

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

## **A NOÇÃO DE FUNÇÃO EM FREGE**

Rodrigo Rafael Gomes

Orientador: Prof. Dr. Irineu Bicudo

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Gaduação em Educação Matemática – Área de Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Irineu Bicudo  
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Rio Claro

---

Prof. Dra. Itala M. Loffredo D’Ottaviano  
Universidade Estadual de Campinas – IFCH

---

Prof. Dr. Paulo Isamo Hiratsuka  
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Ilha Solteira

Rodrigo Rafael Gomes  
Aluno

Rio Claro, 12 de agosto de 2009.

Resultado: Aprovado

## **DEDICATÓRIA**

Para Maria Helena Gomes e  
José Pedro de Barros Gomes,  
meus pais.

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Irineu Bicudo pela orientação e amizade. Sou-lhe grato pela paciência dispensada e pelos ensinamentos proporcionados durante esse período. Foi um grande privilégio ter sido seu aluno de mestrado.

Aos professores membros da banca de qualificação e de defesa. Agradeço à Professora Dra. Itala M. Loffredo D'Ottaviano pelas sugestões e pela acolhida no Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, da Unicamp, no período em que fui seu aluno do curso de Teoria de Conjuntos. Ao Professor Dr. Paulo Isamo Hiratsuka pelas considerações feitas a meu trabalho.

À Secretaria de Estado da Educação de São Paulo pelo auxílio financeiro concedido. Meus agradecimentos a Leni pela atenção dispensada.

Aos colegas professores da Escola Estadual Joaquim Ribeiro pela paciência que tiveram comigo nos momentos de dificuldade.

Aos colegas e professores do programa de pós-graduação.

Às secretárias e funcionários do Departamento de Matemática.

Ao amigo Cláudio, colega da graduação. Sem o seu incentivo não estaria hoje em Rio Claro.

Finalmente, meus agradecimentos a Maria Helena, minha mãe, a Patrícia, minha querida irmã, e a Marcelo, meu cunhado, pelo apoio que me deram nesses dois anos e meio.

## SUMÁRIO

Índice .....	i
Resumo .....	iii
Abstract .....	iv
Introdução .....	1
Capítulo 1 – A noção de função em <i>Begriffsschrift</i> .....	5
Capítulo 2 – A noção de função em <i>Os Fundamentos da Aritmética</i> .....	32
Capítulo 3 – A noção de função em <i>Leis Fundamentais da Aritmética</i> .....	47
Considerações finais .....	73
Referências bibliográficas .....	76
Apêndice A .....	79
Apêndice B .....	83

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO .....	1
 CAPÍTULO 1 – A NOÇÃO DE FUNÇÃO EM <i>BEGRIFFSSCHRIFT</i> .....	 5
1.1 – As duas espécies de símbolos e seu significado .....	6
1.2 – Conteúdo conceitual e o sinal de identidade de conteúdo .....	10
1.3 – Função e argumento .....	12
1.4 – Função e generalidade .....	16
1.5 – Lógica proposicional .....	19
1.6 – Lógica de predicados (ou funcional) de primeira ordem .....	22
1.7 – Séries e lógica de predicados (ou funcional) de segunda ordem .....	24
 CAPÍTULO 2 – A NOÇÃO DE FUNÇÃO EM <i>OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA</i> .....	 32
2.1 – Função e objeto .....	32
2.2 – Atribuições numéricas .....	35
2.3 – Uma definição recursiva de número .....	37
2.4 – Uma definição contextual de número .....	39
2.5 – Uma definição explícita de número .....	40
2.6 – Definição dos números individuais e da relação sucessor .....	43
 CAPÍTULO 3 – A NOÇÃO DE FUNÇÃO EM <i>LEIS FUNDAMENTAIS DA ARITMÉTICA</i> .....	 47
3.1 – Sentido e referência de nomes próprios .....	47
3.2 – Curso-de-valores de funções e o paradoxo de Russell .....	49
3.3 – Hierarquia de funções .....	54
3.4 – As funções de <i>Leis Fundamentais</i> .....	58
3.5 – Sentido e referência de funções .....	62
3.6 – Por que função e argumento em lugar de sujeito e predicado? .....	67

	ii
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	76
APÊNDICE A .....	79
APÊNDICE B .....	83



## RESUMO

Neste trabalho apresentamos e analisamos o conceito fregiano de função, presente nos três livros de Frege: *Begriffsschrift*, *Os Fundamentos da Aritmética* e *Leis Fundamentais da Aritmética*. Discutimos ao longo dele o que Frege entendia por função e argumento, as modificações conceituais que tais noções sofreram no período de publicação de seus livros e a importância dessas noções para a sua filosofia. Para tanto, analisamos a linguagem artificial do primeiro livro, a definição de número do segundo, e os casos particulares de funções que são definidos no terceiro, bem como as considerações contidas em outros escritos do filósofo alemão. Verificamos uma caracterização puramente sintática de função em *Begriffsschrift*, uma distinção entre o sinal de uma função e aquilo que ele denota em *Os Fundamentos da Aritmética*, e a associação de dois elementos distintos a uma expressão funcional em *Leis Fundamentais da Aritmética*: o seu sentido e a sua referência. Finalmente, constatamos que a originalidade do sistema fregiano reside na possibilidade de considerar esse ou aquele termo de uma proposição como o argumento (ou os argumentos) de uma função.

**Palavras-chave:** Logicismo; Matemática - Fundamentos; Número; Conceito; Linguagem.

## ABSTRACT

In this work we present and analyze the Fregean concept of function, present in the three books by Frege: *Begriffsschrift*, *The Foundations of the Arithmetic* and *Fundamental Laws of the Arithmetic*. We discuss what Frege understood by function and argument, the conceptual modifications that such notions suffered in the period of publication of those books and the importance of these notions for his philosophy. For so much, we analyze the artificial language of the first book, the definition of number in the second, and the particular cases of functions that are defined in the third, as well as the considerations contained in other works by the philosopher. We verify a purely syntactic characterization of function in *Begriffsschrift*, a distinction between the sign of a function and what it denotes in *The Foundations of the Arithmetic*, and the association of two different elements to a functional expression in *Fundamental Laws of the Arithmetic*: its sense and its reference. Finally, we verify that the originality of the Frege's system is based on the possibility of considering one or other term of a proposition as the argument (or the arguments) of a function.

**Key-words:** Logicism; Mathematics - Foundations; Number; Concept; Language.

## INTRODUÇÃO

Após uma série de progressos durante os séculos anteriores, a álgebra e a análise chegaram ao século XIX carentes de uma fundamentação rigorosa. Tanto as operações algébricas com números complexos como a noção de limite, esperavam uma definição satisfatória de número real para que pudessem receber um tratamento mais preciso. Por esse motivo, os fundamentos últimos destas duas ciências dependiam essencialmente dos da teoria dos números. O estabelecimento das leis pelas quais se firmava toda a aritmética tornou-se, assim, uma das tarefas mais importantes para os matemáticos desse período, e a palavra “aritmética” passava a ser usada em uma acepção que abrangia, além da própria teoria dos números, a álgebra e a análise.

De acordo com Dummett,<sup>1</sup> o programa logicista desenvolvido pelo filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925) caracterizava-se, basicamente, como uma tentativa de mostrar que tais leis poderiam ser exprimíveis em termos puramente lógicos e que repousariam sobre leis lógicas apenas. Ele desenvolveu sua tese ao longo de vários anos e a expôs gradativamente em três livros, a saber, *Conceitografia, uma linguagem fórmula, modelada sobre aquela da aritmética, para o pensamento puro* (Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens), publicado pela primeira vez em 1879; *Os Fundamentos da Aritmética, uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número* (Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl), publicado primeiramente em 1884; e *Leis Fundamentais da Aritmética, derivadas conceitograficamente* (Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet), o primeiro volume publicado em 1893 e o segundo, em 1903.

Estritamente falando, a primeira publicação é um livro de lógica e a segunda, de filosofia da matemática. Em *Begriffsschrift* é apresentada uma linguagem artificial com regras de manipulação e exemplos de aplicação, com a qual Frege pretendia exprimir as noções e leis da aritmética; em *Os Fundamentos da Aritmética* são discutidas a noção de número e a natureza das leis da aritmética. Quanto ao terceiro livro, *Leis Fundamentais da Aritmética*, nele os resultados obtidos no segundo são mostrados por meio da notação contida no primeiro, e uma série de teoremas é demonstrada.

Mas estes não foram os únicos trabalhos do filósofo publicados no período; uma série de artigos de sua autoria também foi impressa nos anos que seguiram a publicação de

---

<sup>1</sup> Cf. DUMMETT, 1991, p. 43

*Begriffsschrift*. Eles visavam, sobretudo, elucidar noções que eram apresentadas de modo obscuro nos livros ou que eram alvos de críticas, ou defender a linguagem artificial de Frege, que, aliás, foi considerada muito complicada na época e acabou restringindo a leitura de seu livro a um número reduzido de pessoas.<sup>2 3</sup> Dessas noções, sem dúvida uma das mais importantes foi a de função e argumento. O próprio Frege reconheceu seu mérito, tendo-as discutido em muitos de seus artigos; já em seu primeiro livro escreveu: “Acredito que a substituição dos conceitos de sujeito e predicado pelos de argumento e função afirmar-se-á ao longo do tempo.”<sup>4 5</sup> Mesmo a introdução dos quantificadores, apontada por Kneale como a mais importante contribuição do filósofo alemão para a lógica,<sup>6</sup> não seria possível sem que estas noções fossem desenvolvidas.

Posto que Frege tenha admitido como decisivo o papel que tais conceitos tinham em sua obra, algumas questões inevitavelmente surgem. Por exemplo, o que Frege entendia por função? E por argumento de uma função? Estas noções sofreram alguma modificação conceitual em toda a extensão de sua obra? Por que elas são importantes? Em que reside sua originalidade? Pois estas questões são discutidas ao longo do presente trabalho. Quem desejar conhecer o programa logicista de Frege, é certo que não se dará por satisfeito lendo apenas um dos três livros; contentar-se-á tampouco aquele que almejar compreender suas idéias sobre lógica ou semântica lendo tão somente um ou outro artigo. Por esse motivo, empreendemos em nosso trabalho uma leitura dos três livros e de boa parte dos artigos escritos pelo filósofo. E tal leitura foi orientada pela noção fregiana de função. Desse modo, além de nosso objeto de estudo, esta noção também foi nosso guia de análise, e todo o trabalho apresenta-se organizado consoante esta diretriz. Para tanto, dividimo-lo em três capítulos, por meio dos quais apresentamos a evolução do pensamento de Frege no período em que esse conceito foi criado e discutido por ele.

No capítulo 1 – A Noção de Função em *Begriffsschrift*, analisaremos a noção de função tal como Frege a concebia na época em que escreveu seu primeiro livro, isto é, como puramente sintática e ausente de questões de natureza semântica ou ontológica. Ao contrário

---

<sup>2</sup> Nos artigos *Função e Conceito* e *Sobre Conceito e Objeto*, por exemplo, Frege elucidava as noções de função, conceito e objeto. Em *Sobre Conceito e Objeto* e *Sobre a Finalidade da Conceitografia*, rebate críticas de Kerry e Schröder, respectivamente. Em *Cálculo Lógico de Boole e a Conceitografia*, o filósofo defende a superioridade de sua conceitografia sobre o cálculo lógico de Boole.

<sup>3</sup> Russell e outros ignoraram por um longo tempo o primeiro livro de Frege por preguiça em aprender a sua notação (cf. nota 7 em BYNUM, 1972b, p. 30).

<sup>4</sup> *Begriffsschrift*, prefácio, tradução nossa.

<sup>5</sup> Insbesondere glaube ich, dass die Ersetzung der Begriffe Subject und Praedicat durch Argument und Function sich auf die Dauer bewähren wird.

<sup>6</sup> Cf. KNEALE; KNEALE, 1991, p. 515-517.

da maioria dos textos que lemos a respeito do livro, não nos limitamos a uma parte específica das três em que ele se divide, pois cada uma delas possui elementos caros a nossa pesquisa. Comentamos, por isso, aquelas passagens que julgamos mais importantes de todas elas. Na primeira são introduzidos o “alfabeto” da linguagem artificial e as regras para o manuseio dos seus símbolos e sentenças. Discutimos aí como as noções de função e argumento, enquanto elementos sintáticos, são manuseadas nessa linguagem. A segunda parte do livro trata dos axiomas de lógica proposicional e de predicados de primeira ordem, e dos teoremas que deles derivam; assim não poderíamos deixar de comentar também esta parte, uma vez que sem essas noções não seria possível o estabelecimento de um sistema axiomático de primeira ordem. A terceira parte é onde são fornecidos alguns exemplos de utilização da linguagem, mais especificamente, de como exprimir as noções de propriedade hereditária e de relação de ancestralidade nessa linguagem. Propriedades e relações são aí denotados por símbolos funcionais de um e dois argumentos, respectivamente, donde a necessidade de sua utilização e dos comentários que tecemos a respeito desse uso.

No capítulo 2 – A Noção de Função em *Os Fundamentos da Aritmética*, discutiremos a distinção fregiana entre função e objeto, e examinaremos a definição de Frege da noção de número à luz de tal distinção. Nessa obra, o filósofo estabeleceu como pretendia mostrar que a aritmética era uma parte da lógica. Na verdade, para fornecer uma definição satisfatória de número natural, e concretizar seus objetivos, ele precisou introduzir no livro as noções de conceito, objeto e extensão de conceito. Estes conceitos, embora não elucidados no livro, são partes essenciais de sua definição e, como veremos, uma consequência imediata desse fato é que o conceito de função, tal como Frege o entendia, também o é.

Finalmente, discutiremos no capítulo 3 – A Noção de Função em *Leis Fundamentais da Aritmética*, o que Frege entende por função depois de publicado seu segundo livro. Analisaremos algumas das idéias contidas nos artigos *Função e Conceito* (Funktion und Begriff), *Sobre Sentido e Referência* (Über Sinn und Bedeutung), *Sobre Conceito e Objeto* (Über Begriff und Gegenstand), *Considerações sobre Sentido e Referência* (Ausführungen über Sinn und Bedeutung) e *Cálculo Lógico de Boole e a Conceitografia* (Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift), publicados pela primeira vez em 1891, 1892, 1892, 1969 e 1969, respectivamente, e o impacto dessas idéias sobre seu projeto. Tal impacto faz-se presente em *Leis Fundamentais da Aritmética* na medida em que surgem modificações em relação à notação e às idéias contidas nos dois primeiros livros. Após *Begriffsschrift*, a noção de função não mais foi tratada como algo puramente simbólico, e após *Os Fundamentos da Aritmética*, ela passou a ser o *referente* (Bedeutung) de uma expressão (ou letra) funcional. As

funções de *Leis Fundamentais*, a relação existente entre uma expressão funcional, seu sentido (Sinn) e seu referente (Bedeutung), e a importância do conceito de função na obra de Frege serão os principais tópicos discutidos.

Como sabemos, o programa logicista de Frege não logrou sucesso, por motivos que teremos oportunidade de comentar no último capítulo e que também estão associados a sua noção lógica de função. Apesar deste fato, as idéias que foi obrigado a desenvolver para que tal programa se cumprisse, especialmente em lógica e em filosofia da linguagem, resistiram ao tempo e fizeram de Frege um dos mais influentes filósofos do século XX. As análises que fizemos, embora busquem (não sendo possível que o façam perfeitamente) preservar essas idéias tal como o filósofo as entendia, ocorreram à luz da lógica formal contemporânea e, por esse motivo, esperamos que dêem a dimensão exata de seu peso para esta disciplina.

## CAPÍTULO 1 – A NOÇÃO DE FUNÇÃO EM *BEGRIFFSSCHRIFT*

“Conceitografia” é a tradução que empregamos aqui para o termo “Begriffsschrift” de Frege.<sup>7</sup> Para evitar confusões, quando usarmos a palavra alemã estaremos nos referindo ao livro homônimo, e quando empregarmos a correspondente palavra em português, à linguagem formal contida no livro.

Como dissemos na Introdução a este trabalho, *Begriffsschrift* é basicamente um livro de lógica; na verdade, talvez seja o mais importante livro de lógica já escrito.<sup>8</sup> Os avanços mais significativos promovidos nas suas pouco mais de oitenta páginas são enumerados por Bynum: a invenção das funções lógicas, a invenção da teoria de quantificação, o primeiro aparecimento do cálculo de predicados de primeira ordem, a primeira aplicação do método lógico, a primeira formulação do cálculo proposicional como um sistema lógico, a primeira definição de ancestral de uma relação, a primeira análise lógica de prova por indução matemática, o primeiro uso do “método de tabelas de verdade” para definir os conectivos proposicionais e justificar axiomas, o primeiro uso do condicional material em um sistema lógico, a primeira explicação consistente da noção de variável e a primeira distinção entre axiomas e regras de inferência.<sup>9</sup>

Mas nenhum desses progressos teria sido possível sem a notação que dá nome ao livro, notação esta que foi criada devido à insuficiência da linguagem ordinária para os propósitos de seu inventor. Entre estes propósitos estava o desejo de poder melhor exprimir a inferência, deixando-a livre de lacunas, e de poder distinguir entre conceitos e indivíduos, algo possível somente em uma linguagem logicamente perfeita.<sup>10</sup> Inspirado, pois, na linguagem de fórmulas da aritmética, Frege concebeu uma forma de escrita bidimensional que acomodava o conteúdo de um juízo simples em uma linha e os conteúdos dos diversos juízos simples de um juízo composto ao longo de uma coluna, sendo que todas as linhas de uma mesma coluna eram conectadas entre si por símbolos que exprimiam as relações lógicas entre seus conteúdos. Não se justificam os comentários de que a conceitografia seja uma escrita complicada; na verdade, o seu caráter bidimensional até favorece a leitura. O único inconveniente talvez seja o fato de seus símbolos serem linhas, o que em alguns casos pode

<sup>7</sup> Outras traduções comumente encontradas na literatura são *ideografia* e *notação conceitual*.

<sup>8</sup> Para Bocheński o livro de Frege só pode ser comparado aos *Analíticos Primeiros*, de Aristóteles (cf. BOCHEŃSKI, 1970, p. 268). Já Boolos acredita que o avanço representado por *Begriffsschrift* pode não ser tão grande quanto se imagina (cf. BOLOS, 1998, p. 237-254).

<sup>9</sup> BYNUM, T. W. *On the life and work of Gottlob Frege*. In: FREGE, G. *Conceptual Notation and Related Articles*. Oxford: Clarendon, 1972. p. 13-14

<sup>10</sup> Cf. FREGE, 1972, p. 83-89.

levar a uma expressão tipograficamente complexa. Isso deve ter gerado dificuldades de impressão na época da publicação do livro. Discutiremos tais símbolos no que se segue.

### 1.1 – As duas espécies de símbolos e seu significado

Os símbolos da conceitografia são de dois tipos, a saber, aqueles pelos quais diferentes objetos podem ser entendidos e aqueles que têm seu significado completamente determinado. Os símbolos do primeiro tipo são letras e os do segundo, os sinais  $—, |, \vdash, \equiv$  e  $\cup$ .<sup>11</sup>

Frege usa letras latinas minúsculas tanto como variáveis proposicionais quanto como variáveis individuais. Para indicar que uma letra está sendo usada como variável proposicional o traço horizontal “—” deve ser posto a sua esquerda. Denominado por Frege *traço de conteúdo* (Inhaltsstrich), este sinal indica que o conteúdo do símbolo ou da combinação de símbolos que o segue é um *conteúdo afirmável* (beurtheilbar Inhalt).<sup>12</sup> O traço vertical “|”, quando ligado à extremidade esquerda do traço de conteúdo, é chamado de *traço de juízo* (Urtheilsstrich), e com ele forma o símbolo  $\vdash$ , que por sua vez *indica* (angiebt) o conteúdo de um *juízo* (Urtheil). Frege observa que se o traço de juízo for omitido do sinal  $\vdash$ , então o juízo será transformado em uma *mera combinação de idéias* (blosse Vorstellungsverbindung), sobre a qual o escritor não *exprime* (ausdrückt) se *reconhece* (zuerkennt) ou não sua verdade.<sup>13</sup> Para ilustrar o que diz, fornece o seguinte exemplo:

<sup>11</sup> Logo no início da primeira seção do livro Frege observa que os símbolos usados na *teoria geral de magnitudes* (allgemein Grössenlehre) são de dois tipos: letras e sinais como  $+, -, \sqrt{\quad}, 0, 1, e 2$ . Tal distinção corresponde àquela que se faz hoje entre variáveis e constantes. O filósofo não era simpático à palavra “variável” porque ela evoca a idéia de algo que varia ao longo do tempo, e este, como se sabe, é uma grandeza que pertence à física e não à análise. Além disso, se algo varia, uma questão que imediatamente se coloca é: o que é que varia? Para Frege, não faz sentido dizer que um número varia. Ele preferia, desse modo, o termo “letra” em lugar de “variável” (cf. nota 4 em FREGE, 1971, p. 10 e cf. FREGE, 1978, p. 117-129).

<sup>12</sup> O verbo “beurtheilen” pode ser traduzido como “avaliar”, “julgar”. Assim, “beurtheilbar Inhalt” equivaleria em português às expressões “conteúdo avaliável” ou “conteúdo julgável”. Mas por “beurtheilbar Inhalt” Frege entende aqueles conteúdos que podem ser afirmados, ou seja, que podem tornar-se juízos, de modo que juízos são *conteúdos afirmados* ou *afirmações*. Por esse motivo, alguns tradutores têm vertido aquela expressão para “assertible content”, em inglês. É o caso, por exemplo, de Bynum (cf. BYNUM, 1972a). É também comum o emprego das expressões “judgeable content”, em inglês, “contenido enjuiciable”, em espanhol, e “conteúdo judicável”, em português. Para evitar neologismos, decidimos adotar ao longo do texto a expressão “conteúdo afirmável”.

<sup>13</sup> *Begriffsschrift*, § 2.



Signifique  $\vdash A$  o juízo ‘Pólos magnéticos opostos atraem-se mutuamente’; então  $\neg A$  não expressará esse juízo, e deve provocar no leitor meramente a idéia de atração mútua de pólos magnéticos opostos, digamos, a fim de extrair algumas conclusões a partir disto e com isso testar a correção do pensamento.<sup>14 15</sup>

Sublinha, em seguida, que nem sempre um conteúdo pode tornar-se um juízo quando o sinal  $\vdash$  preceder seu símbolo, como, por exemplo, no caso da idéia “casa”. Desse modo, faz uma distinção entre *conteúdos afirmáveis* e *não afirmáveis* (*beurtheilbar* und *unbeurtheilbar* Inhalte). Nenhuma definição de conteúdo e, portanto, de conteúdo afirmável, é dada no livro, mas Frege deixa claro em um trabalho posterior (o artigo *Sobre Conceito e Objeto*) que reúne sob a expressão “conteúdo afirmável” o que neste designa pelas palavras “pensamento” e “valor de verdade”, ou seja, o *sentido* (Sinn) e a *referência* (Bedeutung) de uma sentença.<sup>16</sup> Quando diz “o conteúdo ‘casa’”, é provável que estivesse se referindo ao sentido (ou até mesmo à referência) do nome “casa”. O fato é que “casa” é um termo singular ou conceitual e ocorre como parte de uma sentença, mas nunca como uma sentença completa; seu conteúdo não pode ser, desse modo, asseverado como ocorre com o de uma sentença. O exemplo fornecido em uma nota de rodapé não dá margem a dúvidas: a circunstância que “existe uma casa” é um conteúdo afirmável, mas não a idéia “casa”, que é uma parte deste.<sup>17</sup>

Quando o traço vertical “|” conecta dois traços de conteúdo, como em  $\sqsubset$ , recebe o nome de *traço de condição* (Bedingungsstrich). No caso de  $A$  e  $B$  denotarem conteúdos afirmáveis, é lícito o emprego do traço de conteúdo para formar as expressões “ $\neg A$ ” e “ $\neg B$ ”, e mediante o uso do traço de condição para ligar os dois conteúdos obtém-se daí a expressão mais complexa  $\sqsubset \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$ . Uma vez que esta também denota um conteúdo afirmável, acrescentamo-lhe o traço de conteúdo, resultando em  $\vdash \sqsubset \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$ .<sup>18 19</sup> Agora, para  $A$  e  $B$  quatro possibilidades se apresentam:

<sup>14</sup> *Begriffsschrift*, § 2, tradução nossa.

<sup>15</sup> Bedeute z. B.  $\vdash A$  das Urtheil: ‘die ungleichnamigen Magnetpole ziehen sich an’; dann wird  $\neg A$  nicht dies Urtheil ausdrücken, sondern lediglich die Vorstellung von der gegenseitigen Anziehung der ungleichnamigen Magnetpole in dem Leser hervorrufen sollen, etwa um Folgerungen daraus zu ziehen und na diesen die Richtigkeit des Gedankens zu prüfen.

<sup>16</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 95.

<sup>17</sup> Cf. *Begriffsschrift*, § 2.

<sup>18</sup> Em notação contemporânea escreveríamos isso como:  $B \rightarrow A$ .

<sup>19</sup> Poder-se-ia objetar, nesse ponto, que o traço vertical é um símbolo cujo significado varia (de acordo com o modo com que é ligado ao traço de conteúdo), contrariando o fato de pertencer à segunda categoria de sinais da conceitografia. Mas o traço de juízo não é um símbolo da linguagem artificial de Frege, na medida em que atua

- (i)  $A$  é afirmado e  $B$  é afirmado;
- (ii)  $A$  é afirmado e  $B$  é negado;
- (iii)  $A$  é negado e  $B$  é afirmado;
- (iv)  $A$  é negado e  $B$  é negado.

Com a junção do traço de juízo à expressão anterior obtém-se  $\vdash \begin{array}{l} A \\ \lrcorner B \end{array}$ , que corresponde ao juízo: “*A possibilidade (iii) não tem lugar (nicht stattfindet), mas uma das outras três sim*”. É interessante notar que Frege concebe seu traço de condição como um símbolo relacional;<sup>20</sup> neste caso, os conteúdos de  $A$  e  $B$  estarão na relação condicional (Bedingtheit) se, e somente se, a condição (iii) não se verificar. O traço de conteúdo indicará, portanto, que o conteúdo da expressão  $\begin{array}{l} A \\ \lrcorner B \end{array}$ , que equivale a “ $A$  e  $B$  estão na relação condicional”, é um conteúdo afirmável, isto é, que esta expressão é uma sentença e que seu conteúdo é uma proposição. O traço de juízo indicará que este conteúdo está sendo afirmado, ou seja, que é uma proposição verdadeira.

O juízo acima pode, segundo Frege, ser traduzido com o auxílio da conjunção “se” (wenn): “Se  $B$ ,  $A$ ”. No caso de  $B$  representar a circunstância que a lua está em quadratura com o sol e  $A$ , a circunstância que a lua aparece como um semi-círculo, ele pode ser lido como: “Se a lua está em quadratura com o sol, ela aparece como um semi-círculo”. A conexão de causa implícita na palavra “se” não é, contudo, expressa pelos símbolos de sua conceitografia.

<sup>21</sup> Mediante o emprego do traço de condição pode-se, evidentemente, ligar a expressão  $\vdash \begin{array}{l} A \\ \lrcorner B \end{array}$  a uma outra, digamos, “ $\neg I$ ”, formando expressões mais complexas como  $\begin{array}{l} \lrcorner A \\ \lrcorner B \\ \lrcorner I \end{array}$  ou  $\begin{array}{l} \lrcorner I \\ \lrcorner A \\ \lrcorner B \end{array}$ .

<sup>22</sup>

O próximo símbolo, o pequeno traço vertical “ $\neg$ ”, é chamado *traço de negação* (Verneinungsstrich) e quando ligado à extremidade esquerda do traço de conteúdo compõe com este o novo símbolo  $\lrcorner$ . A partir da letra  $A$ , por exemplo, obtém-se “ $\neg A$ ” mediante o emprego do traço de conteúdo e a partir deste a expressão da negação de “ $\neg A$ ” por meio do

---

como símbolo da asserção de um conteúdo. Tal idéia pode ser conferida em trabalhos posteriores de Frege como, por exemplo, em *Sobre a Finalidade da Conceitografia*: “Se quero asseverar um conteúdo como correto, coloco na extremidade esquerda do traço de conteúdo o traço de juízo:  $\vdash 2 + 3 = 5$ ” (FREGE, 1978, p. 146); e em *Função e Conceito*: “o traço de juízo não pode ser usado para formar uma expressão funcional, pois ele não serve conjuntamente com outros sinais, para designar um objeto.  $\vdash 2 + 3 = 5$  nada designa, mas assevera alguma coisa” (FREGE, 1978, p. 55). Assim, pois, o traço de juízo seria um símbolo meta-lingüístico, ou seja, um sinal acrescido à linguagem natural (no nosso caso, o português) para se falar a respeito da linguagem-objeto (aqui, a conceitografia).

<sup>20</sup> *Begriffsschrift*, § 8.

<sup>21</sup> *Ibidem*, § 5.

<sup>22</sup> *Ibidem*, § 5.

uso do traço de negação, no caso,  $\neg A$ . O conteúdo total se exprime com a junção de um novo traço de conteúdo, obtendo-se assim a expressão  $\neg\neg A$ . Esta apela-nos meramente para formar a idéia de que  $A$  não ocorre, sem exprimir se essa idéia é verdadeira, ao passo que  $\neg\neg A$  exprime o juízo “ $A$  não tem lugar”.<sup>23</sup> O traço de negação também pode ser visto como um símbolo relacional do seguinte modo: o conteúdo de  $A$  estará na relação de negação (ou satisfará tal propriedade) se, e somente quando,  $A$  for negado. O traço de conteúdo indicará que o conteúdo da expressão  $\neg A$  é um conteúdo afirmável e o traço de juízo, que tal conteúdo é uma proposição verdadeira.

