

Universidade Federal Fluminense - Pós Graduação

Departamento de Ciência da Computação

**Granulometria morfológica em
espaços de cores: estudo da ordenação
espacial**

Autor: Erick Calixto

Orientador: Aura Conci

Niterói

19 de agosto de 2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da Escola de Engenharia e Instituto de Computação da UFF

C154 Calixto, Erick

Granulometria morfológica em espaços de cores : estudo da ordenação espacial / Erick Calixto. – Niterói, RJ : [s.n.], 2005. 204 f.

Orientador: Aura Conci.

Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Universidade Federal Fluminense, 2005.

1. Processamento de imagens. 2. Granulometria. 3. Morfologia matemática. I. Título.

CDD 006.42

Universidade Federal Fluminense - Pós Graduação

Departamento de Ciência da Computação

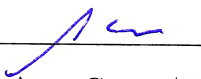
Granulometria morfológica em espaços de cores: estudo da ordenação espacial

Autor: Erick Calixto

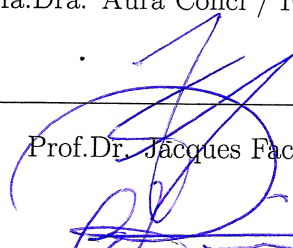
Orientador: Aura Conci

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Computação Visual.

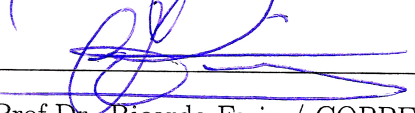
Aprovada por:



Profa.Dra. Aura Conci / IC-UFF (Presidenta)



Prof.Dr. Jacques Facon / PUC-PR



Prof.Dr. Ricardo Faria / COPPE-UFRJ

Niterói

19 de agosto de 2005

Resumo

A *distribuição de tamanho* ou *granulometria* é uma técnica da morfologia matemática que visa a análise das estruturas geométricas dos elementos que estão presentes nas imagens, assim como a identificação de tais elementos. Pode-se estabelecer um paralelo com o processo de peneiramento, onde os elementos na imagem (nesse caso tratados como grãos) serão classificadas segundo seu tamanho através de uma curva granulométrica.

Amplamente explorada em sua forma binária e em tons de cinza, a morfologia de imagens coloridas ainda apresenta aspectos que precisam de pesquisa mais profunda. O processamento de imagens coloridas através de ferramentas morfológicas geralmente é tratado como um caso especial de morfologia cinza, onde os operadores desta são aplicados separadamente nas componentes R, G e B e depois recombinaados. Em geral o resultado final deste procedimento não é o esperado. A dificuldade de ordenar intuitivamente as cores, impedindo assim a criação das relações de ordem existentes na morfologia monocromática, mostra-se o principal responsável por isto.

Neste trabalho define-se uma métrica para o espaço de cor *HSV* que possibilite a criação de uma granulometria neste espaço. Após um estudo da morfologia matemática, aborda-se as técnicas de representação das cores, as pesquisas no campo da morfologia matemática colorida e a contribuição do trabalho nesse sentido. Finalmente discute-se as técnicas granulométricas

existentes e aplica-se estas técnicas a imagens coloridas sintéticas e reais usando a métrica proposta.

Abstract

The *size distribution* or *granulometry* is a mathematical morphology technique used to analyze the geometrical structures of elements found in images, and to identify these elements as well. We can set a comparison to a *sieving* process where the elements in the images (in this case treated as grains) will be distinguished by their size through a granulometric curve.

Widely explored in its binary and shades of gray form, the morphology of colored images presents subjects that need deeper research. The processing of colored images through morphological tools is usually treated as a special case of gray morphology, where its operators are applied separately on the R , G and B components, and then recombined. In general, this procedure's final result is not expected. And it is difficult in assuming the color's order, what, in fact, hinders the creation of the order relations found on monochromatic morphology, appears as its main reason.

This work tries to define a metric for HSV color space, so that the creation of a granulometry in this space becomes possible. After a revision on mathematical morphology, the colors representation techniques; the researches on the colored mathematical morphology field; and the work's contribution to this area are brought to discussion. Finally, the current granulometric techniques are also discussed and applied to synthetic and real colored images using the proposed metric.

A minha esposa Carla, por me lembrar das responsabilidades

e

A minha filha Isabel por me fazer esquecer-las.

Agradecimentos

Em memória, a minha mãe Maria Isabel pelo carinho e dedicação à mim devotados.

Em memória, ao meu pai Luiz Carlos por ter sido pai, mãe e grande amigo.

Ao grande amigo Valdir Gadelha a quem muito exijo e pouco ofereço em troca.

Aos professores Jorge Velasco e Ricardo Farias responsáveis pela minha dedicação à Computação Visual.

Aos professores Abel Lozano e Luérbio Faria por terem acreditado em minha capacidade e me motivado à iniciar este trabalho.

A minha orientadora pelo apoio e confiança em mim depositados, por manter-me com os “pés no chão” durante o desenvolvimento do trabalho e por me ajudar a transformar uma pilha de idéias desorganizadas em um documento coerente.

Aos meus amigos por aceitarem minha ausência durante o desenvolvimento desse trabalho.

Ao Colégio Santo Inácio pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível concluir este trabalho.

Sumário

| | |
|--|----------|
| Lista de Figuras | xix |
| Lista de Tabelas | xxv |
| Lista de Símbolos | xxvii |
| Introdução | 1 |
| 1 Morfologia Matemática | 3 |
| 1.1 Conceitos Básicos | 4 |
| 1.1.1 Translação | 5 |
| 1.1.2 Simetria | 6 |
| 1.1.3 Operações de Minkowski | 6 |
| 1.2 Caracterização das Imagens | 9 |
| 1.2.1 Imagens Binárias | 9 |
| 1.2.2 Imagens em Tons de Cinza | 10 |
| 1.3 Elemento Estruturante | 12 |
| 1.4 Morfologia Binária | 14 |
| 1.4.1 Dilatação | 15 |
| 1.4.2 Erosão | 16 |
| 1.4.3 Propriedades da Dilatação e Erosão | 17 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.4.4 | Abertura e Fechamento | 20 |
| 1.5 | Morfologia em Níveis de Cinza | 25 |
| 1.5.1 | Conceitos Básicos | 26 |
| 1.5.2 | Umbra | 31 |
| 1.5.3 | Erosão | 34 |
| 1.5.4 | Dilatação | 37 |
| 1.5.5 | Abertura e Fechamento | 39 |
| 1.6 | Notas Gerais | 42 |
| 2 | Ordenação Colorida | 45 |
| 2.1 | Cor | 46 |
| 2.1.1 | Importância da Cor | 46 |
| 2.1.2 | A luz | 47 |
| 2.2 | Sistema Ótico - Visualização da Cor | 52 |
| 2.3 | Sistema Perceptivo - Interpretação da Cor | 55 |
| 2.3.1 | Constância de cor | 57 |
| 2.4 | Espaços de Cores | 59 |
| 2.4.1 | Cores Primárias | 60 |
| 2.4.2 | Famílias de Espaços de Cor | 61 |
| 2.5 | Morfologia Colorida | 69 |
| 2.5.1 | Ordenação Vetorial | 70 |
| 2.6 | Ordenação H&S no Espaço <i>HSV</i> | 76 |
| 2.7 | Notas Gerais | 77 |
| 3 | Constante de Cromaticidade | 79 |
| 3.1 | Introduzindo uma Nova Ordenação | 79 |
| 3.2 | Propondo uma Métrica para o Espaço <i>HSV</i> | 83 |
| 3.3 | Erosão e Dilatação Colorida Proposta | 88 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.3.1 | Testando as Definições Propostas | 90 |
| 3.4 | Notas Gerais | 95 |
| 4 | Granulometria Morfológica | 99 |
| 4.1 | Princípios de uma Quantificação | 100 |
| 4.2 | Definição | 103 |
| 4.3 | Curva Granulométrica | 107 |
| 4.4 | Tipos de Granulometrias | 108 |
| 4.4.1 | Granulometria Linear | 108 |
| 4.4.2 | Granulometria por Abertura | 109 |
| 4.5 | Reconstrução Morfológica | 113 |
| 4.5.1 | Erosão e Dilatação Condicional | 114 |
| 4.5.2 | Reconstrução | 117 |
| 4.6 | Notas Gerais | 118 |
| 5 | Resultados | 119 |
| 5.1 | Resultado da Granulometria no Espaço <i>HSV</i> | 119 |
| 5.1.1 | Resultados em Imagens Sintéticas | 121 |
| 5.1.2 | Resultados em Imagens Reais | 130 |
| 5.1.3 | Comparação de Resultados | 139 |
| 5.2 | Aplicações | 142 |
| 5.2.1 | Contagem de Células | 142 |
| 5.2.2 | Contagem de Algas | 144 |
| 5.3 | Notas Gerais | 146 |
| 6 | Considerações Finais | 149 |
| 6.1 | Conclusões | 149 |
| 6.2 | Trabalhos Futuros | 152 |

| | |
|--|------------|
| Referências Bibliográficas | 154 |
| A Espaços Métricos e Topológicos | 161 |
| A.1 Introdução | 161 |
| A.1.1 Conjuntos e Elementos de um Conjunto | 161 |
| A.1.2 Homotetia | 162 |
| A.1.3 Subconjuntos, Superconjuntos, Universo e Vazio | 162 |
| A.1.4 Classes, Famílias e Espaços | 163 |
| A.1.5 Principais Operações com Conjuntos | 163 |
| A.1.6 Conjuntos Indexados | 164 |
| A.1.7 Conjuntos Contáveis | 164 |
| A.2 Espaços Métricos | 165 |
| A.2.1 Definição | 165 |
| A.2.2 Distância de um Ponto a um Conjunto | 165 |
| A.2.3 Bola Aberta | 166 |
| A.2.4 Ponto de Interior e Conjunto Aberto | 166 |
| A.2.5 Ponto de Acumulação e Conjuntos Fechados | 166 |
| A.2.6 Cobertura | 167 |
| A.2.7 Seqüências, Seqüências Convergentes e Seqüências de Cauchy | 167 |
| A.2.8 Conjuntos Completos e Conjuntos Compactos | 168 |
| A.3 Espaços Topológicos | 168 |
| A.3.1 Definição | 168 |
| A.3.2 Fecho de um Conjunto, Conjuntos Densos e Espaços Separáveis | 169 |
| A.3.3 Vizinhança | 169 |
| A.3.4 Espaço Localmente Compacto | 170 |
| A.3.5 Espaço de Hausdorff | 170 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| <i>SUMÁRIO</i> | xvii |
| A.3.6 Base de uma Topologia | 170 |
| B Algoritmos | 171 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Conjunto A | 5 |
| 1.2 | (a)Conjunto A . (b) Translação do conjunto A por x | 5 |
| 1.3 | (a) Conjunto A . (b) Simétrico do conjunto A | 6 |
| 1.4 | Representação gráfica de $A \oplus B$ | 7 |
| 1.5 | Representação gráfica de $A \ominus B$ | 8 |
| 1.6 | Exemplo de imagem binária | 9 |
| 1.7 | Exemplo de imagem com tons variando entre 0 e 255 | 11 |
| 1.8 | Variação dos níveis de cinza na qualidade da Figura 1.7 | 11 |
| 1.9 | (a)Imagem cinza. (b)DEM da imagem (a). | 13 |
| 1.10 | Formas dos EE: (a)Quadrado, (b)Linha, (c)Cruz e (d)Dois pontos. | 13 |
| 1.11 | Dilatação do conjunto A pelo EE B | 15 |
| 1.12 | Erosão do conjunto A pelo EE B | 17 |
| 1.13 | Composição da Abertura e Fechamento através de Dilatações e Erosões. | 21 |
| 1.14 | Abertura, A_B , do conjunto A pelo conjunto B [29]. | 22 |
| 1.15 | Fechamento, A^B , do conjunto A pelo conjunto B [29]. | 23 |
| 1.16 | Exemplo de <i>shift</i> , <i>offset</i> e translação em níveis de cinza do sinal f | 27 |
| 1.17 | Relação de ordem entre sinais. | 28 |
| 1.18 | Duas funções f e g e seus máximo e mínimo. | 29 |
| 1.19 | Duas imagens f e g e seus máximo e mínimo. | 30 |
| 1.20 | Complemento de um sinal (a) e de um detalhe da Figura 1.7 (b) | 30 |

| | | |
|------|---|----|
| 1.21 | Complemento de um sinal visto como a negação do sinal. | 31 |
| 1.22 | Reflexão do sinal f | 31 |
| 1.23 | (a) Sinal f e (b) umbra de (a). | 33 |
| 1.24 | (a) Imagem em tons de cinza (b) umbra de (a). | 33 |
| 1.25 | Relação entre a erosão e dilatação de um sinal com a erosão e dilatação da sua umbra. | 34 |
| 1.26 | Efeito do “encaixe por baixo” na erosão do sinal f pelo EE g | 35 |
| 1.27 | Erosão de um sinal f pelo EE g | 36 |
| 1.28 | Resultado da erosão em níveis de cinza por um EE circular plano. | 36 |
| 1.29 | “Encaixe por cima” na dilatação do sinal f pelo EE g [13]. | 37 |
| 1.30 | Dilatação do sinal f pelo EE g | 38 |
| 1.31 | Resultado da dilatação cinza por um EE circular plano | 38 |
| 1.32 | Abertura de um sinal f por um EE simétrico g | 39 |
| 1.33 | Abertura da imagem (a) por um EE circular(plano). | 40 |
| 1.34 | Fechamento de um sinal f por um EE simétrico g | 41 |
| 1.35 | Fechamento da imagem (a) por uma EE circular(plano). | 42 |
| 2.1 | Freqüências do espectro eletromagnético. | 48 |
| 2.2 | (a) Curva espectral de uma luz pura e (b) de uma luz misturada. | 49 |
| 2.3 | Decomposição de uma cor em matiz, saturação e brilho. Adaptada de [3]. | 50 |
| 2.4 | Decomposição de um feixe de luz branca. | 50 |
| 2.5 | Filtragem da luz solar pela atmosfera [6]. | 51 |
| 2.6 | Caracterização da luz solar após a passagem pela atmosfera [6]. | 52 |
| 2.7 | (a) Olho humano. (b) Imagem ampliada da retina [19]. | 53 |
| 2.8 | Distribuição dos cones e bastonetes na retina [37]. | 54 |
| 2.9 | Curva de respostas dos três tipos de células cones [37]. | 55 |
| 2.10 | Imagem colorida, monocromática e apenas em tons de cinza. | 56 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.11 | Desenhos (a) “Mistério” e (b) “Ponte” feitos à lápis pelo autor com base em modelos. | 56 |
| 2.12 | Os quadrados A e B possuem a mesma intensidade de cinza. | 58 |
| 2.13 | Fotos da mesma menina em duas situações. | 59 |
| 2.14 | Processo aditivo de cores do espaço <i>RGB</i> | 62 |
| 2.15 | Processo subtrativo de cores do espaço <i>CMY</i> | 63 |
| 2.16 | Curvas de processamento das cores oponentes [3]. | 64 |
| 2.17 | Fenômeno explicado através de cores oponentes. | 64 |
| 2.18 | Distribuição espectral das primárias <i>XYZ</i> | 65 |
| 2.19 | Diagrama de cromaticidade CIEE. | 67 |
| 2.20 | (a) Cores circulares de Munsell. (b) Representação 3D [3]. | 68 |
| 2.21 | Modelo do espaço <i>HSV</i> [3]. | 68 |
| 2.22 | Dilatação de uma imagem colorida usando o conceito de ordenação marginal. | 72 |
| 2.23 | Histograma das imagens da Figura 2.22 | 72 |
| 2.24 | (a) Imagem original. (b) Dilatação de (a) usando ordenação reduzida. | 74 |
| 2.25 | Histograma das imagens da Figura 2.24 | 74 |
| 2.26 | (a) Imagem original. (b) Dilatação de (a) usando ordenação lexicográfica. | 75 |
| 2.27 | Histograma das imagens da Figura 2.26 | 75 |
| 2.28 | Três cores e suas coordenadas no espaço <i>HLS</i> | 77 |
| 3.1 | (a) Saturação normalizada. (b) Matiz normalizado. | 80 |
| 3.2 | (a) Maior distância entre matizes. (b) Matizes equidistantes. | 81 |
| 3.3 | Cores e suas coordenadas representadas no espaço <i>HSV</i> | 82 |
| 3.4 | Caracterização da desigualdade triangular para a função <i>dH</i> | 86 |
| 3.5 | Cobertura do espaço <i>HSV</i> pela métrica proposta com intensidade máxima e cor inicial vermelha. | 89 |
| 3.6 | Resultado usando como cor mínima o matiz vermelho. | 92 |
| 3.7 | (a) Histograma da Figura 3.6b . (b) Histograma da Figura 3.6c | 92 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.8 | Resultado usando como cor mínima o matiz azul. | 92 |
| 3.9 | (a)Histograma da Figura 3.8b . (b)Histograma da Figura 3.8c | 92 |
| 3.10 | Dilatação e erosão usando o método proposto em [27]. | 93 |
| 3.11 | Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da Figura 3.10 | 93 |
| 3.12 | Efeito da eliminação e ampliação de grãos. | 93 |
| 3.13 | Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da Figura 3.12 | 94 |
| 3.14 | Exemplo usando branco como cor mínima. | 94 |
| 3.15 | Exemplo usando o ciano como cor mínima. | 95 |
| 3.16 | Exemplo usando o verde como cor mínima. | 95 |
| 3.17 | Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da Figura 3.14 | 95 |
| 3.18 | Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da Figura 3.15 | 96 |
| 3.19 | Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da Figura 3.16 | 96 |
| 4.1 | Conjunto X e as alturas correspondentes a cada elemento [31]. | 105 |
| 4.2 | Anti-extensividade e crescimento da transformação $\psi_\lambda(X)$ [31]. | 105 |
| 4.3 | Propriedade da absorção [31]. | 106 |
| 4.4 | Os conjuntos X_1 , X_2 e X_3 e suas respectivas curvas granulométricas [31]. | 109 |
| 4.5 | Aberturas sucessivas de uma imagem binária com um EE quadrado [34]. | 111 |
| 4.6 | Dois tipos de curvas granulométricas para a Figura 4.5 [34]. | 111 |
| 4.7 | Granulometria em tons de cinza pela abertura e fechamento [34]. | 112 |
| 4.8 | (a) Conjunto X . (b) Aplicação da granulometria por abertura [11]. | 112 |
| 4.9 | <i>Pattern Spectrum</i> da granulometria da Figura 4.8 [11]. | 113 |
| 4.10 | Reconstrução por dilatação condicional de tamanho fixo. | 115 |
| 4.11 | Reconstrução por dilatação condicional de tamanho crescente. | 116 |
| 4.12 | Reconstrução da imagem marcadora f | 117 |
| 5.1 | Imagens sintéticas utilizadas como teste. | 119 |
| 5.2 | Granulometria por abertura da Figura 5.1a | 122 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.3 | Granulometria por abertura com reconstrução da Figura 5.1a. | 122 |
| 5.4 | Granulometria por abertura da Figura 5.1b. | 123 |
| 5.5 | Granulometria por abertura com reconstrução da Figura 5.1b. | 123 |
| 5.6 | Granulometria por abertura da Figura 5.1c. | 124 |
| 5.7 | Granulometria por abertura com reconstrução da Figura 5.1c. | 124 |
| 5.8 | Granulometria por abertura da Figura 5.1d. | 125 |
| 5.9 | Granulometria por abertura com reconstrução da Figura 5.1d. | 125 |
| 5.10 | Curva granulométrica representando as áreas relevantes apresentadas nas tabelas 5.2 e 5.3. | 127 |
| 5.11 | Padrão espectral das granulometrias apresentadas nas tabelas 5.2 e 5.3. | 127 |
| 5.12 | Distribuição em medida normalizada obtida pelas medições apresentadas nas tabelas 5.2 e 5.3. | 128 |
| 5.13 | Número de grãos em cada passo obtido pelas medições apresentadas na Tabela 5.4. | 129 |
| 5.14 | Distribuição em número normalizada obtida pelas medições apresentadas na Tabela 5.4. | 130 |
| 5.15 | Padrão espectral em número obtido pelas medições da Tabela 5.4. | 131 |
| 5.16 | Imagens reais testadas. | 131 |
| 5.17 | Granulometria colorida da Figura 5.16a. | 133 |
| 5.18 | Granulometria colorida da Figura 5.16b. | 134 |
| 5.19 | Granulometria colorida da Figura 5.16c. | 135 |
| 5.20 | Curva granulométrica de Figura 5.17. | 137 |
| 5.21 | Curva granulométrica de Figura 5.18. | 138 |
| 5.22 | Curva granulométrica de Figura 5.19. | 138 |
| 5.23 | Padrões espectrais das figuras 5.21 e 5.22. | 138 |
| 5.24 | Grãos da Figura 5.16 com fundo original. | 139 |
| 5.25 | Granulometria colorida da Figura 5.24. | 140 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.26 | Curva granulométrica de Figura 5.25 | 141 |
| 5.27 | Imagem teste utilizada em [22]. | 141 |
| 5.28 | Granulometria da Figura 5.27 | 142 |
| 5.29 | Comparação do resultado da granulometria da Figura 5.28 (direita) com o resultado apresentado em [22] (esquerda). | 143 |
| 5.30 | Células contaminadas pelo vírus HIV obtidas em [12]. | 144 |
| 5.31 | Granulometria da Figura 5.30 | 145 |
| 5.32 | Curvas granulométrica de Figura 5.31 | 146 |
| 5.33 | Algas obtidas em [12]. | 146 |
| 5.34 | Granulometria da Figura 5.33 | 147 |
| 5.35 | Curvas granulométrica de Figura 5.34 | 148 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.1 | Número de grãos e área que ocupam. | 120 |
| 5.2 | Área relevante nas imagens (a), (b), (c) e (d) da Figura 5.1 | 121 |
| 5.3 | Área relevante com reconstrução das imagens (a), (b), (c) e (d) da Figura 5.1 | 126 |
| 5.4 | Número de grãos presentes nas imagens (a), (b), (c) e (d) da Figura 5.1 .129 | |
| 5.5 | Contagem de grãos das figuras 5.17, 5.18 e 5.19 | 137 |

Lista de Símbolos

Teoria dos Conjuntos

| | |
|------------------------------|--|
| U | - Conjunto universo ou universal. |
| A^c | - Complemento do conjunto A em relação à U . |
| $A \setminus B$ | - Diferença de A em relação à B (complemento relativo). |
| A_x | - Translação do conjunto A por um vetor x . |
| \tilde{A} | - Simetria ou reflexão de A em relação à origem. |
| $\mathcal{P}(A)$ | - Conjunto de todos os subconjuntos formados pelos elementos do conjunto A . |
| $\{A_i\}_{i \in I}, \{A_i\}$ | - Conjunto A indexado por um conjunto de índices I . |
| A_i | - i ésimo elemento de $\{A_i\}$. |
| $\bigcup_{i \in I} A_i$ | - União da classe dos conjuntos indexados. |
| $\bigcap_{i \in I} A_i$ | - Interseção da classe dos conjuntos indexados. |
| λX | - Homotetia do conjunto X após a ampliação pelo escalar λ . |
| $\psi(X)$ | - Transformação do conjunto X pelo mapeamento ψ . |
| $\mu(\psi(X))$ | - Medição μ do mapeamento ψ sobre um conjunto X . |

Topologia

- $d(x, y)$ - Distância entre x e y .
- $B_r(x)$ - Bola aberta ou vizinhança aberta de raio r centrada em x .
- $\langle s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle, \langle s_n \rangle$ - Sequência.
- \mathcal{T} - Topologia.
- (A, \mathcal{T}) - Espaço topológico.
- \overline{A} - Fecho do conjunto A .

Morfologia Matemática

- $A \oplus B$ - Soma de Minkowski.
 $A \ominus B$ - Subtração de Minkowski.
 $\delta_B(A)$ - Dilatação do conjunto A pelo conjunto B .
 $\varepsilon_B(A)$ - Erosão do conjunto A pelo conjunto B .
 A_B - Abertura do conjunto A pelo conjunto B .
 A^B - Fechamento do conjunto A pelo conjunto B .
 I - Imagem binária.
 f - Imagem (ou sinal) em tons de cinza.
 f_α - Deslocamento horizontal de um sinal f por um vetor α .
 $(f + \beta)$ - Deslocamento vertical de um sinal f por um vetor β .
 $f \vee g$ - Máximo entre f e g .
 $f \wedge g$ - Mínimo entre f e g .
 \check{f} - Simetria ou reflexão do sinal f em torno da origem.
 f^c - Complemento do sinal f .
 $U[f]$ - Umbra do sinal f .
 $\delta_g(f)$ - Dilatação do sinal f pelo sinal g .
 $\varepsilon_g(f)$ - Erosão do sinal f pelo sinal g .
 f_g - Abertura do sinal f pelo sinal g .
 f^g - Fechamento do sinal f pelo sinal g .
 $f \underline{\vee} g$ - Máximo colorido entre os sinais f e g .
 $f \overline{\wedge} g$ - Mínimo colorido entre os sinais f e g .
 $dH(a, b)$ - Distância de matiz entre os valores angulares a e b .
 $c(a, b)$ - Função constante de cromaticidade entre duas cores a e b do espaço HSV .

Introdução

Já faz muitos anos que o homem procura explorar seu ambiente através da análise das formas dos objetos presentes ao seu redor, o que é útil tanto para objetos simples quanto em composições de vários objetos de tamanhos e formas diferentes. Pode-se analisar a estrutura do solo através do tamanho e forma dos grãos que o compõe, classificar um tumor por sua forma, detectar problemas de saúde pela contagem de células presentes em nosso sangue, etc ...

Sob esta perspectiva, o grão (independente do tamanho ou forma) passa a desempenhar um papel crucial na tentativa do homem em entender e representar a sua realidade.

Em 1964 na *École Nationale Supérieure des Mines de Paris*, no campus de *Fontainebleau*, G. Matheron começou a investigar a relação entre a geometria dos meios porosos e sua permeabilidade. Ao mesmo tempo e no mesmo lugar, J. Serra procurava quantificar amostra de minério de ferro por suas características petrográficas. Ambos tinham uma idéia em comum: a noção geométrica não é objetiva, não está contida no fenômeno, nem tão pouco no observador, mas em algum lugar entre eles. Surge então os fundamentos da Morfologia Matemática, um poderoso conjunto de ferramentas para o pré e pós-processamento de imagens [16, 31].

Este trabalho apresenta a proposta de uma extensão para as imagens

coloridas do conceito de granulometria morfológica, isto é, a análise de grãos através das ferramentas da Morfologia Matemática. Esta extensão é feita a partir de uma ordenação, proposta neste trabalho, para o espaço de cores HSV. A escolha de tal espaço se baseia no fato deste ser um dos modelos de cores que mais se assemelham a intuição humana de cor.

Estrutura do Trabalho

Como este é o primeiro trabalho na área de Computação Visual da pós-graduação em Ciências da Computação da UFF a utilizar a Morfologia Matemática, o **capítulo 1** apresenta seus conceitos básicos, assim como seus principais operadores. No **capítulo 2** são introduzidos os conceitos iniciais de espaços de cores; é discutida a dificuldade de definir a Morfologia Matemática em um espaço de cor. No **capítulo 3** é apresentada nossa proposta de mapeamento e realizado testes com os novos operadores definidos. No **capítulo 4**, o conceito de granulometria é discutido e este conceito é abordado usando-se as ferramentas apresentadas nos capítulos 1, 2 e 3. No **capítulo 5** apresenta-se granulometrias realizadas em imagens sintéticas e reais e o **capítulo 6** contém as considerações finais, conclusões e sugestões para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

O **apêndice A** apresenta os conceitos matemáticos necessários para o estudo dos textos clássicos de granulometria [23, 31], visto que estas referências formam a “pedra fundamental” da Morfologia Matemática. No **apêndice B** apresenta-se os códigos utilizados neste trabalho.

Capítulo 1

Morfologia Matemática

A palavra morfologia tem origem grega e seu significado implica no estudo da forma (*morphos* = forma e *logos* = estudo), isto é, a análise das características geométricas presentes nos objetos em estudo. Tal abordagem é familiar para profissionais de diversas áreas como medicina, biologia, microbiologia, petrologia, mineralogia, etc . . .

Apesar da diversidade de objetivos destas aplicações, elas compartilham uma característica em comum: a necessidade de obter informações a partir da análise de imagens. A análise de imagens digitais tornou-se uma ferramenta essencial para o desenvolvimento deste tipo de trabalho. Na medicina observa-se o tamanho e forma de um nódulo, órgão, veias ou artérias. Na biologia observa-se o número e as características das células e dos cromossomos. Na geologia observa-se a forma e a estrutura dos cristais ou as texturas formada pelo relêvo em fotos aéreas. Em cada uma destas situações, o profissional é capaz de obter informações a partir de imagens que respondam a perguntas relativas ao contexto em que estão trabalhando.

Mesmo sendo tão distintos, estes exemplos possuem características geométricas e espectrais em comum, permitindo que a análise de suas imagens

utilize um conjunto de técnicas comuns [4]. Seguindo o princípio que perceber uma imagem é transformá-la [31], a Morfologia Matemática introduz o conceito de elemento estruturante. O objetivo deste elemento, previamente definido pelo morfologista, é atuar sobre a imagem, obtendo assim uma nova imagem que é mais expressiva, enfatizando características relevantes ao objetivo do estudo.

Existem dois tipos de Morfologia Matemática, a *morfologia binária* e a *morfologia em níveis de cinza*. Na morfologia binária, a imagem está em preto e branco e o procedimento avalia o impacto da forma do elemento estruturante na imagem processada. Na morfologia em níveis de cinza, não apenas a forma, mas também a tonalidade do pixel é transformada de acordo com o elemento estruturante. Portanto, saber os limites das tonalidades de um pixel é um fator relevante na morfologia em níveis de cinza [14].

A Morfologia Matemática é relativamente recente e considerada pelos matemáticos como uma aplicação da teoria dos conjuntos. Ela fornece uma abordagem não linear poderosa para numerosos problemas de processamento de imagens [14, 34].

1.1 Conceitos Básicos

Nesta seção usa-se o símbolo E para representar o **espaço euclidiano** n dimensional, isto é, $E = \mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana¹. Considerando $\mathcal{P}(E)$ o conjunto de todos os subconjuntos possíveis de E (também chamado em alguns trabalhos de conjunto das partes de E).

Na morfologia matemática, é comum considerar uma imagem como sendo um conjunto formado pelos conjuntos de todos os pixels, suas cores e posições.

¹No caso de imagens $E = \mathbb{R}^2$

Este conjunto é uma descrição completa da imagem.

Por exemplo o conjunto A da **Figura 1.1** pode ser escrito como

$$A = \{(0, 0); (0, 1); (0, 2)\}$$

onde (i, j) representa a posição em linha e coluna dos elementos de A .

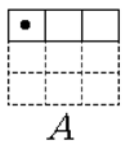


Figura 1.1: Conjunto A .

1.1.1 Translação

Seja A um subconjunto de $\mathcal{P}(E)$. A **translação** de A por um ponto $x \in E$, representada por A_x (**Figura 1.2**), é definida como

$$A_x = \{y : y - x \in A\} \quad (1.1)$$

Equivalentemente, se um ponto a pertence a A , então a soma de a com um ponto x , qualquer do espaço, pertence a A_x , isto é:

$$a \in A \Rightarrow a + x \in A_x \quad (1.2)$$

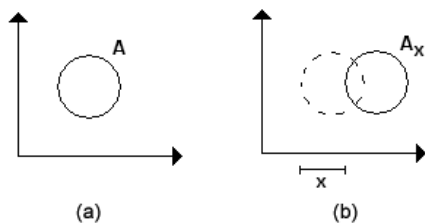


Figura 1.2: (a) Conjunto A . (b) Translação do conjunto A por x .

Em [14] são observadas as seguintes propriedades:

- i. (elemento nulo da translação) $A_0 = A$
- ii. (comutatividade da ordem das translações) $(A_h)_k = A_{h+k} = (A_k)_h$

1.1.2 Simetria

Seja $A \in \mathcal{P}(E)$, define-se o conjunto \check{A} , **simétrico**² de A com respeito à origem (**Figura 1.3**), como

$$\check{A} = \{-a : a \in A\} \quad (1.3)$$

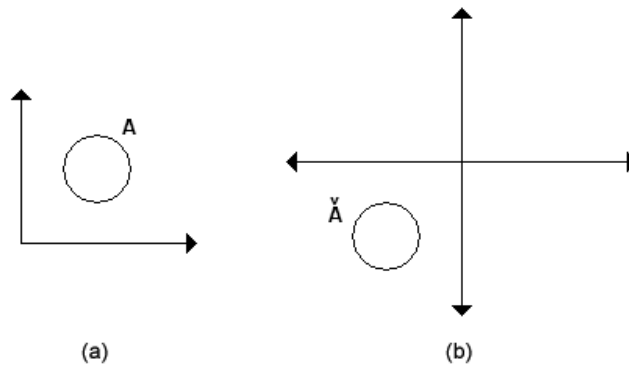


Figura 1.3: (a) Conjunto A . (b) Simétrico do conjunto A .

1.1.3 Operações de Minkowski

Além das operações entre vetores e conjuntos em E , pode-se também definir operações entre conjuntos neste espaço. As principais operações, sob a perspectiva da Morfologia Matemática, são a Soma e a Subtração de Minkowski.

²É comum também chamar-se \check{A} de **transposto** de A ou ainda a **reflexão** de A em torno da origem.

Dados dois conjuntos A e B de $\mathcal{P}(E)$, a **Soma de Minkowski** do conjunto A com o B , representada por $A \oplus B$, é definida como:

$$A \oplus B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \quad (1.4)$$

Exemplo 1.1. Seja $A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ e $B = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$.

Tem-se então, pela equação (1.4), que

$$A \oplus B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Na **Figura 1.4** representa-se graficamente A , B e $A \oplus B$. Nesta figura o “.” representa a origem do sistema de coordenadas.

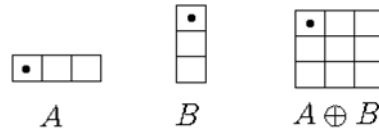


Figura 1.4: Representação gráfica de $A \oplus B$.

Note que $A \oplus \{o\} = A$, sendo o a origem do sistema, e que $A \oplus \emptyset = \emptyset$ por definição [23]. Outro ponto importante é que, como é usado o espaço euclidiano, $A \oplus \{x\}$ é equivalente a A_x . Em [23] é mostrado que dado $y \in A \oplus B$, tem-se que $(\check{B})_y \cap A \neq \emptyset$.

Exemplo 1.2. Considerando os mesmos conjuntos A e B do exemplo anterior, tem-se que $\check{B} = \{(0, 0), (-1, 0), (-2, 0)\}$ e considerando $y = (1, 1)$, obtem-se $(\check{B})_y = \{(1, 1), (0, 1), (-1, 1)\}$. É imediato perceber que $(\check{B})_y \cap A = \{(0, 1)\} \neq \emptyset$.

Existem várias definições equivalentes para a Soma de Minkowski, entre elas tem-se:

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b = \{x : A \cap (\check{B})_x \neq \emptyset\} \quad (1.5)$$

A **Subtração de Minkowski** é definida de maneira similar à Soma de Minkowski. Dado dois conjuntos A e B , a Subtração de Minkowski do conjunto A pelo B , representada por $A \ominus B$, é definida por

$$A \ominus B = \{x : \forall b \in B, \exists a \in A : x = a - b\} \quad (1.6)$$

tem-se também que

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_b = \{x : (\check{B})_x \subset A\} \quad (1.7)$$

Exemplo 1.3. *Seja $A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$ e $B = \{(0, 0), (0, 1)\}$. Tem-se então, pela definição da Subtração de Minkowski, que*

$$A \ominus B = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} .$$

Na **Figura 1.5** representa-se graficamente $A \ominus B$. Nesta figura o “.” representa a origem do sistema de coordenadas.

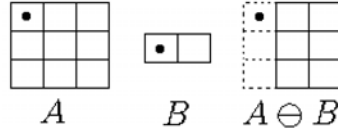


Figura 1.5: Representação gráfica de $A \ominus B$.

A Subtração de Minkowski tem a propriedade de ser *dual*, com respeito ao complemento, da Soma de Minkowski através da relação abaixo [23, p. 17]:

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c \quad (1.8)$$

Em [14, 23, 31] podem ser encontradas diversas definições equivalentes assim como propriedades relativas a Soma e Subtração de Minkowski.

1.2 Caracterização das Imagens

As bases da morfologia matemática foram desenvolvidas utilizando-se o espaço Euclidiano³, mas suas aplicações práticas residem no fato de tratar imagens digitais. Dessa forma estende-se a morfologia para o espaço discreto através da amostragem do espaço Euclidiano, fazendo-o equivalente à \mathbb{Z}^2 . Em [34, p. 16] pode-se encontrar exemplos de como realizar esta amostragem.

1.2.1 Imagens Binárias

Uma **imagem binária**, como o próprio nome leva a deduzir, indica uma imagem em que os seus *pixels* assumem o valor 0 ou 1, ou seja, um pixel pode pertencer a um objeto ou ao fundo da imagem. A definição de qual valor representará o objeto depende do que se está considerando na imagem. Na **Figura 1.6** tem-se um exemplo de imagem binária.



Figura 1.6: Exemplo de imagem binária

Normalmente, uma imagem binária possui uma região delimitada retangular onde cada elemento dessa região representará um pixel. Esta região (normalmente plana) é chamada de Domínio da Imagem, e é representada por D_I .

³Geralmente referenciada por **Morfologia Euclidiana**

Dessa forma pode-se definir uma imagem binária como sendo um conjunto. Cada elemento deste conjunto representa um ponto da imagem. Ou seja, para uma imagem em um fundo branco tem-se:

$$I = \{(x, y) \in D_I : (x, y) = 1\}.$$

É imediato perceber que dado uma imagem binária, o conjunto de pixels pretos e o conjunto de pixels brancos são excludentes, isto é, se um ponto de D_I não pertencer ao conjunto de pixels pretos, então ele deve pertencer ao conjunto de pixels brancos e vice versa.

1.2.2 Imagens em Tons de Cinza

As imagens em tons de cinza são representadas no espaço inteiro tridimensional \mathbb{Z}^3 da seguinte forma: as duas primeiras componentes representam a posição de um pixel na imagem, que está no plano inteiro \mathbb{Z}^2 , e a terceira componente representa uma faixa de intensidade que um pixel pode assumir⁴. Este conceito pode ser estendido para imagens em dimensões maiores, isto é, uma imagem em \mathbb{Z}^n , $n > 2$ possuiria $n - 2$ atributos, tais como cor, comprimentos de ondas específicos, componentes temporais, etc

Formalmente define-se que uma imagem em tom de cinza f é uma função que vai do domínio da imagem $D_f \subset \mathbb{Z}^2$, chamado domínio definido de f , até um conjunto finito ordenado de inteiros não negativos \mathbb{N}_0 [34]:

$$f : D_f \subset \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 1, \dots, t_{max}\} \quad (1.9)$$

É prática comum definir o número de níveis de cinza utilizados, ou seja, a cardinalidade do conjunto $\{0, 1, \dots, t_{max}\}$, por uma potência de 2.

⁴Alguns autores preferem representar o espaço da imagem através de \mathbb{Z}^{2+1} ao invés de \mathbb{Z}^3 para evitar a confusão com o espaço em que a terceira componente é o conjunto \mathbb{Z} completo.



Figura 1.7: Exemplo de imagem com tons variando entre 0 e 255

Os efeitos produzidos em uma imagem pela variação deste número de níveis podem ser percebidos na **Figura 1.8**. Neste exemplo é apresentado a **Figura 1.7** com (a) 4 níveis, (b) 8 níveis, (c) 16 níveis e (d) 32 níveis de cinza entre o branco e o preto.

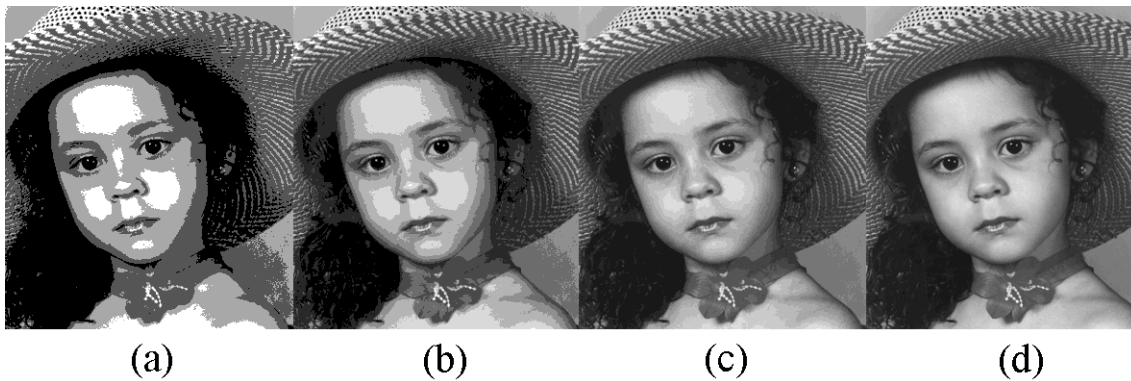


Figura 1.8: Variação dos níveis de cinza na qualidade da **Figura 1.7**.

Pode-se perceber que a **Figura 1.8d** é praticamente idêntica a imagem original. As figuras (a), (b) e (c) apresentam, o que em [16], é chamado de “falso contorno”, sendo este provocado pelo número insuficiente de níveis de cinza.

Em [18] a influência dos níveis de cinza e da resolução da imagem em sua qualidade são consideradas em uma tentativa de quantificar experimen-

talmente estes efeitos. Todos os resultados obtidos foram empíricos, mas mostram que a qualidade da imagem aumenta com o aumento destes parâmetros. Em algumas imagens com muitos detalhes a qualidade melhorou quando utilizou-se poucos níveis de cinza, sendo o incremento deste parâmetro de pouca influência na qualidade da mesma. A razão mais provável para isso é que a diminuição dos níveis de cinza geralmente aumenta o contraste aparente na imagem [16].

As imagens em tons de cinza apresentadas neste trabalho possuirão sempre 256 níveis de cinza. Isto é, seus tons variam entre 0 e 255, salvo quando indicado o contrário.

Observe que a equação (1.9) também serve para definir uma imagem binária, para tanto basta fazer $t_{max} = 1$.

Uma forma útil de se “ver” uma imagem em tons de cinza é na forma de um relêvo. Para tanto, pode-se entender a terceira componente, que representa a intensidade de um pixel, como uma altitude. Quanto mais claro, maior a altitude. Esta representação é chamada de modelo digital de elevação ou **DEM** (*Digital Elevation Model*), logo toda imagem em tom de cinza pode ser vista como um DEM. Um exemplo de DEM é mostrado na **Figura 1.9**. Este e uma grande quantidade de termos da morfologia matemática foram tomados da geomorfologia [34].

1.3 Elemento Estruturante

O **Elemento Estruturante (EE)** é um conjunto utilizado para a sondagem da imagem a ser estudada. Geralmente sua forma é escolhida de acordo com um conhecimento prévio da geometria da imagem, sendo muitas vezes o EE uma parte da própria imagem.

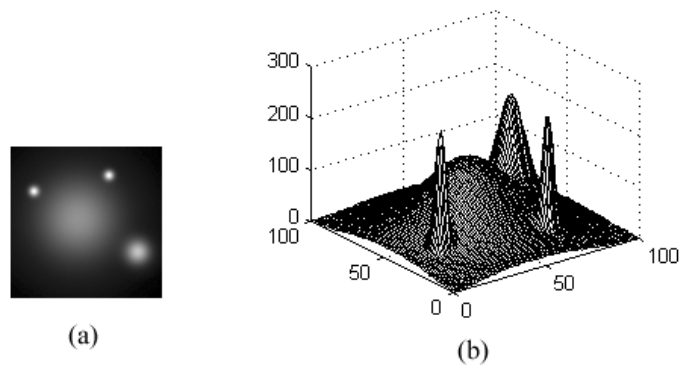


Figura 1.9: (a)Imagem cinza. (b)DEM da imagem (a).

Por convenção a origem de uma imagem é o seu o canto superior esquerdo (em uma imagem retangular). De forma semelhante, é necessário definir a origem do EE, pois é através dessa origem que o EE irá ser considerado ao ser operado na imagem. Para EE de dimensões ímpares, é comum definir o elemento central como sendo a origem do EE.

A forma do EE deve ser adaptada para as medições que deseja-se obter da imagem. Alguns EE mais comuns são apresentados na **Figura 1.10** e em [34](p. 50-51 e p. 63) podem ser encontrados outros exemplos. Na **Figura 1.10** os pixels em preto indicam o centro do EE.

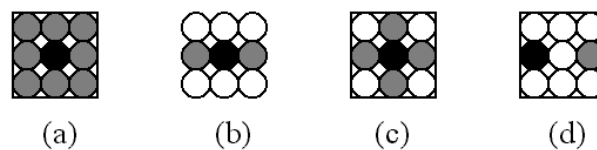


Figura 1.10: Formas dos EE: (a)Quadrado, (b)Linha, (c)Cruz e (d)Dois pontos.

Note que os EE presentes na **Figura 1.10** não possuem pesos associados aos seus pixels, estes tipos de EE são chamados de **EE planos**. Na morfologia binária todo EE é plano, mas na morfologia cinza os EE podem possuir

pesos ou tons associados a seus elementos (normalmente chamados de *EE volumétricos*). Mesmo na morfologia em níveis de cinza EE planos são muito utilizados e representados como um conjunto. Ao adotar um EE volumétrico, representado como um sinal ou imagem, os pesos dados aos seus elementos devem estar de acordo com a intensidade da imagem a ser processada. Dada a dificuldade de satisfazer este requisito e a computação extra que este tipo de EE gera, EE volumétricos são menos utilizados [34].

Na verdade, o EE pode possuir qualquer forma, mas apenas um pequeno grupo de formas são efetivamente úteis em aplicações de granulometria. Uma característica normalmente procurada em um EE é a invariância em relação origem, ou seja sua simetria. Esta propriedade faz com que o resultado de operar uma imagem utilizando B seja o mesmo do obtido operando a imagem por \check{B} .

Uma limitação do EE em um espaço discreto, é que devido ao fato de, normalmente, possuírem pequenas dimensões, pode-se obter várias aproximações digitais para uma mesma forma, ou a mesma aproximação para formas distintas. Pode-se observar que a **Figura 1.10c** pode ser uma discretização do sinal “+” ou do círculo de raio 1 em uma malha 4-conectada⁵.

1.4 Morfologia Binária

Na morfologia binária, os conjuntos em questão existem no espaço \mathbb{Z}^2 . Cada ponto (x, y) de um conjunto⁶ indica a posição de um pixel preto existente sobre um fundo branco, ou vice-versa.

Apresenta-se a seguir alguns operadores morfológicos binários, dentre eles os principais operadores da morfologia: *dilatação* e *erosão*. Estes operadores

⁵Ou malha de Manhattan

⁶Eventualmente chamado de imagem

são usados na definição de outros operadores apresentados neste capítulo.

Por convenção, define-se o conjunto B como sendo o *elemento estruturante* e o conjunto A como o conjunto que se deseja processar.

1.4.1 Dilatação

Dados dois conjuntos A e B , diz-se que um ponto y pertence à dilatação do conjunto A pelo conjunto B , representada por $\delta_B(A)$, quando o conjunto transladado B_y toca o conjunto A , isto é, $\{y : A \cap B_y \neq \emptyset\}$. Pela equação (1.5) tem-se que:

$$\delta_B(A) = \{y : A \cap B_y \neq \emptyset\} = A \oplus \check{B} \quad (1.10)$$

Pode-se reconhecer na equação (1.10) que a dilatação de A por B equivale a Soma da Minkowski com \check{B} . De fato, se o conjunto B for invariante em relação a simetria, como no exemplo da **Figura 1.11**, a Soma de Minkowski e a dilatação são equivalentes. A parte mais escura, na imagem da direita da **Figura 1.11**, é o que foi **acrescentado** ao conjunto A original.

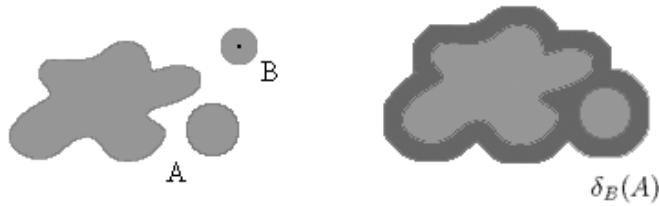


Figura 1.11: Dilatação do conjunto A pelo EE B .

Assim como a Soma de Minkowski, a dilatação possui várias definições equivalentes. A equação (1.11) apresenta uma definição encontrada em [14, 31].

$$\delta_B(A) = \bigcup_{b \in \check{B}} A_b \quad (1.11)$$

1.4.2 Erosão

Ao dilatar um conjunto A por um conjunto B , não só o conjunto A é transformado, mas também o seu complemento. Vai-se considerar o que acontece com o conjunto A quando dilata-se o conjunto A^c pelo conjunto B . Pela equação (1.7) e pela dualidade entre a Soma e a Subtração de Minkowski, tem-se como relacionar A com seu complemento:

$$\delta_B(A^c) = (A^c \oplus \check{B})^c = A \ominus \check{B} = \bigcap_{b \in \check{B}} A_b = \{x : B_x \subset A\} \quad (1.12)$$

Ou seja, o ato de dilatar o conjunto A^c faz com que o conjunto A seja também transformado pelo conjunto B , a esta transformação dá-se o nome de **erosão**. Representa-se a erosão do conjunto A pelo conjunto B por $\varepsilon_B(A)$.

Pode-se entender a erosão como um “encaixe”, isto é, a erosão de um conjunto A por um EE B , representada por $A \ominus \check{B}$, é o conjunto formado pelos elementos de A tais que o EE B posicionado nestes elementos cabem completamente em A . Esta característica pode ser reconhecida na equação (1.12) através da igualdade:

$$\varepsilon_B(A) = A \ominus \check{B} = \{x : B_x \subset A\} \quad (1.13)$$

Na **Figura 1.12** observa-se a erosão do conjunto A apresentado na **Figura 1.11** pelo mesmo conjunto B apresentado nessa figura. A parte mais escura, na imagem central, representa o que foi removido do conjunto A original.

Assim como na dilatação, é possível reconhecer na erosão a Subtração de Minkowski. Pelo fato de que a Soma e Subtração de Minkowski serem duais com respeito ao complemento, conclui-se que a erosão e a dilatação compartilham esta mesma propriedade [23, 31].



Figura 1.12: Erosão do conjunto A pelo EE B .

1.4.3 Propriedades da Dilatação e Erosão

(a) Comutatividade

É fácil verificar que a *dilatação é comutativa*. Pela equação (1.10) e pela comutatividade da interseção, tem-se que

$$\delta_B(A) = A \oplus \check{B} = \check{B} \oplus A = \delta_A(B). \quad (1.14)$$

No caso da erosão, esta propriedade não é verdadeira, isto é, a *erosão não é comutativa*. Apenas no caso em que $A = \check{B}$ esta propriedade será válida.

(b) Elemento Estruturante como um ponto

Seja $x \in E$ tal que $B = \{x\}$. Pelas equações (1.11) e (1.13) tem-se que:

$$\delta_B(A) = \varepsilon_B(A) = A_x \quad (1.15)$$

em outras palavras, tanto a erosão quanto a dilatação do conjunto A pelo elemento estruturante unitário B são iguais a translação do conjunto A pelo ponto x . Observa-se que:

$$A \oplus \{o\} = A \ominus \{o\} = A.$$

é resultado imediato da equação (1.15)

(c) Distributividade

A dilatação possui a propriedade distributiva com a união, ou seja

$$\delta_{B \cup B'}(A) = \delta_B(A) \cup \delta_{B'}(A). \quad (1.16)$$

onde B e B' são dois EE quaisquer. Pela dualidade tem-se ainda

$$\varepsilon_{B \cup B'}(A) = \varepsilon_B(A) \cap \varepsilon_{B'}(A). \quad (1.17)$$

e

$$\varepsilon_B(A \cap C) = \varepsilon_B(A) \cap \varepsilon_B(C). \quad (1.18)$$

onde C é um conjunto binário como A e B .

Estas três equações são muito úteis para as aplicações que utilizam a morfologia matemática. As equações (1.16) e (1.17) implicam que um conjunto pode ser dilatado ou erodido tomando o EE por suas partes e através da união e interseção combinar os resultados. Já a equação (1.18) é reconhecida como *conhecimento local* e será tratada mais a diante no **Capítulo 4**.

Pode-se comparar as equações (1.16), (1.17) e (1.18) com as seguintes desigualdades de conjuntos:

$$\delta_{B \cap B'}(A) \subset \delta_B(A) \cap \delta_{B'}(A)$$

$$\varepsilon_{B \cap B'}(A) \supset \varepsilon_B(A) \cup \varepsilon_{B'}(A)$$

$$\varepsilon_B(A \cup Z) \supset \varepsilon_B(A) \cap \varepsilon_B(Z)$$

(d) Interatividade

Em [31] é possível observar que dadas as equações (1.11) e (1.13) tem-se que:

$$\varepsilon_{B'}(\varepsilon_B(A)) = \varepsilon_{B \oplus B'}(A) \quad (1.19)$$

$$\delta_{B'}(\delta_B(A)) = \delta_{B \oplus B'}(A)$$

Mais uma vez se está frente a uma ferramenta morfológica muito poderosa. A equação (1.19) implica na decomposição do EE B , em uma soma de Minkowski de um grupo de EE B_i 's mais simples. A força deste resultado consiste em que, dependendo do EE, pode ocorrer uma economia de translações sofridas por este último [14], ou ainda uma diminuição da complexidade deste, isto é, um EE *bidimensional* pode ser decomposto em outros elementos estruturantes *unidimensionais*. Uma possibilidade é proceder de maneira “inversa”, isto é, partir de EE, por exemplo, bidimensionais e alcançar outros contidos em espaços de dimensões maiores [31, 32].

(e) Crescente

Tanto a dilatação quanto a erosão são operações crescentes, isto é, dados dois conjuntos $A, A' \in \mathcal{P}(E)$, com $A \subset A'$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_B(A) &\subset \varepsilon_B(A') \\ \delta_B(A) &\subset \delta_B(A')\end{aligned}\tag{1.20}$$

e pela dualidade dessas operações em relação ao espaço subjacente (\mathbb{Z}^2), tem-se que:

$$B \subset B' \Rightarrow \varepsilon_B(A) \supset \varepsilon_{B'}(A) \Rightarrow \delta_B(A) \subset \delta_{B'}(A)\tag{1.21}$$

(f) Extensividade e Anti-extensividade

Em álgebra, uma operação é dita ser **extensiva** se o conjunto resultante da operação for superconjunto do conjunto inicial, e é chamada de **anti-extensiva** no caso em que o conjunto resultante é subconjunto do conjunto inicial [31]. Pelas equações (1.4), (1.6), (1.10) e (1.13), é imediato verificar que a *dilatação é uma operação extensiva*, isto é:

$$\delta_B(A) \supset A\tag{1.22}$$

e que a *erosão* é uma operação *anti-extensiva*, ou seja

$$\varepsilon_B(A) \subset A. \quad (1.23)$$

1.4.4 Abertura e Fechamento

Normalmente, após erodir um conjunto A por um elemento estruturante B , não se consegue reconstruir o conjunto original através de uma dilatação do conjunto resultante pelo conjunto B . Pequenas partes da imagem podem ter sido filtradas durante a erosão, fazendo com que o produto final desta composição apresente menos detalhes. Se o resultado for considerado como sendo o que é “essencial” em nosso conjunto de entrada, isso pode ser um ponto positivo. De fato, o novo conjunto criado apresenta características morfológicas extremamente ricas [31]. Uma operação morfológica chamada de *abertura* é definida por essa forma e o novo conjunto processado pelo elemento estruturante B chama-se *conjunto aberto* por B .

Definições

Dado um conjunto A , define-se a **abertura** do conjunto A pelo EE B , e denota-se A_B , por:

$$A_B = \delta_B(\varepsilon_B(A)) = (A \ominus \check{B}) \oplus B \quad (1.24)$$

De forma similar ao utilizado para criar a abertura, pode-se realizar a operação “inversa”, isto é, primeiro aplica-se a dilatação e depois a erosão. Esta operação morfológica é conhecida como **fechamento** de A com respeito a B e representada por A^B . Isto é:

$$A^B = \varepsilon_B(\delta_B(A)) = (A \oplus \check{B}) \ominus B \quad (1.25)$$

A **Figura 1.13** ilustra o processo da composição da abertura e do fechamento de uma imagem binária através da dilatação e da erosão, tendo um disco como EE.

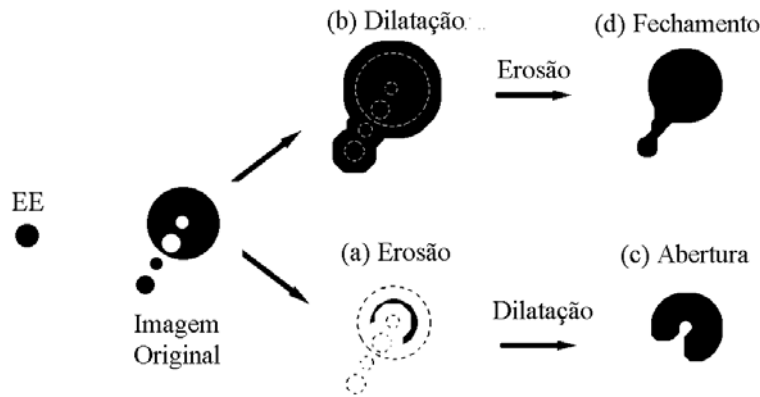


Figura 1.13: Composição da Abertura e Fechamento através de Dilatações e Erosões.

As operações de fechamento e abertura são *duais* com respeito ao complemento, ou seja, se A^c for o complemento do conjunto A em relação ao espaço subjacente, então:

$$(A^c)_B = (A^B)^c \quad \text{e} \quad (A_B)^c = (A^c)^B \quad (1.26)$$

Interpretação Geométrica

Seja x um ponto pertencente a A_B , pela definição (1.24) e pela definição da dilatação (1.10) tem-se que o conjunto \check{B}_x toca o conjunto $A \ominus \check{B}$, isto é:

$$\check{B}_x \cap (\varepsilon_B(A)) \neq \emptyset. \quad (1.27)$$

Seja y um ponto nessa interseção, como y pertence à \check{B}_x , tem-se que

$$y \in \check{B}_x \Leftrightarrow x \in B_y \quad (1.28)$$

e como y também pertence a $\varepsilon_B(A)$ tem-se por (1.13) que

$$B_y \subset A \quad (1.29)$$

Em outras palavras, A_B é composto por todos os pontos do espaço em que as translações de B por tais pontos estejam completamente contidas em A , isto é:

$$A_B = \bigcup \{B_y : y \in E, B_y \subset A\} \quad (1.30)$$

Esta operação suaviza os contornos de A . Na **Figura 1.13** a abertura transformou o “quase caminho” existente em um vale, separou partículas ligadas por caminhos mais estreitos que o elemento estruturante e eliminou partículas menores que o EE [14, 31].

Observe pela **Figura 1.14** que o processo de abertura se assemelha a “encaixar” o EE por dentro da imagem, removendo os pontos que o EE não consegue atingir, como se o EE fosse uma “bola rolante” que passa internamente pela imagem e suaviza sua superfície de acordo com a forma do EE.

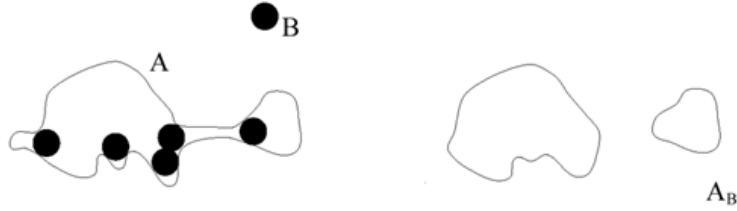


Figura 1.14: Abertura, A_B , do conjunto A pelo conjunto B [29].

Suponha $x \in A^B$, por (1.12) tem-se que $\check{B}_x \subset (\delta_B(A))$. Pela definição (1.10) tem-se que

$$\check{B}_x \subset \{y : B_y \cap A \neq \emptyset\} \quad (1.31)$$

E não é difícil perceber que

$$y \in \check{B}_x \Leftrightarrow x \in B_y. \quad (1.32)$$

Ou seja, para qualquer ponto y pertencente a \check{B}_x , existe um $x \in B_y$ tal

que B_y toca A . Em outras palavras *um ponto x pertence à A^B , se e somente se, todas as translações B_y , de B , que contêm x , pertencerem a A* , isto é:

$$A^B = \{x : \forall B_y \ni x, B_y \cap A \neq \emptyset\}. \quad (1.33)$$

Este procedimento possui a propriedade de preencher saliências estreitas, eliminar buracos menores que o elemento estruturante e conectar partículas próximas [14, 31].

De maneira similar ao processo de abertura, o fechamento, observado na **Figura 1.15**, pode ser visto como um “encaixe”, mas ao invés de encaixar o EE por dentro da imagem, este é encaixado “por fora”. Dessa forma, pontos contidos em locais que não podem ser alcançados pelo EE são adicionados à imagem, isto é, a “bola rolante” passa externamente pela imagem suavizando sua superfície.

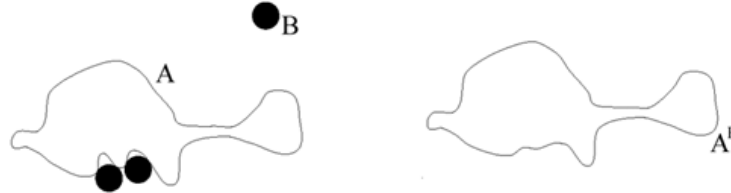


Figura 1.15: Fechamento, A^B , do conjunto A pelo conjunto B [29].

Propriedades Algébricas

Tanto a abertura quanto o fechamento possuem três propriedades principais. Ambas as operações são crescentes e idempotentes. O fechamento é extensivo e a abertura é anti-extensiva. Estas características são vistas a seguir.

Para todo $x \in A_B$, tem-se por (1.28) e (1.29) que existe pelo menos um y onde $x \in B_y$ de forma que $B_y \subset A$. Em outras palavras, existe uma

translação do conjunto B que contém x contido em A . Tem-se com isso que $A_B \subset A$, isto é, a *abertura é anti-extensiva*. No caso de $A \subset A'$, isso implica em $B_y \subset A'$ e dessa forma $x \in A'_B$. Ou seja, $A_B \subset A'_B$ logo pode-se afirmar que a *abertura é crescente*.

Falta verificar a idempotência. Pela anti-extensividade da abertura, tem-se:

$$(A_B)_B \subset A_B \quad (1.34)$$

Mas, pela definição (1.24)

$$(A_B)_B = \underbrace{\{[(A \ominus \check{B}) \oplus B] \ominus \check{B}\}}_D \oplus B.$$

Dada a definição (1.25) verifica-se que $D = (A \ominus \check{B})^{\check{B}}$. Pela dualidade entre a abertura e o fechamento tem-se que $A^B \supset A$ (extensividade do fechamento) e com isso:

$$(A_B)_B \supset (A \ominus \check{B}) \oplus B = A_B \quad (1.35)$$

Por (1.34) e (1.35) tem-se que

$$(A_B)_B = A_B$$

ou seja, a *abertura é idempotente*.

Pela dualidade do fechamento em relação a abertura tem-se que o fechamento A^B é extensivo, crescente e idempotente, isto é:

$$\begin{aligned} A^B \supset A & \quad (\text{extensivo}) \\ A \subset A' \Rightarrow A^B \subset A'^B & \quad (\text{crescente}) \\ (A^B)^B = A^B & \quad (\text{idempotente}) \end{aligned}$$

1.5 Morfologia em Níveis de Cinza

A morfologia matemática tem se mostrado uma ferramenta poderosa e cada vez mais popular no processamento de imagens binárias.

Ao processar uma imagem colorida ou em níveis de cinza através da morfologia matemática binária, deve-se escolher um nível tonal e binarizar a imagem antes de utilizar os operadores morfológicos para extrair as informações da imagem. Este procedimento tende a descartar uma parte da informação contida nesta imagem. Geralmente, este pré-processamento tem que ser bem avaliado pelo morfologista para que a perda seja aceitável. A *morfologia matemática em níveis de cinza* atua nas situações em que nenhuma perda é aceitável.

Na morfologia em níveis de cinza é necessário descobrir os limites, inferior e superior, que um pixel pode assumir em uma imagem. O resultado final de um pixel processado depende da combinação destes limites e dos limites da vizinhança desse pixel, definida pelo elemento estruturante [14].

A morfologia em níveis de cinza trata de funções no espaço n -dimensional. Para sinais, $n = 1$ e para imagens $n = 2$. Estas funções atribuem um nível de cinza para cada valor de suas coordenadas. Com o intuito de manter a notação mais simples, a morfologia em níveis de cinza é desenvolvida utilizando inicialmente funções unidimensionais, ou seja, sinais. A extensão para imagens é direta, bastando apenas tratar pontos na reta como pontos no plano e com isso a teoria passa a agir sobre o domínio da imagem. Esta característica mostra que a teoria é independente da dimensionalidade do domínio [13].

Nesta seção, apresenta-se as operações da morfologia em níveis de cinza equivalentes às operações da morfologia binária discutidas na seção anterior.

1.5.1 Conceitos Básicos

As imagens e sinais serão tratadas como Funções Euclidianas de valores reais, ao invés de funções discretas, com o intuito de criar uma maior intuição geométrica dos operadores da morfologia em níveis de cinza. Apesar das diferenças entre a morfologia em níveis de cinza euclidiana e a morfologia em níveis de cinza digital, as suposições implícitas assumidas serão sempre asseguradas no caso digital [13].

Mais formalmente, estas funções (quer sejam sinais ou imagens) são analisadas através de seus gráficos⁷. O gráfico G de uma função f , digital com valores positivos, é o conjunto formado pelos pontos $(x, f(x))$, isto é

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{Z}^n \text{ e } f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Antes de definir os operadores morfológicos em níveis de cinza, faz-se necessário definir para a morfologia em níveis de cinza os equivalentes das operações binárias de translação, subconjunto, união, interseção, complemento e reflexão.

Translação

Um sinal ou função pode ser deslocado em duas direções. Um deslocamento horizontal à direita (ou nos valores x), denominado *shift*, de um sinal f por um vetor α é definido por

$$f_\alpha(x) = f(x - \alpha).$$

Um deslocamento vertical (ou em $f(x)$), denominado *offset*, de um sinal f por um vetor β é definido por

$$(f + \beta)(x) = f(x) + \beta.$$

⁷Uma função pode ser vista como um conjunto através de seu gráfico.

Quando aplica-se um *shift* de α e um *offset* de β ao mesmo tempo em um sinal, obtem-se a **translação em níveis de cinza** $f_\alpha + \beta$ dada por:

$$(f_\alpha + \beta)(x) = f(x - \alpha) + \beta. \quad (1.36)$$

Na **Figura 1.16** pode-se observar um sinal f que sofreu um *shift* de 1 (**Figura 1.16b**), um *offset* de 1 (**Figura 1.16c**) e a translação em níveis de cinza $f_1 + 1$ (**Figura 1.16d**).

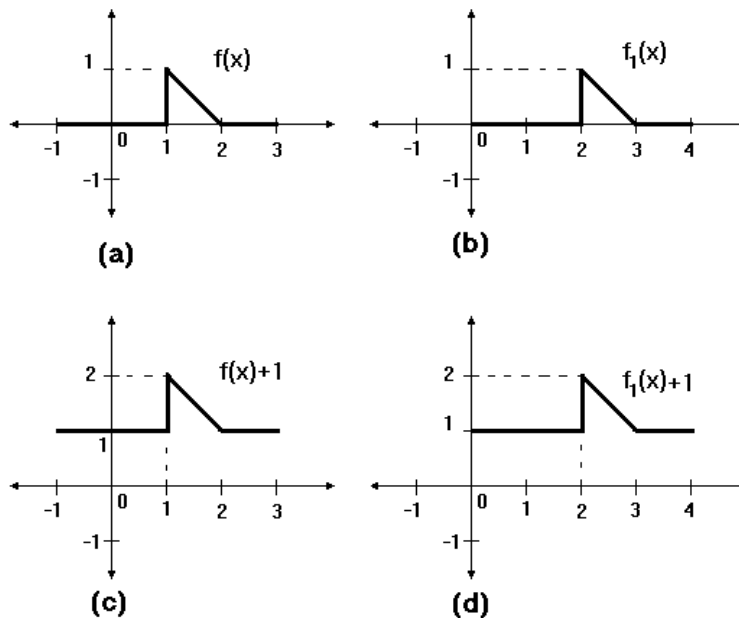


Figura 1.16: Exemplo de *shift*, *offset* e translação em níveis de cinza do sinal f .

Subconjunto

Na morfologia binária, a noção de subconjunto indica uma relação de ordem entre duas imagens. Faz-se necessário encontrar uma noção análoga para a morfologia em níveis de cinza, define-se assim a noção de “**embaixo**” da seguinte forma: Sejam f e g dois sinais com domínios D_f e D_g respectiva-

mente. Diz-se que g está embaixo de f , e representa-se por $g \leq f$, se forem asseguradas as seguintes condições:

- i. $D_g \subset D_f$.
- ii. $\forall x \in D_g$ tem-se que $g(x) \leq f(x)$.

Na **Figura 1.17a** tem-se que $g \leq f$, mas na **Figura 1.17b**, g não está embaixo de f pois existe $x \in D_g$ tal que $g(x) > f(x)$. Na **Figura 1.17c**, g não está embaixo de f devido à $D_g \not\subset D_f$. Em imagens pode-se usar esta noção associada a cada linha e coluna da imagem, fazendo o “embaixo” equivaler à “com tom de cinza menor”.

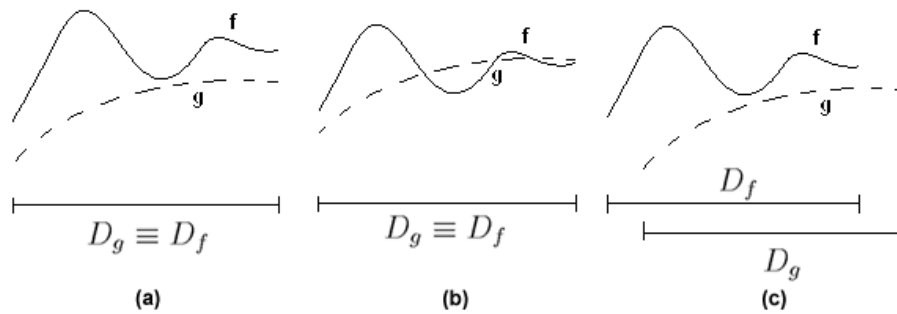


Figura 1.17: Relação de ordem entre sinais.

União e Interseção

A interseção e união são os elementos centrais da morfologia binária. Todos os operadores básicos da morfologia binária podem ser representados através de uniões e/ou interseções. Define-se os análogos, na morfologia em níveis de cinza, da união e interseção como sendo **máximo** e **mínimo** respectivamente ⁸.

⁸No caso de funções reais, o máximo e mínimo pontual são chamados de **supremo** e **ínfimo**. [34]

Dados dois sinais f e g , define-se o mínimo pontual de f e g da seguinte maneira: Se x pertence à interseção dos domínios das funções, isto é, $x \in D_f \cap D_g$, então

$$(f \wedge g)(x) = \min \{f(x), g(x)\} \quad (1.37)$$

no caso em que $x \notin D_f \cap D_g$ tem-se que $f \wedge g$ não está definida em x .

Define-se o máximo de maneira similar ao mínimo. Dado um ponto na união de dois conjuntos, este ponto pode pertencer aos dois conjuntos ao mesmo tempo ou a apenas um dos conjuntos. Segundo esta particularidade, o máximo pontual entre dois sinais f e g é definido de acordo com o domínio ao qual este ponto pertence, isto é, dado um ponto $x \in D_f \cup D_g$ tem-se que o máximo de f e g é dado por

$$(f \vee g)(x) = \max \{f(x), g(x)\}. \quad (1.38)$$

No caso em que $x \in D_f$ e $x \notin D_g$ então tem-se $(f \vee g)(x) = f(x)$. Do contrário, se $x \notin D_f$ e $x \in D_g$ então $(f \vee g)(x) = g(x)$.

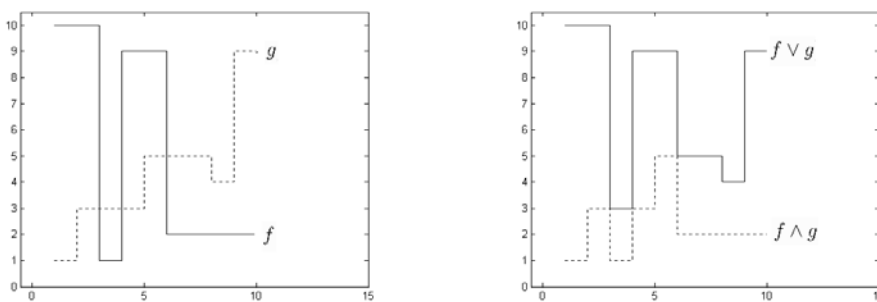


Figura 1.18: Duas funções f e g e seus máximo e mínimo.

A **Figura 1.18** mostra dois sinais f e g e o máximo e mínimo destes sinais. A **Figura 1.19** mostra este conceito estendido para imagens (nesse

caso os níveis claros são considerados maiores que os tons escuros).

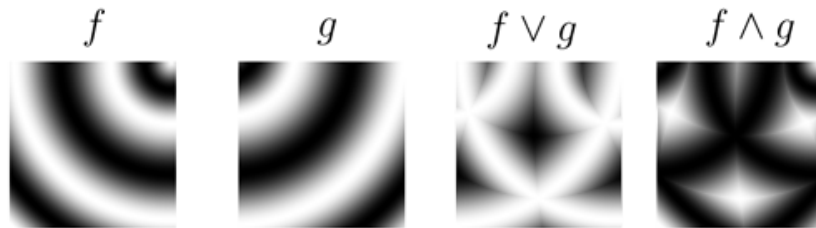


Figura 1.19: Duas imagens f e g e seus máximo e mínimo.

Complemento

O complemento de uma imagem em tons de cinza, representado por f^c , é definido para cada x como sendo o valor máximo de intensidade que um pixel pode assumir menos o valor da imagem da função no ponto x [34]. Ou seja

$$f^c(x) = t_{\max} - f(x). \quad (1.39)$$

Na **Figura 1.20(a)** pode-se observar o complemento de um sinal f e em **Figura 1.20(b)** o efeito dessa operação em imagens com tons de cinza, onde a imagem tem seus níveis invertidos.

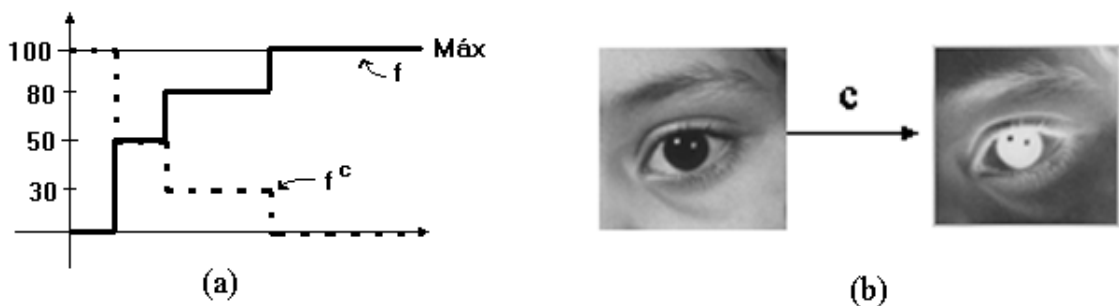


Figura 1.20: Complemento de um sinal (a) e de um detalhe da **Figura 1.7** (b).

Note que o complemento pode ser interpretado como a **negação** da imagem, bastando para isso fazer $t_{\max} = 0$ [13].

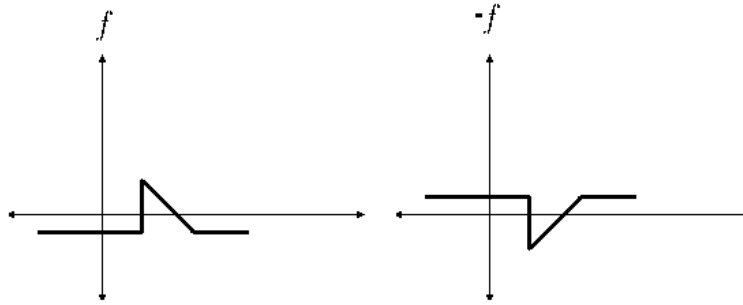


Figura 1.21: Complemento de um sinal visto como a negação do sinal.

Reflexão ou simetria em relação à posição

A reflexão de um sinal f em torno do eixo vertical é definida por

$$\check{f}(x) = f(-x). \quad (1.40)$$

Pode-se ver um exemplo da reflexão de um sinal na **Figura 1.22**.

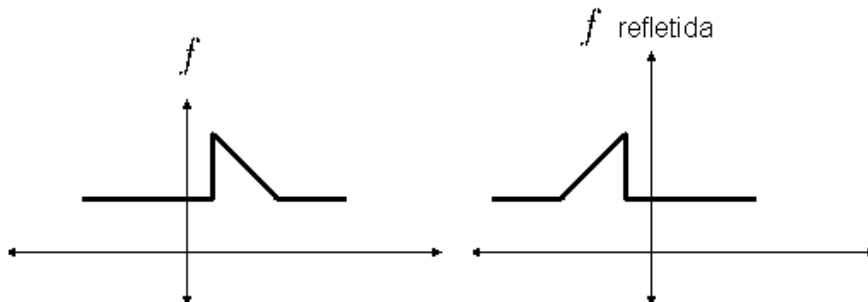


Figura 1.22: Reflexão do sinal f .

1.5.2 Umbra

A **Umbra**, também chama de subgráfico por alguns autores, possui a característica de relacionar a morfologia em níveis de cinza com a morfologia

binária. As técnicas de transformação da umbra foram essenciais durante o início da formulação teórica da morfologia em níveis de cinza [13].

Define-se a umbra de um sinal f como o conjunto de pontos abaixo do gráfico de f , limitados pelo domínio de f , incluindo os pontos do gráfico⁹, isto é:

$$U[f] = \{(x, y) : x \in D_f \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}. \quad (1.41)$$

Sabe-se que uma imagem em tons de cinza pode ser visualizada como um DEM, como pode ser observada na **Figura 1.9**. Apesar desse modelo de visualização ser representada no espaço tridimensional (bidimensional no caso de um sinal), a imagem não possui volume, é apenas uma superfície irregular, e portanto com apenas 2 dimensões.

Por definição, a umbra de uma imagem engloba os pontos do espaço que estão abaixo do gráfico da mesma, adicionando dessa forma mais uma dimensão à imagem. Uma imagem em tons de cinza passa a ter um volume (ou uma área no caso de um sinal) definido entre o domínio da imagem e seu DEM. Esta nova componente na dimensão da imagem não é homogênea às outras componentes, isto é, a umbra da imagem pertence ao espaço \mathbb{Z}^{2+1} como descrito na **Seção 1.2.2** [34].

Assim a umbra de uma imagem n -dimensional é $n + 1$ -dimensional. Nas **Figuras 1.23** e **1.24** estas características podem ser observadas tanto para um sinal como para uma imagem em tons de cinza.

Outro conceito importante é o de **superfície** (ou cobertura). A importância deste novo conceito reside no fato de que a superfície desempenha um papel essencial na característica que a umbra possui de correlacionar as morfologias binária e em níveis de cinza. Define-se a superfície de um conjunto A como sendo o conjunto formado pelos pontos (x, y) pertencentes ao

⁹Alguns autores não limitam a umbra ao domínio da função

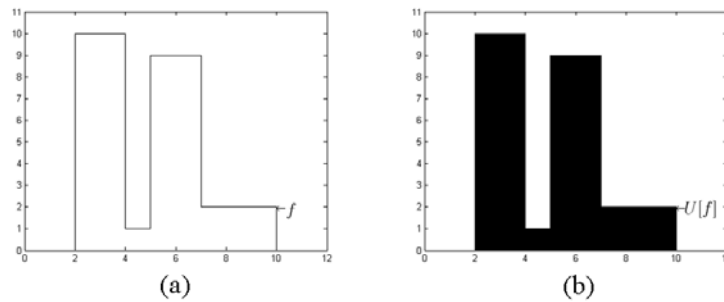


Figura 1.23: (a) Sinal f e (b) umbra de (a).

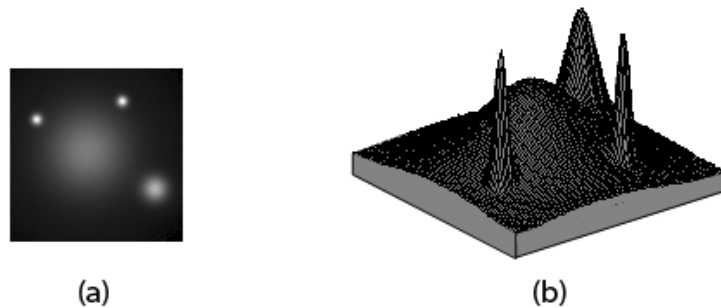


Figura 1.24: (a) Imagem em tons de cinza (b) umbra de (a).

conjunto A com $y = \text{máx}(f(x))$. Formalmente representa-se por:

$$S[A] = \{(x, y) \in A : y \geq z \forall (x, z) \in A\}. \quad (1.42)$$

Como se vê a umbra de um sinal f como um conjunto, tem-se que a superfície da umbra do sinal f é na verdade o gráfico desse sinal, ou seja:

$$S[U[f]] = G[f] \quad (1.43)$$

Neste sentido, as operações morfológicas em níveis de cinza podem ser efetuadas considerando a umbra do sinal e do EE, aplicando a operação binária equivalente e por último extraindo a superfície do resultado. Dessa forma a erosão de um sinal f por um EE g poderia ser obtida através da

superfície da erosão da umbra do sinal f pela umbra do EE g . Ou seja:

$$\varepsilon_g(f) = S[\varepsilon_{U[g]}(U[f])]. \quad (1.44)$$

e a dilatação de um sinal f pelo EE g seria equivalente à superfície da dilatação da umbra do sinal f pela umbra do EE g . Formalizando tem-se:

$$\delta_g(f) = S[\delta_{U[g]}(U[f])]. \quad (1.45)$$

Este processo é exemplificado graficamente pela **Figura 1.25** onde em **(a)** vê-se o sinal f e EE g , em **(b)** a umbra do sinal f , em **(c)** a umbra do EE, em **(d)** a dilatação da umbra do sinal f , em **(e)** a erosão da umbra do sinal f e em **(f)** a relação entre a erosão e dilatação do sinal f pela erosão e dilatação de sua umbra.

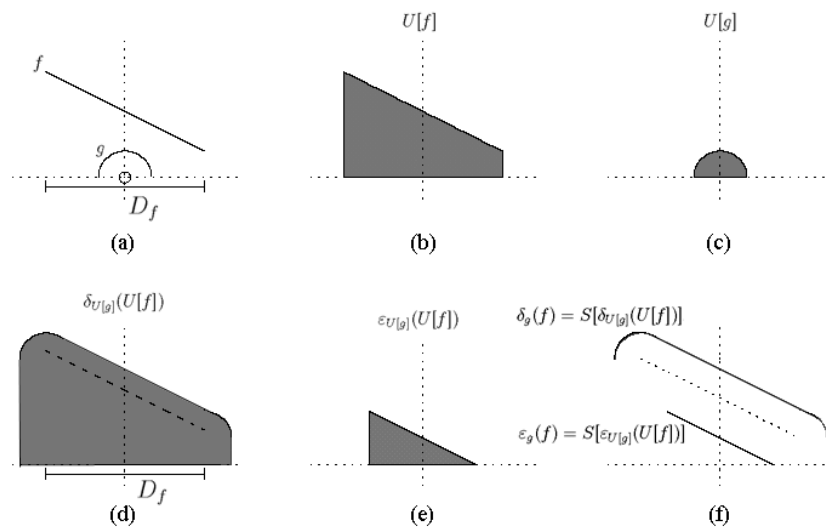


Figura 1.25: Relação entre a erosão e dilatação de um sinal com a erosão e dilatação da sua umbra.

1.5.3 Erosão

Viu-se na seção 1.4.2 que pode-se definir a erosão binária de várias formas, mas o ponto central destas definições lida com a interpretação geométrica

de “encaixe”. Pode-se “ver” um sinal (ou uma imagem) em tons de cinza através de sua topografia, dessa forma, a interpretação do encaixe é perfeita para definir as operações em tons de cinza [13].

Sob esta perspectiva, define-se pontualmente a **erosão** de um sinal f por um sinal g , que desempenha o papel do EE, pelos pontos onde pode-se posicionar g e este encaixar em f por baixo (**Figura 1.26**). Este “encaixe por baixo” pode ser interpretado localmente como sendo a menor diferença entre o valor do sinal no ponto x e o valor do EE, posicionado em x , sobre D_{g_x} . Tem-se assim:

$$\varepsilon_g(f)(x) = \min \{f(s) - (g_x)(s) : s \in D_{g_x}\} \quad (1.46)$$

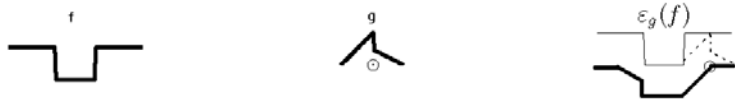


Figura 1.26: Efeito do “encaixe por baixo” na erosão do sinal f pelo EE g .

A equação (1.46), encontrada em [13] pode ser reescrita para uma forma mais comum, encontrada em [16, 23, 31, 34]:

$$\varepsilon_g(f)(x) = \min \{f(x + s) - g(s) : (x + s) \in D_f \text{ e } s \in D_g\}. \quad (1.47)$$

Uma propriedade fundamental pode ser observada na **Figura 1.27**: o domínio da erosão do sinal f pelo sinal g é idêntico ao obtido pela erosão binária de D_f pelo D_g .

A equação (1.47) pode ser diretamente estendida para imagens, assumindo a seguinte forma:

$$\varepsilon_g(f)(x, y) = \min \{f(x + s, y + t) - g(s, t) : (x + s), (y + t) \in D_f \text{ e } (s, t) \in D_g\}. \quad (1.48)$$

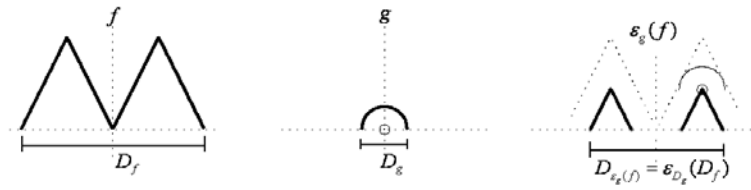


Figura 1.27: Erosão de um sinal f pelo EE g .

Observe na **Figura 1.28** o efeito que a erosão exerce em uma imagem em tons de cinza. A imagem resultante tende a ser mais escura que a imagem original e pequenos detalhes claros podem ser reduzidos ou eliminados. Na **Figura 1.28** a imagem de entrada **(a)** foi erodida por um EE circular(plano) gerando assim a imagem **(b)**. A imagem **(c)** compara o efeito da erosão através do DEM de **(a)** e **(b)**.

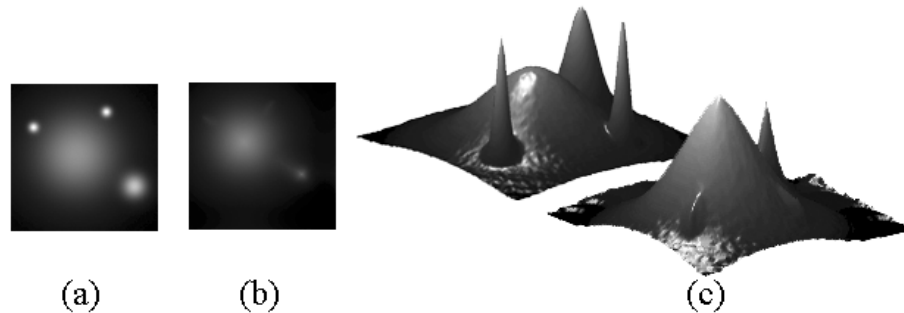


Figura 1.28: Resultado da erosão em níveis de cinza por um EE circular plano.

Pode-se estender a definição global de erosão apresentada na forma binária pela equação (1.12), para tons de cinza por:

$$\varepsilon_B(f) = \bigwedge_{b \in B} f_b \quad (1.49)$$

ou seja, o valor do ponto erodido x é o mínimo dos valores do sinal na vizinhança definida pelo EE refletido em x .

Observe que utiliza-se um EE plano, no caso em que o EE também é

um sinal (ou imagem) em tons de cinza, a (1.49) deve assumir a forma apresentada em [13]:

$$\varepsilon_g(f) = \wedge \{f_x - \check{g}(x) : x \in D_{\check{g}}\}. \quad (1.50)$$

Em [13] encontra-se um exemplo da facilidade de computar a erosão em tons de cinza através da abordagem apresentadas nas equações (1.50) e (1.49).

1.5.4 Dilatação

Tal como no caso binário, a **dilatação** é uma operação dual da erosão. Dada esta dualidade, pode-se representar a dilatação também em termos de seu “encaixe”. Define-se pontualmente a dilatação de um sinal f pelo EE g pelos pontos onde deve-se posicionar o EE refletido e este “encaixar” no sinal por cima, como é mostrada na **Figura 1.29**. Interpreta-se pontualmente este “encaixe por cima” como sendo o máximo obtido pela soma do valor do sinal no ponto x com o valor do EE, posicionado em x , aplicado sobre D_{g_x} , esta interpretação pode ser observada na **Figura 1.30** [13]. Formalmente, tem-se:

$$\delta_g(f)(x) = \max \{f(s) + (g_x)(s) : s \in D_{g_x}\} \quad (1.51)$$

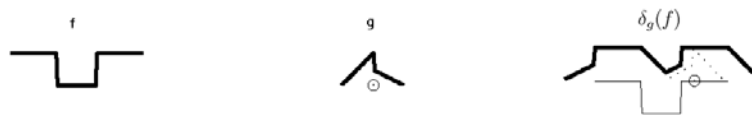


Figura 1.29: “Encaixe por cima” na dilatação do sinal f pelo EE g [13].

Pode-se ainda representar a dilatação em termos da Soma de Minkowski:

$$\delta_g(f) = \vee \{f_x + \check{g}(x) : \forall x \in D_{\check{g}}\}. \quad (1.52)$$

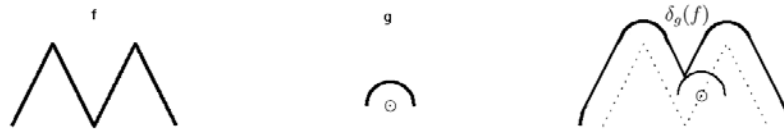


Figura 1.30: Dilatação do sinal f pelo EE g .

A equação (1.52) pode ser estendida para imagens da seguinte forma:

$$(\delta_g(f))(s, t) = \max \{f(s - x, t - y) + g(x, y) : (s - x), (t - y) \in D_f \text{ e } (x, y) \in D_g\} \quad (1.53)$$

Considerou-se a equação (1.52) na sua forma pontual com o intuito de apresentar a dilatação em tons de cinza em sua forma mais comumente encontrada.

Pela **Figura 1.31** pode-se observar que a dilatação tem o efeito de clarear a imagem e que detalhes escuros podem ser reduzidos ou eliminados [16]. A imagem (b) é o resultado da dilatação de (a) por um EE circular(plano) e em (c) tem-se a comparação topográfica dos efeitos da dilatação.

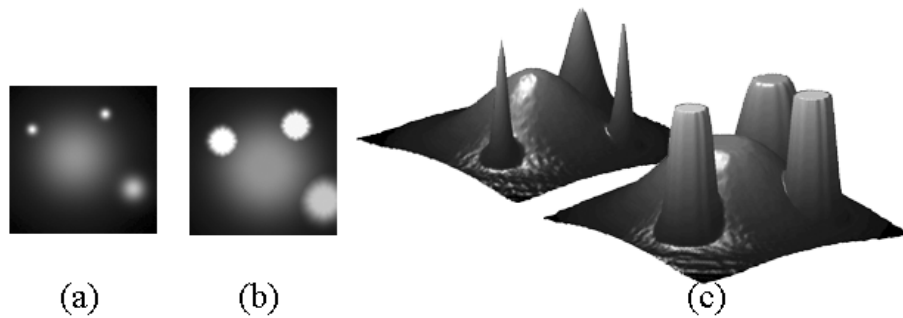


Figura 1.31: Resultado da dilatação cinza por um EE circular plano

No caso em que o EE é plano, a equação (1.52) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta_g(f) = \bigvee_{b \in \check{B}} f_b \quad (1.54)$$

em outras palavras, o valor do ponto x dilatado é o máximo dos valores do sinal na vizinhança definida pelo EE posicionado em x .

A formulação (assim como na erosão) através da Soma de Minkowski possui a característica desejada de ser facilmente computável [13].

1.5.5 Abertura e Fechamento

Uma vez definida a erosão e a dilatação em níveis de cinza tem-se as ferramentas necessárias para compor os outros operadores morfológicos, **abertura** e **fechamento**.

Define-se a **abertura** de uma imagem f pelo EE g de forma equivalente ao definido no contexto binário:

$$f_g = \delta_g(\varepsilon_g(f)) \quad (1.55)$$

A **Figura 1.32** demonstra a abertura pela composição de uma erosão seguida de uma dilatação.

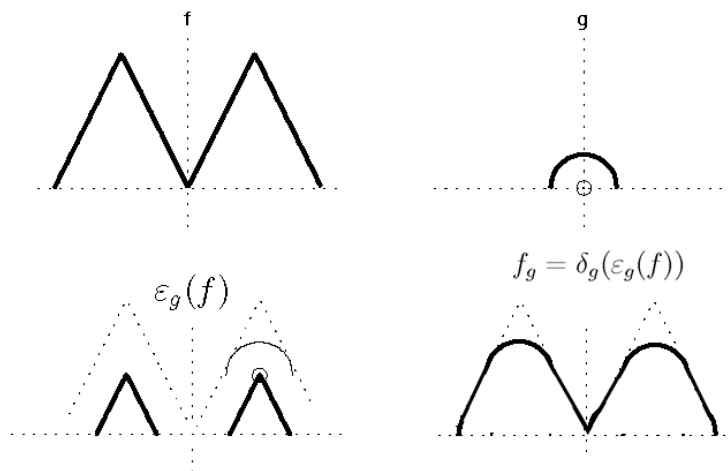


Figura 1.32: Abertura de um sinal f por um EE simétrico g .

Tal como seus equivalentes binários, estes operadores são duais e também podem ser definidos em termos de “encaixe” [13]. Segue a equação análoga

a equação (1.30):

$$f_g = \bigvee \{g_x + y : (g_x + y) \leq f\} \quad (1.56)$$

ou seja, deve-se considerar o máximo de todas as translações em níveis de cinza do EE g que *encaixa embaixo* do sinal f .

A interpretação geométrica gerada pela equação (1.56) indica que deve-se passar o EE *embaixo* do sinal e guardar os pontos onde o EE transladado alcançou seu maior valor. Observe o efeito da “bola rolante” na **Figura 1.32**.

A **Figura 1.33** mostra os efeitos da abertura de uma imagem em tons de cinza por um EE semi-esférico. Observe que a imagem resultante **Figura 1.33b** é muito próxima da imagem inicial **Figura 1.33a**, sendo a diferença entre elas resultante da remoção das pequenas áreas de luminosidade intensa. Como estas áreas são filtradas, depende da forma do EE. Nesta figura a abertura da imagem (a) por um EE circular(plano) resulta na imagem (b). Em (c) faz-se a comparação entre (a) e (b) através de seus DEMs.

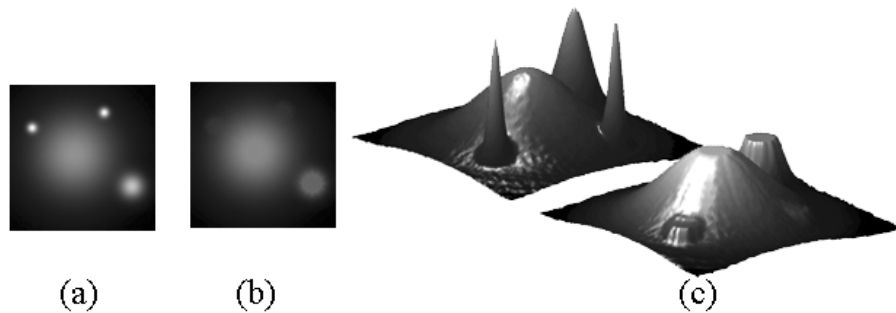


Figura 1.33: Abertura da imagem (a) por um EE circular(plano).

A extensão das características da abertura binária para a abertura em níveis de cinza é imediata, isto é, *a abertura em níveis de cinza é anti-extensiva, crescente e idempotente* [13].

O **fechamento** de uma imagem f pelo EE g é:

$$f^g = \varepsilon_g(\delta_g(f)) \quad (1.57)$$

Considerando o complemento do sinal estas operações se relacionam por:

$$(f^c)_g = (f^g)^c \quad \text{e} \quad (f_g)^c = (f^c)^g \quad (1.58)$$

A equação (1.58) fornece uma interpretação geométrica do fechamento através da abertura de seu complemento, da seguinte forma: opera-se a abertura entre o complemento do sinal e o EE refletido, daí toma-se o complemento desta abertura. A formalização deste procedimento é também fornecida pela equação (1.56).

Observe pela **Figura 1.34** que esta interpretação é equivalente a passar o EE como uma “bola rolante” sobre o gráfico do sinal, uma interpretação idêntica à existente no fechamento binário.

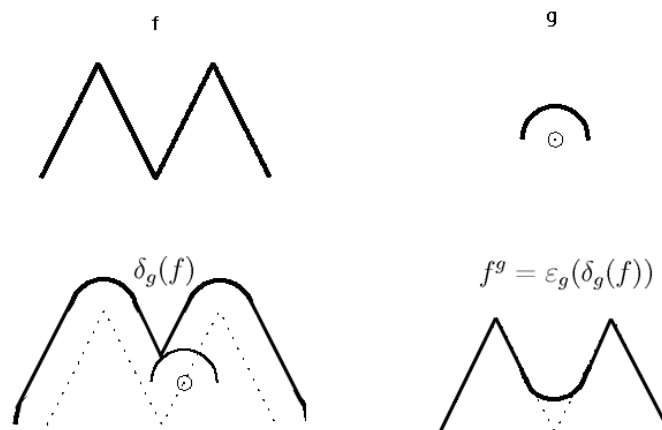


Figura 1.34: Fechamento de um sinal f por um EE simétrico g .

O resultado do fechamento de uma imagem em tons de cinza, de maneira geral, é bem próximo da imagem inicial. As diferenças são encontradas pelo

preenchimento de vales entre picos ou pelo preenchimento das valas. Este preenchimento pode ser observado na **Figura 1.35** onde o vale que existia entre os picos e a elevação menor foi preenchido. Assim como na abertura, o formato deste preenchimento depende da forma do EE. Nesta figura a imagem **(b)** é o resultado do fechamento da imagem **(a)** por uma EE circular(plano). Em **(c)** faz-se a comparação entre **(a)** e **(b)** através de seus DEMs.

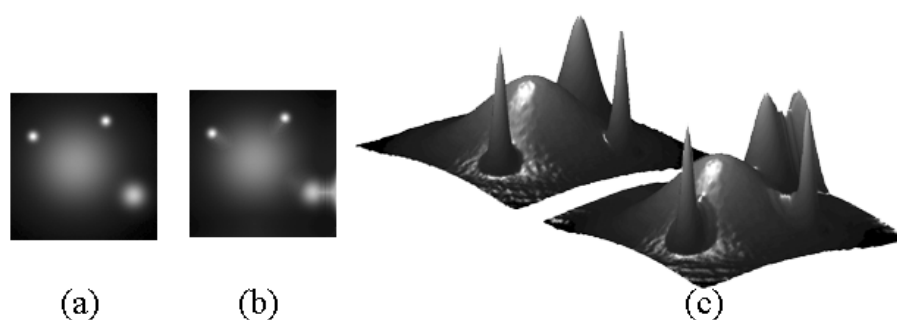


Figura 1.35: Fechamento da imagem **(a)** por uma EE circular(plano).

1.6 Notas Gerais

Este capítulo pode ser caracterizado por tratar de forma distinta a morfologia binária e em níveis de cinza. Apesar delas estarem representadas de forma separadas, pode-se observar a estreita similaridade entre suas definições e a equivalência das propriedades e interpretações geométricas.

De fato, diferenciar a morfologia binária da morfologia em níveis de cinza é desnecessário, pois pode-se caracterizar uma imagem binária como sendo uma imagem níveis de cinza em que o valor máximo de intensidade que um pixel pode assumir é 1. Esta diferenciação foi adotada com uma ferramenta pedagógica para auxiliar na exposição dos conceitos apresentados pois foi dessa forma que o conteúdo foi pesquisado (complexidade crescente). Em

[34] a teoria relativa à morfologia matemática é apresentada como sendo única, sendo alguns conceitos adaptados para cada contexto.

Capítulo 2

Ordenação Colorida

Ao adaptar os operadores morfológicos binários para imagens coloridas, encontra-se um problema: a multidimensionalidade das imagens coloridas. A adaptação dos operadores morfológicos binários para imagens em tons de cinza é imediata, pois basta considerar que a imagem possui mais níveis de intensidade do que apenas o branco e preto das imagens binárias. Nas imagens binárias ou em tons de cinza, pode-se facilmente definir entre duas intensidades diferentes qual é a maior, pois estas intensidades podem ser arrumadas em uma reta, e portanto ordenadas (assumindo maior intensidade aquela que estiver mais distante da origem). Em uma imagem colorida, esta simples tarefa é extremamente complexa e por vezes impossível em determinados espaços de cores. Na **Seção (2.5)** é visto os problemas e os obstáculos que deve-se contornar para definir uma morfologia colorida eficiente. Antes de se preocupar em como definir estes operadores morfológicos tem-se que entender o conceito de “cor”, seu significado e como a mente interpreta esta sensação que ajuda a descrever o mundo em volta.

2.1 Cor

A percepção humana das cores ainda não é completamente compreendida, os processos mentais responsáveis pela interpretação da cor são os mesmos de outros sentidos, tais como o olfato e o paladar. Por exemplo, como descrever um perfume de rosas sem dizer que tem “cheiro de rosas”? Esta mesma dificuldade é encontrada ao se avaliar as cores.

A cor percebida não é uma propriedade do objeto. É verdade que a cor de um objeto é determinada pela natureza da luz refletida (ou emitida) pelo mesmo, mas a “sensação” de cor é dada quando a luz impressiona a retina de um observador e avaliada de forma única por ele. Sendo assim a cor não depende só do objeto observado mas também do observador, é um processo psicofisiológico.

A cor passa indícios sobre as propriedades dos objetos, ou seja possui um valor, um significado, podendo assim comunicar uma idéia.

2.1.1 Importância da Cor

A cor ajuda a entender o mundo, mas quando o ser humano passa a tomar consciência da cor? Ou melhor, quando a cor passa a ser utilizada como um instrumento descritivo? Nasce-se com esta capacidade ou ela é desenvolvida nos estágios iniciais da vida?

É fato que o cérebro deve ser estimulado logo após o nascimento, é durante este período crítico que o cérebro se desenvolve para tratar a enxurrada de informação que chega através do sistema visual. Qualquer problema durante este período pode causar cegueira permanente, não pelo fato do indivíduo estar impossibilitado de ver, mas sim pelo fato do cérebro não ser capaz de tratar as informações visuais.

Aqueles que nascem cegos e posteriormente conseguem restaurar a visão encontram grande dificuldade em aprender a ver. Em alguns casos torna-se impossível, e mesmo as poucas formas aprendidas são logo esquecidas. Em 1910, Monreau e LePrince, dois cirurgiões, descreveram uma operação bem sucedida que fizeram em um menino de 8 anos que tinha catarata nos dois olhos desde o nascimento e como estavam ansiosos em saber como o menino poderia enxergar sem nunca o ter feito antes. Após a remoção dos curativos os olhos do menino estavam restaurados, mas não pareciam funcionais. Quando um dos cirurgiões sacudiu a mão em frente aos olhos do garoto e perguntou o que ele estava vendo, o garoto respondeu “Eu não sei!”. O que o garoto via era uma mudança na luminosidade e não percebia que aquilo era uma mão se movendo, apenas quando tocou a mão que o menino percebeu que se tratava de uma mão em movimento exclamando “Está se movendo!”. Este caso mostra que sem o estímulo visual durante os primeiros estágios após o nascimento, o cérebro não desenvolve os estágios psicológicos necessários para a visão. O sistema ótico fornece uma descrição ótica, mas é o **sistema perceptivo** que interpreta o que está sendo observado [37].

2.1.2 A luz

A habilidade do homem “ver” não depende apenas de seu sistema ótico, mas também de um intrincado processo mental do sistema perceptivo, capaz de traduzir o que está sendo visto, ou seja a percepção da cor é um fenômeno fisioperceptivo [16].

Mas o que é interpretado? Que tipo de informação chega ao sistema perceptivo? Que tipo de fenômeno físico dá início ao processo? Luz é energia, e é essa energia que dá início ao processo excitando o sistema ótico quando incide na retina. Maxwell mostrou que a luz é uma onda eletromagnética

e em seguida Einstein mostrou que a luz também se comporta como uma partícula, o fóton [6]. Este comportamento pode parecer conflitante, mas a luz pode se comportar como onda ou como partícula.

Apesar dessa dupla caracterização, cada fóton carrega uma quantidade de energia (quantum) que está relacionada com o comprimento de onda da luz, pela teoria de Maxwell [6].

As ondas eletromagnéticas possuem um amplo espectro de frequência¹, mas apenas uma pequena parte deste espectro é visível. Na **Figura 2.1** pode-se perceber a porção visível do espectro eletromagnético. A frequência mais baixa corresponde ao vermelho com cerca de $4,3 \times 10^{14}$ Hertz e a mais alta corresponde ao violeta com frequência de aproximadamente $7,5 \times 10^{14}$ Hertz.

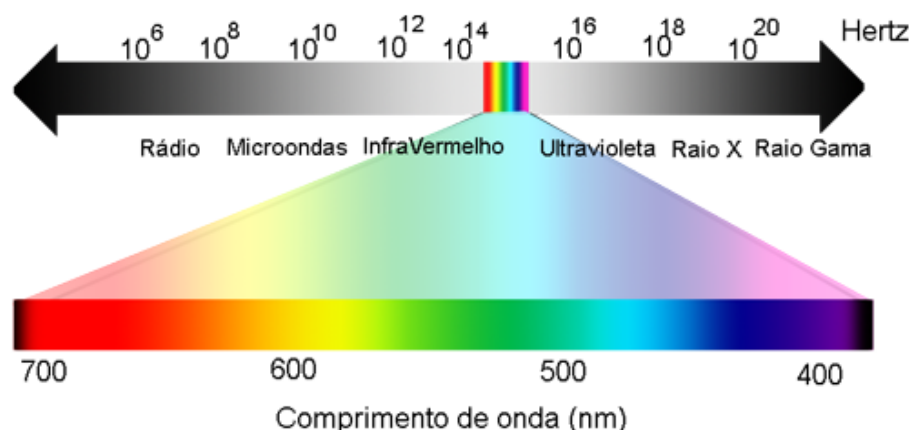


Figura 2.1: Frequências do espectro eletromagnético.

As cores podem ser puras ou misturadas. As cores misturadas são compostas por vários comprimentos de ondas diferentes, já as puras são compostas por um único comprimento de onda. Normalmente descreve-se um raio luminoso através de sua **curva espectral**, como mostra a **Figura 2.2**,

¹quantidade de ciclos da onda por segundo

que na verdade é um histograma onde os comprimentos de onda encontram-se distribuídos no eixo horizontal e no eixo vertical tem-se suas intensidades [3]. A cor da **Figura 2.2a** possui um único comprimento de onda, sendo dessa forma classificada como pura. Na **Figura 2.2b** a luz é composta por intensidades diferentes de vários comprimentos de ondas e classificada como uma luz misturada.

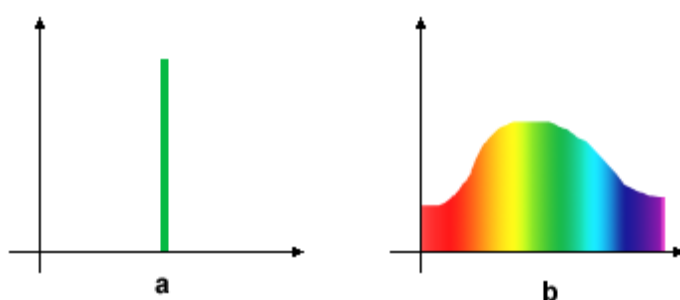


Figura 2.2: (a) Curva espectral de uma luz pura e (b) de uma luz misturada.

As características mais comuns para caracterizar uma cor são: matiz, saturação e brilho. O **matiz** é o comprimento de onda predominante na mistura de comprimentos de ondas de uma luz. Ao se falar que um objeto é azul, identifica-se o seu matiz. A **saturação** é uma grandeza relacionada com a quantidade de luz branca em uma determinada composição de comprimentos de ondas, sendo esta grandeza inversamente proporcional a quantidade de branco em uma cor. Quanto mais pura a cor (menos branco) mais saturada ela está. O **brilho** incorpora a noção de intensidade da cor, sem considerar sua **cromaticidade** (matiz e saturação).

Na **Figura 2.3** o matiz corresponde ao ponto no eixo horizontal que possuía a maior intensidade, sendo o máximo representado por i_m . A saturação corresponde a diferença desse ponto verticalmente ao ponto marcado por i_b (quantidade de branco). Quando menor o valor de i_b , mais saturada está

esta cor. O brilho é representado pela área em baixo da curva de densidade espectral, representando o quão intensa esta luz será [3].

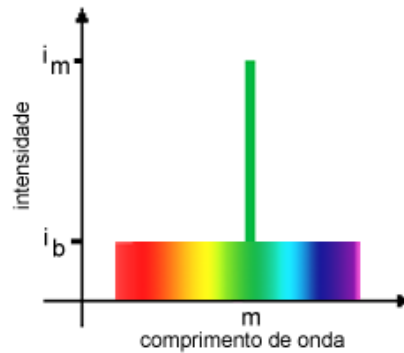


Figura 2.3: Decomposição de uma cor em matiz, saturação e brilho. Adaptada de [3].

Um corpo luminoso heterogêneo, como o sol por exemplo, pode emitir luz de vários comprimentos de ondas. Newton mostrou que quando um feixe de luz solar passar por um prisma, este é decomposto em vários feixes de comprimento de onda diferentes como pode ser visto na figura **Figura 2.4**.

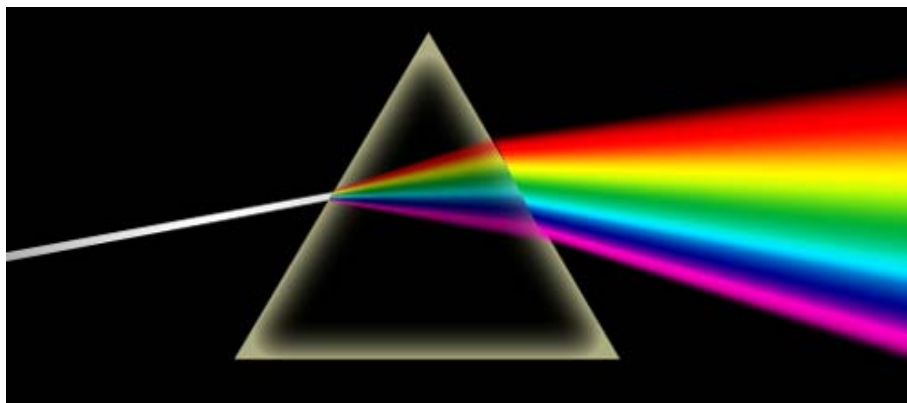


Figura 2.4: Decomposição de um feixe de luz branca.

Mas apesar de imperceptível, este espectro luminoso não é uniforme. Existem comprimentos de onda que não chegam aos olhos, quer devido ao

fato do sol não emitir todos os comprimento de onda possível ou devido a absorção/reflexão destes comprimentos de onda pela atmosfera. Estes “buracos” são chamados de linhas de absorção e seu espectro chamado de **espectro de absorção**. Os comprimentos de onda presentes são chamados de linhas de emissão e seu espectro de **espectro de emissão**. Pode-se ver na **Figura 2.5** estes dois espectros e o espectro resultante da “combinação” destes [6].

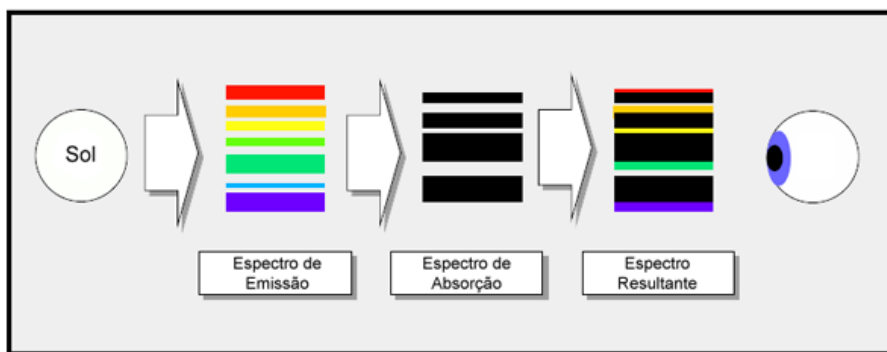


Figura 2.5: Filtragem da luz solar pela atmosfera [6].

O espectro resultante é composto por luzes de vários comprimentos de ondas com intensidades diferentes, como o mostrado na **Figura 2.6**. Este espectro é interpretado e correlacionado a um único valor subjetivo: a cor [6]. Subjetivo porque esta interpretação depende do sistema ótico do observador e de como foi desenvolvido seu sistema perceptivo.

Existem duas formas de medir uma luz, uma destas é pela **Radiometria**. A radiometria é a ciência que se encarrega das medidas físicas da luz. Essa medição é feita através de espectroradiômetros. Este aparelho mede a energia eletromagnética em qualquer comprimento de onda (não apenas os comprimentos visíveis). Suas medições são expressas no S.I. por unidades de energia, expressa em *Joules*, ou potência, expressa em *Watts*, e apresentadas em forma de um gráfico, este gráfico é o espectro da fonte que emite a luz

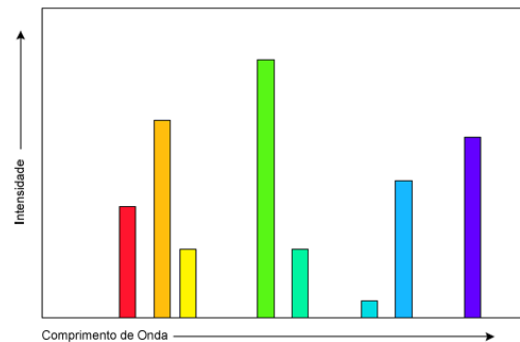


Figura 2.6: Caracterização da luz solar após a passagem pela atmosfera [6].

medida.

A outra forma de medir a luz é através da **Fotometria**. Esta ciência se encarrega das medidas psicofisiológicas da sensação visual produzida pelo espectro eletromagnético visível. A fotometria expressa a potência em uma unidade chamada *Lumem* e energia em outra denominada *Talbot*.

O conjunto de técnicas de medição da luz é tratado pela colorimetria, e os aparelhos que permitem esta medição são chamados de colorímetros [3].

2.2 Sistema Ótico - Visualização da Cor

Mesmo não sendo o único responsável pela capacidade visual humana, o sistema ótico é o responsável pela aquisição das primeiras impressões e pela sua transmissão na forma de impulsos elétricos, para serem interpretadas pelo sistema perceptivo. Mas como que o sistema ótico converte os fótons em impulsos elétricos?

A luz entra no olho através da pupila e forma uma imagem invertida na retina (**Figura 2.7a**). A retina é formada por células fotorreceptoras, sensíveis à determinados comprimentos de onda, que convertem os fótons em estímulos eletro-químicos que são processados pelo sistema perceptivo. Estas

células fotoreceptoras são classificadas segundo sua forma e divididas em dois tipos distintos: **Cones** e **Bastonetes** (**Figura 2.7b**).

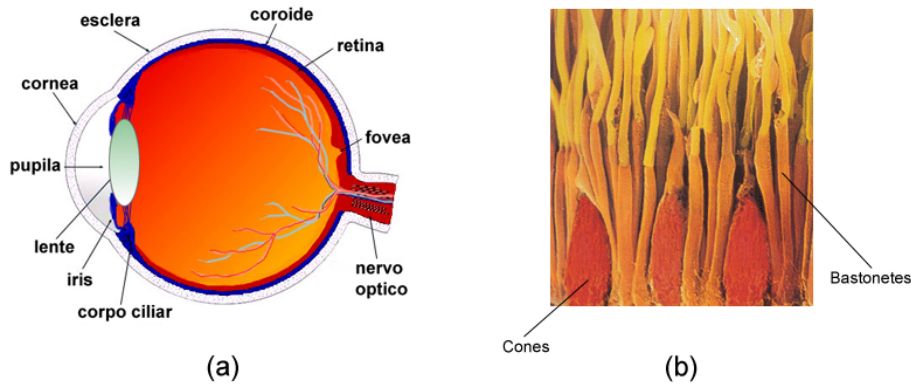


Figura 2.7: (a)Olho humano. (b)Imagem ampliada da retina [19].

Os cones são cerca de 7 milhões, encontram-se agrupados principalmente na região chamada fóvea (**Figura 2.8**). Eles são sensíveis a altos níveis de iluminação, sendo responsáveis pela percepção da cor. Já os bastonetes são cerca de 125 milhões e estão mais concentrados na periferia da retina. Os bastonetes são sensíveis a baixos níveis de iluminação, são 100 vezes mais sensíveis à luz que os cones, mas incapazes de distinguir cores, apenas intensidades. Eles são responsáveis pela visão periférica. Em geral os animais possuem uma quantidade muito maior de bastonetes que o homem, conferindo a estes uma visão a baixa intensidade luminosa muito mais desenvolvida [3].

A substância química responsável pela sensibilidade dos bastonetes à luz é a **rodopsina**, quando a luz incide sobre uma molécula de rodopsina, esta gera um sinal elétrico que é transmitido às células nervosas presentes na retina.

Cada ser humano possui três tipos diferentes de células cones, cada uma responsável pela produção de um tipo diferente de fotopigmento sensível a diferentes comprimentos de ondas. Estas células cones podem ser dos tipos

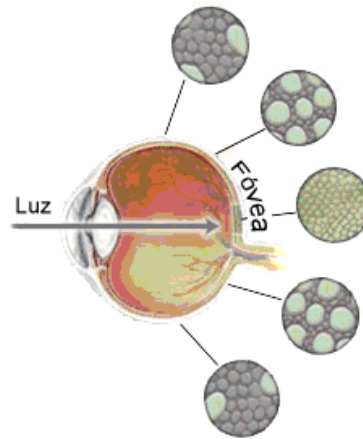


Figura 2.8: Distribuição dos cones e bastonetes na retina [37].

L, M ou S. As células do tipo L (*Long*) são sensíveis a comprimentos de ondas mais longos, responsáveis pela sensação de cor vermelha, as células cones do tipo M (*Middle*) são sensíveis a comprimentos intermediários, sensação de cor verde, enquanto que o terceiro tipo de células cones, as do tipo S (*Short*) respondem melhor a comprimentos de ondas curtos, sensação de cor azul. Dessa forma classifica-se os cones como:

- i. **L-Cones** - Curva de resposta com pico em 445nm
- ii. **M-Cones** - Curva de resposta com pico em 535nm
- iii. **S-Cones** - Curva de resposta com pico em 575nm

Pode-se ver na **Figura 2.9** as funções de resposta espectral de cada um dos três tipos de células cones [3, 8, 37]

Individualmente os cones não são capazes de gerar a sensação da cor do comprimento de onda que eles absorvem, a definição da cor de uma luz depende da comparação das respostas dos três tipos de células cones, cada uma com diferente sensibilidade espectral. Esta comparação é feita na retina [37].

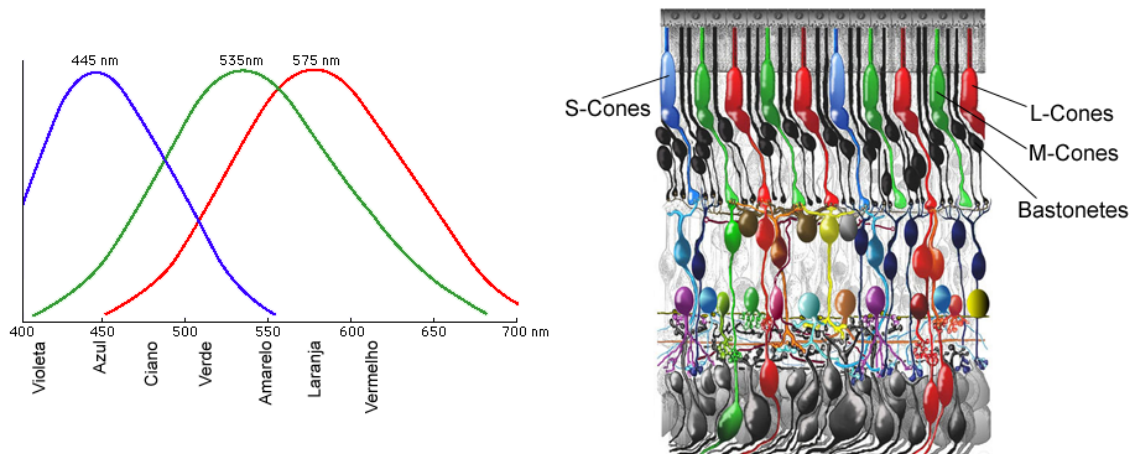


Figura 2.9: Curva de respostas dos três tipos de células cones [37].

Mas antes que tais resultados pudessem ser verificados com a ajuda de microscópios de alta resolução, Yong, no século XIX, definiu experimentalmente que a retina é formada por três tipos distintos de células com fotopigmento sensíveis à três cores primárias, são elas o vermelho, verde e o azul-violeta. Ele concluiu ainda que esta decomposição da luz em três cores primárias não era uma característica da mesma, mas sim uma característica do sistema visual humano [3].

2.3 Sistema Perceptivo - Interpretação da Cor

Há muito que os artistas plásticos perceberam que a cor e a iluminação assumem papéis diferentes na percepção visual. A capacidade de interpretar a forma tridimensional ou a organização espacial em uma imagem não depende da cor utilizada, mas sim da iluminação das formas que se apresentam. Observe a **Figura 2.10**, o fato da imagem ser apresentada com todas as suas cores (esquerda), apenas variando a intensidade em relação à uma única cor (centro) ou apenas através de sua iluminação (direita) não afetou

a percepção espacial da mesma [37].



Figura 2.10: Imagem colorida, monocromática e apenas em tons de cinza.

A explicação para esta característica possui bases biológicas. A cor e a iluminação são analisadas por partes diferentes do cérebro, estas partes estão fisicamente separadas e são anatomicamente tão distintas quanto são a visão e a audição [37]. Mesmo sem uma referência colorida para as duas imagens da **Figura 2.11**, não é problema para o sistema perceptivo organizá-las tridimensionalmente.

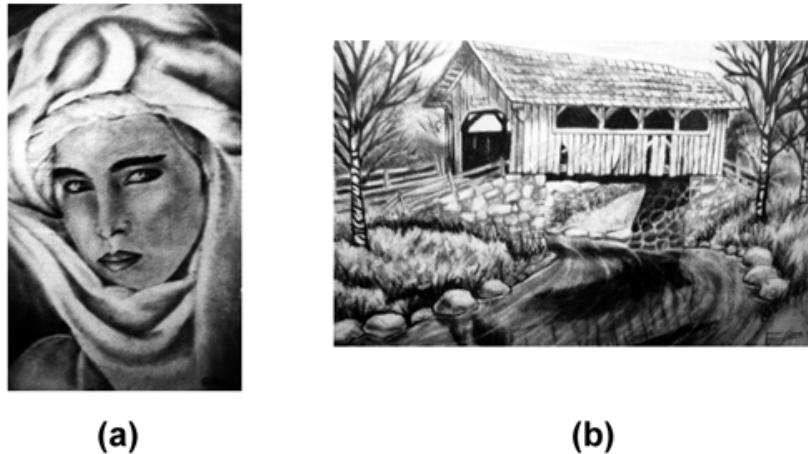


Figura 2.11: Desenhos (a) “Mistério” e (b) “Ponte” feitos à lápis pelo autor com base em modelos.

Ao sair da retina os impulsos eletroquímicos que determinam a cor seguem seu caminho para o sistema perceptivo, mas como a cor é determinada?

A trinca de informação que sai da retina é transformada em uma dupla de **cores oponentes (amarelo-azul, vermelho-verde)**, agindo como um filtro, tornando a codificação mais confiável e seletiva [8]. Em seguida o sinal segue para o cérebro onde será direcionado a áreas específicas para o tratamento de cor e iluminação. Estas subdivisões são responsáveis por diferentes partes da percepção visual e totalmente independentes.

2.3.1 Constância de cor

A capacidade humana de “ver” a cor é mais que apenas correlacionar comprimentos de ondas, por exemplo, uma banana parece amarela independente da quantidade de iluminação que incide sobre ela. A banana produz diferentes composições de comprimentos de onda em circunstâncias variadas, nossa mente nos diz que a banana reflete muito do amarelo, mesmo que mais laranja ou verde esteja sensibilizando os olhos. Esta habilidade é chamada de “constância de cor” [37].

É fato que a quantidade e composição da luz refletida por uma superfície muda continuamente em situações normais, se o sistema visual humano funcionasse como um fotômetro, a banana mudaria continuamente de cor durante um dia e, portanto a cor do objeto não traria nenhuma informação útil sobre o mesmo, deixando de ser um eficiente mecanismo biológico de comunicação. Essa capacidade de manter a cor estável, independente da quantidade e composição da luz, é um fenômeno complexo e central para a vida e está presente desde humanos a animais como o Kūnglio².

Ilusões como a da **Figura 2.12**, muitas vezes vista com uma falha da percepção visual, mostram o perfeito funcionamento deste sistema e a capacidade humana de destacar a importância de determinadas características

²Também conhecido como Peixinho-dourado ou Japonês.

da superfície. Perceba na imagem da direita da **Figura 2.12** o artifício utilizado para comprovar esta afirmação.

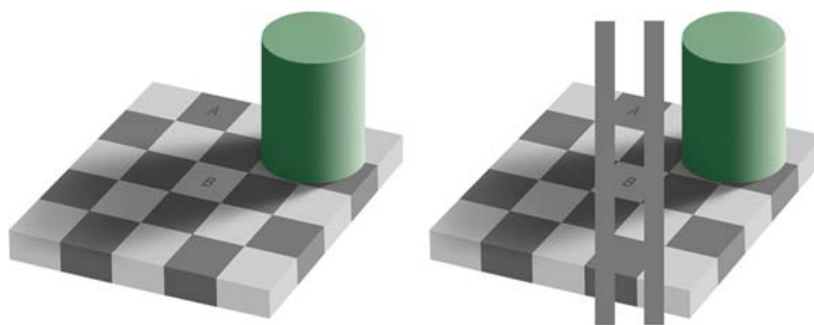


Figura 2.12: Os quadrados **A** e **B** possuem a mesma intensidade de cinza.

A **constância** é um fenômeno muito mais amplo e não está resumida à uma característica do processamento da cor, ela é uma habilidade frequentemente exercitada. Por exemplo, nosso cérebro é capaz de reconhecer um rosto humano independente do ângulo ou expressão facial. Observe na **Figura 2.13** que independente da expressão facial, iluminação, idade e características das imagens, pode-se reconhecer nestas duas situações a menina da **Figura 2.10**. Este tipo de habilidade é desenvolvida antes da fala, nos primeiros estágios do aprendizado. Um indício do desenvolvimento precoce desta habilidade é o reconhecimento, por parte do bebê, do rosto de seus pais.

Existe também a “constância de situação” onde uma situação pode ser caracterizada como festiva ou triste independente do evento associado.

O cérebro em todas estas situações extrai, do fluxo contínuo de informações, apenas o que é necessário para a identificação do que se está sendo visto. Isso demonstra o sucesso, ao invés da falha, de nosso sistema visual. O sistema visual não é eficiente em medir a luz como um fotômetro, mas também não é

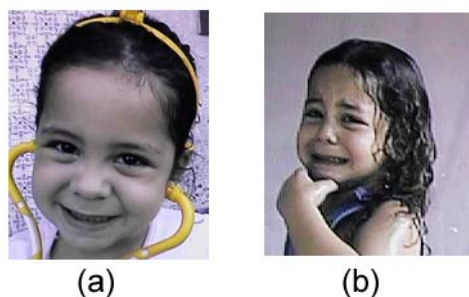


Figura 2.13: Fotos da mesma menina em duas situações.

este seu propósito, sua eficácia reside na capacidade de dividir as informações da imagem em componentes que tenham significado para depois perceber a natureza do objeto observado.

2.4 Espaços de Cores

Muitos estudos sobre as cores foram desenvolvidos com o tempo, deste Newton até os dias atuais, porém foi somente no século XX que o estudo sobre as cores passou de curiosidade científica para uma posição de ferramenta importante da indústria.

No último século, a cor tem sido utilizada para destacar detalhes em dados visuais (imagens de satélite, representação de comprimentos de ondas invisíveis) e não visuais (modelos matemáticos) [38]. Para qualquer uma dessas aplicações o mapeamento e quantificação da cor é importante, pois a cor passa a ser utilizada como uma ferramenta descritiva e passível de representação através de um sistema de coordenadas [3].

Para que a quantificação seja possível, é necessário um domínio para trabalhar com a cor, ou seja, um espaço de cor. Neste espaço de cor são desejadas as seguintes propriedades

- Capacidade de representar a maior quantidade de cores possíveis.
- Possuir uma base (com o menor número de cores possíveis) capaz de gerar todo o espaço.
- Considerar as características fisiológicas do sistema ótico e subjetivas do sistema perceptivo.

As duas primeiras propriedades acima são facilmente encontradas em qualquer espaço de cor, já a terceira tem-se mostrado um desafio para os estudiosos de cores, não pelo fato de não conseguirem combiná-la com as duas primeiras, mas sim pela aparente impossibilidade de combinar em um único espaço de cor todas as características fisiológicas e subjetivas do sistema visual humano. Esta terceira propriedade tem sido utilizada como um fator de caracterização dos diversos modelos de espaços de cores.

2.4.1 Cores Primárias

Em um espaço de cor, as cores primárias são justamente as cores que geram todo o espaço, ou seja, as cores primárias formam uma base do espaço de cor ao qual pertencem. O fato das cores formarem uma base do espaço implica que qualquer cor neste espaço pode ser escrita através de uma combinação linear das cores da base. Por exemplo, no espaço de cor RGB , as cores primárias são o vermelho (*red*), o verde (*green*) e o azul (*blue*) e qualquer cor C pertencente à este espaço pode ser representada matematicamente por:

$$C = r \cdot R + g \cdot G + b \cdot B$$

onde R, G e B são as cores primárias e r, g e b os coeficientes da mistura (valores reais positivos).

Em geral define-se em três o número de cores primárias em um espaço, devido ao fato do olho humano possuírem três tipos de fotoreceptores. Nem todos os espaços de cor possuem uma base, nos espaços de cores *HSV* e *HSL* não existe um grupo de cores primárias, pois este espaço não é obtido pela composição de cores.

Mesmo em um espaço com uma base, nem sempre essa base será formada por cores visíveis. Por exemplo no espaço de cor *XYZ*, os três comprimentos de onda primários *X*, *Y* e *Z* que formam a base não são visíveis, mas podem ser usados para produzir todas as outras cores visíveis [3].

2.4.2 Famílias de Espaços de Cor

Uma maneira de classificar os espaços de cores é dividi-los segundo a área do sistema visual considerada para a formação do espaço. Existem quatro grandes modelos, são eles [3]:

- Fisiológico.
- Sensações Oponentes.
- Baseado em Medidas Físicas.
- Psicofísico.

Modelo Fisiológico

Estes modelos consideram a fisiologia do olho humano, ou seja, considera a existência de três células receptoras de luz com sensibilidades máximas correspondentes as cores vermelha, verde e azul. Os modelos fisiológicos possuem uma base de cores primárias (geralmente três devido aos três tipos de células cones na retina humana) geradoras do espaço. Um exemplo desse

tipo de espaço é o espaço de cor RGB , amplamente difundido na indústria e relacionado com a fisiologia do olho humano.

O modelo fisiológico é dependente do equipamento que está representando a cor. No caso em que os equipamentos são capazes de emitir luzes, como monitores e TVs, este modelo pode ser utilizado sem adaptações e é conhecido como modelo de cores aditivas, pois as cores são formadas pela composição das luzes primárias. Veja na **Figura 2.14** o processo aditivo das cores primárias dos espaço RGB .

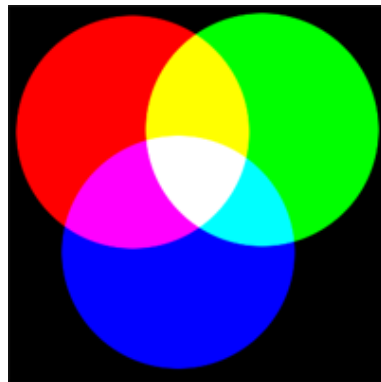


Figura 2.14: Processo aditivo de cores do espaço RGB .

