

Universidade Federal Fluminense

LUÍS ANDRÉ GOMES DE ABREU

Métodos Semi-Analíticos Perturbativos para  
Trajetória de Projéteis

NITERÓI

2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

LUÍS ANDRÉ GOMES DE ABREU

# Métodos Semi-Analíticos Perturbativos para Trajetória de Projéteis

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional e Sistemas de Potência

Orientador:

Mauricio Kischinhevsky

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI

2008

# Métodos Semi-Analíticos Perturbativos para Trajetória de Projéteis

LUÍS ANDRÉ GOMES DE ABREU

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada por:

---

Prof. Mauricio Kischinhevsky / IC-UFF (Presidente)

---

Prof. Carlos Antônio de Moura / IME-UERJ

---

Prof. Jorge Stolfi /IC-UNICAMP

---

Profª. Heloísa Bauzer Medeiros / IM-UFF

---

Prof. Otton Teixeira da Silveira Filho / IC-UFF

Niterói, abril de 2008.

*Para aqueles cuja distância me trouxe a saudade, nunca o esquecimento...*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Prof. Mauricio Kischinhevsky, por suas diretrizes e todo o apoio prestado; aos meus demais professores pelo conhecimento auferido; a minha família e amigos pelo acompanhamento, incentivo e sugestões; e aos meus superiores, por me concederem uma chance para meu próprio aperfeiçoamento.

# Resumo

Este trabalho se propõe a usar métodos perturbativos a fim de auxiliar na análise numérica e de sensibilidade. Ele visa um processo menos custoso para estimar o impacto de pequenas mudanças no conjunto de parâmetros de uma equação diferencial toda vez que as condições-padrão sofrem alguma modificação, evitando aplicar um método numérico ou, se necessário, melhorar a qualidade dele. Após uma breve introdução à teoria das perturbações, será desenvolvido um estudo sobre trajetórias de projéteis, como um caso típico de sistema acoplado e não-linear capaz de se beneficiar dessa abordagem.

# Abstract

In this work, perturbation methods are used as a tool to help numerical and sensitivity analysis. A low cost process to estimate the effect of small changes in the set of parameters of a differential equation, each time a parameter is changed, is sought. Thus, the application of a numerical method to recompute the problem could be avoided or, in the case it is employed, the solution would be improved. An introduction to perturbation theory is presented and the methodology proposed is discussed and employed on the study of projectile trajectories, an example of coupled, non-linear system which can benefit from this approach.

# Palavras-chave

1. Teoria das Perturbações
2. Métodos Numéricos
3. Aproximações
4. Análise de Sensibilidade

# Glossário

$\alpha_0$	:	Ângulo de lançamento
$\varepsilon$	:	Termo perturbado
$\rho$	:	Densidade do ar
$A$	:	Área da seção reta de um projétil
$a_c$	:	aceleração instantânea
$C_D$	:	Coefficiente de arrasto ( <i>drag coefficient</i> )
${}_2F_1$	:	Função hipergeométrica gaussiana
$g$	:	Aceleração da gravidade
$h$	:	Passo de integração
$m$	:	Massa do projétil
$RK - 4$	:	Runge-Kutta de 4ª ordem
$T_e$	:	Temperatura absoluta
$v$	:	Velocidade instantânea
$v_0$	:	Velocidade inicial
$v_x, u$	:	Velocidade horizontal
$v_y, w$	:	Velocidade vertical

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Análise Perturbativa</b>	<b>4</b>
2.1	Metodologias e abordagens . . . . .	5
2.2	Um exemplo simples . . . . .	6
2.3	Tipos de perturbações . . . . .	8
2.4	O princípio do casamento . . . . .	9
2.4.1	Definição . . . . .	9
2.4.2	Aplicações do princípio do casamento - tratamento de singularidades	10
2.4.3	Convergência e acurácia de expansões assintóticas . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Funcionais</b>	<b>13</b>
3.1	Definição . . . . .	13
3.2	Espaços funcionais . . . . .	13
3.2.1	Norma . . . . .	14
3.2.2	Continuidade . . . . .	14
3.3	Linearidade e Variação . . . . .	15
3.4	Aproximação de um funcional linear . . . . .	18
3.5	Generalizando para n equações . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Aplicações ao Projétil Balístico</b>	<b>22</b>
4.1	Expansões assintóticas para o modelo balístico . . . . .	23
4.2	Experimento numérico do projétil 105 mm HE . . . . .	24

---

4.3	Trajetórias em regime supersônico . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Expansões para Altas Velocidades</b>	<b>38</b>
5.1	Propriedades das expansões . . . . .	44
5.2	Presença de funcionais lineares . . . . .	47
5.3	Estimativa de variações . . . . .	50
<b>6</b>	<b>O Vôo Transônico</b>	<b>54</b>
6.1	Estimando o coeficiente de arrasto . . . . .	54
6.2	Vôo exclusivamente supersônico . . . . .	56
6.3	Vôo transônico . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Aplicações Semi-Analíticas de Expansões</b>	<b>66</b>
7.1	Limites de validade e aproximações . . . . .	66
7.2	Adaptação para o modelo ponto-massa completo . . . . .	67
7.3	Método de Booster . . . . .	74
7.3.1	Apresentação . . . . .	75
7.3.2	Considerações de implementação . . . . .	76
7.3.3	Booster aplicado ao modelo ponto-de-massa . . . . .	77
7.3.3.1	1º caso - velocidade . . . . .	77
7.3.3.2	2º caso - alcance . . . . .	80
7.3.4	Experimentos numéricos . . . . .	83
7.3.5	Booster para atmosfera variável . . . . .	85
<b>8</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>94</b>
	<b>Apêndice A - Equações para Baixa Velocidade</b>	<b>96</b>
A.1	Expansões para o vôo subsônico . . . . .	96
A.2	Expansões para o vôo supersônico . . . . .	99

---

<b>Apêndice B - Equações para Alta Velocidade</b>	<b>103</b>
B.1 Fórmulas principais . . . . .	103
B.2 Fórmulas para meio resistivo linear ( $n = 1$ ) . . . . .	106
B.3 Determinação da ordem de grandeza para o erro da expansão para o voo subsônico . . . . .	109
 <b>Referências</b>	 <b>112</b>

# Capítulo 1

## Introdução

“The purpose of computing is insight, not numbers”

(G. Pólya, citado por R.W. Hamming)

A maior parte dos problemas presentes na natureza é não-linear, o que em geral leva à impossibilidade de se obter uma fórmula fechada que abarque toda a resposta procurada. Mesmo que tal fórmula exista, ela pode ser tão complexa que torne extremamente difícil seu uso para fins práticos. Portanto, faz-se necessário o uso de aproximações para a obtenção de uma solução viável. Duas grandes modalidades de aproximações existem: as analíticas e as numéricas. Este último grupo ganhou grande impulso com o advento da moderna informática, porém possui algumas limitações, como o fato de muitas vezes não fornecer de maneira imediata o papel de cada parâmetro de um sistema em seu comportamento final. Aproximações analíticas podem sanar parte do problema, havendo diversas metodologias para isso. A ferramenta aqui usada para a obtenção de fórmulas satisfatórias se vale da presença de algum parâmetro do sistema que seja comparativamente pequeno em relação aos demais e daí seu nome: *teoria das perturbações* (ou *métodos perturbativos*).

Obter uma aproximação perturbativa está mais para uma espécie de “arte” do que exatamente ciência. Há uma gama de recursos disponíveis para lidar com a pequenez de tal parâmetro, mas ainda assim cada “caso é um caso”, sendo necessário lançar mão de heurísticas vindas de suas propriedades físicas para decidir qual a mais adequada. Como será visto, um parâmetro perturbativo pode surgir reescrevendo-se as equações de um sistema de outra forma.

Por causa de tais particularidades inerentes a cada questão, em vez de ser uma substituta ou até mesmo rival da análise numérica, a teoria das perturbações atua em simbiose com ela, sendo essencial o uso da primeira para checagem da aproximação. Métodos numéricos também podem ser usados na determinação parâmetros para uma aproximação que não podem ser determinados precisamente. Em retribuição, uma boa aproximação analítica pode melhorar um método numérico impreciso, com alguma adição de custos; pode também, uma vez definida sua validade, evitar recálculos numéricos para a análise de sensibilidade dos parâmetros originais. Neste aspecto, este trabalho opta por este tratamento conjunto *semi-analítico* para unir o melhor de duas abordagens de aproximação.

O exemplo adotado para evidenciar o potencial dessa união é a trajetória de um projétil sob a ação da gravidade em meio resistente. É um sistema acoplado, extremamente não-linear, sem solução analítica fechada conhecida e capaz de mostrar como métodos perturbativos facilitam a análise de suas equações de forma independente, bem como levanta questões pertinentes a este tipo de aproximação, por exemplo, a validade de seu domínio.

Boa parte do conhecimento matemático hoje existente sobre projéteis vem de seu emprego militar, onde foram consagrados nomes como Edward McShane [McShane et al. 1953], Robert McCoy [McCoy 1999], entre outros. Os modelos criados por eles analisam todas as nuances dos projéteis de emprego militar, porém a um custo alto. São ótimos para gerar tabelas a serem usadas por artilheiros, mas caso se deseje, por meios eletrônicos, atingir algum alvo específico sem nenhuma referência, um tempo proibitivamente longo pode ser gasto fazendo a varredura até encontrar os parâmetros corretos.

Diversas soluções têm sido dadas para tal empecilho, em geral procurando encontrar um ponto de partida para a varredura já próximo ao esperado. As principais “calculadoras de tiro” em uso no país adotam a postura de “perder espaço a tempo”, tendo um banco de dados com tabelas previamente calculadas para velocidades padronizadas. Outra abordagem utilizada por *softwares* para calculadoras científicas é achar fórmulas aproximativas a partir de dados numéricos. Esta dissertação pode ter sua utilidade justamente nessa última solução. Entretanto, como disse McShane, é desejável que não haja utilidade nenhuma para este trabalho, pois, do contrário, significaria que problemas no mundo real estaremos enfrentando...

Ainda assim, muito do que for analisado terá utilidade em atividades bem mais amenas, com aplicações da física em diversos tipos de esportes: tiro ao alvo, beisebol, basquete, golfe, críquete, etc; que não deixam de ser afins com projéteis.

---

O presente estudo fornece uma rápida introdução a métodos perturbativos no capítulo 2. No capítulo 3, usa o ferramental das expansões assintóticas perturbativas para determinar a existência de funcionais lineares para um sistema e, assim, permitir que uma expansão calculada para um conjunto de parâmetros seja reaproveitada em circunstâncias um tanto diferentes. Em seguida, os capítulos 4 e 5 tratam efetivamente o cálculo das aproximações para trajetórias. O primeiro se encarrega das situações de velocidades iniciais baixas e o segundo das altas, ambos avaliam a presença de funcionais lineares. O capítulo 6 usa as aproximações calculadas para entender fenômenos que ocorrem durante a passagem do voo supersônico para o subsônico, a partir de comparações com suas saídas numéricas. O capítulo 7 faz uma análise de como métodos numéricos podem “calibrar” os parâmetros de uma expansão assintótica e como uma expansão pode diminuir o erro de métodos numéricos. Por fim, será feito balanço dos resultados obtidos e sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Análise Perturbativa

A idéia principal por trás da análise perturbativa é obter soluções aproximadas de problemas sem solução analítica explorando a presença de um parâmetro “pequeno” em relação aos demais [Simmonds e Mann. 1997]. Quanto menor este for, melhor a precisão. Assim, as equações de um sistema “perturbado” possuem a forma  $\vec{f}(\vec{x}; \varepsilon)$ , onde  $\vec{x}$  é o vetor  $(x_1, x_1, \dots, x_n)$  das variáveis do sistema, estando o parâmetro  $\varepsilon$  à parte destas e destacado pelo ponto-e-vírgula. O modelo “perturbado”, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , reduz-se a um problema de solução conhecida, que será a base para sua estimativa.

Uma ferramenta comumente utilizada na determinação de um resultado aproximado é a expansão das equações originais em um conjunto de *séries assintóticas* da forma:

$$\vec{f}(\vec{x}; \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^N \vec{a}_i(\vec{x}) \delta_i(\varepsilon) \quad (2.1)$$

Sendo que  $x_i = O(1)$  para todo  $N \geq 0$ . Isto significa que cada  $x_i$  é constante quando ocorre a passagem ao limite de  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Apesar de as funções  $\delta_i$  poderem ser definidas em mais de uma forma, a busca por expansões assintóticas começa muitas vezes pela suposição de simples monômios  $\delta_i(\varepsilon) = \varepsilon^i$ . Nestes casos, a expressão (2.1) assume a forma:

$$\vec{f}(\vec{x}; \varepsilon) \sim \vec{a}_0(\vec{x}) + \varepsilon \vec{a}_1(\vec{x}) + \varepsilon^2 \vec{a}_2(\vec{x}) + \dots + \varepsilon^N \vec{a}_N(\vec{x}) \quad (2.2)$$

Onde  $\vec{a}_0(\vec{x})$  é a solução analítica do problema não perturbado.

## 2.1 Metodologias e abordagens

Embora existindo uma grande gama de problemas que possuem um tratamento específico, pode-se dizer que, mesmo indiretamente, todos se baseiam em alguns princípios comuns:

1. Toma-se como ponto de partida a solução conhecida do problema não perturbado  $a_0$ ;
2. Cogita-se uma aproximação inicial em um conjunto de séries. Por exemplo, para o caso de uma equação polinomial (ou o polinômio característico de uma equação diferencial homogênea) pode-se estimar uma expansão em séries de potências de  $\varepsilon$ :

$$a = a_0(x) \delta_0(\varepsilon) + a_1(x) \delta_1(\varepsilon) + a_2(x) \delta_2(\varepsilon) + \dots \quad (2.3)$$

3. Substitui-se a série expandida até a ordem em  $\varepsilon$  desejada na equação original, agrupando os termos semelhantes, formando uma nova série:

$$A_0(x) \delta_0(\varepsilon) + A_1(x) \delta_1(\varepsilon) + A_2(x) \delta_2(\varepsilon) + \dots = 0 \quad (2.4)$$

4. A determinação dos coeficientes faltantes  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $a_N(x)$ , a partir de funções destes representadas por  $A_1(x)$ ,  $A_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $A_N(x)$ , é feita pela aplicação do seguinte teorema:

**Teorema 2.1** (Teorema Fundamental da Teoria das Perturbações)

*Se*

$$A_0(x) \delta_0(\varepsilon) + A_1(x) \delta_1(\varepsilon) + A_2(x) \delta_2(\varepsilon) + \dots + A_N(x) \delta_N(\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}) \equiv 0 \quad (2.5)$$

*para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno e se os coeficientes  $A_0, A_1, \dots$  são independentes de  $\varepsilon$ , então*

$$A_0(x) = A_1(x) = A_2(x) = \dots = A_N(x) = 0 \quad (2.6)$$

5. Caso apareçam inconsistências na determinação de  $a_i$ , a suposição inicial para a expansão de  $a$  foi inválida. Outras expansões devem ser testadas.

No tratamento de equações diferenciais genéricas surgem, muitas vezes, questões que tornam esta análise um pouco mais complicada: a presença de termos não-homogêneos

pode dar origem a um termo na solução geral que dependa apenas em parte das soluções do polinômio característico; as condições iniciais e de contorno podem levar ao aparecimento de  $\varepsilon$  em constantes multiplicativas na solução geral; o domínio de interesse pode depender de  $\varepsilon$ ; e, principalmente, a solução da equação diferencial dependerá sempre de  $\varepsilon$  e da variável livre. Neste último caso, surge a questão de se a solução aproximada é acuradamente uniforme para os domínios de interesse da variável livre (ver sç 2.3).

## 2.2 Um exemplo simples

Segue-se, agora, uma apresentação de como estas técnicas da teoria das perturbações podem ser utilizadas na solução de problemas de equações diferenciais, que é a aplicação de principal interesse aqui. Considere a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + y + \varepsilon y^2 = x, \quad y(1; \varepsilon) = 1 \quad (2.7)$$

para  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Apesar de aparentemente simples por ser de primeira ordem, o problema exhibe uma não-linearidade em sua parcela perturbativa e é não-homogêneo.

O primeiro passo é decidir qual a seqüência é a mais adequada para a representação de  $y(x; \varepsilon)$ . Um vislumbre pode ser fornecido convertendo a equação diferencial (2.7) em uma forma semi-implícita:

$$y'_{n+1} + y_{n+1} - x = -\varepsilon y_n^2, \quad n \geq 0, \quad \text{com } y_0 = 0$$

o que fornece

$$y'_1 + y_1 = 0; \quad y'_2 + y_2 - x = \varepsilon y_1^2$$

e assim por diante, de modo que  $y_2$  toma a forma  $y_2 = u(x) + \varepsilon v(x)$ . Quando uma nova solução  $y_3$  é efetuada, são produzidos termos em  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$  e  $\varepsilon^3$ ; sendo que o padrão de potências inteiras se repete para valores maiores de  $n$ . Portanto, a equação produz uma seqüência assintótica  $\{\varepsilon^n\}$ , que será a suposição inicial para a resolução do método. Note que ela é consistente com a condição inicial, e uma outra do tipo  $y(1; \varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon}$  forçaria a seqüência a ser ajustada para acomodá-la:  $\{\varepsilon^{n/2}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Portanto, busca-se a solução da equação (2.7) na forma:

$$y(x; \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^N \varepsilon^n y_n(x) \quad (2.8)$$

para  $x$  pertencente a algum domínio  $D$  a ser determinado. Quando é feita a aplicação da expansão (2.8) à equação diferencial, tem-se:

$$(y'_0 + \varepsilon y'_1 + \varepsilon^2 y'_2 + \dots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) + \varepsilon (y_0 + \varepsilon y_1 + \dots)^2 - x = 0$$

Agrupando os termos semelhantes e aplicando o teorema fundamental:

$$y'_0 + y_0 - x = 0 \quad (\text{a}); \quad y'_1 + y_1 - y_0^2 = 0 \quad (\text{b}); \quad (2.9)$$

Aqui foram ignorados os de ordem  $\varepsilon^2$  em diante. Analogamente, a condição inicial fornece:

$$y_0(1) + \varepsilon y_1(1) + \varepsilon^2 y_2(1) + \dots - 1 = 0$$

de forma que:

$$y_0(1) = 1 \quad (\text{a}), \quad y_n(1) = 0 \quad (\text{b}) \quad (2.10)$$

para  $n \geq 1$ ;

Vale lembrar que se está pressupondo que a expansão será válida para  $x = 1$ , algo a ser verificado ao final.

A próxima etapa é resolver cada equação para  $y_0, y_1$ . De (2.9 a), a solução geral para  $y_0$  é:

$$y_0(x) = x - 1 + A_0 e^{-x}$$

Onde  $A_0$  é uma constante. De (2.9 b) vem:

$$y'_1 + y_1 = -y_0^2 = -(x-1)^2 - 2A_0(x-1)e^{-x} - A_0^2 e^{-2x}$$

Multiplicando ambos os lados pelo fator de integração  $e^x$ :

$$(y_1 e^{-x})' = -y_0^2 = -(x-1)^2 e^x - 2A_0(x-1) - A_0^2 e^{-x}$$

O que fornece a solução geral:

$$y_1(x) = -(x-1)^2 + 2x - 4 - A_0(x-1)^2 e^{-x} + A_0^2 e^{-2x} + A_1 e^{-x}$$

Aplicando as condições iniciais (2.10), obtém-se:

$$y_0(x) = x - 1 + e^{1-x}; \quad y_1(x) = -x^2 + 4x - 5 - (x^2 - 2x) e^{1-x} + e^{2(1-x)}$$

Assim, a expansão assintótica com os dois primeiros termos é:

$$y(x; \varepsilon) \sim x - 1 + e^{1-x} + \varepsilon \left\{ -x^2 + 4x - 5 - (x^2 - 2x) e^{1-x} + e^{2(1-x)} \right\} \quad (2.11)$$

É interessante observar que, para esta equação, à medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a expansão se torna  $y(x; 0) \sim x - 1 + e^{1-x}$ , o que corresponde à solução analítica exata do problema não perturbado:

$$\frac{dy}{dx} + y = x, \quad y(1) = 1$$

## 2.3 Tipos de perturbações

As classificações quanto ao tipo de expansão podem ser feitas em relação à ordem, i.e., ao total de parcelas múltiplas de  $\delta_i(\varepsilon)$  derivados no cálculo da expansão, por exemplo, em (2.7) foi feita uma expansão de primeira ordem. Não são usuais expansões em ordem além da segunda devido às dificuldades nos cálculos envolvidos.

De maior relevância, são as classificações quanto ao fato de o estado perturbado calculado apresentar consistência com o não perturbado ou ele se tornar degenerado (*singular*) em algumas condições. Sob esta óptica, as perturbações se distinguem em:

1. Regulares - São consistentes com o problema não perturbado e válidas para todo o domínio considerado. A expansão de (2.11) apresenta regularidade para um domínio como  $[0, 1]$ , visto que a ordem de grandeza do primeiro termo permanece muito maior que a do segundo.
2. Singulares no domínio - De volta à expansão (2.11), constata-se que deixaria de ser válida para  $x = O(\varepsilon^{-1})$ , pois neste instante o segundo termo seria comparável ao primeiro. Portanto, soluções deste tipo são satisfatórias para algum  $x$ , tal que  $0 \leq x \leq X$ , mas não  $0 \leq x$ .
3. Singulares no modelo - Seja a equação diferencial:

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.12)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

O particular deste caso é que sua forma não perturbada possui uma natureza diferente do problema original: é de primeira ordem. Fazer simplesmente  $\varepsilon \rightarrow 0$  transforma a equação em uma versão simplificada em demasia, ao ponto de não mais reproduzir o comportamento original. A explicação desta mudança advém a análise das equações do polinômio característico  $\varepsilon z^2 + z + 1 = 0$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 - \varepsilon - 2\varepsilon^2 - \dots \\ z_2 = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + 2\varepsilon + \dots \end{cases}$$

Quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , uma das raízes ( $z_1$ ) se torna a corresponde da equação não perturbada ( $z = -1$ ), ao passo que a segunda degenera-se em  $-\infty$ . Isto equivaleria a uma solução independente identicamente nula.

## 2.4 O princípio do casamento

### 2.4.1 Definição

Dadas duas expansões assintóticas, definidas com  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  e válidas para  $x = O(1)$  e  $X = O(1)$ , onde  $x = \delta(\varepsilon)X$  na forma:

$$\sum_{n=0}^N a_n(x; \varepsilon) \quad e \quad \sum_{m=0}^M b_m(X; \varepsilon)$$

respectivamente. Estas duas expansões são válidas em regiões adjacentes, de modo que quando a expansão de uma variável colapsa, segue-se ao uso da variável da outra. Seja:

$$\sum_{n=0}^N a_n[\delta(\varepsilon)X; \varepsilon] \sim \sum_{n=0}^M A_n(X; \varepsilon) \quad X = O(1)$$

e

$$\sum_{n=0}^M b_n[x/\delta(\varepsilon); \varepsilon] \sim \sum_{n=0}^N B_n(X; \varepsilon) \quad X = O(1)$$

O **princípio do casamento** estabelece que:

$$\sum_{n=0}^M A_n(X; \varepsilon) \equiv \sum_{n=0}^N B_n(\delta(\varepsilon)X; \varepsilon) \equiv \sum_{n=0}^N B_n(x; \varepsilon)$$

O princípio do casamento é uma ferramenta útil para o tratamento de singularidades e

pode ser demonstrado para algumas classes de funções. A partir disto, foi generalizado e, portanto, chamado de “princípio” [Johnson 2005, p. 28]. Na próxima subseção, é exibida uma aplicação dele ao exemplo anterior.

### 2.4.2 Aplicações do princípio do casamento - tratamento de singularidades

Retornando à equação (2.7):

$$\frac{dy}{dx} + y + \varepsilon y^2 = x, \quad y(1; \varepsilon) = 1$$

cuja solução em expansão assintótica é:

$$y(x; \varepsilon) \sim x - 1 + e^{1-x} + \varepsilon \{-x^2 + 4x - 5 - (x^2 - 2x)e^{1-x} + e^{2(1-x)}\}$$

que colapsa para  $x = O(\varepsilon^{-1})$ . Como também  $y = O(\varepsilon^{-1})$ , realizam-se as seguintes transformações:  $x = \varepsilon^{-1}X$  e  $y(\varepsilon^{-1}X; \varepsilon) \equiv \varepsilon^{-1}Y(X; \varepsilon)$ , a equação (2.7) se torna:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \frac{dY}{dX} + \frac{1}{\varepsilon} Y + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} Y^2 = \frac{X}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \frac{dY}{dX} + Y + Y^2 = X$$

Seguindo o mesmo procedimento para obter uma solução do tipo:

$$Y(X; \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^N \varepsilon^n Y_n(X),$$

tem-se:

$$Y_0 + Y_0^2 = X \quad (\text{a}); \quad Y_1 + 2Y_0Y_1 + Y_0' = 0 \quad (\text{b}) \quad (2.13)$$

A partir daqui, é algebrismo simples e uma única diferenciação. Da equação (2.13 a) chega-se ao par de soluções:

$$Y_0(X) = \frac{1}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 + 4X} \right) \quad (2.14)$$

e será necessário lançar mão do princípio do casamento para decidir qual sinal é a apropriada. Do primeiro termo de (2.11), vê-se que:

$$\frac{Y}{\varepsilon} \sim \frac{X}{\varepsilon} - 1 + e^{1-X/\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad Y \sim X; \quad (2.15)$$

A partir de (2.14), obtém-se:

$$\varepsilon y \sim \frac{1}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon x} \right) \quad \Rightarrow \quad y \sim \frac{1}{2\varepsilon} (-1 \pm 1) \pm x \quad (2.16)$$

Comparando (2.15) e (2.16), fica claro que elas se casam apenas para o sinal positivo. Portanto, a solução do primeiro termo é:

$$Y_0(X) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 4X} - 1 \right)$$

De posse de  $Y_0$ , o segundo termo é obtido de forma imediata:

$$Y_1(X) = \frac{1}{1 + 4X}$$

A expansão assintótica resultante com dois termos é:

$$Y(X; \varepsilon) \sim \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 4X} - 1 \right) - \frac{\varepsilon}{1 + 4X} \quad \text{para } X = O(1) \quad (2.17)$$

Assim, a equação (2.7) requer uma expansão assintótica para  $x = O(\varepsilon^{-1})$  e outra para  $x = O(1)$ . Não há necessidade de uma terceira, visto que (2.17) não colapsa quando  $X \rightarrow \infty$ . Para obter  $y(x; \varepsilon)$  de forma explícita, realiza-se a transformação  $y(x; \varepsilon) \equiv \varepsilon^{-1} Y(x\varepsilon; \varepsilon)$ :

$$y(x; \varepsilon) \sim \frac{1}{2\varepsilon} \left( \sqrt{1 + 4\varepsilon x} - 1 \right) - \frac{1}{1 + 4\varepsilon x} \quad \text{para } x = O(\varepsilon^{-1})$$

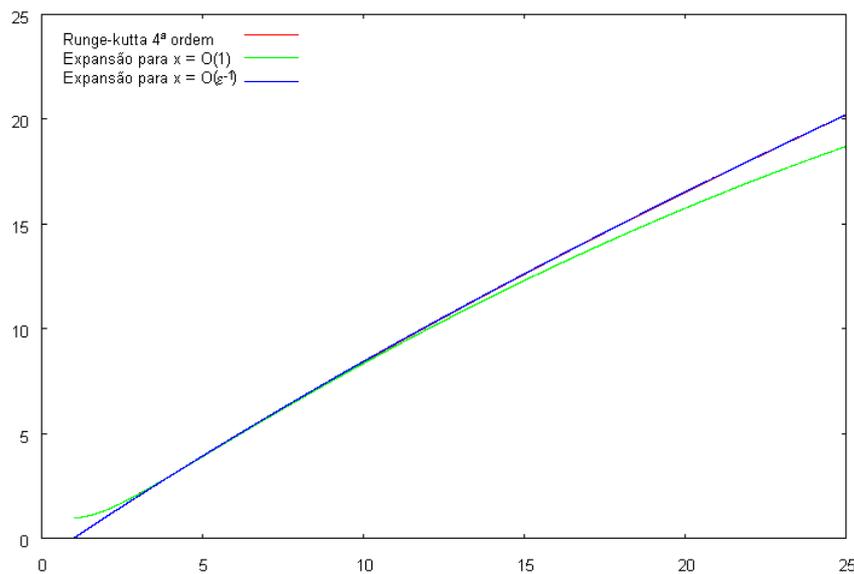


Figura 2.1: (1) RK-4 e passo  $h = 2^{-8}$ , (2) a expansão válida para  $x = O(1)$  e (3) a expansão para  $x = O(\varepsilon^{-1})$ .  $\varepsilon = 0,05$ .

Em resumo, a essência do tratamento de perturbações singulares é extrair (possivelmente com heurísticas) o comportamento singular de uma solução e então, por uma mudança de variável, reduzir o problema a um equivalente regular.

### 2.4.3 Convergência e acurácia de expansões assintóticas

Nenhuma atenção foi dada aqui sobre a questão da convergência de uma expansão assintótica. Como observou [van Dyke 1975, p. 30], é desnecessário que tal expansão convirja para determinado valor. Sua utilidade reside no fato de o erro ser da mesma ordem do primeiro termo desprezado e, assim, decresça rapidamente o quanto menor for  $\varepsilon$ . Uma consequência disto é que nem sempre aumentar a ordem de uma expansão melhora sua qualidade e, portanto, para finalidades práticas apenas alguns termos são efetivamente calculados, antes que se atinja o instante em que o erro começa a crescer.

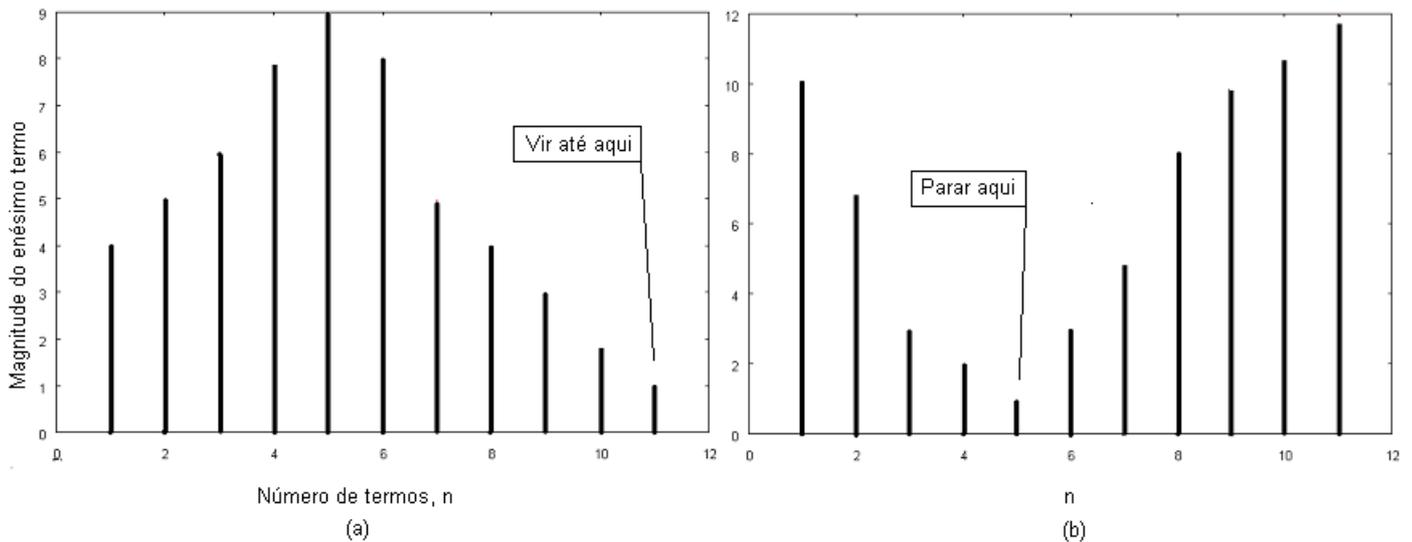


Figura 2.2: Comportamento de séries. (a) Lentamente convergente. (b) Série divergente assintótica.

# Capítulo 3

## Funcionais

### 3.1 Definição

Define-se *funcional* [Gelfand e Fomin 2000] como uma função (ou vetor de funções) que mapeia um conjunto de funções para um subconjunto real, i.e.,  $F(f) = a, a \in \mathbb{R}$ . Ressalte-se a diferença deste conceito para o de função composta  $F(f(t))$ . Neste caso, ter-se-ia simplesmente um função de variável real  $F(x)$ , sendo  $x = f(t)$  e  $t$  outra variável real. São exemplos de funcionais simples:

1. O mapeamento  $f \mapsto f(x_0)$  é um funcional que relaciona uma função qualquer  $f$  com seu valor em determinado ponto  $x_0$ .
2. A integral definida  $F(f) = \int_a^b f(x)dx$ .
3. Seja o conjunto de todas as curvas planas retificáveis. O comprimento de determinada curva é um número real univocamente associado a ela. Assim, o comprimento de uma curva é um funcional definido sobre o conjunto de curvas retificáveis.

### 3.2 Espaços funcionais

Conceitos utilizados para funções de variáveis reais também são aplicáveis para funcionais, como o de “continuidade”. Assim como para funções reais esta definição envolvia a avaliação da distância entre dois pontos no espaço, seu equivalente funcional precisa a mensuração do afastamento entre dois vetores de funções. Para defini-la, lança-se mão do conceito de “comprimento” ou “norma” de um vetor de funções  $\vec{f}$ .

### 3.2.1 Norma

**Definição:** A norma de um vetor (de funções ou números reais) é uma função,  $\|\cdot\|$ , que o mapeia para um valor real e possui as seguintes propriedades:

- $\|\vec{f}\| \geq 0 \forall \vec{f}$
- $\|\vec{f}\| = 0$  apenas se cada componente  $f_i$  de  $\vec{f}$  for identicamente nulo
- $\|\alpha \vec{f}\| = |\alpha| \|\vec{f}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|\vec{f} + \vec{g}\| \leq \|\vec{f}\| + \|\vec{g}\|$  (desigualdade triangular)

Duas formulações para norma são úteis para o trato de funcionais [Gelfand e Fomin 2000, p.6]

$$1. \quad \|\vec{f}\|_0 = \max |\vec{f}(\vec{x})|, \quad \forall \vec{x} \tag{3.1}$$

$$2. \quad \|\vec{f}\|_1 = \max \left( \max |\vec{f}(\vec{x})|, \max |\vec{f}'(\vec{x})| \right), \quad \forall \vec{x}$$

Na primeira formulação, dois vetores são considerados próximos quando  $|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x})| < \epsilon$ . A segunda admite um enunciado alternativo:

$$\|\vec{f}\|_1 = \max |\vec{f}(\vec{x})| + \max |\vec{f}'(\vec{x})| \tag{3.2}$$

Neste caso dois vetores são considerados próximos se ambos e suas respectivas derivadas forem próximos uns dos outros. Assim, se  $\|\vec{f} - \vec{g}\|_1 < \epsilon$ , então

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x})| < \epsilon \quad \text{e} \quad |\vec{f}'(\vec{x}) - \vec{g}'(\vec{x})| < \epsilon$$

### 3.2.2 Continuidade

Um funcional  $F(\vec{f})$  será dito contínuo em um vetor de funções  $\vec{f}_1$  se para cada valor positivo  $\epsilon$  há um outro positivo correspondente  $\delta$  tal que

$$|F(\vec{f}) - F(\vec{f}_1)| \leq \epsilon \tag{3.3}$$

dado que

$$\|\vec{f} - \vec{f}_1\| \leq \delta \tag{3.4}$$

Esta definição muda de acordo com a norma adotada. A  $\|\cdot\|_0$  é bem mais abrangente, porém pode não ser a mais adequada para certos funcionais. Por exemplo no caso do funcional para o comprimento do arco

$$F(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

e seja  $f(x) = 0$  e  $f_1(x) = 0,5\delta \text{sen}(\omega x)$ . É imediato que  $\|f - f_1\|_0 \leq \delta$  para qualquer valor de  $\omega$ , mas, à medida que este parâmetro cresce, o comprimento de  $f_1(x)$  pode ficar muitas vezes maior que o da função constante. Logo a norma  $\|\cdot\|_0$  não é apropriada para este funcional.

### 3.3 Linearidade e Variação

Um funcional é dito linear se atender às seguintes propriedades:

- $F(\alpha \vec{f}) = \alpha F(\vec{f})$
- $F(\vec{f} + \vec{g}) = F(\vec{f}) + F(\vec{g})$

Este tipo de funcional é necessário para conceito de *variação* (ou *diferencial*) de um funcional. Seja  $F(\vec{f})$  um funcional definido sobre algum espaço normado e seja

$$\Delta F(\vec{i}) = F(\vec{f} + \vec{i}) - F(\vec{f}) \quad (3.5)$$

seu *incremento* correspondente ao incremento  $\vec{i} = \vec{i}(\vec{x})$  da variável independente  $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x})$ . Se  $\vec{f}$  é fixo,  $\Delta F(\vec{i})$  é um funcional de  $\vec{i}$ , em geral não-linear. Supondo que:

$$\Delta F(\vec{i}) = \Theta(\vec{i}) - \epsilon \|\vec{i}\|$$

onde  $\Theta(\vec{i})$  é um linear funcional e  $\epsilon \rightarrow 0$  quando  $\|\vec{i}\| \rightarrow 0$ . Então o funcional  $\Delta F(\vec{i})$  é considerado diferenciável e o funcional linear  $\Theta(\vec{i})$ , que difere de  $\Delta F(\vec{i})$  por erro de ordem maior que um relativo a  $\|\vec{i}\|$ , é chamado de *variação* (ou *diferencial*) de  $\Delta F(\vec{i})$  e representado por  $\delta F(\vec{i})$ . Com base nesta definição, chega-se ao seguinte limite:

$$\lim_{\|\vec{i}\| \rightarrow 0} \frac{\Delta F(\vec{i}) - \delta F(\vec{i})}{\|\vec{i}\|} = 0 \quad (3.6)$$

Seja um funcional da forma

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y; \varepsilon) dx$$

Com  $f(x, y; \varepsilon)$  linear para  $\varepsilon = 0$ . A variação  $\delta F$  do funcional  $F(f)$  é definida por uma expressão que seja linear em  $\Delta f(x)$ ,  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ , e que difira do incremento

$$\Delta F = F(f + \Delta f) - F(f)$$

por um erro de ordem maior que um relativo à norma  $\|\cdot\|_1$ , i.e.,  $\max |y - y^*| + \max |y' - y^{*'}|$ , com  $y^* = y + \delta y$ . Assim:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} f(x, y; \eta) dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y; \varepsilon) dx = \\ &= \sum_{i=0}^N \eta^i b_i(x_1 + \delta x_1) - \sum_{i=0}^N \eta^i b_i(x_1) + \sum_{i=0}^N \eta^i b_i(x_0 + \delta x_0) - \sum_{i=0}^N \eta^i b_i(x_0) + \\ &+ \left( \sum_{i=0}^N \eta^i b_i(x_1) - \sum_{i=0}^N \varepsilon^i a_i(x_1) \right) - \left( \sum_{i=0}^N \eta^i b_i(x_0) - \sum_{i=0}^N \varepsilon^i a_i(x_0) \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

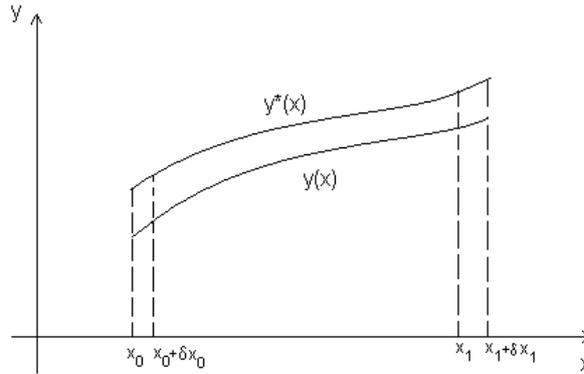


Figura 3.1: Duas funções próximas

Devido às diferenças das constantes a serem determinadas pelas condições iniciais em  $x_0 + \delta x_0$ ,  $x_0$  e o modo como estas afetam os termos da expansão assintótica, os termos em  $a$  de  $b$  diferem por um resíduo  $R$ . Ainda assim, possuem uma estrutura similar por serem soluções das mesmas equações diferenciais, o que permite aproximar a expressão acima pelo uso das relações  $\epsilon_i = \eta^i - \varepsilon^i$ ,  $\sum \eta^i b_i(x_0) - \sum \varepsilon^i a_i(x_j) = \sum \epsilon_i a_i(x_j) + \sum \eta^i R_i(x_j)$ . Restringindo a expansão para  $N = 1$  e fazendo  $\Delta_h g(x) = g(x + h) - g(x)$ ,  $h = x_1 - x_0$ :

$$\begin{aligned} \Delta F \sim \Delta_{\delta x_1} b_0(x_1) + \eta \Delta_{\delta x_1} b_1(x_1) + \Delta_{\delta x_0} b_0(x_0) + \eta \Delta_{\delta x_0} b_1(x_0) + \\ + \Delta_h a_0(x_0) + \epsilon \Delta_h a_1(x_0) + \Delta_h R_0(x_0) + \eta \Delta_h R_1(x_0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Voltando ao exemplo anterior da equação (2.7), porém assumindo que a condição inicial agora é  $y(0,99; \epsilon) = 1,01$ ; chega-se à seguinte aproximação perturbativa:

$$y(x) = x - 1 + 2,7262e^{-x} + 0,05 \left\{ -(x-1)^2 + 2x - 4 - 2,7262(x-1)^2 e^{-x} + 7,4321e^{-2x} + 2,6752e^{-x} \right\}$$

Tal expressão fornece um resíduo na forma:

$$R(x) = 0,0079e^{-x} + 0,05 \left\{ -0,0079(x-1)^2 e^{-x} + 0,043e^{-2x} - 0,0431e^{-x} \right\}$$

Uma aproximação pode ser feita para  $R(x)$  que seja linear para uma alteração  $\delta y_0$  da condição inicial. Estipulando  $\delta x_0 = 0$  e, caso não o seja, estima-se um novo valor  $\delta y_0^*$  para  $x = x_0$ :

$$y_0 + \delta y_0 = x_0 - 1 + A'_0 e^{-x_0}$$

$$A'_0 = e^{x_0} (y_0 + \delta y_0 - x_0 + 1)$$

O que fornece a primeira parcela do resíduo  $R_0(x) = (A'_0 - A_0) e^{-x} = \delta y_0 e^{x_0-x}$ . Como para  $y_1(x_0) = 0$ :

$$0 = -(x_0 - 1)^2 + 2x_0 - 4 - A_0 (x_0 - 1)^2 e^{-x_0} + A_0^2 e^{-2x_0} + A_1 e^{-x_0}$$

$$A_1 = e^{x_0} \left( (x_0 - 1)^2 - 2x_0 + 4 + A_0 (x_0 - 1)^2 e^{-x_0} - A_0^2 e^{-2x_0} \right)$$

Conseqüentemente:

$$A'_1 = e^{x_0} \left( (x_0 - 1)^2 - 2x_0 + 4 + A'_0 (x_0 - 1)^2 e^{-x_0} - A_0'^2 e^{-2x_0} \right)$$

$$A'_1 - A_1 = e^{x_0} \left( (A'_0 - A_0) (x_0 - 1)^2 e^{-x_0} - (A_0'^2 - A_0^2) e^{2x_0} e^{-2x_0} \right)$$

$$A'_1 - A_1 \sim e^{x_0} (\delta y_0 (x_0 - 1)^2 - 2\delta y_0 (y_0 - x_0 + 1))$$

Assim, uma aproximação linear em  $\delta y_0$  para o segundo termo do resíduo é:

$$R_1(x) \sim -\delta y_0 e^{x_0-x} (x-1)^2 + 2\delta y_0 (y_0 - x_0 + 1) e^{2(x_0-x)} + e^{x_0-x} \delta y_0 \left( (x_0 - 1)^2 - 2(y_0 - x_0 + 1) \right)$$

$$= \delta y_0 \left( 2(y_0 - x_0 + 1) e^{2(x_0-x)} + e^{x_0-x} \left( (x_0 - 1)^2 - 2(y_0 - x_0 + 1) - (x-1)^2 \right) \right)$$

Como  $R_0(x)$  vem da alteração na condição inicial sofrida pelo primeiro termo da expansão assintótica  $y_0(x)$  e este corresponde à solução analítica da equação diferencial

linear não perturbada de forma geral  $y' + p(x)y = g(x)$ , a partir da solução geral para uma EDO linear contida em [Boyce e DiPrima 1994, p. 13], determina-se que:

$$R_0(x) = \frac{\mu(x_0) \delta y_0}{\mu(x)} \quad (3.9)$$

Onde  $\mu(x)$  é um termo integrante  $\mu(x) = \exp \int p(x)dx$ . Entretanto,  $R_1(x)$  não é necessariamente linear em  $\delta y_0$ , como mostrou o último exemplo. Para ele, é necessário o uso de alguma identidade se valha do fato de  $y_0 \gg \delta y_0$ .

