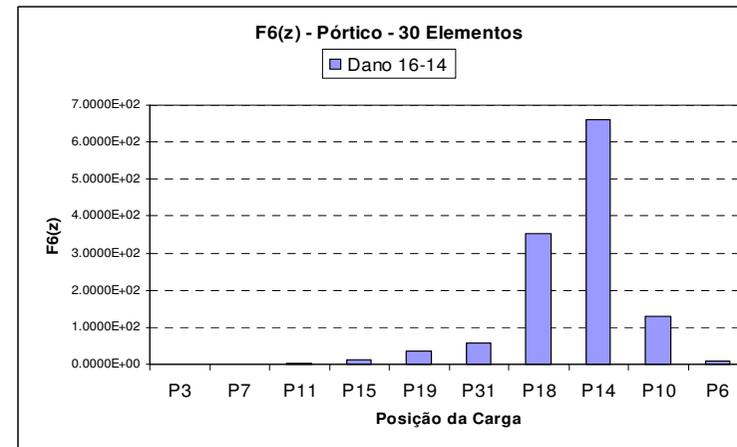


(l)

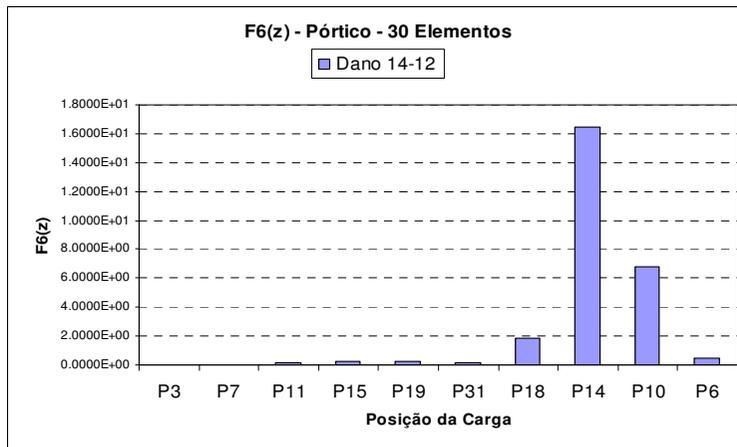
Figura 4.77 (i) a (l) - Representação gráfica da Assinatura  $F6(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



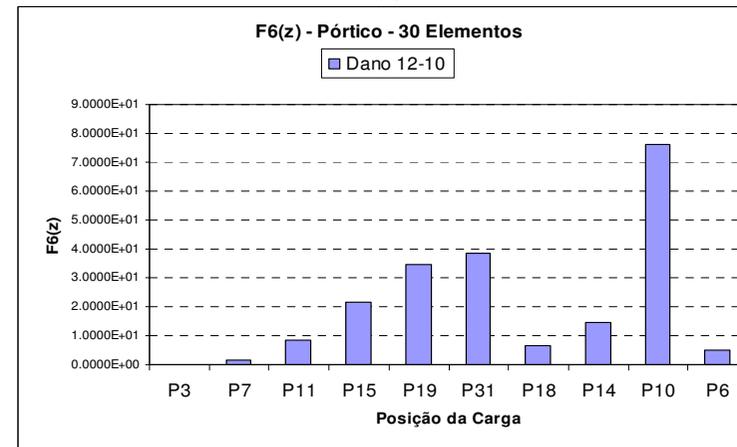
(m)



(n)

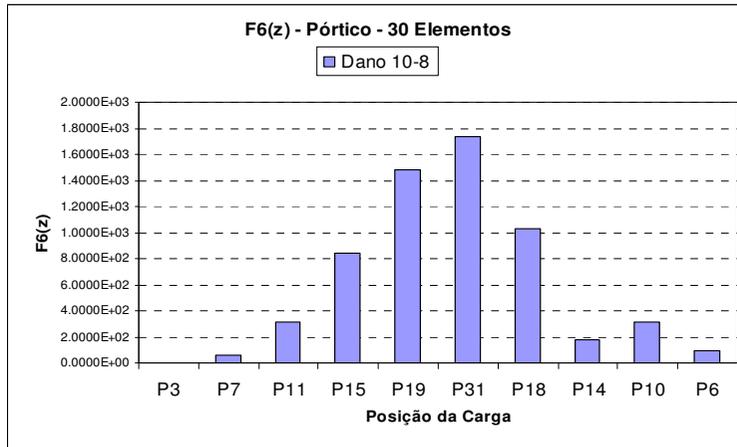


(o)

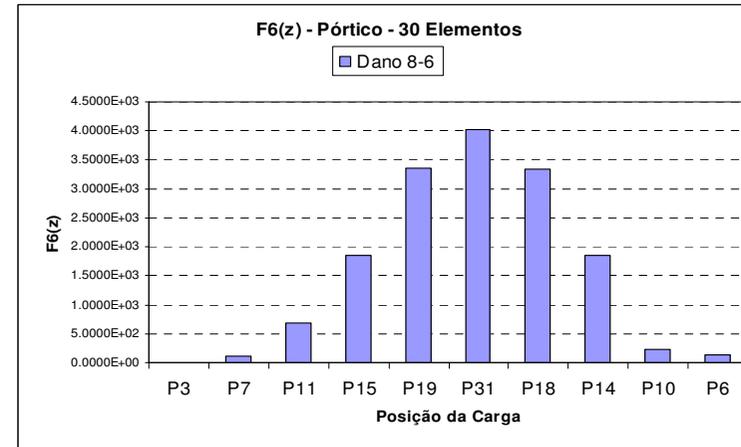


(p)

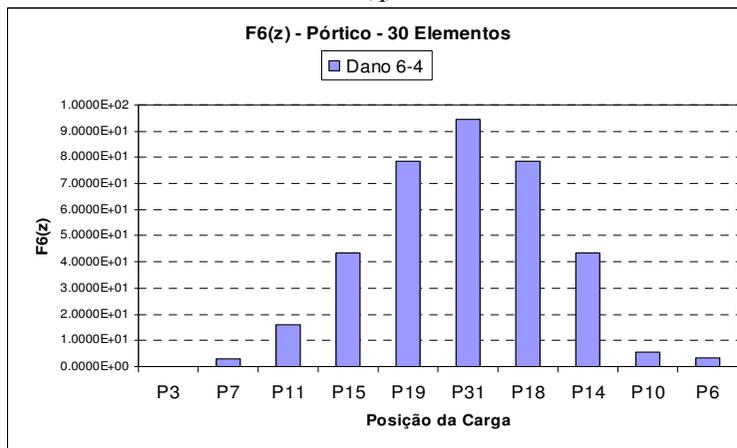
Figura 4.77 (m) a (p) - Representação gráfica da Assinatura  $F6(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



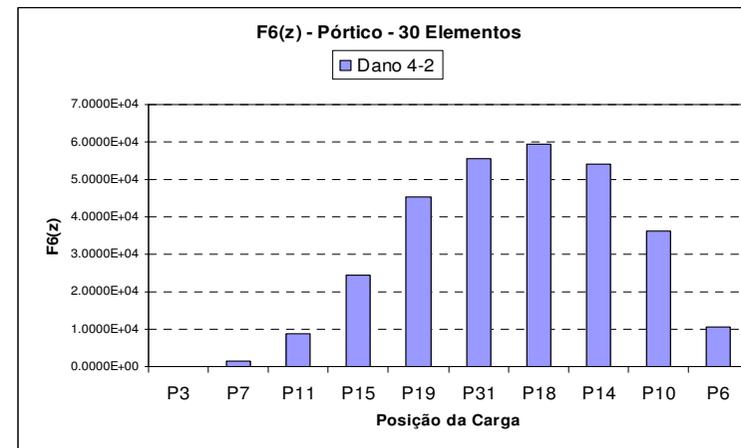
(q)



(r)

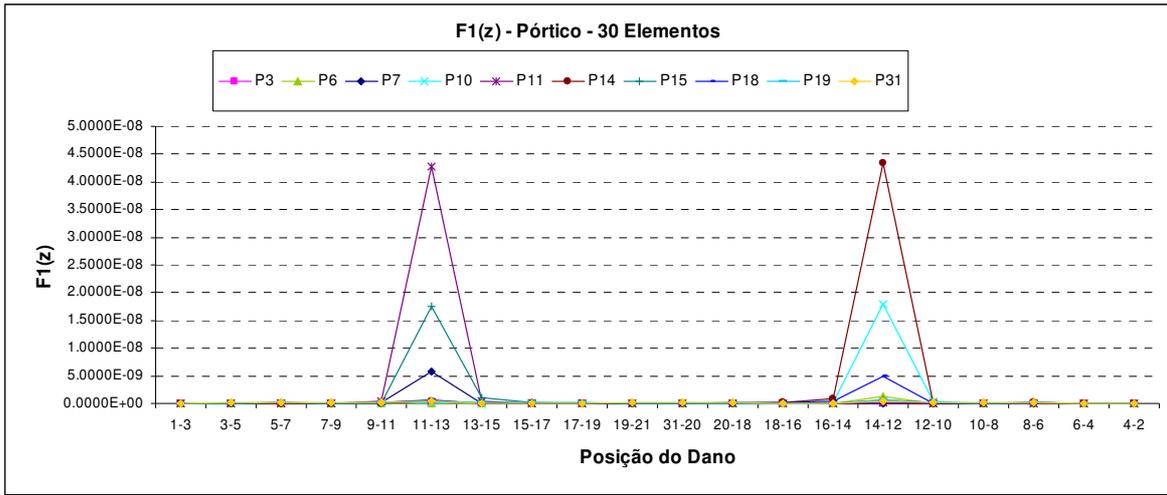


(s)

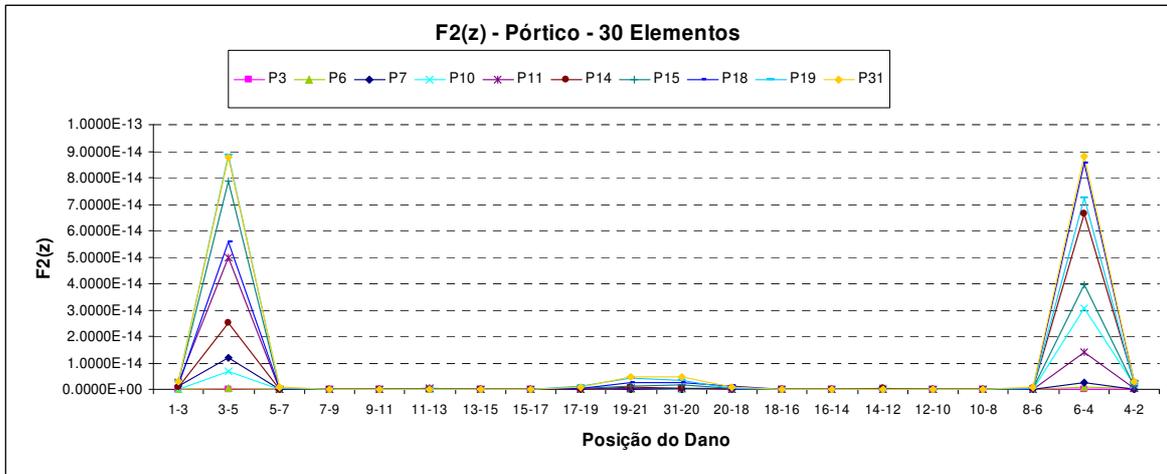


(t)

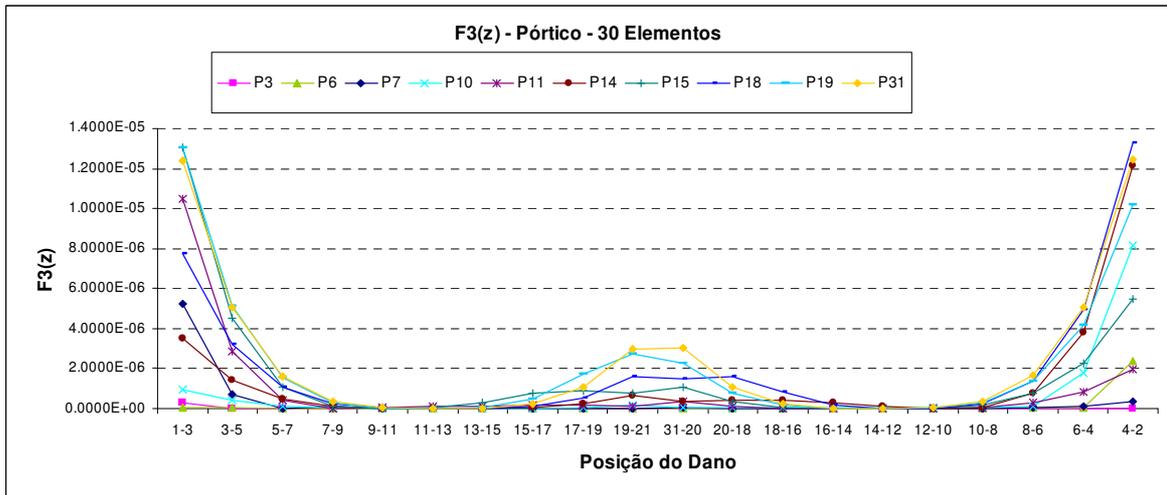
Figura 4.77 (q) a (t) - Representação gráfica da Assinatura  $F6(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição do elemento danificado e tendo a carga concentrada a cada nó.



(a)

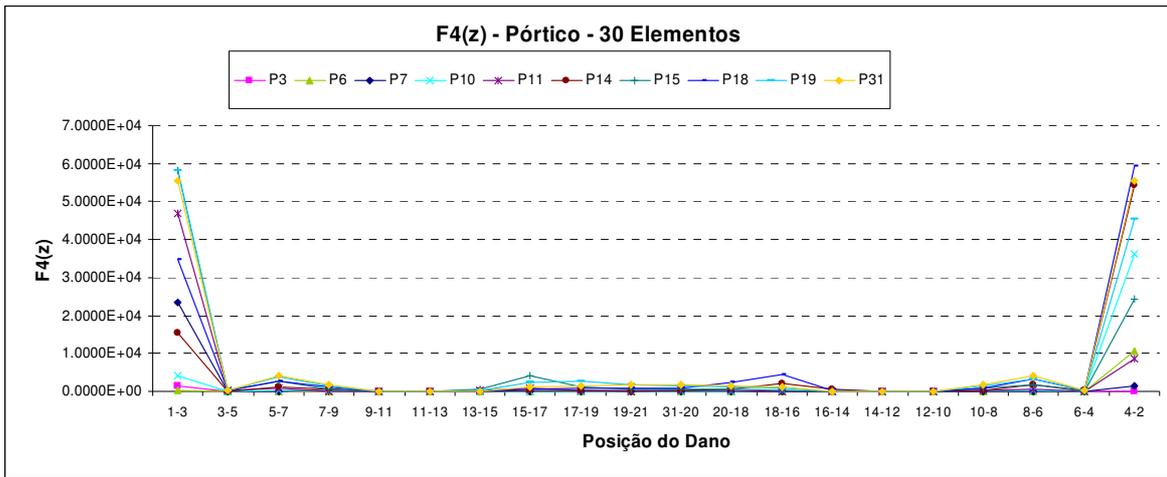


(b)

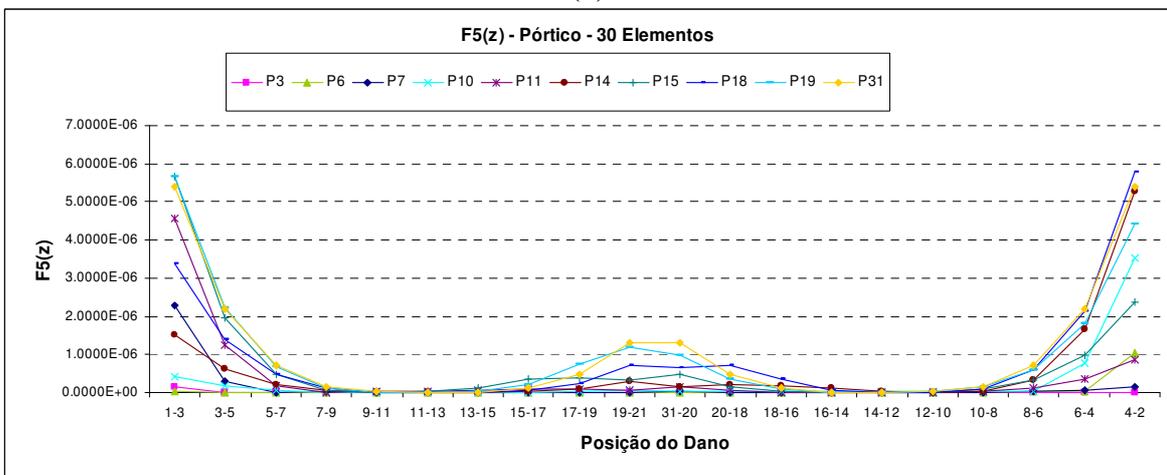


(c)

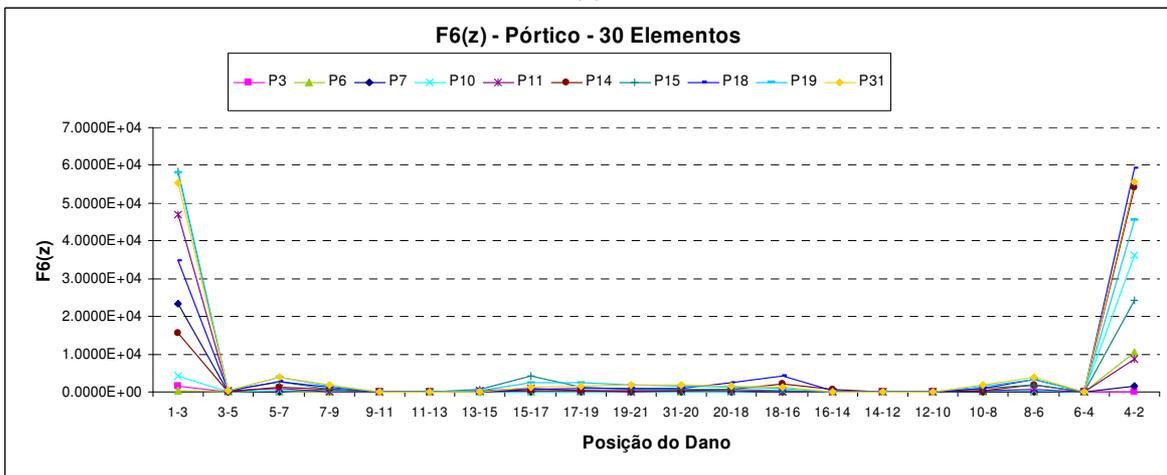
Figura 4.78 (a) a (c) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F1(z)$  a  $F3(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.



(d)



(e)



(f)

Figura 4.78 (d) a (f) - Representação gráfica das Assinaturas de  $F4(z)$  a  $F6(z)$  para o pórtico dividido em trinta elementos mantendo a posição da carga concentrada no nó e variando a posição do elemento danificado.

O pórtico dividido em trinta elementos apresenta em seus resultados algumas características semelhantes aos gráficos das análises da viga biengastada, especialmente a dividida em dez elementos. Essa semelhança já era esperada, pois uma barra vertical do pórtico pode ser comparada, se adotada a posição horizontal, a uma viga biengastada. Sendo assim, para as Figuras de 4.72 a 4.77, pode-se perceber que o dano estará associado às diferentes variações dos gráficos.

Vale lembrar que para esta análise do pórtico dividido em trinta elementos, nem todos os nós foram submetidos à carga de 5,0 KN, o que deixa a análise menos exata. Contudo ainda sim é possível retirar conclusões sobre a localização do dano.

Quando elemento danificado está distante do engaste, ou seja, elementos **9-11** (Figuras de 4.72 a 4.77(e)), **11-13** (Figuras de 4.72 a 4.77(f)), **13-15** (Figuras de 4.72 a 4.77(g)), **15-17** (Figuras de 4.72 a 4.77(h)), **17-19** (Figuras de 4.72 a 4.77(i)), **20-18** (Figuras de 4.72 a 4.77(l)), **18-16** (Figuras de 4.72a 4.77(m)), **16-14** (Figuras de 4.72 a 4.77(n)), **14-12** (Figuras de 4.72 a 4.77(o)) e **12-10** (Figuras de 4.72 a 4.77(p)); nota-se que o pico do gráfico sempre apontará uma provável localização do dano. Por exemplo, nas Figuras 4.77(n) e 4.77(o) o maior pico está em P14 em ambos. Porém, é possível concluir que o dano está no elemento 14-12 no gráfico 4.77(o), pois P10 é maior que P18. E assim, na Figura 4.77(n), o dano está no elemento 16-14, pois P18 é maior que P10.

Seria possível definir com maior precisão, se todos os nós fossem submetidos à carga de 5,0 KN, especialmente para os elementos 19-21 (Figuras 4.72 a 4.77(j)) e 31-20 (Figuras 4.72 a 4.77(k)), os quais não são possíveis de serem detectados graficamente quando danificados, pois representam o extremo da barra vertical.

Se a carga de 5,0 KN fosse aplicada em todos os nós, supõe-se que, por semelhança à viga biengastada, caso fosse aplicada a carga no nó 16, por exemplo, P16 seria o maior pico no gráfico, seguido de P14, para a Figura 4.77(n) e assim ficaria claro e exato que o dano estaria no elemento 16-14. Do mesmo modo, caso fosse aplicada à carga concentrada em P12 seria possível perceber que o dano no elemento 14-12 pela Figura 4.77(o).

Quando o elemento danificado é em 7-9, Figuras 4.72 a 4.77(d), é possível observar uma súbita elevação do patamar P7 entre P3 e P11, quando a tendência era que se elevasse um pouco mais que P3 e um pouco menos que P11. Logo, apenas pela observação dos gráficos citados, pode-se dizer que o dano está no elemento 7-9 ou no elemento 5-7. O mesmo ocorre quando o dano é no elemento 10-8, Figuras 4.72 (q), 4.73(q), 4.74(q), 4.75(q), 4.76(q) e 4.77(q), em que ocorre uma súbita elevação do patamar P10, quando a tendência seria uma elevação um pouco menor que P14 e um pouco maior que P6.

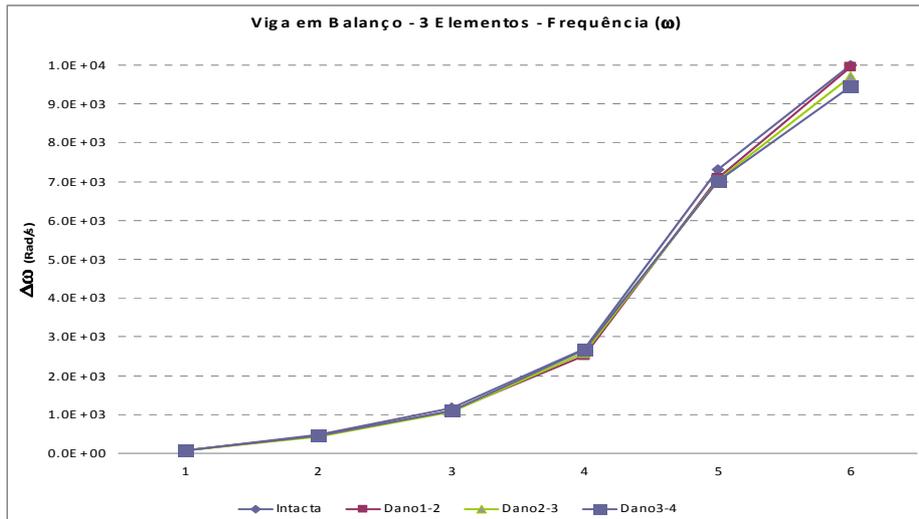
Para os três primeiros elementos mais próximos ao engaste sendo os elementos do lado esquerdo: elemento **1-3** (Figuras de 4.72 a 4.77(a)), elemento **3-5** (Figuras 4.72 a 4.77(b)) e elemento **5-7** (Figuras 4.72 a 4.77(c)) e do lado direito: elemento **4-2** (Figuras 4.72 a 4.77(t)), elemento **6-4** (Figuras 4.72 a 4.77(s)) e elemento **8-6** (Figuras 4.72 a 4.77(r)), não é possível detectar a localização do dano, pois os gráficos apresentam certa uniformidade e semelhanças entre si.

Nos gráficos das Figuras 4.78(a) a 4.78(f), observa-se que houve um comportamento não-uniforme em todas as Assinaturas que dependiam de alguma forma da variação de frequência, ou seja, gráficos 4.78(a), (b), (d) e (f), que correspondem respectivamente às Assinaturas  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $F_4(z)$  e  $F_6(z)$ .

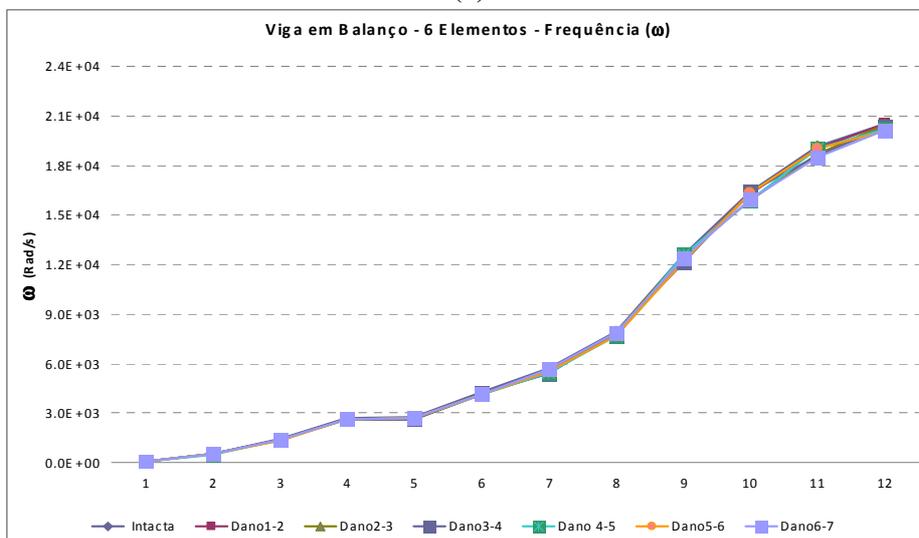
#### **4.7 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DAS FREQUÊNCIAS NAS ASSINATURAS**

De acordo com a análise do comportamento das assinaturas anteriormente apresentadas, observou-se que as frequências exercem grande influência em seus resultados, distorcendo-os na maioria das vezes.