No caso de equipamentos que não são capazes de emitir luzes, como impressoras, deve-se adaptar este modelo, trocando as três primárias vermelho, verde e azul pelas secundárias aditivas magenta, amarelo e ciano que passarão a ser as primárias subtrativas do espaço CMY . Neste modelo as cores primárias absorvem alguns comprimentos de onda da luz branca e refletem os comprimentos restantes para a retina. Por esta característica o espaço CMY é conhecido como espaço de cores subtrativas (**Figura 2.15**).



Figura 2.15: Processo subtrativo de cores do espaço *CMY*.

Modelo de Sensações Oponentes

Esse modelo considera que as respostas dos três tipos de cones são combinadas para alimentar um dos três canais de cores oponentes: o vermelho-verde, o amarelo-azul e o branco-preto. Este modelo usa a característica de que a cor vermelha e verde se cancelam, ou seja, não são vistas simultaneamente no mesmo lugar, não existe o vermelho-esverdeado. Análogamente o mesmo acontece com o amarelo e o azul, não existindo assim o azul-amarelado. Este não deixa de ser um tipo de modelo fisiológico, pois a representação da cor considera os processos de percepção visual que acontece nas camadas da retina e nas camadas mais altas do cérebro.

Este sistema usa para a representação de suas cores um sistema cartesiano, onde cada par de cores oponentes ocupam um eixo, sendo a parte negativa para uma cor cancelada e a positiva para seu correspondente oposto (**Figura 2.16**). Dessa forma as componentes vermelho-verde e amarelo-azul formam um plano, com o eixo branco-preto perpendicular a este plano.

Este espaço consegue explicar vários fenômenos visuais que não são adequadamente explicados pelas outras teorias. Por exemplo, fixe seu olhar na **Figura 2.17** por 15 segundos sem piscar, ao fechar os olhos será visto

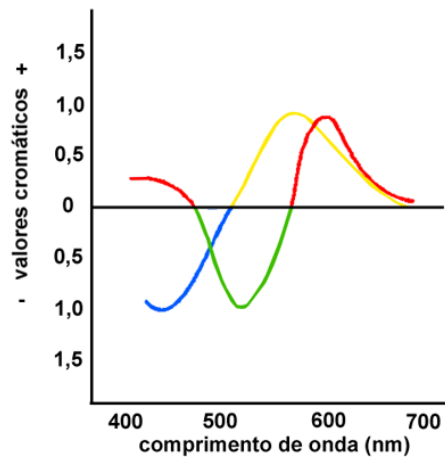


Figura 2.16: Curvas de processamento das cores oponentes [3].

a mesma imagem só que com as cores oponentes às mostradas na figura, formando as cores da bandeira brasileira.

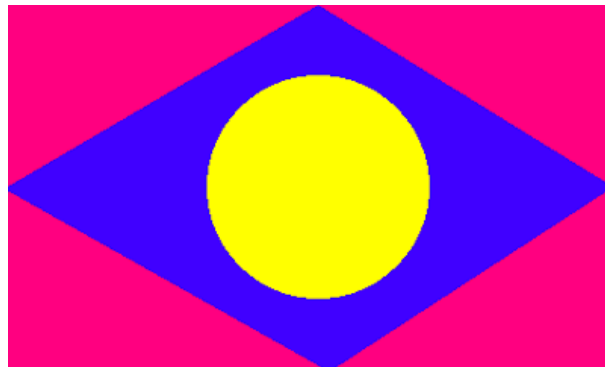


Figura 2.17: Fenômeno explicado através de cores oponentes.

Modelo Baseado em Medidas Físicas

Estes modelos são chamados de modelos colorimétricos. Este tipo de modelo considera um observador padrão médio e medidas fotométricas obtidas através de experimentos com filtros para a composição de cores. Estas pesquisas foram realizadas pela *Comission Internationale de l'Eclairage*

(CIE), sediada em Paris e que padroniza as medidas de luz e cor [3].

A partir de medições experimentais de um observador padrão, foram compostas três funções primárias chamadas de **funções de casamento de cor do observador padrão**. Destas funções foram obtidas as **primárias virtuais** (X, Y, Z) para substituir as anteriores no processo de casamento de cores [8]. A **Figura 2.18** mostra o espectro destas primárias virtuais.

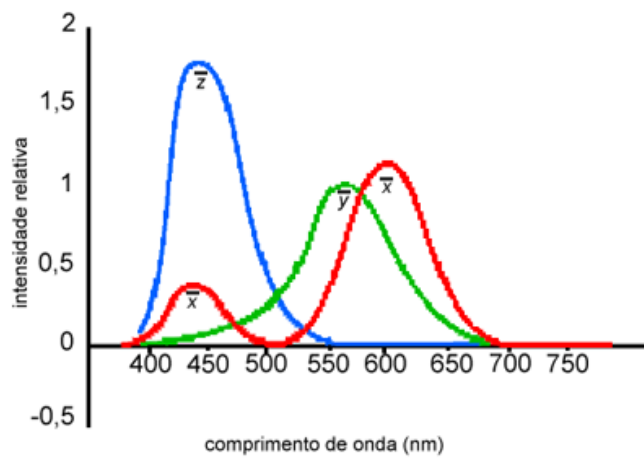


Figura 2.18: Distribuição espectral das primárias XYZ.

Sabendo a composição de um estímulo e as coordenadas espectrais de cromaticidade $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, as primárias (X, Y, Z) são obtidas pelas equações

$$X = k \int L(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda$$

$$Y = k \int L(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda$$

$$Z = k \int L(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda$$

onde λ é o comprimento de onda, $L(\lambda)$ é a distribuição espectral de energia e k uma constante de normalização ($k = 680$ para objetos que emitem luz [38]). Uma funcionalidade neste sistema é que a função \bar{y} foi definida de

tal forma que corresponda às características de eficiência luminosa do olho humano [30].

Obtidas as primárias (X, Y, Z) , as coordenadas de cromaticidade normalizadas são definidas por:

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z}$$

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z}$$

Estas coordenadas são representadas em um gráfico $x \times y$ chamado de **diagrama de cromaticidade (Figura 2.19)**. O valor de z está implícito neste diagrama, pois estas coordenadas estão normalizadas ($z = 1 - (x + y)$). Uma característica deste espaço é que apesar das primárias super-saturadas (X, Y, Z) não serem visualmente representáveis, todas as cores realizáveis aparecem.

Modelo Psicofísico

Estes tipos de espaços são baseados na percepção subjetiva da cor pelo ser humano, ou seja, como a cor e a iluminação são tratadas de formas distintas pelo sistema perceptivo ((**2.3**)), a componente de intensidade (brilho) nestes tipos de espaços é desacoplada da informação cromática (matiz + saturação).

Um das primeiras tentativas de organizar a percepção das cores em um espaço é atribuída a Munsell e Ostwald (em 1915). O sistema conhecido como sistema de Munsell, é baseado na organização perceptiva das cores em intervalos iguais. Os fundamentos deste espaço são: matiz, saturação e brilho.

Este espaço possuem 5 cores principais, são elas: vermelho, amarelo, verde, azul e púrpura. Estas cores são dispostas regularmente sobre uma cir-

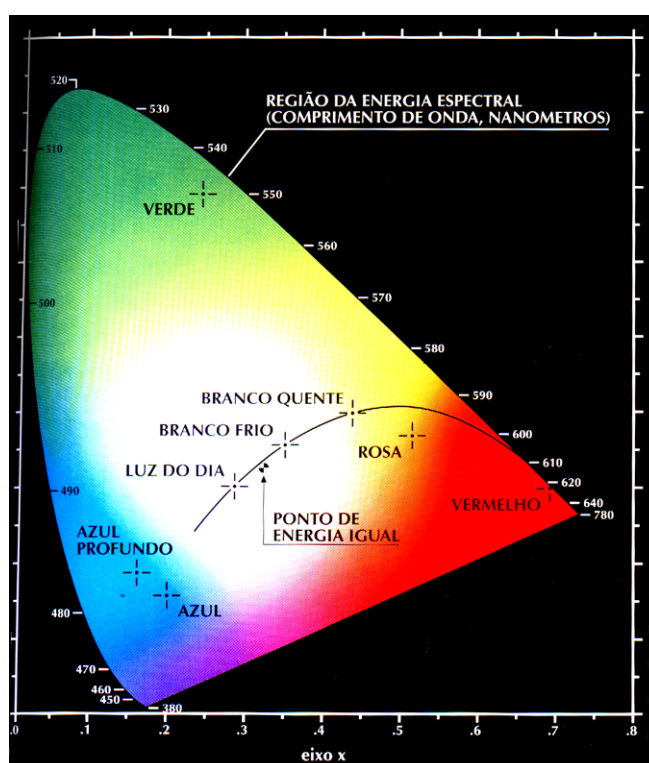


Figura 2.19: Diagrama de cromaticidade CIEE.

cunferência. Misturando as cores adjacentes obtém-se uma variação contínua (**Figura 2.20a**) representando o matiz. A saturação é representada pela distância de uma cor qualquer à cor neutra localizada no centro do círculo. O brilho ou intensidade é representado pelo eixo vertical, perpendicular ao círculo [3]. A cor é representada como um ponto tridimensional no espaço cilíndrico formando o sólido apresentado na **Figura 2.20b**.

Existem outros modelos de espaço baseados no espaço de Munsell, ou seja, com características semelhantes, mas com configurações diferenciadas. Estes espaços são amplamente utilizados na indústria e em trabalhos de computação visual e gráfica [3]. Um exemplo é o espaço *HSV*, com as componentes matiz (*Hue*), saturação (*Saturation*) e intensidade (*Value*).

O espaço de cor *HSV* foi desenvolvido em 1978 por *Alvey Ray Smith*,

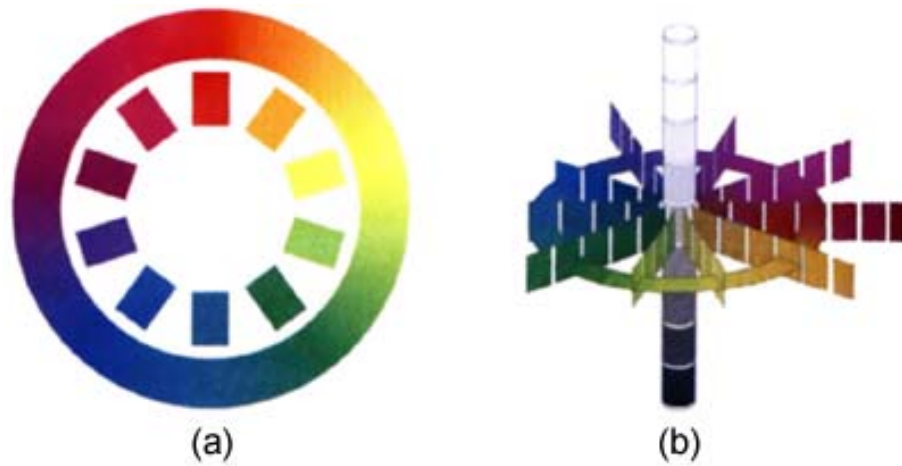


Figura 2.20: (a) Cores circulares de Munsell. (b) Representação 3D [3].

baseando-se em como um artista plástico descreve as misturas de cores. Neste espaço, as cores principais (vermelho, amarelo, verde, ciano, azul e magenta) ocupam os vértices da base de uma pirâmide hexagonal invertida (**Figura 2.21a**). A altura da pirâmide representa a variação da intensidade, sendo a saturação diretamente proporcional à distância ao eixo central da pirâmide.

Tal como no espaço de Munsell, misturando cores adjacentes, pode-se obter uma variação contínua entre as cores do espaço (**Figura 2.21b**).

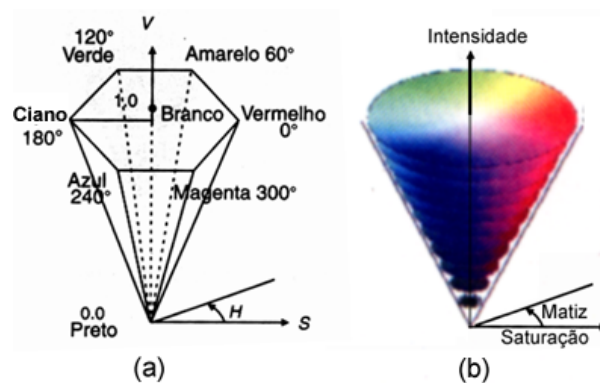


Figura 2.21: Modelo do espaço HSV [3].

Os parâmetros de cores são: a tonalidade (matiz), saturação e intensi-

dade. A tonalidade é representada pelo ângulo ao redor do eixo vertical. Definiu-se o vermelho como 0° , o verde como 120° e o azul como 240° . A saturação e a intensidade estão normalizadas, variando assim entre 0 e 1. Observe que no eixo vertical encontra-se a escala dos tons de cinza, sendo $V = 0$ e $S = 0$ para representar o preto e $V = 1$ e $S = 0$ para representar o branco. As cores de intensidade máxima encontram-se no topo da pirâmide.

Este espaço separa a informação da cor em iluminação e cromaticidade. As cores representadas dessa maneira estão intimamente relacionadas com a interpretação humana da cor [17], esta descrição da cor é mais intuitiva do que as utilizadas por outros espaços, e portanto ideal na especificação de cores relacionadas à interface com o usuário [3].

2.5 Morfologia Colorida

A cor em uma imagem é um descritor importante, ela carrega um conjunto poderoso de informações que não se pode deixar de avaliar. Considerando aspectos da morfologia matemática, essa seção mostra como trabalhar com a informação extra que representa a cor. Mas trabalhar com imagens coloridas não é tão simples quanto trabalhar com imagens em tons de cinza, talvez devido ao fato de existirem vários espaços de cores, ou talvez pelo fato da cor existir em um espaço de dimensão superior a 3 (espaço da imagem em tons de cinza) dificultando a extensão da interpretação geométrica dos operadores morfológicos neste espaço.

As bases da morfologia foram lançadas por Matheron e Serra utilizando os operadores de Minkowski da teoria dos conjuntos, e definindo os operadores fundamentais em termos de relações de inclusão e ordem. Estas relações possuem aplicações diretas em imagens binárias ou tons de cinza [27], mas a

dificuldade em definir uma ordem em imagens coloridas (não existindo assim um caminho único para ordenar cores [9]) e as diferenças numéricas entre os espaços de cores torna complexa a construção de uma “Morfologia Colorida” [20] geral. Não obstante disso, neste trabalho apresenta-se a idéia de que é possível construir uma relação de ordem em um determinado espaço de cor e com isso, definir uma morfologia para este espaço.

Dessa forma, existem diversas morfologias coloridas, uma para cada relação de ordem definida em um determinado espaço de cor. Em [17] é definida uma métrica para o espaço de cor *HSL* que relaciona o matiz com a saturação. Em [27] definiu-se uma relação de ordem para o espaço $L^*u^*v^*$ (obtido através do espaço *XYZ*), mas também separando a intensidade, L , do cromatismo da luz: u^*v^* . Em [9] é avaliada duas relações de ordem diferentes para o espaço *RGB*, mas o autor indica que o espaço *YIQ* (obtido por uma transformação linear do *RGB*) seria mais adequado pois separa a luminosidade (Y) da informação cromática (IQ).

Baseado em experimentos e nos estudos destas ordenações aqui também é apresentada uma proposta neste sentido.

Os EE utilizados nos exemplos a seguir serão planos, ou seja, não combinam suas cores com as cores da imagem original, definem apenas uma vizinhança e retornam um valor pertencente à mesma. Por esse motivo os EE não serão imagens coloridas visto que apenas suas formas importam. De maneira geral estes EE serão quadrados, salvo quando especificado o contrário.

2.5.1 Ordenação Vetorial

A extensão dos conceitos morfológicos para um espaço de cor pode ser reduzida a uma idéia central: a definição de uma relação de ordem neste espaço. Em [5] discute-se os métodos de ordenação vetorial utilizados em

todas as referências da seção anterior, sendo a forma de ordenar o espaço um ponto de diferenciação na construção de uma morfologia colorida.

Dos princípios de ordenação apresentados em [5] 3 categorias podem ser utilizadas para definir as funções nos conjuntos da morfologia colorida [20], são elas: ordenação marginal, ordenação reduzida e ordenação parcial (também chamada de lexicográfica). De fato, uma ou mais destas foram utilizadas nas referências [9, 17, 20, 22, 27] e portanto, apenas estas serão consideradas no presente trabalho.

A maneira mais fácil de construir uma morfologia colorida é pela implementação de uma **ordem marginal** em um espaço de cor. Esta ordenação consiste em avaliar cada uma das componentes da cor separadamente e então combinar os resultados. A morfologia construída com essa relação de ordem é **orientada à componente** (*component-wise*), isto é, os operadores são aplicados em cada uma das componentes da cor, como em uma imagem em tons de cinza, e posteriormente recombinaos para gerar a imagem resultante da operação. O problema gerado por tal abordagem é a possibilidade de gerar uma cor que não faz parte da imagem original, ou seja, em termos práticos, o máximo obtido é uma função de deformação de cores e não um operador morfológico válido [27].

Observe na **Figura 2.22** a aplicação da dilatação construída sobre o conceito da ordenação marginal no espaço de cor *RGB*. No exemplo, aplica-se a dilatação binária em cada uma das componentes da imagem (porque as cores utilizadas na imagem original são compostas apenas por cores primárias de saturação máxima no espaço) e estas componentes são recombinaas para gerar a imagem dilatada.

Na **Figura 2.23** apresenta-se o histograma da imagem original apresentada na **Figura 2.22** e o histograma do resultado da dilatação da imagem

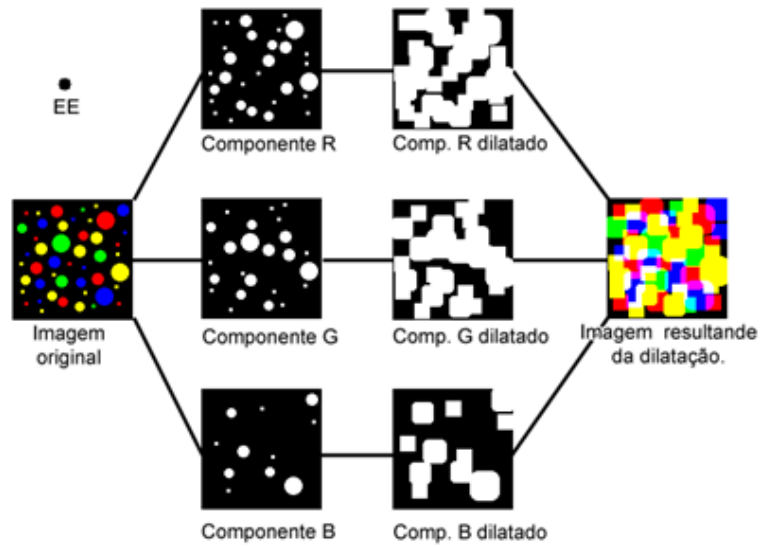


Figura 2.22: Dilatação de uma imagem colorida usando o conceito de ordenação marginal.

original utilizando a ordenação marginal. Nestas imagens **Pt** indica a quantidade de preto, **Vm** de vermelho, **Am** de amarelo, **Vr** de verde, **Cy** de ciano, **Az** de azul, **Mg** de magenta e **Br** de branco.

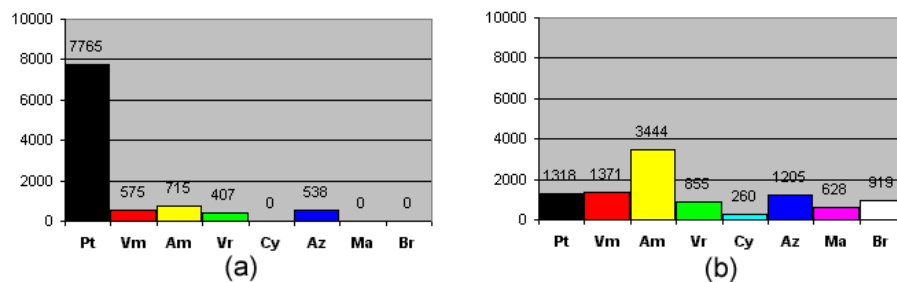


Figura 2.23: Histograma das imagens da Figura 2.22.

Perceba o aparecimento, na imagem resultante da dilatação, de cores que não existiam na imagem original (ciano (**Cy**), magenta(**Mg**) e branco(**Br**) com valores diferentes de zero). As novas cores introduzidas são chamadas de “cores falsas”, visto que não pertenciam ao conjunto original. Este efeito

não é desejável em um operador morfológico pois, por exemplo, isso viola a intuição humana de resultado esperado. Por exemplo, se as cores forem associadas a diferentes composições de grãos, como milho (amarelo), ervilha (verde) e feijão (marron), ao serem processadas não se espera que apareçam novas cores no conjunto.

A morfologia colorida baseada em uma **ordenação reduzida** é conceitualmente diferente de qualquer outra. Ao invés de criar uma ordenação em um determinado espaço e adaptar os operadores para as novas relações criadas através dessa ordenação, a ordenação reduzida busca transformar cada vetor que representa uma cor em um escalar, e daí aplicar a noção óbvia de ordem neste conjunto de escalares que foi gerado. A ordenação reduzida não adapta os operadores morfológicos para imagens coloridas, mas sim aplica os operadores da morfologia em tons de cinza em uma imagem que tenha suas componentes de cor transformadas, de alguma forma, em apenas um escalar. Ou seja, um conjunto de vetores coloridos é transformado de forma que cada vetor seja associado a um escalar. Tomando-se estes escalares como intensidades, pode-se aplicar os operadores morfológicos cinzas (ou até mesmo binários) a este conjunto.

Existem inúmeras formas de transformar um dado vetorial em um escalar, por exemplo, no espaço de cor *RGB* pode-se considerar um escalar K como a média de todas as componentes primárias, ou seja, $K = \frac{R+G+B}{3}$, ou ainda, considerar apenas a soma destas componentes. Não é obrigatório a utilização de todas as componentes da cor, por exemplo, esta ordenação poderia ser aplicada no espaço *HSV* considerando apenas a componente de intensidade V , ou seja, um vetor (h_x, s_x, v_x) representando a cor x poderia ser reduzido ao escalar v_x .

Observe na **Figura 2.24** que a imagem **a** foi dilatada por um EE plano

11×11 na morfologia colorida construída por uma ordem reduzida onde o escalar K foi obtido pela soma das componentes primárias de uma cor no espaço RGB . Nessa ordenação, a cor Preta fica sempre por último. Mas Vermelho ($R = 1, G = 0, B = 0$) e Azul ($R = 0, G = 0, B = 1$) estão na mesma posição. Já as cores secundárias ficarão antes das primárias e o branco estará em primeiro lugar. Em **Figura 2.25** apresenta-se seus histogramas. Neste caso não houve o surgimento de novas cores.

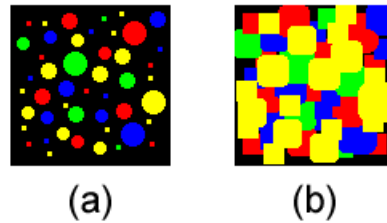


Figura 2.24: (a) Imagem original. (b) Dilatação de (a) usando ordenação reduzida.

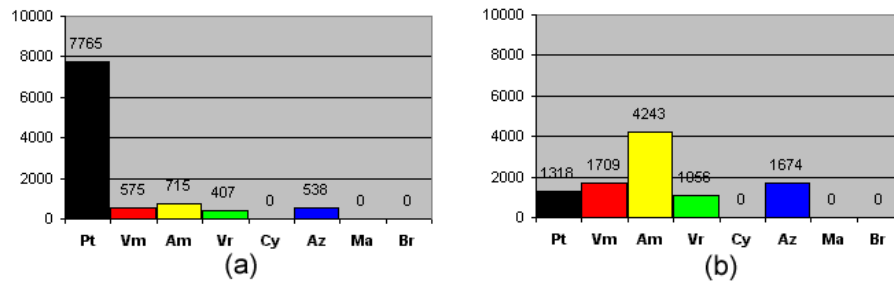


Figura 2.25: Histograma das imagens da **Figura 2.24**.

A vantagem neste tipo de ordenação é poder aplicar diretamente os operadores morfológicos em tons de cinza às imagens coloridas.

Um outro esquema de ordenação é a **ordenação parcial** ou **lexicográfica**. Esta é uma ordenação completa e sem ambiguidades (lexicográfica é a ordem em que as palavras aparecem no dicionário, daí seu nome) [17]. Na ordem lexicográfica, as cores primeiro são ordenadas por uma componente,

em seguida pela segunda componente e assim por diante.

Na **Figura 2.26** pode-se observar a dilatação da imagem **Figura 2.26a** por um EE plano 11×11 na morfologia colorida construída pela ordem lexicográfica aplicada no espaço RGB . As cores foram ordenadas na ordem em que se apresentam seus componentes, isto é, as cores serão ordenadas primeiro pela componente R , cores com mesmas intensidades em R serão ordenadas pela componente G , sendo a componente B utilizada no caso em que as cores possuírem o mesmo R e G .

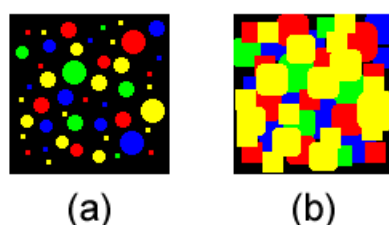


Figura 2.26: (a) Imagem original. (b) Dilatação de (a) usando ordenação lexicográfica.

Na **Figura 2.27** apresenta-se os histogramas da **Figura 2.26**. Observe como as cores que possuem a componente R tiveram preferência frente às outras cores (na **Figura 2.26b** o vermelho e o amarelo se sobreporam às outras cores).

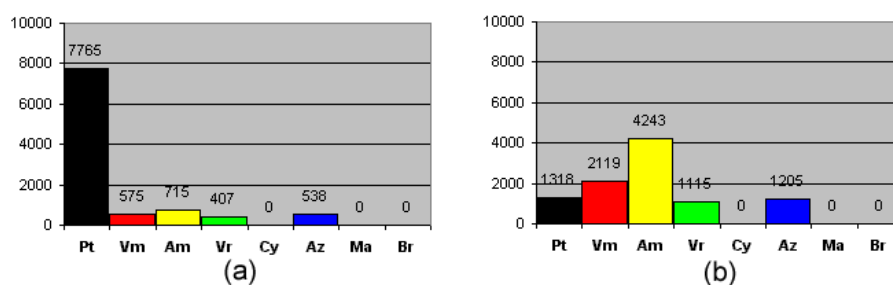


Figura 2.27: Histograma das imagens da **Figura 2.26**.

O problema de aplicar a ordem lexicográfica em qualquer espaço de cor é que uma componente deve ser destacada, pois será a primeira a ser ordenada

(na **Figura 2.26** foi a componente R). Nem sempre esta é uma escolha óbvia [17].

2.6 Ordenação H&S no Espaço HSV

Várias formas de ordenação podem ser aplicadas nos vários tipos de espaço. Mas a percepção humana da cor parece estar mais relacionada com a decomposição da cor em iluminação e cromaticidade. Como visto, apenas a variação da intensidade da iluminação da luz que chega à nossos olhos é suficiente para reconhecer a maioria dos objetos. A variação da intensidade de iluminação corresponde a variação em tons de cinza, e pode ser processada utilizando os operadores da morfologia em tons de cinza [27].

A informação extra que uma imagem colorida carrega, se comparada a imagem em tons de cinza, pode então ser encontrada na cromaticidade. Por este motivo a utilização de um dos espaços de cor perceptivo para a construção de uma morfologia colorida, é mais adequada que outros tipos de espaços.

Serra em [17] define uma ordenação no espaço HLS que também considera as componentes H e S unidas. Esta ordenação é chamada de **matiz carregada de saturação** (*saturatin-weighted hue*). Dada uma cor $i = (H_i, L_i, S_i)$ do espaço HLS , Serra define a matiz carregada de saturação da cor i , representada por H'_i , por:

$$H'_i = \begin{cases} \sup[H_i, 90^\circ(1 - S_i)] & , \text{ se } 0^\circ \leq H_i \leq 90^\circ \\ \inf[H_i, 90^\circ(1 + S_i)] & , \text{ se } 90^\circ \leq H_i \leq 180^\circ \\ \sup[H_i, 90^\circ(3 - S_i)] & , \text{ se } 180^\circ \leq H_i \leq 270^\circ \\ \inf[H_i, 90^\circ(3 + S_i)] & , \text{ se } 270^\circ \leq H_i \leq 360^\circ \end{cases} \quad (2.1)$$

por motivo de simplificação assume-se como origem o matiz 0° .

Considere as cores $a = (0, 0.5, 1)$, $b = (10, 0.5, 0.2)$ e $c = (20, 0.5, 0.9)$ pertencentes ao espaço *HLS*. Na **Figura 2.28** estas cores são representadas.



Figura 2.28: Três cores e suas coordenadas no espaço *HLS*.

Deseja-se escolher a cor mais próxima da cor “*a*”. Se for considerado apenas os valores do matiz, a cor escolhida seria “*b*”, mesmo sendo a cor “*c*” intuitivamente mais próxima à “*a*”. Calculando-se a componente H' definida pela equação (2.1) para as cores a , b e c tem-se: $H'_a = \sup[H_a, 90^\circ(1 - S_a)] = \sup[0^\circ, 0^\circ] = 0^\circ$, $H'_b = \sup[H_b, 90^\circ(1 - S_b)] = \sup[10^\circ, 72^\circ] = 72^\circ$ e $H'_c = \sup[H_c, 90^\circ(1 - S_c)] = \sup[20^\circ, 9^\circ] = 20^\circ$. Ordenando por esta nova componente, a cor mais próxima à “*a*” será “*c*”.

Perceba que as cores muito saturadas tendem a manter seu valor de matiz original, enquanto que cores pouco saturadas serão jogadas para as posições $H_0 - 90^\circ$ ou $H_0 + 90^\circ$ reduzindo a probabilidade de serem escolhidas como supremo ou ínfimo [17].

Esta técnica alterara o valor do matiz de uma cor de acordo com o valor de sua saturação enquanto a técnica proposta a seguir elege, entre o matiz e a saturação, a componente mais significativa. A técnica apresentada em [17] pode facilmente ser adaptada para o espaço de cor *HSV*.

2.7 Notas Gerais

Este trabalho apresenta nova técnica de ordenação no espaço de cor *HLS*, esta técnica considera a característica deste espaço de agrupar a informação

cromática nas componentes H (matiz) e S (saturação).

A ordenação proposta no próximo capítulo aborda o problema de forma similar ao apresentado em [17] e utiliza uma combinação da ordenação reduzida e da lexicográfica. Nela uma cor é ordenada pela ordem lexicográfica através da **constante de cromaticidade** e depois pela iluminação. Essa constante de cromaticidade é um valor escalar obtido pela redução das componentes de cromaticidade, matiz e saturação (H e S), em um único escalar. A forma como essa redução será feita será discutida no próximo capítulo.

Capítulo 3

Constante de Cromaticidade

Apresenta-se neste capítulo a proposta de uma ordenação colorida para o espaço de cor *HSV*. Esta ordenação baseia-se na idéia apresentada por Serra em [17] onde considera-se uma combinação do matiz com a saturação. Demonstra-se na **Seção (3.2)** que esta combinação é uma métrica no espaço *HSV* definindo dessa forma um ordem neste espaço. Com a ordenação definida, constrói-se na **Seção (3.3)** os operadores morfológicos dilatação e erosão colorida e faz-se testes com estes operadores.

3.1 Introduzindo uma Nova Ordenação

O problema de combinar a matiz com a saturação reside no fato delas serem grandezas diferentes. A matiz é uma grandeza angular, podendo variar entre 0° e 360° enquanto que a saturação é um gradiente em cinza variando entre 0 e 255. Pode-se normalizar estes valores e dessa forma trabalhar com grandezas equivalentes, tanto a saturação quanto o matiz passam a variar entre 0 e 1.

Mas apesar de equivalentes a saturação e o matiz normalizados são con-

ceitualmente diferentes devido ao espaço à que pertencem. A Saturação é um escalar representado na reta (**Figura 3.1a**), enquanto que o matiz tem natureza circular, deve ser medido considerando uma distância angular e representado na circunferência do círculo trigonométrico (**Figura 3.1b**). Dado a natureza destes espaços, os valores 0 e 1 representam saturações opostas enquanto que para o matiz representam o mesmo valor, pois 0° e 360° são equivalentes.

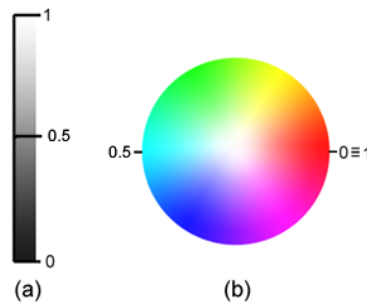


Figura 3.1: (a) Saturação normalizada. (b) Matiz normalizado.

Para resolver este problema, considera-se a seguinte definição:

Definição 3.1. *Seja \mathcal{C} a circunferência de um círculo trigonométrico e $h_a, h_b \in \mathcal{C}$ dois valores de matiz, define-se $dH(h_a, h_b)$, chamada de **distância de matiz**, por:*

$$dH(h_a, h_b) = \begin{cases} |h_a - h_b| & , \text{ se } |h_a - h_b| \leq 180^\circ \\ 360^\circ - |h_a - h_b| & , \text{ se } |h_a - h_b| > 180^\circ \end{cases}$$

Dessa forma, $dH(h_a, h_b)$ é o menor ângulo entre dois matizes na circunferência do círculo trigonométrico. É imediato perceber que a maior “distância” possível entre dois valores quaisquer é 180° (que representa as cores complementares em relação à luz branca).

Na **Figura 3.2a** pode-se ver que a matiz mais distante possível do ver-

melho (0°) é o ciano (180°)¹. Na **Figura 3.2b** pode-se perceber que o amarelo (60°) e o magenta (300°) são cores equidistantes ao vermelho (0°) pois $dH(60^\circ, 0^\circ) = dH(300^\circ, 0^\circ) = 60^\circ$.

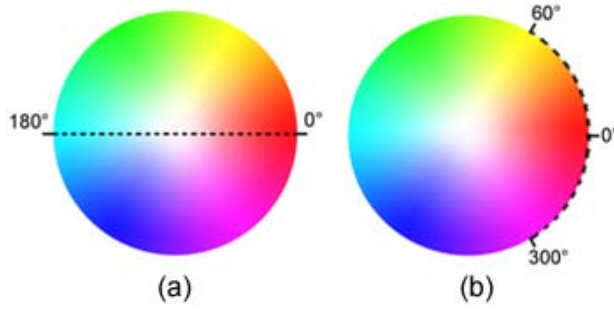


Figura 3.2: (a) Maior distância entre matizes. (b) Matizes equidistantes.

Então, para ordenar o matiz é necessário eleger um valor inicial como mínimo, calcular a distância de um matiz qualquer ao mínimo definido e ordenar segundo essa distância. Esta forma de ordenar a matiz é bastante intuitiva, aparecendo na maioria dos trabalhos que lidam com ordenação de valores angulares como em [17, 20, 27].

Como o objetivo é trabalhar com valores normalizados, pode-se reescrever a função dH , que aparece na definição 3.1, da seguinte forma:

$$dH(h_a, h_b) = \begin{cases} \frac{|h_a - h_b|}{180^\circ} & , \text{ se } |h_a - h_b| \leq 180^\circ \\ \frac{360^\circ - |h_a - h_b|}{180^\circ} & , \text{ se } |h_a - h_b| > 180^\circ \end{cases} \quad (3.1)$$

Finalmente com o matiz e a saturação sendo representados em uma mesma escala (ambas estão agora normalizadas), pode-se discutir como reduzi-los a um único escalar. Como dito anteriormente, o método proposto neste trabalho transforma as duas componentes de cromaticidade em apenas um escalar (chamado aqui de constante de cromaticidade), visando a ordenação

¹Obtido retirando-se todo o vermelho da luz branca

lexicográfica subsequente, elegendo a constante de cromaticidade como principal informação (visto que o objetivo é ordenar a sensação cromática da cor), deixando a iluminação (V) em segundo lugar.

Propoem-se uma definição de constante de cromaticidade da seguinte forma:

Definição 3.2. *Seja a e b duas cores pertencentes ao espaço de cor HSV, sendo $a = (h_a, s_a, v_a)$ e $b = (h_b, s_b, v_b)$. Defina-se a função “constante de cromaticidade” de a e b , representada por $c(a, b)$, como:*

$$c(a, b) = \text{máx}(|s_a - s_b|, dH(h_a, h_b)) \quad (3.2)$$

Exemplificando, para calcular a constante de cromaticidade entre as cores que aparecem na **Figura 3.3**. Estas cores estão com suas coordenadas representadas no espaço HSV .

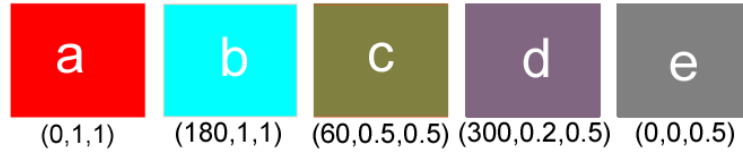


Figura 3.3: Cores e suas coordenadas representadas no espaço HSV .

Para obter-se a constante de cromaticidade das cores b , c , d e e em relação a cor a . Pelas equações (3.2) e (3.1), calcula-se:

$$\begin{aligned} c(a, b) &= \text{máx}(|s_a - s_b|, dH(h_a, h_b)) = \text{máx}(0, 1) = 1 \\ c(a, c) &= \text{máx}(|s_a - s_c|, dH(h_a, h_c)) = \text{máx}(0.5, 0.\bar{3}) = 0.5 \\ c(a, d) &= \text{máx}(|s_a - s_d|, dH(h_a, h_d)) = \text{máx}(0.8, 0.\bar{3}) = 0.8 \\ c(a, e) &= \text{máx}(|s_a - s_e|, dH(h_a, h_e)) = \text{máx}(1, 0) = 1 \end{aligned}$$

Tomando a função constante de cromaticidade como uma função de distância, tem-se que dentre as cores apresentadas na **Figura 3.3** a cor mais

“perto” da a é a cor que tiver menor constante de cromaticidade, no exemplo a cor c . Sendo as cores b e e as mais “distantes”. Mas para que a função constante de cromaticidade defina uma ordem no espaço HSV , é necessário que a mesma seja uma métrica.

3.2 Propondo uma Métrica para o Espaço HSV

Para que uma função seja uma métrica, esta função deve satisfazer a definição de métrica que pode ser encontrada na seção (A.2.1) do apêndice (A). De maneira mais precisa, para que uma função de distância seja uma métrica, esta deve possuir a propriedade da positividade e distância nula (equações i e ii), deve ser simétrica (equação iii) e possuir a propriedade da desigualdade triangular (equação iv) da seção (A.2.1).

Primeiro vai-se analisar a equação (3.2) para verificar as propriedades da positividade e distância nula.

Dado duas cores $a, b \in HSV$, quer-se mostrar a positividade da função constante de cromaticidade, ou seja que $c(a, b) \geq 0$. Assim reescrevendo a equação (3.2), tem-se:

$$\text{máx}(\underbrace{|s_a - s_b|}_I, \underbrace{dH(h_a, h_b)}_{II}) \geq 0 \quad (3.3)$$

A componente (I) da equação (3.3) é o módulo da diferença de dois escalares. Pela construção da função módulo tem-se que $\forall a, b \in HSV, |s_a - s_b| \geq 0$. Lembre-se que a função dH foi construída na forma normalizada, dessa forma $\forall a, b \in HSV, 0 \leq dH(h_a, H_b) \leq 1$ e portanto $dH(h_a, H_b) \geq 0$.

Dados a, b com $a \geq 0$ e $b \geq 0$ tem-se que $\text{máx}(a, b) \geq 0$. Portanto como ambas as componentes da equação (3.3) possuem a propriedade da positividade, tem-se que a equação (3.2) também apresenta esta propriedade.

Considerando agora a distância nula, ou seja quer-se mostrar que $\forall a \in HSV, c(a, a) = 0$, reescrevendo a equação **(3.2)**, tem-se:

$$\text{máx}(\underbrace{|s_a - s_a|}_{\mathbf{I}}, \underbrace{dH(h_a, h_a)}_{\mathbf{II}}) = 0 \quad (3.4)$$

É imediato verificar que a componente **(I)** da equação **(3.4)** possui a propriedade da distância nula, pois $\forall a \in HSV, |s_a - s_a| = 0$, e pela construção de dH tem-se que $dH(h_a, h_a) = 0$. Como a função c é dada pelo máximo entre **(I)** e **(II)**, isso implica em $c(a, a) = 0$.

Analisa-se agora a simetria da equação **(3.2)**. Segundo [21], a relação proposta será simétrica se e somente se $c(a, b) = c(b, a), \forall a, b \in HSV$. Ou seja:

$$\text{máx}(\underbrace{|s_a - s_b|}_{\mathbf{I}}, \underbrace{dH(h_a, h_b)}_{\mathbf{II}}) = \text{máx}(\underbrace{|s_b - s_a|}_{\mathbf{III}}, \underbrace{dH(h_b, h_a)}_{\mathbf{IV}}) \quad (3.5)$$

é imediato observar que na equação **(3.5)** a componente **(I)** é equivalente a **(III)** e **(II)** é equivalente a **(IV)**. Tem-se então que a função c é simétrica, pois o máximo avaliado no lado direito da igualdade será o mesmo avaliado no lado esquerdo.

De fato, as características positividade, distância nula e simétrica da equação **(3.2)** são facilmente verificadas, sendo que a maior dificuldade encontra-se em avaliar a desigualdade triangular.

Observe a equação **(3.2)**, para verificar se a mesma possui a propriedade da desigualdade triangular, pode-se em primeiro lugar, verificar se suas componentes **(I)** e **(II)** individualmente possuem esta propriedade.

Em [21] define-se que uma função de distância d possui a propriedade da desigualdade triangular se e somente se dado 3 pontos a, b, c pertencentes ao espaço em que d é definido, tem-se que:

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \quad (3.6)$$

Pelas propriedades da métrica **valor absoluto** encontrada em [26, 21, p. 291] tem-se que

$$|s_a - s_b| + |s_b - s_c| \geq |s_a - s_b + s_b - s_c| = |s_a - s_c|$$

reescrevendo,

$$|s_a - s_c| \leq |s_a - s_b| + |s_b - s_c|$$

justamente a definição **(3.6)**

Portanto a componente **(I)** da equação **(3.2)** possui a desigualdade triangular, mas viu-se que ela também é positiva e simétrica; caracterizando-se como uma métrica em $[0, 1]$. De fato, dado $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que $|a - b|$ é uma métrica em \mathbb{R} , em \mathbb{R}^2 ela é conhecida como métrica de Manhattan, ou d_1 .

Considerando agora se a componente **(II)** da equação **(3.2)** satisfaz a desigualdade triangular, definindo dessa forma uma métrica em $[0, 1]$. Ou seja, quer-se avaliar se dado 3 cores $a, b, c \in HSV$, tem-se que $dH(h_a, h_c) \leq dH(h_a, h_b) + dH(h_b, h_c)$.

Para tanto suponha que se marque os matizes h_a, h_b e h_c no círculo trigonométrico de centro O . É imediato observar que: se o ângulo formado por $\widehat{h_a O h_b}$ somado ao ângulo formado por $\widehat{h_b O h_c}$ for menor ou igual a 180° (**Figura 3.4a** e **Figura 3.4b**) então, pela construção de dH :

$$dH(h_a, h_c) = dH(h_a, h_b) + dH(h_b, h_c) \quad (3.7)$$

no caso em que o ângulo formado por $\widehat{h_a O h_b}$ somado ao ângulo formado por $\widehat{h_b O h_c}$ for maior que 180° tem-se:

$$dH(h_a, h_c) < dH(h_a, h_b) + dH(h_b, h_c) \quad (3.8)$$

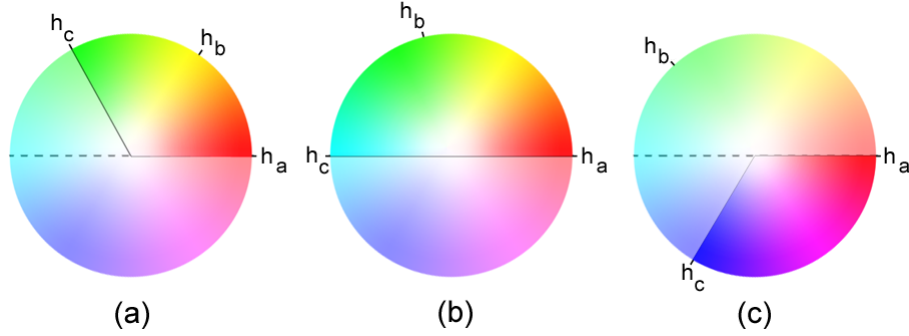


Figura 3.4: Caracterização da desigualdade triangular para a função dH .