### 3.4 Aproximação de um funcional linear

Apesar de a expressão (3.8) já fornecer uma aproximação de primeira ordem em  $\epsilon$ , não o faz para  $\delta x_0$  e  $\delta x_1$ . Uma alternativa é aproximar estes termos usando o método de Euler, já que se conhece a derivada primeira  $f(x, y; \epsilon)$ . Ao se determinar  $R(x)$  a partir de uma estimativa do valor de  $y^*(x_0)$ , tem-se que  $a_1(x_0) = 0$  (i.e., em  $x_0$  está a nova condição inicial de referência, onde perturbação é nula). Aplicando isto em (3.8):

$$\begin{aligned} \Delta F &\sim \delta y_1 + \delta x_1 f|_{x_1, y_1} + \delta y_0 + \delta x_0 f|_{x_0, y_0} + \epsilon a_1(x_1) + \Delta_h R_0(x_0) + \eta \Delta_h R_1(x_0) \\ \Delta F &\sim \delta y_1 + \delta x_1 (f + \Delta f)|_{x_1, y_1} + \delta y_0 + \delta x_0 (f + \Delta f)|_{x_0, y_0} + \epsilon a_1(x_1) + \\ &+ \mu(x_0) \delta y_0 \Delta_h (1/\mu(x)) + \eta \Delta_h R_1(x_0) \end{aligned}$$

Como  $\delta y_0 + \delta x_0 (f + \Delta f)|_{x_0, y_0} \sim \delta y_0^* = R(x_0)$ , então:

$$\Delta F \sim \delta y_1 + \delta x_1 (f + \Delta f)|_{x_1, y_1} + \epsilon a_1(x_1) + \mu(x_0) \delta y_0 / \mu(x_1) + \eta R_1(x_1) \quad (3.10)$$

Lembrando que  $\delta y_0$  é uma estimativa para  $y^*(x_0) - y(x_0)$ .

Ainda falta considerar o efeito produzido pelo resíduo  $\eta R_1(x_1)$ . Suas dependências com as condições iniciais não são necessariamente lineares, sendo, então, responsável pela parte não-linear do incremento. De volta ao limite (3.6)

$$\lim_{\|\vec{i}\| \rightarrow 0} \frac{\Delta F(\vec{i}) - \delta F(\vec{i})}{\|\vec{i}\|}$$

Fazendo  $\eta R_1(x_1)$  ser desmembrado em duas partes  $\eta R_{L1}(x_1)$  e  $\eta R_{N1}(x_1)$ , respectivamente uma parcela linear e outra não-linear, e considerando  $\vec{i} \equiv (\delta x_0, \delta y_0, \Delta f)$ ,  $\Delta F(\vec{i}) =$

$\delta F \left( \vec{i} \right) + R_N \left( \vec{i} \right)$ ; o limite pode ser reescrito como:

$$\lim_{\|\vec{i}\| \rightarrow 0} \frac{\|R_{N1}(\delta x_0, \delta y_0, \Delta f)\|}{\|\vec{i}\|}$$

Já que este resíduo não depende de  $\delta x_0$  (devido a estimativa feita de  $y(x_0)$ ) e  $\Delta f$  (que pertence à parcela linear em  $\epsilon$ ), ele pode ser simplificado para:

$$\lim_{\|\delta y_0\| \rightarrow 0} \frac{\|R_{N1}(\delta y_0)\|}{\|\delta y_0\|}$$

$R_1(\delta y_0)$  expressa os termos de  $y_1(x)$  que são dependentes direta ou indiretamente das condições iniciais e, portanto, de  $\delta y_0$ . Analisando este limite sob a norma  $\|\cdot\|_1$ , para que ele tenda a zero é necessário que

1.  $\lim_{|\delta y_0| \rightarrow 0} \frac{|R_{N1}(\delta y_0)|}{|\delta y_0|} = 0$  o que leva a  $O(R_{N1}(\delta y_0)) > O(\delta y_0)$
2.  $\lim_{|\delta y_0| \rightarrow 0} \frac{|R'_{N1}(\delta y_0)|}{1} = \lim_{|\delta y_0| \rightarrow 0} |R'_{N1}(\delta y_0)| = 0$  o que leva a  $R'_{N1}(0) = 0$

Portanto, satisfeitas estas condições, existe um funcional linear na forma

$$\delta F = \delta y_1 + \delta x_1 (f + \Delta f)|_{x_1, y_1} + \epsilon a_1(x_1) + \mu(x_0) \delta y_0 / \mu(x_1) + \eta R_{L1}(x_1)$$

capaz de aproximar  $\Delta F$  com um erro menor que  $\|\vec{i}\|$ .



(3.11) como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = g_{11}(x) + \varepsilon_1 g_{12}(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = g_{21}(x) + \varepsilon_2 g_{22}(x) \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = g_{n1}(x) + \varepsilon_n g_{n2}(x) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

A partir deste novo sistema, é possível calcular uma expansão para cada  $y_i(x; \varepsilon_i)$  independentemente das demais.

# Capítulo 4

## Aplicações ao Projétil Balístico

O projétil balístico é um modelo simples e real que mostra a utilidade da presença de funcionais lineares na determinação do impacto de pequenas mudanças nos parâmetros de um sistema. Aqui será utilizado uma versão adaptada do modelo “ponto de massa” (PM) contido em [McCoy 1999], com as seguintes características:

1. O projétil é tratado como uma massa pontual, apenas sob a influência da gravidade e do efeito de arrasto (*drag*). Não são considerados efeitos oriundo de sua aerodinâmica (*lifting*) ou estabilização giroscópica (*magnus*), conforme o PM clássico;
2. Serão consideradas altitudes moderadas a fim de poder se tratar a densidade do ar como constante. Inicialmente, serão utilizadas velocidades iniciais subsônicas ( $v(0) < 300 \text{ m/s}$ ) a fim de se manter o coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) constante. Ao fim, uma avaliação de um  $C_D$  variável será feita;
3. Tal como no PM clássico, a força de arrasto possui a mesma direção do vetor velocidade e sentido oposto, sendo proporcional ao quadrado do módulo de  $\vec{v}$ .

Com estas considerações, as duas equações que regem o movimento de um projétil são:

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\frac{\rho AC_D}{2m} u \sqrt{u^2 + w^2} && \text{ac horizontal} \\ w'(t) &= -g - \frac{\rho AC_D}{2m} w \sqrt{u^2 + w^2} && \text{ac vertical} \end{aligned} \quad (4.1)$$
$$u(0) = v(0) \cos \alpha_0, \quad w(0) = v(0) \sin \alpha_0$$

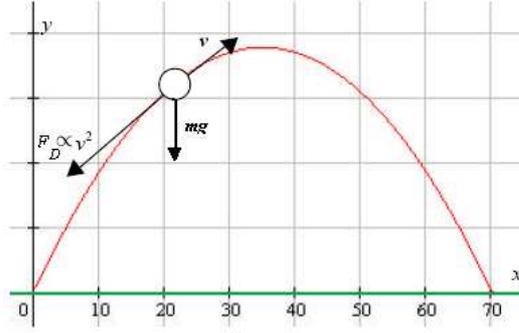


Figura 4.1: Modelo balístico representado.

Onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\rho$  é a densidade do meio,  $A$  a área seção reta do projétil,  $m$  sua massa,  $v = \sqrt{u^2 + w^2}$  e  $\alpha_0$  o ângulo de elevação de disparo ou simplesmente *elevação*.

São duas equações diferenciais de primeira ordem simultâneas e que não possuem solução analítica conhecida. Algumas aproximações analíticas podem ser feitas para nos casos de “tiro plano” ( $\alpha_0 < 5^\circ$ ) [McCoy 1999, p. 88-97] ou para situações de velocidade hipersônica ( $v \gg 1 \text{ mach}$ ), quando  $C_D \propto 1/v$ . Uma outra linha de abordagem apresentada aqui é a de expansões assintóticas perturbativas.

## 4.1 Expansões assintóticas para o modelo balístico

É imediato que o sistema (4.1) possui a mesma estrutura apresentada em (3.11), estando a parte linear de cada equação livre de variável que não seja a mesma do derivativo. A solução de seu sistema equivalente na forma (3.12) envolve uma quantidade considerável de cálculo e, por isso, foi posta no apêndice A, sendo apresentado aqui apenas o resultado final. Breve análise destas expansões para o caso subsônico pode ser encontrada em [Johnson 2005, p. 198], [de Mestre 1990, p. 84] e [de Mestre 1991]. Para as equações de velocidade:

$$u(t) = v_0 \cos \alpha_0 + k \left\{ -\frac{v_0 \cos \alpha_0}{2} \left( t - \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \right) S - \frac{v_0^3 \sin 2\alpha_0}{4g} - \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha_0}{2g} \ln \left( \frac{gt - v_0 \sin \alpha_0 + S}{v_0 (1 - \sin \alpha_0)} \right) \right\} \quad (\text{a})$$

$$w(t) = v_0 \sin \alpha_0 - gt + \frac{k}{3g} \{ S^3 - v_0^3 \} \quad (\text{b})$$

(4.2)

onde

$$S \equiv \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + g^2 t^2}, \quad v(0) \equiv v_0 \text{ e } k \equiv 0,5\rho AC_D/m$$

Realizando a integração de  $u(t)$  e  $w(t)$ , sendo as condições iniciais  $u(0) = 0$  e  $w(0) = 0$ :

$$x(t) = tv_0 \cos \alpha_0 + k \left\{ \frac{v_0 \cos \alpha_0}{6g} (v_0^3 - S^3) + \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha_0}{2g^2} (S - v_0) - t \frac{v_0^3 \operatorname{sen} 2\alpha_0}{4g} \right. \quad (\text{a}) \\ \left. - \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha_0}{2g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g} \right) \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + S}{v_0(1 - \operatorname{sen} \alpha_0)} \right) \right\}$$

$$y(t) = tv_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - \frac{gt^2}{2} + k \left\{ \frac{v_0^4 \operatorname{sen} \alpha_0}{12g^2} + \frac{S^3}{12g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g} \right) - \frac{v_0^3 t}{3g} + \frac{v_0^4 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0}{8g^2} \right. \quad (\text{b}) \\ \left. + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{8g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g} \right) S + \frac{v_0^4 \cos^4 \alpha_0}{8g^2} \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + S}{v_0(1 - \operatorname{sen} \alpha_0)} \right) \right\} \quad (4.3)$$

Será analisada a presença de um funcional linear para três parâmetros da fórmula:  $\rho$ ,  $v_0$  e  $m$ . Para o caso de  $\rho$ , a resposta é de imediato afirmativa, pois este se enquadra na situação em que não há dependência nenhuma das condições iniciais, quando a variação de um funcional depende exclusivamente das mudanças no fator perturbativo representado por  $k$ , que é proporcional a  $\rho$ .

Em  $v_0$ , tem-se a alteração da condição inicial para as equações (4.2), o que leva à situação onde existe um resíduo não-linear (sç 3.4). Então é necessário avaliar se a parte não-linear do resíduo  $R(x)$  oriundo da variação de  $v_0$  decai com uma ordem maior que a unidade. Uma inspeção nas fórmulas (4.2) e (4.3) mostra uma dependência do segundo termo da expansão que é  $O(v_0^3)$  para as de velocidade e  $O(v_0^4)$  para as de espaço. A expansão binomial de  $v_0^n (1 + \delta v_0)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , quando  $\delta v_0 = \Delta v_0 / v_0 \ll 1$ , é aproximada por  $v_0^n (1 + n\delta v_0 + O(\delta v_0^2))$ , o que garante uma parte não-linear do resíduo que seja no mínimo  $O(\delta v_0^2)$ . A derivada deste resíduo é  $O(\delta v_0)$ , logo vai a zero quando  $\delta v_0 \rightarrow 0$ .

Por fim,  $m$ , tal como  $\rho$ , afeta exclusivamente as mudanças em  $k$ , porém é inversamente proporcional. Isto gera algumas considerações práticas a serem vistas adiante.

## 4.2 Experimento numérico do projétil 105 mm HE

Este tipo de munição está ainda em uso por diversos exércitos, fornecendo uma base experimental já bem conhecida. Seus dados são:

- massa  $m = 14,969$  kg.

- Área efetiva da seção reta  $A = \pi 0,1049^2/4 \simeq 8,64 \times 10^{-3} m^2$ .
- densidade do ar a nível do mar e  $15^\circ C$   $\rho = 1,225 kg/m^3$ .
- Coeficiente de arrasto para velocidades subsônicas  $C_D = 0,124$ .

Com estes dados, pode-se verificar que o termo perturbativo  $k = 4,39 \times 10^{-5} \ll 1$ , o que torna válida a aproximação para velocidades até cerca de 300 m/s, quando a parcela perturbativa começa a ter a mesma ordem de grandeza das demais. O experimento consiste no uso de um método numérico (uma adaptação do RK-4 constante em [Fazuri e Matos 1998] com os dados de [McCoy 1999, cap. 8 e 9]) para o cálculo do alcance de disparos a diversas elevações e seu tempo de vôo. De posse destes, foram feitas pequenas mudanças na densidade (+1% do padrão) e da velocidade inicial (+ 1,0 m/s) e calculada a alteração no alcance para um mesmo tempo de vôo. Por fim, são feitos novos cálculos numéricos com mudanças dez vezes maiores e comparados estes com os múltiplos de dez das mudanças unitárias. Os gráficos das figuras (4.2) a (4.7) mostram as saídas para esta etapa, todos feito com a velocidade padrão mais baixa do projétil 105 HE,  $v_0 = 195,1 m/s$ :

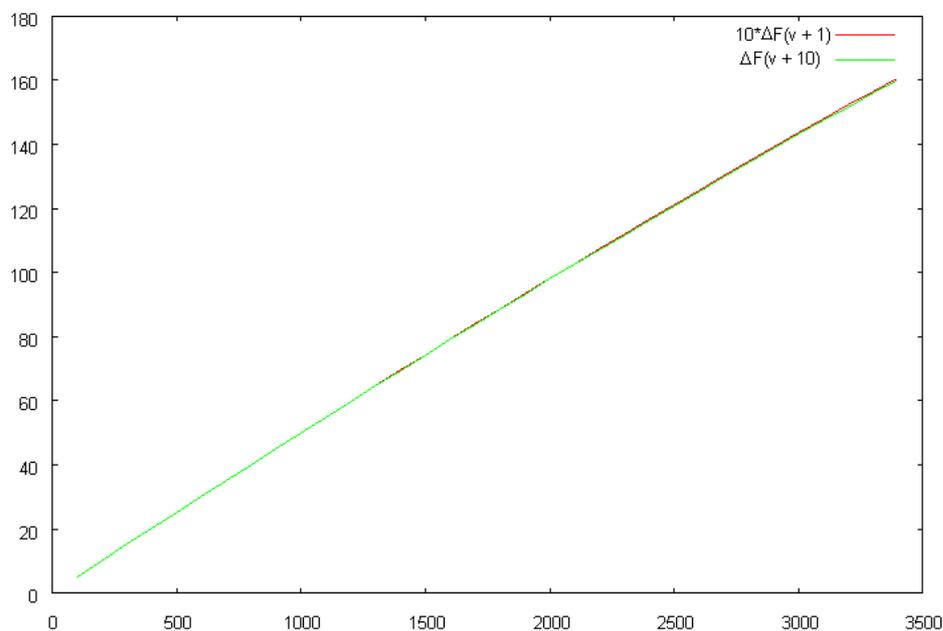


Figura 4.2: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *alcance* para acréscimo de 10,0 m/s na velocidade inicial. Tempo de vôo idêntico.

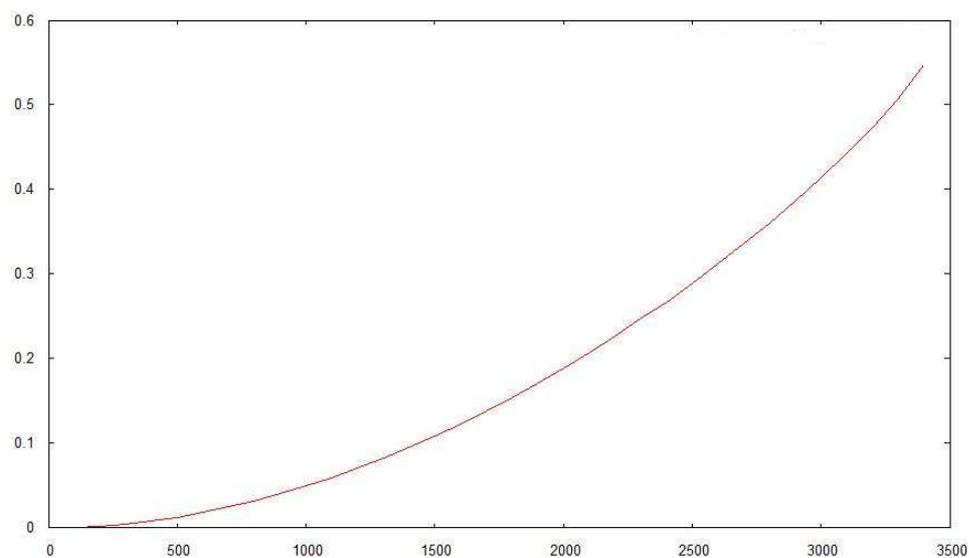


Figura 4.3: Módulo da diferença entre as curvas do gráfico anterior.

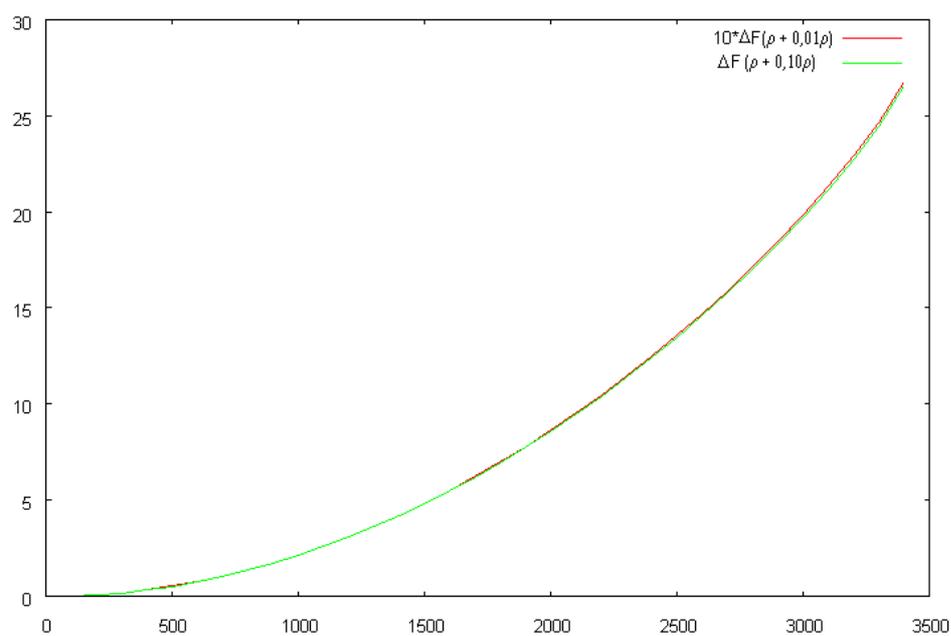


Figura 4.4: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *alcance* para acréscimo de 10% na densidade do ar. Tempo de vôo idêntico.

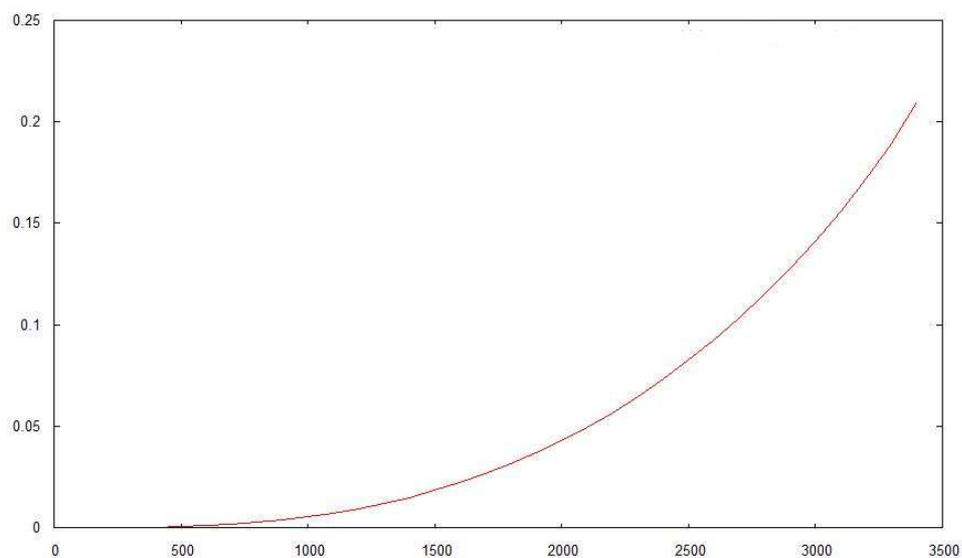


Figura 4.5: Módulo da diferença entre as curvas do gráfico anterior.

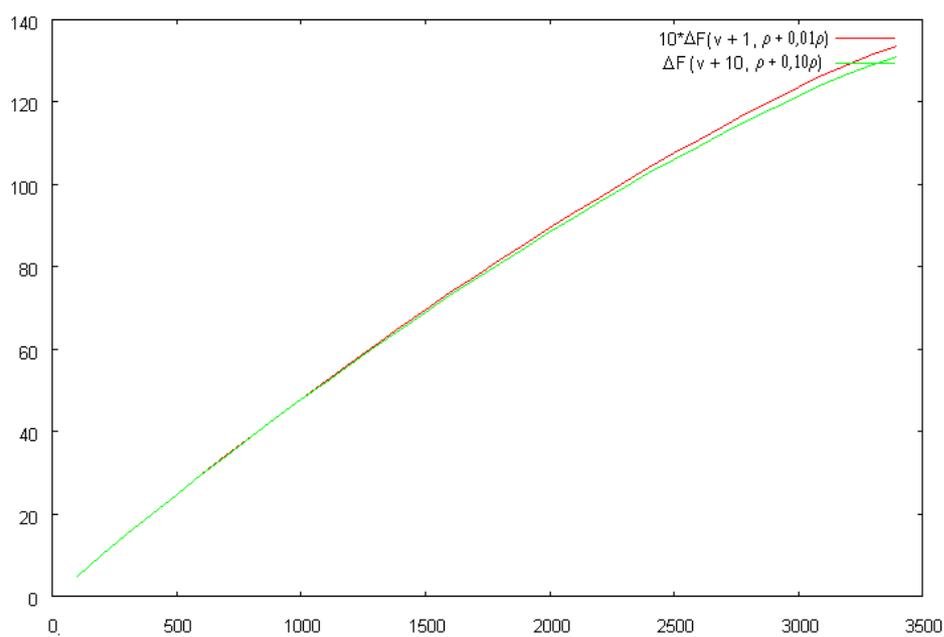


Figura 4.6: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *alcance* para acréscimo de 10,0 m/s na velocidade inicial e de 10% na densidade do ar. Tempo de vôo idêntico.

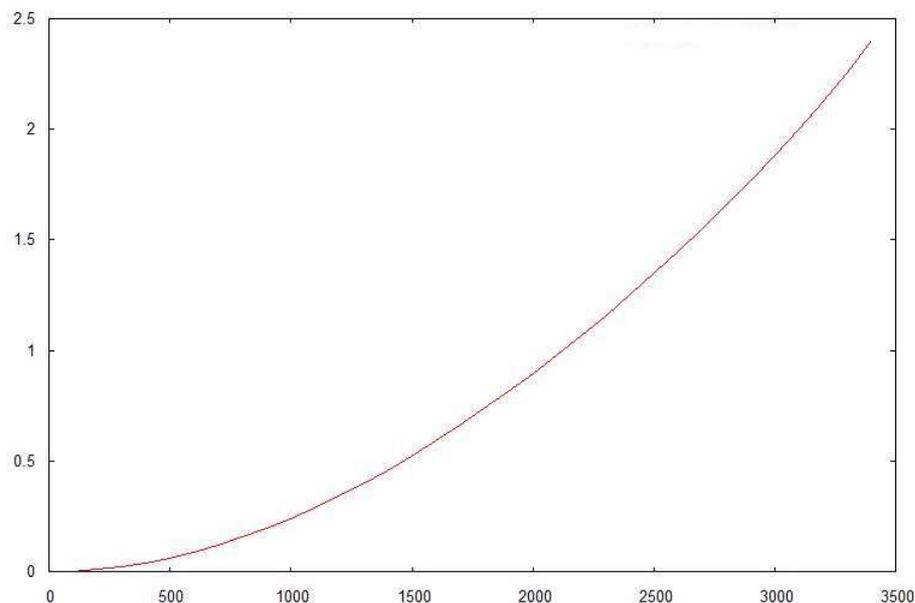


Figura 4.7: Módulo da diferença entre as curvas do gráfico anterior.

Foram constatadas a proporcionalidade das variações, bem como sua aditividade. A 3400m para variação tanto em densidade quanto  $v_0$ , a diferença entre o valor real e o estimado foi de apenas  $(133,2/130,8 - 1,0) \times 100 = 1,84\%$ . O próximo teste foi similar a este, porém estendendo o tempo de vôo do projétil até o instante de impacto para as trajetórias com perturbações. Como agora é ultrapassado o intervalo original de integração, a presença de um funcional linear  $\delta F$  depende da validade do termo de extrapolação  $\delta x_1 f|_{x_1, y_1}$  do funcional linear (3.10). A aproximação linear das variações da velocidade  $v$  e da ordenada  $y$  sob mesmo tempo de vôo, prevista teoricamente, garante essa validade da extrapolação e foi comprovada numericamente.

Os gráficos das figuras (4.8) a (4.13) mostram as saídas para este novo procedimento com ordenada final nula, todos feitos com  $v_0 = 195,1 m/s$ :

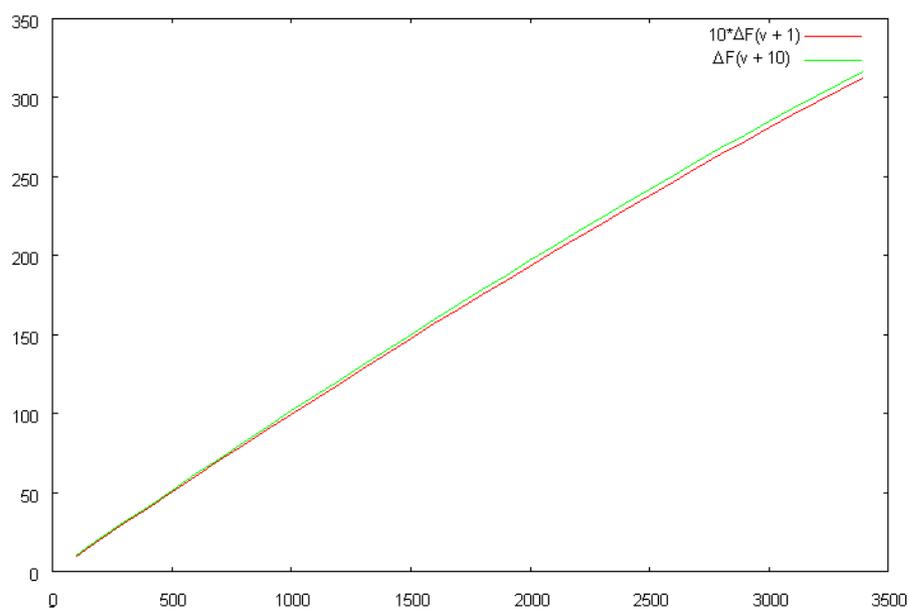


Figura 4.8: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *alcance* para acréscimo de 10,0 m/s na velocidade inicial. Ordenada final nula.

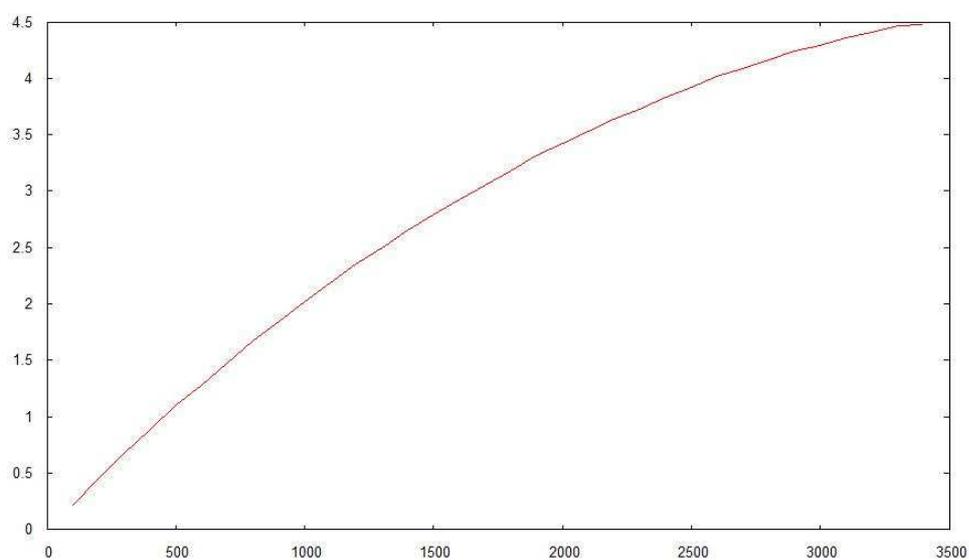


Figura 4.9: Módulo da diferença entre as curvas do gráfico anterior.

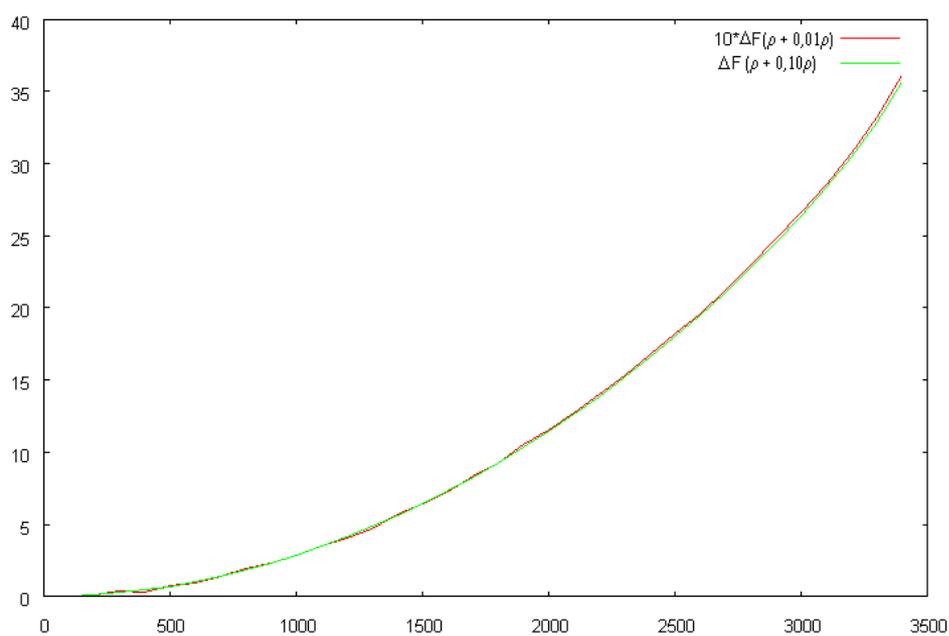


Figura 4.10: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *alcance* para acréscimo de 10% na densidade do ar. Ordenada final nula.

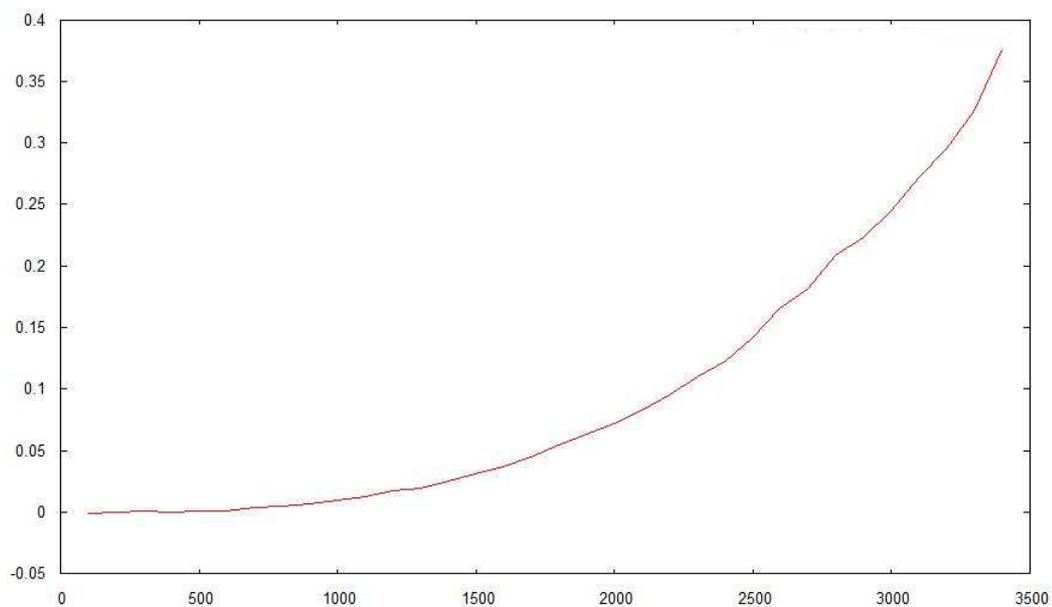


Figura 4.11: Módulo da diferença entre as curvas do gráfico anterior.

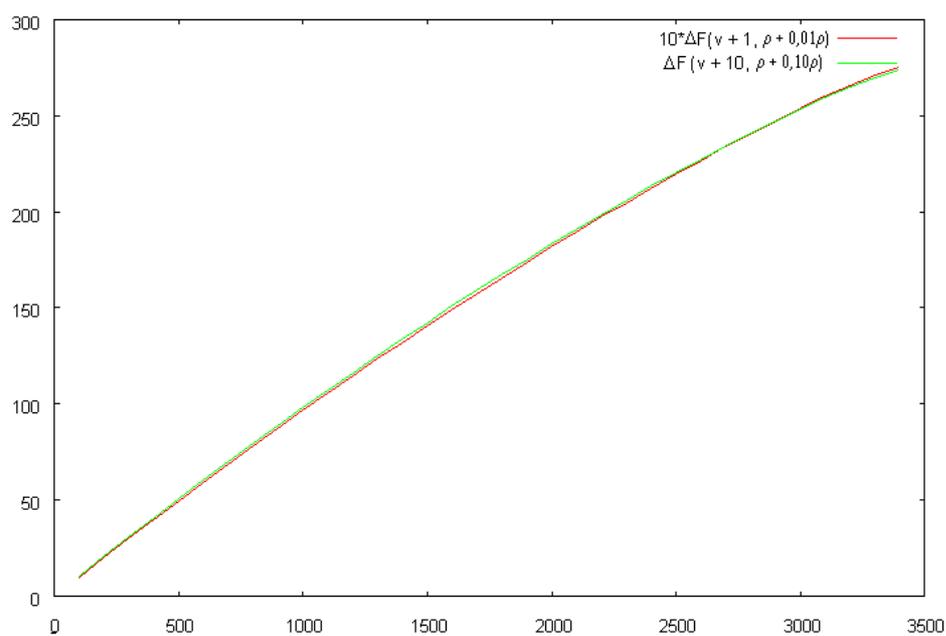


Figura 4.12: Gráfico *variação de alcance × alcance* para acréscimo de 10,0 m/s na velocidade inicial e de 10% na densidade do ar. Ordenada final nula.

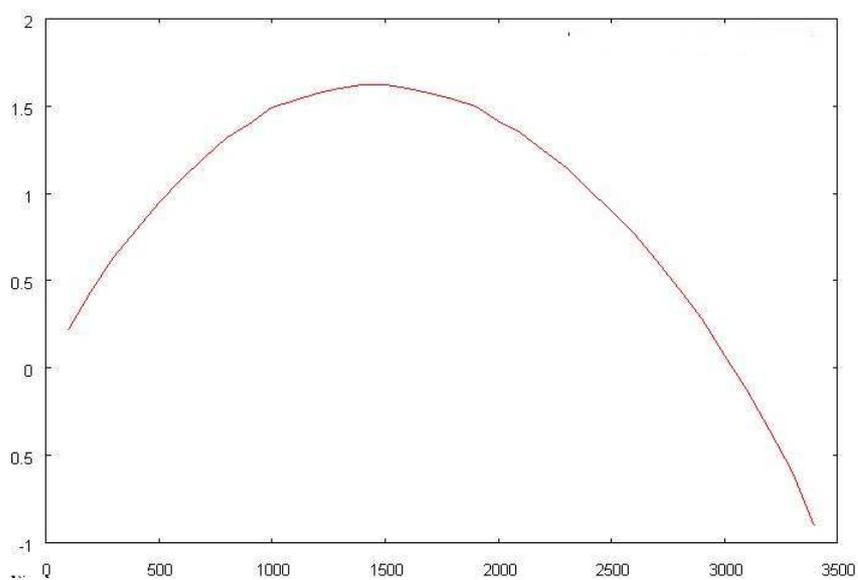


Figura 4.13: Diferença entre as curvas do gráfico anterior.

As correções mantiveram a linearidade aproximada, como previsto. Era de se esperar que variações em velocidade apresentassem erros um pouco maiores em virtude da aproximação feita para a expansão binomial, que desprezou termos de ordem mais elevada.

Tais correções, como já informado, são inversamente proporcionais à mudanças na massa do projétil, porém há uma discrepância entre este resultado e o que é feito na prática. Utiliza-se uma unidade de variação de peso denominada *quadrado*(qd) que depende da massa considerada “padrão”, sendo que para o modelo 105mm HE, 1 qd corresponde a cerca de 0,272 kg . A correção de um quadrado a mais é tratada de forma proporcional para a adição de dois ou três, quando na realidade ela não o é. A correta relação de proporcionalidade é:

$$\begin{aligned} \Delta F(m + n\Delta m)/\Delta F(m + \Delta m) &\simeq \left( \frac{\rho AC_D}{2(m + n\Delta m)} - \frac{\rho AC_D}{2m} \right) / \left( \frac{\rho AC_D}{2(m + \Delta m)} - \frac{\rho AC_D}{2m} \right) \\ &= \left( \frac{-n\Delta m}{(m + n\Delta m)m} \right) / \left( \frac{-\Delta m}{(m + \Delta m)m} \right) = \frac{m + \Delta m}{m + n\Delta m} \end{aligned}$$

onde  $\Delta m$  é a massa de um *quadrado* e  $n$  o número destes a mais que o peso padrão. Tendo  $m = 14,969$  kg e  $\Delta m = 0,272$  kg como constantes, a razão acima perde a proporcionalidade para valores mais altos de  $n$  (gráficos das figuras 4.14 e 4.15).

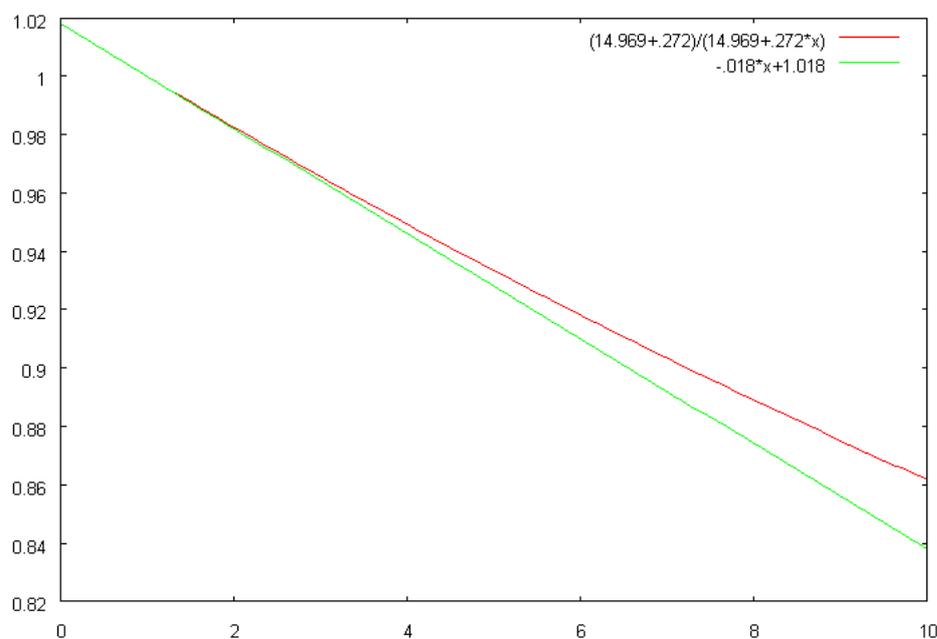


Figura 4.14: Gráfico função  $(m + \Delta m)/(m + n\Delta m)$  para os valores de  $m$  e  $\Delta m$  do projétil 105mm HE comparada a uma função linear.

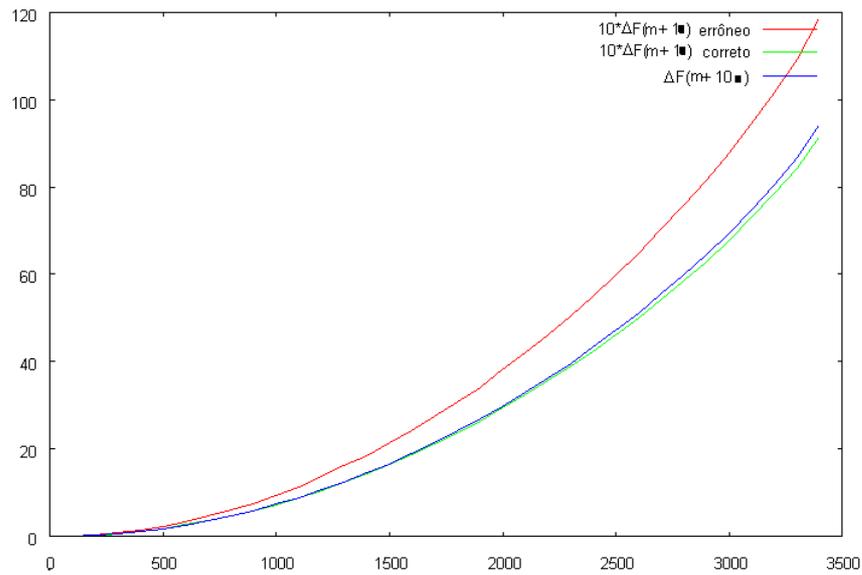


Figura 4.15: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *alcance* para acréscimo de 10 qd na massa do projétil, com duas estimativas feitas a partir da variação para 1 qd. Ordenada final nula.

O uso da unidade de quadrados, porém, pode fornecer até razoável aproximação para mudanças de poucos quadrados.

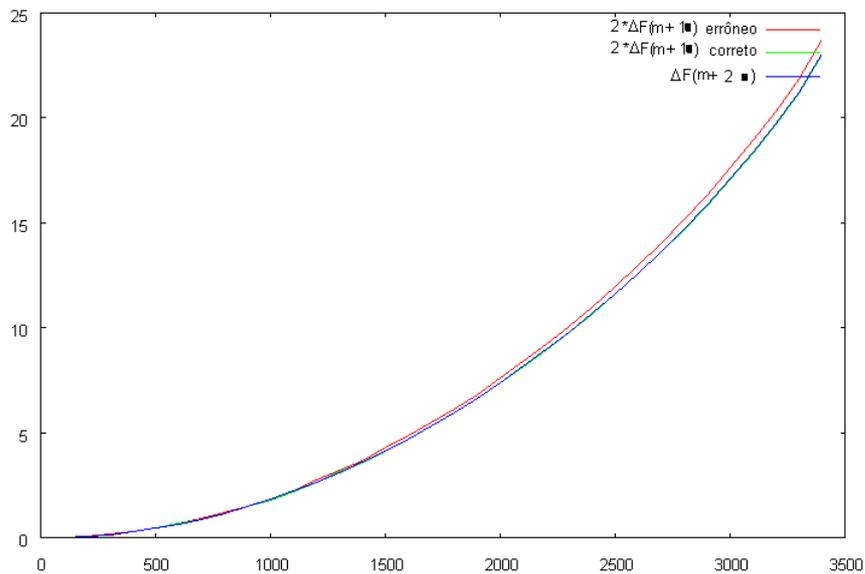


Figura 4.16: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *alcance* para acréscimo de 2 qd na massa do projétil, com duas estimativas feitas a partir da variação para 1 qd. Ordenada final nula.

### 4.3 Trajetórias em regime supersônico

Para trajetórias supersônicas, é possível uma aproximação analítica para de  $C_D$  em velocidades de alguns machs, na qual:

$$C_D \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Onde  $M$  é a velocidade em machs. Por meio disto, transformam-se as equações (4.1) em um novo par:

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\widehat{k}u\sqrt[4]{u^2 + w^2} && \text{ac horizontal} \\ w'(t) &= -g - \widehat{k}w\sqrt[4]{u^2 + w^2} && \text{ac vertical} \end{aligned} \tag{4.4}$$

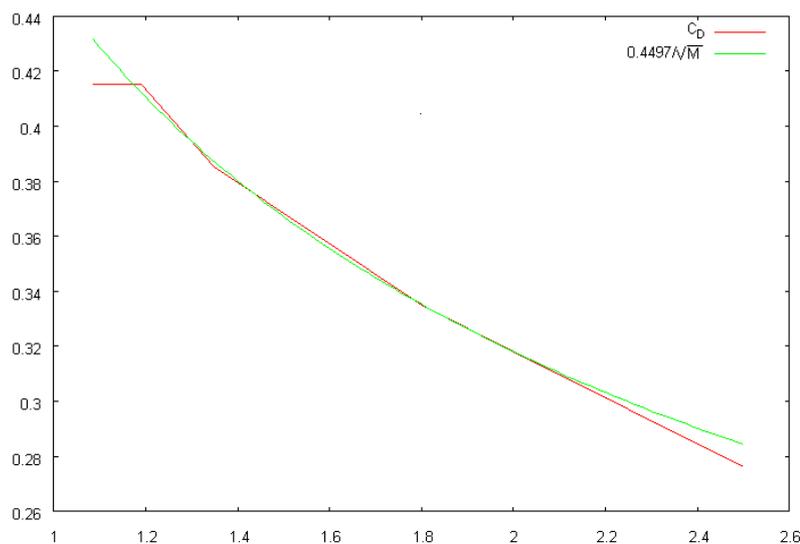


Figura 4.17: Gráfico  $C_D \times velocidade$  (machs) do projétil em estudo justaposto a uma aproximação analítica para o intervalo  $[1,2; 2,1]$  machs

Não existe uma forma analítica para  $u(t)$ ,  $w(t)$ ,  $x(t)$  e  $y(t)$ , porém uma solução em série de potências é satisfatória e está disponível no apêndice A. Seus resultados são:

$$u(t) = v_0 \cos \alpha_0$$

$$-\widehat{k} \frac{(v_0 \cos \alpha_0)^{\frac{3}{2}}}{g} \left( (gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha_0) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -s^2 \right) + v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha_0 \right) \right)$$

$$w(t) = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - gt + \frac{2\widehat{k}}{5g} \left\{ (v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + g^2 t^2)^{\frac{5}{4}} - v_0^{\frac{5}{2}} \right\}$$

$$x(t) = tv_0 \cos \alpha_0 - \widehat{k} \frac{(v_0 \cos \alpha_0)^{\frac{3}{2}}}{g} \left\{ \frac{2v^2 \cos^2 \alpha_0}{5g^2} \left( {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; -\tan^2 \alpha_0 \right) - {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; -s^2 \right) \right) \right. \\ \left. + tv_0 \operatorname{sen} \alpha_0 {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha_0 \right) \right\}$$

$$y(t) = tv_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - \frac{gt^2}{2} +$$

$$+ \frac{2\widehat{k}}{5g} \left\{ (v_0 \cos \alpha_0)^{\frac{5}{2}} \left( (gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha_0) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -s^2 \right) + (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha_0 \right) \right) - tv_0^{\frac{5}{2}} \right\}$$

$$s \equiv \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{v_0 \cos \alpha_0}$$

(4.5)

Sendo  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  a série hipergeométrica gaussiana, convergente para  $s < 1$ . A verificação da presença de funcional linear é semelhante à anterior. Para a velocidade, a fração  $(gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)/(v_0 \cos \alpha_0)$  é  $O(1)$  para  $v_0$ , estando a principal contribuição das parcelas perturbativas associadas a  $v_0^r (1 + \delta v_0)^r$ ; com  $r$  igual a  $5/2$ ,  $5/2$ ,  $7/2$  e  $7/2$  para  $u_1$ ,  $w_1$ ,  $x_1$  e  $y_1$  respectivamente. Tal como para o vôo subsônico, quando  $\delta v_0 \ll 1$ , pode-se aproximar para  $v_0^r (1 + r\delta v_0)$ .

Na trajetória subsônica, a temperatura do meio não influencia em nada o modelo, porém agora ela tem participação na conversão de  $k$  para  $\widehat{k}$ . Por exemplo, para a aceleração horizontal:

$$u'(t) = -ku\sqrt{u^2 + w^2} = -\frac{\rho AC_D}{2m} u\sqrt{u^2 + w^2} = -\frac{\rho AK}{2m\sqrt{M}} u\sqrt{u^2 + w^2} = -\frac{\rho AK}{2m\sqrt{M}} u\sqrt{u^2 + w^2} = \\ = -\frac{\rho AK \sqrt{v_{som}}}{2m \sqrt[4]{u^2 + w^2}} u\sqrt{u^2 + w^2} = -\frac{\rho AK \sqrt{v_{som}}}{2m} u \sqrt[4]{u^2 + w^2} = -\widehat{k} u \sqrt[4]{u^2 + w^2}$$

onde  $K$  é uma constante e a velocidade do som no ar é determinada pela fórmula  $v_{som} = \sqrt{1,404RT_e}$ ,  $R$  é a constante universal dos gases e  $T_e$  a temperatura em kelvins. Portanto, uma variação  $\Delta \widehat{k}$  é proporcional a  $\sqrt[4]{T_e + \Delta T_e} \simeq \sqrt[4]{T_e} + 0,25\Delta T_e / \sqrt[4]{T_e^3}$ , garantindo a aproximação linear dentro das variações meteorológicas usuais. Para a densidade do ar e

a massa, o raciocínio permanece o mesmo do voo subsônico.

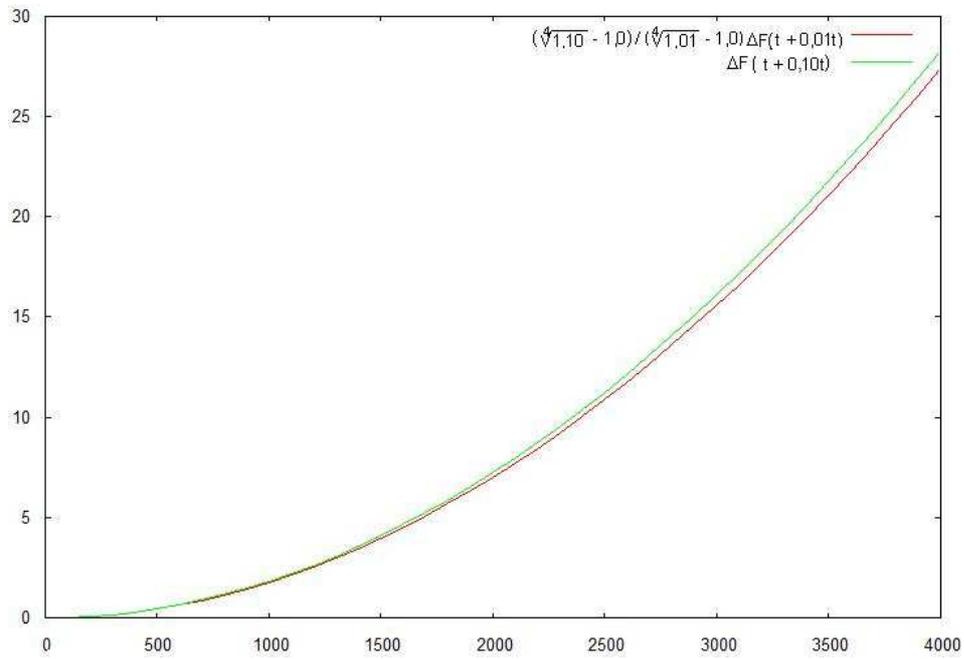


Figura 4.18: Gráfico *variação de alcance × alcance* para acréscimo de 10% na temperatura. Ordenada final nula e velocidade inicial supersônica (700 m/s).

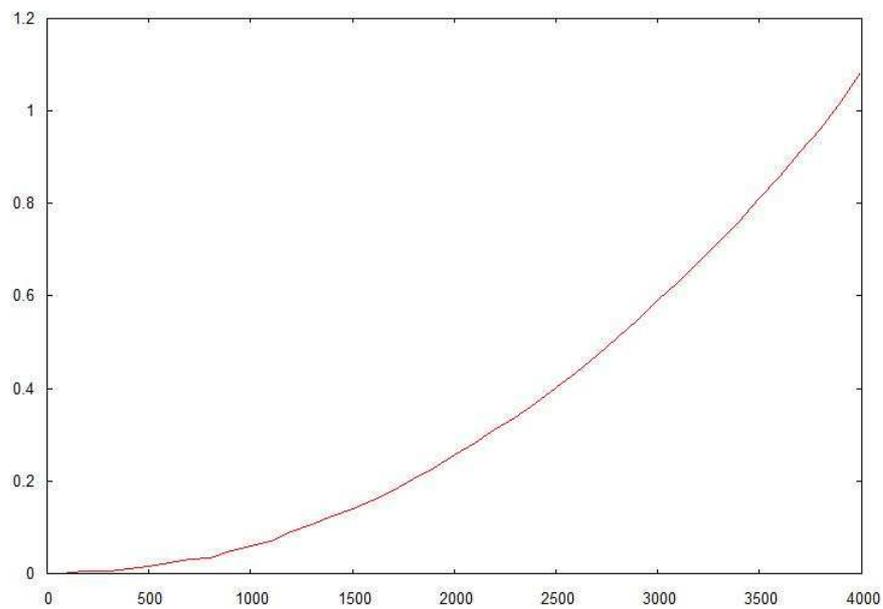


Figura 4.19: Módulo da diferença entre as curvas do gráfico anterior.

Apesar de válidas em teoria, a utilidade prática das expansões (4.4) é baixa, pois a presença de um termo pequeno em relação aos demais desaparece. Para se ter idéia das ordens de grandeza envolvidas, convém reescrever as equações (4.1) em sua forma adimensional, i.e., reescalonar as variáveis de forma a eliminar as unidades de medidas. Escolhendo  $v_0$  como parâmetro de velocidade e  $g$  para a gravidade unitária representativa, obtém-se variáveis adimensionais com as transformações  $v = v_0 V$ ,  $t = v_0 T/g$ . As equações diferenciais do sistema adimensional equivalente a (4.1) são:

$$\begin{aligned} U'(T) &= -\varepsilon U \sqrt{U^2 + W^2} && \text{ac horizontal} \\ W'(T) &= -1 - \varepsilon W \sqrt{U^2 + W^2} && \text{ac vertical} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$U(0) = \cos \alpha_0, \quad W(0) = \text{sen } \alpha_0$$

com  $\varepsilon = kv_0^2/g$ . Portanto, quanto maior a velocidade, pior a aproximação. Para um tiro supersônico ainda há o agravante de  $\hat{k}$  ser setenta vezes maior que  $k$  para o projétil tomado como exemplo. As expansões (4.5) podem continuar em uso para um hipotético percurso em meio resistivo com o comportamento descrito na figura (4.17) e baixa velocidade, mas a abordagem dada no próximo capítulo permite contornar tal dificuldade.

# Capítulo 5

## Expansões para Altas Velocidades

As expansões feitas originalmente perdem a validade para velocidades já da ordem de  $v_0 \approx 300\text{m/s}$ . Para estes casos, usando o projétil 105 HE ( $k = 4,4 \times 10^{-5}$ ) como exemplo, tem-se um termo perturbativo adimensional de  $\varepsilon = kv_0^2/g \approx 0,4$ . A expansão em alcance horizontal perde a validade (i.e. a ordem do primeiro termo é igual a do segundo) para  $t = O(\varepsilon^{-2})$  e como o equivalente dimensional de  $\varepsilon^{-2}$  é  $t = v_0/(g(0,4)^2) \approx 191\text{s}$ , tem-se que a validade dela é da ordem de uma centena de segundos. Para as expansões supersônicas ( $k = 2,9 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon \approx 26,2$ ), isto torna-se mais crítico. Devido à presença da série hiperbólica, não é trivial avaliar a validade para as expansões (4.5), exceto para a velocidade vertical  $w \equiv v_y$ , cuja a validade vai até  $t = O(\varepsilon^{-2/3})$ . Neste caso,  $t = v_0/(g\sqrt[3]{(26,2)^2}) \approx 3,5\text{s}$ , não mais que alguns segundos.

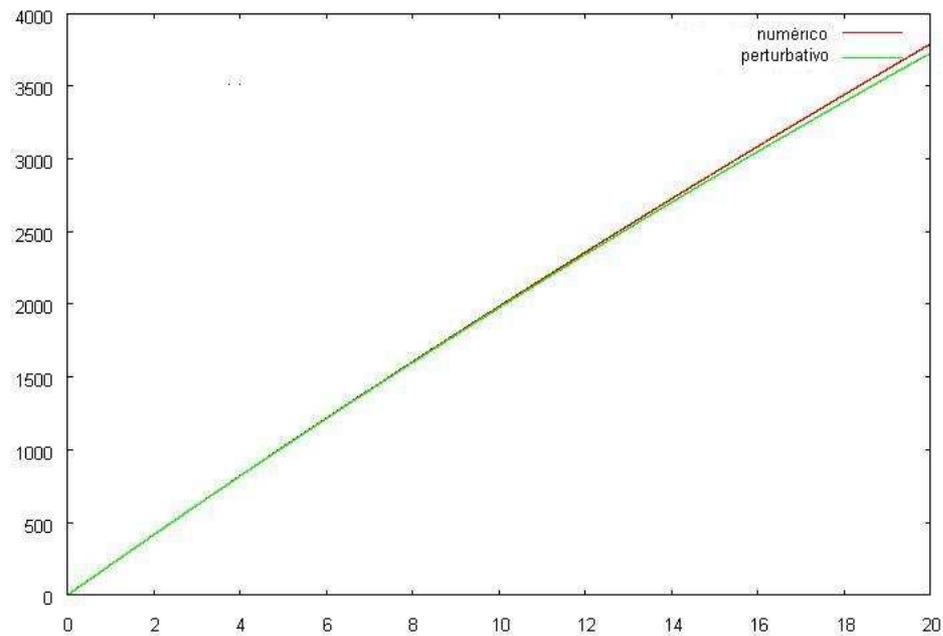


Figura 5.1: Gráfico *alcance*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 300\text{m/s}$ ,  $\alpha_0 = 45^\circ$  e voo subsônico.

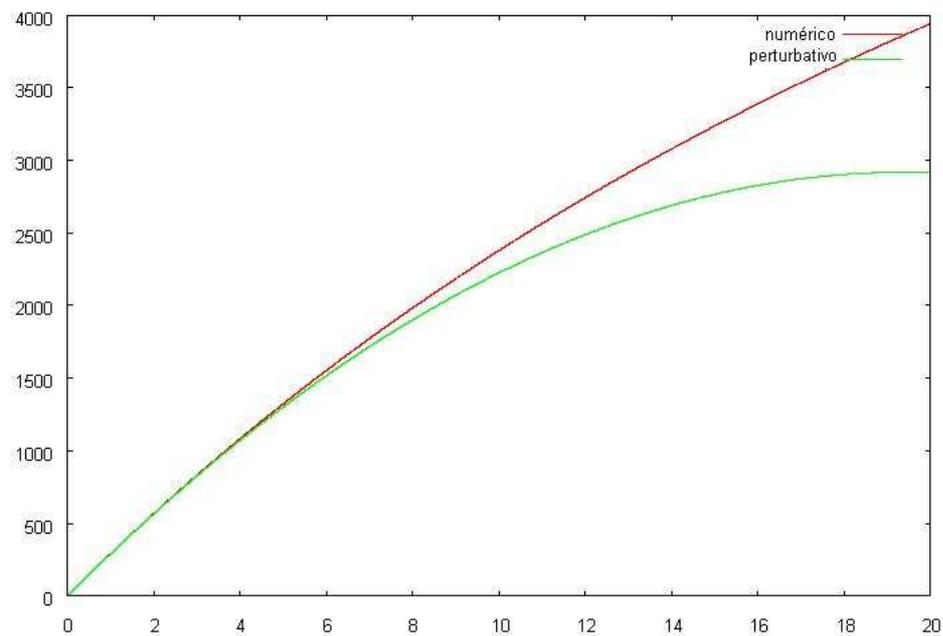


Figura 5.2: Gráfico *alcance*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 300\text{m/s}$ ,  $\alpha_0 = 45^\circ$  e voo supersônico.

Uma abordagem [de Mestre 1990, p. 86] capaz de contornar tal dificuldade é reescrever as equações do movimento em outra forma que permita a existência de um termo perturbado válido para altas velocidades. Uma candidata seria a descrição do movimento pelos vetores unitários normal  $\vec{n}$  e tangencial  $\vec{\tau}$ . Seja  $\alpha$  o ângulo formado por  $\vec{\tau}$  com

o vetor unidade cartesiana  $\vec{i}$ . Como o vetor velocidade  $\vec{v}$  também é sempre tangente à trajetória, tem-se:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v\vec{\tau}$$

Cuja diferenciação em relação ao tempo fornece:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

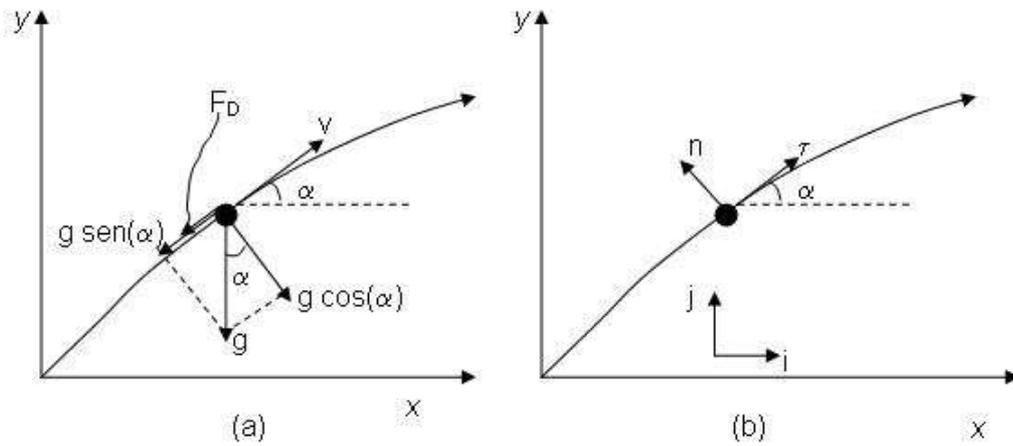


Figura 5.3: Relação entre as componentes cartesianas e o sistema normal/tangencial.

Pode-se verificar pela figura (5.3-b) que o par  $\vec{n}$  e  $\vec{\tau}$  são rotações dos vetores constantes cartesianos  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ . Aplicando a transformação de rotação em torno do ângulo  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \cos \alpha \vec{i} + \text{sen } \alpha \vec{j} \\ \vec{n} &= -\text{sen } \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}\end{aligned}$$

Derivando  $\vec{\tau}$  em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt}\text{sen } \alpha \vec{i} + \frac{d\alpha}{dt}\cos \alpha \vec{j} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{n}$$

Que substituído na fórmula para a aceleração resulta em:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\alpha}{dt}\vec{n}$$

A decomposição em  $\vec{n}$  e  $\vec{\tau}$  das acelerações atuantes sobre o projétil mostradas (fig. 5.3-a)

fornece o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g \operatorname{sen} \alpha - F_D/m \\ v \frac{d\alpha}{dt} = -g \cos \alpha \end{cases}$$

Onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $m$  a massa do projétil e  $F_D$  a força de arrasto. Considerando meios em que a resistência é proporcional a alguma potência da velocidade e tendo o modelo quadrático como base, o sistema é reescrito na forma:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2m} \rho A C_D v^2 \\ v \frac{d\alpha}{dt} = -g \cos \alpha \end{cases}$$

Sendo  $v$  a velocidade,  $\alpha$  o ângulo da trajetória,  $\rho$  a densidade do ar,  $A$  a área da seção reta do projétil e  $C_D$  o coeficiente de arrasto (*drag coefficient*). Para o caso particular em que  $n = 0$ ,  $C_D$  é uma constante adimensional. Nos demais casos,  $C_D$  é uma expressão exponencial da forma  $C_D = C'_D (M/v)^n$ , sendo  $M$  o número de Mach e  $C'_D$  uma constante. Encapsulando os termos constantes em  $k = \rho A C'_D M^n / (2m)$ , o sistema se torna:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g \operatorname{sen} \alpha - kv^{2-n} \\ v \frac{d\alpha}{dt} = -g \cos \alpha \end{cases} \quad (5.1)$$

E chegam-se às equações de movimento para as componentes normal e tangencial. Para o vôo subsônico, faz-se  $n = 0$  e para o supersônico,  $n = 0,5$ . A fim de gerar um termo pequeno, é feito um processo de adimensionalização tendo como medida de comprimento  $v_0^n/k$  e de tempo  $v_0^n/(kv_0)$ . Desta forma,  $v = v_0 V$  e  $t = T/(kv_0^{1-n})$ :

$$\begin{cases} \frac{kv_0^{1-n} v_0 dV}{dT} = -g \operatorname{sen} \alpha - kv_0^{2-n} V^{2-n} \\ kv_0^{1-n} v_0 V \frac{d\alpha}{dT} = -g \cos \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{kv_0^{1-n} v_0 dV}{dT} = -g \operatorname{sen} \alpha - kv_0^{2-n} V^{2-n} \\ kv_0^{1-n} v_0 V \frac{d\alpha}{dT} = -g \cos \alpha \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = -\frac{g}{kv_0^{2-n}} \operatorname{sen} \alpha - V^{2-n} \\ V \frac{d\alpha}{dT} = -\frac{g}{kv_0^{2-n}} \cos \alpha \end{cases}$$

Se  $k = O(1)$  (como no exemplo para o vôo supersônico) e  $v_0 \gg g$ , então pode-se

considerar  $\varepsilon \equiv g / (kv_0^{2-n})$

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = -V^{2-n} - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \\ V \frac{d\alpha}{dt} = -\varepsilon \cos \alpha \end{cases} \quad (5.2)$$

Multiplicando a última equação por  $\cos \alpha$ :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = -V^{2-n} - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \\ V \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -\varepsilon \cos^2 \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dV}{dT} = -V^{2-n} - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \\ V \frac{d(\operatorname{sen} \alpha)}{dt} = \varepsilon (\operatorname{sen}^2 \alpha - 1) \end{cases}$$

Realizando as expansões formais:

$$V(T) = V_0(T) + \varepsilon V_1(T) + O(\varepsilon^2)$$

$$\operatorname{sen} \alpha(T) = A_0(T) + \varepsilon A_1(T) + O(\varepsilon^2)$$

Desprezando os termos de ordem maior ou igual a  $O(\varepsilon^2)$ , tem-se:

$$\frac{dV_0}{dT} + \varepsilon \frac{dV_1}{dT} \approx -(V_0 + \varepsilon V_1)^{2-n} - \varepsilon (A_0 + \varepsilon A_1)$$

$$\frac{dV_0}{dT} + \varepsilon \frac{dV_1}{dT} \approx -V_0^{2-n} - (2-n)\varepsilon V_0^{1-n}V_1 - \varepsilon A_0 = -V_0^{2-n} - \varepsilon ((2-n)V_0^{1-n}V_1 + A_0)$$

e

$$(V_0 + \varepsilon V_1) \left( \frac{dA_0}{dT} + \varepsilon \frac{dA_1}{dT} \right) \approx \varepsilon ((A_0 + \varepsilon A_1)^2 - 1)$$

$$V_0 \frac{dA_0}{dT} + \varepsilon \left( V_1 \frac{dA_0}{dT} + V_0 \frac{dA_1}{dT} \right) \approx \varepsilon (A_0^2 + 2\varepsilon A_0 A_1 - 1)$$

O que gera os seguintes sistemas diferenciais (descartando o termo em  $\varepsilon^2$ ):

$$\begin{cases} \frac{dV_0}{dT} = -V_0^{2-n} \\ V_0 \frac{dA_0}{dT} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{dV_1}{dT} = -(2-n)V_0^{1-n}V_1 - A_0 \\ V_1 \frac{dA_0}{dT} + V_0 \frac{dA_1}{dT} = A_0^2 - 1 \end{cases}$$

$$V_0(0) = 1, A_0(0) = \operatorname{sen} \alpha_0$$

$$V_1(0) = 0, A_1(0) = 0$$

A solução para o primeiro sistema é:

$$V_0(T) = ((1-n)T + 1)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{e} \quad A_0(T) = \operatorname{sen} \alpha_0$$

Substituindo no segundo:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dT} = -\frac{2-n}{(1-n)T+1}V_1 - \text{sen } \alpha_0 \\ ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} \frac{dA_1}{dT} = -\cos^2 \alpha_0 \end{cases}$$

$$V_1(0) = 0, A_1(0) = 0$$

O que fornece:

$$V_1(T) = \frac{\text{sen } \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} \quad e \quad A_1(T) = \cos^2 \alpha_0 \frac{1 - ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n}$$

A determinação da velocidade horizontal e alcance (apêndice B) fornece:

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \varepsilon \text{sen } \alpha_0 \left( \frac{\left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n} \right) \right) \quad (5.3)$$

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}}}{n} + \varepsilon \text{sen } \alpha_0 \left( \frac{\left( -2(1-n)((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - T((1-n)T+2)+2 \right)}{2(3-2n)} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}} - nT((1-n)T+2)-1}{2n(n-2)} \right) \right) \quad (5.4)$$

Para  $n = 0$ :

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{1}{T+1} + \frac{\varepsilon \text{sen } \alpha_0}{6} \left( \frac{2}{(T+1)^2} - \frac{3}{T+1} + (T+1) \right) \right) \quad (5.5)$$

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( \ln(1+T) + \frac{\varepsilon \text{sen } \alpha_0}{12} \left( -\frac{4}{T+1} - 6 \ln(1+T) + (T+1)^2 + 3 \right) \right) \quad (5.6)$$

ou, redimensionalizando:

$$v_x(t) \approx v_0 \cos \alpha_0 \left( \frac{1}{tkv_0+1} + \frac{g \text{sen } \alpha_0}{6kv_0^2} \left( \frac{2}{(tkv_0+1)^2} - \frac{3}{tkv_0+1} + (tkv_0+1) \right) \right) \quad (5.7)$$

$$x(t) \approx \frac{\cos \alpha_0}{k} \left( \ln(1+tkv_0) + \frac{g \text{sen } \alpha_0}{12kv_0^2} \left( -\frac{4}{tkv_0+1} - 6 \ln(1+tkv_0) + (tkv_0+1)^2 + 3 \right) \right) \quad (5.8)$$

Para  $n = 0,5$  (vôo supersônico):

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{8}{(T+2)^3} - \frac{(T+2)}{2} - \frac{8}{3(T+2)^2} + \frac{(T+2)}{3} \right) \right) \quad (5.9)$$

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( 2 - \frac{4}{T+2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( -\frac{4}{(T+2)^2} - \frac{(T+2)^2 - 24}{12} - \frac{4}{3(T+2)} \right) \right) \quad (5.10)$$

ou:

$$v_x(t) \approx v_0 \cos \alpha_0 \left( \frac{4}{(tk\sqrt{v_0}+2)^2} + \frac{g \operatorname{sen} \alpha_0}{kv_0\sqrt{v_0}} \left( \frac{8}{(tk\sqrt{v_0}+2)^3} - \frac{(tk\sqrt{v_0}+2)}{2} - \frac{8}{3(tk\sqrt{v_0}+2)^2} + \frac{(tk\sqrt{v_0}+2)}{3} \right) \right)$$

$$x(t) \approx \frac{\cos \alpha_0 \sqrt{v_0}}{k} \left( 2 - \frac{4}{tk\sqrt{v_0}+2} + \frac{g \operatorname{sen} \alpha_0}{kv_0\sqrt{v_0}} \left( -\frac{4}{(tk\sqrt{v_0}+2)^2} - \frac{(tk\sqrt{v_0}+2)^2 - 24}{12} - \frac{4}{3(tk\sqrt{v_0}+2)} \right) \right)$$

## 5.1 Propriedades das expansões

Dada a dependência inversamente proporcional entre  $\varepsilon$  e  $v$ , a precisão delas aumenta junto com velocidade inicial, tornando-as mais adequadas para o trato de projéteis balísticos. A faixa de  $v_0$  entre 200- 300 m/s exibe uma quase equivalência entre este tipo de expansão e a anterior para o projétil 105 HE.

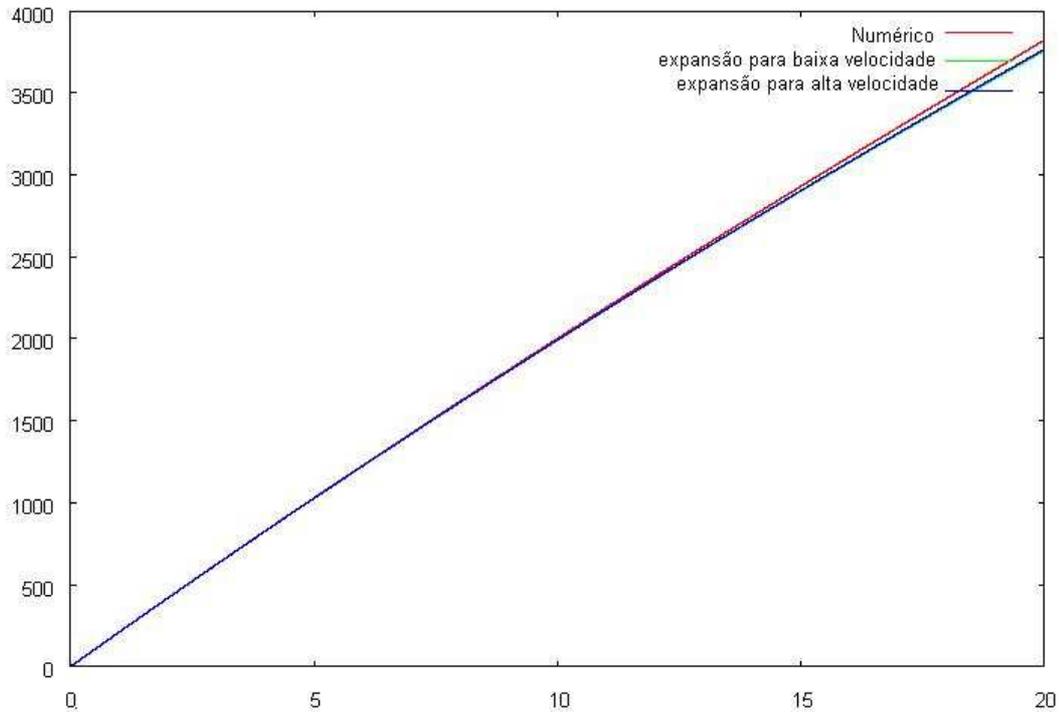


Figura 5.4: Gráfico *alcance*  $\times$  *tempo* ( $v_0 = 300\text{m/s}$  e  $\alpha = 45^\circ$ ) para três modelos: RK-4, expansão para baixas velocidades (1ª ordem) e a expansão para altas velocidades (ordem zero).

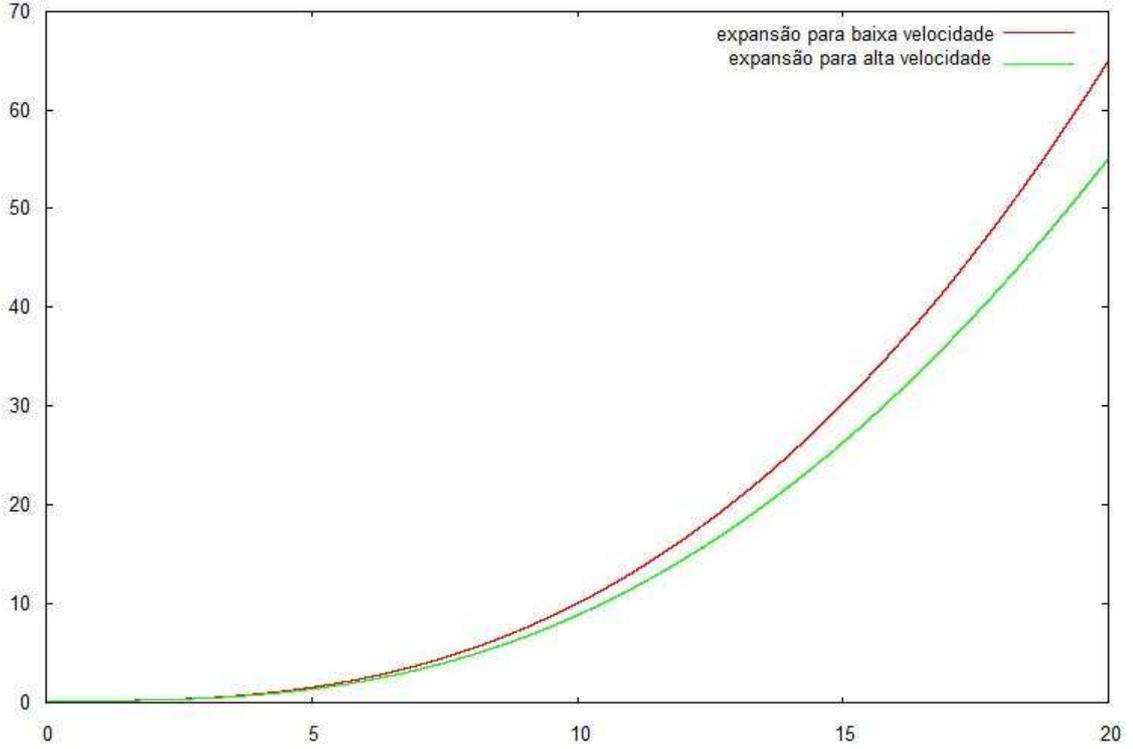


Figura 5.5: Gráfico *diferença de alcance × tempo* representando o quanto as expansões do gráfico anterior distam da curva numérica.

Um aspecto vantajoso do modelo de expansão usando coordenadas radial e tangencial é a presença, ainda que implícita, do termo perturbado já no primeiro termo da expansão. Isto lança a possibilidade de usar a segunda parcela como um estimador de erro. A estrutura das expansões em altura exibe possibilidade análoga:

$$\frac{dY}{dT} \approx \text{sen } \alpha_0 \left( (1-n)T + 1 \right)^{\frac{1}{n-1}} + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n} + \text{sen}^2 \alpha_0 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{3-2n} \right) \quad (5.11)$$

$$Y \approx \text{sen } \alpha_0 \left( \frac{1}{n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}}}{n} \right) + \varepsilon \left( -\cos^2 \alpha_0 \frac{2((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}} + nT((1-n)T+2) - 2}{2n(2-n)} + \right. \\ \left. -\text{sen}^2 \alpha_0 \frac{2(1-n)((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + T((1-n)T+2) + 2}{2(3-2n)} \right) \quad (5.12)$$

Para cada uma das expansões em distância, há um termo secular que limita a validade da expansão para  $T = O(\varepsilon^{-1/2})$ , quando tanto a primeira e a segunda parcela de cada expansão se tornam ambas  $O(1)$ . A questão é o quanto, no decorrer do tempo,  $X_1$  e  $Y_1$  ficam significativos em relação a  $X_0$  e  $Y_0$ , respectivamente. Da mesma forma, qual

a relação de  $V_{X1}$  e  $V_{Y1}$  com  $V_{X0}$  e  $V_{Y0}$ ? Trabalhando com as formas adimensionais da aceleração para avaliar o comportamento, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dT} = A_{CX} = \cos \alpha_0 \left( -((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \right. \\ \left. + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{(n-2)((1-n)T+1)^{\frac{3-2n}{n-1}+n-1}}{3-2n} - \frac{-((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}+n-1}}{2-n} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_y}{dT} = A_{CY} = -\operatorname{sen} \alpha_0 ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} \\ + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \frac{-((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}+n-1}}{2-n} + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \frac{(n-2)((1-n)T+1)^{\frac{3-2n}{n-1}+n-1}}{3-2n} \right) \end{aligned}$$

No instante inicial, cada expansão tem a seguinte constituição:

$$\begin{aligned} A_{CX}(0) &= \cos \alpha_0 \left( -1 + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{n-2+n-1}{3-2n} - \frac{-1+n-1}{2-n} \right) \right) \\ A_{CX}(0) &= \cos \alpha_0 \left( -1 + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{2n-3}{3-2n} - \frac{n-2}{2-n} \right) \right) = -\cos \alpha_0 \\ A_{CY}(0) &= -\operatorname{sen} \alpha_0 + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \frac{-1+n-1}{2-n} + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \frac{n-2+n-1}{3-2n} \right) \\ A_{CY}(0) &= -\operatorname{sen} \alpha_0 + \varepsilon (-\cos^2 \alpha_0 - \operatorname{sen}^2 \alpha_0) = -\operatorname{sen} \alpha_0 - \varepsilon \end{aligned}$$

Redimensionalizando  $a_c = A_C v_0^{2-n} k$  e lembrando que  $\varepsilon \equiv g / (k v_0^{2-n})$ :

$$\begin{aligned} a_{cx}(0) &= -\cos \alpha_0 v_0^{2-n} k \\ a_{cy}(0) &= -\operatorname{sen} \alpha_0 v_0^{2-n} k - g \end{aligned}$$

Isto concorda com o esperado no modelo: no instante  $t = 0$  atuam apenas as componentes da força de arrasto  $F_D = -v_0^{2-n} k$  e a gravidade  $g$ , porém revela que, nos instantes iniciais, o maior montante da aceleração se encontra em  $A_{CX0}$  (a resistência do ar nessa direção) e em  $A_{CY1}$  (a gravidade). O resultado disto é que as expansões em  $X$  podem ser por algum tempo bem representadas exclusivamente por seus termos de ordem zero, em especial para ângulos de lançamento pequenos devido fator  $\operatorname{sen} \alpha_0$  em  $X_1$ , ao passo que as expansões para a direção  $Y$  precisam dos dois.

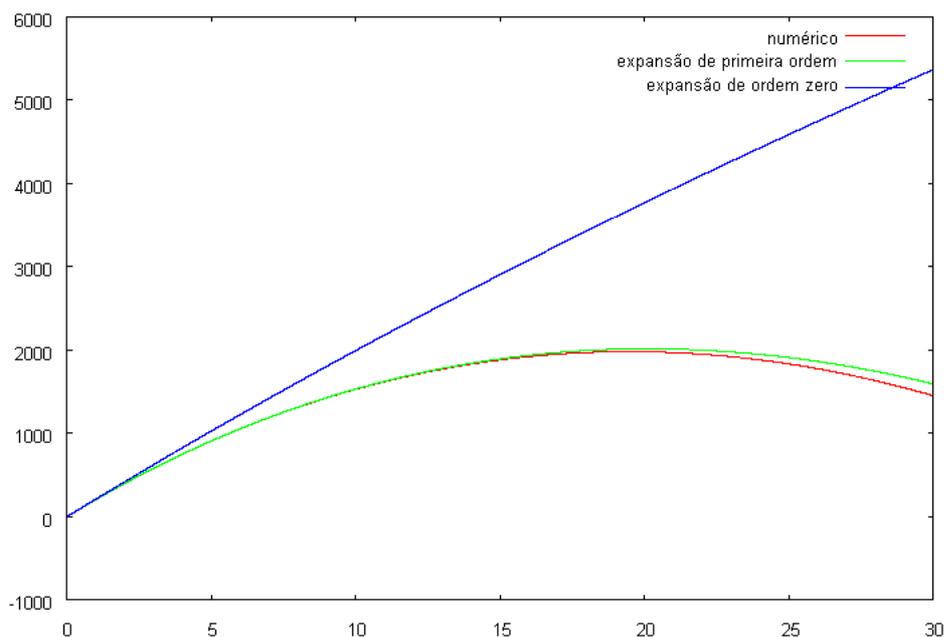


Figura 5.6: Gráfico *altura*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 300$  m/s e  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

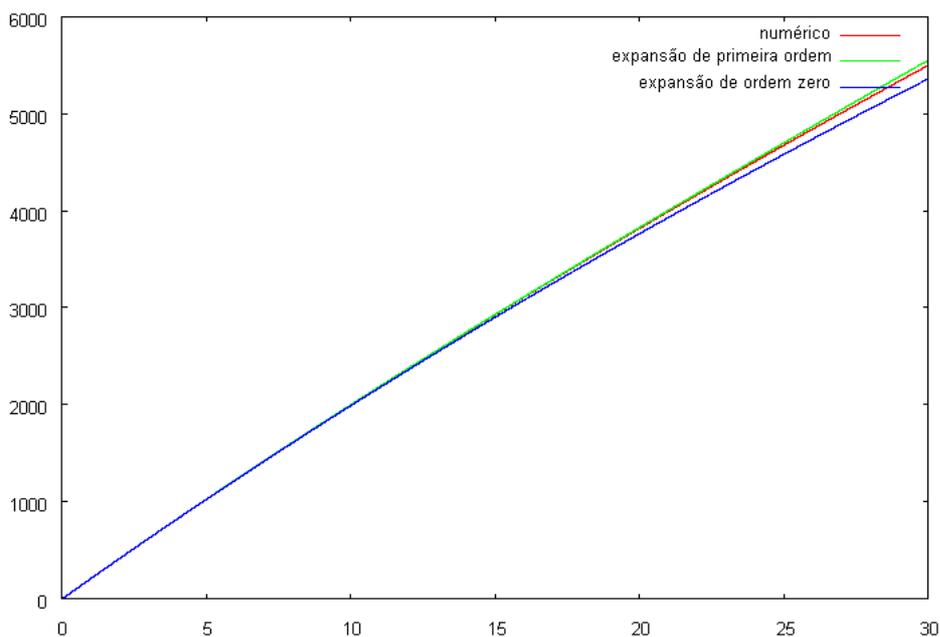


Figura 5.7: Gráfico *alcance*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 300$  m/s e  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

## 5.2 Presença de funcionais lineares

O primeiro termo da equação para o alcance horizontal não possui explicitamente nenhum indício de variação linear em  $k$  ou  $v_0$ , levando a necessidade de algumas manipulações para verificar sua existência ou não. Lembrando que a relação entre o tempo real  $t$  e o adimensional é  $T = tkv_0^{1-n}$  e  $k \ll 1$ , pode-se ter uma boa duração de voo em que

$T < 1/(n-1)$ . Para o exemplo em questão com  $n = 0,5$  e  $v_0 = 400m/s$  este valor chega  $t \simeq 34,0s$ . Dentro dos seus limites de validade, uma expansão em série binomial para o caso geral pode fornecer resultados sugestivos para qualquer valor de  $n$  (excetuando  $n = 0$  e  $n = 1$ ):

$$\begin{aligned} X(T) &\approx \frac{1}{n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}}}{n} = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{n}{n-1} (1-n)T + \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} \left( \frac{n}{n-1} - 1 \right) (1-n)^2 T^2 + O(T^3) \right) \end{aligned}$$

$$X(T) \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left( 1 - nT + \frac{n}{2} T^2 + O(T^3) \right) = T - \frac{1}{2} T^2 + O(T^3)$$

Redimensionalizando:

$$x(t) \approx \frac{v_0^n}{k} \left( tkv_0^{1-n} + \frac{1}{2} t^2 k^2 v_0^{2-2n} + O(t^3) \right) = tv_0 - \frac{1}{2} t^2 k v_0^{2-n} + O(t^3)$$

$$\Delta x(t) \approx t(v_0 + \Delta v_0) - \frac{1}{2} t^2 (k + \Delta k) (v_0 + \Delta v_0)^{2-n} - tv_0 + \frac{1}{2} t^2 k v_0^{2-n}$$

Considerando  $\Delta v_0/v_0 \ll 1$ :

$$\Delta x(t) \approx t\Delta v_0 - \frac{1}{2} t^2 (k + \Delta k) (v_0^{2-n} + (2-n)v_0^{1-n}\Delta v_0) + \frac{1}{2} t^2 k v_0^{2-n}$$

$$\Delta x(t) = t\Delta v_0 - \frac{1}{2} t^2 (k + \Delta k) v_0^{2-n} - \frac{1}{2} t^2 (k + \Delta k) (2-n)v_0^{1-n}\Delta v_0 + \frac{1}{2} t^2 k v_0^{2-n}$$

$$\Delta x(t) \approx t\Delta v_0 - \frac{1}{2} t^2 \Delta k v_0^{2-n} - \frac{1}{2} t^2 k (2-n)v_0^{1-n}\Delta v_0 - \frac{1}{2} t^2 (2-n)v_0^{1-n}\Delta k \Delta v_0$$

Descartando o termo quadrático em  $\Delta$ :

$$\Delta x(t) \approx t\Delta v_0 - \frac{1}{2} t^2 \Delta k v_0^{2-n} - \frac{1}{2} t^2 k (2-n)v_0^{1-n}\Delta v_0$$

$$\Delta x(t) \approx t\Delta v_0 \left( 1 - \frac{1}{2} tk(2-n)v_0^{1-n} \right) - \frac{\Delta k}{2} t^2 v_0^{2-n}$$

O que expõem não só a proporcionalidade entre  $\Delta v_0$  e  $\Delta k$ , mas também a aditividade entre eles para variações em primeira ordem. Para o caso subsônico ( $n = 0$ ), o raciocínio torna-se o mesmo, pois para  $T < 1$  vale a aproximação:

$$\ln(1+T) = T - \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{3} - \frac{T^4}{4} + \dots = T - \frac{T^2}{2} + O(T^3)$$

Isto leva a raciocínio idêntico ao anterior e ela é válida, para projétil 105 HE e  $v_0 = 400m/s$ , até cerca de 75s. Em ambos os casos acima, o primeiro termo da expansão

dimensionalizada é  $v_0 t$ , que corresponde à distância que seria percorrida em condição de vácuo.

É possível determinar a presença de funcionais lineares em valores de  $t > 1/(n-1)$  para casos particulares de  $n$ . Para  $n = 0,5$  (supersônico do 105 HE), o primeiro termo da expansão pode ser aproximado considerando sua fração como o somatório de uma progressão geométrica:

$$X(T) = 2 - \frac{4}{T+2} = 2 - 4 \left( \frac{1}{T} - \frac{2}{T^2} + \frac{4}{T^3} - \frac{8}{T^4} + \dots \right) = 2 - 4 \left( \frac{1}{T} - O(T^{-2}) \right)$$

Redimensionalizando:

$$x(t) = \frac{\sqrt{v_0}}{k} \left( 2 - 4 \left( \frac{1}{tk\sqrt{v_0}} + O(t^{-2}) \right) \right)$$

Como  $T$  neste caso é grande,  $T^{-2}$  é pequeno, o que permite:

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \frac{2\sqrt{v_0}}{k} - \frac{4}{tk} \\ \Delta x(t) &\approx \frac{2\sqrt{v_0 + \Delta v_0}}{k + \Delta k} - \frac{4}{t(k + \Delta k)} - \frac{2\sqrt{v_0}}{k} + \frac{4}{tk} \\ \Delta x(t) &\approx \frac{2\sqrt{v_0} + \Delta v_0/\sqrt{v_0}}{k + \Delta k} - \frac{2\sqrt{v_0}}{k} + \frac{4}{tk} - \frac{4}{t(k + \Delta k)} \\ \Delta x(t) &\approx \frac{2k\sqrt{v_0} + \Delta v_0 k/\sqrt{v_0} - 2(k + \Delta k)\sqrt{v_0}}{(k + \Delta k)k} + 4\frac{k + \Delta k - k}{tk(k + \Delta k)} \\ \Delta x(t) &\approx \frac{\Delta v_0 k/\sqrt{v_0} - 2\Delta k\sqrt{v_0}}{(k + \Delta k)k} + 4\frac{\Delta k}{tk(k + \Delta k)} \\ \Delta x(t) &\approx \frac{\Delta v_0 k}{\sqrt{v_0}(k + \Delta k)k} + \frac{4\Delta k - 2\Delta k t\sqrt{v_0}}{tk(k + \Delta k)} = \frac{\Delta v_0 k}{\sqrt{v_0}(k + \Delta k)k} + \frac{2\Delta k(2 - t\sqrt{v_0})}{tk(k + \Delta k)} \end{aligned}$$

Como  $k \gg \Delta k$  e  $k \ll 1$ :

$$\Delta x(t) \approx \frac{\Delta v_0}{\sqrt{v_0}k} + \frac{2\Delta k(2 - t\sqrt{v_0})}{tk^2}$$

O que determina a presença de um funcional linear para  $T > 1/(1-n)$ .

Falta o caso particular para quando a resistência do meio é linear ( $n = 1$ ). Nesta situação, as expansões em primeira ordem revelam ser exatamente iguais às soluções analíticas conhecidas para este caso:

$$x(t) = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

e

$$y(t) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{g}{k} - \frac{(g + kv_0 \operatorname{sen} \alpha_0)}{k} e^{-kt} - gt + v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \right\}$$

Isto não é mera coincidência. Caso não se houvesse, por exemplo, desprezado o termo em segunda ordem para  $y$  que surge a partir do produto das expansões de primeira ordem de  $v$  e  $\operatorname{sen} \alpha$  (seguido por uma integração), a expressão seria:

$$y(t) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{g}{k} - \frac{(g + kv_0 \operatorname{sen} \alpha_0)}{k} e^{-kt} - gt + v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - \frac{g^2}{k^2 v_0} \operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (2tk + e^{-kt} - e^{kt}) \right\}$$

onde se pode ver que há claramente o termo secular  $(2tk + e^{-kt} - e^{kt})$ . Fica evidenciado o princípio das expansões assintóticas de interromper a adição de novas parcelas quando o somatório atinge seu menor erro. Como não necessariamente convergem, expansões mais longas podem ter menor precisão.

### 5.3 Estimativa de variações

A Análise de Sensibilidade Local (ASL) se concentra no impacto circunstancial de parâmetros num modelo. Segundo [Saltelli et al. 2004, p. 83], a forma mais simples de calcular sensibilidades locais é alterar ligeiramente um dos parâmetros de cada vez e reexecutar o modelo. Usando a aproximação por diferenças finitas, os elementos de uma “matriz de sensibilidades” seriam:

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} = \frac{f(p_j + \Delta p_j) - f(p_j)}{\Delta p_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (5.14)$$

Este procedimento é conhecido como *método de força bruta* ou *indireto*. Tem a vantagem imediata de dispensar mudanças no modelo original e requerer pouco código extra. Por outro lado, a acurácia da sensibilidade depende de  $\Delta p_j$ : se este for muito pequeno, erros de arredondamento surgirão; caso seja grande demais, a presunção de linearidade local fica comprometida. Sugere-se 1% de alteração como valor prático, apesar de a descoberta de um percentual ideal poder ser um processo de “ensaio e erro”.

Para o caso do projétil, em relação ao alcance, esta questão não é tão crítica devido à presença de funcionais lineares vista anteriormente. O cálculo para alterações pode ser feito com valores de até 10%. Como se têm boas aproximações analíticas das funções dentro de certo limite de tempo, pode-se fazer uma adaptação da idéia proposta em [Miller e Frenklach 1983], que usava aproximações empíricas para (5.14) válidas em determinado instante para certa região de um parâmetro. Neste caso, em que lugar de um

modelo experimental, são usadas as expansões perturbativas, baseando-se na propriedade:

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} \approx \frac{\partial(f_0 + \varepsilon f_1)}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (5.15)$$

Como primeiro termo das expansões para alta velocidade fornece uma forma simples de estimar as variações em alcance e os elementos da matriz de sensibilidades de trajetórias mais rasantes, dentro do limite de validade das expansões e considerando  $\Delta x$  uma função de  $\Delta k$  e  $\Delta v_0$ , pode-se estabelecer que:

$$\Delta x(\Delta k, \Delta v_0) \approx x_0(t, v_0 + \Delta v_0, k + \Delta k) - x_0(t, v_0, k)$$

Sendo  $x_0$  o primeiro termo da expansão. O segundo termo pode ter papel no controle de erros, a ser visto mais adiante. As estimativas de variações dos gráficos das figuras (5.8) a (5.11) foram feitas só com o termo de ordem zero e  $\alpha_0 = 30^\circ$ .

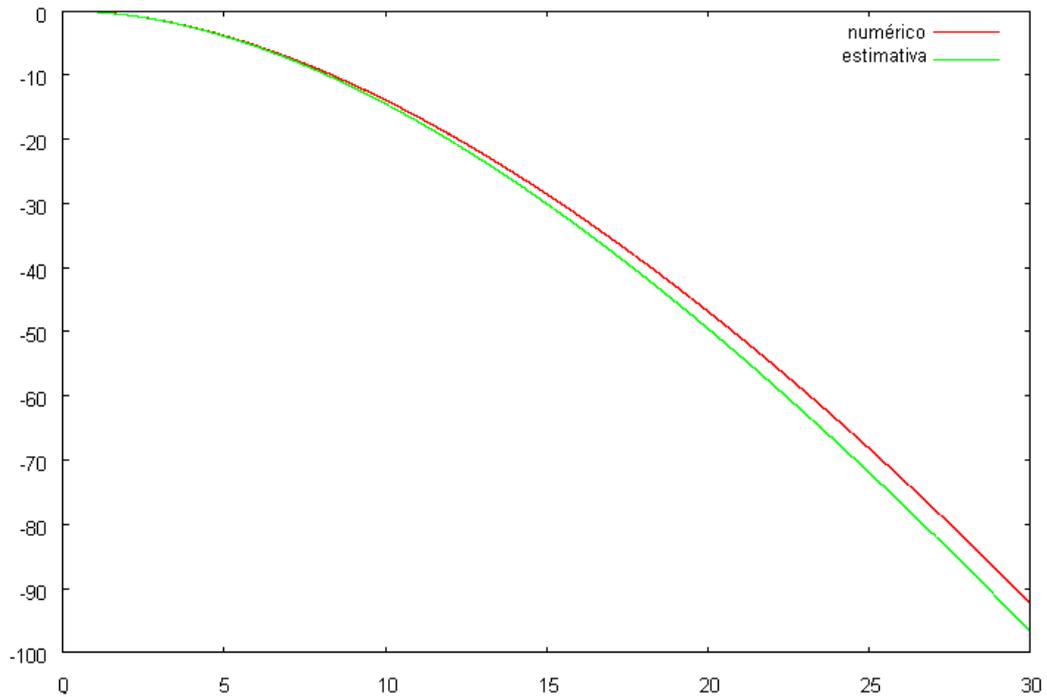


Figura 5.8: Gráfico para *variação do alcance × tempo* para  $v_0 = 300$  m/s com aumento de 10% na densidade.

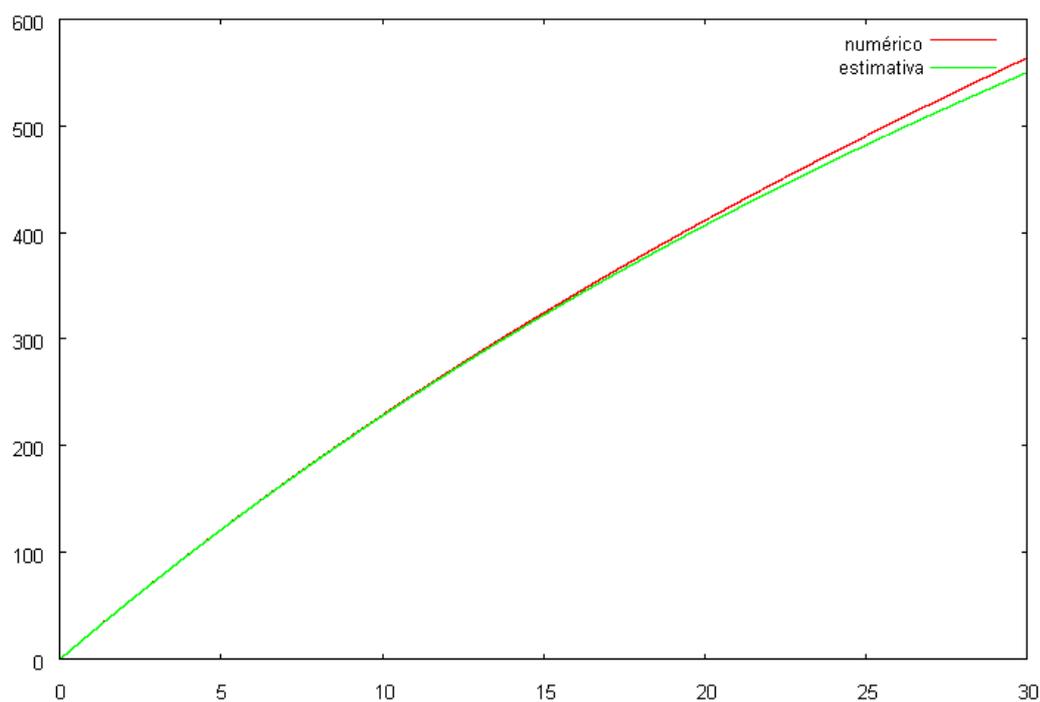


Figura 5.9: Gráfico para *variação do alcance*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 300$  m/s com aumento de 10% em  $v_0$ .

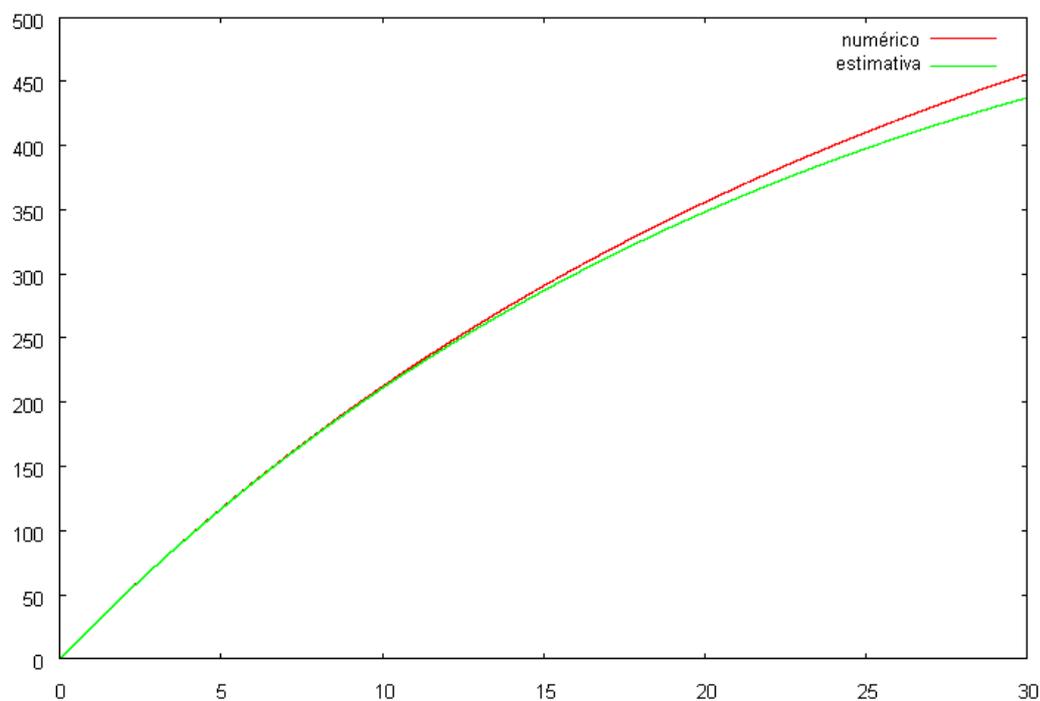


Figura 5.10: Gráfico para *variação do alcance*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 300$  m/s com aumento de 10% na densidade e em  $v_0$ . Exibe-se a aditividade dos efeitos dos gráficos anteriores.

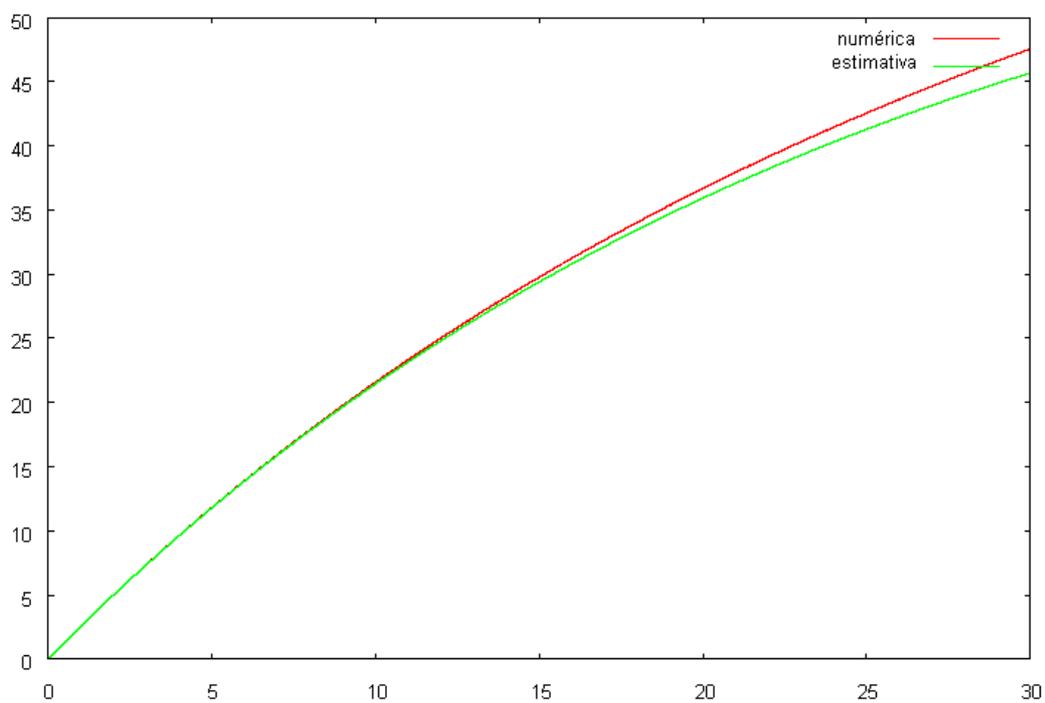


Figura 5.11: Gráfico para *variação do alcance*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 300$  m/s com aumento de 1% na densidade e em  $v_0$ . É um gráfico quase idêntico ao anterior reduzido em escala.

# Capítulo 6

## O Vôo Transônico

A menos que atinja o impacto antes, qualquer projétil lançado a uma velocidade supersônica passará pelos efeitos da mudança de regime para fase subsônica, uma modificação de comportamento cujo início depende de um fator novo - a temperatura do ar - que era desprezível para o vôo exclusivamente subsônico. Novas considerações, portanto, devem ser feitas para o tratamento matemático do que ocorre antes e após a velocidade do som ser atingida.

### 6.1 Estimando o coeficiente de arrasto

Devido à singularidade presente na curva do coeficiente de arrasto ( $C_D$ ), é difícil interpolá-la com a precisão adequada para um passo de interpolação  $h \ll 0,1$ . Por exemplo, mesmo a construção de polinômios spline cúbicos para a obtenção de uma interpolação suave produziu oscilações indesejáveis (figura 6.1):

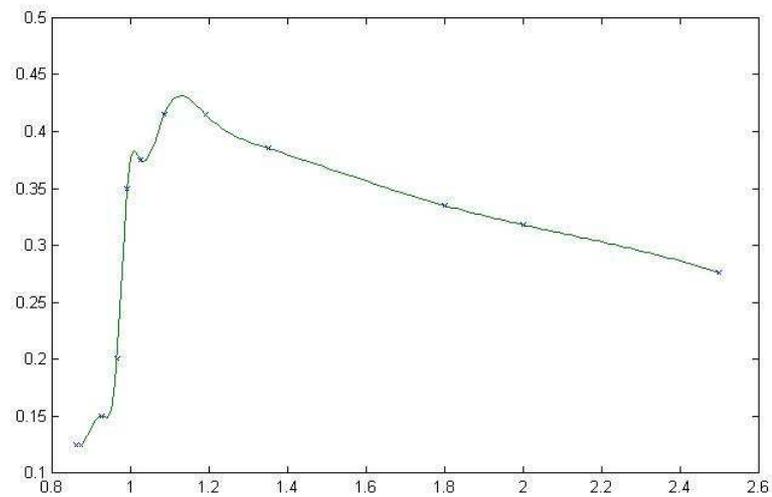


Figura 6.1: Gráfico *velocidade* (machs)  $\times C_D$  para o projétil 105 mm HE, interpolado por splines cúbicas.

Uma abordagem alternativa foi aproximar  $C_D$  por uma curva analítica. Uma solução proposta é a função:

$$c_D(v) = \frac{0,455/\sqrt{v} - 0,425 - 3e^{90(0,96-v^{0,6})}}{1 + 10e^{90(0,96-v^{0,6})}} + 0,425$$

Quando  $0,1 < v < 0,96$ ,  $C_D(v) \sim -3/10 + 0,425 = 0,125$ , i.e., uma função constante como haveria de se esperar para o tiro subsônico. Caso  $v > 0,96$ ,  $C_D(v) \sim 0,455/\sqrt{v}$ , o que simula o comportamento supersônico. As constantes no expoente da base neperiana  $e$  determinam a velocidade na mudança entre os dois regimes, i.e., a singularidade.

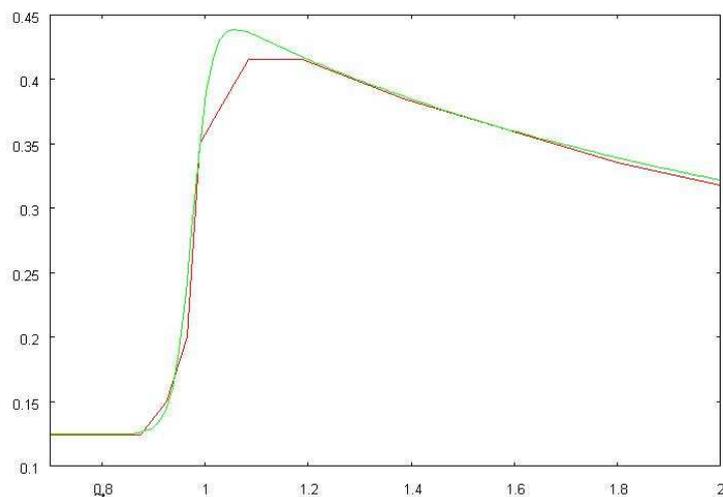


Figura 6.2: Justaposição dos gráficos de  $C_D(v)$  e amostras reais de  $C_D$ .

Com este modelo de coeficiente de arrasto, foram realizados os experimentos numéricos a serem discutidos a seguir.

## 6.2 Vôo exclusivamente supersônico

Para esta faixa de velocidade que vai de  $1M$  até cerca de  $4M$ , pode-se estabelecer a presença de funcionais lineares para a determinada faixa de valores em torno da temperatura padrão do ar ( $T_{e0} = 288,15 \text{ K}$ ). Como  $T_{e0} \gg 0,1T_{e0}$  e, no vôo supersônico,  $k \propto 1/\sqrt{v_{som}}$ , pode-se estimar a faixa  $T_{e0} \pm 10\%$  como satisfatória para que a fórmula  $\sqrt{v_{som}} = \sqrt[4]{402,9(T_{e0} + \Delta T_e)}$  possa ser convenientemente aproximada por  $\sqrt{v_{som}} \approx \sqrt[4]{402,9T_{e0}} + 0,25 \times 402,9\Delta T_e / \sqrt[4]{(402,9T_{e0})^3} = 18,459 + 0,016\Delta T_e$ , conforme evidenciado pelo gráfico da figura (6.3).

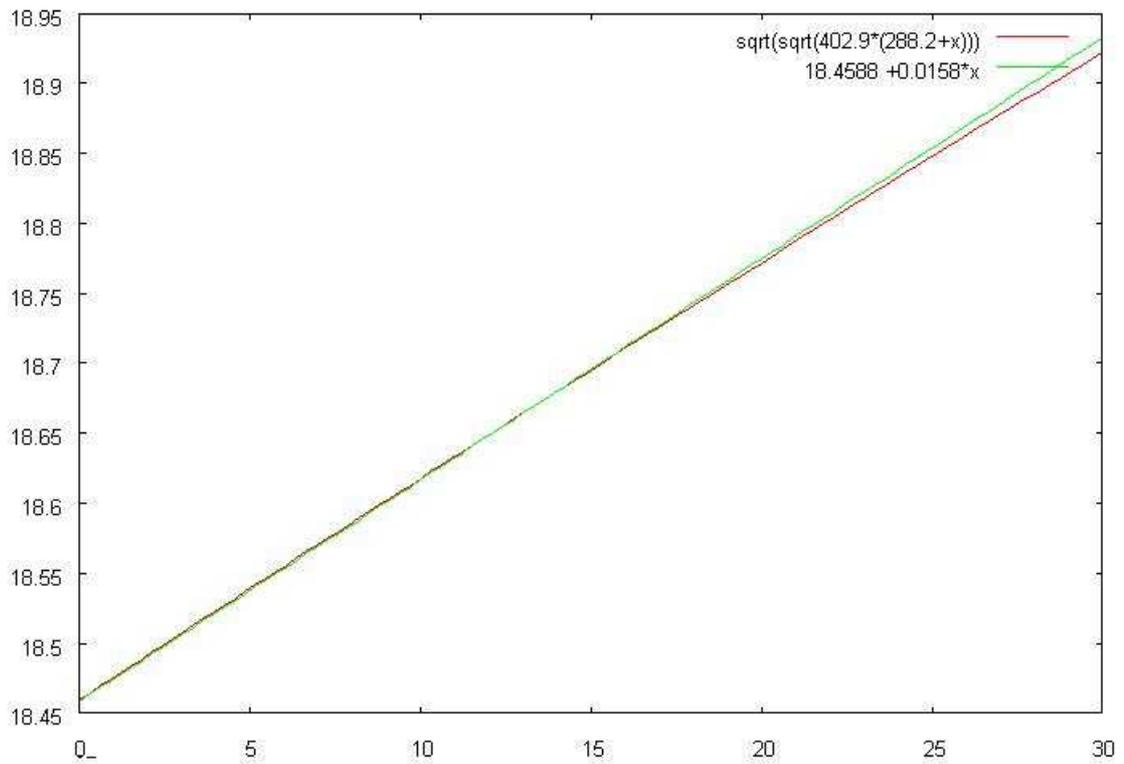


Figura 6.3: Gráficos  $\sqrt{v_{som}} \times \Delta T_e$  (K) para a função exata e sua aproximação linear.

Se em um sistema

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g \sin \alpha - kv^{3/2} \\ v \frac{d\alpha}{dt} = -g \cos \alpha \end{cases}$$

$k = \hat{k}/\sqrt{v_{som}}$ , então para seu termo em primeira ordem da expansão tem-se:

$$x_0(t) = \frac{\sqrt{v_0}}{k} \left( 2 - \frac{4}{tk\sqrt{v_0} + 2} \right) = \frac{\sqrt{v_{som}}\sqrt{v_0}}{\hat{k}} \left( 2 - \frac{4\sqrt{v_{som}}}{\hat{k}\sqrt{v_0} + 2\sqrt{v_{som}}} \right)$$

$$x_0(t) \approx \frac{(18,459 + 0,016\Delta T_e)\sqrt{v_0}}{\hat{k}} \left( 2 - \frac{4(18,459 + 0,016\Delta T_e)}{\hat{k}\sqrt{v_0} + 2(18,459 + 0,016\Delta T_e)} \right)$$

O que permite uma aproximação da ordem de  $\Delta T_e$ . Um aumento da temperatura incrementa a velocidade em  $m/s$  que corresponde a  $1 M$ , fazendo que a nova curva do coeficiente de arrasto se desloque para a direita da original. Para a faixa em que há linearidade entre  $\Delta T_e$  e  $v_{som}$ , este deslocamento pode ser interpretado, para os pontos do gráfico  $C_D \times v$  tal que  $v > 1M$ , como uma elevação da curva proporcional a  $\Delta T_e$ .

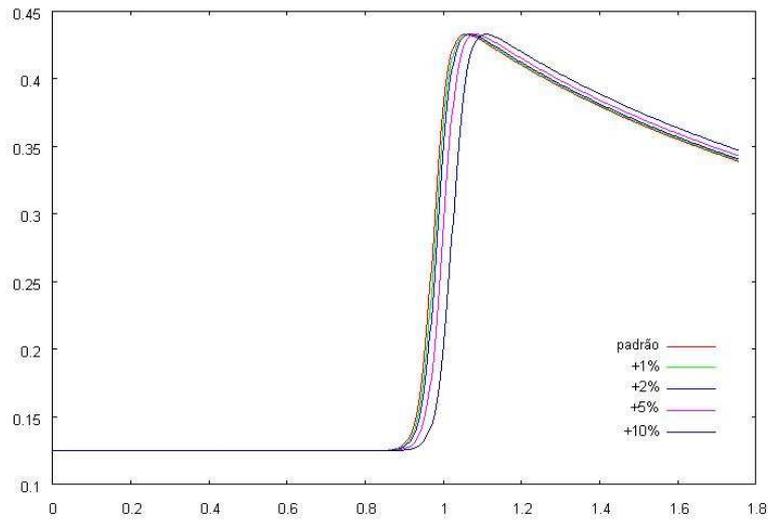


Figura 6.4: Gráfico *velocidade* (machs)  $\times C_D$  do mesmo projétil para diferentes acréscimos de temperatura. Todas as curvas estão referenciadas em relação à escala para a temperatura padrão.

Um experimento numérico feito para  $v_0 = 700m/s$  e diversos percentuais de variação da temperatura padrão confirma esse comportamento durante o percurso supersônico. Nota-se que a precisão diminui relativamente quando projétil se aproxima da velocidade de  $1M$ .

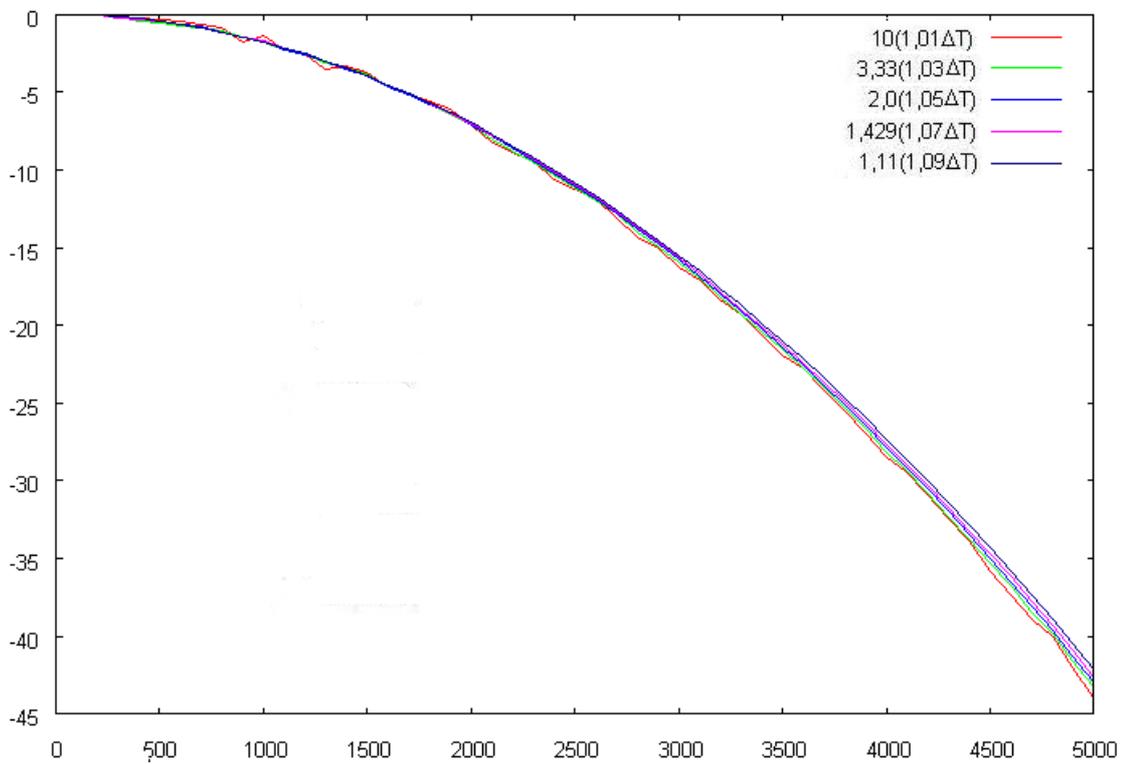


Figura 6.5: Gráfico *variação em alcance × alcance normal* para diversas mudanças de temperatura  $\Delta T_e$  e velocidade inicial de 700,0 m/s. O número entre parênteses representa o percentual de acréscimo em relação ao padrão ( $1,0 + 0,01$ ;  $1,0 + 0,03$ ; ...;  $1,0 + 0,09$ ). O multiplicador externo representa a relação entre o percentual máximo de mudança em temperatura (10%) e o utilizado na curva ( $10/1$ ,  $10/3$ ,...).

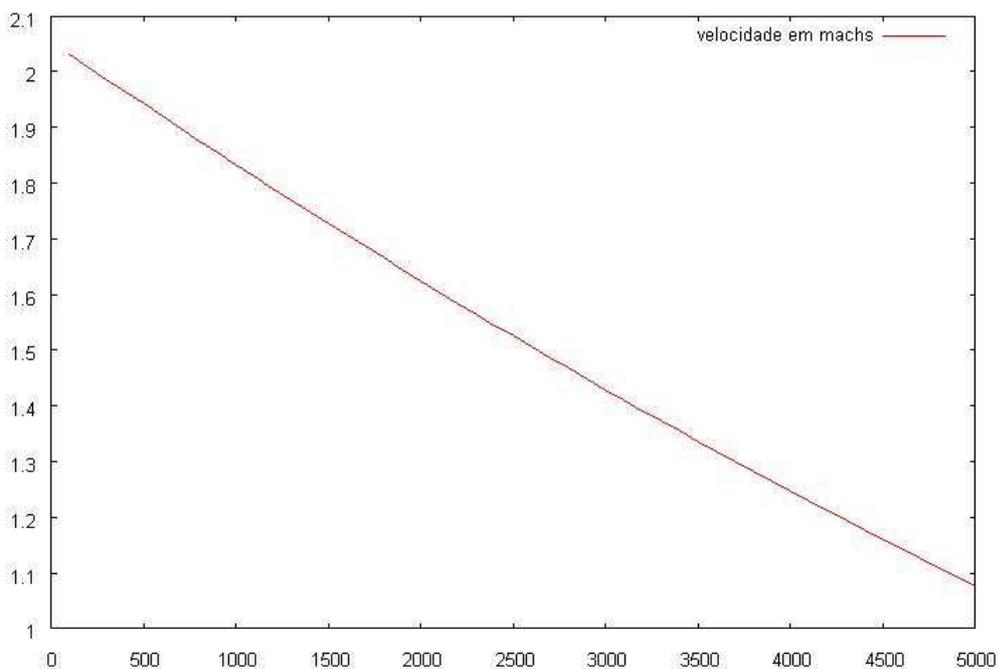


Figura 6.6: Gráfico *velocidade (machs) × alcance* para o exemplo anterior.

## 6.3 Vôo transônico

Realizando um experimento similar para trajetos que cruzem a barreira do som, o padrão de linearidade aparentemente é desfeito, dispersando-se em feixe.

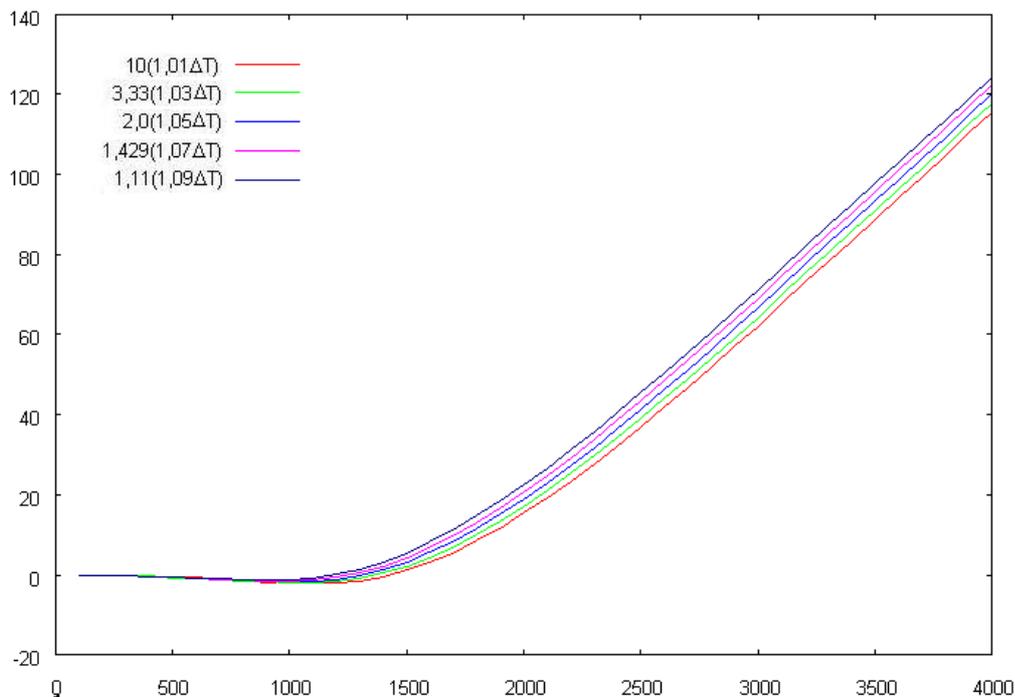


Figura 6.7: Gráfico *variação em alcance  $\times$  alcance normal* para diversas mudanças de temperatura  $\Delta T_e$  e velocidade inicial de 400,0 m/s (alc. máx. 4.000m).

Porém, isto ainda pode revelar a presença de padrões subjacentes. Comparando-se as saídas para o alcance de 4.000m com um modelo linear, obtém-se o gráfico da figura (6.8).

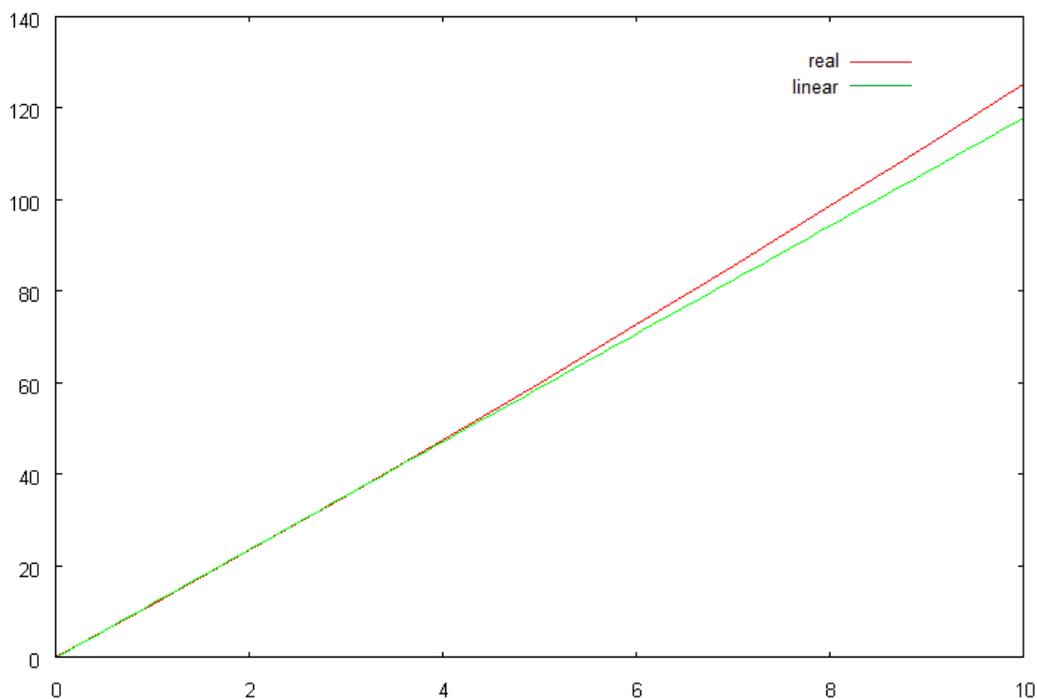


Figura 6.8: Gráfico *variação em alcance*  $\times$  *incremento de temperatura* (em %) para o alcance de 4.000m e velocidade inicial de 400,0 m/s.

Que sugere um comportamento polinomial para o efeito da temperatura, suspeita que pode ser comprovada subtraindo-se o valor da variação de alcance para cada percentual com a do percentual de uma unidade a menos (fig 6.9):

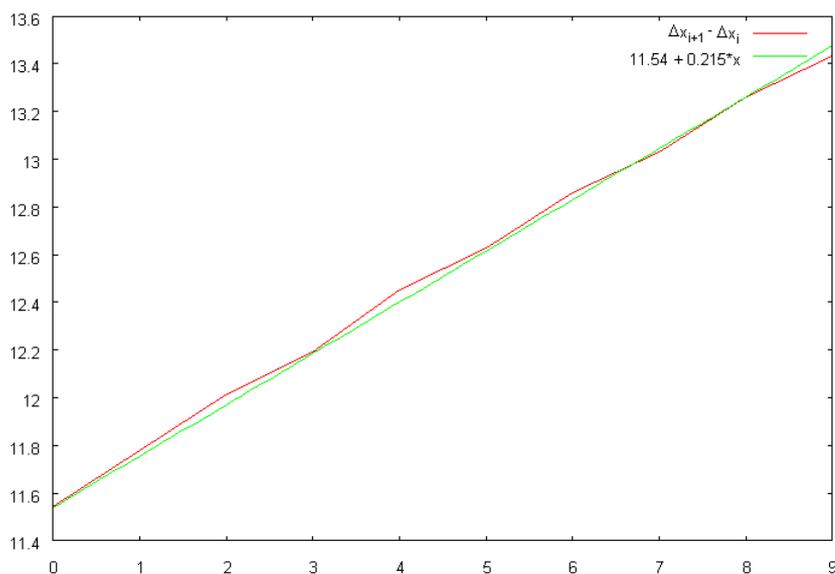


Figura 6.9: Gráfico  $(\Delta x_{i+1} - \Delta x_i) \times$  *percentual de incremento*  $i$  em temperatura para o alcance de 4.000m e velocidade inicial de 400,0 m/s.

Os dados assim obtidos são passíveis de uma regressão linear, estando em progressão aritmética. Por conseguinte, as variações em alcance devido a mudanças na temperatura formam uma progressão aritmética de segunda ordem, sendo regidos por uma equação quadrática. Um dado a mais pode ser obtido aumentando o alcance do vôo, o que revela uma convergência entre os feixes (figura 6.10).

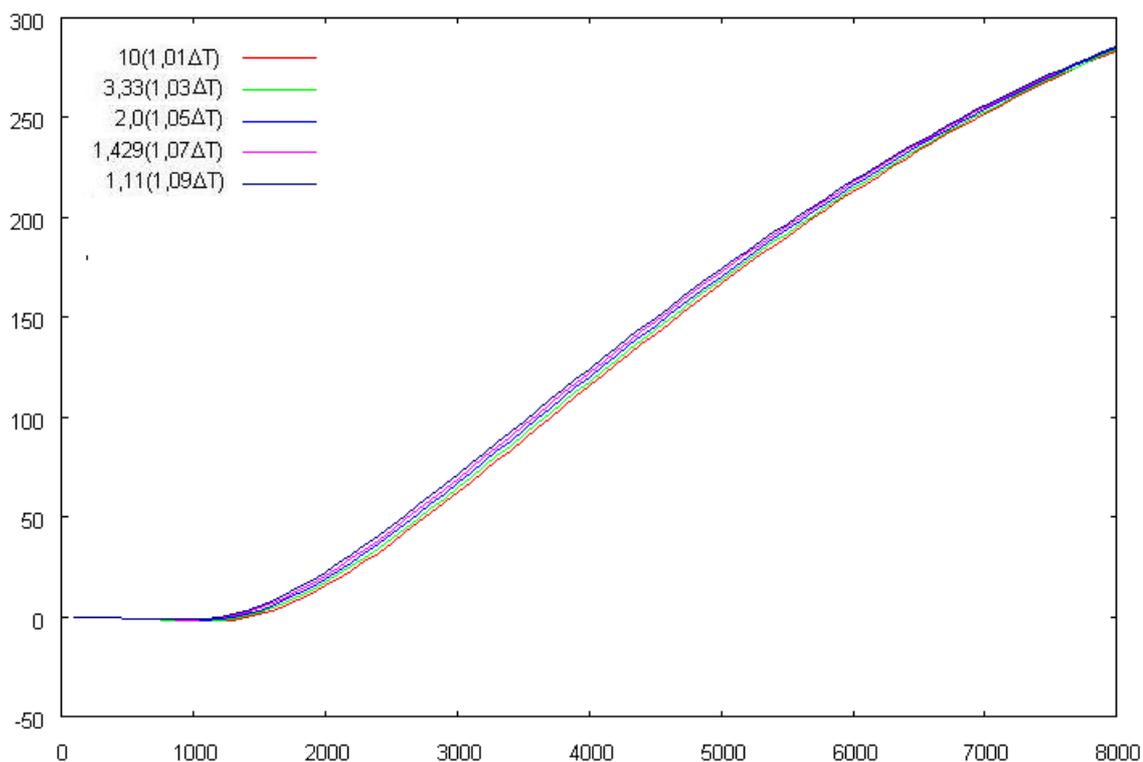


Figura 6.10: Gráfico *variação em alcance*  $\times$  *alcance normal* para diversas mudanças de temperatura  $\Delta T_e$  e velocidade inicial de 400,0 m/s (alc. máx. 8.000m).

Para avaliar estes efeitos, fez-se nova simplificação do modelo a partir de uma função degrau para o coeficiente de arrasto (figura 6.11), produzindo a seguinte saída do gráfico (6.12):

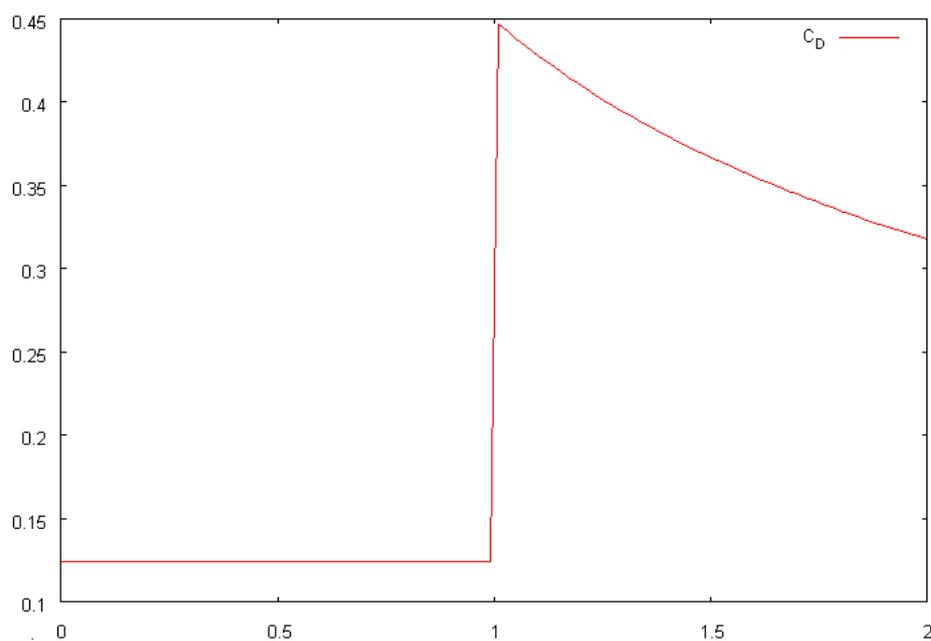


Figura 6.11: Versão simplificada para coeficiente de arrasto.

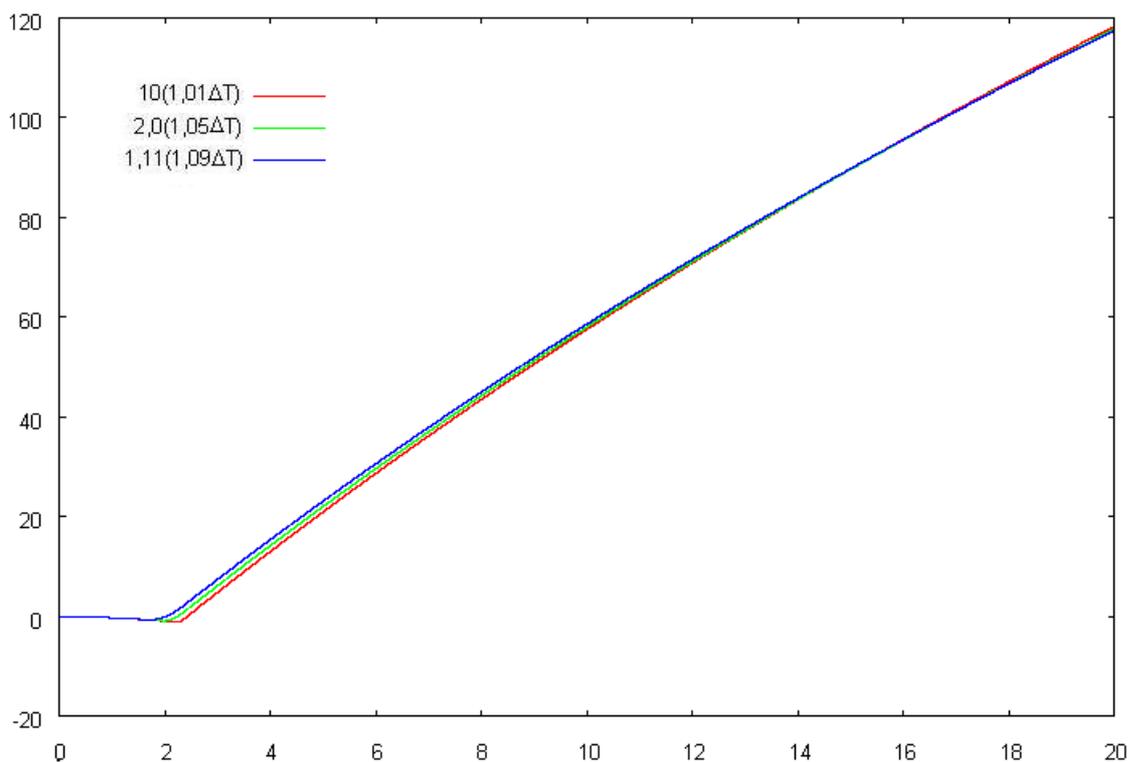


Figura 6.12: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *tempo* para velocidade inicial de 400,0 m/s e ângulo de disparo  $30^\circ$ , sendo as variações de temperatura de 1%, 5% e 9% do padrão.

Revela-se uma proporcionalidade “a grosso modo”. O paralelismo entre as curvas encontradas no gráfico para transição suave de  $C_D$  se origina do deslocamento do instante em que ocorre a transição entre os dois regimes. Dada a linearidade entre  $\Delta T_e$  e  $\Delta V$ ,

falta avaliar se  $\Delta T_e = O(\Delta t)$ . Para um projétil lançado em velocidade supersônica, uma variação linear na velocidade corresponderia a uma mudança:

$$\Delta V \approx \frac{1}{(T + \Delta T + 2)^2} - \frac{1}{(T + 2)^2}$$

$$\Delta V \approx \frac{2\Delta T (T + 2) + \Delta T^2}{(T + \Delta T + 2)^2 (T + 2)^2}$$

Como  $T \gg \Delta T$  e  $\Delta T \ll 1$ :

$$\Delta V \approx \frac{2\Delta T (T + 2) + \Delta T^2}{(T + 2)^2 (T^2 + 2\Delta T (T + 2))} = O(\Delta T^2) O(\Delta T^{-1}) = O(\Delta T)$$

Por transitividade,  $O(\Delta T) = O(\Delta t) = O(\Delta T_e)$ , o que explica o progressivo deslocamento das curvas para os instantes iniciais do vôo subsônico, à medida que  $\Delta T_e$  cresce. O comportamento posterior, já passada a fase de transição, possui propriedade análoga à da variação em alcance devido a  $\Delta V$ . Para cada  $\Delta T_e$ , o projétil inicia a fase subsônica com determinada velocidade  $v_s$  distinta. Portanto, desprezando-se  $O(\Delta t)$ , pode-se estipular que, a grosso modo:

$$\Delta x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + k(t - t_s)(v_s + \Delta v_s)) - \frac{1}{k} \ln(1 + k(t - t_s)v_s)$$

$$\Delta x(t) = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1 + k(t - t_s)(v_s + \Delta v_s)}{1 + k(t - t_s)v_s}\right) = \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{k(t - t_s)\Delta v_s}{1 + k(t - t_s)v_s}\right)$$

Apesar de não fornecer uma aproximação de qualidade, tal fórmula ainda tem o mérito de estabelecer que  $\Delta x(t) = O(\ln(\Delta v_s))$ . Conforme experimento numérico, a diferença entre  $\Delta x(t)$  estimado e o real é de uma constante multiplicativa.

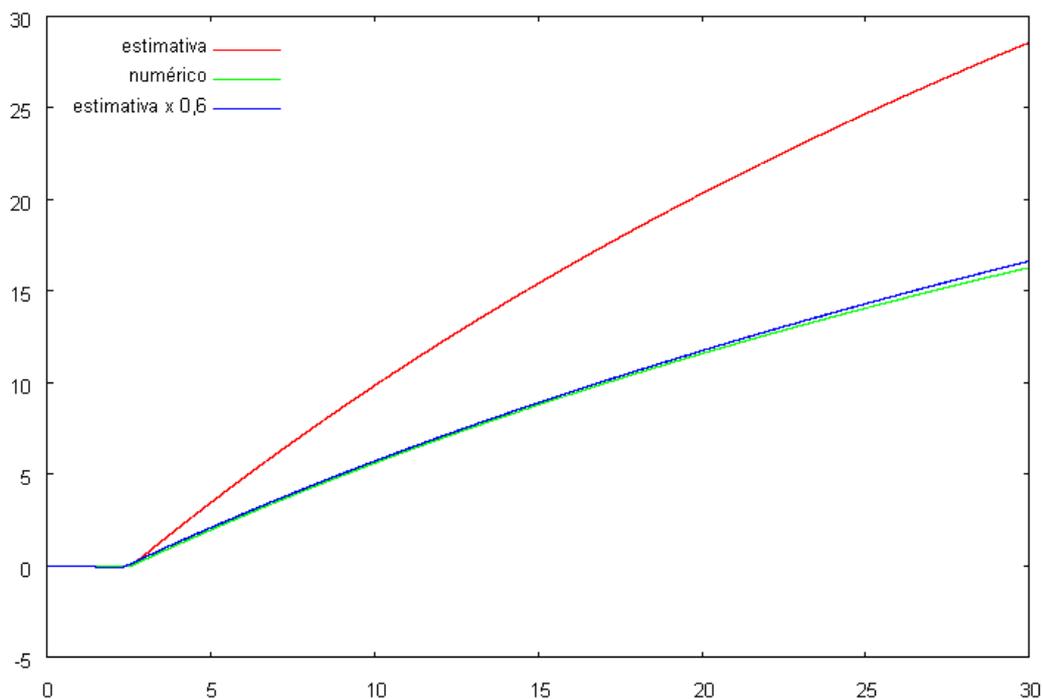


Figura 6.13: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 400\text{ m/s}$  e  $\alpha = 30^\circ$  e  $\Delta T_e = 1\%$ , calculado por RK-4 e estimativas perturbativas.

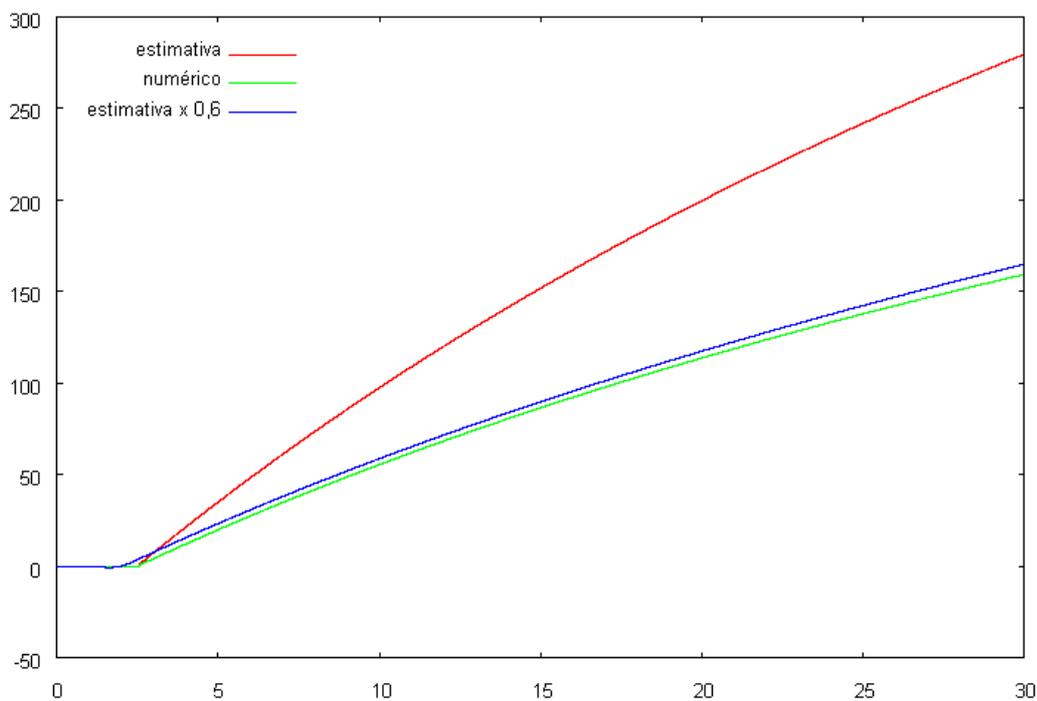


Figura 6.14: Gráfico *variação de alcance*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 400\text{ m/s}$  e  $\alpha = 30^\circ$  e  $\Delta T_e = 10\%$ , calculado por RK-4 e estimativas perturbativas.

A abertura das curvas de variação de alcance em feixes é uma simples consequência do deslocamento do instante real do vôo subsônico. Como podemos expandir  $\Delta x(t)$  para:

$$\Delta x(t) = \frac{1}{k} \ln \left( 1 + \frac{k(t-t_s) \Delta v_s}{1 + k(t-t_s) v_s} \right) \approx f(t-t_s) \Delta v_s - \frac{1}{2} k f^2(t-t_s)^2 \Delta v_s^2 + \dots$$

Com  $f(t) = k(t)/(1 + k(t)v_s)$ . Caso se multiplique por  $c$  o valor de  $\Delta v_s$ ,

$$\Delta x'(t) \approx c f(t-t_s) \Delta v_s - \frac{1}{2} k c^2 f^2(t-t_s)^2 \Delta v_s^2 + \dots$$

Que se difere em  $O(\Delta v_s^2)$  de um valor realmente proporcional a  $c\Delta x(t)$ . Essa discrepância é o que impede um verdadeiro paralelismo, provocando o entrecruzamento das curvas para variação em alcance. Portanto, ao se estimar variações em alcance a partir de uma mudança em temperatura considerada unitária, convém utilizar um polinômio de grau maior que um.

# Capítulo 7

## Aplicações Semi-Analíticas de Expansões

Junto com o entendimento das sensibilidades dos parâmetros de um sistema e de suas condições iniciais, antes só possível por meios numéricos, há a contrapartida de métodos perturbativos poderem ser usados para o refinamento de uma análise numérica. Porém, talvez haja a necessidade de a própria expansão assintótica ser refinada ou ter sua validade delimitada antes de ser usada.

### 7.1 Limites de validade e aproximações

O fato de o termo de ordem zero para a expansão em alcance conter a parte mais significativa do total (sç 5.1) permite uma análise do erro do mesmo utilizando o de primeira ordem para a mensuração do mesmo. Basicamente, avalia-se a distância da diferença entre uma aproximação numérica e o termo de ordem zero para o de primeira ordem. Como a expansão possui singularidade no domínio, em determinado instante  $t_{max}$  a separação entre suas normas atingirá um valor que excede alguma tolerância estipulada, podendo-se considerar aí um limite para a validade do uso da expansão.

Por exemplo, seja  $sx_h(t)$  a aproximação numérica considerada satisfatória,  $sx_0(t)$  o termo de ordem zero,  $sx_1(t)$  o de primeira ordem,  $h$  o passo e  $\|\cdot\|$  a norma. O algoritmo acima apresenta-se:

```
1 Algoritmo LimiteValidade(tempo, h);  
2  $t \leftarrow 0.0$ ;  
3 enquanto  $|( \|sx_h(t) - sx_0(t)\|_1 - \|sx_1(t)\|_1 ) / \|sx_h(t)\| < TOL$  e  $t < tempo$  faça  
4   |  $t \leftarrow t + h$ ;  
5 fim
```

**Algoritmo 1:** Determinação do tempo máximo de validade de uma expansão.

Uma questão que surge é estipular o que seria uma aproximação “numérica satisfatória”. Uma solução pouco custosa é selecionar um tempo  $t'$  tal que se tenha  $T' \ll \varepsilon^{-1/2}$ , sendo  $T'$  o correspondente adimensional de  $t'$ . Aproveitando-se da propriedade de o erro de truncamento diminuir com decréscimo do passo  $h$  até quando os efeitos de arredondamento superam qualquer redução do passo, surge um algoritmo também simples e eficaz:

```

1 Algoritmo PassoMinimo( $t', h_0$ );
2  $n \leftarrow 0$ ;
3  $t \leftarrow t'$ ;
4  $h \leftarrow h_0$ ;
5  $diferenca \leftarrow \|s_{x_h}(t) - s_{x_0}(t) - s_{x_1}(t)\|_1$ ;
6 enquanto  $n < 3$  faça
7    $h \leftarrow h/2$ ;
8    $temp \leftarrow \|s_{x_h}(t) - s_{x_0}(t) - s_{x_1}(t)\|_1$ ;
9   se  $|temp - diferenca| < TOL2$  então
10     $n \leftarrow 0$ ;
11  fim
12  senão
13     $n \leftarrow n + 1$ ;
14  fim
15   $diferenca \leftarrow temp$ ;
16 fim
17  $h \leftarrow h \times 2^3$ 

```

**Algoritmo 2:** Determinação do passo mínimo para a aproximação numérica.

A imposição de uma repetição de pelo menos  $N$  vezes para o aumento do erro (no caso  $N = 3$ ) é uma forma de evitar um falso valor mínimo para  $h$ .

## 7.2 Adaptação para o modelo ponto-massa completo

Os modelos apresentados até agora partiam do princípio da existência de uma atmosfera constante em todas as altitudes percorridas pelo projétil, situação que não corresponde à realidade. Um refinamento é inserir corretores conforme a altitude e um dos modelos mais utilizado é o *US Standard Atmosphere*:

$$\rho(y) = \rho_0 e^{-1,035y \times 10^{-4}y}$$

$$T_e(y) = T_{e0} e^{-1,973y \times 10^{-5}y}$$

Neste caso, as equações adimensionais para as componentes normal e tangencial se tornam:

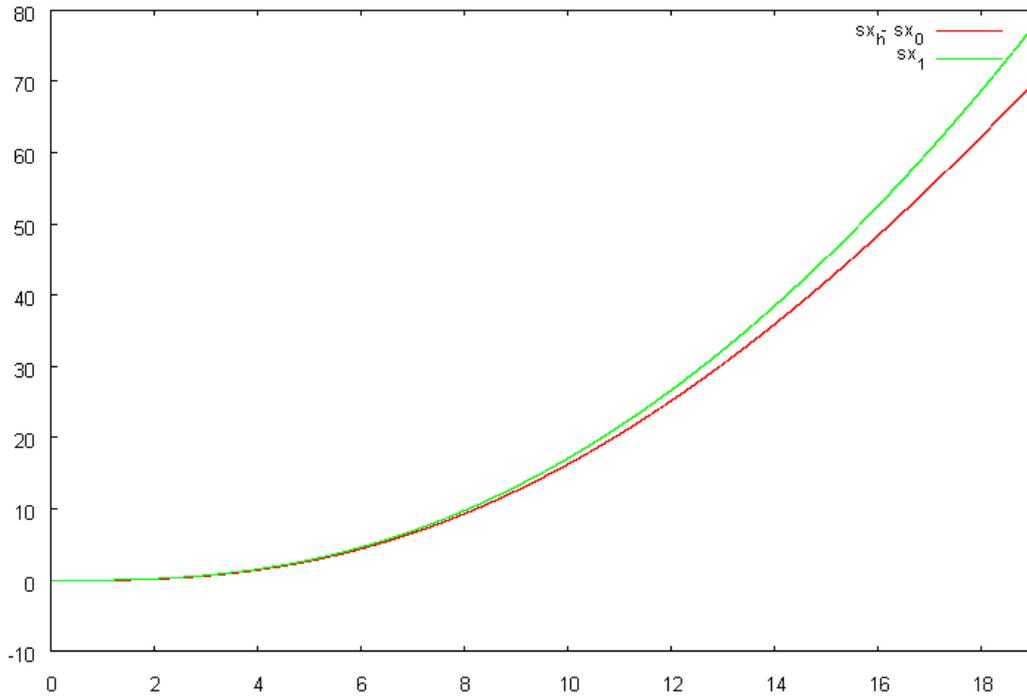


Figura 7.1: Gráfico *erro*  $\times$  *tempo* para  $v_0 = 1000$  m/s e  $\alpha_0 = 60^\circ$

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = -V^{2-n} - \varepsilon e^{(1,035y \times 10^{-4} + 1,973n/2 \times 10^{-5})y} \text{sen } \alpha \\ V \frac{d(\text{sen } \alpha)}{dT} = \varepsilon e^{(1,035y \times 10^{-4} + 1,973n/2 \times 10^{-5})y} (\text{sen}^2 \alpha - 1) \end{cases}$$

O que não permite nenhuma forma simples de resolução. Uma alternativa é utilizar as próprias expansões já conhecidas para estimar os efeitos do decaimento da densidade e temperatura. Como exemplo mais simples, será trabalhado o voo subsônico ( $n = 0$ ), pois não sofre influências da temperatura. Neste caso, as equações do sistema passam a ser:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = -V^{2-n} - \varepsilon e^{1,035y \times 10^{-4}y} \text{sen } \alpha \\ V \frac{d(\text{sen } \alpha)}{dT} = \varepsilon e^{1,035y \times 10^{-4}y} (\text{sen}^2 \alpha - 1) \end{cases}$$

Analogamente às expansões com singularidade no domínio, como atestado na figura (7.2), o comportamento das duas curvas possui um domínio comum inicial até que uma deixa de refletir os valores da outra. Da mesma maneira, expansões assintóticas singulares para a atmosfera constante deixam de corresponder à função original para densidade variável, porém em um intervalo mais curto do que ocorreria na atmosfera constante. Pode-se subdividir a atmosfera em zonas  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , de acordo com a altitude. Em

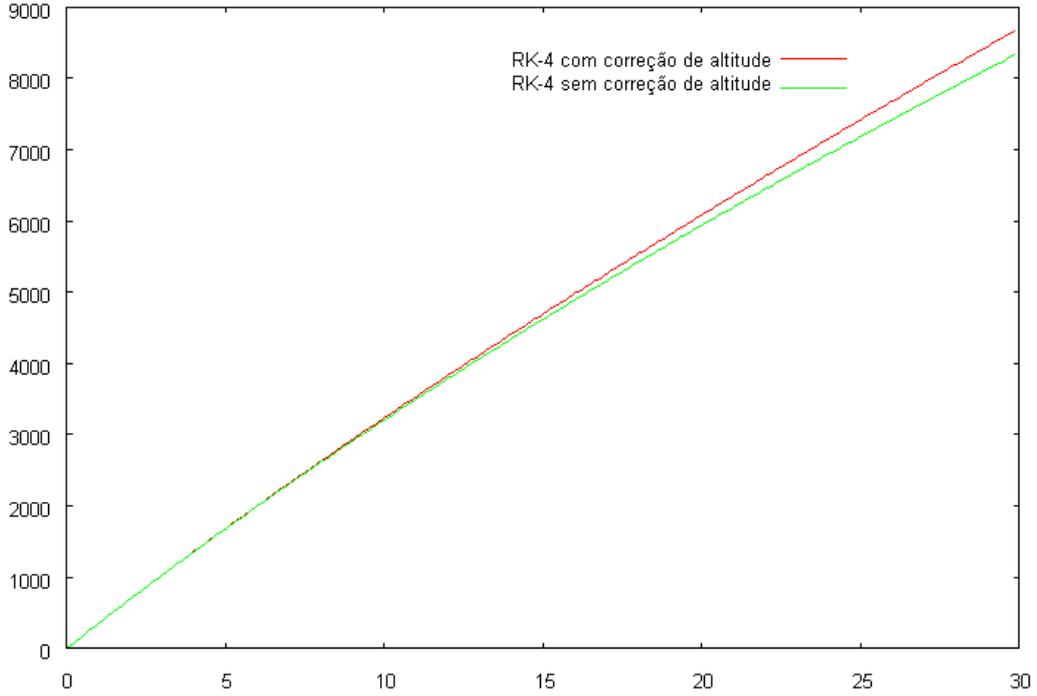


Figura 7.2: Gráfico de *alcance*  $\times$  *tempo* com atmosfera constante e variável para  $v_0 = 500$  m/s,  $\alpha_0 = 45^\circ$  e um suposto comportamento subsônico.

cada região, há uma expansão  $x_i(t_i, k)$  válida para cada camada  $i$ , sendo que entre uma camada e outra existe uma região de justaposição da validade delas. Considerando  $k_i$  o valor médio de  $k$  na camada  $i$ , nas expansões do modelo subsônico a variável  $t$  está sempre multiplicada por  $k_i$ , como resultado da redimensionalização. Pelo mesmo motivo, a variável dependente adimensional  $X_i$  é dividida por  $k_i$ . Como na fronteira entre uma camada  $z_i$  e a seguinte  $z_{i+1}$  suas expressões devem representar a mesma curva, pelo princípio do casamento:

$$\begin{aligned} O(x_i/k^i) = O(x_{i+1}/k^{i+1}) & \quad O(x_i)/k^i = O(x_{i+1})/k^{i+1} & \quad O(x_i) = O(x_{i+1}) / \left(\frac{k^{i+1}}{k^i}\right) \\ \Rightarrow & \quad \Rightarrow & \\ O(k^i t_i) = O(k^{i+1} t_{i+1}) & \quad k^i O(t_i) = k^{i+1} O(t_{i+1}) & \quad O(t_i) = \frac{k^{i+1}}{k^i} O(t_{i+1}) \end{aligned}$$

Como  $k^{i+1}/k^i = e^{-\beta(y_{i+1}-y_i)} = e^{-\beta\Delta y_i}$ , sendo  $\beta = 0,0001035 \text{ m}^{-1}$  e  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ , tem-se:

$$O(x_i) = e^{\beta\Delta y_i} O(x_{i+1})$$

$$O(t_i) = e^{-\beta\Delta y_i} O(t_{i+1})$$

Não há uma separação clara entre dois regimes como discutido no exemplo da seção (2.4.2). Isto permite conjecturar a existência de um “escalonamento contínuo” entre as

variáveis dependente e independente das camadas contíguas, cuja relação seria definida pelas constantes  $k^m$  e  $k^n$ :

$$x_i = k^m x_{i+1}$$

$$t_i = k^n t_{i+1}$$

onde pode-se escrever  $k^n = O(k^{i+1}/k^i)$  e  $k^m = O(k^i/k^{i+1})$ . Haveria uma série de casamentos intermediários [van Dyke 1975, p. 91] onde cada camada possui essencialmente a mesma expansão, com a variável dependente e  $t$  escalonados. Como não é possível o cálculo de uma expansão externa para definir o escalonamento, resta estimar o decaimento entre as camadas.

Apesar de não ser de grande precisão, a expansão para a altitude em atmosfera constante pode dar a ordem de grandeza suficientemente razoável para trajetórias dentro da troposfera (figura 7.3).

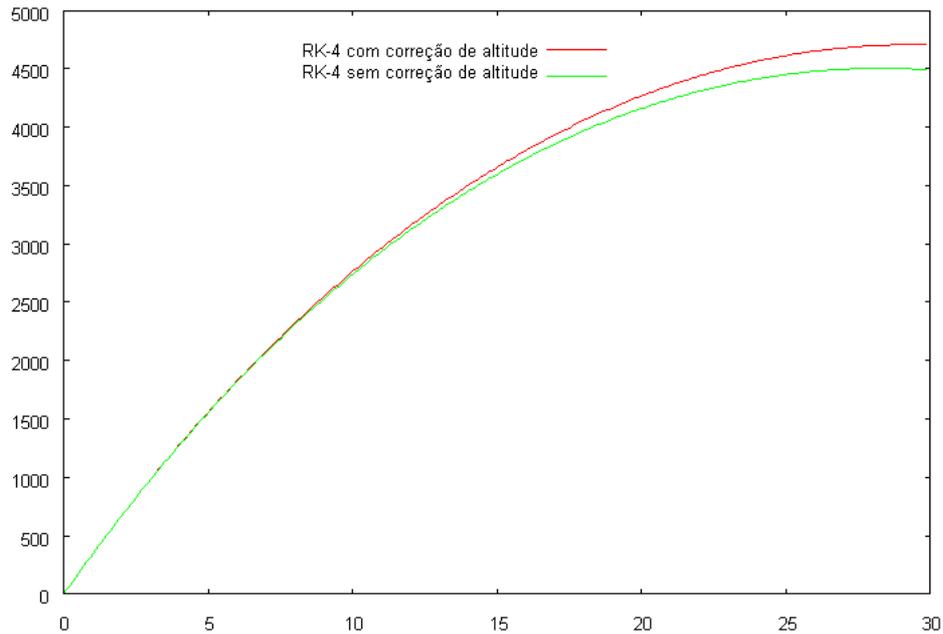


Figura 7.3: Gráfico de *altura*  $\times$  *tempo* com atmosfera constante e variável para  $v_0 = 500$  m/s,  $\alpha_0 = 45^\circ$  e um suposto comportamento subsônico.

Seja  $y(t, k)$  uma expansão para a altitude. Expandindo seu decaimento exponencial da densidade do ar de acordo com o modelo *US Standard*, já incluindo  $\rho$  como parte de  $\varepsilon$ , e desprezando os termos de segunda ordem em  $\varepsilon$  e superiores:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_0 e^{\beta y} = \varepsilon_0 [1 + \beta(y_0 + \varepsilon_0 y_1 + \dots) + \beta^2(y_0 + \varepsilon_0 y_1 + \dots)^2 / 2 + \dots] \sim$$

$$\sim \varepsilon_0 [1 + \beta (y_0 + \varepsilon_0 y_1) + \beta^2 (y_0^2 + 2\varepsilon_0 y_0 y_1) / 2] \sim \varepsilon_0 (1 + \beta y_0)$$

Assim, para a correção de  $\varepsilon$ , e portanto de  $k$ , apenas  $y_0$  é de interesse para uma expansão de primeira ordem. Para o caso subsônico, isto permite a simplificação:

$$k(y) = k_0 e^{-\beta \text{sen } \alpha_0 y_0} = k_0 e^{-\beta \text{sen } \alpha_0 \ln(1+k_0 v_0 t)/k_0} = k_0 (1 + k_0 v_0 t)^{-\frac{\beta \text{sen } \alpha_0}{k_0}}$$

Caso ocorra  $\beta v_0 t \ll 1$ , pode-se aproximar  $k(y) \sim k_0 (1 - \beta \text{sen } \alpha_0 v_0 t)$ , do contrário, melhor utilizar a expressão original.

Como os cálculos foram feitos em função de ordens de grandeza, é necessário “ajustar” o escalonamento pela multiplicação de  $y$  por uma constante  $\gamma$  a ser determinada (foi utilizado o método de *shooting*, brevemente apresentado a exemplo balístico em [Golub e Ortega 1992, p.146]). Assim, seguindo o princípio de que expansão original  $x(t, k) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$  preserva sua identidade com a escalonada  $\tilde{x}(t, k)$  quando  $\gamma \rightarrow 0$ , então:  $\tilde{x}(t, k) = e^{\beta \gamma y_0(t)} x_0(t e^{-\beta \gamma y_0(t)}) + \varepsilon e^{2\beta \gamma y_0(t)} x_1(t e^{-\beta \gamma y_0(t)})$ . Vale lembrar que esta expansão corrigida ainda é singular no domínio.

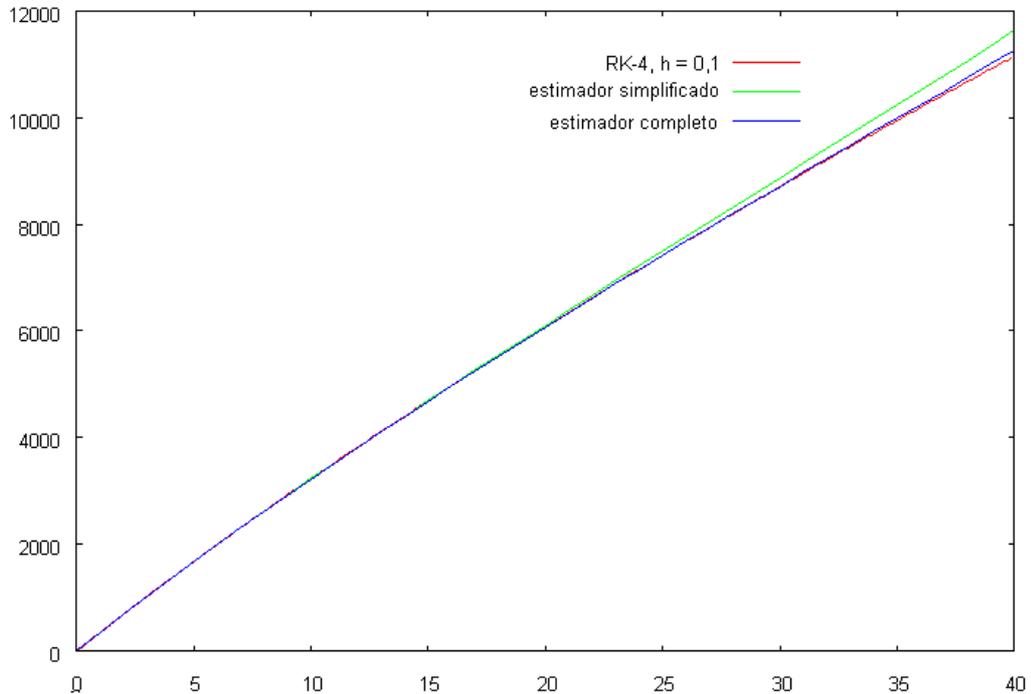


Figura 7.4: Gráfico de *alcance*  $\times$  *tempo* com atmosfera variável para  $v_0 = 500$  m/s,  $\alpha_0 = 45^\circ$  e  $\gamma = 0,25$ . A expansão com o ajustes simplificado com  $k(y) = k_0 (1 - \beta \gamma \text{sen } \alpha_0 v_0 t)$  perde a validade em cerca de  $t = 25$ s, quando  $\beta \gamma \text{sen } \alpha_0 v_0 t = O(1)$ , embora ainda menor que a unidade, ao passo que sua versão completa prossegue até  $t = 40$ s.

Para o voo subsônico, é relativamente simples a constatação da existência de um

funcional linear para  $y(t, k)$  e  $x(t, k)$ , pois a própria versão simplificada de  $k(y)$  deixa explícita a proporcionalidade para  $\Delta k_0$ .

Como constatado a partir de experimentos reais feitos em meados do século XX, é descrito em [McShane et al. 1953, p. 504] que:

Felizmente, porém, é verdade que em intervalos bem amplos os valores de  $\Gamma$  [coeficiente balístico, dependente da geometria do projétil],  $v_0$  e  $Y$  [altura de lançamento] as curvas de efeito de um tipo (como as curvas para o efeito da densidade sobre o alcance) diferem-se principalmente em escala, de forma que para quaisquer curvas de efeito  $g(k)$  [ $k$  - valor entre 0 e 1 para a distância adimensional do solo a partir de  $Y$ ] e  $g_1(k)$  será válido que uma constante multiplicativa de  $g(k)$  adequadamente escolhida será uma boa aproximação para  $g_1(k)$ . Assim, temos a seguinte afirmação empírica, cuja validade não pode ser prontamente vista por inspeção das equações de variação, mas é aparente da inspeção de um conjunto de curvas de efeito uma vez que tenham sido computadas: dado um conjunto de curvas que sejam todas de um mesmo tipo (tal como o efeito do vento sobre o alcance), correspondentes a vários valores de  $\Gamma$ ,  $v_0$  e altura de lançamento  $Y$ , podemos dividir cada  $g(k)$  por um número adequadamente escolhido, dependente de  $\Gamma$ ,  $v_0$  e  $Y$ , de forma que o quociente seja uma função de  $\Gamma$ ,  $v_0$  e  $Y$  que varie lentamente.

Esta propriedade de similaridade entre as curvas pode ser usada no reaproveitamento de uma constante  $\gamma$  para outras condições iniciais no instante do lançamento do projétil. Outra consideração feita por [McShane et al. 1953, p. 503] pode ser combinada com a anterior para a criação de um método que estenda a validade das expansões:

Computar as curvas de efeito para projéteis de artilharia é levemente complicado pelo fato de cada altitude  $y$  entre a do vértice e as do lançamento e impacto há dois valores de  $t$ , um para o ramo ascendente e um para o descendente da trajetória.

A solução dada pelo autor é dividir a trajetória em zonas distintas e obter os efeitos diferenciais para cada, adicionando-os depois para ter o efeito cumulativo de todas. Aqui, o método pode ser adaptado ao se determinar qual é o instante  $t_v$  em que a trajetória atinge o vértice e, caso a velocidade ou posição a determinar estejam além desse valor, usam-se novas expansões  $y'(t', k')$  e  $x'(t', k')$  cujas condições iniciais são  $(x(t_v), y(t_v))$  e  $(v_x(t_v), v_y(t_v))$  e os demais parâmetros;

$$\begin{aligned} \alpha'_0 &= 0^\circ & v_x(t_v) &= 0m/s & k'_0 &= k_0 e^{-\beta \text{sen } \alpha_0 y_v} \\ t' &= t - t_v & \beta' &= -\beta & \gamma' &= \gamma \end{aligned}$$

Sobra apenas determinar o instante  $t_v$ , o que pode ser feito por qualquer método numérico que obtenha o zero da expansão  $v_y(t, k)$ .

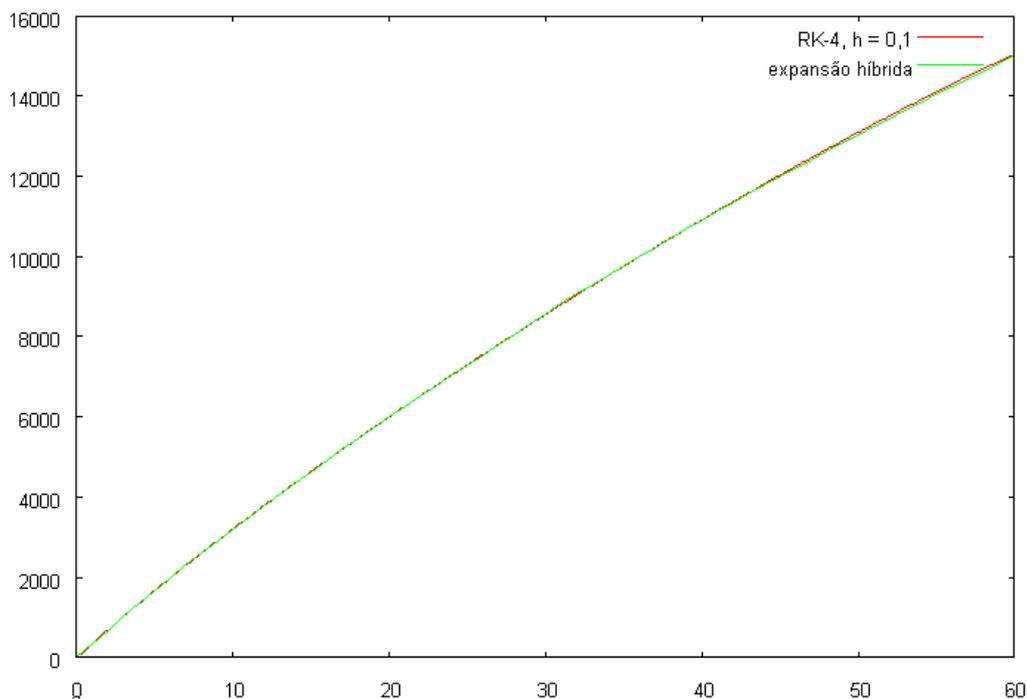


Figura 7.5: Gráfico de *alcance*  $\times$  *tempo* com atmosfera variável para  $v_0 = 500$  m/s,  $\alpha_0 = 45^\circ$  e  $\gamma = 0,25$ . A expansão utilizada separa ramo ascendente do descendente, tendo uma validade maior.

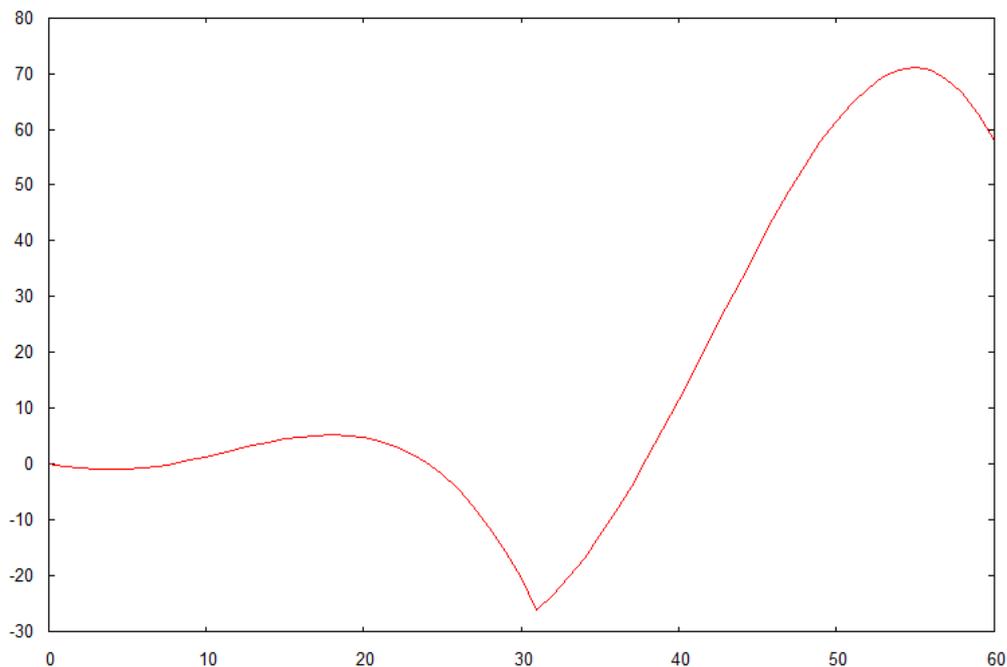


Figura 7.6: Diferença entre as curvas do gráfico anterior. A mudança de comportamento se dá no ápice da trajetória, quando ocorre a troca de expansões.

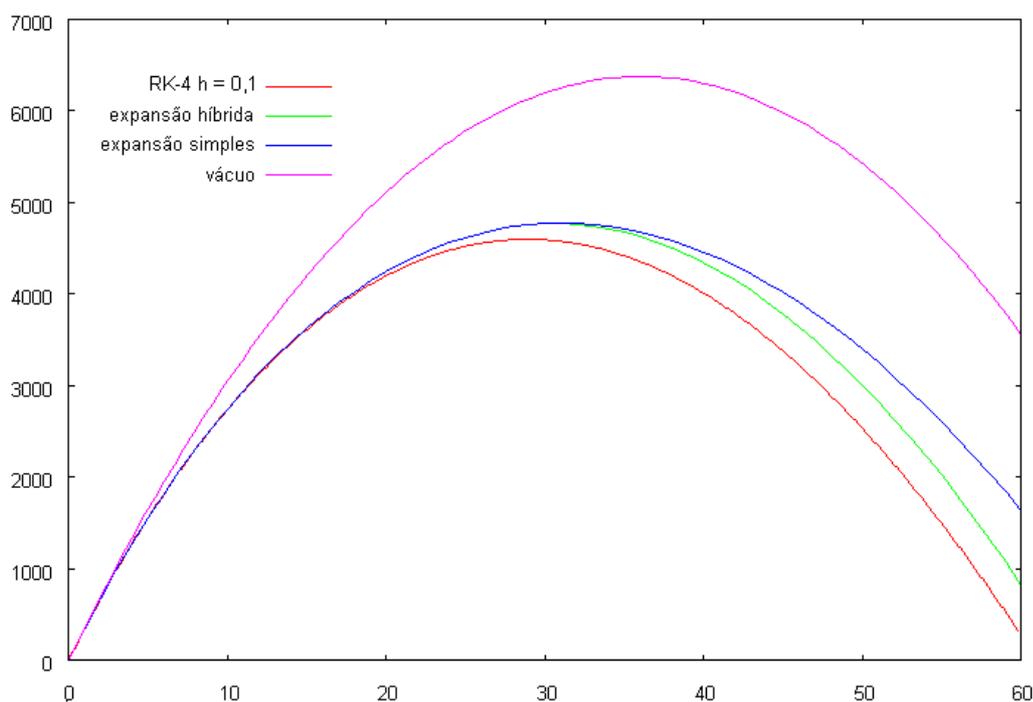


Figura 7.7: Gráfico de *altura*  $\times$  *tempo* com atmosfera variável para  $v_0 = 500$  m/s,  $\alpha_0 = 45^\circ$  e  $\gamma = 0,25$ . A expansão híbrida utilizada separa ramo ascendente do descendente, tendo comportamento mais próximo ao real.

Apesar de a separação entre a curva numérica e as expansões para altura ocorrer antes do vértice da trajetória, isto não é devido a uma má determinação do valor de  $\gamma$ . Na verdade, tal comportamento ocorre mesmo para a atmosfera constante (figura 7.8) e é até esperado: todas as parcelas seculares estão no termo de primeira ordem da expansão para a altura, também chamado de *gravity drop* [de Mestre 1990, p. 90]. A influência delas começa a ficar significativa justamente perto do ápice da trajetória, deixando a “gravidade efetiva” mais fraca que a devida.

### 7.3 Método de Booster

A avaliação do quanto uma expansão assintótica representa das leis que regem um sistema físico abre a possibilidade de torná-la útil para a melhoria do desempenho de métodos numéricos. A dependência da distância entre uma função e sua aproximação em  $\varepsilon$  fornece mais um parâmetro para o controle do erro e permite o uso desta última como um corretor da primeira. Uma propriedade que é aproveitada pelo método de *booster* [Natesan e Ramanujam 1999].

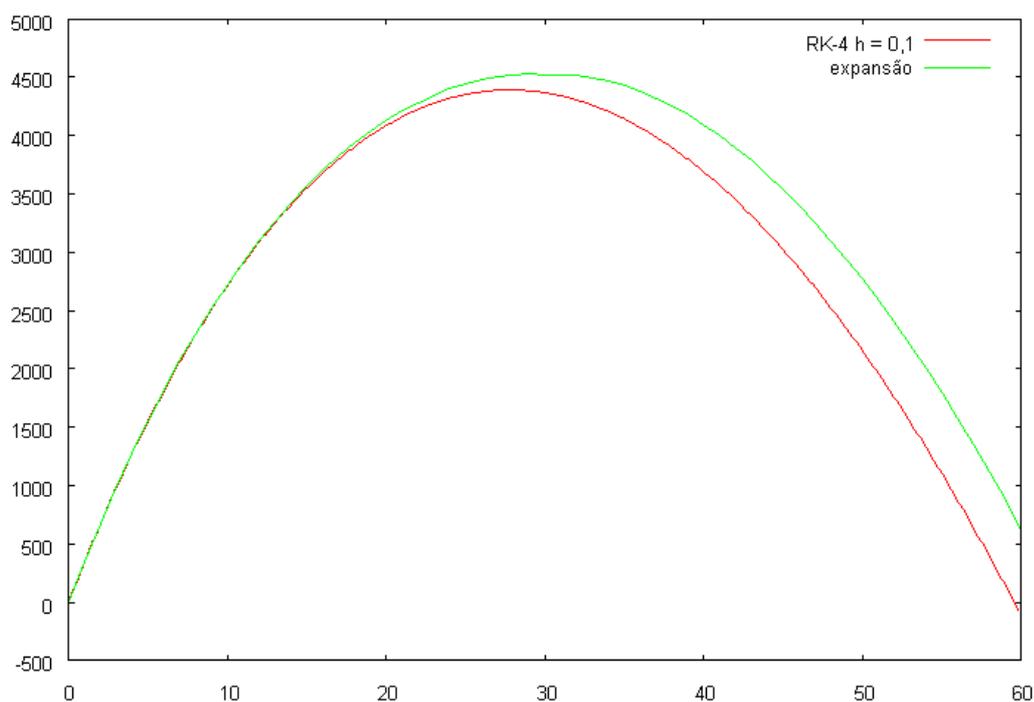


Figura 7.8: Gráfico de *altura*  $\times$  *tempo* com atmosfera constante para  $v_0 = 500$  m/s,  $\alpha_0 = 45^\circ$  e suposto comportamento subsônico.

### 7.3.1 Apresentação

Seja uma equação diferencial:

$$L(y) = f \quad \text{em } B, \quad y = y_b \quad \text{em } \partial B$$

Onde  $B$  é alguma região em  $\mathfrak{R}^n$  com um contorno  $\partial B$ . A solução numérica  $Y$  é geralmente obtida de

$$L_h(Y) = f$$

Sendo  $L_h$  o operador linear obtido pela substituição das derivadas em  $L$  por diferenças.

O erro de truncamento,  $T(y)$  do operador  $L_h$  é definido por:

$$T(y) = L_h(y) - L(y)$$

A partir da solução numérica  $Y$ :

$$T(y) = L_h(y) - L_h(Y)$$

No método de *booster*, usa-se uma aproximação  $\tilde{y}$  para a solução a fim de reduzir o erro de truncamento. A solução numérica melhorada  $Y_B$  é obtida aplicando-se o operador de *booster*  $L_{hB}$ , definido como:

$$L_{hB}Y_B = f - L_h(\tilde{y}) + L(\tilde{y})$$

Então o erro de truncamento para  $T_B(y)$  é:

$$\begin{aligned} T_B(y) &= [L_h(y) - L_h(\tilde{y}) + L(\tilde{y})] - L(y) \\ &= [L_h(y) - L_h(\tilde{y})] - [L(y) - L(\tilde{y})] \\ &= [L_h(y) - L(y)] - [L_h(\tilde{y}) - L(\tilde{y})] = T(y) - T(\tilde{y}), \end{aligned}$$

Assim, se a aproximação  $y$  é tal que:

$$\|T_B(y)\| = \|T(y) - T(\tilde{y})\| \leq \varepsilon_B \|T_B(y)\|$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma apropriada e  $\varepsilon_B$  é um termo pequeno, então  $Y_B$  é, geralmente, uma aproximação melhor que  $Y$ .

A essência do método de *booster* está em usar  $L_{hB}$  no lugar de  $L_h$  para obter  $Y_B$  (em vez de  $Y$ ). Isto requerendo apenas certa quantidade extra de processamento.

### 7.3.2 Considerações de implementação

Da forma como foi definido o operador  $L_{hB}Y_B = f - L_h(\tilde{y}) + L(\tilde{y})$ , pode ocorrer um aumento do erro em vez de sua diminuição<sup>1</sup>. Caso se tenha definida como norma a  $\|\cdot\|_0$ , um corolário da desigualdade triangular determina que:

$$\|T(y) - T(\tilde{y})\|_0 = |T(y) - T(\tilde{y})| \geq |T(y)| - |T(\tilde{y})|$$

A pior situação é quando  $|T(y)|$  e  $|T(\tilde{y})|$  possuem sinais opostos, o que leva a  $|T(y) - T(\tilde{y})| > |T(y)| - |T(\tilde{y})|$ . Para tais casos, faz-se necessário redefinir o operador de *booster* como  $L_{hB}Y_B = f + L_h(\tilde{y}) - L(\tilde{y})$

<sup>1</sup>[Natesan e Ramanujam 1999] não faz tal consideração

$$\begin{aligned}
T_B(y) &= [L_h(y) + L_h(\tilde{y}) - L(\tilde{y})] - L(y) \\
&= [L_h(y) - L(\tilde{y})] + [L_h(\tilde{y}) - L(\tilde{y})] \\
&= T(y) + T(\tilde{y})
\end{aligned}$$

O que levará à diminuição do erro de truncamento.

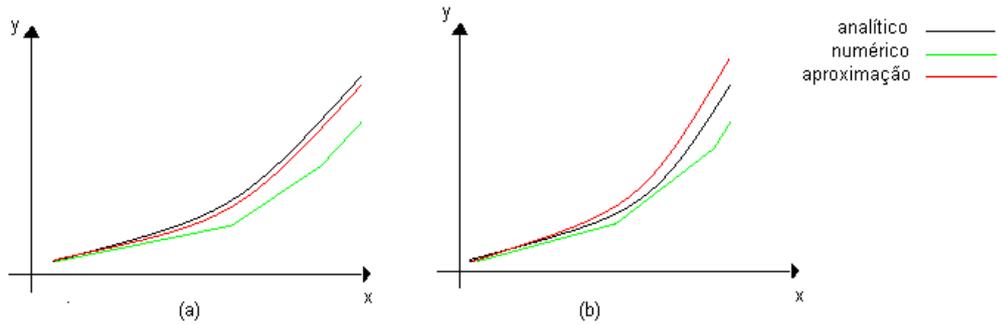


Figura 7.9: Dois casos possíveis de relacionamento entre  $T(y)$  e  $T(\tilde{y})$ , que justificam um tratamento separado.

### 7.3.3 Booster aplicado ao modelo ponto-de-massa

Feitas as considerações quanto aos dois casos de *booster*, será analisada a utilidade desse método ao cálculo de trajetórias. Em primeiro lugar, cabe verificar as posições relativas entre  $T(y)$  e  $T(\tilde{y})$ .

É necessária a análise de dois casos de erro de truncamento  $T(\tilde{y})$ : para velocidade e alcance, sendo que o primeiro pede a determinação de expansões para a aceleração (sc 5.1). Para o cálculo  $L_h(y)$  em qualquer caso, será utilizada a diferença finita ascendente, i.e., o método de Euler.

#### 7.3.3.1 1º caso - velocidade

O cálculo de  $L_h(\tilde{y})$  é trivial, com uma aplicação simples da definição:

$$L_h(v_x) = \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \quad L_h(v_y) = \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}$$

Sendo  $v_x$  e  $v_y$  as expansões para componentes cartesianas da velocidade e  $\Delta t$  o passo. Para  $L(\tilde{y})$ , uma idéia natural é derivar  $v_x$  e  $v_y$ . Pela análise dos esboços das funções adimensionais  $V_X$  e  $V_Y$ :

$$V_X = \cos \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{\left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n} \right) \right)$$

$$V_Y = \operatorname{sen} \alpha_0 ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n} + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{3-2n} \right)$$

$V_X$  pode ser decomposta num conjunto de três funções:

$$G_1(T) = K_1 ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} \quad G_2(T) = K_2 ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} \quad G_3(T) = K_3(1-n)T+1$$

com as seguintes constantes:

$$\begin{aligned} K_1 &= \cos \alpha_0 (1 - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 / (2-n)) & K_2 &= \varepsilon \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 / (3-2n) \\ K_3 &= -\varepsilon \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 [1/(2-n) - 1/(3-2n)] \end{aligned}$$

Estabelecendo um intervalo interesse para  $n$  em  $[0, 1)$  - do subsônico ao hipersônico - e considerando a pequenez de  $\varepsilon$ , tem-se que  $K_1$  e  $K_2$  são positivas e  $K_3$  negativa; o que leva a  $G_1(T)$ ,  $G_2(T)$  e  $G_3(T)$  a serem todas decrescentes para o intervalo  $[0, 1)$ . Por ser uma função linear, a primeira derivada e a diferença dividida ascendente de  $G_3(T)$  são idênticas:

$$\frac{dG_3(T)}{dT} = \Delta G_3(T) = \frac{G_3(T+\Delta T) - G_3(T)}{\Delta T} = K_3(1-n)$$

Isto é, uma constante que some por subtração no cálculo de  $T \left( \tilde{V}_X \right)$ . Limitando o tamanho máximo de  $\Delta T$  à unidade, para que  $|(1-n)\Delta T / ((1-n)T+1)| < 1$ , tem-se para  $G_1(T)$ :

$$\Delta G_1(T) = \frac{G_1(T+\Delta T) - G_1(T)}{\Delta T} = \frac{K_1 ((1-n)T+1 + (1-n)\Delta T)^{\frac{1}{n-1}} - K_1 ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}}}{\Delta T}$$

$$= K_1 \frac{\left[ ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{n-1} ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} (1-n)\Delta T + \dots \right] - ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}}}{\Delta T}$$

$$= K_1 \left[ -((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \frac{1}{2}(2-n)((1-n)T+1)^{\frac{3-2n}{n-1}} \Delta T - \frac{1}{6}(2-n)(3-2n)((1-n)T+1)^{\frac{4-3n}{n-1}} \Delta T^2 + \dots \right]$$

e assim

$$\Delta G_1(T) - \frac{dG_1}{dT} = K_1 \left[ \frac{1}{2}(2-n)((1-n)T+1)^{\frac{3-2n}{n-1}} \Delta T - \frac{1}{6}(2-n)(3-2n)((1-n)T+1)^{\frac{4-3n}{n-1}} \Delta T^2 + \dots \right] > 0$$

Que é dado pelo sinal do primeiro termo  $(2-n)((1-n)T+1)^{\frac{3-2n}{n-1}}$ . Para  $G_2(T)$ , tem-se de forma análoga:

$$\begin{aligned} \Delta G_2(T) &= \frac{G_2(T+\Delta T) - G_2(T)}{\Delta T} = \frac{K_2((1-n)T+1 + (1-n)\Delta T)^{\frac{2-n}{n-1}} - K_2((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}}}{\Delta T} \\ &= K_2 \frac{\left[ ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \frac{2-n}{n-1}((1-n)T+1)^{\frac{3-2n}{n-1}}(1-n)\Delta T + \dots \right] - ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}}}{\Delta T} \\ &= K_2 \left[ (2-n)((1-n)T+1)^{\frac{3-2n}{n-1}} + \frac{1}{2}(2-n)(3-2n)((1-n)T+1)^{\frac{4-3n}{n-1}} \Delta T \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}(2-n)(3-2n)(4-3n)((1-n)T+1)^{\frac{5-4n}{n-1}} \Delta T^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

e por fim

$$\begin{aligned} \Delta G_2(T) - \frac{dG_2}{dT} &= K_2 \left[ \frac{1}{2}(2-n)(3-2n)((1-n)T+1)^{\frac{4-3n}{n-1}} \Delta T \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}(2-n)(3-2n)(4-3n)((1-n)T+1)^{\frac{5-4n}{n-1}} \Delta T^2 + \dots \right] > 0 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\Delta V_X(T) - A_{CX}(T) > 0$$

Como a curva de velocidade possui concavidade para cima, métodos numéricos mais simples, como Euler, calculam uma curva sempre inferior à solução real [Hamming 1986, p. 53], os sinais de  $T(v_x)$  e  $T(\tilde{v}_x)$  são opostos; o que leva ao uso do segundo tipo do operador de *booster* para  $V_X$ . Para  $V_Y$ , o raciocínio é similar, porém as constantes

encontradas serão:

$$K_1 = (\text{sen } \alpha_0 + \varepsilon \cos^2 \alpha_0 / (2 - n)) \quad K_3 = -\varepsilon [\cos^2 \alpha_0 / (2 - n) + \text{sen}^2 \alpha_0 / (3 - 2n)]$$

$$K_2 = \varepsilon \text{sen}^2 \alpha_0 / (3 - 2n)$$

Por outro lado,  $G_1(T)$ ,  $G_2(T)$  e  $G_3(T)$  continuam as mesmas. A única constante negativa é  $K_3$ , mas que multiplica uma função linear cuja diferença dividida e a derivada são idênticas e se anulam por subtração. O raciocínio para  $G_1(T)$  e  $G_2(T)$  permanece idêntico levando ao uso do segundo modelo de *booster* para  $V_Y$ , também.

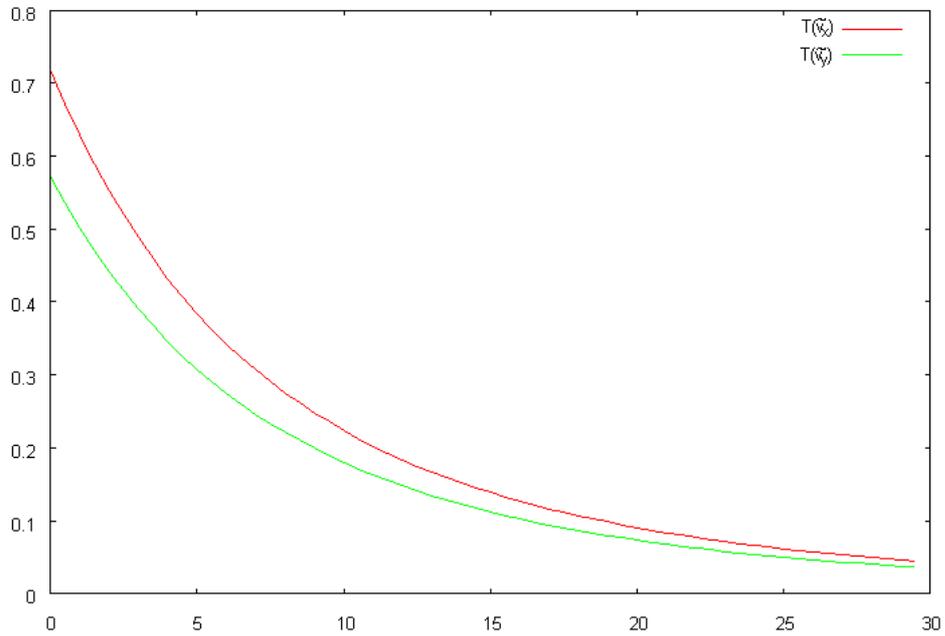


Figura 7.10:  $T(\tilde{v}_x)$  e  $T(\tilde{v}_y)$  para  $v_0 = 500$  m/s e  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Vôo supersônico.

### 7.3.3.2 2º caso - alcance

Pela análise dos esboços das funções adimensionais de  $S_X$ :

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{1}{n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}}}{n} \right) + \varepsilon \text{sen } \alpha_0 \left( \frac{\left( \frac{-2(1-n)((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - T((1-n)T+2)+2}{2(3-2n)} \right) + \frac{2((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}} + nT((1-n)T+2)-2}{2n(2-n)}}{2(3-2n)} \right)$$

$$G_1(T) = \frac{1}{n} + K_1 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}}}{n} \quad G_2(T) = K_2 ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} \quad G_3(T) = K_3 [T((1-n)T+2)+2]$$

Sendo as constantes:

$$K_1 = \cos \alpha_0 (-1 + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 / (n(2-n))) \quad K_3 = \varepsilon \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 [1/(2-n) - 1/(3-2n)]/2$$

$$K_2 = -\varepsilon \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 (1-n)/(3-2n)$$

$$\Delta G_1(T) = \frac{G_1(T + \Delta T) - G_1(T)}{\Delta T} = \frac{K_1}{n} \frac{1 + ((1-n)T + 1 + (1-n)\Delta T)^{\frac{n}{n-1}} - \frac{n}{n-1}}{\Delta T}$$

$$= \frac{K_1}{n} \frac{\left[ ((1-n)T + 1)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{n}{n-1} ((1-n)T + 1)^{\frac{1}{n-1}} (1-n)\Delta T + \dots \right] - ((1-n)T + 1)^{\frac{n}{n-1}}}{\Delta T}$$

$$= K_1 \left[ -((1-n)T + 1)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{2} ((1-n)T + 1)^{\frac{2-n}{n-1}} \Delta T - \frac{1}{6} (2-n) ((1-n)T + 1)^{\frac{3-2n}{n-1}} \Delta T^2 + \dots \right]$$

$$\Delta G_1(T) - \frac{dG_1(T)}{dT} = K_1 \left[ \frac{1}{2} ((1-n)T + 1)^{\frac{2-n}{n-1}} \Delta T - \frac{1}{6} (2-n) ((1-n)T + 1)^{\frac{3-2n}{n-1}} \Delta T^2 + \dots \right] < 0$$

Pois  $K_1$  é negativa e o primeiro termo positivo.

$$\Delta G_2(T) = \frac{G_2(T + \Delta T) - G_2(T)}{\Delta T} = \frac{K_2}{\Delta T} \frac{((1-n)T + 1 + (1-n)\Delta T)^{\frac{1}{n-1}} - K_2 ((1-n)T + 1)^{\frac{1}{n-1}}}{\Delta T}$$

$$= K_2 \frac{\left[ ((1-n)T + 1)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{n-1} ((1-n)T + 1)^{\frac{2-n}{n-1}} (1-n)\Delta T + \dots \right] - ((1-n)T + 1)^{\frac{1}{n-1}}}{\Delta T}$$

$$= K_2 \left[ -((1-n)T + 1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \frac{1}{2} (2-n) ((1-n)T + 1)^{\frac{3-2n}{n-1}} \Delta T - \frac{1}{6} (2-n)(3-2n) ((1-n)T + 1)^{\frac{4-3n}{n-1}} \Delta T^2 + \dots \right]$$

E assim:

$$\Delta G_2(T) - \frac{dG_2}{dT} = K_2 \left[ \frac{1}{2} (2-n) ((1-n)T + 1)^{\frac{3-2n}{n-1}} \Delta T - \frac{1}{6} (2-n)(3-2n) ((1-n)T + 1)^{\frac{4-3n}{n-1}} \Delta T^2 + \dots \right] < 0$$

Pois  $K_2$  é negativa e o primeiro termo positivo.

$$\Delta G_3(T) = \frac{G_3(T + \Delta T) - G_3(T)}{\Delta T} = K_3 [2(1 - n)T + (1 - n)\Delta T + 2]$$

$$\Delta G_3(T) - \frac{dG_3(T)}{dT} = K_3(1 - n)\Delta T > 0$$

A única das parcelas positivas é  $\Delta G_3$ , porém dado seu valor constante e o fato de  $K_1 \gg K_3$ , pode-se estimar que por um largo período  $T > 0$  ocorrerá:

$$\Delta S_X(T) - V_X(T) < 0$$

Qual o operador de *booster* a ser usado dependerá da forma como  $v_x(t)$  for integrada numericamente. Uma integração numérica cujo erro seja negativo - como “a soma inferior” à curva - pede o primeiro modelo de *booster* para  $S_X$ . Se não, o segundo modelo deve ser usado.

Para  $S_Y$  a expansão é:

$$Y \approx \text{sen } \alpha_0 \left( \frac{1}{n} - \frac{((1 - n)T + 1)^{\frac{n}{n-1}}}{n} \right) - \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \frac{2((1 - n)T + 1)^{\frac{n}{n-1}} + nT((1 - n)T + 2) - 2}{2n(2 - n)} + \right. \\ \left. + \text{sen}^2 \alpha_0 \frac{2(1 - n)((1 - n)T + 1)^{\frac{1}{n-1}} + T((1 - n)T + 2) + 2}{2(3 - 2n)} \right)$$

$$G_1(T) = \frac{1}{n} + K_1 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}}}{n} \quad G_2(T) = K_2 ((1 - n)T + 1)^{\frac{1}{n-1}} \quad G_3(T) = K_3 [T((1 - n)T + 2) + 2]$$

Sendo as constantes:

$$K_1 = (-\text{sen } \alpha_0 - \varepsilon \cos^2 \alpha_0 / (n(2 - n))) \quad K_3 = -\varepsilon [\cos^2 \alpha_0 / (2 - n) + \text{sen}^2 \alpha_0 / (3 - 2n)] / 2 \\ K_2 = -\varepsilon \text{sen}^2 \alpha_0 (1 - n) / (3 - 2n)$$

$G_1(T)$ ,  $G_2(T)$  e  $G_3(T)$  continuam as mesmas e  $K_3$  também é negativa agora. O raciocínio para  $G_1(T)$  e  $G_2(T)$  permanece idêntico, levando às mesmas considerações quanto ao modelo de *booster* para  $S_Y$ , também.

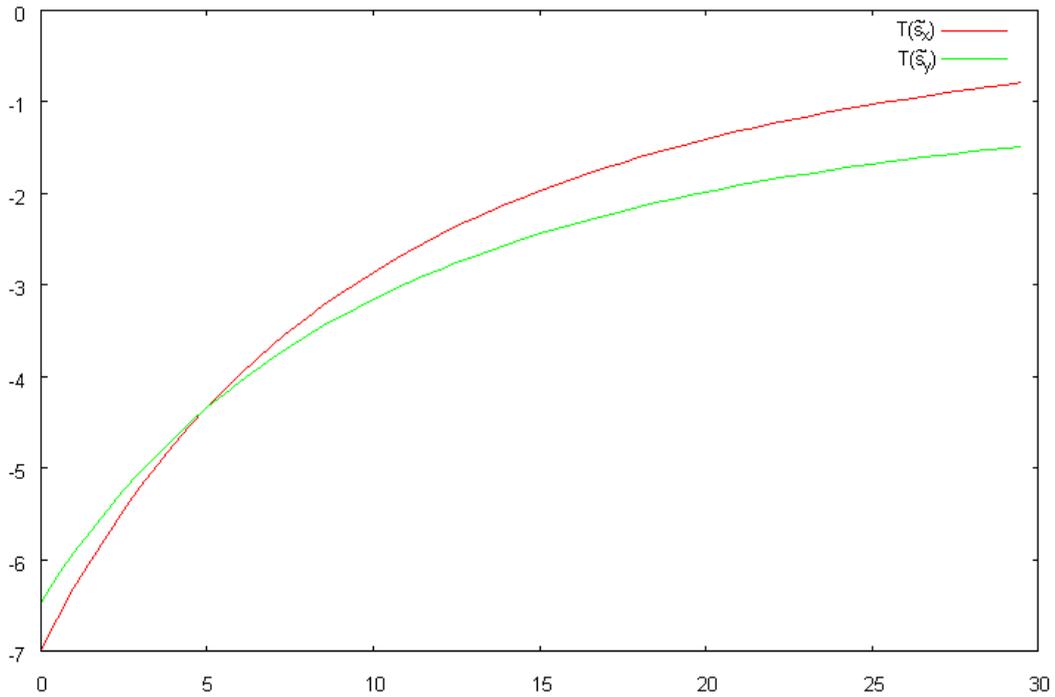


Figura 7.11:  $T(\tilde{s}_x)$  e  $T(\tilde{s}_y)$  para  $v_0 = 500$  m/s e  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Vôo supersônico.

### 7.3.4 Experimentos numéricos

Uma primeira medida é avaliar a própria influência das correções de *booster* para um modelo sem variação atmosférica. Adotando um método de Euler (sendo que na integração de  $v_x$  e  $v_y$  ele realiza a soma inferior), o laço principal do algoritmo recebe os seguintes acréscimos:

```

1 Algoritmo Booster( $t_{max}, h$ );
2  $t \leftarrow 0$ ;  $vx \leftarrow v_0 \cos \alpha_0$ ;  $vy \leftarrow v_0 \text{sen } \alpha_0$   $sx \leftarrow 0$ ;  $sy \leftarrow 0$ ;
3 enquanto  $t < t_{max}$  faça
4    $vx \leftarrow vx + (ac_{hor}(vx, vy) + (v_{hor}(t+h) - v_{hor}(t))/h - a_{hor}(t)) \times h$ ;
5    $vy \leftarrow vy + (ac_{ver}(vx, vy) + (v_{ver}(t+h) - v_{ver}(t))/h - a_{ver}(t)) \times h$ ;
6    $sx \leftarrow sx + (vx - (s_{hor}(t+h) - s_{hor}(t))/h + v_{hor}(t)) \times h$ ;
7    $sy \leftarrow sy + (vy - (s_{ver}(t+h) - s_{ver}(t))/h + v_{ver}(t)) \times h$ ;
8    $t \leftarrow t + h$ ;
9 fim

```

**Algoritmo 3:** Método de *booster* aplicado a Euler.

Onde  $ac_{hor}$  e  $ac_{ver}$  são as acelerações horizontal e vertical definidas analiticamente em função de  $v_x$  e  $v_y$  e  $g$ . As funções  $a_{hor}$ ,  $a_{ver}$ ,  $v_{hor}$ ,  $v_{ver}$ ,  $s_{hor}$  e  $s_{ver}$  são, respectivamente, as expansões de primeira ordem para a aceleração, velocidade e alcance horizontais e verticais, e  $h$  é o passo de integração. Supondo  $v_0 = 500$  m/s,  $\alpha_0 = 30^\circ$  e  $h = 0,5$  s e

variando o experimento desde uma execução sem correção; correção alternadamente na velocidade e no alcance; até com correção em ambos. A saída resultante fornece sensível melhoria.

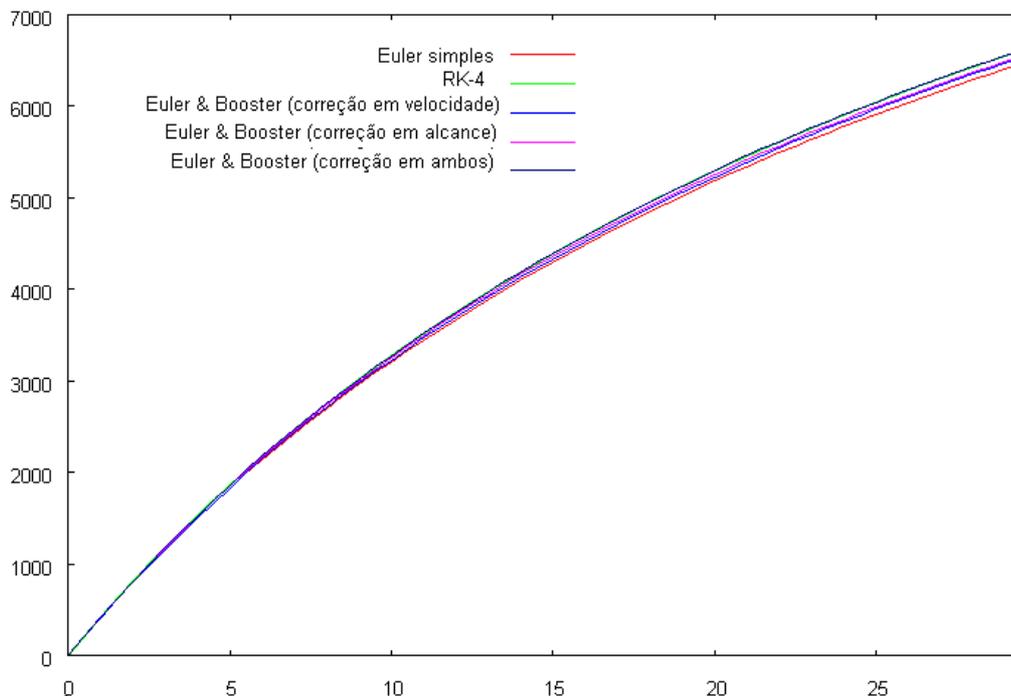


Figura 7.12: Confrontação do método Runge-Kutta de 4ª ordem e passo  $h = 0,5$  com métodos de Euler refinados por *booster* e de mesmo passo.

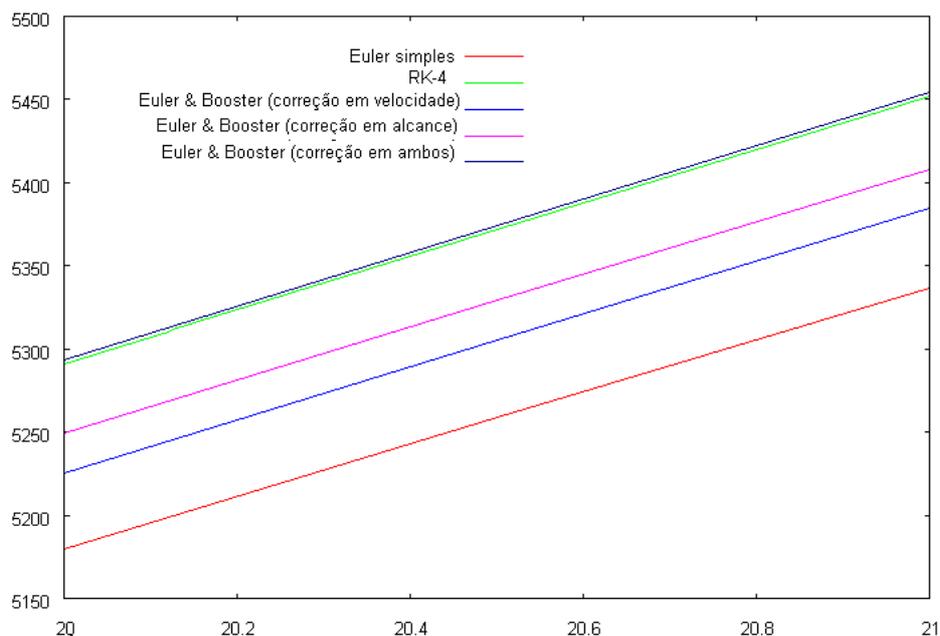


Figura 7.13: Detalhe da Figura anterior.

### 7.3.5 Booster para atmosfera variável

Neste caso, poder-se-ia repetir o processo exposto acima, agora utilizando o mesmo tratamento em duas expansões (uma para antes e outra para depois do vértice). Entretanto, esta abordagem acarreta o problema de o erro das expansões ser muito grande já pouco antes do vértice da trajetória. Esta questão pode ser solucionada generalizando a idéia proposta na seção anterior de usar mais de uma expansão para o tratamento, porém, em vez de usar apenas duas, cada iteração teria sua própria expansão. As condições iniciais da iteração  $i$  são as saídas da iteração anterior, os parâmetros  $\alpha_0$  e  $v_0$  são  $\arctan(v_y(i-1)/v_x(i-1))$  e  $\sqrt{v_x^2(i-1) + v_y^2(i-1)}$ .

Tais mudanças têm um efeito extremamente simplificador na abordagem feita em (7.3.4) com o método de Euler, pois a cada iteração tem-se novas velocidades e acelerações iniciais para as expansões, que são iguais às analíticas (alg. 4).

```

1 Algoritmo BoosterSimples( $t_{max}, h$ );
2  $t \leftarrow 0$ ;  $vx \leftarrow v_0 \cos \alpha_0$ ;  $vy \leftarrow v_0 \sin \alpha_0$   $sx \leftarrow 0$ ;  $sy \leftarrow 0$ ;
3 enquanto  $t < t_{max}$  faça
4    $vx \leftarrow v_{hor}(t)$ ;
5    $vy \leftarrow v_{ver}(t)$ ;
6    $sx \leftarrow sx + (vx - (s_{hor}(t+h) - s_{hor}(t))/h + v_{hor}(t)) \times h$ ;
7    $sy \leftarrow sy + (vy - (s_{ver}(t+h) - s_{ver}(t))/h + v_{ver}(t)) \times h$ ;
8    $v_0 \leftarrow \sqrt{vx^2 + vy^2}$ ;
9    $\alpha_0 \leftarrow \arctan(vy/vx)$ ;
10   $t \leftarrow t + h$ ;
11 fim

```

**Algoritmo 4:** Método de *booster* simplificado

Caso o alcance e altura também tenham sido corrigidos pelo segundo de operador de *booster*, o algoritmo simplifica-se ainda mais para (alg. 5):

```

1 Algoritmo BoosterDegenerado( $t_{max}, h$ );
2  $t \leftarrow 0$ ;  $vx \leftarrow v_0 \cos \alpha_0$ ;  $vy \leftarrow v_0 \text{sen } \alpha_0$   $sx \leftarrow 0$ ;  $sy \leftarrow 0$ ;
3 enquanto  $t < t_{max}$  faça
4    $vx \leftarrow v_{hor}(t)$ ;
5    $vy \leftarrow v_{ver}(t)$ ;
6    $sx \leftarrow s_{hor}(t)$ ;
7    $sy \leftarrow s_{ver}(t)$ ;
8    $v_0 \leftarrow \sqrt{vx^2 + vy^2}$ ;
9    $\alpha_0 \leftarrow \arctan(vy/vx)$ ;
10   $t \leftarrow t + h$ ;
11 fim

```

**Algoritmo 5:** Método de *booster* degenerado - Expansão assintótica discretizada

Neste caso extremo em que o método escolhido para o refinamento é o de Euler simples, o método de *booster* se degenera para uma espécie de “discretização da expansão”. De certa forma, ele reproduz uma abordagem presente em [Finley e Anderson 2005], onde equações geradas pela teoria das perturbações são discretizadas sobre uma malha cartesiana. Isto não chega a ser um abandono das correções do operador de *booster*, que continua válido para versões adaptadas de Euler (p.e. método de Heun ou “Euler melhorado”); onde  $vx$  ( $vy$ ) é diferente de  $v_{hor}(0)$  ( $v_{ver}(0)$ ). Aliás, como está se lidando com singularidades no domínio, o erro numérico pode compensar o assintótico dentro de certos limites. Por outro lado, esta forma “degenerada” pode ser uma opção melhor que o próprio método de *booster* original, dependendo da situação. Um problema inevitável é uma certa quantidade processamento extra devido às parcelas de correção. Como elas estão em função das expansões, quanto mais complicada estas forem, maior o custo adicionado. Em testes, duas simplificações foram feitas: a primeira desprezou o termo de primeira ordem das expansões horizontais e a segunda, além disso, simplificou o termo de primeira ordem das componentes verticais. Como não é possível descartar este último termo por ele conter a aceleração gravitacional (sç 5.1), foi considerado, então, apenas o efeito da gravidade. A comparação dessas abordagens fornece o gráfico da figura (7.14).

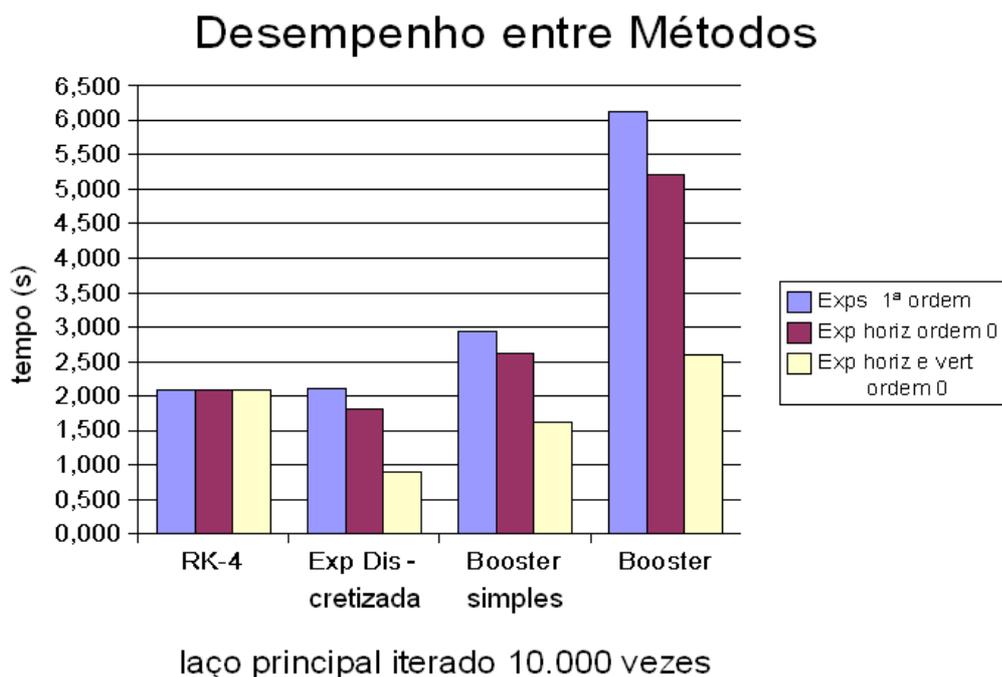


Figura 7.14: Confrontação do custo em *user time* do método RK-4, *booster* sobre Euler, *booster* simplificado e expansão discretizada. Em um teste, desprezou-se o termo de primeira ordem para as expansões horizontais. Testes feitos em CPU Celeron 2,53 GHz, 448 MB RAM, 256KB de cache, sistema operacional Linux Kurumin 6.1, KDE 3.5.4, kernel 2.6.17.6-slh-up-1, compilador GCC/g++ 4.1.2 em configuração *default*.

Fica claro que a simplificação de uma expansão - quer trocando um termo por outro mais simples ou desprezando os pouco significativos - melhora sensivelmente o desempenho. A questão de o quanto a melhoria valeria a pena é o que pode depor a favor do uso do corretor de *booster* para trajetória balística. Caso se esteja disposto a sacrificar algum grau de precisão da trajetória vertical, pode-se manter alta precisão para o alcance horizontal usando o método de *booster* simplificado com ambas as expansões de ordem zero, conforme exemplificado no gráfico das figuras de (7.15) a (7.17).

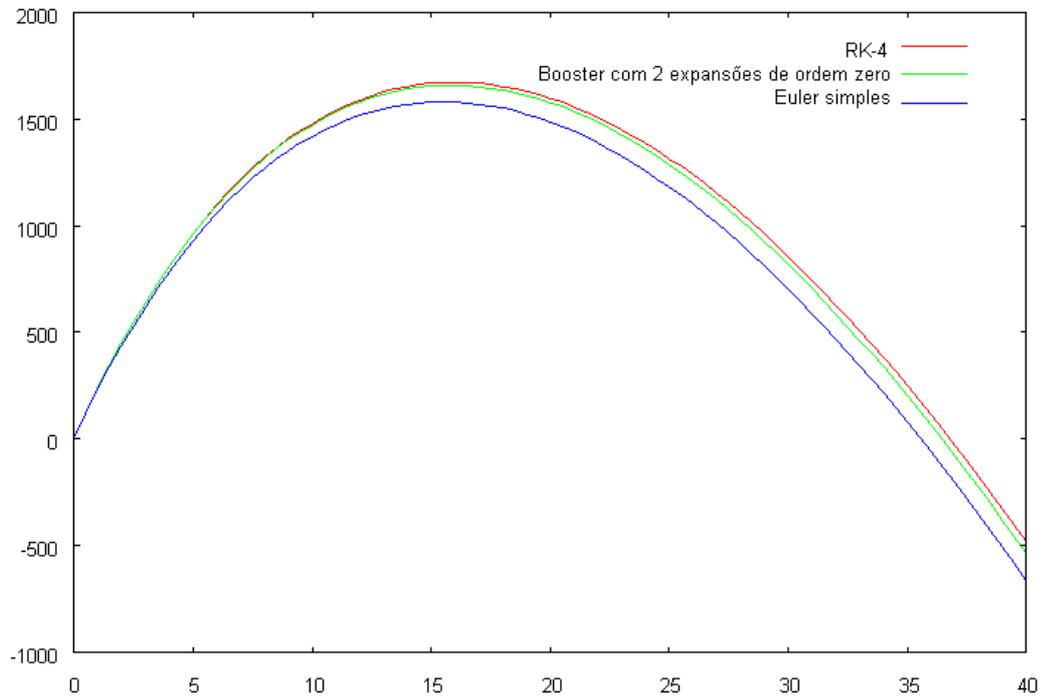


Figura 7.15: Gráfico *altura*  $\times$  *tempo* que confronta o método Runge-Kutta de 4ª ordem e passo  $h = 0,5$  com métodos de *booster* simplificado com duas expansões de ordem zero e Euler de mesmo passo.  $v_0 = 500$  m/s,  $\alpha_0 = 30^\circ$  e vôo subsônico.

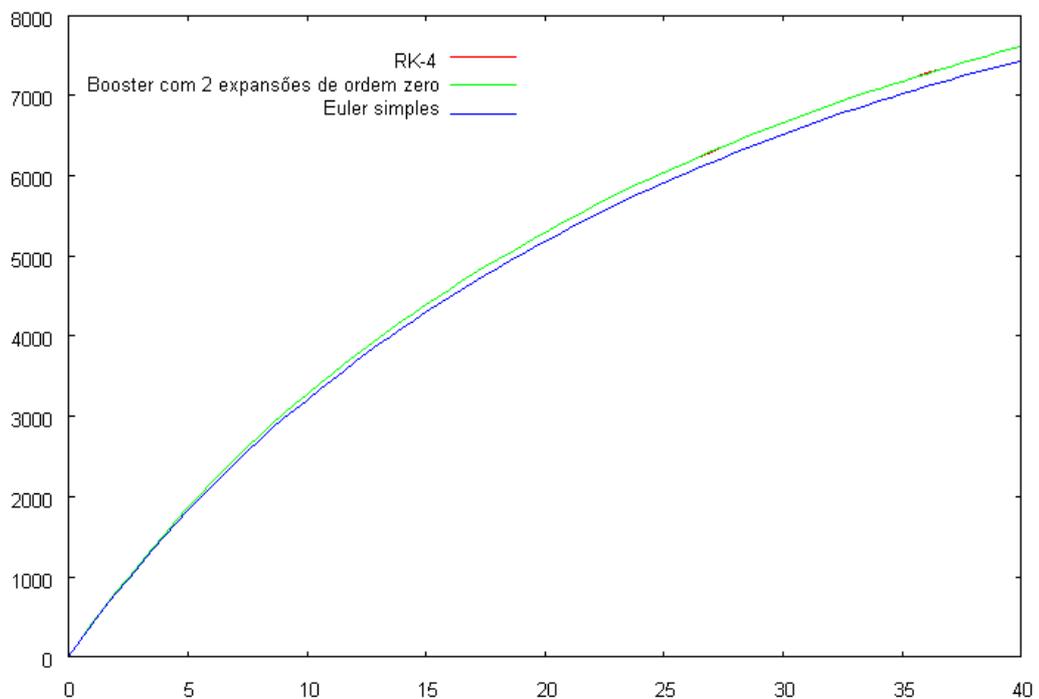


Figura 7.16: Gráfico *alcance*  $\times$  *tempo* nas mesmas condições do anterior.

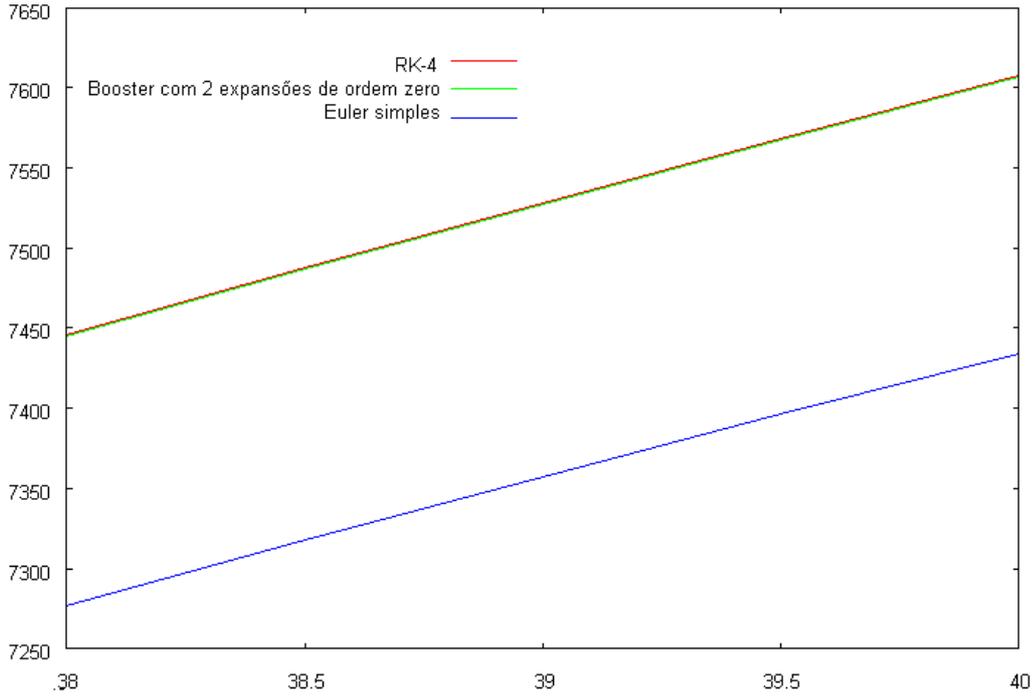


Figura 7.17: Detalhe da figura anterior.

Para uma estimativa da ordem do erro máximo de truncamento que surge ao se utilizar expansões assintóticas junto com métodos numéricos, precisa-se do erro para uma expansão de dois termos, o que leva a necessidade do cálculo de seu terceiro. Como só se está interessado na ordem, será resgatada uma de suas parcelas que foi desprezada durante a dedução da expansão, evitando intensa manipulação algébrica (um tratamento completo de todo o termo se encontra no apêndice B). Durante a dedução da expansão para velocidade vertical (ver apêndice B), chega-se ao seguinte passo:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dT} &= V(T)A(T) \approx \\ &\approx \left( ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} \right) \left( \operatorname{sen} \alpha_0 + \varepsilon \cos^2 \alpha_0 \frac{1 - ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n} \right) \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 0$ , para facilitar manipulação das expressões, e tomando somente o termo em  $\varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \left( \frac{((T+1)^{-2} - (T+1))}{3} \right) \left( \frac{1 - (T+1)^2}{2} \right) = \\ &= \varepsilon^2 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \left( \frac{(T+1)^{-2} - (T+1) - 1 + (T+1)^3}{6} \right) \end{aligned}$$

Uma característica importante dessa parcela é que ela possui um termo secular cúbico

e, com isso, ela perde a validade de forma mais rápida que a de primeira ordem, evidenciando que nem sempre uma expansão maior é melhor. Como o interesse está em valores de  $h \propto T \leq 1$ , aplica-se a expansão binomial:

$$O(R_{V_Y}) = O(\varepsilon^2) O(1 - 2h + 3h^2 + O(h^3) - 2 - h + 1 + 3h + 3h^2 + O(h^3)) = O(h^2\varepsilon^2)$$

$$O(R_{V_Y}) = O(\varepsilon^2) O(6h^2 + O(h^3)) = O(h^2\varepsilon^2)$$

Como a expansão para a altura é a integração da velocidade vertical em função de  $T \propto h$ , o erro local de truncamento para a altura é da ordem de:

$$O(R_Y) = O(h^3\varepsilon^2)$$

Resultados similares são obtidos com as expansões na direção horizontal. Enquanto for satisfeito que  $\varepsilon \ll 1$ , fica evidente que o uso do operador de *booster* reduz extremamente o erro de truncamento, sem o inconveniente de aumentar o erro de arredondamento, pois os valores de  $h$  não precisam ser muito pequenos. Caso  $h > \varepsilon$ , o erro de truncamento da expansão discretizada é menor que o de RK-4. Dependendo, porém, da duração total do trajeto, pode convir trocar uma expansão feita para alta velocidade por uma para baixa.

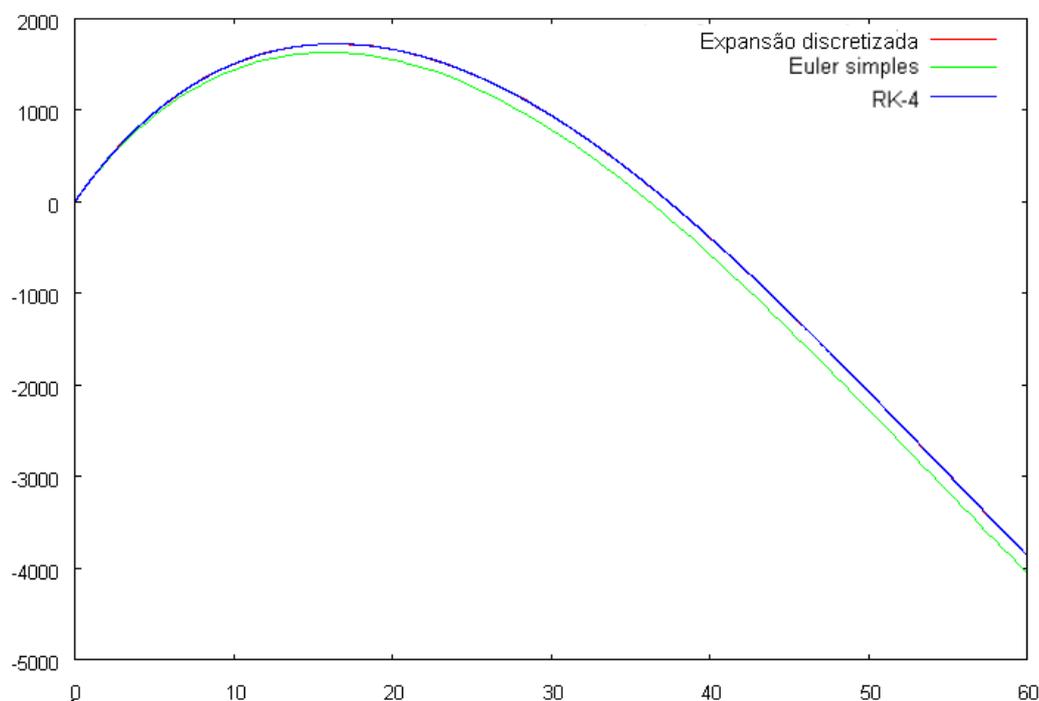


Figura 7.18: Gráfico *altura*  $\times$  tempo que confronta o método Runge-Kutta de 4ª ordem e passo  $h = 0,5$  com métodos expansão discretizada e Euler de mesmo passo.  $v_0 = 500$  m/s,  $\alpha_0 = 30^\circ$  e vôo subsônico.

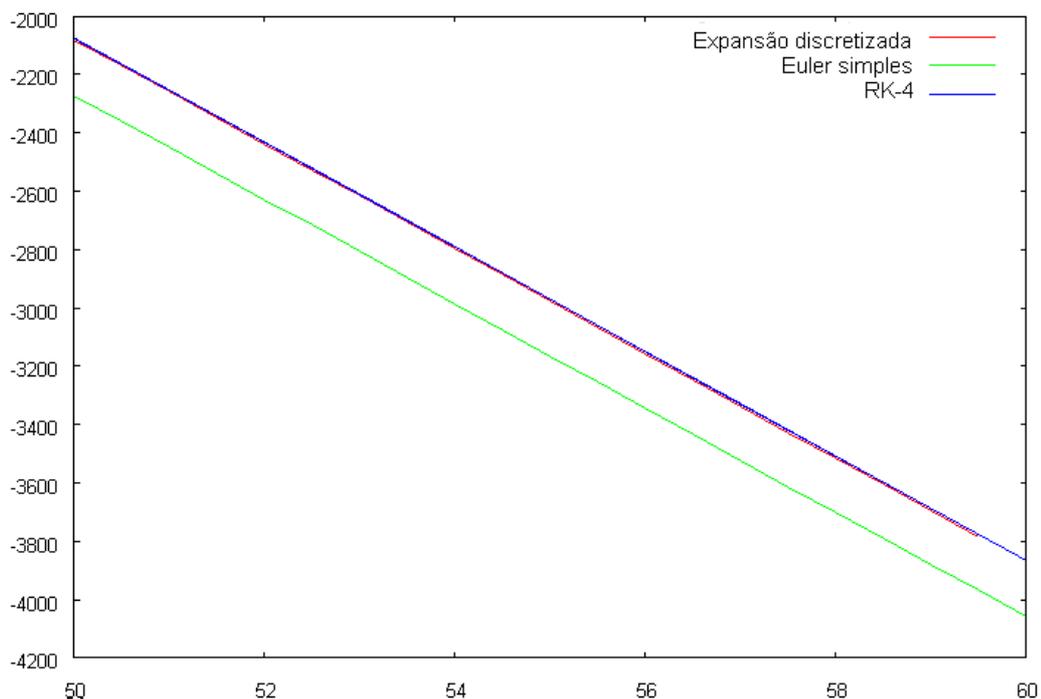


Figura 7.19: Detalhe da figura anterior.

O melhor instante para trocar o tipo de expansão utilizada requer que também se tenha o erro para expansões de baixa velocidade. Para o tiro supersônico, como visto nos capítulos 4 e 5, é inviável, em termos práticos, o uso de expansões de baixa velocidade. Restam as expansões para o voo subsônico, que devem ser comparadas em seus termos de segunda ordem. Então surge o problema de não ser possível determinar tais termos para as expansões de segunda ordem, pois, conforme o apêndice A, não é viável o cálculo de um termo quadrático em  $\varepsilon$  durante a dedução das expansões para baixa velocidade. Realizando um experimento numérico já na faixa subsônica ( $v_0 = 300m/s$ ), o resultado fornece propriedades distintas dependendo da escala em que é observado (figuras 7.20 e 7.21).

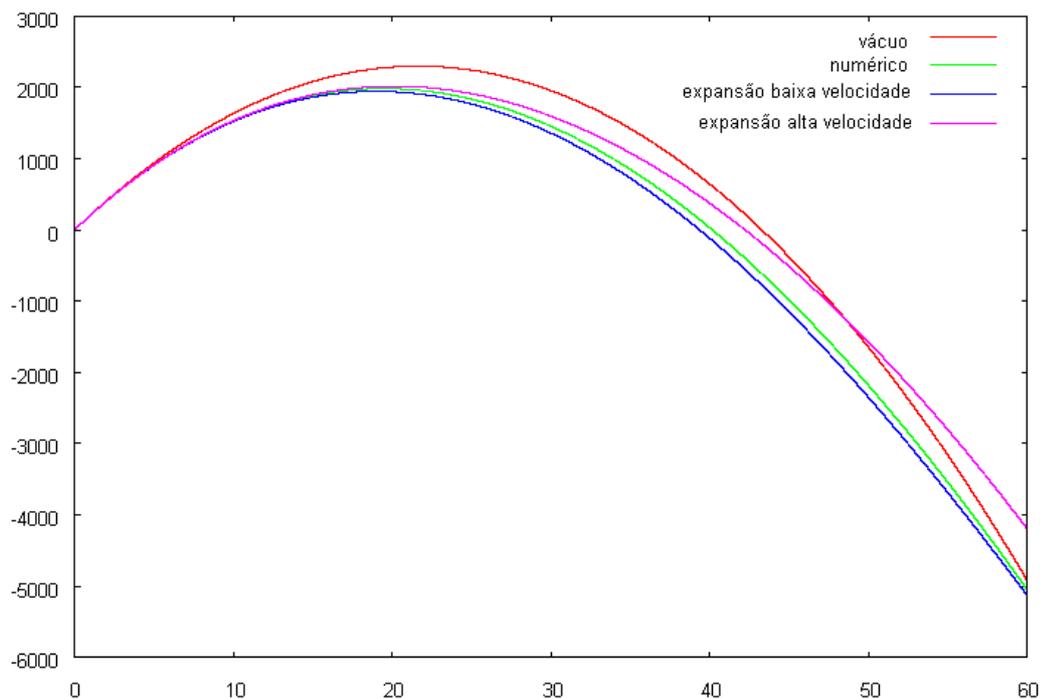


Figura 7.20: Gráficos da trajetória no vácuo, em meio resistivo com R-K4 de passo  $h = 0,5$  e expansões para baixa e alta velocidades.  $v_0 = 300 \text{ m/s}$ ,  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

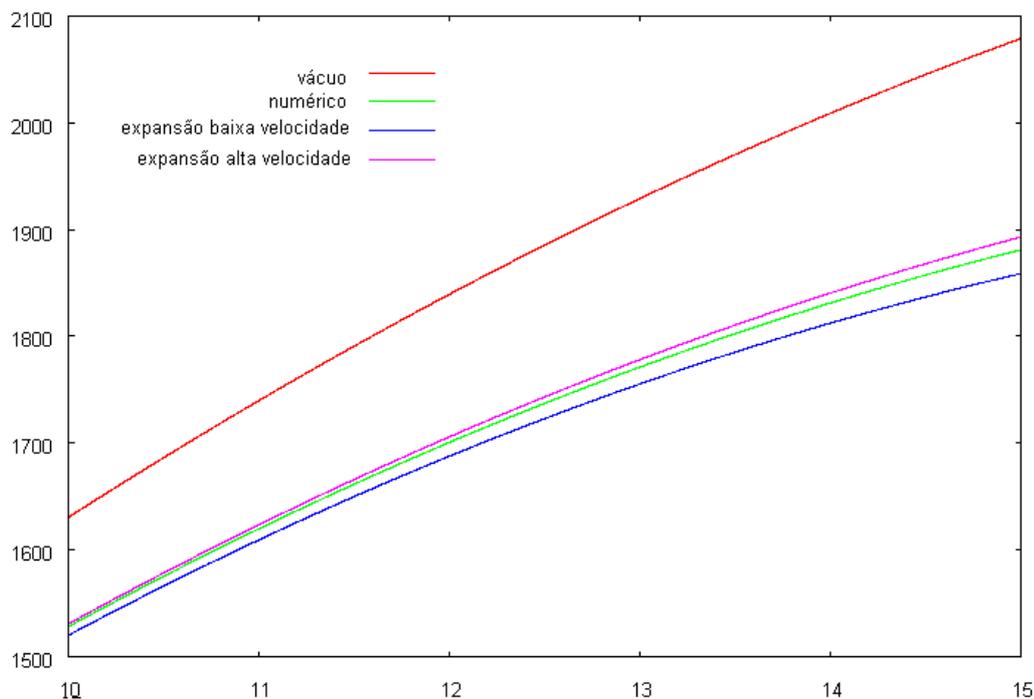


Figura 7.21: Detalhe da figura anterior.

Para faixa de cerca  $v = 300 \text{ m/s}$ , a expansão para alta velocidade já não representa tão eficientemente a altura, sendo muito mais sensível à mudança do sinal da derivada que

a expansão de baixa velocidade. Porém, o detalhamento da figura (7.21) revela que a separação entre o valor numérico se inicia primeiro para a esta última, apesar de evoluir mais rápido para as expansões de alta velocidade. Para faixa de cerca  $v = 300m/s$  com projétil 105 HE ( $C_D = 0,124$ ), as expansões para alta velocidade possuem um  $\bar{\varepsilon}_a = g/(kv^2) \simeq 2,4$ ; enquanto o  $\varepsilon$  adimensional equivalente para a expansões de baixa velocidade vale  $\bar{\varepsilon}_b = g/(kv^2) = 1/\bar{\varepsilon}_a \simeq 0,4$ . Mesmo sendo  $\bar{\varepsilon}_a > 1$ , ainda apresenta qualidade nessa faixa devido ao tempo adimensional  $h_a = hkv$  ser cerca de 75 vezes menor que o dimensional, mantendo a expansão dentro da validade por um grande período de  $t$ . Para a expansão de baixa velocidade, tem-se  $h_b = hg/v$ , o que dá um tempo cerca de 30 vezes menor. Levando em conta que o erro para a expansão de alta velocidade é  $O(R_Y) = O(h_a^3 \varepsilon_a^2)$ , pode-se cogitar que erro para a baixa velocidade seja de  $O(R_Y) = O(h_b^n \varepsilon_b^2)$ , com  $2 \leq n < 3$ . Mesmo tendo um parâmetro perturbado maior que a unidade, as expansões para alta velocidade teriam um erro local menor que as para baixa em valores de  $h_a$  não muito longos (afinal  $h_a < h_b$  e  $n < 3$ ). Assim, expansões para alta velocidade ainda podem ser usadas para valores em cerca de 200 - 300m/s. O próprio exemplo para a expansão discretizada (figuras 7.18 e 7.19) teve por velocidade mínima  $v = 217m/s$ .

# Capítulo 8

## Considerações Finais

D. Miller e M. Frenklach, em seu artigo [Miller e Frenklach 1983] , fizeram algumas considerações sobre as vantagens de sua aproximação empírica da matriz de sensibilidades para os parâmetros de uma reação química:

1. Estimativa empírica dos parâmetros é feita em regiões do domínio  $\Omega$  onde haja confiabilidade para dispensar integrações e diferenciações [numéricas];
2. Qualquer rotina numérica pode ser utilizada para a otimização;
3. Os experimentos numéricos necessários para otimizar a estimativa dos parâmetros são mais eficientes que os baseados em abordagem puramente linear;
4. O modelo empírico provê informação sobre as sensibilidades e sua interrelação em determinado ponto de  $\Omega$ .

Todas essas vantagens podem ser obtidas substituindo-se a palavra “empírico(a)” por “expansão assintótica”. As expansões aqui obtidas são todas singulares no domínio, devendo ter seu limite de validade estipulado. Quando considerada a atmosfera variável, constantes são determinadas por *shooting*. Uma expansão discretizada provê mais exatidão de um comportamento local que uma simples derivada primeira, o que lhe dá rendimento similar a métodos numéricos de 4ª ordem. Uma matriz de sensibilidades montada em cima de derivadas parciais de expansões fornece mais informações que a força bruta numérica como, por exemplo, a análise qualitativa da passagem do vôo supersônico para o subsônico. Caso haja a presença de funcionais lineares, uma matriz de sensibilidade pode ser usada como linear em faixa bem ampla ( $\pm 10\%$ ). A presença tais funcionais já fora deduzida por [McShane et al. 1953] e tem sido usada por artilheiros desde então, mas sua abordagem apenas os identifica, não permitindo acesso a eles de forma qualitativa.

Em suma, uma metodologia perturbativa complementada com alguns recursos numéricos se mostrou efetiva no melhor entendimento do estudo de caso de um projétil balístico. Mesmo no corretor de *booster*, quando os resultados dessa união se mostraram um tanto aquém do esperado, com um alto custo das versões completas do corretor frente ao RK-4, um aspecto importante da implementação de tal corretor foi avaliado. Isto será útil para problemas tratados comumente por diferenças finitas, com a possibilidade de uso de malhas maiores.

Vale ressaltar que foram feitas simplificações como o desprezo dos efeitos de magnus e sustentação, que não são significativos para trajetórias mais rasantes (tensas), mas que o seriam para ângulos de disparo elevados (maiores que  $45^\circ$ ). Este pode ser o motivo por que clássicos como [McShane et al. 1953] também não tratam desses efeitos, que só mereceram mais atenção a partir da década de 60 do século passado [McCoy 1999]. Fica como sugestão para trabalhos posteriores a inclusão desses efeitos aerodinâmicos ignorados. Outra possibilidade é o estudo de qualquer outro sistema que também permita o tratamento perturbativo em separado de suas equações, como explicado na seção (3.5).

## APÊNDICE A - Equações para Baixa Velocidade

### A.1 Expansões para o vôo subsônico

$$u'(t) = -\varepsilon u \sqrt{u^2 + w^2} \quad \text{aceleração horizontal}$$

$$w'(t) = -g - \varepsilon w \sqrt{u^2 + w^2} \quad \text{aceleração vertical}$$

Expandindo para a forma  $u(t) = \sum_{i=0} \varepsilon^i u_i(t)$  e  $w(t) = \sum_{i=0} \varepsilon^i w_i(t)$ :

$$u'_0 + \varepsilon u'_1 + \varepsilon^2 u'_2 \dots = -\varepsilon (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) \sqrt{(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^2 + (w_0 + \varepsilon w_1 + \dots)^2}$$

$$w'_0 + \varepsilon w'_1 + \varepsilon^2 w'_2 \dots = -g - \varepsilon (w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) \sqrt{(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^2 + (w_0 + \varepsilon w_1 + \dots)^2}$$

Para que se consiga prosseguir nos cálculos, é necessário reduzir as séries assintóticas de  $w$  e  $u$  do lado direito da igualdade a seu primeiro termo:

$$u'_0 + \varepsilon u'_1 \approx -\varepsilon u_0 \sqrt{u_0^2 + w_0^2}$$

$$w'_0 + \varepsilon w'_1 \approx -g - \varepsilon w_0 \sqrt{u_0^2 + w_0^2}$$

$$u'_0(t) = 0, w'_0(t) = -g \quad u_0(t) = v_0 \cos \alpha, \quad w_0(t) = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$u'_1(t) = -u_0 \sqrt{u_0^2 + w_0^2} = -v_0 \cos \alpha \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2}$$

$$w'_1(t) = -w_0 \sqrt{u_0^2 + w_0^2} = -(v_0 \sin \alpha - gt) \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2}$$

Por questões de edição, neste apêndice é considerado que  $\alpha \equiv \alpha_0$ . Integrando  $u'_1$  e  $w'_1$  em função do tempo:

#### - Integração de $u'_1$

$$\int -v_0 \cos \alpha \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2} dt = -v_0 \cos \alpha \left\{ t \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2} - \int \frac{t (-gv_0 \sin \alpha + g^2 t)}{\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2}} dt \right\}$$

$$\int -v_0 \cos \alpha \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2} dt =$$

$$\begin{aligned}
& -v_0 \cos \alpha \left\{ t \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} - \int \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} - \frac{v_0^2 - gv_0 t \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2}} dt \right\} \\
& 2 \int -v_0 \cos \alpha \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} dt = \\
& = -v_0 \cos \alpha \left\{ t \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} + \int \frac{v_0^2 - gv_0 t \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2}} dt \right\} \\
& 2 \int -v_0 \cos \alpha \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} dt = \\
& = -v_0 \cos \alpha \left\{ t \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{2g} \int \frac{-2gv_0 \operatorname{sen} \alpha + 2g^2 t}{\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2}} dt + \int \frac{v_0^2 - v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2}} dt \right\} \\
u_1(t) & = \int -v_0 \cos \alpha \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} dt = \\
& = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} + v_0^2 \cos^2 \alpha \int \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2}} dt \right\} \\
& = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \int \frac{g}{\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2}} dt \right\} \\
& = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \operatorname{arcsch} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) \right\} + C
\end{aligned}$$

Aplicando a condição inicial  $u_1(0) = 0$ :

$$\begin{aligned}
u_1(t) & = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \operatorname{arcsch} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) \right\} \\
& \quad - \frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \operatorname{arcsch} (\tan \alpha) \right\}
\end{aligned}$$

$$x_1(t) = \int u_1(t) dt. \text{ Assumindo } S \equiv \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2}$$

$$\begin{aligned}
\int x_1(t) dt & = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{1}{3g^2} S^3 + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \operatorname{arcsch} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} S + \right. \\
& \quad \left. + t \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + t \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \operatorname{arcsch} (\tan \alpha) \right\} + C
\end{aligned}$$

Aplicando a condição de contorno  $x_1(0) = 0$ :

$$\begin{aligned}
x_1(t) & = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{1}{3g^2} (S^3 - v_0^3) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \operatorname{arcsch} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \operatorname{arcsch} (\tan \alpha) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} (v_0 - S) + t \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + t \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \operatorname{arcsch} (\tan \alpha) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) & = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{1}{3g^2} (S^3 - v_0^3) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \operatorname{arcsch} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} (v_0 - S) + t \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \operatorname{arcsch} (\tan \alpha) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) & = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{1}{3g^2} (S^3 - v_0^3) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} (v_0 - S) + t \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \left[ \operatorname{arcsch} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) + \operatorname{arcsch} (\tan \alpha) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$x_1(t) = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{1}{3g^2} (S^3 - v_0^3) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} (v_0 - S) + t \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + \right. \\ \left. + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \left[ \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} + \sqrt{1 + \frac{g^2 t^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} \right) + \ln \left( \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} + \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} \right) \right] \right\}$$

$$x_1(t) = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{1}{3g^2} (S^3 - v_0^3) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} (v_0 - S) + t \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + \right. \\ \left. + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \left[ \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S}{v_0 \cos \alpha} \right) + \ln \left( \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha + v_0}{v_0 \cos \alpha} \right) \right] \right\}$$

$$x_1(t) = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{1}{3g^2} (S^3 - v_0^3) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} (v_0 - S) + t \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \ln \left( \frac{(gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S)(v_0 \operatorname{sen} \alpha + v_0)}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \right\}$$

$$x_1(t) = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{1}{3g^2} (S^3 - v_0^3) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} (v_0 - S) + t \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \ln \left( \frac{(gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S)(v_0 \operatorname{sen} \alpha + v_0)}{(v_0 + v_0 \operatorname{sen} \alpha)(v_0 - v_0 \operatorname{sen} \alpha)} \right) \right\}$$

$$x_1(t) = -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left\{ \frac{1}{3g^2} (S^3 - v_0^3) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2} (v_0 - S) + t \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S}{v_0(1 - \operatorname{sen} \alpha)} \right) \right\}$$

$$x_1(t) = \frac{v_0 \cos \alpha}{6g^2} (v_0^3 - S^3) + \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha}{2g^2} (S - v_0) - t \frac{v_0^3 \operatorname{sen} 2\alpha}{4g} - \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha}{2g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S}{v_0(1 - \operatorname{sen} \alpha)} \right)$$

### - Integração de $w_1'$

$$\int - (v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt) \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} dt = \int \frac{2g^2 t - 2gv_0 \operatorname{sen} \alpha}{2g} \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} dt$$

$$w_1(t) = \frac{1}{3g} (v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Aplicando a condição inicial  $w_1(0) = 0$ :

$$w_1(t) = \frac{1}{3g} \left\{ (v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}} - v_0^3 \right\}$$

$$y_1(t) = \int w_1(t) dt. \text{ Assumindo } S \equiv \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2}$$

$$y_1(t) = \int \frac{1}{3g} \left\{ (v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}} - v_0^3 \right\} dt = \frac{1}{3g} \left\{ \int S^3 dt - tv_0^3 \right\}$$

$$= \frac{1}{3g} \left\{ tS^3 - \frac{3}{2} \int t (2g^2 t - 2gv_0 \operatorname{sen} \alpha) S dt - tv_0^3 \right\}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{3g} \left\{ tS^3 - 3 \int (g^2 t^2 - gtv_0 \operatorname{sen} \alpha) S dt - tv_0^3 \right\}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{3g} \left\{ tS^3 - 3 \int (g^2 t^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + v_0^2) S dt - 3 \int (gtv_0 \operatorname{sen} \alpha - v_0^2) S dt - tv_0^3 \right\}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{3g} \left\{ tS^3 - 3 \int S^3 dt - \frac{3v_0 \operatorname{sen} \alpha}{2g} \int (2g^2 t - 2gv_0 \operatorname{sen} \alpha) S dt - 3 \int (v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - v_0^2) S dt - tv_0^3 \right\}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{3g} \left\{ tS^3 - 3 \left( \int S^3 - v_0^3 dt \right) - 3tv_0^3 - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} S^3 + 3v_0^2 \cos^2 \alpha \int S dt - tv_0^3 \right\}$$

$$y_1(t) + \frac{3}{3g} \left( \int S^3 - v_0^3 dt \right) = \frac{1}{3g} \left\{ tS^3 - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} S^3 + 3v_0^2 \cos^2 \alpha \int S dt - 4tv_0^3 \right\}$$

$$4y_1(t) = \frac{1}{3g} \left\{ S^3 \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) - 4v_0^3 t + 3v_0^2 \cos^2 \alpha \int S dt \right\}$$

Sabendo, da integração de  $u_1(t)$ , que  $\int S dt = \frac{1}{2} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) S + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \operatorname{arcsch} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) + C$ :

$$y_1(t) = \frac{1}{12g} \left\{ S^3 \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) + -4v_0^3 t + 3v_0^2 \cos^2 \alpha \left[ \frac{1}{2} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) S + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} \operatorname{arcsh} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) \right] + C' \right\}$$

Aplicando a condição inicial  $y_1(0) = 0$ :

$$y_1(t) = \frac{1}{12g} \left\{ S^3 \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) + -4v_0^3 t + 3v_0^2 \cos^2 \alpha \left[ \frac{1}{2} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) S + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} \operatorname{arcsh} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) \right] \right\} \\ + \frac{1}{12g} \left\{ \frac{v_0^4 \operatorname{sen} \alpha}{g} + \frac{3v_0^4 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{2g} + \frac{3v_0^4 \cos^4 \alpha}{2g} \operatorname{arcsh} (\tan \alpha) \right\}$$

Sabendo, da integração de  $u_1(t)$ , que  $\operatorname{arcsh} \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right) + \operatorname{arcsh} (\tan \alpha) = \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S}{v_0(1 - \operatorname{sen} \alpha)} \right)$ :

$$y_1(t) = \frac{1}{12g} \left\{ \frac{v_0^4 \operatorname{sen} \alpha}{g} + S^3 \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) - 4v_0^3 t + \frac{3v_0^4 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{2g} + \frac{3v_0^2 \cos^2 \alpha}{2} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) S + \frac{3v_0^4 \cos^4 \alpha}{2g} \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S}{v_0(1 - \operatorname{sen} \alpha)} \right) \right\}$$

Assim, todas as expansões de primeira ordem para o modelo balístico são:

$$u(t) = v_0 \cos \alpha + k \left\{ -\frac{v_0 \cos \alpha}{2} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) S - \frac{v_0^3 \operatorname{sen} 2\alpha}{4g} - \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha}{2g} \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S}{v_0(1 - \operatorname{sen} \alpha)} \right) \right\}$$

$$w(t) = v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt + \frac{k}{3g} \{ S^3 - v_0^3 \}$$

$$x(t) = tv_0 \cos \alpha + k \left\{ \frac{v_0 \cos \alpha}{6g^2} (v_0^3 - S^3) + \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha}{2g^2} (S - v_0) - t \frac{v_0^3 \operatorname{sen} 2\alpha}{4g} - \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha}{2g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S}{v_0(1 - \operatorname{sen} \alpha)} \right) \right\}$$

$$y(t) = tv_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{gt^2}{2} +$$

$$+ k \left\{ \frac{v_0^4 \operatorname{sen} \alpha}{12g^2} + \frac{S^3}{12g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) - \frac{v_0^3 t}{3g} + \frac{v_0^4 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{8g^2} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{8g} \left( t - \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right) S + \frac{v_0^4 \cos^4 \alpha}{8g^2} \ln \left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha + S}{v_0(1 - \operatorname{sen} \alpha)} \right) \right\}$$

onde

$$S \equiv \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2}$$

## A.2 Expansões para o vôo supersônico

- Integração de  $u'_1$

$$u_1(t) = \int -v_0 \cos \alpha \sqrt[4]{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} dt$$

Estão integral não tem forma fechada conhecida, porém sabendo que:

$$\int \sqrt[n]{(1+x^2)^m} dx = x {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{m}{n}; \frac{3}{2}; -x^2 \right)$$

e , com a devida substituição de variáveis:

$$\int^n \sqrt{\left(1 + \left(\frac{ax-b}{c}\right)^2\right)^m} dx = \frac{ax-b}{a} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{m}{n}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{ax-b}{c}\right)^2\right)$$

onde  ${}_2F_1(p_1, p_2; q, z)$  é uma função hipergeométrica gaussiana:

$${}_2F_1(p_1, p_2, q, z) = \sum_{k \geq 0} t_k = \sum_{k \geq 0} \frac{p_1^{\bar{k}} p_2^{\bar{k}} z^k}{q^{\bar{k}} k!}$$

e  $q^{\bar{k}} = q(q+1)(q+2)\dots(q+k-1)$ .

O índice à esquerda de  $F$  representa a quantidade de parâmetros do numerador (dois) e o à direita, os do denominador (um).

Para que a série hipergeométrica convirja é suficiente que, pelo teste da razão:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{t_{k+1}}{t_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{p_1^{\bar{k}+1} p_2^{\bar{k}+1} q^{\bar{k}} k! z^{k+1}}{p_1^{\bar{k}} p_2^{\bar{k}} q^{\bar{k}+1} (k+1)! z^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(p_1+k)(p_2+k)z}{(q+k)(k+1)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |z| < 1$$

O que neste caso significa  $v(\sin \alpha - \cos \alpha)/g < t < v(\sin \alpha + \cos \alpha)/g$ .

Reescrevendo a integral original:

$$u_1(t) = - \int v_0 \cos \alpha \sqrt[4]{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2} dt = -(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}} \int \sqrt[4]{1 + \frac{(gt - v_0 \sin \alpha)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} dt$$

Fica imediata a identificação:

$$u_1(t) = -(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}} \frac{(gt - v_0 \sin \alpha)}{g} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{gt - v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha}\right)^2\right) + C$$

Lembrando que, para a série  ${}_2F_1$  convergir, é necessário que  $(gt - v_0 \sin \alpha) / (v_0 \cos \alpha) < 1$ .

Usando a condição inicial  $u_1(0) = 0$ :

$$u_1(t) = -\frac{(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{g} \left( (gt - v_0 \sin \alpha) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{gt - v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha}\right)^2\right) + v_0 \sin \alpha {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha\right) \right)$$

$$\int x {}_2F_1(p_1, p_2; q, -x^2) = \int \sum_{k \geq 0} \frac{p_1^{\bar{k}} p_2^{\bar{k}} (-1)^k x^{2k+1}}{q^{\bar{k}} k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{p_1^{\bar{k}} p_2^{\bar{k}} (-1)^k x^{2k+2}}{q^{\bar{k}} k! (2k+2)} = -\frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \frac{p_1^{\bar{k}} p_2^{\bar{k}} (-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(k+1)!}$$

$$\int x {}_2F_1(p_1, p_2; q, -x^2) = -\frac{1}{2} \sum_{k-1 \geq 0} \frac{p_1^{\bar{k}-1} p_2^{\bar{k}-1} (-1)^k x^{2k}}{q^{\bar{k}-1} k!} = -\frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{p_1^{\bar{k}-1} p_2^{\bar{k}-1} (-1)^k x^{2k}}{q^{\bar{k}-1} k!}$$

$$\begin{aligned} \int x {}_2F_1(p_1, p_2; q, -x^2) &= -\frac{1}{2} \frac{q-1}{(p_1-1)(p_2-1)} \sum_{k \geq 1} \frac{(p_1-1)^{\bar{k}} (p_2-1)^{\bar{k}} (-1)^k x^{2k}}{(q-1)^{\bar{k}} k!} \\ &= \frac{q-1}{2(p_1-1)(p_2-1)} (1 - {}_2F_1(p_1-1, p_2-1, q-1, -x^2)) \end{aligned}$$

De posse deste resultado:

$$\int \frac{ax-b}{a} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{n}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{ax-b}{c}\right)^2\right) dx = \int \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{ax-b}{c}\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{n}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{ax-b}{c}\right)^2\right) \frac{a}{c} dx = \frac{c^2}{a^2} \int v {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{n}; \frac{3}{2}; -v^2\right) dv$$

$$\int \frac{ax-b}{a} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{n}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{ax-b}{c}\right)^2\right) dx = \frac{c^2}{a^2} \frac{c-1}{2(a-1)(b-1)} \left(1 - {}_2F_1\left(a-1, b-1, c-1, -\left(\frac{ax-b}{c}\right)^2\right)\right)$$

Assim,

$$x_1(t) = \int -\frac{(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{g} \left( (gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha}\right)^2\right) + \right. \\ \left. + v_0 \operatorname{sen} \alpha {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha\right) \right) dx \\ = -\frac{(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{g} \left( \int (gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha}\right)^2\right) dx + \right. \\ \left. + tv_0 \operatorname{sen} \alpha {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha\right) + C \right) \\ = -\frac{(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{g} \left\{ \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{5g^2} \left(1 - {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; -\left(\frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha}\right)^2\right)\right) \right\} + \\ \left. + tv_0 \operatorname{sen} \alpha {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha\right) + C \right\}$$

Aplicando a condição inicial  $x_1(0) = 0$ :

$$x_1(t) = -\frac{(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{g} \left\{ \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{5g^2} \left(1 - {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; -\left(\frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha}\right)^2\right)\right) - 1 + {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; -\tan^2 \alpha\right) \right\} \\ + tv_0 \operatorname{sen} \alpha {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha\right) \\ x_1(t) = -\frac{(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{g} \left\{ \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{5g^2} \left( {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; -\tan^2 \alpha\right) - {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; -\left(\frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha}\right)^2\right) \right) \right\} \\ + tv_0 \operatorname{sen} \alpha {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha\right) \right\}$$

### - Integração de $w_1'$

$$w_1(t) = \int -(v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt) \sqrt[4]{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} dt = \int \frac{2g^2 t - 2gv_0 \operatorname{sen} \alpha}{2g} \sqrt[4]{v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2} dt$$

$$w_1(t) = \frac{2}{5g} (v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2)^{\frac{5}{4}} + C$$

Aplicando a condição inicial  $w_1(0) = 0$ :

$$w_1(t) = \frac{2}{5g} \left\{ (v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2)^{\frac{5}{4}} - v_0^{\frac{5}{2}} \right\}$$

Assim,

$$y_1(t) = \int \frac{2}{5g} \left\{ (v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2)^{\frac{5}{4}} - v_0^{\frac{5}{2}} \right\} dx \\ = \int \frac{2}{5g} \left\{ (v_0 \cos \alpha)^{\frac{5}{2}} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{(gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)^5} - v_0^{\frac{5}{2}} \right\} dx \\ = \frac{2}{5g} \left\{ (v_0 \cos \alpha)^{\frac{5}{2}} (gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha}\right)^2\right) - tv_0^{\frac{5}{2}} + C \right\}$$

Aplicando a condição inicial  $y_1(0) = 0$ :

$$y_1(t) = \frac{2}{5g} \left\{ (v_0 \cos \alpha)^{\frac{5}{2}} \left( (gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (v_0 \operatorname{sen} \alpha) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha \right) \right) - tv_0^{\frac{5}{2}} \right\}$$

Portanto, as expansões de primeira ordem para o modelo balístico no caso supersônico são:

$$u(t) = v_0 \cos \alpha - k \left\{ \frac{(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{g} \left( (gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + v_0 \operatorname{sen} \alpha {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha \right) \right) \right\}$$

$$w(t) = v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt + \frac{2k}{5g} \left\{ (v_0^2 - 2gtv_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2)^{\frac{5}{4}} - v_0^{\frac{5}{2}} \right\}$$

$$x(t) = tv_0 \cos \alpha - k \frac{(v_0 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{g} \left\{ \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{5g^2} \left( {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; -\tan^2 \alpha \right) - {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; -\left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \right) \right) \right. \\ \left. + tv_0 \operatorname{sen} \alpha {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha \right) \right\}$$

$$y(t) = tv_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{gt^2}{2} + \\ + \frac{2k}{5g} \left\{ (v_0 \cos \alpha)^{\frac{5}{2}} \left( (gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\left( \frac{gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (v_0 \operatorname{sen} \alpha) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\tan^2 \alpha \right) \right) - tv_0^{\frac{5}{2}} \right\}$$

## APÊNDICE B - Equações para Alta Velocidade

### B.1 Fórmulas principais

A partir das equações adimensionais para velocidade  $v$  e ângulo  $A$ :

$$V(T) = \{(1-n)T+1\}^{\frac{1}{n-1}} + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n}$$

$$A(T) = \operatorname{sen} \alpha_0 + \varepsilon \cos^2 \alpha_0 \frac{1 - ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n}$$

serão calculadas as expansões de primeira ordem para as componentes cartesianas da velocidade e alcance (horizontais e verticais) para  $n$  genérico e, em seguida, para os casos de interesse como  $n = 0,5$  (supersônico),  $n = 0$  (subsônico) e  $n = 1$  (resistência linear).

#### Velocidade Horizontal

$$\frac{dX}{dT} = V(T) \sqrt{1 - A^2(T)} \approx V(T) \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha_0 - \varepsilon 2 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \frac{1 - ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n}}$$

$$\frac{dX}{dT} \approx V(T) \cos \alpha_0 \sqrt{1 - 2\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{1 - ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n}}$$

$$\frac{dX}{dT} \approx V(T) \cos \alpha_0 \left( 1 - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{1 - ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n} \right)$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \varepsilon \frac{\operatorname{sen} \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} \right) \left( 1 - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{1 - ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n} \right)$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \varepsilon \frac{\operatorname{sen} \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} \right)$$

$$- \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n}$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{\left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n} \right) \right)$$

Para  $n = 0$ :

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{1}{T+1} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{\left( \frac{1}{(T+1)^2} - (T+1) \right)}{3} - \frac{1}{T+1} - (T+1) \right) \right)$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{1}{T+1} + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0}{6} \left( \frac{2}{(T+1)^2} - 2(T+1) - \frac{3}{T+1} + 3(T+1) \right) \right)$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{1}{T+1} + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0}{6} \left( \frac{2}{(T+1)^2} - \frac{3}{T+1} + (T+1) \right) \right)$$

Para  $n = 0,5$ :

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{\left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n} \right) \right)$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{\left( \left(\frac{1}{2}T+1\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}T+1\right) \right)}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}T+1\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}T+1\right)}{\frac{3}{2}} \right) \right)$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^3} - \frac{(T+2)}{4} - \frac{4}{(T+2)^2} - \frac{(T+2)}{2} \right) \right)$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^3} - \frac{(T+2)}{4} - \frac{8}{3(T+2)^2} + \frac{(T+2)}{3} \right) \right)$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^3} + \frac{(T+2)}{12} - \frac{8}{3(T+2)^2} \right) \right)$$

### Alcance Horizontal

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &\approx \int \cos \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{\left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n} \right) \right) dT \end{aligned}$$

Com  $X_0(0) = \cos \alpha_0$  e  $X_1(0) = 0$ :

$$\begin{aligned} X &\approx \cos \alpha_0 \left( \frac{1}{n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}}}{n} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{\left( -2(1-n)((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - T((1-n)T+2)+2 \right)}{2(3-2n)} + \frac{2((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}} + nT((1-n)T+2)-2}{2n(2-n)} \right) \right) \end{aligned}$$

Para  $n = 0$ . Neste caso, a fórmula deduzida para o caso geral de  $n$  não pode ser aplicada. Faz-se a integração da velocidade.

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 \left( \frac{1}{T+1} + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0}{6} \left( \frac{2}{(T+1)^2} - \frac{3}{T+1} + (T+1) \right) \right)$$

$$X \approx \int \cos \alpha_0 \left( \frac{1}{T+1} + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0}{6} \left( \frac{2}{(T+1)^2} - \frac{3}{T+1} + (T+1) \right) \right) dT$$

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( \ln(1+T) + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0}{6} \left( -\frac{2}{T+1} - 3 \ln(1+T) + \left( \frac{T^2}{2} + T \right) + C \right) \right)$$

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( \ln(1+T) + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0}{12} \left( -\frac{4}{T+1} - 6 \ln(1+T) + (T^2 + 2T) + 2C \right) \right)$$

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( \ln(1+T) + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0}{12} \left( -\frac{4}{T+1} - 6 \ln(1+T) + (T^2 + 2T) + 4 \right) \right)$$

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( \ln(1+T) + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0}{12} \left( -\frac{4}{T+1} - 6 \ln(1+T) + (T+1)^2 + 3 \right) \right)$$

Para  $n = 0,5$ :

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( 2 - \frac{4}{T+2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( -\frac{2}{(T+2)^2} - \frac{\frac{T^2-2T-2}{2}}{4} + \frac{8}{3(T+2)} + \frac{2}{3} \left( \frac{T^2}{4} + T + 1 \right) - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \right) \right)$$

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( 2 - \frac{4}{T+2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( -\frac{2}{(T+2)^2} - \frac{(T+2)^2-8}{8} + \frac{8}{3(T+2)} + \frac{(T+2)^2-12}{6} \right) \right)$$

$$X \approx \cos \alpha_0 \left( 2 - \frac{4}{T+2} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( -\frac{2}{(T+2)^2} + \frac{(T+2)^2-24}{24} + \frac{8}{3(T+2)} \right) \right)$$

### Velocidade Vertical

$$\frac{dY}{dT} = V(T)A(T) \approx$$

$$\approx \left( ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 \left( ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1) \right)}{3-2n} \right) \left( \operatorname{sen} \alpha_0 + \varepsilon \cos^2 \alpha_0 \frac{1 - ((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n} \right)$$

$$\frac{dY}{dT} \approx \operatorname{sen} \alpha_0 ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n} + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{3-2n} \right)$$

Para  $n = 0$ :

$$\frac{dY}{dT} \approx \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{1}{T+1} + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \frac{\frac{1}{T+1} - (T+1)}{2} + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \frac{\frac{1}{(T+1)^2} - (T+1)}{3} \right)$$

$$\frac{dY}{dT} \approx \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{1}{T+1} + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \left( \frac{1}{2(T+1)} - \frac{(T+1)}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \left( \frac{1}{3(T+1)^2} - \frac{(T+1)}{3} \right) \right)$$

Para  $n = 0,5$ :

$$\frac{dY}{dT} \approx \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{4}{(T+2)^2} + \varepsilon \left( \frac{2}{3} \cos^2 \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^2} - \frac{T+2}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \left( \frac{4}{(T+2)^3} - \frac{T+2}{4} \right) \right)$$

### Alcance Vertical

$$Y \approx \int \operatorname{sen} \alpha_0 ((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{2-n} + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \frac{((1-n)T+1)^{\frac{2-n}{n-1}} - ((1-n)T+1)}{3-2n} \right) dT$$

Com  $Y_0(0) = \operatorname{sen} \alpha_0$  e  $Y_1(0) = 0$ :

$$Y \approx \operatorname{sen} \alpha_0 \left( \frac{1}{n} - \frac{((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}}}{n} \right) + \varepsilon \left( -\cos^2 \alpha_0 \frac{2((1-n)T+1)^{\frac{n}{n-1}} + nT((1-n)T+2) - 2}{2n(2-n)} + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \frac{2(1-n)((1-n)T+1)^{\frac{1}{n-1}} + T((1-n)T+2) + 2}{2(3-2n)} \right)$$

Para  $n = 0$ . A fórmula para  $n$  qualquer deixa de valer para o primeiro termo. Faz-se integração.

$$Y \approx \int \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{1}{T+1} + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \left( \frac{1}{2(T+1)} - \frac{(T+1)}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \left( \frac{1}{3(T+1)^2} - \frac{(T+1)}{3} \right) \right) dT$$

$$Y \approx \operatorname{sen} \alpha_0 \ln(T+1) + \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \left( \frac{1}{2} \ln(T+1) - \frac{(T+1)^2-1}{4} \right) - \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \left( \frac{1}{3(T+1)} + \frac{(T+1)^2-3}{6} \right) \right)$$

Para  $n = 0,5$ :

$$Y \approx \operatorname{sen} \alpha_0 \left( 2 - \frac{4}{T+2} \right) - \varepsilon \left( \cos^2 \alpha_0 \left( \frac{8}{3(T+2)} + \frac{(T+2)^2-12}{6} \right) + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \left( \frac{2}{(T+2)^2} + \frac{(T+2)^2-8}{8} \right) \right)$$

## B.2 Fórmulas para meio resistivo linear ( $n = 1$ )

Neste caso, nem as fórmulas para a velocidade continuam válidas (há divisão por zero), o que leva a necessidade de recalculas as expansões desde o começo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dT} = -V - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \\ V \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -\varepsilon \cos^2 \alpha \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dT} = -V - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \\ V \frac{d(\operatorname{sen} \alpha)}{dt} = \varepsilon (\operatorname{sen}^2 \alpha - 1) \end{array} \right.$$

Realizando as expansões formais:

$$V(T) = V_0(T) + \varepsilon V_1(T) + O(\varepsilon^2)$$

$$\operatorname{sen} \alpha(T) = A_0(T) + \varepsilon A_1(T) + O(\varepsilon^2)$$

e desprezando os termos de ordem maior o igual a  $O(\varepsilon^2)$ , tem-se:

$$\frac{dV_0}{dT} + \varepsilon \frac{dV_1}{dT} \approx -(V_0 + \varepsilon V_1) - \varepsilon (A_0 + \varepsilon A_1)$$

$$\frac{dV_0}{dT} + \varepsilon \frac{dV_1}{dT} \approx -V_0 - \varepsilon V_1 - \varepsilon A_0 = -V_0 - \varepsilon (V_1 + A_0)$$

e

$$(V_0 + \varepsilon V_1) \left( \frac{dA_0}{dT} + \varepsilon \frac{dA_1}{dT} \right) \approx \varepsilon \left( (A_0 + \varepsilon A_1)^2 - 1 \right)$$

$$V_0 \frac{dA_0}{dT} + \varepsilon \left( V_1 \frac{dA_0}{dT} + V_0 \frac{dA_1}{dT} \right) \approx \varepsilon (A_0^2 + 2\varepsilon A_0 A_1 - 1)$$

O que nos gera os seguintes sistemas diferenciais (descartando o termo em  $\varepsilon^2$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_0}{dT} = -V_0 \\ V_0 \frac{dA_0}{dT} = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_1}{dT} = -V_1 - A_0 \\ V_1 \frac{dA_0}{dT} + V_0 \frac{dA_1}{dT} = A_0^2 - 1 \end{array} \right.$$

$$V_0(0) = 1, A_0(0) = \text{sen } \alpha_0 \quad V_1(0) = 0, A_1(0) = 0$$

A solução para o primeiro sistema é:

$$V_0(T) = e^{-T} \quad \text{e} \quad A_0(T) = \text{sen } \alpha_0$$

Substituindo no segundo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_1}{dT} = -V_1 - \text{sen } \alpha_0 \\ e^{-T} \frac{dA_1}{dT} = -\cos^2 \alpha_0 \end{array} \right.$$

$$V_1(0) = 0, A_1(0) = 0$$

Que fornece:

$$V_1(T) = e^{-T} \text{sen } \alpha_0 - \text{sen } \alpha_0 \quad \text{e} \quad A_1(T) = \cos^2 \alpha_0 (1 - e^T)$$

Então:

$$V(T) = e^{-T} + \varepsilon \text{sen } \alpha_0 (e^{-T} - 1)$$

$$\text{sen } \alpha(T) = \text{sen } \alpha_0 + \varepsilon \cos^2 \alpha_0 (1 - e^T)$$

### Velocidade Horizontal

$$\frac{dX}{dT} = V(T) \sqrt{1 - A^2(T)} \approx V(T) \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha_0 - \varepsilon 2 \text{sen } \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 - e^T)}$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 V(T) \sqrt{1 - 2\varepsilon \text{sen } \alpha_0 (1 - e^T)} \approx \cos \alpha_0 V(T) (1 - \varepsilon \text{sen } \alpha_0 (1 - e^T))$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 (e^{-T} + \varepsilon \text{sen } \alpha_0 (e^{-T} - 1)) (1 + \varepsilon \text{sen } \alpha_0 (e^T - 1))$$

$$\frac{dX}{dT} \approx \cos \alpha_0 (e^{-T} - \varepsilon e^{-T} \operatorname{sen} \alpha_0 (e^T - 1) - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 (e^{-T} - 1))$$

$$\frac{dX}{dT} \approx e^{-T} \cos \alpha_0$$

### Velocidade Vertical

$$\frac{dY}{dT} = V(T)A(T) \approx (e^{-T} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 (e^{-T} - 1)) (\operatorname{sen} \alpha_0 + \varepsilon \cos^2 \alpha_0 (1 - e^T))$$

$$\frac{dY}{dT} \approx e^{-T} \operatorname{sen} \alpha_0 + \varepsilon \operatorname{sen}^2 \alpha_0 (e^{-T} - 1) + \varepsilon e^{-T} \cos^2 \alpha_0 (1 - e^T)$$

$$\frac{dY}{dT} \approx e^{-T} \operatorname{sen} \alpha_0 + \varepsilon \operatorname{sen}^2 \alpha_0 (e^{-T} - 1) + \varepsilon \cos^2 \alpha_0 (e^{-T} - 1)$$

$$\frac{dY}{dT} \approx e^{-T} \operatorname{sen} \alpha_0 + \varepsilon (e^{-T} - 1)$$

Redimensionalizando as equações para a velocidade com  $v = v_0 V$  e  $t = T / (k v_0^{1-1}) = T/k$ , obtém-se:

$$\frac{dx}{dt} \approx v_0 e^{-kt} \cos \alpha_0$$

e

$$\frac{dy}{dt} \approx v_0 \left\{ e^{-kt} \operatorname{sen} \alpha_0 + \frac{g}{k v_0} (e^{-kt} - 1) \right\} = \frac{1}{k} \left\{ (g + k v_0 \operatorname{sen} \alpha_0) e^{-kt} - g \right\}$$

que são as soluções analíticas exatas para o meio com resistência linear. Qualquer expansão de ordem mais elevada produziria um erro maior ou igual que o da primeira ordem. As fórmulas para o alcance saem por simples integração e  $x(0) = y(0) = 0$ :

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

e

$$y = \frac{1}{k} \left\{ \frac{g}{k} - \frac{(g + k v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)}{k} e^{-kt} - gt + v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \right\}$$

### B.3 Determinação da ordem de grandeza para o erro da expansão para o vôo subsônico

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = -V^2 - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \\ V \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -\varepsilon \cos^2 \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dV}{dT} = -V^2 - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \\ V \frac{d(\operatorname{sen} \alpha)}{dt} = \varepsilon (\operatorname{sen}^2 \alpha - 1) \end{cases}$$

Realizando as expansões formais:

$$V(T) = V_0(T) + \varepsilon V_1(T) + \varepsilon^2 V_2(T) + O(\varepsilon^3)$$

$$\operatorname{sen} \alpha(T) = A_0(T) + \varepsilon A_1(T) + \varepsilon A_2(T) + O(\varepsilon^3)$$

Desprezando os termos de ordem maior o igual a  $O(\varepsilon^3)$ , tem-se:

$$\frac{dV_0}{dT} + \varepsilon \frac{dV_1}{dT} + \varepsilon^2 \frac{dV_2}{dT} \approx - (V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2)^2 - \varepsilon (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2)$$

$$\frac{dV_0}{dT} + \varepsilon \frac{dV_1}{dT} + \varepsilon^2 \frac{dV_2}{dT} \approx -V_0^2 - 2\varepsilon V_0 V_1 - \varepsilon^2 V_1^2 - 2\varepsilon^2 V_0 V_2 - \varepsilon A_0 - \varepsilon^2 A_1$$

$$\frac{dV_0}{dT} + \varepsilon \frac{dV_1}{dT} + \varepsilon^2 \frac{dV_2}{dT} \approx -V_0^2 - \varepsilon (2V_0 V_1 + A_0) - \varepsilon^2 (V_1^2 + 2V_0 V_2 + A_1)$$

e

$$(V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2) \left( \frac{dA_0}{dT} + \varepsilon \frac{dA_1}{dT} + \varepsilon^2 \frac{dA_2}{dT} \right) \approx \varepsilon \left( (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2)^2 - 1 \right)$$

$$V_0 \frac{dA_0}{dT} + \varepsilon \left( V_1 \frac{dA_0}{dT} + V_0 \frac{dA_1}{dT} \right) + \varepsilon^2 \left( V_0 \frac{dA_2}{dT} + V_1 \frac{dA_1}{dT} + V_2 \frac{dA_0}{dT} \right) \approx \varepsilon (A_0^2 + \varepsilon^2 A_1^2 + 2\varepsilon A_0 A_1 + \varepsilon^2 A_0 A_2 - 1)$$

$$V_0 \frac{dA_0}{dT} + \varepsilon \left( V_1 \frac{dA_0}{dT} + V_0 \frac{dA_1}{dT} \right) + \varepsilon^2 \left( V_0 \frac{dA_2}{dT} + V_1 \frac{dA_1}{dT} + V_2 \frac{dA_0}{dT} \right) \approx \varepsilon (A_0^2 - 1) + \varepsilon^2 (2A_0 A_1)$$

O que nos gera os seguintes sistemas diferenciais (lembrando que  $dA_0/dT = 0$ ):

$$\begin{cases} \frac{dV_0}{dT} = -V_0^2 \\ V_0 \frac{dA_0}{dT} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dV_1}{dT} = -2V_0 V_1 - A_0 \\ V_1 \frac{dA_0}{dT} + V_0 \frac{dA_1}{dT} = A_0^2 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dV_2}{dT} = -V_1^2 - 2V_0 V_2 - A_1 \\ V_0 \frac{dA_2}{dT} + V_1 \frac{dA_1}{dT} = 2A_0 A_1 \end{cases}$$

$$V_0(0) = 1, A_0(0) = \operatorname{sen} \alpha_0$$

$$V_1(0) = 0, A_1(0) = 0$$

$$V_2(0) = 0, A_2(0) = 0$$

A solução para o primeiro sistema é:

$$V_0(T) = \frac{1}{T+1} \quad \text{e} \quad A_0(T) = \operatorname{sen} \alpha_0$$

Para o segundo:

$$V_1(T) = \frac{\operatorname{sen} \alpha_0 \left( (T+1)^{-2} - (T+1) \right)}{3} \quad e \quad A_1(T) = \cos^2 \alpha_0 \frac{1 - (T+1)^2}{2}$$

Substituindo no terceiro:

$$\frac{dV_2}{dT} = -\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_0 \left( (T+1)^{-4} - 2(T+1)^{-1} + (T+1)^2 \right)}{9} - \frac{2V_2}{T+1} - \cos^2 \alpha_0 \frac{1 - (T+1)^2}{2}$$

Cuja solução para a condição inicial  $V_2(0) = 0$  é:

$$V_2 = \frac{1}{90} \left( -\operatorname{sen}^2 \alpha_0 \left( 2(T+1)^3 - 10 + \frac{18}{(T+1)^2} - \frac{10}{(T+1)^3} \right) + \cos^2 \alpha_0 \left( 9(T+1)^3 - 15(T+1) + \frac{6}{(T+1)^2} \right) \right)$$

Analisando a ordem de cada parcela em função de  $T$ :

$$\begin{aligned} 2(T+1)^3 - 10 + \frac{18}{(T+1)^2} &= (2 + 6T + 6T^2 + 2T^3) - 10 + 18(1 - 2T + 3T^2 - 4T^3 + O(T^4)) - \\ &\quad - 10(1 - 3T + 6T^2 - 10T^3 + O(T^4)) \\ &= (2 - 10 + 18 + 10) + (6 - 36 + 30)T + (6 + 54 - 60)T^2 + (2 - 72 + 100)T^3 + \\ &\quad + O(T^4) \\ &= 30T^3 + O(T^4) = O(T^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9(T+1)^3 - 15(T+1) + \frac{6}{(T+1)^2} &= (9 + 27T + 27T^2 + 9T^3) - 15(T+1) + 6(1 - 2T + 3T^2 - 4T^3 + O(T^4)) \\ &= (9 - 15 + 6) + (27 - 15 - 12)T + (27 - 24)T^2 + (9 - 24)T^3 + \\ &\quad O(T^4) \\ &= 3T^2 - 15T^3 + O(T^4) = O(T^2) \end{aligned}$$

Portanto,  $V_2(T) = O(T^2)$ .

Para o cálculo de  $A_2(T)$ ,  $A_2(0) = 0$ :

$$\begin{aligned} V_0 \frac{dA_2}{dT} + V_1 \frac{dA_1}{dT} &= 2A_0 A_1 \\ \frac{1}{T+1} \frac{dA_2}{dT} + \frac{2\operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \left( (T+1)^{-1} - (T+1)^2 \right)}{3} &= \operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 - (T+1)^2) \\ \frac{dA_2}{dT} &= \operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \left( (T+1) - (T+1)^3 \right) - \frac{2\operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 - (T+1)^3)}{3} \end{aligned}$$

Resolvendo por integração imediata:

$$A_2(T) = -\operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \left( \frac{T^4}{12} + \frac{T^3}{3} \right)$$

Logo,  $A_2(T) = O(T^3)$ .

A expansão em segunda ordem para a velocidade vertical é obtida da forma:

$$V_Y(T) = (V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2)(A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2) = V_0 A_0 + \varepsilon(A_0 V_1 + A_1 V_0) + \varepsilon^2(A_2 V_0 + A_1 V_1 + A_0 V_2)$$

Determinado a ordem para cada termo em  $\varepsilon^2$ , em seqüência:

$$A_2(T) = O(T^3)$$

$$V_0(T) = O(1)$$

$$\begin{aligned} A_1(T) &= \text{sen } \alpha_0 ((T+1)^{-2} - (T+1)) / 3 = \text{sen } \alpha_0 ((1 - 2T + O(T^2)) - (T+1)) / 3 = \\ &= \text{sen } \alpha_0 (-3T + O(T^2)) / 3 = O(T) \end{aligned}$$

$$V_1(T) = \cos^2 \alpha_0 (1 - (T+1)^2) / 2 = \cos^2 \alpha_0 (T^2 - 2T) / 2 = O(T)$$

$$A_0(T) = O(1)$$

$$V_2(T) = O(T^{-2})$$

Assim,

$$O(V_{Y2}) = O(T^3)O(1) + O(T)O(T) + O(1)O(T^2) = O(T^2)$$

Portanto, o erro para a expansão de primeira ordem da velocidade tem a grandeza de  $\varepsilon^2 O(T^2) = O(\varepsilon^2 T^2)$  e para a altura é  $O(\varepsilon^2 T^3)$ , com  $T < 1$ .

# Referências

- [Boyce e DiPrima 1994] Boyce, W. C. e DiPrima, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno**. 5<sup>a</sup>. ed. : LTC, 1994. ISBN 85-2161499-3.
- [van Dyke 1975] van Dyke, M. **Methods in Fluid Mechanics**. Annotated edition. : The Parabolic Press, 1975. ISBN 0-915760-01-0.
- [Fazuri e Matos 1998] Fazuri, J. e Matos, J. M. O. **Estudo Numérico do Movimento de Projéteis**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 20, n. 4, p. 327–338, dezembro 1998.
- [Finley e Anderson 2005] Finley, D. B. e Anderson, D. A. **Application of Perturbation Theory for Calculation of Flowfield Sensitivity from Euler Equations on Cartesian Grids**. In: *17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, junho, 2005.
- [Gelfand e Fomin 2000] Gelfand, I. M. e Fomin, S. **Calculus of Variations**. : Dover Publications, 2000. ISBN 0-486-41448-5.
- [Golub e Ortega 1992] Golub, G. H. e Ortega, J. M. **Scientific Computing and Differential Equations**. : Academic Press, Inc, 1992. ISBN 0-12-289255-0.
- [Hamming 1986] Hamming, R. L. **Numerical Methods for Scientists and Engineers**. 2<sup>a</sup>. ed. : Dover Publications, 1986. ISBN 0-486-65241-6.
- [Johnson 2005] Johnson, R. S. **Singular Perturbation Theory**. : Springer Science + Business Media, Inc., 2005. ISBN 0-387-23300-1.
- [McCoy 1999] McCoy, R. L. **Modern Exterior Ballistics**. : Schiffer Military History, 1999. ISBN 0-7643-0720-7.
- [McShane et al. 1953] McShane, E. J.; Kelley, J. L. e Reno, F. V. **Exterior Ballistics**. : University of Denver Press, 1953.
- [de Mestre 1990] de Mestre, N. **The Mathematics of Projectiles in Sport**. : Cambridge University Press, 1990. ISBN 0-521-39857-6.
- [de Mestre 1991] de Mestre, N. **A Mathematical Analysis of Wind Effects on a Long-Jumper**. *Journal of the Australian Mathematican Society*, n. 28, p. 246–259, 1991.
- [Miller e Frenklach 1983] Miller, D. e Frenklach, M. **Sensitivity Analysis and Parameter Estimation in Dynamic Modeling of Chemical Kinetics**. *Internation Journal of Chemical Kinetics*, v. 15, p. 677–696, 1983.

- 
- [Natesan e Ramanujam 1999] Natesan, S. e Ramanujam, N. **Booster Method for Singularly-Perturbed One-Dimensional Convection-Difusion Neumann Problems**. *Journal of Optmization Theory and Applications*, v. 99, p. 51–72, 1999.
- [Saltelli et al. 2004] Saltelli, A.; Chan, K. e Scott, E. M. **Sensitivity Analysis**. : John Wiley and Sons Ltd, 2004. ISBN 0-471-99892-3.
- [Simmonds e Mann. 1997] Simmonds, J. G. e Mann., J. E. **A First Look at Perturbation Theory**. 2<sup>a</sup>. ed. : Dover Publications, 1997. ISBN 0-486-67551-3.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)