UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O problema de Lang e uma generalização dos teoremas de Stäckel

Diego Marques Ferreira

Brasília
2009

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O problema de Lang e uma generalização dos teoremas de Stäckel

por

Diego Marques Ferreira

Brasília
2009

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por todas as coisas boas que acontecem na minha vida.

Em seguida, aos meus pais, Flávio Gonçalves Ferreira e Maria Margarete Marques, que me ensinaram muito e que influenciaram diretamente no meu sucesso.

À minha linda e inteligente esposa, Rubéria, pela paciência e o amor que vem mostrando ter por mim nesses anos todos.

À minha filha linda, Mabelle, pela motivação e alegria que me propicia diariamente.

Ao meu orientador, Hemar Teixeira Godinho, por me deixar muito à vontade na UnB, por ter aceitado este desafio e por me dar excelentes sugestões. Posso dizer que tive muita sorte em tê-lo como orientador.

Agradeço aos professores: João Lucas Barbosa, Jonathan Sondow, Michel Waldschmidt, Florian Luca, José Othon Lopes, Gervásio Gurgel e Antônio Paques por terem me auxiliado neste doutorado.

Agradeço aos meus amigos: Ana Paula (AP), Carlos Henrique (Leozinho), Clodomir Neto (Clausio), Jefferson (Vamp), Paulo Ítalo (Feitosa) e Luiz Antônio (Lalu) pelas conversas e o apoio no período do meu doutorado.

À minha família de Brasília que me ajudou em um momento muito importante da minha vida. Em especial meu muitíssimo obrigado aos meus tios Hamilton, Lucas, Helena e Lucia e aos meus primos Roberto e Uriane, sem eles tudo teria sido mais complicado.

Agradeço novamente a Uriane, mas agora pelas boas sugestões ortográficas que vieram a melhorar este texto.

Sou grato aos professores: Nigel Pitt, José Plinio, Said Sidki e Florian Luca, por aceitarem participar da minha banca de doutorado e pelas ótimas sugestões que engrandeceram deveras o meu trabalho.

À CAPES pela ajuda financeira.

"*De que me irei ocupar no céu, durante toda a eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?.*"

Augustin Louis Cauchy

"*Um matemático que não é também um pouco poeta nunca será um matemático completo.*"

Karl Weierstrass

"*A Matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha das Matemáticas.*"

Carl Friedrich Gauss

"*Matemáticos nascem, eles não se fabricam.*"

Henri Poincaré

"*Um homem conta suas histórias tantas vezes que se torna as próprias histórias, elas sobrevivem a ele e desta forma ele se torna imortal.*"

Do filme *Peixe Grande e suas Histórias Maravilhosas*(2003) de Tim Burton.

RESUMO

Considere o corpo E obtido de $\overline{\mathbb{Q}}$, adjuntando valores da função exponencial, tomando fecho algébrico, e iterando essas duas operações e o corpo L obtido da mesma maneira com a aplicação de logaritmo, ao invés de exponenciação. Provamos que se a Conjectura de Schanuel é verdadeira, então E e L são linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, generalizando um problema sugerido por Lang.

Sejam $P(x), Q(x) \in \mathbb{Q}(x)$ funções racionais não constantes. Usando o Teorema de Gelfond-Schneider, mostraremos a existência de números algébricos que podem ser escritos da forma $P(T)^{Q(T)}$, para algum T transcendente. Como aplicação explicitamos uma classe infinita de números transcendentes T, tais que T^T é algébrico. Por fim, supondo a veracidade da conjectura de Schanuel, provamos a existência de números algébricos da forma $T^{T^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{T}}}}}$, com T transcendente.

Seja f uma função inteira, e seja S_f o conjunto de todos os pontos algébricos $\alpha \in \mathbb{C}$, para os quais $f(\alpha)$ é também algébrico. Em 1886, Weierstrass levantou uma questão sobre os possíveis S_f, conhecido como o *conjunto excepcional* de f. Provaremos um resultado sobre valores complexos de funções inteiras, que em particular mostra que para todo $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, a "equação" $S_f = A$, possui incontáveis soluções f no espaço das funções inteiras hipertranscendentes.

Palavras Chave: *Gelfond-Schneider; transcendência; conjunto excepcional; Conjectura de Schanuel.*

ABSTRACT

Consider the field E obtained from $\overline{\mathbb{Q}}$, adjoining values of exponential function, taking algebraic closure, and iterating these two operations and the field L obtained of the same way with application of logarithmic function, rather than exponentiation. We prove that if Schanuel's conjecture is true, then E and L are linearly disjoint over $\overline{\mathbb{Q}}$, generalizing a problem suggested by Lang.

Let $P(x), Q(x) \in \mathbb{Q}(x)$ be nonconstant rational functions. Using the Gelfond-Schneider theorem, we will show the existence of algebraic numbers which can be written in the form $P(T)^{Q(T)}$, for some transcendental number T. As application, we explict infinitely many transcendental numbers T, such that T^T is algebraic. We also prove that if Schanuel's conjecture is true, then there exist algebraic numbers in the form $T^{T^{\cdot^{\cdot^{T}}}}$, with T transcendental.

Let f be given, and let S_f be the set of all algebraic points $\alpha \in \mathbb{C}$, for which $f(\alpha)$ is also algebraic. In 1886, Weierstrass raised the question about the possible S_f, known as *exceptional set* of f. We prove a result on complex values of entire functions which, in particular, shows that for each $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, the "equation" $S_f = A$ has uncountable many solutions f in the set of all hypertranscendental entire functions.

Keywords: *Gelfond-Schneider; transcendence; exceptional set; Schanuel's conjecture.*

Índice

A teoria dos números transcendentes foi originada por Liouville [19] em seu famoso trabalho de 1844, no qual ele obteve, pela primeira vez, uma classe de números que não satisfazem nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros. Apesar de que alguns problemas isolados desta natureza já tinham sido formulados bem antes dessa data. Por exemplo, em 1744, Euler estabeleceu a irracionalidade de e e em 1761, Lambert confirmou a irracionalidade de π. No entanto, a existência de números transcendentes continuou aberta até 1844. A idéia de Liouville foi estabelecer uma simples propriedade satisfeita por todos os números algébricos: se α é algébrico de grau n, então existe uma constante $A > 0$, tal que $|\alpha - p/q| > A/q^n$, para todo $p/q \in \mathbb{Q}$. Assim, qualquer número que não satisfaz essa propriedade é transcendente. O próprio Liouville construiu números que não satisfazem tal propriedade, por exemplo o número $\sum_{n\geq 0} 10^{-n!}$, que é portanto um número transcendente.

Em 1873, Hermite [12] estabeleceu a transcendência de e e em 1884, Lindemann [17] generalizou os métodos de Hermite e provou que e^α é transcendente, sempre que α é algébrico não nulo. Como consequência, temos que $\log 2, e^{\sqrt{2}}$ e cos1 são transcendentes. No entanto, a consequência mais importante do Teorema de Lindemann é a transcendência de π ($e^{\pi i} = -1$) e portanto a impossibilidade de se construir um quadrado com a área de um círculo dado.

Os trabalhos de Hermite e Lindemann foram simplificados e generalizados por Weierstrass [40], em 1885: se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então os números $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}$ são algebricamente independentes. Assim $e + e^{\sqrt{2}}$ é transcendente.

O estudo dos números transcendentes provém de diversos problemas, como a antiga questão grega da quadratura do círculo, as pesquisas de Liouville e Cantor, investigações de Hermite sobre a função exponencial, o sétimo problema da famosa lista dos 23 problemas de Hilbert e as formas lineares em logaritmos devidas à Baker. No coração da teoria transcendente vive um intrigante paradoxo, enquanto que, essencialmente, todos os números

são transcendentes, estabelecer a transcendência de um número particular é uma tarefa bastante complicada. O principal obstáculo é que um número transcendente é definido não pelo que ele é, mas ao invés disso, pelo que ele não é.

Um função inteira f é dita ser *transcendente*, se z e $f(z)$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$. Um resultado útil diz que uma função inteira f é transcendente se, e somente se não é um polinômio. Portanto a função exponencial e^z é um exemplo de função transcendente (já que é não constante e não possui zeros). Segue-se do Teorema de Lindemann que a função exponencial toma valores transcendentes em todos os pontos algébricos, com a exceção de $z = 0$. Portanto, esperava-se que uma função transcendente (como e^z) tomasse valores transcendentes em pontos algébricos, com possivelmente finitas exceções (como e^z). Daí, foi definido o *conjunto excepcional* de uma função inteira como o conjunto dessas "possíveis exceções", isto é, o conjunto de todos os $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, tais que $f(\alpha)$ é também algébrico, denotado por S_f. Claramente, se f é um polinômio com coeficientes em $\overline{\mathbb{Q}}$, então $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$. Também, o conjunto excepcional da função exponencial é $\{0\}$. Mais geralmente, se $f(z) = e^{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_k)}$, onde os $\alpha's$ são números algébricos, então o Teorema de Lindemann implica $S_f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Em 1886, Weierstrass levantou as seguintes questões:

(W1) Existe uma função inteira transcendente f, tal que $f(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?

(W2) Quais possíveis subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$ são conjuntos excepcionais de alguma função inteira transcendente?

O próprio Weierstrass iniciou a busca por uma função em (W1), quando ainda em 1886, deu um exemplo de uma função transcendente f, tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$. Depois, em 1895, Paul Stäckel [35] provou que para todo conjunto enumerável $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ e todo conjunto denso $T \subseteq \mathbb{C}$, existe uma função inteira transcendente f tal que $f(\Sigma) \subseteq T$, resolvendo assim a questão (W1)

($\Sigma = T = \overline{\mathbb{Q}}$). Também segue-se desse resultado que todo subconjunto de $\overline{\mathbb{Q}}$ está contido no conjunto excepcional de alguma função transcendente. No entanto, isto não responde a questão (W2). Outro resultado devido à Stäckel, fixa um exemplo de uma função inteira transcendente f, tal que f e todas suas derivadas $f^{(s)}$ mapeiam $\overline{\mathbb{Q}}$ em $\overline{\mathbb{Q}}$, isto é $S_{f^{(s)}} = \overline{\mathbb{Q}}$, para todo $s \geq 0$. Em 1965, Mahler [21] provou que se A é *fechado relativo* à $\overline{\mathbb{Q}}$, isto é, se $\alpha \in A$ então todos os seus conjugados algébricos também pertencem à A, então existe f transcendente, tal que $S_f = A$. Ainda nesse contexto é possível generalizar as questões de Weierstrass para uma outra classe de funções: dizemos que uma função f é *hipertranscendente*, se para todo $n \geq 0$, as funções $z,\ f(z),\ f'(z), ...,\ f^{(n)}(z)$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$. Claramente, funções hipertranscendentes são transcendentes. A função exponencial e^z mostra que a recíproca é falsa. A função zeta de Riemann é um exemplo de função hipertranscendente, ver [27]. Podemos então pensar nas questões de Weierstrass no contexto hipertranscendente:

(W1*) Existe uma função inteira hipertranscendente f, tal que S_f é um conjunto infinito?

(W2*) Quais possíveis subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$ são conjuntos excepcionais de alguma função inteira hipertranscendente?

(W3*) Existe uma função inteira hipertranscendente f, tal que $f(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?

Essas novas questões são interessantes, haja vista que não conhecemos o conjunto excepcional de nenhuma função hipertranscendente. Por exemplo, a função hipertranscendente mais conhecida é, sem dúvida, a função zeta de Riemann, porém não sabemos nem mesmo se $\zeta(5)$ é irracional!

Nesta tese, provamos um resultado que em particular generaliza os teoremas de Stäckel e ainda responde todas as questões acima

Teorema. *Seja $A \subseteq \mathbb{C}$ enumerável. Para cada inteiro $s \geq 0$ e $\alpha \in A$, fixe $E_{\alpha,s}$ um conjunto denso em $\mathbb{C}$. Então existe um conjunto não enumerável $\mathcal{F}$, de funções inteiras hipertranscendentes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tais que*

$$\frac{d^s f}{dz^s}(\alpha) \in E_{\alpha,s}, \text{ para todos } s \geq 0 \text{ e } \alpha \in A.$$

Algumas consequências desse teorema são

- (Generalização do 1º Teorema de Stäckel) Para todo conjunto enumerável $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ e todo conjunto denso $T \subseteq \mathbb{C}$, existe uma função inteira hipertranscendente f, tal que $f^{(s)}(\Sigma) \subseteq T$ para todo $s \geq 0$.

- (Generalização do 2º Teorema de Stäckel) Dado $A \subseteq \mathbb{C}$, enumerável e denso, existe uma função hipertranscendente f, tal que $f^{(s)}(A) \subseteq A$, para cada $s \geq 0$.

- (Solução das questões (W1*), (W2), (W2*) e (W3*)) Dado $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, existe uma função inteira hipertranscendente f, tal que $S_{f^{(s)}} = A$, para todo $s \geq 0$.

Observe que a resposta de (W1*) é sim, e a resposta para (W2*) (que também é resposta para (W2)) é que todos os subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$ são excepcionais, daí temos um sim também para (W3*). Resumindo, conjuntos excepcionais nada tem de excepcionais!

Em 1900, no congresso internacional de matemática em Paris, Hilbert propôs uma lista com 23 problemas e o sétimo problema peguntava se o logaritmo de um número algébrico numa base algébrica deveria ser racional ou transcendente. A solução desse problema foi dada em 1934, independentemente, por Gelfond [11] e Schneider [33]. O Teorema de Gelfond-Schneider diz que se α é algébrico, diferente de 0 e 1, e β é algébrico, não racional, então α^β é transcendente. Assim $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ e i^i são números transcendentes. Também e^π é transcendente, pois $e^\pi = (-1)^{-i}$. Esse teorema também classifica completamente a natureza aritmética de potências de algébricos por algébricos. No entanto, não é conhecido um resultado similar para o caso

$T_1^{T_2}$, onde os T_i's são transcendentes. Em vista do Teorema de Gelfond-Schneider somos levados a crer que o resultado dessa potenciação deveria ser um transcendente, porém e e $\log 2$ são transcendentes, mas $e^{\log 2}(= 2)$ é algébrico. Agora o caso $T_1 = T_2$, parece ser mais intrigante: o número T^T pode ser algébrico, para algum T transcendente? Uma resposta negativa para essa questão implicaria, de imediato, na transcendência de e^e e π^π. Provamos nessa tese que felizmente (ou infelizmente) a resposta dessa questão é sim. Na verdade provamos algo bem mais geral

Teorema. *Sejam $P(x), Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinômios não constantes. Então o conjunto dos números algébricos da forma $P(T)^{Q(T)}$, com T transcendente, é denso em algum subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Numa formulação equivalente, o Teorema de Gelfond-Schneider mostra que se $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ são números algébricos, com $\log \alpha_1,\ \log \alpha_2$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então $\sum_{j=1}^{2} \beta_j \log \alpha_j \neq 0$. Foi conjecturado que esse resultado é válido para uma quantidade arbitrária de logaritmos. Essa conjectura foi provada por Baker [2] em 1966 (e lhe rendeu a medalha Fields em 1970). Como consequência do Teorema de Baker, temos que qualquer combinação, finita e não nula, de logaritmos de números algébricos com coeficientes algébricos é um número transcendente. Assim $\log 2 + \sqrt{3}\log 3,\ \pi + \log 2$ são números transcendentes.

Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$ é algébrico, então seu conjugado $\overline{z}$ também o é (na verdade são raízes do mesmo polinômio minimal). Portanto z é algébrico se, e somente se a e b o são (pois $a = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $b = \frac{z-\overline{z}}{2i}$). Por exemplo $e + i\pi$ e $e^{\pi^e} + i \log 2$ são transcendentes. Também o Teorema de Baker garante que $e^{\alpha\pi+\beta}$ é transcendente, para todos algébricos α, β, com $\beta \neq 0$. Os números $e^{\alpha\pi+\beta}$, com $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, são as únicas combinações reais de e e π sabidas ser transcendentes. Ou seja, a natureza aritmética de $e + \pi$ e $e\pi$ é desconhecida. No entanto, um desses números (provavelmente ambos) é transcendente (pois e, π são raízes de $x^2 - (e+\pi)x + e\pi$ e $\overline{\mathbb{Q}}$ é algebricamente fechado) e assim $e+\pi+ie\pi \notin \overline{\mathbb{Q}}$. A conjectura é que e e π são algebricamente independentes, o que implicaria na transcendência dos números acima. Em

geral a prova de que específicos números transcendentes são algebricamente independentes não é uma tarefa simples, portanto é vantajoso imaginar o que "deveria" ser verdade.

Em seu livro de 1966, Lang [14] enunciou uma interessante conjectura de seu aluno Stephen Schanuel. A Conjectura de Schanuel é sem dúvida o principal problema aberto em teoria dos números transcendentes. Recordemos seu enunciado

Conjectura (Schanuel)**.** *Sejam $x_1, \ldots, x_n$ números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então existem pelo menos n números algebricamente independentes, dentre $x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}$.*

Como consequência imediata dessa conjectura, temos a independência algébrica de e e π, a transcendência de $e+\pi,\ e\pi,\ e^e,\ \pi^\pi,\ \pi^e,\ \log\log 2,\ \log\pi$ e também generalizações para os teoremas de Lindemann, Weierstrass, Gelfond-Schneider e Baker, ver [29, Capítulo 10].

Neste mesmo livro, Lang [14] propôs o seguinte problema: seja $E = \bigcup_{n\geq 0} E_n$, onde $E_n = \overline{E_{n-1}(\{e^x \ : \ x \in E_{n-1}\})}$ para todo inteiro $n \geqslant 1$ e $E_0 = \overline{\mathbb{Q}}$. Mostrar que a Conjectura de Schanuel implica que $\pi \notin E$. Note que $\pi \notin E$ é algo extremamente mais forte do que a independência algébrica de e e π. Na verdade, e e π algebricamente independentes não implica nem mesmo que $\pi \notin E_1$. Nesta tese, provamos um resultado que em particular resolve o problema de Lang. Para isso, defina $L = \bigcup_{n\geq 0} L_n$, com $L_n = \overline{L_{n-1}(\{y \ : \ e^y \in L_{n-1}\})}$ e $L_0 = \overline{\mathbb{Q}}$. Dizemos que F_1, F_2, extensões de F, são *linearmente disjuntas* sobre F, quando todo subconjunto finito de F_1 linearmente independente sobre F, é também linearmente independente sobre F_2. Provamos que

Teorema. *A Conjectura de Schanuel implica que os corpos E e L são linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Como consequência, temos que se a Conjectura de Schanuel é verdadeira, então

- $E \cap L = \overline{\mathbb{Q}}$.

- $\pi \notin E$ e $e \notin L$.
- $\pi, \log \pi, \log \log \pi, \ldots$ são algebricamente independentes sobre E.
- $e, e^e, e^{e^e}, \ldots$ são algebricamente independentes sobre L.

Assim a Conjectura de Schanuel parece dar soluções para todos os problemas mais conhecidos em teoria transcendente. A pergunta é: existe vida, em teoria transcendente, após a Conjectura de Schanuel? A resposta é sim! Especificamente, não é conhecida uma relação dessa conjectura com a transcendência de números como $\zeta(3)$, $\zeta(\pi), \gamma$ e e^γ, onde $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n)$ é a constante de Euler-Mascheroni.

A partir de 1970 (e até os dias atuais), o estudo da natureza aritmética de valores da função zeta de Riemann, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$, para inteiros $s > 1$ é um dos mais atrativos tópicos em teoria transcendente.

Euler provou que

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi i)^s B_s}{2s!}, \ s = 2, 4, 6, ...,$$

onde $B_s \in \mathbb{Q}$, são os números de Bernoulli, que são definidos pela função geradora

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{s=2}^{\infty} B_s \frac{t^s}{s!}$$

e esse foi inegavelmente o primeiro progresso nessa área. A prova de Lindemann da transcendência de π, implicou também na transcendência de $\zeta(s)$ para todo $s > 0$ par (via fórmula de Euler). O problema da irracionalidade de valores da função zeta em inteiros ímpares permaneceu inacessível até 1978, quando Apéry [1] provou que $\zeta(3)$ é irracional.

A irracionalidade dos números $\zeta(2s+1)$ para $s \geq 2$ é ainda um problema em aberto. Em 2000, Rivoal [31] provou que a sequência $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), ...$ contém infinitos irracionais. Em 2001, Zudilin [41] mostrou que pelo menos um dos números $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ é irracional. A conjectura é que os números $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), ...$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}(\pi)$.

O próprio Zudilin mantém uma página na internet com vários artigos sobre o assunto (contendo trabalhos de 1978 até 2008), ver [42]. Outras funções zeta também são consideradas, por exemplo, a função zeta p-ádica ζ_p. Em 2008, Beukers [4] provou que os números $\zeta_2(2), \zeta_2(3), \zeta_3(2)$ e $\zeta_3(3)$ são irracionais.

Capítulo 1

O problema de Lang

Estudamos a independência algébrica de dois conjuntos definidos indutivamente: a torre de potência exponencial e sua correspondente torre logarítmica. Sob a hipótese da Conjectura de Schanuel, provamos que E e L são linearmente disjuntos. Esse resultado generaliza um problema sugerido por Lang [14, p. 31].

1.1 Preliminares e o teorema principal

1.1.1 Conjectura de Schanuel

Os números $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L \supseteq K$ são *ditos algebricamente dependentes* sobre K, se existe um polinômio não nulo $P \in K[X_1, ..., X_n]$, tal que $P(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$. Caso contrário $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são ditos ser *algebricamente independentes* sobre K.

Seja $L|K$ uma extensão transcendente. Um conjunto $\mathcal{B} \subseteq L$ é chamado *base de transcendência* de $L|K$, se $\mathcal{B}$ é algebricamente independente sobre K e $L|K(\mathcal{B})$ é uma extensão algébrica, ou equivalentemente $\mathcal{B}$ é o conjunto algebricamente independente (sobre K) maximal relativo a inclusão, cuja existência é garantida via lema de Zorn. Pode-se provar que quaisquer duas bases de transcendência de uma extensão tem a mesma cardinalidade. Assim

podemos definir o *grau de transcendência* de uma extensão $L|K$, como a cardinalidade de $\mathcal{B}$. Denotamos por $\text{grtr}(L|K) = \text{grtr}_K L = \#\mathcal{B}$. Se $L|K$ é algébrica, então $\text{grtr}(L|K) = 0$. Um maior detalhamento desses conceitos podem ser vistos em [15, Capítulo 8].

Alguns fatos sobre grau de transcendência são (ver [10, Capítulo 11]):

Fato 1. $\text{grtr}(K(x_1, ..., x_n)|K) \leq n$ e vale a igualdade se, e somente se $x_1, ..., x_n$ são algebricamente independentes sobre K. (a prova dessa desigualdade segue-se por indução sobre n)

Fato 2. Se $K \subseteq L \subseteq M$, então $\text{grtr}(M|K) = \text{grtr}(M|L) + \text{grtr}(L|K)$. (Essa relação segue-se pois $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é base de transcendência de $M|K$, onde $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de transcendência de $M|L$ e $L|K$)

Fato 3. $\text{grtr}(\mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)|\mathbb{Q}) = \text{grtr}(\overline{\mathbb{Q}}(x_1, ..., x_n)|\overline{\mathbb{Q}})$. (Segue-se pelo Fato 2 e de $\text{grtr}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$=$\text{grtr}(\overline{\mathbb{Q}}(x_1, ..., x_n)|\mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)) = 0$)

O fato abaixo é equivalente ao Fato 3:

Fato 3'. Um conjunto é algebricamente independente sobre $\mathbb{Q}$ se, e somente se o for sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. (Fato 1 e Fato 3)

Com essa nomenclatura, podemos apresentar a conjectura de Schanuel como

Conjectura 1. *Se $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$, são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então*

$$\text{grtr}(\mathbb{Q}(x_1, ..., x_n, e^{x_1}, ..., e^{x_n})|\mathbb{Q}) \geq n$$

A Conjectura de Schanuel é, sem dúvida, o grande resultado a ser provado em Teoria Transcendente. Sua veracidade implica em provas simples de generalizações para todos as grandes teoremas nessa teoria. Além do mais, mostraria que todos os números que esperamos ser transcendentes (ex. $e\pi$, $e+\pi$, e^e, π^e,...) o são.

A motivação da conjectura de Schanuel parece vir de alguns resultados já sabidos. Por exemplo, quando $n = 1$ temos que se $\alpha \neq 0$, então pelo

Teorema de Lindemann, pelo menos um dos números α, e^{α} é transcendente, assim $\text{grtr}(\mathbb{Q}(\alpha, e^{\alpha})|\mathbb{Q}) \geq 1$. No caso de um n arbitrário, essa conjectura está resolvida apenas para $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, usando o Teorema de Lindemann-Weierstrass (para uma prova desse teorema, ver [24, p. 46, Teorema 3.3.2] ou [26, p. 117-131]):

Teorema 1.1 (Lindemann-Weierstrass)**.** *Se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são números algébricos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$.*

Como uma interessante aplicação dessa conjectura, provaremos uma generalização do teorema anterior

Proposição 1.1. *Suponha que a conjectura de Schanuel é verdadeira. Se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são números algébricos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então*

$$e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}, e^{e^{\alpha_1}}, ..., e^{e^{\alpha_n}}, ..., e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\alpha_1}}}}}}, ..., e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\alpha_n}}}}}}, ...$$

são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$.

Observação 1. *Um conjunto infinito é dito ser algebricamente independente, quando qualquer de seus subconjuntos finitos o for.*

Observação 2. *Seja $f = f(z)$ uma função e S um conjunto (possivelmente infinito) contido no domínio de f. Denotamos $f(S)$ por $\{f(s) : s \in S\}$.*

Demonstração da Proposição 1.1. Seja $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Defina, para cada $m \geq 1$, $h_m(z) = \underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^z}}}}}}_{m \text{ vezes}}$. Nosso objetivo é provar que $h_1(A), h_2(A), ...$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Para isso, procederemos por indução sobre m (em $h_m(A)$). O caso $m = 1$, segue pelo Teorema de Lindemann-Weierstrass. Suponha que $h_1(A), ..., h_m(A)$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Portanto $A, h_1(A), ..., h_m(A)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$ (Pela hipótese de indução e a independência linear dos elementos de A), assim pela conjectura de Schanuel

$$\mathrm{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(A, h_1(A), ..., h_m(A), e^A, e^{h_1(A)}, ..., e^{h_m(A)}) \geq (m+1)n$$

por outro lado, $\{h_1(A), ..., h_m(A)\} = \{e^A, e^{h_1(A)}, ..., e^{h_{m-1}(A)}\}$, pois $e^{h_k(z)} = h_{k+1}(z)$. Portanto

$$\mathrm{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(A, h_1(A), ..., h_m(A), e^A, e^{h_1(A)}, ..., e^{h_m(A)}) = \mathrm{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(h_1(A), ..., h_m(A), h_{m+1}(A)) \leq (m+1)n,$$

onde a última desigualdade acima segue do Fato 1. Assim

$$\mathrm{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(h_1(A), ..., h_m(A), h_{m+1}(A)) = (m+1)n$$

e então $h_1(A), ..., h_m(A), h_{m+1}(A)$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$, finalizando assim nosso processo indutivo. □

1.1.2 Corpos linearmente disjuntos e livres

Sejam F_1, F_2 extensões de um corpo F. Dizemos que F_1, F_2 são *linearmente disjuntos* sobre F, quando todo subconjunto finito de F_1 linearmente independente sobre F, é também linearmente independente sobre F_2.

Dizemos que F_1, F_2 são *livres* (ou *algebricamente disjuntos*) sobre F, quando todo subconjunto finito de F_1 algebricamente independente sobre F, é também algebricamente independente sobre F_2.

Proposição 1.2. *Se F_1, F_2 são linearmente disjuntos sobre F, então*

$$F_1 \cap F_2 = F.$$

Demonstração. Suponha que existe $x \in (F_1 \cap F_2)\backslash F$, assim $\{1, x\} \subseteq F_1$ e é linearmente independente sobre F. Como F_1, F_2 são linearmente disjuntos sobre F, então $\{1, x\} \subseteq F_2$ e é F_2-linearmente independente. Essa contradição mostra o resultado. □

Aparentemente as definições acima são não simétricas, no entanto temos que

Proposição 1.3. *Suponha que F_1, F_2 são linearmente disjuntos sobre F, então todo subconjunto finito de F_2, linearmente independente sobre F é também linearmente independente sobre F_1.*

Demonstração. Suponha o contrário. Considere $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq F_2$, F-linearmente independente e $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq F_1$, não todos nulos, tais que

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0. \tag{1.1}$$

Reordenando os índices, se necessário, podemos tomar $m < n$ o maior número natural, tal que $y_1, ..., y_m$ são F-linearmente independentes e portanto F_2-linearmente independentes (pois F_1, F_2 são linearmente disjuntos sobre F). Assim,

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i, \text{ onde } a_{ij} \in F \text{ e } j = m+1, ..., n. \tag{1.2}$$

Combinando as igualdades em (1.1) e (1.2), obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} \left(x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j \right) y_i = 0$$

Portanto, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, a expressão $x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j$ (pertencente à F_2) é nula. No entanto isso contradiz a F-independência linear dos elementos $x_1, ..., x_n$ (pois $i < m+1$). □

Proposição 1.4. *Suponha que F_1, F_2 são algebricamente disjuntos sobre F, então todo subconjunto finito de F_2, algebricamente independente sobre F é também algebricamente independente sobre F_1.*

Demonstração. Seja $\mathcal{Y} = \{y_1, ..., y_n\} \subseteq F_2$ algebricamente independente sobre F e suponha (por absurdo) que $\mathcal{Y}$ é algebricamente dependente sobre F_1. Portanto $\mathcal{Y}$ é algebricamente dependente sobre um corpo finitamente gerado $F' = F(x_1, ..., x_t) \subseteq F_1$, onde $x_1, ..., x_t \in F_1$ (coeficientes do F_1-polinômio com n variáveis anulando $\mathcal{Y}$).

Se $S \subseteq F_1$, finito e F-algebricamente independente, é algebricamente dependente sobre $F(\mathcal{Y})$, então é também algebricamente dependente sobre

F_2, contrariando o fato de que F_1, F_2 são livres sobre F. Segue-se que F_1 e $F(\mathcal{Y})$ são livres sobre F.

Como F' é finitamente gerado, então seu grau de transcendência sobre F é finito (no máximo t). Seja $\mathcal{B}$ uma base de transcendência de $F'|F$. Logo $\mathcal{B}$ é algebricamente independente sobre F e portanto sobre $F(\mathcal{Y})$. Daí

$$\text{grtr}(F'(\mathcal{Y})|F(\mathcal{Y})) \geq \text{grtr}(F'|F) \tag{1.3}$$

Por outro lado, a extensão $F'(\mathcal{Y})|F(\mathcal{Y})(\mathcal{B})$ é algébrica (pois $F'|F(\mathcal{B})$ é algébrica). Assim, vale a igualdade em (1.3), isto é,

$$\text{grtr}(F'(\mathcal{Y})|F(\mathcal{Y})) = \text{grtr}(F'|F) \tag{1.4}$$

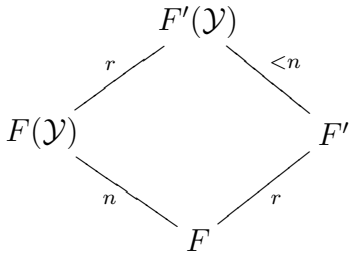
Considerando as torres $F \subseteq F' \subseteq F'(\mathcal{Y})$ e $F \subseteq F(\mathcal{Y}) \subseteq F'(\mathcal{Y})$, calculando o grau de transcendência de $F'(\mathcal{Y})|F$ de duas maneiras (via essas torres) e usando o Fato 2, obtemos:

$$\text{grtr}(F'(\mathcal{Y})|F(\mathcal{Y}))+\text{grtr}(F(\mathcal{Y})|F) =\text{grtr}(F'(\mathcal{Y})|F')+\text{grtr}(F'|F)$$

Usando (1.4), temos que

$$n =\text{grtr}(F(\mathcal{Y})|F) =\text{grtr}(F'(\mathcal{Y})|F') < n \quad \text{(veja diagrama abaixo)}$$

Com esse absurdo provamos nosso resultado.



□

Os próximos resultados estabelecem relações entre as duas definições anteriores

Proposição 1.5. *Se F_1, F_2 são linearmente disjuntos sobre F, então são livres sobre F.*

Demonstração. Suponha o contrário. Sejam $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq F_1$, F-algebricamente independente e um polinômio P, não nulo, com n variáveis e coeficientes em F_2, tal que $P(x_1, ..., x_n) = 0$. Assim,

$$\sum_{I \in I'} a_I x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = 0, \tag{1.5}$$

onde I' é um conjunto finito de multi-índices e cada $a_I \in F_2$. Denotando $\mathcal{M} = \{M_I : I \in I'\}$, com $M_I := x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, a relação em (1.5) implica que $\mathcal{M}$ é linearmente dependente sobre F_2 e portanto (por hipótese) também sobre F, isto é, existem $(b_I)_{I \in I'} \in F$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{I \in I'} b_I x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = 0.$$

No entanto isso contradiz a independência algébrica de $\{x_1, ..., x_n\}$ sobre F. □

A recíproca dessa última proposição, em geral, não é verdadeira, no entanto temos que

Proposição 1.6. *Se F_1, F_2 são livres sobre F e F é algebricamente fechado, então F_1, F_2 são linearmente disjuntos sobre F.*

Demonstração. Ver [15, p. 367, Teorema 4.12] □

Em 1966, S. Lang [14] propôs o seguinte problema: seja $E = \bigcup_{n \geq 0} E_n$, onde $E_n = \overline{E_{n-1}(\{e^x : x \in E_{n-1}\})}$ para todo inteiro $n \geqslant 1$ e $E_0 = \overline{\mathbb{Q}}$. Mostrar que a conjectura de Schanuel implica que $\pi \notin E$.

Definamos uma versão logarítmica do problema acima: seja $L = \bigcup_{n \geq 0} L_n$, com $L_n = \overline{L_{n-1}(\{y : e^y \in L_{n-1}\})}$ e $L_0 = \overline{\mathbb{Q}}$. Mostrar que a conjectura de Schanuel implica que $e \notin L$. Mostramos o seguinte resultado que em particular resolve os problemas acima

Teorema 1.2. *A conjectura de Schanuel implica que os corpos E e L são linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Como consequência temos que se a conjectura de Schanuel é verdadeira, então

- $E \cap L = \overline{\mathbb{Q}}$.
- $\pi \notin E$ e $e \notin L$.
- $\pi, \log \pi, \log \log \pi, \ldots$ são algebricamente independentes sobre E.
- $e, e^e, e^{e^e}, \ldots$ são algebricamente independentes sobre L.

1.2 Prova do Teorema

Antes da prova do teorema, necessitamos de alguns lemas técnicos involvendo uma construção chave. Por simplicidade, escreveremos

$$E_n = \overline{E_{n-1}(\exp(E_{n-1}))} \text{ para } n \geq 1.$$

Lema 1.1. *Para todo $n \geq 1$, temos que $E_n = \overline{\mathbb{Q}(\exp(E_{n-1}))}$.*

Demonstração. Usando indução sobre n, o caso base segue-se por definição, pois

$$E_1 = \overline{E_0(\exp(E_0))} = \overline{\overline{\mathbb{Q}}(\exp(E_0))} = \overline{\mathbb{Q}(\exp(E_0))},$$

e $E_0 = \overline{\mathbb{Q}}$. Em geral

$$\begin{aligned} E_n &= \overline{E_{n-1}(\exp(E_{n-1}))} \\ &= \overline{\overline{\mathbb{Q}(\exp(E_{n-2}))}(\exp(E_{n-1}))} \\ &= \overline{\mathbb{Q}(\exp(E_{n-2}))(\exp(E_{n-1}))} \\ &= \overline{\mathbb{Q}(\exp(E_{n-1}))}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

pois $E_{n-2} \subseteq E_{n-1}$. □

Lema 1.2. *Para todo $x \in E_n$, existe um conjunto finito $A_{n-1} \subseteq E_{n-1}$ tal que $x \in \overline{\mathbb{Q}(\exp(A_{n-1}))}$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.1, $x \in E_n = \overline{\mathbb{Q}(\exp(E_{n-1}))}$ o que significa que é raíz de um polinômio, não nulo, com coeficientes em $\mathbb{Q}(\exp(E_{n-1}))$. Cada coeficiente involve somente uma quantidade finita de exponenciais de elementos de E_{n-1}. Portanto, tome A_{n-1} a união desses elementos. □

Lema 1.3 (primeiro lema chave)**.** *Para todo $x \in E_n$, existe um conjunto finito $A \subseteq E_{n-1}$ tal que $A \cup \{x\} \subseteq \overline{\mathbb{Q}(\exp(A))}$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, existe um conjunto finito $A_{n-1} \subseteq E_{n-1}$ tal que $x \in \overline{\mathbb{Q}(\exp(A_{n-1}))}$. Iterando esse lema, construímos uma sequência de subconjuntos $A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3}, \ldots, A_0$ como se segue:

- Como $A_{n-1} \subseteq E_{n-1}$ é finito, seque-se que A_{n-1} é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\exp(A_{n-2}))$ para algum conjunto finito $A_{n-2} \subseteq E_{n-2}$.
- Também A_{n-2} é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\exp(A_{n-3}))$ para algum conjunto finito $A_{n-3} \subseteq E_{n-3}$.

No último passo teremos a existência de um conjunto finito $A_0 \subseteq E_0 = \overline{\mathbb{Q}}$, tal que A_1 é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\exp(A_0))$. Tome $A = \bigcup_{m \leq n-1} A_m \subseteq E_{n-1}$. Como $A_{n-1} \subseteq A$ então $x \in \overline{\mathbb{Q}(\exp(A))}$ e como cada A_m é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\exp(A_{m-1})) \subseteq \mathbb{Q}(\exp(A))$, então todo o conjunto A é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\exp(A))$. □

De uma maneira similar, obtemos análogos desses lemas no caso das extensões logarítmicas L_m. Vamos enuncia-los para efeito de precisão.

Lema 1.4. *Para cada $n \geq 1$, temos que $L_n = \overline{\mathbb{Q}(\exp^{-1}(L_{n-1}))}$.*

Lema 1.5. *Para todo $x \in L_n$ existe um conjunto finito $C_n \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\exp(C_n) \subseteq L_{n-1}$ e que x é algébrico sobre $\mathbb{Q}(C_n)$.*

Lema 1.6 (segundo lema chave)**.** *Para todo $x \in L_n$, existe um conjunto finito $C \subseteq \mathbb{C}$ com $\exp(C) \subseteq L_{n-1}$ tal que $\exp(C) \cup \{x\}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}(C)$.*

As provas seguem a mesma linha como no caso exponencial. Agora estamos prontos para ir à prova do teorema que por comodidade do leitor repetiremos

Teorema. *A conjectura de Schanuel implica que os corpos E e L são linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Demonstração. Assumindo que a conjectura de Schanuel é verdadeira, vamos provar que E_m e L_n são linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, para arbitrários m e n (isso é suficiente, pois E é união dos E_m, L é união dos L_n e além disso $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ldots$ e $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots$).

Fixe um arbitrário $n \geq 0$. Procedendo por indução sobre m, o caso base é trivial pois $E_0 = \overline{\mathbb{Q}}$. Suponha por absurdo que E_{m-1} e L_n são linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, mas E_m and L_n não são linearmente disjuntos. Vamos tomar $\{l_1, ..., l_k\} \subseteq L_n$ linearmente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ e $\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq E_m$ tal que $\sum_{i=1}^{k} l_i e_i = 0$ e pelo menos um dos $e_i \neq 0$. Pelos lemas chave:

- Existe um conjunto finito $A \subseteq E_{m-1}$ tal que $A \cup \{e_i\}_{i=1}^{k}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\exp(A))$.
- Existe um conjunto finito $C \subseteq L_n$ tal que $\exp(C) \cup \{l_i\}_{i=1}^{k}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}(C)$.

Agora tome $B \subseteq A$ tal que $\exp(B)$ é uma base de transcendência da extensão $\mathbb{Q}(\exp(A))|\mathbb{Q})$, e tome $D \subseteq C$ tal que D é uma base de transcendência de $\mathbb{Q}(C)|\mathbb{Q}$.

Afirmamos que $B \cup D$ é linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. De fato, considere uma combinação linear dos elementos de $B \cup D$ com coeficientes em $\mathbb{Q}$, podemos escrevê-la como

$$\sum_{b \in B} p_b b = \sum_{d \in D \setminus B} q_d d \tag{1.7}$$

com p_b, q_d inteiros.

Desde que a expressão do lado esquerdo de (1.7) é um elemento de E_{m-1} e que o lado direito é um elemento de L_n, e por hipótese esses dois corpos são

linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, devemos ter $E_{m-1} \cap L_n = \overline{\mathbb{Q}}$ (ver Proposição 1.2) e ambas as expressões representam um elemento $r \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Mas $\sum_{d \in D \setminus B} q_d d = r$ é uma relação algébrica de D com coeficientes em $\overline{\mathbb{Q}}$ e portanto, deve ser a relação trivial (mantenha em mente que D foi tomado algebricamente independente sobre $\overline{\mathbb{Q}}$). Assim, obtemos $r = 0 = q_d$, para todo $d \in D$.

Aplicando a exponencial em ambos os lados de $\sum_{b \in B} p_b b = 0$, temos

$$\prod_{b \in B} (\exp(b))^{p_b} = 1,$$

que é uma relação algébrica com coeficientes em $\mathbb{Q}$, entre os elementos do conjunto $\exp(B)$, tomados algebricamente independentes. Portanto o monômio de Laurent (pois algum p_b pode ser negativo) $\prod_{b \in B} (X_b)^{p_b}$ deve ser o trivial, isto é, os inteiros p_b devem ser todos iguais a zero.

Resumindo, provamos que $B \cup D$ é $\mathbb{Q}$-linermente independente. Assim, pela conjectura de Schanuel, $\operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(B, D, \exp(B), \exp(D)) \geq |B| + |D|$. No entanto,

$$\operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(B, D, \exp(B), \exp(D)) = \operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(B, C, \exp(A), \exp(D))$$

pois $\exp(A)$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\exp(B))$ e C é algébrico sobre $\mathbb{Q}(D)$. Temos também

$$\operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(B, C, \exp(A), \exp(D)) = \operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(C, \exp(A))$$

pois $B \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}(\exp(A))$, e similarmente $\exp(D) \subseteq \exp(C) \subseteq \overline{\mathbb{Q}(C)}$. Finalmente

$$\operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(C, \exp(A)) = \operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(D, \exp(B)) \leq |B| + |D|$$

pois C é algébrico sobre $\mathbb{Q}(D)$ e $\exp(A)$ algébrico sobre $\mathbb{Q}(\exp(B))$.

De $|B| + |D| \geq \operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(D, \exp(B)) \geq |B| + |D|$, concluímos que

$$\operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(D, \exp(B)) = |B| + |D|$$

e então o conjunto $\exp(B) \cup D$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{Q}$, consequentemente sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Portanto $\overline{\mathbb{Q}(\exp(B))}$ e $\overline{\mathbb{Q}(D)}$ são livres sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Como $\overline{\mathbb{Q}}$ é algebricamente fechado, $\overline{\mathbb{Q}(\exp(B))}$ e $\overline{\mathbb{Q}(D)}$ são linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ (veja Proposição 1.6).

Porém os l_i's são algébricos sobre $\mathbb{Q}(C)$ e os e_i's são algébricos sobre $\mathbb{Q}(\exp(A))$, o que significa $\{l_i\} \subseteq \overline{\mathbb{Q}(D)}$ e $\{e_i\} \subseteq \overline{\mathbb{Q}(\exp(B))}$ fixando a relação não trivial $\sum l_i e_i = 0$. Contradição. Assim E_m e L_n são linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, e portanto o mesmo é válido para E e L. □

Nos próximos quatro resultados, estaremos assumindo a veracidade da conjectura de Schanuel.

Corolário 1.1. *Temos que $L \cap E = \overline{\mathbb{Q}}$.*

Demonstração. Segue-se diretamente do Teorema 1.2 e Proposição 1.2. □

Corolário 1.2. *Temos que $\pi \notin E$ e $e \notin L$.*

Demonstração. Note que $e = \exp(1) \in E_1 \subseteq E$. Desde que $e \notin \overline{\mathbb{Q}}$, então não pode estar também em L, pelo Corolário 1.1. Se $\pi \in E$, então $i\pi \in E$. Mas $i\pi \in L_1 \subseteq L$, pois $i\pi = \log(-1)$. Concluímos que $i\pi \notin E$, pois não pertence a $\overline{\mathbb{Q}}$. □

Corolário 1.3. *Os números $\pi, \log\pi, \log\log\pi, \ldots$ são algebricamente independentes sobre E.*

Demonstração. Na verdade, provaremos que $i\pi, \log\pi, \log\log\pi, \ldots$ são algebricamente independentes sobre E (que é um enunciado equivalente). Vamos escrever $\log_{[k]}\pi$ para a k-ésima iterada do logaritmo de π, onde $\log_{[0]}\pi = \pi$. Observe que $i\pi, \log\pi, \log\log\pi, \ldots$ pertencem à L.

Como, pelo Teorema 1.2, E e L são linearmente disjuntos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, então são livres sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, assim é suficiente provar que $i\pi, \log\pi, \log\log\pi, \ldots$ são algebricamente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, ou equivalentemente (Fato 3'), que eles são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$.

Para provar que $i\pi, \log\pi, \log\log\pi, \ldots, \log_{[n]}\pi$ são $\mathbb{Q}$-algebricamente independente, usamos a conjectura de Schanuel novamente. Procederemos por

indução sobre o número de iteradas do logaritmo de π. O caso $n = 0$, segue da transcendência de π. Assuma que $i\pi, \log \pi, \log\log \pi, \ldots, \log_{[n-1]} \pi$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$ (hipótese de indução). Afirmamos que $i\pi, \log \pi, \ldots, \log_{[n]} \pi$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. De fato, suponha que:

$$i\pi q + \sum_{k=1}^{n} q_k \log_{[k]} \pi = 0$$

com $q, q_k \in \mathbb{Z}$. Assim, aplicando $\exp(.)$ na igualdade anterior, obtemos

$$(-1)^q \prod_{k=1}^{n} (\log_{[k-1]} \pi)^{q_k} = 1 \tag{1.8}$$

pois $\exp(q_k \log_{[k]} \pi) = (\log_{[k-1]} \pi)^{q_k}$. Como estamos assumindo que $i\pi, \log \pi$, $\log\log \pi, \ldots, \log_{[n-1]} \pi$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então a relação algébrica em (1.8) deve ser a trivial, isto é, $q_k = 0$ para $1 \leq k \leq n$ e q deve ser par (mas isso não é importante). Retornando a nossa relação linear, obtemos $i\pi q = 0$, daí $q = 0$.

Portanto o conjunto $A = \{i\pi, \log \pi, \log\log \pi, \ldots, \log_{[n]} \pi\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{Q}$ e pela conjectura de Schanuel, o grau de transcendência de $\mathbb{Q}(A, \exp(A))$ deve ser pelo menos $n + 1$. Como $\exp(A)$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}(A)$ (Fato 3), temos

$$\mathrm{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i\pi, \log \pi, \log\log \pi, \ldots, \log_{[n]} \pi) \geq n + 1,$$

Segue-se que $i\pi, \log \pi, \log\log \pi, \ldots, \log_{[n]} \pi$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$ (então sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ e portanto sobre E). □

Corolário 1.4. *Os números $e, e^e, e^{e^e}, \ldots$ são algebricamente independentes sobre L.*

Demonstração. Como na demonstração anterior, temos somente que provar que os números acima são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Novamente, usaremos indução. Denote $\exp^{[n]}(1) = \exp(\exp^{[n-1]}(1))$ e $\exp^{[0]}(1) = 1$. Procedendo por indução. O caso $n = 1$ segue da transcendência de e. Vamos assumir que $\{\exp^{[k]}(1)\}_{k=1}^{n}$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então o conjunto

$$A = \{1, e, e^e, \ldots, \exp^{[n]}(1)\} = \{\exp^{[k]}(1)\}_{k=0}^{n}$$

é $\mathbb{Q}$-linearmente independente e pela conjectura de Schanuel, temos

$$n + 1 \leq \operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(A, \exp(A)) = \operatorname{grtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\exp(A)) \leq n + 1$$

pois A é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\exp(A))$. Assim $\exp(A) = \{\exp^{[k]}(1)\}_{k=1}^{n+1}$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{Q}$. □

Capítulo 2

Potenciação de transcendentes

Sejam $P(x), Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinômios não constantes. Mostraremos a existência de números algébricos que podem ser escritos da forma $P(T)^{Q(T)}$, para algum T transcendente. Provaremos também um resultado condicional para o caso $T^{T^{\cdot^{\cdot^{T}}}}$.

2.1 Preliminares e o teorema principal

Em 1934, Gelfond e Schneider, independentemente, resolveram o sétimo problema de Hilbert, quando provaram

Teorema 2.1 (Gelfond-Schneider)**.** *Se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}\backslash\{0,1\}$ e $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}\backslash\mathbb{Q}$, então α^β é transcendente.*

Uma demonstração desse resultado pode ser vista em [24, p. 60, Teorema 4.2.1].

O Teorema de Gelfond-Schneider classifica completamente a natureza aritmética (racionalidade, irracionalidade, algebricidade ou transcendência) de potências de dois algébricos. No entanto, não é conhecido resultado similar para o caso A^B (veja Tabela 2.1), onde pelo menos um desses números é transcendente e muitos problemas desse tipo estão em aberto. Por exemplo, é

esperado que os números $e^e, \pi^\pi, (\log \pi)^{\log \pi}$ sejam transcendentes, no entanto nenhum deles foi provado ser ainda. Em geral, temos a seguinte questão:

Questão 1. *Existe um número transcendente T, tal que T^T é algébrico?*

A	B	A^B	Natureza aritmética
2	$\log 3/\log 2$	3	Algébrico
2	$i\log 3/\log 2$	3^i	Transcendente
e^i	π	-1	Algébrico
e	π	e^π	Transcendente
$2^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	4	Algébrico
$2^{\sqrt{2}}$	$i\sqrt{2}$	4^i	Transcendente

Tabela 2.1: Possibilidades

Nosso próximo resultado, em particular, responde essa pergunta, mas antes de enunciá-lo, provaremos dois lemas que serão úteis na sua prova.

Lema 2.1. *Para todo inteiro $m \geq 2$ e todo número primo p, temos que*

$$(1 + \sqrt[m]{p})^n \notin \mathbb{Q}, \text{ para todo } n \geq 1. \tag{2.1}$$

Demonstração. Sabemos que o conjunto $\mathcal{B} = \{1, \sqrt[m]{p}, ..., (\sqrt[m]{p})^{m-1}\}$ forma uma base da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{p})|\mathbb{Q}$. Pelo teorema binomial, $(1 + \sqrt[m]{p})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[m]{p})^k$. Se $n < m$, então $(1 + \sqrt[m]{p})^n \notin \mathbb{Q}$, pelo comentário anterior. Quando $n \geq m$,

$$(1 + \sqrt[m]{p})^n = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} (\sqrt[m]{p})^k + \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[m]{p})^k \tag{2.2}$$

Podemos reescrever (via mudança de variáveis) o somatório $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[m]{p})^k$ como:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[m]{p})^k = \sum_{t=0}^{n-m} \binom{n}{t+m} (\sqrt[m]{p})^{m+t} = \sum_{t=0}^{n-m} \binom{n}{t+m} p(\sqrt[m]{p})^t$$

Se $n-m<m$, o resultado segue-se novamente pela independência $\mathbb{Q}$-linear do conjunto $\mathcal{B}$. Se $n-m\geq m$, usamos a mesma construção para fixar

$$\sum_{t=0}^{n-m}\binom{n}{m+t}p(\sqrt[m]{p})^t=\sum_{t=0}^{m-1}\binom{n}{m+t}p(\sqrt[m]{p})^t+\sum_{s=0}^{n-2m}\binom{n}{2m+s}p^2(\sqrt[m]{p})^s$$

Note que iterando esse processo, obteremos o resultado desejado, pois $n-km$ será estritamente menor do que m para algum $k\geq 1$. □

Lema 2.2. *Seja $\mathcal{F}\subseteq\overline{\mathbb{Q}}[x]$ tal que todo polinômio em $\mathcal{F}$ tem grau no máximo k. Então existe um número primo p suficientemente grande, tal que*

$$(1+\sqrt[p]{2})^n\notin\mathbb{Q}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}}),\ \textit{para todo } n\geq 1, \tag{2.3}$$

onde $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ denota o conjunto $\{x\in\mathbb{C}: f(x)=0$ para algum $f\in\mathcal{F}\}$.

Demonstração. Enumeremos $\mathcal{F}=\{F_1,F_2,\cdots\}$, e para cada $n\geq 1$, denote $K_n=\mathbb{Q}(\mathcal{R}_{F_1\cdots F_n})$ e $[K_n:\mathbb{Q}]=t_n$. Como $K_n\subseteq K_{n+1}$, então $t_n|t_{n+1}$, para todo $n\geq 1$. Portanto, existe uma sequência de inteiros $(m_n)_{n\geq 1}$, tal que $t_n=m_{n-1}\cdots m_1t_1$. Note que $K_{n+1}=K_n(\mathcal{R}_{F_{n+1}})$ e $\mathrm{gr}(F_{n+1})\leq k$. Segue-se que $[K_{n+1}:K_n]\leq k!$. Como $\mathbb{Q}\subseteq K_n\subseteq K_{n+1}$, teremos que $\frac{t_{n+1}}{t_n}\leq k!$ para todo $n\geq 1$. Por outro lado, $\frac{t_{n+1}}{t_n}=m_n$ e então a sequência $(m_n)_{n\geq 1}$ é limitada. Assim, garantimos a existência de um número primo $p>\max_{n\geq 1}\{m_n,t_1\}$. Portanto p não divide nenhum dos t_n's. Desejamos provar que $1+\sqrt[p]{2}$ satisfaz (2.3). De fato, supondo o contrário, então existem inteiros n e s, tais que $(1+\sqrt[p]{2})^n\in\mathbb{Q}(\mathcal{R}_{F_1\cdots F_s})=K_s$. Como $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}((1+\sqrt[p]{2})^n)\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[p]{2})$ e $[\mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}):\mathbb{Q}]=p$, então $[\mathbb{Q}((1+\sqrt[p]{2})^n):\mathbb{Q}]=1$ ou p. Mas $[\mathbb{Q}((1+\sqrt[p]{2})^n):\mathbb{Q}]\neq 1$, pelo Lema 2.1. Daí $[\mathbb{Q}((1+\sqrt[p]{2})^n):\mathbb{Q}]=p$. Pela torre $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}((1+\sqrt[p]{2})^n\subseteq K_s$, teríamos que p divide t_s. Essa contradição é suficiente pra provarmos nosso resultado. □

Teorema 2.2. *Sejam $P(x),Q(x)\in\overline{\mathbb{Q}}(x)$ funções racionais*[1] *não constantes. Então o conjunto dos números algébricos da forma $P(T)^{Q(T)}$, com T transcendente, é denso em algum subconjunto conexo, não degenerado, de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Em particular esse conjunto é infinito.*

[1] quociente de polinômios

Demonstração. Escreva $P(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i / \sum_{j=0}^{s} b_j x^j$ e $Q(x) = Q_1(x)/Q_2(x)$. Considere um intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ que não contenha pólos de P (zeros de $\sum_{j=0}^{s} b_j x^j$). Sem perda de generalidade, supomos que $P(x) \notin \{0, 1\}$ para todo $x \in (a, b)$. Portanto, a função $f : (a, b) \to \mathbb{C}$, dada por $f(x) := P(x)^{Q(x)}$ está bem definida. Afirmamos que a função f é não constante. De fato, $f'(x) = 0$ implica que $\log P(x) = -Q(x)P'(x)/Q'(x)P(x)$ para todo $x \in (a, b)$. No entanto para $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap (a, b)$, com $Q'(\alpha)P(\alpha) \neq 0$, temos que $Q(\alpha)P'(\alpha)/Q'(\alpha)P(\alpha)$ é algébrico. Por outro lado, $\log P(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$ (Teorema de Lindemann). Assim $f((a, b))$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (continuidade de f), não degenerado (f não constante), denotado por Ω. Defina

$$\mathcal{F} = \{x^2+1, (x-a_0)\cdots(x-a_t)(x-b_0)\cdots(x-b_s)\} \cup \{Q_1(x) - dQ_2(x) \ : \ d \in \mathbb{Q}\}$$

Como todo polinômio em $\mathcal{F}$ tem grau no máximo $\max\{2+t+s, \mathrm{gr}(Q_1), \mathrm{gr}(Q_2)\}$, pelo Lema 2.2 existe um primo p tal que $(1 + \sqrt[p]{2})^n \notin \mathbb{Q}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}})$ para todo $n \geq 1$. Considere o conjunto $\{Q(1 + \sqrt[p]{2}) \ : \ Q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\}$ (respectivamente $\{Q(1 + \sqrt[p]{2}) \ : \ Q \in \mathbb{Q}(i)\backslash\{0\}\}$) se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ (respectivamente, se $\Omega \cap \mathbb{C} \neq \varnothing$). Note que esse conjunto é denso em $\mathbb{R}$ (respectivamente em $\mathbb{C}$) e portanto em Ω. Para um tal $Q(1 + \sqrt[p]{2}) \in \Omega$, temos

$$Q(1 + \sqrt[p]{2}) = P(T)^{Q(T)} \tag{2.4}$$

para algum $T \in (a, b)$. Devemos provar que T é um número transcendente. Suponha o contrário, então $P(T)$ e $Q(T)$ são números algébricos. Como $P(T) \notin \{0, 1\}$, então pelo Teorema de Gelfond-Schneider e a igualdade em (2.4), deduzimos que $Q(T) = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, $s > 0$. Daí $T \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ (pois é raiz de $Q_1(x) - \frac{r}{s}Q_2(x)$). Assim $P(T)^r \in \mathbb{Q}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}})$ (mantenha em mente que $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ contém os "coeficientes" de $P(x)$). Por (2.4), $(Q(1 + \sqrt[p]{2}))^s = P(T)^r$ e portanto $(1 + \sqrt[p]{2})^s \in \mathbb{Q}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}})$, mas isso contradiz a escolha do p no Lema 2.2. □

2.2 Aplicações: uma classe infinita de números transcendentes

Como aplicação do Teorema 2.2 para o caso $P(x) = Q(x) = x$, temos que o conjunto dos números algébricos da forma T^T, com T transcendente, é denso em algum subintervalo de $\mathbb{R}$. Nosso objetivo é usar a construção feita na prova desse teorema para explicitar tal subintervalo.

Como $Q(x) = x$, então $\mathbb{Q}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}}) = \mathbb{Q}$. Assim o número primo no Lema 2.2 pode ser tomado igual a 2, pois $(1+\sqrt{2})^n$ é irracional, para todo $n \geq 1$.

Defina $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^x$. Como $f'(x) = x^x(1+\log x)$, f é crescente para $x \geq e^{-1}$. Logo nosso subintervalo será $f([e^{-1}, +\infty)) = [e^{-1/e}, +\infty)$. Assim, temos que

Corolário 2.1. *O conjunto dos números algébricos da forma T^T, com T transcendente, é denso em $[e^{-1/e}, +\infty)$.*

O problema de determinar se e^e é transcendente continua em aberto, mas sabemos que existem algébricos T^T, $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$, tão perto de e^e quanto pedirmos.

Também $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e assim a restrição $f : [e^{-1}, +\infty) \to [e^{-1/e}, +\infty)$ é uma bijeção. Considere $F : [e^{-1/e}, +\infty) \to [e^{-1}, +\infty)$ a função inversa de f (denotada em alguns textos por p_∞, ver [6]). Assim, valem as relações

$$F(x)^{F(x)} = x, \text{ se } x \geq e^{-1/e} = 0,6922... \text{ e } F(x^x) = x, \text{ se } x \geq e^{-1} = 0,3678...$$

e alguns de seus valores podem ser calculados facilmente. Por exemplo, $F(1) = 1$, $F(4) = 2$ e $F(1/\sqrt{2}) = 1/2$.

Corolário 2.2. *Se $\alpha \geq e^{-1/e}$ é um número algébrico, tal que $\alpha^n \notin \mathbb{Q}$, para todo $n \geq 1$, então $F(\alpha)$ é transcendente. Além disso, $F(\alpha)^{F(\alpha)} (= \alpha)$ é algébrico.*

Se p é primo, então $1+\sqrt{p}$ é algébrico, maior que $e^{-1/e}$ e $(1+\sqrt{p})^n \notin \mathbb{Q}$ (ver Lema 2.1), então pelo Corolário 2.2,

Corolário 2.3. *Para todo primo p, o número $F(1+\sqrt{p})$ é transcendente.*

Observação 3. *A resposta para a Questão 1 é sim, pois, por exemplo,* $T := F(1+\sqrt{2011}) = 4,8299...$ *é transcendente, mas* $T^T = 1+\sqrt{2011} = 45,8442...$ *é algébrico.*

Surge então o problema: existe número algébrico da forma T^{T^T}, com T transcendente? E da forma $T^{T^{T^T}}$? Na próxima seção, mostraremos um resultado condicional que garante a existência, para todo $m \geq 3$, de números algébricos da forma $\underbrace{T^{T^{\cdot^{\cdot^{T}}}}}_{m}$, com T transcendente.

2.3 Números algébricos da forma $T^{T^{\cdot^{\cdot^{T}}}}$

Denotaremos $h_m(x) = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}_{m}$, para $x > 0$.

Lema 2.3. *Para todo* $m \geq 1$*, a função* $h_m(x)$ *é crescente, para* $x \geq 1$*.*

Demonstração. Usaremos indução sobre m. O caso $m = 1$ segue trivialmente. Suponha que $h'_{k-1}(x) > 0$ para $x \geq 1$. Como $h_k(x) = e^{h_{k-1}(x)\log x}$, temos que

$$h'_k(x) = h_k(x)\frac{d}{dx}(h_{k-1}(x)\log x) = h_k(x)\left(h'_{k-1}(x)\log x + \frac{h_{k-1}(x)}{x}\right).$$

Como $h'_{k-1}(x) > 0, \log x \geq 0, 1/x > 0$ e $h_{k-1}(x) > 0$ para $x \geq 1$, então $h'_k(x) > 0$ para $x \geq 1$. O resultado segue-se. □

Ainda para a prova do nosso resultado principal, precisaremos de um lema que estuda a natureza aritmética dos números Q^Q, onde Q é um número racional, não inteiro.

Lema 2.4. *Se* Q *é racional, não inteiro, então* Q^Q *é algébrico, não racional.*

Demonstração. Para o caso $Q > 0$, vamos escrever $Q = a/b \in \mathbb{Q}$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$. O número Q^Q é algébrico, pois é raíz de $x^b - Q^a$. Suponha que $Q^Q = m/n \in \mathbb{Q}$, com $\text{mdc}(m, n) = 1$. Assim $(a/b)^{a/b} = m/n$, o que implica $a^a n^b = m^b b^a$. Daí

$$\begin{cases} a^a &= m^b \quad \text{(I)} \\ n^b &= b^a \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Desejamos mostrar que $Q \in \mathbb{Z}$ ou, equivalentemente, que $b = 1$. Suponha que $b > 1$, então existe um primo p tal que $b = p^r b'$ com $\text{mdc}(p, b') = 1$ e $r \geq 1$. Por (II), temos que $n = p^s n'$ com $\text{mdc}(p, n') = 1$ e $s \geq 1$. Assim

$$n^b = (p^s n')^b = p^{sb} n'^b \text{ e } b^a = (p^r b')^a = p^{ra} b'^a$$

Como $n^b = b^a$, segue-se pelo Teorema Fundamental da Aritmética que $sb = ra$. Logo b divide r (pois $\text{mdc}(a, b) = 1$). Mas isso é uma contradição, pois $b = p^r b' > r$. Portanto $b = 1$. Para o caso $Q < 0$, escreva $Q = -a/b$, onde $a, b \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$. Se b é impar, então $Q^Q = (-1)^a (a/b)^{-a/b} \notin \mathbb{Q}$, pelo caso anterior. Se b é par, então a é impar, assim $Q^Q = (-1)^{1/b} (a/b)^{-a/b} \notin \mathbb{Q}$ pois $(-1)^{1/b} \notin \mathbb{R}$. Isso completa a prova. □

Uma consequência imediata do Lema 2.4 e do Teorema de Gelfond-Schneider é que Q^{Q^Q} é transcendente, para todo $Q \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$.

Teorema 2.3. *Dado $A \geq 1$, temos que*

(i) *Para todo $m \geq 1$, a equação Diofantina $h_m(x) = A$ tem única solução $T \geq 1$.*

(ii) *No caso que $m \geq 3$, se a Conjectura de Schanuel é verdadeira e $A \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{h_m(n) : n \in \mathbb{N}\}$, então T é transcendente.*

Demonstração. Pelo Lema 2.3, h_m é crescente para $x \geq 1$ e como $\lim_{x \to \infty} h_m(x) = \infty$, então $h_m : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ é uma bijeção. Assim, como $A \geq 1$, existe único $T \in [1, +\infty)$, tal que $h_m(T) = A$. Provando assim (i).

Para o segundo item, assumindo a Conjectura de Schanuel, devemos mostrar que T é transcendente. Nossa prova será feita por exclusão. Mostraremos, respectivamente, que T não pode ser inteiro, racional ou algébrico.

Caso 1. $T \in \mathbb{Z}$.

O número T não pode ser um inteiro, pela hipótese que $A \notin \{h_m(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Caso 2. $T \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$.

Pelo Lema 2.4, T^T é um algébrico não racional. Daí, $1, T^T$ são $\mathbb{Q}$-linearmente independentes e o mesmo acontece então para $\log T, T^T \log T$. Pela Conjectura de Schanuel,

$$\text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\log T, T^T \log T, T, T^{T^T}) \geq 2.$$

Como $T^T \log T, T \in \overline{\mathbb{Q}(\log T)}$ (pois T e T^T são algébricos), temos que $\log T$ e T^{T^T} são algebricamente independentes. Suponha, por indução, que os números

$$\log T, h_3(T), ..., h_{k-1}(T)$$

são algebricamente independentes ($k \leq m$). Então em toda combinação $\mathbb{Q}$-linear

$$a_1 T + a_2 T^T + \sum_{j=3}^{k-1} a_j h_j(T) = 0$$

devemos ter $a_3 = \cdots a_{k-1} = 0$. Como $T \in \mathbb{Q}$ e $T^T \notin \mathbb{Q}$, então $a_1 = a_2 = 0$. Portanto os números $T \log T, T^T \log T, h_3(T) \log T, ..., h_{k-1}(T) \log T$ são $\mathbb{Q}$-linearmente independentes. Pela Conjectura de Schanuel

$$\text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(T \log T, T^T \log T, h_3(T) \log T, ..., h_{k-1}(T) \log T, h_2(T), ..., h_k(T)) \geq k - 1$$

Como cada conjunto $\{T \log T, h_j(T), h_j(T) \log T\}$ é algebricamente dependente ($P(T \log T, h_j(T), h_j(T) \log T) = 0$, para $P(x, y, z) = \frac{1}{T} yx - z$), então

$$\text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(T \log T, T^T \log T, h_3(T) \log T, ..., h_{k-1}(T) \log T, h_2(T), ..., h_k(T)) = \text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(T \log T, h_3(T), ..., h_k(T)) \leq k - 1$$

Em particular $h_k(T)$ é transcendente. Ou seja, provamos (por indução) que $h_k(T)$ é transcendente, para todo $k \geq 3$. Por outro lado, $h_m(T) = A \in \overline{\mathbb{Q}}$. Contradição.

Caso 3. $T \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \mathbb{Q}$.

Pelo Teorema de Gelfond-Schneider, T^T é transcendente. Assim $1, T, T^T$ são $\mathbb{Q}$-linearmente independentes e como $\log T \neq 0$, o mesmo é verdade para $\log T, T \log T, T^T \log T$. Pela Conjectura de Schanuel,

$$\text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\log T, T \log T, T^T \log T, T, T^T, T^{T^T}) \geq 3$$

Como $T \log T,\ T^T \log T \in \mathbb{Q}(\log T, T, T^T)$ e T é algébrico, então

$$\text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\log T, T \log T, T^T \log T, T, T^T, T^{T^T}) = \text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\log T, T^T, T^{T^T}) \leq 3,$$

e assim $\log T, T^T$ e T^{T^T} são algebricamente independentes.

Suponha (hipótese de indução) que $\log T, h_2(T), ..., h_{k-1}(T)$ são algebricamente independentes ($k \leq m$). Assim, em toda combinação $\mathbb{Q}$-linear

$$a_0 + a_1 T + \sum_{j=2}^{k-1} a_j h_j(T) = 0$$

devemos ter que $a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0$. Como $T \notin \mathbb{Q}$, então $a_0 = a_1 = 0$. Resumindo, os números $1, T, h_2(T), ..., h_{k-1}(T)$, e portanto

$$\log T, T \log T, h_2(T) \log T, ..., h_{k-1}(T) \log T,$$

são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Pela Conjectura de Schanuel,

$$\text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\log T, T \log T, h_2(T) \log T, ..., h_{k-1}(T) \log T, T, h_2(T), ..., h_k(T)) \geq k$$

Por outro lado,

$$\{T \log T, h_2(T) \log T, ..., h_{k-1}(T) \log T\} \subseteq \mathbb{Q}(\log T, T, h_2(T), ..., h_k(T))$$

pois $e^{h_{k-1}(T) \log T} = h_k(T)$. Daí,

$$\text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\log T, T \log T, h_2(T) \log T, ..., h_{k-1}(T) \log T, T, h_2(T), ..., h_k(T)) = \text{grtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\log T, h_2(T), ..., h_k(T)) \leq k$$

Logo $\log T, h_2(T), ..., h_k(T)$ são algebricamente independentes. Em particular, $h_k(T)$ e portanto $h_m(T)$ é transcendente (por indução). Mas isso contradiz a identidade $h_m(T) = A \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Concluímos, por exclusão, que T deve ser transcendente. □

Observação 4. *No item (ii) do Teorema, a condição $m \geq 3$ não pode ser melhorada. De fato,*

$$3/2 \in (\overline{\mathbb{Q}} \setminus \{h_1(n) : n \in \mathbb{N}\}) \cup (\overline{\mathbb{Q}} \setminus \{h_2(n) : n \in \mathbb{N}\}),$$

mas o número algébrico $x = 3/2$ é claramente a única solução das equações $x = 3/2$ e $x^x = (3/2)^{3/2}$.

Como um corolário imediato do Teorema 2.3 (supondo a veracidade da Conjectura de Schanuel), temos que

Corolário 2.4. *Todo número algébrico $A \geq 1$, não natural, pode ser escrito da forma $\underbrace{T^{T^{\cdot^{\cdot^{T}}}}}_{m}$, para algum T transcendente.*

Capítulo 3

Funções inteiras em pontos complexos

Usando fórmulas de interpolação, provamos que todo subconjunto de $\overline{\mathbb{Q}}$ é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções hipertranscendentes, com ordem de crescimento tão pequeno quanto desejarmos. Além disso essas funções são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$.

3.1 Preliminares

3.1.1 Variáveis complexas $\times$ Teoria transcendente

3.1.1.1 Funções transcendentes e hipertranscendentes

Agora daremos algumas terminologias e resultados que serão úteis para as próximos seções.

Definição 3.1. *Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, se existe $P \in \mathbb{C}[x, y]$, não nulo, tal que*

$$P(z, f(z)) = 0, \text{ para todo } z \in \Omega.$$

então f é dita algébrica*, caso contrário f é chamada* transcendente.

Exemplo 3.1. *Todo polinômio em* $\mathbb{C}[z]$*, em geral toda função racional em* $\mathbb{C}(z)$ *é algébrica.*

Exemplo 3.2. *As funções* e^z, $\log z$ *são transcendentes. Como também as funções trigonométricas* $\cos z$, $\operatorname{sen} z$,... *e suas inversas. Algumas funções dadas por equações funcionais também são transcendentes, por exemplo* $\zeta(z)$ *e* $\Gamma(z)$.

Nosso próximo resultado classifica as funções inteiras quanto a sua transcendência ou algebricidade, mas precisamente provamos que "uma função inteira é algébrica se, e somente se é um polinômio". Mas antes é necessário a apresentação de alguns lemas.

Lema 3.1. *Se* f *é inteira (diferenciável em todo* $\mathbb{C}$*) não constante, então existe* $R_0 > 0$*, tal que* $|f|_R := \sup_{|z|=R} |f(z)| \geq 1$ *para todo* $R \geq R_0$.

Demonstração. Suponha o contrário. Tome $z \in \mathbb{C}$. Logo existe um $R > |z|$ tal que $|f|_R < 1$. Como

$$|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)| = \sup_{|z|\leq R} |f(z)|$$

então $|f(z)| < 1$. Como z foi tomado arbitrário, segue-se que f é limitada e portanto constante pelo Teorema de Liouville, ver [8, p. 77, 3.4]. □

Lema 3.2. *Se* $P(z) \in \mathbb{C}[z]$*, não nulo, então existem* $k > 0$ *e* $R_1 > 0$*, tais que* $|P(z)| > k$*, para todo* z *com* $|z| \geq R_1$.

Demonstração. Para o caso em que P é uma constante não nula, digamos t, o resultado segue trivialmente ($k = t/2$ e $R_1 = 1$). Seja P não constante e suponha que dados $k_n = \frac{1}{n}$ e $R_{1n} = n$, existe z_n com $|z_n| > R_{1n} = n$ tal que $|P(z_n)| \leq k_n = \frac{1}{n}$. Logo, quando $n \to \infty$, temos que $|z_n|$ tende a infinito e $|P(z_n)|$ tende a zero. Contradição pois sendo P não constante, $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$. □

Lema 3.3. *Se* f *é inteira e algébrica, então existem* $c > 0$ *e* $R_2 > 0$*, tais que* $|f|_R \leq R^c$*, para todo* $R \geq R_2$.

Demonstração. Por hipótese sobre a f, existe $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, não nulo, tal que

$$P(z, f(z)) = 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Colocando em evidência as potências de $f(z)$ que são iguais, podemos reescrever a igualdade acima como

$$a_0(z) + a_1(z)f(z) + \cdots + a_d(z)f(z)^d = 0 \tag{3.1}$$

onde $a_0(z), ..., a_d(z) \in \mathbb{C}[z]$ e $a_d(z)$ é não nulo. Pelo Lema 3.2, existem k e R_1 positivos, tais que $|a_d(z)| > k$ para todo z com $|z| \geq R_1$. Pelo Lema 3.1, existe $R_0 > 0$ tal que $|f|_R \geq 1$, para $R \geq R_0$. A partir de agora todo R que aparecer será considerado maior do que ou igual ao $\max\{R_0, R_1\}$. Como $|f(z)|$ é contínua e $\partial B(0;R)$ é compacto, então existe z', com $|z'| = R$, tal que $|f(z')| = \sup_{|z|=R} |f(z)| = |f|_R$. Substituindo z' na igualdade (3.1) (não esqueça que essa igualdade é válida para todo $z \in \mathbb{C}$) obtemos

$$\underbrace{a_0(z')}_{z_1} + \underbrace{a_1(z')f(z') + \cdots + a_d(z')f(z')^d}_{z_2} = 0$$

Como $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 + z_1| = 0$ (isto é válido para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$), então $|z_2| \leq |z_1|$ e assim

$$|a_1(z')f(z') + \cdots + a_d(z')f(z')^d| \leq |a_0(z')|$$

Colocando $f(z')$ em evidência no lado esquerdo da desigualdade acima e usando o fato de que $|f(z')| \geq 1$, temos

$$|a_1(z') + \cdots + a_d(z')f(z')^{d-1}| \leq |a_0(z')|$$

Repetindo o mesmo processo $d-1$ vezes, segue-se que

$$|a_d(z')f(z')| \leq |a_0(z')| + \cdots + |a_{d-1}(z')|$$

Como $|z'| = R \geq R_1$, então $|a_d(z')| > k$. Daí

$$|f(z')| \leq \tfrac{1}{k}(|a_0(z')| + \cdots + |a_{d-1}(z')|) \leq |b_0| + \cdots + |b_s||z'|^s$$

onde $b_0, ..., b_s \in \mathbb{C}$ e $s = \max\{\text{gr}(a_0), ..., \text{gr}(a_{d-1})\}$. Novamente usamos o fato de que $|z'| = R$ e $|f(z')| = |f|_R$ para obter

$$|f|_R \leq |b_0| + \cdots + |b_s|R^s < R^{s+1},$$

onde a última desigualdade é válida para R suficientemente grande, digamos $R \geq R'$. Basta tomar $c \geq s+1$ e $R_2 = \max\{R_0, R_1, R'\}$ para concluir a demonstração. □

Agora podemos enunciar e provar nosso teorema

Teorema 3.1. *Uma função inteira é algébrica se, e somente se é um polinômio.*

Demonstração. Suponha que $f(z) \in \mathbb{C}[z]$. Defina $P(x, y) = f(x) - y$, então $P(z, f(z)) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Agora vamos supor que f é inteira e algébrica. Assim, pelo Lema 3.3, existem c e $R_2 > 0$ tais que $|f|_R \leq R^c$ para $R \geq R_2$. Pela fórmula integral de Cauchy, ver [8, p. 73, Corolário 2.13], para todo $n \geq c+1$ e $R \geq R_2$,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0) = \tfrac{n!}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw \\
&\leq \tfrac{n!}{2\pi}\int_{|w|=R} \frac{|f(w)|}{|w|^{n+1}}dw \\
&\leq \tfrac{n!}{2\pi R^{n+1}}\int_{|w|=R} |f|_R dw \text{ (pois } |w| = R) \\
&\leq \tfrac{n!R^c 2\pi R}{2\pi R^{n+1}} \text{ (pelo Lema 3.3)} \\
&= \tfrac{n!}{R^{n-c}}
\end{aligned}$$

Como $n - c \geq 1$, fazendo R tender ao infinito, temos que $|f^{(n)}(0)| = 0$. Mas f é inteira, logo pode ser escrita como

$$f(z) = f(0) + \cdots + \frac{f^{(c)}(0)}{c!}z^c + \sum_{k \geq c+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$$

No entanto $\sum_{k\geq c+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k = 0$, pois acabamos de provar que $|f^{(n)}(0)| = 0$, para todo $n \geq c+1$, logo f é um polinômio de grau no máximo c. □

Observação 1. *Note que a função* $f(z) = \dfrac{1+z}{z^2+1}$ *é algébrica mas não é um polinômio. Isso não contradiz o teorema acima pois* f *não é inteira (possui pólos em* $\pm i$*).*

Um conjunto de funções $f_1, ..., f_m$ é dito ser *algebricamente independente* sobre um corpo K, se existe um polinômio não nulo P, com coeficientes em K, tal que $P(f_1(z), ..., f_m(z))$ é a função nula. Portanto f é uma função transcendente se, e somente se, z e $f(z)$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$

Definição 3.2. *Uma função* f *é dita* hipotranscendente*, se é solução de uma equação diferencial algébrica (EDA), não trivial, com coeficientes complexos, isto é, se existe* $n \geq 0$ *tal que* $P(z, f(z), ..., f^{(n)}(z))$ *é a função nula (para algum polinômio* P *em* $n+2$ *variáveis com coeficientes em* $\mathbb{C}$*). Caso contrário* f *é dita ser* hipertranscendente*.*

O termo foi introduzido por Mordukhai-Boltovskoi em "Hypertranscendental numbers and hypertranscendental functions"(1949). Em alguns textos conhecidos, ver [25] e [30], o termo *transcendentemente transcendente* é usado para designar funções que não satisfazem nenhuma EDA.

Observe que uma função f é hipertranscendente se, e somente se, as funções $z,\ f(z),\ f'(z), ...,\ f^{(n)}(z)$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$, para todo $n \geq 0$. Funções hipertranscendentes, geralmente, surgem como soluções de equações funcionais.

Exemplo 3.3. *Toda função hipertranscendente é transcendente, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo,* $f(z) = e^z$ *é solução de* $P(z, f, f') = 0$*, para* $P(z_1, z_2, z_3) = z_2 - z_3$*.*

Exemplo 3.4. *Toda função algébrica é hipotranscendente.*

Exemplo 3.5. *A função zeta de Riemman é um exemplo de função hipertranscendente, ver [27].*

Algumas propriedades de funções hipotranscendentes são:

Proposição 3.1. *A soma, produto, diferença, quociente e composição (sob certas condições) de funções hipotranscendentes é hipotranscendente.*

Uma prova para esse fato pode ser vista em [27].

3.1.1.2 Ordem de um função inteira

Relembramos também a seguinte definição

Definição 3.3. *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira não constante. Dizemos que f tem ordem ρ, se*

$$\rho := \lim_{R\to\infty} \sup \frac{\log\log |f|_R}{\log R}$$

Dizemos que funções constantes tem ordem nula.

Algumas propriedades são:

- Se $Q(z)$ é um polinômio, então a ordem da função $e^{Q(z)}$ é $\mathrm{gr}(Q)$;
- A soma $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ de duas funções inteiras de ordem ρ_1, ρ_2, respectivamente, é de ordem no máximo $\rho := \max\{\rho_1, \rho_2\}$ e exatamente ρ, se $\rho_1 \neq \rho_2$;
- O produto $f(z) = f_1(z)f_2(z)$ de duas funções inteiras de ordem ρ_1, ρ_2, respectivamente, é de ordem no máximo $\max\{\rho_1, \rho_2\}$;
- A função $f'(z)$ tem a mesma ordem que $f(z)$.

As provas para essas propriedades podem ser vistas em [32, 320-322].

Proposição 3.2. *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira. Se*

$$|f(z)| \leq e^{|z|^\rho}, \tag{3.2}$$

para $|z|$ suficientemente grande, então a ordem de f é no máximo ρ.

Demonstração. Se $\rho = 0$, então f é constante pelo Teorema de Liouville, implicando assim, por definição, que é de ordem ρ. Caso $\rho > 0$, então o resultado segue-se para funções constantes. Se f é não constante, pela desigualdade (3.2), temos que $|f|_R \leq e^{R^\rho}(*)$, para R suficientemente grande. Como f é inteira e não constante, então para R suficientemente grande, temos que $|f|_R \geq e$. Portanto podemos aplicar a função log duas vezes em $(*)$ sem mudar o sentido dessa desigualdade. Assim

$$\log\log|f|_R \leq \rho \log R$$

implicando assim, por definição, que a ordem de f é no máximo ρ. □

Émile Picard, provou que se $f(z)$ é uma função inteira transcendente, então a equação

$$f(z) = A,$$

tem infinitas soluções para todo $A \in \mathbb{C}$, com um única possível exceção. Por exemplo, a equação $e^z = A$ tem infinitas soluções para todo $A \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$. No entanto essa exceção desaparece quando f possui mais uma propriedade, a saber, relacionada a sua ordem

Teorema 3.1 (Picard)**.** *Se $f(z)$ é uma função inteira transcendente com ordem finita $\rho \notin \mathbb{Z}$, então a equação*

$$f(z) = A,$$

tem infinitas soluções para todo $A \in \mathbb{C}$.

Para provas desses resultados, ver [23, p. 44-81]

Surpreendentemente, também existem relações entre ordem de uma função e o número de pontos complexos onde essa função e suas derivadas assumem valores inteiros. Em 1949, Straus [37] provou que para uma função inteira transcendente f de ordem ρ, o conjunto

$$\{\alpha \in K \ : \ f^{(k)}(\alpha) \in \mathbb{Z}, \ k \geq 0\}$$

tem cardinalidade no máximo $\rho[K : \mathbb{Q}]$, onde K é um corpo de números algébricos (i.e. extensão finita de $\mathbb{Q}$). Temos também que se f é uma função inteira e transcendente com ordem no máximo ρ, então o conjunto

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \ : \ f^{(k)}(\alpha) \in \mathbb{Z} \text{ para todo } k \geq 0\}$$

tem no máximo ρ elementos.

Para mais sobre o assunto veja [7, Capítulo 9].

3.1.2 O Wronskiano

Dadas m funções de uma variável real (ou complexa) $f_1, ..., f_m$ que são $(m-1)$ vezes diferenciáveis num intervalo (ou domínio) I, o *Wronskiano* de $f_1, ..., f_m$ é uma função em I, definida por

$$W(f_1, ..., f_m)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \cdots & f_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Dizemos que $f_1, ..., f_m$ são *linearmente dependentes* no intervalo (ou domínio) I, se existem $\lambda_1, ...\lambda_m \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), não todos nulos, tais que

$$\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_m f_m(x) = 0, \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Caso contrário, essas funções são ditas *linearmente independentes* em I.

Um interessante resultado relaciona os dois conceitos acima:

Teorema 3.2. *As funções $f_1, ..., f_m$, analíticas em I, são linearmente dependentes em I se, e somente se, $W(f_1, ..., f_m)(x) = 0$, para todo $x \in I$.*

Demonstração. Ver [13, p. 21, Teorema 3.7]. □

3.2 História e o teorema principal

No fim do século XIX, após a prova de Hermite e Lindemann da transcendência de e^{α}, para algébricos não nulos α, surgiu a questão:

($\star$) Uma função inteira transcendente usualmente assume valores transcendentes em pontos algébricos?

Nesse contexto, a palavra "usualmente" significa em um conjunto infinito de pontos. Por exemplo, no caso da função e^z, "usualmente" significa que essa função assume valores transcendentes no conjunto infinito $\overline{\mathbb{Q}}\backslash\{0\}$.

Straüss, em 1886, tentou provar que uma função analítica não pode assumir valores racionais em todos os pontos racionais numa vizinhança da origem. No entanto, no mesmo ano, Weierstrass surpreendeu-lhe com um contra-exemplo e também afirmou que existem funções inteiras transcendentes que assumem valores algébricos em todos os pontos algébricos. Em 1895, P. Stäckel provou que se Σ é um conjunto enumerável e T um conjunto denso em $\mathbb{C}$, então existe uma função inteira transcendente $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $f(\Sigma) \subseteq T$. A afirmação de Weierstrass é obtida no caso especial $\Sigma = T = \overline{\mathbb{Q}}$. Outra construção devida a Stäckel [36], em 1902, produz uma função inteira f tal que todas as suas derivadas $f^{(t)}$ mapeiam $\overline{\mathbb{Q}}$ em $\overline{\mathbb{Q}}$. Dois anos depois, G. Faber refinou esse resultado em $f^{(t)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}(i)$, para todo $t \geq 0$. Em 1968, A. J. Van der Poorten [28] construiu uma função inteira transcendente f, tal que $f^{(t)}(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$, para todos $t \geq 0$ e $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Em 2006, A. Surroca [38], generalizou o resultado de Van der Poorten, quando provou, em particular, que existe uma função inteira transcendente f, tal que $f^{(s)}(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $s \geq 0$ e além disso, o conjunto dos números algébricos α, com $|\alpha| \leq 1$ e $[\mathbb{Q}(\alpha, f(\alpha)) : \mathbb{Q}] \leq D$ tem cardinalidade no mínimo $e^{D(D+1)-\log 2}$. Uma discussão mais elegante sobre todos esses assuntos pode ser encontrada em [20] e [39].

Fomos capazes de generalizar esses dois resultados de Stäckel, como também o resultado de Faber, para o seguinte resultado geral

Teorema 3.3. *Sejam $A \subseteq \mathbb{C}$ enumerável e ρ um número real positivo. Para todo inteiro $s \geq 0$ e todo $\alpha \in A$, fixe $E_{\alpha,s}$ um conjunto denso de $\mathbb{C}$. Então existe um conjunto $\mathcal{F}$, não vazio, de funções inteiras com as seguintes propriedades:*

(a) *Para toda $f \in \mathcal{F}$, todo $\alpha \in A$ e todo inteiro $s \geq 0$, $f^{(s)}(\alpha) \in E_{\alpha,s}$.*

(b) *Toda função em $\mathcal{F}$ tem ordem no máximo ρ.*

(c) *Se $\mathcal{F}^{(s)}$ denota o conjunto das s-ésimas derivadas das funções em $\mathcal{F}$, então para todo inteiro $m \geq 1$, todas $f_1, \ldots, f_m \in \bigcup_{s\geq 0} \mathcal{F}^{(s)}$ e todo $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, ..., X_m]$, não nulo, a função inteira $P(z, f_1(z), ..., f_m(z))$ é não nula.*

(d) *O conjunto $\mathcal{F}$ é não-enumerável.*

Note que a propriedade (c) garante que as funções em $\mathcal{F}$ são hipertranscendentes (desde que $f, f', ..., f^{(n)} \in \bigcup_{s\geq 0} \mathcal{F}^{(s)}$).

Algumas consequências imediatas (com as convenientes escolhas de A e $E_{\alpha,s}$ notadas em parentêses) desse teorema são

Corolário 3.1 (Generalização do 1º Teorema de Stäckel)**.** *Para todo conjunto enumerável $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ e todo conjunto denso $T \subseteq \mathbb{C}$, existe uma função inteira hipertranscendente f tal que $f^{(s)}(\Sigma) \subseteq T$ para $s \geq 0$. ($A = \Sigma,\ E_{\alpha,s} = T$)*

Corolário 3.2 (Generalização do 2º Teorema de Stäckel)**.** *Seja $A \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto enumerável e denso em $\mathbb{C}$, então existe uma função inteira hipertranscendente f tal que $f^{(s)}(A) \subseteq A$, para $s \geq 0$.($E_{\alpha,s} = A$)*

Corolário 3.3 (Generalização do resultado de Faber)**.** *Existe uma função inteira hipertranscendente, tal que $f^{(s)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}(i)$, para $s \geq 0$.($A = \overline{\mathbb{Q}},\ E_{\alpha,s} = \mathbb{Q}(i)$)*

Nas próximas duas seções, provaremos esse resultado.

3.3 Resultados auxiliares

Recordamos que $L(P)$ denota a soma do valor absoluto dos coeficientes de um dado polinômio P, e é conhecido como *comprimento* de P. Antes de provar o Teorema 3.3, precisamos provar alguns resultados auxiliares.

Lema 3.4. *Se $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ é um polinômio e $d \geq \mathrm{gr}(P)$ (no caso do polinômio nulo, d pode ser qualquer número real não negativo), então*

$$|P(z)| \leq L(P) \max\{1, |z|\}^d, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Escreva

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\mathrm{gr}(P)} z^{\mathrm{gr}(P)}.$$

Usando a desigualdade triangular,

$$|P(z)| \leq |a_0| + |a_1||z| + \cdots + |a_{\mathrm{gr}(P)}||z^{\mathrm{gr}(P)}|$$

Como $|z|^k \leq \max\{1, |z|\}^{\mathrm{gr}(P)}$, para todos $k \in \{0, 1, ..., \mathrm{gr}(P)\}$ e $z \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leq (|a_0| + \cdots + |a_{\mathrm{gr}(P)}|) \max\{1, |z|\}^{\mathrm{gr}(P)} \\ &\leq L(P) \max\{1, |z|\}^d \end{aligned}$$

□

Além do lema anterior, precisaremos de um Teorema devido a Weierstrass, para provar nosso próximo resultado

Teorema 3.4. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto e $(f_n)_{n\geq 0}$ funções holomorfas em Ω. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de Ω, então a soma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ é uma função holomorfa em Ω.*

Observação 5. *O teorema acima não é válido no caso real. Por exemplo, pelo Teorema da aproximação de Weierstrass (ver [16, p. 250, Proposição 18]), a função valor absoluto $|x|$ é o limite uniforme de uma sequência de polinômios (que são funções C^∞) em $[0, 1]$. No entanto $|x|$ não é, nem mesmo, diferenciável em $[0, 1]$.*

Lema 3.5. *Seja* $(P_n(z))_{n\geq 0} \in \mathbb{C}[z]$ *uma sequência de polinômios, não nulos, e* ρ *um número real positivo. Defina recorrentemente* $m_0 = 1$ *e* $m_k = \max\{\lceil \frac{\mathrm{gr}(P_k)}{\rho} \rceil^1, m_{k-1}+1\}$ *para* $k \geq 1$. *Se uma sequência* $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}$ *satisfaz*

$$|a_k| \leq \frac{1}{L(P_k)m_k!} \tag{3.5}$$

para todo $k \geq 0$, *então a série* $\sum a_n P_n(z)$ *converge absolutamente e uniformemente sobre subconjuntos compactos de* $\mathbb{C}$ *e sua soma* f *é uma função inteira com ordem no máximo* ρ.

Demonstração. Definamos sequências $(Q_n(z))_{n\geq 0} \in \mathbb{C}[z]$ e $(b_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}$ da seguinte maneira

$$Q_n(z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n \neq m_k \\ P_k(z), & \text{se} \quad n = m_k \end{cases}$$

e $b_{m_k} = a_k$ para $k \geq 0$. Como $1 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$, em particular os m_k's são distintos, então os Q_n's e b_n's estão bem definidos e além disso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Q_n(z)$. Explicitamente, a sequência $(Q_n)_{n\geq 0}$ é:

$$0, P_0(z), \underbrace{0, ..., 0}_{m_1 - m_0 - 1}, P_1(z), \underbrace{0, ..., 0}_{m_2 - m_1 - 1}, P_2(z), 0, ...$$

Também, se Q_n é não nulo, então $n = m_k$ para algum $k \geq 0$. Logo

$$\mathrm{gr}(Q_n) = \mathrm{gr}(Q_{m_k}) = \mathrm{gr}(P_k) \leq m_k \rho = n\rho,$$

onde usamos o fato que $m_k \geq \lceil \frac{\mathrm{gr}(P_k)}{\rho} \rceil \geq \frac{\mathrm{gr}(P_k)}{\rho}$. Temos pelo Lema 3.4,

$$|Q_n(z)| \leq L(Q_n) \max\{1, |z|\}^{n\rho}$$

para todo $n \geq 0$. Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, então existe $R > 0$ tal que $|z| \leq R$, para todo $z \in K$ (pois K é limitado). Assim, em K, temos

$$\begin{aligned} |b_{m_k} Q_{m_k}(z)| &\leq |b_{m_k}||L(Q_{m_k})| \max\{1, |z|\}^{m_k\rho} \\ &= |a_k||L(P_k)| \max\{1, |z|\}^{m_k\rho} \\ &\leq \frac{\max\{1, |z|\}^{m_k\rho}}{m_k!} \end{aligned}$$

[1] $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior do que ou igual à x

Assim $|b_{m_k}Q_{m_k}(z)| \leq M_k$, para todo $z \in K$, onde $M_k = \frac{\max\{1,R\}^{m_k\rho}}{m_k!}$. Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\max\{1,R\}^{n\rho}}{n!} = e^{\max\{1,R\}^{\rho}} \tag{3.6}$$

Daí, pelo teste M de Weierstrass, ver [8, p. 29, 6.2], a série $\sum_{k=0}^{\infty} b_{m_k}Q_{m_k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nP_n(z)$ converge uniformemente em K, segue-se do Teorema 3.4 que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nP_n(z)$ é uma função inteira. Das desigualdades em (3.6), obtemos que a ordem de f é no máximo ρ. (veja Proposição 3.2) □

Agora enumeramos $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. Todo número inteiro $n \geq 1$ pode ser escrito unicamente na forma $n = \frac{m_n(m_n+1)}{2} + j_n$, para $m_n \geq 0$ e $1 \leq j_n \leq m_n + 1$, defina $\gamma_n = \alpha_{m_n+2-j_n}$. Agora, construímos uma sequência de polinômios como segue

$$P_0(z) = 1 \text{ e } P_n(z) = (z-\gamma_1)\cdots(z-\gamma_n) = P_{n-1}(z)(z-\alpha_{m_n+2-j_n}),\ n \geq 1.$$

Um padrão para essa construção pode ser vista abaixo

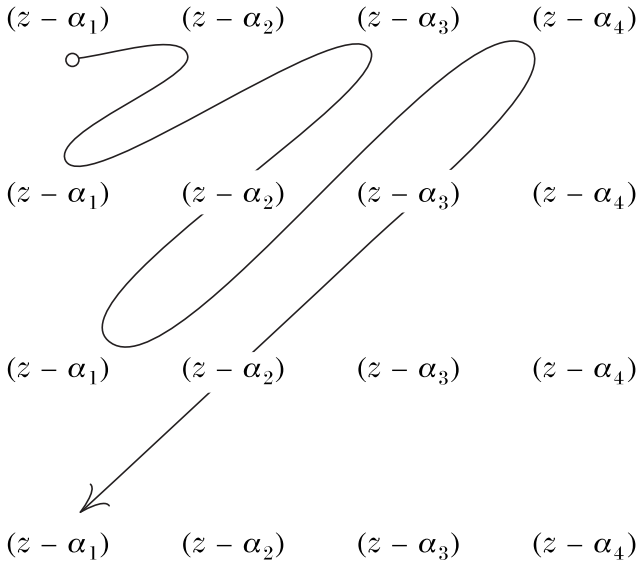


Figura 3.1: Construção dos P_n's

Alguns desses polinômios são

n	$P_n(z)$
$0 = 0$	1
$1 = 1$	$(z-\alpha_1)$
$2 = 1+1$	$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)$
$3 = 1+2$	$(z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)$
$4 = 1+2+1$	$(z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)$
$5 = 1+2+2$	$(z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)^2(z-\alpha_3)$
$6 = 1+2+3$	$(z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)^2(z-\alpha_3)$
$7 = 1+2+3+1$	$(z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)^2(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)$
$8 = 1+2+3+2$	$(z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)^2(z-\alpha_3)^2(z-\alpha_4)$
$9 = 1+2+3+3$	$(z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)^3(z-\alpha_3)^2(z-\alpha_4)$
$10 = 1+2+3+4$	$(z-\alpha_1)^4(z-\alpha_2)^3(z-\alpha_3)^2(z-\alpha_4)$

Com a mesma notação, defina $s_n = j_n - 1$.

Lema 3.6. *Para todos $k \geq n \geq 1$, temos $P_{n-1}^{(s_n)}(\gamma_n) \neq 0$ e $P_k^{(s_n)}(\gamma_n) = 0$.*

Demonstração. Vamos particionar esse conjunto de polinômios em infinitos conjuntos disjuntos de acordo com o número de fatores lineares distintos de cada polinômio. Dessa maneira temos:

$$D_0 = \{P_0\},\ D_1 = \{P_1\},\ D_2 = \{P_2, P_3\},\ D_3 = \{P_4, P_5, P_6\}, \ldots$$

Em geral,

$$D_m = \{P_{d_m}, P_{d_m+1}, \ldots, P_{d_m+(m-1)}\} \tag{3.7}$$

onde $d_m = m + \frac{(m-1)(m-2)}{2}$, para $m > 0$.

Explicitamente, os m polinômios em D_m são

$$\begin{aligned}
P_{d_m}(z) &= (z-\alpha_1)^{m-1}(z-\alpha_2)^{m-2}\cdots(z-\alpha_{m-2})^2(z-\alpha_{m-1})(z-\alpha_m) \\
P_{d_m+1}(z) &= (z-\alpha_1)^{m-1}(z-\alpha_2)^{m-2}\cdots(z-\alpha_{m-2})^2(z-\alpha_{m-1})^2(z-\alpha_m) \\
\cdots &\quad \cdots \\
P_{d_m+(m-1)}(z) &= (z-\alpha_1)^{m}(z-\alpha_2)^{m-1}\cdots(z-\alpha_{m-2})^3(z-\alpha_{m-1})^2(z-\alpha_m)
\end{aligned}$$

Para $0 \leq k \leq m-1$,

$$d_m + k = \frac{m(m-1)}{2} + k + 1$$

onde $1 \leq k+1 \leq m$. Daí,

$$\gamma_{d_m+k} = \alpha_{m-k} \text{ e } s_{d_m+k} = k$$

Pela construção dos P_n's, é suficiente provar o lema no caso $k = n$. Distinguiremos dois casos:

Caso 1. Existe $m \geq 2$, tal que P_{n-1} e P_n estão em D_m. Nesse caso, $P_{n-1} = P_{d_m+k}$ e $P_n = P_{d_m+k+1}$, para algum $0 \leq k \leq m-2$. Resumindo, devemos provar que

$$P^{(k+1)}_{d_m+k}(\gamma_{d_m+k+1}) \neq 0 \text{ e } P^{(k+1)}_{d_m+k+1}(\gamma_{d_m+k+1}) = 0$$

ou equivalentemente,

$$P^{(k+1)}_{d_m+k}(\alpha_{m-k-1}) \neq 0 \text{ e } P^{(k+1)}_{d_m+k+1}(\alpha_{m-k-1}) = 0$$

Note que

- $P_{d_m+k}(z) = (z-\alpha_1)^{m-1} \cdots (z-\alpha_{m-k-1})^{k+1}(z-\alpha_{m-k})^{k+1} \ldots (z-\alpha_m)$
- $P_{d_m+k+1}(z) = (z-\alpha_1)^{m-1} \cdots (z-\alpha_{m-k-1})^{k+2}(z-\alpha_{m-k})^{k+1} \ldots (z-\alpha_m)$

Desde que

$$\frac{d^s}{dz^s}(z-\alpha_{m-k-1})^{k+1}\Big|_{z=\alpha_{m-k-1}} = \begin{cases} 0, & \text{se } s < k+1 \\ (k+1)!, & \text{se } s = k+1 \end{cases}$$

então $P^{(k+1)}_{d_m+k}(\alpha_{m-k-1}) \neq 0$. Da mesma maneira,

$$\frac{d^s}{dz^s}(z-\alpha_{m-k-1})^{k+2}\Big|_{z=\alpha_{m-k-1}} = 0, \text{ se } s \leq k+1$$

Portanto $P^{(k+1)}_{d_m+k+1}(\alpha_{m-k-1}) = 0$.

Caso 2. Para algum $m \geq 1$, $P_{n-1} \in D_{m-1}$ e $P_n \in D_m$. Nesse caso, $P_n(z) = P_{n-1}(z)(z-\alpha_m)$, onde

$$P_{n-1}(z) = (z-\alpha_1)^{m-1} \cdots (z-\alpha_{m-2})^2(z-\alpha_{m-1})$$

Agora é fácil ver que $P_{n-1}^{(s_n)}(\gamma_n) = P_{n-1}(\alpha_m) \neq 0$ e $P_n^{(s_n)}(\gamma_n) = P_n(\alpha_m) = 0$. □

Lema 3.7. *Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então $a_n = b_n$ para $n \geq 0$.*

Demonstração. Dado $c = (c_0, c_1, ...) \in \mathbb{C}^\infty$, denote $f_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z)$ (claramente pedimos a convergência dessa série). Suponha que

$$f_a(z) = f_b(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}, \tag{3.8}$$

onde $a = (a_0, a_1, ...)$ e $(b_0, b_1, ...)$. Assim $a_0 = f_a(\alpha_1) = f_b(\alpha_1) = b_0$. Suponha, por indução, que $a_0 = b_0, ..., a_{n-1} = b_{n-1}$. Novamente pela identidade em (3.8), $f_a^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) = f_b^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1})$. Por outro lado, usando o Lema 3.6,

- $f_a^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) = a_0^{(s_{n+1})} + \cdots + a_{n-1} P_{n-1}^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) + a_n P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1})$;
- $f_b^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) = b_0^{(s_{n+1})} + \cdots + b_{n-1} P_{n-1}^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) + b_n P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1})$

Portanto $a_n P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) = b_n P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1})$. Novamente pelo Lema 3.6, $P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) \neq 0$, assim $a_n = b_n$. Segue-se por indução o resultado desejado. □

Sejam A um subconjunto de $\mathbb{C}$ e $a, b \in \mathbb{C}$, com $b \neq 0$. Na próxima seção, denotaremos $\frac{A+a}{b} := \{\frac{x+a}{b} : \ x \in A\}$.

Observação 6. *Observe que se A é denso em $\mathbb{C}$, então $\frac{A+a}{b}$ é também denso em $\mathbb{C}$. De fato, considere uma bola $B(y; R) \subseteq \mathbb{C}$, não degenerada. Existe $x \in A$ (pois A é denso) que pertence a bola não degenerada $B(by - a; |b|R)$. Portanto $|x - (by - a)| < |b|R$, mas isso implica $\left|\frac{x+a}{b} - y\right| < R$, isto é, $\frac{A+a}{b}$ intersecta $B(y; R)$.*

3.4 Prova do Teorema

Estamos prontos para construir a função inteira desejada, fixando recursivamente os coeficientes na série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z)$, onde a sequência $(P_k)_{k\geq 0}$ foi definida na Seção 3.3. Com a mesma notação da definição dos P_n's, defina

$$\beta_n = f^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) \text{ e } E_n = E_{\gamma_{n+1},s_{n+1}}.$$

Por exemplo,

$$\beta_0 = f(\alpha_1),\ \beta_1 = f(\alpha_2),\ \beta_2 = f'(\alpha_1),\ \beta_3 = f(\alpha_3),\ \beta_4 = f'(\alpha_2), \ldots,$$

e

$$E_0 = E_{\alpha_1,0},\ E_1 = E_{\alpha_2,0},\ E_2 = E_{\alpha_1,1},\ E_3 = E_{\alpha_3,0},\ E_4 = E_{\alpha_2,1}, \ldots$$

Mostraremos que para todo $n \geq 0$, existem infinitas possíveis escolhas para cada a_j, $0 \leq j \leq n$, tais que $\beta_n \in E_n$.

Primeiro, pelo Lema 3.5, a condição $0 < |a_k| \leq \frac{1}{L(P_k)m_k!}$ garantirá que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z)$ é uma função inteira de ordem no máximo ρ.

Pelo Lema 3.6, sabemos que $P_l^{(s_n)}(\gamma_n) = 0$ quando $l \geq n$, portanto β_n é na verdade a soma finita $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1})$. Note que $\beta_0 = a_0 P_0^{(0)}(\alpha_1) = a_0$ e E_0 é denso, assim podemos escolher a_0 em um conjunto infinito I_0 tal que $0 < |a_0| \leq \frac{1}{L(P_0)m_0!}$ e $\beta_0 \in E_0$. Por hipótese de indução, suponhamos que os valores de $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ estão bem fixados respectivamente em conjuntos infinitos $I_0, I_1, ..., I_{n-1}$ tais que $0 < |a_k| \leq \frac{1}{L(P_k)m_k!}$ e $\beta_k \in E_k$ para $0 \leq k \leq n-1$. Agora, podemos escrever $\beta_n = A_n + a_n P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1})$, onde $A_n := \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1})$. Pelo Lema 3.6 temos que $P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) \neq 0$, assim o conjunto $\frac{E_n - A_n}{P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1})}$ é denso em $\mathbb{C}$. Defina

$$I_n := \left(\frac{E_n - A_n}{P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1})} \right) \cap B\left(0; \tfrac{1}{L(P_n)m_n!}\right) \setminus \{0\}$$

Claramente I_n é infinito (intersecção de um denso com uma bola) e tomando qualquer $a_n \in I_n$, temos que $0 < |a_n| \leq \frac{1}{L(P_n)m_n!}$ e $\beta_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) + a_n P_n^{(s_{n+1})}(\gamma_{n+1}) \in E_n$. Completando assim nosso processo indutivo.

Defina a aplicação

$$\phi : I_0 \times I_1 \times \cdots \to \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ é inteira de ordem} \leq \rho \text{ e } f^{(s)}(\alpha) \in E_{\alpha,s} \text{ para } s \geq 0,\ \alpha \in A\},$$

por $\phi(a) = \phi(a_0, a_1, ...) = f_a$, com $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$. A boa definição para ϕ segue-se da prova acima com a precisa construção dos I_n's. Além disso, pelo Lema 3.7, ϕ é injetiva. Como I é não enumerável, segue-se que $\phi(I_0 \times I_1 \times \cdots)$ é também não enumerável.

Resumindo, acabamos de provar o seguinte resultado

Proposição 3.1. *Seja $B \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto enumerável. Para cada $s \geq 0$ e $\alpha \in B$, fixe $E_{\alpha,s} \subseteq \mathbb{C}$ denso. Então o conjunto*

$$\mathcal{F}_B := \{f : f \text{ é inteira de ordem } \leq \rho \text{ e } f^{(s)}(\alpha) \in E_{\alpha,s}, \alpha \in B,\ s \geq 0\}$$

é não enumerável.

Note que isso corresponde aos itens (a) e (b) do nosso teorema. Agora queremos um conjunto de funções algebricamente independentes (juntamente com suas derivadas de todas as ordens).

Seja $\mathcal{B} := \{\xi\} \cup \{T_{\lambda,s}\}_{\lambda \in \Lambda, s \geq 0}$ um conjunto não enumerável e algebricamente independente sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ (por exemplo uma base de transcendência de $\mathbb{C}|\mathbb{Q}$). Considere $B = \{\xi\} \cup A$. Fixe $\lambda \in \Lambda$, defina $E^{\lambda}_{\xi,s} = \{\alpha T_{\lambda,s} : \alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0\}\}$ e $E^{\lambda}_{\alpha_n,s} = E_{\alpha,s}$ para todo $\alpha \in A$ e $s \geq 0$. Pela Proposição 3.1, existe um conjunto, não enumerável, $\mathcal{F}_\lambda$ de funções inteiras tal que, se $f \in \mathcal{F}_\lambda$, então $f^{(s)}(\alpha) \in E^{\lambda}_{\alpha,s}$ para todo $\alpha \in B$ e $s \geq 0$. Assim f satisfaz (a) e além disso $f^{(s)}(\xi) \in E^{\lambda}_{\xi,s}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, tome uma única função $f_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$. Finalmente, denote $\mathcal{F} = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, afirmamos que esse é o nosso conjunto desejado. De fato, por construção, esse conjunto é não vazio e satisfaz as condições (a) e (b). Como Λ é não-enumerável, $\mathcal{F}$ só não satisfaz a condição (d) se ele possui funções idênticas. Ora, mas isso é impossível se a condição (c) for satisfeita, logo provando que $\mathcal{F}$ satisfaz (c), obtemos nosso resultado desejado. Para isto, tome distintas funções $f_1, ..., f_m \in \bigcup_{s \geq 0} \mathcal{F}^{(s)}$. Assim $f_j(z) = f^{(s_j)}_{\lambda_j}(z)$ para $j = 1, ..., m$ e para alguns pares, dois a dois distintos, $(\lambda_1, s_1), ..., (\lambda_m, s_m) \in \Lambda \times \mathbb{N}_0$[2]. Segue-se que $f_j(\xi) = \gamma_j T_{\lambda_j, s_j}$ para $j = 1, ..., m$ e alguns γ's $\in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0\}$. Pela escolha de $\mathcal{B}$, os números $\xi, f_1(\xi), ..., f_m(\xi)$ são algebricamente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Assim, provamos que

[2] $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Fato 1. *As funções em* $\bigcup_{s\geq 0}\mathcal{F}^{(s)}$ *e a função identidade são algebricamente independentes sobre* $\overline{\mathbb{Q}}$.

Agora, suponha que existem $f_1, ..., f_m \in \bigcup_{s\geq 0}\mathcal{F}^{(s)}$ e um polinômio $P \in \mathbb{C}[X_0, ..., X_m]$, não nulo, tal que

$$P(z, f_1(z), ..., f_m(z)) = 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{3.9}$$

Escrevemos $P(z, f_1(z), ..., f_m(z)) = \sum_{I\in I^*} a_I z^{i_0} f_1(z)^{i_1} \cdots f_m(z)^{i_m}$, onde I^* é um conjunto finito de multi-índices, cada expressão da forma $z^{i_0} f_1(z)^{i_1} \cdots f_m(z)^{i_m}$ é única e os a_I's são números complexos não todos nulos. Portanto, a igualdade em (3.9), nos diz que o conjunto

$$\mathcal{C} := \{z^{i_0} f_1(z)^{i_1} \cdots f_m(z)^{i_m} \ : \ I \in I^*\}$$

é linearmente dependente sobre $\mathbb{C}$. Para simplificar, escrevemos

$$\mathcal{C} = \{M_1(z, f_1(z), ..., f_m(z)), ..., M_s(z, f_1(z), ..., f_m(z))\},$$

onde cada M_i é um monômio (termo) em $m+1$ variáveis. Pelo Teorema 3.2, temos que

$$W(M_1(z, f_1(z), ..., f_m(z)), ..., M_s(z, f_1(z), ..., f_m(z))) = 0 \tag{3.10}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, mas isso fixa uma relação algébrica com coeficientes inteiros entre a função identidade e funções de $\bigcup_{s\geq 0}\mathcal{F}^{(s)}$. Afirmamos que essa relação é não trivial. De fato, suponha que a função

$$W(z, y_1, ..., y_m) := W(M_1(z, y_1, ..., y_m), ..., M_s(z, y_1, ..., y_m))$$

é identicamente nula (como função das variáveis $z, y_1, ..., y_m$). Considere $h(z)$ uma função inteira e hipertranscendente (veja a existência de uma tal função em [3, Teorema 2]). Assim

$$W(z, h(z), ..., h^{(m-1)}(z)) = 0,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto, novamente pelo Teorema 3.2 (desde que h é inteira), existe uma relação, não trivial, da forma

$$\sum_{I\in J^*} b_J z^{j_0} h(z)^{j_1}\cdots h^{(m-1)}(z)^{j_m} = 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, fixando uma dependência algébrica, não trivial, entre $z,\ h(z),\ ...,\ h^{(m-1)}(z)$, mas isso contradiz a hipertranscendência de h. Portanto, a relação não trivial em (3.10) contradiz o Fato 1. Daí, $\mathcal{F}$ satisfaz $(a), (b), (c)$ e (d). □

3.5 Aplicação aos conjuntos excepcionais

Um outro problema clássico surgiu com a seguinte definição:

Definição 3.4. *Seja f uma função inteira, definimos o* conjunto excepcional *de f, como*

$$S_f = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \ :\ f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

O próximo resultado nos conta sobre o comportamento do conjunto excepcional de funções algébricas.

Proposição 3.2. *Suponha que f é inteira e algébrica, então $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$ ou S_f é finito.*

Demonstração. Como f é inteira e algébrica, então $f(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ (ver Proposição 3.1). Se $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, claramente $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$ (pois $\overline{\mathbb{Q}}$ é corpo). A outra possibilidade é que pelo menos um dos $a_j's$, digamos a_k, seja transcendente. Afirmamos que nesse caso S_f é finito. Caso contrário, existiriam $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \overline{\mathbb{Q}}$, distintos, e tais que $f(\alpha_j) = \beta_j \in \overline{\mathbb{Q}}$, para $1 \le j \le n+1$. Escrevendo em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

Como a matriz $A = (\alpha_i^j)_{1\le i\le n+1, 0\le j\le n}$ é de Vandermonde, temos que seu determinante

$$\det A = \prod_{1\leq i<j\leq n+1} (\alpha_i - \alpha_j),$$

é não nulo, pois os α's são distintos. Assim A é invertível e denote por $A^{-1} = (A^{-1})_{ij}$ sua inversa. Sabemos que $(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+j}\det M_{ij}$, onde M_{ij} é definida como a submatriz de A obtida por remover a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A. Segue-se que as entradas de A^{-1} são números algébricos. No entanto, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

Daí, $a_k = \sum_{j=1}^{n+1}(A^{-1})_{kj}\beta_j \in \overline{\mathbb{Q}}$. Contradizendo a transcendência de a_k. Portanto $\#S_f < \infty$. □

Por esse motivo, vamos nos restringir ao estudo do conjunto excepcional de funções inteiras transcendentes. Pensava-se que a imagem de infinitos algébricos por uma tal função, era transcendente. No entanto, o Teorema de Stäckel mostra a existência de uma função inteira transcendente f, tal que $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$. Sobre o assunto, Weierstrass propôs a seguinte questão:

Questão 2. *Quais subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$ são excepcionais de funções transcendentes?*

Alguns conjuntos excepcionais...

Exemplo 3.6. *Qualquer subconjunto finito $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ é excepcional. Por exemplo, se $f_1(z) = e^{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_k)}$, então o Teorema de Lindemann implica $S_{f_1} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$.*

Exemplo 3.7. *O conjunto vazio também é excepcional, por exemplo se $f_2(z) = e^z + e^{z+1}$, então o Teorema de Lindemann-Weierstrass implica $S_{f_2} = \varnothing$.*

Exemplo 3.8. *Alguns conjuntos infinitos também são sabidos ser excepcionais, por exemplo se* $f_3(z) = 2^z, f_4(z) = e^{i\pi z}$, *então* $S_{f_3} = S_{f_4} = \mathbb{Q}$, *pelo Teorema de Gelfond-Schneider.*

Exemplo 3.9. *Assuma que a Conjectura de Schanuel é verdadeira. Se* $f_5(z) = sen(\pi z)e^z$, $f_6(z) = 2^{3^z}$ *e* $f_7(z) = 2^{2^{2^{z-1}}}$, *então* $S_{f_5} = S_{f_6} = \mathbb{Z}$ *e* $S_{f_7} = \mathbb{N}$.

Explicitar funções que "tornam" um conjunto excepcional não é muito prático. Principalmente se pensamos em uma função obtida por operações algébricas entre as funções e^z, sen$z$, $\cos z, \log z$,...(funções elementares). Por exemplo, existem funções inteiras transcendentes f e g, tais que $S_f = \mathbb{Q}(i)$ e $S_g = \mathbb{P} := \{p : p \text{ é primo}\}$? Se existem, explicitar exemplos de tais funções não parece um trabalho fácil (quando pensamos nas nossas funções "conhecidas"). Segue-se também da Proposição 3.1 que todas as funções exibidas nos Exemplos 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 são hipotranscendentes. Surge então duas perguntas:

Questão 3. *Se* f *é hipertranscendente, então* S_f *pode ser infinito?*

Questão 4. *Quais os possíveis conjuntos excepcionais de uma função inteira hipertranscendente?*

A Questão 2 foi parcialmente resolvida em 1965, quando K. Mahler [21] provou que se A é *fechado relativo* à $\overline{\mathbb{Q}}$, isto é se $\alpha \in A$ então todos seus conjugados algébricos pertencem à A, então é o conjunto excepcional de alguma função transcendente. Como outra consequência do nosso Teorema 3.3, resolvemos completamente as questões acima: todo subconjunto de $\overline{\mathbb{Q}}$ é conjunto excepcional de alguma função hipertranscendente.

Observe que os conjuntos excepcionais de uma função f e de sua derivada f', podem ser diferentes. Por exemplo, se $f(z) = 2^z$, então $S_f = \mathbb{Q}$. No entanto, $f'(z) = 2^z \log 2$, assim $S_{f'} \cap S_f = \varnothing$. Motivados por esse fato, definimos um conjunto excepcional onde multiplicidades são incluídas:

Definição 3.5. *Seja f uma função inteira, definimos o* conjunto excepcional com multiplicidade *de f, por*

$$M_f := \{(\alpha, t) \in \overline{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N}_0 \ : \ f^{(t)}(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

O próximo exemplo ajudará a fixar essa definição

Exemplo 3.10. *Se $f(z) = e^z + \sum 10^{-n!}$, $g(z) = e^z + e^{z+1}$ e $h(z) = e^z$, então $M_f = \{0\} \times \mathbb{N}$, $M_g = \varnothing$ e $M_h = \{0\} \times \mathbb{N}_0$.*

Uma questão (semelhante à Questão 2) que surge é

Questão 5. *Quais subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N}_0$ são excepcionais com multiplicidade de alguma função transcendente (ou hipertranscendente)?*

Antes de tentar responder essa pergunta, queremos saber se existe ligação entre essa questão e a Questão 2. O próximo resultado nos diz que sim.

Proposição 3.3. *Se $M_f = A \times N$, então $S_{f^{(t)}} = A$ para todo $t \in N$.*

Demonstração. Dado $t \in N$ e $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, então $\alpha \in S_{f^{(t)}}$ se, e somente se $f^{(t)}(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Como $M_f = A \times N$, então $f^{(t)}(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$ se, e somente se $(\alpha, t) \notin A \times N$. Portanto, como $t \in N$, temos que $f^{(t)}(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ se, e somente se $\alpha \in A$. □

Teorema 3.2. *Se $A \times N \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N}_0$, então existe um conjunto não enumerável, $\mathcal{F}_{A\times N}$, de funções inteiras hipertranscendentes, tal que, se $f \in \mathcal{F}_{A\times N}$, então*

$$M_f = A \times N \tag{3.11}$$

Além disso, o conjunto

$$\{f^{(t)}(\alpha) \ : \ (\alpha, t) \in \overline{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N}_0 \setminus A \times N \ e \ f \in \mathcal{F}_{A\times N}\} \tag{3.12}$$

é algebricamente independente.

Observe que o resultado acima mostra que todo subconjunto de $\overline{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N}_0$ é excepcional com multiplicidade de uma quantidade não enumerável de funções inteiras hipertranscendentes, respondendo assim as Questões 5 e 2 (está ultima via Proposição 3.3). Pensando um pouco no poder desse fato, percebemos que ele implica na existência de uma função inteira hipertranscendente f, tal que $M_f = \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, isto é, dados $(s, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f^{(s)}(n)$ só é algébrico se ambos s, n são primos! Segue-se também do teorema acima e da Proposição 3.3 ($N = \mathbb{N}_0$) que

Corolário 3.1. *Se $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, então existe um conjunto não enumerável, $\mathcal{F}_A$, de funções inteiras transcendentes, tal que, se $f \in \mathcal{F}_A$, então*

$$S_{f^{(n)}} = A, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \tag{3.13}$$

Além disso, o conjunto

$$\{f^{(n)}(\alpha) \ : \ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash A, \ n \geq 0 \ e \ f \in \mathcal{F}_A\} \tag{3.14}$$

é algebricamente independente.

Demonstração. (Teorema) Suponha que A, $\overline{\mathbb{Q}} \backslash A$, N e $\mathbb{N}_0 \backslash N$ são conjuntos infinitos, assim podemos enumerar $\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ e $\mathbb{N}_0 = \{m_0, m_1, \ldots\}$ onde $A = \{\alpha_0, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}, ...\}$ e $N = \{m_0, m_2, ..., m_{2n}, ...\}$. Considere $\{T_{\lambda,m,l} : \lambda \in \Lambda \text{ and } (m, l) \in \mathbb{N}_0^2\}$ um conjunto algebricamente independente e não enumerável. Defina $A_{\lambda,m,l} = \{\gamma T_{\lambda,m,l} \ : \ \gamma \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0\}\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ e note que este é um conjunto denso em $\mathbb{C}$ (Pela Observação 6 e $A_{\lambda,m,l} = T_{\lambda,m,l}(\overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\})$). Fixe $\lambda \in \Lambda$, ponha

$$E^{\lambda}_{\alpha_n, m_k} = \begin{cases} \mathbb{Q}(i), & \text{se } (n, k) \in (2\mathbb{Z})^2 \\ A_{\lambda,n,k}, & \text{se } (n, k) \notin (2\mathbb{Z})^2 \end{cases}$$

Agora pelo Teorema 3.3, existe um conjunto não enumerável $\mathcal{F}_\lambda$ de funções inteiras hipertranscendentes f com $f^{(l_{2k})}(\alpha_{2m}) \in \mathbb{Q}(i)$ e $f^{(l)}(\alpha_m) \in A_{\lambda,m,l}$, para cada $(\alpha_m, l) \notin A \times N$. Portanto isso nos diz que $M_f = A \times N$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, tome somente uma função $f_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$. Denote $\mathcal{F}_{A \times N} = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, então $M_{f_\lambda} = A \times N$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Além disso, para todos $(\alpha_{n_1}, t_1), ..., (\alpha_{n_k}, t_k) \notin$

$A \times N$ e $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \Lambda$, os números $f_{\lambda_1}^{(t_1)}(\alpha_{n_1}), ..., f_{\lambda_k}^{(t_k)}(\alpha_{n_k})$ estão respectivamente em $A_{\lambda_1,n_1,t_1}, ..., A_{\lambda_k,n_k,t_k}$, portanto eles são algebricamente independentes.

Para o caso em que A é finito, podemos supor $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$. Tome $E^{\lambda}_{\alpha_k,m_{2l}} = \mathbb{Q}(i)$ para todo $1 \leq k \leq m$ e todo $l \geq 0$, denote $E^{\lambda}_{\alpha_k,l} = A_{\lambda,k,l}$ para cada $(\alpha_k, l) \in \overline{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N}_0 \setminus A \times N$. Então para esse caso, procedemos como na prova acima. As outras possibilidades são resolvidas da mesma maneira. □

No próximo corolário, $\mathcal{F}_A$ denota o conjunto construído no Corolário 3.1, para um $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ inicialmente fixado. Este resultado diz que o conjunto excepcional de funções em $\bigcup_{s\geq 0} \mathcal{F}_A^{(s)}$ permanece invariante por relações algébricas não constantes, com coeficientes algébricos.

Corolário 3.4. *Seja $P(z_1, ..., z_n)$ um polinômio, não constante com coeficientes algébricos. Se $f_1, ..., f_n \in \bigcup_{s\geq 0} \mathcal{F}_A^{(s)}$, então*

$$S_{P(f_1,...,f_n)} = A \tag{3.15}$$

Demonstração. No caso $A = \overline{\mathbb{Q}}$, o resultado segue-se facilmente. Se existe $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash A$, então, por (3.14), os números $f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha)$ são algebricamente independentes, portanto $P(f_1, ..., f_n)(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ se, e somente se, $\alpha \in A$. Em outras palavras $S_{P(f_1,...,f_n)} = A$. □

Apêndice A

Números Transcendentes - uma visão histórica

Já se passaram mais de 150 anos desde que o primeiro exemplo de número transcendente foi dado, durante esse período vários matemáticos devotaram algum tempo tentando mostrar que certos números eram ou não transcendentes. Abaixo listaremos (em ordem cronológica de sua descoberta) alguns números transcendentes.

1844 LIOUVILLE, ver [5, p. 11-13].

Números da forma $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}$, $a_k \in \{0, \cdots, 9\}$, com infinitos a_k's não nulos.

1873 HERMITE, ver [5, p. 38].

$e = 2,7182818284590452354\ldots$ a base dos logaritmos neperianos.

1882 LINDEMANN, ver [5, p. 43].

$\pi = 3,1415926535897932385\ldots$ a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo.

1929 GELFOND - SCHNEIDER.

- $e^{\pi} = 23,140692632779269006\ldots$. ver [5, p. 104-110].
- $2^{\sqrt{2}} = 2,6651441426902251887\ldots$. a constante de Gelfond-Schneider, ver [5, p. 114].

1961 MAHLER, ver [5, p. 21-25].

$0,12345678910111213 14\ldots$ a constante de Champernowne.

1983 LE LIONNAIS, ver [18, p. 46].

$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2,6789385347077476337\ldots$

1984 CHUDNOVSKY, ver [7, p. 308].

- $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3,6256099082219083119\ldots$, conhecida como constante leminiscata.
- $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = 5,5663160017802352043\ldots$

1997 DURVENEY, NISHIOKA, NISHIOKA e SHIOKAWA, ver [9].

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{2s}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}^{s}}$,

para todo inteiro $s \geq 1$, onde F_n é o n-ésimo número de Fibonacci ($F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$).

2003 SMITH - MARGOLIUS, ver [22].

$(\tan^{-1} 1/2) \cdot \pi^{-1} = 0,14758361765043327417...$ a constante de Plouffe, mas geralmente $\tan^{-1}(x) \cdot \pi^{-1} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, onde $x \in \mathbb{Q} - \{0, \pm 1\}$.

2003 SONDOW, ver [34]

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 1,61111492580837673611...$, onde $a_1 = 1$ e $a_n = n^{a_{n-1}}$ é uma seqüência recorrente conhecida como exponencial fatorial.

Referências Bibliográficas

[1] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérisque **61** (1979), 11-13.

[2] A. Baker, *Trancendental Number Theory*. Cambridge university press, 1966.

[3] W. Bergweiler, *Solution of a problem of Rubel concerning iteration and algebraic differential equations*, Indiana Univ. Math. Jour. **44** (1995), 257–267.

[4] F. Beukers, *Irrationality of some p-adic L-values*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **24**:4 (2008), 663–686.

[5] E. Burger and R. Tubbs, *Making Transcendence Transparent*. New York: Springer, 2004. 263 p.

[6] Y. Cho and K. Park, *Inverse functions of* $y = x^{1/x}$, Amer. Math. Monthly **108** (2001), 963–967. MR1954496 (2003k:26002)

[7] G. Chudnovsky, *Contributions to the Theory of Transcendental Numbers*. Providence, RI: Amer. Math. Soc.(1984) 450 p.

[8] J. B. Conway, *Functions of a Complex Variable*, Springer, New York, 1973.

[9] D. Duverney, K. Nishioka, K. Nishioka and I. Shiokawa, *Transcendence of Rogers-Ramanujan continued fraction and reciprocal sums of numbers*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **73** (1997), 140–142.

[10] O. Endler. *Teoria dos Corpos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1987. 204 p. (Monografia de Matemática; n.44).

[11] A. O. Gelfond, *Sur le septième problème de Hilbert*, Investia Akad. Nauk. **7** (1934), 623-630.

[12] C. Hermite, *Sur la fonction exponentielle*, C. R. **77** (1873), 18-24.

[13] I. Kaplanski, *An Introduction to Differential Algebra*, second edition, Hermann, Paris, 1976.

[14] S. Lang, *Introduction to Transcendental Numbers,* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. (1966)

[15] S. Lang, *Algebra*, Addison Wesley. (2002)

[16] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA (1993)

[17] F. Lindemann, *Über die zahl* π, Math. Annalen **20** (1882) 213-225.

[18] F. Le Lionnais, *Les Nombres Remarquables*. Paris: Hermann, 1979. 158 p.

[19] J. Liouville, *Sur des classes très-étendue de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni mêne reductibles à des irrationnelles algébriques*, C. R. **18** (1844), 883-885.

[20] K. Mahler, *Lectures on Transcendental Numbers*, Lectures notes in mathematics, Vol. **546**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[21] K. Mahler, *Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients*, J. Austral. Math. Soc. **168**, 200-227.

[22] B. Margolius, *Plouffe's constant is transcendental*. (2003, preprint) disponível em http://www.lacim.uqam.ca/∼plouffe/articles/plouffe.pdf.

[23] A. I. Markushevich, *Entire Functions*, Elsevier, New York, 1966.

[24] D. Marques, *Alguns resultados que geram números transcendentes*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Brasil, 2007.

[25] E. H. Moore,*Concerning transcendentally transcendental functions*, Math. Annalen **48** (1896), 1–2, 49–74.

[26] I. Niven, *Irrational Numbers*. Rahway, NJ: The Mathematical Association of America, 1956. 164 p.

[27] A. Ostrowski, *Uber Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen*, Math. Z. **8** (1920), 241–298.

[28] A. J. Van der Poorten, *Transcendental entire functions mapping every algebraic number field into itself*, J. Austr. Math. Soc. **8** (1968) 192-193.

[29] P. Ribenboim, *My Numbers, My Friends: Popular Lectures on Number Theory*. Springer-Verlag, 2000.

[30] J. F. Ritt, *Transcendental transcendency of certain functions of Poincare*, Math. Ann. **95** (1926), 671–682.

[31] T. Rivoal, *La fonction zeta de Riemann prend une infnité de valuers irrationnelles aux entiers impairs*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), pp. 267-270.

[32] G. Sansone, J. Gerretsen, *Lectures on the theory of function of a complex variable*. Volume I, Noordhoff-Groningen, 1960.

[33] T. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer funktionen: I transzendenz von potenzen; II transzendenzeigenschaften elliptischer funktionen*, J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 65-74.

[34] J. Sondow, *Irrationality measures, irrationality bases and a theorem of Jarnik*. (2004, preprint) disponível em http://arxiv.org/abs/math.NT/0406300.

[35] P. Stäckel, *Ueber arithmetische Eingenschaften analytischer Functionen*, Math. Ann. **46** (1895), no. 4, 513–520.

[36] P. Stäckel, *Arithmetische Eingenschaften analytischer Functionen*, Acta Mathematica **25** (1902), 371–383.

[37] E. G. Straus, *On entire functions with algebraic derivatives at certain algebraic points*, Ann. of Math. (2) **52** (1950), 188-198.

[38] A. Surroca, *Valeurs algébriques de fonctions transcendantes*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 16834, 31 pages.

[39] M. Waldschmidt, *Algebraic values of analytic functions*, Journal of Computational and Applied Mathematics (2003) 11 pages

[40] K. Weierstrass, *Zu Lindemann's abhandlung 'Über die Ludolph'sche zahl'*, Werke II (1885), 341-362.

[41] W. Zudilin, *One of the numbers* $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ *is irrational*, Uspekhi Mat. Nauk **56**:4 (2001), pp. 149-150.

[42] W. Zudilin, *Zeta values on the web*, disponível em http://wain.mi.ras.ru/zw/

Índice Remissivo

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo