PUC Minas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

"Metodologia para Avaliação da Vida Residual de Rolamentos por Análise de Vibrações, Simulação via FEM e Mecânica da Fratura"

Fernando Helder Teixeira

Belo Horizonte

2007

Fernando Helder Teixeira

"METODOLOGIA PARA AVALIAÇÃO DA VIDA RESIDUAL DE ROLAMENTOS POR ANÁLISE DE VIBRAÇÕES , SIMULAÇÃO VIA FEM E MECÂNICA DA FRATURA"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador Jánes Landre Jr, D.Sc.

Belo Horizonte

2007

Fernando Helder Teixeira

Metodologia para Avaliação da Vida Residual de Rolamentos por Análise de Vibrações, Simulação via FEM e Mecânica da Fratura

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Belo Horizonte, 2007.

_____

D.Sc. Jánes Landre Júnior (Orientador)

_____

D.Sc. Nilton da Silva Maia (CEFET - MG)

_____

D.Sc. Ernani Sales Palma (PUC - MG)

Um estudante foi ao seu professor e disse fervorosamente:

"Eu estou ansioso para entender seus ensinamentos e atingir a Iluminação! Quanto tempo vai demorar para que eu obtenha este prêmio e domine este conhecimento?"

A resposta do professor foi casual:

"Uns dez anos..."

Impacientemente, o estudante completou:

"Mas eu quero entender todos os segredos mais rápido do que isto! Vou trabalhar duro! Vou praticar todo o dia, estudar e decorar todos os sutras, farei isso dez ou mais horas por dia!! Neste caso, em quanto tempo chegarei ao objetivo?"

professor pensou um pouco e disse suavemente:

"Vinte anos."

("Trabalhando Duro" , Koan do zen-budhismo)

Agradecimentos

A minha família pela paciência, ao meu orientador professor doutor Jánes Landre Junior que durante todo o período de desenvolvimento deste trabalho esteve sempre a disposição para as discussões e sempre me munindo de informações novas que auxiliaram muito no desenvolvimento do trabalho mesmo quando eu não conseguia absorver em um primeiro momento suas orientações.

Gostaria de agradecer a Holcim na pessoa do Sr Edson das Dores Ribeiro gerente da planta de Pedro Leopoldo por ter dado todas as condições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Rodrigo Eduardo Eustáquio Machado que com seu entusiasmo natural teve um papel fundamental e me ajudou em toda a formatação do trabalho. A Moises Mendes Batista que com sua opinião critica sobre o assunto e aliado a sua visão enriqueceu muito os nossos debates sobre o tema . Ao Jaime Gonçalves de Lima e Edmundo Eustaquio Costa no apoio na confecção do protótipo. Ao Rodrigo José Cardoso que ajudou nas medições de vibração do protótipo e com sua experiência e core análise de vibrações colaborou muito no ajuste adequado para as medições assim como em uma avaliação das ferramentas de analise utilizadas. A Jan Musoul no auxilio nas simulações realizadas via FEM.

E a todos que, direta ou indiretamente, auxiliaram-me na condução deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estabelecer uma metodologia que possa fornecer limites confiáveis quanto aos níveis de vibração de um rolamento além de uma melhor previsibilidade quanto ao tempo de vida residual deste componente sob determinadas condições de esforços dinâmicos. Inicialmente estabeleceremos as medições de vibração em estado normal e a simulação por elementos finitos do estado de tensões neste componente. Será induzido um defeito em sua pista externa e coletado os sinais de vibração e simulado o efeito deste defeito sobre o estado de tensões deste componente. Através dos conceitos da mecânica da fratura será estimada a vida residual do componente. A partir destes resultados será avaliada as suas correlações e a possibilidade de uma melhor previsibilidade da vida residual deste componente mecânico.

Palavra-chave: vibração, rolamento, fratura, FEM

Abstract

The goal of this study is to establish a methodology to support reliable limits of vibration level of a bearing beyond of a best previsibility in relation to residual time life in determined conditions of dynamic efforts. Initially we will establish the measures of vibration in normal condition and a simulation for finite elements of the tension's condition in bearing. It will be induced a defect in external track and collected the vibration's sights and simulated the effect in relation to stress's condition.Through the concepts of the fracture mechanics the residual life of the component will be esteem. From these results it will be evaluated its correlations and the possibilities of one better previsibility of the residual life of this mechanical component .

Key-words: vibration, bearing, fracture, FEM

Lista de figuras

Lista de tabelas

Índice

1. INTRODUÇÃO

De acordo com Smith (1993), a partir da década de 80 a operação e manutenção de plantas industriais passaram a ser reconhecidas como disciplinas tão importantes para o sucesso das estratégias corporativas quanto de desenvolvimento de produtos e a engenharia de fabricação. Um dos principais fatores que contribui para esta situação reside no papel decisivo que a operação e a manutenção desempenha em questões que vão desde fatores ambientais e de segurança até o nível de rentabilidade das empresas. "Operação e manutenção estão agora no centro das atenções". (Smith, 1993)

Segundo Moubray (1991) nos últimos anos a manutenção evoluiu mais do que qualquer outra disciplina. As alterações devem-se a um grande aumento do número e diversidade de itens físicos a serem mantidos em todo o mundo, projetos muito mais complexos, novas técnicas de manutenção e novos enfoques sobre a organização e as responsabilidades da manutenção.

Ainda por Moubray, a manutenção também reage às novas expectativas. Essas incluem crescente conscientização do quanto uma falha de equipamento afeta a segurança e o meio ambiente, crescente conscientização da relação entre manutenção e qualidade do produto e maior pressão para se atingir alta disponibilidade da instalação e conter custos.

No rol de processos de manutenção existentes, a manutenção por condição (comumente denominada de manutenção preditiva) é uma das mais utilizadas. A manutenção preditiva é um programa de manutenção preventiva acionado por condições. Ele é fundamentado no fato de que a maioria das falhas desenvolve-se ao longo do tempo e emite algum sinal monitorável antes que aconteçam. Estes sinais são condições físicas identificáveis que indicam a eminência da falha funcional.

"Um programa de manutenção preditiva pode minimizar o número de falhas de todos os equipamentos mecânicos da planta industrial e assegurar que o equipamento reparado esteja em condições mecânicas aceitáveis. Ele pode identificar problemas da máquina antes que se tornem sérios já que a maioria dos problemas mecânicos podem ser minimizados se forem detectados e reparados com antecedência. Os modos de falha mecânica degradaram-se em uma velocidade diretamente proporcional a sua severidade: portanto,

quando um problema é detectado logo, normalmente pode-se evitar maiores reparos." (Almeida, 2003)

Em plantas industriais a análise espectral de vibração é a técnica preditiva mais utilizada para diagnóstico e acompanhamento de falhas em equipamentos rotativos (Almeida, 2003). Ela se baseia no fato de que: primeiro, todos os modos de falha possuem componentes distintos de freqüência de vibração que podem ser isolados e identificados e segundo, a amplitude de cada componente distinto de vibração permanecerá constante a menos que haja uma mudança na dinâmica operacional (Almeida, 2003).

Apesar da comprovada eficiência da técnica de monitoramento do estado do equipamento por análise de vibração, questões relacionadas à confiabilidade de um equipamento, ou seja, da sua capacidade de continuar funcionando por um determinado tempo sujeito a esforços dinâmicos além dos especificados, ainda são uma resposta imprecisa. Isto não permite uma utilização maximizada de seus componentes e muito menos estoque minimizado de itens de reposição e de produto acabado. Em outras palavras a "famosa" pergunta: "agüenta até a próxima parada?" ainda é respondida com a mesma imprecisão do "pode ser" ou do heróico, mas sem confiança plena do "deixa rodando".

1.1. Objetivo Geral

Estabelecer uma metodologia que forneça limites confiáveis quanto aos níveis de vibração que um rolamento possa trabalhar, além de melhorar a previsibilidade quanto ao seu tempo de vida residual sob determinadas condições de esforços dinâmicos.

1.2. Objetivos Específicos

- Avaliar os limites de vibração que um rolamento pode suportar com base no estado de tensões simulados.

- Correlacionar os níveis de vibração coletados com o estado de tensões para determinado comportamento dinâmico.
- Determinar a vida residual de um rolamento sob determinado comportamento dinâmico.
- Estabelecer metodologia que possa avaliar com maior confiabilidade os limites e o tempo até a falha de rolamentos sob determinadas condições dinâmicas.

1.3. Motivação

A motivação deste trabalho se fundamenta nos limites de vibração estabelecidos nas normas usuais não serem efetivos para tomada de decisão quanto à parada de equipamentos para a manutenção. Segundo Jing Qiu et al (2002) a habilidade em alcançar prognósticos de vida precisos para rolamentos é crítico para a manutenção no tocante a custos e produtividade. Sadettin Orhan et al (2005) apresenta diversos estudos de caso onde esclarece a eficiência da técnica de análise por vibrações para a detecção de falhas em rolamentos de equipamentos rotativos. Ainda segundo Jing Qiu et al (2002) técnicas para previsão do tempo de vida de rolamentos sob certas condições operacionais reais não são bem desenvolvidas. Assim a previsão quanto ao tempo de vida residual do rolamento fica baseada na abordagem estatística e sua eficiência duvidosa . Jing Qiu et al (2002) citam três tipos de abordagens para a predição de vida de rolamentos, todos eles com elementos estatísticos. Mitchel (1993) descreve por abordagem estatística a predição da falha e refina esta predição com retro-alimentação destes limites por meio dos resultados práticos observados. Estes fatos tornam, como dito, a resposta a celebre pergunta “agüenta até a próxima parada ?” ponto de incerteza.

1.4. Objeto de Estudo

Neste estudo, o objeto são rolamentos de esfera autocompensadores tipo 1207K, montados em um exaustor com velocidade variável.

Os rolamentos autocompensadores de esferas têm duas carreiras de esferas com uma pista esférica comum no anel externo. Esta última característica dá ao rolamento a propriedade de ser autoalinhável, permitindo desalinhamentos angulares do eixo em relação ao alojamento do rolamento, portanto, são especialmente indicados para aplicações onde podem surgir desalinhamentos por erros de montagem ou por flexão do eixo (SKF).

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Falhas em rolamentos

2.1.1. Introdução

Mesmo geometricamente perfeitos, os rolamentos podem gerar vibrações devido a variações de conformidade, ou, dos esforços entre seus componentes no tempo. As variações dos esforços estão relacionadas de forma direta ao número de elementos girantes, esferas ou rolos. Ao longo do tempo, esses esforços tendem a causar fadiga nos componentes do rolamento. Serão discutidas as diferentes formas de esforços nos componentes dos rolamentos, as falhas oriundas destes esforços e as freqüências relacionadas aos defeitos. As falhas causadas por fabricação ou erro de montagem, não serão abordadas nesse capítulo.

2.1.2. Distribuição de Cargas nos Rolamentos

Em geral, os rolamentos estão submetidos a cargas radiais que geram um campo de carga, Figura 2.1. À medida que os elementos girantes entram e saem da região de carga surgem vibrações no rolamento, mesmo para o rolamento em perfeito estado. Este sinal ruidoso é bem visível quando o sinal do rolamento, em perfeito estado, é observado no domínio do tempo.

A região de carregamento é relacionada de forma direta com a geometria do rolamento, o tipo de material utilizado na confecção de seus elementos, o tipo de montagem (com ou sem pré-carga), com a espessura dos anéis do rolamento, com a folga existente no rolamento e com as características do lubrificante utilizado. A Figura 2.1 apresenta diferentes situações de carregamento que podem ocorrer em rolamentos. Na Figura 2.1(a), observa-se um rolamento, sem folga, submetido a uma montagem normal, ou seja, sem pré-carga. Na Figura 2.1(b), observa-se o mesmo rolamento sujeito a montagem com pré-carga. O rolamento da Figura 2.1(c), representa a região de carga do rolamento com folga entre seus elementos.

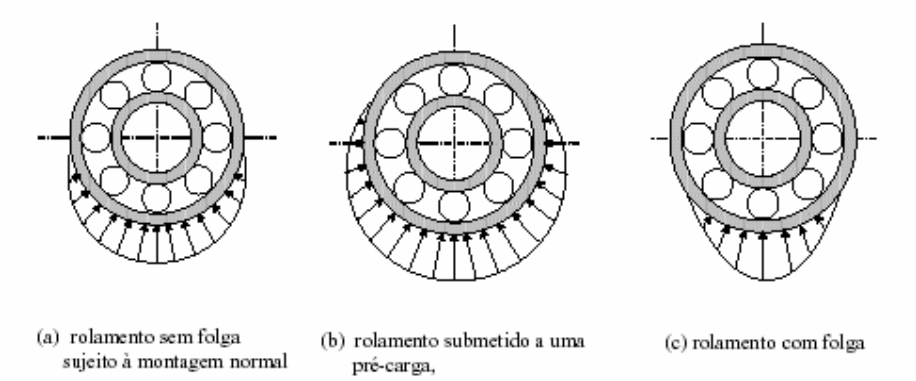


Figura 2.1 – Formas de carregamentos em rolamentos (Spotts, 1964; Chagsen, 1987).

Com o tempo os rolamentos sofrem desgastes que causarão folga e desta forma, a região de carga sofrerá uma diminuição, ou seja, as situações de carregamento representadas nos itens (a) e (b) da Figura 2.1 tendem para o carregamento apresentado no item (c).

2.1.3. Relação entre o Carregamento Estático e a Deformação

Para o cálculo da relação entre o carregamento estático e a deformação, inicialmente, deve ser considerado um rolamento sem folga entre seus elementos. Em seguida, a relação entre o carregamento estático e a deformação será obtida para o rolamento que apresentar folga entre seus elementos.

A Figura 2.2 representa um rolamento com dez esferas, onde a região de carregamento abrange somente o hemisfério inferior do rolamento.

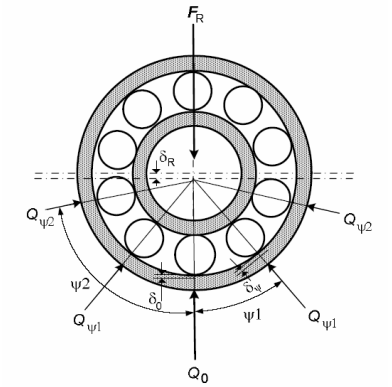


Figura 2.2 – Carregamento em rolamento sem folga (Spotts, 1964; Chagsen, 1987).

Onde:

ψi = representa a posição da esfera, submetida ao carregamento, em relação a força aplicada;

δ_R = deslocamento do carregamento sobre as linhas de carregamento;

δ_0 = deformação elástica total na direção de carga máxima;

$\delta_{\psi i}$ = deformação elástica total na direção do ângulo ψi;

$Q_{\psi i}$ = carga na posição yi;

F_R = carga aplicada ao rolamento.

Ao considerar o rolamento da Figura 2.2 onde somente as cinco esferas do hemisfério inferior estão sujeitas ao carregamento (Figura 2.2), obtém-se a seguinte relação para os referidos esforços (Spotts, 1964; Chagsen, 1987):

$$F_R = Q_0 + Q_{\psi i}\cos(\psi 1) + 2Q_{\psi 2}\cos(2\psi 1) \tag{2.1}$$

Ao considerar que o rolamento é de esferas, tem-se a seguinte relação entre a carga e a deformação sofrida pela esfera e pista (Spotts, 1964; Chagsen, 1987):

$$\delta_{\psi i} = 0{,}775\sqrt[3]{Q_{\psi i}^2\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)^2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}, \tag{2.2}$$

onde, a região de contato tem forma elíptica, E_1 e R_1 são o coeficiente de elasticidade e o raio da esfera, respectivamente, e E_2 é o coeficiente de elasticidade da pista, R_2 é o raio da pista. Como as esferas têm as mesmas dimensões e são feitas de mesmo material, pode-se simplificar a relação de deformação entre esfera e pista, e obtém-se a seguinte relação:

$$\delta_{\psi i} = Q_{\psi i}^{2/3} K\,, \tag{2.3}$$

onde,

$$K = 0{,}775\sqrt[3]{\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)^2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}.$$

Rearranjando a expressão 2.3, obtém-se a relação:

$$Q_{\psi i} = \left(\frac{\delta_{\psi i}}{K}\right)^{3/2}, \tag{2.4}$$

que representa a relação da carga aplicada em cada esfera e a deformação ocorrida entre a pista e a esfera. Existe uma relação entre a deformação em cada posição da esfera ψi com a principal δ_0, que é expressa da seguinte forma (Spotts, 1964; Chagsen, 1987):

$$\delta_{\psi i} = \delta_0 \cos(\psi i). \tag{2.5}$$

A partir das Equações (2.4) e (2.5), obtém-se:

$$Q_{\psi i} = \left(\frac{(\delta_0 \cos(\psi i))}{K}\right)^{3/2} \tag{2.6}$$

Ao considerar a carga na posição Q_0 e a carga na posição $Q_{\psi i}$, obtém-se a relação:

$$\frac{Q_{\psi i}}{Q_0} = \frac{(\delta_0 \cos(\psi i))^{3/2}}{\delta_0^{3/2}}, \tag{2.7}$$

ou seja:

$$Q_{\psi i} = Q_0 \cos(\psi i)^{3/2}.$$

Ao substituir a Equação (2.7) em (2.1) obtém-se:

$$F_R = Q_0 + 2Q_0(\cos(\psi 1))^{3/2}\cos(\psi 1) + 2Q_0(\cos(2\psi 1))^{3/2}\cos(2\psi 1), \quad (2.8)$$

então,

$$F_R = Q_0(1 + 2(\cos(\psi 1))^{5/2} + 2(\cos(2\psi 1))^{5/2}), \quad (2.9)$$

Fazendo:

$$M = (1 + 2(\cos(\psi 1))^{5/2} + 2(\cos(2\psi 1))^{5/2}), \quad (2.10)$$

obtém-se:

$$F_R = Q_0 M. \quad (2.11)$$

Ao considerar o rolamento com dez esferas, com carregamento somente no hemisfério inferior, tem-se $\psi 1 = 36^\circ$, portanto:

$$M = 2{,}2836.$$

Como os ângulos de contato estão diretamente relacionados ao número de esferas N_e ,obtém-se relação:

$$\frac{N_e}{M} = \frac{10}{2{,}2836} = 4{,}38 \quad (2.12)$$

Ao substituir a Equação (2.12) na Equação (2.11), obtém-se então:

$$Q_0 = \frac{4{,}38 F_R}{N_e} \quad (2.13)$$

Até o momento, os rolamentos analisados não possuem folgas radiais, o que não retrata a realidade dos rolamentos. À medida que os rolamentos são submetidos ao trabalho, ocorrem desgastes em seus componentes, que geram folgas e têm uma grande importância na distribuição de cargas do rolamento. De forma geral, quanto maior a folga no rolamento, menor será o ângulo de atuação de carga (Harris, 1991; Chagsen, 1987). Contudo, esta redução no tamanho da região de carregamento não afetará as freqüências de defeito do rolamento (McFadden, 1984; Braun, 1986), como será discutido adiante.

Na Figura 2.3, o rolamento apresenta uma radial. Para obtenção da expressão da distribuição de carga, pode-se seguir o mesmo raciocínio adotado anteriormente, porém as folgas serão levadas em consideração.

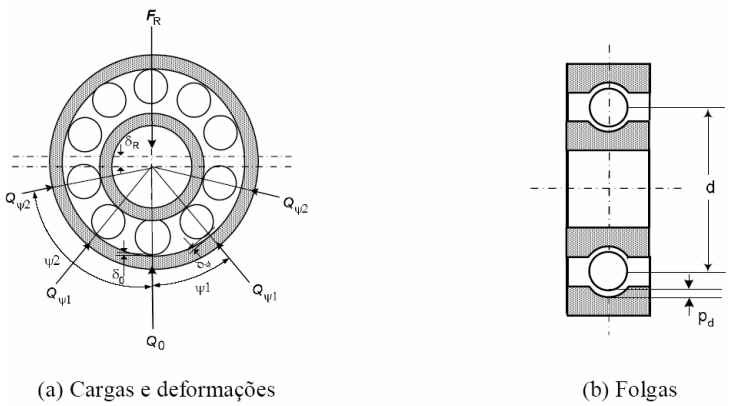


Figura 2.3 - Carregamento em rolamento com folga axial (Harris, 1991; Chagsen, 1987).

A deformação $\delta_{\psi i}$ ocorrida na posição ψi será:

$$\delta_{\psi i} = \left(\delta_0 + \frac{P_d}{2}\right)\cos(\psi i) - \frac{P_d}{2}, \tag{2.14}$$

onde:

ψi = representa a posição da esfera, submetida ao carregamento, em relação a força aplicada;

δ_R = deslocamento do carregamento sobre as linha de carregamento;

δ_0 = deformação elástica total na direção de carga máxima;

$\delta_{\psi i}$ = deformação elástica total na direção do ângulo ψi;

P_d = folga diametral.

A Equação (2.14) pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$\delta_{\psi i} = \delta_0\left[1 - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \cos(\psi i))\right], \tag{2.15}$$

onde:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{P_d}{2\delta_R}\right), \tag{2.16}$$

que é conhecido como fator de distribuição de carga.

Da Equação (2.7) tem-se que:

$$\frac{Q_{\psi i}}{Q_0} = \left(\frac{\delta_{\psi i}}{\delta_0}\right)^n . \tag{2.17}$$

A partir das Equações (2.15) e (2.17) obtém-se:

$$Q_{\psi i} = Q_0\left[1 - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \cos(\psi i)\right]^n , \tag{2.18}$$

que afetará a forma dos impulsos gerados pelo defeito do rolamento, quando o defeito tem deslocamento em relação ao carregamento. O expoente n será 3/2 para os rolamentos de esferas e 10/9 para os rolamentos de rolos (McFadden, 1984).

Na Figura 2.4, são apresentadas as três possíveis formas de carregamento radial do anel interno do rolamento, em relação ao fator de distribuição de carga (Harris, 1991; Chagsen, 1987).

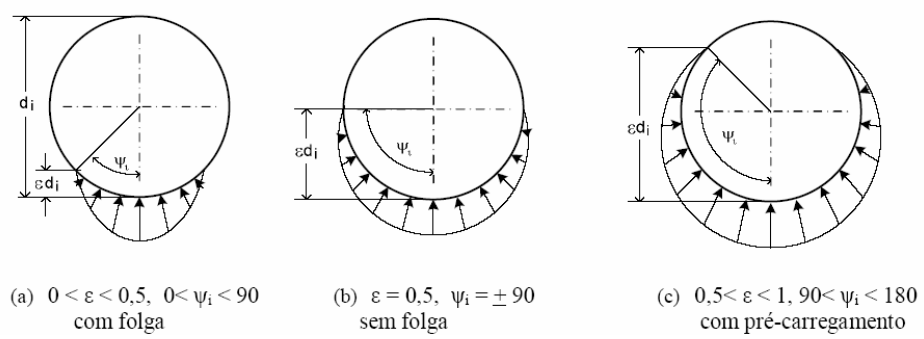


Figura 2.4 - Carregamento no anel interno do rolamento.

2.1.4. Falhas Comuns em Rolamentos

Como qualquer peça ou componente de uma máquina, os rolamentos apresentam deterioração com o uso; o desgaste é inevitável. Entretanto, um

rolamento pode apresentar falha prematura por uma séria de razões (Nepomuceno, 1989). Dentre as diversas causas de falhas, em rolamentos, pode-se destacar:

· **Lubrificação inadequada:** O lubrificante tornou-se, gradualmente, escasso permitindo o contato entre os componentes do rolamento, ou, ocorreu a perda das propriedades lubrificantes, ou, em último caso, o lubrificante era inadequado.

· **Montagem incorreta:** Pressão para montagem no anel inadequada, deslocamento excessivo em assento cônico, sobrecarga enquanto o rolamento não gira, etc.

· **Retentores inadequados:** Retentores que permitem a passagem de partículas para dentro do rolamento ou que se deterioram e contaminam o rolamento.

· **Desalinhamento:** Rolamentos martelados em seu assento, corpos estranhos entre o anel e o assento, eixo torto ou empenado, etc.

· **Passagem de corrente elétrica:** Para que este tipo de dano ocorra, não é necessária uma diferença de potencial muito grande entre as pistas e os elementos girantes dos rolamentos.

· **Vibrações Externas:** Rolamentos quando parados são submetidos a vibrações vindas de outros sistemas.

· **Defeitos de Fabricação:** Defeitos provenientes do processo de fabricação nas pistas, esferas ou gaiola do rolamento.

· **Fadiga:** Proveniente do rolamento de um elemento sobre outro após um certo número de ciclos.

Mesmo que não ocorra erro de montagem, de lubrificação, ou contaminação, os rolamentos estão sujeitos a falhas por fadiga. Para melhor compreensão do surgimento deste tipo de falha em rolamentos, será considerada que a região de carregamento do rolamento não se movimenta e que uma das pistas é estacionária. Desta forma, à medida que os elementos girantes se deslocam ao longo da pista passarão por esta região, o que provocará tensões cíclicas de cisalhamento na camada abaixo da pista.

As tensões cíclicas de cisalhamento trazem, como conseqüência micro fissuras que, em sua maioria, surgem em pontos de menor resistência mecânica ao cisalhamento, ou onde o material apresenta ou em pontos onde

ocorrem inclusões de materiais não metálicos. Com o passar do tempo, as micro-fissuras evoluem para a superfície da pista onde surgirão micro-trincas que evoluem gradativamente (Harris, 1991; Juvinall e Marshek, 1991).

Com a passagem contínua dos elementos rolantes sobre a trinca, que atingiu a superfície da pista, ocorrerá a formação de pits e/ou descascamento (*spalls*) que evoluirá, gradualmente, até que o rolamento sofra uma falha que impossibilite o seu uso (Juvinall e Marshek, 1991). Na Figura 2.5, pode-se observar o surgimento de uma falha no anel externo de um rolamento.

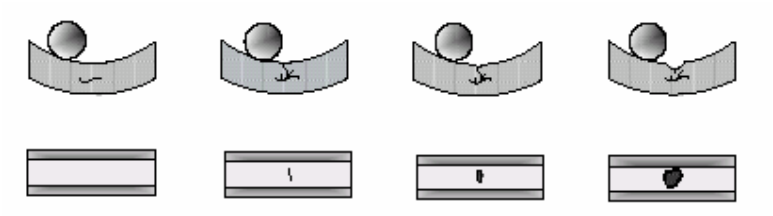


Figura 2.5 - Surgimento da falha na superfície de um rolamento (Juvinall e Marshek, 1991).

Este processo pode ocorrer em qualquer elemento do rolamento que sofre carregamento alternado (anéis interno e externo e elementos girantes).

2.1.5. Sinais e Freqüências Características de Falhas em Rolamentos

Quando uma superfície com defeito de um elemento do rolamento entra em contato com outra superfície do rolamento, este choque produz um impulso que excita ressonâncias no rolamento e na máquina. Estes impulsos irão ocorrer periodicamente com freqüência que é determinada, unicamente, pela localização do defeito, sendo ele na pista interna, na pista externa ou no elemento girante (McFadden, 1984). Estas freqüências de defeitos poderão ser obtidas a partir do procedimento exposto a seguir.

Na Figura 2.6, estão representadas as dimensões do rolamento, que serão usadas para obtenção das freqüências dos componentes do rolamento.

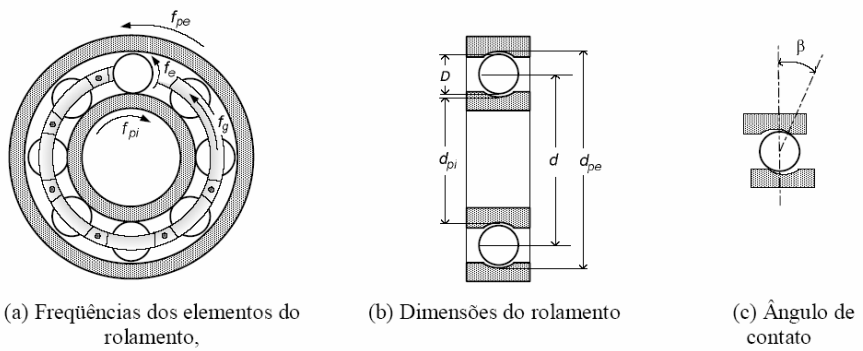


Figura 2.6 – Freqüências, Dimensões e Ângulo de contato do Rolamento (McFadden, 1984).

Onde:

D = diâmetro da esfera;

d = diâmetro primitivo;

dpi = diâmetro da pista interna;

dpe = diâmetro da pista externa;

β = ângulo de contato;

rg = raio da gaiola (rg =d/2);

rpi = raio da pista interna (rpi=dpi/2);

rpe = raio da pista externa (rpe=dpe/2).

Algumas relações entre as rotações dos elementos do rolamento podem ser obtidas a partir das velocidades tangenciais dos mesmos elementos (Figura 2.7).

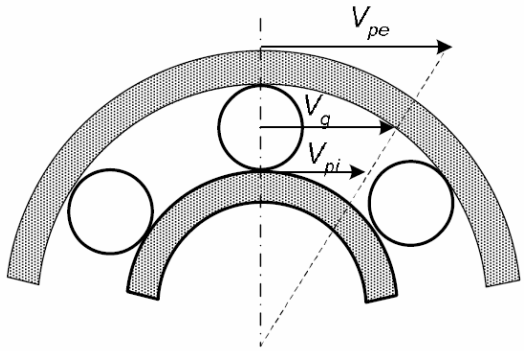


Figura 2.7 – Velocidades nos elementos do rolamento (McFadden, 1984).

Ao considerar-se as velocidades:

Vpe = velocidade da pista externa;

Vg = velocidade da gaiola;

Vpi = velocidade da pista interna.

Freqüência Característica da Gaiola

A partir da análise cinemática dos elementos apresentados na Figura 2.7 pode-se obter a relação:

$$V_g = \frac{V_{pi} + V_{pe}}{2} \tag{2.19}$$

que será usada para obtenção da freqüência característica da gaiola:

$$f_g = \frac{V_g}{r_g} \tag{2.20}$$

Ao substituir a Equação (2.19) em (2.20) tem-se como resultado:

$$f_g = \frac{V_{pi} + V_{pe}}{2r_g}, \tag{2.21}$$

ou,

$$f_g = \frac{V_{pi} + V_{pe}}{d}. \tag{2.22}$$

Tem-se ainda:

$$V_{pi} = r_{pi} f_{pi} \qquad \text{e} \qquad V_{pe} = r_{pe} f_{pe}$$

Ao rearranjar a Equação (2.22), obtém-se:

$$f_g = \frac{r_{pi} f_{pi} + r_{pe} f_{pe}}{d}. \tag{2.23}$$

Nas relações obtidas até o momento, não foram considerados os ângulos de contato. Para ângulos de contato diferentes de zero, obtém-se:

$$r_{pi} = \frac{d - D\cos\beta}{2}, \tag{2.24}$$

e

$$r_{pe} = \frac{d + D\cos\beta}{2}, \tag{2.25}$$

Ao substituir as Equações (2.24) e (2.25) na Equação (2.23) obtém-se:

$$f_g = \frac{1}{d}\left(\frac{d - D\cos\beta}{2} f_{pi} + \frac{d + D\cos\beta}{2} f_{pe}\right) \tag{2.26}$$

Freqüência Característica de Defeito na Pista Interna

A freqüência com que a esfera passa pelo defeito na pista interna é obtida a partir da freqüência relativa da gaiola e pista interna multiplicada pelo número de esferas N_e. Ou seja:

$$f_{dpi} = N_e \left| f_g - f_{pi} \right| \tag{2.27}$$

Ao substituir a Equação (2.26) na Equação (2.27), obtém-se:

$$f_{dpi} = N_e \left| \frac{1}{d}\left(\frac{d - D\cos\beta}{2} f_{pi} + \frac{d + D\cos\beta}{2} f_{pe}\right) - f_{pu} \right|. \tag{2.28}$$

Ao rearranjar a Equação (2.28) obtém-se a freqüência característica de defeito na pista interna:

$$f_{dpi} = \frac{N_e}{2d}\left[\left| f_{pe} - f_{pi} \right| (d + D\cos\beta)\right]. \tag{2.29}$$

Freqüência Característica de Defeito na Pista Externa

Para obtenção da freqüência de defeito da pista externa foi adotado o mesmo raciocínio usado na obtenção da freqüência de defeito na pista interna, ou seja:

$$f_{dpe} = N_e \left| f_g - f_{pe} \right| \tag{2.30}$$

Após substituições da Equação (2.26) na Equação (2.30) e proceder os rearranjos necessários, obtém-se:

$$f_{dpe} = \frac{N_e}{2d} \left[\left| f_{pi} - f_{pe} \right| (d - D\cos\beta) \right]. \tag{2.31}$$

Freqüência Característica de Defeito nas Esferas

Têm-se as seguintes relações para a freqüência da esfera:

$$f_{de} D = f_{pi} d_{pi} = f_{pe} d_{pe} \tag{2.32}$$

A partir da substituição da Equação (2.31), sem o termo do número de esferas, e da Equação (2.24), obtém-se:

$$f_{de} = \frac{d}{2D} \left[(f_{pi} - f_{pe}) \left(1 - \frac{D^2 \cos^2 \beta}{d} \right) \right]. \tag{2.33}$$

Neste trabalho, serão utilizados rolamentos, cuja pista interna é a pista girante e a pista externa é a estacionária. De posse das equações (2.26), (2.29), (2.31) e (2.33) e com a eliminação das freqüências da pista externa , $f_{pe} = 0$, obtém-se as equações indicadas na tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Freqüências características de defeito nos elementos dos rolamentos

Freqüências	Equações
Freqüência da Gaiola	$f_g = \frac{f_{pi}}{2}\left(1 - \frac{D\cos\beta}{d}\right)$
Freqüência de Defeito na Pista Interna	$f_{dpi} = \frac{N_e f_{pi}}{2}\left(1 + \frac{D\cos\beta}{d}\right)$
Freqüência de Defeito na Pista Externa	$f_{dpe} = \frac{N_e f_{pi}}{2}\left(1 - \frac{D\cos\beta}{d}\right)$
Freqüência de Defeito na Esfera	$f_{de} = \frac{d f_{pi}}{2D}\left(1 + \frac{D^2\cos^2\beta}{d^2}\right)$

2.2. Detecção de falhas em rolamentos por análises de vibrações

2.2.1. Técnicas de Detecção de Falhas em Rolamentos por Análise de Vibrações no Domínio do Tempo

Os métodos no domínio do tempo são os mais simples. Destes métodos os mais difundidos são Nível Global e Fator de Crista. Além destes, são usados os momentos de primeira, segunda, terceira, quarta e sexta ordem, que são conhecidos como média, variância, assimetria, curtose e momento de sexta ordem sendo os três últimos normalizados em relação ao desvio padrão (Dyer & Stewart, 1978; Tandon & Nakra, 1992). Estes métodos são, em geral, qualitativos, ou seja, podem, em alguns casos, indicar a presença de falha, porém não permitem a identificação do tipo da falha.

Os métodos no domínio do tempo: média absoluta (X_{med}), nível global (X_{rms}) e fator de crista (Fcr) são os mais simples, sendo este último a razão do valor de pico (X_{pico}) pelo valor do X_{rms}. A média absoluta, o valor X_{rms} e o Fcr são dados pelas expressões:

$$X_{med} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|, \tag{2.34}$$

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_x^2}, \tag{2.35}$$

$$Fcr = \frac{X_{pico}}{X_{rms}} \quad , \tag{2.36}$$

O valor do X_{rms} permite estimar o conteúdo de energia do sinal vibratório, ele é usado para estimar a severidade de vibração proveniente da estrutura de uma máquina ou de fatores externos, sendo mais usado que a média (Mitchell, 1993). Na Figura 2.8, pode-se observar a relação existente entre média, pico, valor rms e a amplitude de um sinal senoidal.

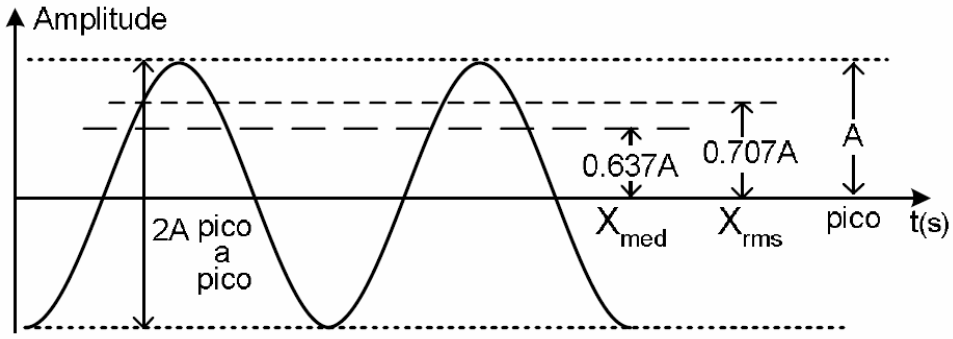


Figura 2.8 – Média, Valor rms e pico (Mitchell, 1993).

Na Figura 2.9, está representado um sinal de defeito na pista estacionária de um rolamento.Com o surgimento de uma pequena falha no rolamento, o valor de X_{pico} sofre uma elevação maior que o X_{rms}, como conseqüência o valor do Fcr sofre uma elevação.

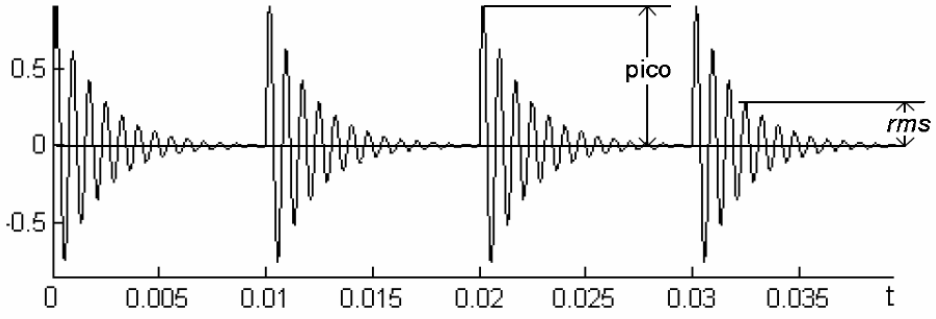


Figura 2.9 – Pico e valor de rms para um rolamento com defeito (Mitchell, 1993).

Na Figura 2.10 (a), estão representados o valor de X_{pico} e o valor do X_{rms} para diferentes condições do rolamento. A Figura 2.10 (b) apresenta a variação do Fcr para as mesmas condições. Observa-se que, enquanto o defeito é incipiente, o X_{pico} e o Fcr conseguem indicar de forma clara o surgimento de uma falha na pista ou esfera do rolamento. Por outro lado, à medida que o defeito se espalha pela superfície do rolamento o nível de ruído aumenta, o que eleva o valor do X_{rms} mais rápido que o valor de pico. Logo, o Fcr sofre uma diminuição em seu valor. O que demonstra que o Fcr não é um bom indicador de falhas em um estágio de falha severa (Nepomuceno, 1989; Mitchell, 1993).

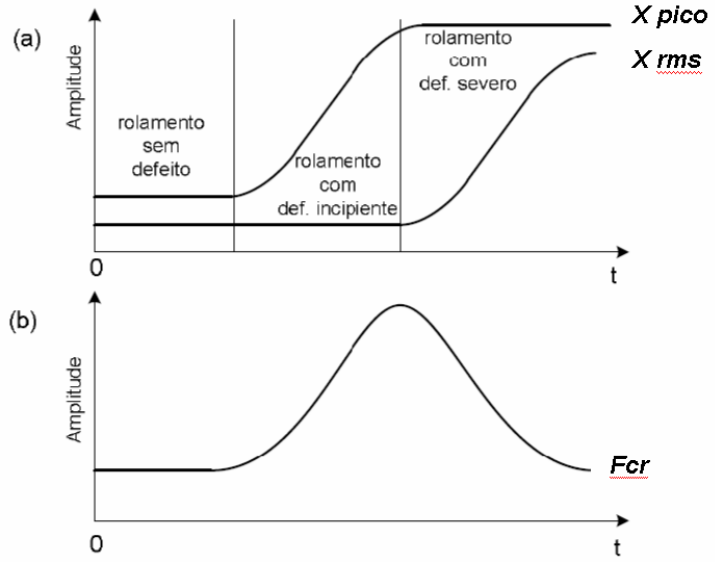


Figura 2.10 – (a) X_{pico} e valor X_{rms} (b) Fcr fator de crista (Mitchell, 1993).

Uma forma encontrada de eliminar este problema foi a criação do Fator K (Fk). Que é o produto do X_{rms} e X_{pico} , ou seja:

$$F_k = X_{pico} . X_{rms} \tag{2.37}$$

Na Figura 2.11, estão representados o fator K e o seu comportamento em relação à condição do rolamento.

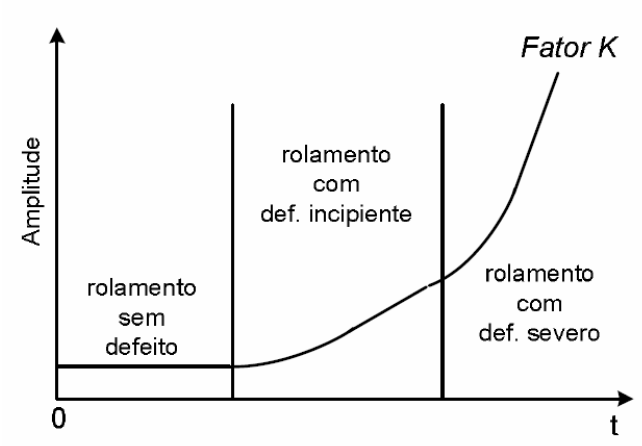


Figura 2.11 – Fator K (Mitchell, 1993).

Outros fatores utilizados são fatores relacionados à densidade de probabilidade. Nos rolamentos sem falha, a densidade de probabilidade do sinal de aceleração de um rolamento possui distribuição Gaussiana, logo o valor de assimetria tende a 0 e o valor de curtose tende a 3±8% (Dyer & Stweart, 1978; Martin & Honarvar, 1995). A variância (σ^2), assimetria ou "*skewness*" (γ_3) e curtose (γ_4) são parâmetros estatísticos que podem ser usados com o objetivo de auxiliar a detecção de falhas em rolamentos, pois com o surgimento da falha a densidade de probabilidade do sinal de aceleração, de um rolamento, não é mais uma distribuição Gaussiana o que ocasiona, mudanças na variância, assimetria e curtose (Dyer & Stweart, 1978; Tandon & Choudhury, 1999). Pode-se calcular a variância, assimetria e curtose pelas expressões:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}, \tag{2.38}$$

$$\gamma_3 = \frac{M_3}{\sigma^3}, \tag{2.39}$$

$$\gamma_4 = \frac{M_4}{\sigma^4}, \tag{2.40}$$

onde, momento de ordem γ_n é:

$$\gamma_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^n, \tag{2.41}$$

e:

$\mu =$ média

$\sigma =$ desvio Padrão

Com o surgimento da falha, no rolamento, o valor de curtose aumenta. À medida que a falha se espalha pela superfície da pista ou esfera o valor de curtose diminui e pode atingir valores iguais ou menores que três o que mascara a identificação de uma possível falha no rolamento (Tandon & Choudhury, 1999). Com o objetivo de evitar erros alguns pesquisadores aconselham o uso da curtose em bandas de freqüências selecionadas (Dyer & Stweart, 1978; Martin & Honarvar, 1995; Tandon & Choudhury, 1999).

A Figura 2.12 representa o valor de curtose para uma senoide, um sinal ruidoso de um rolamento sem defeito e um sinal de defeito na pista estacionária do rolamento.

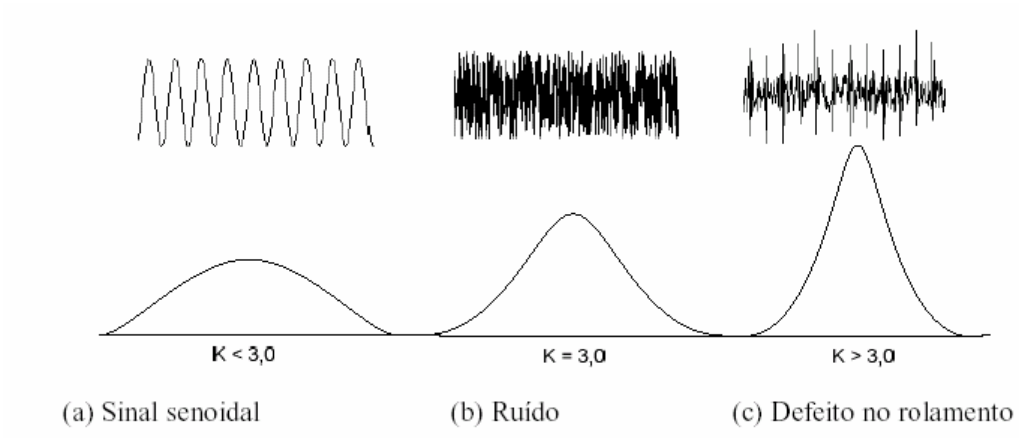


Figura 2.12 – Valor de curtose para alguns sinais (Tandon & Choudhury, 1999).

Um fato interessante relativo aos parâmetros estatísticos é que os momentos estatísticos ímpares dão informações sobre a posição do pico da densidade de probabilidade em relação ao valor médio, enquanto os parâmetros relacionados a valores pares indicam a expansão ou achatamento da distribuição. Para uma perfeita normal, os momentos ímpares tendem a zero e os momentos pares têm valores finitos (Martin & Honarvar, 1995). Os valores destes parâmetros obtidos para o sinal de um rolamento sem defeito e de um rolamento com defeito são diferentes, o que demonstra que estes podem ser usados para indicar o surgimento de falha em um rolamento. A Figura 2.13 representa a assimetria que é um momento estatístico de ordem impar.

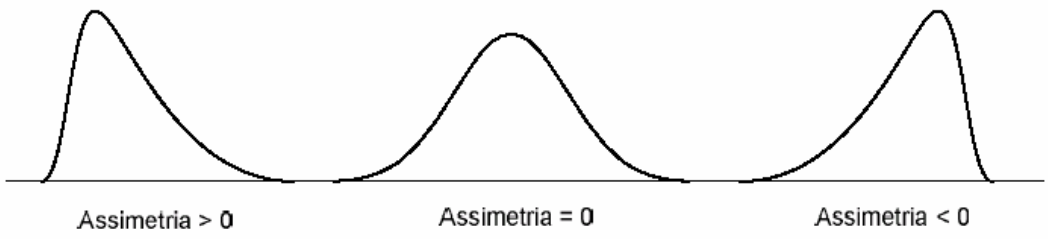


Figura 2.13 – Valores de assimetria de uma distribuição.

2.2.2. Técnicas de Detecção de Falhas em Rolamentos por Análise de Vibrações no Domínio da Freqüência

As técnicas de detecção de falhas de rolamentos por análise de vibrações no domínio do tempo possuem um caráter qualitativo, ou seja, possibilitam verificar o surgimento de falhas, porém, não possibilitam identificar onde a falha ocorreu. Quando se deseja identificar onde ocorreu a falha, utilizam-se métodos no domínio da freqüência. Porém, ressalta-se que nem toda técnica que utiliza o domínio da freqüência possibilita identificar o tipo de falha. Das diversas técnicas no domínio da freqüência serão enfocadas as técnicas de Densidade espectral de potência (Energia Residual), cepstrum e envelope com e sem uso de filtro adaptativo.

2.2.2.1. Método da Energia Residual

Este método é proposto como uma alternativa aos parâmetros utilizados como alarme de defeito. Consiste em obter o sinal do rolamento sem defeito e em seguida calcula-se a densidade espectral de potência do sinal que servirá de padrão DEP(Sp). Quando se deseja saber a condição do rolamento, uma nova aquisição é feita e em seguida, calcula-se a sua densidade espectral de potência DEP(Sr). A energia residual é o valor da área obtida a partir do módulo da diferença das duas densidades. Para obtenção das Densidades

espectrais foi utilizado o método proposto por Welch (Proakis, 1996), Ao considerar um rolamento cujo sinal é composto por:

$$S_r(t) = n(t) + d_{ef}(t), \tag{2.42}$$

onde:

$S_r(t) =$ sinal do rolamento;

$n(t) =$ parcela da normalidade do sinal;

$d_{ef}(t) =$ parcela de defeito do sinal.

Caso o rolamento não apresente defeito, sua parcela de defeito será nula, ou seja: def(t) = 0.Caso contrário esta parcela não será nula, logo o a parcela do sinal referente ao defeito será obtida a partir da relação:

$$d_{ef}(t) = S_r(t) - n(t), \tag{2.43}$$

A Figura 2.14 representa a energia residual obtida para um rolamento com defeito na pista interna. Na Figura 2.14 (a), estão representados os gráficos da densidade espectral de potência do rolamento sem defeito (linha vermelha contínua) e do mesmo rolamento após o surgimento de defeito na pista interna. A Figura 2.14 (b) apresenta o gráfico obtido a partir do módulo da diferença do sinal do rolamento com defeito e do sinal sem defeito. O valor obtido para energia residual foi de 65.3551.

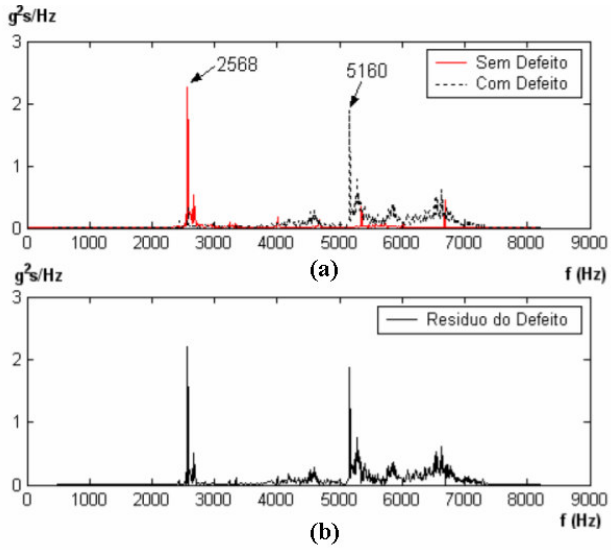


Figura 2.14 – Energia residual (Almeida, Vicente & Padovese, 2001).

Este método se apresentou mais eficiente que os de variância, curtose e rms para a detecção de falhas em rolamentos, independente do carregamento e da velocidade (Almeida, Vicente & Padovese, 2001).

2.2.2.2. Técnica de Envelope

Para que a técnica de envelope seja bem entendida é necessária a apresentação de alguns conceitos importantes: Modulação e Demodulação.

Modulação

Existem diversos tipos de modulação dos quais podemos destacar: modulação em amplitude (AM), em freqüência (FM) e em fase (PM). Os rolamentos quando submetidos à velocidade constante, as falhas que ocorrem em pontos da pista ou esfera que se deslocam em relação à região de carga sofrem modulação em amplitude (McFadden, 1984; Braun, 1986; Mitchell, 1993).

Para que haja uma modulação em freqüência no rolamento é necessário que a freqüência de rotação do rolamento sofra variação durante o processo de aquisição. Durante os ensaios realizados para esse trabalho, a velocidade de rotação do rolamento foi mantida constante, logo se houver modulação em algum sinal de defeito, será em amplitude.

Para que haja modulação são necessárias duas ondas: uma moduladora e uma portadora. Na modulação em amplitude a portadora terá sua amplitude modificada proporcionalmente ao sinal modulante. A portadora é dada por:

$$S_{p(t)} = A_p \cos(w_p t), \tag{2.44}$$

onde,

$A_p =$ amplitude da portadora;

$w_p =$ freqüência da portadora.

Ao considerar-se um sinal qualquer modulante Sm(t) com freqüência menor que a freqüência do sinal portador. Ao variar a amplitude da portadora, de forma proporcional à moduladora Sm(t) a amplitude instantânea será:

$$A(t) = A_p\left[1 + KS_m(t)\right], \tag{2.45}$$

onde K é uma constante conhecida como sensibilidade de amplitude. Obtem-se uma função modulada dada por:

$$S_{AM}(t) = A(t)\cos(w_p t) = A_p\left[1 + KS_m(t)\right]\cos(w_p t). \tag{2.46}$$

Ao considerar que o sinal modulador Sm(t) é um sinal senoidal tem-se:

$$S_m(t) = A_m \cos(w_m t). \tag{2.47}$$

Ao substituir a Eq. (2.47) na Eq. (2.46), obtém-se:

$$S_{AM}(t) = \left[A_p + KA_m \cos(w_m t)\right]\cos(w_p t). \tag{2.48}$$

Ao expandir a Eq. (2.48), obtém-se a expressão:

$$S_{AM}(t) = A_p \cos(w_p t) + \frac{KA_m}{2}\cos(w_p - w_m)t + \frac{KA_m}{2}\cos(w_p + w_m)t. \tag{2.49}$$

Um parâmetro importante na modulação é o índice de modulação (*m*), que pode ser obtido a partir da razão entre a maior amplitude do sinal modulador pela maior amplitude do sinal portador. Quando o índice de modulação atinge valor maior que a unidade, haverá distorção na modulação (Haykin,1989;Haykin & Veen, 2001).

$m = \dfrac{A_m}{A_p}$ $\therefore$ m <1 não haverá distorção e m> 1 haverá distorção.

Ao substituir o termo A_m por $A_p m$ na Equação (2.49), obtém-se:

$$S_{AM}(t) = A_p \cos(w_p t) + \frac{KA_p m}{2}\cos(w_p - w_m)t + \frac{KA_p m}{2}\cos(w_p + w_m)t. \tag{2.50}$$

A Transformada de Fourier a um co-seno é dada por:

$$\Im\left[\cos(w_x t)\right] = \pi\delta(w - w_x) + \pi\delta(w + w_x), \tag{2.51}$$

Logo, ao aplicar a Transformada de Fourier à função modulada dada pela Equação (2.51), obtém-se:

$$\Im[S_{AM}(t)] = A_p\left[\pi\delta(w-w_p)+\pi\delta(w+w_p)\right]+\frac{KA_p m}{2}\left[\pi\delta(w-(w_p-w_m))+\pi\delta(w+w_p-w_m)\right]+$$
$$\frac{KA_p m}{2}\left[\pi\delta(w-(w_p+w_m))+\pi\delta(w+w_p+w_m)\right],$$

onde, a Figura 2.15 representa o espectro obtido após a aplicação da transformada de Fourier.

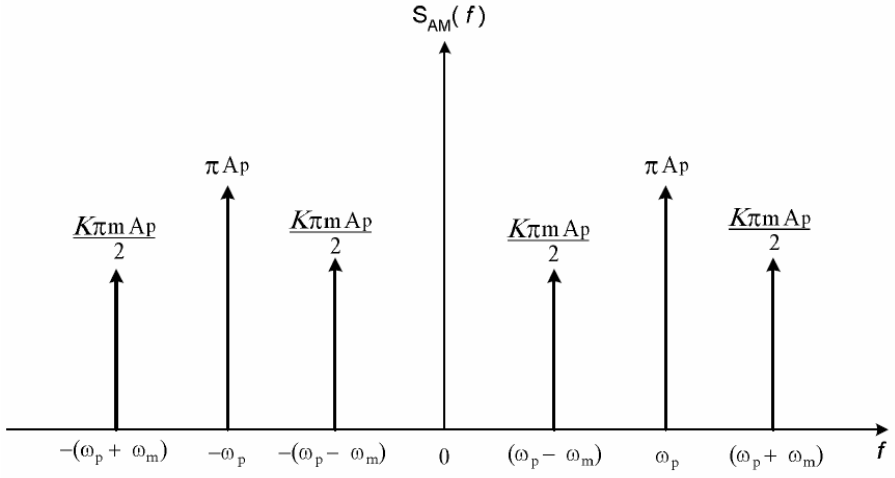
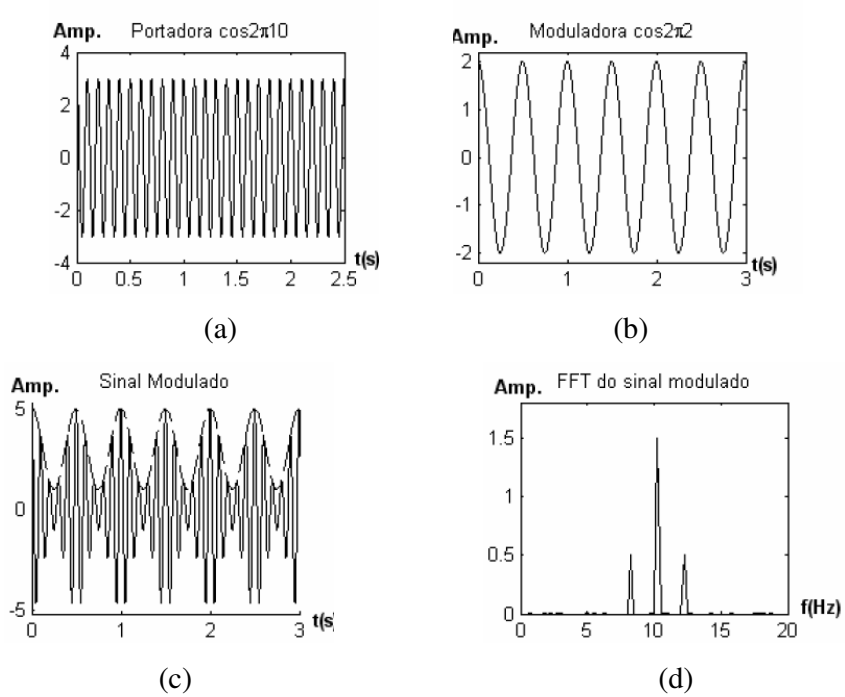


Figura 2.15 – Espectro de Freqüência de um Sinal AM (Haykin,1989;Haykin & Veen, 2001).

Ao observar a Figura 2.15, pode-se verificar que quanto maior a amplitude da freqüência portadora maiores serão as amplitudes do espectro. No caso de falhas em rolamentos, estas amplitudes estão diretamente relacionadas às cargas.

Na Figura 2.16, estão representadas uma função portadora, uma função moduladora, a modulação e o espectro da função modulada. Verifica-se que no espectro da função modulada aparece a freqüência do sinal portador ladeada por duas freqüências espaçadas, da principal, de um valor igual à freqüência do sinal de modulação.

Quando em um rolamento ocorre falha em uma ponta da pista que se movimenta, em relação à região de carga, haverá modulação cuja freqüência é igual a do deslocamento do ponto de falha em relação à região de carregamento.



índice de modulação m=Em/Ec=0,66667

Figura 2.16 – (a) sinal portador; (b) sinal modulador; (c) sinal modulado; (d) fft do sinal modulado (Haykin,1989;Haykin & Veen, 2001).

Demodulação

Como visto na Figura 2.16 (c), após a modulação, obtém-se um sinal SAM(t) cujos picos encontram-se ligados por uma curva, representada pela linha tracejada, denominada de envelope. O processo de demodulação em amplitude consiste em extrair o envelope. Na obtenção do envelope, pode ser usado um processo analógico por meio de placas chamadas de "detector de envelope" ou de forma digital por meio da transformada de Hilbert (Haykin, 1989; Haykin & Veen, 2001).

A transformada de Hilbert expressa uma relação entre as componentes reais e imaginárias da transformada de Fourier de um sinal causal. Sinal causal é todo sinal que é nulo para o tempo negativo (Bendat & Piersol, 1986; Randall & Tech, 1987).

Todo sinal causal pode ser obtido pela relação entre um sinal par e um sinal ímpar. A Figura 2.17 (a), (b) e (c) representa um sinal causal e a função par e impar que adicionadas geram o sinal causal.

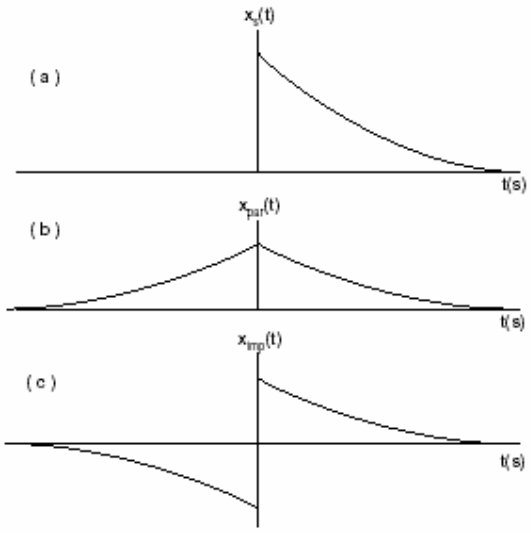


Figura 2.17 - Sinal causal (a) sinal causal; (b) função par; (c) função impar (Bendat & Piersol, 1986; Randall & Tech, 1987).

Ao observar a Figura 2.17 verifica-se que o sinal causal, pode ser obtido a partir da relação:

$$x_s(t) = x_{par}(t) + x_{imp}(t) \tag{2.52}$$

onde;

$x_{par}(t) =$ função par

$x_{imp}(t) =$ função impar

Ao usar a função sinal sgn(t), onde sgn(t) = 1 para t > 0 e sgn(t) = -1 para t < 0, a partir da qual as funções, par e impar podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{par}(t) &= x_{imp}(t)\,\mathrm{sgn}(t) \\ x_{imp}(t) &= x_{par}(t)\,\mathrm{sgn}(t) \end{aligned} \tag{2.53}$$

A relação apresentada pela equação 2.53 garante que os sinais pares e ímpares não são independentes. A partir destes conceitos iniciais, serão desenvolvidas algumas relações com a transformada de Fourier com o objetivo de relacionar as componentes pares e ímpares do sinal e as partes reais e imaginárias da transformada Fourier. Como a única diferença entre as transformadas direta e inversa de Fourier é o sinal da exponencial, algumas relações podem ser estabelecidas. De forma mais geral, as seguintes relações são válidas (Randall & Tech, 1987):

$$x(t) \xleftrightarrow{\Im} X(f) \xleftrightarrow{\Im} x(-t) \xleftrightarrow{\Im} X(-f) \xleftrightarrow{\Im} x(t) \tag{2.54}$$

Tem-se ainda, que para um sinal real a propriedade:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt = X^*(-f), \tag{2.55}$$

é válida, onde X*(-f) é o conjugado de X(f), logo:

$$R(f) = \mathrm{Re}(-f) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}(f) = -\mathrm{Im}(-f) \tag{2.56}$$

$$X(f) = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f) \tag{2.57}$$

Pode-se concluir que a parte real da transformada de Fourier é uma função par e a parte imaginária é uma função ímpar. Da Equação 2.54, tem-se que para um sinal real e par x(t)=x(-t), pode-se então concluir que X(f) =X(-f). A partir da Equação 2.55 chega-se a:

$$\mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Re}(f) - i\,\mathrm{Im}(f) \tag{2.58}$$

Logo, para que a relação seja válida Im(f) = 0. Ao seguir o mesmo procedimento anterior, para um sinal real e ímpar, pode-se afirmar:

- Para um sinal real par o seu espectro é real par;
- Para um sinal real impar o seu espectro é imaginário e impar.

De posse das relações observadas nas equações 2.58, 2.57 e 2.56, volta-se as Equações 2.52 e 2.53, a fim de se estabelecer algumas relações entre as componentes reais e imaginárias da transformada de Fourier do sinal, assim:

$$\Im\{x(t)\} = \Im\{x_{par}(t)\} + \Im\{x_{imp}(t)\} \tag{2.59}$$

$$\Im\{x(t)\} = X(f) = X_{\mathrm{Re}}(f) + iX_{im}(f) \tag{2.60}$$

Ao levar-se em conta as relações estabelecidas, tem-se:

$$X_{\mathrm{Re}}(f) = \Im\{x_{par}(t)\} \tag{2.61}$$

$$iX_m(f) = \Im\{x_{imp}(t)\} \tag{2.62}$$

A transformada de Hilbert expressa a relação entre a parte real e imaginária da transformada de Fourier de um sinal, tem-se que:

$$X_{\mathrm{Re}}(f) = \Im\{x_{par}(t)\} = \Im\{x_{imp}\,\mathrm{sgn}(t)\} \tag{2.63}$$

Pelo teorema da convolução, a equação 2.63 pode ser reescrita da forma:

$$X_{\mathrm{Re}}(f) = \Im\{x_{imp}\} * \Im\{\mathrm{sgn}(t)\} \tag{2.64}$$

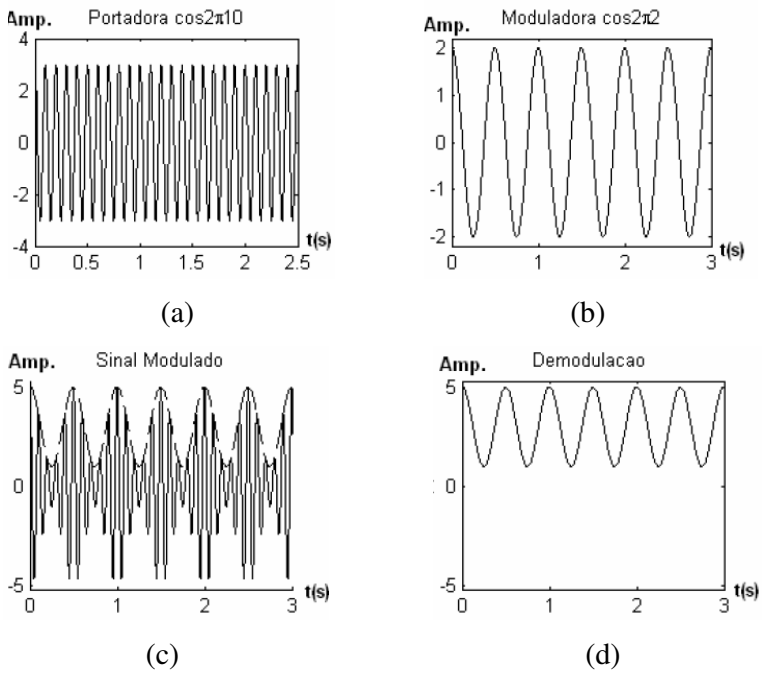
Como $\Im\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{1}{i\pi f}$, a Equação 2.63 pode ser reescrita:

$$X_{\mathrm{Re}}(f) = iX_{im}(f)\frac{1}{i\pi f} = X_{im}(f)\frac{1}{\pi f} \tag{2.65}$$

Logo, a transformada de Hilbert do sinal pode ser expressa por:

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{1}{t-\tau} = x(t) * \left[\frac{1}{\pi t}\right] \tag{2.66}$$

O gráfico (c) da Figura 2.18 representa um sinal que, após o processo de modulação, foi “envelopado”, e o gráfico (d), representa o envelope obtido após a aplicação da transformada de Hilbert.



índice de modulação m=Em/Ec=0,66667

Figura 2.18 – Demodulação de um sinal; (a) sinal portador; (b) sinal modulador; (c) sinal modulado; (d) envelope do sinal modulado (Haykin,1989;Haykin & Veen, 2001).

Técnica de Envelope

A técnica de envelope é composta por um conjunto de procedimentos aplicados ao sinal (Figura 2.19).

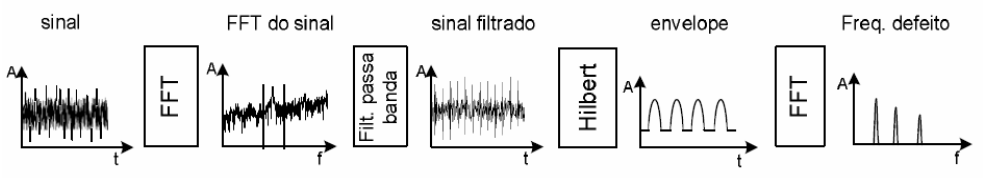


Figura 2.19 - Procedimento adotados na técnica de Envelope (Mitchell, 1993)

Aplicação da Transformada de Fourier ao Sinal

A transformada de Fourier do sinal de aceleração é o primeiro passo a ser tomado quando se pretende usar a técnica de envelope. Após aplicação, o sinal obtido é analisado com o objetivo de se definir a faixa de filtragem.

O que se busca, nesta etapa, é localizar uma faixa de freqüências onde houve elevação, em relação às medidas anteriores de picos de freqüência. Esta elevação ocorre devido à excitação de freqüências naturais características do rolamento ou estrutura, devido à falha no rolamento. Em muitos casos, quando não há dados anteriores ou quando a quantidade de energia do sinal de falha é pequena, há certa dificuldade em localizar esta faixa. Uma alternativa é usar um filtro com banda de filtragem maior (Mitchell, 1993).

Filtro Passa Banda

Nesta etapa, é aplicado ao sinal um filtro passa banda, cujo objetivo é eliminar baixas freqüências de alta amplitude, que em geral, estão relacionadas ao desalinhamento e ao desbalanceamento. Nesta primeira etapa, um dos problemas encontrados é a definição do tamanho da banda do filtro, pois alguns especialistas aconselham que a banda de corte se situa próxima a região em que ocorreu excitação de freqüências naturais características excitadas devido à falha, a definição desta faixa é difícil, principalmente, se a falha for incipiente que tem grau de energia baixo. Desta forma não haverá uma elevação, considerável, na região de excitação de freqüências naturais. Por outro lado, outros especialistas aconselham que a região de filtragem tenha banda maior desde que a freqüência inicial do filtro seja no mínimo dez vezes a freqüência de rotação da pista girante (Mitchell, 1993).

Pode-se observar que, se não há conhecimento prévio das freqüências de ressonância do rolamento ou estruturas, que serão excitadas pelo defeito, a escolha das bandas de filtragem passa a ser um método de tentativa e erro.

Aplicação da Transformada de Hilbert

A aplicação da transformada de Hilbert é um processo de demodulação. O seu objetivo é a obtenção do envelope do sinal de defeito, que é um sinal de baixa freqüência. Portanto, para cada tipo de defeito, o envelope traz informações características do defeito.

Aplicação da Transformada de Fourier ao Envelope

Esta é a última etapa do método de envelope. Após a aplicação da transformada de Fourier ao envelope do sinal, são obtidas as freqüências dos defeitos. Se a freqüência obtida é F1 e tem como bandas laterais 2 F1, 3 F1, ... pode-se concluir que a falha ocorreu na pista parada em relação à região de carregamento. Caso a freqüência principal obtida seja F1 e as bandas laterais estejam espaçadas com valores de freqüências igual à freqüência de rotação, pode-se concluir que a falha está na pista girante em relação à região de carregamento. Se por outro lado a freqüência principal tem como bandas laterais freqüências com valores iguais à freqüência da gaiola, pode se concluir que o defeito é na esfera (McFadden, 1984).

Filtros Adaptativos

Na técnica de envelope, após o sinal passar pelo filtro passa banda, grande parte do ruído do sinal é eliminado. Porém, em alguns casos, a parcela de ruído restante no sinal compromete o desempenho da técnica de envelope. Este problema pode ser minimizado ao se filtrar mais uma vez o sinal antes da aplicação da transformada de Hilbert. Uma alternativa é usar um filtro de Kalmann, Figura 2.20.

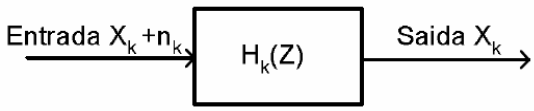


Figura 2.20 - Filtragem de um sinal com ruído (Widrow & Stearns, 1985).

Onde, Xk é o sinal de entrada do filtro contaminado pelo ruído nk, Hk(Z) é a função transferência do filtro cujo objetivo é deixar passar somente o sinal Xk. Para que esta eliminação seja realizada de forma satisfatória é necessário um conhecimento prévio do sistema e do sinal desejado, assim os parâmetros do filtro podem ser definidos (Widrow & Stearns, 1985).

Uma forma alternativa para retirada do ruído nk é a utilização de um filtro adaptativo cujos parâmetros não são fixos e se ajustam de acordo com as

características do sinal. O diagrama apresentado na Figura 2.21 representa um filtro adaptativo com seus componentes.

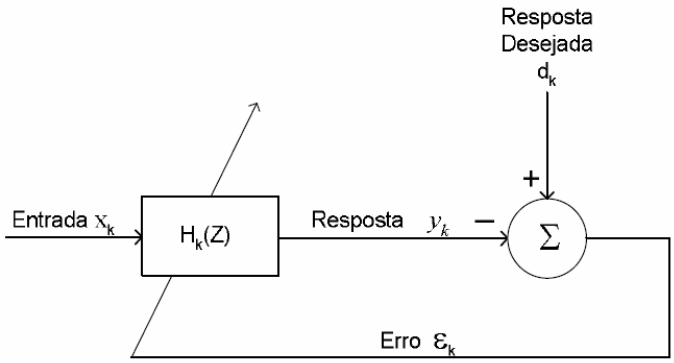


Figura 2.21 - Diagrama representativo de um filtro adaptativo (Stearns & David, 1996).

Onde Xk é o sinal de entrada do filtro, yk é a saída do filtro, dk é a saída desejada e Hk(Z) é a função transferência do filtro que sofrerá modificação em seus parâmetros por meio de um algoritmo adaptativo, até que o erro seja minimizado. O erro é dado pela expressão:

$$\varepsilon_k = d_k - y_k \tag{2.67}$$

A representação vista na Figura 2.21 tem significado ilustrativo, pois, não faz sentido a busca de uma saída desejada se a mesma já é conhecida.

2.2.2.3. Cepstrum

Análise de cepstrum é o nome dado a um conjunto de técnicas que envolvem funções que podem ser consideradas como um "espectro do logaritmo de um espectro". Entretanto, atualmente a definição mais usual do cepstrum é a "Transformada Inversa do logaritmo do Espectro de Potência" (Randall & Tech, 1987). Que é obtido da seguinte forma:

$$C(x(t)) = \Im^{-1}\{\log(G_{xx}(x(t)))\} \tag{2.68}$$

Esta análise possibilita a identificação de famílias de picos harmônicos presentes no espectro de freqüência do sinal. A aplicação do logaritmo na amplitude enfatiza os picos harmônicos e reduz a influência de qualquer aleatoriedade imposta pelo caminho percorrido pelo sinal da falha até o ponto de aquisição do sinal (Randall & Tech, 1987). Quando a falha ocorre na pista girante do rolamento, aparecerá um pico cujo valor inverso do tempo ao qual o mesmo corresponde, é igual à freqüência de rotação do eixo, que é moduladora do sinal. Se o defeito é na pista estacionária, aparecem vários picos com espaçamentos iguais. O valor inverso do tempo de espaçamento dos picos, é igual à freqüência do defeito (Barkov & Barkova, 1995).

2.3. Análise modal

De acordo com Ewins (1984), o estudo experimental das vibrações estruturais sempre foi de grande valia na compreensão e no controle dos diversos fenômenos encontrados na prática. Os métodos experimentais de vibrações são voltados basicamente para dois objetivos:

- Determinar a natureza e extensão dos níveis de vibração;
- Verificar os modelos teóricos e predições.

Atualmente, os problemas relacionados à vibração estrutural trazem limitações aos parâmetros de projeto dos mais diversos componentes. Portanto, é muito importante que os níveis de vibração encontrados durante a operação sejam antecipados e controlados a nível satisfatório.

Os dois objetivos mencionados representam dois tipos de experimentos. O primeiro corresponde ao caso no qual os níveis vibracionais são medidos durante a operação do componente em estudo. O segundo, por sua vez, corresponde a condição controlada de excitação, normalmente distinta do seu ambiente operacional. Este segundo tipo é capaz de trazer informações muito mais precisas e detalhadas, e é chamado atualmente de análise modal experimental.

A análise modal é o processo que envolve o experimento de componentes ou estruturas com o objetivo de se obter uma descrição matemática do seu comportamento dinâmico ou vibracional.

Apesar do nome ser relativamente novo, os princípios envolvidos na análise modal são conhecidos há muitos anos. Um dos marcos do desenvolvimento da análise modal ocorreu em 1947, por meio de Kennedy e Pancu. O trabalho apresentava métodos aplicados à determinação de freqüências naturais e níveis de amortecimento em estruturas de aviões.

Com o rápido avanço das técnicas de medição e análise na década de 1960, abriram-se novos caminhos. Em 1963, Bishop e Gladwell descreveram a teoria do ensaio de ressonância, que na época estava adiante de sua implementação prática.

2.3.1. Aplicações da Análise Modal

Conforme Ewins (1984), a análise modal apresenta um grande número de aplicações, que visam basicamente a obtenção do modelo matemático de uma determinada estrutura. No entanto, estas aplicações podem ser diferenciadas de acordo com o uso deste modelo matemático:

- Ajuste de modelos. Medição dos modos de vibração e subseqüente comparação com os modos gerados por um modelo teórico, tal como o modelo em elementos finitos. Os dados obtidos na análise são utilizados para validar o modelo teórico, de forma que este possa ser usado para prever os níveis de vibração da estrutura em estudo, submetida a certos carregamentos. Para tal, são necessárias estimativas precisas das freqüências naturais e descrição dos modos de vibração com precisão e detalhes suficientes para se identificar a correlação entre os modos experimentais e teóricos.
- Comparação e correlação. Na comparação, os dados teóricos são comparados de forma qualitativa com os experimentais. Para a correlação, os modos de vibração da estrutura devem ser medidos. Os dados teóricos e experimentais são combinados, quantitativamente, de forma a se identificar as causas específicas das discrepâncias entre eles.

- Sub-estruturação. Produz-se o modelo de um determinado componente, de forma que este seja incorporado a uma estrutura qualquer. Para esta aplicação, as freqüências naturais, modos de vibração e amortecimentos modais devem ser medidos. Além disto, todos os modos do componente devem ser incluídos.
- Prever os efeitos de modificações em uma dada estrutura.
- Determinação de forças. Existem muitas situações nas quais o conhecimento das forças que causam vibração é necessário, mas a medição destas forças não é viável. Uma solução para estes casos é a utilização das respostas vibracionais em conjunto com um modelo matemático tal como uma função de transferência.

2.3.2. Base Teórica

Segundo Ewins (1984), uma análise vibracional típica pode ser dividida em três etapas. Na análise teórica, inicia-se com uma descrição das características físicas da estrutura, normalmente em termos de suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento. Esta descrição é chamada de modelo espacial.

A partir deste ponto, é comum que se faça uma análise modal teórica do modelo espacial. Esta análise gera uma descrição do comportamento da estrutura, chamado de modelo modal. O modelo modal é definido por um conjunto de freqüências naturais com seus respectivos modos de vibração e fatores de amortecimento modais. Estes parâmetros descrevem as várias maneiras pelas quais a estrutura é capaz de vibrar naturalmente, isto é, sem qualquer excitação externa.

A terceira etapa, geralmente de maior interesse, é a análise de como a estrutura vibrará sob certas condições de excitação. Isto depende não apenas das propriedades inerentes da estrutura, como também da natureza e magnitude da excitação imposta. No entanto, é conveniente apresentar um modelo que relaciona a resposta da estrutura a uma excitação "padrão". Esta excitação padrão é tal que serve como base para a solução de qualquer caso particular. O modelo gerado é chamado de modelo de resposta.

Uma excitação padrão bastante utilizada é a força senoidal de amplitude unitária, aplicada a cada ponto da estrutura individualmente, e em todas as freqüências dentro de uma faixa específica. O modelo de resposta consiste, portanto, de um conjunto de funções de resposta em freqüência (FRFs), que devem ser definidas sobre uma faixa de freqüências aplicável.

Na análise modal experimental, toma-se o caminho contrário, como pode ser observado na Fig. 2.22.

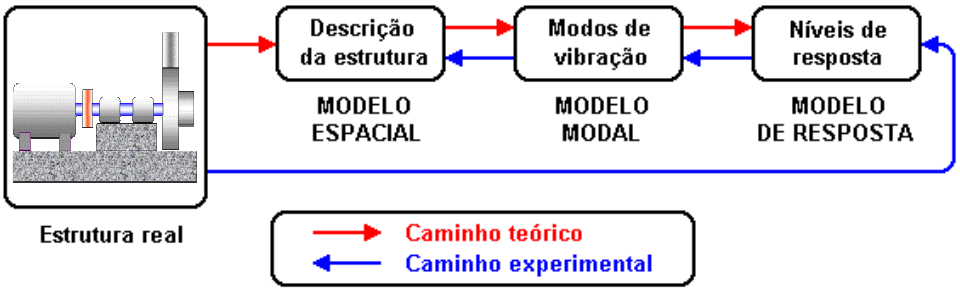


Figura 2.22 – Análise modal teórica e experimental (Saturnino, 2004).

2.3.2.1. Sistema de Um Grau de Liberdade (1 GDL)

O modelo básico de um sistema com 1 GDL é apresentado na Fig. 2.23, onde $f(t)$ e $x(t)$ são a força e o deslocamento, respectivamente. O modelo espacial consiste de uma massa (m), uma mola de (k) e, quando o amortecimento estiver presente, um elemento de amortecimento viscoso (c) ou histerético (h).

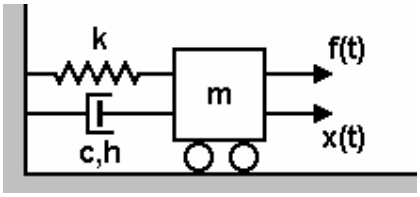


Figura 2.23 – Sistema de um grau de liberdade (Saturnino, 2004).

Para se obter o modelo modal, é necessário realizar a análise modal teórica. Esta análise considera inicialmente um sistema não-amortecido, submetido a vibração livre, ou seja, sem forças externas aplicadas.

2.3.2.1.1. Sistema Não-amortecido

O modelo espacial consiste apenas da massa (*m*) e da mola (*k*). Para o modelo modal, considera-se o sistema sem forças externas aplicadas, ou seja, $f(t) = 0$.

A equação de movimento se torna:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.69}$$

A solução é da forma $x(t) = xe^{i\omega t}$, o que leva a:

$$\left(k - \omega^2 m\right) = 0 \tag{2.70}$$

Portanto, o modelo modal consiste de uma única solução (modo de vibração) com freqüência natural ω_0 dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \tag{2.71}$$

Para o modelo de resposta, considera-se uma força da forma $f(t) = fe^{i\omega t}$ e uma solução da forma $x(t) = xe^{i\omega t}$, onde *x* e *f* são números complexos de forma a acomodarem tanto a informação de amplitude quanto de fase. A equação de movimento se torna:

$$\left(k - \omega^2 m\right)xe^{i\omega t} = fe^{i\omega t} \tag{2.72}$$

O modelo de resposta é extraído ao fazer-se *x/f*:

$$Q(\omega) = \frac{x}{f} = \frac{1}{k - \omega^2 m} \tag{2.73}$$

Na prática, sempre existe algum amortecimento, que gera forças dissipativas. A forma na qual estas forças são geradas nem sempre é simples.

No entanto, existem dois tipos de amortecimento que apresentam solução analítica: o amortecimento viscoso e o amortecimento histerético ou estrutural.

2.3.2.1.2. Amortecimento viscoso

O amortecimento viscoso considera que as forças dissipativas são proporcionais à velocidade. Para este caso, a equação de movimento em vibração livre se torna:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.74}$$

Ao usar a solução da forma: $x(t) = xe^{st}$, onde *s* é um número complexo, obtém-se:

$$\left(ms^2 + cs + k\right) = 0 \tag{2.75}$$

O que leva a:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{2m}} = -\omega_0\zeta \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.76}$$

Onde:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \tag{2.77}$$

E:

$$\zeta = \frac{c}{c_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \tag{2.78}$$

O que implica em uma solução da forma:

$$x(t) = xe^{-\omega_0\zeta t}e^{i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t} \tag{2.79}$$

Ao considerar agora a vibração forçada da forma $f(t) = fe^{i\omega t}$, a equação de movimento se torna:

$$\left(-\omega^2 m + i\omega c + k\right)xe^{i\omega t} = fe^{i\omega t} \tag{2.80}$$

E a função de resposta em freqüência passa a ser dada por:

$$Q_c(\omega) = \frac{x}{f} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i(\omega c)} \tag{2.81}$$

Que inclui informações de amplitude:

$$\left|Q_c(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \tag{2.82}$$

E fase:

$$\angle Q_c(\omega) = arctg\left(\frac{-\omega c}{k - \omega^2 m}\right) \tag{2.83}$$

2.3.2.1.3. Amortecimento Estrutural

O modelo de amortecimento viscoso não é representativo do que ocorre nos sistemas reais de múltiplos graus de liberdade. Parece haver dependência do amortecimento em relação à freqüência nas estruturas reais. Um modelo alternativo para o amortecimento é o histerético ou estrutural, que considera o amortecimento variando inversamente com a freqüência.

Um ponto negativo do amortecimento estrutural é que ele não apresenta solução simples para a condição de vibração livre. Ao considerar a vibração forçada, a equação de movimento se torna:

$$\left(-\omega^2 m + k + ih\right) x e^{i\omega t} = f e^{i\omega t} \tag{2.84}$$

E a FRF se torna:

$$Q_h(\omega) = \frac{x}{f} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + ih} \tag{2.85}$$

Ou:

$$Q_h(\omega) = \frac{1/k}{1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2 + i\eta} \tag{2.86}$$

Onde η é o fator de perda do amortecimento estrutural.

2.3.2.2. Formas de FRFs

De acordo com Ewins (1984), as funções de resposta em freqüência não necessariamente representam a relação entre deslocamentos e forças externas. As velocidades ou acelerações também podem ser utilizadas como parâmetros de resposta. A tabela 2.2 apresenta as diferentes formas de FRFs e suas denominações mais comuns.

Quando a vibração é senoidal, há uma relação entre deslocamento, velocidade e aceleração:

$$x(t) = xe^{i\omega t} \tag{2.87}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = i\omega xe^{i\omega t} \tag{2.88}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 xe^{i\omega t} \tag{2.89}$$

Portanto, as FRFs apresentam as seguintes relações:

$$Y(\omega) = \frac{v}{f} = i\omega\frac{x}{f} = i\omega\alpha(\omega) \tag{2.90}$$

$$A(\omega) = \frac{a}{f} = -\omega^2\frac{x}{f} = -\omega^2\alpha(\omega) \tag{2.91}$$

Tabela 2.2 – Formas de FRFs e denominações mais comuns.

Parâmetro de resposta (*R*)	***R/F* (direta)**	***F/R* (inversa)**	**Representação**
Deslocamento	Receptância, Admitância, Compliância dinâmica, Flexibilidade dinâmica	Rigidez dinâmica	$\alpha(\omega)$
Velocidade	Mobilidade	Impedância mecânica	$Y(\omega)$
Aceleração	Acelerância, Inertância	Massa aparente	$A(\omega)$

2.3.2.2.1. Formas Mais Comuns de Apresentação das FRFs

De modo geral, as FRFs apresentam valores complexos em função da freqüência. Portanto, não é possível traçar gráficos convencionais (*x-y*) destas funções. Para contornar este problema, três formas básicas de representação gráfica foram desenvolvidas:

- Gráfico de Bode: Um gráfico com o módulo da FRF em função da freqüência e outro com a fase da FRF em função da freqüência.;
- Um gráfico com a parte real da FRF em função da freqüência e outro com a parte imaginária da FRF em função da freqüência;
- Gráfico de Nyquist: Parte imaginária em função da parte real (não inclui informações de freqüências).

2.3.2.3. Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade

A maior parte das estruturas não pode ser modelada adequadamente com apenas um grau de liberdade. Portanto, a obtenção dos modelos modal e de resposta para um sistema com múltiplos graus de liberdade se torna necessária. Ao seguir o mesmo procedimento, considera-se inicialmente o sistema não-amortecido.

2.3.2.3.1. Não-amortecido

Para um sistema com *N* graus de liberdade não-amortecido, as equações de equilíbrio podem ser escritas de forma matricial como:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \tag{2.92}$$

Onde [*M*] e [*K*] são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez de dimensões $N \times N$. {*x*(*t*)} e {*f*(*t*)} são vetores-coluna com *N* elementos. {*x*(*t*)} contém os deslocamentos em função do tempo e {*f*(*t*)} as forças, também em função do tempo.

Resolve-se para a vibração livre, na qual:

$$\{f(t)\}=\{0\} \tag{2.93}$$

Ao assumir que a solução é da forma:

$$\{x(t)\}=\{x\}e^{i\omega t} \tag{2.94}$$

Onde {*x*} é um vetor-coluna com *N* elementos independentes do tempo. Portanto:

$$\{\ddot{x}(t)\}=-\omega^2\{x\}e^{i\omega t} \tag{2.95}$$

Desde que o sistema seja capaz de vibrar a uma única freqüência ω. Ao substituir na equação de movimento:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{x\}e^{iwt}=\{0\} \tag{2.96}$$

A única solução não-trivial é:

$$\det\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0 \tag{2.97}$$

Que caracteriza um problema de auto-valor generalizado. Há, portanto, *N* valores de ω^2 possíveis, mas não necessariamente diferentes, para a solução. Para cada valor, há um conjunto de valores relativos de {*x*}, chamados de modos de vibração.

A solução completa pode ser expressa por duas matrizes $N \times N$, que constituem o modelo modal:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ e } [\Psi] \tag{2.98}$$

Onde $[\Lambda]$ é uma matriz-diagonal que contém os auto-valores. O termo ω_r^2 é o *r*-ésimo auto-valor, ou freqüência natural ao quadrado, e $\{\psi\}_r$ é o auto-vetor correspondente.

A matriz de auto-valores é uma matriz única, mas a matriz de auto-vetores não. Isto se deve ao fato que para *N* incógnitas, há *N*-1 equações. Portanto, sobra uma incógnita e só é possível determinar valores relativos entre elas.

O modelo modal possui propriedades de ortogonalidade:

$$[\Psi]^T [M][\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

$$[\Psi]^T [K][\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

Onde m_r e k_r são conhecidos, respectivamente, como massa e rigidez generalizada ou modal do *r*-ésimo modo. Como os auto-vetores não são únicos, ou seja, dependem de um fator de escala ou normalização, os valores de m_r e k_r também não são únicos. No entanto, para qualquer escala dos auto-vetores:

$$\frac{k_r}{m_r} = \omega_r^2 \tag{2.101}$$

O processo de normalização mais relevante para a análise modal é a normalização em relação à matriz de massa:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [I] \tag{2.102}$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.103}$$

A relação entre o *r*-ésimo auto-vetor normalizado em relação à matriz de massa e o mesmo auto-vetor com uma normalização qualquer é:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}}\{\psi\}_r \tag{2.104}$$

$$[\Phi] = [\Psi]\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r^{-1/2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.105}$$

Ao assumir agora que a excitação é um conjunto de forças senoidais a uma mesma freqüência ω:

$$\{f(t)\} = \{f\}e^{i\omega t} \tag{2.106}$$

Onde {*f*} é um vetor-coluna com *N* elementos independentes do tempo.

Ao assumir também que a solução é dada na forma da Equação 2.98 e substituir na equação de movimento:

$$\left([K] - \omega^2[M]\right)\{x\}e^{iwt} = \{f\}e^{iwt} \tag{2.107}$$

Ao rearranjar a Equação (2.108):

$$\{x\} = \left([K] - \omega^2[M]\right)^{-1}\{f\} \tag{2.108}$$

Que pode ser escrita:

$$\{x\} = [\alpha(\omega)]\{f\} \tag{2.109}$$

Onde [α(ω)] é a matriz de receptância $N \times N$ do sistema, que constitui o modelo de resposta. Um elemento qualquer desta matriz $\alpha_{j,k}(\omega)$ é definido como:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \frac{x_j}{f_k}\text{, onde } f_k \neq 0; k = 1,...,N \tag{2.110}$$

Os valores dos elementos de $[\alpha(\omega)]$ podem ser calculados para qualquer freqüência de interesse, ao substituir os valores apropriados na Equação (2.109). No entanto, este procedimento envolve a inversão de um sistema matricial para cada freqüência de interesse, o que traz sérias desvantagens:

- Alto custo para sistemas de grande ordem;
- Ineficiência caso apenas a resposta de alguns graus de liberdade seja necessária;
- Não fornece uma visão clara das várias propriedades da FRF.

Por estas razões, os parâmetros da FRF são determinados de forma alternativa, ao utilizar as propriedades modais do sistema. Considerando as Equação (2.108) e (2.109), tem-se:

$$\left([K] - \omega^2[M]\right) = [\alpha(\omega)]^{-1} \tag{2.111}$$

Ao pré-multiplicar ambos os lados por $[\Phi]^T$ e pós-multiplicar por $[\Phi]$:

$$[\Phi]^T\left([K] - \omega^2[M]\right)[\Phi] = [\Phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi] \tag{2.112}$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 - \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = [\Phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi] \tag{2.113}$$

Isolando a matriz $[\alpha(\omega)]$:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi]\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 - \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}^{-1}[\Phi]^T \tag{2.114}$$

A partir da Equação (2.114), observa-se que a matriz $[\alpha(\omega)]$ é simétrica, o que caracteriza o princípio da reciprocidade:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \frac{x_j}{f_k} = \alpha_{k,j}(\omega) = \frac{x_k}{f_j} \tag{2.115}$$

Qualquer parâmetro $\alpha_{j,k}$ pode ser calculado por meio da expressão:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^{N}\frac{(\phi_{j,r})(\phi_{k,r})}{\omega_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^{N}\frac{(\psi_{j,r})(\psi_{k,r})}{m_r\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)} \tag{2.116}$$

Ou:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{{}_rA_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2} \tag{2.117}$$

O parâmetro ${}_rA_{j,k}$ é chamado de constante modal. Neste caso, a constante modal refere-se ao *r*-ésimo modo e liga as coordenadas *j* e *k* pela FRF de receptância.

2.3.2.3.2. Amortecimento Proporcional

O amortecimento proporcional apresenta algumas vantagens que simplificam os cálculos de um sistema com múltiplos graus de liberdade. Os modos de vibração do sistema com amortecimento proporcional são idênticos aos do sistema não-amortecido, e as freqüências naturais sofrem uma pequena alteração. Por isto, torna-se possível derivar as propriedades modais de um sistema com amortecimento proporcional a partir da análise do sistema não-amortecido e fazer uma correção devida à presença do amortecimento.

A equação geral de movimento para um sistema com múltiplos graus é:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \tag{2.118}$$

Onde a matriz de amortecimento [*C*] é dada por:

$$[C] = \beta[K] + \gamma[M] \tag{2.119}$$

Ao pré-multiplicar ambos os lados por $[\Phi]^T$ e pós-multiplicar por [Φ]:

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = \beta\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.120}$$

Onde os elementos c_r, que estão na diagonal principal, representam o amortecimento generalizado dos diversos modos do sistema. O fato desta matriz ser diagonal significa que os modos de vibração do sistema não-amortecido são idênticos ao do amortecido.

Ao fazer:

$$\{p\} = [\Phi]^{-1}\{x\} \tag{2.121}$$

E substituir na equação de movimento:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\{\ddot{p}\} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\{\dot{p}\} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\{p\} = \{0\} \tag{2.122}$$

Verifica-se que o sistema de equações se torna desacoplado. Portanto, cada equação pode ser resolvida em separado, como um sistema de um único GDL.

O *r*-ésimo modo possui freqüência natural complexa com parte oscilatória igual a:

$$\omega'_r = \omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2} \tag{2.123}$$

E a parte correspondente ao decaimento igual a:

$$a_r = \zeta_r \omega_r = \frac{\beta\omega_r^2}{2} + \frac{\gamma}{2} \tag{2.124}$$

Onde:

$$\omega_r = \sqrt{k_r / m_r} \tag{2.125}$$

E:

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} = \frac{\beta\omega_r}{2} + \frac{\gamma}{2\omega_r} \tag{2.126}$$

Para a vibração forçada, a função de receptância se torna:

$$[\alpha(\omega)] = \left([K] + i\omega[C] - \omega^2[M]\right)^{-1} \tag{2.127}$$

Ou:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{(\psi_{j,r})(\psi_{k,r})}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \tag{2.128}$$

A distribuição de amortecimento proporcional é plausível de um ponto de vista prático: para amortecimento interno, os elementos amortecedores estão em paralelo com os elementos de rigidez. Para amortecimento devido a fricção, os elementos estão em paralelo com os elementos de massa.

A equação de movimento de um sistema com múltiplos GDL e amortecimento histerético é dada por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + ([K] + i[H])\{x(t)\} = \{f(t)\} \tag{2.129}$$

Ao considerar a matriz [*H*] proporcional:

$$[H] = \beta[K] + \gamma[M] \tag{2.130}$$

Novamente, os modos de vibração são idênticos ao do sistema não-amortecido, e os auto-valores tomam forma complexa:

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2 (1 + i\eta_r) \tag{2.131}$$

$$\eta_r = \beta + \frac{\gamma}{\omega_r^2} \tag{2.132}$$

$$\omega_r = \sqrt{k_r / m_r} \tag{2.133}$$

E a FRF se torna:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{(\psi_{j,r})(\psi_{k,r})}{(k_r - \omega^2 m_r) + i\eta_r k_r} \tag{2.134}$$

2.3.2.3.3. Amortecimento Histérico - Caso Geral

Ao tomar como base a Equação (2.129) e considerar inicialmente a equação diferencial homogênea, que corresponde à condição de vibração livre:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + ([K] + i[H])\{x(t)\} = \{0\} \tag{2.135}$$

A solução é dada por:

$$\{x(t)\} = \{x\}e^{i\lambda t} \tag{2.136}$$

Ao substituir na equação de movimento, chega-se a um problema de auto-valores e auto-vetores complexos. O *r*-ésimo auto-valor pode ser escrito como:

$$\lambda_r = \omega_r^2 (1 + \eta_r) \tag{2.137}$$

Onde ω_r é a freqüência natural e η_r o fator de amortecimento para este modo.

A freqüência ω_r aqui obtida não é necessariamente igual à freqüência natural do sistema não-amortecido, como no caso do amortecimento proporcional. Na prática, no entanto, os valores são bastante próximos.

O significado físico dos auto-vetores complexos é que cada GDL possui não apenas uma amplitude, como também um ângulo de fase.

A auto-solução aqui obtida possui as mesmas propriedades de ortogonalidade do sistema não-amortecido:

$$[\Phi]^T [M][\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.138}$$

Novamente, os parâmetros de massa e rigidez generalizados dependem da normalização dos modos de vibração, mas sempre obedecem à seguinte relação:

$$\lambda_r = \frac{k_r}{m_r} \tag{2.139}$$

E os auto-vetores normalizados em relação à matriz de massa podem ser definidos por:

$$\{\phi\}_r = (m_r)^{-1/2}\{\psi\}_r \tag{2.140}$$

Para a obtenção do modelo de resposta, considera-se uma excitação harmônica:

$$\left([K] + i[H] - \omega^2[M]\right)\{x\}e^{i\omega t} = \{f\}e^{i\omega t} \tag{2.141}$$

Ao isolar o vetor {*x*}:

$$\{x\} = \left([K] + i[H] - \omega^2[M]\right)^{-1}\{f\} = [\alpha(\omega)]\{f\} \tag{2.142}$$

Ao utilizar a propriedade de ortogonalidade:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi]\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \left(\lambda_r - \omega^2\right)^{-1} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}[\Phi]^T \tag{2.143}$$

Ou em forma de série:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{(\phi_{j,r})(\phi_{k,r})}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} \tag{2.144}$$

Na expressão 2.144, tanto o numerador quanto o denominador são complexos.

2.3.2.3.4. Amortecimento Viscoso - Caso Geral

Ao tomar como base a Equação (2.118) e considerar inicialmente a equação diferencial homogênea:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \tag{2.145}$$

Ao considerar uma solução da forma:

$$\{x(t)\} = \{x\}e^{st} \tag{2.146}$$

Onde *s* é um número complexo. Ao substituir na equação de movimento:

$$\left(s^2[M]+s[C]+[K]\right)\{x\}=\{0\} \tag{2.147}$$

Cuja solução constitui um problema de auto-valor complexo. Há 2*N* auto-valores s_r, mas estes ocorrem em pares de conjugados complexos. Isto se deve ao fato que todos os coeficientes nas matrizes são reais. Como nos casos anteriores, para cada auto-valor corresponde um auto-vetor, e estes também ocorrem em conjugados complexos. Portanto, a solução do problema pode ser descrita por:

$$s_r,\ s_r^* \text{ e } \{\Phi\}_r,\ \{\Phi\}_r^* \quad r = 1,\ldots,N \tag{2.148}$$

É comum representar cada auto-valor s_r da seguinte maneira:

$$s_r = \omega_r\left(-\zeta_r + i\sqrt{1-\zeta_r^2}\right) \tag{2.149}$$

Onde ω_r é a "freqüência natural" e ζ_r a razão de amortecimento para este modo. A razão de se colocar "freqüência natural" entre aspas é que esta freqüência não é a mesma do sistema não-amortecido. As freqüências só se igualam para o caso em que o amortecimento é proporcional.

A auto-solução possui propriedades de ortogonalidade que são diferentes dos casos anteriores. A partir destas propriedades, obtém-se:

$$2\omega_r\zeta_r = \frac{\{\psi\}_r^H[C]\{\psi\}_r}{\{\psi\}_r^H[M]\{\psi\}_r} = \frac{c_r}{m_r} \tag{2.150}$$

$$\omega_r^2 = \frac{\{\psi\}_r^H[K]\{\psi\}_r}{\{\psi\}_r^H[M]\{\psi\}_r} = \frac{k_r}{m_r} \tag{2.151}$$

Onde m_r, k_r e c_r são, respectivamente, os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento modais. O significado físico destes parâmetros, no entanto, é um pouco diferente dos outros casos abordados.

Para o modelo de resposta, assume-se a excitação da forma:

$$\{f(t)\} = \{f\}e^{i\omega t} \tag{2.152}$$

E uma resposta:

$$\{x(t)\} = \{x\}e^{i\omega t} \tag{2.153}$$

A solução da equação de movimento se torna:

$$\{x\} = \left([K] - \omega^2[M] + i\omega[C]\right)^{-1}\{f\} \tag{2.154}$$

Mas esta expressão não é conveniente para aplicações numéricas. Procura-se colocar a expressão acima na forma de uma série, como nos outros casos abordados. Para este fim, é necessário definir um novo vetor de coordenadas $\{y\}$ que contém tanto os deslocamentos $\{x\}$ quanto as velocidades $\{\dot{x}\}$:

$$\{y\}_{(2N\times 1)} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} \tag{2.155}$$

Ao utilizar o vetor $\{y\}$, a equação de equilíbrio pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix}[C] & [M]\end{bmatrix}_{(N\times 2N)}\{\dot{y}\}_{(2N\times 1)} + \begin{bmatrix}[K] & [0]\end{bmatrix}_{(N\times 2N)}\{\dot{y}\}_{(2N\times 1)} = \{0\}_{(N\times 1)} \tag{2.156}$$

Mas esta forma apresenta apenas N equações para um total de $2N$ incógnitas. Ao adicionar uma equação identidade da forma:

$$\begin{bmatrix}[M] & [0]\end{bmatrix}\{\dot{y}\} + \begin{bmatrix}[0] & -[M]\end{bmatrix}\{y\} = \{0\} \tag{2.157}$$

Obtém-se um conjunto de $2N$ equações:

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}\{\dot{y}\} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [-M] \end{bmatrix}\{y\} = \{0\} \tag{2.158}$$

Que podem ser escritas de forma simplificada:

$$[\overline{A}]\{\dot{y}\}+[\overline{B}]\{y\}=\{0\} \tag{2.159}$$

A Equação (2.159) constituem um problema de auto-valores convencional. Ao assumir uma solução da forma $\{y(t)\}=\{y\}e^{st}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}&\left(\lambda_r[\overline{A}]+[\overline{B}]\right)\{\theta\}_r=\{0\}\\&r=1,\ldots,2N\end{aligned} \tag{2.160}$$

Que possui 2*N* auto-valores e auto-vetores como solução. Ao utilizar as propriedades de ortogonalidade:

$$[\Theta]^T[\overline{A}][\Theta]=\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \overline{a}_r & \\ & & \ddots\end{bmatrix} \tag{2.161}$$

$$[\Theta]^T[\overline{B}][\Theta]=\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \overline{b}_r & \\ & & \ddots\end{bmatrix} \tag{2.162}$$

Onde:

$$\begin{aligned}&\lambda_r=-\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_r}\\&r=1,\ldots,2N\end{aligned} \tag{2.163}$$

Ao colocar o vetor de forças em termos do sistema de coordenadas {*y*}:

$$\{P\}_{(2N\times 1)}=\begin{Bmatrix}\{f\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \tag{2.164}$$

Ao assumir resposta harmônica e utilizando a expressão de resposta na forma de série:

$$\begin{Bmatrix}\{x\}\\ i\omega\{x\}\end{Bmatrix}_{(2N\times 1)}=\sum_{r=1}^{2N}\frac{\{\theta\}_r^T\{P\}\{\theta\}_r}{a_r(i\omega-s_r)} \tag{2.165}$$

Como os auto-valores e auto-vetores ocorrem na forma de conjugados complexos, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \{x\} \\ i\omega\{x\} \end{Bmatrix}_{(2N\times 1)} = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{\theta\}_r^T \{P\}\{\theta\}_r}{a_r(i\omega - s_r)} + \frac{\{\theta\}_r^H \{P\}\{\theta\}_r^*}{a_r^*(i\omega - s_r^*)} \right) \tag{2.166}$$

Ao analisar a resposta de um único grau de liberdade *j* em função de uma única força aplicada ao *k*-ésimo grau de liberdade:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{\{\theta_{j,r}\}\{\theta_{k,r}\}}{a_r\left(\omega_r\zeta_r + i\left(\omega + \omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}\right)\right)} + \frac{\{\theta_{j,r}\}^*\{\theta_{k,r}\}^*}{a_r^*\left(\omega_r\zeta_r + i\left(\omega + \omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}\right)\right)} \right) \tag{2.167}$$

Ao usar o fato que $s_r = \omega_r\left(-\zeta_r + i\sqrt{1-\zeta_r^2}\right)$, a Equação (2.168) se reduz a:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\left({}_rR_{j,k}\right) + i\left(\omega/\omega_r\right)\left({}_rS_{j,k}\right)}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_r\zeta_r} \tag{2.168}$$

Onde os coeficientes *R* e *S* são obtidos de:

$$\begin{aligned} \{{}_rR_k\} &= 2\left(\zeta_r \operatorname{Re}\{{}_rG_k\} - \operatorname{Im}\{{}_rG_k\}\sqrt{1-\zeta_r^2}\right) \\ \{{}_rS_k\} &= 2\operatorname{Re}\{{}_rG_k\} \\ \{{}_rG_k\} &= \frac{\theta_{k,r}}{a_r}\{\theta\}_r \end{aligned} \tag{2.169}$$

2.4. Elementos Finitos

Conforme Bathe (1982), o desenvolvimento do método de elementos finitos como ferramenta de análise começou essencialmente com o advento dos computadores digitais. Apesar de sua base teórica ser relativamente antiga, sua aplicação prática surgiu apenas há algumas décadas, com a sua

implementação computacional. A partir desta, tornou-se possível resolver um grande número de equações de maneira bastante eficiente.

O método de elementos finitos se baseia na discretização de uma estrutura ou meio contínuo, e na conseqüente solução do sistema discreto obtido. É principalmente devido à generalidade da estrutura ou contínuo que pode ser analisado, a relativa facilidade de estabelecer as equações governantes do sistema e às boas propriedades numéricas das matrizes do sistema que o método de elementos finitos encontrou o seu campo de aplicações.

É difícil dizer em qual data o método de elementos finitos foi "inventado", mas as raízes deste método remetem a três grupos de pesquisa separados: matemáticos aplicados, físicos e engenheiros. Apesar do método ter sido publicado anteriormente, os principais avanços se devem aos desenvolvimentos independentes realizados por engenheiros. Contribuições originais importantes apareceram no meio da década de 1950, nos trabalhos de Turner et al. e de Argyris e Kelsey. O nome "elemento finito" surgiu em 1960 a partir de um trabalho de Clough, no qual a técnica foi apresentada para uma análise de estado plano de tensões. A partir de então, uma enorme quantidade de pesquisas voltou-se para a técnica, e um número muito grande de publicações na área está disponível atualmente.

Hoje em dia, o conceito de elementos finitos é bastante vasto. Mesmo que se restrinja à análise de problemas da mecânica sólida e estrutural, o método pode ser usado de várias formas diferentes. No entanto, a formulação mais importante, que é bastante utilizada na solução de problemas práticos, é a do método de elementos finitos baseados em deslocamentos. Praticamente todos os programas de análise genérica foram escritos utilizando esta formulação. Isto se deve à sua simplicidade, generalidade e boas propriedades numéricas.

O método de elementos finitos baseados em deslocamentos pode ser visto como uma extensão do método de análise de deslocamentos, que foi utilizado por muitos anos na análise de estruturas formadas por vigas e hastes. Os passos básicos na análise de uma estrutura de vigas e hastes ao utilizar o método de deslocamentos são:

- idealizar a estrutura total como um conjunto de vigas e hastes que são interconectadas nas juntas estruturais;

- identificar as juntas com deslocamentos desconhecidos. Estes deslocamentos deverão definir completamente a resposta da estrutura idealizada;
- estabelecer as equações de equilíbrio de forças correspondentes aos deslocamentos desconhecidos e resolver estas equações;
- ao conhecer os deslocamentos nas extremidades das vigas e hastes, calcular a distribuição interna de tensões;
- interpretar os deslocamentos e tensões calculadas, ao considerar as suposições feitas.

Em uma análise prática, os passos mais importantes são a idealização apropriada da estrutura e a interpretação correta dos resultados. Dependendo da complexidade do sistema real a ser analisado, é necessário um conhecimento considerável das características do sistema e de seu comportamento mecânico, de modo que a idealização apropriada seja realizada.

Originalmente, a análise de um conjunto de vigas e hastes não era considerada uma análise de elementos finitos, pois há uma grande diferença entre estas soluções e as análises mais gerais de problemas com duas ou três dimensões. Isto se deve ao fato de que as matrizes de rigidez destes elementos podem ser calculadas de forma exata (de acordo com a teoria de vigas).

2.4.1. Derivação Geral das Equações de Equilíbrio de um Elemento Finito

De acordo com Bathe (1982), considera-se o equilíbrio de um corpo tri-dimensional qualquer. As forças externas que agem no corpo são as trações de superfície $\{f\}_A$, as forças de corpo $\{f\}_V$ e as forças concentradas $\{f\}_i$. Estas forças incluem todas as forças aplicadas externamente e as reações, e têm, em geral, três componentes correspondentes aos três eixos coordenados:

$$\{f\}_A = \begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{Bmatrix}_A \qquad \{f\}_V = \begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{Bmatrix}_V \qquad \{f\}_i = \begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{Bmatrix}_i \tag{2.170}$$

Os deslocamentos do corpo na configuração sem carregamentos são representados por {*U*}, onde:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \tag{2.171}$$

As deformações correspondentes a {*U*} são:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{XX} \quad \varepsilon_{YY} \quad \varepsilon_{ZZ} \quad \gamma_{XY} \quad \gamma_{YZ} \quad \gamma_{ZX}\}^T \tag{2.172}$$

E as tensões correspondentes a {ε} são:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{XX} \quad \sigma_{YY} \quad \sigma_{ZZ} \quad \tau_{XY} \quad \tau_{YZ} \quad \tau_{ZX}\}^T \tag{2.173}$$

Assume-se que as forças aplicadas externamente são dadas e que se deseja calcular os deslocamentos, deformações e tensões resultantes deste carregamento. Para se calcular a resposta do corpo, as equações diferenciais de equilíbrio são estabelecidas e resolvidas de acordo com as condições de contorno e compatibilidade apropriadas.

Abordagem equivalente para expressar o equilíbrio do corpo é o uso do princípio dos deslocamentos virtuais. Este princípio diz que o equilíbrio do corpo requer que para qualquer deslocamento virtual pequeno e compatível (que satisfaz as condições de contorno essenciais) imposto ao corpo, o trabalho virtual interno total é igual ao trabalho virtual externo total:

$$\int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\bar{U}\}^T \{f\}_V \, dV + \int_A \{\bar{U}\}_A^T \{f\}_A \, dA + \sum_i \{\bar{U}\}_i^T \{f\}_i \tag{2.174}$$

O trabalho virtual interno é dado pelo lado esquerdo da equação, e é igual à tensão real que atua sobre as deformações $\{\bar{\varepsilon}\}$ (que correspondem aos deslocamentos virtuais impostos).

O trabalho externo, por sua vez, é dado pelo lado direito da equação, e é igual às forças reais $\{f\}_A$, $\{f\}_V$ e $\{f\}_i$ ao agir sobre os deslocamentos virtuais $\{\overline{U}\}$.

Deve-se enfatizar que as deformações virtuais usadas na equação são aquelas correspondentes aos deslocamentos virtuais impostos, e que estes deslocamentos podem ser qualquer conjunto compatível de deslocamentos que satisfaçam as condições de contorno geométricas.

Finalmente, deve-se notar que apesar da Equação (2.174) ter sido escrita nas coordenadas globais (*X,Y,Z*) do corpo, ela é válida em qualquer outro sistema de coordenadas.

2.4.2. Imposição de Condições de Contorno

Conforme Bathe (1982), ao se utilizar o método de elementos finitos baseado em deslocamentos, as condições de contorno de forças são levadas em conta no cálculo do vetor de forças nodais aplicado externamente. O vetor $\{R\}_C$ agrupa as cargas concentradas incluindo as reações e o vetor $\{R\}_A$ contém o efeito dos carregamentos e reações distribuídas.

Ao assumir que as equações de equilíbrio de um modelo de elementos finitos são:

$$\begin{bmatrix} [M]_{aa} & [M]_{ab} \\ [M]_{ba} & [M]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}\}_a \\ \{\ddot{U}\}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_a \\ \{U\}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\}_a \\ \{R\}_b \end{Bmatrix} \tag{2.175}$$

Onde $\{U\}_a$ contém os deslocamentos desconhecidos e $\{U\}_b$ os conhecidos ou prescritos. Resolvendo para $\{U\}_a$, obtém-se:

$$[M]_{aa}\{\ddot{U}\}_a + [K]_{aa}\{U\}_a = \{R\}_a - [K]_{ab}\{U\}_b - [M]_{ab}\{\ddot{U}\}_b \tag{2.176}$$

Portanto, na solução de $\{U\}_a$, apenas as matrizes de rigidez e massa correspondentes aos graus de liberdade $\{U\}_a$ da montagem completa precisam ser calculadas, mas o vetor $\{R\}_a$ deve ser modificado para incluir os efeitos dos deslocamentos impostos não-nulos. Uma vez que os deslocamentos $\{U\}_a$ tenham sido calculados, as forças correspondentes aos deslocamentos $\{U\}_b$ podem ser obtidas de:

$$\{R\}_b = [M]_{ba}\{\ddot{U}\}_a + [M]_{bb}\{\ddot{U}\}_b + [K]_{ba}\{U\}_a + [K]_{bb}\{U\}_b \tag{2.177}$$

As relações nas Equações (2.176) e (2.177) representam um procedimento formal para o cálculo dos deslocamentos $\{U\}_a$ e reações $\{R\}_b$, quando os deslocamentos $\{U\}_b$ são conhecidos. Ao utilizar-se a Equação (2.175), assumiu-se que todos os deslocamentos prescritos estavam incluídos no vetor de deslocamentos global. Se este não for o caso, é necessário identificar todos os deslocamentos prescritos que não correspondem aos graus de liberdade do modelo e transformar as equações de equilíbrio para que estas correspondam aos deslocamentos prescritos. Então:

$$\{U\} = [T]\{\overline{U}\} \tag{2.178}$$

Onde $\{\overline{U}\}$ é o vetor que contém os graus de liberdade nas direções requeridas. A matriz de transformação $[T]$ é uma matriz identidade que foi alterada pelos co-senos diretores das componentes de $\{\overline{U}\}$ medidas nas direções originais dos deslocamentos. Ao usar a Equação (2.197) na Equação (2.175):

$$[\overline{M}]\{\ddot{\overline{U}}\} + [\overline{K}]\{\overline{U}\} = \{\overline{R}\} \tag{2.179}$$

Onde:

$$\begin{aligned} [\overline{M}] &= [T]^T[M][T] \\ [\overline{K}] &= [T]^T[K][T] \\ \{\overline{R}\} &= [T]^T\{R\} \end{aligned} \tag{2.180}$$

2.4.3. Análises e Soluções

De acordo com Bathe (1982), a eficiência de uma análise por elementos finitos depende em grande parte dos procedimentos numéricos utilizados na solução das equações de equilíbrio do sistema. A melhor aproximação dos resultados de uma análise é, em geral, tanto melhor quanto mais refinada for a malha de elementos finitos. Por esta razão, tende-se a utilizar um número cada vez maior de elementos para se obter uma melhor aproximação da estrutura real correspondente.

O custo de uma análise e sua aplicabilidade prática dependem de forma consideravel dos algoritmos disponíveis para a solução do problema. Durante os primeiros anos nos quais o método de elementos finitos foi utilizado, sistemas da ordem de cem equações eram considerados de grande ordem. Atualmente, sistemas da ordem de cem mil equações são resolvidos sem grandes problemas. Isto se deve não apenas ao aumento da capacidade de processamento dos microcomputadores, mas também à otimização dos diversos algoritmos de solução.

O tempo para a solução das equações de equilíbrio em uma análise estática pode representar uma grande porcentagem do tempo total de solução. O tempo gasto depende do tipo e número de elementos utilizados e da topologia da malha de elementos finitos. Nas análises dinâmicas, esta porcentagem pode ser ainda maior. Portanto, técnicas inapropriadas de solução podem levar a um custo computacional desnecessário.

Além do custo computacional, é importante notar que alguns algoritmos não apresentam estabilidade numérica em certas condições. Portanto, procedimentos numéricos inapropriados podem inviabilizar certos tipos de análise.

2.4.3.1. Solução das Equações de Equilíbrio em Análises Dinâmicas

Matematicamente, a equação dinâmica de equilíbrio representa um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem. Em princípio, a solução das equações pode ser obtida por procedimentos padrões de solução de equações diferencias com coeficientes constantes. No entanto, estes procedimentos podem ter custo muito elevado se a ordem das matrizes é grande. A não ser que se tire vantagem de características especiais das matrizes de coeficientes [M], [C] e [K]. Na análise prática de elementos finitos, o interesse cai sobre um número limitado de métodos eficientes.

Os procedimentos de solução podem ser divididos em duas classes: integração direta e superposição modal. Apesar de que as técnicas parecem muito diferentes a primeira vista, de fato elas são muito parecidas. A escolha de um método ou outro é determinada pela eficiência numérica.

2.4.3.1.1. Métodos de Integração Direta

Na integração direta, as equações de equilíbrio são integradas ao longo do tempo ao utilizar um procedimento passo a passo. O termo "direta" significa que as equações de equilíbrio não recebem qualquer transformação antes de serem integradas.

Primeiro, ao invés de fazer com que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas para qualquer tempo t, ela é calculada apenas em intervalos de tempo discretos Δt. A segunda idéia é que a forma na qual os deslocamentos, velocidades e acelerações variam em cada instante de tempo é assumida dentre certas opções (diferenças finitas).

Assume-se que os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo zero são conhecidos. Estas grandezas são denotadas, respectivamente, por: ${}^{0}\{U\}$, ${}^{0}\{\dot{U}\}$ e ${}^{0}\{\ddot{U}\}$. Considera-se que as equações de equilíbrio devem ser resolvidas do instante 0 ao instante T. O intervalo de tempo da solução é dividido em n intervalos igualmente espaçados Δt, tal que $\Delta t = T/n$.

O método de integração em uso estabelece soluções aproximadas nos instantes 0, Δt, 2Δt, ... , t, t+Δt, ... , T. Como o algoritmo calcula a solução no próximo instante de tempo requerido a partir das soluções dos instantes anteriores, as equações são derivadas ao considerar que as soluções nos instantes 0, Δt, 2Δt, ... , t são conhecidas e que se deseja obter a solução no instante $t + \Delta t$.

Os métodos de integração direta podem ser separados em métodos explícitos e implícitos. Os métodos explícitos são aqueles em que uma solução ${}^{t+\Delta t}\{U\}$ é obtida por meio da solução das equações de equilíbrio num instante t. Ex.: Método de diferença central. Os métodos implícitos utilizam as condições de equilíbrio num instante $t + \Delta t$. Ex.: Métodos de Houbolt, Wilson θ, Newmark.

O número de operações necessárias na solução das equações de equilíbrio por meio destes métodos é diretamente proporcional ao número de instantes de tempo utilizados. Além disto, o número de instantes afeta a qualidade do resultado obtido, ou a estabilidade do algoritmo, ou ambos. Portanto, o uso destes métodos é eficiente apenas quando se deseja obter

uma solução em um curto período de tempo, no qual um número adequado de intervalos pode ser utilizado.

2.4.3.1.2. Método de Superposição Modal

Quando a solução das equações dinâmicas de equilíbrio deve ser obtida em um número grande de instantes de tempo, os métodos de integração direta tornam-se ineficientes. Sabe-se que o custo de solução do procedimento de integração passo apasso também é proporcional à largura de banda da matriz de rigidez. Portanto, se uma transformação adequada for realizada sobre as equações de equilíbrio, a largura de banda pode ser reduzida, o que aumenta a eficiência dos métodos de integração.

2.4.3.1.2.1. Mudança de Base para Deslocamentos Modais Generalizados

Propõe-se transformar as equações de equilíbrio em uma forma mais eficiente para a integração ao usar a seguinte transformação nos deslocamentos nodais {U}:

$$\{U(t)\} = [P]\{X(t)\} \tag{2.181}$$

Onde [P] é uma matriz quadrada e {X(t)} é um vetor em função do tempo de ordem n. As componentes de {X} são chamadas de deslocamentos generalizados.

O objetivo da transformação é obter novas matrizes do sistema, que contenham largura de banda menor que as originais. Para tal, a matriz [P] deve ser escolhida adequadamente. Além disto, a matriz [P] deve ser não-singular, ou seja, ter ordem n, de tal forma que haja uma única relação entre os vetores {U} e {X} como expressa na Equação (2.182).

$$\{\overline{U}\}^T\left(\sum_m \int_{V(m)} [B]^T_{(m)}[E]_{(m)}[B]_{(m)}\,dV_{(m)}\right)\{\overline{U}\} = \{\overline{U}\}^T\left(\begin{array}{l}\left(\sum_m \int_{V(m)} [N]^T_{(m)}\{f\}_{V(m)}\,dV_{(m)}\right)\\ +\left(\sum_m \int_{A(m)} [N]^T_{A(m)}\{f\}_{A(m)}\,dA_{(m)}\right)\\ -\left(\sum_m \int_{V(m)} [B]^T_{(m)}\{\sigma\}^T_I\,dV_{(m)}\right)+\{F\}\end{array}\right)\{\overline{U}\} \tag{2.182}$$

Teoricamente, há inúmeras matrizes de transformação [P] que podem ser usadas. Na prática, uma matriz de transformação eficiente é a matriz de modos de vibração do sistema não-amortecido.

2.5. Mecânica da fratura

2.5.1. Introdução:

O projeto convencional na engenharia baseia-se em evitar falhas por colapso plástico (Strohaecker). A propriedade usual especificada em códigos de engenharia é a tensão de escoamento convencional ou, em componentes mecânicos, a faixa de dureza.

Desta forma a tensão de projeto será a tensão que levaria o componente ao colapso plástico dividido por um fator de segurança.

Conforme este procedimento o fator de segurança não considera a possibilidade de fratura por um modo alternativo como a fratura frágil. Geralmente é aceito que o fator de segurança evita a ocorrência de fraturas frágeis. Entretanto, na prática, tem-se verificado que isto nem sempre é verdadeiro. Existem situações em que falha de componentes ocorrem a partir de trincas com tensões aplicadas abaixo da tensão de projeto.

Em serviço é comum a ocorrência de trincas junto a regiões de altas tensões como filetes, rasgos de chaveta, reduções bruscas de seção e outras descontinuidades. Os defeitos tipo trinca mais comuns são:

- trincas de solidificação,
- trincas de hidrogênio em soldas,
- decoesão lamelar,
- trincas nucleadas em serviço por fadiga ou corrosão sob tensão.

Normalmente estes defeitos são detectados e avaliados quanto as suas dimensões por técnicas de ensaios não destrutivos. O objetivo da Mecânica da Fratura é determinar se um defeito tipo trinca irá ou não levar o componente a fratura catastrófica para tensões normais de serviço permitindo, ainda, determinar o grau de segurança efetivo de um componente trincado. O grande mérito da mecânica da fratura é de possibilitar ao projetista valores

quantitativos de tenacidade do material permitindo projetos que aliem segurança e viabilidade econômica.

De acordo com Dowling (1999) o estudo e o uso da mecânica da fratura é de grande importância em engenharia pelo fato de trincas ocorrerem muito mais freqüentemente do que se imagina.

É evidente que a presença de uma trinca afeta a resistência de um componente. Desta forma durante o crescimento da trinca a resistência estrutural é minada. O controle de fratura tem o objetivo de prevenir a fratura devido a defeitos e trincas frente a carregamentos em serviço.

Uma forma de prevenir a fratura é fazer com que a resistência não caia abaixo de determinado limite. Isto significa que deve ser evitado que as trincas atinjam tamanhos críticos. São apresentados, assim, dois problemas a serem resolvidos:

- calcular o tamanho de defeitos admissíveis (deve-se determinar como o tamanho da trinca afeta a resistência global).

- calcular o tempo de operação em segurança (definição do tempo necessário para uma determinada trinca alcançar o tamanho crítico).

A ferramenta matemática para possibilitar a análise de defeitos permissíveis é a mecânica da fratura. Ela fornece os conceitos e equações utilizadas para determinar como as trincas crescem e quanto podem afetar a resistência de estruturas.

2.5.2. Mecânica da Fratura Linear Elástica

A Mecânica da Fratura Linear Elástica é a metodologia a ser empregada em situações onde há possibilidade de ocorrer fratura sem ser precedida de extensa deformação plástica. Esta restrição à deformação plástica pode ser decorrência das próprias propriedades do material, aços de altíssima resistência mecânica, por exemplo, ou de fatores geométricos como as dimensões da estrutura, mesmo para aços de média resistência mecânica o estado de deformação plana pode ser alcançado, se houver espessura suficiente ou se a temperatura for suficientemente baixa.

A MFLE pode ser empregada com sucesso à medida que a zona plástica for pequena em relação ao tamanho da trinca e das dimensões da estrutura que a contém.

O sucesso MFLE em estabelecer um tamanho de trinca crítico, desenvolvida teoricamente e comprovada na prática, fica restrita para casos em que não há deformação plástica apreciável acompanhando a fratura.

Dividindo-se os modos de carregamento possíveis em uma trinca chega-se a três formas, conforme apresentado na figura 2.26.

-carregamento I (abertura da ponta da trinca)

-carregamento II (cisalhamento puro - deslocamento das superfícies da trinca paralelamente a si mesmas e perpendiculares à frente de propagação).

-carregamento III (rasgamento - deslocamento das superfícies da trinca paralelamente a si mesmas).

O campo de tensões na vizinhança da ponta de uma trinca pode ser caracterizado em termos do fator intensidade de tensões (K_{Ic}) (figura 2.27) que, em coordenadas polares, é dado por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{(2.\pi.r)^{0,5}}.f_{ij}(\phi) \tag{2.183}$$

onde:

- K_I é o fator de intensidade de tensões para o modo de carregamento I (carregamento em tração, deslocamento das superfícies da trinca perpendicularmente a si mesmas),
- r é a distância da ponta da trinca,
- ϕ é o ângulo medido a partir do plano da trinca,
- f_{ij} é uma função adimensional de, cujo módulo varia entre 0 e 1.

Expressões similares são encontradas para trincas submetidas aos modos de carregamento II e III :

É importante ressaltar que, dado um determinado modo de carregamento, a distribuição de tensões em torno de qualquer trinca em uma estrutura com comportamento no regime linear-elástico é semelhante, sendo completamente descrita pelo parâmetro K. Isto é, a diferença da magnitude de tensões alcançada entre componentes trincados depende apenas do parâmetro fator de

intensidade de tensões K que é governado pela configuração geométrica do componente trincado e pelo nível e modo do carregamento imposto.

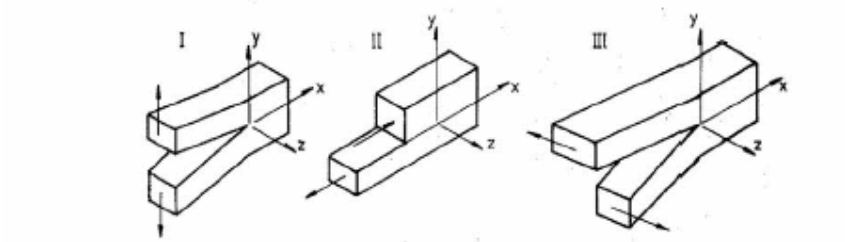


Figura 2.24 – Modos de carregamento básicos de uma trinca (Strohaecker)

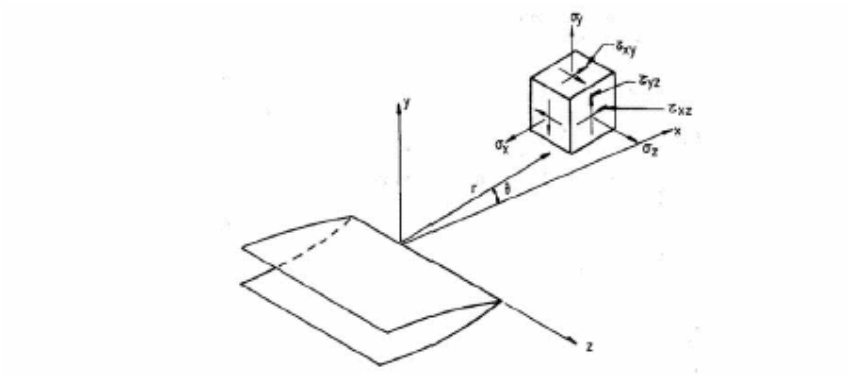


Figura 2.25 – Modos de carregamento básicos de uma trinca (Strohaecker)

Além disso, uma vez atendidas as condições preconizadas pela Norma ASTM E 399-91, tem-se um valor critico para o fator de intensidade de tensões (K_{Ic}) que é uma constante, uma propriedade intrínseca do material da peça trincada, para uma dada situação de temperatura, taxa de carregamento e condição microestrutural.

Por ser uma propriedade intrínseca do material, o valor de K_{Ic} pode ser utilizado na análise de qualquer geometria possibilitando o cálculo do tamanho crítico de trincas no projeto de estruturas. Para um grande número de geometrias e modos de carregamento, são encontradas em manuais. Por exemplo, para o caso de uma trinca de comprimento 2a no centro de uma placa com dimensões tendendo ao infinito submetida a um carregamento trativo σ, tem-se que:

$$KI = \sigma.(\pi.a)^{0,5} \qquad (2.184)$$

Observa-se que a equação 2.183 prevê que a medida que r tende a zero as tensões tendem para o infinito. Evidentemente, em materiais reais, estas tensões serão limitadas pelo escoamento localizado que ocorre em uma região à frente da trinca, denominada de zona plástica. O tamanho da zona plástica depende do modo de carregamento e da geometria do corpo, mas uma primeira estimativa pode ser dada pela equação 2.185:

$$r_\gamma = \frac{1}{2.\pi}.\frac{K_I^2}{\sigma_e^2} \tag{2.185}$$

onde:

σ_e é a tensão de escoamento

r_γ é o raio da zona plástica

Assim, embora a distribuição de tensões elásticas caracterizada pelo parâmetro K_I seja válida apenas nas proximidades da extremidade da trinca isto é, quando r → 0, ela não é uma solução correta exatamente na extremidade do defeito na região caracterizada pela distância r_γ da equação 2.185.

No entanto, uma vez que o tamanho da zona plástica seja pequeno comparado ao campo governado pelo fator de intensidade de tensões K_I, a zona plástica poderá ser considerada meramente como uma pequena perturbação no campo elástico controlado por K_I.

Experimentalmente, verificou-se que esta condição de "pequena" zona plástica esta assegurada quando o seu tamanho for, pelo menos, 15 vezes menor que as dimensões significativas do componente (espessura, seção remanescente e tamanho da trinca).

De fato, a Norma ASTM E 399-91 para determinação do valor de K_{IC} determina que:

$$a, B, b > 2{,}5.\left(\frac{K_{IC}^2}{\sigma_e^2}\right) \tag{2.186}$$

onde:

B = espessura do corpo de prova

b = ligamento

a = tamanho da trinca

Esta exigência requerida para uso da MFLE é atendida para materiais de altíssima resistência mecânica. Como exemplo, um aço do tipo ABNT 4340 necessitaria uma espessura de 3mm ou uma apresenta de carbeto de tungstênio exigiria uma espessura de apenas 0,3mm. Para um aço de média resistência mecânica e alta tenacidade à fratura, como o aço A533B usado em reatores nucleares, esta espessura seria de 600mm. Por isto, torna-se óbvia a necessidade do desenvolvimento de técnicas que caracterizem o comportamento à fratura de aços de altíssima tenacidade à fratura.

2.5.3. Soluções de Fator de Intensidade de Tensão para Geometrias e Carregamentos Simples.

Para pequenas trincas em sólidos infinitos ou semi infinitos, uma análise dimensional pode guiar a seleção da forma da solução do fator de intensidade. Por exemplo, K_I tem uma dimensão de:

$$[K_I] = \frac{[F]}{[L]^2}[L]^{1/2} \tag{2.187}$$

Onde:

[K_I] = dimensão do fator de intensidade K_I (MPa.m$^{1/2}$)

[F] = dimensão força

[L] = dimensão comprimento.

Pode-se considerar três geometrias e condições de carregamento como apresentado nas figuras 2.26, 2.27 e 2.28.

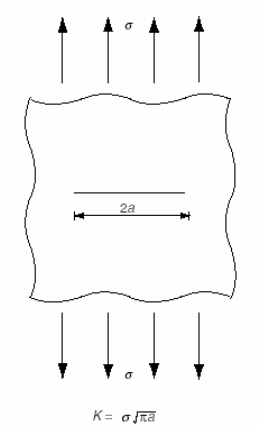


Figura 2.26 – Trinca central em um sólido bi-dimensional infinito sob uma tensão remota uniforme σ (Lee et al, 2005).

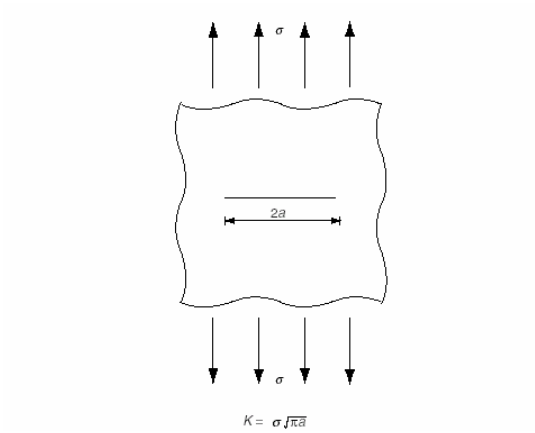


Figura 2.27 – Trinca na borda em um sólido bi-dimensional semi-infinito sob uma tensão remota uniforme σ (Lee et al, 2005).

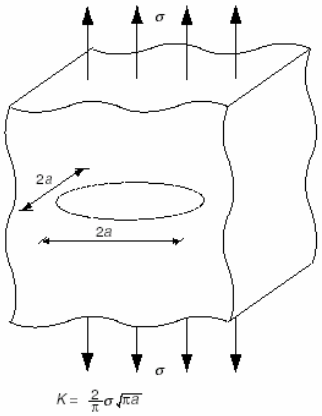


Figura 2.28 – Trinca em forma de moeda um sólido tridimensional infinito sob uma tensão remota uniforme σ (Lee et al, 2005).

2.5.3.1. Trinca Central em um Sólido Bi-Dimensional Infinito

A figura 2.26 apresenta uma trinca central com comprimento de 2*a* em um sólido bi-dimensional infinito sujeito a tensões remota σ. A solução para o fator de intensidade KI para este caso é:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi.a} \tag{2.188}$$

2.5.3.2. Trinca na Borda em um Sólido Bi-Dimensional Semi-Infinito

A figura 2.27 apresenta uma trinca na borda com comprimento de *a* em um sólido bi-dimensional semi - infinito sujeito a tensão remota σ. A solução para o fator de intensidade KI para este caso é:

$$K_I = 1{,}12\sigma\sqrt{\pi.a} \tag{2.189}$$

2.5.3.3. Trinca em Forma de Moeda Borda em um Sólido Tri-Dimensional Infinito

A figura 2.28 apresenta uma trinca na forma de moeda com diâmetro de 2*a* em um sólido tri-dimensional infinito sujeito a tensões remota σ. A solução para o fator de intensidade K_I para este caso é:

$$K_I = \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi.a} \tag{2.190}$$

As soluções para o fator de intensidade de tensão para estes três casos tem a mesma forma exceto pela constante de proporcionalidade para diferentes geometrias e carregamentos.

Em geral, para uma trinca central ou na borda de corpo finito, o fator de intensidade de tensão pode ser escrito como:

$$K_I = F(\alpha).S_g\sqrt{\pi.a} \tag{2.191}$$

Onde:

a = comprimento da trinca

S_g = tensão nominal

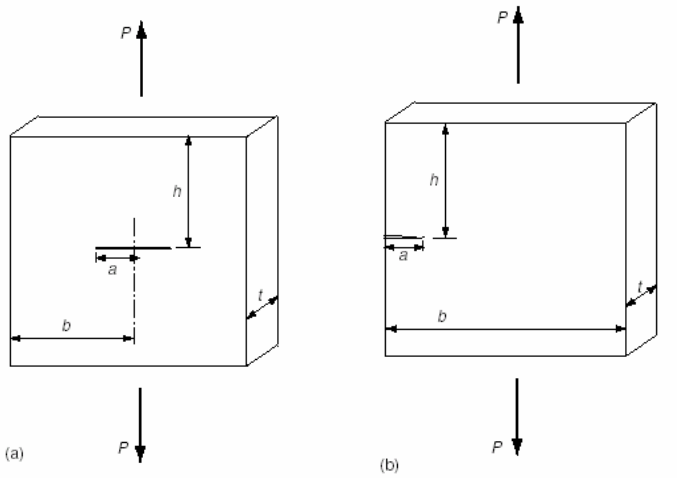
$F(\alpha)$ = função geométrica.

2.5.3.4. Placa com uma Trinca Central sob Tensão

A figura 2.29(a) apresenta uma placa com uma trinca central , sujeita a um carregamento P. Para este caso Sg a tensão nominal; e $F(\alpha)$ a função geométrica.:

$$S_g = \frac{P}{2bt} \tag{2.192}$$

$$F(\alpha) = \frac{1 - 0{,}5\alpha + 0{,}326\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha}} \quad \text{para h/b > 1,5} \tag{2.193}$$



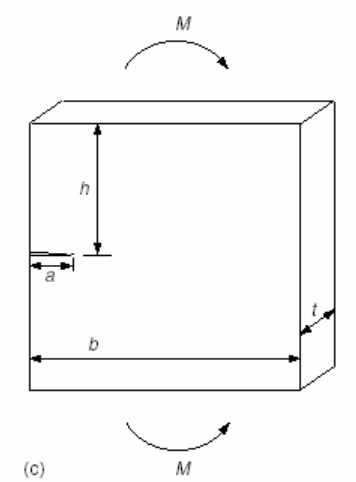


Figura 2.29 - (a) – Trinca central sujeita a uma carga remota *P*; (b) Trinca na borda sujeita a uma carga *P*; (c) Carga na borda sujeita a um momento *M* (Lee et al, 2005).

2.5.3.5. Placa com uma Trinca na Borda sob Tensão

A figura 2.29(b) apresenta uma placa com uma trinca na borda, sujeita a um carregamento P. Para este caso S_g a tensão nominal; e $F(\alpha)$ a função geométrica.:

$$S_g = \frac{P}{bt} \tag{2.194}$$

$$F(\alpha) = 0{,}265(1-\alpha)^4 + \frac{0{,}857 + 0{,}265\alpha}{(1-\alpha)^{3/2}} \quad \text{para h/b > 1,0} \tag{2.195}$$

2.5.3.6. Placa com uma Trinca na Borda sob Flexão

A figura 2.29(c) apresenta uma placa com uma trinca na borda , sujeita a um momento M. Para este caso S_g a tensão nominal; e $F(\alpha)$ a função geométrica.:

$$S_g = \frac{6M}{b^2 t} \tag{2.196}$$

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2.\tan \pi\alpha/2}{\pi\alpha}} \left[\frac{0{,}923 + 0{,}199\left(1 - \sin \pi\alpha/2\right)^4}{\cos \pi\alpha/2} \right] \quad \text{para grandes h/b} \tag{2.197}$$

2.5.4. Propagação de Trinca por Fadiga Baseada na Mecânica da Fratura Linear Elástica

2.5.4.1. Vida de Serviço Estendida:

Diferentes métodos de inspeção como visual, raios X, ultra som, etc podem ser usados para detectar trincas em componentes. Uma vez que as trincas forem detectadas, o método da fratura mecânica pode ser usado para determinar a vida remanescente de estruturas ou componentes.

A figura 2.30 apresenta o gráfico de comprimento de trinca a versus numero de ciclos, N. Na figura 2.30, a_i representa o comprimento inicial de uma trinca em uma estrutura, a_d o comprimento de trinca detectável, e a_c o comprimento de trinca crítico quando o fator de intensidade de tensão da trinca alcança o valor crítico a estrutura ou o componente alcança a condição totalmente plástica.

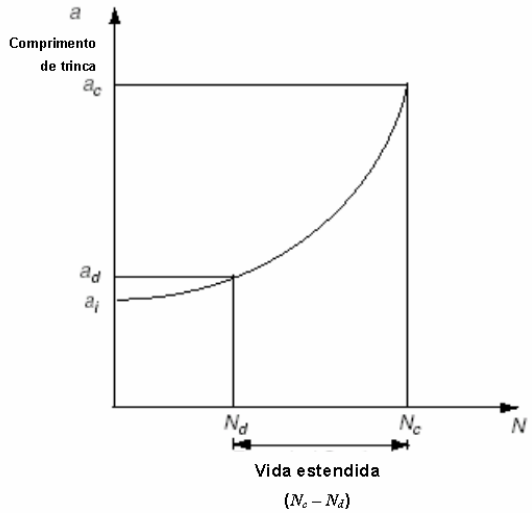


Figura 2.30– O conceito de vida estendida no gráfico de comprimento de trinca a como função do número de ciclos, N (Lee et al, 2005).

O número de ciclos quando a trinca é detectada é denominada de N_d. O numero de ciclos quando a trinca alcança um comprimento crítico a_c é denominado N_c. A vida remanescente N_{cd} é igual a $N_c - N_d$.

2.5.4.2. Comportamento do Crescimento da Trinca

A mecânica da fratura linear elástica é usada com sucesso para modelar o comportamento do crescimento de trincas por fadiga. Ao considerar uma estrutura trincada com uma trinca de comprimento a sob condições de tensões cíclicas, como apresentado na figura 2.31(a) . A tensão aplicada S como uma função do tempo t é apresentado na figura 2.31(b).

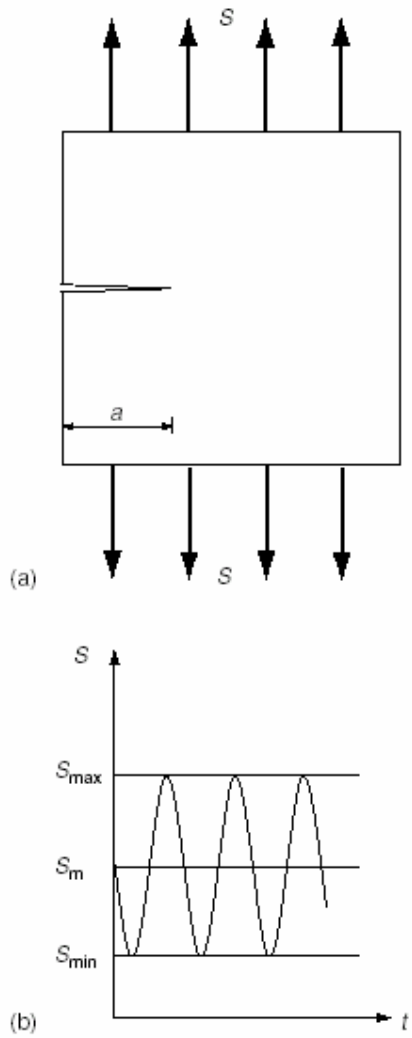


Figura 2.31 – (a) Uma estrutura trincada com comprimento *a* sob condições de tensão cíclica. (b) A tensão aplicadas *S* varia em função *t* (Lee et al, 2005).

O fator de intensidade de tensão máximo e mínimo $K_{\max}$ e $K_{\min}$ são linearmente relacionados com a máxima e mínima tensões aplicadas $S_{\max}$ e $S_{\min}$, respectivamente, de acordo com a mecânica da fratura linear elástica.

$$K_{\max} = FS_{\max}\sqrt{\pi a} \tag{2.198}$$

$$K_{\min} = FS_{\min}\sqrt{\pi a} \tag{2.199}$$

Onde F a função dependente da geometria e condições de carregamento.

A faixa de fator de intensidade de tensão é definido como:

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} \tag{2.200}$$

A razão de carregamento R é definido por:

$$R = \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \tag{2.201}$$

ou ainda,

$$R = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} \tag{2.202}$$

Baseado em resultados experimentais, a figura 2.32 apresenta esquematicamente a taxa de crescimento de uma trinca da/dN como uma função da faixa de fator de intensidade de tensão em uma escala log-log. Na Região I, quando ΔK decresce, a taxa de crescimento da trinca cai significantemente. O ponto ΔK_{th} é o limite da faixa de fator de intensidade para o qual valores abaixo deste ponto implicam que não deverá ocorrer trinca por fadiga. Na Região III ,quando ΔK_{th} é grande, a taxa de crescimento da trinca acelera significantemente. Isto pode acontecer quando $K_{\max}$ aproxima de K_C , o qual representa o K crítico para iniciação de uma trinca para uma dada espessura.

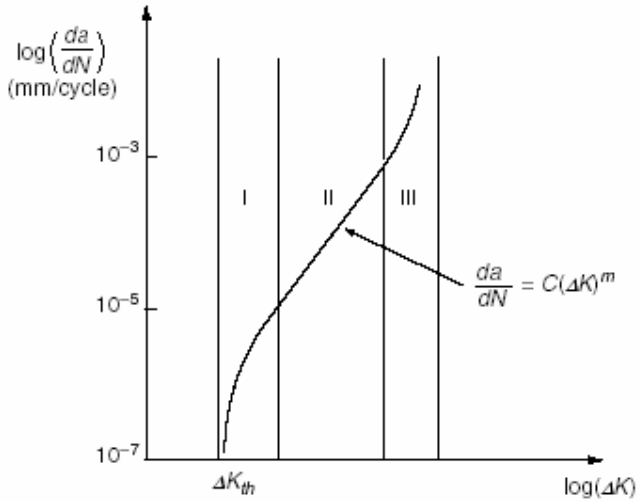


Figura 2.32 – Taxa de crescimento da trinca da/dN como função da faixa do fator de tensão ΔK em uma escala log-log (Lee et al, 2005)..

Na Região II, a taxa de crescimento da trinca da/dN pode ser aproximada de forma linear ao relacionar a faixa do fator de intensidade ΔK em um gráfico log-log. A lei de Paris para crescimento de trinca (Paris et al.,1961; Paris & Erdogan,1963) é

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \tag{2.203}$$

Onde C e m são constantes do material. Para obter os valores de C e m, o método dos mínimos quadrados pode ser usado para ajustar os dados de fadiga em um gráfico log-log de da/dN como função de ΔK como,

$$Y = A + BX \tag{2.204}$$

onde,

$$Y = \log\left(\frac{da}{dN}\right), X = \log(\Delta K), A = \log C, B = m \tag{2.205}$$

O valor típico de m é 3 para aços ferríticos-perlíticos, 2,25 para aços martensíticos e 3,25 para aços austeníticos.

2.5.4.3. Equação de Walker

O efeito da razão de carregamento pode ser descontado por um fator de intensidade de tensão equivalente zero para máximo $\overline{\Delta K}$ introduzido por Walker (1970):

$$\Delta\overline{K} = K_{\max}(1-R)^{\gamma} \tag{2.206}$$

Onde γ é uma constante que varia de 0,49 a 0,9. A equação de Walker pode ser escrita como,

$$\Delta\overline{K} = \Delta K(1-R)^{\gamma-1} \tag{2.207}$$

ou

$$\Delta\overline{K} = \frac{\Delta K}{(1-R)^{1-\gamma}} \tag{2.208}$$

A lei de Paris pode ser escrita como,

$$\frac{da}{dN} = C_1\left(\Delta\overline{K}\right)^{m_1} \tag{2.209}$$

Onde C_1 e m_1 são constantes do material. Para R = 0, equação 2.208 transforma,

$$\Delta\overline{K} = \Delta K \tag{2.210}$$

$$\frac{da}{dN} = C_1\left(\Delta\overline{K}\right)^{m_1} \tag{2.211}$$

Para R > 0, ao substituir a equação 2.208 em 2.209 temos,

$$\frac{da}{dN} = C_1 \left(\frac{\Delta \overline{K}}{(1-R)^{1-\gamma}} \right)^{m_1} \tag{2.212}$$

Ao rearranjar a equação 2.212 temos

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_1}{(1-R)^{m_1(1-\gamma)}} (\Delta K)^{m_1} \tag{2.213}$$

Ao comparar equação 2.213 com 2.203 temos,

$$C = \frac{C_1}{(1-R)^{m_1(1-\gamma)}} \tag{2.214}$$

e

$$m = m_1 \tag{2.215}$$

Para R < 0, γ= 0, teremos

$$\Delta \overline{K} = \frac{\Delta K}{(1-R)^{1-\gamma}} = \frac{\Delta K}{(1-R)} = K_{\max} \tag{2.216}$$

Entretanto

$$\frac{da}{dN} = C_1 K_{\max}^{m_1} \tag{2.217}$$

Se γ= 1,

$$\Delta \overline{K} = \frac{\Delta K}{(1-R)^{1-\gamma}} = \Delta K \tag{2.218}$$

Então não existe efeito de R na taxa de crescimento da trinca.

2.5.4.4. Equação de Forman

O crescimento da trinca depende de Kc, que é o fator de intensidade de tensão crítico para um material e para dada espessura. A taxa de crescimento da trinca é escrita como (Forman et al., 1967)

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_2(\Delta K)^{m_2}}{(1-R)K_c - \Delta K} \tag{2.219}$$

ou

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_2(\Delta K)^{m_2}}{(1-R)(K_c - K_{\max})} \tag{2.220}$$

Valores típicos das constantes para as equações de Walker e Forman podem ser observados na tabela 2.3 (Dowling, 1999).

Tabela 2.3 – Valores típicos de constantes por materiais nas equações de Walker e Forman (Dowling, 1999).

	Walker Equation				Forman Equation		
Material	C_1^a	m_1	$\gamma(R \geq 0)$	$\gamma(R<0)$	C_2^a	m_2	K_c^b
4340 Steel	5.11×10^{-10}	3.24	0.42	0	n/a	n/a	n/a
2024-T3 Al alloy	1.42×10^{-8}	3.59	0.68	n/a	2.31×10^{-6}	3.38	110
7075-T6 Al alloy	2.71×10^{-8}	3.70	0.64	0	5.29×10^{-6}	3.21	78.7

[a] Os valores de C_1 e C_2 são obtidos com as unidade de MPa.m$^{1/2}$ para ΔK e mm/ciclo para da/dN.

[b] A espessura do material é 2,3mm

2.5.4.5. Estimativa de Vida

A estimativa de vida sob amplitude de carregamentos constantes geralmente precisam de integração numérica. Em geral, ΔK aumenta a medida que a aumenta com ΔS sendo mantido constante. A taxa de crescimento da trinca da/dN pode ser expressa como,

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R) \tag{2.221}$$

A integração da equação 2.221 resultará,

$$\int_{N_i}^{N_f} dN = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{f(\Delta K, R)} \tag{2.222}$$

Onde a_i representa o comprimento inicial da trinca, a_f o comprimento final da trinca, N_i o numero de ciclos para o comprimento inicial da trinca, e N_f o numero de ciclos para o comprimento final da trinca. O lado esquerdo da equação pode ser integrado como,

$$N_{if} = N_f - N_i = \int_{N_i}^{N_f} dN \tag{2.223}$$

Onde N_{if} representa o numero de ciclos para a trinca propagar de um comprimento inicial a_i para um comprimento final de a_f.

A lei de Paris fornece uma forma específica para a taxa de crescimento da trinca da/dN como,

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \tag{2.224}$$

Ao considerar a solução para ΔK na forma,

$$\Delta K = F\Delta S\sqrt{\pi a} \tag{2.225}$$

Onde F é uma função da geometria e do carregamento.

A taxa de crescimento da trinca da/dN agora pode ser escrita como,

$$\frac{da}{dN} = C\left(F\Delta S\sqrt{\pi}\right)^m a^{\frac{m}{2}} \tag{2.226}$$

Então, o numero de ciclos N_{if} para a propagação de um comprimento inicial de trinca a_i para um comprimento final de trinca a_f pode ser integrado como

$$N_{if} = \int_{N_i}^{N_f} dN = \int_{a}^{a_f}\left(\frac{dN}{da}\right)da = \int_{a_i}^{a_f}\frac{1}{C\left(F\Delta S\sqrt{\pi}\right)^m}a^{-m/2}da \tag{2.227}$$

Ao assumir que F é uma constante, a equação 2.227 pode ser integrada explicitamente como

$$N_{if} = \frac{\left(1-\left(\frac{a_i}{a_f}\right)^{\frac{m}{2}-1}\right)}{C\left(F\Delta S\sqrt{\pi}\right)^m\left(\frac{m}{2}-1\right)}\frac{1}{a_i^{\frac{m}{2}-1}} \tag{2.228}$$

A equação 2.228 indica que N_{if} é muito sensível a seleção de a_i.

3. METODOLOGIA

Para a metodologia de pesquisa, o fluxograma da figura 3.1 ilustra as etapas realizadas.

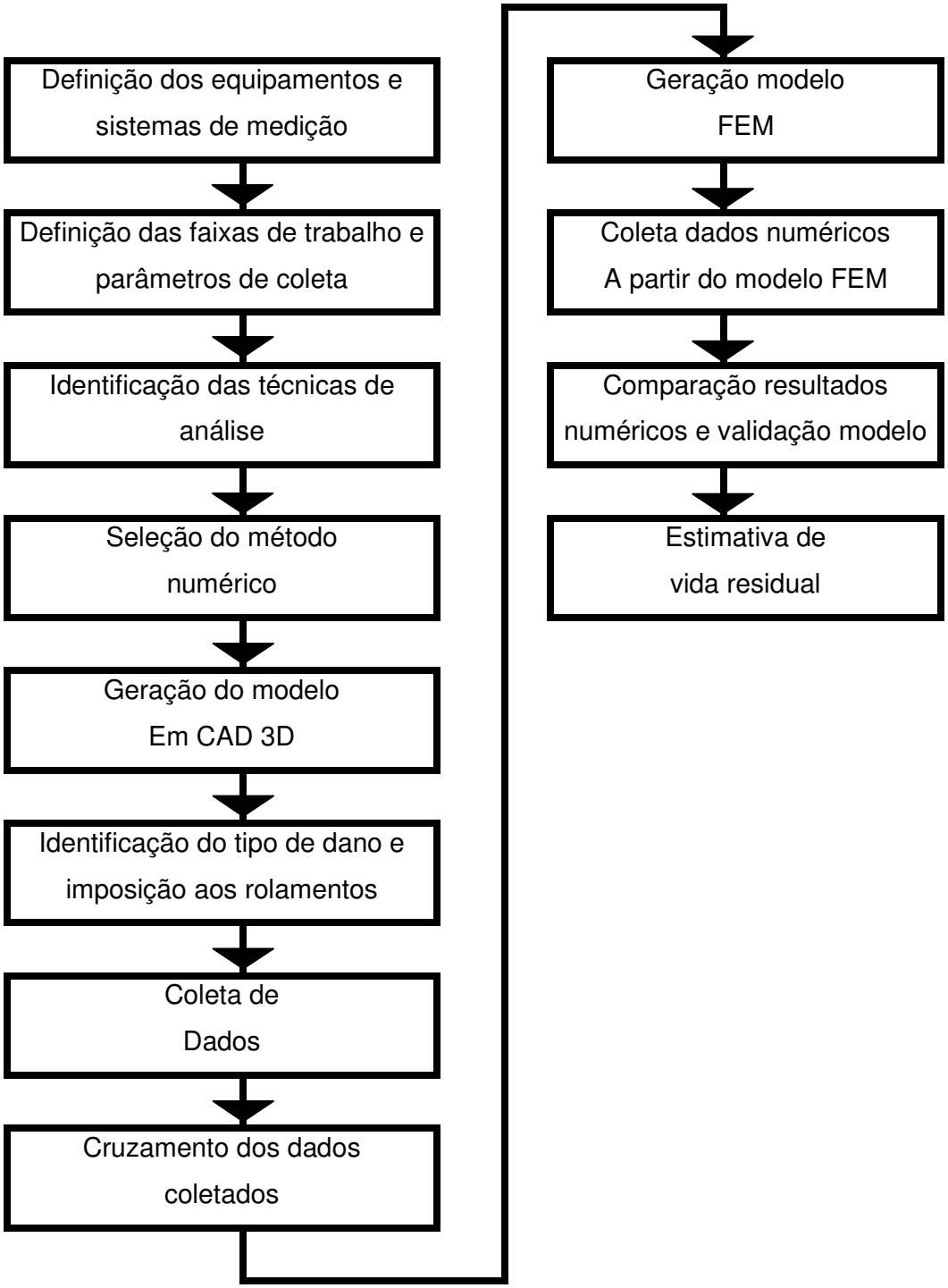


Figura 3.1 – Fluxograma metodologia

3.1. Definição dos equipamentos e sistemas de medição

O equipamento alvo das medições foi um protótipo de um exaustor apresentado na figura 3.2. Este protótipo tem uma configuração bem corriqueira em exaustores de plantas industriais. O equipamento é composto por um motor de 3kW, com rotação variável até 3600rpm por meio de um inversor de freqüência. O motor transmite o movimento para o exaustor por meio de um acoplamento elástico. O rotor do exaustor se encontra apoiado em dois mancais de rolamento autocompensador de esferas tipo 1207K.

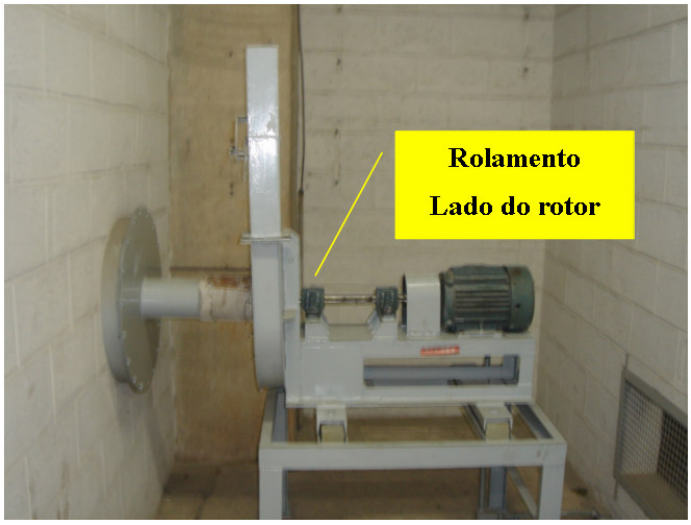


Figura 3.2 – Prótotipo para as medições

O rotor do exaustor se encontra apoiado em dois mancais de rolamento autocompensador de esferas tipo 1207K, foi analisado o rolamento do lado do rotor do exaustor. A figura 3.3 apresenta detalhes deste rolamento.

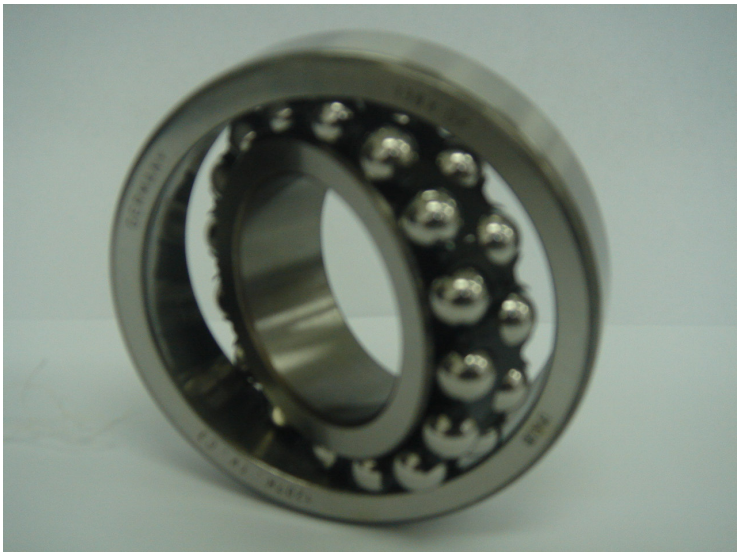


Figura 3.3 – Rolamento tipo 1207K

O equipamento de medição utilizado foi um coletor e analisador FFT de vibrações da B&K modelo 2526 e software de análise de vibrações da B&K tipo Sentinel 7107M.

3.2. Definição das faixas de trabalho e parâmetros de coleta

Foram realizadas medições de vibrações no rolamento do lado do rotor com o protótipo ajustado para as rotações de 1000, 2000, 3000 e 3500rpm. As medições foram realizadas nas direções horizontal, vertical e axial . Estas medições de vibração foram realizadas no dominio do tempo e da frequencia. As técnicas utilizadas foram envelope, aceleração em alta frequencia , Cepstrum, HFD e fator K.

3.3. Identificação das técnicas de analise

Inicialmente as medições foram realizadas para as rotações de 1000, 2000, 3000 e 3500rpm. Durante o decorrer dos experimentos constatou se que em rotações mais altas os resultados das medições após imposição dos danos

era mais sensível. Desta forma as medições foram coletadas na rotação de 3000rpm.

3.3.1. Espectro de potência

As medições foram realizadas em mm/s^2. Para a rotação de 1000rpm a medição foi na faixa de 0 a 500Hz, para 2000rpm e 3000rpm de 0 a 500Hz , 0 a 1000Hz e 0 a 5000Hz, enquanto que para 3500rpm além das medições de 0 a 500Hz, 0 a 1000Hz e 0 a 5000Hz foi realizada também uma medição de 0 a 2000Hz.

3.3.2. Envelope

As medições foram realizadas em mm/s^2. A faixa que foi "envelopada" foi a de 4 kHz a 8 kHz . Para a rotação de 1000rpm o espectro de envelope foi na faixa de 0 a 500Hz, para 2000rpm e 3000rpm de 0 a 500Hz e 0 a 1000Hz, enquanto que para 3500rpm além dos espectros de envelope de 0 a 500Hz, 0 a 1000Hz foi realizado um de 0 a 2000Hz.

3.3.3. Cepstrum

O Cepstrum foi realizado da mesma forma que no espectro de potencia.

3.3.4. HFD

Foi medido o valor global emmm/s^2 na faixa de 1 kHz a 10 kHz nas rotações mencionadas nos itens anteriores.

3.3.5. Fator K

Foi medido o fator K na faixa de 1 kHz a 10 kHz nas rotações mencionadas nos itens 3.3 e 3.3.1.

3.4. *Seleção do método numérico*

O método numérico escolhido para o estudo do comportamento dinâmico do modelo, foi o metodo de elementos finitos FEM (Finite Element Method).

Foi utilizado um sistema especialista para executar a modelagem por elementos finitos. O código utilizado foi o PATRAN para pré e pós processamento e o NASTRAN como “solver” .

3.5. *Geração do modelo em CAD 3D*

Foi gerado um modelo em CAD 3D do elemento em estudo, no caso o rolamento auto compensador de esferas tipo 1207K.

Este modelo em CAD 3D foi gerado primeiramente de um rolamento original sem a presença de nenhum tipo de dano em seus componentes. Foi gerado também os modelos com trinca na parte interna de sua pista externa com dimensões de trinca de 0,719mm, 1,224mm e 1,521mm de diâmetro. Identificado como A1, A2, A3 e A4 respectivamente. Foram criadas três trincas através do uso de três diâmetros diferentes de brocas e feita a medição das trincas.

3.6. Identificação do tipo de dano e imposição aos rolamentos

As medições de vibração foram realizadas nas condições do rolamento sem nenhum dano, e com danos 0,719mm, 1,224mm e 1,521mm de diâmetro. Todos estes danos foram induzidos na sua pista externa por meio de furadeira manual e brocas de vídia. A medições dos danos foram realizadas por meio de um molde em silicone, conforme apresenta a figura 3.5 e com a utilização de microscópio ótico.

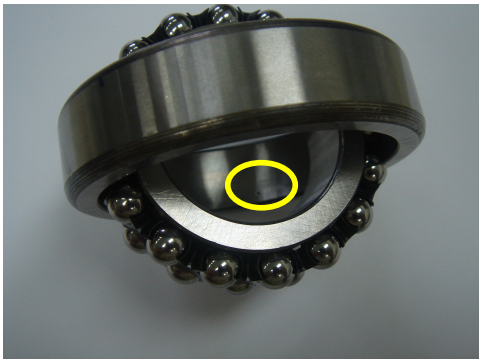


Figura 3.4 – Rolamento com trinca induzida na parte interna da pista externa.

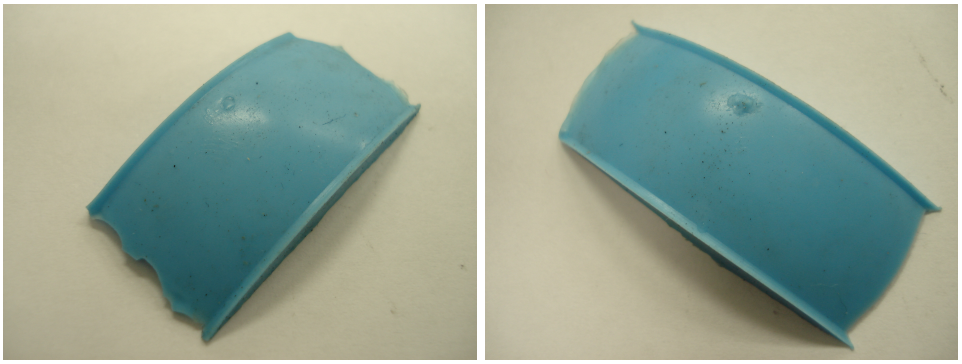


Figura 3.5 – Modelamento em silicone para dimensionamento da trinca

3.7. Coleta de dados

Os dados vibracionais foram coletados de acordo com os parâmetros estabelecidos nos itens 3.2 e 3.3, nas condições sem dano e com os danos inseridos no rolamento. As medições de vibração foram tomadas nas direções vertical, horizontal e axial. As figuras 3.6, 3.7 e 3.8 ilustram estas medições.

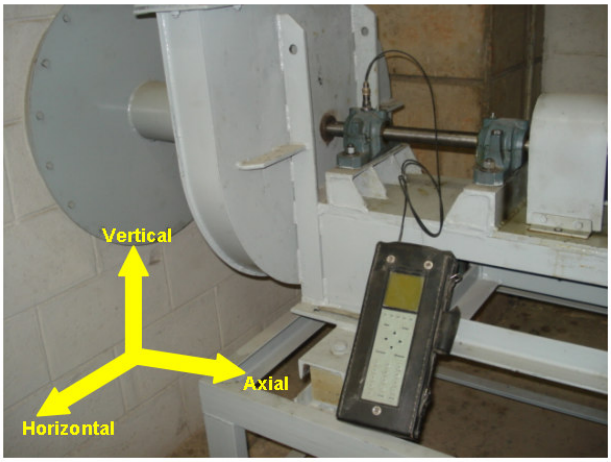


Figura 3.6 – Coleta de vibração no sentido vertical

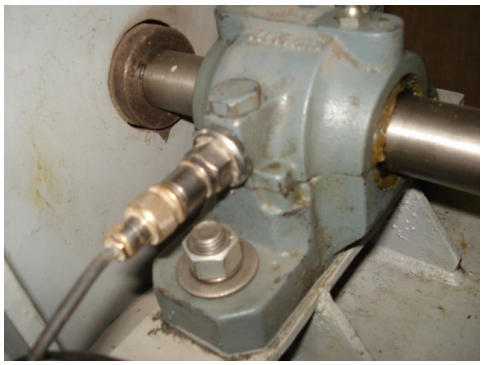


Figura 3.7 – Acelerômetro na posição horizontal

Figura 3.8 – Coleta de vibração na posição axial

3.8. Cruzamento dos dados coletados antes e após a imposição do dano

Os dados foram coletados antes e após o dano ser inserido. Nesta etapa foi verificada a resposta dinâmica com as técnicas citadas nos itens 3.2 e 3.3 para comparação nas condições sem e com dano.

3.9. Geração do modelo FEM sem e com a imposição do dano

Foi gerado um modelo em FEM por meio do uso do pacote MSC (PATRAN para pré e pós processamento e o NASTRAN como "solver") na situação sem e com as trincas conforme proposto no item 3.5.

Os resultados numéricos da resposta dinâmica do modelo sem dano e com dano foram ajustados a partir dos resultados experimentais da resposta dinâmica do sistema. E a partir desta resposta dinâmica ajustada, foi determinado o nível de tensão que o rolamento se encontra para as diversas dimensões do dano.

3.10. Coleta dos dados numéricos, obtidos a partir do modelo FEM

Com os resultados obtidos da resposta dinâmica do modelo numérico devidamente ajustada ao modelo experimental, Foi determinado as tensões cíclicas atuantes no rolamento. Com estes dados foi possível estabelecer o limite a fadiga e daí o tempo de vida remanescente do rolamento baseado na propagação prevista para o dano.

3.11. Comparação resultados numéricos com experimentais para validação da metodologia

Nesta etapa foram comparados os resultados experimentais medidos em aceleração em uma faixa de freqüência de 0 a 5000Hz com os valores numéricos simulados nesta mesma condição. Em um primeiro momento foi

comparado se as freqüências da resposta dinâmica convergiam e posteriormente as amplitudes das respostas.

3.12. Estimativa de vida residual

Com a convergência entre o modelo numérico com os resultados experimentais observados na etapa 3.11 foram coletados então os resultados das tensões cíclicas atuantes. Com base nestas tensões e utilizando a equação 2.228 foi calculada a estimativa de vida residual para o rolamento em cada condição de dano.

4. RESULTADOS

4.1. Considerações Gerais

Para o rolamento em estudo, o aço considerado foi o SAE 52100 que apresenta as características apresentadas na tabela 4.1 foram obtidas de 'Key to Steel' versão 2001.5.

Tabela 4.1 – Características do rolamento em estudo (Software Key to Steel versão 2001.5)

σ 'y	n '	K'f	σ 'f	b	ε 'f	c	σ e	Dureza	K_{Ic}
1323 MPa	0,15	3402 MPa	2647 MPa	-0,09	0,16	-0,58	2033 MPa	65 HRC	70

Para o valor de K_{Ic} foi considerado um aço com a mesma dureza e mesmo limite de escoamento. Dowling (1999)

Segundo Dowling (1999), para metais em engenharia K_{Ic} varia de 20 a 200 $MPam^{1/2}$, para um aumento da resistência de um tipo de material é notado que o coeficiente de tenacidade a fratura K_{Ic} cai.

Para continuidade do desenvolvimento do trabalho foi considerado o aço como martensítico, aço usualmente aplicado em rolamentos, e segundo Eliahu Zahavi s C = 1,35 x 10^{-10} e m = 2,25 para da/dn (m/ciclo).