A partir da lista de símbolos apresentada nos parágrafos precedentes outras relações entre conteúdos podem ser feitas. Aquelas que Frege apresenta em seu livro são as seguintes:<sup>24</sup>

	expressão	Significado	
(1)		a possibilidade (i) <i>não tem lugar</i>	
(2)		a possibilidade (iv) <i>não tem lugar</i>	
(3)		a negação de (1) <i>tem lugar</i> , ou seja, a possibilidade (i) <i>tem lugar</i>	
(4)		a conjunção de (1) e (2) <i>tem lugar</i> , ou seja, as possibilidades (i) e (iv) <i>não têm lugar</i>	
(5)		a negação de	a possibilidade (iv) <i>tem lugar</i>

Convém notar que a relações entre os conteúdos de  $A$  e  $B$  que estão sendo exprimidas por e pelas seis expressões acima correspondem a sete funções de verdade bivalentes

<sup>23</sup> *Begriffsschrift*, § 7

<sup>24</sup> Em notação contemporânea escreveríamos: (1)  $B \rightarrow \neg A$ ; (2)  $\neg B \rightarrow A$ ; (3)  $\neg(B \rightarrow \neg A)$ ; (4)  $\neg((\neg B \rightarrow A) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg A))$ ; (5)  $\neg(B \rightarrow A)$ ; (6)  $\neg(\neg A \rightarrow B)$ .

de dois argumentos.<sup>25</sup> As outras nove funções possíveis não foram contempladas por Frege, embora seus símbolos de condicional e negação fossem adequados para exprimir todas as dezesseis.<sup>26 27</sup>

Enfatiza Frege que se poderia exprimir a relação (3) por meio de um símbolo que correspondesse à palavra “e”, a saber,  $\{\overset{F}{\Delta}\}$ . Nesse caso,  $\overset{A}{\sqsubset} B$  poderia ser escrito como  $\neg\{\neg\overset{A}{B}\}$ .<sup>28</sup> Decide usar o símbolo de condicional porque, de acordo com ele, por meio deste pode-se exprimir a inferência<sup>29</sup> de modo mais simples.<sup>30</sup> Não lhe deve ter passado despercebido também o fato de que o acréscimo de um novo símbolo para exprimir uma relação já exprimível por outro seria algo supérfluo em um sistema que se propõe ser o mais econômico possível.

## 1.2 – Conteúdo conceitual e o sinal de identidade de conteúdo

O modo por que os juízos são representados na conceitografia prescinde de uma distinção entre sujeito e predicado, uma vez que, conforme expõe Frege, os conteúdos de dois juízos podem diferir de duas maneiras: primeiro, as conseqüências que podem ser derivadas de cada um destes juízos quando combinados com as mesmas premissas são as mesmas, segundo, este não é o caso. O critério de diferenciação entre dois conteúdos não está relacionado, portanto, à estrutura interna desses conteúdos, mas sim às possíveis conseqüências (sintáticas) dos mesmos. Um exemplo dado por Frege é o das proposições

<sup>25</sup> Pela seguinte ordem:

	$A$	$B$	$\overset{A}{\sqsubset} B$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(i)	1	1	1	0	1	1	0	0	0
(ii)	1	0	1	1	1	0	1	0	0
(iii)	0	1	0	1	1	0	1	1	0
(iv)	0	0	1	1	0	0	0	0	1

Obs. Os valores 1 e 0 correspondem, respectivamente, ao “verdadeiro” (ser afirmado) e ao “falso” (ser negado).

<sup>26</sup> O número de funções corresponde ao número de colunas da tabela; este é igual ao número de  $2^2$ -uplas de elementos do conjunto  $\{1,0\}$ , portanto  $2^{(2^2)} = 16$ .

<sup>27</sup> Uma prova de que o conjunto  $\{\rightarrow, \neg\}$  de conectivos é adequado pode ser encontrada em MENDELSON, 1997, p. 27-29.

<sup>28</sup> Empregando a notação atual, Frege está dizendo que  $B \rightarrow A$  pode ser escrito como  $\neg(B \rightarrow \neg A)$ , ou seja, que estas duas fórmulas são semanticamente equivalentes.

<sup>29</sup> Como veremos mais adiante, Frege usa uma só (explícita) regra de inferência: modus ponens (ou regra de destacamento). Por meio desta pode-se inferir  $A$  a partir de  $B \rightarrow A$  e  $B$ , de modo que apenas o conectivo  $\rightarrow$  é utilizado. Aqui,  $B \rightarrow A$  é a premissa maior e  $B$ , a premissa menor. O conectivo de negação teria que também ser usado caso fosse empregado o conectivo de conjunção. Donde se inferiria  $A$  a partir de  $\neg(B \wedge \neg A)$  e  $B$ .

<sup>30</sup> *Begriffsschrift*, § 7.

(Sätze): <sup>31</sup> “Em Platéia os gregos derrotaram os persas” e “Em Platéia os persas foram derrotados pelos gregos”, que diferem no primeiro aspecto. Embora a primeira sentença esteja na voz ativa e a segunda na voz passiva, o pensamento expresso por elas é o mesmo, de modo que o conteúdo de cada uma delas acarretará as mesmas conseqüências quando relacionado às mesmas premissas. Por *conteúdo conceitual* (begrifflichen Inhalt) Frege entendia a parte do conteúdo que é a mesma em ambas as sentenças; por isso não ser necessário, segundo ele, distinguir entre sentenças com o mesmo conteúdo conceitual. <sup>32</sup>

Embora não forneça uma definição precisa daquilo que entendia por conteúdo conceitual, é certo que Frege não confundia as noções de conteúdo e de conteúdo conceitual, pois afirma que o último é uma parte do primeiro. É óbvio, porém, pelos dois exemplos anteriores, que duas sentenças escritas em vozes diferentes, uma na ativa, outra na passiva, possuem o mesmo conteúdo conceitual. Se considerarmos que o que Frege chama aqui de conteúdo conceitual corresponde ao que ele mais tarde chamará de sentido (Sinn) de uma sentença, evidenciar-se-á que duas sentenças com o mesmo conteúdo conceitual também implicam as mesmas conseqüências, no sentido exposto no parágrafo precedente. Duas sentenças que exprimem o mesmo pensamento – como é o caso dos dois exemplos – podem levar às mesmas conseqüências, mas a recíproca nem sempre se verifica. As expressões “ $B \rightarrow A$ ” e “ $\neg(B \rightarrow \neg A)$ ”, do cálculo proposicional conduzem, por exemplo, às mesmas conclusões (quando combinadas às mesmas premissas), mas possuem sentidos (ou conteúdos conceituais) diferentes.

Na seção 8 de *Begriffsschrift* é introduzido um símbolo, a saber,  $\equiv$ , para indicar que dois sinais  $A$  e  $B$  possuem o mesmo conteúdo conceitual. O juízo  $\vdash(A \equiv B)$  assevera, portanto, tal indicação; o que implica que em lugar de  $A$  pode-se pôr  $B$ , e reciprocamente. Frege chama atenção para o fato de que esse símbolo produz uma bifurcação no significado dos símbolos de sua conceitografia, uma vez que, enquanto aquele estabelece uma relação entre os sinais e os conteúdos desses sinais, os demais símbolos limitam-se a efetuar uma relação entre os conteúdos dos sinais. Na verdade, consoante ele, o único modo do juízo acima ser sintético, no sentido kantiano, é admitindo-se que o símbolo  $\equiv$  indica uma relação entre sinais. <sup>33</sup>

Frege fornece duas justificativas para o emprego de sinais diferentes para o mesmo conteúdo – como  $A$  e  $B$  – em sua conceitografia, e, por conseqüência, de um símbolo para

<sup>31</sup> Aparentemente, nessa passagem Frege está usando a palavra “Satz” como sinônimo de “conteúdo de um juízo”.

<sup>32</sup> *Begriffsschrift*, § 3.

<sup>33</sup> Este ponto será mais atentiosamente discutido nos próximos capítulos.

expressar a igualdade entre esses sinais: o fato de um mesmo conteúdo poder ser determinado de diferentes maneiras, e a possibilidade de introduzir-se uma abreviatura para uma expressão longa.<sup>34</sup>

### 1.3 – Função e argumento

Na sentença  $\supset A/B$  há a indicação de uma relação condicional entre os conteúdos afirmáveis denotados por “ $A$ ” e “ $B$ ”, e na sentença  $\neg A$ , de uma propriedade satisfeita pelo conteúdo denotado por “ $A$ ”, a saber, a de ser negado. Ambas as relações apontadas se dão entre conteúdos afirmáveis e não entre elementos internos desses conteúdos. Assim, se  $A$  denotar a circunstância que existe uma casa, e  $B$  o conteúdo do termo “casa”, será permitido escrever “ $\neg A$ ” e, por conseguinte,  $\neg A$ , mas não “ $\neg B$ ”, e muito menos  $\neg B$  ou  $\supset A/B$ .

Considere, agora, a sentença “O hidrogênio é mais brilhante que o dióxido de carbono”. Podemos visualizar aqui a relação “ser mais brilhante que” existente entre “hidrogênio” e “dióxido de carbono”, a propriedade “ser mais brilhante que o dióxido de carbono” satisfeita por “hidrogênio”, a propriedade “ser menos brilhante que o hidrogênio” satisfeita por “dióxido de carbono”, entre outras; o fato é estas relações ocorrem entre os termos internos do conteúdo da sentença (ou proposição) em questão. Nesse sentido, essas relações têm uma natureza ligeiramente diferente daquelas do parágrafo anterior. Frege notou o seguinte: no lugar do símbolo “hidrogênio” na expressão “O hidrogênio é mais brilhante que o dióxido de carbono” podemos colocar os símbolos “oxigênio” ou “nitrogênio”, de modo que os conteúdos desses símbolos entram na relação em que o conteúdo de “hidrogênio” estava antes. Assim, a sentença decompõe-se em um componente “estável”, no caso a expressão “ser mais brilhante que o dióxido de carbono”, e em um componente que pode ser substituído por outro. O primeiro elemento Frege denominou *função*, o segundo, *argumento*. As sentenças “O dióxido de carbono é mais pesado que o hidrogênio” e “O dióxido de carbono é mais pesado que o oxigênio” podem ser consideradas a mesma função, porém com diferentes argumentos: “hidrogênio” e “oxigênio”, respectivamente. Se, porém, considerarmos “dióxido de carbono” o argumento, as duas sentenças poderão ser vistas como

<sup>34</sup> Ilustra o que diz com um exemplo: suponha que sobre uma circunferência existe um ponto fixo  $A$  sobre o qual gira um raio, e que este raio, à medida que se movimenta, determina sobre a circunferência um ponto variável  $B$ ; chegará o momento em que o ponto  $B$ , determinado pelo movimento contínuo do raio, coincidirá com o ponto  $A$ , a saber, quando o raio for tangente à circunferência pelo ponto  $A$  (*Begriffsschrift*, § 8).

funções diferentes, a saber, “ser mais pesado que o hidrogênio” e “ser mais pesado que o oxigênio”, do mesmo argumento.<sup>35 36</sup>

A sentença “Cato matou Cato” (“Cato den Cato tödtete”) também pode ser pensada como diferentes funções de um só argumento “Cato”, ao tomar a primeira ocorrência desta palavra como argumento, a segunda, ou ambas (neste último caso as duas ocorrências de “Cato” devem ser substituídas pela mesma coisa ao mesmo tempo). Caso o argumento seja a primeira ocorrência de “Cato”, a função será “matar Cato” (“den Cato zu tödten”), caso seja a segunda, a função será “ser morto por Cato” (“von Cato getödtet zu werden”), e caso sejam ambas, a função será “matar a si próprio” (“sich selbst zu tödten”).<sup>37</sup> O sujeito da oração, o seu objeto, ou os dois, podem, pois, funcionar como argumentos, sem que se necessite de tal distinção. O fato de o verbo encontrar-se no infinitivo nas três expressões revela que diferentes flexões do verbo determinam ainda a mesma função e são, desse modo, irrelevantes. Já na sentença “O hidrogênio é mais brilhante que o dióxido de carbono”, “hidrogênio” e “dióxido de carbono” podem valer como dois argumentos da mesma função “ser mais brilhante que”, e daí temos uma função com dois argumentos.

Um outro exemplo interessante fornecido por Frege é o seguinte: a sentença “o centro de massa do sistema solar não tem nenhuma aceleração, se somente forças internas atuam sobre o sistema solar”,<sup>38</sup> e tal como a do parágrafo precedente em relação a “Cato”, pode ser considerada como uma função do argumento “sistema solar” de vários modos. Vamos considerar o caso em que as duas ocorrências de “sistema solar” são tomadas como argumento. Notemos que a sentença é uma composição de duas sentenças mais simples, a saber, “o centro de massa do sistema solar não tem nenhuma aceleração” e “somente forças internas atuam sobre o sistema solar”. Nesse caso, temos as funções “não ter nenhuma aceleração” e “sofrer somente a ação de forças internas”, a primeira com o argumento “o centro de massa do sistema solar”, a segunda com o argumento “sistema solar”. Mas o argumento da primeira função, no caso “o centro de massa do sistema solar”, pode ser também decomposto na função “o centro de massa do” de argumento “sistema solar”. Assim, temos finalmente duas funções do mesmo argumento “sistema solar”. Note que a expressão que se decompõe não precisa denotar um conteúdo afirmável, como é o caso de “o centro de massa do sistema solar”. Além disso, como as duas sentenças mais simples estão ligadas pela

<sup>35</sup> *Begriffsschrift*, § 9.

<sup>36</sup> Note que quando Frege diz que as duas sentenças podem ser vistas como a mesma função ou como funções diferentes está confundindo a função, que é apenas uma parte da expressão (compare com sua definição), com a expressão toda, no caso, a sentença em que ela ocorre.

<sup>37</sup> *Begriffsschrift*, § 9.

<sup>38</sup> *Ibidem*, § 9.

partícula “se”, podemos conceber as duas funções “não ter nenhuma aceleração” e “sofrer somente a ação de forças internas” como argumentos de uma só função de dois argumentos. A percepção desse fato implica uma interpretação funcional (no sentido fregeano) do símbolo de condicional, interpretação esta que foi dada (explicitamente) por Frege em uma publicação posterior, o artigo *Função e Conceito*, e que discutiremos mais detalhadamente nos próximos capítulos. Mais geralmente, ele coloca o seguinte:

Se em uma expressão, cujo conteúdo não necessita ser afirmável, um símbolo simples ou complexo ocorre em um ou mais lugares e imaginamo-lo substituível em todos ou alguns destes lugares por outro [símbolo], porém em toda parte pelo mesmo, então chamamos a parte da expressão que neste caso mostra-se invariável função, e a parte substituível, seu argumento.<sup>39 40 41</sup>

A definição acima é puramente sintática, isto é, funções e seus argumentos são meramente expressões. Não que Frege assim os considere, pois na seção 11 de *Begriffsschrift* ele chega a usar o termo “símbolo funcional” (Functionszeichen) em lugar de “função”, diferenciando o símbolo daquilo a que ele se refere. Mas questões relativas ao que estas expressões denotam e ao tipo de relação que há entre elas e aquilo que denotam não são discutidas no livro.

Muito cuidado deve ser tomado, entretanto, ao se comparar as sentenças “O número 20 pode ser representado como a soma de quatro quadrados” e “Todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de quatro quadrados”. Poder-se-ia considerar aqui que “ser representável como a soma de quatro quadrados” é uma função que tem no primeiro caso o argumento “o número 20” e no segundo, “todo inteiro positivo”. Isso é o que sugere a estrutura gramatical das sentenças: elas possuem o mesmo predicado: “pode ser representado como a soma de quatro quadrados” e, respectivamente, os sujeitos “o número 20” e “todo inteiro positivo”. Porém, como observa Frege, tal consideração é errônea; “o número 20” e

---

<sup>39</sup> *Begriffsschrift*, § 9, tradução nossa.

<sup>40</sup> Wenn in einem Ausdrucke, dessen Inhalt nicht beurtheilbar zu sein braucht, ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen an einer oder an mehren Stellen vorkommt, und wir denken es an allen oder einigen dieser Stellen durch Anderes, überall aber durch Dasselbe ersetzbar, so nennen wir den hierbei unveränderlich erscheinenden Theil des Ausdruckes Function, den ersetzbaren ihr Argument.

<sup>41</sup> Quando diz que o conteúdo da expressão não necessita ser afirmável, o filósofo está querendo dizer que tal expressão não precisa ser uma fórmula, isto é, que ela pode ser um termo.



“todo inteiro positivo” não são conceitos da *mesma categoria* (gleichen Ranges),<sup>42</sup> pois aquilo que é afirmado do número 20 nem sempre pode ser afirmado de todo inteiro positivo.

<sup>43</sup> Em geral, a estrutura gramatical de uma sentença não corresponde, portanto, a sua estrutura lógica.

Mas se “todo inteiro positivo” não é argumento da função “ser representável como a soma de quatro quadrados”, então qual termo da sentença constitui esse argumento? De acordo com Frege, nesse caso o argumento torna-se indeterminado. Assim, as diferentes maneiras em que uma sentença como “O hidrogênio é mais brilhante que o dióxido de carbono” pode ser considerada como uma função deste ou daquele argumento é irrelevante, pois, estes termos são, neste caso, completamente determinados. O mesmo não ocorre com a sentença “Todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de quatro quadrados”. O próprio conteúdo da sentença determina como ela pode ser dividida em função e argumento, independentemente de como olhamos para ela.<sup>44</sup>

Como vimos, os traços de condição e negação denotam relações específicas entre conteúdos afirmáveis e por isso possuem significado específico dentro da conceitografia. Não temos, no entanto, um número finito de relações entre conteúdos não afirmáveis, pois há uma infinidade de sentenças; além disso, uma mesma sentença pode determinar mais de uma relação possível entre seus termos integrantes, dependendo de qual parte é tomada como função e de qual parte ou quais partes são tomadas como seus argumentos. Desse modo, é preciso que tais relações sejam indicadas indeterminadamente. Frege sublinha no prefácio de *Begriffsschrift* que o mais imediato ponto de contato entre sua linguagem artificial e a da aritmética é o modo como as letras são usadas. Em análise, uma expressão como  $f(x)$  indica indeterminadamente uma função  $f$  de argumento  $x$ , onde  $x$  é um número (indicado indeterminadamente pela letra  $x$ ). Frege estende esta espécie de notação para sua conceitografia.

Uma função indeterminada do argumento  $A$  pode ser indicada mediante a expressão  $\Phi(A)$  e uma função (também indeterminada) dos dois argumentos  $A$  e  $B$  o pode mediante a expressão  $\Psi(A, B)$ . Os lugares de  $A$  e  $B$  dentro dos parênteses representam a posição que  $A$  e  $B$  ocupam na função, independente de estas letras ocuparem um ou mais lugares na mesma expressão. Portanto,  $\Psi(A, B)$  em geral difere de  $\Psi(B, A)$ . Funções indeterminadas com mais

---

<sup>42</sup> Em obras posteriores, especialmente a partir do artigo *Sobre Conceito e Objeto*, tal distinção é melhor esclarecida: a primeira expressão refere-se a um objeto (Gegenstand), a segunda, a um conceito (Begriff).

<sup>43</sup> *Begriffsschrift*, § 9.

<sup>44</sup> *Ibidem*, § 9.

de dois argumentos são expressas de modo similar. O símbolo  $\Phi$  na expressão  $\Phi(A)$  pode, segundo Frege, ser substituído por outros símbolos tais como  $X$  e  $\Psi$ ; obtém-se, daí, outras funções do argumento  $A$ . Isso implica que  $\Phi(A)$  pode ser considerada uma função do argumento  $\Phi$ .<sup>45</sup> O juízo  $\vdash \Phi(A)$  pode ser lido como “ $A$  tem a propriedade  $\Phi$ ” e o juízo  $\vdash \Psi(A, B)$  como “ $B$  está na relação  $\Psi$  com  $A$ ”<sup>46</sup> ou “ $B$  é um resultado de uma aplicação do procedimento (Verfahren)  $\Psi$  ao objeto  $A$ ”.<sup>47</sup>

#### 1.4 – Função e generalidade

Para o caso de uma expressão como “ $\Phi(a)$ ” possuir um conteúdo afirmável, Frege usa o símbolo  $\ulcorner$ , chamado por ele de *concauidade* (Höhlung), com uma letra gótica na formação do juízo  $\ulcorner \Phi(a)$ . Este asseve que à função  $\Phi$  corresponde o verdadeiro – ou, no jargão fregiano, que a função  $\Phi$  é um fato (ist eine Thatsache) –, qualquer que seja o seu argumento. A concauidade com a letra gótica delimita o alcance (Gebiet) da generalidade significada pela

letra, como em  $\ulcorner \Phi(a)$ , onde a generalidade de  $K$  aplica-se apenas ao conteúdo que a segue:  $\ulcorner \Phi(a)$ . Para que a primeira expressão torne-se um juízo não pode ocorrer que  $\ulcorner \Phi(a)$  seja afirmado e  $A$  negado; o que não significa que para um particular  $\Delta$  não possa ser  $\Phi(\Delta)$  afirmado e  $A$  negado. A mesma letra gótica pode ocorrer em vários escopos em um juízo sem que o significado que lhe possamos atribuir em um desses escopos seja estendido a

outros. É caso, por exemplo, da expressão  $\ulcorner \ulcorner X(a) \ulcorner \Phi(a)$ . E pode acontecer ainda de o alcance

de uma letra incluir o de outra, como no caso de  $\ulcorner \ulcorner A(a) \ulcorner B(a, \epsilon)$ . Nesta é permitido substituir uma letra gótica ao longo de seu escopo por outra, contanto que diferentes letras sejam empregadas onde diferentes letras estavam antes.<sup>48</sup>

<sup>45</sup> *Begriffsschrift*, § 10.

<sup>46</sup> Veremos no capítulo 2, que em *Os Fundamentos da Aritmética* Frege também escreve: “ $A$  mantém a relação  $\Psi$  com  $B$ ”.

<sup>47</sup> Pode parecer estranha, a princípio, a expressão “procedimento”, mas como veremos na última seção deste capítulo, Frege tinha em mente a definição do procedimento de “somar um”, essencial para o desenvolvimento de sua tese logicista.

<sup>48</sup> *Begriffsschrift*, § 11

A principal tarefa das letras em sua conceitografia, consoante o próprio Frege, é exprimir generalidade.<sup>49</sup> Uma letra atua como indicadora indefinida de uma sentença ou de partes de uma sentença. Assim, a generalidade, vista como propriedade dos conteúdos das sentenças,<sup>50</sup> pode manifestar-se em expressões como “Se  $a$ , então  $a$ ” ou “Se  $a$  é um número inteiro positivo, então  $a$  pode ser escrito como a soma de quatro quadrados”. Como vemos, a última sentença decompõe-se em duas expressões menores “ $a$  é um número inteiro positivo” e “ $a$  pode ser escrito como a soma de quatro quadrados”, que são nela conectadas pelas palavras “se” e “então”. Não menos difícil é perceber que ela possui o mesmo conteúdo que a sentença “Todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de quatro quadrados”.<sup>51</sup> Uma conseqüência deste fato é que esta última pode ser substituída pela expressão  $\ulcorner \begin{array}{l} P(a) \\ X(a) \end{array} \urcorner$ , desde que  $P$  denote a função “ser representável como a soma de quatro quadrados” e  $X$  a função “ser um inteiro positivo”. Talvez por essa razão Frege assinale que o juízo  $\ulcorner \text{---} X(a) \urcorner$  pode ser colocado no lugar de  $\ulcorner X(a) \urcorner$ , se  $a$  ocorrer somente nos lugares de argumento de  $X(a)$ .<sup>52</sup>

Nem sempre é possível, entretanto, por o segundo no lugar do primeiro, pois pode ser que  $\ulcorner \text{---} X(a) \urcorner$  exprima um conteúdo afirmável e  $X(a)$  não. Considere, por exemplo, a

expressão  $\ulcorner \begin{array}{l} x^4 = 17 \\ x^2 = 4 \end{array} \urcorner$ . Ela não expressa, nas palavras de Frege, nem um conteúdo verdadeiro nem um falso. Isso porque quando  $x = 2$  ou quando  $x = -2$ , o conteúdo corresponde ao falso, e em todas as outras situações ao verdadeiro. A letra  $x$ , neste caso, não confere generalidade de conteúdo sobre tal expressão, e por isso esta é chamada por Frege de quase-sentença.<sup>53</sup>

Mas se nela introduzirmos a concavidade com uma letra gótica, a expressão resultante

$\ulcorner \text{---} \begin{array}{l} a^4 = 17 \\ a^2 = 4 \end{array} \urcorner$  exprimirá um conteúdo afirmável, visto que a tal sentença corresponderá o

falso. Para corroborar esta conclusão, podemos decompor  $\ulcorner \begin{array}{l} x^4 = 17 \\ x^2 = 4 \end{array} \urcorner$  em uma função de

argumento  $x$ . Daí, não é o caso que  $\ulcorner \begin{array}{l} x^4 = 17 \\ x^2 = 4 \end{array} \urcorner$  seja um fato independente do que se coloque

<sup>49</sup> *Begriffsschrift*, § 1.

<sup>50</sup> *Ibidem*, § 11.

<sup>51</sup> Cf. FREGE, 2002, p. 95.

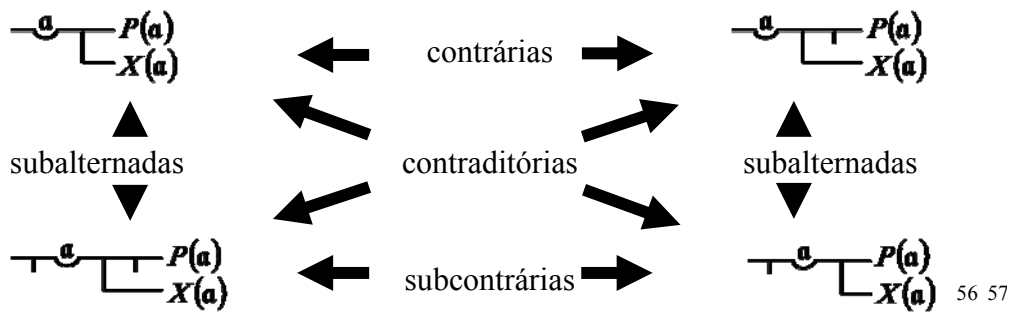
<sup>52</sup> *Op. cit.*, § 11.

<sup>53</sup> Cf. FREGE, 1979, p. 187-191.

no lugar de  $x$ , pois pode acontecer de  $x$  ser igual a 2, e, portanto,  $\overline{a} \begin{cases} a^4 = 17 \\ a^2 = 4 \end{cases}$  não corresponderá ao verdadeiro. Concluimos, então, que a expressão com a concavidade e a letra gótica é uma sentença e, assim, possui um conteúdo afirmável, diferente daquela com a letra latina  $x$ .

Combinações da concavidade com o traço de negação produzem outros tipos de expressões, tais como  $\overline{\overline{a}} \overline{X(a)}$ ,  $\overline{a} \overline{\overline{X(a)}}$  e  $\overline{\overline{\overline{a}}} \overline{\overline{X(a)}}$ ,<sup>54</sup> que correspondem, respectivamente, às sentenças “Há algo que não possui a propriedade  $X$ ”, “Não há nada que possui a propriedade  $X$ ” e “Há algo que possui a propriedade  $X$ ”. Se se identificar aquilo que tem a propriedade  $X$  com “um  $X$ ”, então estas ainda podem ser lidas como “Há algo que não é  $X$ ”, “Não há nenhum  $X$ ” e “Existe algum  $X$ ”, respectivamente. A sentença “Todo  $X$  é  $P$ ”, por exemplo, equivale a “Se algo possui a propriedade  $X$ , então possui a propriedade  $P$ ”, ou seja,

à expressão  $\overline{a} \begin{cases} P(a) \\ X(a) \end{cases}$ .<sup>55</sup> De um modo geral, o *quadro de oposições* fica como se segue:



Frege visa, como é evidente, comparar seu sistema notacional com o da lógica tradicional, mostrando como as *proposições categóricas* são facilmente exprimíveis mediante o emprego de seus símbolos. Expressões muito mais complexas que estas podem ser feitas na conceitografia, meramente combinando os traços de condição e negação e a concavidade. A esse respeito, escreve Kneale:

<sup>54</sup> Respectivamente,  $\neg \forall x Xx$ ,  $\forall x \neg Xx$  e  $\neg \forall x \neg Xx$ , ou  $\exists x \neg Xx$ ,  $\neg \exists x Xx$  e  $\exists x Xx$ .

<sup>55</sup> *Begriffsschrift*, § 12.

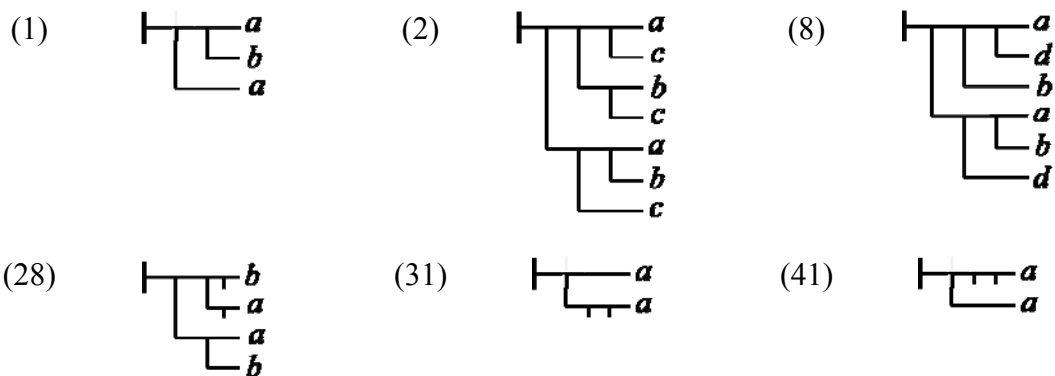
<sup>56</sup> *Ibidem*, § 12.

<sup>57</sup> Leia-se como: “Todo  $X$  é  $P$ ” e “Nenhum  $X$  é  $P$ ” (contrárias) e “Algum  $X$  é  $P$ ” e “Algum  $X$  não é  $P$ ” (subcontrárias).

Enquanto os lógicos anteriores tinham achado possível dar uma lista completa de formas absolutamente específicas para as proposições, Frege oferece um esquema que é ao mesmo tempo mais simples do que qualquer esquema anterior e, num certo sentido, inesgotável.<sup>58</sup>

## 1.5 – Lógica proposicional

Como veremos na seção 1.7, a importante noção de seguir em uma série é dada em termos de lógica de predicados de segunda ordem, o que pode explicar, em parte, o desinteresse de Frege no tratamento individual de seus sistemas de lógica proposicional e de primeira ordem. Na segunda parte de *Begriffsschrift* os axiomas não são classificados consoante tais categorias e muito menos são apresentados de uma só vez; são introduzidos na medida em que são necessários para alguma inferência. Os seis primeiros constituem, de acordo com Łukasiewicz,<sup>59</sup> o primeiro sistema axiomático do cálculo proposicional. Eles estão arrolados a seguir, acompanhados da numeração que recebem no livro:



60

Foi demonstrado por Łukasiewicz que o axioma (8) é supérfluo, podendo ser derivado dos axiomas (1) e (2),<sup>61</sup> e que os axiomas (28), (31) e (41) podem ser substituídos por um

<sup>58</sup> KNEALE, W.; KNEALE, M. *O Desenvolvimento da lógica*. Tradução de M. S. Lourenço. 3. ed. Coimbra: Calouste Gulbenkian, 1991. p. 491-492.

<sup>59</sup> O sistema de Frege constitui o primeiro sistema axiomático, porém não o primeiro sistema de lógica proposicional (cf. ŁUKASIEWICZ, 1963, p. 49.). Este foi, de acordo com Łukasiewicz (cf. ŁUKASIEWICZ, 1977, p. 49), inventado pelos estóicos e não era constituído de axiomas, mas de regras de inferência.

<sup>60</sup> Atualmente as fórmulas correspondentes aos conteúdos desses juízos seriam escritas como se segue:

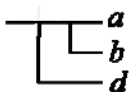
- |      |   |      |   |
|------|---|------|---|
| (1)  | $a \rightarrow (b \rightarrow a)$   | (2)  | $(c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a))$ |
| (8)  | $(d \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow (b \rightarrow (d \rightarrow a))$ | (28) | $(b \rightarrow a) \rightarrow ((\neg a) \rightarrow (\neg b))$                                   |
| (31) | $\neg(\neg a) \rightarrow a$  | (41) | $a \rightarrow (\neg(\neg a))$  |


<sup>61</sup> Demonstramos isso no apêndice A.



único axioma.<sup>62</sup> Frege não tinha conhecimento disso; estava ciente, porém, que outros axiomas podiam ser usados no lugar dos seis que escolheu.<sup>63</sup>

Três outras características importantes desse sistema são: a sua *consistência*, a sua *adequação forte*, e – como vimos anteriormente – a sua *completude funcional*.<sup>64 65</sup> Frege não dispunha de meios para provar estes fatos. Aparentemente, não lhe ocorreu a idéia de que pudesse haver fórmulas válidas indemonstráveis em seu sistema lógico como um todo<sup>66</sup> – e muito menos em seu sistema proposicional. Tanto que em um trecho do livro ele escreve que “o amplo número de leis que podem ser estabelecidas só podem ser alcançadas mediante a procura por aquelas que potencialmente contêm todas as outras”.<sup>67</sup>

Entretanto, fornece provas da validade lógica de seus axiomas (proposicionais) e da permanência de tal propriedade via regra de destacamento. As provas são simples; por

exemplo, no axioma (8)  significa que o caso em que  $a$  é negado, mas  $b$  e  $d$  são

afirmados não ocorre, enquanto  afirma a mesma coisa, donde fica excluído o caso em que o primeiro é afirmado e o segundo, negado.<sup>68</sup> Convém notar que o reconhecimento de que a expressão é uma tautologia é feito mediante o acréscimo do traço de juízo. Assim, com

relação à regra de inferência, a partir de  e  $\vdash B$ , das quatro possibilidades enumeradas anteriormente para  $A$  e  $B$ , a terceira é excluída por  e a segunda e a quarta por  $\vdash B$ , de modo que resta apenas a primeira, isto é,  $\vdash A$ .<sup>69</sup> Uma consequência imediata desses fatos é

<sup>62</sup> O axioma que substituí as fórmulas (28), (31) e (41) é, a menos da notação,  $(\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow a)$  (cf. ŁUKASIEWICZ, 1970, p. 136).

<sup>63</sup> *Begriffsschrift*, § 13.

<sup>64</sup> Diz-se que um sistema axiomático é *consistente* quando não acontece de uma fórmula e a negação desta mesma fórmula serem demonstráveis no sistema, e que é *fortemente adequado* quando é *fortemente correto* e *fortemente completo*, ou seja, quando  $\Gamma \vdash A$  se, e somente se,  $\Gamma \models A$ , onde  $\Gamma$  é um conjunto de fórmulas do sistema e os símbolos  $\vdash$  e  $\models$  indicam, respectivamente, que  $A$  é uma consequência sintática e uma consequência semântica do conjunto  $\Gamma$ . Do mesmo modo, um sistema axiomático é chamado de *fracamente adequado* quando é *fracamente correto* e *fracamente completo*, isto é, quando todo teorema do sistema é uma fórmula logicamente válida e reciprocamente.

<sup>65</sup> Uma prova da completude forte desse sistema é dada no apêndice A.

<sup>66</sup> Mais que isso, para Dummett, Frege presumia que todas as asserções verdadeiras da aritmética eram demonstráveis (cf. DUMMETT, 1991, p. 29).

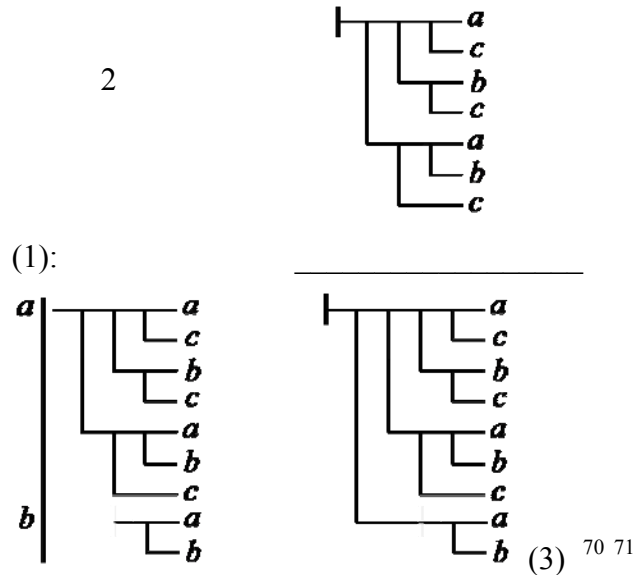
<sup>67</sup> Da man bei der unübersehbaren Menge der aufstellbaren Gesetze nicht alle aufzählen kann, so ist Vollständigkeit nicht anders als durch Aufsuchung derer zu erreichen, die der kraft nach alle in sich schliessen (*Begriffsschrift*, § 13).

<sup>68</sup> *Begriffsschrift*, § 16.

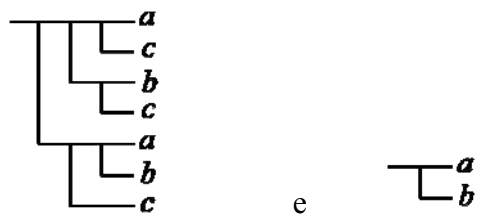
<sup>69</sup> *Ibidem*, § 6.

que todo teorema do sistema será uma fórmula logicamente válida, e por esse motivo todo teorema é precedido de um traço de juízo.

A primeira dedução feita em seu sistema é a da proposição (3), a partir dos dois primeiros axiomas:



O número seguido de dois pontos indica que o axioma (1) atua como a premissa maior. Repare que as variáveis proposicionais *a* e *b* do axioma (1) estão sendo substituídas, respectivamente, pelas expressões:



A rigor, as substituições que Frege faz em suas demonstrações constituem uma segunda regra de inferência. Convém notar que na segunda parte do livro o filósofo utiliza letras latinas em vez de letras gregas maiúsculas como na primeira. Em uma nota de rodapé, ele afirma que usa as letras gregas maiúsculas como abreviações para as quais o leitor pode atribuir um sentido apropriado quando ele não as define especificamente.<sup>72</sup> Talvez estivesse

<sup>70</sup> *Begriffsschrift*, § 15.

<sup>71</sup> Em notação contemporânea, o esquema acima está indicando que a seqüência  $((c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a))))$ ,  $(c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a))$ ,  $((b \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)))$  é uma demonstração, onde a primeira das fórmulas é derivada do axioma (1), substituindo *a* pelo axioma (2) e *b* pela fórmula  $b \rightarrow a$ .

<sup>72</sup> *Begriffsschrift*, § 2.

distinguindo entre variáveis (as letras latinas minúsculas) e meta-variáveis (as letras gregas maiúsculas) <sup>73</sup>. De qualquer modo, isso é apenas especulação, uma vez que no texto nada é explicitado nesse sentido.

### 1.6 – Lógica de predicados (ou funcional) de primeira ordem

Os axiomas a seguir formam juntamente com os seis anteriores um sistema axiomático mais amplo, no caso um sistema de lógica de predicados de primeira ordem com igualdade:

$$(52) \quad \begin{array}{l} \vdash \\ \vdash \quad f(d) \\ \vdash \quad f(c) \\ \vdash \quad (c \equiv d) \end{array}$$

$$(54) \quad \vdash (c \equiv c)$$

$$(58) \quad \begin{array}{l} \vdash \quad f(c) \\ \vdash \quad f(a) \end{array}$$

74

Os predicados do sistema de Frege são, evidentemente, funções (pelo menos na acepção em que ele considerava tal termo). Embora não as considere como tais, ele usa em seu sistema dedutivo (de predicados) de primeira ordem, além da regra de destacamento, duas regras de inferência: uma que permite inferir  $\overline{a} \vdash X(a)$  a partir de  $\vdash X(a)$ , se  $a$  ocorre somente nos lugares de argumento de  $X(a)$ , e outra que permite inferir  $\overline{a} \vdash \Phi(a)$  a partir de  $\overline{A} \vdash \Phi(a)$ , se  $A$  é uma expressão em que  $a$  não ocorre e  $a$  fica somente nos lugares de argumento de  $X(a)$ . <sup>75</sup> Os seis axiomas proposicionais mais o axioma (58) e as regras de inferência constituem, conforme Kneale, um sistema de primeira ordem consistente e fracamente completo. <sup>76</sup>

Um exemplo de dedução é o seguinte:

<sup>73</sup> Meta-variáveis proposicionais, ao contrário de variáveis proposicionais, não são símbolos da linguagem artificial (no nosso caso, da conceitografia). São usadas para representar ou falar sobre as fórmulas que são construídas nessa linguagem.

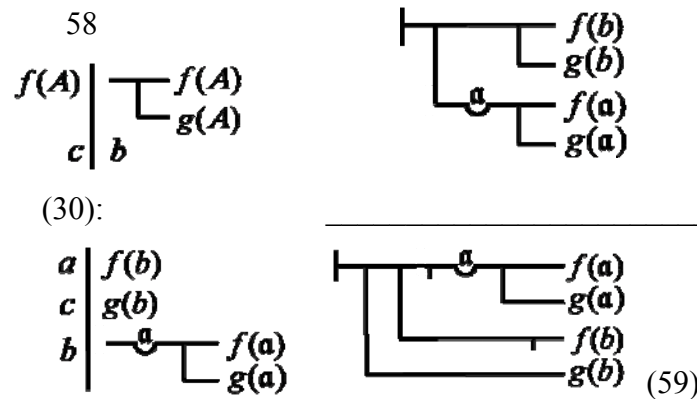
<sup>74</sup> Os conteúdos desses juízos correspondem às fórmulas: (52)  $(c = d) \rightarrow (fc \rightarrow fd)$ , (54)  $c = c$  e (58)

$\forall x \, fx \rightarrow fc$ .

<sup>75</sup> *Begriffsschrift*, § 11.

<sup>76</sup> Cf. KNEALE; KNEALE, 1991, p. 710-721.





Note que na inferência acima Frege substitui  $f(A)$  pela expressão  $\begin{array}{l} \text{---} f(A) \\ \text{---} g(A) \end{array}$  na fórmula (58), o que significa que ele está decompondo a última na expressão funcional  $\begin{array}{l} \text{---} f( ) \\ \text{---} g( ) \end{array}$ , com argumento  $A$ .<sup>77</sup> Um exemplo de aplicação do teorema (59) é fornecido em seguida: no caso de  $b$  significar (bedeuten) uma ostra (um indivíduo pertencente a esta classe de animais),  $g(A)$  “ $A$  é um pássaro” e  $f(A)$  “ $A$  pode voar”, o juízo (59) pode ser lido como: “se esta ostra é um pássaro e não pode voar, então segue que alguns pássaros não podem voar”. Este juízo, segundo o filósofo, substitui os modos de inferência Felapton e Fesapo, que não são aqui diferenciados devido ao fato de sua conceitografia não distinguir nenhum sujeito.<sup>78</sup>

Os dois modos de inferência a que Frege refere-se diferem apenas na sua primeira premissa; o sujeito de uma é o predicado da outra e vice-versa. Para ilustrar o que estamos dizendo, reproduzimos a seguir o exemplo anterior na forma dessas inferências:

Felapton:

- (premissa 1)      Nenhuma ostra pode voar.
- (premissa 2)      Todas as ostras são pássaros.
- (conclusão)      Alguns pássaros não podem voar.

<sup>77</sup> Os parênteses indicam os lugares de argumento na expressão.

<sup>78</sup> *Begriffsschrift*, § 22.

Fesapo:

- (premissa 1) Nenhum ser que pode voar é uma ostra.  
 (premissa 2) Todas as ostras são pássaros.  
 (conclusão) Alguns pássaros não podem voar.

Como vemos, o sujeito da premissa 1 de Felapton (não o sujeito gramatical, mas o nome que substitui a letra  $X$  na expressão “Nenhum  $X$  é  $P$ ”) é “ostra”. Este é o predicado (não o predicado gramatical, mas o nome que substitui a letra  $P$  na expressão “Nenhum  $X$  é  $P$ ”) da premissa 1 de Fesapo. Do mesmo modo, “ser que pode voar” é o predicado da premissa 1 de Felapton e o sujeito da premissa 1 de Fesapo. Já vimos que a expressão “Nenhum  $X$  é  $P$ ” pode

ser escrita como  $\neg \text{a} \begin{array}{l} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} P(a) \\ X(a) \end{array}$ ; é possível provar que no sistema de Frege esta é

sintaticamente equivalente a  $\neg \text{a} \begin{array}{l} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} X(a) \\ P(a) \end{array}$ . Se  $\begin{array}{l} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} P(a) \\ X(a) \end{array}$  denotar um conteúdo afirmável, poderemos dispensar a concavidade com a letra gótica, e tomá-la como premissa 1 de ambas

as inferências; a premissa 2 seria da forma  $\begin{array}{l} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} \Sigma(a) \\ X(a) \end{array}$ . Supondo que haja um indivíduo que satisfaça a propriedade  $X$  (no exemplo, “ser uma ostra”), pode-se dispensar o antecedente  $X(a)$  das premissas 1 e 2. Vemos, daí, que a tese (59) vale pelas duas formas de inferência.

Percebe-se pelo exemplo que o filósofo quer mostrar que os modos de inferência da lógica tradicional podem ser reduzidos a teoremas em seu sistema. O teorema (59) não possui a forma de uma inferência, mas sim de uma implicação cujo antecedente é uma conjunção das premissas 1 e 2 e cujo conseqüente é a conclusão de uma inferência. Nesse sentido, o modo de proceder de Frege está mais próximo, portanto, do sistema silogístico aristotélico.<sup>79</sup>

### 1.7 – Séries e lógica de predicados (ou funcional) de segunda ordem

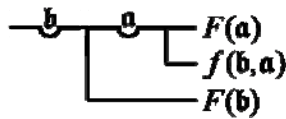
Frege inicia a terceira parte de seu livro dizendo que as derivações que aí se seguem devem dar uma idéia geral de como manusear sua conceitografia.<sup>80</sup> Seu objetivo é mostrar como, por meio desse sistema simbólico, a noção de *seguir em uma série* pode ser definida em termos puramente lógicos. Tal definição depende fundamentalmente de uma outra, a

<sup>79</sup> Cf. ŁUKASIEWICZ, 1977, p.13-14.

<sup>80</sup> *Begriffsschrift*, § 23.

saber, a de *propriedade hereditária*, pois, como veremos a seguir, dizer que *um objeto y segue um objeto x em uma série f* equivale a dizer que *y possui todas as propriedades hereditárias que os objetos que seguem imediatamente x na série f possuem*.

A idéia de série que o filósofo alemão tinha em mente é bem ampla e pode ser entendida como sendo meramente um número de entidades inter-relacionadas conforme uma certa relação binária.<sup>81</sup> A sentença “a propriedade *F* é hereditária na série *f*” equivale, portanto, à sentença “a partir da proposição que *b* tem a propriedade *F*, qualquer que *b* possa ser, pode ser inferido que todo resultado de uma aplicação do procedimento *f* a *b* tem a propriedade *F*”.<sup>82</sup> Esta, por sua vez, equivale a:



A expressão anterior é abreviada por uma outra, a saber,  $\left| \begin{array}{l} \delta \\ \alpha \end{array} \right( \begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right)$ ; e o juízo que

estabelece tal abreviação é o seguinte:

$$\left\| \left[ \begin{array}{l} \text{---} \mathbf{b} \text{---} \mathbf{a} \text{---} \begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{a}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \\ \mathbf{F}(\mathbf{b}) \end{array} \end{array} \right] = \left| \begin{array}{l} \delta \\ \alpha \end{array} \right( \begin{array}{l} \mathbf{F}(\alpha) \\ \mathbf{f}(\delta, \alpha) \end{array} \right) \right\|_{83}$$

Embora esta sentença não seja um juízo, pois meramente fornece uma definição, ela pode, de acordo com Frege, ser convertida em um, já que por meio dela o significado do símbolo  $\left| \begin{array}{l} \delta \\ \alpha \end{array} \right( \begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right)$  é estabelecido, e esse significado permanece fixo daí por diante. Assim, a sentença pode ser usada nas demonstrações e o duplo traço de juízo indica o duplo papel que ela apresenta.<sup>84</sup>

Para ilustrar sua definição Frege fornece um exemplo muito simples, em que  $\Lambda(M, N)$  denota a circunstância que *N* é um filho de *M* e  $\Sigma(P)$  a circunstância que *P* é um ser humano. Portanto,  $\left| \begin{array}{l} \delta \\ \alpha \end{array} \right( \begin{array}{l} \Sigma(\alpha) \\ \Lambda(\delta, \alpha) \end{array} \right)$  denota a circunstância que *todo filho de um ser humano é também um ser humano*, ou que a propriedade de “ser humano” é *hereditária*.<sup>85</sup>

<sup>81</sup> Cf. BYNUM, 1972a, p. 73-74  
<sup>82</sup> *Begriffsschrift*, § 24.  
<sup>83</sup> *Ibidem*, § 24.  
<sup>84</sup> Tal juízo, como observa Frege, é analítico no sentido kantiano (*Begriffsschrift*, § 24).  
<sup>85</sup> *Begriffsschrift*, § 24.

Na seqüência, oferece a demonstração de um teorema a partir de sua definição:

69 
$$\vdash \left( \left( \begin{array}{c} \text{b} \text{---} \text{a} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \begin{array}{l} F(\text{a}) \\ f(\text{b}, \text{a}) \\ F(\text{b}) \end{array} \right) = \begin{array}{c} \delta \\ \alpha \end{array} \left( \begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right)$$

(68):

$$\begin{array}{c} \text{a} \text{---} \text{b} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} F(\text{a}) \\ f(\text{I}, \text{a}) \\ F(\text{I}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} F(\text{a}) \\ f(\text{x}, \text{a}) \\ F(\text{x}) \\ \delta \\ \alpha \end{array} \left( \begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right) \quad (70)$$

$f(\text{I})$     $\delta$     $\alpha$     $x$

(19):

$$\begin{array}{c} \text{b} \text{---} \text{a} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} F(\text{a}) \\ f(\text{x}, \text{a}) \\ F(\text{x}) \\ \delta \\ \alpha \end{array} \left( \begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} F(\text{y}) \\ f(\text{x}, \text{y}) \\ F(\text{x}) \\ \delta \\ \alpha \end{array} \left( \begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right) \quad (71)$$

$a$     $F(\text{y})$     $f(\text{x}, \text{y})$     $F(\text{a})$     $f(\text{x}, \text{a})$

(58)::

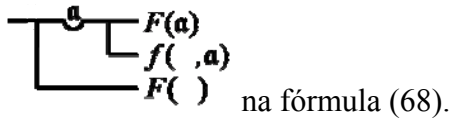
$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} F(\text{I}) \\ f(\text{x}, \text{I}) \\ F(\text{I}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} F(\text{y}) \\ f(\text{x}, \text{y}) \\ F(\text{x}) \\ \delta \\ \alpha \end{array} \left( \begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right) \quad (72) \quad ^{86}$$

$c$     $y$

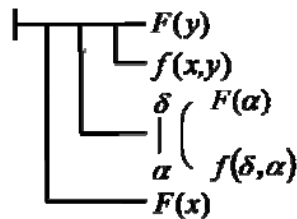
Este juízo (72) pode ser lido como: “se a propriedade  $F$  é hereditária na série  $f$ ; e se  $x$  tem a propriedade  $F$  e  $y$  é um resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $x$ : então  $y$  tem a propriedade  $F$ ”.

<sup>86</sup> Begriffsschrift, § 25.

Algumas coisas devem ser ditas sobre a inferência anterior: primeiro, o traço de juízo na fórmula (69) não é mais duplo, ou seja, como ela está sendo agora usada como uma premissa, ela é considerada um juízo, no sentido que Frege o toma; segundo, o “dois pontos” duplo após (58) indica que o juízo que tem esse número é a premissa menor da última dedução na seqüência (de dedução); terceiro, a expressão  $f( )$  está sendo substituída por

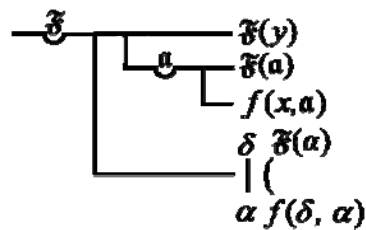


Outra interessante tese é a (74):



E exprime o seguinte: “se  $x$  tem uma propriedade  $F$  que é hereditária na série  $f$ , então todo resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $x$  tem a propriedade  $F$ ”.

A segunda definição é a da relação de *seguir em uma série*, conhecida hodiernamente pelo nome de *relação de ancestralidade*.<sup>87</sup> Para Frege, dizer que  $y$  segue  $x$  na série  $f$  ou que  $x$  precede  $y$  na série  $f$  tem o mesmo significado que: “a partir de duas proposições, a saber, que todo resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $x$  tem a propriedade  $F$ , e que a propriedade  $F$  é hereditária na série  $f$ , pode ser inferido, qualquer que seja  $F$ , que  $y$  tem a propriedade  $F$ ”.<sup>88</sup> Em símbolos:



E para tal expressão é fornecida a seguinte abreviatura:  $\overset{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$ .<sup>89</sup> Repare que uma das letras góticas nas duas concavidades é uma letra funcional (e não individual) e, portanto, a notação conceitual envolve aqui lógica de predicados (ou funcional) de segunda ordem. Além disso, a letra funcional pode ser vista aqui como um argumento de uma função,

<sup>87</sup> Cf. KNEALE; KNEALE, 1991, p. 497.

<sup>88</sup> *Begriffsschrift*, § 26.

<sup>89</sup> *Ibidem*, § 26.

no sentido exposto na seção 10 do livro. Frege não fornece, entretanto, axiomas para um cálculo de predicados de segunda ordem.

Como vemos, a relação de *seguir em uma série* (ou de *ancestralidade*) é definida em termos de uma relação  $f$  “já conhecida”. Para tornar isso mais claro, tomemos o exemplo de Frege da relação entre pai e filho, onde  $A(M, N)$  denota a circunstância que  $N$  é um filho de  $M$ . Nesse caso,  $A$  está fazendo o papel da relação  $f$ . Dizer que  $y$  é um descendente de  $x$  (na série  $A$ ) ou que  $x$  é um ancestral de  $y$  (na série  $A$ ) equivale a dizer que  $y$  é um filho de  $x$  ou que  $y$  é um neto de  $x$  ou que  $y$  é um bisneto de  $x$  e assim por diante. Mas se  $y$  é um filho de  $x$ , deve possuir todas as propriedades hereditárias que lhe foram transmitidas por  $x$ , seu pai; se  $y$  é um neto de  $x$ , deve possuir todas as propriedades hereditárias que lhe foram transmitidas por seu pai, e que foram transmitidas a este por  $x$ , seu avô; se  $y$  é um bisneto de  $x$ , deve possuir todas as propriedades hereditárias que lhe foram transmitidas por seu pai, e que foram transmitidas a este por seu avô, e que por sua vez foram transmitidas a este por  $x$ , seu bisavô; e assim sucessivamente.

Mais geralmente, suponhamos que  $f$  seja uma série em que todo resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $x$  possui todas as propriedades hereditárias na série. Se  $y$  for o resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $x$  então, por hipótese,  $y$  possuirá todas as propriedades hereditárias na série  $f$ ; se houver um certo  $y_1$  tal que  $y$  seja o resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $y_1$  e este seja o resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $x$ , então, por hipótese,  $y_1$  possuirá todas as propriedades hereditárias na série  $f$ , e deste fato decorre, pelo teorema (74), que  $y$  também possuirá todas as propriedades hereditárias na série  $f$ ; se houver  $y_1$  e  $y_2$  tais que  $y_1$  seja o resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $x$ ,  $y_2$  seja o resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $y_1$  e  $y$  seja o resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $y_2$ , então, por hipótese,  $y_1$  possuirá todas as propriedades hereditárias na série  $f$ , e deste fato decorre, pelo teorema (74), que  $y_2$  possuirá todas as propriedades hereditárias na série  $f$  e que, novamente pelo teorema (74),  $y$  também as terá; se ...

Não é difícil enxergar que a definição de Frege reúne sob uma única fórmula estes três raciocínios e todos os seus subseqüentes, eliminando, assim, as reticências. Poder-se-ia conjecturar aqui, no entanto, que a idéia de hereditariedade não é suficiente para diferenciar

uma relação de seguir em uma série de outra, alegando-se, para tanto, que duas séries distintas poderiam ter as mesmas propriedades hereditárias. Mas a tese (97):<sup>90</sup>

$$\vdash \begin{array}{l} \delta \\ \alpha \end{array} \left( \begin{array}{l} \gamma \\ \beta \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} f(x_\gamma, \alpha_\beta) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right),$$

que pode ser traduzida por: “*a propriedade de seguir em uma série f é hereditária na série f*”, garante que duas séries distintas não podem possuir em comum todas as suas propriedades hereditárias.

O teorema (98) mostra a transitividade de tal relação:<sup>91</sup>

$$\vdash \begin{array}{l} \gamma \\ \beta \end{array} \left( \begin{array}{l} f(x_\gamma, z_\beta) \\ f(y_\gamma, z_\beta) \\ f(x_\gamma, y_\beta) \end{array} \right).$$

A última expressão quer dizer: “*se y segue x na série f e se z segue y na série f então z segue x na série f.*”

Não menos importante é a proposição (81):<sup>92</sup>

$$\vdash \begin{array}{l} F(y) \\ \gamma \\ \beta \end{array} \left( \begin{array}{l} f(x_\gamma, y_\beta) \\ \delta \\ \alpha \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right) \\ F(x)$$

Ela pode ser lida como: “*se x tem a propriedade F que é hereditária na série f, e se y segue x na série f, então y tem a propriedade F*”, e é a primeira menção ao princípio da indução matemática feita no livro. Frege observa em uma nota de rodapé, que deve esse princípio a Bernoulli. Repare que esta tese é muito semelhante à (74); a primeira tem em seu antecedente que y é um resultado do procedimento f a x, ao passo que a segunda, que y segue x na série f.

Conforme sugerido em seu próximo livro *Os Fundamentos da Aritmética*, o interesse particular de Frege em uma definição lógica de *seguir em uma série* estava diretamente relacionado à explicação do significado da expressão “*pertencer à série dos números naturais*”, aí discutida. No artigo *Aplicações da Conceitografia*, publicado no mesmo ano que

<sup>90</sup> *Begriffsschrift*, § 27.

<sup>91</sup> *Ibidem*, § 27.

<sup>92</sup> *Ibidem*, § 27.

*Begriffsschrift*, ele deixa claro que pretendia interpretar a relação  $f$  como sendo o procedimento de “somar um”, ao considerar  $u + 1 = v$  como um caso particular da função de dois argumentos  $f(u, v)$ .<sup>93</sup>

As duas últimas definições contidas em *Begriffsschrift* são:

$$\begin{aligned} & \text{II} \left( \left[ \begin{array}{c} \text{---} (z \equiv x) \\ \text{---} \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \right] \equiv \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta) \right) \quad (99) \\ & \text{e} \\ & \text{II} \left( \left[ \begin{array}{c} \text{---} \mathbf{e} \text{---} \mathbf{b} \text{---} \mathbf{a} \text{---} (a \equiv e) \\ \text{---} f(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \\ \text{---} f(\mathbf{b}, \mathbf{e}) \end{array} \right] \equiv \frac{\delta}{\varepsilon} f(\delta, \varepsilon) \right) \quad (115). \end{aligned}$$

Os *definientes* das duas expressões anteriores podem ser lidos, respectivamente, como: “ $z$  é idêntico a  $x$  ou segue  $x$  na série  $f$ ” e “pode ser inferido a partir da circunstância que  $\mathbf{e}$  é um resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $\mathbf{b}$ , qualquer que seja  $\mathbf{b}$ , que todo resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  a  $\mathbf{b}$  é idêntico com  $\mathbf{e}$ ”, e fixam, como vemos, o significado dos símbolos  $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta)$  e  $\frac{\delta}{\varepsilon} f(\delta, \varepsilon)$ , respectivamente.<sup>94</sup>

A expressão  $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta)$  pode ser traduzida como “ $z$  pertence à série  $f$  que começa com  $x$ ” ou “ $x$  pertence à série  $f$  que termina com  $z$ ”, e  $\frac{\delta}{\varepsilon} f(\delta, \varepsilon)$  como “ $f$  é (uma relação) *unívoca* (eindeutig)”.<sup>95</sup>

A partir daí, algumas propriedades decorrentes dessas definições são demonstradas, dentre as quais destacamos aqui a hereditariedade das relações *pertencer à série  $f$  que começa com  $x$*  (109) e *pertencer à série unívoca  $f$  que começa com  $x$*  (131).<sup>96</sup>

Dizer que  $a$  pertence à *série dos números naturais* corresponde a dizer que  $a$  pertence à *série dos números* que começa com zero e surge a partir de uma constante acrescida de um,

<sup>93</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 133-138.

<sup>94</sup> *Begriffsschrift*, § 29-31.

<sup>95</sup> No entendimento de Frege, uma função de dois argumentos é unívoca quando a relação que ela estabelece entre seus argumentos é o que entendemos hoje por função. Falaremos mais detalhadamente sobre isso no próximo capítulo.

<sup>96</sup> *Begriffsschrift*, § 29-31.



<sup>97</sup> o que equivale, na conceitografia, à expressão “ $\frac{\gamma}{\beta}(0_{\gamma} + 1 = a_{\beta})$ ”. <sup>98</sup> No prefácio de *Begriffsschrift*, Frege diz que primeiro buscou reduzir o conceito de *seguir em uma série* à noção de *seqüência lógica* (logische Folge), a fim de avançar a partir daí para o conceito de número. <sup>99</sup> Pelo que vimos, faltava apenas uma definição satisfatória de *número zero* e do procedimento de *somar um*, mas isso só foi feito em seu próximo livro.

---

<sup>97</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 133-138.

<sup>98</sup> Nos escritos que sucedem *Begriffsschrift* Frege usa o sinal “=” em lugar de “≡”.

<sup>99</sup> *Begriffsschrift*, prefácio.

## CAPÍTULO 2 – A NOÇÃO DE FUNÇÃO EM *OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA*

*Os Fundamentos da Aritmética* estão organizados consoante a seguinte divisão: uma introdução e cinco capítulos. Destes, os três primeiros versam na opinião de alguns autores<sup>100</sup> sobre, respectivamente, a natureza das proposições da aritmética, o conceito de número, a unidade e o um; o quarto contém a definição de Frege da noção de número natural e algumas das propriedades decorrentes de tal definição; o quinto, as considerações finais. Interessa-nos aqui tão somente o conteúdo do penúltimo capítulo e de parte do terceiro.

Um dos objetivos principais da conceitografia era exprimir conexões lógicas entre fórmulas da aritmética.<sup>101</sup> Como vimos no capítulo anterior, era também intenção de Frege expressar e definir essas fórmulas e objetos sobre os quais elas versam em termos puramente lógicos. O modo por que tais noções poderiam ser escritas em uma linguagem artificial fora apresentado em *Begriffsschrift* – é o caso, por exemplo, da sentença “*a* é um número natural”, que possui a expressão “ $\frac{\gamma}{\beta}(0_{\gamma} + 1 = a_{\beta})$ ” –, mas aí não havia qualquer menção sobre como poderiam ser definidas. Qualquer definição de conceitos é estabelecida a partir de outros conceitos definidos previamente ou de certos conceitos tomados como primitivos. As definições que Frege apresenta no livro *Os Fundamentos da Aritmética* baseiam-se essencialmente nos conceitos (primitivos) de função e objeto (Funktion und Gegenstand).

### 2.1 – Função e objeto

A noção sintática de função em *Begriffsschrift* é plenamente satisfatória quando os sinais conceitográficos são considerados em si mesmos, isto é, sem que haja preocupação com a uma eventual interpretação. Mas a partir do momento que eles passam a denotar algo – essencial em qualquer aplicação da conceitografia –, a necessidade de uma caracterização das espécies de coisas que são indicadas pelos símbolos funcionais é necessária. Obviamente Frege deu-se conta disso quando escreveu *Os Fundamentos da Aritmética*, mas apenas forneceu esclarecimentos quanto a isso em uma conferência proferida em 1891, sob o título

<sup>100</sup> Nomeadamente, Kant, Leibniz, Grassmann e Mill.

<sup>101</sup> Cf. FREGE, 1972, p. 83-89.

*Função e Conceito*.<sup>102</sup> Neste escrito, ele chama atenção para a confusão que se fazia nos textos matemáticos da época entre os sinais e os conteúdos dos sinais.<sup>103</sup>

As noções de relação, conceito e objeto são usadas incisivamente pelo filósofo em seu livro, mas em nenhum momento ele deixa claro o que entendia por elas.<sup>104</sup> Em *Função e Conceito* o filósofo estabelece: conceitos e relações são funções de um e dois argumentos, respectivamente, cujos valores sempre são um valor-de-verdade, ao passo que objeto é tudo aquilo que não é função. Mas se objeto é tudo aquilo que não é função, o que é então uma função? Segundo Frege, tal definição não é possível, e o mesmo vale para objeto, posto que ambos são noções lógicas primitivas. Uma função é algo incompleto, que necessita de complementação, diz o filósofo, diferente de um objeto, que, ao contrário, não necessita.<sup>105</sup>

O argumento não é parte da função, mas compõe com ela um todo completo. Quando a função é completada por seu argumento, aquilo que resulta de tal complementação é chamado de valor da função para este argumento.<sup>106</sup> Assim, os valores da função denotada por  $x^2 + 1$  para os argumentos 0 e 1 são, respectivamente, 1 e 2. Mas Frege não quer limitar-se a funções cujos valores são números; quer também considerar funções cujos valores são valores-de-verdade. Assim, ele inclui na formação de expressões funcionais, além dos sinais aritméticos, símbolos como =, < e >. A expressão  $x^2 = 1$  é um exemplo de tal função, que assume para os argumentos 0 e 1 os valores-de-verdade “o falso” e “o verdadeiro”, respectivamente. Uma tal função recebe o nome de conceito. Se uma expressão funcional tem mais que um argumento, como em  $x^2 + y^2 = 9$ , e tem como valor um valor-de-verdade, a função denotada por ela é uma relação.

Não satisfeito por admitir apenas números como argumentos de funções, dá exemplos de funções que podem ter como argumentos valores-de-verdade. Exemplos de tais funções são aquelas denotadas por  $-x$ ,  $\neg x$  e  $\begin{matrix} x \\ \neg y \end{matrix}$ . À primeira corresponde o verdadeiro se  $x$  for o verdadeiro, e o falso em todos os outros casos, isto é,  $-(2 + 3 = 5)$  é o verdadeiro,  $-(2 + 3 = 7)$  e  $-2$  são o falso;<sup>107</sup> à segunda, o falso se  $x$  for o verdadeiro, e o verdadeiro em todos os outros casos; à terceira, o falso se  $y$  for o verdadeiro e  $x$  for um objeto que não é o

<sup>102</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 9-32.

<sup>103</sup> É provável que Frege achasse tal distinção desnecessária em *Begriffsschrift*, visto que neste livro ele pudesse estar mais preocupado com os aspectos sintáticos de sua conceitografia.

<sup>104</sup> Apenas era visível – a partir de *Begriffsschrift* – que conceitos e relações deveriam ser indicados por nomes de funções.

<sup>105</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 9-32.

<sup>106</sup> Cf. ibidem, p. 9-32.

<sup>107</sup> A função “ $\neg x$ ” admite, portanto, não apenas valores-de-verdade como argumentos, mas quaisquer objetos. Se o argumento não for um valor-de-verdade, o valor da função será o falso.

verdadeiro, e o verdadeiro em todos os outros casos. As duas primeiras funções são conceitos, a terceira, uma relação. A segunda função é uma composição das funções denotadas por  $\neg$ ,  $\mid$  e  $\neg$ , nesta ordem, isto é,  $\neg \mid x$  é o mesmo que  $\neg (\mid (\neg x))$ ; a terceira, das funções denotadas por  $\neg$ ,  $\mid$  e  $\neg$ , nesta ordem, ou seja,  $\neg \mid x \mid y$  é o mesmo que  $\neg (\mid (\neg x, \neg y))$ . Obviamente isso implica uma interpretação funcional dos sinais de conteúdo, negação e condicional de *Begriffsschrift*. Quanto ao sinal  $\vdash$ , este tem a função de indicar que a essas funções corresponde o verdadeiro, quando anteposto a seus símbolos. Assim,  $\vdash a$  significa que o valor-de-verdade da função “ $\neg$ ” para o argumento “ $a$ ” é o verdadeiro.<sup>108</sup>

Mas uma função pode admitir outras funções como seus argumentos, e somente estas, como é o caso de  $\neg \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$ , que tem como argumento a função  $f$ . Isso porque a esta função corresponde o verdadeiro quando a função  $f(x)$  tem como valor o verdadeiro para qualquer argumento, e o falso em todos os outros casos. Isto é, se existe algum argumento tal que  $f(x)$  corresponde ao falso, então  $\neg \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$  corresponde também ao falso. Logo, o valor-de-verdade da última “depende” da primeira função. Frege faz, então, uma distinção entre objetos, funções cujos argumentos são e devem ser objetos e funções cujos argumentos são e devem ser funções. Denomina o primeiro tipo de função de primeiro nível e o segundo tipo, de função de segundo nível. As funções  $\neg x$ ,  $\neg \mid x$  e  $\neg \mid x \mid y$  são, por exemplo, funções de primeiro nível, enquanto  $\neg \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$  é uma função de segundo nível. Pode-se falar evidentemente de conceitos de primeiro e segundo nível; as três primeiras funções são, portanto, conceitos de primeiro nível e a última, um conceito de segundo nível. O conceito  $\neg \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$  é uma composição dos conceitos  $\neg$ ,  $\mathfrak{a}$  e  $\neg$ , nesta ordem, isto é,  $\neg \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$  equivale a  $\neg (\mathfrak{a} (\neg (f(\mathfrak{a}))))$ .<sup>109</sup>

Do mesmo modo que números são indicados indefinidamente por letras, funções também o são, e a necessidade de complementação da função exprime-se pondo à direita da letra funcional um par de parênteses, cujo espaço interior deve ser preenchido pelo sinal de argumento.<sup>110</sup> Para Frege, um nome de função deve, portanto, ter a forma  $f(x)$ . Por isso, ele fala geralmente na função  $f(x)$  e não na função  $f$ , e também por esse motivo, ele escreve  $\neg \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$  e não  $\neg \mathfrak{a} f$ . Isso gera um problema quanto a uma notação para funções de segundo nível, uma vez que, desse modo, nem  $F(f)$  nem  $F(f(x))$  são notações adequadas para

<sup>108</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 9-32.

<sup>109</sup> Cf. ibidem, p. 9-32.

<sup>110</sup> Cf. ibidem, 1978, p. 9-32.

expressar que a função  $f$  é argumento do conceito  $F$ ; na primeira faltam os parênteses e a letra do argumento que devem acompanhar a letra funcional  $f$ , e na segunda indica-se uma composição das funções  $F$  e  $f$ . Um modo de expressar tais funções é concebido pelo filósofo em *Leis Fundamentais*; neste exemplo, a relação entre  $f$  e  $F$  seria indicada pela expressão  $F_\beta(f(\beta))$ .

Um outro problema aventado por Frege em um artigo posterior, *O que é uma Função*,<sup>111</sup> diz respeito à indicação do lugar de argumento na expressão funcional. A letra  $x$  na expressão  $f(x)$  é usada tanto para fazer essa indicação como para expressar generalidade, e por esse motivo, já a partir do primeiro volume de *Leis Fundamentais* ele faz uso de letras gregas para cumprir aquele papel. Assim, em lugar de  $x$  em  $f(x)$ , ele utiliza a letra  $\xi$ , de modo que os lugares ocupados por tal letra na expressão funcional são seus lugares de argumento.

Frege introduz em *Função e Conceito* uma notação para indicar o conjunto dos objetos que quando tomados como argumento da função tornam o seu valor-de-verdade o verdadeiro, a saber,  $\overset{\cdot}{\varepsilon} f(\varepsilon)$  para a função  $f(\xi)$ . Por exemplo, dada a função denotada por  $\xi^2 = 1$ , tem-se  $\overset{\cdot}{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \{1, -1\}$ . No jargão fregiano, o conjunto  $\{1, -1\}$ , indicado por  $\overset{\cdot}{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1)$ , é a *extensão do conceito*<sup>112</sup> denotado por  $\xi^2 = 1$ . Como a extensão de um conceito não necessita de complementação, de acordo com o filósofo este não é uma função e sim um objeto.<sup>113</sup> Veremos nas próximas seções porque o filósofo necessitou de tal notação.

## 2.2 – Atribuições numéricas

Após análise realizada das seções 21 a 25 do livro, Frege chega à conclusão que os números não são propriedades dos objetos. Assim, na seção 45 ele propõe a seguinte questão: de que algo é dito por meio de uma declaração numérica (Zahlangabe)?<sup>114</sup> Na verdade, esta

<sup>111</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 117-130.

<sup>112</sup> O termo “extensão” (Umfang, em alemão) já era usado em lógica muito antes de Frege, exatamente com a mesma acepção que este o utiliza em seu livro. Ele aparece, por exemplo, no livro *Lógica de Port-Royal*, de Antoine Arnauld e Pierre Nicole, publicado pela primeira vez em 1662. O livro apresenta uma distinção entre a compreensão e a extensão de um termo geral. Enquanto o primeiro é o conjunto dos atributos que tal termo implica, o segundo é o conjunto das coisas as quais ele é aplicável (KNEALE, W.; KNEALE, 1991, p. 320-323).

<sup>113</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 117-130.

<sup>114</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 45.

questão divide-se em duas mais específicas: de que algo é dito e o que é dito a respeito deste algo em uma declaração numérica? A resposta à primeira interrogação é fornecida na seção 46: a declaração numérica contém um enunciado sobre um conceito. Segundo Frege, isto pode ser mais facilmente percebido em exemplos de indicações numéricas envolvendo o número zero; tal é o caso do exemplo por ele dado ainda na mesma seção, a proposição “Vênus tem zero luas”. Nada se enuncia sobre luas ou agregado de luas, pois não há qualquer objeto do qual se possa enunciar algo, mas sim a respeito do conceito “lua de Vênus”, a saber, que o mesmo nada subsume.<sup>115</sup> De modo análogo, no exemplo “a carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos” algo é enunciado sobre o conceito “cavalo que puxa a carruagem do imperador”, nomeadamente, que a tal conceito é atribuído o número quatro, ou que este conceito subsume quatro objetos, ou ainda, no jargão fregiano, que ao conceito em questão convém (zukommt) o número quatro.

Note que em uma declaração numérica aquilo que é enunciado de um conceito é: ao mesmo é atribuído um número. Desse modo, embora os números não sejam propriedades dos objetos também não o são dos conceitos, pois as propriedades associadas aos conceitos em enunciados semelhantes aos dois exemplos do parágrafo anterior são “atribuições de números” e não os números mesmos. Mas se os números não são propriedades, devem ser objetos; e esta é exatamente a posição de Frege no início do quarto capítulo de seu livro.<sup>116</sup> De acordo com as considerações acima, uma declaração como “Vênus tem zero luas” pode ser escrita como “Ao conceito ‘lua de Vênus’ convém o número zero”. O número zero é, portanto, uma parte do predicado “convém o número zero”.

Nas seções 52 e 53 Frege chama atenção para o fato de que não confunde propriedades que se enunciam de um conceito com as notas características que compõem o conceito. Como exemplo cita a expressão “quatro nobres cavalos”, em que a palavra “nobre” denota uma nota característica e a palavra “quatro” indica uma propriedade de um conceito, no caso “nobre cavalo”. Como observa o filósofo, uma “nota característica” é uma propriedade das coisas que caem sob o conceito, e não do conceito. Assim, “nobre” é uma propriedade dos objetos que caem sob o conceito “nobre cavalo”, ou seja, é uma nota característica deste conceito, ao passo que “quatro” indica que tal conceito subsume exatamente quatro objetos. Outro exemplo, já na seção 53, é o seguinte: “triângulo retângulo”. De acordo com Frege, “retângulo” não é uma propriedade do conceito “triângulo retângulo” (mas uma nota característica deste conceito), enquanto em “não existe triângulo retângulo

---

<sup>115</sup> Ibidem, § 46.

<sup>116</sup> Ibidem, § 57.

retilíneo equilátero” há uma indicação de uma propriedade satisfeita pelo conceito “triângulo retângulo retilíneo equilátero”, a saber, que a este é atribuído o número zero.

O fato de uma atribuição numérica ser uma propriedade de um conceito, como ocorre no exemplo anterior, não a impede, consoante o autor de *Os Fundamentos da Aritmética*, de ser uma nota característica de um outro conceito.<sup>117</sup> É o caso do conceito “conceito sob o qual nada cai”. Observe que o conceito “triângulo retângulo retilíneo equilátero” cai sob este conceito. Como propriedade que se enuncia do conceito “triângulo retângulo retilíneo equilátero”, a atribuição do número zero é, portanto, uma nota característica do conceito de segundo nível “conceito sob o qual nada cai”. Assim, em “há exatamente uma lua da Terra”, a unicidade é uma propriedade do conceito “lua da terra” e uma nota característica do conceito “conceito sob o qual cai um único objeto”.

As relações “cair sob” e “estar subordinado a” entre conceitos são totalmente distintas e não devem, como alerta Frege, ser confundidas.<sup>118</sup> Entre os conceitos “triângulo retângulo retilíneo equilátero” e “conceito sob o qual nada cai” ocorre a primeira relação e entre os conceitos “conceito sob o qual nada cai” e “convém o número zero”, a segunda. Se entre os conceitos  $F$  e  $G$  ocorre a primeira relação, em notação conceitual indica-se esse

fato por  $G_\beta(F(\beta))$ , mas se ocorre a segunda, por  $\begin{array}{l} \ulcorner \\ \lrcorner \end{array} \begin{array}{l} G(x) \\ F(x) \end{array}$ .<sup>119</sup>

### 2.3 – Uma definição recursiva de número

A primeira definição de número que Frege tenta estabelecer em seu livro é, na verdade, uma tentativa de fixar o significado de sentenças do tipo “não existe triângulo retângulo retilíneo equilátero” ou “há exatamente uma lua da Terra” – sendo que estas são casos particulares da expressão “existem exatamente  $m$  objetos que caem sob certo conceito” –, ou como diz Dummett,<sup>120</sup> de sentenças em que os termos numéricos ocorrem como adjetivos. Mais geralmente, ele quer determinar o sentido das sentenças “não existe nenhum  $F$ ”, “há exatamente 1  $F$ ” e “existem  $(n+1)$   $F$ ”,<sup>121</sup> onde  $F$  denota um conceito. O fato de ele

<sup>117</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 53.

<sup>118</sup> *Ibidem*, § 53.

<sup>119</sup> Esta expressão indica, naturalmente, uma relação de subordinação entre conceitos de primeiro nível.

<sup>120</sup> DUMMETT, 1991, p. 99.

<sup>121</sup> Equivalentemente: “nenhum objeto cai sob o conceito  $F$ ”, “um único objeto cai sob o conceito  $F$ ” e “exatamente  $(n+1)$  objetos caem sob o conceito  $F$ ”.

usar  $(n+1)$  em lugar de  $m$  justifica-se porque ele deseja fornecer uma definição recursiva da expressão em que  $m$  ocorre.

Frege prefere adotar para essas três sentenças as seguintes formulações: “ao conceito  $F$  convém o número 0”, “ao conceito  $F$  convém o número 1” e “ao conceito  $F$  convém o número  $(n+1)$ ”, respectivamente.<sup>122</sup> Segundo ele:

- i) “ao conceito  $F$  convém o número 0” possui o mesmo significado que “para todo  $x$ ,  $x$  não cai sob  $F$ ”;
- ii) “ao conceito  $F$  convém o número 1” possui o mesmo significado que “não é o caso que, para todo  $x$ ,  $x$  não cai sob  $F$ , e, para todo  $x$  e  $y$ , se  $x$  cai sob  $F$  e  $y$  cai sob  $F$ , então  $x$  e  $y$  são o mesmo”.
- iii) “ao conceito  $F$  convém o número  $(n+1)$ ” possui o mesmo significado que “para algum  $x$ ,  $x$  cai sob  $F$ , e ao conceito ‘cai sob  $F$  mas não é  $x$ ’ convém o número  $n$ ”.

Em notação contemporânea, ele quer dizer:

- i) “ $\exists_0 x Fx$ ” significa o mesmo que “ $\forall x \neg Fx$ ”;
- ii) “ $\exists_1 x Fx$ ” significa o mesmo que “ $\neg \forall x \neg Fx \wedge \wedge \forall x \forall y ((Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y)$ ”;
- iii) “ $\exists_{n+1} x Fx$ ” significa o mesmo que “ $\exists x (Fx \wedge \exists_n y (Fy \wedge \neg(x = y)))$ ”.

Os símbolos  $\exists_0, \exists_1, \exists_2 \dots$  são chamados quantificadores definidos, e a expressão “ $\exists_n x Fx$ ” equivale a “existem exatamente  $n$   $x$  que caem sob o conceito  $F$ ”. Repare que o sentido de “ $\exists_{n+1} x Fx$ ” é estabelecido a partir do sentido de “ $\exists_n x Fx$ ”. Com efeito, a primeira sentença equivale a “ $\exists x (Fx \wedge \exists_n y (Fy \wedge \neg(x = y)))$ ”, cujo significado apenas pode ser determinado a partir do de “ $\exists_n y (Fy \wedge \neg(x = y))$ ”. Assim, se quisermos saber o que dizer “ $\exists_2 x Fx$ ” precisaremos conhecer o sentido de “ $\exists_1 y (Fy \wedge \neg(x = y))$ ”, que foi fixado em (ii): “ $\neg \forall y \neg (Fy \wedge \neg(x = y)) \wedge \wedge \forall y \forall z (((Fy \wedge \neg(x = y)) \wedge (Fz \wedge \neg(x = z))) \rightarrow y = z)$ ”. Se quisermos conhecer o significado de “ $\exists_3 x Fx$ ” teremos que conhecer o de “ $\exists_2 y (Fy \wedge \neg(x = y))$ ”, e assim por diante.

Tais definições não satisfizeram seu autor por dois motivos: primeiro, elas não nos permitem demonstrar que  $x$  e  $y$  são o mesmo, caso convenham ao mesmo conceito  $F$  e,

<sup>122</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 55.



segundo, não são suficientes para decidir se a um conceito  $F$  convém ou não um certo objeto  $x$ , ou seja, se  $x$  é ou não um número.<sup>123</sup>

## 2.4 – Uma definição contextual de número

Quando o significado de um símbolo é estabelecido pelo sentido da sentença na qual ele ocorre, ou seja, mediante o contexto em que ele aparece, temos uma definição contextual do símbolo em questão. O seu significado geralmente é fixado empregando-se uma outra sentença com sentido equivalente ao da primeira, mas onde o símbolo não ocorre. Tendo em vista as duas dificuldades que arrolamos anteriormente associadas à definição recursiva de expressões do tipo “o número que convém a”, Frege passa, a partir da seção 62 de *Os Fundamentos da Aritmética*, a tentar estabelecer contextualmente o seu significado. O tipo de sentença em que tais termos ocorrem, e cujo sentido ele quer estabelecer têm a forma de uma identidade do tipo “O número que convém ao conceito  $F$  é o mesmo que convém ao conceito  $G$ ”.<sup>124</sup>

Uma sentença com sentido equivalente ao de tal identidade não deve possuir o termo “o número que convém a”. A fim de chegar a uma sentença deste tipo, Frege propõe uma analogia com sentenças que envolvem o conceito de direção. Como, segundo ele, “a direção da reta  $a$  é igual à direção da reta  $b$ ” equivale a “a reta  $a$  é paralela à reta  $b$ ”, a segunda sentença fornece uma definição contextual de “a direção de”.<sup>125</sup> Do mesmo modo que uma identidade entre direções de retas pode ser convertida em uma relação binária entre retas, uma identidade entre atribuições numéricas de conceitos pode ser explicada em termos de uma relação binária entre conceitos. Pelo menos esta parece ser a opinião do filósofo nas seções subseqüentes.

No caso das atribuições numéricas, Frege tenta estabelecer o seguinte: “O número que convém ao conceito  $F$  é o mesmo que convém ao conceito  $G$ ” possui o mesmo significado que “o conceito  $F$  é equinúmero (*gleichzahlig*) ao conceito  $G$ ”. Ele “tenta estabelecer” porque a definição contextual, assim como a recursiva, não lhe satisfaz inteiramente. Vejamos o motivo. Por um lado, a definição contextual para o caso de direções resolve uma dificuldade: se a uma reta estão associadas duas direções  $a$  e  $b$  podemos concluir que  $a$  é a mesma direção que  $b$ , pois a relação de paralelismo é reflexiva, ou seja, uma reta é

<sup>123</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 56.

<sup>124</sup> *Ibidem*, § 62.

<sup>125</sup> *Ibidem*, § 64-65.

paralela a si mesma. Por outro lado, não é possível por seu intermédio determinar se a proposição “a direção da reta  $a$  é igual a  $q$ ” é verdadeira ou falsa.<sup>126</sup> Não há problema caso  $q$  seja dado sob a forma “a direção da reta  $b$ ”, pois se a reta  $a$  for paralela à reta  $b$ , a proposição será verdadeira, caso contrário, falsa. Mas se  $q$  não for apresentado sob tal forma, será preciso determinar se ele denota ou não uma direção. E para isso, é preciso saber explicitamente o que é o conceito de direção.<sup>127</sup>

O mesmo acontece no caso das atribuições numéricas. Se a um conceito convém os números  $n$  e  $m$ , deve ser possível determinar se  $n$  e  $m$  são os mesmos por meio da reflexividade da relação de “equinumericidade” (Gleichzahligkeit), ou seja, se ao conceito  $F$  convém os números  $n$  e  $m$ , então como  $F$  é equinumérico a si mesmo,  $n$  e  $m$  são o mesmo número. Ou a “equinumericidade” entre conceitos é aceita sem definição, isto é, tomada como uma relação reflexiva entre conceitos, ou deve ser definida em termos de outra relação e, neste caso, a reflexividade deve ser demonstrada. Frege preferiu a segunda opção, estipulando que dois conceitos são equinuméricos quando, e somente quando, existe a possibilidade de coordenar biunivocamente os objetos que caem sob um conceito aos que caem sob o outro.<sup>128</sup>

O problema repousa agora na determinação do valor-de-verdade de proposições do tipo “o número que convém ao conceito  $F$  é  $n$ ”. Assim como no caso de direções, a definição contextual não se pronuncia a respeito de tal questão, e uma definição explícita de número é necessária.

## 2.5 – Uma definição explícita de número

A relação de paralelismo entre retas é uma relação de equivalência; assim quando as retas  $a$  e  $b$  são paralelas, as classes de equivalência determinadas por  $a$  e  $b$ , segundo tal relação, coincidem, e reciprocamente. Isso quer dizer, no jargão fregiano, que as extensões dos conceitos “reta paralela à reta  $a$ ” e “reta paralela à reta  $b$ ” são as mesmas. Frege fornece então a seguinte definição explícita de direção: a direção da reta  $a$  é a extensão do conceito “paralelo à reta  $a$ ”. Para atribuições numéricas finalmente ele estabelece: o número que convém ao conceito  $F$  é a extensão do conceito “equinumérico ao conceito  $F$ ”.<sup>129</sup>

De posse de uma “definição efetiva” de número, o próximo passo é provar que as proposições “O número que convém ao conceito  $F$  é o mesmo que convém ao conceito  $G$ ” ( $\square$ )

<sup>126</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 66.

<sup>127</sup> *Ibidem*, § 66.

<sup>128</sup> *Ibidem*, § 72.

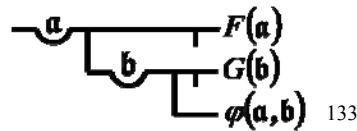
<sup>129</sup> *Ibidem*, § 68.

e “o conceito  $F$  é equinúmero ao conceito  $G$ ” ( $\circ$ ) são equivalentes. Isso é feito por Frege na seção 73, embora não detalhadamente. Na verdade, ele demonstra que ( $\circ$ ) implica ( $\square$ ), porém não a recíproca. A demonstração da bi-implicação é simples, mas no momento faremos apenas um esboço dela.<sup>130</sup>

Dizer que o conceito  $F$  é equinúmero ao conceito  $G$  equivale a dizer que os objetos que caem sob os conceitos  $F$  e  $G$  são coordenados uns aos outros por uma relação biunívoca (beiderseits eindeutig)  $\varphi$ .<sup>131</sup> Isso significa duas coisas:

- i) Os objetos que caem sob os conceitos  $F$  e  $G$  são coordenados uns aos outros por uma relação  $\varphi$ ;
- ii) A relação  $\varphi$  é biunívoca.

De acordo com Frege, quer dizer que: para alguma relação  $\varphi$ , (i-a) todo  $x$  que cai sob  $F$  mantém a relação  $\varphi$  com algum  $y$  que cai sob  $G$  e (i-b) com todo  $y$  que cai sob  $G$ , um  $x$  que cai sob  $F$  mantém a relação  $\varphi$ . Ainda segundo ele, (a) equivale à impossibilidade das proposições “ $x$  cai sob  $F$ ” e “ $x$  não está na relação  $\varphi$  com um  $y$  que cai sob  $G$ ”, qualquer que seja  $x$ , serem concomitantemente verdadeiras.<sup>132</sup> Por isso, (a) pode ser escrita “conceitograficamente” como:



Com relação à (ii), ela exprime o seguinte: (ii-a) se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $y$  e se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$ , então quaisquer que sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $y$  é o mesmo que  $z$ ; (ii-b) se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$  e se  $y$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$ , então quaisquer que sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $x$  é o mesmo que  $y$ .<sup>134</sup>

Resumindo, em (i) Frege está falando da existência de uma relação  $\varphi$  cujo domínio é a extensão do conceito  $F$  (i-a) e cuja imagem é a extensão do conceito  $G$  (i-b). Em (ii) está dizendo que essa relação e sua inversa (ii-a e ii-b) são funções (no sentido matemático

<sup>130</sup> Uma demonstração integral encontra-se no apêndice B.

<sup>131</sup> Em termos atuais, dizer que dois conceitos são equinúmeros significa o mesmo que dizer as extensões dos dois conceitos possuem a mesma cardinalidade.

<sup>132</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 71.

<sup>133</sup> Essa fórmula seria escrita hoje em dia do seguinte modo:  $\forall x(\forall y(x\varphi y \rightarrow \neg Gy) \rightarrow \neg Fx)$ . A fórmula  $\forall y(x\varphi y \rightarrow \neg Gy) \rightarrow \neg Fx$  equivale a  $Fx \rightarrow \neg \forall y(x\varphi y \rightarrow \neg Gy)$ ; esta, por sua vez, equivale a  $Fx \rightarrow \exists y \neg(x\varphi y \rightarrow \neg Gy)$ , que finalmente pode ser escrita como  $Fx \rightarrow \exists y(x\varphi y \wedge Gy)$ . Segue, por generalização, a fórmula  $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(x\varphi y \wedge Gy))$ , que é equivalente, portanto, à primeira. Podemos lê-la do seguinte modo: qualquer que seja  $x$ , se  $x$  cai sob  $F$ , existe  $y$  tal que  $y$  cai sob  $G$  e  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $y$ .

<sup>134</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 71.

do termo). A junção de (i) e (ii) equivale à afirmação da existência de uma bijeção  $\varphi$  cujo domínio é a extensão de  $F$  e cujo co-domínio é a extensão de  $G$ . É conveniente reiterar aqui que diferentemente do que ocorre atualmente em matemática, onde as funções são particulares relações, as relações na doutrina fregiana é que são particulares funções. Então, quando Frege fala em uma relação  $\varphi$ , está falando em uma função (no sentido fregiano, não no sentido matemático) de dois argumentos, e quando fala que uma relação  $\varphi$  é biunívoca (beiderseits eindeutig), está dizendo que uma função  $\varphi$  (ainda no sentido fregiano) de dois argumentos e sua inversa (Umkehrung) <sup>135</sup> são unívocas (eindeutig). Em *Begriffsschrift*, Frege exprimiria

que  $\varphi$  é unívoca por meio do juízo  $\vdash \text{I} \varphi(\delta, \varepsilon)$ . Em *Leis Fundamentais* ele usa uma

notação semelhante, no caso  $\text{I} \varphi$ , para indicar a relação unívoca  $\varphi$ . Quanto à inversa de uma relação, não há no primeiro livro um sinal para sua indicação, mas encontramos um símbolo no segundo para denotar a extensão da inversa (Umkehrung) de uma relação, a saber,  $\mathfrak{U}$ . Neste,  $\mathfrak{U}\mathcal{D}$  é a extensão da inversa de uma relação que tem  $\mathcal{D}$  como sua extensão.

Dizer que o número que convém ao conceito  $F$  é o mesmo que convém ao conceito  $G$ , pela definição de número de Frege, é o mesmo que afirmar que as extensões dos conceitos “equinúmero a  $F$ ” e “equinúmero a  $G$ ” são iguais. Mas as extensões de dois conceitos são iguais quando todo objeto que cai sob o primeiro também cai sob o segundo, e vice-versa; daí as extensões de “equinúmero a  $F$ ” e “equinúmero a  $G$ ” só coincidirão quando todo conceito equinúmero a  $F$  for equinúmero a  $G$ , e reciprocamente. Vamos usar a notação  $F \approx G$  para indicar que os conceitos  $F$  e  $G$  são equinúmeros. Isso significa que para provar que  $(\circ)$  se, e somente se,  $(\square)$ , é preciso mostrar que  $F \approx G$  se, e somente se, para qualquer conceito  $H$ ,  $H \approx F \leftrightarrow H \approx G$ . <sup>136</sup>

Tudo que se segue em termos de propriedades dos números naturais, consoante Dummett, <sup>137</sup> deriva da equivalência entre  $(\circ)$  e  $(\square)$ , de modo que não mais a definição explícita de número seja utilizada no livro. Na verdade, todos os teoremas de Frege podem ser demonstrados unicamente a partir desta equivalência, sem que haja necessidade de tal definição. <sup>138</sup>

<sup>135</sup> O termo é usado por Frege em *Leis Fundamentais da Aritmética*, mais especificamente, a partir da seção 40 do livro.

<sup>136</sup> Os detalhes, como dissemos, encontram-se no apêndice B.

<sup>137</sup> Cf. DUMMETT, 1991, p. 123.

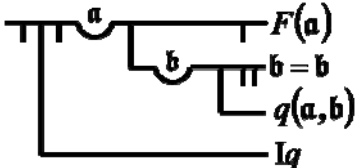
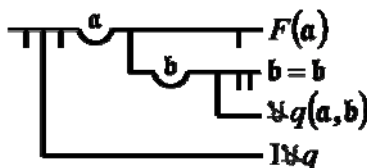
<sup>138</sup> Cf. WRIGHT, 1983, p. 154-169.

## 2.6 – Definição dos números individuais e da relação sucessor

Uma vez que uma definição de número foi dada, resta a questão de saber o que são os números zero, um, dois etc., que Frege chama de números individuais (einzeln Zahlen). Como nada cai sob o conceito “diferente de si próprio”, ele define 0 como *o número que convém ao conceito “diferente de si próprio”*. Salieta que qualquer outro conceito que nada subsume poderia ser usado em lugar deste, porém este é preferível pela sua natureza, que é puramente lógica.<sup>139</sup>

Pois se o número que convém ao conceito  $F$  é a extensão do conceito “equinúmero a  $F$ ”, 0 é, deste modo, a extensão do conceito “equinúmero a ‘diferente de si próprio’”, isto é, 0 é o conjunto formado por todos os conceitos sob os quais nada cai. Se usarmos a letra  $\Gamma$  para denotar o conceito “diferente de si próprio”, ou seja, se  $\Gamma$  denotar o predicado em que  $\Gamma(x)$  se, e somente se,  $\neg x = x$ , poderemos dizer que o número 0 da definição de Frege é a classe de equivalência determinada por  $\Gamma$ , módulo relação de “equinumericidade”, pois esta é uma relação de equivalência.<sup>140</sup> Em símbolos,  $0 =_{df} [\Gamma]_{\sim}$ .

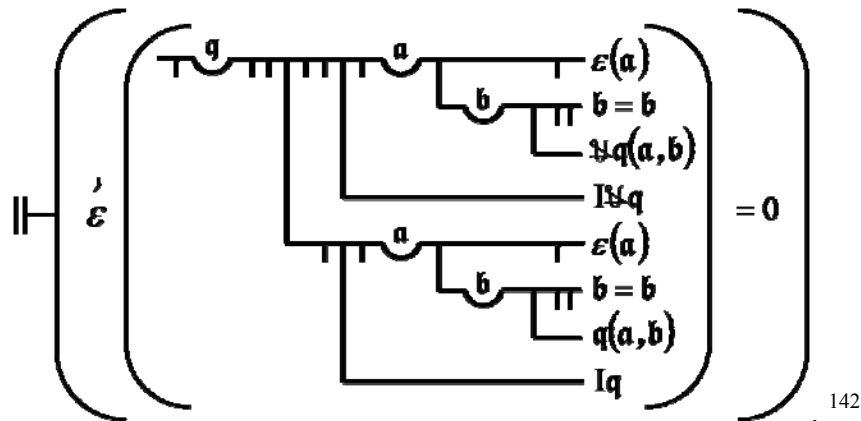
Dizer que um conceito  $F$  é equinúmero ao conceito “diferente de si próprio” equivale a dizer que existe uma relação  $q$  tal que os objetos que caem sob os conceitos  $F(\xi)$  e  $\neg(\xi = \xi)$  são coordenados uns aos outros por  $q$  e pela inversa de  $q$ , sendo  $q$  e sua inversa unívocas. Dito de outro modo,  $F$  deve ser tal que exista uma relação  $q$  onde a conjunção das

fórmulas  e  corresponda ao verdadeiro.<sup>141</sup> Como 0 é o conjunto dos conceitos  $F$  que satisfazem tal propriedade, tem-se na notação de Frege o seguinte:

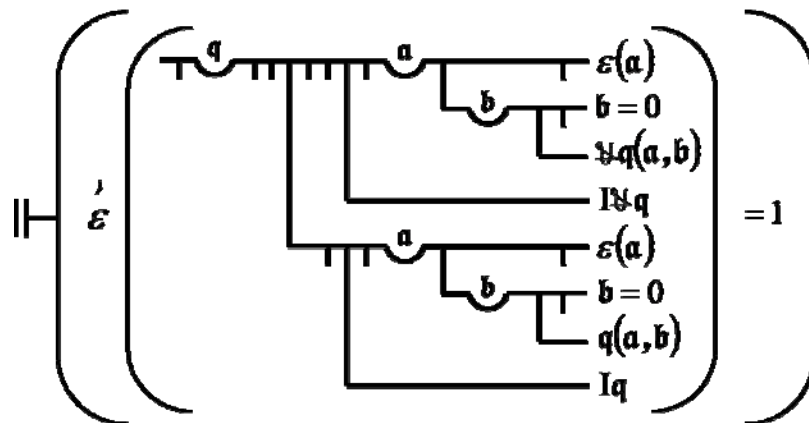
<sup>139</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 74.

<sup>140</sup> Demonstramos isso no apêndice B.

<sup>141</sup> Estamos abusando da simbologia de Frege, pois os símbolos  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{q}$  aplicam-se, a rigor, a extensões de conceitos ou relações, e não propriamente a conceitos e relações. Lembramos que o sinal  $\equiv$  não é mais usado por ele; em seu lugar (nos trabalhos após *Begriffsschrift*) é utilizado o sinal  $=$ .



Quanto ao número 1, ele é o número que convém ao conceito “igual a 0”.<sup>143</sup> Noutros termos, 1 é o conjunto dos conceitos que subsumem um único objeto. Se por  $T$  denotarmos um “representante” destes conceitos, ou seja, se  $T$  for o predicado em que  $T(x)$  se, e somente se,  $x = 0$ , poderemos dizer que o número 1 da definição de Frege é a classe de equivalência determinada por  $T$ , módulo relação de “equinumericidade”, isto é,  $1 =_{df} [T]_{\approx}$ . Na notação conceitual isso equivale à fórmula:



Um símbolo para abreviar a expressão acima só foi introduzido por Frege em *Leis Fundamentais*, a saber,  $\mathfrak{1}$ . No presente caso, indicaríamos que 1 convém ao conceito “igual a zero” do seguinte modo:  $\| - (\mathfrak{1} \overset{\cdot}{\varepsilon}(\varepsilon = 0) = 1)$ . Do mesmo modo, para indicar que 0 é o número que convém o conceito “diferente de si próprio”, escreveríamos:

<sup>142</sup> Em nenhuma passagem de *Os Fundamentos da Aritmética* o filósofo usa sua conceitografia; isto só é feito em *Leis Fundamentais da Aritmética*. Empregamo-a aqui com a finalidade de mostrar ao leitor como ficariam as suas definições escritas com ela. Além disso, isto nos será útil na discussão que faremos no próximo capítulo.  
<sup>143</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 77.

$\vdash (\exists \varepsilon \neg (\varepsilon = \varepsilon) = 0)$ . Uma vez que os números 0 e 1 estão definidos, uma definição de 2 também será possível. Um raciocínio análogo aos anteriores nos leva a definir 2 como sendo o número que convém ao conceito “igual a 0 ou igual a 1”. No lugar do conceito  $\xi = 0$  na

fórmula anterior colocaríamos, daí, o conceito  $\begin{matrix} \vdash \xi = 1 \\ \vdash \xi = 0 \end{matrix}$ . O número 3 seria o número que convém ao conceito “igual 0, igual a 1 ou igual a 2” e assim por diante.<sup>144</sup>

Em geral, se  $n$  é um número, existe um conceito  $F$  ao qual ele convém, pois caso contrário ele não seria um número. Se  $n$  for 0, nenhum objeto cai sob  $F$ ; por outro lado, se  $n$  não for 0, deve haver ao menos um objeto  $x$  que cai sob  $F$ . Seja  $m$  o número que convém ao conceito “cai sob  $F$  mas não é igual a  $x$ ”. De acordo com Frege,  $n$  segue na série natural dos números imediatamente após  $m$ , ou seja,  $n$  é o sucessor de  $m$ .<sup>145</sup>

O símbolo usado pelo filósofo para denotar a função sucessor em *Leis Fundamentais* é a letra **f**. Assim,  $f(n,m)$  quer dizer que  $n$  é o sucessor de  $m$ ; na notação de *Begriffsschrift*, esta expressão funcional equivale a:

$$\begin{matrix} \vdash a \\ \vdash f(a) \\ \vdash f(f(a)) \\ \vdash f(f(f(a))) \end{matrix} = n$$

$$\begin{matrix} \vdash a \\ \vdash f(a) \end{matrix} = m$$

<sup>144</sup> Em 1908 Zermelo propôs definir os números 0, 1, 2, 3 ... como os conjuntos  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$ , isto é, como  $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\} \dots$ . Mais tarde, von Neumann sugeriu defini-los como  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots$ , ou seja, como  $\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\} \dots$  (ENDERTON, 1977, p. 66-69). A definição de von Neumann, que é a adotada hoje em dia, difere da de Frege no seguinte sentido: o número 0 é, na primeira, o conjunto vazio, ao passo que o número 0 é, na segunda, o conjunto de todos os conceitos cujas extensões são vazias; o número 1 é, na primeira, um conjunto unitário (no caso, o conjunto que tem o número 0 como único elemento), ao passo que o número 1 é, na segunda, o conjunto de todos os conceitos cujas extensões são conjuntos unitários; o número 2 é, na primeira, um conjunto com somente dois elementos (no caso, o conjunto que tem 0 e 1 como únicos elementos), ao passo que o número 2 é, na segunda, o conjunto de todos os conceitos cujas extensões possuem exatamente 2 elementos; ... Por conseguinte, para Frege o número 0 é visto não como a extensão de um conceito que tem extensão vazia, mas como o conjunto de todos os conceitos que têm em comum a propriedade de ter suas extensões vazias. Da mesma maneira, o número 1 é visto não como um conjunto unitário, mas como o conjunto de todos os conceitos que têm em comum a propriedade de ter conjuntos unitários como suas extensões. Vê-se que tais definições estão de acordo com sua visão de que as declarações numéricas enunciam propriedades dos conceitos.

<sup>145</sup> *Os Fundamentos da Aritmética*, § 76.

Traduzindo, existe em conceito  $F$  e um objeto  $a$  que cai sob ele tais que o número que convém a  $F$  é  $n$  – em símbolos:  $\mathfrak{N}\varepsilon F(\varepsilon) = n$  – e o número que convém ao conceito “cai

sob  $F$  mas não é igual a  $a$ ” é  $m$  – em símbolos:  $\mathfrak{N}\varepsilon \left( \begin{array}{l} \varepsilon = a \\ \hline F(\varepsilon) \end{array} \right) = m$ .

Com as definições de número e função sucessor – baseadas unicamente em noções da lógica e em termos puramente lógicos – em mãos, Frege estava em condições, a partir de um certo número de axiomas, de provar uma série de propriedades sobre números naturais. Este assunto, porém, está fora de nossos objetivos, de modo que não o discutiremos aqui. Apenas interessa-nos neste final de capítulo observar que, conforme a notação utilizada pelo filósofo na terceira parte de *Begriffsschrift*, a sentença “ $a$  pertence à série dos números naturais” corresponderia à fórmula  $\frac{\gamma}{\beta} \mathbf{f}(0_{\gamma}, a_{\beta})$ , onde  $\mathbf{f}$  é a função sucessor definida anteriormente. Esta simbologia é abandonada em *Leis Fundamentais*, sendo adotada a expressão  $\mathfrak{U}\mathbf{f}(a, 0)$  para indicar a mesma coisa.<sup>146</sup>

<sup>146</sup> Aqui estamos novamente abusando da terminologia de Frege: o símbolo em questão aplica-se a extensões de relações (e não propriamente a relações).



### CAPÍTULO 3 – A NOÇÃO DE FUNÇÃO EM *LEIS FUNDAMENTAIS DA ARITMÉTICA*

Quando publicou o primeiro volume de *Leis Fundamentais da Aritmética*, Frege já tinha estabelecido duas importantes distinções, a saber, aquelas entre *sentido e referência* (Sinn und Bedeutung) e entre *função e objeto* (Funktion und Gegenstand). Neste capítulo discutiremos como a primeira dessas distinções influenciou a teoria de funções de Frege, e que contribuições esta última trouxe a seu livro, ao programa logicista e à lógica como um todo.

#### 3.1 – Sentido e referência de nomes próprios

Um ano antes da publicação do primeiro volume de seu último livro Frege assumiu uma posição diferente daquela em *Begriffsschrift* quanto à relação de identidade. No último ele chegara à conclusão que a identidade é uma relação entre sinais e não entre os objetos denotados pelos sinais. Assim, a sentença  $a = b$ <sup>147</sup> corresponderia o verdadeiro se, e somente, os sinais  $a$  e  $b$  fossem tais que denotassem os mesmos objetos. A partir do artigo *Sobre Sentido e Referência*, publicado primeiramente em 1892, o filósofo passa a defender que tal relação é, na verdade, uma relação entre os sentidos dos sinais. Desse modo, além do objeto denotado pelo sinal, chamado por Frege de referência (Bedeutung) do sinal, existe um segundo elemento associado a este: o seu sentido (Sinn). Às expressões “estrela vespertina” e “estrela matutina” corresponderia, por exemplo, a mesma referência, a saber, o planeta Vênus, porém não o mesmo sentido. O fato de uma identidade do tipo “a estrela vespertina é a mesma que a estrela matutina” ampliar o conhecimento de alguém residiria, portanto, na diferença de sentido das duas expressões.

O sentido do sinal contém, segundo o filósofo, o modo de apresentação daquilo que é a referência do sinal. Tentando melhor esclarecer o que quer dizer com isto, compara o sentido de um sinal com a imagem que é formada na lente de um telescópio quando este é apontado para a lua. O objeto observado, ou seja, a lua, corresponde à referência, e o modo por que este objeto se apresenta, no caso, por meio de uma imagem em um telescópio, corresponde ao sentido do nome “lua”. É claro que um mesmo objeto pode ser associado a seu sinal de diferentes modos, como é o caso do planeta Vênus que, dependendo do horário em

---

<sup>147</sup> Como vimos no primeiro capítulo, Frege escrevia  $a \equiv b$  quando publicou *Begriffsschrift*.

que aparece no céu, poderia ser percebido de modos diferentes por aqueles que o observam. Se fosse avistado no período da manhã, seria a “estrela matutina”, se fosse visto no período da tarde, a “estrela vespertina”. O nome “Vênus” possuiria neste caso dois sentidos, mas obviamente um único referente.<sup>148</sup> Assim, a relação nome-sentido é um para muitos, e a relação sentido-referente, muitos para um. Nem sempre há, no entanto, um sentido associado a um sinal ou uma referência associada a um sentido ou nome. Uma expressão em uma dada linguagem pode ser destituída de sentido, como ‘ccccadef gdftsaa’ no português, embora seja um sinal. Também uma expressão com sentido em certa linguagem pode ser desprovida de referência, como “o corpo celeste mais distante da Terra” que, segundo Frege, possui um sentido, mas certamente não um referente.<sup>149</sup>

Não satisfeito com uma distinção entre sentido e referência apenas para palavras e expressões que atuam como nomes próprios, o filósofo alemão tenta estender tal distinção a sentenças. Partindo de dois princípios, a saber, que uma sentença possui uma referência e que a substituição de uma palavra por outra com a mesma referência em uma sentença não altera a referência desta, ele conclui que a referência de uma sentença é o seu valor-de-verdade. Com efeito, embora o pensamento expresso pelas sentenças “a estrela matutina é um corpo iluminado pelo Sol” e “a estrela vespertina é um corpo iluminado pelo Sol” não é o mesmo – pois uma pessoa que ignorasse que o objetos designados pelas expressões “estrela matutina” e “estrela vespertina” coincidem poderia considerar uma destas sentenças falsa e a outra, verdadeira –, o mesmo valor-de-verdade é a elas associado, no caso, o verdadeiro. E a substituição de “a estrela matutina” por “a estrela vespertina” na primeira sentença, não altera o seu valor-de-verdade. Uma sentença atua, desse modo, como um “nome” de um valor-de-verdade, e como tal, pode não possuir um referente, como é o caso da sentença “Ulisses profundamente adormecido foi desembarcado em Ítaca”, que não pode ser chamada de verdadeira nem de falsa.<sup>150</sup>

Para Frege o referente de um nome é um objeto, assim o referente de uma sentença, também o é. Logo, os valores-de-verdade são, na doutrina fregiana, objetos. Um sinal como

$$\left| \begin{array}{l} \delta \\ \alpha \end{array} \right( \begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right),$$

por exemplo, é uma sentença da conceitografia e tem, desse modo, um sentido

que, no jargão fregiano, é o pensamento por ele expresso – este é, como vimos no primeiro

<sup>148</sup> Usaremos a palavra “referente” como sinônimo de “referência” (Bedeutung).

<sup>149</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 59-86.

<sup>150</sup> Cf. *ibidem*, p. 59-86.

capítulo, a propriedade  $F$  é hereditária na série  $f$ -, e uma referência, que pode ser um dos dois valores-de-verdade.<sup>151</sup>

### 3.2 – Curso-de-valores de funções e o paradoxo de Russell

Frege dedica duas seções de *Leis Fundamentais*, a saber, as seções 3 e 10, para tratar do tema “curso-de-valores de uma função”, um tema delicado, principalmente devido aos problemas a ele associados. A grande dificuldade diz respeito à definição de curso-de-valores, no caso, uma definição contextual. Isso porque Frege estabelece que as sentenças “a função  $\Phi(\xi)$  tem o mesmo curso-de-valores que a função  $\Psi(\xi)$ ” e “as funções  $\Phi(\xi)$  e  $\Psi(\xi)$  têm sempre o mesmo valor para o mesmo argumento” possuem o mesmo significado. Em símbolos,  $\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \overset{\cdot}{\alpha}\Psi(\alpha)$  se, e somente se,  $\neg \overset{\cdot}{\alpha}(\Phi(\alpha) = \Psi(\alpha))$ . As dificuldades relacionadas a essa definição são as mesmas encontradas em *Os Fundamentos da Aritmética* para o caso da definição contextual de número, ou seja, por meio dela não é possível decidir se a sentença “o curso-de-valores da função  $\Phi(\xi)$  é  $n$ ” corresponde ao verdadeiro ou ao falso. Para tanto, seria preciso saber se  $n$  é ou não um curso-de-valores, caso ele não apareça sob o nome  $\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ .

A definição contextual não possibilita, conforme expusemos no capítulo anterior, tal determinação e por esse motivo ela foi abandonada em *Os Fundamentos da Aritmética*. Em *Leis Fundamentais*, Frege preferiu permanecer com a definição contextual e, mais que isso, optou por adotá-la como um axioma de seu sistema. A possibilidade de entender a generalização de uma igualdade entre duas funções  $\Phi(\varepsilon)$  e  $\Psi(\varepsilon)$  como uma igualdade entre os cursos-de-valores –  $\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$  e  $\overset{\cdot}{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)$ , respectivamente – dessas funções não poderia, consoante o filósofo, ser demonstrada, devendo ser aceita como uma lei lógica fundamental.<sup>152</sup>

O leitor deve notar aqui que a notação por ele usada para cursos-de-valores é a mesma para extensões de conceitos que vimos no capítulo anterior. Na verdade, esta notação só foi introduzida a partir do artigo *Função e Conceito* – e, portanto, após a publicação de *Os*

<sup>151</sup> Russell, na qualidade de primeiro crítico da semântica fregiana, não concordou com a possibilidade de se considerar sentenças como nomes (cf. THIEL, 1972, p. 99). Não estamos interessados aqui em discutir críticas à doutrina de Frege do sentido e referência, mas tão somente expor seus pontos principais.

<sup>152</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 9-32.

*Fundamentos da Aritmética* –, de modo que é usada incisivamente por Frege em *Leis Fundamentais*. A notação é a mesma porque, consoante o filósofo na introdução do livro, extensões de conceitos são particulares cursos-de-valores, mais especificamente, são cursos-de-valores de funções de um só argumento cujos valores são valores-de-verdade. Até aí não há problema em tal estipulação, mas em *Função e Conceito* Frege afirma que aquilo que entendia por curso-de-valores de uma função coincidia com a concepção matemática corrente de função.<sup>153</sup> Se com isso ele queria dizer que o curso-de-valores de uma função era um conjunto de pares ordenados, ou seja, aquilo que se entende hoje por noção extensional de função, não podemos ter certeza. Se for este o caso, o par ordenado  $(a, b)$  pertenceria ao curso-de-valores da função se, e somente se, o valor da função para o argumento  $a$  fosse  $b$ . Desse modo, quando ele diz que a extensão de um conceito é o conjunto dos objetos que caem sob o conceito ou, noutros termos, que o conjunto dos objetos que colocados nos lugares de argumento do conceito lhe retornam o verdadeiro, estaria entrando em contradição, pois tal conjunto é constituído dos primeiros elementos dos pares cujos segundos elementos são o verdadeiro, e não por tais pares.<sup>154</sup>

Quando  $\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \overset{\cdot}{\alpha}\Psi(\alpha)$  tem o mesmo significado que  $\neg(\Phi(\mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{a}))$ , isso implica uma coincidência dos valores-de-verdade dessas duas proposições, isto é, no fato de ser o verdadeiro a referência da sentença “ $\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \overset{\cdot}{\alpha}\Psi(\alpha) = \neg(\Phi(\mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{a}))$ ”.<sup>155</sup> Frege estava ciente de que a correspondência (semântica e sintática) entre as duas proposições não é biunívoca; com efeito, se  $X(\xi)$  for uma função que nunca assume o mesmo valor para diferentes argumentos,  $X(\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = X(\overset{\cdot}{\alpha}\Psi(\alpha))$  se, e somente se,  $\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \overset{\cdot}{\alpha}\Psi(\alpha)$ , donde a equivalência também entre  $X(\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = X(\overset{\cdot}{\alpha}\Psi(\alpha))$  e  $\neg(\Phi(\mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{a}))$ . Se  $X(\xi)$  não for uma função cujo valor para todo argumento seja o próprio argumento, então  $X(\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) \neq \overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ , isto é, haverá uma igualdade entre dois objetos – no caso, entre  $X(\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$  e  $X(\overset{\cdot}{\alpha}\Psi(\alpha))$  – que não são dados (denotados) como (nomes de) cursos-de-

<sup>153</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 9-32.

<sup>154</sup> Cf. ibidem, p. 9-32.

<sup>155</sup> Por isso Frege adota como um de seus axiomas o juízo:  $\vdash (\overset{\cdot}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \overset{\cdot}{\alpha}\Psi(\alpha) = \neg(\Phi(\mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{a})))$ , chamado por ele de Lei Fundamental V.

valores, identidade esta equivalente a  $\neg(\Phi(\mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{a}))$  e que possui, portanto, o mesmo referente (valor-de-verdade) desta.

Uma vez que apenas dois tipos de objetos são conhecidos na doutrina fregeana, nomeadamente, valores-de-verdade e cursos-de-valores, uma questão que imediatamente surge é a seguinte: podem valores-de-verdade ser cursos-de-valores? Noutros termos: é possível que um valor-de-verdade nos seja dado como um curso-de-valores (seja denotado por um nome de curso-de-valores) sem que com isto a equivalência entre identidade de cursos-de-valores e generalização de identidade de valores de funções seja contrariada? Tendo em vista a possibilidade de ocorrer  $\tilde{\eta}\Phi(\eta) = \tilde{\alpha}\Psi(\alpha)$  se, e somente se,  $\neg(\Phi(\mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{a}))$ , onde, em geral,  $\tilde{\eta}\Phi(\eta) \neq \varepsilon\Phi(\varepsilon)$ , Frege define uma função  $X(\xi)$  tal que:

$$X(\xi) = \begin{cases} V \text{ se } \xi = \tilde{\eta}\Lambda(\eta) \\ \tilde{\eta}\Lambda(\eta) \text{ se } \xi = V \\ F \text{ se } \xi = \tilde{\eta}M(\eta) \\ \tilde{\eta}M(\eta) \text{ se } \xi = F \\ \xi \text{ em todos os outros casos} \end{cases}$$

Na equação acima  $V$  e  $F$  denotam o “verdadeiro” e o “falso”, respectivamente, e os objetos particulares  $\tilde{\eta}\Lambda(\eta)$  e  $\tilde{\eta}M(\eta)$  são tais que uma identidade entre eles equivale à generalização de uma igualdade dos valores das funções particulares  $\Lambda(\varepsilon)$  e  $M(\varepsilon)$ , isto é,  $\tilde{\eta}\Lambda(\eta) = \tilde{\alpha}M(\alpha)$  se, e somente se,  $\neg(\Lambda(\mathbf{a}) = M(\mathbf{a}))$ . Como  $X(\xi)$  é uma função que nunca assume os mesmos valores para diferentes argumentos, segue que os objetos  $X(\tilde{\eta}\Lambda(\eta))$  e  $X(\tilde{\eta}M(\eta))$ , cuja identidade equivale à identidade entre  $\tilde{\eta}\Lambda(\eta)$  e  $\tilde{\eta}M(\eta)$ , podem ser reconhecidos do mesmo modo que dois cursos-de-valores o podem e, além disso, são idênticos a valores-de-verdade. Sendo assim, conclui Frege, a estipulação de que os dois valores-de-verdade podem ser dados como cursos-de-valores arbitrários não contraria seu axioma.<sup>156 157</sup>

A partir da conclusão do parágrafo precedente, o filósofo estabeleceu o seguinte: o curso-de-valores da função  $\neg\xi$  deve ser o verdadeiro e o curso-de-valores da função  $\xi = (\neg(\mathbf{a} = \mathbf{a}))$ , o falso. Em símbolos,  $\varepsilon(\neg\varepsilon) = V$  e  $\varepsilon(\varepsilon = (\neg(\mathbf{a} = \mathbf{a}))) = F$ . Mas o valor da primeira função é o verdadeiro somente quando seu argumento é o verdadeiro, e o da

<sup>156</sup> *Leis Fundamentais da Aritmética*, § 10.

<sup>157</sup> Se dois objetos reconhecidos como cursos-de-valores podem ser idênticos a valores-de-verdade, evidentemente, dois objetos com nomes de cursos-de-valores também o podem, já que também são reconhecidos como cursos de valores.

segunda é o falso somente quando seu argumento é o falso. Além disso, de acordo com a lei fundamental V, o curso-de-valores da primeira função coincide com o curso-de-valores de qualquer função cujo valor seja o verdadeiro somente quando o seu argumento também seja o verdadeiro, e o curso-de-valores da segunda, com o curso-de-valores de qualquer função cujo valor seja o falso somente quando o seu argumento também é o falso. Sendo assim, o verdadeiro é a extensão dos conceitos sob os quais cai somente o verdadeiro, e o falso, dos conceitos sob os quais cai somente o falso.<sup>158</sup>

Tal estipulação nos deve sugerir, segundo Frege, estender a quaisquer objetos a possibilidade de que os mesmos sejam a extensão dos conceitos sob os quais apenas eles caem. Um conceito sob o qual somente o objeto  $\Delta$  cai é  $\Delta = \xi$ , de modo que se for aplicado a

$\Delta$  o que foi aos valores-de-verdade, valerá a igualdade  $\varepsilon(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ . É claro que tal identidade não deve entrar em conflito com a lei básica V, seja qual for o objeto  $\Delta$ . Não há problema, de acordo com o filósofo, se este objeto não nos for dado como um curso-de-valores, mas se houver, caso isso não ocorra, então a identidade acima não valerá, em geral, para quaisquer objetos, pois cursos-de-valores também são objetos. Se supusermos que  $\Delta$  nos

é dado como um (nome de) curso-de-valores, isto é, como  $\overset{\cdot}{\alpha} \Phi(\alpha)$ , então

$\varepsilon(\overset{\cdot}{\alpha} \Phi(\alpha) = \varepsilon) = \overset{\cdot}{\alpha} \Phi(\alpha)$  se, e somente, se  ~~$\varepsilon$~~   $( (\overset{\cdot}{\alpha} \Phi(\alpha) = \mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{a}) )$ . Mas este último denota o verdadeiro quando, e somente quando,  $\Phi(\xi)$  é um conceito sob o qual um único objeto cai. Logo,  $\Delta$  não pode ser dado, em geral, como um curso-de-valores, e assim nem todo objeto satisfaz aquela estipulação.<sup>159</sup>

Uma outra dificuldade pode ainda ser encontrada na definição contextual de curso-de-valores e, portanto, na lei básica V. Com efeito, um objeto é elemento da extensão do conceito sob o qual esse mesmo objeto cai, ou no jargão fregiano, um objeto pertence a uma classe se, e somente se, ele cai sob o conceito cuja extensão é essa classe. Em símbolos,

$\Delta \in \varepsilon \Phi(\varepsilon)$  se, e somente se,  $\Phi(\Delta) = V$ . Seja  $\Phi(\xi)$  o conceito “classe que não pertence a si própria”; vamos indicar tal conceito do seguinte modo:  $\xi \notin \xi$ , num misto de notação atual e conceitográfica, portanto. A seguinte pergunta é pertinente: a extensão deste conceito é um

<sup>158</sup> *Leis Fundamentais da Aritmética*, § 10.

<sup>159</sup> *Ibidem*, § 10.

elemento de si mesma? Se for este o caso, então  $\ulcorner \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \in \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \urcorner$ , o que implica  $(\ulcorner \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \notin \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \urcorner) = V$ , isto é,  $\ulcorner \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \notin \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \urcorner$ . Caso contrário, então  $\ulcorner \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \notin \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \urcorner$ , o que implica  $(\ulcorner \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \notin \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \urcorner) = F$ , ou seja,  $\ulcorner \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \in \varepsilon(\varepsilon \notin \varepsilon) \urcorner$ .

Pouco antes da publicação do segundo volume de *Leis Fundamentais*, Frege recebeu uma carta de Bertrand Russell comunicando-lhe deste fato. Frege então publicou em um apêndice do livro sua formulação do problema e sugeriu algumas possíveis soluções a ele. Ele tinha duas possibilidades: ou admitir que a lei do terceiro excluído não valia para classes ou que nenhuma classe correspondia à extensão de certos conceitos. Decidiu-se por considerar as classes, e as extensões dos conceitos de modo geral, como objetos impróprios, restringindo a validade da lei do terceiro excluído a objetos próprios. Com isso, as extensões dos conceitos não poderiam atuar como argumentos de todas as funções de primeiro nível, levando a uma divisão das funções em três grupos, qual seja, (i) daquelas que admitiriam como argumentos apenas objetos próprios, (ii) daquelas que admitiriam como argumentos objetos próprios e impróprios, e (iii) daquelas que admitiriam como argumentos apenas objetos impróprios. Com relação aos possíveis valores das funções de primeiro nível, estas classificar-se-iam em: (i') funções cujos valores seriam objetos próprios, (ii') funções cujos valores seriam objetos próprios ou impróprios, e (iii') funções cujos argumentos seriam objetos impróprios. Relacionando-se as duas classificações, ter-se-ia uma divisão das funções de primeiro nível em nove tipos. Ter-se-ia, desse modo, nove tipos de objetos impróprios: os cursos-de-valores destas funções. Além disso, ter-se-ia que distinguir entre classes de objetos próprios, classes de objetos impróprios, relações entre objetos próprios, relações entre objetos impróprios, relações entre objetos próprios e impróprios, entre outros. Isso, segundo Frege, geraria uma dificuldade extraordinária no estabelecimento de leis que decidissem em geral quais objetos poderiam ser argumentos para quais funções.<sup>160</sup>

Uma outra possibilidade aventada pelo filósofo seria considerar os nomes das classes como nomes aparentes, isto é, como nomes desprovidos de referentes. Estes teriam que ser explicados como partes de sinais que teriam um referente como um todo. Os termos numéricos, como nomes de extensões de conceitos que são, não possuiriam, assim, um referente, e teriam que ser considerados em expressões mais complexas, que os teriam como

<sup>160</sup> FREGE, G. *The basic laws of arithmetic*. Tradução de M. Furth. L. Angeles: University of Califórnia, 1967., p. 127-143.

uma parte dependente. O sinal “2”, por exemplo, não poderia ser definido; no caso, ter-se-ia que definir muitos sinais contendo “2” como um constituinte sincategoremático,<sup>161</sup> porém não logicamente pensáveis como compostos de “2” e outra parte. O problema é que, consoante Frege, seria ilícito substituir uma tal parte sincategoremática por uma letra, inviabilizando-se, assim, a generalidade das proposições da aritmética.<sup>162</sup>

Tendo proposto e rechaçado as duas possibilidades anteriores, Frege resolveu reformular o axioma V, estipulando que dois cursos-de-valores  $\varepsilon\Phi(\varepsilon)$  e  $\varepsilon\Psi(\varepsilon)$  são iguais quando, e somente quando, os valores das funções  $\Phi(\xi)$  e  $\Psi(\xi)$  coincidem para qualquer argumento  $\xi$  que não seja nenhum dos dois cursos-de-valores. Em símbolos:

$$\vdash \left( \varepsilon\Phi(\varepsilon) = \varepsilon\Psi(\varepsilon) \right) = \neg \mathbf{a} \left[ \begin{array}{l} \Phi(\mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{a}) \\ \vdash \mathbf{a} = \varepsilon\Phi(\varepsilon) \\ \vdash \mathbf{a} = \varepsilon\Psi(\varepsilon) \end{array} \right] \quad 163$$

Embora a alteração acima evite o paradoxo de Russell, ela ainda gera contradições, conforme demonstrado por Leśniewski posteriormente.<sup>164</sup> De qualquer modo, tal modificação não agradou inteiramente a Frege, e assim ele foi aos poucos abandonando sua tese logicista.<sup>165</sup>

### 3.3 – Hierarquia de funções

Já vimos no segundo capítulo que Frege não se limitava a considerar funções cujos argumentos fossem apenas objetos, mas também aquelas que tivessem outras funções como seus argumentos. A expressão  $\neg \mathbf{a} \Phi(\mathbf{a})$ , por exemplo, denota uma tal função. Ela tem como valor um valor-de-verdade, e este corresponde ao verdadeiro se, e somente se,  $\Phi(x)$  é o verdadeiro, qualquer que seja o argumento  $x$ . É evidente que as funções denotadas por  $\neg \mathbf{a} \Phi(\mathbf{a})$ ,  $\neg \mathbf{a} \neg \mathbf{a} \Phi(\mathbf{a})$  e  $\neg \mathbf{a} \neg \mathbf{a} \neg \mathbf{a} \Phi(\mathbf{a})$  também são funções de segundo nível, e como vimos, Frege já as considerava como tais em *Os Fundamentos da Aritmética*. O sentido das duas

<sup>161</sup> “[...] vocábulo que não tem significado por si mesmo, que só tem significado quando acompanhado de outros” (AURÉLIO).

<sup>162</sup> FREGE, 1967, p. 127-143.

<sup>163</sup> Ibidem, p. 127-143.

<sup>164</sup> Mas parece que Frege não tomou conhecimento disso (ROSADO HADDOCK, 1985, p. 135-139).

<sup>165</sup> ROSADO HADDOCK, G. E. *Exposición crítica de la filosofía de Gottlob Frege*. Santo Domingo: Corripio, 1985., p. 135-139.



últimas expressões é fixado pelas proposições “há algo que possui a propriedade  $\Phi$ ” e “não há nada que possui a propriedade  $\Phi$ ”, respectivamente. Tomemos como propriedade  $\Phi$  na primeira dessas proposições o conceito “raiz quadrada de quatro”, isto é “ $\xi^2 = 4$ ”. Então podemos escrever  $\neg \exists a^2 = 4$  em lugar de  $\neg \exists \Phi(a)$ . Poder-se-ia considerar aqui que aquela sentença, equivalente a “existe uma raiz quadrada de quatro”, exprime uma propriedade do número 2 ou do número -2, a saber, que há algo do qual eles são o quadrado. Mas, segundo Frege, este não é o caso.<sup>166</sup> Na verdade enuncia-se aqui uma propriedade do conceito “raiz quadrada de quatro”, qual seja, que ele é não vazio. Assim,  $\neg \exists a^2 = 4$  denota um conceito de segundo nível, que tem como argumento o conceito de primeiro nível  $\xi^2 = 4$ . Que este é realmente o caso pode-se mais facilmente verificar quando da não existência, isto é, em  $\neg \exists \Phi(a)$ .<sup>167</sup> Com efeito, o juízo correspondente a esta sentença pronuncia que não há nenhum objeto que cai sob o conceito  $\Phi$ , isto é, que não há nenhum objeto do qual se possa enunciar a sua não existência. Logo, a função  $\neg \exists \Phi(a)$  é um conceito de segundo nível sob o qual cai o conceito que nada subsume. Como exemplo podemos considerar o conceito  $\neg (\xi = \xi)$ . Como nenhum objeto é diferente de si próprio, o conceito de segundo nível denotado por  $\neg \exists a = a$  estabelece que o conceito de primeiro nível denotado por  $\neg (\xi = \xi)$  é vazio.

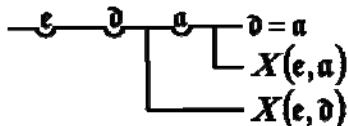
É claro que funções de mais de um argumento também podem ser consideradas argumentos de funções, e daí temos funções do tipo  $\neg \exists \Phi(b, a)$ , que é um conceito de segundo nível cujo argumento é uma relação. Por exemplo, seja  $\Phi(\xi, \zeta)$  a relação definida

por  $\neg \exists \begin{array}{l} 2 \cdot \xi = 2 \cdot \zeta \\ \xi = \zeta \end{array}$ , ou seja, tal que  $\Phi(\Delta, \Gamma)$  é o verdadeiro quando, e somente quando,  $\neg(\Delta = \Gamma)$  e  $\neg(2 \cdot \Delta = 2 \cdot \Gamma)$  correspondem ambos ao verdadeiro, ou ainda, tal que os objetos  $\Delta$  e  $\Gamma$  estão na relação  $\Phi$  quando  $\Delta$  e  $\Gamma$  coincidem, mas  $2 \cdot \Delta$  e  $2 \cdot \Gamma$ , não. Esta relação possui uma propriedade, a saber, que nenhum par de objetos a satisfaz. Tal propriedade é, assim, um conceito de segundo nível denotado pela expressão

$\neg \exists \begin{array}{l} 2 \cdot b = 2 \cdot a \\ b = a \end{array}$ . Já o conceito de segundo nível denotado por

<sup>166</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 9-32.

<sup>167</sup> Frege já observa essa propriedade na seção 46 de *Os Fundamentos da Aritmética*.



estabelece, quando seu valor-de-verdade é o verdadeiro, que a relação que ocupa o seu  $X$ -argumento é unívoca.<sup>168</sup>

Diante da grande variedade de funções, uma vez que também é grande a variedade de tipos de argumentos que estas podem assumir, Frege classifica os argumentos em três tipos: os argumentos de tipo 1 são os objetos, os de tipo 2 são as funções de primeiro nível de um argumento, e os de tipo 3, as funções de primeiro nível de dois argumentos. Os correspondes sintáticos destes tipos de argumentos são: os lugares de argumento de tipo 1, próprios para a admissão de nomes de argumentos de tipo 1, os lugares de argumento de tipo 2, próprios para a admissão de nomes de argumentos de tipo 2, e os lugares de argumento de tipo 3, próprios para a admissão de nomes de argumentos de tipo 3. Os lugares de argumento que são apropriados para a admissão de nomes próprios, isto é, nomes de objetos, não o são para a admissão de nomes de funções, e reciprocamente. Os lugares de argumento apropriados para a admissão de nomes de funções de primeiro nível de um argumento não o são para a admissão de nomes de funções de primeiro nível de dois argumentos, e vice-versa. Aquelas funções cujos argumentos são do tipo 1 são chamadas funções de primeiro nível, enquanto aquelas de um só argumento e cujos argumentos são dos tipos 2 e 3 são chamadas funções de segundo nível dos tipos 2 e 3, respectivamente.<sup>169</sup>

Voltando aos exemplos dos parágrafos anteriores, vemos que os conceitos  $\xi^2 = 4$  e

$\xi = \xi$  e a relação  $\begin{matrix} \top & 2 \cdot \xi = 2 \cdot \zeta \\ \top & \xi = \zeta \end{matrix}$  são funções de primeiro nível, que os conceitos

$a^2 = 4$  e  $a = a$  são funções de segundo nível do tipo 2 e que os conceitos

$\begin{matrix} \top & 2 \cdot b = 2 \cdot a \\ \top & b = a \end{matrix}$  e  $\begin{matrix} \top & \delta = \alpha \\ \top & X(\epsilon, \alpha) \\ \top & X(\epsilon, \delta) \end{matrix}$  são funções de segundo nível do tipo 3.

Mas se funções cujos argumentos são objetos podem ser tomadas como argumentos de funções, no caso, funções de segundo nível, então estas também podem ser tomadas como argumentos de outras funções, agora funções de terceiro nível. Frege fornece como exemplo o

conceito  $\begin{matrix} \top & f(1+1) \\ \top & f(2) \end{matrix}$ , cujo argumento é o conceito de segundo nível  $\begin{matrix} \top & \phi(1+1) \\ \top & \phi(2) \end{matrix}$ .<sup>170</sup> O

<sup>168</sup> *Leis Fundamentais da Aritmética*, § 23.

<sup>169</sup> *Ibidem*, § 23.

<sup>170</sup> *Ibidem*, § 23.

primeiro, quando seu valor é o verdadeiro, afirma que qualquer que seja o conceito  $\phi$ ,

$\begin{array}{l} \top \\ \top \end{array} \begin{array}{l} \phi(1+1) \\ \phi(2) \end{array}$  é o verdadeiro, isto é, ele estabelece uma propriedade satisfeita pelo conceito

$\begin{array}{l} \top \\ \top \end{array} \begin{array}{l} \phi(1+1) \\ \phi(2) \end{array}$ . Este último, por sua vez, quando seu valor é o verdadeiro, enuncia que o conceito  $\phi$  é tal que não é o caso de ser  $\phi(2)$  o verdadeiro e  $\phi(1+1)$  o falso.

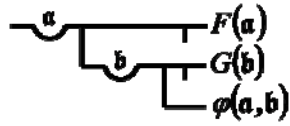
Também seria o caso de funções de terceiro nível atuarem como argumentos de funções de quarto nível, e somente destas, e assim por diante, formando, assim, uma hierarquia de funções de níveis cada vez mais altos, onde as funções de um nível seriam os argumentos das funções do nível imediatamente acima, e somente destas. Frege estava ciente desse fato, como o indicam trechos de *Leis Fundamentais* e de seu artigo *Função e Conceito*, mas por motivos não muito claros decide não avançar até níveis superiores.<sup>171</sup> Convém notar que esta possível hierarquia de funções guarda muitas semelhanças com o que chamamos hoje de uma teoria cumulativa de conjuntos. Thiel,<sup>172</sup> por exemplo, acredita que a teoria simples dos tipos de Russell foi inspirada na teoria de funções de Frege.

Em geral, um conceito de segundo nível  $M$  de tipo 1 é denotado por  $M_{\beta}(\phi(\beta))$ , e um de tipo 2, por  $M_{\beta\gamma}(\phi(\beta, \gamma))$ . Assim, as funções  $\neg \mu_{\beta}(\phi(\beta))$  e  $\neg \mu_{\beta\gamma}(\phi(\beta, \gamma))$  são conceitos de terceiro nível cujos argumentos são o conceito  $\mu_{\beta}(\phi(\beta))$  e a relação  $\mu_{\beta\gamma}(\phi(\beta, \gamma))$ , respectivamente.<sup>173</sup> Como não considerou funções de níveis maiores que três, Frege não desenvolveu uma notação para essas funções. Também não forneceu uma classificação para os lugares de argumentos que admitem nomes de funções de segundo nível – e, portanto, para as funções cujos nomes possuem lugares de argumento desse tipo – e para as funções de mais de um argumento cujos nomes têm lugares de argumento que admitem funções de diferentes tipos e níveis, embora estas últimas sejam por ele utilizadas em seu

<sup>171</sup> Em *Função e Conceito* Frege diz: “Poder-se-ia pensar que se continuaria assim indefinidamente. Porém, provavelmente, este último passo já não dispõe de tantas conseqüências como os anteriores, pois, com os progressos obtidos, em lugar de funções de segundo nível pode-se lidar com funções de primeiro nível, como será mostrado em outro lugar” (FREGE, 1978, p. 57). Aqui Frege está se referindo à redução de funções de segundo nível às de primeiro nível, desenvolvida por ele em *Leis Fundamentais*, e que analisaremos nas próximas páginas. Sobre o assunto, manifesta-se em *Leis Fundamentais* dizendo: “Ainda requeremos um método de exprimir generalidade com respeito a funções de segundo nível de um argumento do tipo 2. Poder-se-ia supor que isto não é o suficiente; mas veremos que podemos nos contentar com isto, e que, ainda, isto só ocorre em uma única proposição. Pode ser brevemente observado aqui que essa economia é possibilitada pelo fato de que funções de segundo nível podem ser representadas de uma certa maneira por funções de primeiro nível [...]” (*Leis Fundamentais da Aritmética*, § 25, tradução nossa).

<sup>172</sup> Cf. THIEL, 1972, p. 61.

<sup>173</sup> *Leis Fundamentais da Aritmética*, § 24-25.



sistema. A função  $\varphi(a, b)$ , por exemplo, possui três argumentos, dois dos quais são conceitos e um deles, uma relação. Ela estabelece, quando seu valor é o verdadeiro, que os objetos que caem sob os dois conceitos são coordenados pela relação  $\varphi$ . Consoante a classificação de Frege, esta função possui dois argumentos do tipo 2 e um do tipo 3. Já a relação que mantém entre si um conceito e um objeto, denotada por  $\varphi(\xi)$ , por exemplo, é uma função de dois argumentos de níveis diferentes. Seu valor é o verdadeiro somente quando o seu  $\xi$ -argumento é preenchido por um nome de objeto tal que este objeto caia sob o conceito cujo nome preenche o seu  $\varphi$ -argumento.

### 3.4 – As funções de *Leis Fundamentais*

As funções definidas por Frege em *Leis Fundamentais* (usando sua notação de função) são as seguintes:  $\neg \xi$ ,  $\neg \neg \xi$ ,  $\neg \xi \zeta$ ,  $\neg \xi f(a)$ ,  $\setminus \xi$ ,  $\xi \cap \zeta$ ,  $I \xi$ ,  $\rangle \xi$ ,  $\forall \xi$ ,  $\exists \xi$ ,  $\underline{\xi}$ ,  $\dot{\xi}$  e  $\dot{\cup} \xi$ .

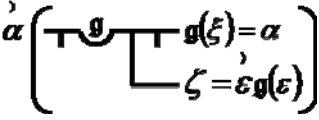
Falemos um pouco de cada uma delas. Primeiramente, todas elas, com exceção da quarta, são funções de primeiro nível, das quais  $\neg \xi$ ,  $\neg \neg \xi$  e  $\neg \xi f(a)$  são conceitos

(sendo o último deles um conceito de segundo nível) e  $\neg \xi \zeta$ ,  $\setminus \xi$ ,  $\xi \cap \zeta$  e  $I \xi$ , uma relação. A apresentação dos conectivos e do sinal de generalidade como funções é uma das principais novidades de *Leis Fundamentais* em relação a *Begriffsschrift*. Mas há outras que comentaremos nos parágrafos seguintes.

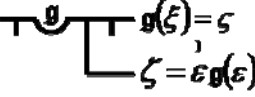
Se ao argumento da função  $\setminus \xi$  corresponde um objeto  $\Delta$  tal que o argumento seja a extensão do conceito “igual a  $\Delta$ ”, então o valor de  $\setminus \xi$  é o próprio objeto  $\Delta$ . Noutras palavras, se o argumento de  $\setminus \xi$  for a extensão de um conceito sob o qual cai um único objeto, então o valor de  $\setminus \xi$  será este objeto. Em símbolos,  $\setminus \varepsilon(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ . Por outro lado, se o argumento de  $\setminus \xi$  for a extensão de um conceito que subsume mais que um objeto ou nenhum objeto, então o valor de  $\setminus \xi$  será o próprio argumento. Em símbolos,  $\setminus \varepsilon \Phi(\varepsilon) = \varepsilon \Phi(\varepsilon)$ . Por

exemplo,  $\varepsilon'(\varepsilon + 3 = 5) = \varepsilon'(2 = \varepsilon) = 2$ , mas  $\varepsilon'(\varepsilon^2 = 1) = \varepsilon'(\varepsilon^2 = 1)$  e  $\varepsilon' \dashv ( \varepsilon = \varepsilon ) = \varepsilon' \dashv ( \varepsilon = \varepsilon )$ .<sup>174</sup>

A função  $\xi \cap \zeta$  é, por definição, o valor da função  $\varepsilon'$  para o argumento

 <sup>175</sup> Isso significa que se  $\Delta$  for o único objeto tal que para uma certa função  $g$ , o valor de  $g$  para o argumento  $\Theta$  é  $\Delta$  e  $\Gamma$  é o curso-de-valores da função  $g$ , ou

seja,  $g(\Theta) = \Delta$  e  $\Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon)$ , então o valor da função  $\xi \cap \zeta$  para os argumentos  $\Theta$  e  $\Gamma$ , respectivamente, será o objeto  $\Delta$  (em símbolos,  $\Theta \cap \Gamma = \Delta$ ). Mas se  $g$  for uma função, o valor de  $g$  para um certo argumento  $\Theta$  deverá ser um único  $\Delta$ , de modo que o valor de  $\xi \cap \zeta$  será  $\Delta$  quando, e somente quando, for tomado como  $\zeta$ -argumento de  $\xi \cap \zeta$  o curso-de-valores da função  $g$ . Dito de outro modo, se o  $\zeta$ -argumento da função  $\xi \cap \zeta$  for um curso-de-valores, o valor desta função será o valor da função que tem como argumento o  $\xi$ -argumento de  $\xi \cap \zeta$  e cujo curso-de-valores será o  $\zeta$ -argumento de  $\xi \cap \zeta$ . Se, por outro lado, o  $\zeta$ -argumento de  $\xi \cap \zeta$  não for um curso-de-valores, o valor-de-verdade do conceito

 será o falso para qualquer objeto que seja tomado como  $\zeta$ -argumento e, neste caso, o valor de  $\xi \cap \zeta$  para qualquer objeto que seja tomado como seu  $\xi$ -argumento será  $\varepsilon' \dashv ( \varepsilon = \varepsilon ) = \emptyset$ .

Na seção 35 de *Leis Fundamentais* Frege mostra como uma função de segundo nível pode ser “reduzida” a uma de primeiro nível pela função  $\xi \cap \zeta$ . Como vimos anteriormente, ele usava a notação  $M_\beta(\phi(\beta))$  para denotar uma função  $M_\beta$  de segundo nível que tem como argumento a função de primeiro nível  $\phi(\xi)$ . Também vimos que o valor de  $\xi \cap \zeta$  coincide com o valor da função que tem como argumento o  $\xi$ -argumento de  $\xi \cap \zeta$  e cujo curso-de-valores é o  $\zeta$ -argumento de  $\xi \cap \zeta$ , isto é,  $\xi \cap \varepsilon \phi(\varepsilon) = \phi(\xi)$ . Daí, em lugar de  $\phi(\beta)$  pode-se

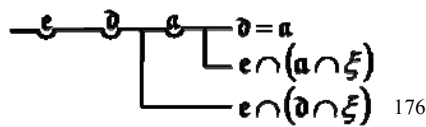
<sup>174</sup> *Leis Fundamentais da Aritmética*, § 11.

<sup>175</sup> *Ibidem*, § 34.

escrever  $\beta \cap \zeta$ , onde  $\zeta = \overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon)$ , e a função acima que tinha como argumentos funções de primeiro nível dá lugar a uma função que tem como argumentos os cursos-de-valores destas funções, isto é, a uma função de primeiro nível. Um exemplo de uma redução desse tipo no sistema fregiano é o da função de segundo nível denotada por  $\overset{\cdot}{\varepsilon} f(\mathbf{a})$ , que passa a ser escrita como  $\overset{\cdot}{\varepsilon} \mathbf{a} \cap \xi$ .

Se uma função de um argumento  $\phi(\xi)$  pode ser escrita como uma função de dois argumentos  $\xi \cap \zeta$ , como seria escrita uma função de dois argumentos  $\phi(\xi, \zeta)$ ? Uma resposta a essa questão é dada na seção 36. Primeiro, observamos que  $\overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon, \zeta)$  é uma função de um argumento cujos valores são cursos-de-valores. Indicamos o lugar de argumento dessa função pela letra  $\zeta$ . Deste modo, é lícita a utilização da notação de curso-de-valores para indicar o curso-de-valores da função  $\overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon, \zeta)$ , no caso,  $\overset{\cdot}{\alpha} \overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon, \alpha)$ . Daí vale a igualdade  $\Delta \cap \overset{\cdot}{\alpha} \overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon, \alpha) = \overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon, \Delta)$ . Desta segue uma outra, a saber,  $\Gamma \cap (\Delta \cap \overset{\cdot}{\alpha} \overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon, \alpha)) = \Gamma \cap (\overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon, \Delta))$  e, portanto,  $\Gamma \cap (\overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon, \Delta)) = \phi(\Gamma, \Delta)$ . Segue da transitividade da igualdade que  $\Gamma \cap (\Delta \cap \overset{\cdot}{\alpha} \overset{\cdot}{\varepsilon} \phi(\varepsilon, \alpha)) = \phi(\Gamma, \Delta)$ . Isso significa que uma função de dois argumentos  $\phi(\xi, \zeta)$  pode ser escrita como  $\xi \cap (\zeta \cap \zeta)$ . Obviamente, o valor de  $\xi \cap (\zeta \cap \zeta)$  coincide com o valor da função cujos argumentos são o  $\xi$ -argumento e o  $\zeta$ -argumento de  $\xi \cap (\zeta \cap \zeta)$  e cujo curso-de-valores coincide com o  $\zeta$ -argumento de  $\xi \cap (\zeta \cap \zeta)$ .

A função  $I\xi$  é, por definição, o conceito de primeiro nível:



A expressão acima indica que a função de dois argumentos cujo curso-de-valores ocupa o lugar do  $\xi$ -argumento é unívoca. Quanto à função denotada por  $\rangle \xi$ , ela é a extensão da relação que mantém entre si dois conceitos cujos argumentos são coordenados uns aos outros pela relação unívoca cuja extensão ocupa o lugar do  $\xi$ -argumento de  $\rangle \xi$ . Isto é,

<sup>176</sup> *Leis Fundamentais da Aritmética*, § 37.

$$\Vdash \left( \left( \overset{\delta}{\alpha} \varepsilon \left( \begin{array}{c} \delta \\ \delta \cap \varepsilon \\ a \cap \alpha \\ \delta \cap (a \cap \xi) \\ \text{I}\xi \end{array} \right) \right) \right) = \rangle \xi \quad 177$$

Às funções  $\mathfrak{V}\xi$  e  $\mathfrak{O}\xi$  correspondem, respectivamente, as seguintes definições:

$$\Vdash (\overset{\delta}{\alpha} \varepsilon (\alpha \cap (\varepsilon \cap \xi))) = \mathfrak{V}\xi \quad \text{e} \quad \Vdash \left( \begin{array}{c} \delta \\ \varepsilon \left( \begin{array}{c} q \\ \varepsilon \cap (\xi \cap q) \\ \xi \cap (\varepsilon \cap \mathfrak{V}q) \end{array} \right) \end{array} \right) = \mathfrak{O}\xi \quad 178$$

A função  $\mathfrak{V}\xi$  denota o curso-de-valores da inversa da função de dois argumentos cuja extensão é tomada como  $\xi$ -argumento. Com efeito,  $\zeta \cap (\zeta \cap \mathfrak{V}\xi)$  equivale, pela definição acima, a

$\zeta \cap (\zeta \cap \overset{\delta}{\alpha} \varepsilon (\alpha \cap (\varepsilon \cap \xi)))$ , que é o mesmo que  $\zeta \cap (\zeta \cap \overset{\delta}{\alpha} \varepsilon \xi (\alpha, \varepsilon))$ . Esta última expressão pode ser substituída por  $\xi(\zeta, \zeta)$ , que equivale a  $\zeta \cap (\zeta \cap \xi)$ . Estas equivalências implicam ser  $\neg \zeta \cap (\zeta \cap \mathfrak{V}\xi)$  o verdadeiro se, e somente se,  $\neg \zeta \cap (\zeta \cap \xi)$  também o for. A segunda

definição exprime que  $\mathfrak{O}\xi$  é a extensão do conceito  $\begin{array}{c} \delta \\ \xi \cap (\xi \cap q) \\ \xi \cap (\varepsilon \cap \mathfrak{V}q) \end{array}$ , cujo lugar de argumento é indicado pela letra  $\zeta$ . Em outras palavras,  $\mathfrak{O}\xi$  é o conjunto dos conceitos para os quais existe uma relação  $q$  tal que esses conceitos e o conceito cuja extensão é indicada pela letra  $\xi$  estão associados segundo a relação cuja extensão é  $\rangle q$  e segundo a inversa de tal relação. Como vimos anteriormente, a relação cuja extensão é denotada por  $\rangle q$  é aquela que mantém entre si dois conceitos cujos argumentos são coordenados uns aos outros pela relação unívoca  $q$ . Segue destes fatos que  $\mathfrak{O}\xi$  é o conjunto dos conceitos para os quais existe uma coordenação biunívoca entre os argumentos destes conceitos e os argumentos do conceito cuja extensão é indicada por  $\xi$ ; noutros termos,  $\mathfrak{O}\xi$  é a extensão do conceito “equinúmero a  $\xi$ ”.

A função  $\underline{\mathfrak{L}}\xi$  é definida como sendo a extensão da relação que mantém entre si dois objetos quando um deles segue o outro na série cuja extensão é  $\xi$  (lembrando que séries são relações na terminologia de Frege). Recordando, dizer que um objeto  $\theta$  segue um objeto  $\Delta$  em uma série  $f$  tem o mesmo significado que dizer que  $\theta$  possui todas as propriedades hereditárias de todo objeto que esteja na relação  $f$  com  $\Delta$ . Logo,  $\underline{\mathfrak{L}}\xi$  é o conjunto dos pares

<sup>177</sup> *Leis Fundamentais da Aritmética*, § 38.  
<sup>178</sup> *Ibidem*, § 39-40.

de objetos tais que o segundo elemento de cada par possui todas as propriedades hereditárias de todo objeto que esteja na relação de extensão  $\xi$  com o primeiro elemento do par. Em símbolos:

$$\Vdash \left( \left( \left( \left( \begin{array}{c} \mathfrak{F} \\ \hline \mathfrak{A} \\ \hline \mathfrak{B} \end{array} \right) \right) \right) \right) = \mathfrak{A} \xi \quad (179)$$

Como mostrado no capítulo 1, essa mesma definição foi dada por Frege em *Begriffsschrift*, com a diferença de que na definição acima ele fala em extensão de uma relação e não usa abreviatura para propriedade hereditária. A função  $\mathfrak{U} \xi$  é a extensão da relação que mantém entre si dois objetos tais que um deles segue o outro na relação cuja extensão é  $\xi$  ou eles coincidem. Em notação fregiana:

$$\Vdash \left( \left( \left( \left( \begin{array}{c} \alpha = \varepsilon \\ \hline \varepsilon \cap (\alpha \cap \mathfrak{A} \xi) \end{array} \right) \right) \right) \right) = \mathfrak{U} \xi \quad (180)$$

### 3.5 – Sentido e referência de funções

De acordo com Frege, a exigência de que um nome próprio possua *um sentido* (Sinn) justifica-se pelo fato de que se assim não fosse este seria meramente uma seqüência de sinais. O uso científico exige algo adicional: que esse nome possua também *uma referência* (Bedeutung).<sup>181</sup> Como vimos, nomes próprios têm como seus referentes objetos; e as sentenças não fogem a essa regra, pois elas são “nomes” de valores-de-verdade. Mas e quanto aos nomes funcionais, eles possuem uma referência? Que referência é essa?

Pelo mesmo motivo colocado acima, a resposta à primeira questão é: sim, os nomes funcionais devem possuir um referente (pelo menos para o uso científico). Do mesmo modo que a substituição de um nome próprio por outro com a mesma referência não altera o

<sup>179</sup> *Leis Fundamentais da Aritmética*, § 45.

<sup>180</sup> *Ibidem*, § 46.

<sup>181</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 105-116.



referente da sentença – embora modifique o seu sentido, caso os nomes tenham sentidos diferentes – observa o autor de *Leis Fundamentais* que a substituição de um termo conceitual por outro com a mesma extensão também não o altera.<sup>182</sup> E a mesma propriedade pode ser estendida a funções e a seus cursos-de-valores. Poder-se-ia conjecturar, a partir desse fato, que as referências de um nome funcional e de um termo conceitual seriam, respectivamente, o seu curso-de-valores e a sua extensão. Mas os cursos-de-valores – e, logo, as extensões dos conceitos – são objetos, portanto são radicalmente diferentes das funções. Lembremos que uma entidade é, na doutrina fregiana, ou um objeto, ou uma função. Por conseguinte, um nome funcional deve ter como sua referência uma função, assim como um termo conceitual, um conceito.

Os nomes devem refletir a natureza de seus referentes. Sendo assim, um nome funcional deve indicar a necessidade de complementação da função, apresentando lugares vazios em sua expressão. Esses lugares vazios são os seus lugares de argumentos. Como vimos, se um nome funcional possui lugares vazios tais que todos esses lugares devam ser preenchidos simultaneamente pelo mesmo nome próprio, então aquele nome possui um só argumento e dizemos, daí, que tais lugares são os lugares de argumento (no singular) da expressão funcional. Quando os lugares de argumento (do nome funcional de um só argumento) são ocupados por um nome próprio, a expressão assim completa é um nome de objeto, isto é, um nome próprio, refletindo, portanto, o caráter de saturado de seu referente. Se tal referente, denominado valor da função para esse nome próprio, for um valor-de-verdade, o nome funcional, neste caso, será um termo conceitual. Caso o nome funcional tenha mais que um argumento, o que significa que seus lugares de argumentos podem ser preenchidos simultaneamente por nomes de diferentes referências, e caso o valor da função para esses nomes tenha como referente um valor-de-verdade, o nome funcional será o nome de uma relação.

Em seu artigo sobre a *Justificação Científica de uma Conceitografia*, publicado dois anos antes de *Os Fundamentos da Aritmética*, Frege já havia se manifestado quanto à confusão veiculada pelas linguagens naturais entre objetos e conceitos. A expressão “o cavalo” pode tanto designar um ser individual como a espécie em “o cavalo é um animal herbívoro”, observa.<sup>183</sup> Pois a sua notação de funções visava justamente eliminar tais ambigüidades. Os termos conceituais, como nomes funcionais que são, devem refletir a insaturação de seus referentes, ou como o filósofo chama, a natureza predicativa dos

---

<sup>182</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 105-116.

<sup>183</sup> FREGE, 1972, p. 83-89.

conceitos. Por isso a necessidade da utilização do nome  $X(\xi)$  para a função denotada pela letra funcional  $X$ . Esta notação, em que a letra  $\xi$  indica o lugar de argumento da função, revela a característica funcional do conceito.

Se nomes funcionais possuem funções como seus referentes e não cursos-de-valores, qual deve ser então a relação entre os últimos e os primeiros? Tal relação deve ser mediada pelas funções denotadas pelos nomes, uma vez que as funções e os cursos-de-valores destas funções estão intimamente associados pela lei fundamental V. Por isso dois conceitos com a mesma extensão podem ser utilizados um no lugar do outro na sentença da qual um deles é parte, sem que tal substituição altere o valor-de-verdade desta sentença.<sup>184</sup> As funções “raiz quadrada de um” e “o que é uma unidade menor que um número cujo quadrado é igual ao seu dobro”, em símbolos, “ $\xi^2 = 1$ ” e “ $(\xi + 1)^2 = 2(\xi + 1)$ ”, respectivamente, são exemplos de nomes de conceitos cujas extensões são as mesmas. Se preenchermos o lugar de argumento do primeiro conceito pelo nome do número 1, por exemplo, obteremos uma sentença cujo referente é o verdadeiro, isto é, “ $1^2 = 1$ ” corresponde ao verdadeiro. Se, por outro lado, no lugar do  $\xi$ -argumento de  $\xi^2 = 1$  colocarmos o nome do número 2, obteremos uma sentença cujo referente é o falso, ou seja, “ $2^2 = 1$ ” corresponde ao falso. Evidentemente, se nas duas situações substituirmos o primeiro termo conceitual pelo segundo, as sentenças continuam tendo como referente o verdadeiro e o falso, respectivamente. Noutros termos, “ $(1+1)^2 = 2(1+1)$ ” corresponde ao verdadeiro e “ $(2+1)^2 = 2(2+1)$ ”, ao falso. Outro exemplo envolvendo conceitos de primeiro nível: as funções “ $\neg(\xi = \xi)$ ” e “lua de Vênus”. Sob esses conceitos nada cai, de modo que possuem as mesmas extensões, a saber, vazias. Obviamente, qualquer nome próprio que ocupe seus lugares de argumento dá origem a sentenças cujos referentes são o falso. Logo, um conceito pode ser usado no lugar do outro, sem prejuízo do valor-de-verdade da sentença da qual fazem parte.

Observações similares às do parágrafo precedente sobre funções de segundo nível não são feitas por Frege em seus escritos; afinal seu axioma V refere-se a funções de primeiro nível. Expressões funcionais cujos argumentos devem ser nomes funcionais são, no entanto, muito usadas por ele. É o caso do conceito de segundo nível “equinúmero ao conceito  $F$ ”. Se  $F$  e  $G$  forem conceitos equinúmericos, os conceitos “equinúmero a  $F$ ” e “equinúmero a

---

<sup>184</sup> Quando dizemos “valor-de-verdade da sentença”, queremos dizer com isto “referente da sentença”, e não que ser o verdadeiro ou o falso é uma propriedade da sentença. Para Frege, a verdade era uma propriedade do pensamento (proposição) expresso pela sentença. Não há, contudo, um consenso quanto ao fato de ser esta uma propriedade de uma proposição ou de uma sentença (cf. HAACK, 2002, p. 119-124).

$G$ ” terão a mesma extensão. Assim, as sentenças “ $F$  é equinúmero a  $F$ ” e “ $F$  é equinúmero a  $G$ ” denotarão ambas o verdadeiro. Nesses exemplos os lugares de argumento das funções “equinúmero a  $F$ ” e “equinúmero a  $G$ ” não são preenchidos por um nome próprio, mas por um nome funcional, o termo conceitual denotado por  $F$ . O problema é que a natureza predicativa do conceito indicado por tal nome não fica evidenciada por ele, a não ser que seja tomada a sua extensão em seu lugar e tal indicação não seja mais necessária. Essa extensão é o conjunto dos objetos que caem sob  $F$  e que são, portanto, coordenados biunivocamente aos objetos que caem sob  $F$  e, também, a  $G$ . Sejam  $\Delta$  a extensão do conceito  $F$  e  $\Gamma$ , do conceito

$$\begin{array}{c} \top q \\ \text{---} \\ \text{---} \quad \Delta \cap (\Gamma \cap q) \\ \text{---} \\ \text{---} \quad \Gamma \cap (\Delta \cap \forall q) \end{array}$$

$G$ . A sentença “ $F$  é equinúmero a  $G$ ” corresponde à fórmula que os lugares de argumento estão preenchidos pelo objeto  $\Delta$ . Naturalmente, a fórmula toda possui um referente, que é um valor-de-verdade.

Como exemplos mais específicos destes casos que comentamos, poderíamos considerar os conceitos “igual a zero” e “equinúmero ao conceito ‘igual a zero’”. Apenas um objeto cai sob o conceito de primeiro nível “igual a zero”: o próprio número zero. Assim, “zero é igual a zero” denota o verdadeiro. Sob o conceito de segundo nível “equinúmero ao conceito ‘igual a zero’” caem quaisquer conceitos que subsumam um único objeto. O conceito “lua da Terra” é um exemplo, de modo que a sentença “o conceito ‘lua da Terra’ é equinúmero ao conceito ‘igual a zero’” possui como referente o verdadeiro. Também o conceito cujo nome é “ $2 \cdot \xi = 6$ ” satisfaz a propriedade de ser equinúmero a “ $\xi = 0$ ”.

$$\begin{array}{c} \top q \\ \text{---} \\ \text{---} \quad \xi(2 \cdot \xi = 6) \cap (\xi(\xi = 0) \cap q) \\ \text{---} \\ \text{---} \quad \xi(\xi = 0) \cap (\xi(2 \cdot \xi = 6) \cap \forall q) \end{array}$$

Conseqüentemente, a sentença corresponde ao

$$\begin{array}{c} \top q \\ \text{---} \\ \text{---} \quad \xi \cap (\xi(\xi = 0) \cap q) \\ \text{---} \\ \text{---} \quad \xi(\xi = 0) \cap (\xi \cap \forall q) \end{array}$$

verdadeiro. Nela, o lugar de argumento do termo conceitual é ocupado pela extensão do conceito “ $2 \cdot \xi = 6$ ”. Note que o conceito de segundo nível “equinúmero a ‘ $\xi = 0$ ’” é reduzido a um conceito de primeiro nível (sob o qual cai uma extensão de um conceito) mediante o uso da função  $\cap$ . Obviamente, qualquer termo conceitual de mesma extensão que esse pode ser usado em seu lugar sem prejuízo do valor-de-verdade da sentença que se obtém quando seu lugar de argumento é ocupado.

O referente de um termo conceitual de primeiro nível do tipo “ $\xi$  gira” é uma função que associa todo objeto tomado como argumento da função a um valor-de-verdade que é o

valor da função para tal argumento. Neste exemplo, a função associa o referente do nome próprio “a Terra” ao referente da sentença “a Terra gira”, no caso, ao verdadeiro, e associa o objeto de nome “o número dois” ao referente da sentença “o número dois gira”, no caso, ao falso. Está claro, portanto, aquilo que se configura como sendo o referente do termo conceitual. Mas não está suficientemente caracterizado, por outro lado, o que se entende por sentido de tal termo, ou dos nomes de funções em geral. Poder-se-ia imaginar, por analogia, que o sentido do termo conceitual acima é uma função que associa o sentido de todo nome próprio que ocupa o seu lugar de argumento ao pensamento expresso pela (ao sentido da) sentença formada a partir de tal ocupação.<sup>185</sup> Como vimos, o sentido de um nome próprio é o modo por que um objeto é determinado como seu referente, ou seja, o sentido de um nome próprio estabelece as condições para que um objeto seja o seu referente. Do mesmo modo, o sentido de uma sentença deve estabelecer as condições para que um valor-de-verdade seja tomado como seu referente, isto é, deve fixar as condições de verdade desta sentença. Sabemos também que os sentidos dos termos da sentença são parte do sentido da sentença inteira. A questão aqui é, portanto, a seguinte: se o sentido do termo conceitual “ $\xi$  gira” for uma função com as características que impusemos, como ela pode determinar as condições de verdade da sentença da qual faz parte? Como, por exemplo, o sentido de “ $\xi$  gira” pode fixar que o referente de “a Terra gira” é o verdadeiro?

De acordo com Dummett,<sup>186</sup> não se pode dizer que a condição para a verdade da sentença “a Terra gira” é que o sentido de “a Terra” deve cair sob o conceito que é o sentido do predicado, uma vez que estamos supondo que tal sentido é uma função que associa sentidos de nomes próprios a sentidos de sentenças, e não a valores-de-verdade. Uma vez que o referente do nome tenha sido determinado via seu sentido, diz Dummett, o sentido do nome não é mais relevante para a determinação do referente da sentença como verdadeiro ou falso. Assim, a partir do momento que a referência de um termo conceitual (de primeiro nível) tenha sido determinada por meio de seu sentido, este não mais deve atuar na determinação da referência da sentença que contém este termo como seu predicado. As condições a serem satisfeitas por um objeto para que a sentença corresponda ao verdadeiro são dadas de uma particular maneira, correspondendo ao sentido do termo conceitual do qual o nome do objeto é argumento, mas são condições que devem ser satisfeitas pelo referente do nome próprio, não por seu sentido. Ou seja, é o fato de cair ou não o *referente do nome próprio* sob o *referente*

<sup>185</sup> É o que sugere, por exemplo, Geach (cf. DUMMETT, 1981, p. 249-253).

<sup>186</sup> DUMMETT, M. *The interpretation of Frege's philosophy*. Cambridge: Harvard University Press, 1981, p. 249-253

do termo conceitual que determinará finalmente o valor-de-verdade da sentença. Conclui Dummett que o sentido do termo conceitual corresponde ao modo particular por meio do qual se pode determinar o referente de tal termo, que como sabemos, é um conceito.<sup>187</sup>

### 3.6 – Por que função e argumento em lugar de sujeito e predicado?

No artigo *Considerações sobre Sentido e Referência*, escrito provavelmente entre 1892 e 1895,<sup>188</sup> Frege defende o total abandono em lógica das palavras “sujeito” e “predicado”, uma vez que estas nos levariam a confundir duas relações lógicas totalmente diferentes, no caso, a de *cair um objeto sob um conceito* e a de *subordinação de um conceito a outro*. Vimos no primeiro capítulo que em *Begriffsschrift* ele havia notado que a estrutura gramatical das sentenças ocultava sua estrutura lógica, como é o caso de “todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de quatro quadrados”.<sup>189</sup> Poder-se-ia sugerir que tal expressão decompõe-se no argumento “todo inteiro positivo” e no termo conceitual “ser representável como a soma de quatro quadrados”, configurando-se, assim, na expressão de uma relação de cair um objeto sob um conceito. Mas “todo inteiro positivo” não é um nome próprio, uma vez que a palavra “todo” não pode ser anteposta a um nome próprio. Com efeito, não se escreve “todo número quatro” ou “todo planeta Vênus”, de modo que tal palavra deve anteceder um termo conceitual. Além disso, a expressão “inteiro positivo” pode atuar como um predicado como o revela a sentença “quatro é um inteiro positivo”, diferente da expressão “quatro” que, por tratar-se um nome próprio, pode apenas atuar como parte de um. É evidente, como expõe Frege, que o uso da palavra “é” é diferente em sentenças como “quatro é um inteiro positivo” e “o sucessor de três é quatro”. Na última, o “é” tem a função de um sinal de identidade, isto é, ele estabelece a identidade entre os objetos que são referentes dos nomes próprios “sucessor de três” e “quatro”. Neste caso, “quatro” atua como parte do termo conceitual “ser igual a quatro”, diferente de “inteiro positivo” na primeira sentença, onde o “é” funciona como um mero sinal de cópula. Poderíamos perfeitamente suprimi-lo na sentença, escrevendo “quatro, um inteiro positivo”, sem alterar o sentido da mesma.<sup>190</sup>

Sabendo que “todo inteiro positivo” não é um nome próprio e que “inteiro positivo” é um termo conceitual, resta determinar que tipo de relação o sentido da sentença “todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de quatro quadrados” exprime. Isto pode

<sup>187</sup> DUMMETT, 1981, p. 249-253.

<sup>188</sup> Este é um dos escritos póstumos de Frege, publicado pela primeira vez em 1969 (FREGE, 1978, p. 105-116).

<sup>189</sup> *Begriffsschrift*, § 9.

<sup>190</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 87-103.

ser revelado por outro modo de se escrever a mesma proposição, a saber, “se algo é um inteiro positivo, ele é representável como a soma de quatro quadrados”. Temos aqui duas sentenças – “algo é um inteiro positivo” e “ele é representável como a soma de quatro quadrados” – ocupando os lugares de argumentos da função denotada por “se ( ), ( )”. As palavras “algo” e “ele” são chamadas por Frege indicadores indefinidos de parte da sentença e são responsáveis pela indicação de generalidade.<sup>191</sup> Uma letra pode ser usada no lugar destas palavras, digamos, a letra  $x$ , de modo que “ $x$  é um inteiro positivo” e “ $x$  é representável como a soma de quatro quadrados” podem ser consideradas no lugar das sentenças acima. Se no lugar da letra  $x$  são colocados os nomes próprios “quatro” e “Vênus”, obtemos pares de sentenças cujos referentes são o verdadeiro e o falso, respectivamente. Por isso, o filósofo chama “ $x$  é um inteiro positivo” e “ $x$  é representável como a soma de quatro quadrados” de quase-sentenças.<sup>192</sup>

O fato é que a partir das duas quase-sentenças do parágrafo anterior verificamos a existência de dois termos conceituais, a saber, “ $\xi$  é um inteiro positivo” e “ $\xi$  é representável como a soma de quatro quadrados”, que são nomes de argumentos do nome funcional de dois argumentos “se  $\zeta$ ,  $\xi$ ”. Ao valor da função denotada por este nome, quando seus lugares de argumentos são ocupados, corresponde um valor-de-verdade. Se os argumentos forem ambos um valor-de-verdade, o valor da função poderá ser o verdadeiro ou o falso, caso contrário, o falso. Como os dois termos conceituais acima são predicados de sentenças, dependerá do nome de argumento a ocupar o seu  $\xi$ -argumento o valor da função denotada por “se  $\zeta$ ,  $\xi$ ”, uma vez que os referentes das sentenças obtidas a partir de tal ocupação são valores-de-verdade. Se o nome de argumento for tal que não ocorra o referente da primeira sentença ser o verdadeiro e o da segunda, o falso, então o referente de “se  $\xi$  é um inteiro positivo,  $\xi$  é representável como a soma de quatro quadrados” será o verdadeiro. Não é difícil ver que para os dois termos conceituais “ $\xi$  é um inteiro positivo” e “ $\xi$  é representável como a soma de quatro quadrados” este sempre será o caso, isto é, qualquer que seja  $x$ , o referente de “se  $x$  é um inteiro positivo,  $x$  é representável como a soma de quatro quadrados” sempre será o verdadeiro. Pois esta é uma propriedade dos conceitos denotados por tais termos, isto é, “se  $\zeta$ ,  $\xi$ ” é o nome de uma relação entre estes conceitos. A esta relação Frege chama *subordinação entre conceitos*. Neste caso, dizemos que o conceito “inteiro positivo” está subordinado ao conceito “ser representável como a soma de quatro quadrados”.

<sup>191</sup> Cf. FREGE, 2002, p. 91-100.

<sup>192</sup> Cf. idem, 1979, p. 187-191.

A expressão “ $\xi$  é um inteiro positivo” pode ser decomposta na conjunção “ $\xi$  é um número inteiro e  $\xi$  é um número positivo”, onde os termos conceituais “ $\xi$  é um número inteiro” e “ $\xi$  é um número positivo” ocupam os lugares de argumentos do nome funcional “ $\xi$  e  $\xi$ ”. O valor da função denotada por este nome será o verdadeiro somente quando os valores dos conceitos denotados por aqueles termos conceituais forem também o verdadeiro. Isso ocorrerá quando, e somente quando, o valor do conceito denotado por “ $\xi$  é um inteiro positivo” for o verdadeiro. Assim, os conceitos denotados por “ $\xi$  é um número inteiro” e “ $\xi$  é um número positivo” não são propriedades do conceito denotado por “ $\xi$  é um inteiro positivo”, mas dos objetos que caem sob tal conceito. Frege chama aqueles conceitos de *notas características* deste último.<sup>193</sup>

Embora a palavra “todo” esteja anteposta ao termo conceitual “inteiro positivo”, ela não se refere a este termo, mas ao predicado da sentença, isto é, a “ser representável como a soma de quatro quadrados”. Com efeito, suponhamos que quiséssemos negar a sentença inteira. Se “todo” não fizesse parte do predicado, mas do sujeito, a negação de toda a sentença seria “todo inteiro positivo *não* pode ser representado como a soma de quatro quadrados”. Vimos nos parágrafos precedentes a equivalência entre as sentenças “todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de quatro quadrados” e “o conceito ‘inteiro positivo’ está subordinado ao conceito ser ‘representável como a soma de quatro quadrados’”. Logo, a negação da primeira equivale à negação desta última, isto é, a “o conceito ‘inteiro positivo’ *não* está subordinado ao conceito ‘ser representável como a soma de quatro quadrados’”. Esta, por sua vez, corresponde à sentença “*nem todo* inteiro positivo está subordinado ao conceito ser representável como a soma de quatro quadrados”, que expressa um pensamento totalmente diferente do da sentença “todo inteiro positivo *não* pode ser representado como a soma de quatro quadrados”.<sup>194</sup> Podemos pensar na expressão “todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de quatro quadrados”, portanto, como a expressão de um conceito de segundo nível cujo lugar de argumento é neste caso ocupado pelo termo conceitual “se  $\xi$  é um inteiro positivo,  $\xi$  é representável como a soma de quatro quadrados”. Um conceito  $H(\xi)$  só poderá cair sob tal conceito caso o valor-de-verdade de  $H(x)$  seja o verdadeiro para todo  $x$ , como é o caso de “se  $x$  é um inteiro positivo,  $x$  é representável como a soma de quatro

<sup>193</sup> Vimos no capítulo precedente que Frege já havia estabelecido tal distinção em *Os Fundamentos da Aritmética*.

<sup>194</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 87-103.

quadrados”.<sup>195</sup> O conceito  $H(\xi)$  é indicado por Frege como  $\ulcorner \frac{G(\xi)}{F(\xi)} \urcorner$ , onde  $F(\xi)$  e  $G(\xi)$  ocupam os lugares do  $\xi$ -argumento e do  $\zeta$ -argumento de  $\ulcorner \frac{\zeta}{\xi} \urcorner$ , respectivamente. O conceito de segundo nível “todo  $\xi$ ” que tem como argumento a função  $\ulcorner \frac{G(\xi)}{F(\xi)} \urcorner$  é indicado por  $\ominus \ulcorner \frac{G(a)}{F(a)} \urcorner$ .

A sentença “nem todo inteiro positivo está subordinado ao conceito ser representável como a soma de quatro quadrados” é a negação de “se  $x$  é um inteiro positivo,  $x$  é representável como a soma de quatro quadrados”, isto é, é a negação de  $\ominus \ulcorner \frac{G(a)}{F(a)} \urcorner$ . Podemos trocar a expressão “nem todo” por “algum” e antepor a partícula “não” ao predicado da sentença, obtendo, desse modo, a sentença “algum inteiro positivo não está subordinado ao conceito ser representável como a soma de quatro quadrados”, equivalente a  $\ominus \ulcorner \frac{G(a)}{F(a)} \urcorner$ . Como a primeira sentença equivale a “o conceito ‘inteiro positivo’ não está subordinado ao conceito ‘ser representável como a soma de quatro quadrados’”, a negação da relação de subordinação nos leva a uma outra relação entre conceitos. Algo similar ocorre na teoria dos silogismos de Aristóteles. Lembremos que essa teoria admite quatro tipos de relações entre conceitos, a saber, aquelas denotadas por “pertencer a todo”, “não pertencer a algum”, “não pertencer a nenhum” e “pertencer a algum”. A segunda e a quarta relação podem ser obtidas a partir das negações da primeira e da terceira, respectivamente. A relação “pertencer a todo” corresponde, obviamente, à relação de subordinação.

Não é difícil ver que a sentença “todo inteiro positivo não pode ser uma lua da Terra” é a expressão do conceito de segundo nível “todo  $\xi$ ” que tem como argumento o conceito denotado por “não é o caso que ‘se  $\xi$  é um inteiro positivo,  $\xi$  é uma lua da Terra’”. Este conceito tem como valor o verdadeiro para qualquer objeto que seja tomado como seu argumento. Em geral, se  $F(\xi)$  e  $G(\xi)$  forem conceitos tais que o valor de  $\ulcorner \frac{G(\xi)}{F(\xi)} \urcorner$  seja o

<sup>195</sup> Quando dizemos “o conceito  $H(\xi)$ ”, queremos na verdade dizer “o conceito denotado por  $H(\xi)$ ”, “o conceito cujo nome é  $H(\xi)$ ” ou, ainda, “o conceito que é o referente do nome ‘ $H(\xi)$ ’”. Com o objetivo de simplificar nossa exposição, em alguns momentos escrevemos simplesmente “o conceito  $H(\xi)$ ”.



verdadeiro para qualquer objeto que ocupe o seu  $\xi$ -argumento, então o valor de  $\neg \forall \xi \begin{array}{l} G(\xi) \\ \perp \\ F(\xi) \end{array}$  também será o verdadeiro, e reciprocamente. A negação de  $\forall \xi \begin{array}{l} G(\xi) \\ \perp \\ F(\xi) \end{array}$ , qual seja,  $\neg \forall \xi \begin{array}{l} G(\xi) \\ \perp \\ F(\xi) \end{array}$ , corresponde à negação do termo conceitual “todo  $\xi$ ” que tem como nome de argumento o termo conceitual “não é o caso que ‘se  $F(\xi)$ ,  $G(\xi)$ ’”. Ou seja, a negação de “todo inteiro positivo *não* pode ser uma lua da Terra” é a sentença “*nem todo* inteiro positivo *não* pode ser uma lua da Terra”, equivalente a “algum inteiro positivo é uma lua da Terra”.  
Assumindo que  $F$  e  $G$  denotam conceitos, temos os seguintes fatos:<sup>196</sup>

relação expressa em português	relação expressa na conceitografia	relação aristotélica correspondente
Todo $F$ é $G$ .	$\forall \xi \begin{array}{l} G(\xi) \\ \perp \\ F(\xi) \end{array}$	$G$ pertence a todo $F$
Algum $F$ não é $G$ .	$\neg \forall \xi \begin{array}{l} G(\xi) \\ \perp \\ F(\xi) \end{array}$	$G$ não pertence a algum $F$
Nenhum $F$ é $G$ .	$\forall \xi \begin{array}{l} \neg G(\xi) \\ \perp \\ F(\xi) \end{array}$	$G$ não pertence a nenhum $F$
Algum $F$ é $G$ .	$\neg \forall \xi \begin{array}{l} \neg G(\xi) \\ \perp \\ F(\xi) \end{array}$	$G$ pertence a algum $F$

Vimos que a decomposição de uma sentença em nomes de funções e nomes de argumentos revela sua verdadeira estrutura lógica, no sentido de exibir a natureza dos referentes desses nomes e as relações existentes entre eles. E isso é importante para um sistema lógico como o de Frege, que compreende uma grande variedade de relações possíveis entre objetos e funções de diferentes níveis. Todas essas relações podem ser obtidas a partir das constantes  $\neg \xi$ ,  $\forall \xi$ ,  $\begin{array}{l} \perp \\ \xi \end{array}$  e  $\neg \xi \begin{array}{l} \perp \\ \xi \end{array}$ . Não apenas relações entre conceitos é possível (no caso da silogística aristotélica, entre extensões de conceitos), mas também entre indivíduos e conceitos, o que já representa uma grande vantagem do sistema fregiano sobre o aristotélico. Mas não é simplesmente o abandono da terminologia “sujeito” e “predicado”, contudo, que caracteriza a principal inovação do primeiro em relação ao segundo. Isso porque

<sup>196</sup> A rigor, as relações da silogística aristotélica são relações entre extensões de conceitos, e não entre conceitos. Logo,  $F$  e  $G$  devem ser interpretados como extensões de conceitos na terceira coluna da tabela.

o uso desses termos na silogística aristotélica não é gramatical. As palavras “sujeito” e “predicado” são apenas os nomes dos termos que ocupam o segundo e o primeiro lugar de argumento, respectivamente, de cada uma das quatro relações desse sistema.<sup>197</sup> E se a originalidade do sistema fregiano reside no uso das noções de “argumento” e “função” em lugar das noções gramaticais de “sujeito” e “predicado”, isso ocorre não apenas porque aquelas noções nos dão subsídios para diferenciar uma relação de subordinação de conceitos de uma de cair um objeto sob um conceito, mas porque permitem a formação de conceitos.

De acordo com Frege, a principal diferença entre seu sistema e o de Aristóteles é que, ao contrário desse último, que partia de conceitos já formados para a constituição dos juízos, ele parte de juízos e dos conteúdos destes para a formação de conceitos. O modo por que o conteúdo de um juízo atua na formação de um conceito reside na possibilidade de considerar este ou aquele termo de tal conteúdo como (o sentido de) o argumento de uma função. Por exemplo, se na expressão “ $2^4 = 16$ ” consideramos “2” como substituível por outros nomes, tais como “-2” ou “3”, obtemos o termo conceitual “ $\xi^4 = 16$ ”, que denota o conceito “raiz quarta de dezesseis”. Os objetos denotados por “2” e “-2” caem, obviamente, sob tal conceito, porém não aquele denotado por “3”. Se, por outro lado, consideramos como lugar de argumento aquele que é ocupado por “4”, obtemos o termo conceitual “ $2^\xi = 16$ ”, que denota o conceito “logaritmo de dezesseis na base dois”. Se os lugares ocupados por “2” e por “16” forem ambos considerados lugares de argumentos, teremos daí o nome de uma função de dois argumentos “ $\xi^4 = \zeta$ ”, que denota a relação que há entre um número e sua quarta potência. Vemos por meio desses exemplos a diversidade de conceitos que podem ser obtidos a partir da maneira por que um particular conteúdo é decomposto.<sup>198</sup>

---

<sup>197</sup> Em “*A* pertence a todo *B*”, por exemplo, *A* é o predicado e *B*, o sujeito da relação denotada por “pertence a todo”.

<sup>198</sup> FREGE, 1979, p. 9-46.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

As noções de função e objeto, como vimos, são consideradas por Frege noções primitivas e carecem, desse modo, de uma definição. O objeto é algo saturado, que não necessita de complementação; a função, ao contrário, necessita ser completada por seu(s) argumento(s). A relação entre a função e seu argumento pode ser comparada com aquela existente entre um elemento e o conjunto do qual é membro, isto é, com a relação de pertinência. Assim como um conjunto pode pertencer a outro conjunto, uma função na doutrina fregiana pode também ser argumento de outra função. Porém, do mesmo modo que algo não pode ser elemento de um indivíduo, este algo não pode também ser argumento de um objeto. Somente funções podem ter argumentos, assim como somente conjuntos podem ter elementos.

Embora a definição de função em *Begriffsschrift* seja estritamente sintática, colocando as funções na categoria de meros sinais, parece-nos muito pouco provável que Frege assim as considerasse. Isso porque ele usa letras funcionais para denotar propriedades, o que significa que elas deviam ser símbolos de algo. Por outro lado, é também estranho o fato de que ele não estabeleça nitidamente a distinção entre os símbolos funcionais e as funções, uma vez que a ausência desta diferenciação nos textos matemáticos da época é objeto de crítica em *Função e Conceito*.<sup>199</sup> Também não nos é suficientemente claro se no período que escreveu *Os Fundamentos da Aritmética*, Frege considerava os conceitos como funções particulares. Pelo menos ele não explicita nada nesse sentido em seu livro. Além disso, em *Os Fundamentos da Aritmética*, a parte sintática é deixada totalmente de lado, uma vez que a conceitografia não é aí utilizada.

De qualquer modo, se o filósofo fazia ou não alguma distinção entre os símbolos funcionais e aquilo que denotavam, até a publicação de seu artigo *Sobre Sentido e Referência* o único elemento associado aos sinais eram os conteúdos dos sinais. A partir daí, aos símbolos das funções dever-se-ia corresponder dois elementos: o sentido e a referência desses símbolos. E essa diferenciação constitui, talvez, a principal evolução na doutrina de funções de Frege desde os seus dois primeiros livros. O sentido e a referência de uma expressão funcional não devem ser confundidos com a sua *intensão* e a sua *extensão*, respectivamente. A intensão de um termo conceitual, na acepção em que Carnap<sup>200</sup> considera o termo, é o conceito por ele designado, enquanto a sua extensão é o conjunto de indivíduos que possuem a propriedade

---

<sup>199</sup> Cf. FREGE, 1978, p. 9-32

<sup>200</sup> Cf. CARNAP, 1958.

designada pelo conceito. De modo análogo, a intensão de um nome funcional de  $n$  argumentos, isto é, de um nome de relação  $n$ -ária, é a relação por ele designada, enquanto que a sua extensão é o conjunto das  $n$ -uplas de elementos que satisfazem tal relação.<sup>201</sup> Pois o que estamos chamando aqui de intensão de um termo conceitual ou relacional é, na doutrina fregiana, a sua referência. O sentido desses termos não corresponde nem a sua intensão, nem, evidentemente, a sua extensão.

De modo geral, quando falamos em uma função no sentido extensionalista, estamos nos referindo à noção matemática com que o termo função é utilizado, isto é, a um conjunto de pares ordenados – visto que uma função (no sentido matemático) é um tipo de relação. Na doutrina de funções de Frege pode-se, quando muito, tomar pela mesma coisa essa concepção extensionalista de função e o curso-de-valores de uma função, que não é o referente desta.<sup>202</sup> A noção de função como regra ou como “o que uma função faz” talvez possa, no máximo, ser identificada com o sentido de uma função nessa doutrina, mas não, obviamente, ao seu referente.<sup>203</sup> Entendemos, assim, que a noção fregiana de função (o referente de um sinal funcional) não coincide com nenhuma dessas outras noções.

Ao longo da pesquisa que realizamos, lemos boa parte dos escritos de Frege – especialmente os do período logicista – e aquilo que nos chamou mais a atenção foi o modo por que o filósofo concebia o conceito de função, objeto de nosso estudo. Esperamos que o presente trabalho tenha proporcionado ao leitor ao menos uma caracterização razoável da importância dessa noção no contexto da obra fregiana. Como outras noções desenvolvidas pelo filósofo alemão,<sup>204</sup> esta não foi introduzida como um fim em si mesmo, mas como suporte ao seu programa de fundamentação da aritmética na lógica. Mas, também como outras noções em seus escritos, foi ganhando seus próprios contornos em toda a extensão de sua obra. Talvez uma comparação entre a noção de função de Frege e a de autores posteriores a ele, tais como Russell, Carnap, Church, entre outros, pudesse ser objeto de uma outra pesquisa. Não a efetuamos aqui em virtude do tempo disponível, que foi consumido substancialmente pelas nossas leituras e análises de Frege.

Finalmente, considerando o fato de que este trabalho foi desenvolvido em um programa de pós-graduação em Educação Matemática, esperamos que ele possa ser útil ao mesmo, servindo como um trabalho de história da lógica ou dos fundamentos da matemática,

---

<sup>201</sup> Em lugar de “conceito” e “função de  $n$ -argumentos”, Carnap usa, na verdade, os termos “predicado singular” e “predicado  $n$ -ário”.

<sup>202</sup> Lembremos que Frege não dá uma definição explícita de curso-de-valores; este está associado a uma função por meio de uma definição contextual.

<sup>203</sup> Extraímos essas acepções do termo “função” de CARNIELLI; EPSTEIN, 2006, p. 43-53.

<sup>204</sup> Tais como as noções de sentido e referência, conceito e objeto, e mesmo sua escrita artificial.

ou mesmo como um trabalho de introdução à lógica e a questões filosóficas inerentes a esta área. Esperamos também que ele possa ser de utilidade para os interessados na obra de Frege, e que possibilite novas discussões em torno de sua filosofia. Além disso, a distinção entre os níveis sintático e semântico feita pelo filósofo no tratamento do conceito de função talvez pudesse ser levada em consideração no ensino de funções em matemática.<sup>205</sup>

---

<sup>205</sup> Estamos fazendo apenas uma especulação; um exame mais detalhado de tal sugestão poderia ou não revelar sua viabilidade.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### Trabalhos e Traduções de Trabalhos de Frege

*Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Hildesheim: Georg Olms, 2007.

*Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*. In: HEIJENOORT, V. *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical Logic 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1971, p. 1-82.

*Conceptual notation and related articles*. Tradução de T. W. Bynum. Oxford: Clarendon, 1972.

*Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: [s.n.], 1884.

*Escritos lógico-semánticos*. Tradução de C. R. Luis; C. Pereda. Madrid: Tecnos, 1974.

*Estudios sobre semántica*. Tradução de U. Moulines. Barcelona: Ariel, 1973.

*Frege's lectures on logic: Carnap's student notes, 1910-1914*. Tradução de E. H. Reck; S. Awodey. [S.I.]: Carus, 2004.

*Grundgesetze der Arithmetik*. Hildesheim: Georg Olms, 1962.

*Investigações lógicas*. Tradução de P. Alcoforado. P. Alegre: Edipucrs, 2002.

*Lógica e filosofia da linguagem*. Tradução de P. Alcoforado. S. Paulo: Edusp, 1978.

*Os fundamentos da aritmética*. Tradução de L. H. dos Santos. S. Paulo: Abril, 1974. (Os Pensadores).

*Posthumous writings*. Tradução de P. Long; R. White. Oxford: Basil Blackwell, 1979.

*The basic laws of arithmetic*. Tradução de M. Furth. L. Angeles: University of California Press, 1967.

### Outras Referências

BOCHEŃSKI, I. M. *A history of formal logic*. 2. ed. N. York: Chelsea, 1970.

BOOLOS, G. *Logic, logic, and logic*. Cambridge: Harvard University Press, 1998

BYNUM, T. W. *Editor's introduction*. In: FREGE, G. *Conceptual Notation and Related Articles*. Oxford: Clarendon, 1972. p. 55-80.

\_\_\_\_\_. *On the life and work of Gottlob Frege*. In: FREGE, G. *Conceptual Notation and Related Articles*. Oxford: Clarendon, 1972. p. 1-54.

CARNAP, R. *Introduction to symbolic logic and its applications*. Tradução de W.H. Meyer; J. Wilkinson. N. York: Dover, 1958.

CARNIELLI, W.; EPSTEIN, R. L. *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática*. S. Paulo: Ed. Unesp, 2006.

CHATEAUBRIAND, O. *Logical forms*. Campinas: Ed. Unicamp, 2005. 1 v. (CLE).

CHURCH, A. *Introduction to mathematical logic*. N. Jersey: Princeton University Press, 1956.

DUMMETT, M. *Frege: philosophy of mathematics*. Cambridge: Harvard University Press, 1991.

\_\_\_\_\_. *The interpretation of Frege's philosophy*. Cambridge: Harvard University Press, 1981.

ENDERTON, H. B. *Elements of set theory*. S. Diego: Academic, 1977.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. S. Paulo: Ed. Unesp, 2005.

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. Tradução de C. A. Mortari; L. H. de A. Dutra. S. Paulo: Ed. Unesp, 2002.

HEGENBERG, L. *Definições: termos teóricos e significado*. S. Paulo: Cultrix, 1974.

KNEALE, W.; KNEALE, M. *O Desenvolvimento da lógica*. Tradução de M. S. Lourenço. 3. ed. Coimbra: Calouste Gulbenkian, 1991.

ŁUKASIEWICZ, J. *Elements of mathematical logic*. Tradução de O. Wojtasiewicz. N. York: Pergamon, 1963.

\_\_\_\_\_. *Investigations into the sentential calculus*. In: ŁUKASIEWICZ, J. *Selected works*. Poland: North-Holland, 1970.

\_\_\_\_\_. *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna*. Tradução de J. F. Robles. Madrid: Tecnos, 1977.

MACBETH, D. *Frege's logic*. Harvard University Press, 2005.

MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. 4th. ed. N. York: Chapman & Hall, 1997.

ROSADO HADDOCK, G. E. *A critical introduction to the philosophy of Gottlob Frege*. Burlington: Ashgate, 2006.

\_\_\_\_\_. *Exposición crítica de la filosofía de Gottlob Frege*. Santo Domingo: Corripio, 1985.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*. [S.I.]: ASL, 1967.

SOARES, M. L.C. *Conceito e sentido em Frege*. Porto: Campo das Letras, 2001.

THIEL, C. *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege*. Tradução de J. S. Esplugues. Madrid: Tecnos, 1972.

WRIGHT, C. *Frege's conception of numbers as objects*. [S.I.]: Aberdeen, 1983.



## APÊNDICE A

Nosso objetivo aqui é demonstrar (usando a notação atual) que o axioma-esquema (8) do sistema de cálculo proposicional de Frege pode ser derivado dos axiomas-esquemas (1) e (2), e que os axiomas-esquemas (28), (31) e (41) formam, juntamente com os dois primeiros, um sistema fortemente completo. Em nossas provas utilizaremos o meta-teorema da dedução; contudo, antes que possamos empregá-lo, precisamos verificar se ele é válido no sistema axiomático de *Begriffsschrift*. No que se segue, indicaremos que uma fórmula  $\psi$  é consequência sintática de um conjunto de fórmulas  $\Gamma$  nesse sistema por  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \psi$ , e em lugar do termo “axioma-esquema” diremos simplesmente “axioma”.

**Lema A.1.** A fórmula  $\varphi \rightarrow \varphi$  é um teorema do sistema.

**Demonstração:**

1.  $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$  axioma (2)
2.  $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi))$  axioma (1)
3.  $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$  1, 2, modus ponens
4.  $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$  axioma (1)
5.  $\varphi \rightarrow \varphi$  3, 4, modus ponens  $\square$

**Teorema A.2. (Meta-teorema da dedução).**  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\text{F}} \psi$  implica  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow \psi$ .

**Demonstração:**

Será feita por indução no número  $n$  de passos da prova de  $\psi$  a partir de  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ . Suponhamos que  $\psi_1, \dots, \psi_n = \psi$  seja uma prova de  $\psi$  a partir de  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ .

Se  $n = 1$ ,  $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$  ou  $\psi$  é um caso particular de um dos axiomas. Daí, temos duas possibilidades:  $\psi \in \{\varphi\}$  ou ( $\psi \in \Gamma$  ou  $\psi$  é um caso particular de um dos axiomas). No primeiro caso,  $\psi = \varphi$ , e como  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow \varphi$  (pois  $\varphi \rightarrow \varphi$  é um teorema),  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow \psi$ . No segundo caso,  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \psi$ ; e já que  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$  (axioma 1), temos  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow \psi$  (por aplicação de modus ponens).

Suponhamos agora que o meta-teorema é válido para qualquer prova de  $n$  de passos, e seja  $\psi_1, \dots, \psi_{n+1} = \psi$  uma prova de  $n+1$  passos de  $\psi$  a partir de  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ . Se  $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$  ou  $\psi$  é um caso particular de um dos axiomas, a prova segue de modo análogo a do parágrafo

anterior. Caso contrário, isto é, se  $\psi$  é obtido de  $\psi_i$  e  $\psi_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , via modus ponens, tomemos  $\psi_j = \alpha$ ,  $\psi_i = \alpha \rightarrow \beta$  e  $\psi = \beta$ . Por hipótese de indução,  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$  e  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow \alpha$ , e pelo axioma (2),  $\Gamma \vdash_{\text{F}} (\varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \beta))$ .

O conjunto das fórmulas  $\Gamma \vdash_{\text{F}} (\varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \beta))$  e  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$  implica, via modus ponens,  $\Gamma \vdash_{\text{F}} (\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \beta)$ . O conjunto formado por esta última fórmula e  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow \alpha$  implica, via modus ponens novamente,  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow \beta$ , isto é,  $\Gamma \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow \psi$ .  $\square$

**Teorema A.3.** O axioma (8), isto é, a fórmula  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma))$ , é um teorema do sistema.

**Demonstração:**

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| 1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)$   | hipótese                      |
| 2. $\varphi$   | hipótese                      |
| 3. $\psi \rightarrow \gamma$   | 1, 2, modus ponens            |
| 4. $\psi$  | hipótese                      |
| 5. $\gamma$  | 3, 4, modus ponens            |
| 6. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma), \psi, \varphi \vdash_{\text{F}} \gamma$ <sup>206</sup>                          | 1-5                           |
| 7. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma), \psi \vdash_{\text{F}} \varphi \rightarrow \gamma$                              | 6, teor. da dedução           |
| 8. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma) \vdash_{\text{F}} \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)$                 | 7, teor. da dedução           |
| 9. $\vdash_{\text{F}} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma))$ | 8, teor. da dedução $\square$ |

Como os únicos axiomas usados na demonstração do meta-teorema da dedução foram (1) e (2), e na prova acima empregamos este meta-teorema, segue que o axioma (8) deriva dos axiomas (1) e (2) apenas.

Os dois primeiros axiomas de Frege coincidem com os dois primeiros axiomas de Mendelson; <sup>207</sup> estes, juntamente com o axioma  $(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$  e modus ponens, formam um sistema axiomático proposicional fortemente completo. <sup>208</sup> Vamos

<sup>206</sup> Escrever  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma), \psi, \varphi \vdash_{\text{F}} \gamma$  é, na verdade, um abuso de linguagem, e que adotaremos com a finalidade de simplificar a exposição. Deve ficar claro que o que deveríamos escrever é  $\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma), \psi, \varphi\} \vdash_{\text{F}} \gamma$ .

<sup>207</sup> Cf. MENDELSON, 1997.

<sup>208</sup> Uma prova da completude forte do sistema de Mendelson pode ser encontrada em FEITOSA; PAULOVICH, 2005, p. 65-89.

indicar que uma fórmula  $\psi$  é consequência sintática de um conjunto de fórmulas  $\Gamma$  neste sistema por  $\Gamma \vdash_M \psi$ . Como os dois sistemas estão edificados sobre a mesma linguagem, qualquer fórmula de um é também fórmula do outro. Demonstraremos a seguir que o terceiro axioma de Mendelson é um teorema no sistema de Frege. Isso implica que todo teorema no sistema de Mendelson também é um teorema no sistema fregeano, e mais ainda, que  $\Gamma \vdash_M \psi$  implica  $\Gamma \vdash_F \psi$ , para todo conjunto  $\Gamma$  de fórmulas e para toda fórmula  $\psi$ .

Para mostrar que o axioma de Mendelson é um teorema no sistema de Frege, vamos usar os teoremas (33) e (44) de *Begriffsschrift*<sup>209</sup> e o seguinte meta-teorema:

**Teorema A.4.**  $\psi \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \gamma \vdash_F \psi \rightarrow \gamma$

**Demonstração:**

1. $\psi \rightarrow \varphi$	hipótese
2. $\varphi \rightarrow \gamma$	hipótese
3. $\psi$	hipótese
4. $\varphi$	1, 3, modus ponens
5. $\gamma$	2, 4, modus ponens
6. $\psi \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \gamma, \psi \vdash_F \gamma$	1-5
7. $\psi \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \gamma \vdash_F \psi \rightarrow \gamma$	6, teor. da dedução $\square$

**Teorema A.5.** O axioma  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$  de Mendelson é um teorema no sistema de Frege.

**Demonstração:**

1. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$	hipótese
2. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$	teorema (44)
3. $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$	1, 2, modus ponens
4. $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$	teorema (33)
5. $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$	teorema A.4
6. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \vdash_F (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$	1-5
7. $\vdash_F (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$	6, teor. da dedução $\square$

<sup>209</sup> Cf. *Begriffsschrift*, § 18-19

Temos, portanto, os seguintes fatos: para qualquer conjunto de fórmulas  $\Gamma$  e para toda fórmula  $\psi$  da linguagem dos sistemas de Mendelson e Frege,  $\Gamma \models_M \psi$ <sup>210</sup> implica  $\Gamma \vdash_M \psi$  (completude forte do sistema de Mendelson), e  $\Gamma \vdash_M \psi$  implica  $\Gamma \vdash_F \psi$  (consectário do teorema A.5). Como  $\Gamma \models_M \psi$  se, e somente se,  $\Gamma \models_F \psi$ , devido ao fato de as linguagens serem as mesmas,  $\Gamma \models_F \psi$  implica  $\Gamma \vdash_F \psi$ , isto é, o sistema de Frege é fortemente completo.

---

<sup>210</sup> Lembramos que  $\Gamma \models_M \psi$  significa que  $\psi$  é *conseqüência semântica* de  $\Gamma$  no sistema M.

## APÊNDICE B

Vamos demonstrar aqui que a relação de “equinumericidade” entre conceitos, denotada por  $\approx$ , é uma relação de equivalência, usando a definição de Frege. Em seguida, provaremos que para todo conceito  $H$ ,  $F \approx G$  se, e somente se,  $H \approx F \leftrightarrow H \approx G$ .

**Teorema B.1.** A relação  $\approx$  é uma relação de equivalência.

**Demonstração:**

Sejam  $F$ ,  $G$  e  $H$  conceitos.

**i)** A relação  $\approx$  é reflexiva, isto é,  $F \approx F$ .

Seja  $\varphi$  uma relação tal que  $x\varphi y$  se, e somente se,  $x = y$ .

(a) Se  $x$  cai sob  $F$ , existe  $y = x$  que cai sob  $F$  tal que  $x\varphi y$ .

(b) Se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $y$  e se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$ , então  $x = y$  e  $x = z$ , donde  $y = z$ ; se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$  e se  $y$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$ , então  $x = z$  e  $y = z$ , donde  $x = y$ .

**ii)** A relação  $\approx$  é anti-simétrica, isto é, se  $F \approx G$ , então  $G \approx F$ .

Seja  $\varphi$  a relação que coordenada biunivocamente os objetos que caem sob  $F$  aos que caem sob  $G$ .

(a) Por hipótese, se  $x$  cai sob  $F$ , existe  $y$  que cai sob  $G$  tal que  $x\varphi y$ ; também por hipótese, se  $y$  cai sob  $G$ , existe  $x$  que cai sob  $F$  tal que  $x\varphi y$ . Basta mudar a ordem das duas proposições anteriores e vemos que  $\varphi$  coordenada os objetos que caem sob  $G$  aos que caem sob  $F$ .

(b) Se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $y$  e se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$ , então, por hipótese,  $y = z$ ; se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$  e se  $y$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$ , então, também por hipótese,  $x = y$ .

**iii)** A relação  $\approx$  é transitiva, isto é, se  $F \approx G$  e  $G \approx H$ , então  $F \approx H$ .

Sejam  $\gamma$  e  $\psi$  duas relações que coordenam biunivocamente os objetos que caem sob  $F$  aos que caem sob  $G$  e os objetos que caem sob  $G$  aos que caem sob  $H$ , respectivamente, e seja  $\varphi$  uma relação tal que  $x\varphi z$  se, e somente se, existe  $y$  que cai sob  $G$  tal que  $x\gamma y$  e  $y\psi z$ .

(a) Por hipótese, se  $x$  cai sob  $F$ , existe  $y$  que cai sob  $G$  tal que  $x\gamma y$ , e daí existe  $z$  que cai sob  $H$  tal que  $y\psi z$ , isto é, existe  $z$  que cai sob  $H$  tal que  $x\varphi z$ ; também por hipótese, se  $z$  cai sob  $H$ , existe  $y$  que cai sob  $G$  tal que  $y\psi z$ , e daí existe  $x$  que cai sob  $F$  tal que  $x\gamma y$ , ou seja, existe se  $x$  cai sob  $F$  tal que  $x\varphi z$ .

(b) Se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $w$  e se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$ , então, por hipótese, existem  $y$  e  $y'$  tais que  $(x\gamma y$  e  $y\psi w)$  e  $(x\gamma y'$  e  $y'\psi z)$ . Concluimos, portanto, que  $y = y'$  e, conseqüentemente, que existe  $y$  tal que  $y\psi w$  e  $y\psi z$ . Logo,  $w = z$ . Se  $x$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$  e se  $w$  mantém a relação  $\varphi$  com  $z$ , então, por hipótese, existem  $y$  e  $y'$  tais que  $(x\gamma y$  e  $y\psi z)$  e  $(w\gamma y'$  e  $y'\psi z)$ . Concluimos, portanto, que  $y = y'$  e, conseqüentemente, que existe  $y$  tal que  $x\gamma y$  e  $w\gamma y$ . Logo,  $x = w$ .

□

**Teorema B.2.** Sejam  $F$  e  $G$  conceitos.  $F \approx G$  se, e somente se, para todo conceito  $H$ ,  $H \approx F \leftrightarrow H \approx G$ .

**Demonstração:**

$\Rightarrow$ ) Se  $H \approx F$  e  $F \approx G$ , segue pelo teorema B.1 (iii) que  $H \approx G$ . Também se  $H \approx G$  e  $F \approx G$ , pelo teorema B.1 (i), segue que  $H \approx G$  e  $G \approx F$ , donde, pelo teorema B.1 (iii),  $H \approx F$ .

$\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $F \not\approx G$  e  $H \approx F$ , e seja  $\gamma$  uma coordenação biunívoca entre os elementos das extensões de  $H$  e  $F$ .

(a) Se  $H$  fosse equinúmero a  $G$ , haveria uma coordenação biunívoca  $\varphi$  entre os elementos das extensões de  $H$  e  $G$  tal que, para todo  $z$  que cai sob  $G$ , haveria algum  $x$  que cai sob  $H$  tal que  $x\varphi z$ . Conseqüentemente, para todo  $z$  que cai sob  $G$ , haveria um  $x$  que cai sob  $H$  e um  $y$  que cai sob  $F$  tais que  $x\varphi z$  e  $x\gamma y$ . Como, por hipótese,  $H$  é equinúmero a  $F$ , para todo  $y$  que cai sob  $F$ , existe um  $x$  que cai sob  $H$  tal que  $x\gamma y$ . Conseqüentemente, para todo  $y$  que cai sob  $F$ , existiriam um  $x$  que cai sob  $H$  e um  $z$  que cai sob  $G$  tais que  $x\gamma y$  e  $x\varphi z$ . Definindo uma relação  $\psi$  entre os elementos das extensões de  $F$  e  $G$  tal que  $y\psi z$  se, e somente se, para algum  $x$  que cai sob  $H$ ,  $x\varphi z$  e  $x\gamma y$ , temos uma relação  $\psi$  que coordena os objetos que caem sob  $F$  aos que caem sob  $G$ .

(b) Se  $y$  mantém a relação  $\psi$  com  $w$  e se  $y$  mantém a relação  $\psi$  com  $z$ , então, por hipótese, existem  $x$  e  $x'$  tais que  $(x\gamma y$  e  $x\varphi w)$  e  $(x'\gamma y$  e  $x'\varphi z)$ . Concluimos, portanto, que  $x = x'$  e, conseqüentemente, que existe  $x$  tal que  $x\varphi w$  e  $x\varphi z$ . Logo,  $w = z$ . Se  $y$  mantém a relação  $\psi$  com  $z$  e se  $w$  mantém a relação  $\psi$  com  $z$ , então, por hipótese, existem  $x$  e  $x'$  tais que  $(x\gamma y$  e  $x\varphi z)$  e  $(x'\gamma w$  e  $x'\varphi z)$ . Concluimos, portanto, que  $x = x'$  e, conseqüentemente, que existe  $x$  tal que  $x\gamma y$  e  $x\gamma w$ . Logo,  $y = w$ .

Notemos que (a) e (b) implica na existência de uma relação  $\psi$  que coordena biunivocamente os objetos que caem sob  $F$  aos que caem sob  $G$ , o que contraria nossa suposição de que  $F \not\approx G$ . Logo,  $H$  não pode ser equinúmero a  $F$ ; mas isso contraria a hipótese. Portanto, se  $H \approx F \leftrightarrow H \approx G$ , para todo conceito  $H$ , então  $F \approx G$ .

□

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)