Por (3.7) e (3.8) tem-se que dH satisfaz a propriedade da desigualdade triangular e portanto é uma métrica.

Assim foi verificado que, separadamente, as componentes (I) e (II) da equação (3.2) são métricas no espaço $[0, 1]$. Para que a função c também seja uma métrica resta avaliar apenas se esta possui a propriedade da desigualdade triangular. Ou seja, deve-se avaliar se:

$$\forall a, b, c \in HSV, c(a, c) \leq c(a, b) + c(b, c) \quad (3.9)$$

reescrevendo a equação (3.9), tem-se

$$\max(|s_a - s_c|, dH(h_a, h_c)) \leq \max(|s_a - s_b|, dH(h_a, h_b)) + \max(|s_b - s_c|, dH(h_b, h_c)) \quad (3.10)$$

Para avaliar a desigualdade triangular, verifica-se cada caso separadamente:

Caso 1: Suponha $|s_a - s_b| \leq dH(h_a, h_b)$ e $|s_b - s_c| \leq dH(h_b, h_c)$.

Sabe-se que $|s_a - s_c| \leq |s_a - s_b| + |s_b - s_c|$, mas pela hipótese tem-se que $|s_a - s_b| + |s_b - s_c| \leq dH(h_a, h_b) + dH(h_b, h_c)$, ou seja,

$$|s_a - s_c| \leq dH(h_a, h_b) + dH(h_b, h_c) \quad (3.11)$$

como sabe-se que pela desigualdade triangular:

$$dH(h_a, h_c) \leq dH(h_a, h_b) + dH(h_b, h_c) \quad (3.12)$$

Por (3.11) e (3.12) tem-se que $c(a, c) \leq c(a, b) + c(b, c)$.

Caso 2: Suponha $|s_a - s_b| \geq dH(h_a, h_b)$ e $|s_b - s_c| \geq dH(h_b, h_c)$.

Sabe-se que $dH(h_a, h_c) \leq dH(h_a, h_b) + dH(h_b, h_c)$ mas por hipótese tem-se que $dH(h_a, h_b) + dH(h_b, h_c) \leq |s_a - s_b| + |s_b - s_c|$, ou seja,

$$dH(h_a, h_c) \leq |s_a - s_b| + |s_b - s_c| \quad (3.13)$$

como sabe-se que pela desigualdade triangular:

$$|s_a - s_c| \leq |s_a - s_b| + |s_b - s_c| \quad (3.14)$$

Por (3.13) e (3.14) tem-se que $c(a, c) \leq c(a, b) + c(b, c)$.

Caso 3: Suponha $|s_a - s_b| \leq dH(h_a, h_b)$ e $|s_b - s_c| \geq dH(h_b, h_c)$.

Sabe-se que $|s_a - s_c| \leq |s_a - s_b| + |s_b - s_c|$, mas por hipótese tem-se $|s_a - s_b| + |s_b - s_c| \leq dH(a, b) + |s_b - s_c|$, ou seja,

$$|s_a - s_c| \leq dH(a, b) + |s_b - s_c| \quad (3.15)$$

Também tem-se que $dH(h_a, h_c) \leq dH(h_a, h_b) + dH(h_b, h_c)$, mas por hipótese é imediato que $dH(a, c) \leq dH(a, b) + |s_b - s_c|$, ou seja, tem-se que:

$$dH(h_a, h_c) \leq dH(a, b) + |s_b - s_c| \quad (3.16)$$

Assim por (3.15) e (3.16) tem-se que $c(a, c) \leq c(a, b) + c(b, c)$.

Caso 4: Suponha $|s_a - s_b| \geq dH(h_a, h_b)$ e $|s_b - s_c| \leq dH(h_b, h_c)$.

A suposição assumida neste caso é similar ao **Caso 3**. Portanto aplicando um procedimento similar também chega-se à conclusão que $c(a, c) \leq c(a, b) + c(b, c)$.

Conclui-se então que não importa a situação

$$c(a, c) \leq c(a, b) + c(b, c),$$

com isso prova-se que a função constante de cromaticidade c possui a propriedade da desigualdade triangular e mais, que por satisfazer os demais requisitos é uma métrica com valores em $[0, 1]$.

Pode-se agora definir uma relação de ordem parcial no espaço HSV utilizando a métrica contante de cromaticidade e criar com isso uma morfologia colorida neste espaço.

Observe na **Figura 3.5** a representação geométrica da cobertura do espaço HSV pela métrica proposta considerando o vermelho ($h = 0^\circ, s = 1$) como a menor cor possível para cada valor de v . Considerou-se neste exemplo, apenas as cores de intensidade máxima ($V = 1$), dado que a métrica proposta não trabalha com esta componente. A região **(a)** na **Figura 3.5** mostra todas as cores que possuem a constante de cromaticidade menor ou igual a 0,25, a região **(b)** mostra as cores em que esta nova componente é menor ou igual à 0,5, e assim por diante.

3.3 Erosão e Dilatação Colorida Proposta

Uma vez definida a ordenação no espaço de cores, pode-se obter o máximo e mínimo em um conjunto de cores.

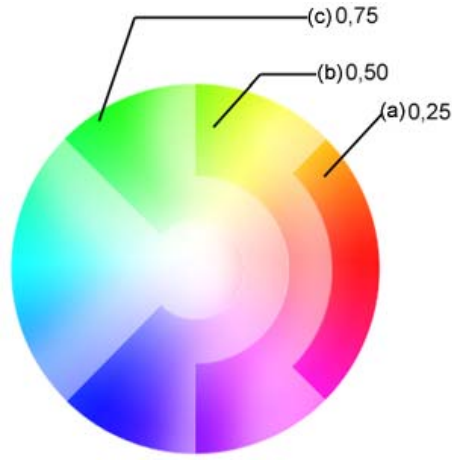


Figura 3.5: Cobertura do espaço HSV pela métrica proposta com intensidade máxima e cor inicial vermelha.

Sejam $a, b \in HSV$, define-se máximo colorido entre a e b , representado por $a \underline{\vee} b$, como:

$$a \underline{\vee} b = \max \{c(a, o), c(b, o)\}$$

sendo o a cor eleita como a menor do espaço.

De forma similar define-se mínimo colorido entre a e b , representado por $a \overline{\wedge} b$, como:

$$a \overline{\wedge} b = \min \{c(a, o), c(b, o)\}$$

Finalmente pode-se definir a erosão e dilatação colorida para o espaço HSV usando a métrica constante de cromaticidade. A erosão colorida de uma imagem f , composta por cores do espaço HSV , em um ponto x pelo EE estruturante B é:

$$\varepsilon_B(f)(x) = \overline{\wedge} \{f(y) : y \in D_{B_x}\} \quad (3.17)$$

sendo sua forma global, similar à definição de erosão cinza apresentada pela equação (1.49), definida como:

$$\varepsilon_B(f) = \overline{\bigwedge_{b \in \tilde{B}} f_b} \quad (3.18)$$

Onde o símbolo $\overline{\bigwedge}$ indica o mínimo colorido entre duas cores.

O EE estruturante utilizado na morfologia colorida será plano, ou seja apenas define uma vizinhança de influência para a escolha do máximo ou mínimo definido. De outra forma, considerar o EE também como uma imagem colorida, podem aparecer cores que não fazem parte do conjunto original.

A dilatação da imagem f pelo EE B , correspondente à equação (3.17), é

$$\delta_B(f)(x) = \underline{\vee} \{f(y) : y \in D_{B_x}\} \quad (3.19)$$

sendo sua forma global dada por

$$\delta_B(f) = \underline{\vee}_{b \in \overline{B}} f_b \quad (3.20)$$

Onde o símbolo $\underline{\vee}$ indica o máximo colorido entre duas cores.

3.3.1 Testando as Definições Propostas

Nos exemplos que se seguem o EE utilizado é um EE plano, na forma de um quadrado de lado 9 e as imagens definidas no espaço de cor *HSV*, salvo quando especificado o contrário.

Pode-se ver a aplicação da definição de erosão e dilatação colorida proposta nas **Figura 3.6** e **Figura 3.8**. Observando os histogramas nas **Figura 3.7** e **Figura 3.9** vê-se como a escolha da cor mínima influencia a dilatação colorida da imagem. Nas duas figuras as imagens **(a)** são as imagens originais, **(b)** a dilatação e **(c)** a erosão da imagem original. Os resultados obtidos

da dilatação se propagam cores mais distantes da cor mínima. Não se notou mudança na erosão.

Uma das vantagens da morfologia colorida proposta é que a definição da cor mínima como sendo a cor do fundo, evitará uma “inversão” intuitiva da erosão e dilatação, como pode ocorrer com o método proposto em [27]. Este método ordena o matiz de forma semelhante a métrica dH (menor ângulo entre dois valores de matiz), a diferença é que em [27] o arco pode assumir um valor negativo, indicando assim que o menor ângulo é no sentido horário.

Veja este efeito através das **figuras 3.10 e 3.12** obtida pela implementação do método apresentado em [27]. Nesta figura **(a)** é a imagem Original, **(b)** representa a dilatação da imagem original por um EE plano 5×5 e **(c)** mostra a erosão da imagem original por um EE plano 5×5 . Observe a “inversão” dos operadores. Esta característica também foi observada por J. Serra em [17], e se deve ao fato da cor que representa o fundo ser “maior” (no sentido da métrica aplicada) do que as cores que formam os grãos e com isso dilatar a imagem seria dilatar o fundo causando a erosão dos grãos. Esta propriedade é considerada na morfologia matemática através da dualidade entre a dilatação e a erosão e amplamente discutida no capítulo 1. Em **Figura 3.11** apresenta-se os histogramas das imagens apresentadas em **Figura 3.10**. Os resultados obtidos usando-se a métrica aqui proposta são apresentadas nas **figuras 3.14, 3.15 e 3.16**

Observe pela **Figura 3.12**, gerada pelo método apresentado em [27], a ocorrência dessa inversão quando o fundo é uma cor que está entre as cores de interesse na imagem. Pelos histogramas apresentados em **Figura 3.12** vê-se como a dilatação elimina os grãos vermelhos e amarelos e amplia os grãos azuis e magentas. Os EEs utilizados são planos 5×5 .

Pode-se ver nas **Figura 3.14, Figura 3.15 e Figura 3.16** como os ope-

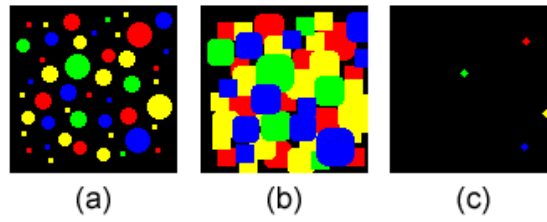


Figura 3.6: Resultado usando como cor mínima o matiz vermelho.

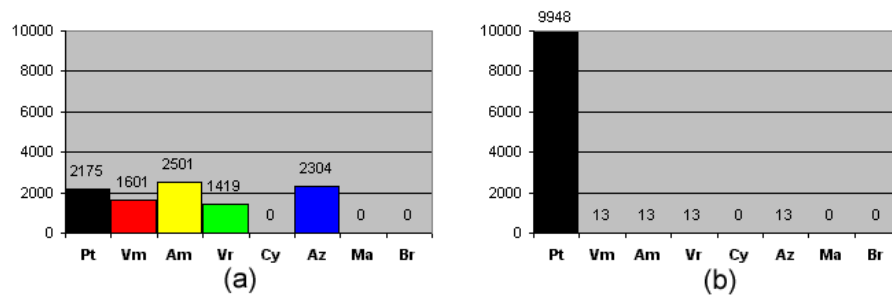


Figura 3.7: (a)Histograma da Figura 3.6b. (b)Histograma da Figura 3.6c.

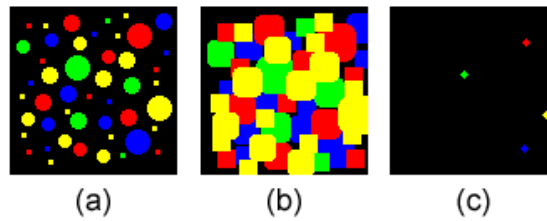


Figura 3.8: Resultado usando como cor mínima o matiz azul.

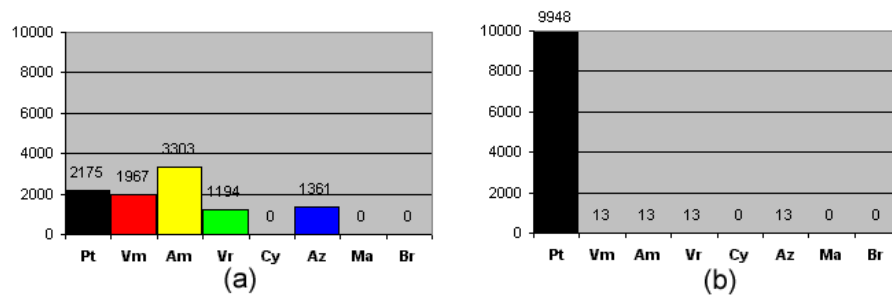


Figura 3.9: (a)Histograma da Figura 3.8b. (b)Histograma da Figura 3.8c.

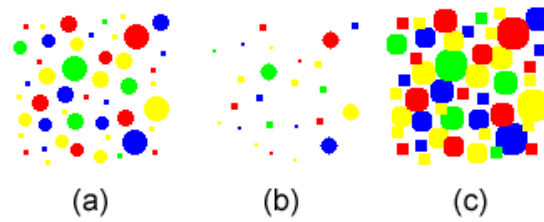


Figura 3.10: Dilatao e erosao usando o metodo proposto em [27].

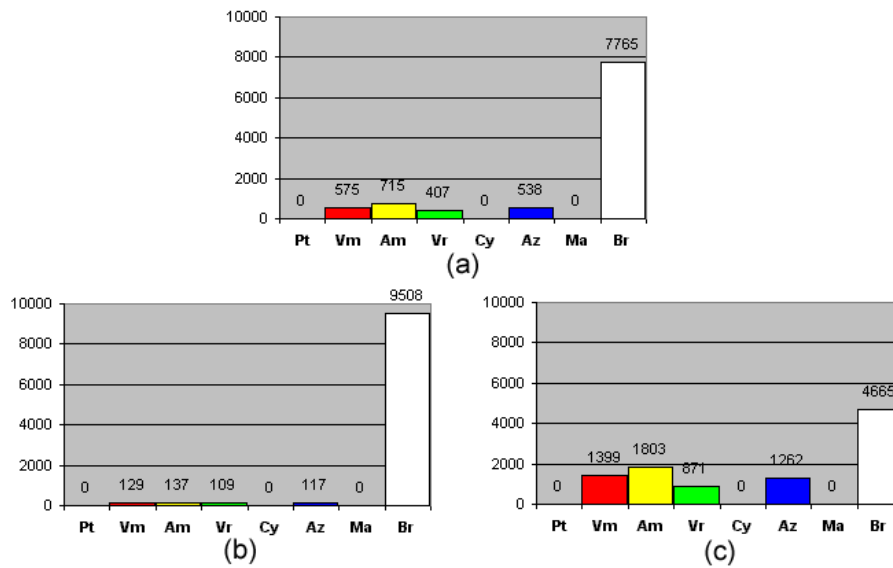


Figura 3.11: Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da Figura 3.10.

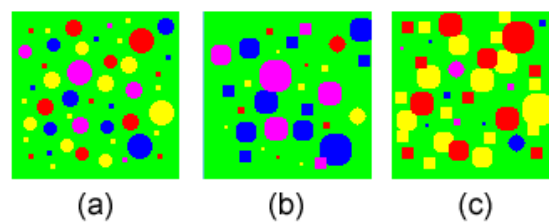


Figura 3.12: Efeito da eliminacao e ampliao de graos.

radores mantem-se intuitivamente coerentes usando a metrica proposta neste trabalho e as novas definicoes de dilatao e erosao. Na Figura 3.14 a cor minima definida foi o branco, na Figura 3.15 foi o ciano escuro representado

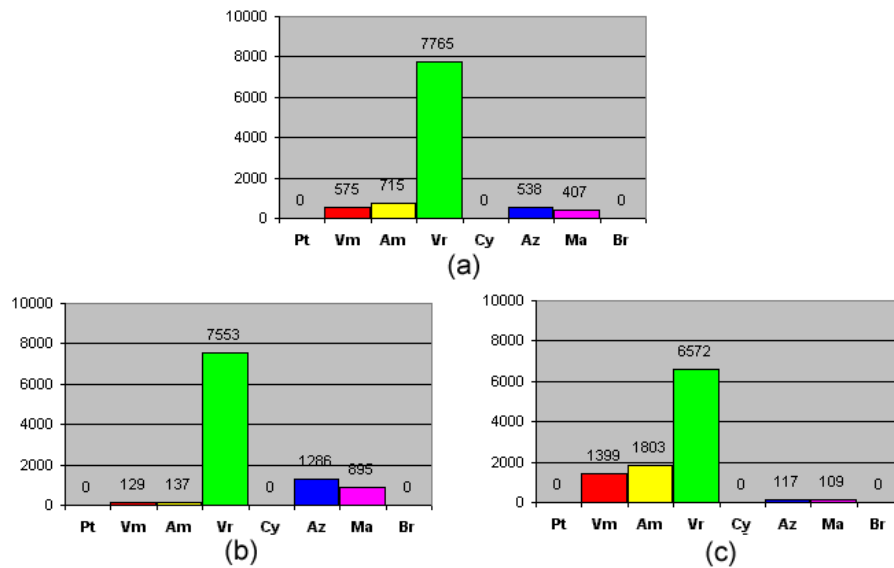


Figura 3.13: Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da **Figura 3.12**.

por $(180^\circ, 0.5, 0.8)$ e na **Figura 3.16** foi o verde representado por $(120^\circ, 1, 1)$, ambas no espaço *HSV*. Perceba que estas cores formam as cores de fundo de cada imagem. Em todas as imagens (a) é a imagem original, (b) o resultado da dilatação e (c) o resultado da erosão.

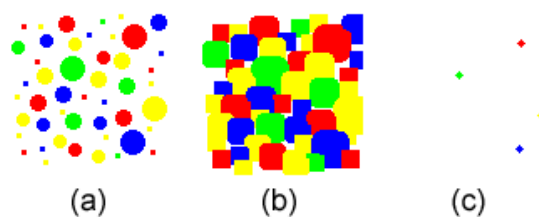


Figura 3.14: Exemplo usando branco como cor mínima.

Apresenta-se nas **Figura 3.17**, **Figura 3.18** e **Figura 3.19** os histogramas das imagens que aparecem em **Figura 3.14**, **Figura 3.15** e **Figura 3.16**.

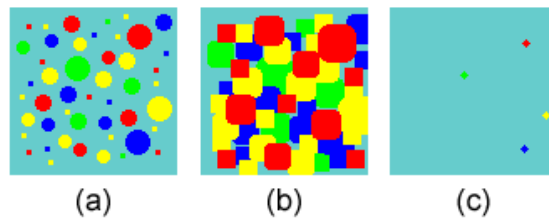


Figura 3.15: Exemplo usando o ciano como cor mínima.

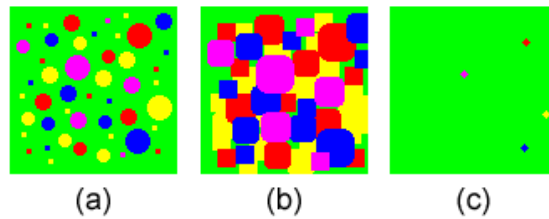


Figura 3.16: Exemplo usando o verde como cor mínima.

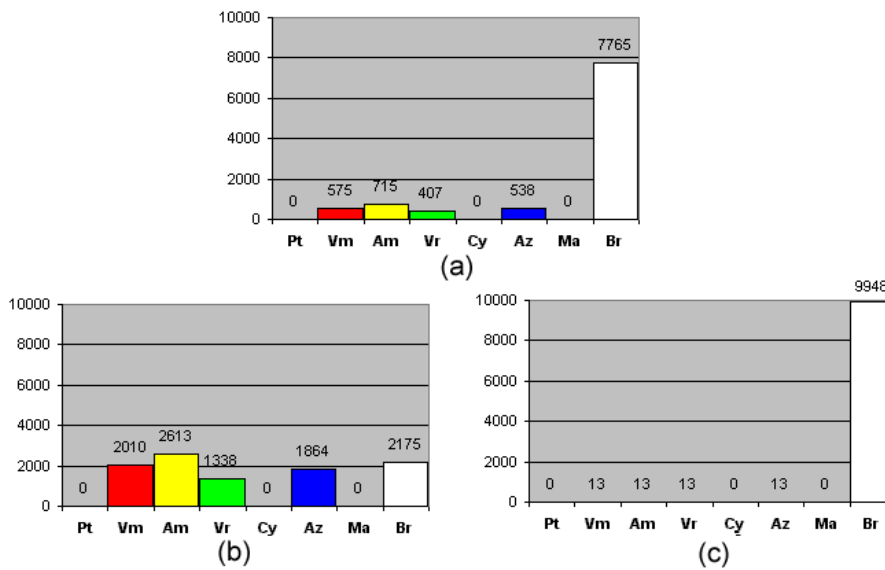


Figura 3.17: Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da Figura 3.14.

3.4 Notas Gerais

Pode-se concluir que qualquer ordenação deve ser usada com inteligência, correndo-se o risco de obter conclusões tendenciosas, não obtendo assim um

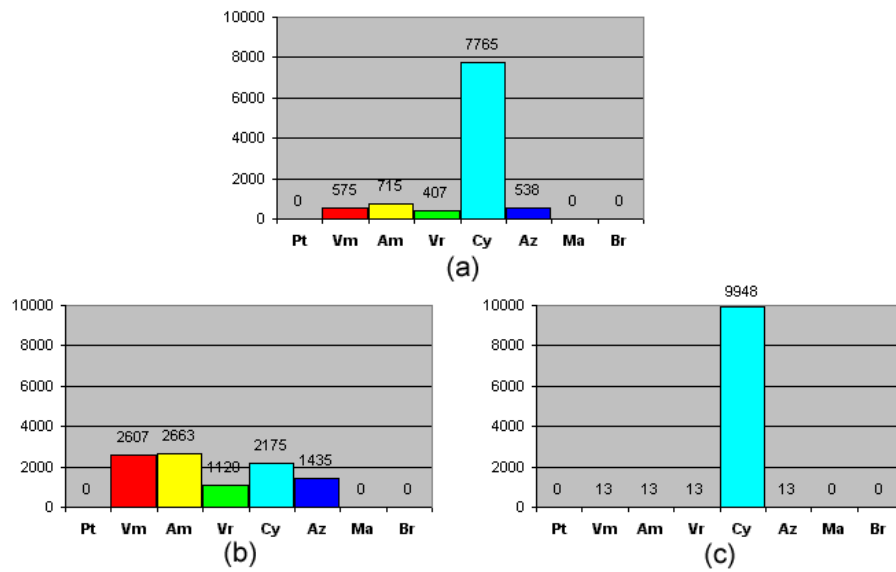


Figura 3.18: Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da Figura 3.15.

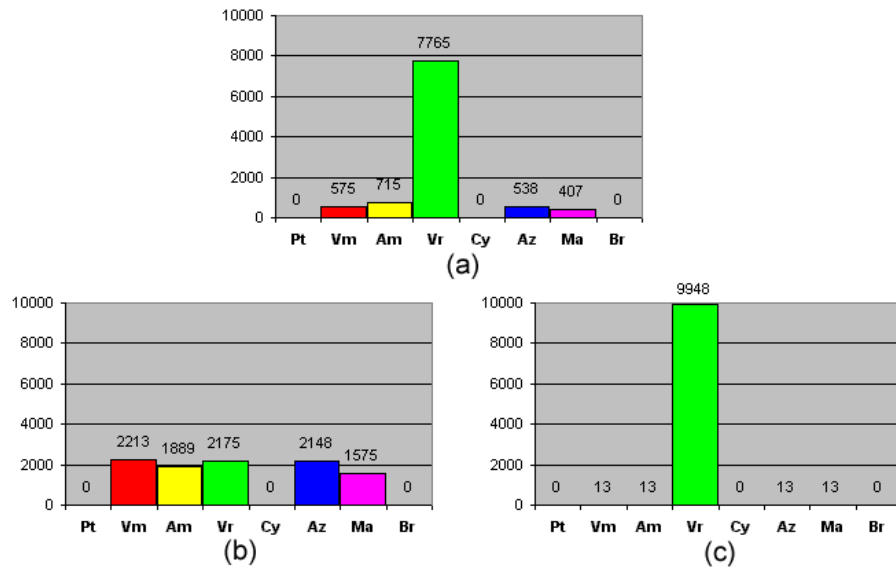


Figura 3.19: Histogramas das imagens (a), (b) e (c) da Figura 3.16.

resultado científico preciso.

Com as operações básicas (dilatação e erosão) definidas no espaço, todas as demais operações podem ser obtidas através de combinações destas de

forma similar à suas contrapartes binárias e/ou cinzas.

No capítulo seguinte trata-se a granulometria de maneira geral, não diferenciando a Morfologia Colorida da binária ou cinza, apresenta-se posteriormente os resultados obtidos a partir da métrica e definições de dilatação e erosão propostas neste capítulo.

Capítulo 4

Granulometria Morfológica

Pode-se dizer que os fundamentos teóricos da morfologia matemática foram desenvolvidos com o objetivo de caracterizar imagens através da utilização de parâmetros quantitativos tais como **classificação por tamanho** (*size distribution*) ou **granulometria** [23].

Mas o que entende-se por “tamanho”? Seria possível quantificar este conceito, construindo dessa forma um critério morfológico? Como esse conceito é utilizado na prática?

A classificação de um material através do tamanho de seus grãos é uma técnica a muito utilizada por mineralogistas, biólogos, geólogos, etc. O processo físico que caracteriza perfeitamente a granulometria é o *peneiramento*, onde um material é classificado de acordo com uma série de peneiras pelas quais vai sendo separado e depois medido ou pesado. Esta separação é feita deixando-se que o material passe por peneiras com *aberturas* de malhas de tamanhos diferentes.

A medição pode ser feita de várias formas possíveis, de acordo com a área em que se está atuando. Na mineralogia, o material de cada peneira é pesado, obtendo assim a proporção de cada tamanho de grão no material. Na

biologia, passa-se o material por pequenos tubos de forma que seus “grãos” (no caso células) possam ser contados individualmente de acordo com seu tamanho. Nestas duas técnicas, a forma de se *medir* o material foi diferente, mas ambas baseiam-se na noção individual de partículas [31]. Outras técnicas de medição são exemplificadas em [31].

Depois de feita a medição é construído um gráfico que relaciona o tamanho de cada malha (e com isso se tem uma idéia do tamanho do grão) com a medição obtida por essa malha. O interesse geral deste capítulo é descobrir as características comuns que as diversas técnicas possuem para que a noção de “tamanho” possa ser generalizada.

Nos capítulos anteriores foi apresentado as morfologias matemática binária, em níveis de cinza e colorida¹ separadamente mas sempre relacionando os principais operadores de cada uma destas morfologias. Devido estas equivalências, não será feita distinção entre as morfologias, com o intuito de evitar a redundância, sendo os operadores definidos neste capítulo apresentados em suas formas binária, em níveis de cinza e colorida.

4.1 Princípios de uma Quantificação

Nesta seção aborda-se os quatro princípios básicos, apresentados em [31], da quantificação também chamados de “*os quatro princípios da morfologia matemática*”.

Imagine que um geólogo deseje fazer um estudo quantitativo da textura microscópica do solo de uma determinada região. Ele deve perfurar o solo para obter uma amostra do mesmo, desta amostra obter seções que serão polidas e colocadas em um microscópio para que a análise seja feita. A

¹segundo o espaço e a métrica definidos no **capítulo 3**

metodologia utilizada pelo geólogo deve se encaixar em quatro restrições, são elas:

- A posição da amostra obtida no solo é irrelevante durante a análise e quantificação, isto é, a medição não pode ser definida em função da posição da amostra retirada do solo.
- O material é ampliado para que seja possível analisá-lo.
- Tanto os limites da amostra quanto o campo de visão do microscópio restringem a análise a pequenas partes arbitrárias do espaço.
- A análise do solo depende da ampliação aplicada às seções transversais, caso o grau de ampliação mude, aparecerão novas estruturas ou, ao contrário, outras estruturas serão ignoradas na medição. Não importa a resolução em que se está trabalhando, estes tipos de detalhes sempre existirão.

Com o intuito de formalizar estes conceitos, usa-se a teoria de conjuntos e diz-se que uma granulometria é qualquer operação morfológica composta por um mapeamento ψ entre conjuntos, seguida de uma medição μ , ambas restritas aos princípios acima apresentados. Dado um conjunto X , $\psi(X)$ representa um novo conjunto e $\mu(\psi(X))$ um número (área, volume, área superficial) [31].

Primeiro princípio: invariância com a translação

Seja X_h a translação do conjunto X pelo vetor h . Diz-se que o mapeamento $\psi(X)$ é **invariante com a translação** se e somente se :

$$\psi(X_h) = [\psi(X)]_h \quad (4.1)$$

Como exemplos de mapeamentos invariantes com a translação tem-se a erosão e a abertura

Segundo princípio: invariância com a ampliação

Seja λX a ampliação do conjunto X pelo escalar λ . Diz-se que o mapeamento $\psi(X)$ é **invariante com ampliação** se e somente se :

$$\psi(\lambda X) = \lambda\psi(X), \quad \lambda > 0 \quad (4.2)$$

Terceiro princípio: conhecimento Local

Não é possível conhecer todo o conjunto X , mas apenas a porção $X \cap Z$ do conjunto X limitada por uma máscara Z , também um conjunto. Dessa forma deve-se apenas considerar os mapeamentos ψ em que o resultado $\psi(X)$, limitado por uma máscara Z' , é obtido pela aplicação de ψ na porção $X \cap Z$. Formalmente, defini-se o terceiro princípio por:

*O mapeamento ψ satisfaz o princípio do **conhecimento local** se, dado uma máscara Z' aplicada em $\psi(X)$, existe uma porção $X \cap Z$ de X , definida por uma máscara Z , que é suficiente para promover este mapeamento.*

Formalmente falando:

$$\forall Z', \exists Z \quad \therefore \quad [\psi(X \cap Z)] \cap Z' = \psi(X) \cap Z'$$

Quarto princípio: semi-continuidade

O quarto princípio, chamado de **princípio da semi-continuidade** é tido como um divisor de águas entre teóricos e práticos [31, 32]. Para os teóricos, a capacidade que este princípio possui de *relacionar a transformação*

de um conjunto com a transformação de seu contorno é uma parte importante da teoria. Para os práticos, o quarto princípio é muito sofisticado e desnecessário, visto que o objetivo prático é trabalhar com imagens digitais. De fato os práticos não estão errados, pois o conceito empírico de limite de um conjunto é desnecessário para a construção de um operador morfológico digital. Mesmo sendo desnecessário no espaço discreto, este princípio não deve ser descartado pois não é qualquer operação morfológica (na maioria as experimentais) que pode ser digitalizada, assim, em alguns casos só é possível estudar o objeto no espaço euclidiano e daí verificar como este pode ser aproximado digitalmente. As abordagens teórica e prática coincidem na maioria dos aspectos mas, este é um exemplo, elas não são equivalentes [31].

4.2 Definição

Uma granulometria é formalmente definida por ([23]):

Definição 4.1. *Seja $\Psi = \psi_\lambda, \lambda \geq 0$ uma família de mapeamentos dependentes de um parâmetro λ . Diz-se que esta família é uma granulometria se e somente se as seguintes propriedades são asseguradas.*

- i. $\psi_0(A) = A$, e dado $\lambda \geq \mu$, implica $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A)$.
- ii. Para todo $\lambda \geq 0$, e $A \subset B$, tem-se que $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\lambda(B)$.
- iii. Para todo $\lambda, \mu \geq 0$, tem-se que $\psi_\lambda[\psi_\mu(A)] = \psi_\mu[\psi_\lambda(A)] = \psi_{\max\{\lambda, \mu\}}(A)$.

A primeira propriedade garante a **anti-extensividade** de uma granulometria, ou seja, dado um conjunto A , tem-se que $\psi_\lambda(A) \subset A$. Este resultado é facilmente obtido fazendo $\mu = 0$. A segunda propriedade garante que a granulometria é **crescente** e a terceira, chamada de **peneira mais forte**

(*stronger sieve*)[31] ou **absorção** [34], garante que o resultado da aplicação do mapeamento é sempre igual à transformação pelo maior parâmetro independente da ordem. Observe que pode-se obter, de imediato pela terceira propriedade, que toda granulometria é **idempotente**, para isso basta assumir que $\lambda = \mu$. A primeira propriedade garante a **anti-extensividade** de uma granulometria, ou seja, dado um conjunto A , tem-se que $\psi_\lambda(A) \subset A$. Este resultado é facilmente obtido fazendo $\mu = 0$. A segunda propriedade garante que a granulometria é **crescente** e a terceira, chamada de **peneira mais forte** (*stronger sieve*)[31] ou **absorção** [34], garante que o resultado da aplicação do mapeamento é sempre igual à transformação pelo maior parâmetro independente da ordem. Observe que pode-se obter, de imediato pela terceira propriedade, que toda granulometria é **idempotente**, para isso basta assumir que $\lambda = \mu$.

Em [31] existe um exemplo que ilustra muito bem essa definição de granulometria: considere uma população de cinco pessoas, constituída de três homens e duas mulheres, a cada pessoa associa-se um número, chamado “altura”, que varia de $1,20m$ até $1,80m$. Esta população constitui um conjunto X e deseja-se classificar este conjunto de acordo com a “altura” de cada um de seus elementos, ou seja, é preciso definir uma família de transformações que dependem de um parâmetro não-negativo ψ_λ , sendo que esta família precisa ter as propriedades da anti-extensividade, crescimento e absorção.

Define-se a transformação $\psi_\lambda(X)$ como sendo o conjunto formado pelas pessoas com altura maior ou igual a λ . Dessa forma $\psi_{1,5}(X)$ é o conjunto de todas as pessoas com $1,50m$ ou mais.



Figura 4.1: Conjunto X e as alturas correspondentes a cada elemento [31].

(a) **Anti-extensiva**

É imediato verificar que $\forall \lambda \geq 0$, tem-se que $\psi_\lambda(X)$ é um subconjunto de X . Observe esta relação na **Figura 4.2**.

(b) **Crescente**

Suponha que Y seja o conjunto formado pelas mulheres de nossa população X , logo $Y \subset X$. Pode-se observar na **Figura 4.2** que para qualquer valor que λ possa assumir (em nosso exemplo $\lambda = 1,40m$), tem-se $\psi_\lambda(Y) \subset \psi_\lambda(X)$.

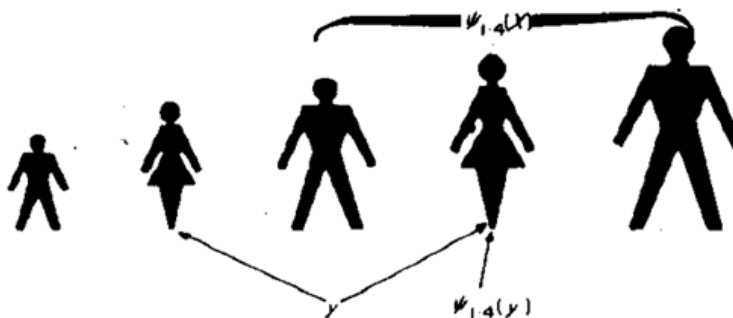


Figura 4.2: Anti-extensividade e crescimento da transformação $\psi_\lambda(X)$ [31].

(c) **Absorção**

Esta propriedade é mais sutil que as anteriores, veja na **Figura 4.3** o significado de $\psi_{1.6}[\psi_{1.4}(X)]$. Em primeiro lugar obtem-se de X o conjunto

de todas as pessoas com altura maior ou igual a $1,40m$, chamar-se-á este conjunto de $X_{1.4}$. Em seguida, obtem-se de $X_{1.4}$ o conjunto de todas as pessoas com altura maior ou igual à $1,60m$. Observe que, pela definição da transformação ψ_λ , pode-se aplicar $\psi_{1.6}$ diretamente no conjunto X , obtendo assim o mesmo resultado, ou ainda, pode-se inverter a ordem em que as transformações são aplicadas que isso não afeta o resultado final, ou seja, $\psi_{1.6}[\psi_{1.4}(X)] = \psi_{1.4}[\psi_{1.6}(X)]$.

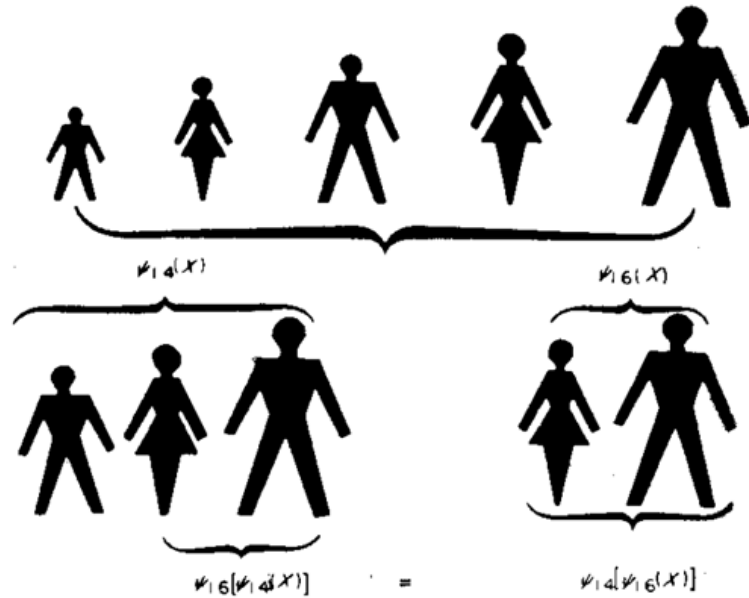


Figura 4.3: Propriedade da absorção [31].

Desta forma, define-se que uma “classificação por tamanho”, ou granulometria, é uma transformação que satisfaz estes três axiomas, ou seja, *todo mapeamento que possuir a propriedade da anti-extensividade, do crescimento e da absorção é uma granulometria*. Sob esta perspectiva, existem inúmeras granulometrias.

4.3 Curva Granulométrica

Como deve ser analisada uma granulometria?

As medições obtidas de uma granulometria são compiladas em uma **curva granulométrica**, isto é, um gráfico que relaciona um dado parâmetro λ com a medição μ obtida por este mesmo parâmetro.

Existem três formas básicas de se interpretar as medições obtidas de uma granulometria, são elas:

- i. Número de partículas de $\psi_\lambda \times \lambda$.
- ii. Área superficial(volume) de $\psi_\lambda \times \lambda$.
- iii. Perda de área superficial(volume) entre ψ_λ e $\psi_{\lambda+1} \times \lambda$.

O terceiro tipo de curva granulométrica é chamado de **padrão espectral** (*pattern spectrum*) da imagem. A principal característica do padrão espectral é que valores grandes em um determinado λ indicam uma grande quantidade de estruturas de tamanho λ [34]. Ou seja, em uma medição por número, o padrão espectral informa a quantidade de partículas de determinado tamanho.

Desde que um mapeamento obedeça às três propriedades apresentados na seção anterior, chamadas de **Axiomas de Matheron**, não importa em que dimensão está o domínio da imagem, o mapeamento é uma granulometria. A diferença reside na forma de interpretar as medições obtidas. Por exemplo, em uma imagem em tons de cinza ao invés de medir-se a área superficial, mede-se o volume (umbra) da imagem [34].

4.4 Tipos de Granulometrias

Com dito anteriormente, *todo* mapeamento que for anti-extensivo, crescente e com a propriedade da absorção é uma granulometria, dessa forma pode-se definir inúmeras granulometrias, uma para cada tipo de mapeamento limitado às restrições acima. Além do tipo de mapeamento, é comum o tipo de EE utilizado caracterizar a granulometria. Vê-se a seguir os dois tipos mais comuns de granulometrias utilizadas.

4.4.1 Granulometria Linear

A **granulometria linear** é caracterizada não pelo mapeamento utilizado, mas sim pela forma do EE. Define-se um segmento de reta B sobre uma reta Δ na direção α . Este conjunto B fará o papel do EE utilizado no mapeamento. Pode-se dizer que na granulometria linear, a análise é feita sobre um ponto de vista unidimensional [31].

Qualquer mapeamento que faz uso de um EE deste tipo é classificado como uma granulometria linear. Dentre os mapeamentos mais frequentemente utilizados na granulometria linear estão a erosão e a abertura. Chama-se por **erosão linear** a granulometria que utiliza um segmento de reta como EE e a erosão como mapeamento, e por **abertura linear** o caso em que usa-se o segmento de reta como EE e o mapeamento é uma abertura.

Na erosão linear, um dado conjunto $X \in \mathbb{R}^2$ é erodido por um segmento de reta B de comprimento l e direção α . A medida μ normalmente aplicada ao conjunto $\varepsilon_B(X)$ é definida por

$$P_\alpha(l) = \text{Fração da área do conjunto } \varepsilon_B(X) \quad (4.3)$$

sendo l o comprimento do segmento B e α sua direção.

Observe que define-se $P_\alpha(l)$ como a *fração da área*, pois se está considerando o conjunto X em \mathbb{R}^2 , no caso do conjunto X pertencer à \mathbb{R}^3 , $P_\alpha(l)$ indicará a *fração do volume* de $\varepsilon_B(X)$.

Pode-se plotar a função $P_\alpha(l)$ por l e assim obter uma curva granulométrica da erosão linear. No gráfico da **Figura 4.4** tem-se as curvas granulométricas de três conjuntos X_1 , X_2 e X_3 . Observe que os conjuntos X_2 e X_3 diferem apenas na organização espacial dos grãos, por isso possuem a mesma curva. [31]

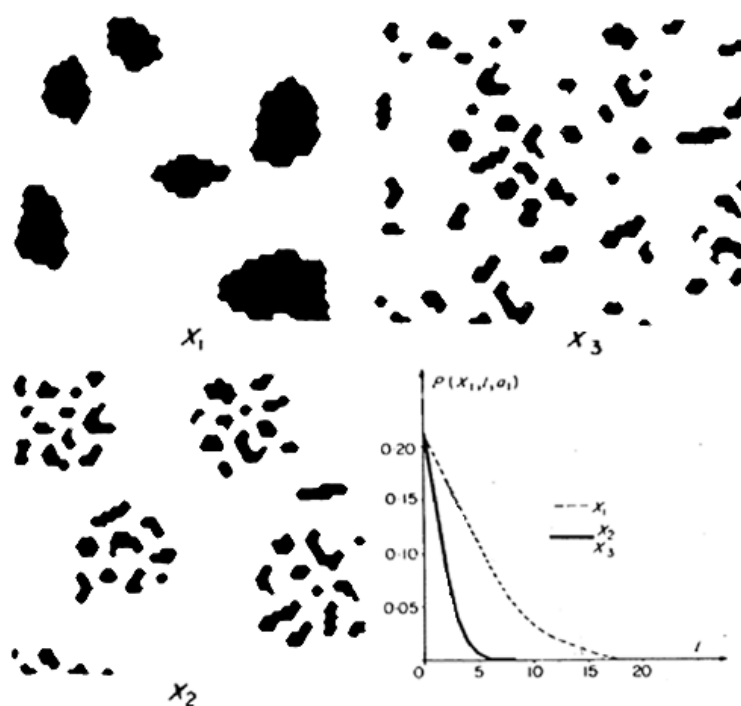


Figura 4.4: Os conjuntos X_1 , X_2 e X_3 e suas respectivas curvas granulométricas [31].

4.4.2 Granulometria por Abertura

A **granulometria por abertura** é provavelmente a mais conhecida e implementada forma de granulometria. Muitas vezes a granulometria por

abertura é referenciada apenas por “granulometria”, ignorando a existência de outras granulometrias e interpretando-a como uma transformação e não como um método de quantificação. Isso se deve ao fato da interpretação geométrica da abertura ser análoga ao ato físico do peneiramento.

Pela definição de abertura, vê-se que esta transformação satisfaz as duas primeiras propriedades da granulometria, mas nem sempre satisfaz a propriedade da absorção. De fato, para que a abertura esteja de acordo com a propriedade da absorção, o EE utilizado deve ser compacto e convexo, isto é, o EE deve ser invariante com relação à ampliação [31, p. 334].

Seja λB uma homotetia gerada em um conjunto compacto e convexo B através da multiplicação por um escalar λ . A família gerada pelas aberturas $X_{\lambda B}$ é uma granulometria baseada em um parâmetro crescente λ , pois satisfaz a **Definição 4.1** e aos quatro axiomas da quantificação.

Observe na **Figura 4.5** um exemplo de quantificação por abertura, por um EE quadrado plano de tamanho crescente, e sua quantificação por duas formas nas imagens da **Figura 4.6**. Observe que o pico no gráfico **Figura 4.6(b)** indica o tamanho da maioria dos grãos da **Figura 4.5(a)**.

A granulometria por abertura pode ser estendida à imagens em tons de cinza, mas neste caso é definido um *pattern spectrum* do volume da imagem ao invés da área (considerando o tom de cinza como a 3ª dimensão do grão relacionado).

Tem-se pela dualidade entre a abertura e o fechamento que *abrir os grãos* de um conjunto X é equivalente a *fechar os poros* deste mesmo conjunto, dessa forma, ao invés de se considerar a proporção do conjunto X eliminada após da abertura ou a proporção do conjunto X^c eliminada após do fechamento é possível considerar a proporção dos pontos do espaço que se mantiveram após a abertura e o fechamento de X . Ambas as granulometrias

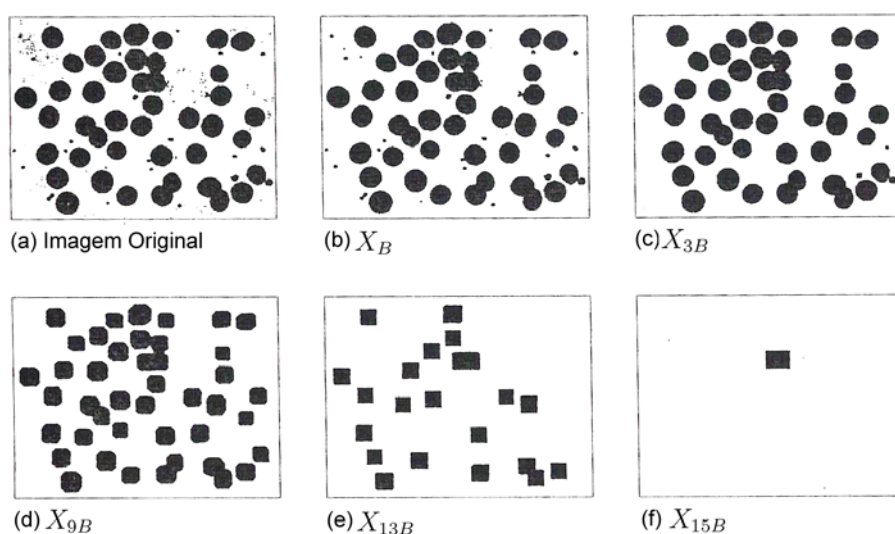


Figura 4.5: Aberturas sucessivas de uma imagem binária com um EE quadrado [34].

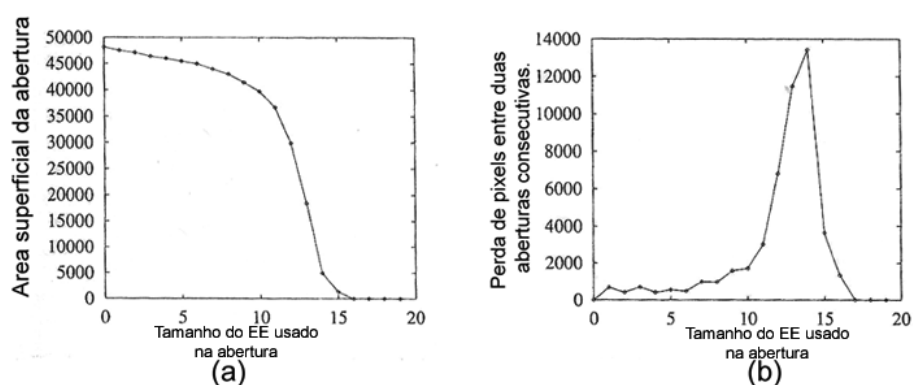


Figura 4.6: Dois tipos de curvas granulométricas para a **Figura 4.5** [34].

são colocadas em um única curva granulométrica sendo que a curva representando as aberturas é colocada no lado direito do gráfico (valores positivos de λ) e a curva representando o fechamento é colocada no lado esquerdo do gráfico (valores negativos de λ) [34]. A definição de qual lado recebe qual curva varia de acordo com o autor, em [31] esta ordem é inversa. Observe na **Figura 4.7** um exemplo deste tipo de representação.

Quando quantifica-se um conjunto X através da granulometria por aber-

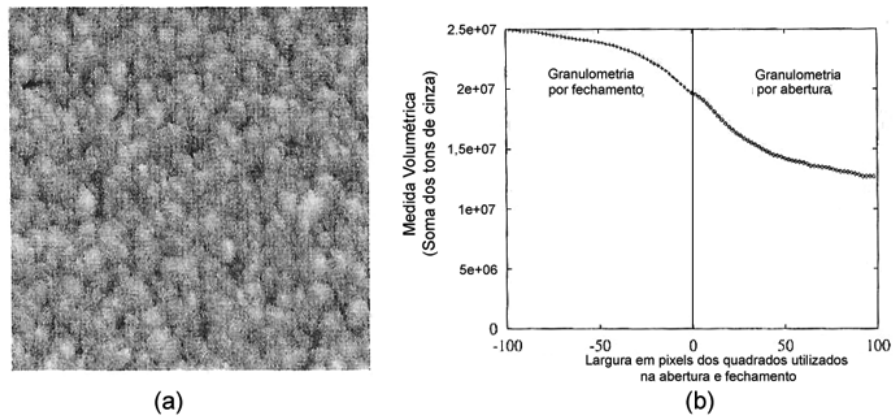


Figura 4.7: Granulometria em tons de cinza pela abertura e fechamento [34].

tura, cada ponto $x \in X$ recebe um valor λ , sendo este valor o escalar que multiplica o maior λB contido em X e que contém x , isto é:

$$\lambda_X(x) = \sup \{ \lambda : x \in \lambda B \subset X \} \quad (4.4)$$

Pode-se observar em **Figura 4.9** o *Pattern Spectrum* gerado a partir da granulometria apresentada na **Figura 4.8**, neste tipo de granulometria é avaliado a perda de área superficial em proporção ao número de pontos, ou seja, é uma granulometria por área e não por número. O EE é um quadrado plano de lado crescente.

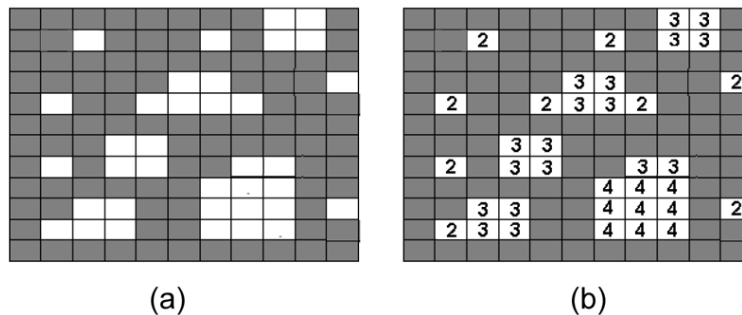


Figura 4.8: (a) Conjunto X . (b) Aplicação da granulometria por abertura [11].

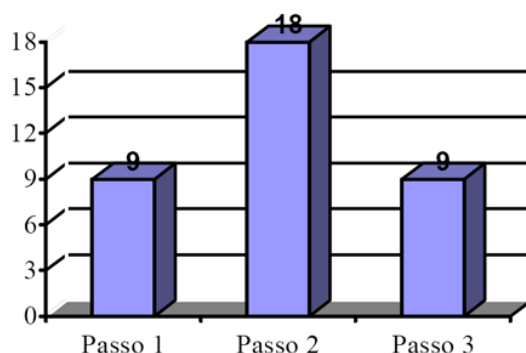


Figura 4.9: *Pattern Spectrum* da granulometria da Figura 4.8 [11].

4.5 Reconstrução Morfológica

Observa-se na Figura 4.8, que os grãos não foram tratados como um conjunto único, isto é, pequenas partes de alguns grãos foram eliminadas em passos anteriores ao da eliminação do grão. O maior grão que aparece nesta figura teve uma parte eliminada no passo 3 enquanto o grão propriamente dito, foi eliminado completamente no passo 4.

Não importando a medição utilizada, por perda de área/volume ou número de grãos, o fato de um grão ser eliminado em partes acarretará em uma medição errada do tamanho e quantidade dos grãos [11]. Para contornar esse problema, deve-se *reconstruir* completamente todo o grão que não tenha sido completamente eliminado em uma etapa, antes da medição da granulometria continuar.

Dado a condição de reconstruir grãos não totalmente eliminados faz-se necessário definir um conjunto novo de primitivas morfológicas. Estas primitivas são conhecidas como **erosão e dilatação condicional** em [14]²

²Em [34] elas são conhecidas por **erosão e dilatação geodésica**. Este conceito também aparece em [14], sendo que neste está mais de acordo com a idéia intuitiva obtida pelo nome.

4.5.1 Erosão e Dilatação Condicional

A dilatação condicional envolve duas imagens, além do EE: uma *imagem marcador* Z e uma *imagem máscara* S , $Z \subset S$. A imagem Z será operada de forma tradicional de acordo com a operação utilizada enquanto que a imagem S funcionará como uma condição para a imagem Z . Formalmente define-se a **dilatação condicional** por um EE B de uma imagem Z condicionada à uma imagem S , representada por $\delta_B^S(Z)$, por:

$$\delta_B^S(Z) = \delta_B(Z) \cap S \quad (4.5)$$

A equação (4.5) representa a dilatação condicional binária, sendo sua equivalente em tons de cinza dada por:

$$\delta_B^g(f) = \delta_B(f) \wedge g \quad (4.6)$$

onde f é a imagem marcadora, B um EE plano e g a imagem máscara. No caso das imagens serem em cores, basta representá-las no espaço de cores HSV e utilizar a relação mínimo colorido apresentado no capítulo anterior. Reescrevendo fica-se com:

$$\delta_B^g(f) = \delta_B(f) \overline{\wedge} g \quad (4.7)$$

onde o símbolo $\overline{\wedge}$ indica o mínimo colorido entre f e g .

De forma equivalente define-se a erosão condicional de uma imagem marcadora Z por um EE estruturante B limitada por uma imagem máscara S por:

$$\varepsilon_B^S(Z) = \varepsilon_B(Z) \cup S \quad (4.8)$$

sendo as equações (4.9) e (4.10) as equivalentes para imagens em tons de cinza e coloridas³ respectivamente.

$$\varepsilon_B^g(f) = \varepsilon_B(f) \vee g \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_B^g(f) = \varepsilon_B(f) \underline{\vee} g \quad (4.10)$$

onde o símbolo $\underline{\vee}$ indica a máximo colorido entre f e g .

Observe na **Figura 4.10** um exemplo de dilatação condicional em uma imagem do espaço *HSV* usando a métrica constante de cromaticidade definida no capítulo 2. Perceba como todos os grãos “marcados” pela imagem na **Figura 4.10b** foram reconstruídos completamente. Nesta figura tem-se (a) como a imagem original, (b) a imagem marcadora, (c) e dilatação da imagem original por um EE plano 15×15 e (d) a dilatação condicional de (b) usando (a) como imagem máscara.

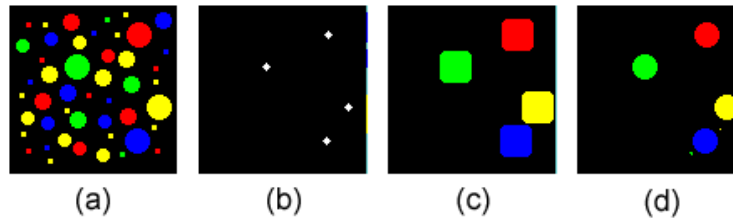


Figura 4.10: Reconstrução por dilatação condicional de tamanho fixo.

Ao lado do grão azul na **Figura 4.10d** pode-se perceber partes dos conjuntos vizinhos ao grão, isso acontece porque o marcador, na posição deste grão, dilatado pelo EE do exemplo invadiu partes de outros grãos da figura, fazendo com que estas partes aparecessem no resultado da dilatação condicional. Isso equivale a dizer que os grãos estão muito perto um do outro,

³Com a condição da imagem colorida pertencer ao espaço *HSV*.

sendo que essa noção de proximidade é fortemente influenciada pelo tamanho e forma dos conjuntos envolvidos assim como do EE [14].

Em [14] é apresentado uma forma de lidar com este problema. A propriedade da interatividade da dilatação e erosão apresentada no **Capítulo 1** implica que pode-se decompor a dilatação de um conjunto pelo EE nB por n dilatações deste mesmo conjunto por B . Pode-se assim reconstruir o conjunto inicial sem a possibilidade de aparecimento de partes indesejáveis. Na **Figura 4.11** este processo é aplicado às imagens da dilatação condicional apresentadas na **Figura 4.10** por um EE 3×3 . Perceba que os grãos marcados foram reconstruídos sem que houvesse o aparecimento de partes indesejáveis de outros conjuntos. Apresenta-se as 5 primeiras interações da dilatação condicional da **Figura 4.10a** tomando como imagem marcadora a **Figura 4.10b**.



Figura 4.11: Reconstrução por dilatação condicional de tamanho crescente.

Vale a pena ressaltar que o tamanho e forma do EE neste caso também influencia essa noção de proximidade. De maneira geral, deve-se escolher um EE de tal forma que a parte da imagem que se deseja reconstruir (no caso os grãos marcados na imagem original) dilatada não invada nenhum conjunto vizinho (em geral este EE não possui dimensões maiores que 3).

4.5.2 Reconstrução

As operações morfológicas condicionais de um dado tamanho possuem poucas utilidades na prática. Mas quando aplicadas em processos recursivos até atingirem a estabilidade e definem uma poderosa ferramenta morfológica chamada de **reconstrução** [34].

Define-se a **reconstrução por dilatação**, representada por $R_g^B(f)$, pela dilatação condicional de uma imagem marcadora f , limitada por uma imagem máscara g , utilizando um EE B por:

$$R_B^g(f) = \delta_{nB}^g(f) \quad (4.11)$$

onde n é tal que $\delta_{nB}^g(f) = \delta_{(n+1)B}^g(f)$.

A equação (4.11) apresenta a *reconstrução por dilatação* em imagens em tons de cinza (coloridas se as imagens estiverem sendo representadas no espaço *HSV* com a métrica *constante de cromaticidade*), sendo sua equivalente binária obtida de maneira trivial.

Apresenta-se na **Figura 4.12** um exemplo da reconstrução por dilatação, onde é feita a reconstrução da imagem marcadora f limitada por uma imagem máscara g utilizando um EE B plano 3×3 depois de 7 interações.

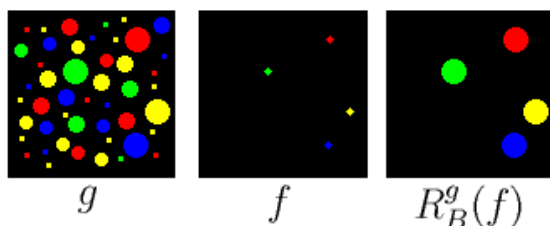


Figura 4.12: Reconstrução da imagem marcadora f .

Em [14, 34] são apresentadas outras formas de reconstrução, utilizando outros operadores morfológicos, mas a idéia central é a mesma da reconstru-

ção por dilatação apresentada nesta seção.

Características da Reconstrução

Dados f e h duas imagens marcadoras, B um EE e g uma imagem máscara. É imediato verificar que:

- i. Fazendo $f \leq h \Rightarrow R_B^g(f) \leq R_B^g(h)$.
- ii. $R_B^g(f) \leq g$.
- iii. $R_B^{R_B^g(f)}(f) = R_B^g(f)$.

Em outras palavras a reconstrução é *(i)*crescente, *(ii)*anti-extensiva e *(iii)*idempotente caracterizando dessa forma uma granulometria [34]. A reconstrução morfológica é uma ferramenta ideal para a construção de uma granulometria baseada na medição do número de partículas eliminadas em cada passo.

4.6 Notas Gerais

Neste capítulo apresenta-se os conceitos da granulometria e reconstrução morfológica, assim como sua extensão à imagens coloridas. Propositalmente não é feita nenhuma distinção entre imagens binárias, tons de cinza e coloridas, isto porque uma vez definida uma relação de ordem, a teoria é válida e independe do espaço em que a imagem se apresenta. Enfatiza-se estes conceitos à imagens coloridas segundo a métrica definida no capítulo anterior.

Percebe-se que a forma de ordenação escolhida faz toda a diferença no resultado obtido pela análise, fazendo com que se passe de resultados significativos para uma simples geração de números sem representação física real.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Resultado da Granulometria no Espaço

HSV

Nesta seção é aplicada a técnica de granulometria em imagens coloridas utilizando a métrica “constante de cromaticidade” proposta no **Capítulo 2**. Elege-se para cada imagem a cor de fundo como cor mínima.

Na **Figura 5.1** podem ser observadas as imagens sintéticas utilizadas como testes da granulometria proposta. Percebe-se que a diferença entre as imagens se limita às cores utilizadas, isto é, todas possuem as mesmas quantidades dos mesmos tamanhos de grãos mas com cores diferentes.

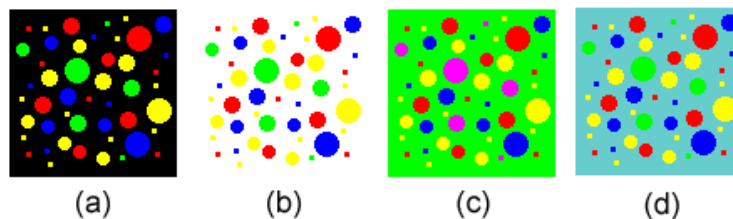


Figura 5.1: Imagens sintéticas utilizadas como teste.

Na **Tabela 5.1** apresenta-se o número de grãos de cada tamanho nas imagens da **Figura 5.1**, assim como a área ocupada por cada tipo de grão. Devido a natureza discreta do espaço, nem todos os grãos de mesmo tamanho possuem a mesma área.

| <i>Tamanho dos Grãos</i> | <i>Nº de Grãos</i> | <i>Área ocupada</i> |
|--------------------------|--------------------|---------------------|
| 3 | 23 | 207 |
| 5 | 10 | 520 |
| 7 | 10 | 800 |
| 11 | 4 | 708 |

Tabela 5.1: Número de grãos e área que ocupam.

Um problema na definição de uma granulometria colorida reside em como medi-la, visto que a cor reside em um espaço dimensional maior que 3. O fato de se escolher a cor de fundo como cor mínima, torna possível avaliar a imagem e verificar se cada cor presente na mesma faz parte de um grão ou do fundo. Avalia-se as cores verificando a “distância” de cada uma à cor de fundo através da métrica proposta no capítulo 2. Perceba que a função tende a classificar cada pixel da imagem em pertencente ou não ao fundo, ou seja, cria uma binarização para a mesma. Uma vez binarizada, pode-se, definindo assim o conceito de **área relevante** da imagem, ou seja, define-se a área relevante como a quantidade de pixels que pertencem aos grãos.

Dois tipos de granulometrias foram construídas com estas imagens, uma apenas por abertura e outra usando abertura com reconstrução. Estas granulometrias serão representadas fazendo-se vários tipos de curvas granulométricas para que se possa avaliar a força desta ferramenta.

5.1.1 Resultados em Imagens Sintéticas

Observe nas imagens das **Figura 5.2**, **Figura 5.4**, **Figura 5.6** e **Figura 5.8** a granulometria por abertura aplicada às imagens (a),(b),(c) e (d) da **Figura 5.1** respectivamente.

Nas **Figura 5.3**, **Figura 5.5**, **Figura 5.7** e **Figura 5.9** é utilizada a granulometria por abertura com reconstrução nas imagens da **Figura 5.1**. Observe que nestas figuras os grãos não estão deformados pelo EE usado como ocorreu com as imagens correspondentes no teste sem reconstrução. O EE utilizado é um EE plano, quadrado de lado 3 pixels.

Nas **Figura 5.2** o parâmetro λ representa a abertura da malha em cada passo do processo.

Antes da realização de qualquer medição pode-se perceber que, independente das cores de cada imagem, os resultados obtidos foram bem semelhantes. De fato, ao obter-se a área relevante em cada passo das granulometrias por abertura apresentadas nas **Figura 5.2**, **5.4**, **5.6** e **5.8** verifica-se que os valores são idênticos. Este valores, em pixels, obtidos em cada passo das granulometrias por aberturas acima foram transcritos na **Tabela 5.2**.

| | <i>Imagem teste (a)</i> | <i>Imagem teste (b)</i> | <i>Imagem teste (c)</i> | <i>Imagem teste (d)</i> |
|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Passo 1 | 2235 | 2235 | 2235 | 2235 |
| Passo 2 | 2235 | 2235 | 2235 | 2235 |
| Passo 3 | 2235 | 2235 | 2235 | 2235 |
| Passo 4 | 1708 | 1708 | 1708 | 1708 |
| Passo 5 | 1708 | 1708 | 1708 | 1708 |
| Passo 6 | 1268 | 1268 | 1268 | 1268 |
| Passo 7 | 1268 | 1268 | 1268 | 1268 |
| Passo 8 | 628 | 628 | 628 | 628 |
| Passo 9 | 628 | 628 | 628 | 628 |
| Passo 10 | 484 | 484 | 484 | 484 |
| Passo 11 | 484 | 484 | 484 | 484 |
| Passo 12 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 5.2: Área relevante nas imagens (a), (b), (c) e (d) da **Figura 5.1**.

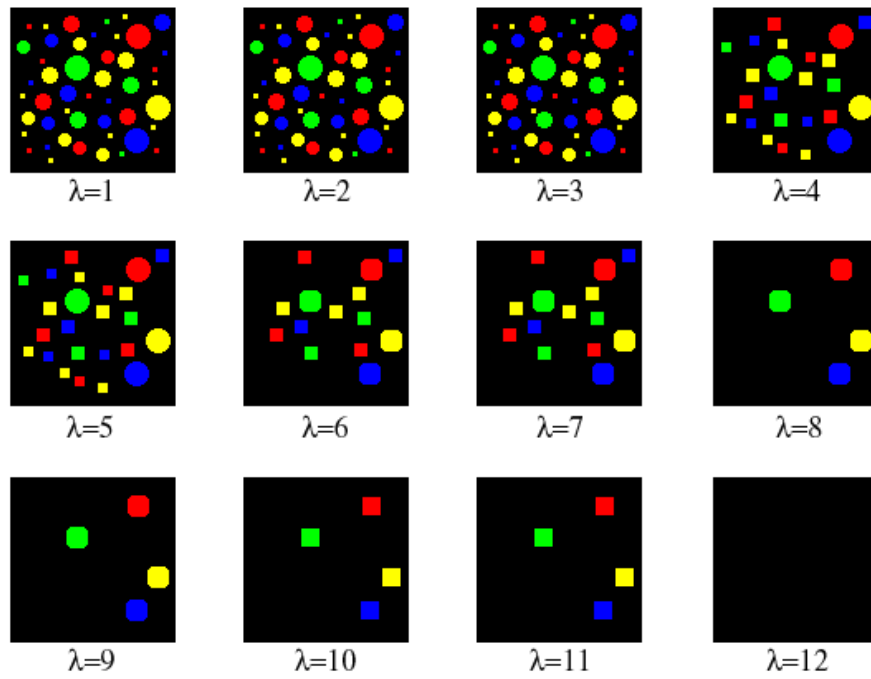


Figura 5.2: Granulometria por abertura da **Figura 5.1a**.

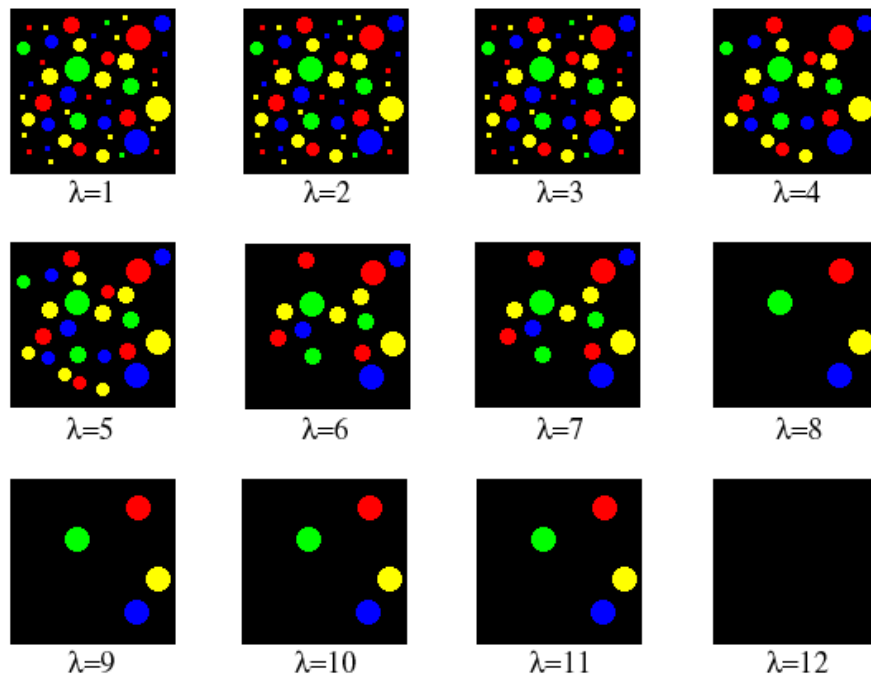


Figura 5.3: Granulometria por abertura com reconstrução da **Figura 5.1a**.

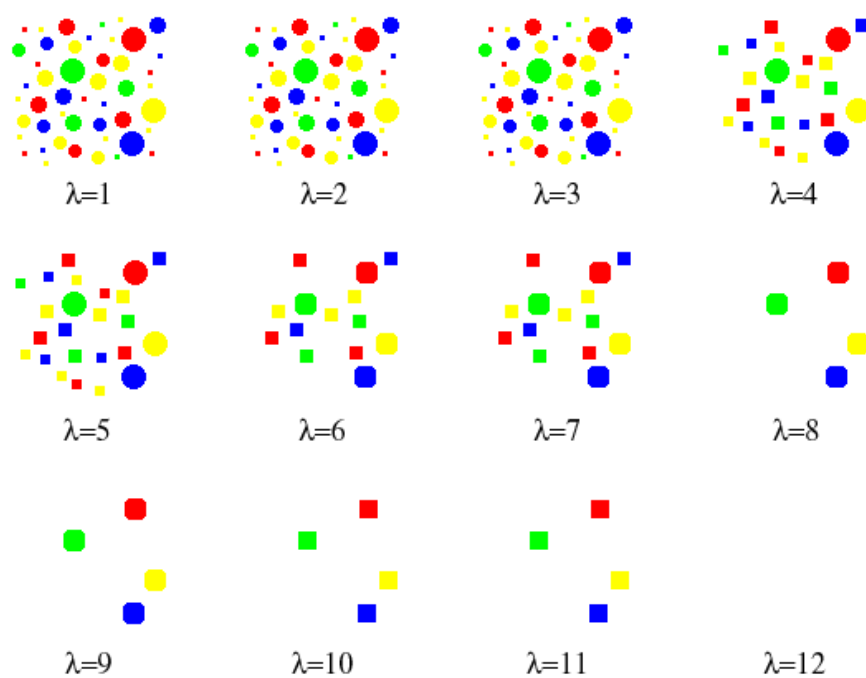


Figura 5.4: Granulometria por abertura da **Figura 5.1b**.

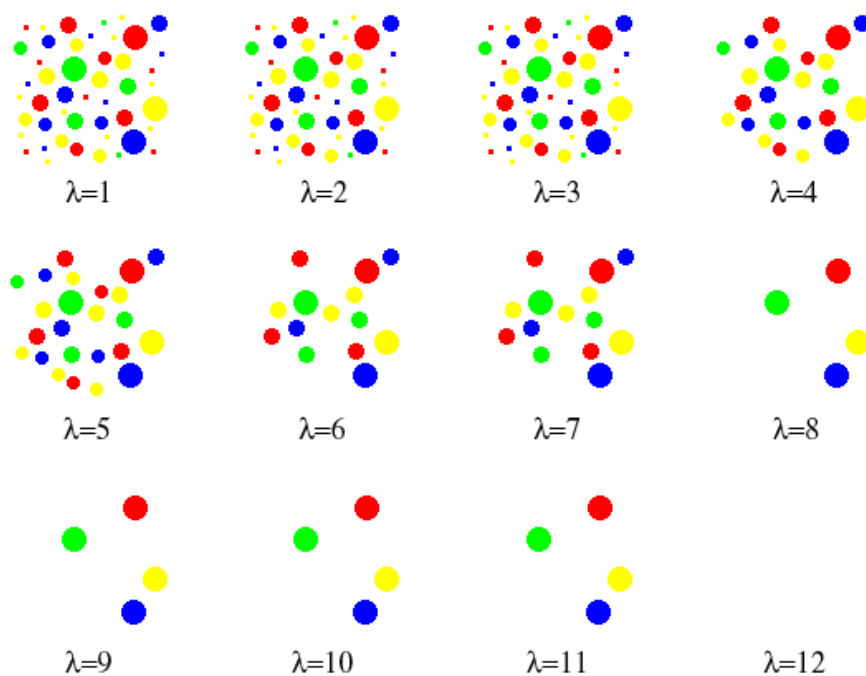


Figura 5.5: Granulometria por abertura com reconstrução da **Figura 5.1b**.

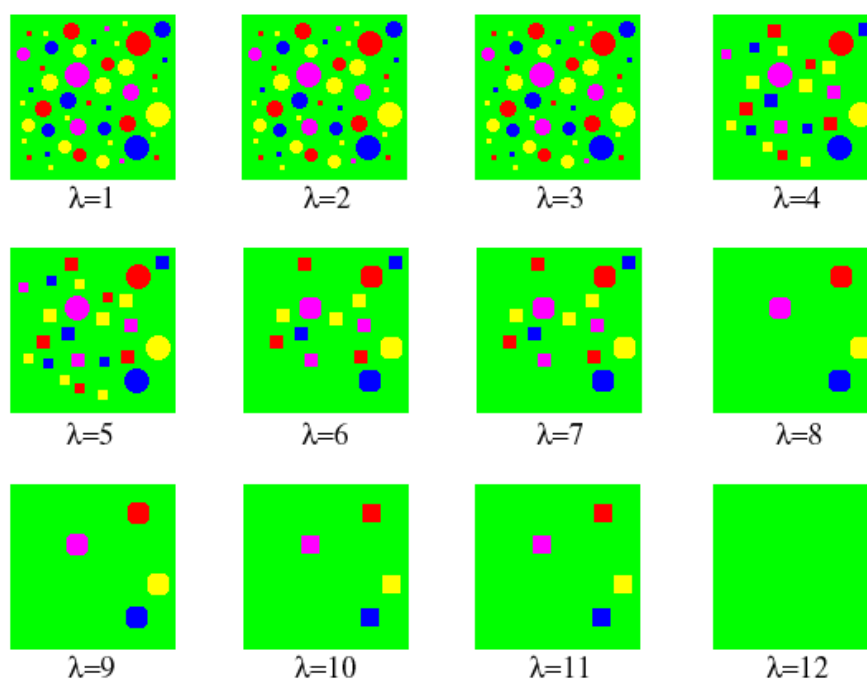


Figura 5.6: Granulometria por abertura da **Figura 5.1c**.

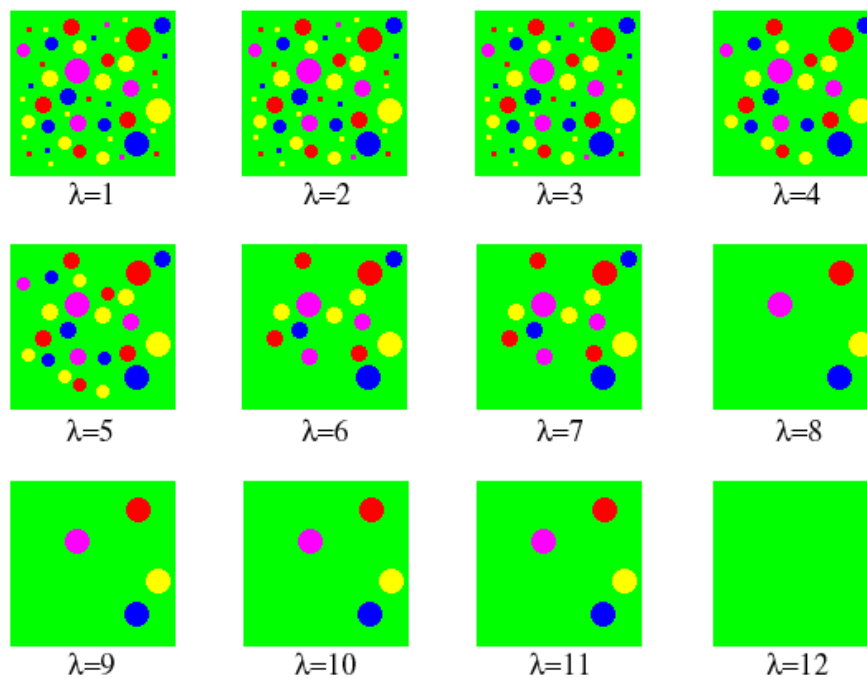
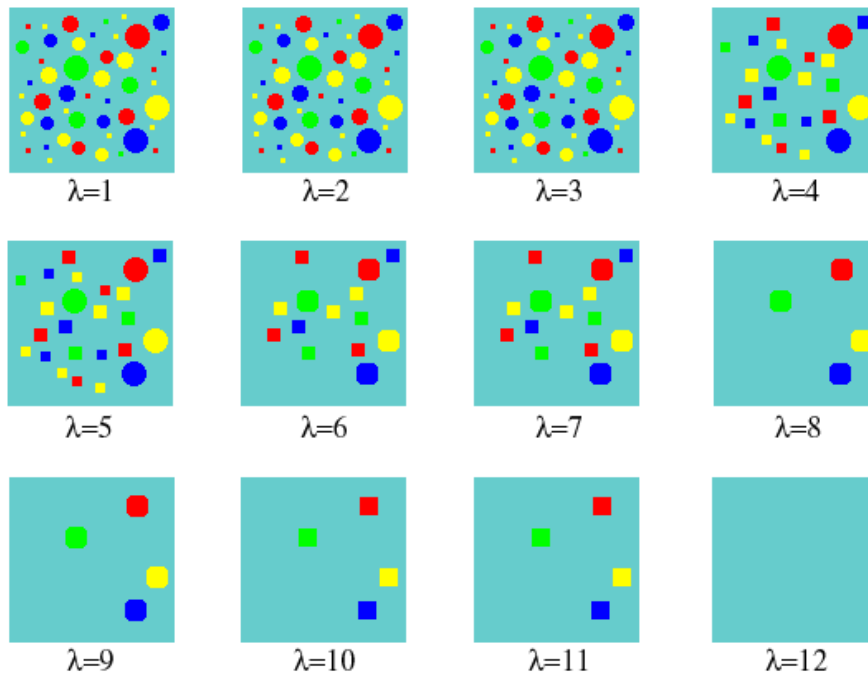
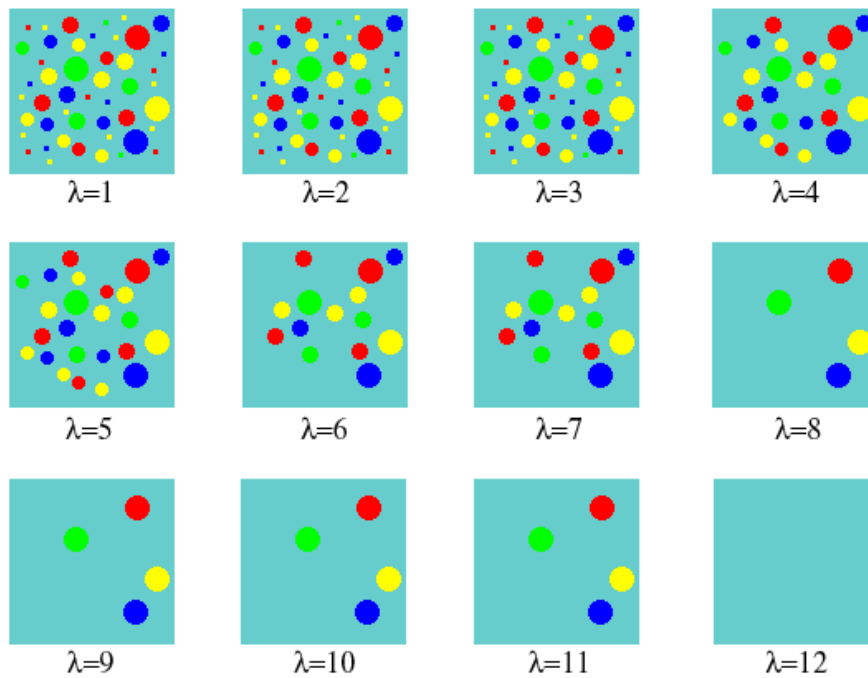


Figura 5.7: Granulometria por abertura com reconstrução da **Figura 5.1c**.

Figura 5.8: Granulometria por abertura da **Figura 5.1d**.Figura 5.9: Granulometria por abertura com reconstrução da **Figura 5.1d**.

Na **Tabela 5.3** apresenta-se os valores da área relevante na imagem em cada passo das granulometrias por abertura com reconstrução apresentadas em **Figura 5.3**, **Figura 5.5**, **Figura 5.7** e **Figura 5.9**. Neste caso também não houve influência da cor usada como cor de fundo. Observa-se no entanto que há diferença dos valores obtido com e sem reconstrução, isto é, entre os resultados das **Tabela 5.2** e **5.3**.

| | <i>Imagem teste (a)</i> | <i>Imagem teste (b)</i> | <i>Imagem teste (c)</i> | <i>Imagem teste (d)</i> |
|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Passo 1 | 2235 | 2235 | 2235 | 2235 |
| Passo 2 | 2235 | 2235 | 2235 | 2235 |
| Passo 3 | 2235 | 2235 | 2235 | 2235 |
| Passo 4 | 2028 | 2028 | 2028 | 2028 |
| Passo 5 | 2028 | 2028 | 2028 | 2028 |
| Passo 6 | 1508 | 1508 | 1508 | 1508 |
| Passo 7 | 1508 | 1508 | 1508 | 1508 |
| Passo 8 | 708 | 708 | 708 | 708 |
| Passo 9 | 708 | 708 | 708 | 708 |
| Passo 10 | 708 | 708 | 708 | 708 |
| Passo 11 | 708 | 708 | 708 | 708 |
| Passo 12 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 5.3: Área relevante com reconstrução das imagens (a), (b), (c) e (d) da **Figura 5.1**.

Curvas Granulométricas

Na **Figura 5.10** é representado o primeiro tipo de curva granulométrica obtida pelas medições apresentadas nesta seção. No gráfico aparecem juntas a granulometria por abertura somente e a granulometria por abertura com reconstrução para fins comparativos.

O **padrão espectral** é obtido pela diferença entre passos consecutivos. Este padrão pode ser observado na **Figura 5.11**. Os valores elevados em um determinado λ indicam que as células que ocupam mais espaço (maior medida) são destes tamanhos.

Em [14] é citado um outro tipo de curva granulométrica. Essa curva re-

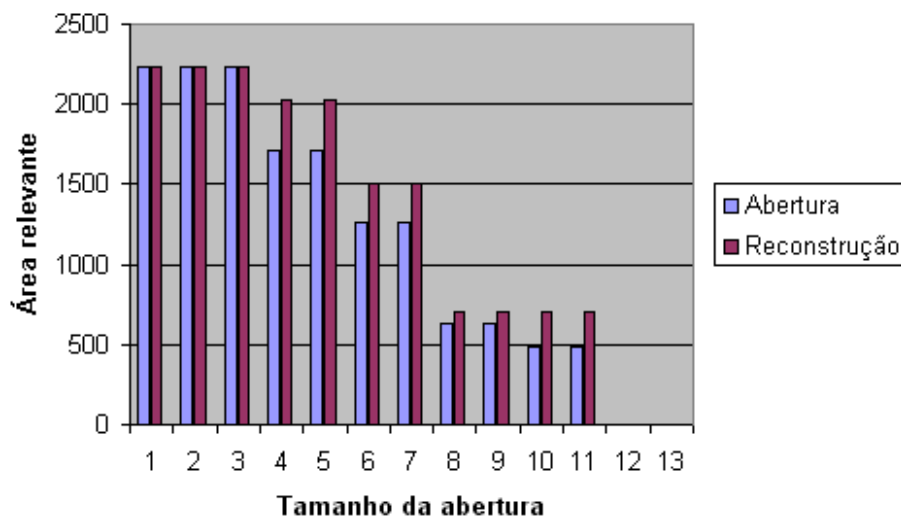


Figura 5.10: Curva granulométrica representando as áreas relevantes apresentadas nas tabelas 5.2 e 5.3.

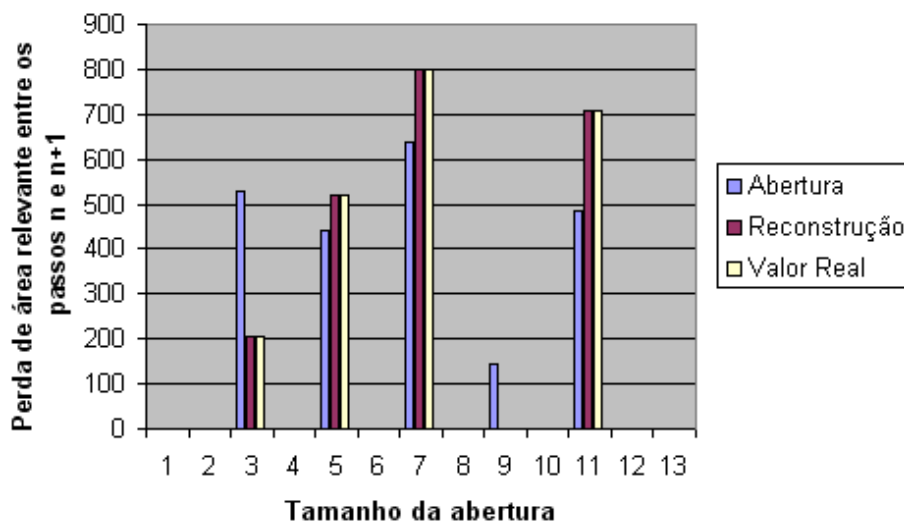


Figura 5.11: Padrão espectral das granulometrias apresentadas nas tabelas 5.2 e 5.3.

presentada por $F_m(\lambda)$ e chamada de **distribuição de medida normalizada** é apresentada na **Figura 5.12**, sendo definida por:

$$F_m(\lambda) = 1 - \frac{AS(\psi_\lambda(X))}{AS(X)} \quad (5.1)$$

onde $AS(\psi_\lambda(X))$ é a área relevante da granulometria no passo λ e $AS(X)$ a área relevante original da figura.

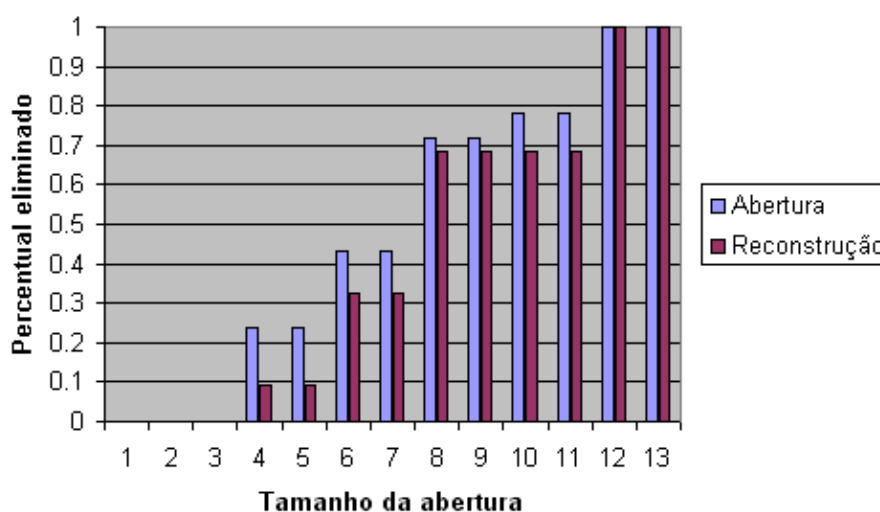


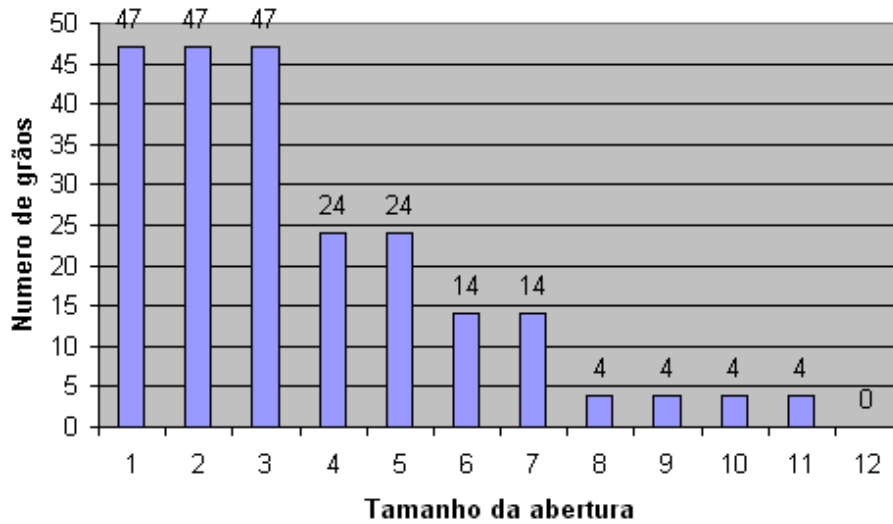
Figura 5.12: Distribuição em medida normalizada obtida pelas medições apresentadas nas tabelas 5.2 e 5.3.

Até agora as granulometrias foram representadas através de funções de medidas em área obtidas nas tabelas **Tabela 5.2** e **Tabela 5.3**. Na **Tabela 5.4** são apresentadas as medições em número de grãos obtidas em cada passo das granulometrias por abertura com reconstrução das **Figura 5.5**, **Figura 5.7** e **Figura 5.9** apresentadas nesta seção, sendo possível com isso contar quantos grãos existem de cada diâmetro.

Na **Figura 5.13** apresenta-se uma distribuição utilizando estes valores.

Assim como a função de distribuição em medida normalizada, em [14] é apresentada a função de **distribuição em número normalizada**, representada por $F_n(\lambda)$, sendo definida por:

| | Grãos |
|----------|-------|
| Passo 1 | 47 |
| Passo 2 | 47 |
| Passo 3 | 47 |
| Passo 4 | 24 |
| Passo 5 | 24 |
| Passo 6 | 14 |
| Passo 7 | 14 |
| Passo 8 | 4 |
| Passo 9 | 4 |
| Passo 10 | 4 |
| Passo 11 | 4 |
| Passo 12 | 0 |

Tabela 5.4: Número de grãos presentes nas imagens (a), (b), (c) e (d) da **Figura 5.1**.Figura 5.13: Número de grãos em cada passo obtido pelas medições apresentadas na **Tabela 5.4**.

$$F_n(\lambda) = 1 - \frac{N(\psi_\lambda(X))}{N(X)} \quad (5.2)$$

onde $N(\psi_\lambda(X))$ é o número de grãos presentes na imagem no passo λ e $N(X)$ o número de grãos total da imagem. Em **Figura 5.14** apresenta-se esta distribuição.

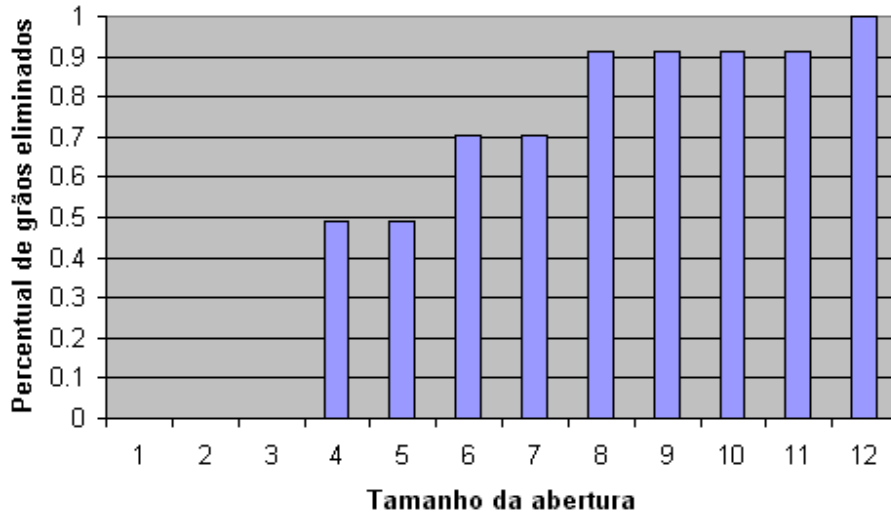


Figura 5.14: Distribuição em número normalizada obtida pelas medições apresentadas na Tabela 5.4.

Um dos resultados mais poderosos na interpretação de uma granulometria é obtido por sua representação através do padrão espectral. Aplicando a diferença entre passos consecutivos na medição por número é obtido a quantidade de grãos de cada tamanho presente na imagem. Observe na **Figura 5.15** esta característica.

5.1.2 Resultados em Imagens Reais

Apresenta-se nesta seção a aplicação da técnica às imagens reais e são discutidos os problemas encontrados.

Na **Figura 5.16** testa-se 3 tipos de imagens reais. A imagem **Figura 5.16a** é composta por 6 grãos de ervilha, 7 grãos de milho, 4 grãos de feijão branco e 8 grãos de arroz, totalizando assim 25 grãos. Nas imagens **(b)** e **(c)** aparecem estes mesmos grãos, mas como o fundo não é preto, foi adicionado mais 5 grãos de feijão preto, totalizando nessa imagem 30 grãos.

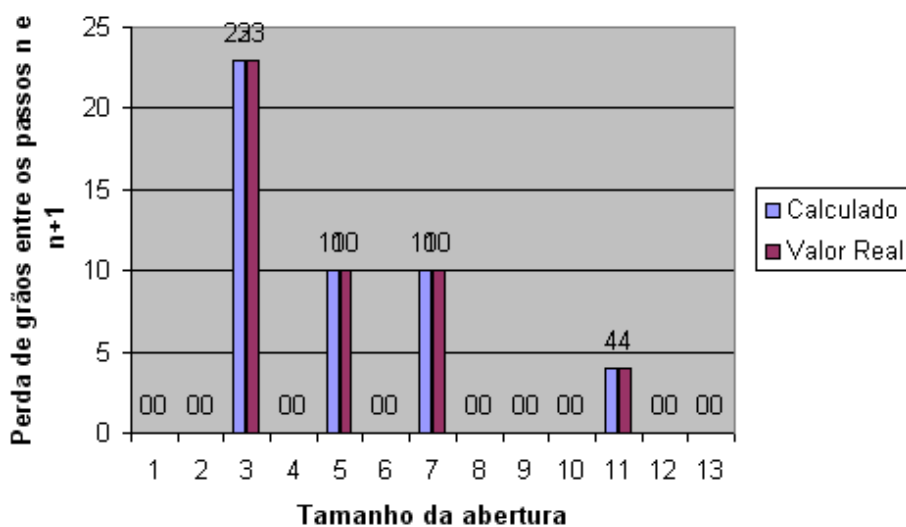


Figura 5.15: Padrão espectral em número obtido pelas medições da Tabela 5.4.

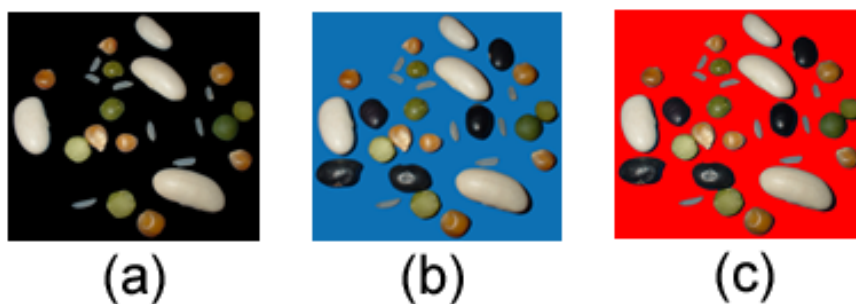


Figura 5.16: Imagens reais testadas.

Estas imagens possuem resolução de 100×100 pixels. A escolha por uma baixa resolução nas imagens tem como objetivo agilizar o processo de abertura e posterior reconstrução, visto que a ferramenta utilizada não é adequada na questão de velocidade de processamento. Sabe-se que a maioria dos erros ocorridos na fase de medição decorre da baixa definição das imagens.

Na Figura 5.17 aplica-se a morfologia colorida construída pela métrica *constante de cromaticidade*, proposta neste trabalho, na Figura 5.16a. Esta

granulometria é feita através de aberturas com reconstrução, de 30 iterações, em cada passo. Pode-se perceber que conforme a granulometria vai evoluindo, as variações de cores dos grãos somem, sendo que depois de algumas iterações os grãos possuem apenas uma cor sólida. Apesar dessa perda de variação da cor, a forma do grão não é alterada e portanto o tempo extra de processamento destinado a reconstrução justifica-se pois o grão é medido corretamente.

Um dos problemas encontrados é que grãos que estão juntos são considerados como sendo um só, mesmo no caso dos grãos serem de tipos diferentes. Na **Figura 5.17** pode-se perceber isto a partir do passo 4 quando apenas um grão de arroz fica na figura, só sendo eliminado quando o grão de feijão branco que está ao seu lado também some. Esta característica está presente em todos os testes, mesmo em grãos que não estão “colados” mas muito próximos. Acredita-se que este erro pode ser minimizado pela utilização de uma resolução maior nas imagens de teste.

Na **Figura 5.18** faz-se a granulometria para a imagem da **Figura 5.16b**. Nesta imagem a cor do fundo escolhida é definida no espaço *HSV* pelo vetor (204, 0.93, 0.70).

Os padrões que ficaram nas imagens ao final dos testes (passos 14, 15 e 16) não influenciam a contagem dos grãos, pois estas cores estão próximas¹ demais da cor do fundo e portanto tratados como ruídos. Estes ruídos possuem a mesma cor de fundo mas com intensidades diferentes, e seu aparecimento está ligado ao fato da métrica “constante de cromaticidade” ser insensível a componente *V* do espaço *HSV* onde está definida a imagem.

Na **Figura 5.19** apresenta-se a granulometria da imagem da **Figura 5.16c**.

¹Esta proximidade é definida pela métrica *constante de cromaticidade*

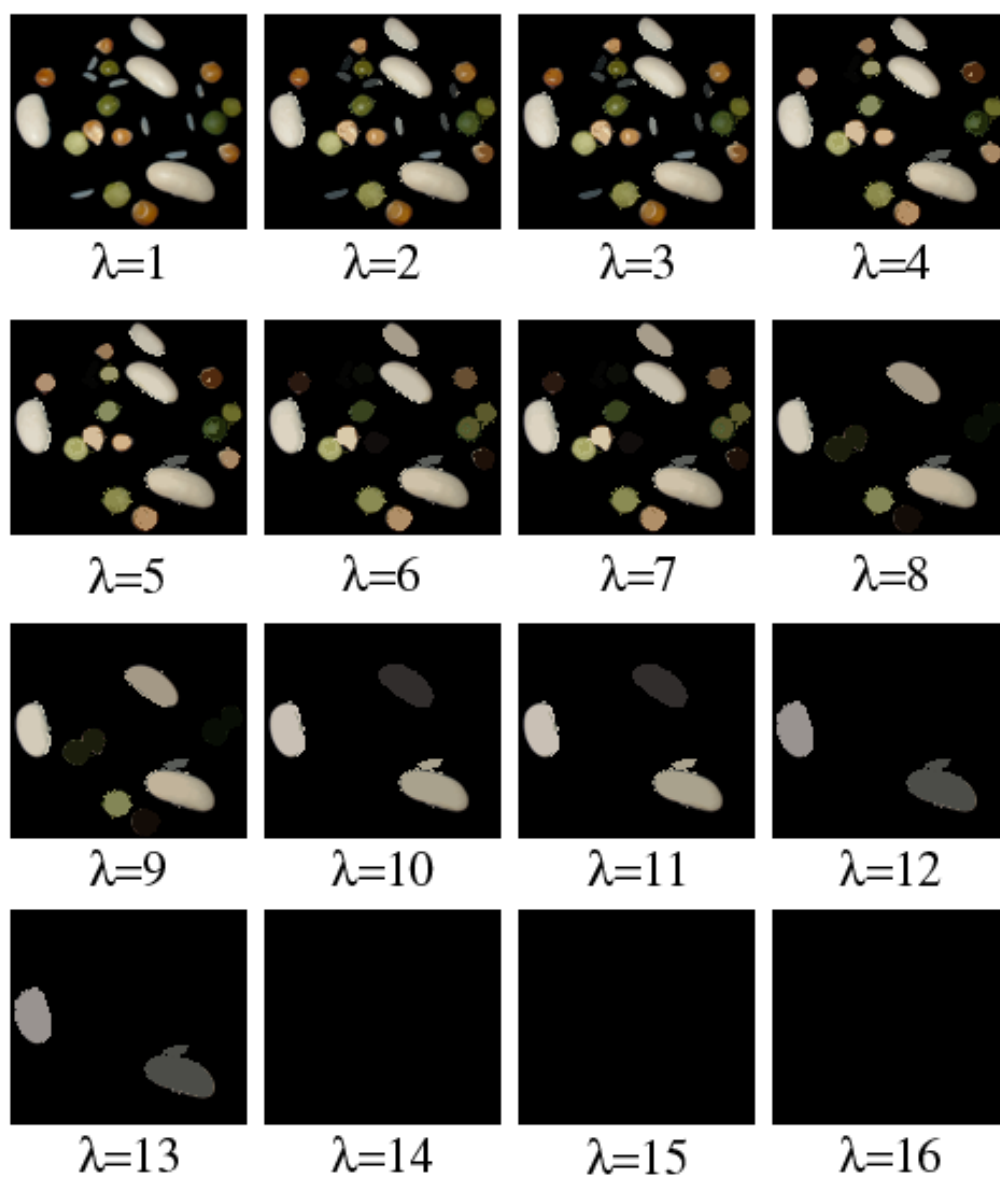


Figura 5.17: Granulometria colorida da **Figura 5.16a**.

Curvas Granulométricas

Considerando-se as curvas granulométricas obtidas dos resultados apresentados em **Figura 5.17**, **Figura 5.18** e **Figura 5.19** tem-se as figuras

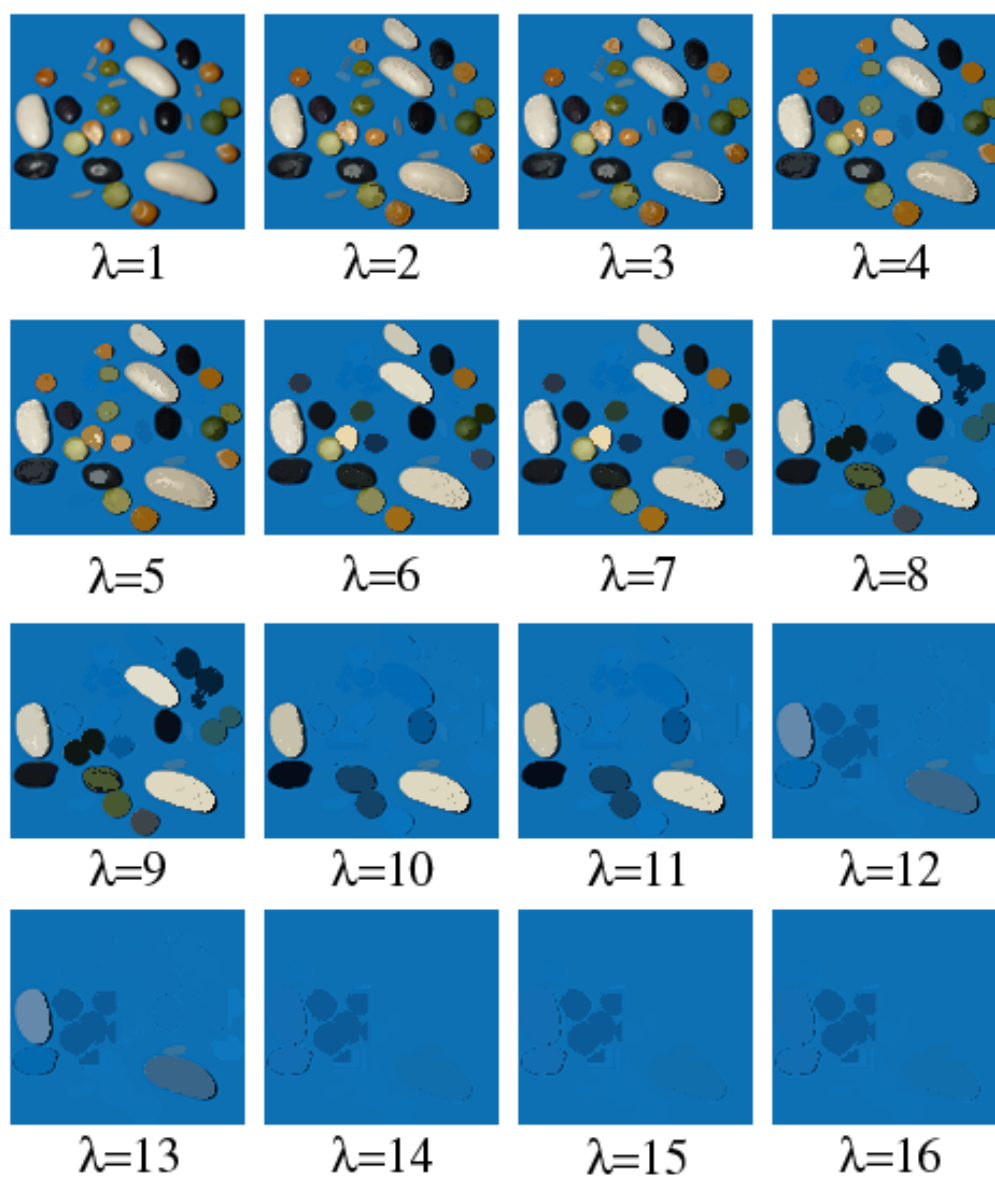


Figura 5.18: Granulometria colorida da **Figura 5.16b**.

Figura 5.20 a 5.23.

A medição utilizada agora será mais simples se feita em número, ou seja, verifica-se o número de grãos que existem em cada passo da granulometria.

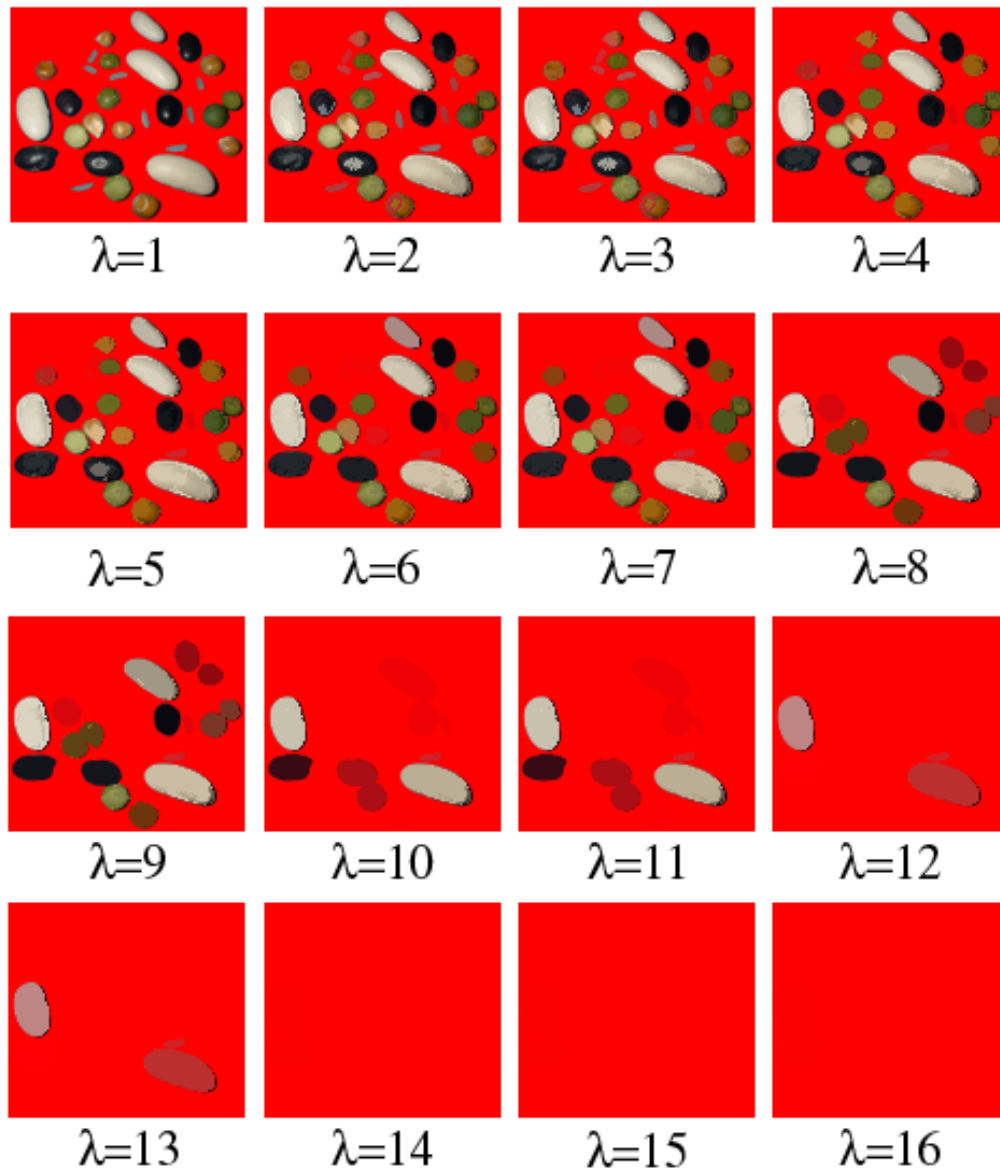


Figura 5.19: Granulometria colorida da **Figura 5.16c**.

Além disso, apresenta-se também o padrão espectral do número de grãos, para com isso poder identificar a quantidade de grãos de cada tamanho na imagem.

Na contagem dos grãos em cada passo da granulometria, deve-se verificar se cada cor presente na imagem faz parte de um grão ou do fundo. Para tanto verifica-se a “distância” de cada cor na imagem da cor do fundo pela métrica “constante de cromaticidade”, no caso desta distância ser menor que um valor mínimo definido (nas granulometrias utiliza-se 0, 1) esta cor é considerada como uma variação da cor do fundo, em caso contrário é considerada a cor de um grão. A cor dos padrões que apareceram na granulometria da **Figura 5.18** estão muito próximas da cor do fundo, por isso estes padrões não foram considerados como grãos (e sim ruídos).

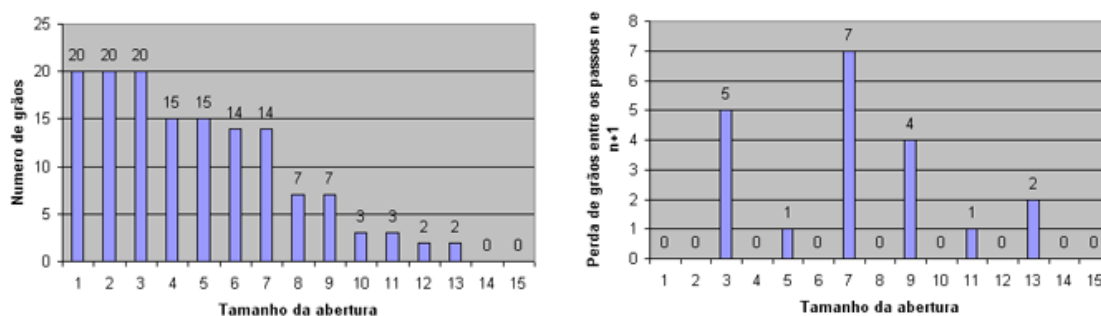
Na **Tabela 5.5** apresenta-se essa contagem de grãos das granulmetias aqui apresentadas, sendo a primeira coluna a contagem da granulometria da **Figura 5.17**, na segunda coluna a encontra-se a contagem dos grãos presentes nas imagens que aparece na **Figura 5.18** e na terceira coluna a contagem dos grãos que aparecem nas diversas imagens presentes na **Figura 5.19**.

Apresenta-se em **Figura 5.20**, **Figura 5.21** e **Figura 5.22** as curvas granulométricas construídas pela contagem apresentada na **Tabela 5.5**. Nestas imagens, as curvas da esquerda representam a quantidade de grãos em cada passo das imagens e as curvas da direita apresentam os padrões espectrais das imagens originais, isso é, o número de grãos correspondentes a cada diâmetro..

Como apenas as imagens (b) e (c) da **Figura 5.16** possuem a mesma quantidade de grãos, apresenta-se na **Figura 5.23** seus padrões espectrais para uma análise comparativa dos resultados.

Nos testes efetuados, tanto com imagens sintéticas quanto com reais, o fundo da imagem é composto por apenas uma cor, mas em situações normais não é possível obter esta regularidade na cor, áreas de sombra ou reflexos

| | Grãos Imagem fundo preto | Grãos Imagem fundo azul | Grãos Imagem fundo vermelho |
|----------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| Passo 1 | 20 | 25 | 26 |
| Passo 2 | 20 | 25 | 26 |
| Passo 3 | 20 | 25 | 26 |
| Passo 4 | 15 | 19 | 19 |
| Passo 5 | 15 | 19 | 19 |
| Passo 6 | 14 | 17 | 16 |
| Passo 7 | 14 | 17 | 16 |
| Passo 8 | 7 | 9 | 9 |
| Passo 9 | 7 | 9 | 9 |
| Passo 10 | 3 | 3 | 3 |
| Passo 11 | 3 | 3 | 3 |
| Passo 12 | 2 | 2 | 2 |
| Passo 13 | 2 | 2 | 2 |
| Passo 14 | 0 | 0 | 0 |
| Passo 15 | 0 | 0 | 0 |
| Passo 16 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 5.5: Contagem de grãos das **figuras** 5.17, 5.18 e 5.19 .Figura 5.20: Curva granulométrica de **Figura** 5.17.

influenciam nas cores que formam o fundo. Um exemplo disso pode ser observado na **Figura** 5.24. Esta imagem se apresenta em uma resolução maior, para que a variação da cor do fundo seja tratada com mais cuidado. A cor de fundo definida como mínima é a mesma da **Figura** 5.18.

Com a maior resolução da imagem, mais iterações foram necessárias para a total eliminação dos grãos. A figura mostra apenas algumas dessas ite-

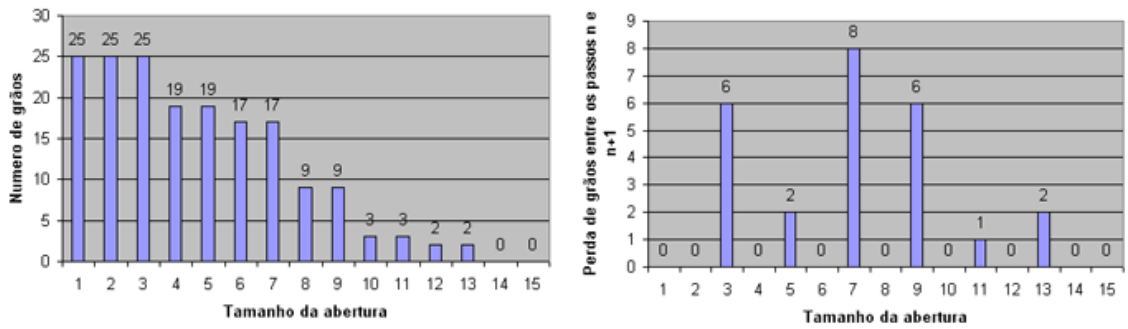


Figura 5.21: Curva granulométrica de **Figura 5.18**.

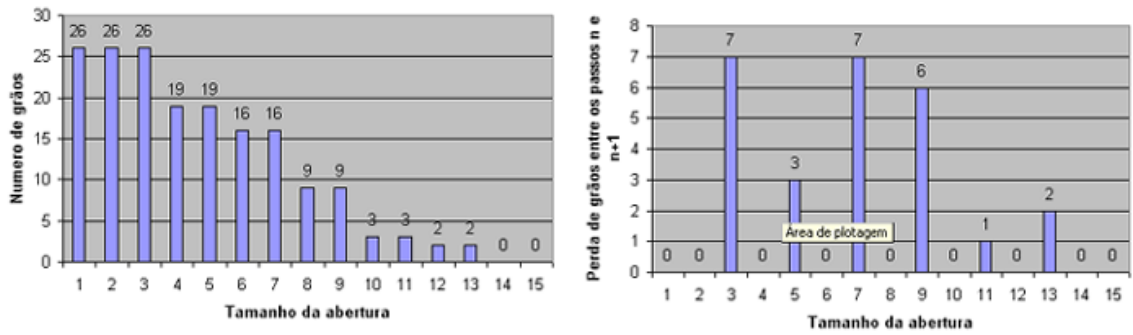


Figura 5.22: Curva granulométrica de **Figura 5.19**.

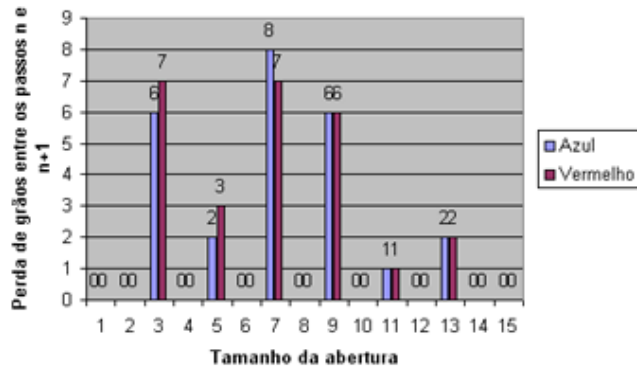


Figura 5.23: Padrões espectrais das **figuras 5.21** e **5.22**.

rações, mas nos resultados representados na curva granulométrica todos os passos são considerados.

Apresenta-se na **Figura 5.25** a granulometria da imagem **Figura 5.24**.



Figura 5.24: Grãos da **Figura 5.16** com fundo original.

Percebe-se nesta figura o aparecimento de padrões, assim como na granulometria da **Figura 5.16b**. Como antes, estes padrões não influenciaram a contagem. Dada a maior resolução da imagem, as cores caracterizadas como fundo foram as de distância menor ou igual à 0,3.

Na **Figura 5.26** apresenta-se a curva granulométrica em número das imagens apresentadas na **Figura 5.25**.

Percebe-se que devido a maior resolução da imagem, houve uma classificação mais acurada do tamanho dos grãos. Mesmo com uma distribuição diferente, pode-se perceber uma semelhança no padrão das curvas granulométricas.

5.1.3 Comparação de Resultados

Apresenta-se na **Figura 5.27** a imagem sintética utilizada para testes da granulometria colorida proposta em [22]. Esta granulometria é baseada em imagens no espaço *HSV* com a ordenação lexicográfica, que foi discutida no capítulo 2.

Na **Figura 5.28** apresenta-se a granulometria da **Figura 5.27** pela técnica proposta neste trabalho.

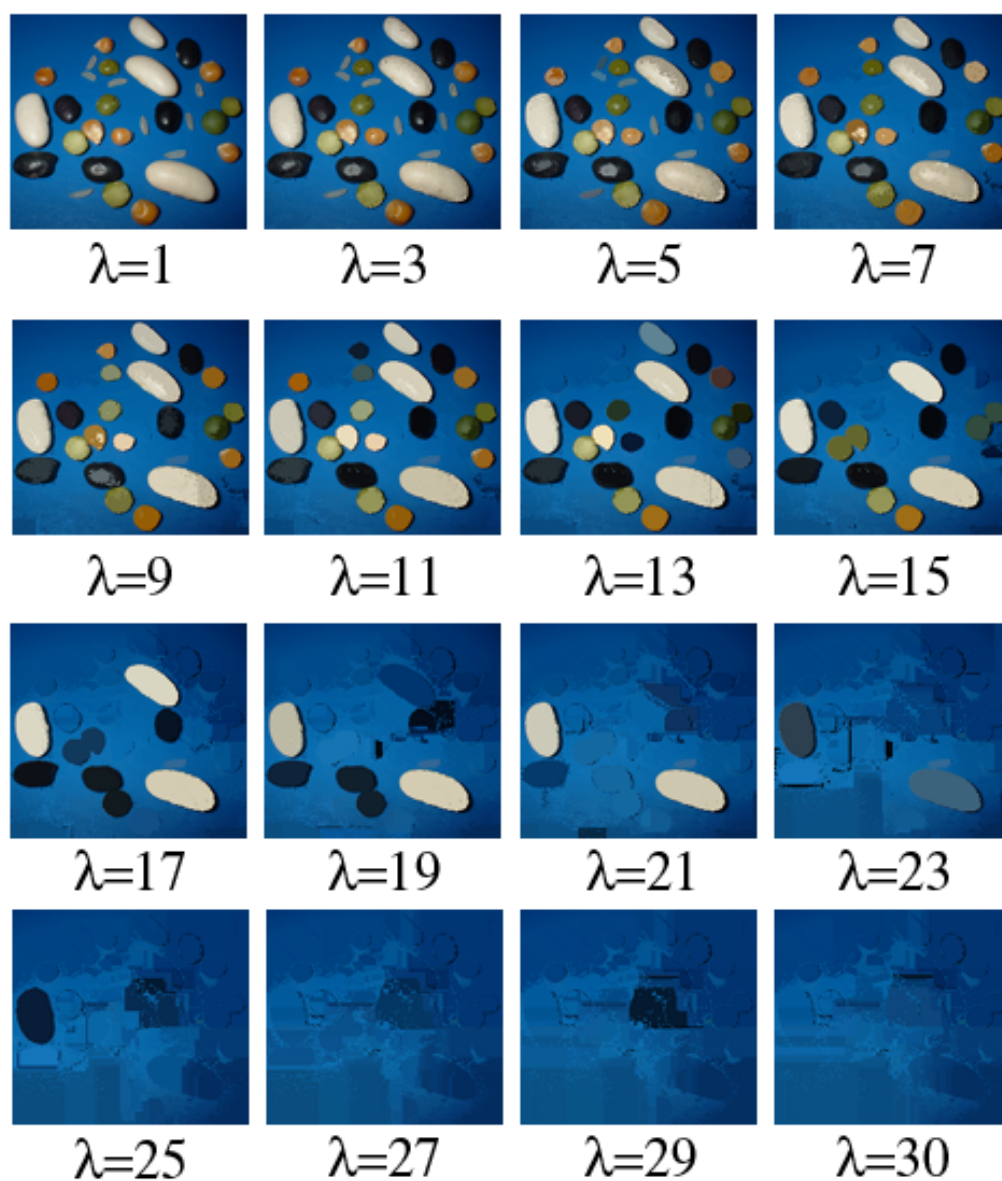


Figura 5.25: Granulometria colorida da **Figura 5.24**.

Na **Figura 5.29** os resultados da granulometria proposta em [22] (esquerda) e o resultado da granulometria apresentada em **Figura 5.28** (direita). Nesta figura, a imagem (a) compara o resultado da área relevante

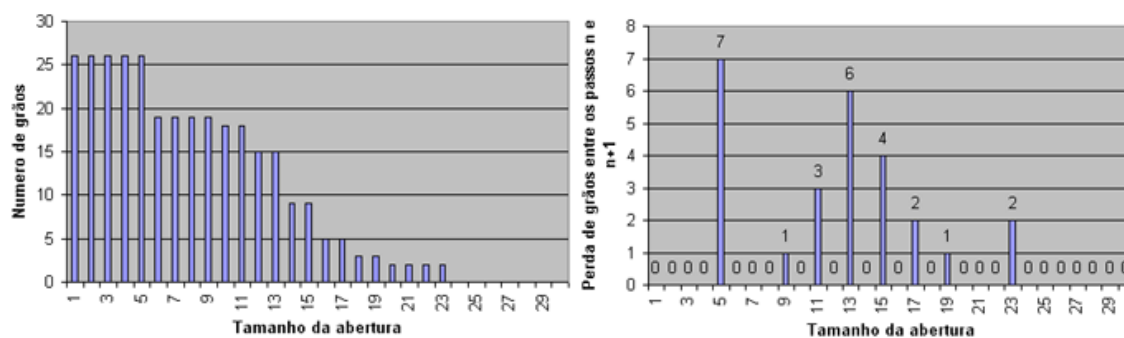


Figura 5.26: Curva granulométrica de **Figura 5.25**.

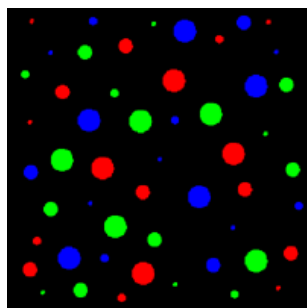


Figura 5.27: Imagem teste utilizada em [22].

em cada passo das granulometrias. A imagem **(b)** compara a perda de área relevante e a imagem **(c)** compara o padrão espectral das granulometrias.

Observa-se pelos padrões espectrais apresentados na imagem **(c)** da **Figura 5.29**, que ambas as granulometrias destacaram 4 tipos de grãos, em quantidades semelhantes, mas de tamanhos diferentes (picos no padrões espectral). Esta diferença deve-se ao fato da **Figura 5.27** possuir em [22] uma resolução diferente da utilizada neste trabalho. Não foi possível processar esta figura com a resolução utilizada em [22], pois no referido trabalho a mesma não foi informada. Percebe-se que apesar disso, as formas das curvas obtidas pelas duas granulometrias são muito semelhantes e portanto seus resultados são equivalentes.

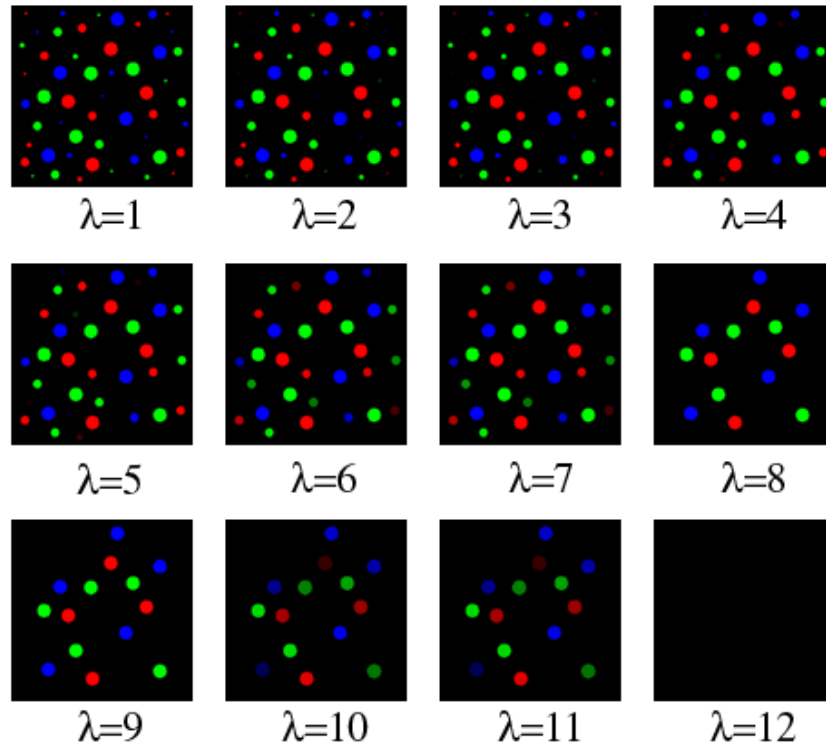


Figura 5.28: Granulometria da **Figura 5.27**.

5.2 Aplicações

5.2.1 Contagem de Células

Em [12] é proposto um sistema para o processamento, contagem e avaliação granulométrica de células, com o objetivo que avaliar células contaminadas pelo vírus HIV. Na **Figura 5.30** apresenta-se uma das imagens utilizadas em [12].

Com o intuito de eliminar pequenas variações das cores da imagem, aplica-se a abertura colorida definida neste trabalho na **Figura 5.30**, antes da granulometria. Na **Figura 5.31**, apresenta-se a granulometria colorida desta imagem.

Apresenta-se na **Figura 5.32** duas curvas granulométricas por número obtida por esta granulometria. Na imagem da esquerda apresenta-se a con-

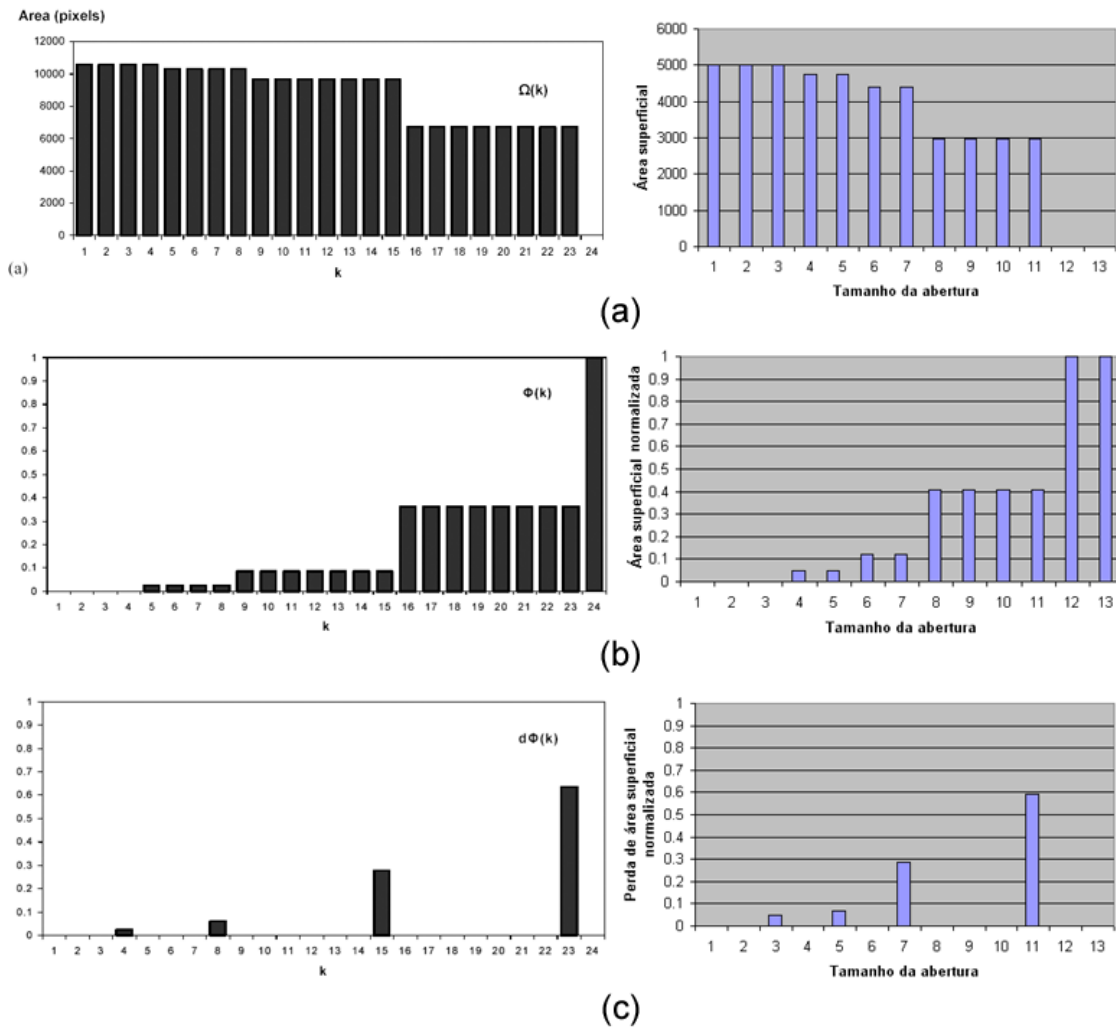


Figura 5.29: Comparação do resultado da granulometria da **Figura 5.28** (direita) com o resultado apresentado em [22] (esquerda).

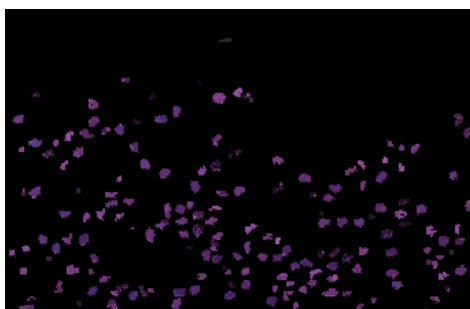


Figura 5.30: Células contaminadas pelo vírus HIV obtidas em [12].

tagem de grãos em cada passo da granulometria. Na imagem da direita apresenta-se o padrão espectral da granulometria, que informa o número de grãos de cada tamanho existente na imagem.

Observa-se que na imagem da direita da **Figura 5.32** indica a existência de dois grãos nos passos 6 e 7, assim como o padrão espectral informa a presença de dois grãos de tamanho 7 na imagem. Mas apenas 1 grão pode ser identificado visualmente. Na verdade o grão que não pode ser visto possui o valor da componente V (brilho) muito próximo à do fundo, por isso a dificuldade em identificá-lo. Mas os grãos são caracterizados pelas componentes H e S . E dessa forma este grão, que teve o valor de sua componente V alterado durante os passos da granulometria, foi contado devidamente.

5.2.2 Contagem de Algas

Em [25] mostra-se a metodologia para verificar a qualidade da água pela contagem de algas. Esta utiliza o conceito de granulometria na segmentação. A **Figura 5.33** foi obtida deste trabalho.

Na **Figura 5.34** a granulometria colorida para a **Figura 5.33**.

Apresenta-se na **Figura 5.35** duas curvas granulométricas por número obtida por esta granulometria. Na imagem da esquerda apresenta-se a con-

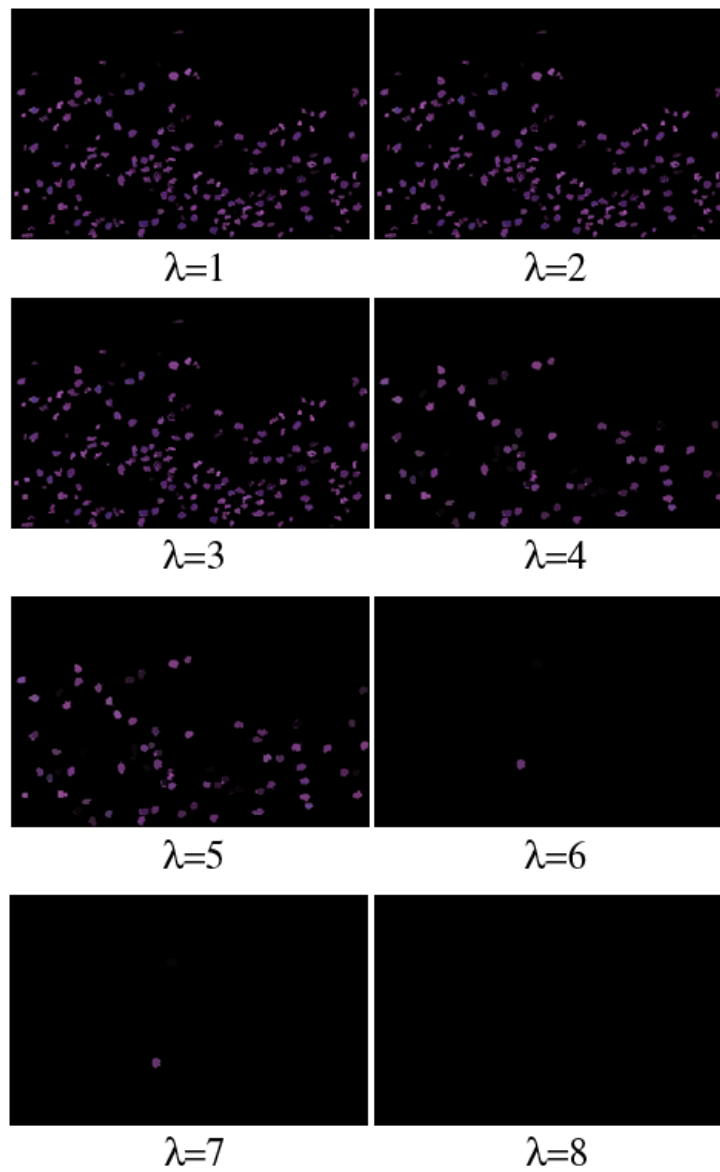


Figura 5.31: Granulometria da Figura 5.30.

tagem de grãos em cada passo da granulometria. Na imagem da direita apresenta-se o padrão espectral da granulometria.

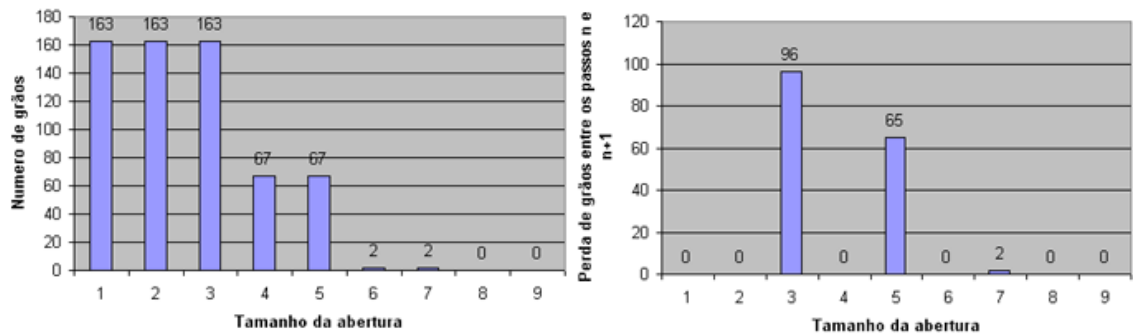


Figura 5.32: Curvas granulométrica de **Figura 5.31**.

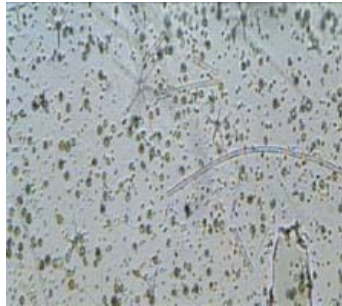


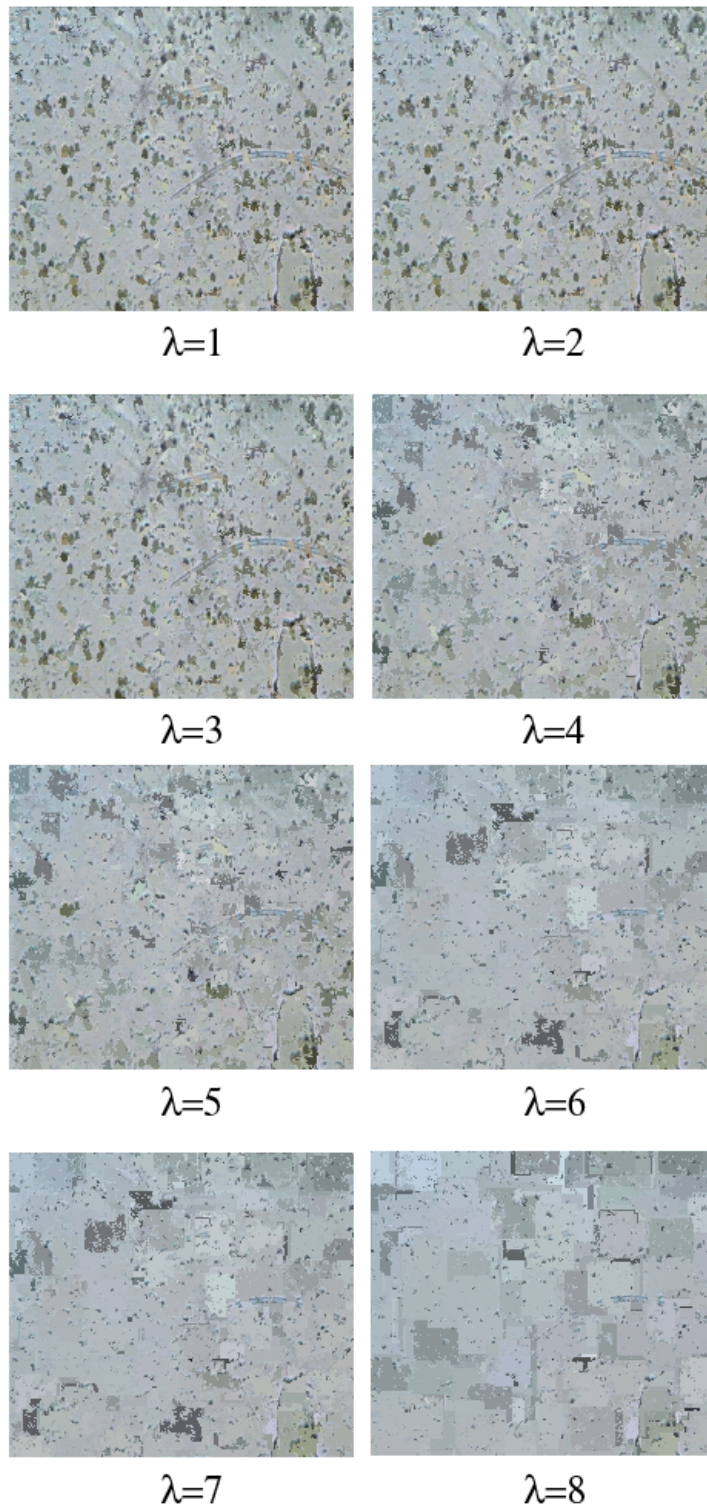
Figura 5.33: Algas obtidas em [12].

5.3 Notas Gerais

Neste capítulo aplica-se a técnica proposta à imagens coloridas sintéticas e reais, e são feitas comparações com os resultados encontrados nas referências. A granulometria aqui apresentada utiliza a métrica definida no capítulo 2.

O ponto principal desta aplicação é o fato de se eleger uma cor mínima, e com isso poder definir uma ordenação colorida. Essa característica faz com que não haja um padrão, e mesmo em uma mesma imagem, análises diferentes podem ser obtidas, bastando para isso definir cores diferentes como mínima.

Longe de trazer apenas problemas, esta propriedade pode ser desejável, pois com isso pode-se contar apenas grãos de determinadas cores ou eliminar outras cores completamente.

Figura 5.34: Granulometria da **Figura 5.33**.

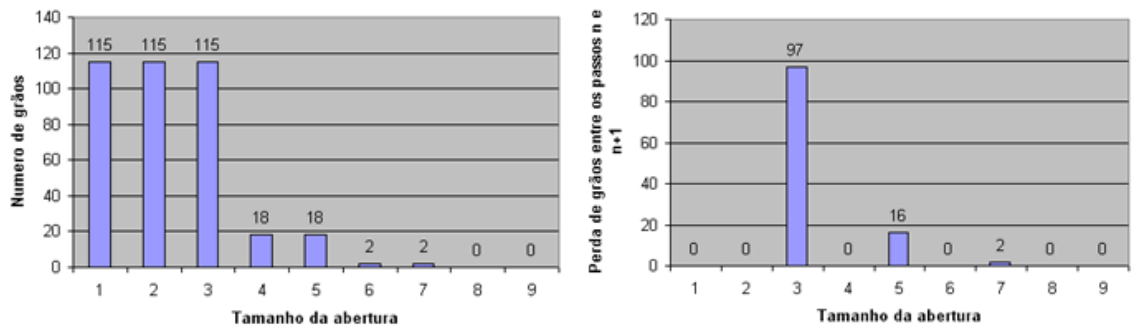


Figura 5.35: Curvas granulométrica de **Figura 5.34**.

Capítulo 6

Considerações Finais

6.1 Conclusões

Neste trabalho foi feito um estudo da Morfologia Matemática colorida e sua aplicação na contagem de elementos presentes nas imagens em análise ou granulometria.

As características e modelos de espaços de cores foram extensamente abordados, assim como os conceitos da morfologia matemática binária e em tons de cinza, fazendo deste trabalho uma importante fonte de pesquisa no desenvolvimento de estudos futuros.

Uma das dificuldades inicialmente enfrentadas foram as diversas maneiras encontradas de se definir os principais operadores da morfologia matemática. Teve-se o cuidado de verificar cada uma das definições e comprovar sua equivalência com as outras aqui propostas.

Dos problemas que surgiram durante a aplicação da morfologia colorida proposta em imagens reais, em sua maioria foram derivados da baixa definição das imagens utilizadas. A justificativa para a baixa qualidade das imagens utilizadas decorre do fato de que trabalhar com resoluções maiores acarretaria

em um grande aumento no tempo de processamento, impossibilitando o uso da reconstrução entre cada etapa da granulometria. O Hardware utilizado foi um Intel Pentium III 600GHz com 256MB de memória RAM. Os programas foram desenvolvidos utilizando-se o MatLab 6.5. O tempo utilizado no processamento das imagens sintéticas da figura **Figura 5.1** foi cerca de 32 minutos em 12 iterações. O processamento das imagens reais apresentadas na **Figura 5.16** levou cerca de 39 minutos em 14 iterações. Nestes testes, todas as imagens possuem resolução de 100×100 pixels. Não foi o objetivo deste trabalho avaliar a complexidade dos algoritmos, mas acredita-se que o tempo de processamento possa ser melhorado transformando o código usado para a linguagem C.

As bases fundamentais desta técnica no processamento de imagens monocromáticas foram usadas para se ter uma fundamentação que permitisse analisar a eficiência dos resultados esperados em sua extensão para cores. Assim as deficiências encontradas nestas propostas levam a elaboração de 3 aspectos que melhoram esta extensão para imagens coloridas: o uso do espaço *HSV*; a proposta de uma métrica no espaço *HSV*; e uma nova definição das operações dilatação e erosão neste novo espaço métrico colorido proposto.

Percebe-se que o ponto fundamental para o sucesso da construção da morfologia colorida reside no fato de se eleger a cor de fundo da imagem como cor mínima. Uma idéia para se automatizar este processo seria sempre garantir que a posição $(1, 1)$ da imagem tenha sempre a cor do que se considera fundo. Ou ainda, gerar um histograma de cores da imagem e escolher a cor de maior ocorrência (no caso em que a área do fundo seja maior que a área de grãos) ou menor (no caso contrário). Esta funcionalidade também pode ser encarada como um problema, em imagens onde os grãos estão muito próximos, e quase não existe uma área de fundo, os testes não apresentaram um re-

sultado satisfatório. Em imagens onde o fundo não possa ser discernido, a definição de uma cor mínima pode ser um trabalho tão complexo quanto a ordenação colorida. O fundo da imagem analisada deve ser o mais regular possível, no sentido de composição de cores, para que “falsos grãos” não sejam adicionados acidentalmente na imagem. Este efeito é muito comum em imagens obtidas por câmeras com *flash*, onde a luz é refletida pelo fundo.

Em imagens reais, mostrou-se necessário fazer uma primeira abertura na imagem para que se elimine as pequenas variações cromáticas. Este procedimento previne que se considere como grãos estas variações.

A morfologia matemática colorida construída pela métrica constante de cromaticidade tem como característica analisar as cores segundo seu matiz e saturação, ignorando o brilho. Acredita-se que seja este o fato responsável pelo aparecimento dos padrões nos fundos das imagens reais, assim como pelo fato de não ser possível ver alguns grãos, destacados pelas curvas granulométricas, nas imagens.

Apesar do cuidado em se construir uma morfologia colorida, para que assim se possa aproveitar um poderoso descritor em uma imagem que é a cor, a função de medida utilizada na granulometria não aproveita plenamente esta característica. Mais pesquisas nesta área fazem-se necessárias.

Os resultados dos testes projetados para a verificação da morfologia proposta mostram que a proposição produz excelentes resultados. O mesmo ocorreu nos testes comparativos com outros trabalhos que tiveram viabilidade de comparação.

A métrica aqui apresentada para o espaço de cor *HSV* pode ser adaptada diretamente para o espaço de cor *HSL*, visto que esta não considera a componente de brilho. Pode-se fazer mais testes neste sentido.

Dentre os sucessos alcançados neste trabalho, o principal se relaciona

à decisão de estender o conceito de granulometria para imagens coloridas fazendo com que o problema de se definir uma morfologia para essas imagens fosse devidamente equacionado.

Apesar do fato das imagens coloridas pertencerem à um espaço de dimensão maior que as imagens em níveis de cinza (geralmente 3 dimensões a mais), pouca diferença existe no tempo de processamento quando se compara imagens coloridas pela técnica proposta com imagens binárias ou em tons de cinza pela técnica clássica.

Este trabalho não tem a pretensão de esgotar completamente o assunto, nem insinuar que o método proposto é o melhor. Busca-se apenas avaliar a possibilidade desse tipo de aplicação e implementar um método para verificar a questão “é possível construir uma granulometria colorida?” lançada no início do trabalho.

6.2 Trabalhos Futuros

Diversas outras operações morfológicas tem grande utilidade no processamento de imagens. Como na sua grande maioria essas operações são resultados de combinações de operações básicas de erosão e dilatação, uma continuação direta do trabalho seria verificar o comportamento das expressões compostas pelas operações erosão e dilatação em cores. Isto é, como seriam os resultados de operações como gradiente morfológico, top hat, etc... elas teriam o mesmo comportamento dos correlatos binários ou monocromáticos?

Como proposta de continuidade do trabalho, pode-se verificar se a métrica aqui apresentada pode ser utilizada para definir uma granulometria condicional, contando-se apenas grãos de cores específicas sem alterar outros grãos.

Outra proposta é verificar a possibilidade de alterar a métrica, ou definir

uma nova, que considere as três componentes do espaço *HSV*. De fato, já foram feitos esforços neste sentido, e uma nova função que considera as três componentes foi construída. Foram feitos testes com esta nova função e os resultados foram satisfatórios. Esta nova função só não foi incluída neste trabalho pelo fato de não se ter conseguido avançar na prova matemática de que ela seria uma métrica no espaço de cor *HSV*. Tal resultado será apresentado futuramente, mesmo que não se consiga tal consideração, esta poderia ser usada como uma pseudométrica ou mesmo uma função de distância na definição de uma ordenação para as cores do espaço.

Entende-se a necessidade de se melhorar o tempo de processamento dos algoritmos desenvolvidos e avaliar a complexidade computacional das técnicas utilizadas. A vantagem direta obtida pela diminuição do tempo de processamento é a possibilidade de se trabalhar com imagens em maiores definições, e dessa forma chegar a uma medição da granulometria mais acurada. Acredita-se que a adaptação dos algoritmos para uma linguagem mais adequada assim como a adaptação de algoritmos mais rápidos da morfologia binária e em níveis de cinza para a morfologia colorida.

Apesar da extensa pesquisa destinada à construção de uma granulometria colorida, pouco foi desenvolvido no sentido de medir os resultados dessa granulometria. Este linha de pesquisa mostra-se promissora e pode ser desenvolvida para que se obtenha uma medição mais adequada da granulometria proposta.

Referências Bibliográficas

- [1] Adelson, E. H., *Lightness Perception and Lightness Illusions*, The New Cognitive Neurosciences, ed. Cambridge, MIT Presss, pp. 339-351, 2000.

- [2] Asano, A., *Unsupervised Optimization of Nonlinear Image Processing Filters Using Morphological Opening/Closing Spectrum and Genetic Algorithm*, IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E83-A, No.2, 2000, pp. 275-282.

- [3] Azevedo, E.; Conci, A., *Computação Gráfica - Teoria e Prática*, Editora Campus, Rio de Janeiro, 2003.

- [4] Banon, G. J. F.; Barrera, J., *Bases da Morfologia Matemática para análise de imagens binárias - 2ª Edição*, INPE, São José dos Campos, 1998.

- [5] Barnett, V., *The ordering of multivariate data*, J.R.Statist.Soc.A, Vol. 139, p. 318-355, 1976.

- [6] Boker, S. M., *The Representation of Color: Metrics and Mappings in Perceptual Color Space*, University of Virginia, Department of Psychology, Technical Report, 1997.

- [7] Breen, E. J.; Jones, R., *Attribute Openings, Thinnings and Granulometries*, Computer Vision and Image Understanding, Vol. 64 No. 3, 1996, pp. 377-389.
- [8] Castro, E. M. M., *Recuperação de Imagens em Banco de Dados por Semelhança de Cor*, Universidade Federal Fluminense, Tese de Mestrado, 1998.
- [9] Comer, M. L., *Morphological Operations for Color Image Processing*, Journal of Electronic Image, 1999, pp. 279-289.
- [10] Conci, A.; Ferraz, I. N.; Garcia, A. C. B.; Vieira, E. A.; Mello, R. H. C., *Avaliação da Geometria dos Meios Porosos por Imagens Binárias*, 31° DINCON, 2004, pp. 1404-1414.
- [11] Conci, A.; Ferraz, I. N.; Garcia, A. C. B.; Vieira, E. A.; Mello, R. H. C., *Utilização de Imagens Monocromáticas com Grãos Sobrepostos na Avaliação da Geometria dos Meios Porosos*, 31° DINCON, 2004, pp.1393-1403.
- [12] Conci, A.; Ferraz, I. N.; Garcia, A. C. B.; Bürkle, P. Y., *An Approach for Counting HIV Microscopic Structures*, Universidade Federal Fluminense, Technical Report, 2004.
- [13] Dougherty, E. R.; Lotufo, R. A., *Hands-on Morphological Image Processing in Imaging*, SPIE Press, Bellingham - WA, 2003.
- [14] Facon, J., *Morfologia Matemática: Teoria e Exemplos*, Editor Jacques Facon, Gráfica Universitária Champagnat, Curitiba, 1996

- [15] Facon, J., *Análise Granulométrica Binária Rápida pela Abordagem de Luc Vincent*, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Relatório Técnico, 2001.
- [16] Gonzales, R. C.; Woods, R. E., *Digital Image Processing*, Addison-Wesley, New York, 1993.
- [17] Hanbury, A.; Serra, J., *Mathematical Morphology in the HLS Colour Space*, Proc. of British Machine Vision Conference, BMVA-2001, Manchester, 2001, pp. 451-460.
- [18] Huang, T. S., *Picture Processing and Digital Filtering*, Springer, 1975.
- [19] Kolb, H.; Fernandez, E.; Nelson, R., *WebVision: The Organization of the Retina and Visual System*, Endereço: webvision.med.utah.edu/anatomy.html, Acesso em 27 de Maio de 2005.
- [20] Köppen, M.; Nowack, Ch.; Rösel, G., *Pareto-Morphology for Color Image Processing*, Department of Pattern Recognition, Fraunhofer IPK-Berlin, Endereço: visionic.fhg.de/ipk/publikationen/pdf/scia99.pdf, Acesso em 04 de agosto de 2004.
- [21] Lipschutz, S., *Topologia Geral*, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, Rio de Janeiro, 1971.
- [22] Louverdis, G.; Andreadis, I.; Tsalides, P., *Morphological Granulometries for Color Images*, Proc. 2nd Hellenic Conf. on AI, SETN-2002, Xanthi, Greece, 2002, pp. 333-342.

- [23] Matheron, G., *Random Sets and Integral Geometry*, John Wiley & Sons, Ecole des Mines de Paris, 1975.
- [24] Matta, W. N., *Metodologia para Detecção de Máculas em Micrografias Utilizando Morfologia Matemática*, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2003.
- [25] Nauffal, S.R.; Facon, J.; Bortolozzi, F., *Segmentação de Imagens Digitais de Algas Microscópicas por Granulometria Morfológica*, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Relatório Técnico, 2001.
- [26] Naylor, A. W., Sell, G. R., *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, Holt, Rinehart and Winston INC., New York, 1971.
- [27] Peters II, R. A., *Mathematical Morphology for angle-valued images*, *Proceedings of the SPIE*, Nonlinear Image Processing VIII, 1997, Vol.3026, pp. 84-94.
- [28] Rautio, H.; Silvén, O., *Average Grain Size Determination using Mathematical Morphology and Texture Analysis*, Infotech Oulu, Machine Vision and Media Processing Group - Dep. Electrical Engineering, Technical Report.
- [29] Roberts, S., *Lecture 5 - Non-linear filters*, Robotics Research Group, University of Oxford, Endereço: www.robots.ox.ac.uk/~sjrob/Teaching/B4.SP/15.pdf, Acesso em 30 de Junho de 2004.
- [30] Robertson, A. R., *Physics Today - Special Issue: The physics of digital color*, American Institute of Physics, Vol.45, N.º 12, 1992.

- [31] Serra, J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press Inc., Ecole des Mines de Paris, 1982.
- [32] Serra, J., *Image Analysis and Mathematical Morphology - Volume 2: Theoretical Advances*, Academic Press Inc., Ecole des Mines de Paris, 1988.
- [33] Sivakumar, K.; Goutsias, J., *Discrete Morphological Size Distributions and Densities: Estimation Techniques and Applications*, The Johns Hopkins University, Image Analysis and Communications Laboratory - Dep. Electrical and Computer Engineering, Technical Report.
- [34] Soille, P., *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*, Springer, Berlin, 1999.
- [35] Trettel, E.; Lofuto, R. A., *The Size-Intensity Diagram: a Gray-scale Granulometric Analysis Tool*, Anais do IX SIBGRAPI, 1996, pp. 259-264.
- [36] Vliet, L. J., *Mathematical Morphology: Introduction to functions*, Faculty of Applied Sciences, Imaging Science and Technology - Pattern Recognition Group, Endereço: www.ph.tn.tudelft.nl/~lucas, Acesso em 30 de Junho de 2004.
- [37] Vliet, L. J., *Web Exhibits*, Endereço: webexhibits.org, Acesso em 27 de Maio de 2005.
- [38] Watt, A.; Policarpo, F., *The Computer Image*, Addison-Wesley, New York, 1998.

Apêndice A

Espaços Métricos e Topológicos

Este capítulo procura apresentar conceitos fundamentais que são utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho, sem a pretensão de esgotar completamente o assunto abordado, pois tal fato foge ao objetivo almejado.

As provas matemáticas dos teoremas aqui apresentados foram omitidas, mas essas provas são trabalhadas em [21, 26].

A.1 Introdução

A.1.1 Conjuntos e Elementos de um Conjunto

A definição de conjuntos é intuitiva. Em geral, define-se conjuntos como uma coleção de objetos, e representa-se estes conjuntos com letras latinas maiúsculas tais como A, X, Y, \dots . Representa-se os elementos de um conjunto com letras latinas minúsculas tais como a, x, y, \dots .

A afirmação de que um elemento p **pertence** a um conjunto A , é representada por

$$p \in A$$

e sua negação, isto é, o fato do elemento p não pertencer ao conjunto A , representa-se por

$$p \notin A$$

A.1.2 Homotetia

Obtem-se uma homotetia quando se amplia ou reduz um conjunto a partir de um ponto, a figura original e a figura gerada são *homotéticas* (e também semelhantes). Seja um conjunto A , define-se λA como sendo uma ampliação de razão λ do conjunto A . Ou seja, A e λA são homotéticos.

A.1.3 Subconjuntos, Superconjuntos, Universo e Vazio

Dados dois conjuntos A e B , diz-se que o conjunto A é **subconjunto** do conjunto B (ou que B é **superconjunto** de A), e representa-se isso por

$$A \subset B \text{ ou } B \supset A$$

se e somente se todo elemento do conjunto A é também elemento do conjunto B .

Define-se o **Conjunto Universal** ou **Universo**, sendo representado por U , como sendo o conjunto que é superconjunto de todo e qualquer conjunto, isto é:

$$\forall \text{ conjunto } A, A \subset U$$

Define-se o **Conjunto Vazio**, ou simplesmente **Vazio**, sendo representado por \emptyset , como sendo o conjunto sem elementos. Dessa forma, para qualquer conjunto A tem-se que

$$\emptyset \subset A \subset U$$

A.1.4 Classes, Famílias e Espaços

Define-se uma **classe** como sendo um conjunto de conjuntos e uma **família** como sendo um conjunto de classes.

Denota-se por $\mathcal{P}(A)$ a classe de todos os subconjuntos de A ou simplesmente **conjunto das partes** de A . Ou seja, $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto formado por todos os conjuntos gerados por elementos de A .

Chama-se de espaço a uma classe com uma estrutura matemática bem definida e por pontos do espaço os elementos desta classe.

A.1.5 Principais Operações com Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B , a **união** do conjunto A com o conjunto B , representada por $A \cup B$, é o conjunto formado por todos os elementos de A ou B , isto é:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

A **interseção** entre dois conjuntos A e B , representada por $A \cap B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e B simultaneamente, isto é:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Define-se por complemento de um conjunto A , e representa-se por A^c , o conjunto formado por todos os elementos do universo que não pertencem a A , isto é:

$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

Dados dois conjuntos A e B , a **diferença** entre eles, representada por $A \setminus B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B (também chamado de **complemento relativo**), isto é:

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

A.1.6 Conjuntos Indexados

Chama-se de **conjuntos indexados** a classe de conjuntos que se relaciona com um conjunto de índices I de forma que cada elemento do conjunto de índices corresponda a um conjunto da classe. Representa-se um conjunto A indexado por um conjunto I por

$$\{A_i\}_{i \in I} \text{ ou simplesmente } \{A_i\}$$

No caso do conjunto de índices ser equivalente ao conjunto dos inteiros positivos, chama-se o conjunto indexado de uma **sequência de conjuntos**.

Define-se a **união da classe dos conjuntos indexados**, representada por $\bigcup_{i \in I} A_i$, a união dos elementos de $\{A_i\}$, isto é:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I, \forall x \in A_i\}$$

Equivalentemente pode-se definir a **interseção** da classe dos conjuntos indexados, representada por $\bigcap_{i \in I} A_i$, pela interseção dos elementos de $\{A_i\}$, isto é:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}$$

A.1.7 Conjuntos Contáveis

Seja \mathbb{N} o conjunto dos inteiros positivos, um conjunto A é dito **enumerável** se e somente se existe uma função $f : A \rightarrow \mathbb{N}$, sendo f bijetora. Isto é, a cada elemento de A pode-se associar um inteiro positivo.

Um conjunto é dito **contável** se e somente se ele for finito ou enumerável.

A.2 Espaços Métricos

A.2.1 Definição

Seja X um conjunto não vazio, e d uma função de distância definida entre elementos deste conjunto, isto é, em $X \times X$ ¹. Diz-se que d é uma **métrica** definida para $x, y \in X$ se e somente se para todo $x, y \in X$ tem-se que:

- i. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, x) = 0$
- ii. Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$
- iii. $d(x, y) = d(y, x)$
- iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Define-se o número real $d(x, y)$ como a *distância entre x e y* .

Seja d uma métrica definida em X . O conjunto X juntamente com a métrica d é chamado de **espaço métrico** e é representado por (X, d) .

A.2.2 Distância de um Ponto a um Conjunto

Seja A um subconjunto não vazio do espaço métrico (X, d) e um ponto $x \in X$. Define-se a distância entre o ponto x e o conjunto A , representada por $d(x, A)$, como

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

¹Produto Cartesiano. O produto cartesiano de dois conjuntos X e Y , denotados por $X \times Y$ é o conjunto cujos elementos são pares ordenados dos conjuntos X, Y

A.2.3 Bola Aberta

Seja (X, d) um espaço métrico e x_0 um ponto qualquer deste espaço. O conjunto

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

é chamado de **bola aberta** ou vizinhança de raio r centrada no ponto x_0 . Também é comum representa-se a bola aberta de raio r centrada num ponto x_0 por $B(x_0, r)$

A.2.4 Ponto de Interior e Conjunto Aberto

Seja $A \in (X, d)$. Um ponto $a \in A$ é dito **ponto de interior** se e somente se existe um valor real $r > 0$ tal que a bola aberta de raio r centrada em a é subconjunto de A , isto é:

$$B_r(a) \subset A$$

Um conjunto A é dito **aberto** se todos os seus pontos são pontos de interior, isto é, para todo ponto $a \in A$, existe um valor real $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A$.

A.2.5 Ponto de Acumulação e Conjuntos Fechados

Seja A um subconjunto do espaço métrico (X, d) . Um ponto $p \in (X, d)$ é dito **ponto de acumulação** (ou **ponto limite**) de A se e somente se todo conjunto aberto G que contem p , contem também um outro ponto de A diferente de p , isto é:

$$G \text{ é aberto se, } p \in G \Rightarrow (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

Diz-se que um conjunto F é **fechado** se este possui todos os seus pontos de acumulação.

Pode-se também definir um conjunto fechado em termos de seu complemento da seguinte forma: *um conjunto é dito fechado se seu complemento for um conjunto aberto.*

A.2.6 Cobertura

Uma classe de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ é chamada de uma cobertura de A , ou seja, **cobre** A , se e somente se A é subconjunto da união dos elementos de \mathcal{A} , isto é:

$$A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

Teorema A.1 (Heine-Borel). *Seja A um intervalo fechado e limitado, e \mathcal{G} uma cobertura de intervalos abertos em A . Então existe uma quantidade finita de abertos pertencentes a \mathcal{G} que também cobrem A .*

A.2.7 Seqüências, Seqüências Convergentes e Seqüências de Cauchy

Uma seqüência, representada por $\langle s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ ou simplesmente $\langle s_n \rangle$, é um conjunto onde cada um dos seus elementos s_n corresponde a cada inteiro positivo n .

Uma seqüência $\langle s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ é **limitada** se seu contradomínio $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado.

Diz-se que uma seqüência $\langle s_n \rangle$ **converge** para um ponto b se para cada $\epsilon > 0$, existe um n_0 tal que

$$\forall n > n_0, |s_n - b| < \epsilon$$

isto é, os termos da seqüência vão se aproximando de b a medida em que n aumenta.

Uma definição equivalente para seqüências convergentes seria; uma seqüência $\langle s_n \rangle$ converge para o ponto b se qualquer bola aberta de centro em b contém quase todos (menos um número finito deles) os termos da seqüência.

Diz-se que uma seqüência $\langle s_n \rangle$ é de **Cauchy** se para cada $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0, |s_n - s_m| < \epsilon$$

ou seja, os termos da seqüência vão se aproximando a medida em que a seqüência avança. Toda seqüência convergente é uma seqüência de Cauchy.

A.2.8 Conjuntos Completos e Conjuntos Compactos

Um conjunto A é dito **completo** se todas as seqüências de Cauchy contidas em A convergem para elementos de A .

Um conjunto A é dito **compacto** se e somente se toda cobertura aberta de A é redutível a uma cobertura finita. Em outras palavras, se A é compacto, para qualquer \mathcal{G} , uma cobertura de A , isto é, $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i, G_i \in \mathcal{G}$, existe um número finito de elementos de \mathcal{G} , G_1, \dots, G_m , tal que $A \subset G_1 \cup \dots \cup G_m$.

Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^n , $A \subset \mathbb{R}^n$, A é dito compacto se e somente se é fechado e limitado.

A.3 Espaços Topológicos

A.3.1 Definição

Seja A um conjunto não vazio e $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(A)$, isto é, \mathcal{T} é uma classe de subconjuntos de A . Diz-se que \mathcal{T} é uma topologia em A , ou que o par (A, \mathcal{T}) é um **espaço topológico** se e somente se for assegurado os seguintes axiomas:

- i. A e \emptyset pertencem a \mathcal{T}
- ii. A união de elementos em \mathcal{T} pertence à \mathcal{T}
- iii. A interseção de dois elementos de \mathcal{T} pertence à \mathcal{T}

Os elementos de \mathcal{T} são chamados de **\mathcal{T} -abertos** ou simplesmente de **abertos**, e um conjunto é dito **fechado** se seu complemento pertencer a \mathcal{T} , isto é, seu complemento for um aberto.

A.3.2 Fecho de um Conjunto, Conjuntos Densos e Espaços Separáveis

Dado um conjunto A pertencente ao espaço topológico (X, \mathcal{T}) . O **fecho** de A , representado por \overline{A} , é a interseção dos conjuntos fechados que contêm A . O fecho de um conjunto é fechado, e mais, um conjunto qualquer A é dito **fechado** se e somente se $A = \overline{A}$.

Um conjunto A é dito **denso** em um espaço topológico (X, \mathcal{T}) se e somente se o seu fecho for igual a uma topologia, isto é:

$$A \in (X, \mathcal{T}) \text{ e } \overline{A} = (X, \mathcal{T}) \Rightarrow A \text{ é denso em } (X, \mathcal{T})$$

Diz-se que um espaço é **separável** se e somente se este possui pelo menos um conjunto denso contável.

A.3.3 Vizinhança

Diz-se que um subconjunto N , pertencente ao espaço topológico (X, \mathcal{T}) , é uma **vizinhança** de um ponto p neste espaço, se e somente se N é superconjunto de um aberto que contém p , isto é:

$$p \in G \subset N; G \in \mathcal{T}$$

Seja $B_r(p)$ uma bola aberta de raio r centrada em p , então $B_r(p)$ define uma vizinhança em torno do ponto p .

Chama-se de vizinhança de p , e representa-se por N_p , a classe de todas as vizinhanças de p , sendo $p \in (X, \mathcal{T})$.

A.3.4 Espaço Localmente Compacto

Seja um espaço topológico (X, \mathcal{T}) , diz-se que (X, \mathcal{T}) é localmente compacto se e somente se todo elemento de (X, \mathcal{T}) possui uma vizinhança compacta. Todo espaço compacto é localmente compacto.

A.3.5 Espaço de Hausdorff

Um espaço topológico (X, \mathcal{T}) é dito de **Hausdorff** se e somente se dado dois pontos $a, b \in (X, \mathcal{T})$, com $a \neq b$, tem-se que existe $G_1, G_2 \subset \mathcal{T}$ de forma que $a \in G_1$ e $b \in G_2$, tais que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Em outras palavras, pontos distintos em um espaço topológico de Hausdorff possuem abertos distintos.

A.3.6 Base de uma Topologia

Seja um espaço topológico (X, \mathcal{T}) , diz-se que uma classe \mathcal{B} de abertos em X é uma base da topologia \mathcal{T} se e somente se todo aberto $G \in \mathcal{T}$ é uma união de elementos de \mathcal{B} , equivalentemente diz-se que \mathcal{B} é uma cobertura de $G, \forall G \in \mathcal{T}$.

Apêndice B

Algoritmos

Apresenta-se neste capítulo os procedimentos e algoritmos utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Foca-se na extensão da técnica granulométrica à imagens coloridas e não na otimização da mesma. Em decorrência disso sabe-se que as ferramentas utilizadas não foram as melhores em termos de velocidade, mas muito boas em termos de interatividade e portabilidade. No desenvolvimento dos procedimentos foi utilizado o MatLab versão 6.5. A seguir é apresentado estes procedimentos com uma breve descrição de suas funcionalidades.

Dilatação Colorida

Esta função recebe uma imagem *im* pertencente ao espaço de cor *HSV* e promove a dilatação colorida da mesma da seguinte forma: em cada ponto da imagem é calculada a dilatação colorida pontual de acordo com o EE.

```
function [out]=DilCol(im,ee)
im2=im;
[lin, col, comp] = size(im2);
```

```

im3 = zeros(lin,col,comp);
for x = 1:lin
    for y = 1:col
        vet = DilVP(im2,ee,x,y);
        im3(x,y,1)= vet(1,1);
        im3(x,y,2)= vet(1,2);
        im3(x,y,3)= vet(1,3);
    end
end
out=im3;

```

Dilatação Colorida Pontual

Calcula-se a cor na posição x, y de uma imagem im dilatada pelo EE ee . O EE define uma máscara na imagem onde o centro do EE está posicionado no ponto (x, y) , retornando para este ponto a cor máxima que aparece nessa máscara.

```

function [out]=DilVP(im,ee,x,y)
[L,C,P]=size(im);
[l,c]=size(ee);
l=double(int8(l/2));
c=double(int8(c/2));
maxL = (x+l);
maxC = (y+c);
minL = (x-l);
minC = (y-c);
if maxL > L

```

```

        maxL = L;
end
if maxC > C
    maxC=C;
end
if minL<=1
    minL=1;
end
if minC<=1
    minC=1;
end
hsv = im(minL:maxL,minC:maxC,:);
out = HSMax(hsv);

```

Máximo Colorido

Verifica-se qual o valor máximo em uma matriz de cores do espaço *HSV* através da métrica proposta.

```

function [out]=HSMax(HSV)
H = HSV(:,:,1);
S = HSV(:,:,2);
V = HSV(:,:,3);
[m,n] = size(H);
HS = zeros(m,n);
for l=1:m
    for c=1:n
        HS(l,c) = Cromo(H(l,c),S(l,c),V(l,c),0,0,0);
    end
end

```

```

    end
end
maxHS = max(max(HS));
PosHS = [];
for l=1:m
    for c=1:n
        if HS(l,c) == maxHS
            PosHS = [PosHS ; [l,c]];
        end
    end
end
[m,n]=size(PosHS);
if m>1
    ValV=diag(V(PosHS(:,1),PosHS(:,2)));
    maxV = max(ValV);
    Pos=[];
    for i=1:m
        if V(PosHS(i,1),PosHS(i,2))==maxV
            Pos=[Pos; [PosHS(i,1),PosHS(i,2)]];
        end
    end
    m = Pos(1,1);
    n = Pos(1,2);
    out = [H(m,n) S(m,n) V(m,n)];
else
    m = PosHS(1,1);
    n = PosHS(1,2);

```

```

    out = [H(m,n) S(m,n) V(m,n)];
end

```

Erosão Colorida

Semelhante a função **Dilatação Colorida**, mas esta promove a erosão da imagem *im* pelo EE *ee*.

```

function [out]=EroCol(im,ee)
im2=im;
[lin, col, comp] = size(im2);
im3 = zeros(lin,col,comp);
for x = 1:lin
    for y = 1:col
        vet = EroVP(im2,ee,x,y);
        im3(x,y,1)= vet(1,1);
        im3(x,y,2)= vet(1,2);
        im3(x,y,3)= vet(1,3);
    end
end
out=im3;

```

Erosão Colorida Pontual

Calcula-se a cor na posição x, y de uma imagem *im* erodida pelo EE *ee*. O EE define uma máscara na imagem onde o centro do EE está posicionado no ponto (x, y) , retornando para este ponto a cor mínima que aparece nessa máscara.

```
function [out]=EroVP(im,ee,x,y)
[L,C,P]=size(im);
[l,c]=size(ee);
l=double(int8(l/2));
c=double(int8(c/2));
maxL = (x+1);
maxC = (y+c);
minL = (x-1);
minC = (y-c);
if maxL > L
    maxL = L;
end
if maxC > C
    maxC=C;
end
if minL<1
    minL=1;
end
if minC<1
    minC=1;
end
hsv = im(minL:maxL,minC:maxC,:);
out = HSMIn(hsv);
```

Mínimo Colorido

Verifica-se qual o valor mínimo em uma matriz de cores do espaço *HSV* através da métrica proposta.

```
function [out]=HSVMin(HSV)
H = HSV(:,:,1);
S = HSV(:,:,2);
V = HSV(:,:,3);
[m,n] = size(H);
HS = zeros(m,n);
for l=1:m
    for c=1:n
        HS(l,c) = Croma(H(l,c),S(l,c),V(l,c),0,0,0);
    end
end
minHS = min(min(HS));
PosHS = [];
for l=1:m
    for c=1:n
        if HS(l,c) == minHS
            PosHS = [PosHS ; [l,c]];
        end
    end
end
end

[m,n]=size(PosHS);
if m>1
```



```

ValV=diag(V(PosHS(:,1),PosHS(:,2)));
minV = min(ValV);
Pos=[];
for i=1:m
    if V(PosHS(i,1),PosHS(i,2))==minV
        Pos=[Pos;[PosHS(i,1),PosHS(i,2)]];
    end
end
m = Pos(1,1);
n = Pos(1,2);
out = [H(m,n) S(m,n) V(m,n)];
else
m = PosHS(1,1);
n = PosHS(1,2);
out = [H(m,n) S(m,n) V(m,n)];
end
end

```

Métrica Constante de Cromaticidade

Implementação da métrica **contante de cromaticidade** proposta no **Capítulo 2**.

```

function [out]=Croma(h1,s1,v1,h0,s0,v0)
out=max(abs(s0-s1),DistH(h0,h1));

```

Reconstrução Morfológica

Esta função promove a reconstrução pela dilatação da imagem *imMark* limitada pela *imMask* por um EE fixo 3×3 em *nInt* interações.

```
function [out]=Rec(imMark,imMask,nInt)
ee=zeros(3,3);
imRec=imMark;
for n=1:nInt
    imDil = DilCol(imRec,ee);
    for l=1:100
        for c=1:100
            imRec(l,c,:)=HSMin([imMask(l,c,:);imDil(l,c,:)]);
        end
    end
end
end
out=imRec;
```

Procedimento de Contagem

Este procedimento abre as imagens geradas da granulometria e retorna o número de grãos e a área superficial que estes grãos ocupam em cada passo pela verificação da distância entre as cores da imagem com a cor do fundo.

```
NumGraos=[];
AreaSup=[];
for t=1:13
    im=imread(['C:\Temp\Imagem',int2str(t),'.bmp']);
    hsv=rgb2hsv(im);
```

```
v=hsv(:,:,3);
[n m]=size(v);
for x=1:n
    for y=1:m
        if cromahS(hsv(x,y,1),hsv(x,y,2),hsv(x,y,3),
hsv(1,1,1),hsv(1,1,2),hsv(1,1,3)) > 0.1
            v(x,y)=1;
        else
            v(x,y)=0;
        end
    end
end
figure(t), imshow(v);
fig=bwlabel(v,8);
NumGraos=[NumGraos;max(max(fig))];
AreaSup=[AreaSup;sum(sum(v))];
end
NumGraos
AreaSup
```

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)