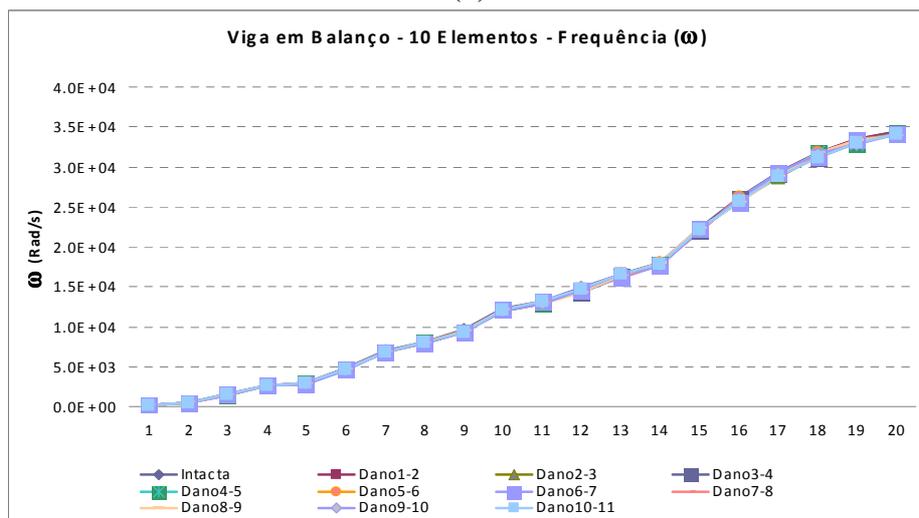
Por este motivo foi necessária uma observação mais detalhada do comportamento das frequências e então foram elaborados gráficos comparativos referentes às frequências ( $\omega$ ) e variações de frequências ( $\Delta\omega$ ) entre estruturas intactas e danificadas apenas para as vigas em balanço, divididas em 3, 6 e 10 elementos e para a viga biengastada dividida em 3, 6 e 10 elementos.



(a)

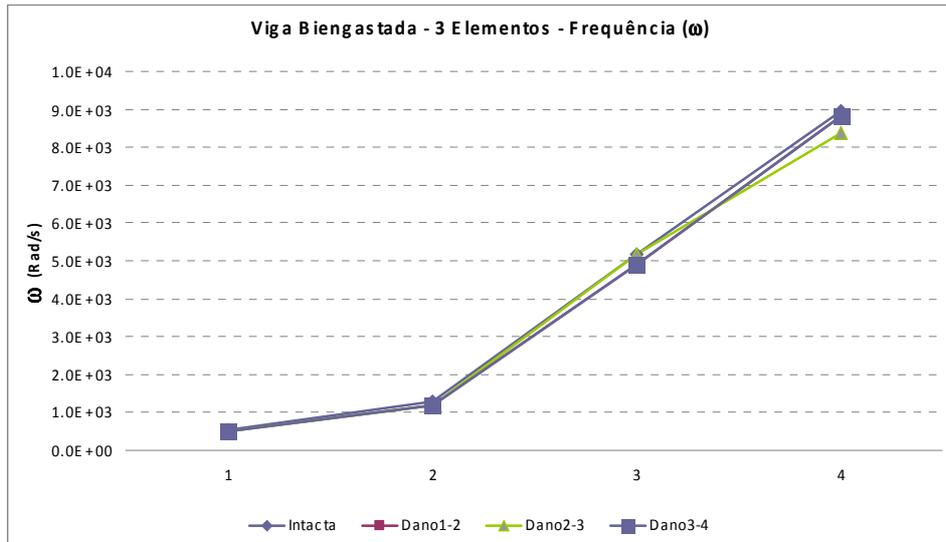


(b)

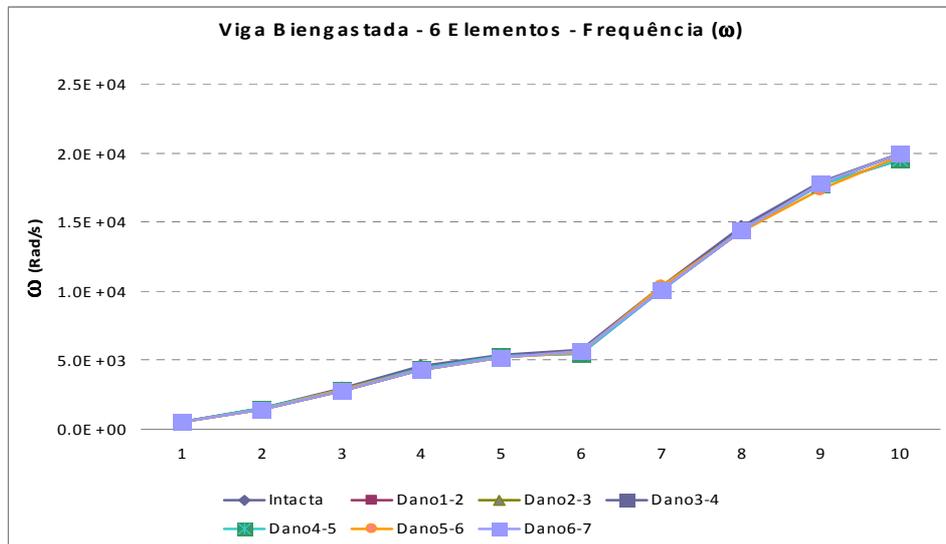


(c)

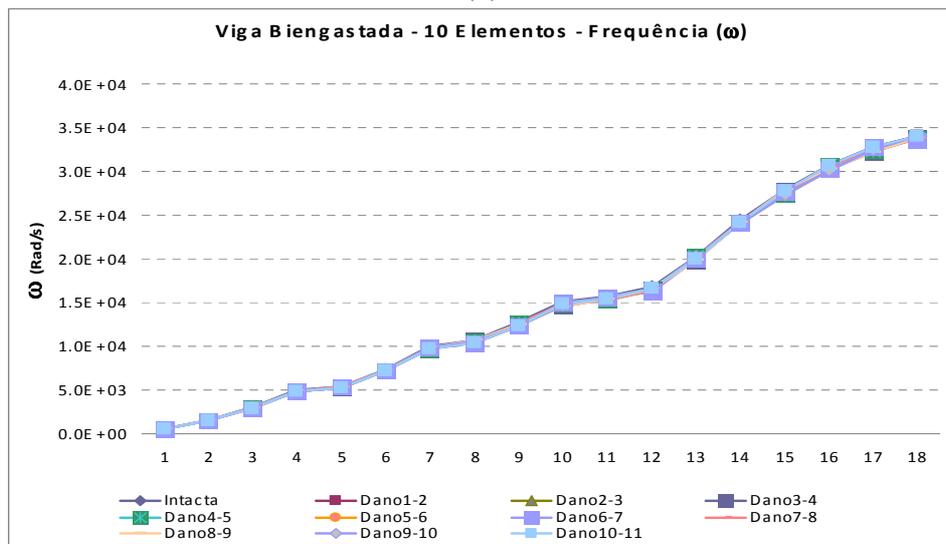
Figura 4.79 (a) a (c) – Representação gráfica comparando as frequências da estrutura intacta e danificada para a viga em balanço dividida em três, seis e dez elementos.



(a)

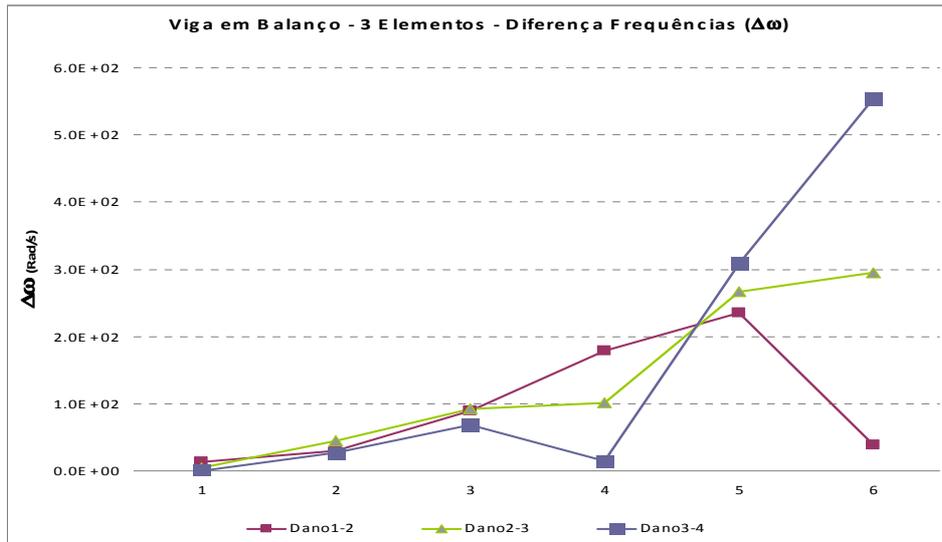


(b)

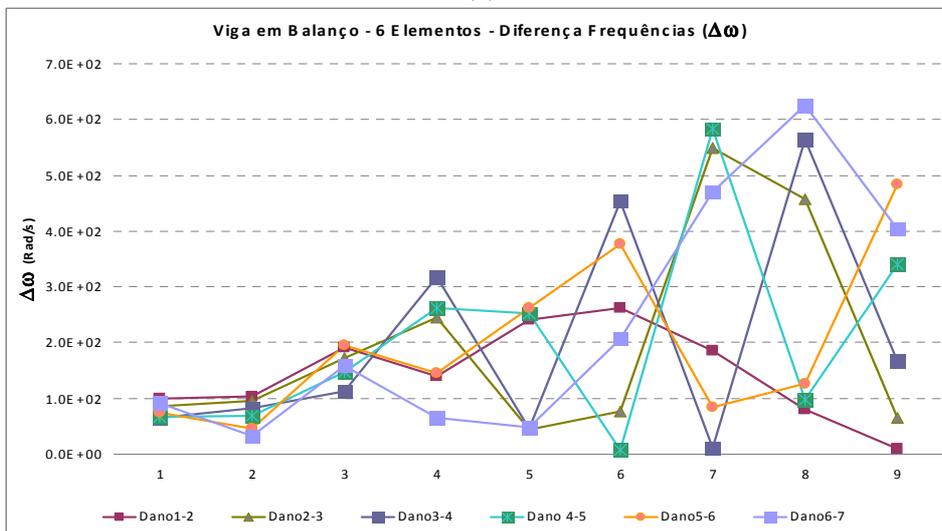


(c)

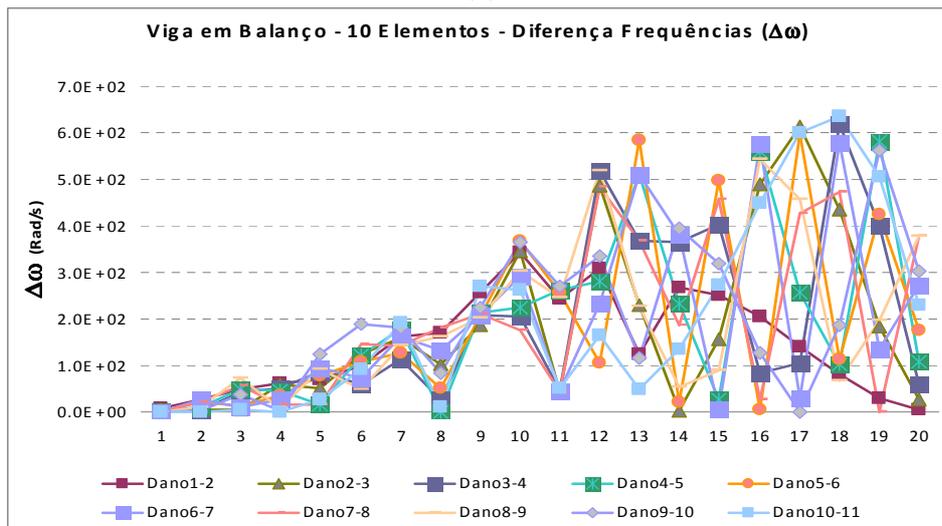
Figura 4.80 (a) a (c) – Representação gráfica comparando as frequências da estrutura intacta e danificada para a viga biengastada dividida em três, seis e dez elementos.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.81 (a) a (c) – Representação gráfica comparando as diferenças entre frequências da estrutura intacta e danificada para a viga em balanço dividida em três, seis e dez elementos.

Nota-se que os gráficos que se referem às frequências ( $\omega$ ) das estruturas (Figuras 4.79 a 4.80), não apresentam diferença significativa se compararmos a estrutura intacta com a danificada. Esta conclusão contribui para ratificar o fato de não ser possível, apenas com análise pura deste parâmetro, detectarmos qual a localização do dano na estrutura, sendo, portanto, necessária a elaboração de Assinaturas.

Nos gráficos das Figuras de 4.81(a) a 4.81(c), o que mais se destaca é o comportamento aleatório das frequências para um mesmo dano e também de um dano em relação ao outro. Sendo assim, não é possível saber exatamente para quais frequências os  $\Delta\omega$  estarão mais distantes de zero para conseqüentemente não provocarem a distorções nos resultados das assinaturas que tiverem este parâmetro em seu denominador. Logo uma das possíveis soluções para este problema é utilizar, ao invés da diferença absoluta de frequências ( $\Delta\omega$ ), a relação entre frequências intacta x danificada  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , sendo  $\omega_0$  a frequência obtida para a estrutura intacta e  $\omega$  a frequência obtida para a estrutura danificada. Desse modo, o valor mínimo a que pode chegar este parâmetro é 1 e então o valor da assinatura não tenderá ao infinito. Para ilustrar esta situação, basta observar o gráfico da Figura 4.82.

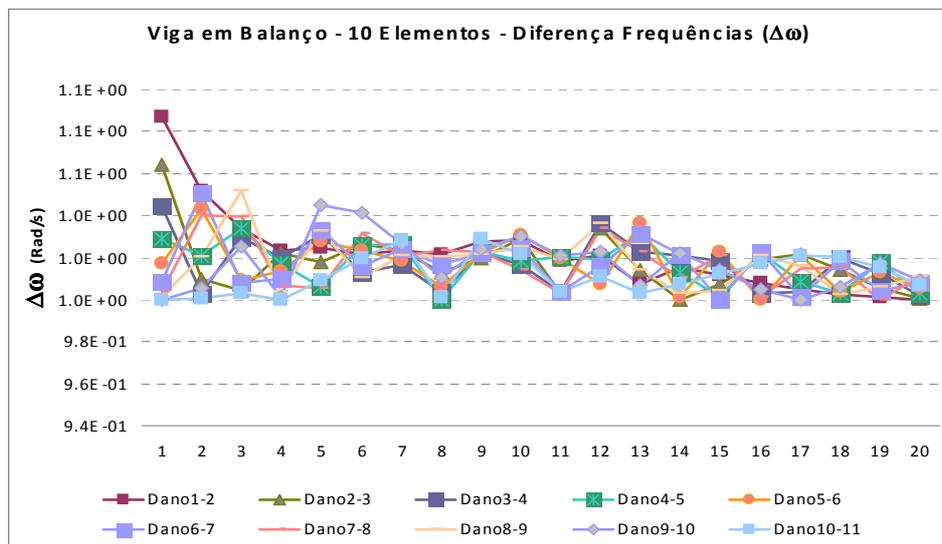


Figura 4.82 – Representação gráfica comparando as diferenças relativas entre frequências da estrutura intacta e danificada para a viga em balanço dividida em dez elementos.

## 4.8 ANÁLISE DAS MATRIZES DE RIGIDEZ

O aparecimento de uma falha na estrutura reflete-se diretamente na perda de rigidez e, portanto, torna-se importante a análise da sensibilidade dos elementos das matrizes de rigidez globais das estruturas, pois se sabe que a matriz de rigidez para uma estrutura intacta é diferente de uma matriz de rigidez para a mesma estrutura, porém danificada.

Fazendo a diferença matemática entre as matrizes de rigidez globais, de uma mesma estrutura, intacta e danificada é nota-se que, o resultado da grande maioria dos termos é nulo, com apenas algumas exceções. Analisando estes termos não nulos é possível estabelecer uma relação entre o elemento danificado da estrutura e estes termos não nulos.

Nota-se ainda que existe uma relação direta do índice que relaciona o termo da matriz de rigidez com índice do elemento danificado. Baseando-se nesta observação, foi criada uma maneira de representar a localização do dano na estrutura tal como será apresentado a seguir.

Na matriz de rigidez global existe a correspondência a cada elemento da estrutura, e então cada elemento da estrutura tem ligação associada a um ou mais termos desta matriz. Por exemplo, se considerarmos a viga em balanço dividida em 3 elementos teremos a correspondência que apresenta a Tabela 4.5 a seguir.

Tabela 4.11 – Representação da correspondência entre os termos da Matriz de Rigidez Global e o elemento da estrutura, para uma viga em balanço dividida em 3 elementos.

Elemento da viga	Termos da Matriz de Rigidez Global
1-2	$k_{2,2}$
2-3	$k_{2,2}$
	$k_{2,3}$
	$k_{3,3}$
3-4	$k_{3,3}$
	$k_{3,4}$
	$k_{4,4}$

Os índices destes termos componentes da matriz de rigidez global revelam a ligação que existe entre termo da matriz e elemento da estrutura. O elemento 2-3, por exemplo, além de ter relação com o termo  $\mathbf{k}_{23}$  influencia ainda  $\mathbf{k}_{22}$  e  $\mathbf{k}_{33}$ , pois corresponde aos nós a que está associado. Foram adotados apenas os elementos  $k_{ij}$ , sendo  $i < j$ , já que a matriz de rigidez é simétrica. Esta mesma correspondência acontece com as demais estruturas analisadas nesta pesquisa.

É importante observar que os chamados “termos da matriz de rigidez global” nada mais são do que as matrizes de rigidez locais da estrutura. Isto significa que, no caso da estrutura com três graus de liberdade, como é o caso deste estudo, cada termo  $\mathbf{k}_{22}$  ou  $\mathbf{k}_{23}$  ou  $\mathbf{k}_{33}$  etc, componente da matriz de rigidez global, não corresponde a um único número, mas sim a uma matriz 3x3. Portanto:

$$\mathbf{k}_{22} = [\mathbf{k}_{22}]_{3 \times 3}, \mathbf{k}_{33} = [\mathbf{k}_{33}]_{3 \times 3}, \mathbf{k}_{23} = [\mathbf{k}_{23}]_{3 \times 3}, \text{ etc} \quad (4.4)$$

Sendo assim, após o cálculo da diferença entre matriz de rigidez global da estrutura intacta e danificada, para tentar vincular à matriz de rigidez local 3x3 um único valor como forma de facilitar a representação gráfica, foi seguido o seguinte procedimento:

- 1 – Depois de calculada a diferença entre matriz de rigidez global da estrutura intacta e danificada, observam-se as matrizes de rigidez locais 3x3 não-nulas;
- 2 – Os números componentes destas matrizes locais 3x3 são convertidos em valores absolutos;
- 3 – Estes números, já convertidos em valores absolutos, são somados dentro de cada matriz de rigidez local 3x3;
- 4 – A soma destes números, por matriz de rigidez local 3x3, tem o objetivo de associar um valor único de cada matriz de rigidez local para cada elemento da estrutura e cada um desses valores será chamado de  $\Delta$ .

Na viga em balanço dividida em três elementos, se o elemento 3-4 for danificado, por exemplo, terá três valores associados correspondentes, não nulos, são eles:  $\Delta_{33}$ ,  $\Delta_{34}$  ,

$\Delta_{44}$  . Estes valores têm relação direta com as matrizes  $k_{22}$ ,  $k_{34}$  e  $k_{44}$  da estrutura intacta e danificada.

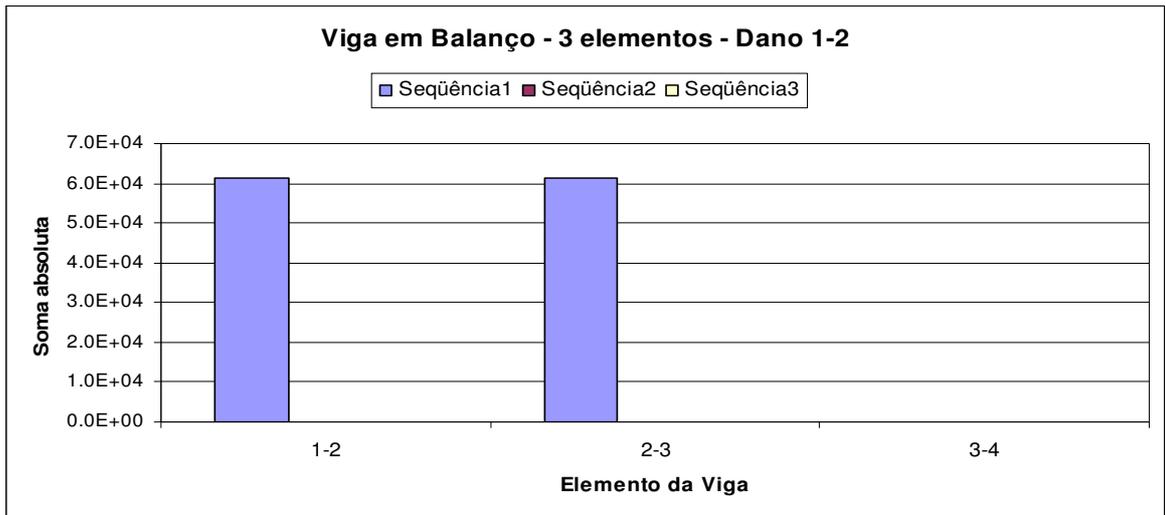
Sendo assim, para a montagem de um gráfico representativo foi elaborada a Tabela 4.6, em que cada linha corresponde a um elemento da estrutura e cada coluna a uma seqüência, com a utilização dos termos  $\Delta$ . A Tabela 4.6 ilustra a o método utilizado para montagem dos gráficos para o exemplo da viga em balanço dividida em três elementos.

Tabela 4.12 – Modelo de Tabela utilizada para a montagem dos gráficos para uma viga em balanço dividida em três elementos.

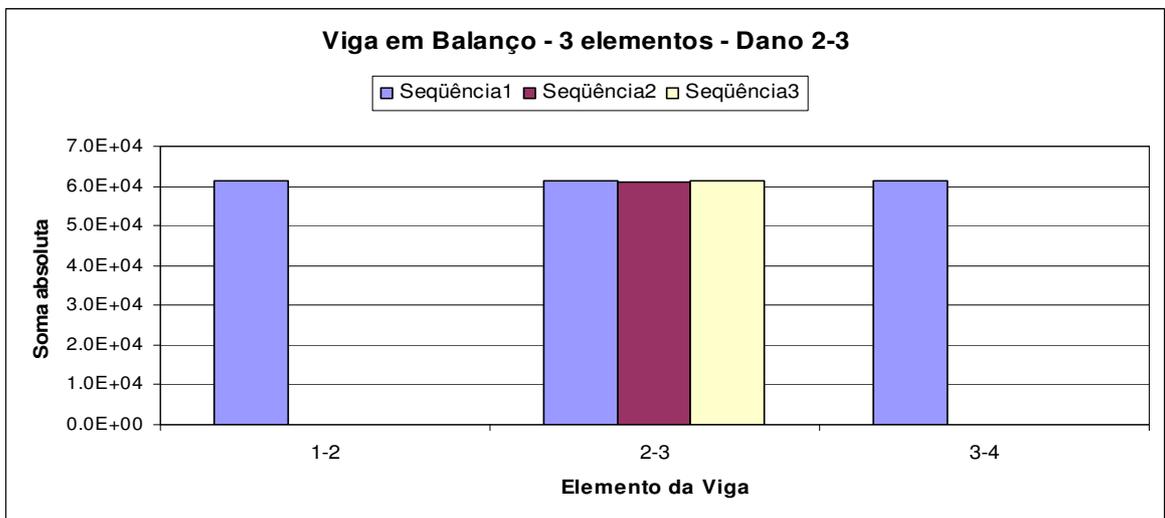
	Seqüência 1	Seqüência 2	Seqüência 3
Elem. 1-2	$\Delta_{22}$	-	-
Elem. 2-3	$\Delta_{22}$	$\Delta_{23}$	$\Delta_{33}$
Elem. 3-4	$\Delta_{33}$	$\Delta_{34}$	$\Delta_{44}$

A relação do termo  $\Delta$  com o elemento da estrutura é a mesma do termo  $k$  da matriz de rigidez global, ou seja, pelo índice é possível observar quais os elementos a que se deve associar. O elemento 2-3 da viga em balanço, por exemplo, associa-se a  $\Delta_{22}$ ,  $\Delta_{23}$ ,  $\Delta_{33}$  como pode ser visto na segunda linha da Tabela 4.6.

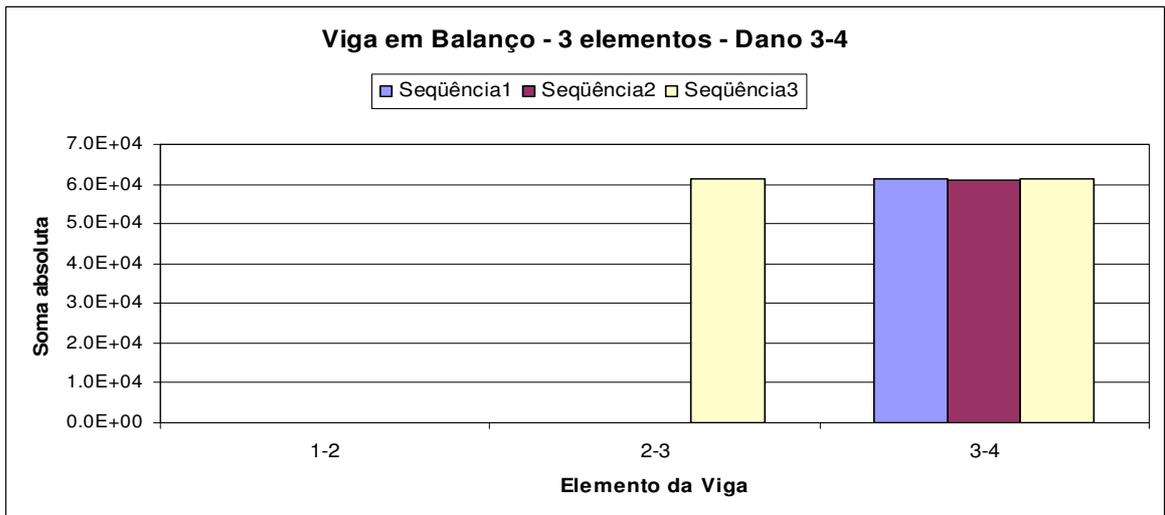
Os gráficos a seguir (Figuras 4.83 a 4.91) apresentam os termos  $\Delta$  associados à localização do dano, com suas respectivas seqüências, para todas as estruturas analisadas, seguindo o mesmo padrão da Tabela 4.6.



(a)

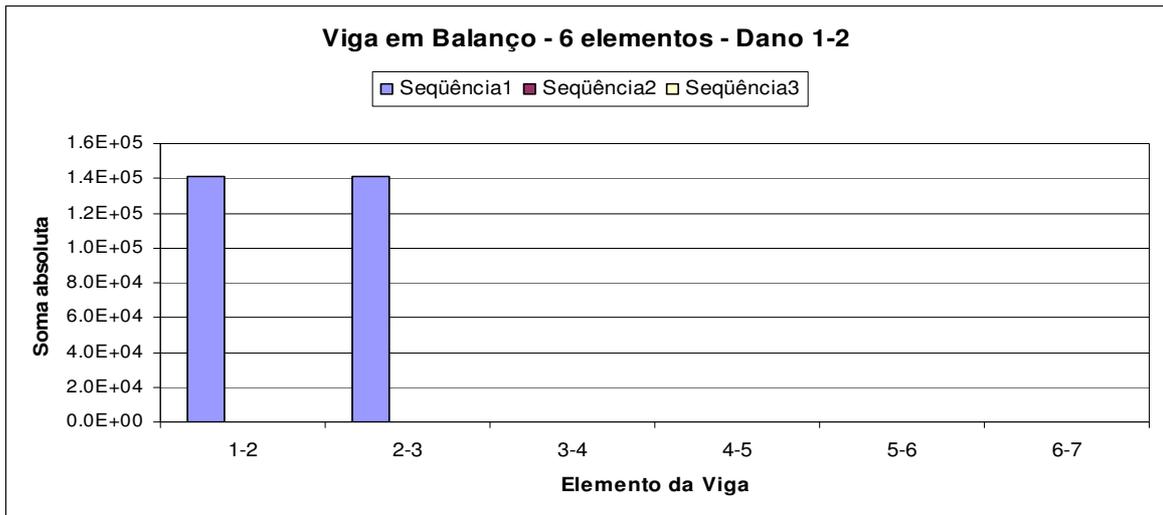


(b)

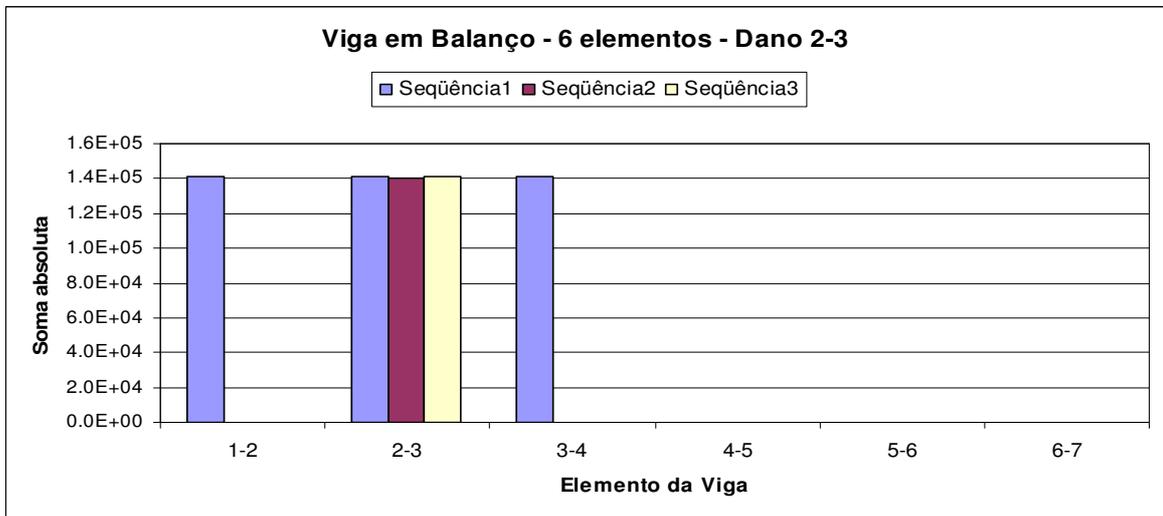


(c)

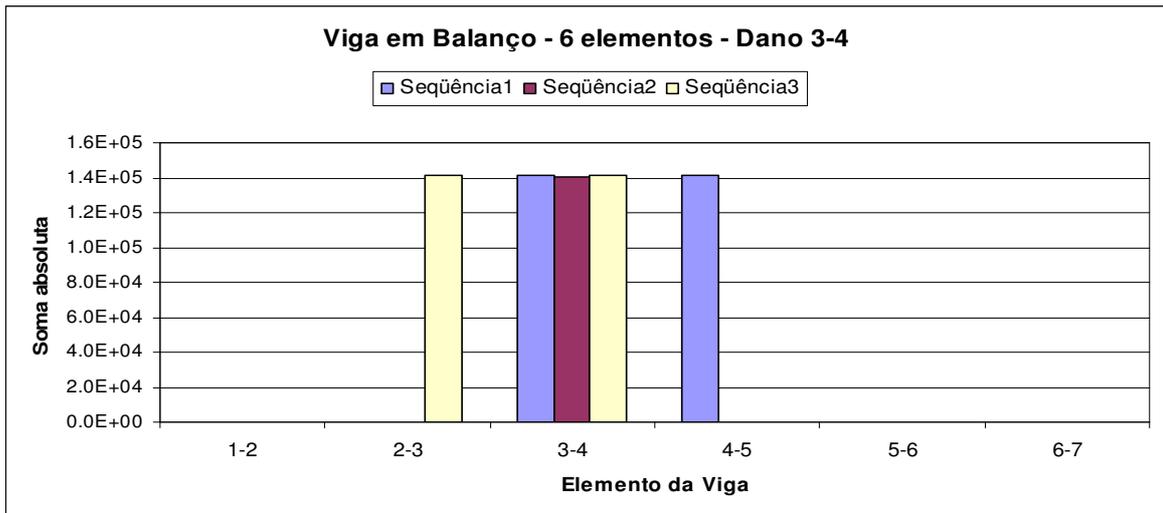
Figura 4.83 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em três elementos.



(a)

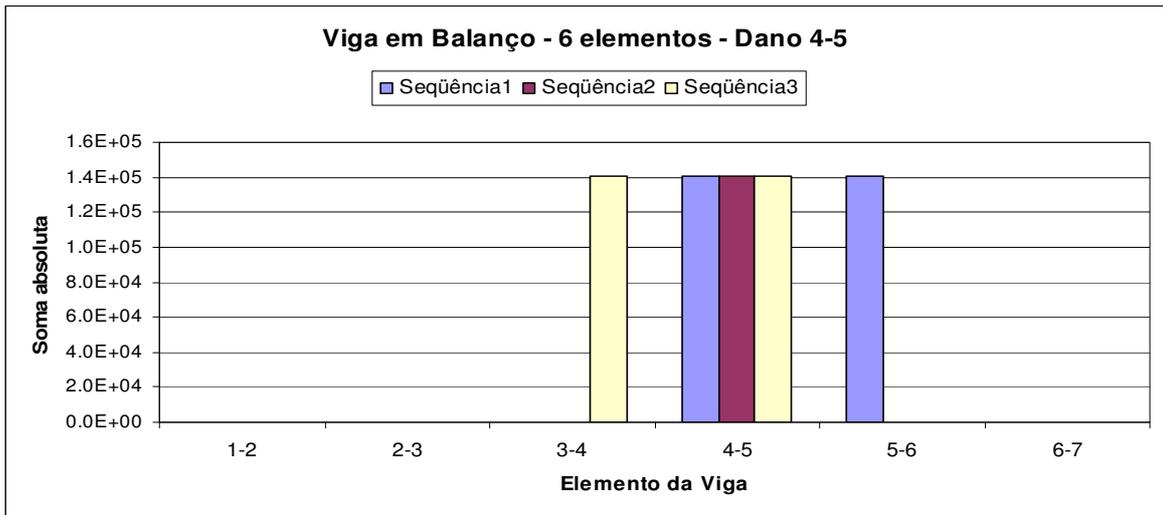


(b)

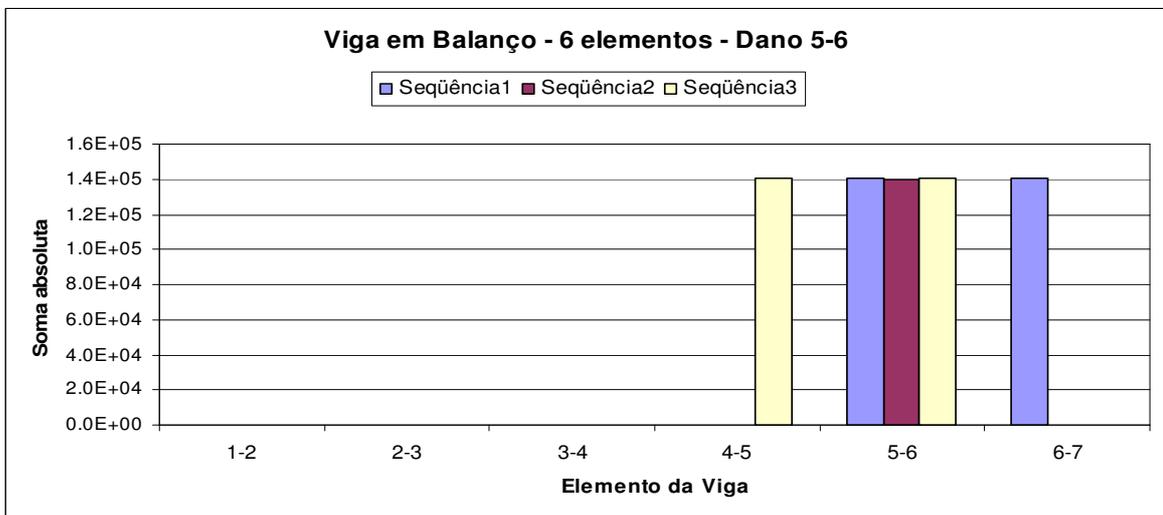


(c)

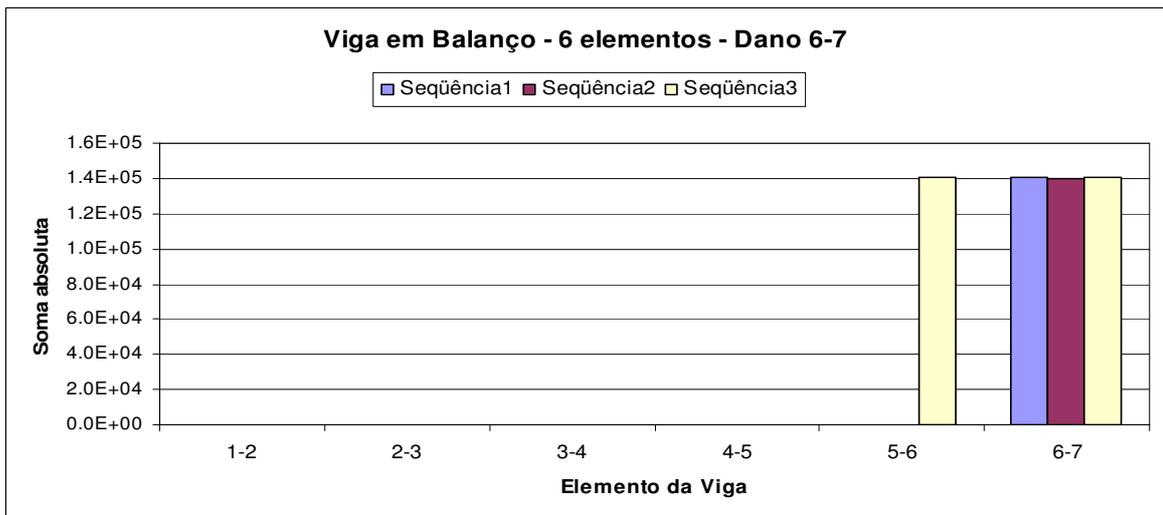
Figura 4.84 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em seis elementos.



(d)

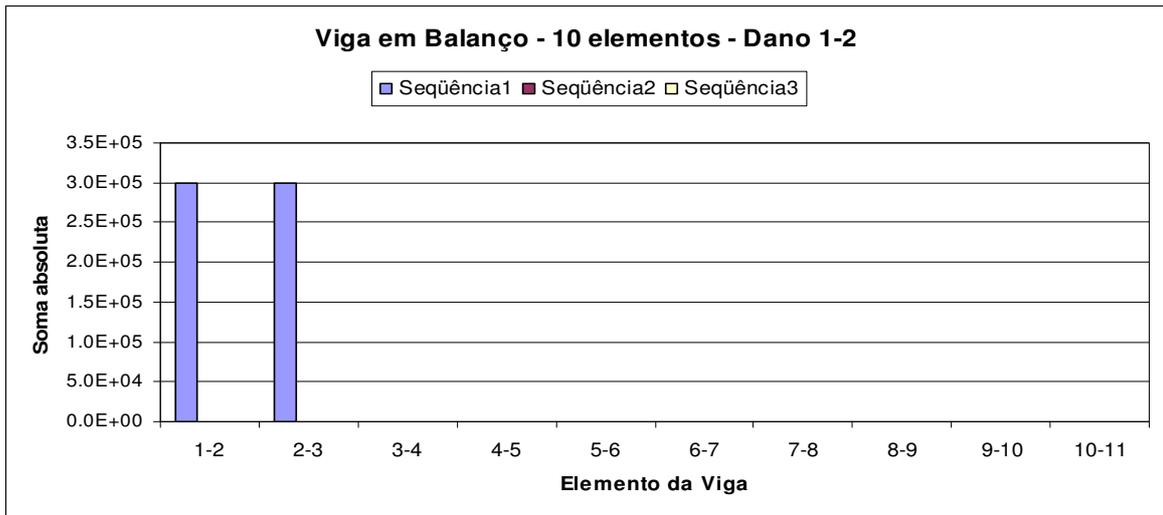


(e)

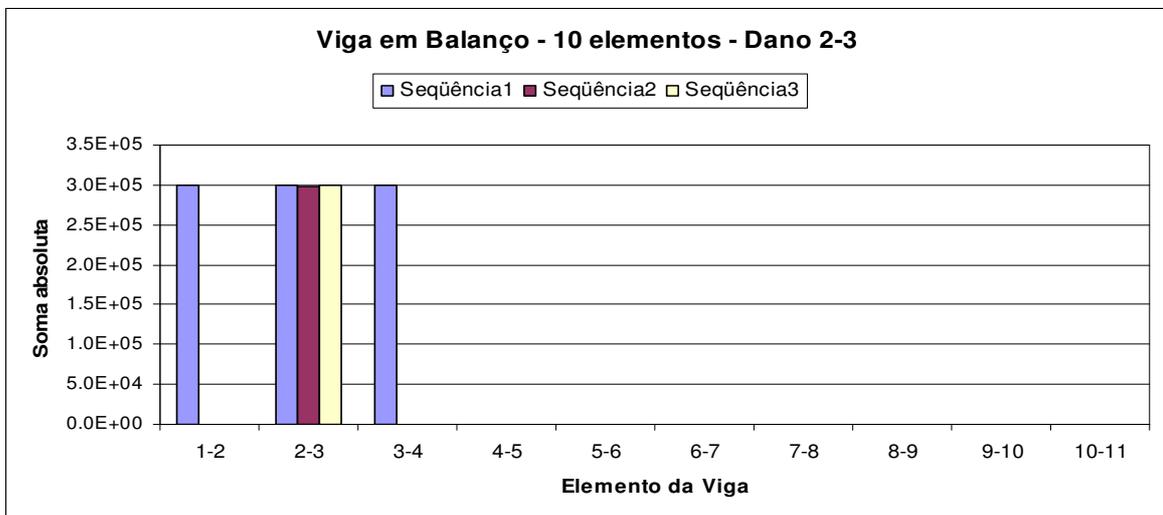


(f)

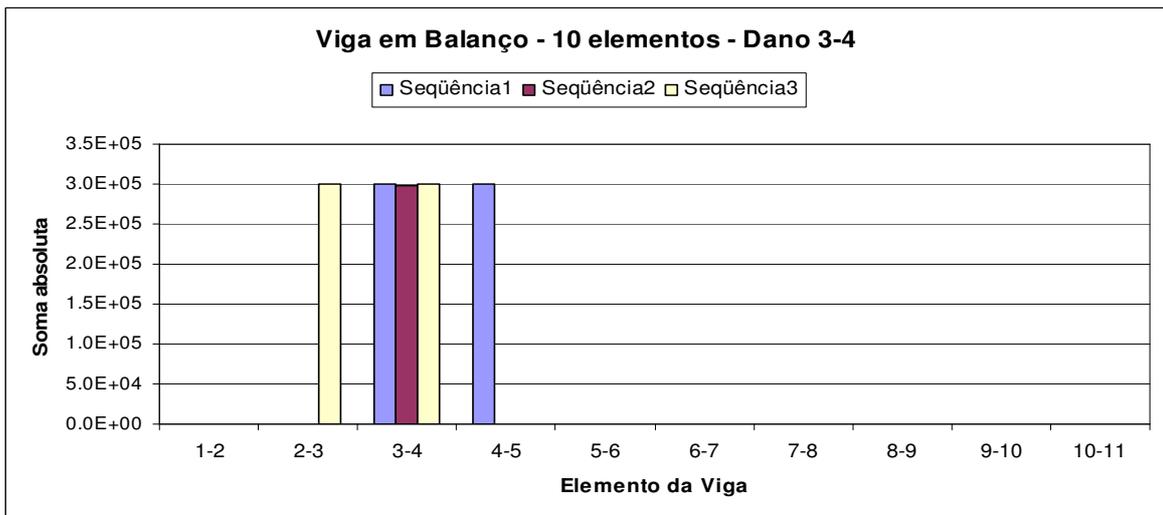
Figura 4.84 (d) a (f) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em seis elementos.



(a)

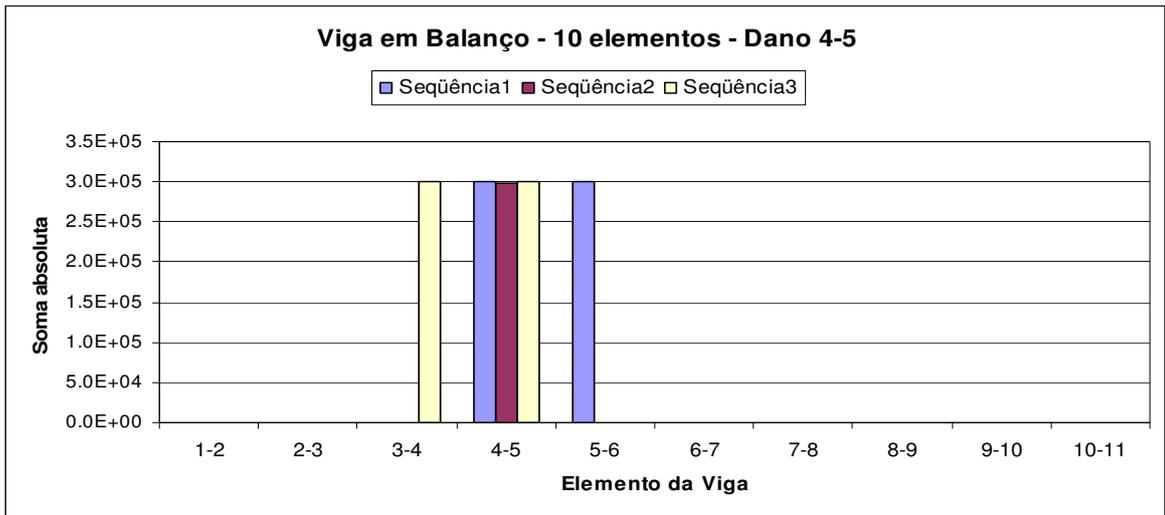


(b)

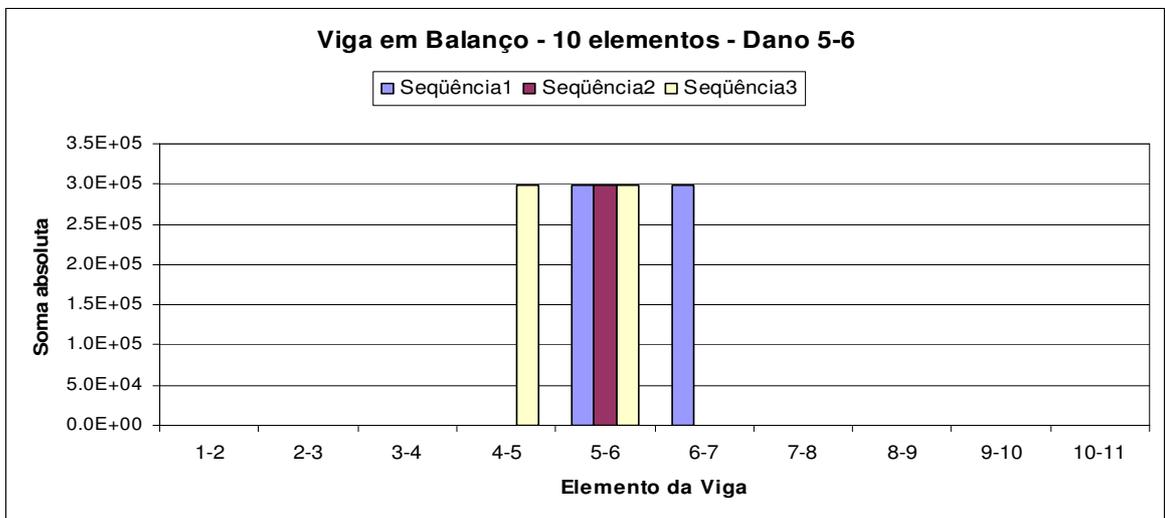


(c)

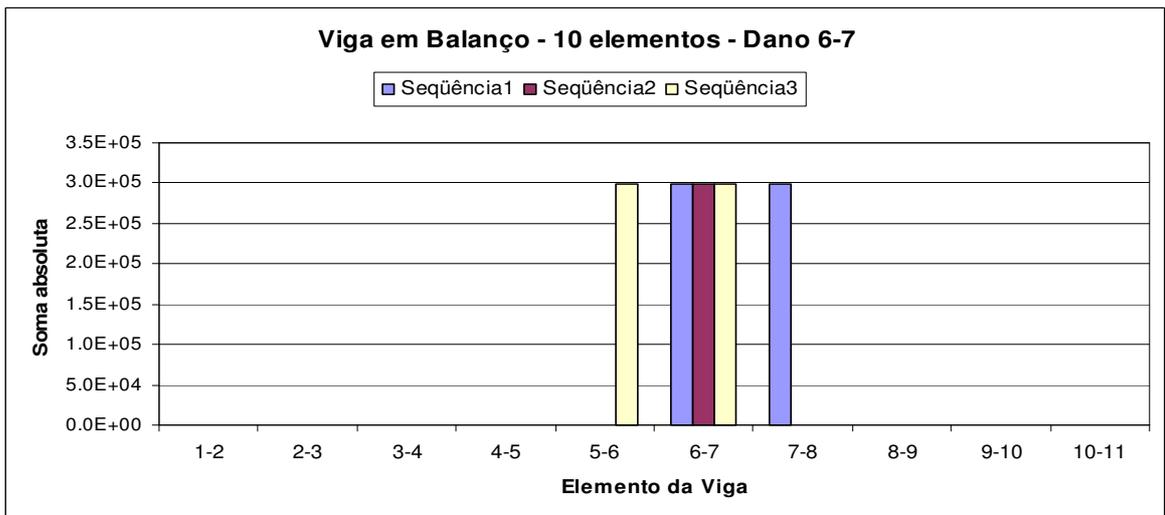
Figura 4.85 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em dez elementos.



(d)

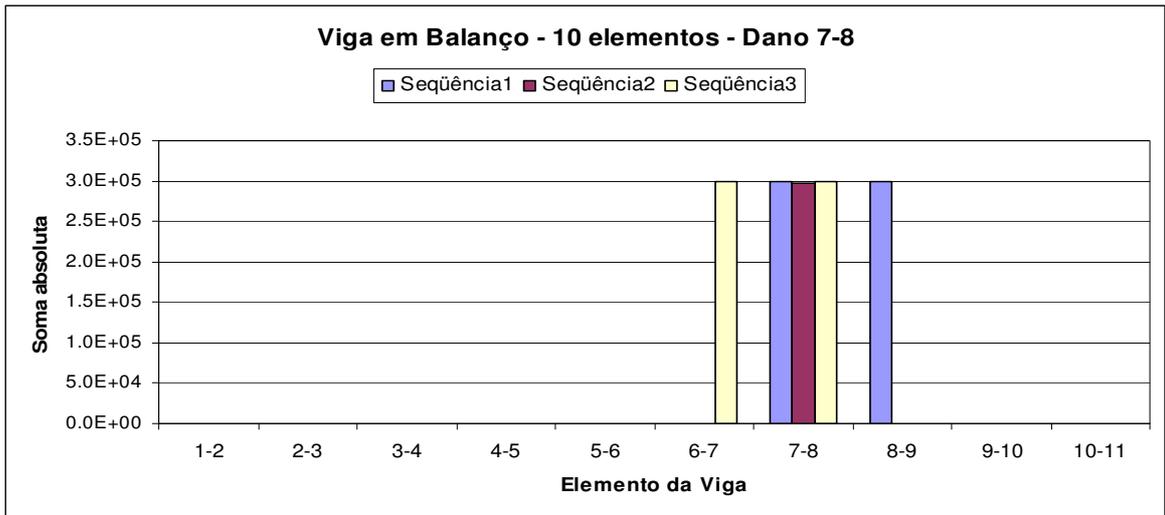


(e)

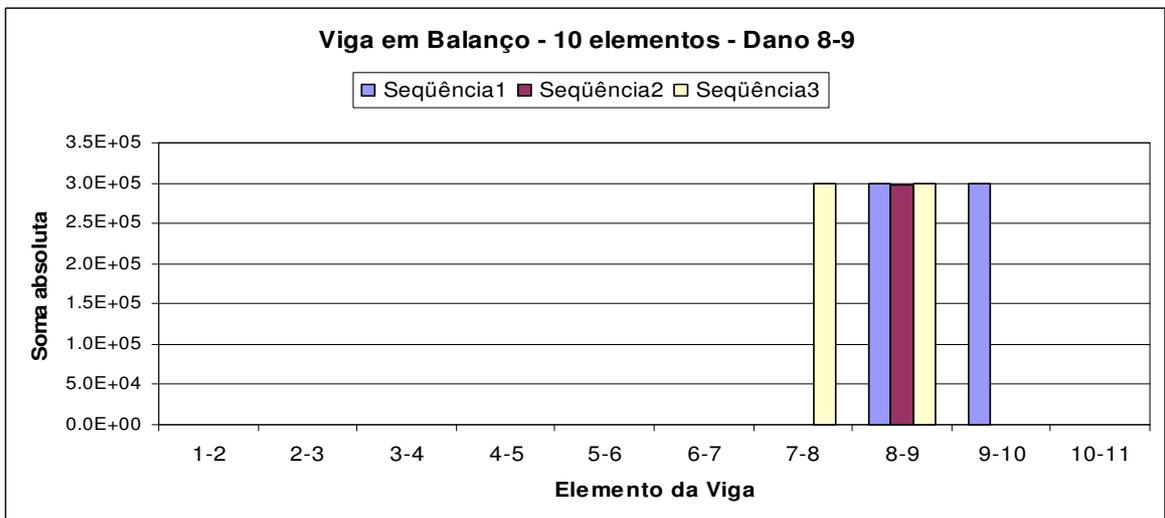


(f)

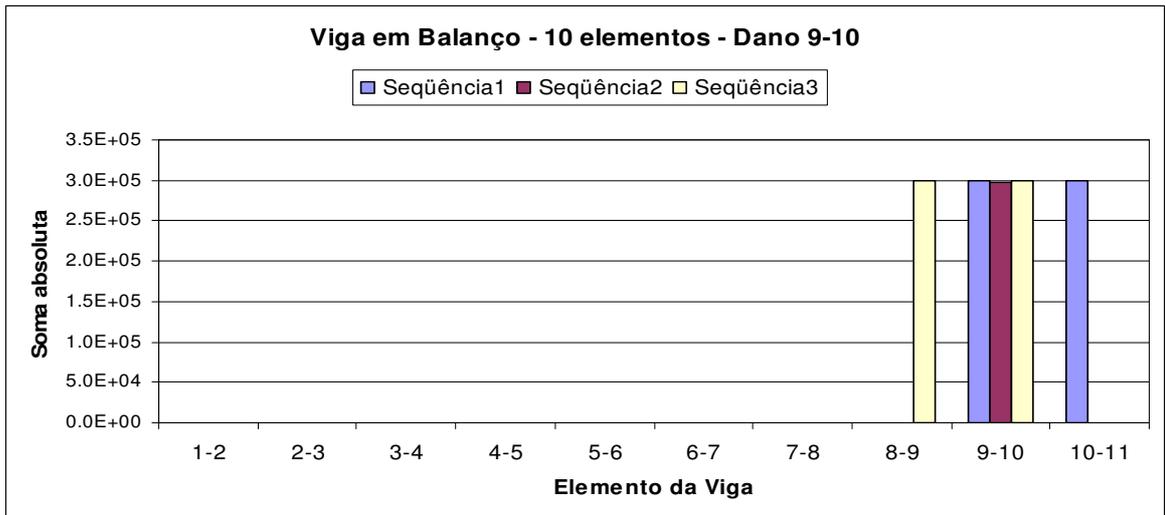
Figura 4.85 (d) a (f) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em dez elementos.



(g)

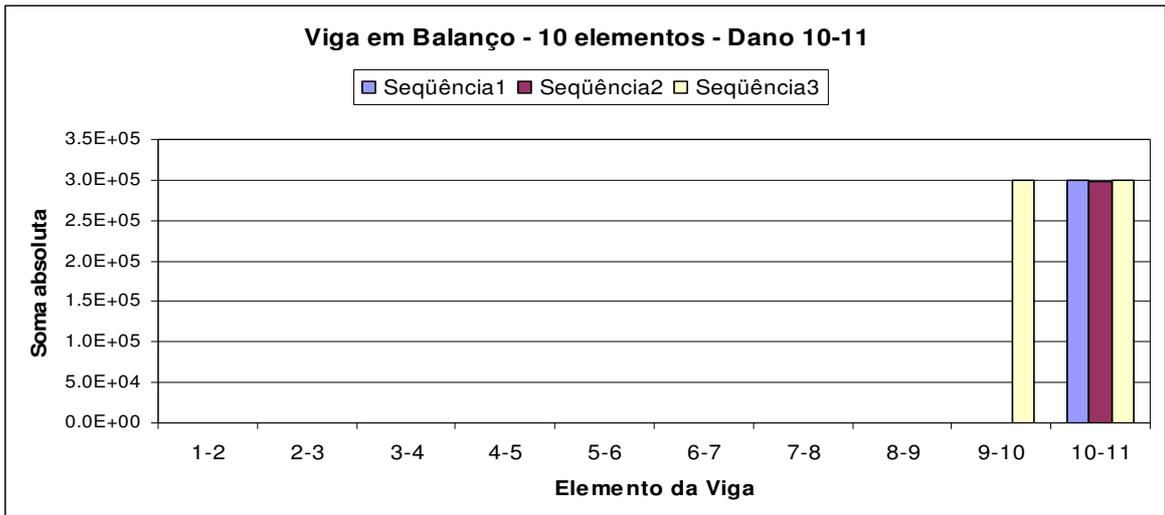


(h)



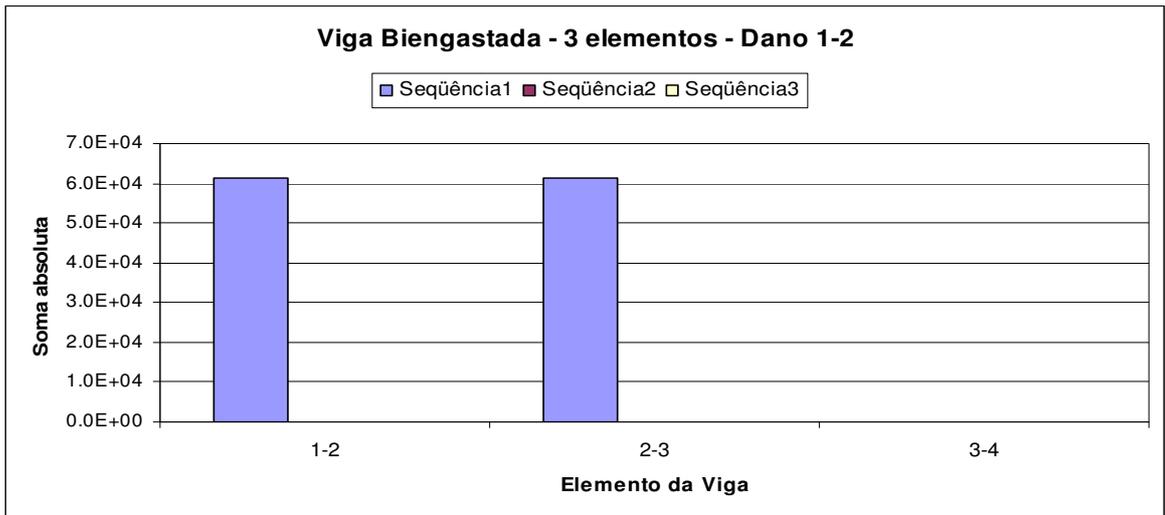
(i)

Figura 4.85 (g) a (i) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em dez elementos.

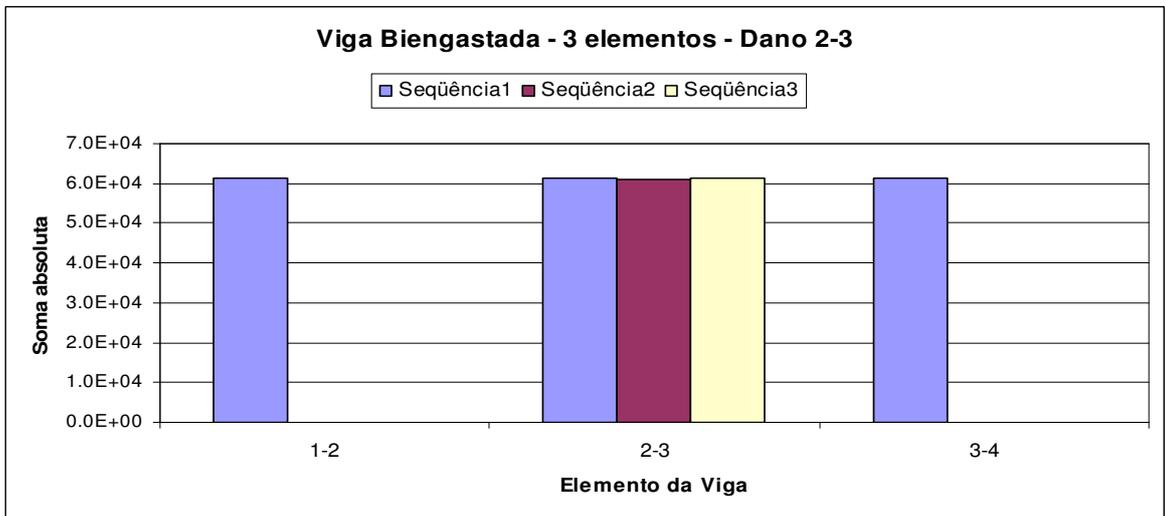


(j)

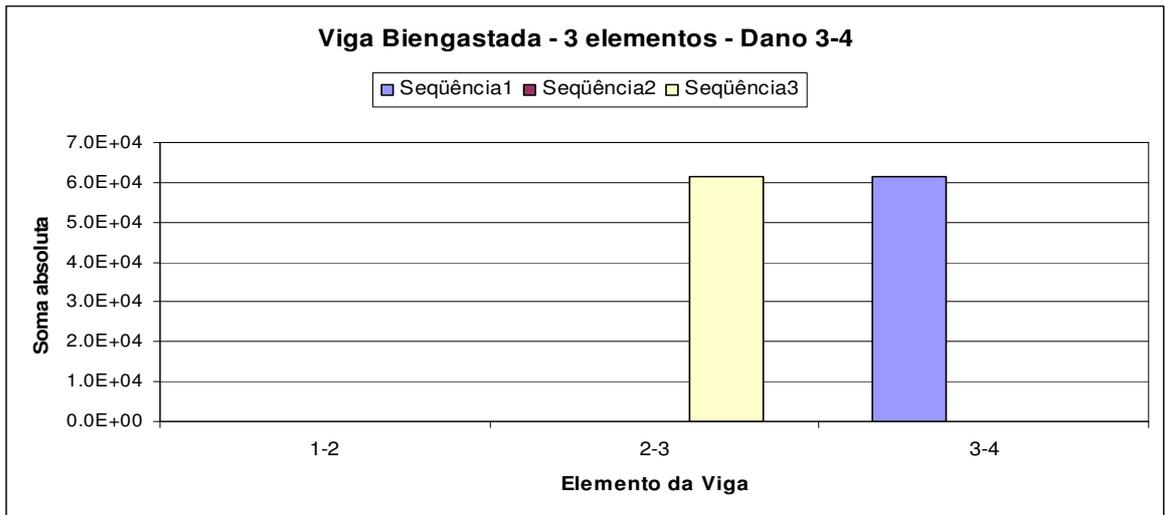
Figura 4.85 (j) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga em balanço dividida em dez elementos.



(a)

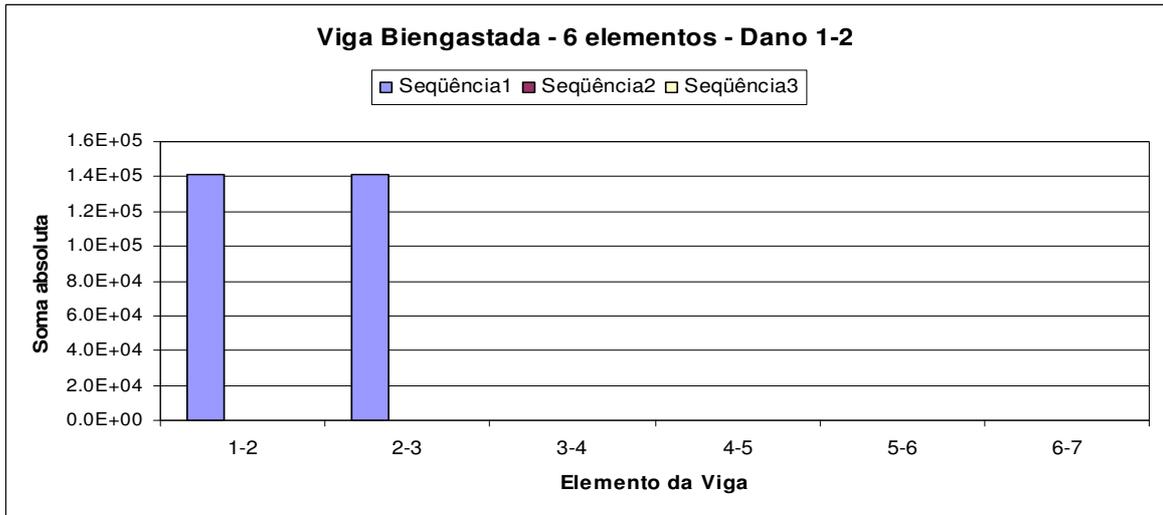


(b)

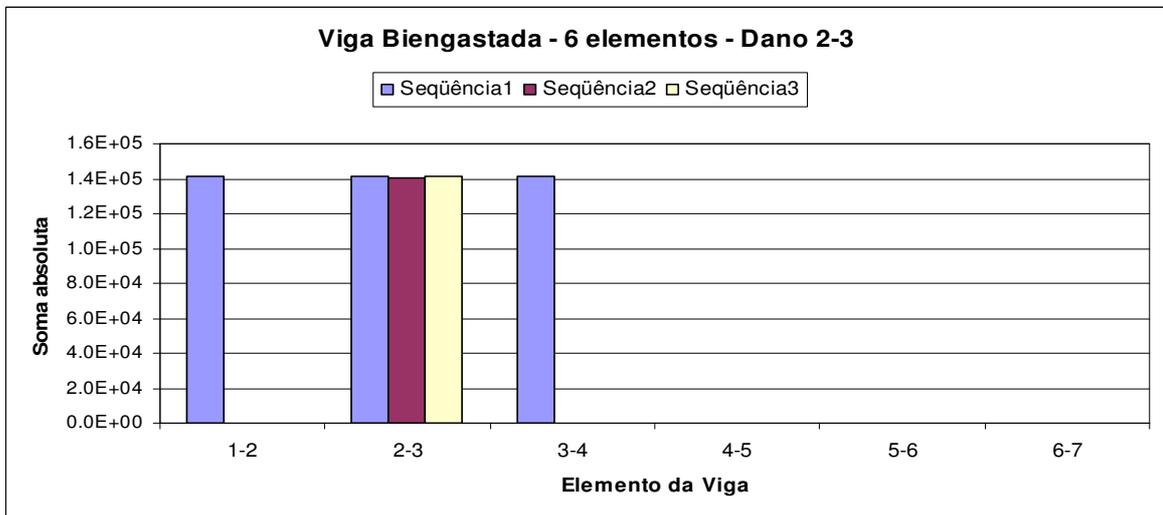


(c)

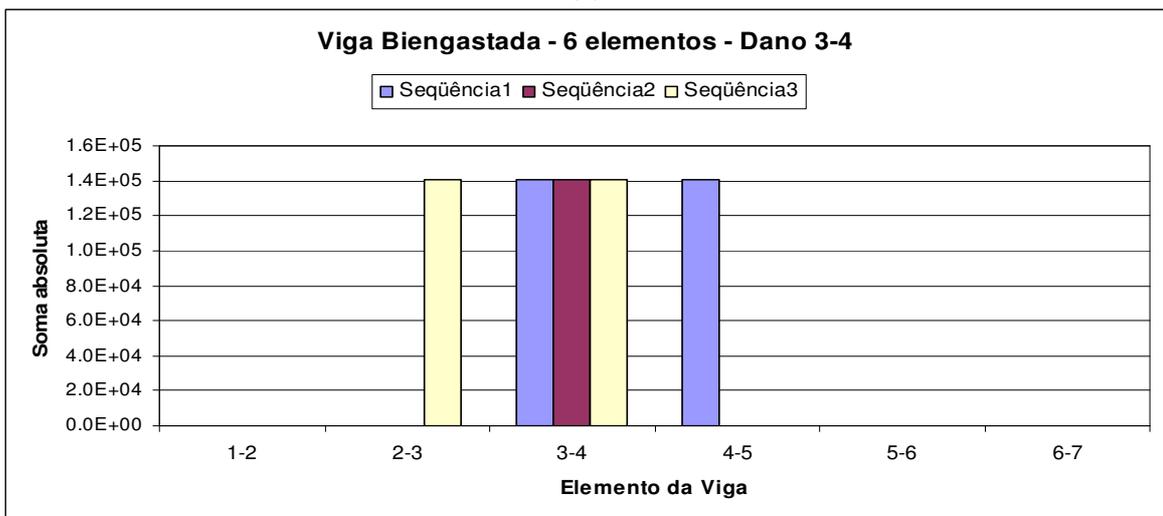
Figura 4.86 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em três elementos.



(a)

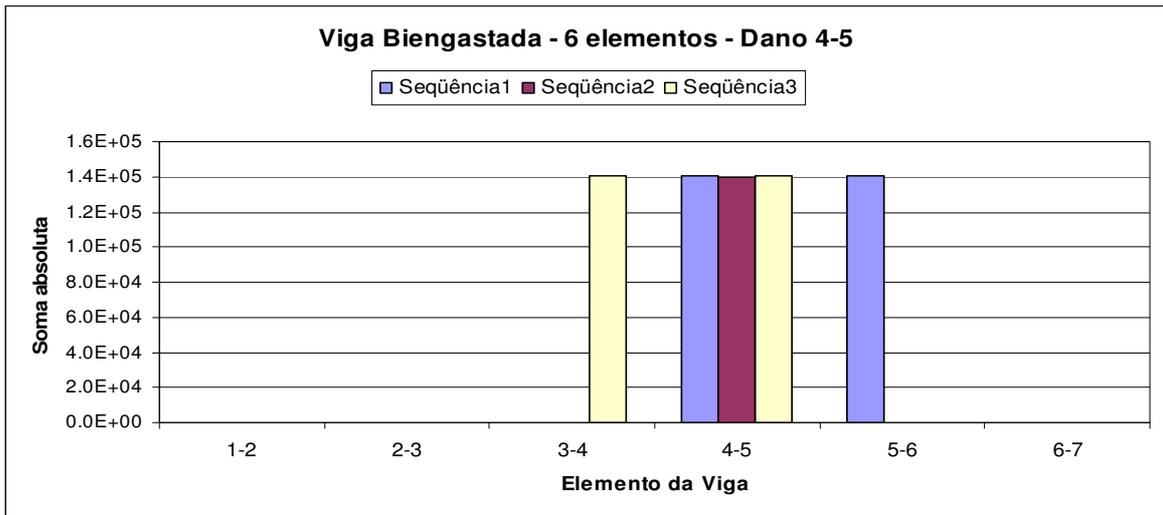


(b)

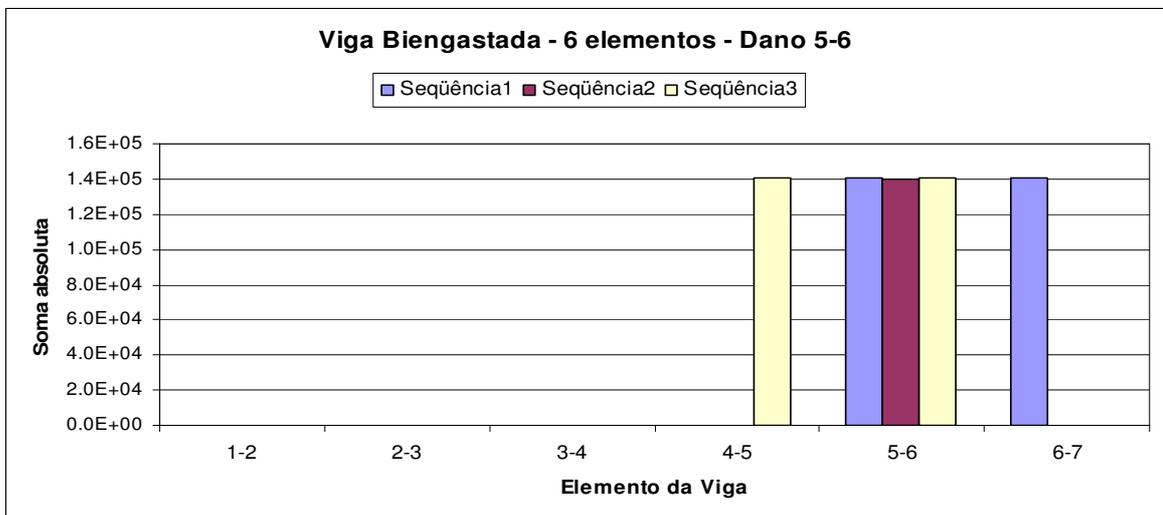


(c)

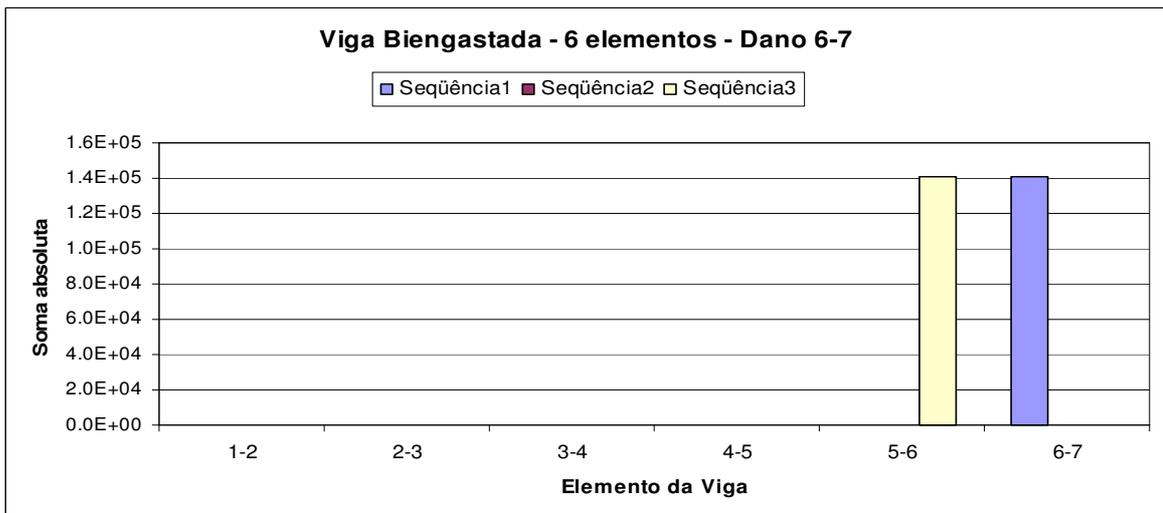
Figura 4.87 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em seis elementos.



(d)

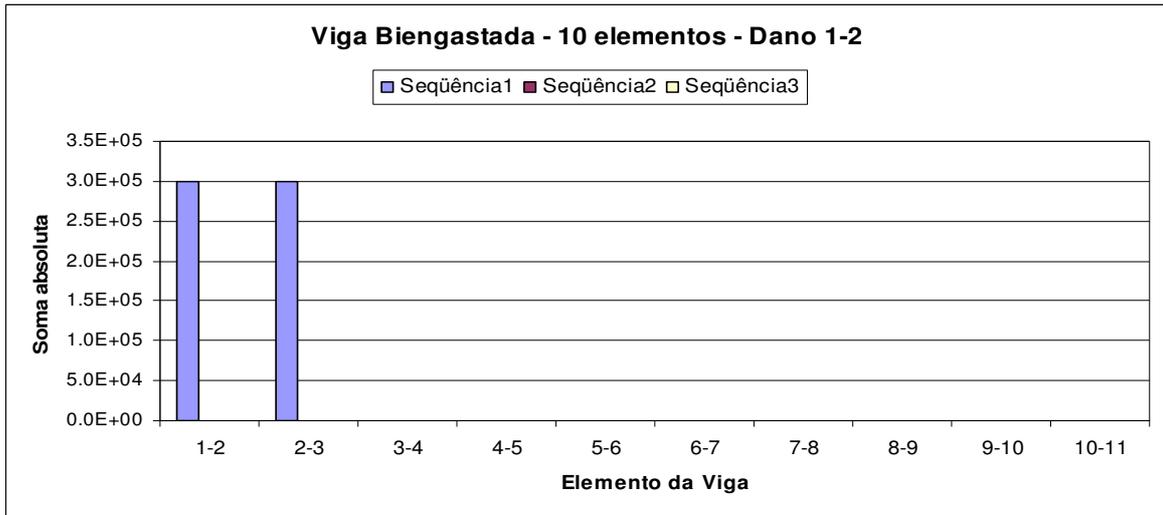


(e)

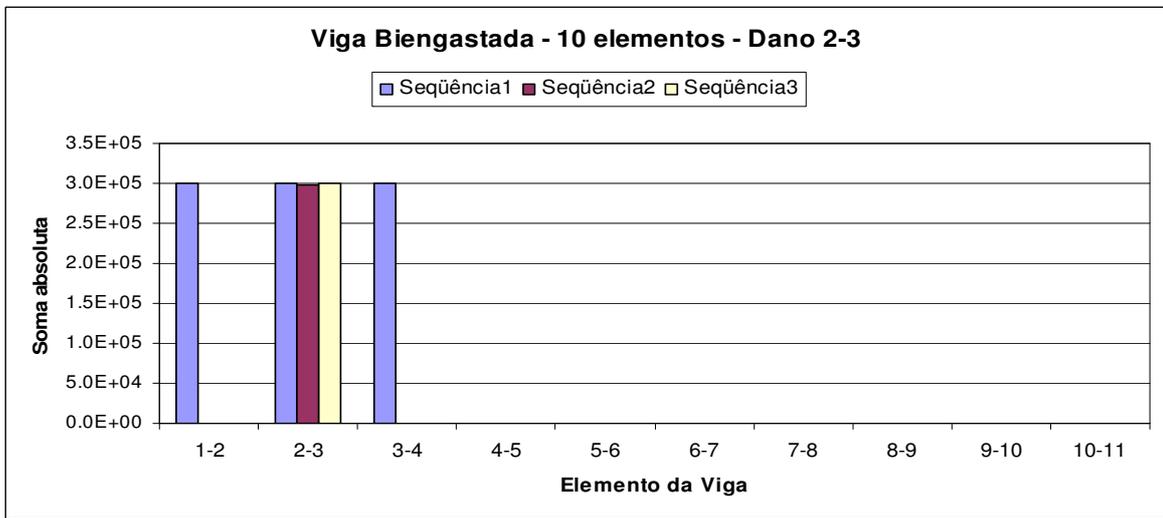


(f)

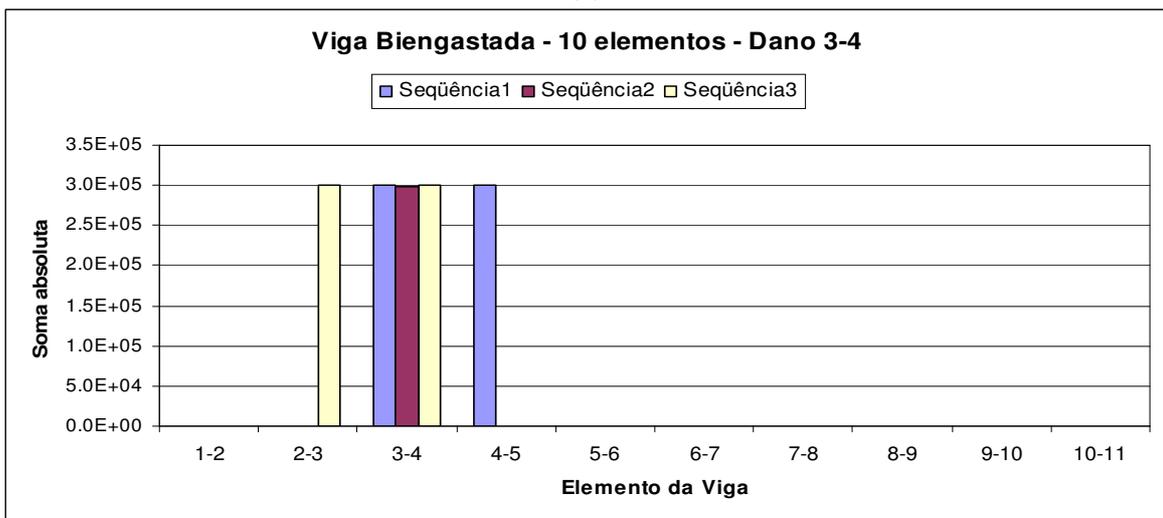
Figura 4.87 (d) a (f) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em seis elementos.



(a)

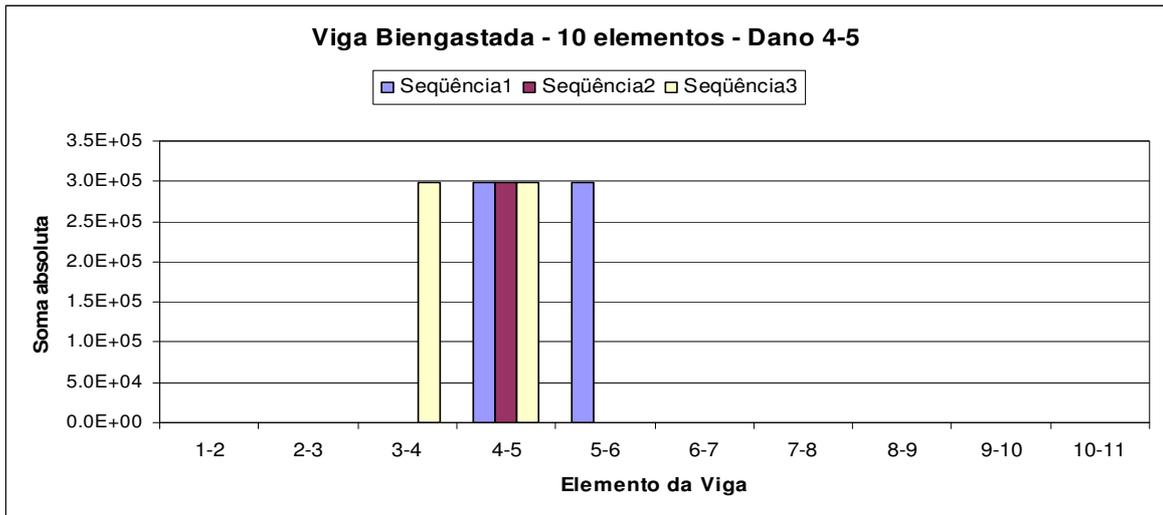


(b)

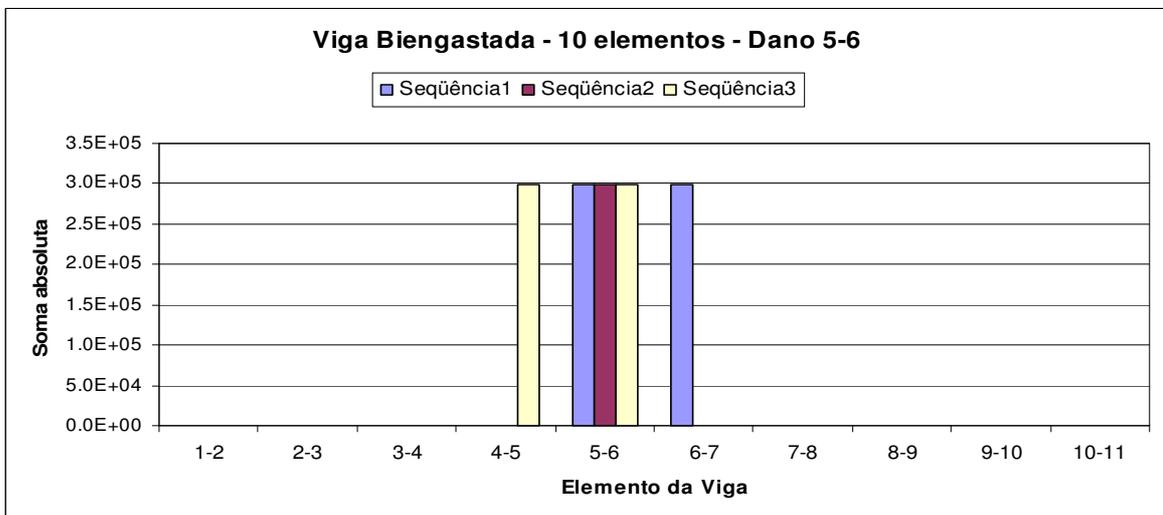


(c)

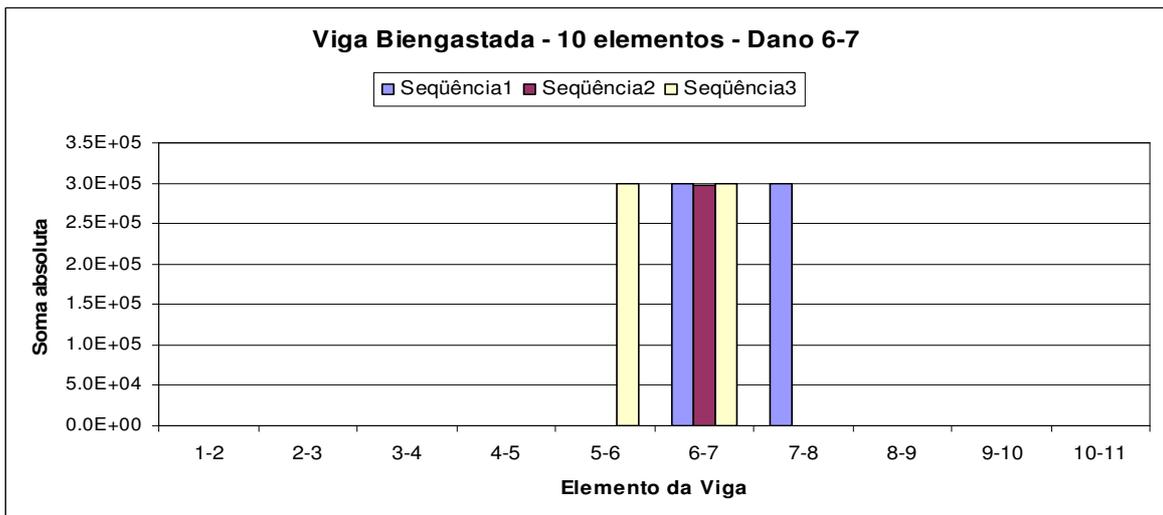
Figura 4.88 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em dez elementos.



(d)

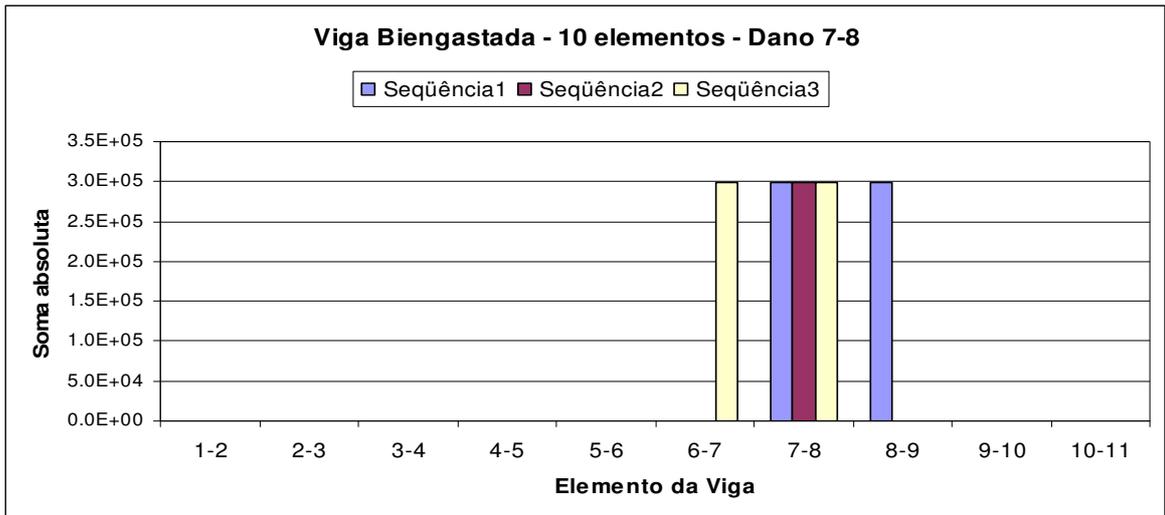


(e)

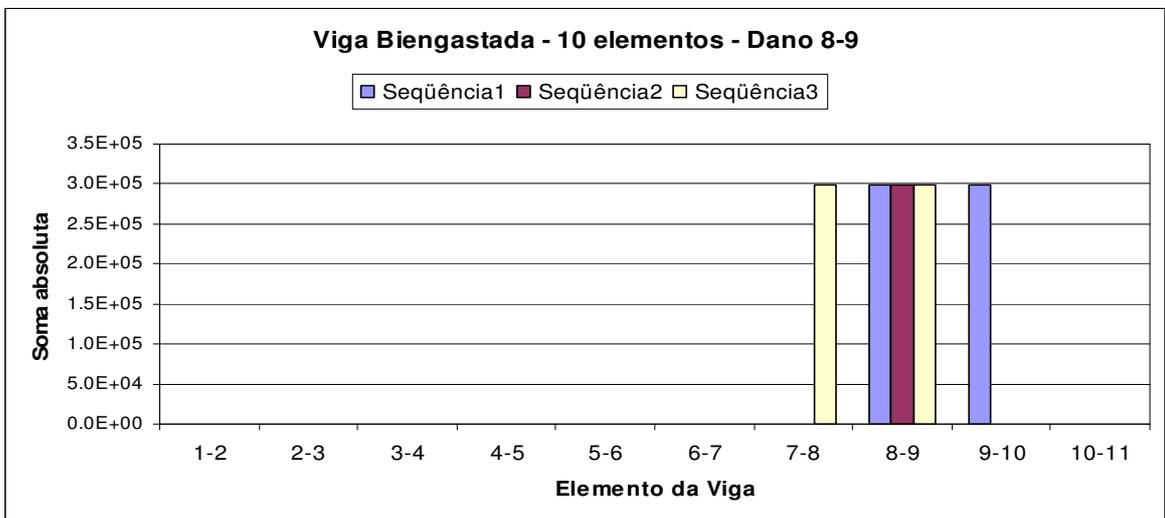


(f)

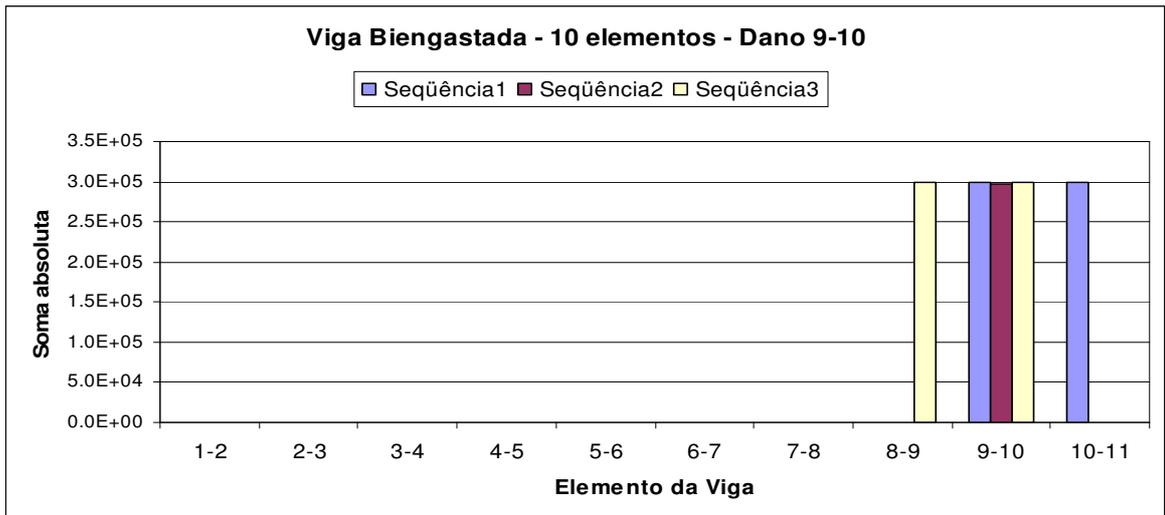
Figura 4.88 (d) a (f) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em dez elementos.



(g)

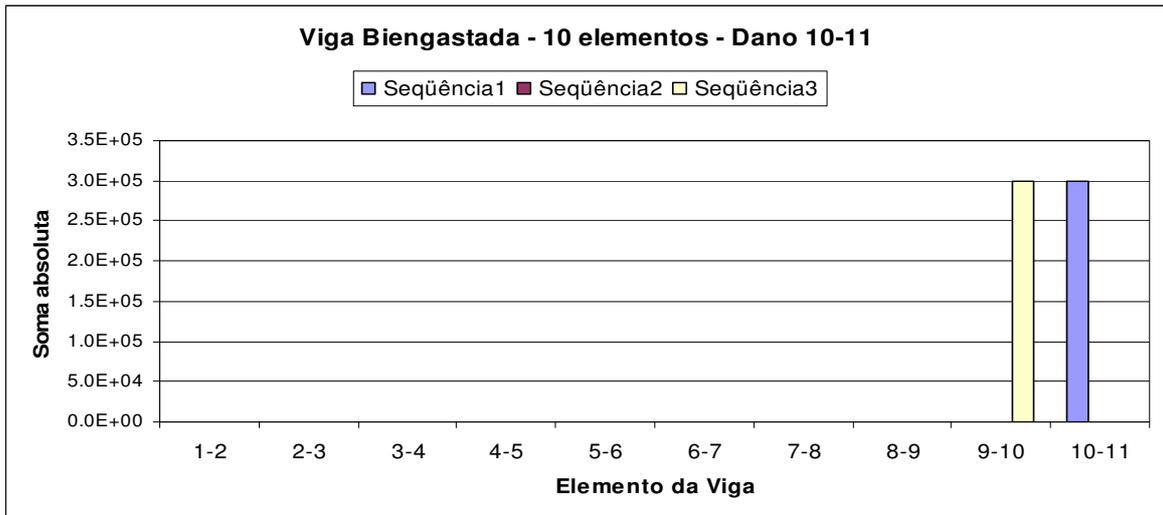


(h)



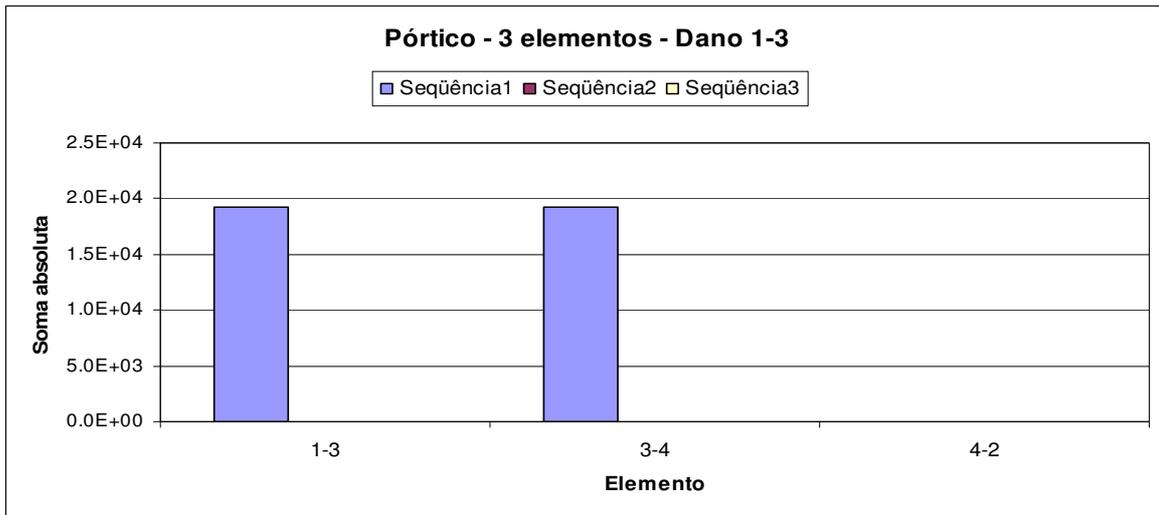
(i)

Figura 4.88 (g) a (i) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em dez elementos.

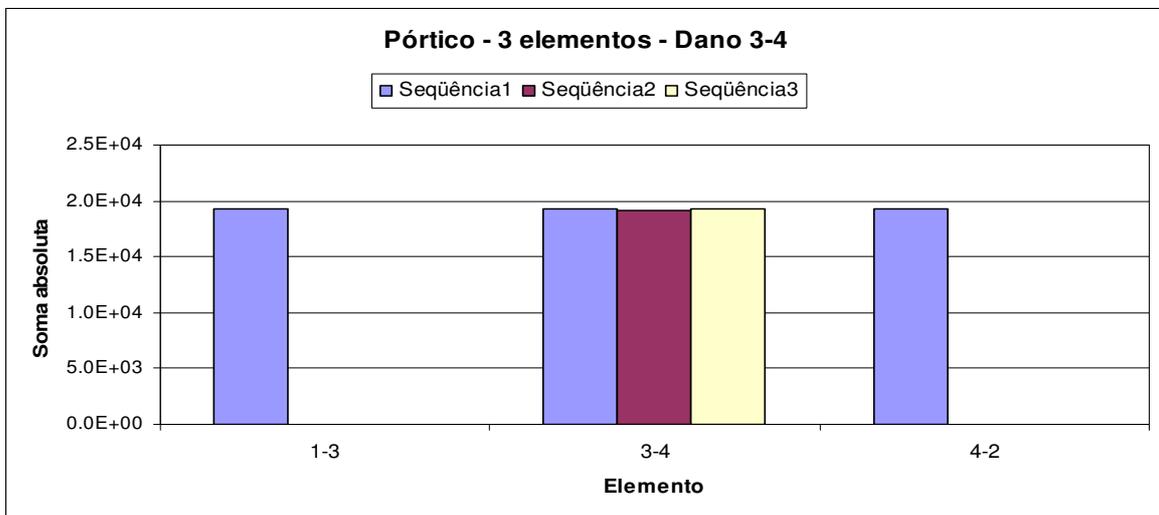


(j)

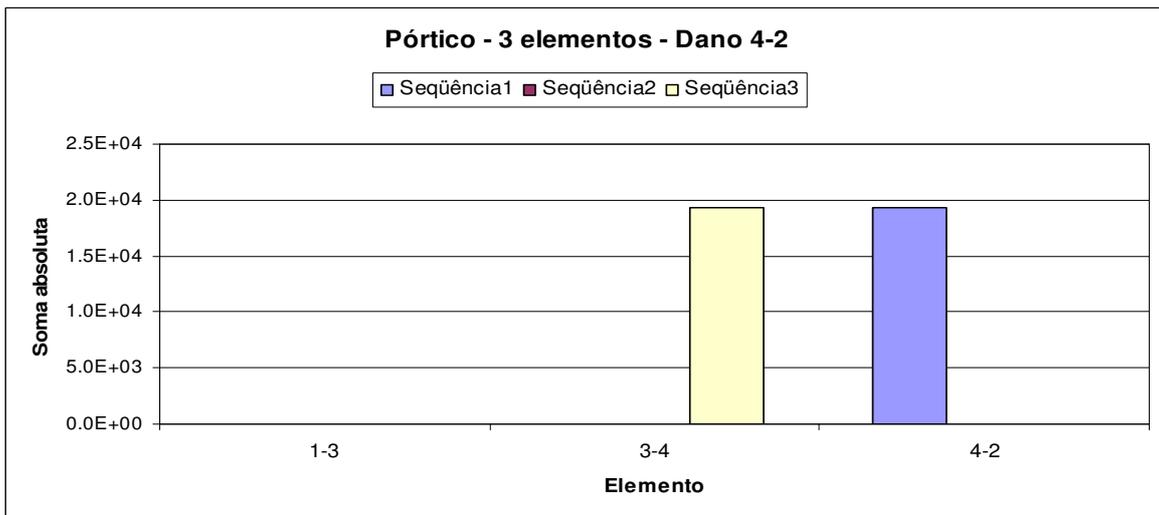
Figura 4.88 (j) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para a viga biengastada dividida em dez elementos.



(a)

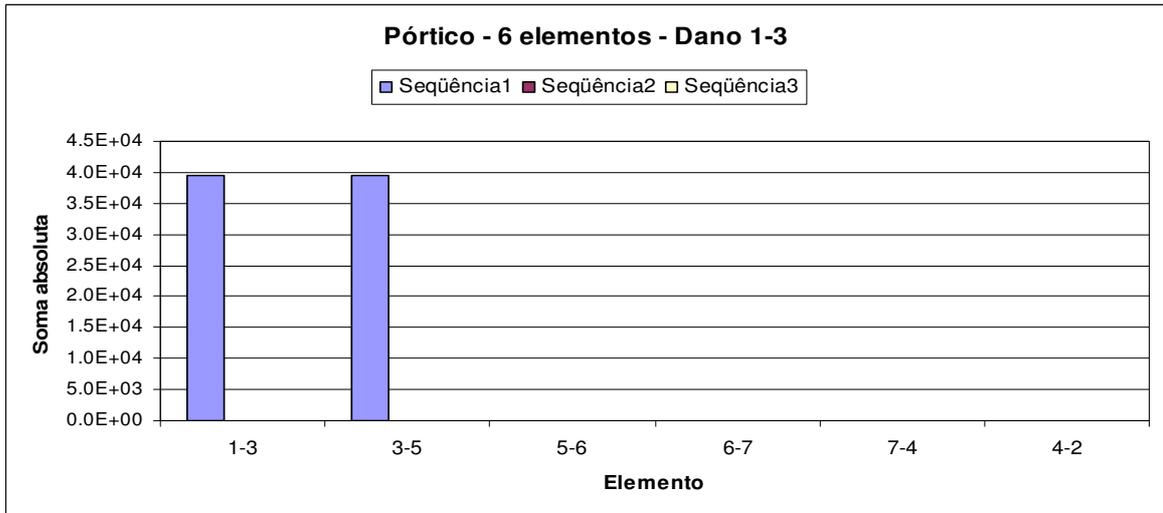


(b)

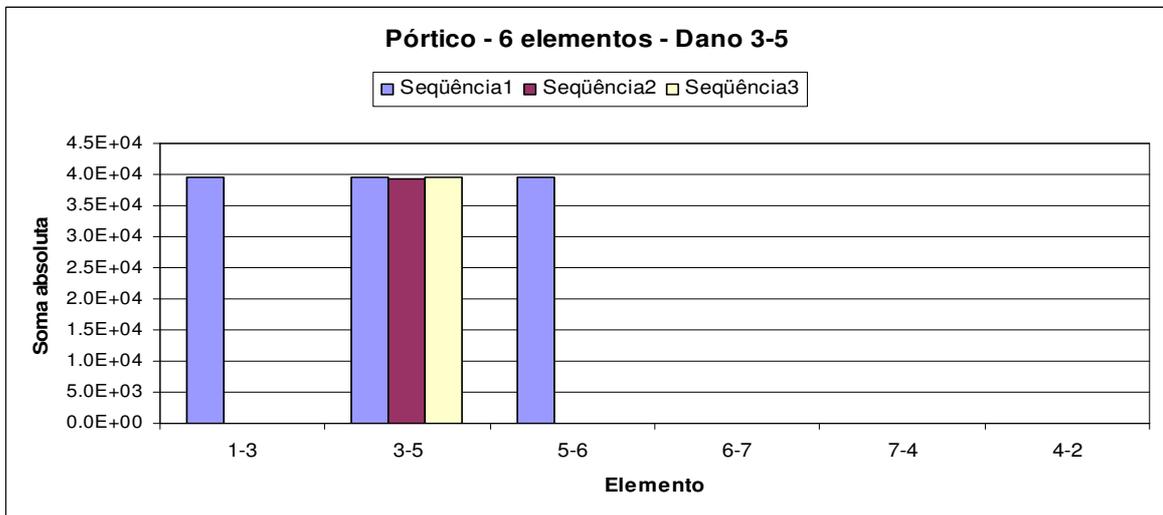


(c)

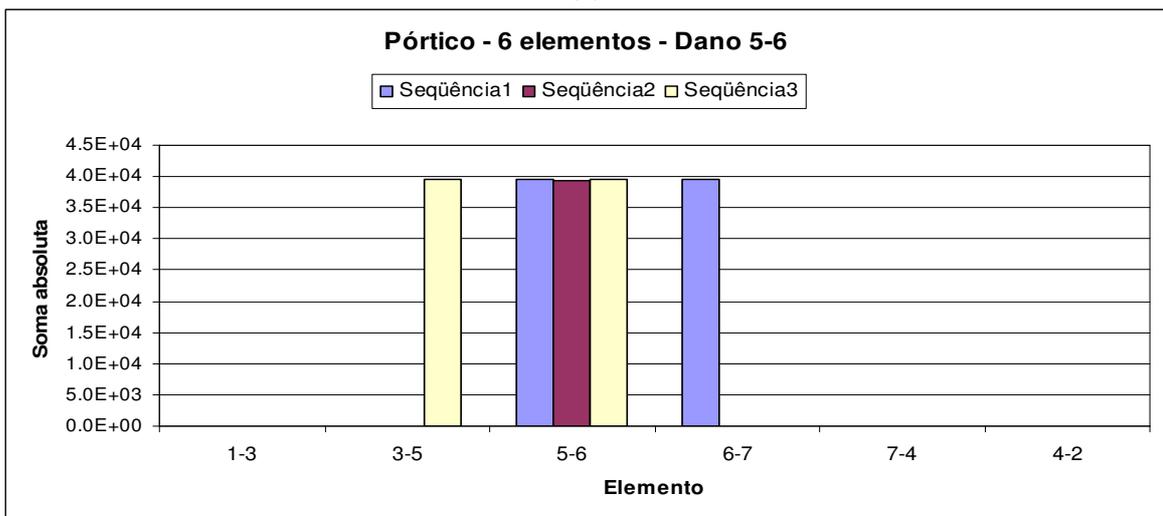
Figura 4.89 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em três elementos.



(a)

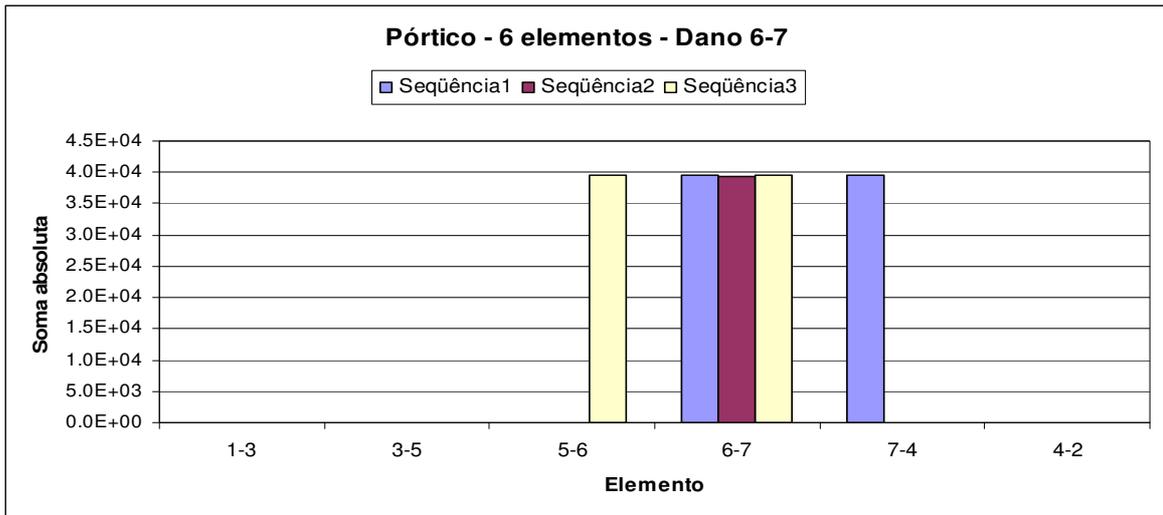


(b)

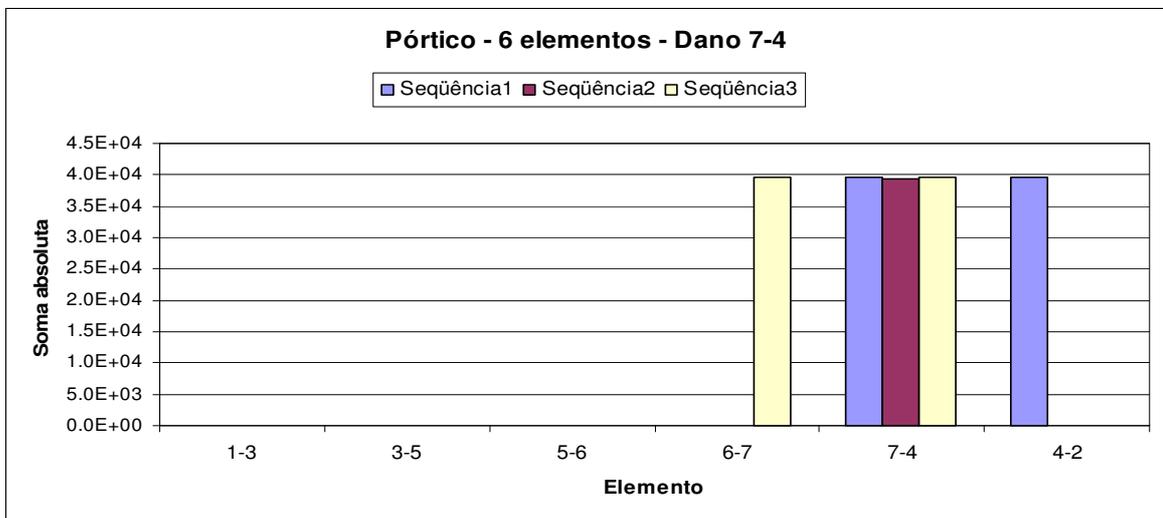


(c)

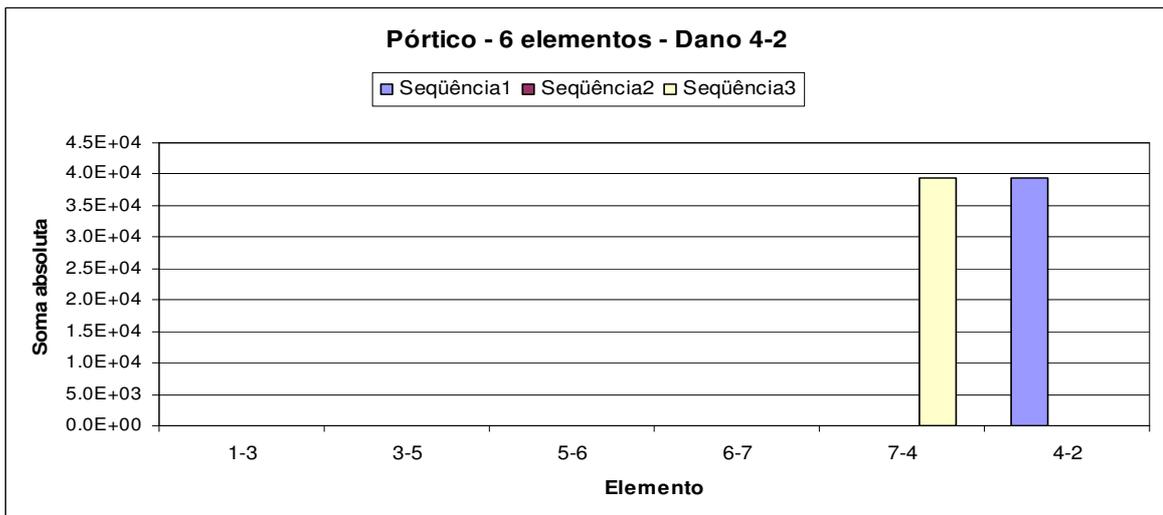
Figura 4.90 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em seis elementos.



(d)

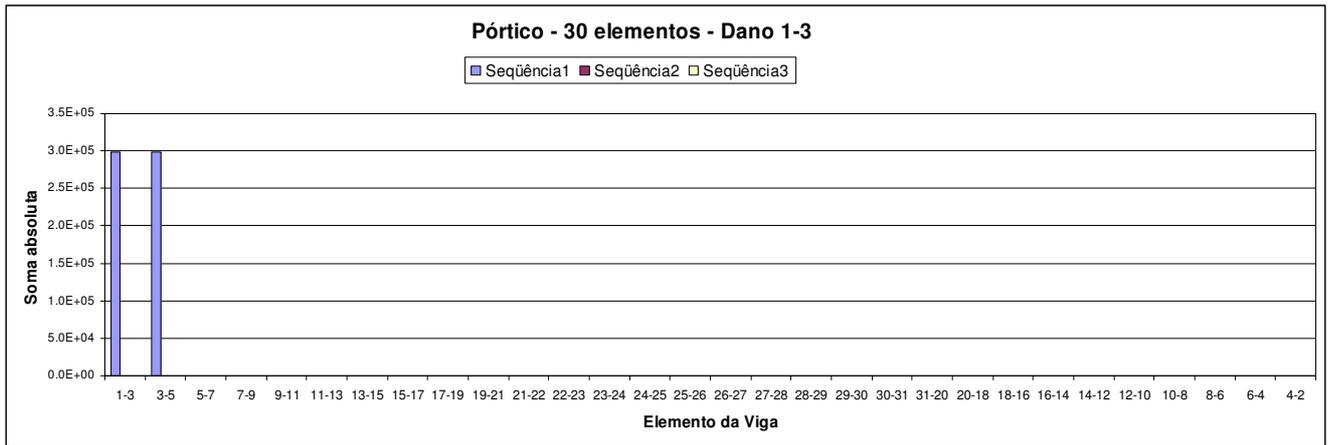


(e)

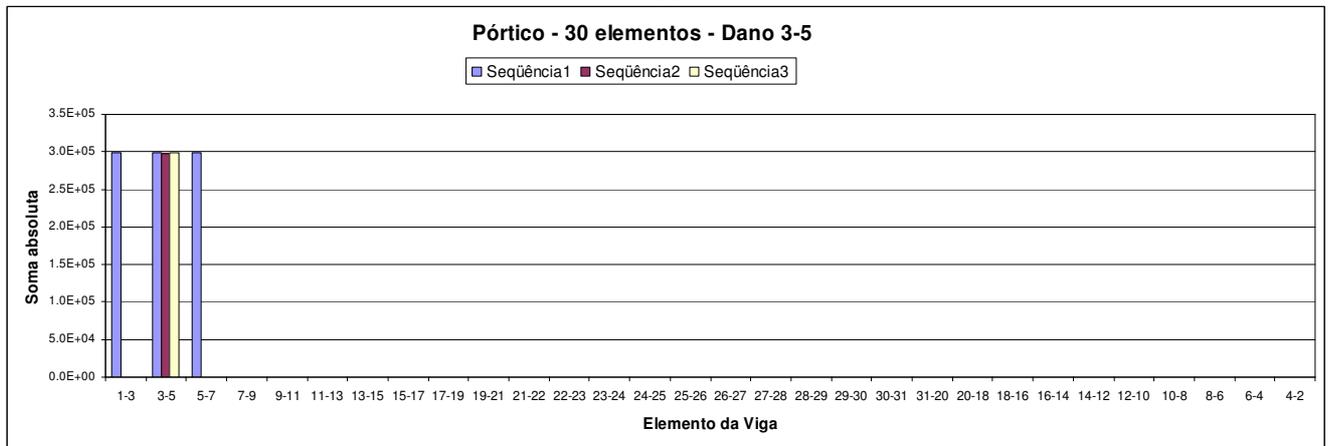


(f)

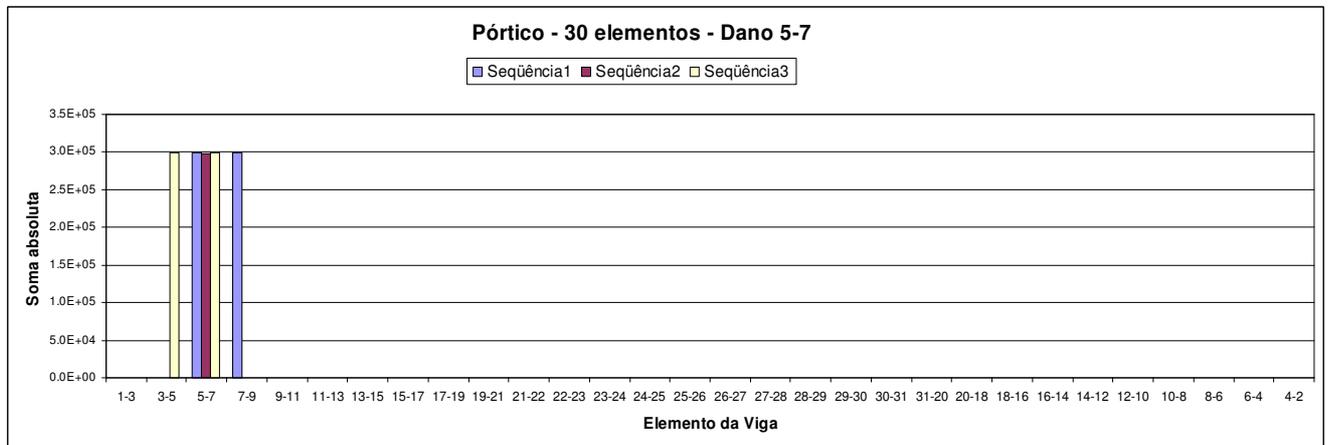
Figura 4.90 (d) a (f) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em seis elementos.



(a)

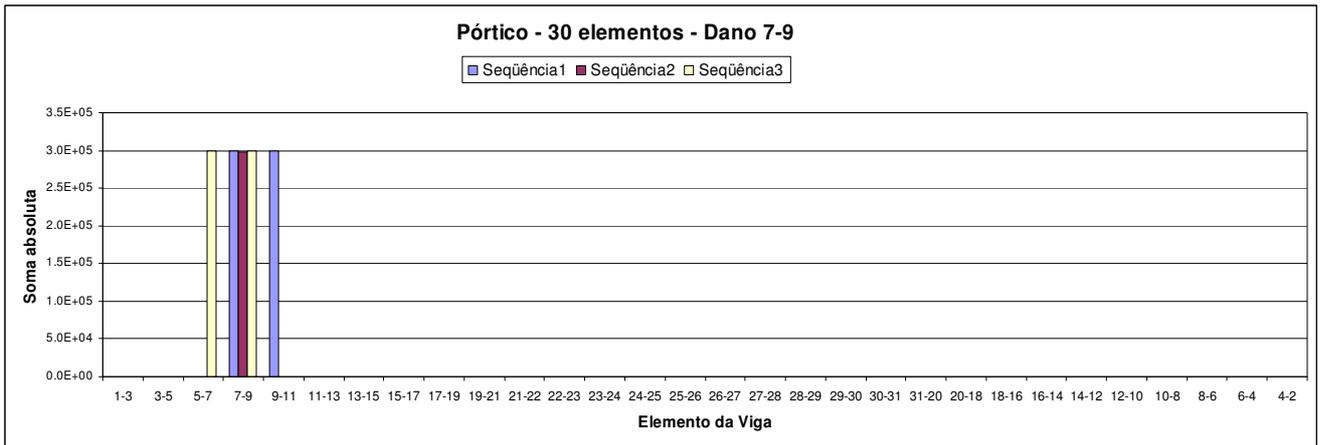


(b)

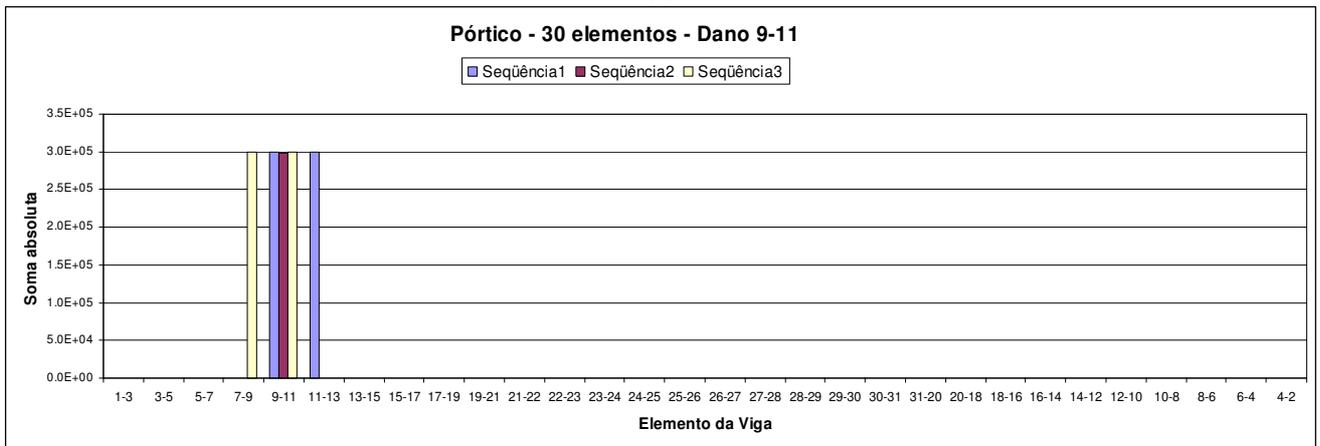


(c)

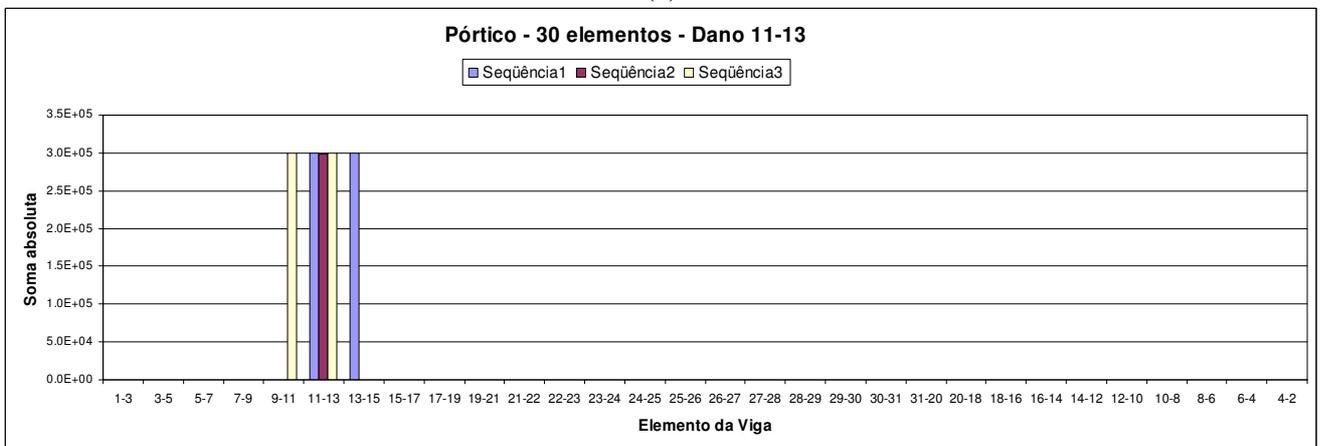
Figura 4.91 (a) a (c) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos.



(d)

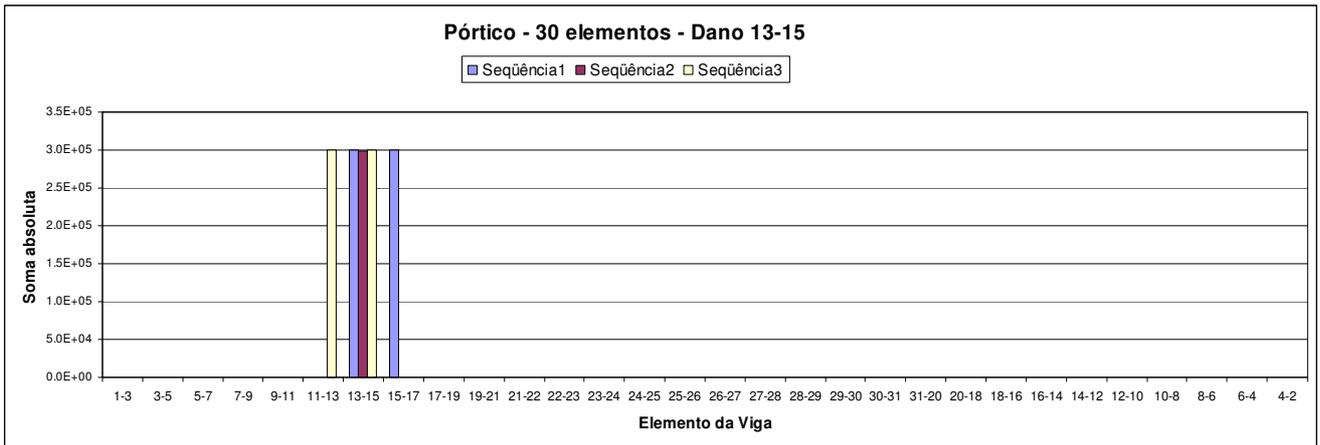


(e)

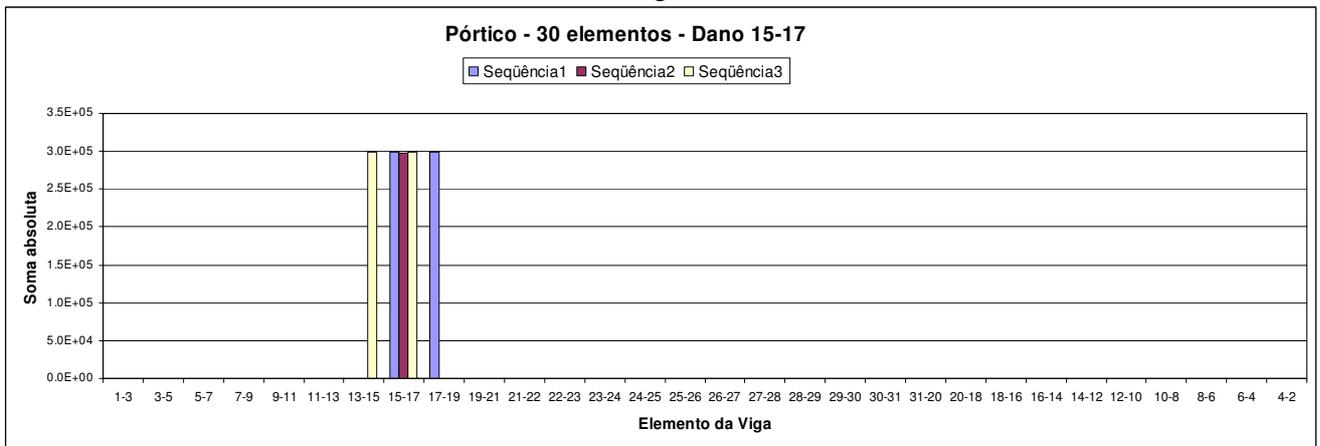


(f)

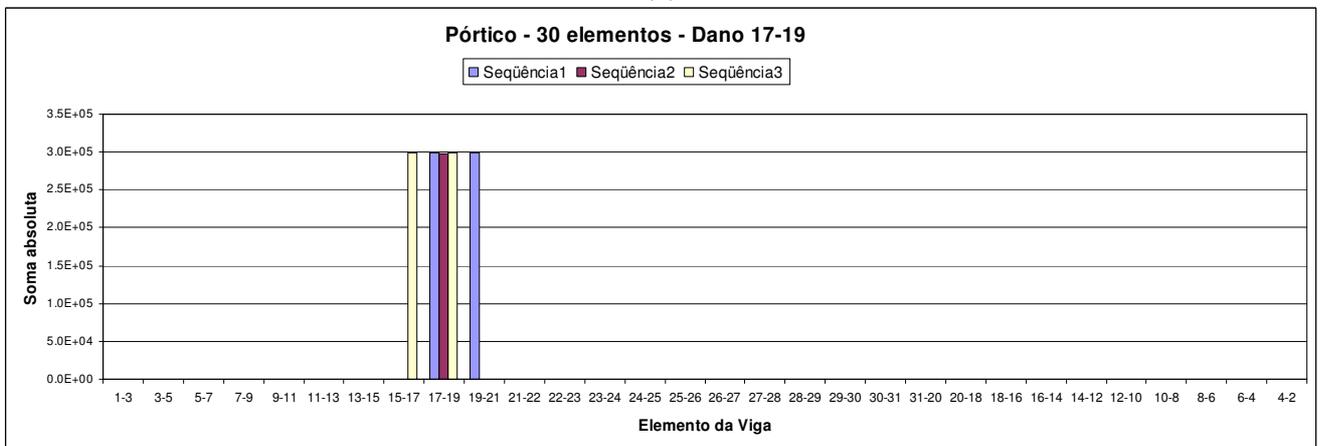
Figura 4.91 (d) a (f) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos.



(g)

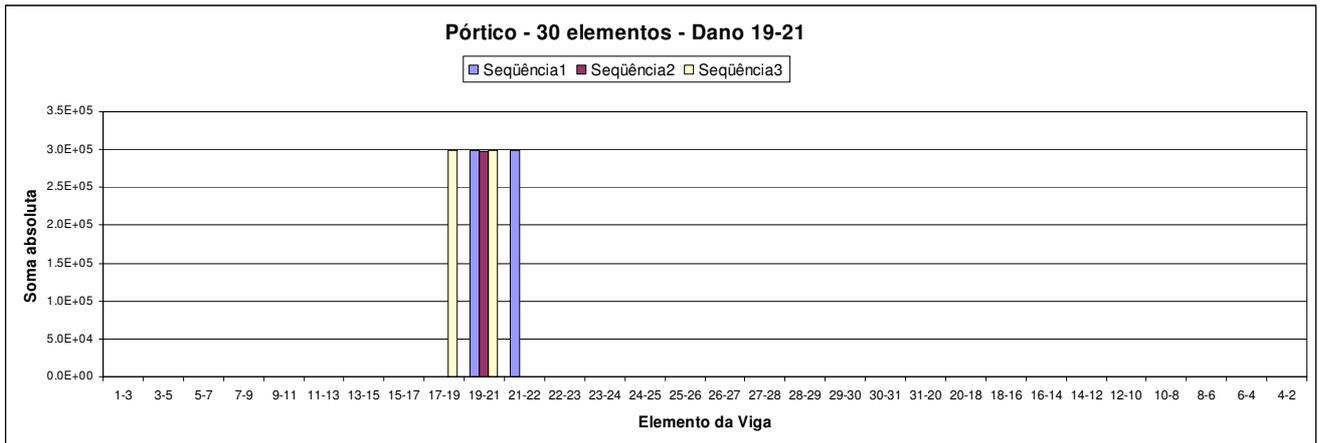


(h)

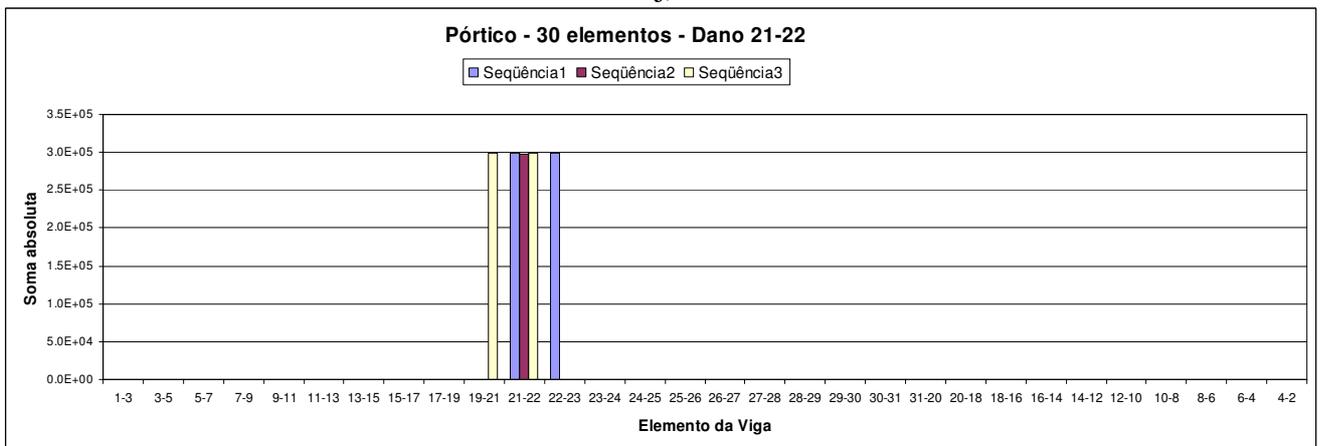


(i)

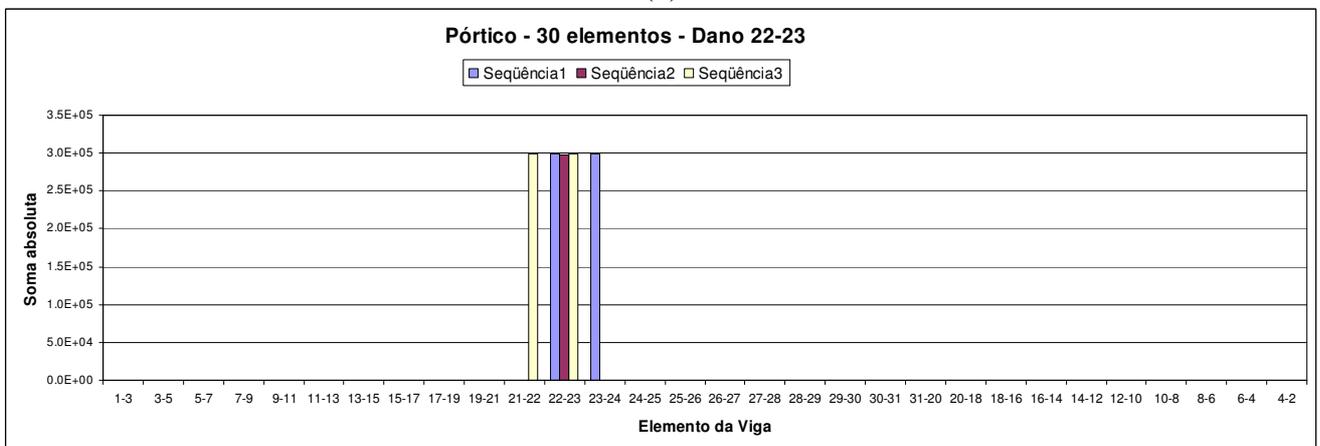
Figura 4.91 (g) a (i) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos.



(j)

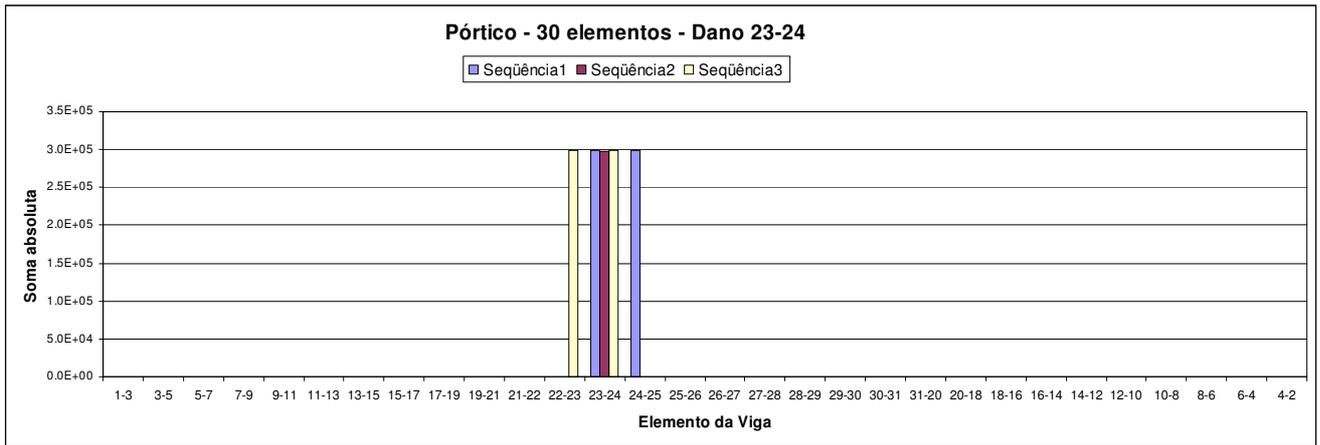


(k)

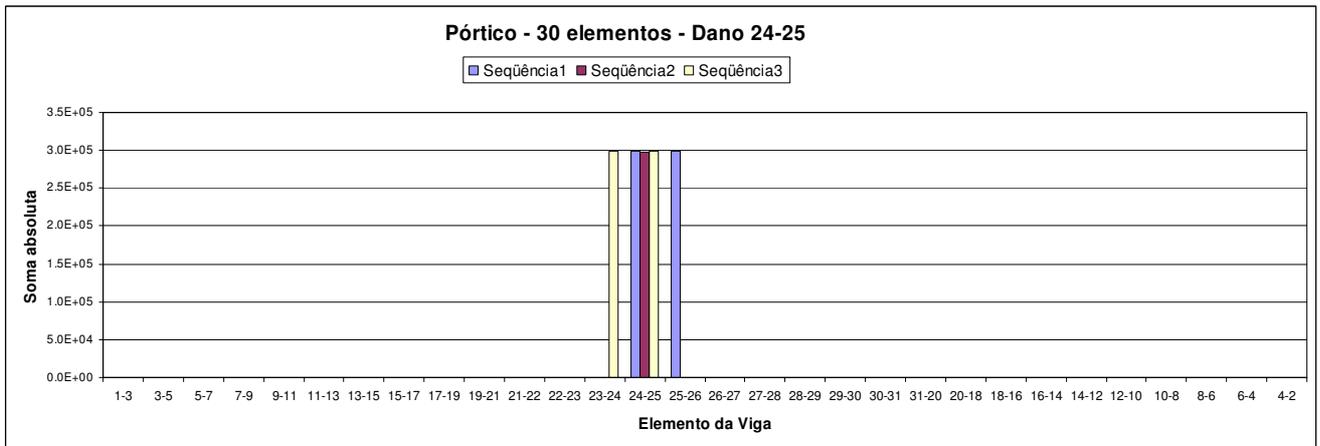


(l)

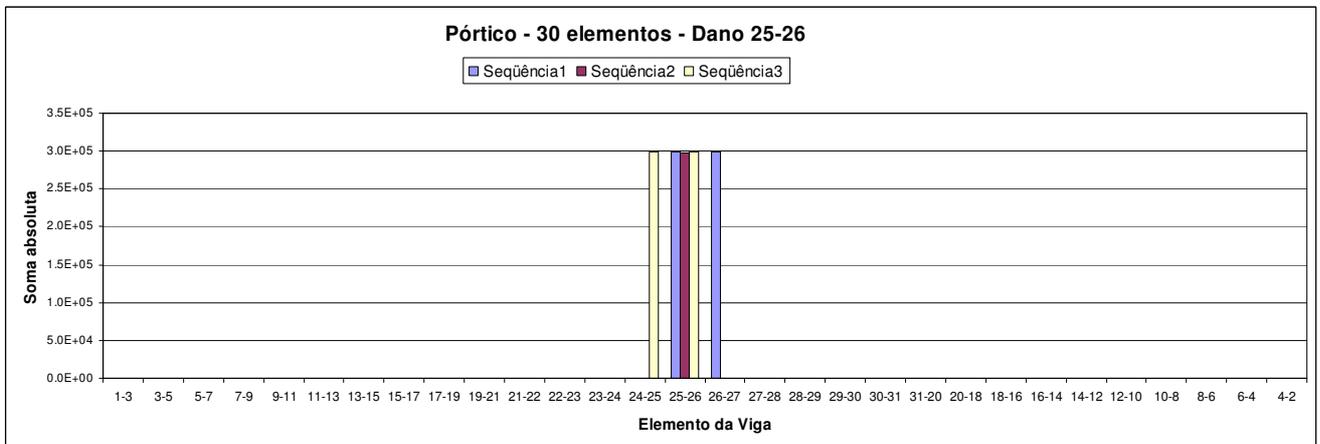
Figura 4.91 (j) a (l) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos.



(m)

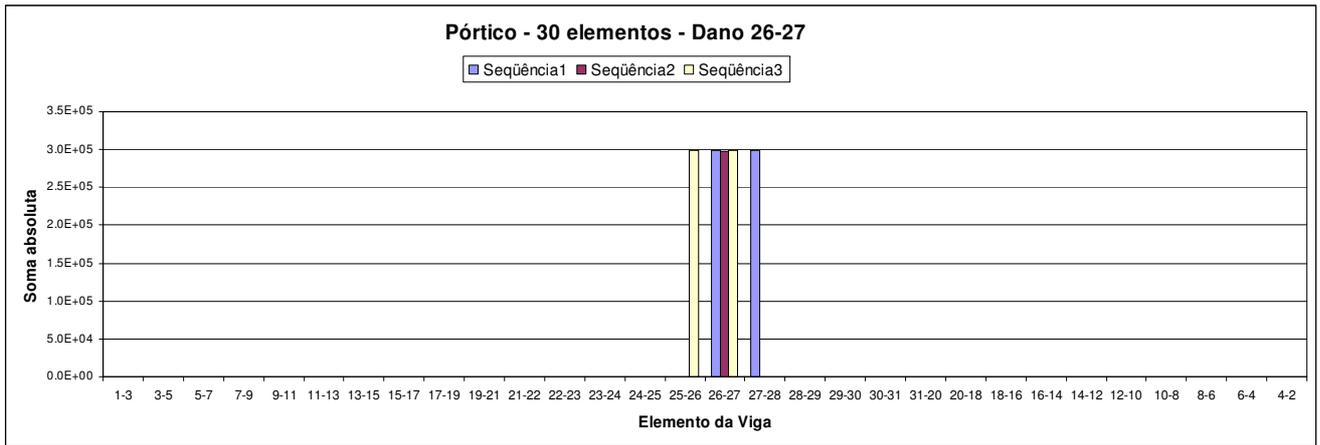


(n)

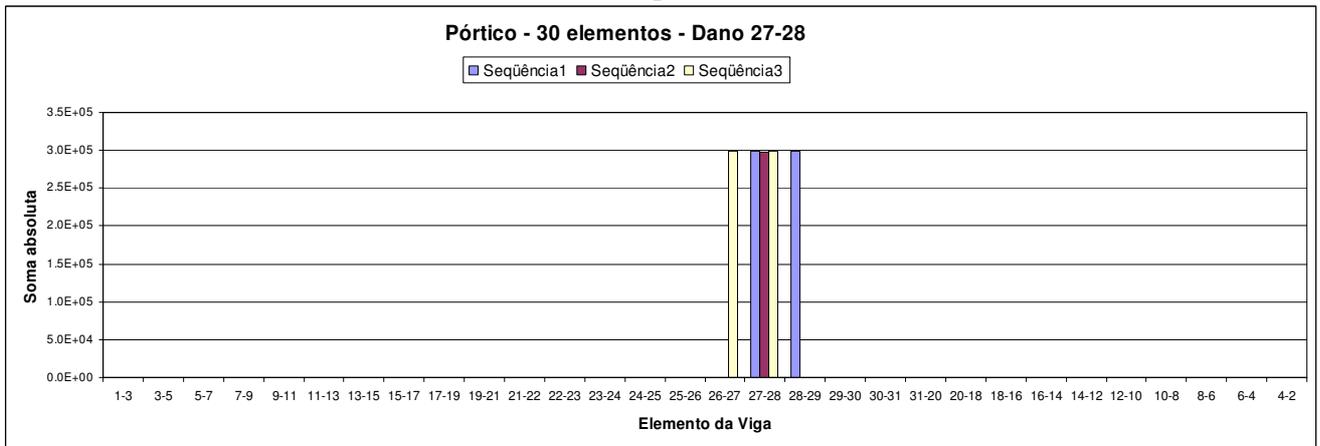


(o)

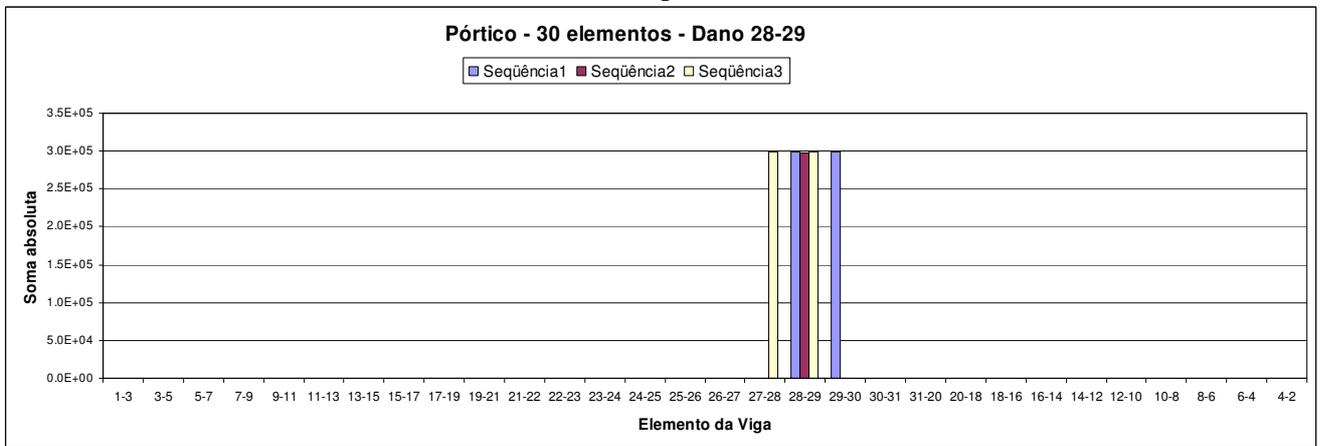
Figura 4.91 (m) a (o) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos.



(p)

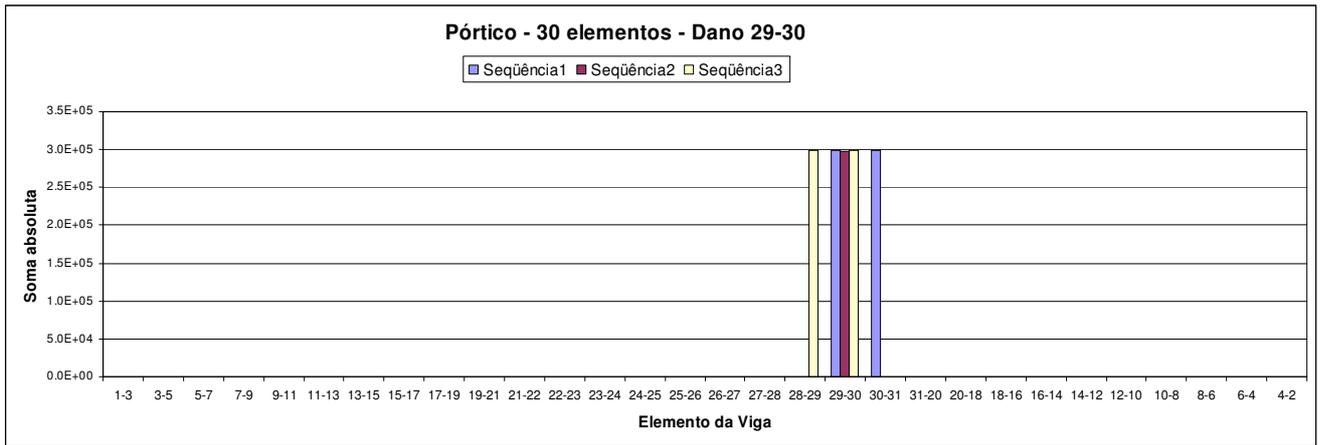


(q)

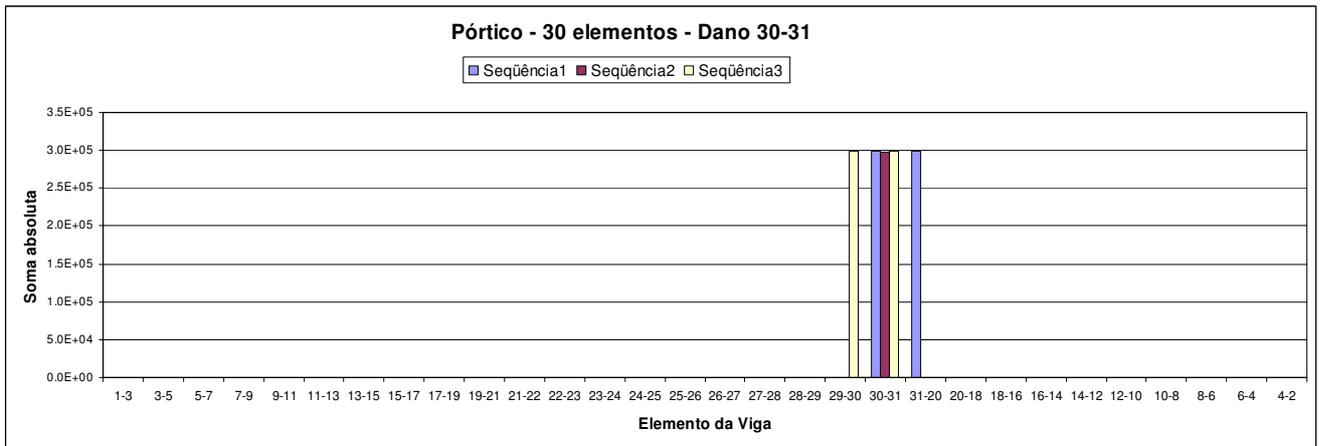


(r)

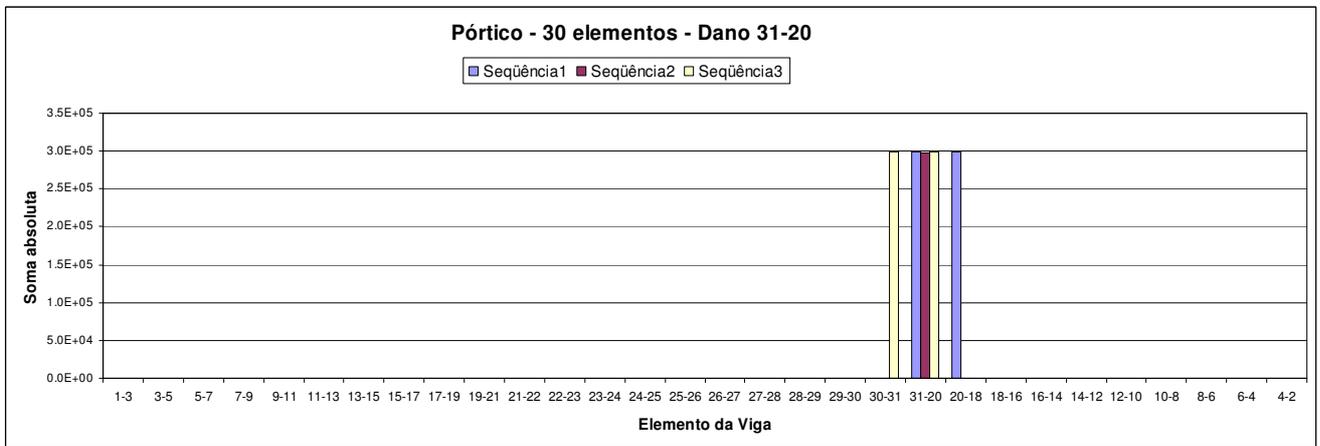
Figura 4.91 (p) a (r) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos.



(s)

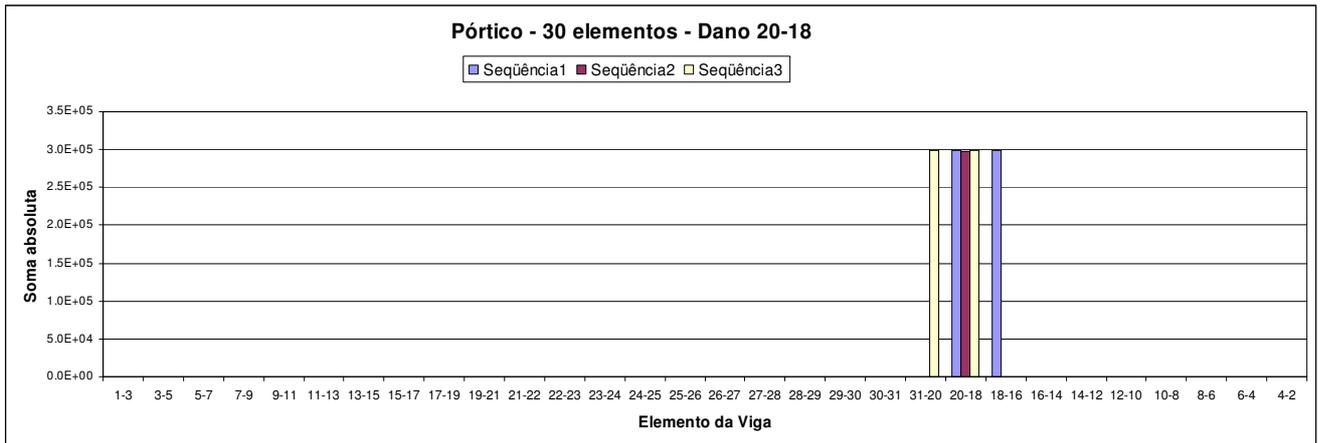


(t)

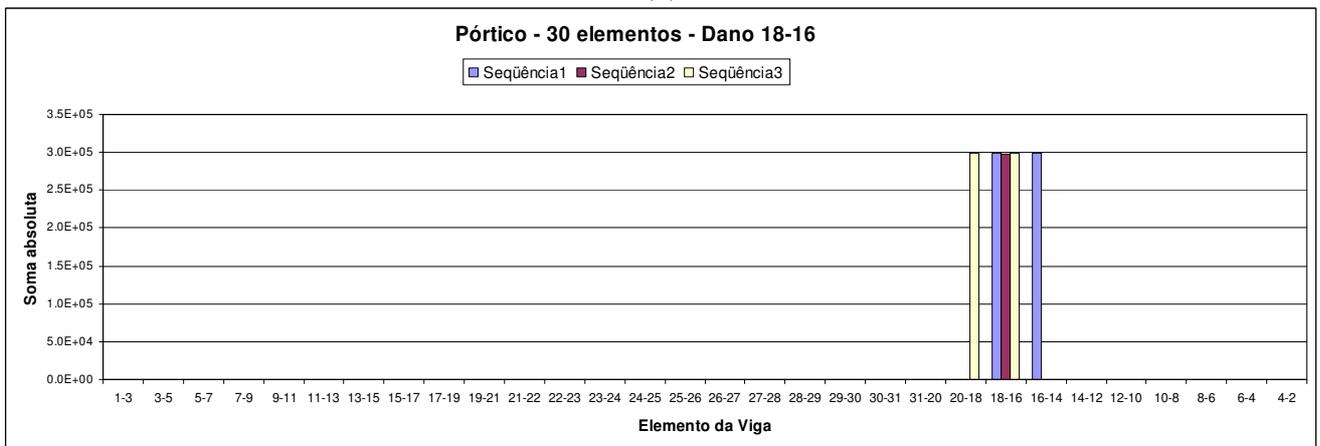


(u)

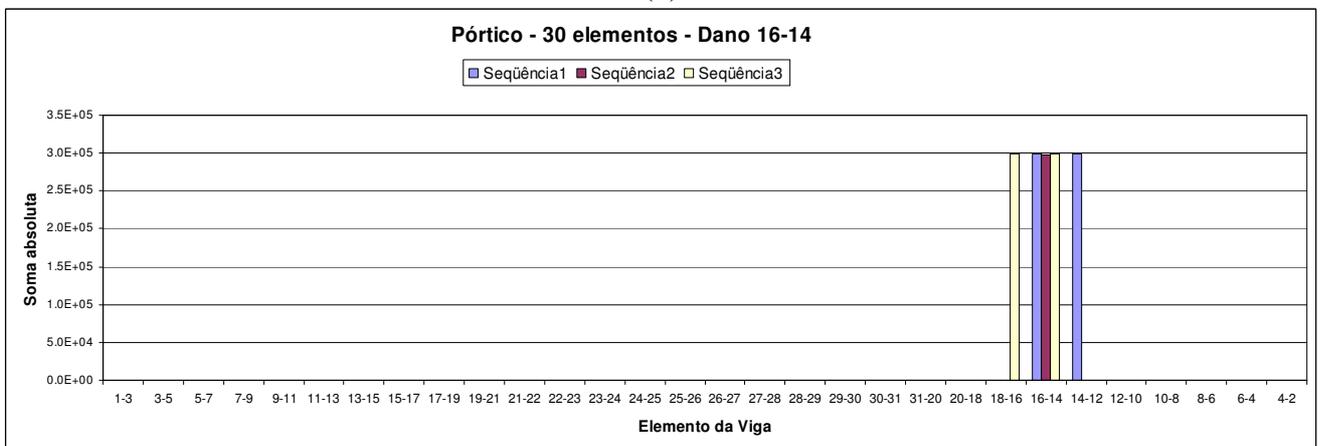
Figura 4.91 (s) a (u) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos.



(v)

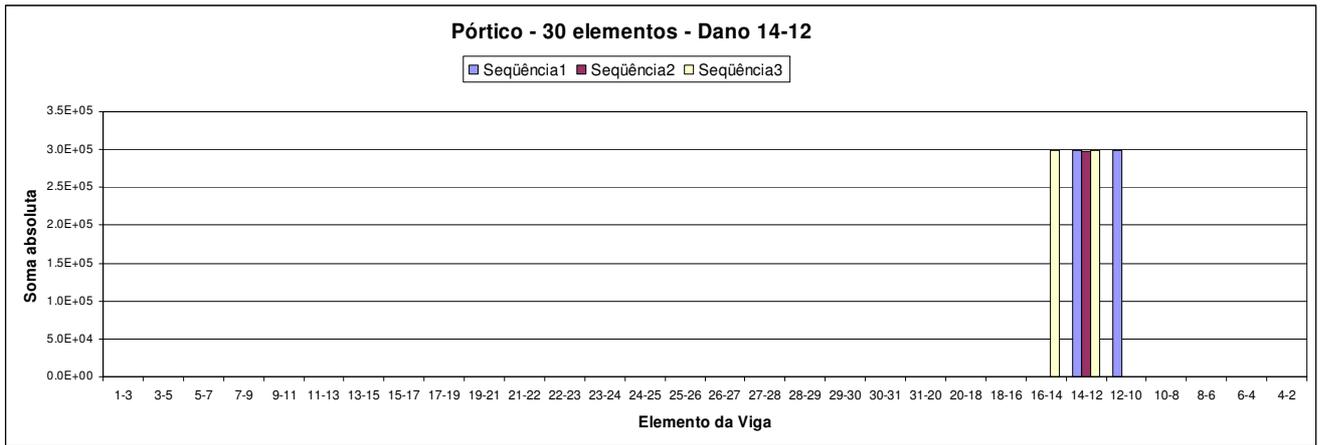


(x)

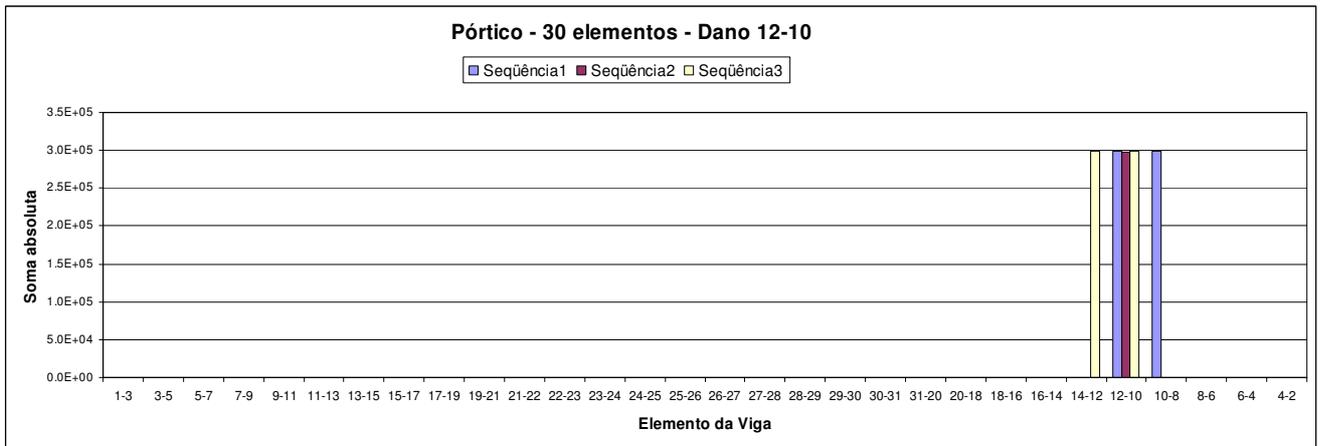


(z)

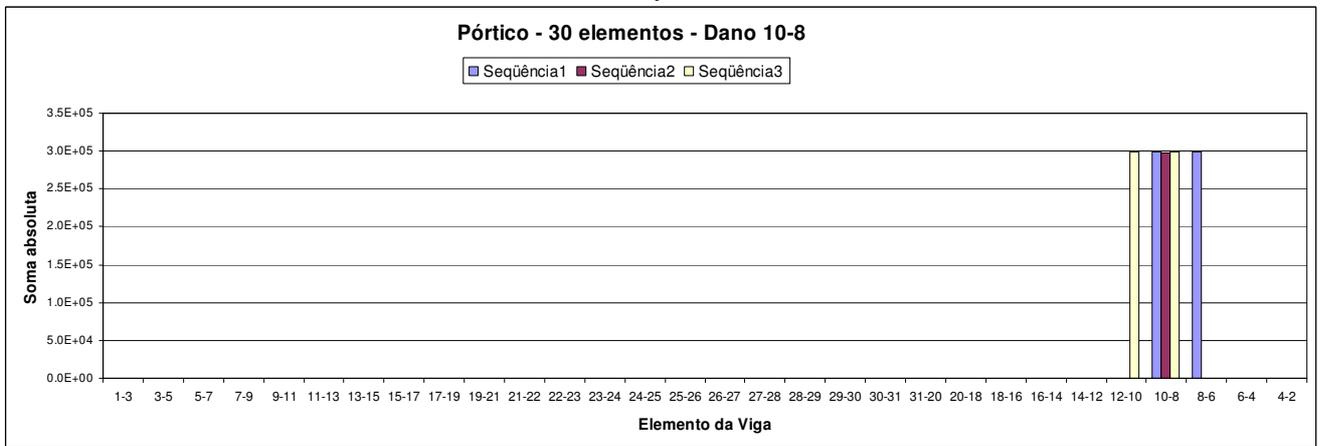
Figura 4.91 (v) a (z) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos.



(w)

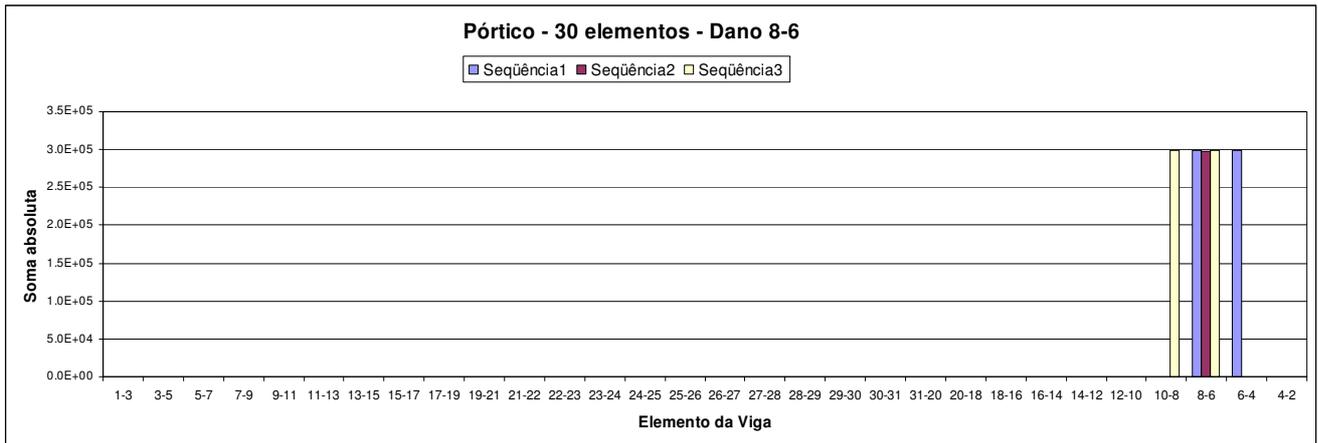


(y)

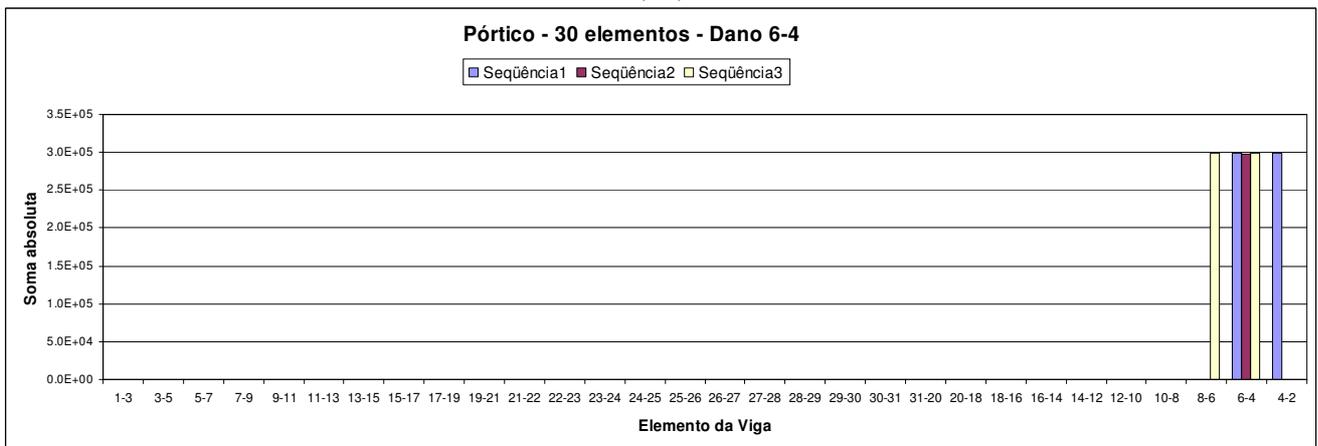


(a1)

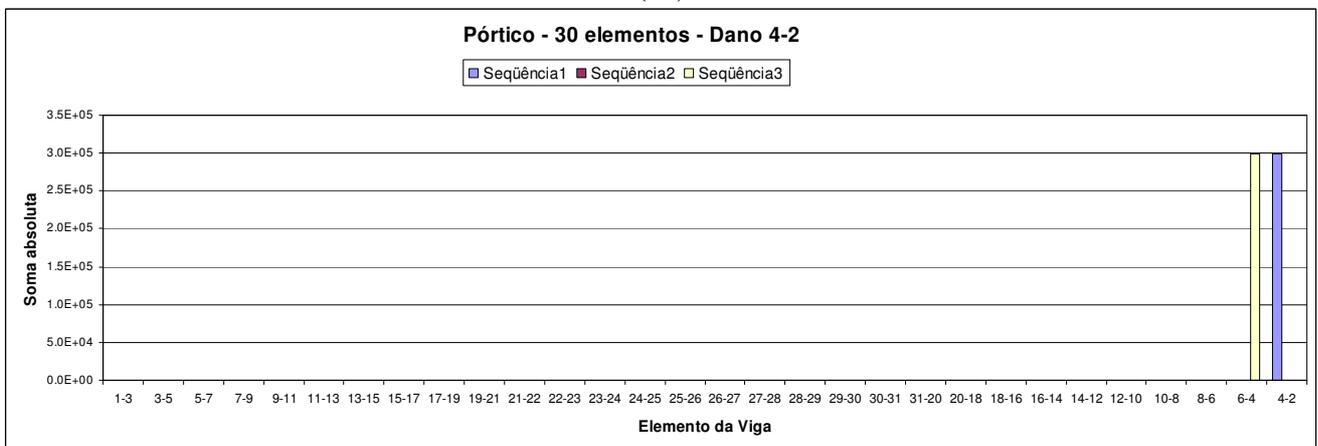
Figura 4.91 (w) a (a1) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em trinta elementos.



(b1)



(c1)



(d1)

Figura 4.91 (b1) a (d1) - Representação gráfica da associação da matriz de rigidez local com os elementos da estrutura tendo um destes elementos danificado, para o pórtico dividido em dez elementos.

Percebe-se que, para todos os gráficos das Figuras de 4.83 a 4.91, há um valor máximo, acompanhado de uma maior concentração das seqüências (quantidade de barras), exatamente onde ocorre o dano. A exceção desta regra ocorre quando o elemento danificado é adjacente ao engaste. Neste caso, existem apenas duas barras que se encontram igualmente distribuídas entre o elemento danificado e o elemento mais próximo, como mostram as Figuras 4.83(a), 4.84(a), 4.85(a), 4.86(a), 4.86(c), 4.87(a), 4.87(f), 4.88(a), 4.88(j), 4.89(a), 4.89(c) 4.90 (a), 4.90(f), 4.91(a), 4.91(d1).

Isto significa que por este método é possível detectar o dano pela análise das matrizes de rigidez comparando a matriz de rigidez estrutura intacta com a matriz de rigidez da estrutura danificada.

Em se tratando de elementos que não estão contíguos ao engaste, o local do dano será onde o gráfico apresentar o valor máximo juntamente com uma maior concentração de barras (seqüências). Por exemplo, na Figura 4.90(e), há uma concentração de barras (seqüências) no elemento 7-4, o que indica que o dano está neste elemento. E assim acontecerá para os demais gráficos.

Contudo, para os elementos adjacentes ao engaste, a disposição do gráfico é um pouco diferente, porém demonstra um comportamento comum. Logo, todas as vezes que o gráfico demonstrar o valor máximo para os dois elementos mais próximos ao engaste, significa que o dano está no elemento mais extremo, vizinho ao engaste. Por exemplo, para a Figura 4.91(d1), os valores máximos do gráfico estão apontando para 6-4 e 4-2, porém observa-se que não há a mesma concentração das seqüências como ocorre nos outros elementos, mas apenas uma barra (seqüência) para 6-4 e uma barra (seqüência) para 4-2. Sendo assim, quando o gráfico apresentar este tipo de comportamento, pode-se concluir que o elemento danificado é o 4-2.

## 5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS

### 5.1 CONCLUSÕES

As pesquisas na área numérico-computacional estão em busca de métodos rápidos, eficientes, de baixo custo computacional e de boa precisão, entre outros atributos, para através de assinaturas estruturais determinar danos em estruturas. Muitas são as assinaturas utilizadas por pesquisadores em algoritmos, mas é unânime a imprecisão na determinação precisa de danos nas estruturas por estas assinaturas. Os pesquisadores adotam as assinaturas sem conhecer estes comportamento. Este trabalho apresenta uma análise do comportamento de um conjunto de assinatura estruturais baseadas em parâmetros que medem a variação de deslocamento, frequência de vibrar e rigidez entre estrutura sem dano e com dano e mostra deficiências e qualidades de algumas assinaturas estruturais utilizadas na detecção de danos em estruturas simples.

A aplicação das assinaturas estruturais para as diferentes situações de danos e cargas impostas às estruturas simples aqui analisadas, permitiu-nos intuir, através da análise gráfica, que é possível localizar o dano. Algumas assinaturas mostram-se mais sensíveis às variações dos deslocamentos, frequências e rizezas que foram utilizadas nas assinaturas estruturais aqui consideradas.

Na viga em balanço, observou-se que, independente da assinatura utilizada, quando a carga concentrada é aplicada a cada nó da estrutura, o comportamento gráfico obedece a um padrão que, por inspeção, possibilita a localização do dano na estrutura. Este padrão indica que o início do crescimento do gráfico acontece justamente onde existe o dano, pois é desta posição em diante (em direção ao extremo sem apoio) que as diferenças de  $\Delta u^2$  apenas ou relativas à variação  $\Delta \omega^2$  da frequência estrutural são maiores. Isto ocorre, pois em uma viga em balanço, naturalmente, os maiores valores de deslocamentos são obtidos para quanto mais a carga estiver distante do engaste já que o aumento da flexibilidade de certo trecho está igualmente associado. Sabendo-se que o dano indica um aumento de flexibilidade, uma vez que há redução da área da seção da viga, o gráfico sempre apontará o início do patamar para quando a carga é aplicada próxima ao dano, pois este é o ponto onde o deslocamento tende a aumentar exatamente devido ao aumento de flexibilidade

causado pelo dano. Portanto, este é um padrão que indica um procedimento para se detectar a posição do dano neste tipo de estrutura.

Para a viga biengastada dividida em três, seis ou dez elementos, também independente da assinatura, a localização do dano está associada ao deslocamento do pico da onda envoltória perceptível em alguns gráficos analisados. Observa-se que tal pico sempre tende para o lado em que está localizado o dano. Como a viga biengastada é uma estrutura simétrica, quando o pico do gráfico estiver no meio, significa que o dano está no elemento central da viga. Nota-se ainda que a introdução de um número maior de vínculos nesta estrutura dificulta a formação de um gráfico padrão que possa ser considerado claro para esta situação quando comparado com os gráficos da viga em balanço antes analisada.

Ainda, para as mesmas condições de aplicação de carga concentrada a cada nó, os gráficos referentes ao pórtico possuem um comportamento ainda mais peculiar, pois variam dependendo de como a estrutura é dividida. Para o pórtico dividido em três elementos os resultados não são muito expressivos, devido a pouca quantidade de elementos, é fácil notar que o pico do gráfico tende para o local onde está localizado o dano, assim como ocorre para pórtico dividido em seis elementos. Porém, para o pórtico dividido em trinta elementos, o comportamento se mostra semelhante ao da viga biengastada em que o pico do gráfico tende para o lado de onde está localizado o dano. Foi observado ainda que para melhorar os resultados no caso do pórtico dividido em trinta elementos seria necessário fazer a aplicação da carga concentrada nó a nó e não em nós alternados como foi feito neste trabalho.

Pode-se afirmar que os resultados foram mais claros e precisos para a viga em balanço, pois é a única estrutura analisada que possui um vínculo mínimo. Sabe-se que a extremidade engastada impede deslocamentos, portanto, é natural que nas regiões adjacentes ao engaste haja uma influência deste impedimento que conseqüentemente se reflete na dificuldade de obtenção de resultados. Sendo assim, quanto menos vínculos houver na estrutura, menos impedimento de deslocamento existe e maiores variações de deslocamentos poderão ser observadas no lado livre que resulta em influenciar diretamente as assinaturas.

Outro ponto importante a ser destacado nesta pesquisa diz respeito às subdivisões das estruturas. Nota-se que a discretização em mais ou menos elementos na estrutura influencia na precisão da localização do dano. Portanto, quanto mais refinada for a malha, mais precisa é a posição do dano e menor será a extensão a se examinar. Por exemplo, em uma viga de 9 metros dividida em 3 elementos o dano estará localizado em uma faixa de 3 metros. No entanto, se a mesma viga de 9 metros for dividida em 10 elementos o dano se encontrará numa faixa menor de apenas 0,9 metros.

Comparando as expressões das assinaturas  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $F_3(z)$ ,  $F_4(z)$ ,  $F_5(z)$  e  $F_6(z)$  entre si, foi possível observar que na avaliação dos gráficos para a situação de carga concentrada fixa e variação do dano ao longo da estrutura, a função  $F_1(z)$  foi que apresentou resultados mais distorcidos, não apresentando um padrão confiável. Isto se deve à utilização de apenas duas frequências na expressão. Portanto, esta peculiaridade observada para a assinatura  $F_1(z)$  não a torna uma assinatura confiável. Esta informação é útil para se definir assinaturas mais ou menos confiáveis o que não é analisado pela grande maioria dos artigos disponíveis na literatura. Inclusive alguns autores basearam-se em assinaturas deste tipo ou parecidas e reportam dificuldades para encontrar a localização do dano sem revelar o porquê. Sendo assim mostrou-se mais conveniente a utilização do somatório das diferenças de frequência ao quadrado ( $\sum_{k=1}^6 \Delta\omega_k^2$ ), utilizando-se as seis primeiras frequências mais baixas como ocorre nas assinaturas  $F_2(z)$ ,  $F_4(z)$ , e  $F_6(z)$ .

Contudo, observou-se ainda que, em alguns casos, como na viga biengastada dividida em três elementos e no pórtico dividido em seis e trinta elementos, não foi apenas a assinatura  $F_1(z)$  que apresentou distorções, o que mostra que mesmo com a utilização de  $\sum_{k=1}^6 \Delta\omega_k^2$  nas funções, ainda sim, podem ocorrer distorções, pois as frequências apresentam variações muito aleatórias. Portanto, as assinaturas que se comportaram de maneira mais previsível e suave foram as assinaturas  $F_3(z)$  e  $F_5(z)$  que contém em suas expressões apenas parâmetros estáticos.

Por outro lado, as assinaturas  $F_4(z)$  e  $F_6(z)$  foram as que apresentaram maiores valores numéricos demonstrando assim maior sensibilidade, sendo, portanto, mais aconselhadas de serem utilizadas em uma rotina de detecção de dano.

Foi analisada ainda a localização de danos nas estruturas a partir das matrizes de rigidez, comparando a intacta com a danificada. Isto é possível, uma vez que o aparecimento de uma falha na estrutura reflete-se diretamente na perda de rigidez. Os gráficos apontaram com precisão o local onde ocorreu o dano. Para detectar o dano analisando apenas as matrizes de rigidez intacta e danificada de uma mesma estrutura, basta levantar as características físicas da estrutura a ser analisada e montar novamente sua matriz de rigidez para compará-la com a matriz de rigidez inicial, considerada intacta. Caso haja dano, o gráfico apontará o valor máximo para o local do dano. Contudo, a aplicação prática deste método seria ainda mais interessante se fosse possível obter com facilidade a matriz de rigidez da estrutura a partir de respostas estáticas ou dinâmicas. Nesta pesquisa, tentou-se obter a matriz de rigidez de uma estrutura a partir destas respostas (no caso, deslocamentos), contudo obteve-se uma matriz singular, ou seja, o sistema produziu equações linearmente dependentes o que impossibilitou a obtenção da matriz de rigidez a partir dos deslocamentos da estrutura.

Apesar de esta pesquisa ter atingido alguns resultados que indicam a localização de danos, alguns pontos devem ser melhorados. Nota-se que fazer a análise de assinaturas é um trabalho numérico de recolhimento de dados bastante lento, mas seria interessante, por exemplo, um estudo das assinaturas estruturais quando existe mais de um elemento danificado para a mesma estrutura.

Poderia ter sido ainda incluída a análise de alguns métodos de descontaminação de ruídos de dados reais, já que podem ocorrer na prática devido a erros de instrumentação ou outras imprecisões, como por exemplo o método do filtro de Kalman, filtro de Thikonov.

Existe também a possibilidade da criação de programas computacionais que sejam utilizados para a geração das matrizes de rigidez e cálculos dos autovalores (frequências), além do cálculo de deslocamentos da estrutura, o que conferiria maior rapidez ao processo e impediria pequenos erros de cálculo. No programa, podem ainda ser incluídas sub-rotinas para execução de filtragem de dados (filtro de Kalman, Filtro de Thikonov, entre outros).

Os procedimentos numéricos para de localização de danos em estruturas planas, estudados neste trabalho, revela algumas assinaturas com potencial para serem eficazes na localização de danos.

## 5.2 SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

A solução de Problemas Inversos, especialmente na detecção de danos estruturais, ainda não é uma área vastamente estudada no campo das Ciências Exatas. Sendo assim, é interessante que sejam desenvolvidos estudos futuros dentro desse tema, como por exemplo:

- Análise de novas Assinaturas Estruturais, para que se verifiquem novas potencialidades matemáticas no uso de diferentes formulações;
- Análise das mesmas Assinaturas desta pesquisa, porém para mais de um elemento danificado na mesma estrutura;
- Aperfeiçoamentos de métodos numéricos para que seja possível obter com precisão a matriz de rigidez de uma estrutura a partir de suas respostas dinâmicas e/ou estáticas;
- Implementação de um programa para cálculo de autovalores (frequências), matrizes de rigidez e deslocamentos para diferentes tipos de estruturas;
- Utilização de filtros e outros métodos para filtragem de dados reais contaminados;
- Aplicação das simulações desta pesquisa em laboratório para apontar as diferenças que ocorrem em uma situação real e testar a eficácia do método.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVIM, Ronaldo Barbosa, **Problemas Diretos e Análise de Sensibilidade no Transporte de Poluentes em Rios**. 2004. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- BARISHPOLSKY, B. M.. A Combined Experimental and Numerical Method for the Solution of Generalized Elasticity Problem. **Experimental Mechanics**, Boston, v. 20, n. 10, p. 345-349, 1980.
- BECK J. V..Criteria for Comparison of Methods of Solution of the Inverse Heat Conduction Problem. **Nuclear Engineering and Design**, Michigan v. 53, n. 1, p. 11-22, 1979
- BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; ST. CLAIR; C. R, JR. **Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems**. New York: Wiley-Interscience,1985. 326 p.
- BEZERRA, Luciano Mendes; SAIGAL, Sunil. A Boundary Element Formulation for the Inverse Elastostatics Problem (IESP) of Flaw Detection. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Pittsburgh, v. 36, n. 13, p. 2189-2202, 1993.
- BRITO, Marcus Alexandre Noronha de, **Análise de Assinaturas Elastostáticas e Elastodinâmicas na Solução do Problema Inverso de Identificação de Danos em Treliças Via Método dos Elementos Finitos**. 2008. 152f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2008.
- CARRILLO, Oscar Javier Begambre. **Algoritmo híbrido para avaliação da integridade estrutural: uma abordagem heurística**. 2007. 152 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.
- CARRILLO, Oscar Javier Begambre; LAIER, José Elias. Detecção de dano a partir de resposta dinâmica da estrutura: estudo analítico com aplicação de estruturas tipo viga. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 8, n. 35, p. 29-45, 2006.
- CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of structures**. 3rd. ed. Berkeley: Computers & Structures, 2003. 730 p.
- DEMS, K.; MRÓZ, Z. Identification of damage in beam and plate structures using parameter-dependent frequency changes. **Engineering Computations**, [S.l], v. 18, n. 1/2, p. 96-120, 2001.
- FELIPPA, Carlos A. **Introduction to finite element methods**. Boulder: University of Colorado, 2004. Paginação irregular.
- FERREIRA, Manoel Dênis Costa. **Análise Inversa em Sólidos Bidimensionais Utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. 2007. 162 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

GÁDEA, Anderson de Souza Matos. **Identificação de danos estruturais a partir das funções de respostas em frequências**. 2002. 75 f. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

HALL, T. **Carl Friedrich Gauss, A Biography**. Cambridge: MIT Press, 1970

HU, N., WANG, X., FUKUNAGA, H., YAO, Z. H., ZHANG, H. X., WU, Z. S. (2001). Damage Assessment of Structures Using Modal Test Data. **International Journal of Solids and Structures**, Tohoku, v. 38, n. 18, p. 3111-3126, 2001.

IGHAM, D. B., WROBEL L.C. **Boundary Integral Formulations for Inverse Analysis**. Boston: Computational Mechanics, Volume 1, 1997. 368p.

JESUS, Wellington Carlos de, **Estudo de Métodos de Inversão em Sensoriamento Remoto com Lasers**. 2006. 38f. Monografia (Iniciação Científica em Pesquisas Energéticas e Nucleares) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

KARDESTUNCER, H. **Elementary Matrix Analysis of Structures**. Kogakusha: Mc Graw-Hill, 1974. 428p.

LAM, H. F., KO, J. M., WONG, C. W. Localization of Damaged Structural Connections Based on Experimental Modal and Sensitivity Analysis. **Journal of Sound and Vibration**, Hong Kong, v. 210, n. 1, p. 91-115, 1998.

LIVESLEY, R.K. **Matrix methods of structural analysis**. Oxford: Pergamon, 1969. 265 p.

LUO, H.; HANAGUD, S. Dynamic Rate Neural Network Training and Composite Structural Damage Detection. **AIAA Journal**, Georgia, v. 35, n. 9, p. 1522-1527, 1997.

MASSON, J. e J. M. SOUZA. **Métodos de Energia com Aplicações a Problemas Elásticos**. Rio de Janeiro:Livraria Interciência LTDA, 1976.

NI, Y. Q.; WANG, B. S.; KO, J. M. Constructing input vectors to neural networks for structural damage identification. **Smart Materials And Structures**, Bristol, n. 11, p. 825-833, 2 out. 2002. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/SMS/11/825>>. Acesso em 28 out. 2007.

PILKINGTON, T. C. **Engineennng Contribution to Biophysical Electrocardiography**. New York: IEEE Press,1982.

PRZEMIENIECKI, J.S. **Theory of matrix structural analysis**. New York: McGraw-Hill, 1968. 468 p.

RESNICK, R., HALLIDAY, D. E KRANE, K. S. **Physics**. New York: John Wiley & Sons, 4ª Edição, 1992.

ROBERTI, Débora Regina, **Problemas Inversos em Física da Atmosfera**. 2005. 148f. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2005.

RUDY Y .; OSTER H. S. The Electrocardiographic Inverse Problem. **Critical Reviews in Biomedical Engineering**, Cleveland, v. 28, n. 1-2, p. 25-45, 1992.

SANTOS, J. V. Araújo dos et al. Modelos de identificação do dano com base nas características dinâmicas de estruturas. **Métodos computacionais em engenharia**. Lisboa, 31 maio/02 jun. 2004. Disponível em: <<http://www2.dem.ist.utl.pt/~jsantos/Research/pdf/Santos04.pdf>>. Acesso em: 24 out. 2007.

SCHUNUR, D. S.; ZABARAS, N. Finite Element Solution of Two-Dimensional Inverse Elastic Problems Using Spatial Smoothing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. Minneapolis, v. 30, n. 1, p. 57-75, 1990.

SILVA, Andrea Brasileiro. **Identificação de sistema atualizações de modelos numéricos com vistas à avaliação estrutural da integridade estrutural**. 2005. 213 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2005.

THAKKAR, S.K.; GHOSH, Goutam; SINGH, Yogendra. Structural damage identification and health monitoring and damage identification of bridges. **Advances in Bridge Engineering**. Roorkee, mar. 2006. Disponível em: <<http://www.iitr.ac.in/departments/CE/abe/11-30.pdf>>. Acesso em: 28 out. 2007.

TIKHONOV A. N.; ARSENIN, V. Y. Solutions of ill-posed problems. **Bulletin of the American Mathematical Society**. New York; v. 1, n. 3, p. 521-524, 1977

VELHO, Haroldo Fraga de Campos. Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações. **Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**, Nova Friburgo, v. 6, 2002. Disponível em: <[http://www.sbm.ac.org.br/bol/boletim\\_2002/ campos-velho-4emc.pdf](http://www.sbm.ac.org.br/bol/boletim_2002/ campos-velho-4emc.pdf)>. Acesso em: 27 out. 2007, 20:40:02.

WANG, X.; N., HU; YAO, Z. H. Structural damage identification using static test data and changes in frequencies. In: International Symposium on inverse problems in engineering mechanics, 2., 2000, Nagano. **Inverse problems in engineering mechanics 2**. Oxford: Elsevier Science, 2000. p. 239-248. Edited by M. Tanaka and G.S. Dulikravich.

WEATHERS, J. M., W. A. FOSTER, W. F SWINSON, AND J. L. TURNER. Integration of laser-speckle and finite element techniques of stress analysis. **Experimental Mechanics**. Cleveland v. 25, n. 1, p. 60-65, 1985.

WEISS, Leah. **Gauss and Ceres**. [S.l.]: History of Mathematics Term Papers, 1999. Disponível em: <<http://www.math.rutgers.edu/~cherlin/History/Papers1999/weiss.html>>. Acesso em: 10 dez. 2008.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)