Utilizado a equação de Paris como base para o desenvolvimento matemático do prognóstico do crescimento da trinca.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \tag{4.1}$$

$$K_{\max} = FS_{\max}\sqrt{\pi a}\ , \tag{4.2}$$

$$K_{\min} = FS_{\min}\sqrt{\pi a}\ , \tag{4.3}$$

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min}, \tag{4.4}$$

$$\Delta K_{\max} = F\Delta S\sqrt{\pi a}\ , \tag{4.5}$$

Integrando (1)

$$dN = \frac{da}{C(\Delta K)^m}, \tag{4.6}$$

$$dN = \frac{da}{C\left(F\Delta S\sqrt{\pi a}\right)^m}, \tag{4.7}$$

$$\int dN = \int \frac{da}{C\left(F\Delta S\sqrt{\pi a}\right)^m}, \tag{4.8}$$

então,

$$N_{if} = \int_{ai}^{af} \frac{da}{C\left(F\Delta S\sqrt{\pi}\right)^m a^{m/2}}, \tag{4.9}$$

$$N_{if} = \frac{1}{C\left(F\Delta S\sqrt{\pi}\right)^m} \int_{ai}^{af} a^{-m/2} da \tag{4.10}$$

$$N_{if} = \frac{1}{C\left(F\Delta S\sqrt{\pi}\right)^m} \left[\frac{a^{\left(-m/2\right)+1}}{\left(\frac{-m}{2}+1\right)} \right]_{ai}^{af} \tag{4.11}$$

$$N_{if} = \frac{1}{C\left(F\Delta S\sqrt{\pi}\right)^m \left(1-\frac{m}{2}\right)} \left(a_f^{\left(1-m/2\right)} - a_i^{\left(1-m/2\right)}\right) \tag{4.12}$$

logo,

$$N_{if} = \frac{a_f^{\left(1-m/2\right)} - a_i^{\left(1-m/2\right)}}{C\left(F\Delta S\sqrt{\pi}\right)^m \left(1-\frac{m}{2}\right)} \tag{4.13}$$

4.2. Resultados Numéricos

A figura 4.1 apresenta os detalhes dos elementos que compõem o rolamento em estudo.

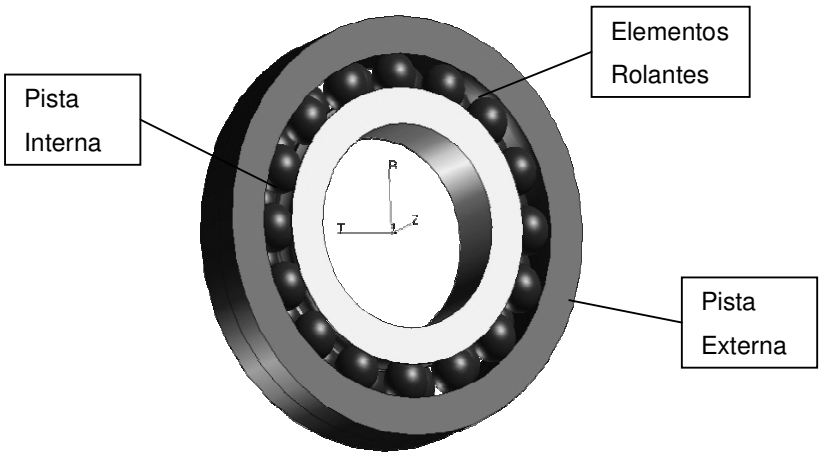


Figura 4.1 - Elementos do Rolamento

A figura 4.2 apresenta o modelo CAD gerado da pista externa do rolamento.

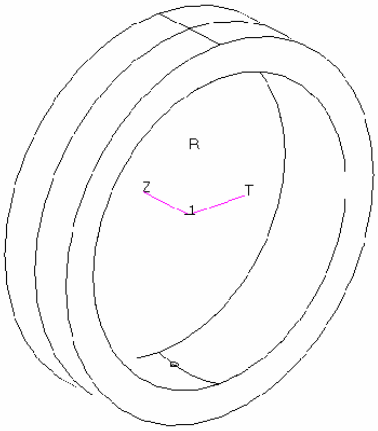


Figura 4.2 – Modelo em CAD

De posse do modelo CAD da pista interna do rolamento foi gerada a malha adotando o elemento tetraedrico. A figura 4.3 apresenta a malha gerada utilizando o software PATRAN-MSC.

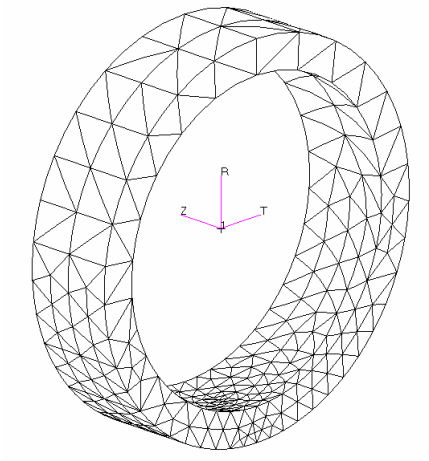


Figura 4.3 - Malha da pista interna em elemento tetraédrico

As condições de contorno impostas à pista externa, levaram em consideração o contato entre o mancal e o rolamento propriamente dito. É considerado que a pista externa do rolamento pode rotacionar em torno de z, restrito na direção radial e na direção z. Na figura 4.4 as setas perpendiculares a superfície simbolizam a superfície normal, enquanto que as setas na direção dos eixos correspondentes representam a restrição de deslocamento.

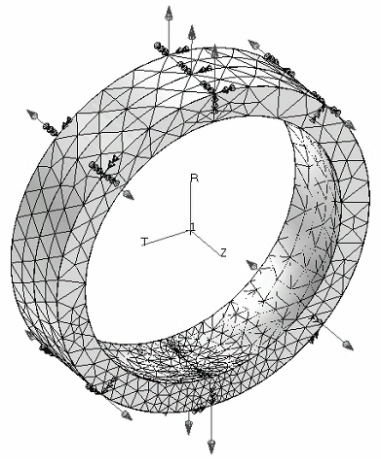


Figura 4.4 – Representação das superfícies e sentido de restrição

Foram obtidas as freqüências naturais e os respectivos modos de vibração. A Tabela 4.3 apresenta as freqüências naturais calculadas.

Tabela 4.2 – Freqüências naturais calculadas

Crack	Analyse type	Type of element	DOF	Number of Elements	Number of Nodes	Constraints	Force
No crack	Complex eigenvalue	Tetrahedron 10	65832	6574	10972	Coat and side 13546	none
	Frequency response		20142	1823	3357		force distrbuition
	Transient response		20142	1823	3357		force distrbuition
Crack = 0,719mm	Frequency response	Tetrahedron 10	30930	3043	5155	Coat and side 13546	force distrbuition
	Transient response						
Crack = 1,224mm	Frequency response	Tetrahedron 10	35004	3476	5834	Coat and side 13546	force distrbuition
	Transient response						
Crack = 1,521mm	Frequency response	Tetrahedron 10	34230	3378	5705	Coat and side 13546	force distrbuition
	Transient response						

Tabela 4.3 – Resumo modelo FEM

Mode	Hz	Mode	Hz	Mode	Hz	Mode	Hz
Mode 1	0,00	Mode 16	3558,30	Mode 31	5747,60	Mode 46	6504,40
Mode 2	832,12	Mode 17	4018,40	Mode 32	5774,70	Mode 47	6510,10
Mode 3	832,12	Mode 18	4019,50	Mode 33	5787,20	Mode 48	6698,30
Mode 4	1661,60	Mode 19	4092,70	Mode 34	5872,00	Mode 49	6704,10
Mode 5	1661,70	Mode 20	4093,50	Mode 35	5880,90	Mode 50	6760,50
Mode 6	2484,90	Mode 21	4519,40	Mode 36	6026,80		
Mode 7	2485,00	Mode 22	4520,80	Mode 37	6029,00		
Mode 8	2819,20	Mode 23	4858,10	Mode 38	6036,60		
Mode 9	2912,00	Mode 24	4860,70	Mode 39	6037,20		
Mode 10	2913,00	Mode 25	5032,70	Mode 40	6200,20		
Mode 11	3173,00	Mode 26	5035,40	Mode 41	6202,90		
Mode 12	3173,70	Mode 27	5542,00	Mode 42	6232,10		
Mode 13	3297,70	Mode 28	5543,10	Mode 43	6236,60		
Mode 14	3298,00	Mode 29	5574,10	Mode 44	6477,70		
Mode 15	3556,90	Mode 30	5575,20	Mode 45	6483,80		

As figura 4.5 a 4.11 ilustram respectivamente os modos de vibração 2, 4, 8, 11, 20, 22 e 24.

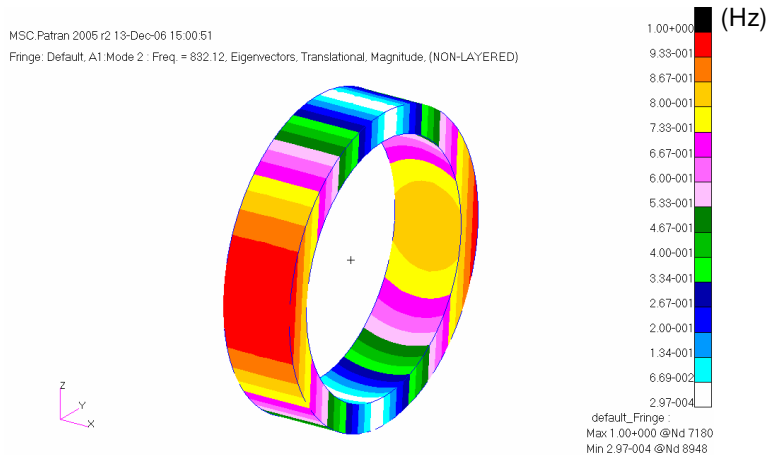


Figura 4.5 – Representação do 2° modo de vibração da pista externa

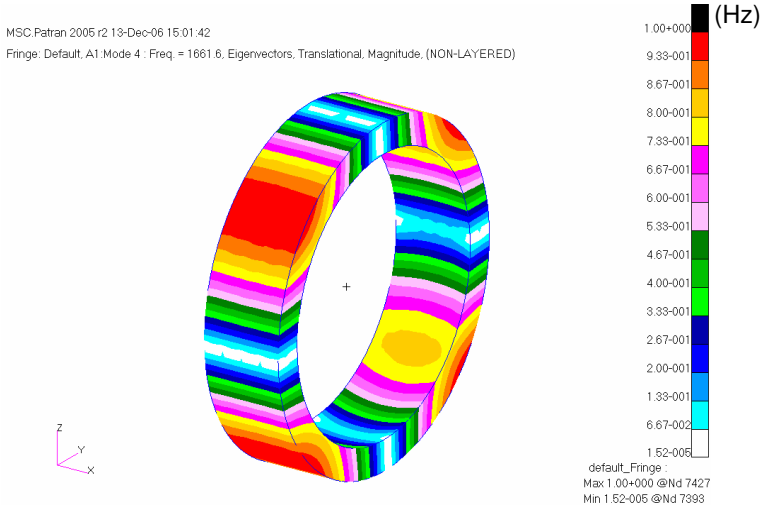


Figura 4.6 – Representação do 4° modo de vibração da pista externa

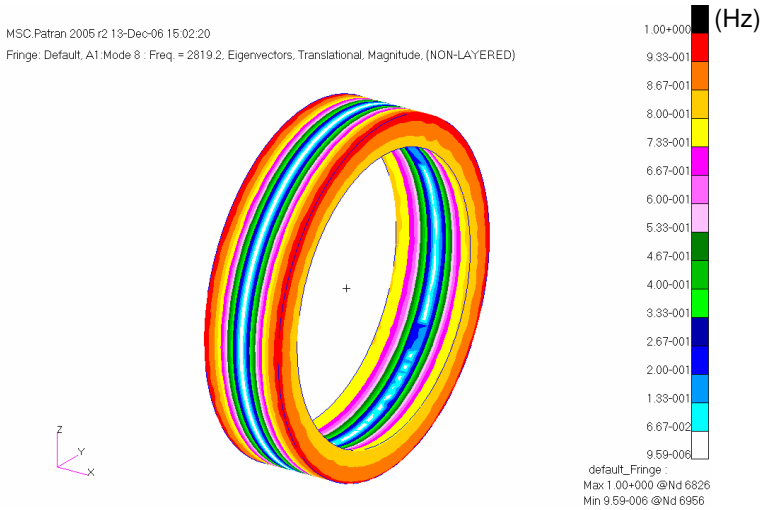


Figura 4.7 – Representação do 8° modo de vibração da pista externa

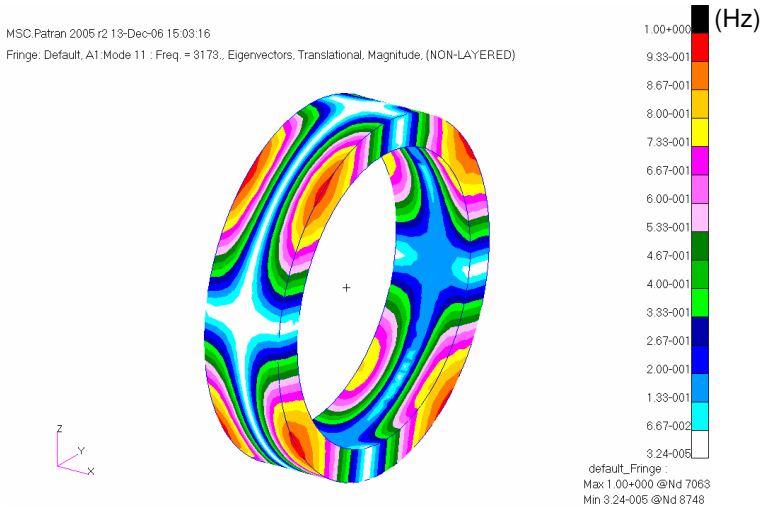


Figura 4.8 – Representação do 11° modo de vibração da pista externa

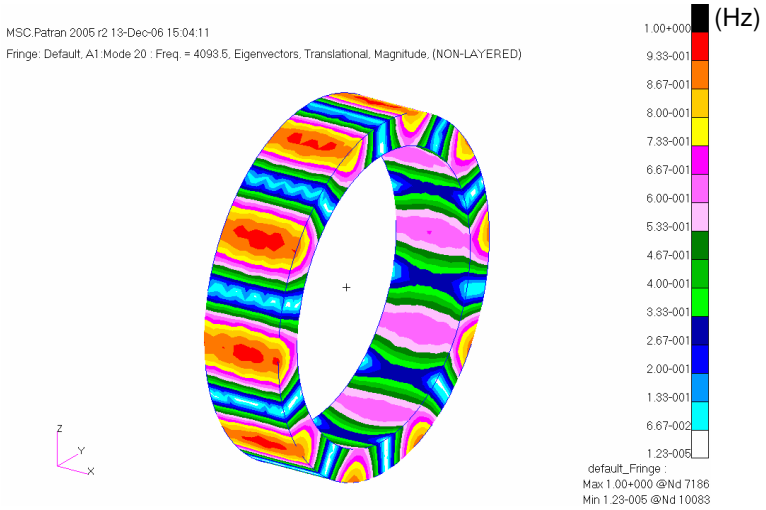


Figura 4.9 – Representação do 20° modo de vibração da pista externa

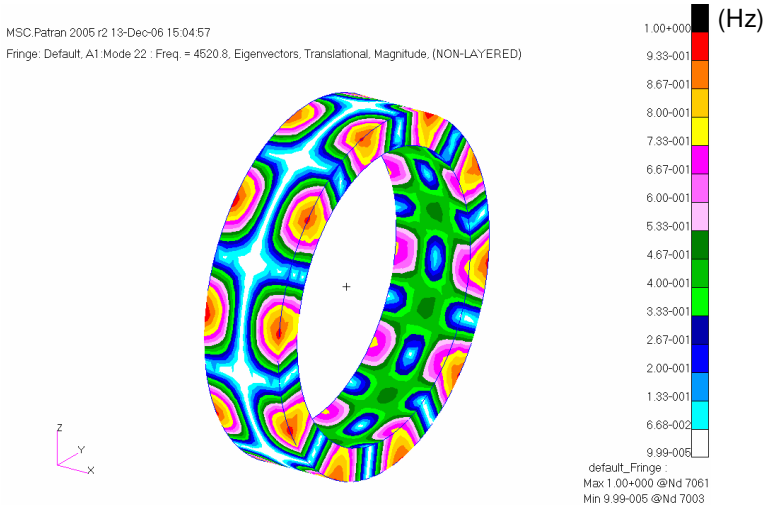


Figura 4.10 – Representação do 22° modo de vibração da pista externa

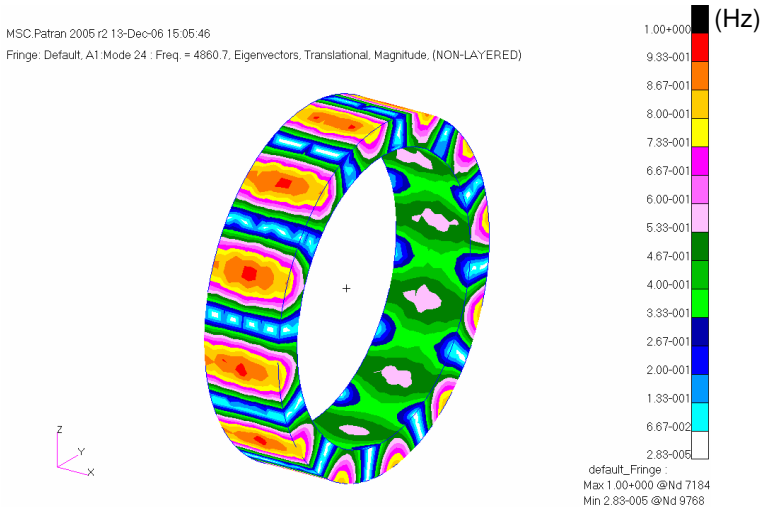


Figura 4.11 – Representação do 24° modo de vibração da pista externa

Para ajustar o modelo numérico à condição experimental foram gerados modelos CAD e suas respectivas malhas para as situações das trincas simuladas na parte interna da pista externa com diâmetros de 0,719mm , 1,224mm e 1,521mm.

As figuras 4.12 e 4.13 ilustram a malha gerada para a trinca de 1,521mm.

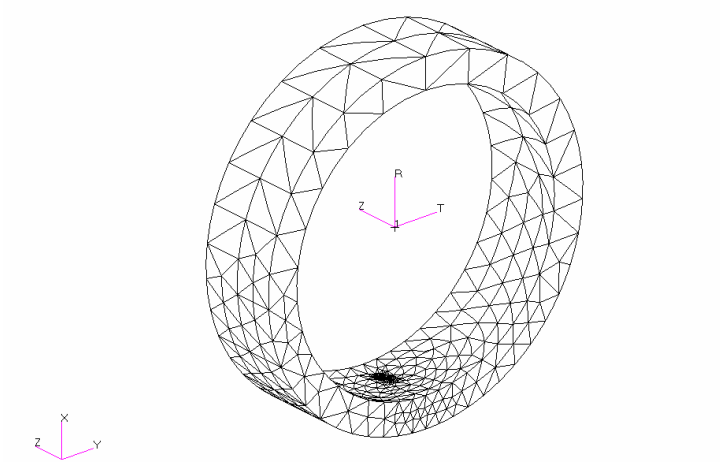


Figura 4.12 – Malha da pista externa com trinca

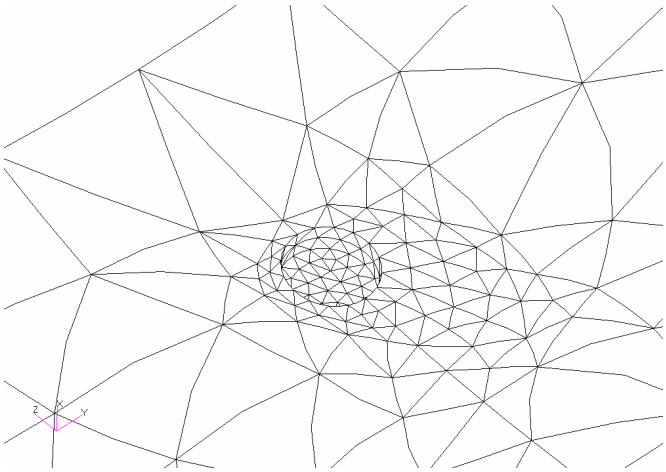


Figura 4.13 – Detalhe da pista com trinca

4.3. Geração da resposta em freqüência

Impostas as condições de contorno, massa e geometria para a confecção do modelo foi calculada a resposta dinâmica em freqüência nas direções x, y e z ,assim como as tensões principais. Para o cálculo da magnitude da força foi utilizado o peso do rotor e eixo. Com a função seno, foi modelado o esforço dinâmico no rolamento. A força apresenta o comportamento descrito pela equação 4.14:

$$F(t) = F_0 \cdot sin(\omega \cdot t) \tag{4.14}$$

com:

$$F_0 = m(rotor + shaft) \cdot g \tag{4.15}$$

A velocidade angular ω depende da velocidade de rotação do protótipo. A figura 4.15 apresenta o comportamento da força no tempo para uma rotação do protótipo de 50Hz.

A distribuição da força foi considerada como apresentada na figura 4.14 bem como o ponto de coleta no modelo.

A seguir são apresentadas as respostas dinâmicas em aceleração e as tensões em MPa para as condições sem trinca e com comprimentos de trinca de 0,719 ; 1,224 e 1,521mm respectivamente.

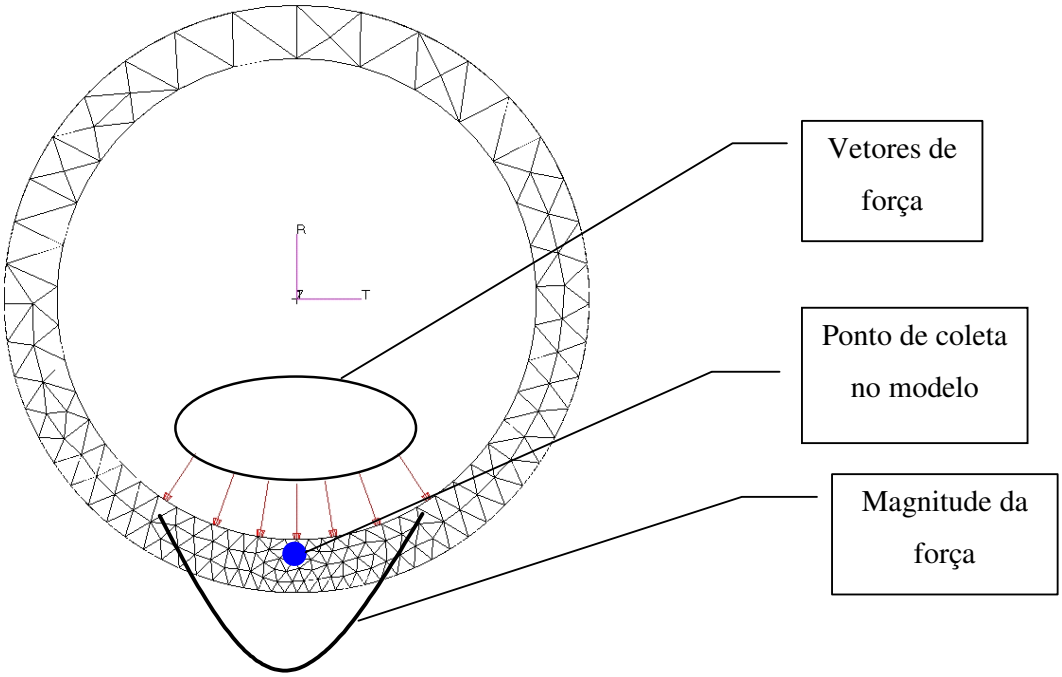


Figura 4.14 – Distribuição de forças na pista externa

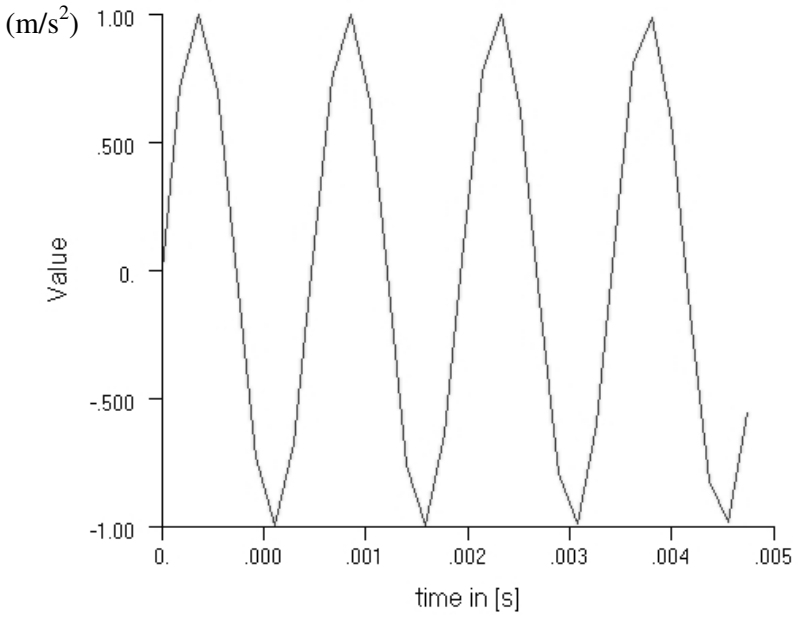


Figura 4.15 – Comportamento da força no tempo

4.3.1. Resposta em Freqüência:

4.3.1.1. Sem Trinca

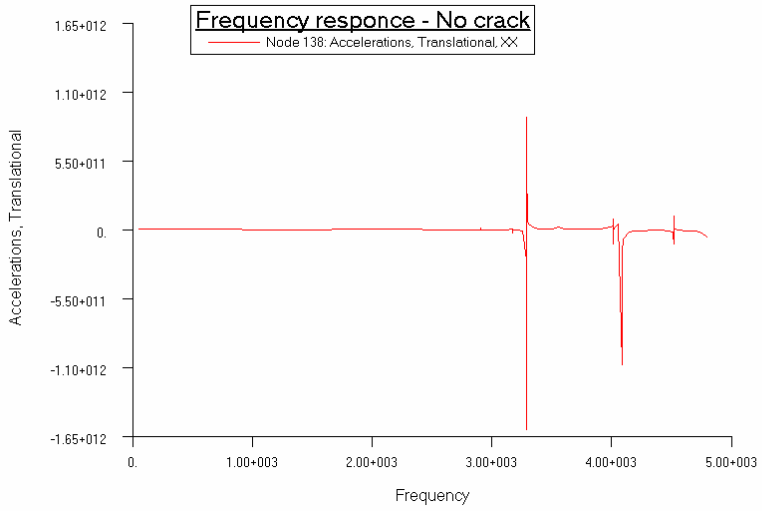


Figura 4.16 – resposta dinâmica em x

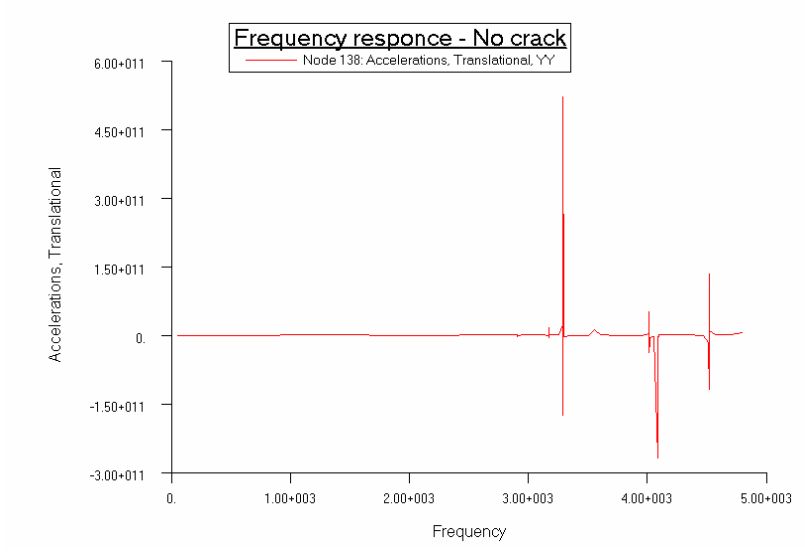


Figura 4.17 – Resposta dinâmica em y

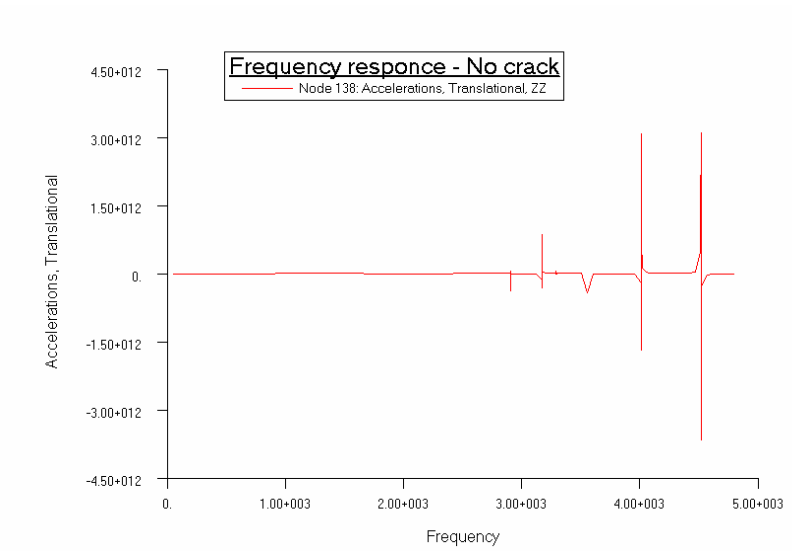


Figura 4.18 – Resposta dinâmica em z

4.3.1.2. Trinca 0,719mm

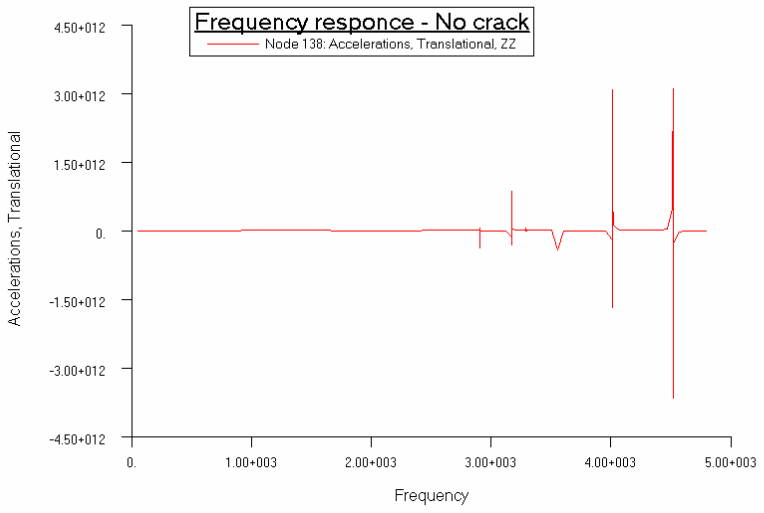


Figura 4.19 – Resposta dinâmica em x

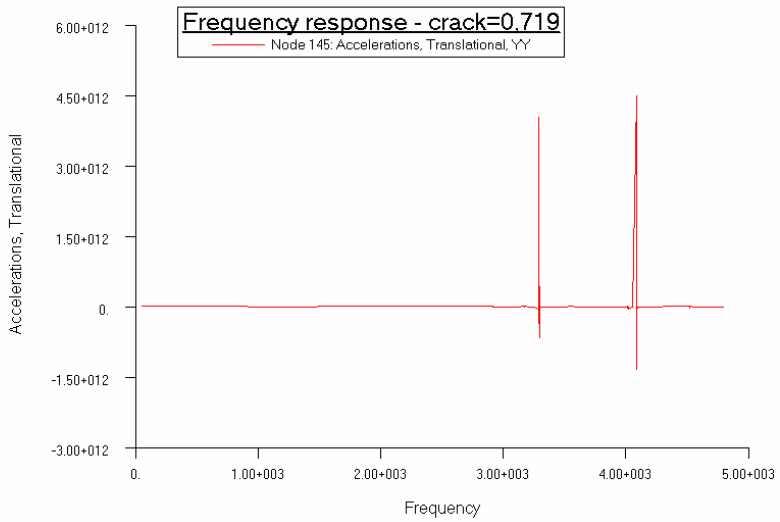


Figura 4.20 – Resposta dinâmica em y

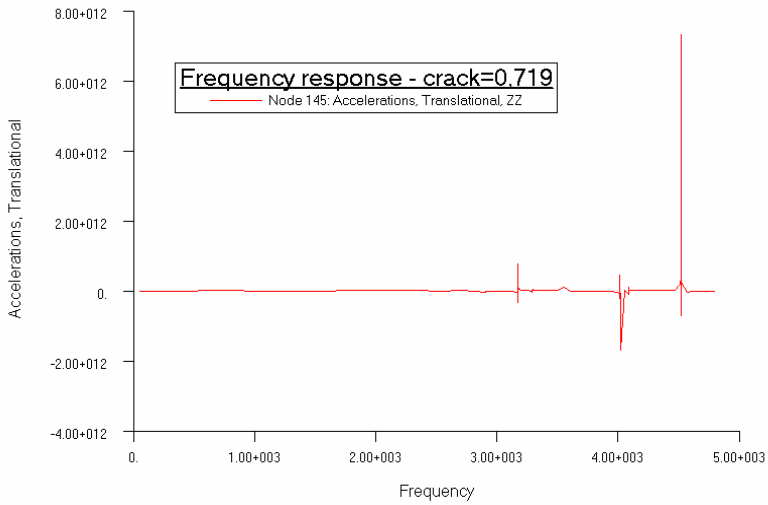


Figura 4.21 – Resposta dinâmica em z

4.3.1.3. Trinca 1,224mm

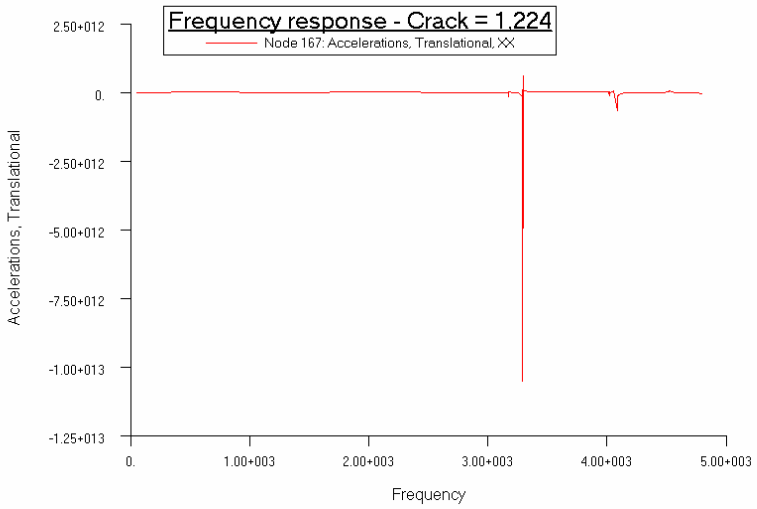


Figura 4.22 – Resposta dinâmica em x

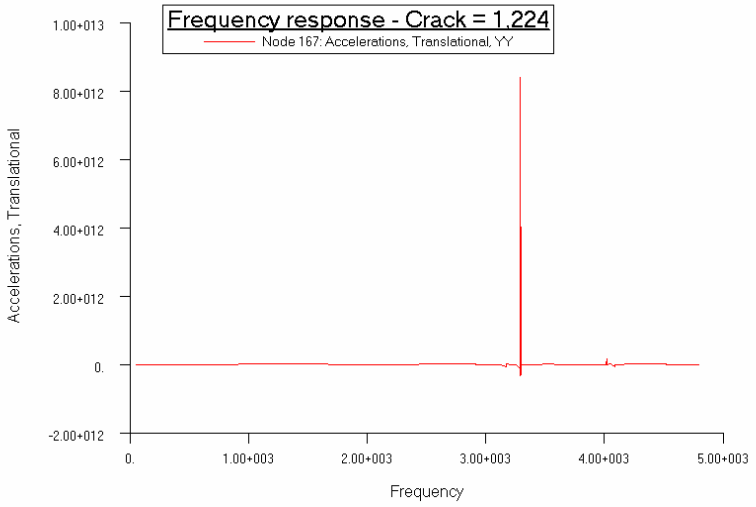


Figura 4.23 – Resposta dinâmica em y

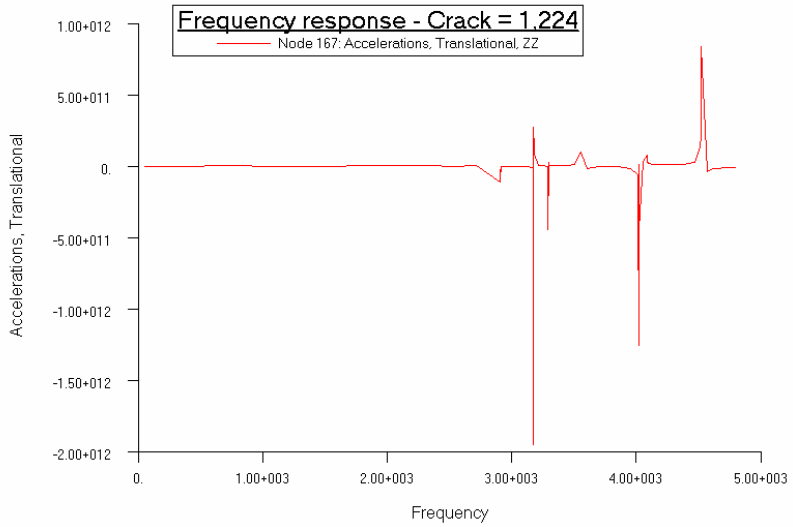


Figura 4.24 – Resposta dinâmica em z

4.3.1.4. Trinca 1,521mm

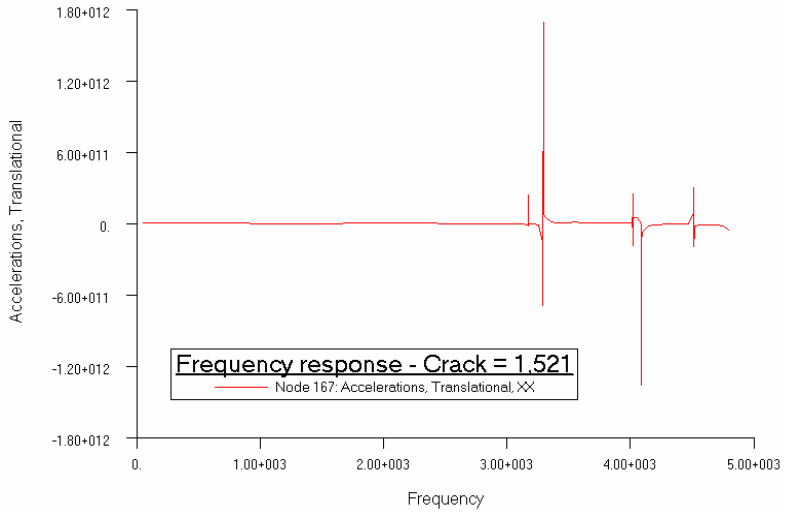


Figura 4.25 – Resposta dinâmica em x

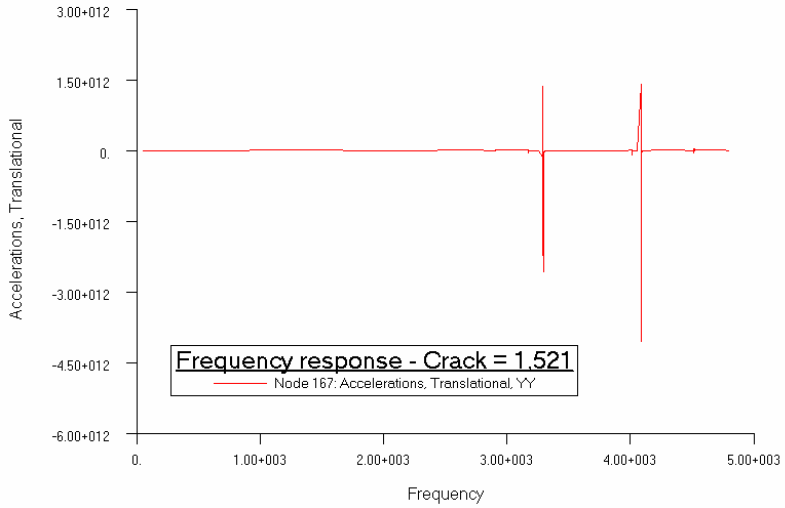


Figura 4.26 – Resposta dinâmica em y

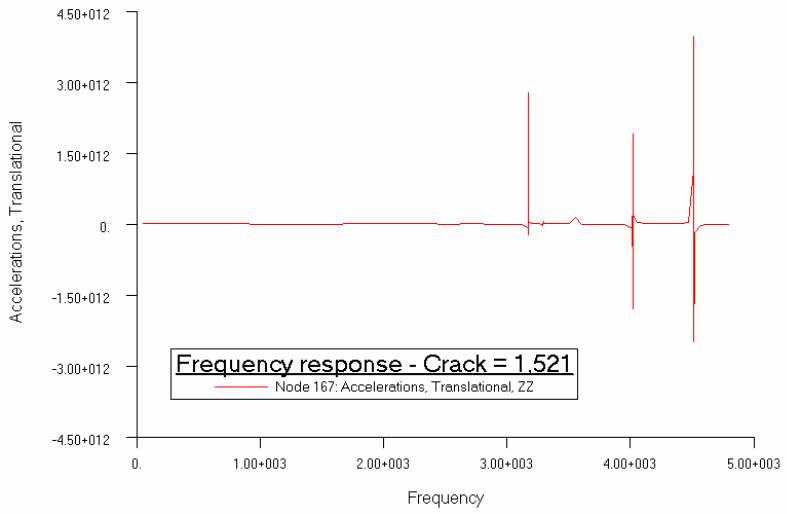


Figura 4.27 – Resposta dinâmica em z

4.3.2. Tensões:

As tensões foram coletadas no modelo na trinca. Conforme apresenta a figura 4.2.x, neste ponto onde os elementos rolantes passam gerando os esforços dinâmicos. As tensões foram calculadas em MPa.

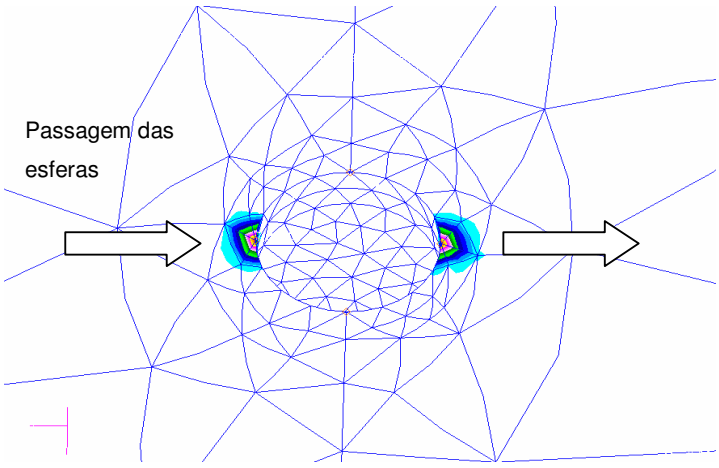


Figura 4.28 – Ponto de coleta das tensões no modelo

4.3.2.1. Sem trinca:

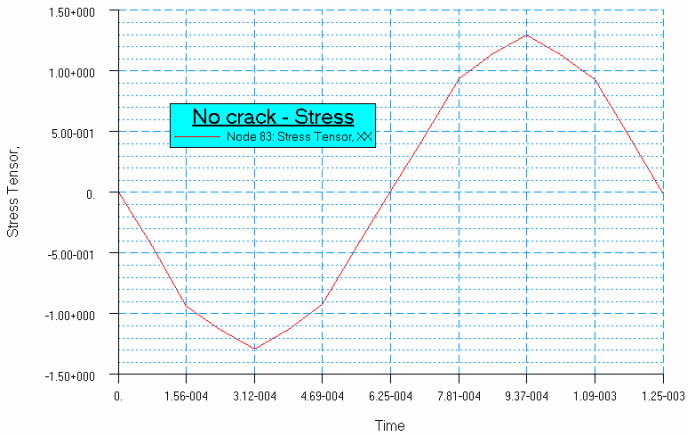


Figura 4.29 – Tensão em σ_x

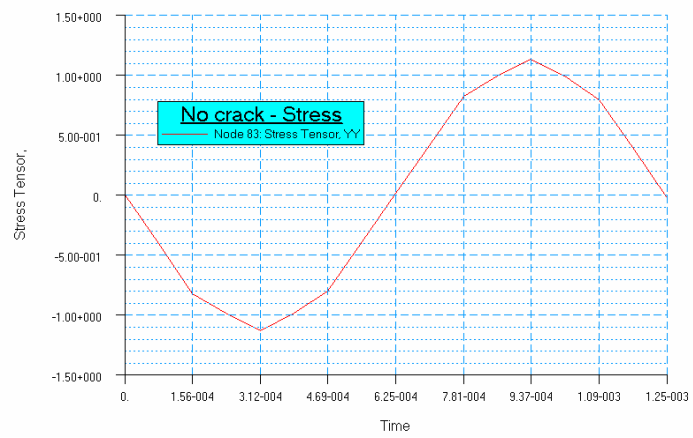


Figura 4.30 – Tensão em σ_y

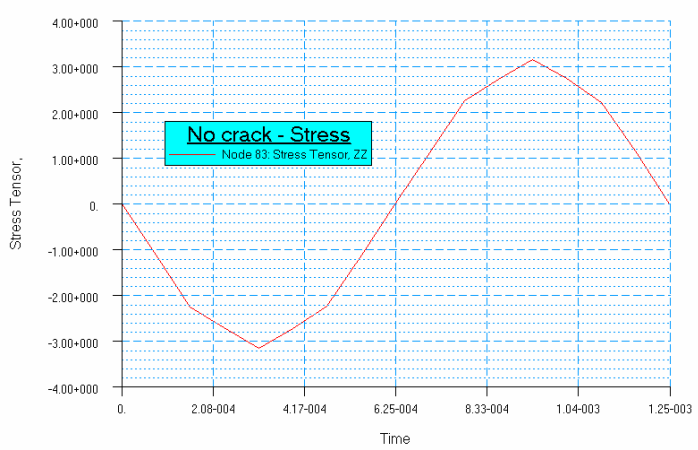


Figura 4.31 – Tensão em σ_z

4.3.2.2. Trinca 0,719mm

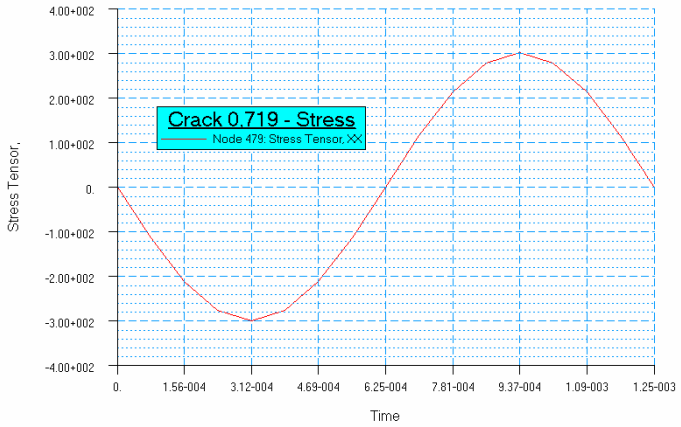


Figura 4.32 – Tensão em σ_x

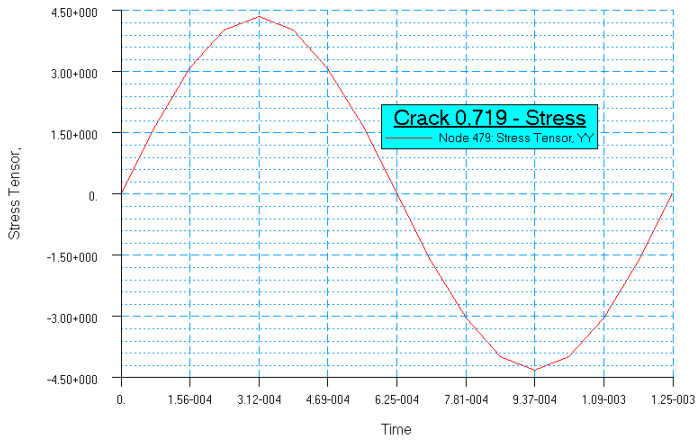


Figura 4.33 – Tensão em σ_y

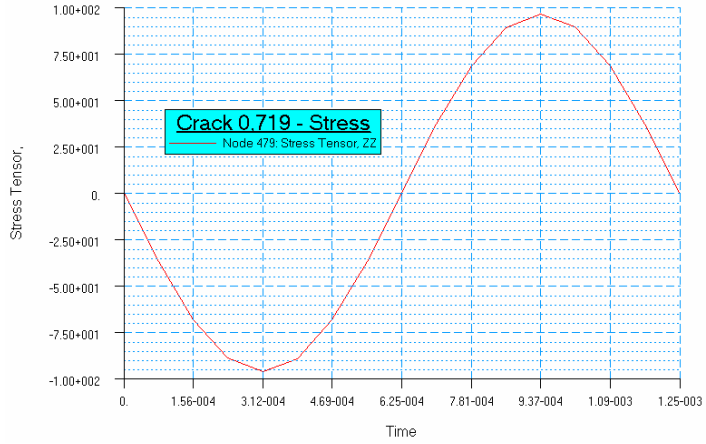


Figura 4.34 – Tensão em σ_z

4.3.2.3. Trinca 1,224mm

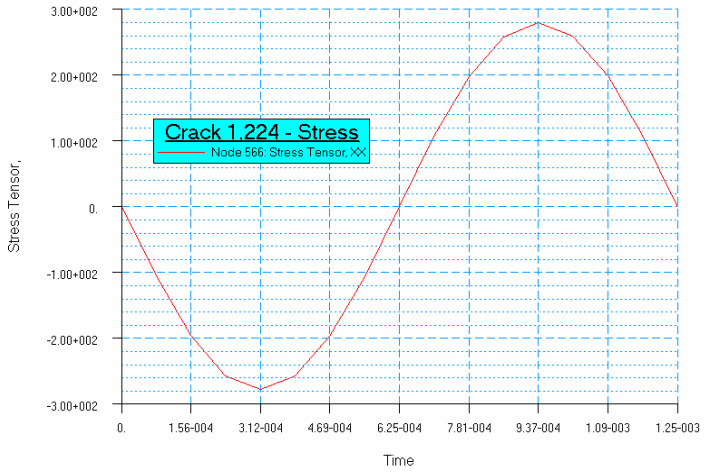


Figura 4.35 – Tensão em σ_x

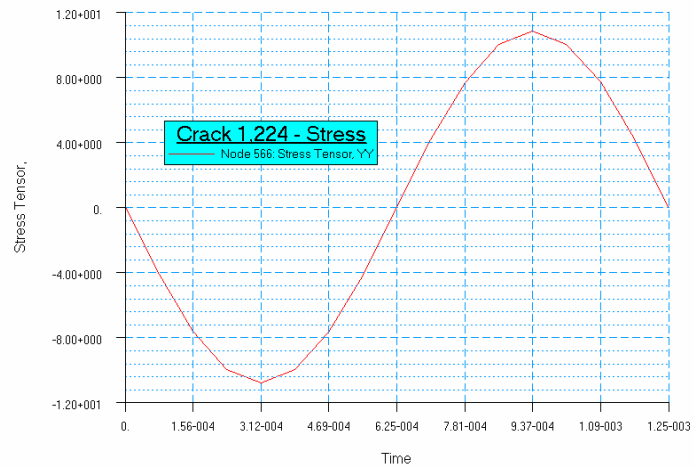


Figura 4.36 – Tensão em σ_y

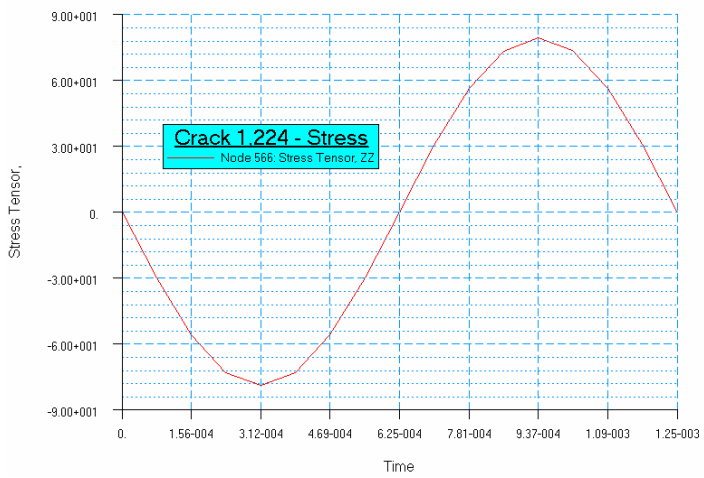


Figura 4.37 – Tensão em σ_z

4.3.2.4. Trinca 1,521mm

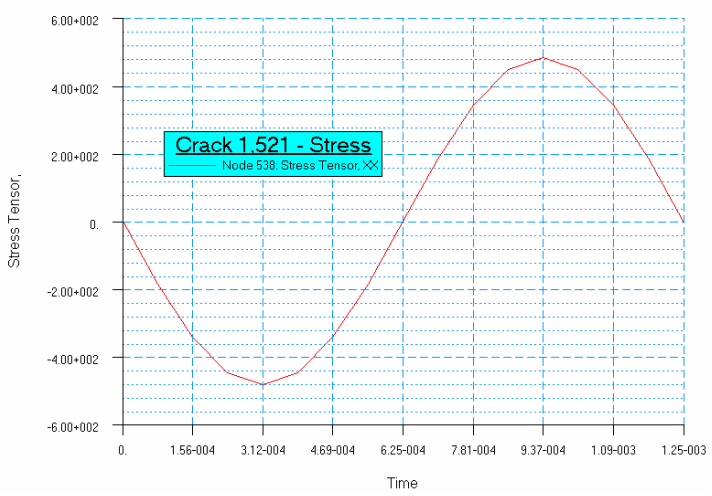


Figura 4.38 – Tensão em σ_x

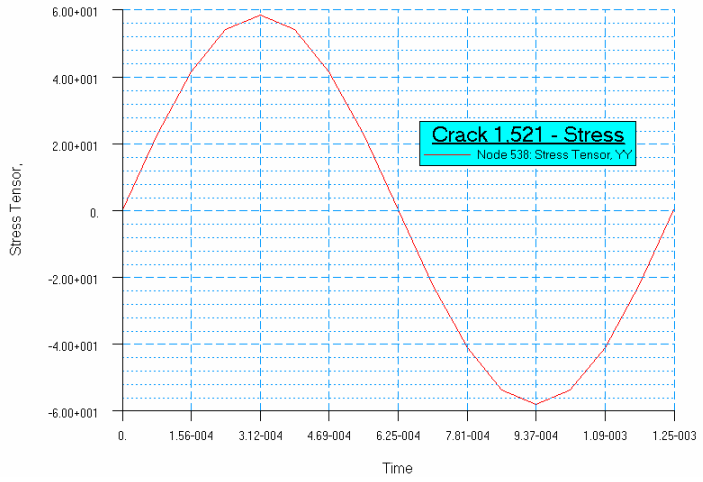


Figura 4.39 – Tensão em σ_y

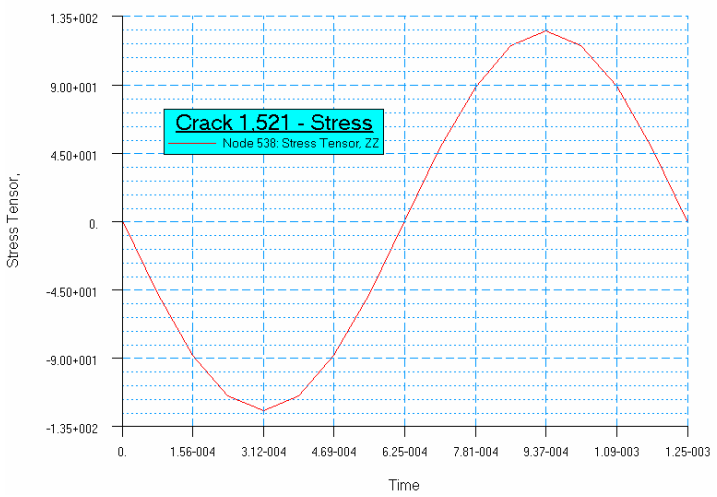


Figura 4.40 – Tensão em σ_z

Os gráficos de comparação das tensões em x, y e z, figuras 4.41, 4.42 e 4.43, para as situações da pista do rolamento sem trinca, com trinca de 0,719mm, 1,224mm e 1,521mm apresentaram a tendência do aumento das tensões com o aumento do dano.

Em todos os gráficos (figuras 4.41, 4.42 e 4.43) constatou-se maiores tensões para a trinca de 1,521mm e menores tensões para a situação sem trinca.

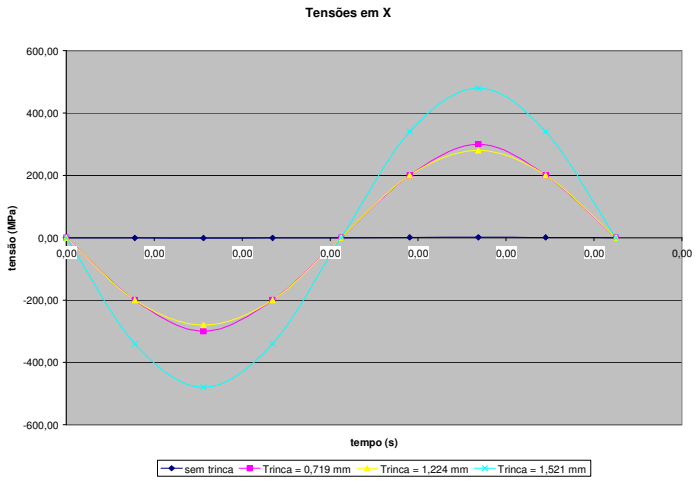


Figura 4.41 – Comparação tensões em x

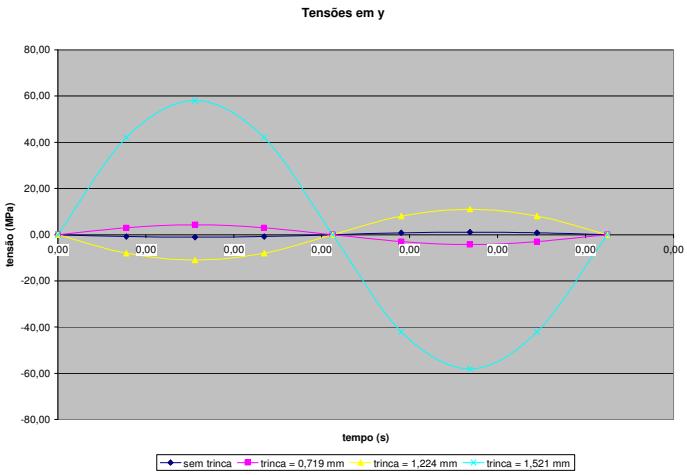


Figura 4.42 – Comparação tensões em y

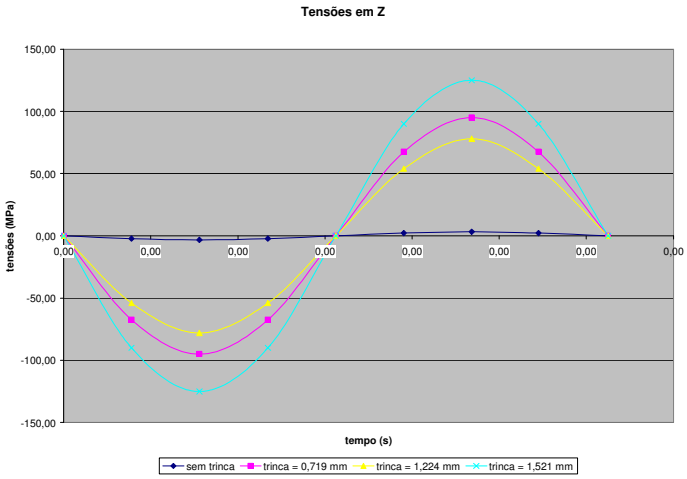


Figura 4.43 – Comparação tensões em z

As figuras 4.44, 4.45 e 4.46 apresentam que em todas as situações com trinca o maior valor de tensão foi no eixo x.

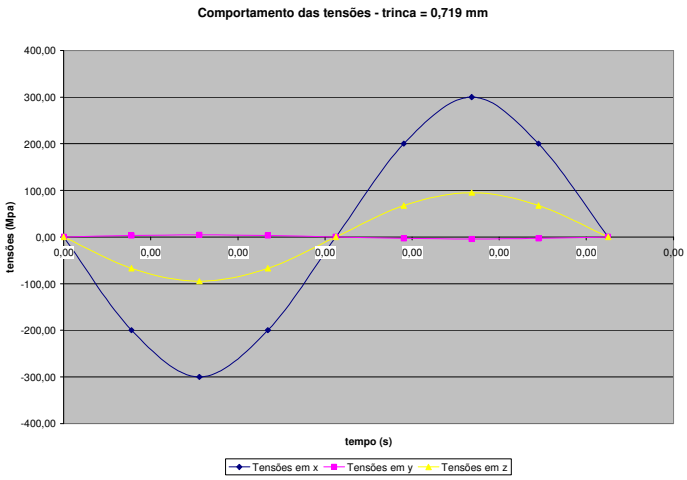


Figura 4.44 – Comportamento trinca 0,719mm

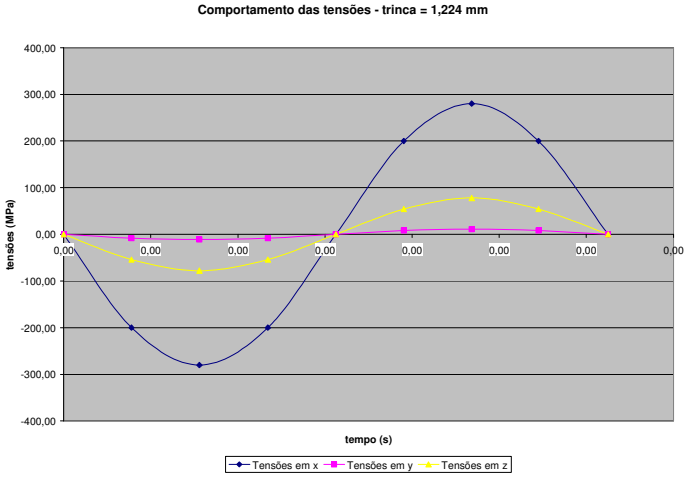


Figura 4.45 – Comportamento trinca 1,224mm

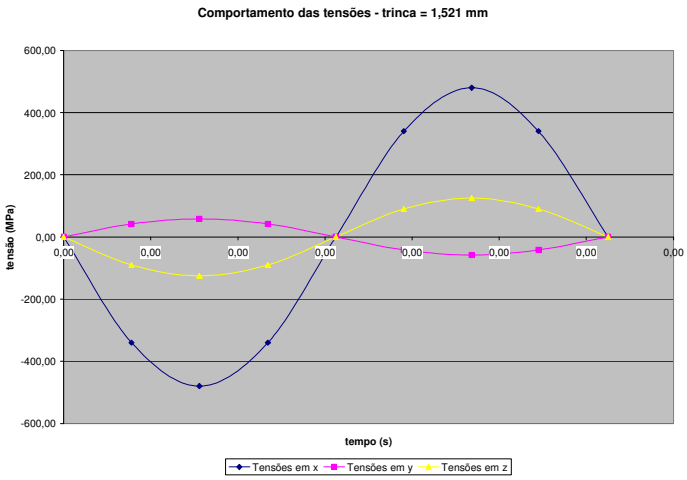


Figura 4.46 – Comportamento trinca 1,521mm

As figuras 4.47 e 4.48 apresentam as tensões geradas na pista interna do rolamento sem trincas.

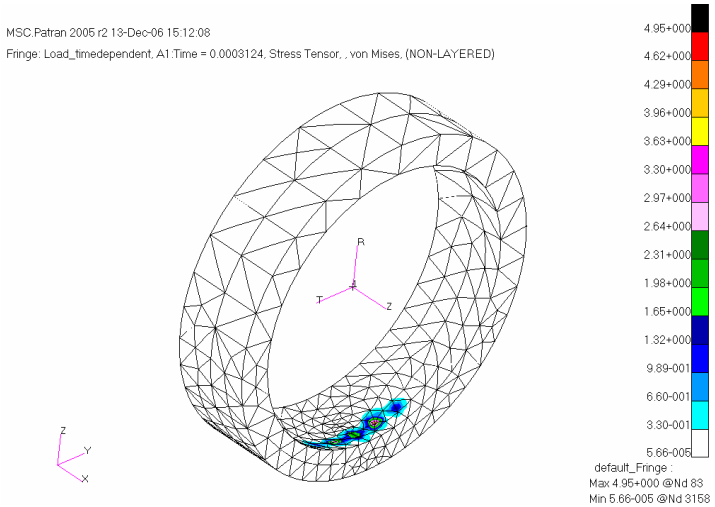


Figura 4.47 – Tensões geradas na pista do rolamento sem trincas

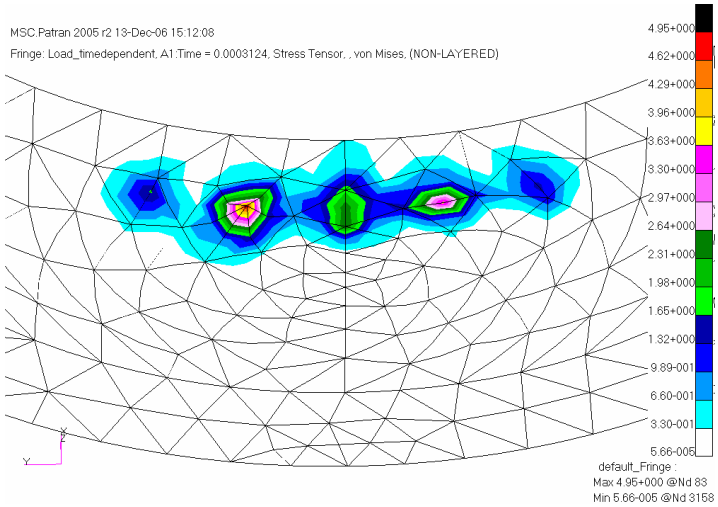


Figura 4.48 – Detalhe na região das tensões geradas na pista do rolamento sem trincas

As figuras 4.49 a 4.51 apresentam tensões geradas na pista interna do rolamento para as trincas com dimensões 0,719mm, 1,224mm e 1,521mm respectivamente.

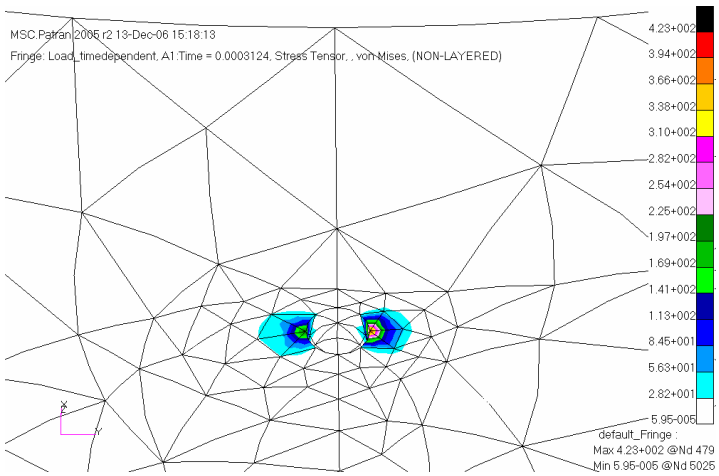


Figura 4.49 – Detalhe na região das tensões geradas na pista do rolamento para trinca 0,719mm

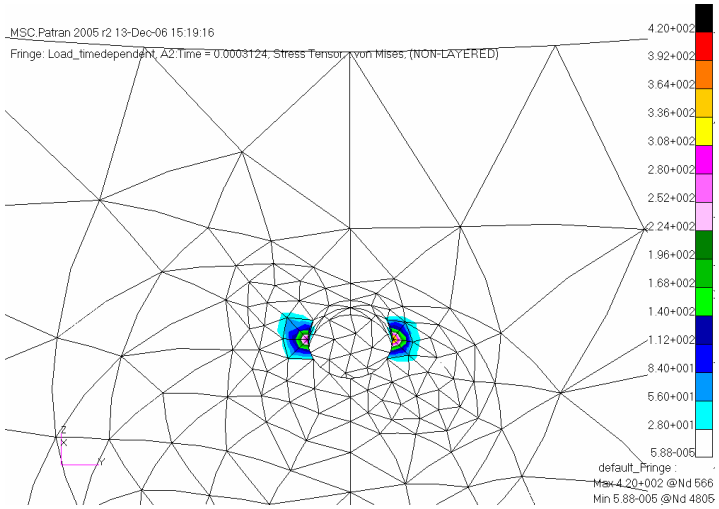


Figura 4.50 – Detalhe na região das tensões geradas na pista do rolamento para trinca 1,224mm

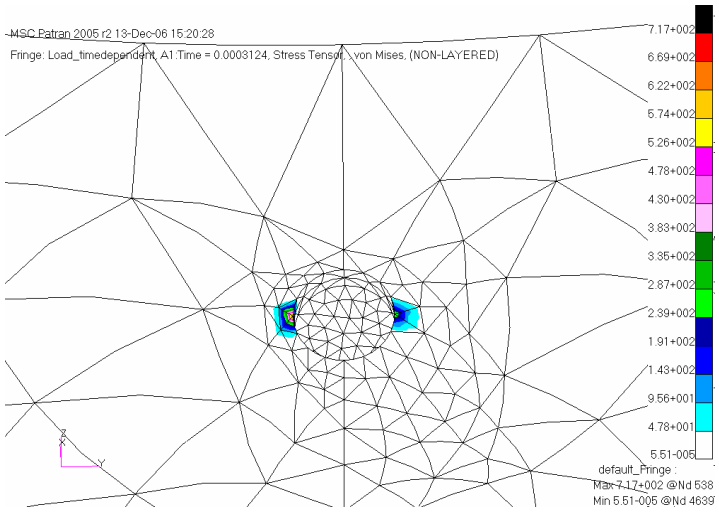


Figura 4.51 – Detalhe na região das tensões geradas na pista do rolamento para trinca 1,521mm

4.3.3. Geração da resposta experimental em freqüência

A seguir são apresentadas as medições de aceleração realizadas experimentalmente na bancada de testes. As medições foram realizadas como descrito anteriormente no mancal do lado do rotor, com uma rotação de 3000rpm e as medições foram tomadas nos três eixos.

Os resultados estão apresentados apenas no eixo y onde foi obtida melhor resposta dinâmica. As figuras 4.52 , 4.53 , 4.54 e 4.55 apresentam as respostas dinâmicas em y para as condições do rolamento sem dano, com dano de 0,719mm, 1,226mm e 1,521mm respectivamente.

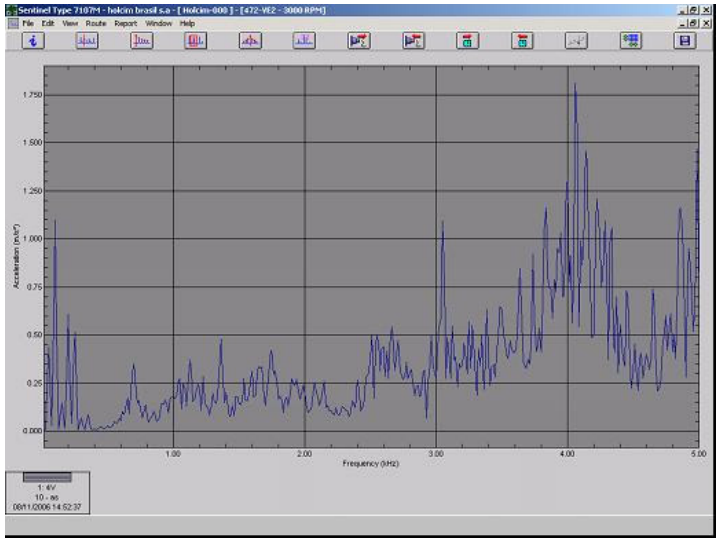


Figura 4.52 – resposta dinâmica em y – sem dano

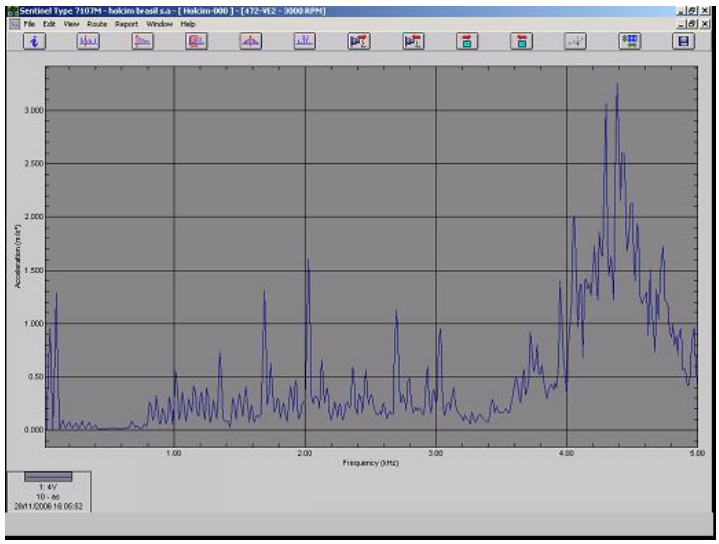


Figura 4.53 – resposta dinâmica em y – dano 0,741mm

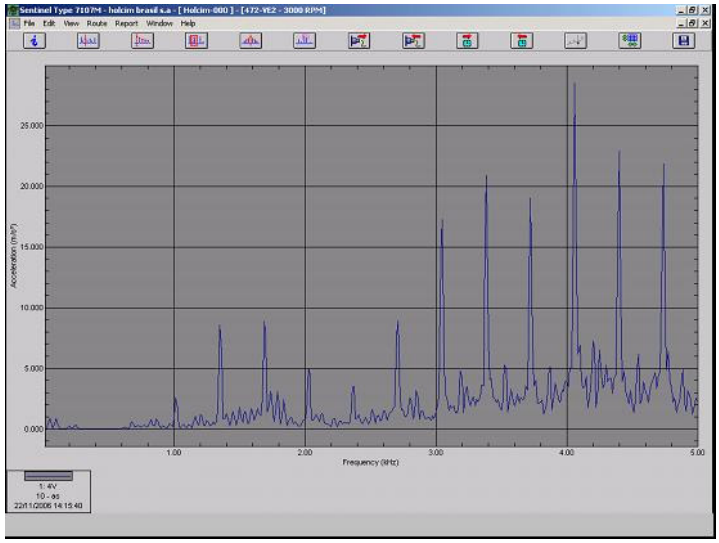


Figura 4.54 – resposta dinâmica em y – dano 1,226mm

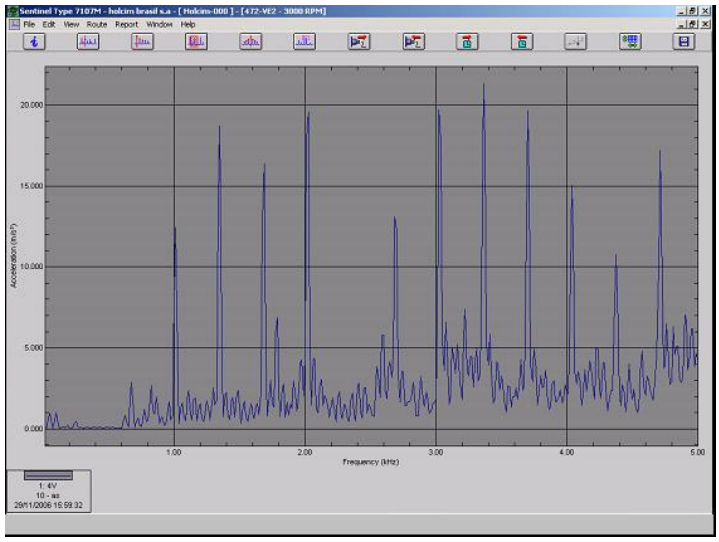


Figura 4.55 – resposta dinâmica em y – dano 1,521mm

A figura 4.56 – apresenta a resposta dinâmica para as situações sem e com trinca.

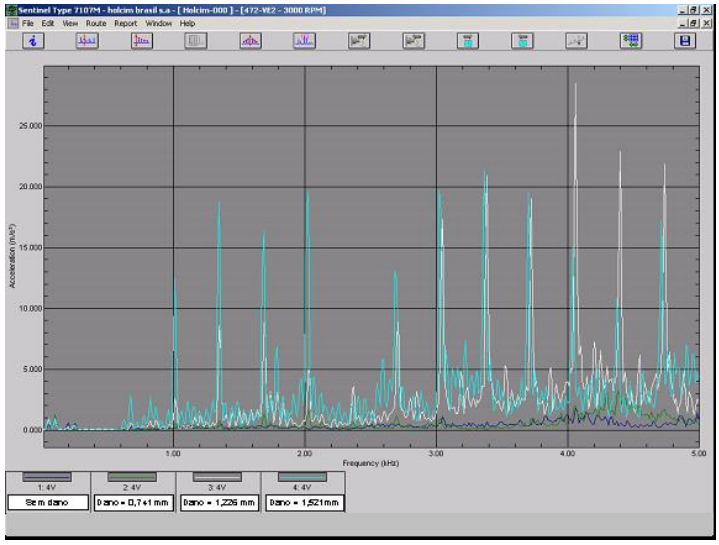


Figura 4.56 – comparação resposta dinâmica em y – com e sem trinca

4.3.4. Expectativa de vida residual

Para a estimativa da vida residual nas diversas condições de trincas, foi utilizada a equação de Paris como base. Os parâmetros C e m foram os recomendados para um aço martensítico, ou seja C = 1,35 x 10^{-7} MPa.$m^{1/2}$ e m=2,25.

Na tabela 4.4 são apresentados os valores de tensões simuladas e o tamanho inicial das trincas a_i e os a_f bem como os tempos de vida esperados.

Tabela 4.4 – Tempo estimado de vida

Comprimento Inicial da trinca a_i (mm)	Tensões (MPa)			Comprimento final da trinca a_f (mm)	Tempo estimado de vida N_{if} (ciclos)
	$\Delta\sigma_x$	$\Delta\sigma_y$	$\Delta\sigma_z$		
Sem trinca	2,6	2,2	6,4	Indeterminado	Indeterminado
0,719	600	9	180	4,335	4,577
1,224	560	22	160	4,976	3,999
1,521	960	110	250	1,693	0,094

Os tempos encontrados para a vida residual são elevados. Na conclusão serão discutido estes resultados.

4.4. Avaliação da metodologia

Neste tópico será abordada cada fase da metodologia proposta, indicada no fluxograma (figura 4.57), avaliando os resultados e os desvios encontrados.

Para uma primeira abordagem os resultados parecem satisfatórios, porém alguns ajustes precisam ser feitos para resultados mais concretos.

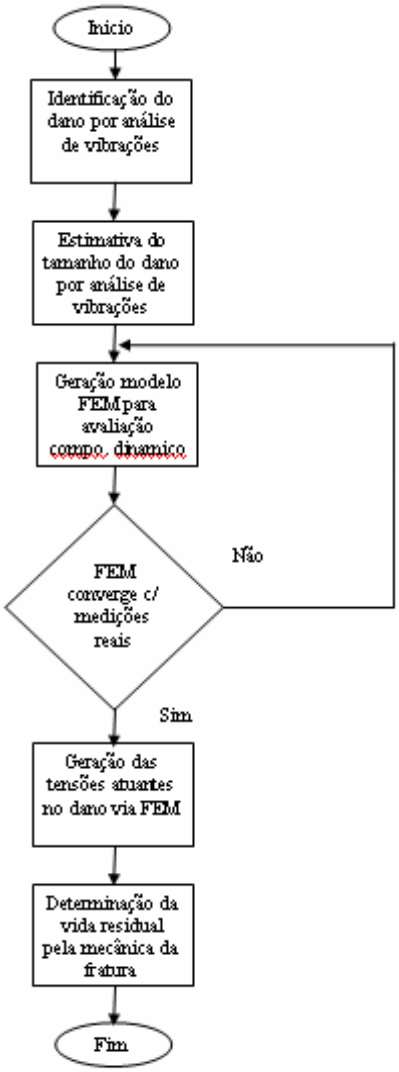


Figura 4.57 – Fluxograma da metodologia

4.4.1. Identificação do Dano por Análise de Vibrações:

Nesta etapa, como era de se esperar, as técnicas de análise de vibração conseguem identificar melhor o tipo de dano em questão. No caso um defeito na pista externa.

A técnica de envelope utilizada qualificou melhor este dano. Isto pode ser observada na 4.58 do envelope medido. No envelope da figura são comparadas as medições de vibração sem dano e com dano de 1,221mm.

Observou-se como apresentado na figura 4.58, a freqüência de defeito calculada para a pista externa de 338Hz e sua primeira harmonica de 676Hz.

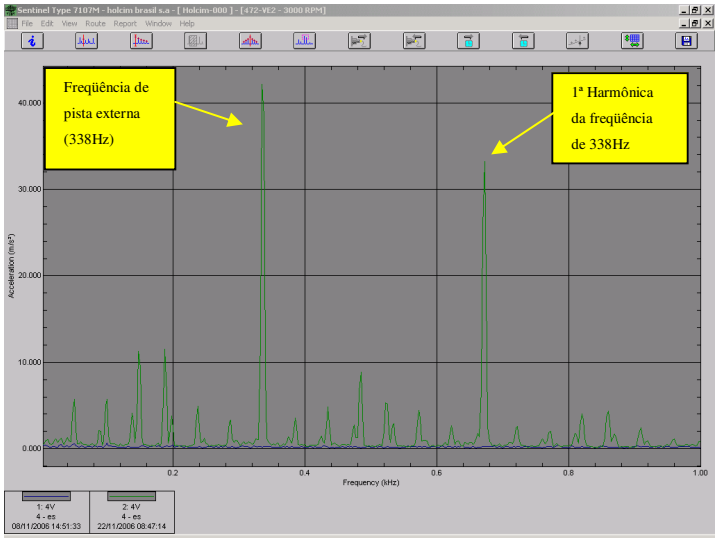


Figura 4.58 – Medição de Envelope com e sem dano

4.4.2. Estimativa do Tamanho do Dano por Análise de Vibrações:

Esta etapa se faz necessária uma vez que para utilizarmos a equação de Paris é necessário a estimativa do tamanho inicial da trinca. Para esta estimativa foi observado que existe uma correlação entre a medição de vibração utilizando o Fator K com o tamanho da trinca. A figura 4.59 demonstra esta correlação.

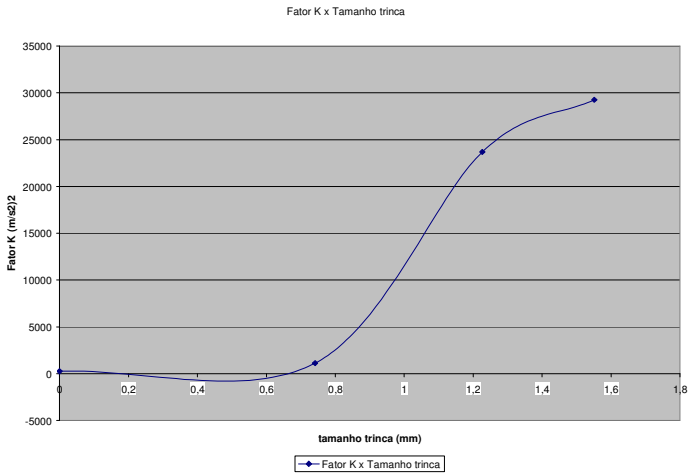


Figura 4.59 – Fator K x Tamanho de Trinca

As figuras 4.60 e 4.61 apresentam a relação entre o tamanho da trinca e as respostas dinâmicas em envelope e em espectro de aceleração para determinadas freqüências. Nestas figuras não fica claro uma correlação direta.

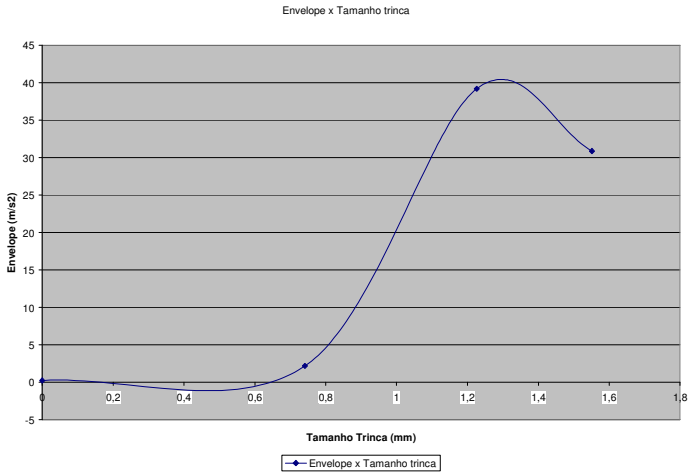


Figura 4.60 - Envelope x Tamanho de Trinca

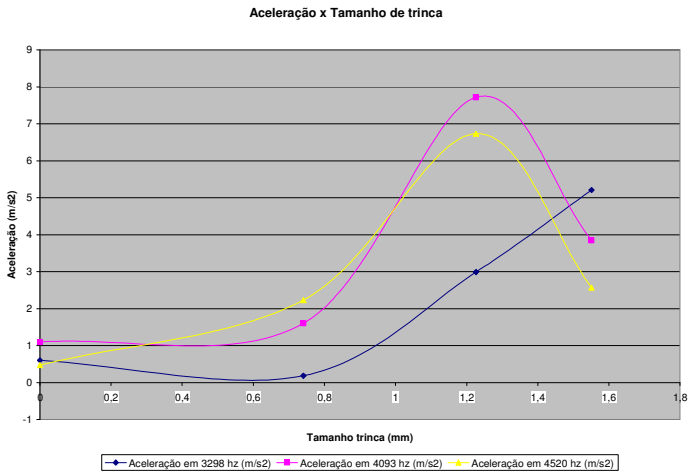


Figura 4.61 - Aceleração x Tamanho de Trinca

Para uma estimativa mais precisa do tamanho inicial da trinca em função da resposta dinâmica deve ser investigado mais em detalhes esta correlação entre o Fator K e o tamanho da trinca.

4.4.3. Geração do Modelo FEM para Avaliação do Comportamento Dinâmico:

A geração do modelo FEM para simular o comportamento dinâmico do rolamento apresentou resultados satisfatórios.

As freqüências naturais calculadas via FEM se aproximaram dos resultados coletados experimentalmente em determinadas faixas de freqüência.

O espectro de aceleração da figura 4.62 apresenta vários picos que coincidem com as freqüências naturais da tabela 3.2.2. No entanto as amplitudes simuladas ficaram com valores bem diferente dos medidos experimentalmente.

A tabela 4.5 apresenta os erros encontrados para as freqüências naturais. A pequena variação encontrada entre os valores simulados e os coletados experimentalmente se deve principalmente pela qualidade refinada da malha empregada no modelo, bem como as condições de contorno e as restrições impostas. Quanto as grandes variações encontradas nas amplitudes, basicamente se devem as condições de carregamentos consideradas no modelo.

Tabela 4.5 – Freqüências simuladas x experimental

Freqüência Natural Calculada (Hz)	Freqüência Natural Medida (Hz)	Variação (%)
1661,60	1650,00	0,70
3173,00	3060,00	3,56
4092,70	4090,00	0,07
4860,70	4880,00	-0,40

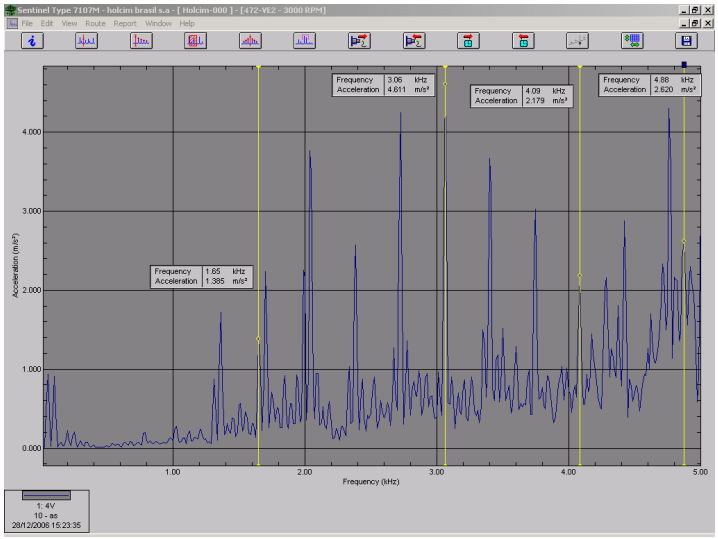


Figura 4.62 – Espectro de aceleração

Com relação a forma do espectro medido com o simulado via FEM também foi obtido uma boa similaridade com relação a sua forma, conforme apresenta a figura 4.63.

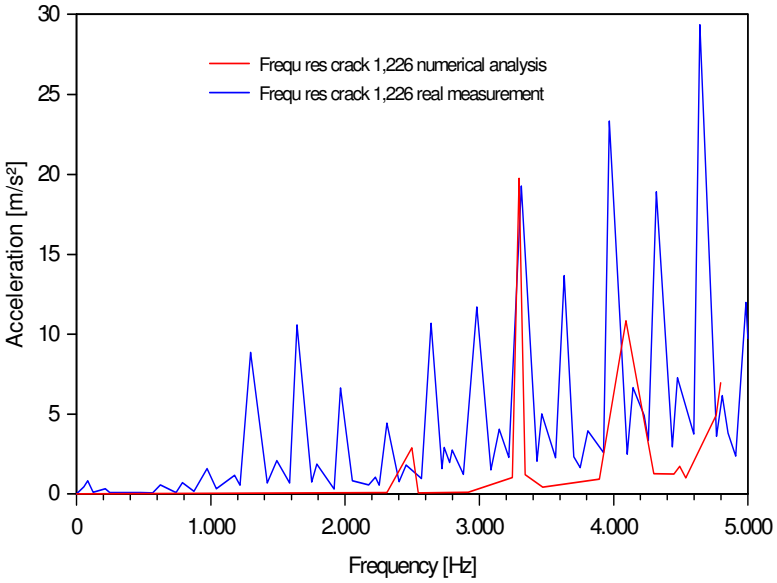


Figura 4.63 – Comparação espectro real x simulado

Para esta etapa da metodologia proposta o modelo deve ser mais refinado para que as amplitudes geradas se aproximem dos valores medidos. Isto se faz necessário uma vez que esta etapa é fundamental para a posterior estimativa das tensões geradas.

4.4.4. Geração das Tensões Atuantes no Dano via FEM:

Esta etapa é uma conseqüência da etapa anterior uma boa confiabilidade destes dados depende do modelo poder ser ajustado em função da resposta dinâmica da etapa anterior. Observa se pela tabela 4.4 que o tamanho final de crescimento estável da trinca a_f esta inversamente ligado ao valor das tensões atuantes. Quanto maior o valor das tensões menor o comprimento final da trinca a_f .

4.4.5. Determinação da Vida Residual pela Mecânica da Fratura:

Tendo a equação de Paris como base , observa se dois fatores como fundamentais para a precisão da estimativa de vida do rolamento e por conseqüência a sua aplicabilidade. Os parâmetros C e m. Para este trabalho foram

adotados parâmetros genéricos de um aço martensítico, ou seja $C=1,35x10^{-7}$ e m=2,25.

As figuras 4.64 e 4.65 apresentam a variação da vida remanescente N_{if} em função da variação dos fatores C e m para a condição de trinca de 0,719mm.

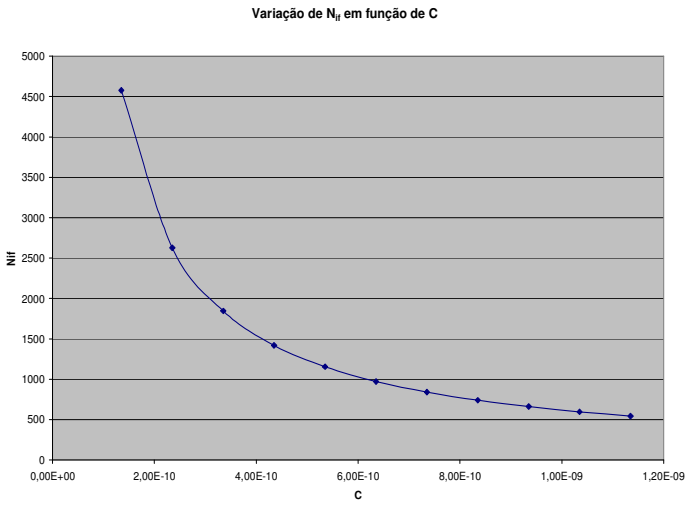


Figura 4.64 – Variação de N_{if} em função de C

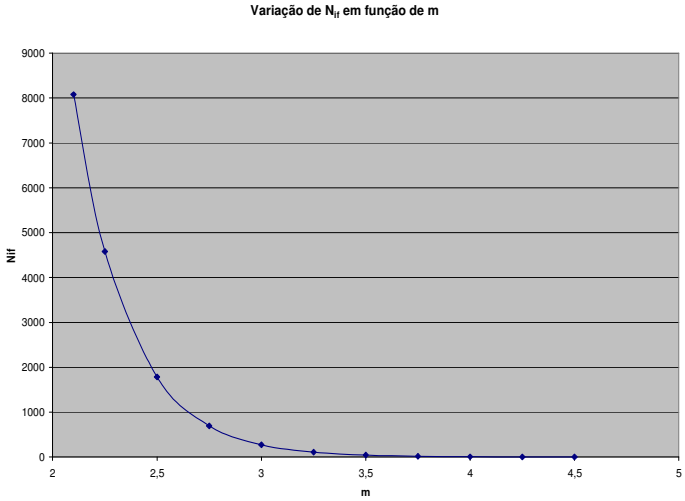


Figura 4.65 – Variação de N_{if} em função de m

Observou-se grande sensibilidade da estimativa da vida residual em função da variação destes fatores. Principalmente para o fator m.

Por exemplo para uma variação de 11 % no fator C a variação da vida residual foi também da ordem de 11 %. Para o parâmetro m a sua variação da ordem de 11 % resultou em uma variação de 157 % no valor da vida residual.

Outro parâmetro de grande importância para a precisão do método é o valor de K_{Ic}. Este parâmetro é fundamental para a determinação do comprimento final de crescimento estável da trinca a_f.

Desta forma para uma maior confiabilidade do método deve se realizar ensaios de fratura para o aço em questão e então o levantamento dos parâmetros C, m e K_{Ic} para o aço estudado.

5. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Observa-se que a metodologia utilizada apresenta grandes vantagens para a estimativa de vida e verificação dos danos em rolamentos, porém é necessário aprimoramentos para que seja utilizada como ferramenta de auxílio da manutenção, conforme foi mostrado nos tópicos 4.1, 4.2 e 4.3.

Para aprimoramento da metodologia, sua aplicação prática e validação, alguns pontos devem ser observados em trabalhos futuros:

- Estimativa do tamanho inicial do dano no rolamento em função da resposta dinâmica coletada experimentalmente. Este ponto forneceria uma condição real por meio da medição de vibração para obter o valor de ai para sua utilização na equação de Paris.
- Refinamento da amplitude de resposta dinâmica do modelo quando comparado com a resposta experimental. Com este refinamento da resposta as tensões derivadas desta etapa serão mais confiáveis e fornecerão uma resposta mais consistente para a previsão de vida remanescente.
- Levantamento dos parâmetros de C ,m e K_{Ic} para o aço utilizado no rolamento. Como foi visto no item 5.5 a estimativa de vida residual varia bastante em função destes dois fatores. Desta forma um levantamento preciso destes parâmetros se torna fundamental para a utilização do método.
- Comparação de resultados simulados de estimativa de vida com dados reais de vida. A utilização de ensaios acelerados para determinação da vida residual confrontado com os valores de vida simulados poderia fornecer a subsídios ara a validação do método ou indicaria as suas limitações e aplicabilidade.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M. T., 2003, **Manutenção preditiva: confiabilidade e qualidade**, Disponível em: <http://www.mtaev.com.br/> Acesso em: 20/02/2003.

ALMEIDA, R. G., VICENTE, S. A. S., PADOVESE, L. R., 2001, "New techinique for evaluation of global vibration levels in rolling bearing, **Vibration and Sound,** COBEM**,** n.10, pág.241-248, COBEM,

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING MATERIALS. **ASTM E 399-91: Plane strain fracture toghness of metallic materials**, pág. 592-628, Philadelphia, U.S.A., 1991.

ARGYRIS, J. H., KELSEY, S., 1954-55, **Energy theorems and structural analysis**, Aircraft Engineering, Reprinted by Buuterworths, Londo, England.

BARKOV, A., BARKOVA, N., 1995, "Condition assessment life prediction of rolling element bearing – part I", **Sound and Vibration**, June, pág 10-17.

BATHE, K., 1982, **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**, Massachusetts Institute of Technology, USA, Prentice-Hall.

BENDAT, J. S., PIERSOL, A. G., 1986, **MRandom data analysis and measurement procedures**, John Wiley & Sons, 2. ed, New York, U.S.A.

BRAUN, S., 1986, **Mechanical Signature Analysis Theory and Aplication**, Academic Press, London, England.

BIBSHOP, R. E. D., GLADWELL, G. M. L., 1963, "An investigation into the theory of resonance testing", **Phil. Trans. Roy. Soc.**, n.255, pág 241-280.

CHAGSEN, Wan, 1987, **Analisys Rolling Element Bearing,** Mechanical Engineering Publication, England.

CLOUGH, R. W., 1960, "*The finite element method in plane stress analysis",* **Procedings**, **2nd Conference on Eletronic Computation,** ASCE, Pittsburg, PA.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., 1989, **Concepts and applications of finite element analysis**, 3rd ed., New York, Wiley.

DOWLING, Norman E., 1999, **Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture, and fatigue**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

DYER, D., STEWART, R., 1978, "Detection of rolling element bearing damage by statistical vibration analysis", **Journal of Mechanical Design**, n.100(2), pág 229-235.

EWINS, D. J., 1984, **Modal Testing: Theory and Practice**, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, England, Research Studies Press.

FORMAN, R. G., KEARY, V. E., ENGLE, R. M., 1967, "Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures", **Journal of Basic Engineering**, n.89,pág. 459-464.

HAN, S., FEENY, B., 2003, "Application of proper orthogonal decomposition to structural vibration analysis", **Mechanical Systems and Signal Processing**, n.17(5), pág 989-1001.

HARRIS, Cyril M., 1991, **Shock and vibration handbook,** McGraw-Hill, New York, pág. 20-22.

JUVINALL, R. C., MARSHEK, K. M., 1991, **Fundamentals of Machine Component Design,** New York, John Wiley & Sons, U.S.A., pág. 305-322.

KENNEDY, C. C., PANCU, C, D, P., 1947, “Use of vectors in vibration measurements and analysis”, **Journal of the Aeronautical Sciences**, n.14(11), pág 603-625.

LEE, Yung-Li, PAN, Jwo, HATHAWAY, Richard, BARKEY, Mark., 2005, **Fatigue testing and analysis**, Elsevier Butterworth-Heinemann, U.S.A.

LIU, Y., ZHANG, J., 2002, “Nonlinear dynamic responses of twin-tube hydraulic shock absorber”, **Mechanical Research Communications**, n.29, pág 359-365.

MARTIN, H. R., HONARVAR, F., 1995, “Aplication of statistical moment to bearing failure detection”, **Applied Acoustics**, n.44, pág.67-77.

McFADDEN, P. D., SMITH, J. D., 1984, “Model for the vibration produced by single point defect in a rolling element bearing”, **Journal of Sound and Vibration**, n.96(1), pág 69-81.

MITCHELL, J. S., 1993, **Machinery Analysis and Monitoring**, PennWell Publishing Company, Tulsa, Oklahoma.

MOUBRAY, J., 1991, **Reability-Centered Maintenance**, Industrial Press, New York, NY.

NEPOMUCENO, L. X., 1989, **Técnicas de Manutenção Preditiva**, Editora Edgard Blücher, São Paulo, Brasil.

ORHAN, S., AKTÜRK, N., ÇELIK, V., 2006, “Vibration monitoring for defect of rolling element bearings as a predictive maintenance tool: Comprehensive case studies”, **NDT&E International,** n.39(2006) 293-298.

PAI, P. F., YOUNG, L. G., 2001, “Damage detection of beams using operational deflection shapes”, **International Journal of Solids and Structures**, n.38, pág 3161-3192.

PARIS, P. C., ERDOGAN, F., 1963, “A critical analysis of crack propagations laws”, **Journal of Basic Engineering**, n.85, pág. 528-534.

PARIS, P. C., GOMEZ, M. P., ANDERSON, W. P., 1961, “A rational analytic theory of fatigue”, **The Trend in Engineering**, n.13, pág. 9-14.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS. Pró-Reitoria de Graduação. Sistema de Bibliotecas. **Padrão PUC Minas de normalização: normas da ABNT para apresentação de trabalhos científicos, teses, dissertações e monografias**. Belo Horizonte, 2006. Disponível em <http://www.pucminas.br/biblioteca/>

PROAKIS, L. G., MANOLAKIS, D. G., 1996, **Digital Signal Processing**, Prentice Hall, New York, U.S.A.

QIU, J., ZHANG, C., SETH, BRIJ B., LIANG, STEVEN Y., 2002, “Damage Mechanics Approach For Bearing Lifetime Prognostics”, **Mechanical Sustems and Signal Processing,** n.16(5), 817-829**.**

RANDALL, R. B., TECH, B. A., 1987, **Frequency Analysis**, Bruel&Kjaer, 3. ed, Demanrk.

RICHARDSON, M. H., 1997, “Is It a Mode Shape, or an Operating Deflection Shape?”, **Sound & Vibration Magazine** 30th Anniversary Issue.

SATURNINO, Leonardo Junqueira Mattana, **Desenvolvimento de ferramentas para definição, análise e avaliação de desempenho de veículos automotivos**, 2004, 243f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

SKF (FIRM), 1989, **Catálogo geral**, SKF, Torino, pág 255.

SMITH, A. M., 1993, **Reability-Centered Maintenance**, McGraw-Hill, New York, NY.

SPOTTS, M. F., 1964, **Mechanical Design Analysis**, Prentice Hall, New Jersey, U.S.A., Cap. 9, Ball Bearing – Contact Stress, pág. 163-171.

STROHAECKER, Telmo Roberto. **Mecânica da Fratura**, Rio Grande do Sul: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 99p.

TANDON, N., CHOUDHURY, A., 1999, "A review of vibration and acoustic measurement methods for detection of defects in rolling element bearings", **Tribology International**, n.32, pág 469-480.

TANDON, N., NAKRA, B., 1992, "Vibration and Acoustical Monitoring Techniques for the detection of defects in rolling element bearings – A review", **Shock and Vibration Digest**, n.24(3), pág 3-11.

TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., TOPP, J. L., 1956, "*Stiffness and deflection analysis of complex structures*", **J. Aeron. Sci**., n.23(9), pág. 805-823.

WALDRON, K., GHOSHAL, A., SCHULZ, M. J., SUNDARESAN, M. J., FERGUSON, F., PAI, P. F., CHUNG, J. H., 2002, "Damage detection using finite element and laser operational deflection shapes", **Finite Elements in Analysis and Design**, n.38, pág 193-226.

WALKER, K., 1970, "The effects of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminum" em **Effects of Environment and Complex Load History for Fatigue Life**, STP 462, American Society for Testing and Materials, pág. 1-14, Philapelphia, PA.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas