REGINALDO DEMARQUE DA ROCHA

EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ EM DOMÍNIOS CILÍNDRICOS E NÃO-CILÍNDRICOS

Dissertação apresentada por **Reginaldo Demarque da Rocha** ao Curso de Mestrado em Matemática - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais.

Orientador: Juan Bautista Límaco Ferrel

Niterói
2008

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

R672 Rocha, Reginaldo Demarque da
Equação de Boussinesq em domínios cilíndricos e não cilíndricos/ Reginaldo Demarque da Rocha. - Niterói, RJ: [s.n.], 2008.
91f.
Orientador: Juan Bautista Límaco Ferrel
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, 2008.

1.Equação de Boussinesq. 2. Domínio não-cilíndrico. 3. Comportamento Assintótico. I. Título.

CDD: 515.35

REGINALDO DEMARQUE DA ROCHA

EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ EM DOMÍNIOS CILÍNDRICOS E NÃO-CILÍNDRICOS

Dissertação apresentada por **Reginaldo Demarque da Rocha** ao Curso de Mestrado em Matemática - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais.

Aprovada em: 13/03/2008

Banca Examinadora

Prof$^{\underline{o}}$. Juan Bautista Límaco Ferrel - Orientador

Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof$^{\underline{o}}$. Luiz Adauto Medeiros - Membro

Doutor - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof$^{\underline{o}}$. Olímpio Hiroshi Miyagaki - Membro

Doutor - Universidade Federal de Viçosa

Prof$^{\underline{o}}$. Haroldo Clark - Membro

Doutor - Universidade Federal Fluminense

Niterói

2008

Agradecimentos

À minha mãe pelas lições de caráter, comprometimento e responsabilidade fundamentais para a realização de qualquer trabalho.

Ao solícito Profº Dr. Juan Límaco pela excelente orientação, incentivo e confiança em mim depositados.

Aos professores da banca Dr. Luiz Adauto Medeiros, Dr. Haroldo Clark e Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki pela participação.

Aos meus amigos do mestrado pelo companheirismo em todos os momentos, pois muito mais que excelentes matemáticos são formidáveis amigos.

Aos meus irmãos e minha namorada pelo carinho e imensurável apoio, que mesmo estando longe sempre estiveram perto.

Não podendo mencionar a todos, gostaria ainda de agradecer ainda aos professores e amigos que contribuiram de forma substancial para minha formação acadêmica.

Enfim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema misto unidimensional associado à Equação de Boussinesq em um domínio não cilíndrico de $\mathbb{R}^2$ com um termo dissipativo

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - (u(x,t) + u_t(x,t) + (u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx} = 0 \text{ em } \widehat{Q}; \\ u(\alpha(t),t) = u(\beta(t),t) = u_x(\alpha(t),t) = u_x(\beta(t),t) = 0, \forall\, t \geq 0; \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \forall\, x \in [\alpha_0, \beta_0], \end{cases}$$

onde α e β são funções reais definidas em $[0,+\infty)$ tais que $\alpha(0) = \alpha_0 < \beta_0 = \beta(0)$ e $\widehat{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t)\}$ é um domínio não cilíndrico. O intervalo $[\alpha_0, \beta_0]$ representa uma barra na posição de repouso, a qual é deformada, por ação de forças, para o intervalo $[\alpha(t), \beta(t)]$ ao longo do tempo $t > 0$.

Provamos a existência, a unicidade e o decaimento exponencial de solução em um domínio cilíndrico. Em seguida provamos a existência de solução em um domínio não-cilíndrico e por fim provamos o decaimento exponencial para a equação $u_{tt}(x,t) - (u(x,t) + c\, u_t(x,t) + (u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx} = 0$, com $c > 2$.

Abstract

In this work, we study the mixed problem for the one-dimensional in space dissipative Boussinesq equation in a non-cylindrical domain of $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - (u(x,t) + u_t(x,t) + (u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx} = 0 \text{ em } \widehat{Q}; \\ u(\alpha(t),t) = u(\beta(t),t) = u_x(\alpha(t),t) = u_x(\beta(t),t) = 0, \forall\, t \geq 0; \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \forall\, x \in [\alpha_0, \beta_0], \end{cases}$$

where α and β are real functions defined on $[0,+\infty)$, $\alpha(0) = \alpha_0 < \beta_0 = \beta(0)$ and $\widehat{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t)\}$ is a non-cylindrical domain. The interval $[\alpha_0, \beta_0]$ represents the beam in the rest position, which is changed by action of forces and it has the position $[\alpha(t), \beta(t)]$ at time $t > 0$.

We prove the existence, uniquessess and the exponential decay of the global solution in a cylindrical domain. Next we prove the existence of the global solution in a non-cylindrical domain and at last we prove the exponential decay for the equation $u_{tt}(x,t) - (u(x,t) + c\, u_t(x,t) + (u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx} = 0$, com $c > 2$.

Sumário

Introdução

A teoria das ondas para o caso de um fluido raso com ondas de baixa amplitude, idelizado por Scott-Russel em 1834, teve uma das primeiras análises matemáticas realizada em 1872 por Boussinesq [1]. Em seu trabalho obteve uma equação de onda dissipativa e não-linear, a qual é agora conhecida como Equação de Boussinesq, dada por

$$u_{tt} - (u + au^2)_{xx} + bu_{xxxx} = 0, \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ é a componente vertical da velocidade de uma superfície livre de um fluido irrotacional, a é uma constante real positiva e b é uma constante real, ambas dependendo da profundidade do fluido. Quando $b > 0$, a equação (1) em um domínio cilíndrico descreve pequenas oscilações transversais não-lineares de uma barra, e é conhecida na literatura como a "boa" Equação de Boussinesq. Para $b < 0$ a equação (1) é chamadade " má" Equação de Boussinesq.

A Equação de Boussinesq (1) com $a, b > 0$ e sobre a ação de um forte dissipador interno, o que implica o acréscimo do termo $c\ u_{xxt}$ com $c \geq 0$, modela oscilações não-lineares de uma barra na presença de viscosidade. Assim, a equação (1) assume a forma

$$u_{tt} - (u + cu_t + au^2)_{xx} + bu_{xxxx} = 0. \tag{2}$$

O problema misto definido pela equação (2) em um domínio cilíndrico e com dados iniciais pequenos foi estudado por Varlamov [14, 15, 16] em dimensões 1 e 2. Como resultado, soluções clássicas foram contruídas , unicidade e comportamentos assintóticos foram obtidos de forma explícita.

Neste trabalho, estudamos o problema misto unidimensional associado à Equação de Boussinesq (2) em um domínio não cilíndrico de $\mathbb{R}^2$ com termo dissipativo. Por simpliciade, tomamos $a = b = c = 1$ e assim o problema é dado por

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - (u(x,t) + u_t(x,t) + (u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx} = 0 \text{ em } \widehat{Q}; \\ u(\alpha(t),t) = u(\beta(t),t) = u_x(\alpha(t),t) = u_x(\beta(t),t) = 0, \forall\, t \geq 0; \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \forall\, x \in [\alpha_0, \beta_0], \end{cases} \tag{3}$$

onde α e β são funções reais definidas em $[0, +\infty)$ tais que $\alpha(0) = \alpha_0 < \beta_0 = \beta(0)$ e $\widehat{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t)\}$ é um domínio não cilíndrico. O intervalo $[\alpha_0, \beta_0]$ representa uma barra na posição de repouso, a qual é deformada, por ação de forças, para o intervalo $[\alpha(t), \beta(t)]$ ao longo do tempo $t > 0$. O mesmo problema foi estudado em [5] usando o método de mudança de variáveis, porém, no presente trabalho, optamos por usar o método de penalização introduzido por Lions em [6]. O estudo de outras equações utilizando o método de penalização pode ser visto em Medeiros [11, 8, 12].

O trabalho é composto de três capítulos. No Capítulo 1 apresentamos as definições e notações necessárias para a compreensão dos capítulos posteriores e também estabeleceremos alguns resultados básicos que serão ultilizados ao longo do trabalho. No Capítulo 2 provaremos a existência, a unicidade e o decaimento exponencial de solução do Problema (3) em um domínio cilíndrico. No Capítulo 3, provaremos a existência de solução para o Problema (3) em um domínio não-cilíndrico e por fim provaremos o decaimento exponencial para o Problema associado a equação (2) com $a = b = 1$ e $c > 2$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços Funcionais

Neste capítulo serão apresentados os espaços funcionais envolvidos no problema em estudo. Apresentaremos também a estrutura desses espaços e algumas propriedades importantes.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, ao Espaço de Banach das funções u mensuráveis definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$$

munido da norma

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Se $p = \infty$, o conjunto das funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω é representado por $L^\infty(\Omega)$. Para uma função $u \in L^\infty(\Omega)$, define-se a norma de u por

$$\|u\|_\infty = \texttt{supess}\, u.$$

Se $p = 2$ tem-se o Espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, com produto interno dado por

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, define-se

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Denotaremos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}}$$

o operador derivação de ordem $|\alpha|$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, define-se $D^0 u = u$.

Define-se o **suporte compacto** de u ao fecho do conjunto $\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}$ e denota-se por $\mathtt{supp}\, u$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω. Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço topológico $(C_0^\infty(\Omega), \mathcal{D})$, onde $\mathcal{D}(\Omega)$ representa a topologia do limite indutivo, isto é, muniremos $\mathcal{D}(\Omega)$ da seguinte noção de convergência

$$u_m \to u \text{ em } \mathcal{D}(\Omega)$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

(i) $\mathtt{supp}\,(u_m) \subset K$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$ e $\mathtt{supp}\,(u) \subset K$;

(ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}$, $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ uniformemente em K.

O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denominado **Espaço das Funções Testes**. Dizemos que T é uma **Distribuição** sobre Ω quando T é uma transformação linear e contínua de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathbb{R}$ no sentido da convergência de $\mathcal{D}(\Omega)$ e denotaremos o valor de T em $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ por $\langle T, \varphi \rangle$. Representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições sobre Ω.

Dizemos que a seqüência $(T_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge para a distribuição T sobre Ω quando a seqüência numérica $(\langle T_m, \varphi \rangle)$ converge para $(\langle T, \varphi \rangle)$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Define-se a derivada de ordem $|\alpha|$ da distribuição T sobre Ω como sendo o funcional $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A derivada da distribuição T também é uma distribuição.

Dado $u \in L^p(\Omega)$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existe a integral $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$. De fato, seja $K \subset \Omega$ compacto tal que $\texttt{supp}\, \varphi \subset K$, então

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \int_K u(x)\varphi(x)dx,$$

assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \right| &= \left| \int_K u(x)\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \int_K |u(x)||\varphi(x)|dx \\ &\leq \max_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |u(x)|dx < \infty \end{aligned}$$

esta última desigualdade devido ao fato de $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Defina $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$, vejamos que T_u é uma distribuição. Claro que T_u é linear, então basta mostrar que T_u é contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Com efeito, seja $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_m \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$, ou seja,

(i) Existe um compacto $K \subset \Omega$ contendo $\texttt{supp}\,(\varphi_m - \varphi)$, $\forall \, m \in \mathbb{N}$;

(ii) $D^\alpha(\varphi_m - \varphi) \to 0$ uniformemente, $\forall \, \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Seja $M = \int_K |u(x)|dx$, como $(\varphi_m - \varphi)$ converge uniformemente em K compacto então para todo $\epsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_0$ então $|\varphi_m(x) - \varphi(x)| < \frac{\epsilon}{M}$, para todo

$x \in K$, daí,

$$\begin{array}{rcl} |\langle T_u, \varphi_m - \varphi \rangle| & = & |\int_\Omega u(x)(\varphi_m - \varphi)(x)dx| \\ & = & |\int_K u(x)(\varphi_m - \varphi)(x)dx| \\ & \leq & \int_K |u(x)||(\varphi_m - \varphi)(x)|dx \\ & \leq & \frac{\epsilon}{M} \int_K |u(x)|dx \\ & \leq & \epsilon \end{array}$$

logo T_u é contínua.

Lema 1.1 (Lema de Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se $T_u = 0$ então $u = 0$ q.s em Ω.*

Demonstração: Ver Proposição 1.3.1 de [10]. □

Com isso, vimos que, dado $u \in L^p(\Omega)$ define-se uma distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e pelo Lema de Du Bois Raymond temos que se $T_u = T_v$ então $u = v$ *q.s* em Ω, assim, podemos denotar T_u simplesmente por u. Porém, nem toda distribuição é definida por um elemento de $L^p(\Omega)$, um exemplo é a distribuição de Dirac definida da seguinte forma, dado $x_0 \in \Omega$ defina $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ com sendo $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço de todas as funções mensuráveis $u \in L^p(\Omega)$, tais que $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq m$, tem-se $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições sobre Ω, ou ainda,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u por

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

O espaço $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um Espaço de Bananch, denominado Espaço de Sobolev. Quando $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega)$ é um Espaço de Hilbet e será denotado por

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, em particular, se $p = 2$ denotaremos $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será denotado por $H^{-m}(\Omega)$.

Dado H um espaço de Banach, se $T > 0$ e $1 \leq p < \infty$, representa-se por $L^p(0,T;H)$ o Espaço de Banach das funções $u : (0,T) \longrightarrow H$ tais que u é mensurável e $\|u(t)\|_H \in L^p(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;H)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt \right)^{1/p}.$$

Se $p = 2$ e H é um Espaço de Hilbet, então $L^2(0,T;H)$ é um Espaço de Hilbert com produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt.$$

Quando $p = \infty$ tem-se o Espaço de Banach $L^\infty(0,T;H)$ formado pelas funções $u : (0,T) \longrightarrow H$ mensuráveis e essencialmente limitadas em H, isto é,

$$\texttt{supess}\, \|u(t)\|_H < \infty$$

munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} = \texttt{supess}\, \|u(t)\|_H.$$

Representa-se por $\mathcal{D}'(0,T;H)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $\mathcal{D}(0,T)$ com valores em H, ou seja, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em H.

Se $u \in L^p(0,T;H)$, $1 \leq p < \infty$, associa-se a u a distribuição $\widetilde{u}$, defina por

$$\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt,\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Como feito anteriomente, pode-se mostrar que $\widetilde{u}$ é univocamente definida por u, daí, identificamos $\widetilde{u}$ com u e podemos dizer que

$$L^p(0,T;H) \subset \mathcal{D}'(0,T;H).$$

Seja $T \in \mathcal{D}'(0,T;H)$, define-se a derivada de ordem m de T, no sentido das distribuições, como sendo a distribuição $\frac{\partial^m}{\partial t^m}T$ definida por

$$\langle \frac{\partial^m}{\partial t^m}T, \varphi\rangle = (-1)^m \langle T, \frac{\partial^m}{\partial t^m}\varphi\rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Em particular, se $u \in L^p(0,T;H)$ então a derivada de ordem m de u, no sentido das distribuições, é a distribuição $\frac{\partial^m}{\partial t^m}u$ definida por

$$\langle \frac{\partial^m}{\partial t^m}u, \varphi\rangle = (-1)^m \int_0^T u(t)\frac{\partial^m}{\partial t^m}\varphi(t)dt,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

1.2 Resultados Básicos

Proposição 1.2 (Desigualdade de Poicare-Friedricks) *Seja Ω um aberto, limitado com fronteira bem regular de $\mathbb{R}^n$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\| \bigtriangledown v\|^2_{L^2(\Omega)}, \ \forall\, v \in H^1_0(\Omega)$$

Observação 1.3 $\| \bigtriangledown (\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ *define uma norma sobre $H^1_0(\Omega)$ que é equivalente a norma $\| \cdot \|^2_{H^1_0(\Omega)}$.*

Definição 1.4 *Uma função $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **absolutamente contínua** quando para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ de subintervalos de $[0,T]$ dois a dois disjuntos satisfazendo*

$$\sum_{j=1}^{k} |t_j - s_j| < \delta$$

tem se, necessariamente,

$$\sum_{j=1}^{k} |u(t_j) - u(s_j)| < \epsilon.$$

Teorema 1.5 (Lebesgue) *Se v é uma função absolutamente contínua em $[0,T]$, então*

$$v(t) = v(0) + \int_0^T v'(s)ds$$

Lema 1.6 (Desigualdade de Gronwall) *Sejam $\varphi \in L^\infty(0,T)$ e $\beta \in L^1(0,T)$ onde $\beta > 0$, $\varphi \geq 0$ e $C \geq 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)ds, \ \forall t \in [0,T].$$

Então,

$$\varphi(t) \leq Ce^{\int_0^t \beta(s)ds}, \ \forall t \in (0,T).$$

Demonstração:

Defina $\psi(t) = C + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)ds$. Note que $\beta\varphi \in L^1(0,T)$ e portanto ψ é absolutamente contínua, daí, $\psi'(t) = \beta(t)\varphi(t) \leq \beta(t)\psi(t) \Rightarrow \psi'(t) - \beta(t)\psi(t) \leq 0$. Mutliplicando essa última desigualdade pelo fator integrante $e^{-\int_0^t \beta(s)ds}$ e simplificando temos que $\frac{d}{dt}\left[\psi(t)e^{-\int_0^t \beta(s)ds}\right] \leq 0$. Integrando de 0 a t como ψ é absolutamente contínua, pelo Teorema 1.5 temos

$$\psi(t)e^{-\int_0^t \beta(s)ds} \leq \psi(0),$$

dai,

$$\psi(t) \leq Ce^{\int_0^t \beta(s)ds},$$

logo,

$$\varphi(t) \leq \psi(t) \leq Ce^{\int_0^t \beta(s)ds}.$$

$\square$

Teorema 1.7 (Bochner) *Sejam E e F espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $f : \Omega \longrightarrow E$ é Bochner integrável, então $T \circ f : \Omega \longrightarrow F$ é Bochner integrável e*

$$T\left(\int_\Omega f(x)dx\right) = \int_\Omega Tf(x)dx.$$

Proposição 1.8 *Sejam E um espaço de Banach e $u, g \in L^1(0,T;E)$. Então são equivalentes:*

(i) u é igual quase sempre a uma primitiva de g, isto é,

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds, \ q.s \ em \ [0,T],$$

onde $\xi \in E$.

(ii) Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt.$$

(iii) Para cada $\eta \in E'$

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),\eta\rangle = \langle g(t),\eta\rangle,$$

no sentido das distribuições.

Demonstração:

$(i)\Rightarrow(ii)$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, assim de (i)

$$\begin{aligned}\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt &= \int_0^T \left[\xi + \int_0^t g(s)ds\right]\varphi'(t)dt\\ &= \int_0^T \xi\varphi'(t)dt + \int_0^T\int_0^t g(s)ds\varphi'(t)dt\\ &= \xi\varphi(T) - \xi\varphi(0) + \int_0^T\int_0^t g(s)ds\varphi'(t)dt\\ &= \int_0^T\int_0^t g(s)ds\varphi'(t)dt.\end{aligned}$$

Defina $f(t) = \int_0^t g(s)ds\varphi(t)$ e note que f é absolutamente contínua, daí, $\int_0^T \frac{d}{dt}f(t)dt = f(T) - f(0) = 0$. Por outro lado, $\frac{d}{dt}f(t) = g(t)\varphi(t) + \int_0^t g(s)ds\varphi'(t)$, daí,

$$0 = \int_0^T \frac{d}{dt}f(t)dt = \int_0^T g(t)\varphi(t)dt + \int_0^T\int_0^t g(s)ds\varphi'(t)dt,$$

daí,

$$\int_0^T\int_0^t g(s)ds\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt.$$

Portanto,

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt.$$

$(ii)\Rightarrow(iii)$

Dado $\eta \in E'$ defina $f(t) = \langle u(t),\eta\rangle$, então $f \in L^1(0,T)$ pois $\int_0^T |f(t)|dt \leq \int_0^T |u(t)|_E|\eta|_{E'}dt = |\eta|_{E'}\int_0^T |u(t)|_E dt < \infty$, já que $u \in L^1(0,T;E)$. Assim, f define uma distribuição dada por

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\langle f,\varphi\rangle &= -\textstyle\int_0^T f(t)\varphi'(t)dt\\
&= -\textstyle\int_0^T \langle u(t),\eta\rangle\varphi'(t)dt\\
&= -\textstyle\int_0^T \langle u(t)\varphi'(t),\eta\rangle dt\\
&= -\langle \textstyle\int_0^T u(t)\varphi'(t),\eta dt\rangle\\
&= \langle \textstyle\int_0^T g(t)\varphi(t),\eta dt\rangle\\
&= \textstyle\int_0^T \langle g(t),\eta\rangle\varphi(t)dt\\
&= \langle\langle g(t),\eta\rangle,\varphi\rangle.
\end{aligned}
$$

Com isso, $\frac{d}{dt}\langle u(t),\eta\rangle = \langle g(t),\eta\rangle$ em $\mathcal{D}'(0,T)$.

$(ii)\Rightarrow(i)$

Façamos $v(t) = u(t) - \int_0^t g(s)ds$. Sabemos que $\int_0^T \int_0^t g(s)ds\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(s)\varphi(s)ds$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, daí,

$$\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt + \int_0^T g(t)\varphi(t)dt = 0,\ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Vejamos que $v(t) = \xi$ $q.s$ em $[0,T]$. Com efeito, tome algum $\varphi_0 \in \mathcal{D}(0,T)$ tal que $\int_0^T \varphi_0(t)dt = 1$, assim dado $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ seja $\lambda = \int_0^T \varphi(t)dt$. Defina $\psi(t) = \int_0^t (\varphi(s) - \lambda\varphi_0(s))\,ds$, assim $\psi'(t) = \varphi(t) - \lambda\varphi_0(t)$.

Como $\varphi,\varphi_0 \in \mathcal{D}(0,T)$ então $\mathtt{supp}\,\varphi$, $\mathtt{supp}\,\varphi_0 \subset (0,T)$, assim, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi = \varphi_0 = 0$ em $(0,\delta)\cup(T-\delta,T)$ e $\psi \equiv 0$ em $(0,\delta)\cup(T-\delta,T)$. Com isso, $\mathtt{supp}\,\psi \subset [\delta, T-\delta]$ e então $\mathtt{supp}\,\psi$ é compacto, e assim $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$. Daí,

$$0 = \int_0^T v(t)\psi'(t)dt = \int_0^T v(t)\varphi(t)dt - \lambda\int_0^T v(t)\varphi_0(t)dt.$$

Tome $\xi = \int_0^T v(t)\varphi_0(t)dt$ e assim,

$$\int_0^T v(t)\varphi(t)dt - \lambda\xi = 0$$

$$\int_0^T v(t)\varphi(t)dt - \int_0^T \xi\varphi(t)dt = 0$$

$$\int_0^T (v(t)-\xi)\varphi(t)dt = 0.$$

Como φ foi tomado arbitrário, temos, pelo Lema de Du Bois Raymond caso vetorial $v(t) = \xi \ q.s$ em $[0,T]$.

$\square$

Definição 1.9 *Sejam $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(H, \|\cdot\|_H)$ espaços de Hilbert tais que $V \subset H$. Dizemos que* $\begin{array}{rccc} \mathcal{I}: & V & \longrightarrow & H \\ & v & \longmapsto & v \end{array}$ *, injeção canônica de V em H, é o **operador imersão**. Dizemos que V está **imerso** em H quando $\mathcal{I}$ é contínua e denotaremos por $V \hookrightarrow H$. A imersão é **compacta** quando a imagem de conjuntos limitados de V por $\mathcal{I}$ são conjuntos relativamente compactos de H, ou seja, conjuntos cujo fecho é compacto em H e denotaremos por $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$.*

Proposição 1.10 *Sejam $V \subset H$ dois espaços de Hilbert reais sendo a imersão de V em H contínua. Se $v \in L^p(0,T;V)$ tal que $\frac{d}{dt}v \in L^p(0,T;H)$ então, $v \in C^0([0,T];H)$ e*

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \frac{d}{ds}v(s)ds, \ \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: De fato, como $v \in L^p(0,T;V) \hookrightarrow L^p(0,T;H)$ e $\frac{d}{dt}v \in L^p(0,T;H)$, definem distribuições que satisfazem

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), \eta\rangle = \langle \frac{d}{dt}v(t), \eta\rangle, \ \forall \ \eta \in H',$$

ou seja, satisfaz o item (iii) da proposição anterior. Assim, do item (i) temos que

$$v(t) = \xi + \int_0^t \frac{d}{dt}v(s)ds \ q.s \text{ em } [0,T],$$

onde podemos tomar $v(0) = \xi$.

Como $\frac{d}{dt}v \in L^p(0,T;H)$ então $\int_0^t \frac{d}{dt}v(s)ds$ é absolutamente contínua e portanto $v \in C^0([0,T];H)$. $\square$

Proposição 1.11 *Seja I um intervalo da reta. Então*

$$W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty(I), \ \forall\, 1 \leq p \leq \infty,$$

ou seja, exite $C > 0$ (dependendo de somente de I) tal que $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, $\forall\, u \in W^{1,p}(I)$. Além disso, se I tem comprimento 1 então $C = 1$.

Demonstração: Ver Teorema VIII.7 de [2] □

Teorema 1.12 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

(i) se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*)$ donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;

(ii) se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty)$;

(iii) se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Corolário 1.13 *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então $H_0^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Corolário 10 de [10]. □

Definição 1.14 *Seja E um espaço de Banach. Dada uma função $f \in E'$ defina $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_f(x) = f(x)$. A **topologia fraca** $\tau(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínua todas as aplicações φ_f. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de E a qual converge para a x em E na topologia fraca $\tau(E, E')$, denotaremos*

$$x_n \rightharpoonup x \ \text{em } E.$$

Proposição 1.15 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em E. Então verifica-se*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ $\forall\, f \in E'$;

(ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$;

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $\|x_n\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$;

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *em* E'*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$*.*

Definição 1.16 *Seja* E *um espaço de Banach. Dado* $x \in E$ *considere a função* $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi_x(f) = f(x)$*. A* ***topologia fraca estrela*** $\tau(E', E)$ *sobre* E' *é a topologia menos fina sobre* E' *que torna contínua todas as aplicações* φ_x*. Se* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência de* E' *que converge para* $f \in E'$ *na topologia fraca estrela* $\tau(E', E)$ *denotaremos*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Proposição 1.17 *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* E'*. Então verifica-se*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle\ \forall\, x \in E$*;*

(ii) Se $f_n \to f$ *em* E'*, então* $f_n \rightharpoonup f$ *na topologia* $\tau(E', E'')$*;*

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\tau(E', E'')$*, então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'*;*

(iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'*, então* $\|f_n\|_{E'}$ *é limitada e* $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$*;*

(v) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *e* $x_n \to x$ *em* E*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$*.*

Teorema 1.18 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *O conjunto* $B_{E'} = \{f \in E';\ |f|_{E'} \leq 1\}$ *é compacto para a topologia fraca estrela* $\tau(E', E)$*.*

Demonstração: Ver Teorema III.15 de [2]. □

Proposição 1.19 *Seja* E *um espaço de Banach separável. Então* $B_{E'}$ *é metrizável para a topologia fraca estrela* $\tau(E', E)$*, isto é, existe uma métrica definida sobre* $B_{E'}$ *tal que a topologia associada coincide sobre* $B_{E'}$ *com* $\tau(E', E)$*.*

Demonstração: Ver Teorema III.25 de [2]. □

Proposição 1.20 *Seja* E *um espaço de Banach separável. Dado uma seqüência* $(f_n) \subset E'$ *limitada, existe uma subseqüência* $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ *que converge na topologia fraca estrela* $\tau(E', E)$*.*

Demonstração: De fato, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então exite $M > 0$ tal que $f_n \in MB_{E'}$. Do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki 1.18 e da Proposição 1.19 temos que $MB_{E'}$ é metrizável e compacta, assim $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência no espaço métrico compacto $MB_{E'}$, portanto existe uma subseqüência (f_{n_k}) convergente, como a métrica definida em $MB_{E'}$ é equivalente à topologia $\tau(E', E)$ temos que (f_{n_k}) converge na topologia fraca estrela. □

Proposição 1.21 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência em $L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência (u_{n_k}) tal que*

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \ \text{ para quase todo } x \in \Omega.$$

Demonstração: Ver Teorema IV.9 de [2]. □

Proposição 1.22 *Seja H um espaço de Hilbert. Se $1 \le p < \infty$, então podemos identificar $(L^p(0,T;H))'$ com $L^{p'}(0,T;H')$, através da isometria*

$$\begin{array}{rccc} F: & L^{p'}(0,T;H') & \longrightarrow & (L^p(0,T;H))' \\ & u & \longmapsto & F(u) \end{array}$$

dada por

$$\langle F(u), v\rangle = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle dt, \ \ \forall\, v \in L^p(0,T;H).$$

Demonstração: Ver Teoremas IV.10, IV.11 e IV.14 de [2] □

Lema 1.23 (de Lions) *Seja Q aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Se $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em $L^p(Q)$, onde $1 < p < \infty$, tal que*

(i) $u_m \to u$ *q.s em* Q, $u \in L^p(Q)$;

(ii) $|u_m|_{L^p(Q)} < \infty$,

então

$$u_m \rightharpoonup u \text{ fraco em } L^p(Q)$$

Demonstração: Ver Lema 1.3 do Capítulo 1 de [7]. □

Teorema 1.24 (Teorema de Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach tais que*

(i) $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, *com* B_0, B_1 *reflexivos;*

(ii) $B_0 \hookrightarrow B$ *compacta.*

Seja $W = \{v \in L^{p_0}(0,T;B_0);\ v' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$ *munido da norma* $|v|_W = |v|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + |v'|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$, *com* $1 < p_0, p_1 < \infty$. *Então a imersão* $W \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;B)$ *é compacta.*

Demonstração: Ver Teorema 5.1 do Capítulo 1 de [7].

□

1.3 Base hilbertiana e Teoria Espectral

Apresentaremos aqui um resultado, usando o Teorema de Lax-Milgram e o Teorema Espectral, para obter uma base hilbertiana especial de um espaço de Hilbert. Para mais detalhes veja Medeiros [9].

Definição 1.25 *Seja H um espaço de Hilbert, um operador T é dito **autoadjunto** quando*

$$(Tu, v) = (u, Tv),\ \forall\, u, v \in H.$$

Definição 1.26 *Uma **base hilbertiana** do espaço de Hilbert H é uma seqüência enumerável $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaz*

(i) $(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}$ *para todo* $i, j \in \mathbb{N}$*;*

(ii) O conjunto de todas as combinações lineares finitas de $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é denso em* H.

Teorema 1.27 (Espectral) *Seja H um espaço de Hilbert separável. Se $T : H \longrightarrow H$ é um operador compacto e autoadjunto, então existe uma base hilbertiana de H formada por autovetores de T.*

Demonstração: Ver Teorema VI.11 de Brezis [2]. $\square$

Definição 1.28 *Sejam H um espaço de Hilbert e* $\mathrm{a} : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma forma bilinear.*

(i) a *é **contínua** se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|\mathrm{a}(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \ \forall \, u, v \in H.$$

(ii) a *é **coerciva** se existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\mathrm{a}(u, u) \geq M\|u\|^2, \ \forall \, u \in H.$$

(iii) a *é **simétrica** se*

$$\mathrm{a}(u, v) = \mathrm{a}(v, u), \ \forall \, u, v \in H.$$

Observação 1.29 *Uma forma bilinear* $\mathrm{a} : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua, coerciva e simétrica define um produto interno em H cuja norma $\|u\|_1 = \sqrt{\mathrm{a}(u, u)}$ é equivalente à norma de H, pois*

$$M\|u\|^2 \leq \mathrm{a}(u, u) \leq C\|u\|^2.$$

Teorema 1.30 (Lax-Milgram) *Seja* $\mathrm{a} : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva, então para toda $f \in H'$ existe um único $u \in H$ tla que*

$$\mathrm{a}(u, v) = f(v), \ \forall \, v \in H.$$

Além disso, se a *é simétrica, então u minimiza o funcional*

$$J(v) = \frac{1}{2}\mathrm{a}(v, v) - f(v), \ \forall \, v \in H.$$

Demonstração: Ver Corolário V.8 Brezis [2]. $\square$

Sejam V e H espaços de Hilbert, com $H \overset{c}{\hookrightarrow} V$ e H denso em V. Seja ainda $\mathrm{a} : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua, coerciva e simétrica.

Dado $v \in V$ temos que $(v, \cdot)_V \in H'$, daí, pelo Teorema 1.30 (Lax-Milgram) existe um único $u \in H$ tal que

$$\mathrm{a}(u, v) = (v, w)_V, \ \forall \, w \in H.$$

Com isso, defina a aplicação $G : V \longrightarrow H$ da seguinte forma, dado $v \in V$ temos que $Gv = u$ onde u é dado pelo Teorema de Lax-Milgram, assim

$$\mathrm{a}(Gv, w) = (v, w)_V, \ \forall \, w \in H.$$

Note que G é linear e vejamos que satisfaz algumas propriedades.

(i) G é contínua.

De fato, dado $v \in V$, como a é coerciva e $H \hookrightarrow V$ temos que

$$M\|Gv\|_H^2 \leq |\mathrm{a}(Gv, Gv)| = |(v, Gv)_V| \leq \|v\|_V \|Gv\|_V \leq c\|Gv\|_H \|v\|_V,$$

daí, $\|Gv\|_H \leq \frac{c}{M}\|v\|_V$, portanto G é contínua.

(ii) $G : H \longrightarrow H$ é compacto.

Com efeito, temos que $G \in L(V, H)$ e a imersão $\mathcal{I} : H \longrightarrow V$ é compacta, então $G\mid_H = G \circ \mathcal{I} : H \longrightarrow H$ é compacta.

(iii) $G : (H, \mathrm{a}(\cdot, \cdot)) \longrightarrow (H, \mathrm{a}(\cdot, \cdot))$ é autoadjunto, onde $(H, \mathrm{a}(\cdot, \cdot))$ é o espaço de Hilbert definido pelo produto interno dado pela forma bilinear a.

De fato, dados $u, v \in H$ temos que

$$\mathrm{a}(Gu, v) = (u, v)_V = (v, u)_V = \mathrm{a}(Gv, u) = \mathrm{a}(u, Gv).$$

Da Observação 1.29 $(H, \mathrm{a}(\cdot, \cdot))$ é um espaço de Hilbert cuja norma é equivalente à norma definida pelo produto interno $(\cdot, \cdot)_H$, assim, se H é separável, então $(H, \mathrm{a}(\cdot, \cdot))$ é separável e, além disso, $G : (H, \mathrm{a}(\cdot, \cdot)) \longrightarrow (H, \mathrm{a}(\cdot, \cdot))$ é compacto e autoadjunto, então, pelo Teorema Espectral 1.27, existe uma base hilbertiana $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de autovetores de $(H, \mathrm{a}(\cdot, \cdot))$, ou seja,

(i) $\mathrm{a}(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$;

(ii) O conjunto de todas as combinações lineares finitas de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em H.

(iii) $Gv_n = \lambda_n v_n,\ \lambda_n \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Defina $w_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} v_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, assim temos que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de H cujo conjunto das combinações lineares finitas de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em H. Além disso temos que

(i) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ortonormal em V.

De fato,

$$(w_i, w_j)_V = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}(v_i, w_j)_V = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathrm{a}(Gv_i, w_j) = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}(v_i, w_j)_V =$$

$$\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\mathrm{a}(v_i, v_j) = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\delta_{ij} = \delta_{ij}$$

(ii) O conjunto das combinações lineares finitas de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em V.

Para provar isso usaremos o seguinte fato de análise funcional

Lema 1.31 *Sejam E um espaço de Banach e F subespaço vetorial de E. Se $\{f \in E';\ f(v) = 0,\ \forall\, v \in F\} = 0$, então F é denso em E.*

Demonstração: Esta proposição segue diretamente do Teorema de Hahn-Banach 2ª forma geométrica. Ver Corolário I.8 de Brezis [2]. □

Assim, voltando a demonstração do item (ii), seja $f \in V'$ tal que $f(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j) = 0$ para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, em particular, $f(v_j) = 0,\ \forall\, j \in \mathbb{N}$.

Dado $v \in H$, como o conjunto das combinações lineares finitas de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em H, então para todo $\epsilon > 0$ existe $v_\epsilon = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j$ tal que $\|v - v_\epsilon\|_H \leq \epsilon$, daí,

$$|f(v)| \leq |f(v - v_\epsilon)| + |f(v_\epsilon)| \leq \|f\|_{V'}\|v - v_\epsilon\|_V \leq \|f\|_{V'}\, c\|v - v_\epsilon\|_H \leq C_1\epsilon.$$

Assim, $f(v) = 0$ e como v foi tomado arbitrário em H temos que $f(v) = 0,\ \forall\, v \in H$. Do mesmo modo, como H é denso em V temos que $f(v) = 0,\ \forall\, v \in V$, então $f \equiv 0$ e temos o resultado.

1.4 Existência de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Considere o Problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x), \\ x(t_0) & = & x_0. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Definição 1.32 *Uma **solução** do Problema (1.1) é uma função $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua que satisfaça*

(i) $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, $\forall\, t \in I$;

(ii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi'(t))$, *q.s em* I.

Definição 1.33 *Dizemos que uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as **Condições de Carathéodory** sobre Ω quando*

(i) $f(t,x)$ *é mensurável em t para cada x fixado;*

(ii) $f(t,x)$ *é contínua em x para cada t fixado;*

(iii) Para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$ integrável tal que

$$|f(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t),\ \forall\ (t,x) \in K.$$

Teorema 1.34 (Teorema de Carathéodory) *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução $x(t)$ do Problema de Cauchy (1.1) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, com $\beta > 0$.*

Demonstração: Ver [3]. □

Teorema 1.35 (Teorema de Prolongamento) *Seja* $\Omega = [0, T) \times B$ *com* $T > 0$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq b\}$, $b > 0$ *e seja* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as duas primeiras condições de Carathéodory sobre* Ω*. Suponhamos que* $x(t)$ *é uma solução do Problema de Cauchy (1.1) tal que* $|x_0| \leq b$ *e que em qualquer intervalo* I*, onde* $x(t)$ *está definida, se tenha* $|x(t)| \leq M$, $\forall\, t \in I$*, onde* M *independe de* I *e* $M < b$*. Então* x *possui um prolongamento em* $[0, T]$*.*

Demonstração: Ver [3]. $\square$

Capítulo 2

Problema Cilíndrico

Neste Capítulo, resolveremos o problema associado à Equação de Boussinesq (2) em um domínio cilíndrico $\Omega \times Q$ em $\mathbb{R}^2$, onde $\Omega = (0,1)$ e $Q = \Omega \times (0, \infty)$. Usaremos o método de Faedo-Galerkin [9] que consiste em, para cada $m \in \mathbb{N}$, resolver um problema em dimensão finita m cuja solução se aproxima da solução desejada quando $m \to \infty$. A partir de agora denotaremos o produto interno e a norma de $L^2(\Omega)$ por $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$ respectivamente.

Dados $u_0, u_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ considere o seguinte problema misto, dado pela equação (1) onde, por simpliciade, $a = b = c = 1$

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - (u(x,t) + u_t(x,t) + (u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx} = 0 \text{ em } Q; \\ u(0,t) = u(1,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \text{ para } t \geq 0; \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.1 *Uma* ***solução fraca*** *do Problema (2.1) é uma função real $u = u(x,t)$ definida em Q tal que para todo $T > 0$ satisfaça*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega)) \ e \ u_t \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{2.2}$$

A identidade integral

$$\begin{gathered} -\int_0^T \int_\Omega u_t(x,t)\theta_t(x,t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega (u(x,t) + u_t(x,t) + u^2(x,t))_x \theta_x(x,t)dxdt + \\ \int_0^T \int_\Omega u_{xx}(x,t)\theta_{xx}(x,t)dxdt = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

para todo $\theta \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ *tal que* $\theta_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *e* $\theta(0)=\theta(T)=0$.

E as condições

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x). \tag{2.4}$$

Definição 2.2 *Dados* $u_0 \in H_0^2(\Omega)$ *e* $u_1 \in L^2(\Omega)$ *define-se*

$$K_0 = \frac{4}{5}|u_1|^2 + \frac{11}{10}|u_{0x}|^2 + \frac{1}{2}|u_{0xx}|^2$$

Teorema 2.3 *Suponha que* $u_0 \in H_0^2(\Omega)$ *e* $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Se*

$$\frac{6}{5}\sqrt{2K_0} + 8K_0 < \frac{1}{5}, \tag{2.5}$$

então existe uma única função real $u=u(x,t)$ *definida em* Q *solução do Problema (2.1) no sentido da Definição 2.1.*

Demonstração: Aplicaremos o método de Faedo-Galerkin. Sabemos que $H^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$(u,v)_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}(x)\frac{\partial v}{\partial x}(x)dx + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)dx.$$

Como $H_0^2(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^2(\Omega)$ então é também um espaço de Hilbert. A aplicação $v \in H^2(\Omega) \longmapsto (v, v_x, v_{xx}) \in [L^2(\Omega)]^3$ é uma isometria sendo a norma em $[L^2(\Omega)]^3$ dada por $|(v_1,v_2,v_3)|^2_{[L^2(\Omega)]^3} = |v_1|^2+|v_2|^2+|v_3|^2$, $v_1,v_2,v_3 \in L^2(\Omega)$. Com isso, como $L^2(\Omega)$ é separável, temos que $H^2(\Omega)$ é separável e daí, $H_0^2(\Omega)$ também é separável.

Do Corolário 1.13 temos que $H_0^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega)$ e como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então $H_0^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$. Defina a : $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo a$(u,v) = (u_{xx}, v_{xx})$, assim, temos que a$(\cdot,\cdot)$ é uma forma bilinear contínua, coerciva e simétrica, então, pelo resultado apresentado na Seção 1.3, existe uma base $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H_0^2(\Omega)$ ortonormal em $L^2(\Omega)$ tal que o conjunto das combinações lineares finitas de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em $H_0^2(\Omega)$ e em $L^2(\Omega)$.

Defina $V_m = [w_1, \ldots, w_m]$ o subespaço vetorial de $H_0^2(\Omega)$ gerado por $\{w_1, \ldots, w_m\}$, assim $\cup_{m=1}^{\infty} V_m$ é denso em $H_0^2(\Omega)$ e em $L^2(\Omega)$.

2.1 Problema Aproximado

Queremos encontrar $u^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_j^m(t)\omega_j(x)$ em V_m solução do problema

$$\begin{cases} (u_{tt}^m(t), \omega_j) + (u_x^m(t), \omega_{jx}) + (u_{xt}^m(t), \omega_{jx}) - ([u^m(t)^2]_{xx}, \omega_j) + (u_{xx}^m(t), \omega_{jxx}) = 0; \\ u^m(x,0) = u_0^m(x) \to u_0(x) \text{ em } H_0^2(\Omega); \\ u_t^m(x,0) = u_1^m(x) \to u_1(x) \text{ em } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{2.6}$$

Com efeito, como $u_0 \in H_0^2(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$, pela densidade de $\cup_{m=1}^{\infty} V_m$ nesses espaços, existem $u_0^m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^m \omega_j$ e $u_1^m = \sum_{j=1}^{m} \beta_j^m \omega_j$ tais que $u_0^m \to u_0$ em $H_0^2(\Omega)$ e $u_1^m \to u_1$ em $L^2(\Omega)$. Assim, o Problema (2.6) é equivalente ao seguinte sistema de m equações,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} [g_{ktt}^m(t)(\omega_k, \omega_j)] + \sum_{k=1}^{m} [(g_k^m(t) + g_{kt}^m(t))(\omega_{kx}, \omega_{jx})] + \sum_{k=1}^{m} [g_k^m(t)(\omega_{kxx}, \omega_{jxx})] \\ \displaystyle + \sum_{k=1}^{m} \left[2g_k^m(t) \left(\left[\sum_{l=1}^{m} g_l^m(t)\omega_l \right] \omega_{kx}, \omega_{jx} \right) \right] = 0; \\ g_j^m(0) = \alpha_j^m \text{ e } g_{jt}^m(0) = \beta_j^m, \ j \in \{1, \ldots, m\}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Defina as seguintes matrizes,

$$W = \begin{bmatrix} (\omega_1, \omega_1) & \cdots & (\omega_1, \omega_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\omega_m, \omega_1) & \cdots & (\omega_m, \omega_m) \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} (\omega_{1x}, \omega_{1x}) & \cdots & (\omega_{1x}, \omega_{mx}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\omega_{mx}, \omega_{1x}) & \cdots & (\omega_{mx}, \omega_{mx}) \end{bmatrix},$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} (\omega_{1xx}, \omega_{1xx}) & \cdots & (\omega_{1x}, \omega_{mxx}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\omega_{mxx}, \omega_{1xx}) & \cdots & (\omega_{mxx}, \omega_{mxx}) \end{bmatrix}, G(t) = \begin{bmatrix} g_1^m(t) \\ \vdots \\ g_m^m(t) \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{bmatrix},$$

$$H(G(t)) = \begin{bmatrix} (V \cdot G(t)\omega_{1x}, \omega_{1x}) & \cdots & (V \cdot G(t)\omega_{1x}, \omega_{mx}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (V \cdot G(t)\omega_{mx}, \omega_{1x}) & \cdots & (V \cdot G(t)\omega_{mx}, \omega_{mx}) \end{bmatrix},$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1^m \\ \vdots \\ \alpha_m^m \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} \beta_1^m \\ \vdots \\ \beta_m^m \end{bmatrix}.$$

Com isso o sistema (2.7) na forma matricial é dado por

$$\begin{cases} W \cdot G''(t) + W_1 \cdot [G(t) + G'(t)] + W_2 \cdot G(t) + 2H(G(t)) \cdot G(t) = 0; \\ G(0) = X_0; \\ G'(0) = X_1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Observação 2.4 *Como $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é ortonormal em $L^2(\Omega)$ temos que $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ é l.i, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Assim, vejamos que as colunas de W são l.i.*

De fato, sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \begin{bmatrix} (\omega_1, \omega_k) \\ \vdots \\ (\omega_m, \omega_k) \end{bmatrix} = 0.$$

Assim, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, temos que

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(\omega_i, \omega_k) = (\omega_i, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\omega_k).$$

Denotando $\omega = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\omega_k$ temos que $(\omega_i, \omega) = 0\ \forall\ i = 1, \dots, m$, assim, somando esta equação com i variando de 1 até m temos

$$0 = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i\omega_i, \omega) = (\omega, \omega) = |\omega|^2,$$

daí, $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \omega_k = \omega = 0$. Pela independência linear dos ω_k temos que $\lambda_k = 0$, $\forall\ k = 1, \ldots, m$, portanto as colunas de W são l.i como queríamos mostrar.

Da observação 2.4 temos que $\det W \neq 0$ e conseqüentemente W é invertível, com isso a equação matricial do Problema (2.8) pode ser escrita como

$$G''(t) = W^{-1}[W_1 \cdot [G(t) + G'(t)] + W_2 \cdot G(t) + 2H(G(t)) \cdot G(t)]. \tag{2.9}$$

Dessa forma, dado $T > 0$, defina $F : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ por

$$F(t, X, Y) = (Y, W^{-1}[W_1 \cdot [X + Y] + W_2 \cdot X + 2H(X) \cdot X]). \tag{2.10}$$

Defina agora, $Z(t) = (G(t), G'(t))$ e do sistema (2.8) temos o seguinte Problema de Cauchy,

$$\begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)), \\ Z(0) = (X_0, X_1). \end{cases} \tag{2.11}$$

o qual veremos que satisfaz as hipóteses do Teorema de Carathéodory (1.34).

De fato, observe que

(i) F é mensurável em t para cada (X, Y) fixo, pois independe de t;

(ii) F é contínua em (X,Y) pois as coordenadas são produto e soma de funções contínuas;

(iii) Para cada compacto $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m}$, como F é contínua e independente de t, temos que é limitada,

com isso F satisfaz as condições de Carathéodory sobre $[0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$, então, pelo Teorema de Carathéodory 1.34, existe $\varphi : [0, t_m] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ solução do Problema de Cauchy (2.11), com $t_m \leq T$. Conseqüentemente existem as funções g_j^m, $j = 1, \ldots, m$, sendo g_j^m e g_{jt}^m absolutamente contínuas em $[0, t_m]$ e portanto o sistema (2.6) possui solução u^m em $[0, t_m]$. O prolongamento dessas soluções ao intervalo $[0, T]$, bem como sua convergência, obteremos por meio das estimativas que faremos a seguir, mas antes faremos uma pequena observação.

Observação 2.5

Defina

$$K^m(t) = \frac{1}{2}\left\{|u_t^m(t)|^2 + \frac{6}{5}(u_t^m(t), u^m(t)) + \frac{8}{5}|u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\} \text{ e} \tag{2.12}$$

$$K_0^m = \frac{4}{5}|u_1^m|^2 + \frac{11}{10}|u_{0x}^m|^2 + \frac{1}{2}|u_{0xx}^m|^2 \tag{2.13}$$

e observe que do Problema (2.6), como $u_0^m \to u_0$ em $H_0^2(\Omega)$ e $u_1^m \to u_1$ em $L^2(\Omega)$ então $|u_{0x}^m| \to |u_{0x}|$, $|u_{0xx}^m| \to |u_{0xx}|$ e $|u_1^m| \to |u_1|$ em $\mathbb{R}$. Com isso, $K_0^m \to K_0$ em $\mathbb{R}$, então K_0^m é limitado por uma constante K_1 que depende somente de u_0 e u_1. Também observe que

$$\begin{aligned}
K^m(0) &= \tfrac{1}{2}\left\{|u_t^m(0)|^2 + \tfrac{6}{5}(u_t^m(0), u^m(0)) + \tfrac{8}{5}|u_x^m(0)|^2 + |u_{xx}^m(0)|^2\right\} \\
&\leq \tfrac{1}{2}\left\{|u_1^m|^2 + \tfrac{6}{5}(\tfrac{1}{2}|u_1^m|^2 + \tfrac{1}{2}|u_0^m|^2) + \tfrac{8}{5}|u_{0x}^m|^2 + |u_{0xx}^m|^2\right\} \\
&= \tfrac{4}{5}|u_1^m|^2 + \tfrac{3}{10}|u_0^m|^2 + \tfrac{4}{5}|u_{0x}^m|^2 + \tfrac{1}{2}|u_{0xx}^m|^2 \\
&\leq \tfrac{4}{5}|u_1^m|^2 + \tfrac{3}{10}|u_{0x}^m|^2 + \tfrac{4}{5}|u_{0x}^m|^2 + \tfrac{1}{2}|u_{0xx}^m|^2 \\
&= \tfrac{4}{5}|u_1^m|^2 + \tfrac{11}{10}|u_{0x}^m|^2 + \tfrac{1}{2}|u_{0xx}^m|^2 \\
&= K_0^m.
\end{aligned}$$

2.2 Estimativas

Comecemos multiplicando a equação do Problema (2.6) por $\frac{d}{dt}g_j^m(t)$ e somando com $j = 1, \ldots, m$. Assim,

$$(u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) + (u_x^m(t), u_{tx}^m(t)) + (u_{xt}^m(t), u_{tx}^m(t)) - ([u^m(t)^2]_{xx}, u_t^m(t)) + (u_{xx}^m(t), u_{txx}^m(t)) = 0$$

Note que as derivadas em relação a t são derivadas no sentido usual, com isso temos

$$(u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t^m(t)|^2;$$

$$(u_x^m(t), u_{tx}^m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_x^m(t)|^2;$$

$$(u^m_{xx}(t), u^m_{txx}(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^m_{xx}(t)|^2;$$

e portanto vale a igualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|u^m_t(t)|^2 + |u^m_x(t)|^2 + |u^m_{xx}(t)|^2\right\} + |u^m_{tx}|^2 = ([u^m(t)^2]_{xx}, u^m_t(t)) \tag{2.14}$$

Agora multiplicando a equação do Problema (2.6) por $g^m_j(t)$ e somando com $j = 1, \ldots, m$ temos

$$(u^m_{tt}(t), u^m(t)) + (u^m_x(t), u^m_x(t)) + (u^m_{xt}(t), u^m_x(t)) - ([u^m(t)^2]_{xx}, u^m(t)) + (u^m_{xx}(t), u^m_{xx}(t)) = 0$$

Note que

$$(u^m_{tt}(t), u^m(t)) = \frac{d}{dt}(u^m_t(t), u^m(t)) - (u^m_t(t), u^m_t(t))$$

Com isso temos

$$\begin{array}{c} \frac{d}{dt}\left\{(u^m_t(t), u^m(t)) + \frac{1}{2}|u^m_x(t)|^2\right\} \\ -|u^m_t(t)|^2 + |u^m_x(t)|^2 + |u^m_{xx}(t)|^2 = ([u^m(t)^2]_{xx}, u^m(t)). \end{array} \tag{2.15}$$

Do segundo membro de (2.14) integrando por partes e observando que $u^m(t) \in H^2_0(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} ([u^m(t)^2]_{xx}, u^m_t(t)) &= \textstyle\int_0^1 [u^m(x,t)^2]_{xx} u^m_t(x,t)dx \\ &= \underbrace{[u^m(x,t)^2]_x u^m_t(x,t)\Big|_{x=0}^{1}}_{0} - \textstyle\int_0^1 [u^m(x,t)^2]_x u^m_{tx}(x,t)dx \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} &= -([u^m(t)^2]_x, u^m_{tx}(t)) \le |([u^m(t)^2]_x, u^m_{tx}(t))| \\ &= |(2u^m(t)u^m_x(t), u^m_{tx}(t))| \le 2\textstyle\int_0^1 u^m(x,t)u^m_x(x,t)u^m_{tx}(x,t)dx \\ &\le 2|u^m(t)|_{L^\infty(0,1)}|u^m_x(t)u^m_{tx}(t)|_{L^1(0,1)} \\ &\le 2|u^m(t)|_{L^\infty(0,1)}|u^m_x(t)||u^m_{tx}(t)| \\ &\le 2|u^m_x(t)|^2|u^m_{tx}(t)| \le 4|u^m_x(t)|^4 + \tfrac{1}{4}|u^m_{tx}(t)|^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde a penúltima desigualdade é devida à desigualdade de Poincaré-Friedricks e ao fato de que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, daí, $|u^m(t)|_{L^\infty(\Omega)} \leq |u^m(t)|_{H_0^1(\Omega)} \leq |u_x^m|_{L^2(\Omega)}$.

Analogamente, obtemos de (2.15) que

$$([u^m(t)^2]_{xx}, u^m(t)) \leq 2|u_x^m(t)|^3. \tag{2.18}$$

De (2.16) e (2.18) em (2.14) e (2.15) respectivamente temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|u_t^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\} + \frac{3}{4}|u_{tx}^m(t)|^2 \leq 4|u_x^m(t)|^4 \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{(u_t^m(t), u^m(t)) + \frac{1}{2}|u_x^m(t)|^2\right\} - |u_t^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2 \leq 2|u_x^m(t)|^3 \tag{2.20}$$

Multiplicando (2.20) por $\frac{3}{5}$ e somando a (2.19) e utilizando a desigualdade de Poicaré-Friedricks $(-|u_{tx}^m(t)|^2 \leq -|u_t^m(t)|^2)$ temos

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{\tfrac{6}{5}(u_t^m(t), u^m(t)) + \tfrac{8}{5}|u_x^m(t)|^2 + |u_t^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\} \\ &\qquad + \tfrac{3}{20}|u_{tx}^m(t)|^2 + \tfrac{3}{5}|u_{xx}^m(t)|^2 + \tfrac{3}{5}|u_x^m(t)|^2 \\ &\qquad \leq 2|u_x^m(t)|^2\left[\tfrac{3}{5}|u_x^m(t)| + 2|u_x^m(t)|^2\right]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Assim, substituindo (2.12) em (2.21) temos

$$\frac{d}{dt}K^m(t) + \frac{3}{20}|u_{tx}^m(t)|^2 + \frac{3}{5}|u_{xx}^m(t)|^2 + \frac{3}{5}|u_x^m(t)|^2 \leq 2|u_x^m(t)|^2\left[\frac{3}{5}|u_x^m(t)| + 2|u_x^m(t)|^2\right]. \tag{2.22}$$

Queremos $K^m(t) \geq 0$. Para isso, utilizando a desigualdade de Poincaré-Friedricks, observe que

$$\frac{6}{5}(u_t^m(t), u^m(t)) \geq -\frac{3}{5}|u_t^m(t)|^2 - \frac{3}{5}|u_x^m(t)|^2. \tag{2.23}$$

Daí,

$$K^m(t) \geq \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{5}|u_t^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\} \geq 0. \tag{2.24}$$

Agora, definindo

$$\gamma^m(t) = 2\left\{\frac{3}{5}|u_x^m(t)| + 2|u_x^m(t)|^2\right\}, \tag{2.25}$$

e substituindo em (2.21) obtemos

$$\tfrac{d}{dt}K^m(t) + \tfrac{3}{10}|u_x^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2\left[\tfrac{3}{10} - \gamma^m(t)\right] + \tfrac{3}{20}|u_{tx}^m(t)|^2 + \tfrac{3}{5}|u_{xx}^m(t)|^2 \leq 0. \tag{2.26}$$

De (2.24) temos que

$$|u_x^m(t)| \leq \sqrt{2K^m(t)} \quad \text{e} \quad |u_x^m(t)|^2 \leq 2K^m(t). \tag{2.27}$$

Então, de (2.25) e (2.27) obtemos

$$\gamma^m(t) \leq 2\left\{\frac{3}{5}\sqrt{2K^m(t)} + 4K^m(t)\right\} = \frac{6}{5}\sqrt{2K^m(t)} + 8K^m(t),\ \forall\, t \in [0, t_m). \tag{2.28}$$

Vamos mostrar que $K^m(t)$ é limitado, para isso admita, a princípio, a seguinte afirmação

Afirmação 2.6 $\gamma^m(t) \leq \dfrac{3}{10}$, $\forall\, t \in [0, t_m)$.

Sendo assim, podemos eliminar a parcela $|u_x^m(t)|^2\left[\frac{3}{10} - \gamma^m(t)\right]$ de (2.26) que ainda vale a desigualdade, ou seja,

$$\tfrac{d}{dt}K^m(t) + \tfrac{3}{10}|u_x^m(t)|^2 + \tfrac{3}{20}|u_{tx}^m(t)|^2 + \tfrac{3}{5}|u_{xx}^m(t)|^2 \leq 0. \tag{2.29}$$

Integrando esta igualdade de 0 a t em $[0, t_m)$ vemos que

$$K^m(t) + \tfrac{3}{10}\int_0^t |u_x^m(t)|^2 ds + \tfrac{3}{20}\int_0^t |u_{sx}^m(t)|^2 ds + \tfrac{3}{5}\int_0^t |u_{xx}^m(t)|^2 ds \leq K^m(0). \tag{2.30}$$

Dessa forma, da Observação 2.5 temos que

$$K^m(t) \leq K_1, \tag{2.31}$$

para todo $t \geq 0$ onde $K^m(t)$ está definida.

Com isso, de (2.24) e de (2.31) temos que

$$|u_t^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2 \leq K_2, \tag{2.32}$$

onde K_2 também é uma constante que só depende de u_0 e u_1. Pela desigualdade de Poincaré-Friedricks temos que

$$\begin{aligned} |u^m(t)|^2_{H_0^2(\Omega)} &= |u^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2 \\ &\leq \underbrace{|u_x^m(t)|^2}_{\leq K_2} + \underbrace{|u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2}_{\leq K_2} \\ &\leq 2K_2. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Assim, obtivemos a primeira limitação. A segunda limitação segue imediato de (2.32) como sendo

$$|u_t^m(t)|^2 \leq K_2. \tag{2.34}$$

Dessas duas limitações, podemos aplicar o Teorema do Prolongamento 1.35 e estender as soluções do Problema Aproximado (2.6) ao intervalo $[0, T]$. De fato, como vimos, pelo Teorema de Carathéodory, existe uma função $\varphi : [0, t_m) \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ solução do Problema de Cauchy (2.11), assim temos que $\varphi(t) = (G(t), G'(t))$. Para aplica o Teorema do Prolongamento 1.35 basta mostrar que $|\varphi(t)| \leq M$, $\forall\, t$ onde φ está definida, assim, basta mostra que $|G(t)|^2 = \sum_{j=1}^m |g_j^m(t)|^2$ e $|G'(t)|^2 = \sum_{j=1}^m |g_{jt}^m(t)|^2$ são limitadas.

Note que, como $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é ortonormal em $L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |u^m(t)|^2 &= \textstyle\sum_{j,k=1}^m (g_j^m(t)\omega_j, g_k^m(t)\omega_k) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m [g_j^m(t)]^2 |\omega_j|^2 \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m [g_j^m(t)]^2 \\ &= |G(t)|^2, \end{aligned}$$

assim, da limitação (2.32) e da desigualdade de Poincaré-Friedricks, temos que

$$|G(t)|^2 = |u^m(t)|^2 \leq |u_x^m(t)|^2 \leq K_2$$

.

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} |u_t^m(t)|^2 &= \textstyle\sum_{j,k=1}^m (g_{jt}^m(t)\omega_j, g_{kt}^m(t)\omega_k) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m [g_{jt}^m(t)]^2 |\omega_j|^2 \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m [g_{jt}^m(t)]^2 \\ &= |G'(t)|^2, \end{aligned}$$

assim, da limitação (2.34), temos que

$$|G'(t)|^2 = |u_t^m(t)|^2 \leq K_2.$$

Agora, estendida as soluções ao intervalo $[0, T]$, de (2.33), podemos tomar o supremo essencial e temos que

$$|u^m|^2_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))} \leq K_2 \tag{2.35}$$

Ainda, de (2.30) temos que

$$\int_0^T |u_{xs}^m(t)|^2 ds \leq K_2, \tag{2.36}$$

assim, de (2.34) e de (2.36) obtemos a seguinte limitação

$$\begin{aligned} |u_t^m|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &= \textstyle\int_0^T |u_t^m(t)|^2 dt + \int_0^T |u_{xt}^m(t)|^2 dt \\ &\leq K_2 T + K_2 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Portanto, de (2.35), (2.37) e (2.34)temos que

$$(u^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)), \tag{2.38}$$

$$(u_t^m) \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.39}$$

Finalmente, provemos a Afirmação 2.6.

Demonstração:

Com efeito, suponha por absurdo que exista $t_1 \in [0, t_m)$ onde $\gamma^m(t_1) > \frac{3}{10}$. Da Observação 2.5, como $K_0^m \stackrel{\mathbb{R}}{\to} K_0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $m_0 > 0$ tal que $|K_0^m - K_0| < \varepsilon$, $\forall\, m > m_0$. Assim, $0 \leq K_0^m < K_0 + \varepsilon$, $\forall\, m > m_0$.

Note que,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{6}{5}\sqrt{2(K_0+\varepsilon)} + 8(K_0+\varepsilon) \right) = \frac{6}{5}\sqrt{2K_0} + 8K_0) < \frac{1}{5},$$

sendo a última desigualdade devido a hipótese (2.5) do Teorema 2.3. Com isso, podemos tomar ε tão pequeno de modo que

$$0 \leq \frac{6}{5}\sqrt{2K_0^m} + 8K_0^m < \frac{6}{5}\sqrt{2(K_0+\varepsilon)} + 8(K_0+\varepsilon) < \frac{1}{5},\ \forall\, m > m_0.$$

Assim, de (2.28) e da Observação 2.5 temos que

$$\gamma^m(0) \leq \frac{6}{5}\sqrt{2K_0^m} + 8K_0^m < \frac{1}{5} < \frac{3}{10}.$$

Como γ^m é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_2 \in [0, t_m)$ tal que $\gamma^m(t_2) = \frac{3}{10}$, assim o conjunto $(\gamma^m)^{-1}(\{\frac{3}{10}\})$ não é vazio, além de fechado e limitado pois γ^m é contínua. Sendo assim, existe $t^* = \min(\gamma^m)^{-1}(\{\frac{3}{10}\}) = \{t > 0;\ \gamma^m(t) = \frac{3}{10}\}$ e então temos que

$$\begin{cases} \gamma^m(t) < \frac{3}{10}, \text{ se } 0 \leq t < t^*; \\ \gamma^m(t^*) = \frac{3}{10}. \end{cases} \tag{2.40}$$

De (2.40) e de (2.30) temos que $K^m(t^*) \leq K^m(0)$. Assim de (2.28) e da Observação 2.5 temos que

$$\begin{array}{rcl} \gamma^m(t^*) & \leq & \frac{6}{5}\sqrt{2K^m(t^*)} + 8K^m(t^*) \\ & < & \frac{6}{5}\sqrt{2K^m(0)} + 8K^m(0) \\ & < & \frac{6}{5}\sqrt{2K_0^m} + 8K_0^m \\ & < & \frac{1}{5} \leq \frac{3}{10}, \end{array}$$

o que contradiz (2.40) e conseqüentemente temos o resultado.

$\square$

2.3 Passagem ao Limite

Sabemos, da Proposição 1.22, que $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ é o dual do espaço $L^1(0,T;H^{-2}(\Omega))$, onde se $u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ então

$$\langle u, v\rangle = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle dt, \ \ \forall\, v \in L^1(0,T;H^{-2}(\Omega)).$$

Sabemos, de (2.38), que a seqüência $(u^m) \subset L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ é limitada, daí, da Proposição 1.20, existe uma subseqüência, que denotaremos da mesma forma, tal que

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \tag{2.41}$$

ou seja,

$$\langle u^m, v\rangle \to \langle u, v\rangle, \ \ \forall\, v \in L^1(0,T;H^{-2}(\Omega)),$$

portanto,

$$\int_0^T \langle v(t), u^m(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle dt, \ \ \forall\, v \in L^1(0,T;H^{-2}(\Omega)). \tag{2.42}$$

Em particular, como $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$ temos que

$$\int_0^T (u^m(t), v(t))_{H_0^2(\Omega)} dt \to \int_0^T (u(t), v(t))_{H_0^2(\Omega)} dt, \ \ \forall\, v \in L^1(0,T;H_0^2(\Omega)). \tag{2.43}$$

Analogamente, como $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ é o dual de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e de (2.39) temos que existe uma subseqüência de (u_t^m), denotada da mesma forma, tal que

$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{u} \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Afirmação 2.7 $\widetilde{u} = u_t$.

Demonstração: De fato, sabemos que $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$, com isso, de (2.41) temos que $u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^2(Q)$, ou seja, $(u^m, v)_{L^2(Q)} \to (u, v)_{L^2(Q)}$,

$\forall\ v \in L^2(Q)$, portanto

$$\int_Q u^m(x,t)v(x,t)dxdt \to \int_Q u(x,t)v(x,t)dxdt\ \ \forall\ v \in L^2(Q). \tag{2.44}$$

Sabemos que $L^2(Q) \subset \mathcal{D}'(Q)$, ou seja, dado $v \in L^2(Q)$ podemos definir uma distribuição T_v da seguinte forma, $\langle T_v, \varphi\rangle = \int_Q v(x,t)\varphi(x,t)dxdt$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(Q)$. Assim, de (2.44), $\langle T_{u^m}, \varphi\rangle = \int_Q u^m(x,t)\varphi(x,t)dxdt \to \int_Q u(x,t)\varphi(x,t)dxdt \to \langle T_u, \varphi\rangle\ \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(Q)$, então $T_{u^m} \to T_u$, como a derivação é contínua em $\mathcal{D}'(Q)$ temos que $\frac{d}{dt}T_{u^m} \to \frac{d}{dt}T_u$. De modo análogo, $\frac{d}{dt}T_{u^m} \to T_{\widetilde{u}}$, então, pela unicidade do limite, $T_{\widetilde{u}} = T_{u_t}$, logo $\widetilde{u} = u_t$. $\square$

Com isso temos que

$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.45}$$

ou seja,

$$\langle u_t^m, v\rangle \to \langle u_t, v\rangle,\ \ \forall\ v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

portanto,

$$\int_0^T \langle v(t), u_t^m(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle v(t), u_t(t)\rangle dt,\ \ \forall\ v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.46}$$

Em particular, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ temos que

$$\int_0^T (u_t^m(t), v(t))_{H_0^1(\Omega)} dt \to \int_0^T (u_t(t), v(t))_{H_0^1(\Omega)} dt,\ \ \forall\ v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.47}$$

Afirmação 2.8 $\int_0^T (u_{tx}^m(t), v_x(t))dt \to \int_0^T (u_{tx}(t), v_x(t))dt,\ \ \forall\ v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Demonstração: Dado $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ defina $z(t) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\langle z(t), w\rangle = (w_x, v_x(t))$, $\forall\ w \in H_0^1(\Omega)$. Claro que $z(t)$ é linear e note que

$$
\begin{aligned}
\frac{|\langle z(t), w\rangle|_{\mathbb{R}}}{|w|_{H_0^1(\Omega)}} &= \frac{|(w_x, v_x(t))|}{|w|_{H_0^1(\Omega)}} \\
&\leq \frac{|w_x||v_x(t)|}{|w|_{H_0^1(\Omega)}} \\
&\leq \frac{|w|_{H_0^1(\Omega)}|v(t)|_{H_0^1(\Omega)}}{|w|_{H_0^1(\Omega)}} \\
&= |v(t)|_{H_0^1(\Omega)} \in L^2(0,T).
\end{aligned}
$$

Daí, $|z(t)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq |v(t)|_{H_0^1(\Omega)}$ e portanto $z \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Com isso, de (2.46) temos que

$$\int_0^T \langle z(t), u_t^m(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle z(t), u_t(t)\rangle dt,$$

daí, como v é arbitrário,

$$\int_0^T (u_{tx}^m(t), v_x(t))dt \to \int_0^T (u_{tx}, v_x(t))dt, \quad \forall\, v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

$\square$

Afirmação 2.9

$\int_0^T (u_x^m(t), v_x(t))dt + \int_0^T (u_{xx}^m(t), v_{xx}(t))dt \to \int_0^T (u_x(t), v_x(t))dt + \int_0^T (u_{xx}(t), v_{xx}(t))dt$, $\forall\, v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Demonstração: Procedendo de forma análoga à Afirmação 2.8, dado $v \in L^1(0,T;H_0^2(\Omega))$ defina $z(t) : H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\langle z(t), w\rangle = (w_x, v_x(t)) + (w_{xx}, v_{xx}(t)), \quad \forall\, w \in H_0^2(\Omega)$. Claro que $z(t)$ é linear e note que

$$
\begin{aligned}
\frac{|\langle z(t), w\rangle|_{\mathbb{R}}}{|w|_{H_0^2(\Omega)}} &= \frac{|(w_x, v_x(t)) + (w_{xx}, v_{xx}(t))|}{|w|_{H_0^2(\Omega)}} \\
&\leq \frac{|(w, v(t))|_{H_0^2(\Omega)}}{|w|_{H_0^2(\Omega)}} \\
&\leq \frac{|w|_{H_0^2(\Omega)}|v(t)|_{H_0^2(\Omega)}}{|w|_{H_0^2(\Omega)}} \\
&= |v(t)|_{H_0^2(\Omega)} \in L^1(0,T).
\end{aligned}
$$

Daí, $|z(t)|_{H^{-2}(\Omega)} \leq |v(t)|_{H_0^2(\Omega)}$ e portanto $z \in L^1(0,T; H^{-2}(\Omega))$. Com isso, de (2.42) temos que

$$\int_0^T \langle z(t), u^m(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle z(t), u(t)\rangle dt,$$

daí, como v é arbitrário,

$$\int_0^T (u_x^m(t), v_x(t)) + (u_{xx}^m(t), v_{xx}(t))dt \to \int_0^T (u_x, v_x(t)) + (u_{xx}(t), v_{xx}(t))dt,$$

$\forall\, v \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$

□

Afirmação 2.10 $\int_0^T ([u^m(t)^2]_{xx}, v(t))dt \to \int_0^T ([u(t)^2]_{xx}, v(t))dt, \ \ \forall\, v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Demonstração: De fato, basta mostrar que $2u^m u_x^m \rightharpoonup 2uu_x$ fraco em $L^2(Q)$, pois, isto significa que,

$$(2u^m u_x^m, v)_{L^2(Q)} \to (2uu_x, v)_{L^2(Q)}, \ \ \forall\, v \in L^2(Q).$$

E, como $L^2(Q) \equiv L^2(0,T; L^2(\Omega))$, temos que

$$\int_0^T (2u^m(t)u_x^m(t), v(t))dt \to \int_0^T (2u(t)u_x(t), v(t))dt, \ \ \forall\, v \in L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

Em particular, se $v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ então $v_x \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, daí,

$$\int_0^T (2u^m(t)u_x^m(t), v_x(t))dt \to \int_0^T (2u(t)u_x(t), v_x(t))dt, \ \ \forall\, v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

que é equivalente ao que queremos.

Assim, sabemos que $u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ e $u_t \in L^2(0,T;H_0^1)$, então, do Teorema 1.24 (Aubin-Lions), tomando $B = H_0^1(\Omega)$, $B_0 = H_0^2(\Omega)$, $B_1 = L^2(\Omega)$, $p_0 = p_1 = 2$ temos que a imersão $W \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ é compacta. Como u^m é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ e u^m é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então u^m é limitada em W, logo podemos tomar uma subseqüência, denotada da mesma forma, tal que

$$u^m \to u \text{ forte em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} u^m &\to u \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\ u_x^m &\to u_x \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Aplicando a Proposição 1.21 em (2.48) temos que

$$\begin{aligned} u^m &\to u \ q.s \text{ em } Q,\\ u_x^m &\to u_x \ q.s \text{ em } Q, \end{aligned}$$

então

$$2u^m u_x^m \to 2uu_x \ q.s \text{ em } Q. \tag{2.49}$$

Agora, basta mostrar que $|2u^m u_x^m|_{L^2(Q)} < \infty$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_0^T |2u^m(t)u_x^m(t)|^2 dt &= 2\int_0^T \int_\Omega |u^m(x,t)|_{\mathbb{R}}^2 |u_x^m(x,t)|_{\mathbb{R}}^2 dt\\ &\le 2\int_0^T |u^m(t)|_{L^\infty(\Omega)}^2 |u_x^m(t)|^2 dt\\ &\le 2\int_0^T |u^m(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 |u_x^m(t)|^2 dt\\ &\le C_1 \int_0^T |u_x^m(t)|^2 |u_x^m(t)|^2 dt\\ &\le C_1 \int_0^T |u_x^m(t)|^4 dt\\ &\le C_1 T |u_x^m|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^4 < \infty. \end{aligned}$$

Logo, como $|2u^m u_x^m|_{L^2(Q)} < \infty$ e de (2.49), pela Proposição 1.23, temos que

$$2u^m u_x^m \rightharpoonup 2uu_x \text{ fraco em } L^2(Q),$$

como queríamos.

$\square$

Vejamos que com isso u satisfaz a equação integral (2.3) do Problema Cilíndrico. De fato, dado $v \in V_m$ temos que existem $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_m^m$ em $\mathbb{R}$ tais que $v = \sum_{j=1}^m \lambda_j^m \omega_j$. Multiplicando a equação $(2.6)_1$ por λ_j e somando com j variando de 1 até m temos a seguinte equação

$$(u_{tt}^m(t), v) + (u_x^m(t), v_x) + (u_{xt}^m(t), v_x) - ([u^m(t)^2]_{xx}, v) + (u_{xx}^m(t), v_{xx}) = 0.$$

Multiplicando essa equação por $\varphi \in L^2(0,T)$ tal que $\varphi_t \in L^2(0,T)$ e $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$ e integrando de 0 a T obtemos

$$\begin{gathered}\int_0^T (u_{tt}^m(t), v)\varphi(t)dt + \int_0^T (u_x^m(t), v_x)\varphi(t)dt + \int_0^T (u_{xt}^m(t), v_x)\varphi(t)dt \\ - \int_0^T ([u^m(t)^2]_{xx}, v)\varphi(t)dt + \int_0^T (u_{xx}^m(t), v_{xx})\varphi(t)dt = 0.\end{gathered}$$

Integrando por partes temos

$$\begin{gathered}- \int_0^T (u_t^m(t), v)\varphi'(t)dt + \int_0^T (u_x^m(t), v_x)\varphi(t)dt + \int_0^T (u_{xt}^m(t), v_x)\varphi(t)dt \\ - \int_0^T ([u^m(t)^2]_{xx}, v)\varphi(t)dt + \int_0^T (u_{xx}^m(t), v_{xx})\varphi(t)dt = 0.\end{gathered} \tag{2.50}$$

Como $v \in V_m$ então $v\varphi \in L^2(0,T; H_0^2(\Omega))$ e $v\varphi_t \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$. Com isso, de (2.47) e das Afirmações 2.8, 2.9 e 2.10 podemos passar o limite e obter

$$\begin{gathered}- \int_0^T (u_t(t), v)\varphi'(t)dt + \int_0^T (u_x(t), v_x)\varphi(t)dt + \int_0^T (u_{xt}(t), v_x)\varphi(t)dt \\ - \int_0^T ([u(t)^2]_{xx}, v)\varphi(t)dt + \int_0^T (u_{xx}(t), v_{xx})\varphi(t)dt = 0,\end{gathered} \tag{2.51}$$

$\forall\, v \in V_m$ já que v foi tomado arbitrário.

A equação (2.51) é válida para todo $v \in H_0^2(\Omega)$. De fato, dado $v \in H_0^2(\Omega)$, como o conjunto $\cup_{m=1}^\infty V_m$ é denso em $H_0^2(\Omega)$, existe uma seqüência (v_m), com $v_m \in V_m$ tal que

$|v_m - v|_{H_0^2(\Omega)} \to 0$. Com isso podemos notar que

$$\left|\int_0^T (u_t(t), v_m)\varphi'(t)dt - \int_0^T (u_t(t), v)\varphi'(t)dt\right| = \left|\int_0^T (u_t(t), v_m - v)\varphi'(t)dt\right|$$
$$\leq \int_0^T |u_t(t)||v_m - v||\varphi'(t)|dt$$
$$\leq |v_m - v| \left[\int_0^T |u_t(t)|^2 dt\right]^{1/2} \left[\int_0^T |\varphi'(t)|_{\mathbb{R}}^2 dt\right]^{1/2}$$
$$\leq |v_m - v| \|u_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|\varphi'\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \to 0.$$

De modo análogo temos o mesmo para as outras parcelas lineares. Para a parcela não linear observe que $|u_x(t)|_{L^2(\Omega)}, \ |u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq |u(t)|_{H_0^2(\Omega)} \in L^\infty(0,T) \subset L^2(0,T)$, daí, pela desigualdade de Holder, $|u(t)u_x(t)|_{L^1(\Omega)} \leq |u(t)||u_x(t)| \leq |u(t)|^2_{H_0^2(\Omega)}$, então

$$\left|\int_0^T (2u(t)u_x(t), v_{mx})\varphi(t)dt - \int_0^T (2u(t)u_x(t), v_x)\varphi(t)dt\right| \leq \int_0^T 2|u(t)u_x(t)||v_{mx} - v_x||\varphi(t)|dt$$
$$\leq 2|v_{mx} - v_x| \int_0^T |u(t)u_x(t)||\varphi(t)|_{\mathbb{R}} dt$$
$$\leq 2|v_{mx} - v_x| \int_0^T C_1 |u_x(t)|^2 |\varphi(t)|_{\mathbb{R}} dt$$
$$\leq 2|v_{mx} - v_x| C_1 |u_x(t)|^2_{L^\infty(0,T)} |u_x|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} |\varphi|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \to 0.$$

Para mostrar que a igualdade integral (2.3) é válida basta notar que o conjunto das combinações lineares de funções da forma $v(x)\varphi(t)$ com $v \in H_0^2(\Omega)$ e $\varphi \in L^2(0,T)$ tal que $\varphi_t \in L^2(0,T)$ e $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$ é denso no conjunto das funções $\theta \in L^2(0,T; H_0^2(\Omega))$ tais que $\theta_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

Agora vejamos que u satisfaz as condições iniciais (2.4) do Problema Cilíndrico .

2.4 Condições Iniciais

Para verificar as condições iniciais provemos algumas afirmações.

Afirmação 2.11 $u_{tt} \in L^2(0,T; H^{-2}(\Omega))$.

Demonstração: Como $u_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ então podemos definir uma distribuição da seguinte forma. Dado $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\langle \widetilde{u}_t, \varphi \rangle = \int_0^T u_t(t)\varphi(t)dt \in H_0^1(\Omega).$$

Essa distribuição é derivável e temos que a derivada é dada por

$$\langle \widetilde{u}_{tt}, \varphi \rangle = -\langle \widetilde{u}_t, \varphi' \rangle = -\int_0^T u_t(t)\varphi'(t)dt.$$

Daí, podemos definir a aplicação $\widetilde{u}_{tt} : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow H^{-2}(\Omega)$ como sendo

$$\langle \langle \widetilde{u}_{tt}, \varphi \rangle, v \rangle = (\langle \widetilde{u}_{tt}, \varphi \rangle, v) = -\int_0^T (u_t(t), v)\varphi'(t)dt, \ \ \forall\, v \in H_0^2(\Omega), \tag{2.52}$$

onde a última igualdade é devido ao Teorema 1.7.

Assim, como $u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ então $u_{xx} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, daí, da mesma forma, podemos definir a aplicação $u_{xx} : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow H^{-2}(\Omega)$ como sendo

$$\langle \langle u_{xx}, \varphi \rangle, v \rangle = -\int_0^T (u_{xx}(t), v)\varphi(t)dt, \ \ \forall\, v \in H_0^2(\Omega). \tag{2.53}$$

Note que

$$\begin{aligned} |u_{xx}(t)|_{H^{-2}(\Omega)} &\leq \frac{|(u_{xx}(t), v)|_{\mathbb{R}}}{|v|_{H_0^2(\Omega)}} \\ &\leq \frac{|u_{xx}(t)||v|}{|v|_{H_0^2(\Omega)}} \\ &\leq |u_{xx}(t)| \in L^2(0,T), \end{aligned}$$

daí, $u_{xx} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$.

Agora, veja que como $(u_{xx}(t), \ \cdot\ )$ pertence a $H^{-2}(\Omega)$ então define uma distribuição sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, que é derivável, então temos que

$$\langle u_{xxxx}(t), \phi \rangle = (u_{xx}(t), \phi_{xx}), \ \ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pela densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H_0^2(\Omega)$ e a continuidade do operador derivação sobre $\mathcal{D}'(\Omega)$ temos que

$$\langle u_{xxxx}(t), v\rangle = (u_{xx}(t), v_{xx}), \ \ \forall\, v \in H_0^2(\Omega).$$

Assim, podemos definir uma aplicação $u_{xxxx} : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow H^{-2}(\Omega)$ da seguinte maneira

$$\langle\langle u_{xxxx}, \varphi\rangle, v\rangle = \int_0^T (u_{xx}(t), v_{xx})\varphi(t)dt, \ \ \forall\, v \in H_0^2(\Omega). \tag{2.54}$$

E observe que

$$|u_{xxxx}(t)|_{H^{-2}(\Omega)} \leq \frac{|(u_{xx}(t), v_{xx})|_{\mathbb{R}}}{|v|_{H_0^2(\Omega)}} \leq |u_{xx}(t)| \in L^2(0,T),$$

daí, $u_{xxxx} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$.

Do mesmo modo, como $u_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ então $u_{txx} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ e

$$\langle\langle u_{txx}, \varphi\rangle, v\rangle = -\int_0^T (u_{tx}(t), v_x)\varphi(t)dt, \ \ \forall\, v \in H_0^2(\Omega). \tag{2.55}$$

Agora, vejamos que $[u^2]_{xx} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. De fato, temos que

$$[u^2]_{xx} = 2u_x^2 + 2uu_{xx}. \tag{2.56}$$

Sabemos que

$$u_x \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)),$$

neste caso, observe que

$$|u_x^2(x,t)|_{\mathbb{R}} \leq |u_x(x,t)|_{\mathbb{R}}^2 \leq |u_x(t)|_{L^\infty(\Omega)}^2 \ q.s\ em\ \Omega,$$

então

$$|u_x^2(t)|_{L^\infty(\Omega)} \leq |u_x(t)|_{L^\infty(\Omega)}^2 \in L^\infty(0,T)$$

e portanto

$$u_x^2 \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)). \tag{2.57}$$

Também temos que

$$u_{xx} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

então, do mesmo modo,

$$uu_{xx} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)). \tag{2.58}$$

Neste caso, de (2.56), (2.57) e (2.58) temos que

$$[u^2]_{xx} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)). \tag{2.59}$$

Daí, podemos definir uma aplicação $[u^2]_{xx} : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow H^{-2}(\Omega)$ da seguinte forma

$$\langle\langle [u^2]_{xx}, \varphi\rangle, v\rangle = \int_0^T \langle [u(t)^2]_{xx}, v\rangle \varphi(t)dt, \ \ \forall\, v \in H_0^2(\Omega). \tag{2.60}$$

Já provamos que a equação integral (2.3) é válida. Então dados $v \in H_0^2(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ tomando $\theta = v\varphi$ temos que

$$\begin{gathered} -\int_0^T (u_t(t),v)\varphi'(t)dt + \int_0^T (u_x(t),v_x)\varphi(t)dt + \int_0^T (u_{xt}(t),v_x)\varphi(t)dt \\ -\int_0^T ([u(t)^2]_{xx},v)\varphi(t)dt + \int_0^T (u_{xx}(t),v_{xx})\varphi(t)dt = 0, \end{gathered}$$

Daí, de (2.52), (2.53), (2.54), (2.55) e (2.60),

$$\langle\langle \widetilde{u}_{tt},\varphi\rangle,v\rangle - \langle\langle u_{xx},\varphi\rangle,v\rangle - \langle\langle u_{txx},\varphi\rangle,v\rangle - \langle\langle [u^2]_{xx},\varphi\rangle,v\rangle + \langle\langle u_{xxxx},\varphi\rangle,v\rangle = 0,$$

portanto a distribuição $\widetilde{u}_{tt} : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow H^{-2}(\Omega)$ é igual a distribuição definida pela função

$$(u_{xx} + u_{txx} + [u^2]_{xx} - u_{xxxx}) : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow H^{-2}(\Omega),$$

que, como vimos, pertence a $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Logo, existe $u_{tt} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ a qual define $\widetilde{u}_{tt}$.

$\square$

Afirmação 2.12 $u(x,0) = u_0(x), \ \ \forall x \in \Omega.$

Demonstração: Com efeito, podemos definir as aplicações $(u^m(0), \ \cdot \ ), (u_0, \ \cdot \ ) : H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. Do Problema Aproximado (2.6) $u^m(0) \to u_0$ em $H_0^2(\Omega)$, então

$$(u^m(0), w) \to (u_0, w) \ \ \forall \, w \in H_0^2(\Omega). \tag{2.61}$$

Por outro lado, tomando $w \in H_0^2(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e integrando por partes temos que

$$-(u^m(0), w) = \int_0^T (u_t^m(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (u^m(t), w)\theta'(t)dt. \tag{2.62}$$

Como $u \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ e $u_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ então, $(u,w)\theta \in L^2(0,T;\mathbb{R})$ e $\frac{d}{dt}[(u,w)\theta] \in L^2(0,T;\mathbb{R})$, daí, pela Proposição 1.10 temos que $(u,w)\theta \in C^0([0,T];\mathbb{R})$ e vale a igualdade

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(u(t),w)\theta(t)]dt = (u(T),w)\theta(T) - (u(0),w)\theta(0).$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} -(u(0),w) &= (u(T),w)\theta(T) - (u(0),w)\theta(0) \\ &= \textstyle\int_0^T \frac{d}{dt}[(u(t),w)\theta(t)]dt \\ &= \textstyle\int_0^T (u_t(t),w)\theta(t) + (u(t),w)\theta'(t)dt \\ &= \textstyle\int_0^T (u_t(t),w)\theta(t)dt + \int_0^T (u(t),w)\theta'(t)dt. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Assim, de (2.43) e (2.47), tomando $v = w\theta'$ e $v = w\theta$ respectivamente, e aplicando limite em (2.62), temos, de (2.63) que

$$(u^m(0), w) \to (u(0), w) \ \ \forall \, w \in H_0^2(\Omega). \tag{2.64}$$

Dessa forma, note, de (2.61) e (2.64), que

$$(u(0)-u_0,w)=(u(0)-u^m(0),w)+(u^m(0)-u_0,w)\to 0\ \ \forall\, w\in H_0^2(\Omega).$$

Assim, $(u(0)-u_0,w)=0\ \ \forall\ w\in H_0^2(\Omega)$, em particular, para $w=u(0)-u_0$, então $|u(0)-u_0|^2=0$ e logo

$$u(0)=u_0.$$

□

Afirmação 2.13 $u_t(0)=u_1$ *em* $L^2(\Omega)$

Demonstração: Do Problema Aproximado (2.6) $u_t^m(0)\to u_1$ em $L^2(\Omega)$, com isso $(u_t^m(0),w)\to(u_1,w)\ \forall\, w\in L^2(\Omega)$, em particular, $\forall\, w\in H_0^2(\Omega)$.

Assim, basta mostrar que $(u_t^m(0),w)\to(u_t(0),w)\ \forall\ w\in H_0^2(\Omega)$, pois, neste caso, $(u_t(0)-u_1,w)=0\ \forall\, w\in H_0^2(\Omega)$, em particular, $\forall\,\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$, com isso,

$$\int_\Omega(u_t(x,0)-u_1(x))\phi(x)dx=0\ \ \forall\,\phi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Pelo Lema 1.1 (de Du Bois Raymond) temos que $u_t(x,0)=u_1(x)\ q.s$ em Ω, logo $u_t(0)=u_1$ em $L^2(\Omega)$.

Vejamos então que $(u_t^m(0),w)\to(u_t(0),w)\ \forall\, w\in H_0^2(\Omega)$. De fato, da Afirmação 2.11 e da densidade de $\mathcal{D}(0,T)$ em $L^2(0,T)$ temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\langle u_{tt}(t),w\rangle\varphi(t)dt &= \langle\langle u_{tt},\varphi\rangle,w\rangle\\ &= -\int_0^T(u_t(t),w)\varphi'(t)dt,\ \ \forall w\in H_0^2(\Omega)\text{ e }\forall\,\varphi\in L^2(\Omega).\end{aligned}$$

De (2.47), tomando $v=w\varphi'$ temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T(u_{tt}^m(t),w)\varphi(t)dt=-\int_0^T(u_t^m(t),w)\varphi'(t)dt\to-\int_0^T(u_t(t),w)\varphi'(t)dt\\ =\langle\langle u_{tt},\varphi\rangle,w\rangle=\int_0^T\langle u_{tt}(t),w\rangle\varphi(t)dt\end{aligned}\tag{2.65}$$

Procedendo com na Afirmação 2.12 temos que (u_t, w) e $\langle u_{tt}, w\rangle \in L^2(0,T;\mathbb{R})$. Tomando $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ temos que $(u_t, w)\theta$ e $\frac{d}{dt}[(u_t, w)\theta] \in L^2(0,T;\mathbb{R})$, assim, pela Proposição 1.10 temos que $(u_t, w)\theta \in C^0([0,T];\mathbb{R})$ e vale a igualdade

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(u_t(t), w)\theta(t)]dt = (u_t(T), w)\theta(T) - (u_t(0), w)\theta(0).$$

Com isso, temos que

$$\begin{array}{rcl} -(u_t(0), w) & = & (u_t(T), w)\theta(T) - (u_t(0), w)\theta(0) \\ & = & \int_0^T \frac{d}{dt}[(u_t(t), w)\theta(t)]dt \\ & = & \int_0^T \langle u_{tt}(t), w\rangle\theta(t) + (u_t(t), w)\theta'(t)dt \\ & = & \int_0^T \langle u_{tt}(t), w\rangle\theta(t)dt + \int_0^T (u_t(t), w)\theta'(t)dt. \end{array} \tag{2.66}$$

Daí, como anteriormente, passando limite temos que

$$(u_t^m(0), w) \to (u_t(0), w) \;\; \forall w \in H_0^2(\Omega)$$

como queríamos.

□

Dessa maneira concluímos a demonstração da existência de solução para o Problema Cilíndrico (2.1), agora passemos à demonstração da unicidade.

2.5 Unicidade

Sejam u e $\widetilde{u}$ soluções do Problema (2.1) e defina $w = u - \widetilde{u}$. Com isso temos que $\forall\, T > 0$, w satisfaz

$$w \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \text{ e } w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \tag{2.67}$$

A identidade integral

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T (w_t(t),\theta_t(t))dt + \int_0^T (w_x(t)+w_{tx}(t),\theta_x(t))dt + \\
\int_0^T (w_{xx}(t),\theta_{xx}(t))dt + \int_0^T ([u(t)^2]_x - [\widetilde{u}(t)^2]_x,\theta_x(t))dt = 0
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

para todo $\theta \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ tal que $\theta_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\theta(0)=\theta(T)=0$.

E as condições

$$
w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=0. \tag{2.69}
$$

Observação 2.14 *A identidade integral (2.68) continua valendo se $\theta(0)\neq 0$.*

De fato, suponha que $\theta(0)\neq 0$ e note que

$$
\int_0^T \frac{d}{dt}[(w_t(t),\theta(t))]dt = \int_0^T \langle w_{tt}(t),\theta(t)\rangle dt + \int_0^T (w_t(t),\theta_t(t))dt.
$$

Por outro lado, como $w_t(x,0)=0$ e $\theta(x,T)=0$ temos que

$$
\int_0^T \frac{d}{dt}[(w_t(t),\theta(t))]dt = (w_t(T),\theta(T)) - (w_t(0),\theta(0)) = 0.
$$

Com isso temos que

$$
\int_0^T \langle w_{tt}(t),\theta(t)\rangle dt = -\int_0^T (w_t(t),\theta_t(t))dt. \tag{2.70}
$$

Assim, defina

$$
\psi(x,t) = \begin{cases} \theta(x,t),\ \text{se } (x,t)\in\Omega\times(0,T]; \\ 0,\ \text{se } (x,t)\in\Omega\times\{0\}. \end{cases}
$$

Como $\psi=\theta$ $q.s$ em Q, então $\psi\in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ e $\psi_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e ainda $\psi(0)=\psi(T)=0$. Então vale a identidade integral (2.68) para ψ, além disso temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \langle w_{tt}(t),\theta(t)\rangle dt &= \int_Q w_{tt}(x,t)\theta(x,t)dxdt \\
&= \int_Q w_{tt}(x,t)\psi(x,t)dxdt \\
&= \int_0^T \langle w_{tt}(t),\psi(t)\rangle dt.
\end{aligned}
$$

E pela mesma razão,

$$\begin{gathered}\int_0^T (w_x(t)+w_{tx}(t),\theta_x(t))dt = \int_0^T (w_x(t)+w_{tx}(t),\psi_x(t))dt;\\ \int_0^T (w_{xx}(t),\theta_{xx}(t))dt = \int_0^T (w_{xx}(t),\psi_{xx}(t))dt;\\ \int_0^T ([u(t)^2]_x-[\widetilde{u}(t)^2]_x,\theta_x(t))dt = \int_0^T ([u(t)^2]_x-[\widetilde{u}(t)^2]_x,\psi_x(t))dt.\end{gathered}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle w_{tt}(t),\theta(t)\rangle dt + \int_0^T (w_x(t)+w_{tx}(t),\theta_x(t))dt\\ + & \int_0^T (w_{xx}(t),\theta_{xx}(t))dt + \int_0^T ([u(t)^2]_x-[\widetilde{u}(t)^2]_x,\theta_x(t))dt\\ = & \int_0^T \langle w_{tt}(t),\psi(t)\rangle dt + \int_0^T (w_x(t)+w_{tx}(t),\psi_x(t))dt\\ + & \int_0^T (w_{xx}(t),\psi_{xx}(t))dt + \int_0^T ([u(t)^2]_x-[\widetilde{u}(t)^2]_x,\psi_x(t))dt = 0.\end{aligned}$$

Finalmente de (2.70) temos que

$$\begin{gathered}-\int_0^T (w_t(t),\theta_t(t))dt + \int_0^T (w_x(t)+w_{tx}(t),\theta_x(t))dt+\\ \int_0^T (w_{xx}(t),\theta_{xx}(t))dt + \int_0^T ([u(t)^2]_x-[\widetilde{u}(t)^2]_x,\theta_x(t))dt = 0,\end{gathered}$$

o que conclui a observação.

Note que, como $w_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ não podemos fazer $\theta = w_t$ na equação anterior, assim, para resolver o problema da unicidade, aplicaremos o método devido a Ladyzhenskaya [4]. Então, para cada $s \in [0,T]$ fixo, definamos a seguinte função

$$z(x,t) = \begin{cases} -\int_t^s w(x,\xi)d\xi, \text{ se } t\in[0,s];\\ 0, \text{ se } t \in [s,T].\end{cases}$$

Observação 2.15 *Podemos ver que z satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $z(T)=0$;

(b) $z_t(t) = \begin{cases} w(t), \text{ se } t\in[0,s];\\ 0, \text{ se } t\in[s,T];\end{cases}$

(c) Defina $z_1(t) = \int_0^t w(\xi)d\xi$, *com isso temos que* $z(t) = z_1(t) - z_1(s)$ *e* $z(0) = -z_1(s)$;

(d) $z \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ *e* $z_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Vamos agora demonstrar algumas Afirmações das quais decorrerá a unicidade.

Afirmação 2.16 $\int_0^T (w_t(t), z_t(t))dt = \frac{1}{2}|w(s)|^2$.

Demonstração: De fato,

$$\int_0^T (w_t(t), z_t(t))dt = \int_0^T (w_t(t), w(t))dt = \int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 dt = \frac{1}{2}|w(s)|^2.$$

□

Afirmação 2.17 $\int_0^T (w_x(t), z_x(t))dt \leq \frac{1}{8}|z_{1xx}(s)|^2 + C\int_0^s |w(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^s |z_{1xx}(t)|^2 dt$, *onde* C *é a constante* $8T + \frac{1}{2}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\int_0^T (w_x(t), z_x(t))dt &= -\int_0^s (w(t), z_{xx}(t))dt \\
&\leq \int_0^s |w(t)||z_{xx}(t)|dt \\
&\leq \int_0^s |w(t)||z_{1xx}(t) - z_{1xx}(s)|dt \\
&\leq \int_0^s |w(t)||z_{1xx}(s)|dt + \int_0^s |w(t)||z_{1xx}(t)|dt \\
&\leq 2\left[\frac{1}{\sqrt{8}}|z_{1xx}(s)|\right]\left[\sqrt{8}\int_0^s |w(t)|dt\right] + \frac{1}{2}\int_0^s |w(t)|^2 + |z_{1xx}(t)|^2 dt \\
&\leq \frac{1}{8}|z_{1xx}(s)|^2 + 8\left[\int_0^s |w(t)|dt\right]^2 + \frac{1}{2}\int_0^s |w(t)|^2 + |z_{1xx}(t)|^2 dt \\
&\leq \frac{1}{8}|z_{1xx}(s)|^2 + 8T\int_0^s |w(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^s |w(t)|^2 + |z_{1xx}(t)|^2 dt \\
&\leq \frac{1}{8}|z_{1xx}(s)|^2 + \left(8T + \frac{1}{2}\right)\int_0^s |w(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^s |z_{1xx}(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

□

Afirmação 2.18 $\int_0^T (w_{tx}(t), z_x(t))dt \leq \int_0^s |w(t)|^2 dt$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\int_0^T (w_{tx}(t), z_x(t))dt &= -\int_0^s (w_x(t), z_{tx}(t))dt \\
&= -\int_0^s (w_x(t), w_x(t))dt \\
&= -\int_0^s |w_x(t)|^2 dt \\
&= -\int_0^s |w_x(t)|^2 dt \\
&\leq -\int_0^s |w(t)|^2 dt \\
&\leq \int_0^s |w(t)|^2 dt,
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade é devida à desigualdade de Poincaré-Friedricks.

□

Afirmação 2.19 $\int_0^T (w_{xx}(t), z_{xx}(t))dt = -\frac{1}{2}|z_{1xx}(s)|^2$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\int_0^T (w_{xx}(t), z_{xx}(t))dt &= \int_0^T (z_{txx}(t), z_{xx}(t))dt \\
&= \int_0^s \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}|z_{xx}(t)|^2 dt \\
&= \tfrac{1}{2}|z_{xx}(s)|^2 - \tfrac{1}{2}|z_{xx}(0)|^2 \\
&= -\tfrac{1}{2}|z_{1xx}(s)|^2.
\end{aligned}$$

□

Afirmação 2.20

$$\int_0^T ([u(t)^2]_x - [\widetilde{u}(t)^2]_x, z_x(t))dt \le \tfrac{1}{8}|z_{1xx}(s)|^2 + C_2 \int_0^s |w(t)|^2 dt + \tfrac{C_1}{2}\int_0^s |z_{1xx}(t)|^2 dt.$$

Demonstração: De fato, tome

$$I_1 = \int_0^s (w_x(t)(u(t) + \widetilde{u}(t)), z_x(t))dt,$$

$$I_2 = \int_0^s (w(t)(u(t) + \widetilde{u}(t))_x, z_x(t))dt,$$

$$I_3 = \int_0^s (w(t), (u(t) + \widetilde{u}(t))z_{xx}(t))dt$$

E observe que,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^s (w_x(t), (u(t) + \widetilde{u}(t))z_x(t))dt \\
&= -\int_0^s (w(t), [(u(t) + \widetilde{u}(t))z_x(t)]_x)dt \\
&= -\int_0^s (w(t), (u(t) + \widetilde{u}(t))_x z_x(t))dt - \int_0^s (w(t), (u(t) + \widetilde{u}(t))z_{xx}(t))dt \\
&= -I_2 - I_3.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T ([u(t)^2 - \widetilde{u}(t)^2]_x, z_x(t))dt = \\
&= \int_0^s ([(u(t) - \widetilde{u}(t))(u(t) + \widetilde{u}(t))]_x, z_x(t))dt \\
&= \int_0^s (w_x(t)(u(t) + \widetilde{u}(t)), z_x(t))dt + \int_0^s (w(t)(u(t) + \widetilde{u}(t))_x, z_x(t))dt \\
&= I_1 + I_2 = -I_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^s (w(t),(u(t)+\widetilde{u}(t))z_{xx}(t))dt\\
&\leq \int_0^s\int_0^1 |w(x,t)|_{\mathbb{R}}|u(x,t)+\widetilde{u}(x,t)|_{\mathbb{R}}|z_{xx}(x,t)|_{\mathbb{R}}dxdt\\
&\leq \int_0^s |u(t)+\widetilde{u}(t)|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^1 |w(x,t)|_{\mathbb{R}}|z_{xx}(x,t)|_{\mathbb{R}}dxdt\\
&\leq \int_0^s |u(t)+\widetilde{u}(t)|_{H_0^2(\Omega)}|w(t)||z_{xx}(t)|dt\\
&\leq C_1\int_0^s |w(t)||z_{xx}(t)|dt\\
&\leq C_1\int_0^s |w(t)||z_{1xx}(t)-z_{1xx}(s)|dt\\
&\leq C_1\int_0^s |w(t)||z_{1xx}(s)|dt + C_1\int_0^s |w(t)||z_{1xx}(t)|dt\\
&\leq 2\left[\tfrac{1}{\sqrt{8}}|z_{1xx}(s)|\right]\left[\sqrt{8}C_1\int_0^s |w(t)|dt\right] + \tfrac{C_1}{2}\int_0^s |w(t)|^2+|z_{1xx}(t)|^2dt\\
&\leq \tfrac{1}{8}|z_{1xx}(s)|^2 + 8C_1^2\left[\int_0^s |w(t)|dt\right]^2 + \tfrac{C_1}{2}\int_0^s |w(t)|^2+|z_{1xx}(t)|^2dt\\
&\leq \tfrac{1}{8}|z_{1xx}(s)|^2 + 8TC_1\int_0^s |w(t)|^2dt + \tfrac{C_1}{2}\int_0^s |w(t)|^2+|z_{1xx}(t)|^2dt\\
&\leq \tfrac{1}{8}|z_{1xx}(s)|^2 + \left(8TC_1+\tfrac{1}{2}\right)\int_0^s |w(t)|^2dt + \tfrac{1}{2}\int_0^s |z_{1xx}(t)|^2dt\\
&\leq \tfrac{1}{8}|z_{1xx}(s)|^2 + C_2\int_0^s |w(t)|^2dt + \tfrac{C_1}{2}\int_0^s |z_{1xx}(t)|^2dt
\end{aligned}
$$

□

Substituindo θ por z na identidade integral (2.68) decorre, das Afirmações (2.16)-(2.19), que

$$0 \leq -\frac{1}{2}|w(s)|^2 - \frac{1}{4}|z_{1xx}(s)|^2 + C_3\int_0^s |w(t)|^2dt + C_4\int_0^s |z_{1xx}(t)|^2dt.$$

Então,

$$\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{4}|z_{1xx}(s)|^2 \leq C_5\int_0^s \frac{1}{2}|w(t)|^2 + \frac{1}{4}|z_{1xx}(t)|^2dt,$$

e, pela desigualdade de Gronwall,

$$\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{4}|z_{1xx}(s)|^2 \leq 0\cdot e^{\int_0^s C_5 dt} = 0.$$

Portanto, $w(s)=0$ e como s foi tomado arbitrário, temos que $w\equiv 0$, logo $u=\widetilde{u}$ o que finaliza a demonstração do Teorema 2.3.

□

2.6 Decaimento Exponencial

Teorema 2.21 *Assumindo as hipóteses do Teorema 2.3 temos que a energia*

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{|u_t(t)|^2 + |u_x(t)|^2 + |u_{xx}(t)|^2\right\} \tag{2.71}$$

do sistema (2.1) satisfaz

$$E(t) \leq \alpha_1 \exp\{-\alpha_0 t\},\ \forall\, t \geq 0. \tag{2.72}$$

Demonstração: Com efeito, na Seção 2.2 obtivemos a desigualdade (2.29), dada por

$$\tfrac{d}{dt}K^m(t) + \tfrac{3}{10}|u_x^m(t)|^2 + \tfrac{3}{20}|u_{tx}^m(t)|^2 + \tfrac{3}{5}|u_{xx}^m(t)|^2 \leq 0. \tag{2.73}$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedricks temos que

$$\tfrac{d}{dt}K^m(t) + \tfrac{3}{20}\left\{|u_x^m(t)|^2 + |u_t^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\} \leq 0. \tag{2.74}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} K^m(t) &= \tfrac{1}{2}\left\{|u_t^m(t)|^2 + \tfrac{6}{5}(u_t^m(t), u^m(t)) + \tfrac{8}{5}|u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\} \\ &\leq \tfrac{4}{5}|u_t^m(t)|^2 + \tfrac{11}{10}|u_x^m(t)|^2 + \tfrac{1}{2}|u_{xx}^m(t)|^2 \\ &\leq \tfrac{6}{5}\left\{|u_t^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Assim, tomando um $\alpha_0 \in (0, \frac{1}{8}]$, multiplicando por (2.75) e somando com (2.74) obtemos

$$\frac{d}{dt}K^m(t) + \alpha_0 K^m(t) \leq 0. \tag{2.76}$$

Então, multiplicando (2.76) pelo fator integrante $e^{\alpha_0 t}$ temos que

$$\frac{d}{dt}\left(K^m(t)e^{\alpha_0 t}\right) \leq 0,$$

daí, integrando de 0 a t e da Observação 2.5 temos que

$$K^m(t)e^{\alpha_0 t} \leq K^m(0) \leq K_1.$$

Vimos também que

$$K^m(t) \geq \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{5}|u_t^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\}.$$

Com isso, tomando $K_3 \in (0, \frac{2}{5}]$ temos que

$$\begin{aligned} \tfrac{K_3}{2}\left\{|u_t^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\} &\leq \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{2}{5}|u_t^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\} \\ &\leq K^m(t) \leq K_1 e^{-\alpha_0 t}. \end{aligned}$$

Então,

$$E^m(t) \leq K_3^{-1} K_1 e^{-\alpha_0 t} = \alpha_1 e^{-\alpha_0 t}, \tag{2.77}$$

onde $E^m(t) = \frac{1}{2}\left\{|u_t^m(t)|^2 + |u_x^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2\right\}$.

Afirmação 2.22 *$u_t^m(T) \rightharpoonup u_t(T)$ em $L^2(\Omega)$.*

Demonstração: Com efeito, assim como feito na Afirmação 2.5, tomando $w \in H_0^2(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ tal que $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$ temos que

$$\begin{aligned} (u_t^m(T), w) &= \textstyle\int_0^T (u_{tt}^m(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (u_t^m(t), w)\theta'(t)dt, \\ (u_t(T), w) &= \textstyle\int_0^T \langle u_{tt}(t), w\rangle\theta(t)dt + \int_0^T (u_t(t), w)\theta'(t)dt. \end{aligned}$$

Assim, passando limite na primeira equação vemos que

$$(u_t^m(T), w) \to (u_t(T), w), \ \ \forall\, w \in H_0^2(\Omega).$$

Como $H_0^2(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ então, dado $w \in L^2(\Omega)$ existe uma seqüência $(w_n) \in H_0^2(\Omega)$ tal que $w_n \to w$ em $L^2(\Omega)$. Sabemos, de (2.34), que $|u_t^m(T)| \leq K_2$, com isso, $|u_t^m(T) - u_t(T)| \leq C$, onde C é uma constante. Daí, dado $\varepsilon > 0$, tome w_{n_0} tal que $|w_{n_0} - w| < \frac{\varepsilon}{2C}$ e tome m_0 tal que se $m > m_0$ então $|(u_t^m(T) - u_t(T), w_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí, se

$m > m_0$ então

$$|(u_t^m(T) - u_t(T), w)| \leq |u_t^m(T) - u_t(T)||w - w_{n_0}| + |(u_t^m(T) - u_t(T), w_{n_0})| < \varepsilon.$$

Portanto $u_t^m(T) \rightharpoonup u_t(T)$ em $L^2(\Omega)$. $\square$

Afirmação 2.23 *$u_x^m(T) \rightharpoonup u_x(T)$ em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: De fato, de (2.32) obtivemos que

$$(u_x^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Com isso, $u_x^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_x$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, ou seja,

$$\int_0^T \langle u_x^m(t), v(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle u_x(t), v(t)\rangle dt, \ \ \forall\, v \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.78}$$

Sendo assim, tome $w \in H_0^1(\Omega)$, daí, dado $\theta \in L^2(0,T)$ temos que $(\,\cdot\,, w)_{H_0^1(\Omega)}\theta \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$, então de (2.78)

$$\int_0^T (u_x^m(t), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta(t)dt \to \int_0^T (u_x(t), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta(t)dt. \tag{2.79}$$

Como θ é arbitrário temos que

$$(u_x^m, w)_{H_0^1(\Omega)} \rightharpoonup (u_x, w)_{H_0^1(\Omega)} \text{ em } L^2(0,T). \tag{2.80}$$

Como $u_x \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ então

$$(u_x, w)_{H_0^1(\Omega)} \in L^2(0,T;\mathbb{R}). \tag{2.81}$$

Assim, podemos definir a seguinte distribuição

$$\langle (u_x, w)_{H_0^1(\Omega)}, \varphi\rangle = \int_0^T (u_x(t), w)_{H_0^1(\Omega)}\varphi(t)dt,$$

cuja derivada, sabemos, é dada por

$$\begin{aligned}\langle \tfrac{d}{dt}(u_x, w)_{H_0^1(\Omega)}, \varphi\rangle &= -\textstyle\int_0^T (u_x, w)_{H_0^1(\Omega)}\varphi'(t)dt \\ &= -\textstyle\int_0^T (u_x, w)\varphi'(t)dt - \int_0^T (u_{xx}, w_x)\varphi'(t)dt.\end{aligned} \tag{2.82}$$

Como $u_t \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ então

$$-\int_0^T (u_x(t), w)\varphi'(t)dt = \int_0^T (u_{tx}, w)\varphi(t)dt = \langle (u_{tx}, w), \varphi\rangle. \tag{2.83}$$

Agora, como $u_{tx}(t) \in L^2(\Omega)$, podemos definir uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$ dada por

$$\langle u_{tx}(t), \phi\rangle = (u_{tx}(t), \phi),$$

e sabemos que a derivada é a distribuição dada por

$$\langle u_{txx}(t), \phi\rangle = -(u_{tx}(t), \phi_x),$$

assim, aplicando ϕ_x nessa distribuição temos que

$$\langle u_{txx}(t), \phi_x\rangle = -(u_{tx}(t), \phi_{xx}), \ \ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Daí,

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^T \langle u_{txx}(t), \phi_x\rangle\varphi(t)dt &= -\textstyle\int_0^T (u_{tx}(t), \phi_{xx})\varphi(t)dt \\ &= \textstyle\int_0^T (u_x(t), \phi_{xx})\varphi'(t)dt \\ &= -\textstyle\int_0^T (u_{xx}(t), \phi_x)\varphi'(t)dt\end{aligned}$$

$\forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0, T)$.

Por densidade, temos que

$$\langle\langle u_{txx}, w_x\rangle, \varphi\rangle = \textstyle\int_0^T \langle u_{txx}(t), w_x\rangle\varphi(t)dt = -\int_0^T (u_{xx}(t), w_x)\varphi'(t)dt \tag{2.84}$$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0, T)$.

Assim, substituindo (2.83) e (2.84) em (2.82) temos

$$\langle \frac{d}{dt}(u_x, w)_{H_0^1(\Omega)}, \varphi\rangle = \langle (u_{tx}, w), \varphi\rangle + \langle\langle u_{txx}, w_x\rangle, \varphi\rangle$$

$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. Portanto,

$$\langle u_{tx}, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \frac{d}{dt}(u_x, w)_{H_0^1(\Omega)} \in L^2(0,T;\mathbb{R}). \tag{2.85}$$

Finalmente, tomando $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ tal que $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$, vemos, de (2.81) (2.85), que $(u_x, w)_{H_0^1(\Omega)}\theta$ e $\frac{d}{dt}[(u_x, w)_{H_0^1(\Omega)}\theta] \in L^2(0,T;\mathbb{R})$. Portanto, pela Proposição 1.10, $(u_x, w)_{H_0^1(\Omega)}\theta$ é contínua e vale

$$(u_x(T), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta(T) - (u_x(0), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta(0) = \int_0^T \frac{d}{dt}[(u_x(t), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta(t)]dt,$$

daí,

$$\begin{aligned} (u_x(T), w)_{H_0^1(\Omega)} &= (u_x(T), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta(T) - (u_x(0), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta(0) \\ &= \int_0^T \tfrac{d}{dt}[(u_x(t), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta(t)]dt \\ &= \int_0^T \langle u_{tx}(t), w\rangle_{H_0^1(\Omega)}\theta(t)dt + \int_0^T (u_x(t), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta'(t)dt. \end{aligned}$$

Disso e passando limite na seguinte equação

$$(u_x^m(T), w)_{H_0^1(\Omega)} = \int_0^T (u_{tx}^m(t), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta(t)dt + \int_0^T (u_x^m(t), w)_{H_0^1(\Omega)}\theta'(t)dt,$$

temos que

$$(u_x^m(T), w)_{H_0^1(\Omega)} \to (u_x(T), w)_{H_0^1(\Omega)}.$$

E como $w \in H_0^1(\Omega)$ foi tomado arbitrário temos que

$$u_x^m(T) \rightharpoonup u_x(T) \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

como queríamos.

□

Dessa forma, podemos concluir a demonstração do Teorema 2.21 observando, das Afirmações 2.22 e 2.23 e do Teorema de Banach-Steinhaus, que

$$\begin{aligned} |u_t(T)| &\leq \underline{\lim} |u_t^m(T)|, \\ |u_x(T)|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \underline{\lim} |u_x^m(T)|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

então,

$$E(T) \leq \underline{\lim} E^m(T) \leq \alpha_1 e^{-\alpha_0 T}.$$

Finalmente, como $T > 0$ foi tomado arbitrário no início, temos que

$$E(t) \leq \alpha_1 e^{-\alpha_0 t} \ \ \forall \, t \geq 0.$$

□

Capítulo 3

Problema Não-Cilíndrico

Neste capítulo provaremos a existência de solução para o problema não-cilíndrico. Para isso aplicaremos o método de penalização [7]. Este método consiste basicamente de, para cada $\epsilon > 0$, resolver um problema em um domínio cilíndrico contendo o domínio não-cilíndrico, de modo que a solução convirja para a solução desejada quando $\epsilon \to 0$.

Considere o seguinte problema misto

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - (u(x,t) + u_t(x,t) + (u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx} = 0 \text{ em } \widehat{Q}; \\ u(\alpha(t),t) = u(\beta(t),t) = u_x(\alpha(t),t) = u_x(\beta(t),t) = 0, \forall\, t \geq 0; \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \forall\, x \in [\alpha_0, \beta_0], \end{cases} \tag{3.1}$$

onde α e β são funções reais definidas em $[0,+\infty)$ tais que $\alpha(0) = \alpha_0 < \beta_0 = \beta(0)$ e $\widehat{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t)\}$ é um domínio não cilíndrico. Defina $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}; \alpha(t) < x < \beta(t), t \in [0,+\infty)\}$ e dado $T > 0$, sejam $\Omega = (a,b)$ tal que $\Omega_0 \subset \Omega$ e $Q = \Omega \times (0,T)$. Suponha ainda as seguintes **Hipóteses de Regularidade** sobre $\widehat{Q}$

- $\alpha'(t) < 0$ e $\beta'(t) > 0,\ \forall\, t \geq 0;$ (3.2)
- Se $v \in H_0^2(\Omega)$ e $v(x,t) = v_x(x,t) = 0$ $q.s$ em $\Omega \setminus \Omega_t, \forall\, t \in (0,T)$ então $v \in H_0^2(\Omega_t)$ para quase todo $t \in (0,T)$; (3.3)
- Se $v \in H_0^1(\Omega)$ e $v(x,t) = 0$ $q.s$ em $\Omega \setminus \Omega_t, \forall\, t \in (0,T)$ então $v \in H_0^1(\Omega_t)$ para quase todo $t \in (0,T)$. (3.4)

Considere os seguintes espaços

$L^P(0,T;L^2(\Omega_t)) = \{f \in L^P(0,T;L^2(\Omega)); f = 0$ q.s em $\Omega \setminus \Omega_t$ q.s em $t \in (0,T)\}$;

$L^P(0,T;H_0^1(\Omega_t)) = \{f \in L^P(0,T;H_0^1(\Omega)); f = 0$ q.s em $\Omega \setminus \Omega_t$ q.s em $t \in (0,T)\}$;

$L^P(0,T;H_0^2(\Omega_t)) = \{f \in L^P(0,T;H_0^2(\Omega)); f = 0$ q.s em $\Omega \setminus \Omega_t$ q.s em $t \in (0,T)\}$.

Verifica-se que estes espaços são subespaços fechados de $L^P(0,T;L^2(\Omega))$, $L^P(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^P(0,T;H_0^2(\Omega))$ respectivamente.

Definição 3.1 *Uma **solução fraca** do problema (3.1) é uma função real $u = u(x,t)$ definida em $\widehat{Q}$ tal que $\forall\, T > 0$ satisfaça:*

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega_t)) \text{ e } u_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t)); \tag{3.5}$$

A identidade integral

$$\begin{aligned} -\int_{\widehat{Q}} u_t(x,t)\phi_t(x,t)dxdt + \int_{\widehat{Q}}(u(x,t) + u_t(x,t) + u^2(x,t))_x\phi_x(x,t)dxdt \\ + \int_{\widehat{Q}} u_{xx}(x,t)\phi_{xx}(x,t)dxdt = 0; \end{aligned} \tag{3.6}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega_t))$, $\phi_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$ e $\phi(0) = \phi(T) = 0$.

E as condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \text{ em } \Omega_0. \tag{3.7}$$

Para aplicarmos o Método de Penalização definamos a seguinte função:

$$M(x,t) = \begin{cases} 1 \text{ em } Q \setminus \widehat{Q} \cup \{\Omega_0 \times \{0\}\}; \\ 0 \text{ em } \widehat{Q} \cup \{\Omega_0 \times \{0\}\}. \end{cases}$$

Lema 3.2 *Se u e u_t pertencem a $L^2(0,T;L^2(a,b))$, então*

$$\int_0^t (M(s)u(s), u_s(s))ds \geq \frac{1}{2}|M(t)u(t)|^2 - \frac{1}{2}|M(0)u(0)|^2$$

Demonstração: De fato, utilizando o Teorema de Fubini e a definição de M temos:

$$
\begin{aligned}
& \int_0^t (M(s)u(s), u_s(s))ds = \\
= \;& \int_0^t \int_a^b M(x,s)u(x,s)u_s(x,s)dxds \\
= \;& \tfrac{1}{2}\int_0^t \int_a^b M(x,s)[u^2(x,s)]_s dxds \\
= \;& \tfrac{1}{2}\int_a^b \int_0^t M(x,s)[u^2(x,s)]_s dxds \\
= \;& \tfrac{1}{2}\int_a^{\alpha(t)} \int_0^t \underbrace{M(x,s)}_{1}[u^2(x,s)]_s dxds + \tfrac{1}{2}\int_{\alpha(t)}^{\alpha_0} \int_0^t M(x,s)[u^2(x,s)]_s dxds + \\
& \tfrac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \int_0^t \underbrace{M(x,s)}_{0}[u^2(x,s)]_s dxds + \tfrac{1}{2}\int_{\beta_0}^{\beta(t)} \int_0^t M(x,s)[u^2(x,s)]_s dxds + \\
& \tfrac{1}{2}\int_{\beta(t)}^{b} \int_0^t \underbrace{M(x,s)}_{1}[u^2(x,s)]_s dxds \\
= \;& \tfrac{1}{2}\int_a^{\alpha(t)} \int_0^t [u^2(x,s)]_s dxds + \tfrac{1}{2}\int_{\alpha(t)}^{\alpha_0} \int_0^{\alpha^{-1}(x)} [u^2(x,s)]_s dxds + \\
& \tfrac{1}{2}\int_{\beta_0}^{\beta(t)} \int_0^{\beta^{-1}(x)} [u^2(x,s)]_s dxds + \tfrac{1}{2}\int_{\beta(t)}^{b} \int_0^t [u^2(x,s)]_s dxds \\
= \;& \tfrac{1}{2}\int_a^{\alpha(t)} u^2(x,t) - u^2(x,0)dx + \tfrac{1}{2}\int_{\alpha(t)}^{\alpha_0} u^2(x,\alpha^{-1}(x)) - u^2(x,0)dx + \\
& \tfrac{1}{2}\int_{\beta_0}^{\beta(t)} u^2(x,\beta^{-1}(x)) - u^2(x,0)dx + \tfrac{1}{2}\int_{\beta(t)}^{b} u^2(x,t) - u^2(x,0)dx \\
\geq \;& \tfrac{1}{2}\int_a^{\alpha(t)} u^2(x,t)dx + \tfrac{1}{2}\int_{\beta(t)}^{b} u^2(x,t)dx - \tfrac{1}{2}\int_a^{\alpha(t)} u^2(x,0)dx \\
& -\tfrac{1}{2}\int_{\alpha(t)}^{\alpha_0} u^2(x,0)dx - \tfrac{1}{2}\int_{\beta_0}^{\beta(t)} u^2(x,0)dx - \tfrac{1}{2}\int_{\beta(t)}^{b} u^2(x,0)dx \\
= \;& \tfrac{1}{2}\int_a^b M(x,t)u^2(x,t)dx - \tfrac{1}{2}\int_a^b M(x,0)u^2(x,0)dx \\
= \;& \tfrac{1}{2}|M(t)u(t)|^2 - \tfrac{1}{2}|M(0)u^2(0)|^2
\end{aligned}
$$

□

Uma demonstração deste lema para o caso n-dimensional pode ser vista em Nakao [13].

Definição 3.3 *Dados $u_0 \in H_0^2(\Omega_0)$, $u_1 \in L^2(\Omega_0)$ defina*

$$K_0 = \frac{4}{5}|u_1|^2 + \frac{11}{10}|u_{0x}|^2 + \frac{1}{2}|u_{0xx}|^2.$$

Teorema 3.4 *Sejam $u_0 \in H_0^2(\Omega_0)$, $u_1 \in L^2(\Omega_0)$. Se*

$$\frac{6}{5}\sqrt{2K_0} + 8K_0 < \frac{1}{5}, \tag{3.8}$$

então existe uma função real $u = u(x,t)$ definida em $\widehat{Q}$ solução do problema (3.1) no *sentido da Definição 3.1.*

Demonstração: Denotando por $\widetilde{u}_0$ e $\widetilde{u}_1$ as respectivas extensões de u_0 e u_1 em Ω, definindo como sendo zero em $\Omega \setminus \Omega_0$, temos que $\widetilde{u}_0 \in H_0^2(\Omega)$ e $\widetilde{u}_1 \in L^2(\Omega)$. Com isso definamos o **Problema Penalizado**

Dado $\varepsilon > 0$, procuramos $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,t)$ tal que, $\forall\ T > 0$ tenhamos:

$$u^\varepsilon \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \text{ e } u_t^\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \tag{3.9}$$

A identidade integral

$$\begin{array}{c} -\int_0^T \int_\Omega u_t^\varepsilon(x,t)\phi_t(x,t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega (u^\varepsilon(x,t) + u_t^\varepsilon(x,t) + u^\varepsilon(x,t)^2)_x \phi_x(x,t)dxdt \\ + \int_0^T \int_\Omega u_{xx}^\varepsilon(x,t)\phi_{xx}(x,t)dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \int_\Omega M(x,t)u_t^\varepsilon(x,t)\phi(x,t)dxdt \\ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \int_\Omega M(x,t)u_x^\varepsilon(x,t)\phi_x(x,t)dxdt = 0 \end{array} \tag{3.10}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$, $\phi_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\phi(0) = \phi(T) = 0$;

E as condições iniciais

$$u^\varepsilon(x,0) = \widetilde{u}_0(x),\ u_t^\varepsilon(x,0) = \widetilde{u}_1(x) \text{ em } \Omega. \tag{3.11}$$

De modo análogo ao feito no capítulo 2, vamos aplicar o método de Faedo-Galerkin para encontrar tal u^ε.

3.1 Problema Aproximado

Tomando $\omega_1 = \widetilde{u}_0$ e completando de modo a obter uma base hilbertiana $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de

$H_0^2(\Omega)$ procuramos por $u^{\varepsilon m}(x,t) = \sum_{j=1}^m g_j^{\varepsilon m}(t)\omega_j(x) \in V_m$ tal que

$$\begin{cases} (u_{tt}^{\varepsilon m}(t), \omega_j) + (u_x^{\varepsilon m}(t), \omega_{jx}) + (u_{xt}^{\varepsilon m}(t), \omega_{jx}) - ([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx}, \omega_j) + (u_{xx}^{\varepsilon m}(t), \omega_{jxx}) + \\ \frac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t), \omega_j) + \frac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t), \omega_{jx}) = 0; \\ u^{\varepsilon m}(x,0) = \widetilde{u}_0(x); \\ u_t^{\varepsilon m}(x,0) = u_1^m(x) \to \widetilde{u}_1(x) \text{ em } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.12}$$

$\forall\, \omega_j \in V_m$. Note que a existência da seqüência (u_1^m) é garantida pela densidade de $\cup_{m=1}^\infty V_m$ em $L^2(\Omega)$ onde $u_1^m(x,t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t)\omega_j(x)$.

O Problema (3.12) tem solução local $u^{\varepsilon m}$ no intervalo $[0, t_m)$ para cada ε fixo, garantida pelo Teorema de Carathéodory (1.34). A extensão da solução ao intervalo $[0,T), \forall\, T > 0$ depende das estimativas que faremos a seguir. Estas estimativas também serão suficientes para passarmos o limite em $m \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0$.

Assim, defina

$$K^{\varepsilon m}(t) = \frac{1}{2}\left\{ |u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + \frac{6}{5}(u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) + \frac{8}{5}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2 \right\}; \tag{3.13}$$

$$\widetilde{K}_0^m = \frac{4}{5}|u_1^m|^2 + \frac{11}{10}|\widetilde{u}_x 0|^2 + \frac{1}{2}|\widetilde{u}_{0xx}|^2 \tag{3.14}$$

Observação 3.5 *Observe que*

$$\begin{aligned} K^{\varepsilon m}(0) &= \tfrac{1}{2}\left\{|u_t^{\varepsilon m}(0)|^2 + \tfrac{6}{5}(u_t^{\varepsilon m}(0), u^{\varepsilon m}(0)) + \tfrac{8}{5}|u_x^{\varepsilon m}(0)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(0)|^2\right\} \\ &\leq \tfrac{1}{2}\left\{|u_1^m|^2 + \tfrac{6}{5}(\tfrac{1}{2}|u_1^m|^2 + \tfrac{1}{2}|\widetilde{u}_0|^2) + \tfrac{8}{5}|\widetilde{u}_{0x}|^2 + |\widetilde{u}_{0xx}|^2\right\} \\ &= \tfrac{4}{5}|u_1^m|^2 + \tfrac{3}{10}|\widetilde{u}_0|^2 + \tfrac{4}{5}|\widetilde{u}_{0x}|^2 + \tfrac{1}{2}|\widetilde{u}_{0xx}|^2 \\ &\leq \tfrac{4}{5}|u_1^m|^2 + \tfrac{3}{10}|\widetilde{u}_{0x}|^2 + \tfrac{4}{5}|\widetilde{u}_{0x}|^2 + \tfrac{1}{2}|\widetilde{u}_{0xx}|^2 \\ &= \tfrac{4}{5}|u_1^m|^2 + \tfrac{11}{10}|\widetilde{u}_{0x}|^2 + \tfrac{1}{2}|\widetilde{u}_{0xx}|^2 \\ &= \widetilde{K}_0^m. \end{aligned}$$

E de $(3.12)_3$ *temos que* $\widetilde{K}_0^m \to K_0$ *em* $\mathbb{R}$.

Multiplicando $(3.12)_1$ por $\frac{d}{dt}g_j^{\varepsilon m}(t)$ e somando $j=1,\ldots,m$ temos a seguinte igualdade:

$$(u_{tt}^{\varepsilon m}(t),u_t^{\varepsilon m}(t))+(u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))+(u_{xt}^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))-([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx},u_t^{\varepsilon m}(t))+(u_{xx}^{\varepsilon m}(t),u_{txx}^{\varepsilon m}(t))+$$

$$\frac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u_t^{\varepsilon m}(t))+\frac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))=0.$$

Note que

$(u_{tt}^{\varepsilon m}(t),u_t^{\varepsilon m}(t))=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2;$

$(u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2;$

$(u_{txx}^{\varepsilon m}(t),u_{xx}^{\varepsilon m}(t))=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2;$

$\frac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u_t^{\varepsilon m}(t))=\frac{1}{\varepsilon}|M(t)u_t^{\varepsilon m}(t)|^2,$

substituindo na igualdade anterior obtemos:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\}+|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2+\\ &\tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))\ =([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx},u_t^{\varepsilon m}(t)).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Agora, multiplicando $(3.12)_1$ por $g_j^{\varepsilon m}(t)$ e somando $j=1,\ldots,m$ temos a seguinte igualdade:

$$(u_{tt}^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+(u_x^{\varepsilon m}(t),u_x^{\varepsilon m}(t))+(u_{xt}^{\varepsilon m}(t),u_x^{\varepsilon m}(t))-([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx},u^{\varepsilon m}(t))+(u_{xx}^{\varepsilon m}(t),u_{xx}^{\varepsilon m}(t))+$$

$$\frac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+\frac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),u_x^{\varepsilon m}(t))=0.$$

Procedendo com anteriormente obtemos a igualdade

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left\{(u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{1}{2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\right\}-|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\\ &\tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))\ =([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx},u^{\varepsilon m}(t)).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Exatamente como feito no Capítulo 2, temos do segundo membro de (3.15) e (3.16), respectivamente, que

$$([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx}, u_t^{\varepsilon m}(t)) \leq 4|u_x^{\varepsilon m}(t)|^4 + \frac{1}{4}|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2; \tag{3.17}$$
$$([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx}, u^{\varepsilon m}(t)) \leq 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^3. \tag{3.18}$$

Assim, de (3.17) e (3.18) em (3.15) e (3.16) respectivamente, temos

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\} + \tfrac{3}{4}|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2 +& \\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t), u_{tx}^{\varepsilon m}(t)) \ \leq 4|u_x^{\varepsilon m}(t)|^4.&\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\left\{(u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) + \tfrac{1}{2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\right\} - |u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2 \\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) \leq 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^3.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré-Friedricks em $-|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2$ na equação (3.20) temos que

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\left\{(u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) + \tfrac{1}{2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\right\} - |u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2 \\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) \leq 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^3.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Multiplicando (3.21) por $\frac{3}{5}$ e somando a (3.19) temos

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{\tfrac{6}{5}(u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) + \tfrac{8}{5}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\} + \\ \tfrac{3}{20}|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{3}{5}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{3}{5}|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + \\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t), u_{tx}^{\varepsilon m}(t)) + \tfrac{3}{5\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) + \tfrac{3}{5\varepsilon}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 \\ \leq 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\left[\tfrac{3}{5}|u_x^{\varepsilon m}(t)| + 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\right].\end{gathered} \tag{3.22}$$

Dessa forma, substituindo (3.13) em (3.22) obtemos

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}K^{\varepsilon m}(t)+\tfrac{3}{5}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{3}{20}|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{3}{5}|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2+\\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{3}{5\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{3}{5\varepsilon}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\\ \leq 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\left[\tfrac{3}{5}|u_x^{\varepsilon m}(t)|+2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\right].\end{gathered}\tag{3.23}$$

Queremos $K^{\varepsilon m}(t)\geq 0$. Para isso, utilizando a desigualdade de Poincaré-Friedricks, observe que

$$\frac{6}{5}(u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))\geq-\frac{3}{5}|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2-\frac{3}{5}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\tag{3.24}$$

Disso,

$$K^{\varepsilon m}(t)\geq\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{5}|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\}\geq 0.\tag{3.25}$$

Agora, definindo

$$\gamma^{\varepsilon m}(t)=2\left\{\frac{3}{5}|u_x^{\varepsilon m}(t)|+2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\right\},\tag{3.26}$$

e substituindo em (3.23) obtemos

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}K^{\varepsilon m}(t)+\tfrac{3}{10}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\left[\tfrac{3}{10}-\gamma^{\varepsilon m}(t)\right]+\tfrac{3}{20}|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{3}{5}|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2+\\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))\\ +\tfrac{3}{5\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{3}{5\varepsilon}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\leq 0.\end{gathered}\tag{3.27}$$

Como visto na Afirmação 2.6 do Capítulo 2, temos que $\gamma^{\varepsilon m}(t)\leq\frac{3}{10},\forall\, t\in[0,t_m)$. Com isso podemos eliminar a parcela $|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\left[\frac{3}{10}-\gamma^{\varepsilon m}(t)\right]$ de (3.27) e teremos

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}K^{\varepsilon m}(t)+\tfrac{3}{10}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{3}{20}|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{3}{5}|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2+\\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))\\ +\tfrac{3}{5\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{3}{5\varepsilon}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\leq 0.\end{gathered}\tag{3.28}$$

Como $u^{\varepsilon m}(t)$ e $u_t^{\varepsilon m}(t) \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$, pelo Lema 3.2, temos

$$\int_0^t (M(s)u^{\varepsilon m}(s), u_s^{\varepsilon m}(s))ds \geq \frac{1}{2}|M(t)u^{\varepsilon m}(t)|^2 - \frac{1}{2}|M(0)u^{\varepsilon m}(0)|^2, \tag{3.29}$$

ainda, pelo mesmo Lema 3.2, sendo $u_{tx}^{\varepsilon m}(t)$ e $u_x^{\varepsilon m}(t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, temos que

$$\int_0^t (M(s)u_x^{\varepsilon m}(s), u_{xs}^{\varepsilon m}(s))ds \geq \frac{1}{2}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 - \frac{1}{2}|M(0)u_x^{\varepsilon m}(0)|^2. \tag{3.30}$$

Observando que

$$\begin{aligned} |M(0)u^{\varepsilon m}(0)|^2 &= \int_\Omega |M(x,0)\widetilde{u}_0(x)|^2 dx = 0 \text{ e} \\ |M(0)u_x^{\varepsilon m}(0)|^2 &= \int_\Omega |M(x,0)\widetilde{u}_{0x}(x)|^2 dx = 0, \end{aligned}$$

e integrando (3.28) de 0 a t, vemos que

$$\begin{gathered} K^{\varepsilon m}(t) + \tfrac{3}{10}\int_0^t |u_x^{\varepsilon m}(s)|^2 ds + \tfrac{3}{20}\int_0^t |u_{sx}^{\varepsilon m}(s)|^2 ds + \tfrac{3}{5}\int_0^t |u_{xx}^{\varepsilon m}(s)|^2 ds + \\ \tfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t |M(t)u_s^{\varepsilon m}(t)|^2 ds + \tfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t |M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 ds + \tfrac{3}{10\varepsilon}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{3}{10\varepsilon}|M(t)u^{\varepsilon m}(t)|^2 \\ \leq K^{\varepsilon m}(0) \leq \widetilde{K}_0^m, \forall\, t \in [0, t_m). \end{gathered} \tag{3.31}$$

Da Observação 3.5 temos que $\widetilde{K}_0^m$ é convergente, portanto limitada, ou seja, existe K_4 constante que independe de ε e m tal que

$$\widetilde{K}_0^m \leq K_4. \tag{3.32}$$

Com isso, o primeiro membro de (3.31) é limitado por essa constante e de (3.25) temos que $|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2$ é limitado, daí, $|u_t^{\varepsilon m}(t)|$ é limitada e da desigualdade de Poincaré-Friedricks temos que

$$|u^{\varepsilon m}(t)|^2_{H_0^2(\Omega)} \leq 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2$$

portanto limitado.

De (3.31), $\int_0^t |u_{xs}^{\varepsilon m}(s)|^2 ds$ é limitada, e da desigualdade de Poincaré-Friedricks, $|u_s^{\varepsilon m}(s)|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq |u_{xs}^{\varepsilon m}(s)|^2$, então $\int_0^t |u_s^{\varepsilon m}(s)|^2_{H_0^1(\Omega)} ds$ é limitada.

Dessas três limitações, temos que existe uma subseqüência de $u^{\varepsilon m}$, denotada da mesma maneira, tal que

$$u^{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u^{\varepsilon} \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \tag{3.33}$$

$$u_t^{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u_t^{\varepsilon} \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.34}$$

Do Teorema 1.24 (Teorema de Aubin-Lions), tomando $B = H_0^1(\Omega),\ B_0 = H_0^2(\Omega),\ B_1 = L^2(\Omega)$ e $p_0 = p_1 = 2$ temos que a imersão $W \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ é compacta. Com isso, de (3.33) e (3.34) podemos tomar uma nova subseqüência, denotada da mesma forma, tal que

$$u^{\varepsilon m} \to u^{\varepsilon} \text{ forte em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon m} &\to u^{\varepsilon} \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_x^{\varepsilon m} &\to u_x^{\varepsilon} \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.35}$$

E aplicando a Proposição 1.21 em (3.35) temos que

$$u^{\varepsilon m} \to u^{\varepsilon} \ q.s \text{ em } Q,$$

$$u_x^{\varepsilon m} \to u_x^{m} \ q.s \text{ em } Q,$$

então

$$2u^{\varepsilon m}u_x^{\varepsilon m} \to 2u^{\varepsilon}u_x^{\varepsilon} \ q.s \text{ em } Q. \tag{3.36}$$

Ainda de (3.31) temos que

$$Mu_t^{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} Mu_t^{\varepsilon} \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.37}$$

$$Mu_x^{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} Mu_x^{\varepsilon} \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.38}$$

Das convergências (3.33)-(3.38) temos, como no Capítulo 2, uma solução para o Problema Penalizado (3.9)-(3.11).

De (3.33), (3.34) e pelo Teorema de Banach-Steinhaus, temos que

$$|u^\varepsilon|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))} \leq \underline{\lim}|u^{\varepsilon m}|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))}, \tag{3.39}$$

$$|u_t^\varepsilon|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \underline{\lim}|u_t^{\varepsilon m}|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}, \tag{3.40}$$

$$|u_t^\varepsilon|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \underline{\lim}|u_t^{\varepsilon m}|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{3.41}$$

Por essas limitações, existe um subseqüência (podemos tomar $\varepsilon = \frac{1}{n}$) de $(u^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$, denotada da mesma forma, e $\omega : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \omega \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \text{ com } \varepsilon \to 0, \tag{3.42}$$

$$u_t^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \omega_t \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ com } \varepsilon \to 0. \tag{3.43}$$

Novamente, pelo Teorema 1.24 (Teorema de Aubin-Lions), podemos tomar uma subseqüência tal que

$$u^\varepsilon \to \omega \text{ forte em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ com } \varepsilon \to 0. \tag{3.44}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon \to w \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\ &u_x^\varepsilon \to w_x \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.45}$$

E aplicando a Proposição 1.21 em (3.45) temos que

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon \to w \; q.s \text{ em } Q,\\ &u_x^\varepsilon \to w_x \; q.s \text{ em } Q, \end{aligned}$$

então

$$2u^\varepsilon u_x^\varepsilon \to 2ww_x \; q.s \text{ em } Q. \tag{3.46}$$

Vejamos que ω satisfaz a equação integral da Definição 3.1.

3.2 Passagem ao Limite

Dado $\phi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega_t))$ tal que $\phi_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$ e $\phi(0)=\phi(T)=0$ observe que de (3.43)

$$\int_0^T \langle u_t^\varepsilon(t), v(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle \omega_t(t), v(t)\rangle dt, \forall\, v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{3.47}$$

em particular, tomando $v(t) = (\,\cdot\,, \phi_t(t))$ temos

$$\int_0^T (u_t^\varepsilon(t), \phi_t(t))dt \to \int_0^T (\omega_t(t), \phi_t(t))dt. \tag{3.48}$$

Também de (3.47), tomando em particular $v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ definido por $\langle u, v(t)\rangle = (u_x, \phi_x(t))\; \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\int_0^T (u_{tx}^\varepsilon(t), \phi_x(t))dt \to \int_0^T (\omega_{tx}(t), \phi_x(t))dt. \tag{3.49}$$

De (3.42) temos que

$$\int_0^T \langle u^\varepsilon(t), v(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle \omega(t), v(t)\rangle dt, \forall\, v \in L^1(0,T;H^{-2}(\Omega)), \tag{3.50}$$

em particular, tomando v de modo que $\langle u, v(t)\rangle = (u_x, \phi_x(t)) + (u_{xx}, \phi_{xx}(t))\; \forall\, u \in H_0^2(\Omega)$ temos

$$\int_0^T (u_x^\varepsilon(t), \phi_x(t)) + (u_{xx}^\varepsilon(t), \phi_{xx}(t))dt \to \int_0^T (\omega_{xx}(t), \phi_{xx}(t)) + (\omega_{xx}(t), \phi_{xx}(t))dt. \tag{3.51}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\int_0^T |2u^\varepsilon(t)u_x^\varepsilon(t)|^2 dt &= 2\int_0^T \int_\Omega |u^\varepsilon(x,t)|_{\mathbb{R}}^2 |u_x^m(x,t)|_{\mathbb{R}}^2 dt \\
&\leq 2\int_0^T |u^\varepsilon(t)|^2_{L^\infty(\Omega)} |u_x^\varepsilon(t)|^2 dt \\
&\leq 2\int_0^T |u^\varepsilon(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} |u_x^\varepsilon(t)|^2 dt \\
&\leq C_1 \int_0^T |u_x^\varepsilon(t)|^2 |u_x^\varepsilon(t)|^2 dt \\
&\leq C_1 \int_0^T |u_x^\varepsilon(t)|^4 dt \\
&\leq C_1 T |u_x^\varepsilon|^4_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, $|2u^\varepsilon u_x^\varepsilon|_{L^2(Q)} < \infty$. Então de (3.46), pela Proposição 1.23, temos que

$$2u^\varepsilon u_x^\varepsilon \rightharpoonup 2ww_x \text{ em } L^2(Q),$$

ou seja,

$$\int_0^T (2u^\varepsilon(t)u_x^\varepsilon(t), v(t))dt \to \int_0^T (2w(t)w_x(t), v(t))dt, \ \ \forall\, v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Em particular, $\phi_x \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)) \subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, daí,

$$\int_0^T (2u^\varepsilon(t)u_x^\varepsilon(t), \phi_x(t))dt \to \int_0^T (2w(t)w_x(t), \phi_x(t))dt,$$

que equivale a

$$\int_0^T ([u^\varepsilon(t)^2]_x, \phi_x(t))dt \to \int_0^T ([\omega(t)^2]_x, \phi_x(t))dt. \tag{3.52}$$

Ainda, como $\phi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega_t))$ temos que $\phi = \phi_x = 0$ $q.s$ em $Q \setminus \widehat{Q} \cup \{\Omega_0 \times \{0\}\}$, também $M = 0$ em $\widehat{Q} \cup \{\Omega_0 \times \{0\}\}$ então

$$\int_Q M(x,t)u_t^\varepsilon(x,t)\phi(x,t)dxdt = 0 \tag{3.53}$$

$$\int_Q M(x,t)u_x^\varepsilon(x,t)\phi_x(x,t)dxdt = 0 \tag{3.54}$$

Com isso, de (3.48)-(3.54) na identidade integral (3.10) temos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega \omega_t(x,t)\phi_t(x,t)dxdt + \int_0^T\int_\Omega(\omega(x,t)+\omega_t(x,t)+\omega(x,t)^2)_x\phi_x(x,t)dxdt \\
+\int_0^T\int_\Omega \omega_{xx}(x,t)\phi_{xx}(x,t)dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{3.55}
$$

Além disso, temos as condições iniciais

$$\omega(x,0) = \widetilde{u}_0(x) \text{ e } \omega_t(x,0) = \widetilde{u}_1(x) \text{ em } Q. \tag{3.56}$$

Afirmação 3.6 $\omega_t(x,t) = 0$ *q.s em* $Q \setminus \widehat{Q} \cup \{\Omega_0 \times \{0\}\}$

Demonstração: De fato, de (3.31) temos que $\int_0^T |M(t)u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 dt \leq \varepsilon K_4$, onde K_4 é um constante real positiva independente de ε e m obtida em (3.32). Assim, de (3.37) e pelo Teorema de Banach-Steinhaus $|Mu_t^\varepsilon|^2_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} \leq \varepsilon K_4$, daí,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T |M(t)u_t^\varepsilon(t)|^2 dt = 0. \tag{3.57}$$

Dado $v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ temos que a aplicação $t \mapsto (M(t)v(t),\ \cdot\ ) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, de (3.47) temos que

$$\int_0^T (u_t^\varepsilon(t), M(t)v(t))dt \to \int_0^T (\omega_t(t), M(t)v(t))dt,\ \forall\ v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

conseqüentemente,

$$\int_0^T (M(t)u_t^\varepsilon(t), v(t))dt \to \int_0^T (M(t)\omega_t(t), v(t))dt,\ \forall\ v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

portanto, $Mu_t^\varepsilon \rightharpoonup M\omega_t$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ então, pelo Teorema de Banach-Steinhaus e de (3.57) temos

$$|M\omega_t|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \underline{\lim}|Mu_t^\varepsilon|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^T\int_\Omega |M(t)\omega_t(t)|^2 dt = 0.$$

Então, $M(x,t)\omega_t(x,t) = 0$ $q.s$ em Q e portanto,

$$\omega_t(x,t) = 0 \ q.s \text{ em } Q \setminus \widehat{Q} \cup \{\Omega_0 \times \{0\}\},$$

o que prova a afirmação.

$\square$

Afirmação 3.7 $\omega_x(x,t) = 0$ $q.s$ *em* $Q \setminus \widehat{Q} \cup \{\Omega_0 \times \{0\}\}$

Demonstração: De fato, de (3.31) temos que $\int_0^T |M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 dt \leq \varepsilon K_4$, onde K_4 é um constante real positiva independente de ε e m obtida em (3.32). Assim, de (3.38) temos que $Mu_x^{\varepsilon m} \rightharpoonup Mu_x^{\varepsilon}$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, pois dado $v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ temos que a aplicação f, definida por $\langle u, f(t)\rangle = (u, v(t))\ \forall\ u \in L^2(\Omega)$, pertence a $L^2(0,T;(L^2(\Omega))') \hookrightarrow L^1(0,T;(L^2(\Omega))')$, daí, de (3.38) temos que

$$\int_0^T (M(t)u_x^{\varepsilon m}(t), v(t))dt \to \int_0^T (M(t)u_x^{\varepsilon}(t), v(t))dt,\ \forall\ v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Pelo Teorema de Banach-Steinhaus $|Mu_x^{\varepsilon}|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \varepsilon K_4$, daí,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T |M(t)u_x^{\varepsilon}(t)|^2 dt = 0. \tag{3.58}$$

Do mesmo modo, de (3.42), $u_x^{\varepsilon} \rightharpoonup \omega_x$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, daí, $Mu_x^{\varepsilon} \rightharpoonup M\omega_x$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Então, pelo Teorema de Banach-Steinhaus e de (3.58) temos

$$|M\omega_x|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \underline{\lim} |Mu_x^{\varepsilon}|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega |M(t)\omega_x(t)|^2 dt = 0.$$

Então, $M(x,t)\omega_x(x,t) = 0$ $q.s$ em Q e portanto,

$$\omega_x(x,t) = 0 \ q.s \text{ em } Q \setminus \widehat{Q} \cup \{\Omega_0 \times \{0\}\},$$

o que prova a afirmação.

□

Agora, observe que, fixado $x \in \Omega \setminus \Omega_0$ temos que ou $x \in (a, \alpha_0)$ ou $x \in (\beta_0, b)$. Se $x \in (a, \alpha_0)$, como α é decrescente, então $x < \alpha(t), \forall\, t \in (0, \alpha^{-1}(x))$, com isso $(x, t) \notin \widehat{Q}, \forall\, t \in (0, \alpha^{-1}(x))$. Assim, da Afirmação 3.6 $\omega_t(x, t) = 0$ $q.s$ em $\{x\} \times (0, \alpha^{-1}(x))$, daí,

$$\int_0^t \omega_s(x, s) ds = 0,\ \forall\, t \in (0, \alpha^{-1}(x)).$$

Do mesmo modo, por β ser decrescente,

$$\int_0^t \omega_s(x, s) ds = 0,\ \forall\, t \in (0, \beta^{-1}(x)) \text{ e } x \in (\beta_0, b).$$

Dessas duas integrais, temos que

$$\int_0^t \omega_s(x, s) ds = 0,\ \forall\, (x, t) \in Q \setminus \widehat{Q} \cup \{\Omega_0 \times \{0\}\}.$$

Daí, como $\omega \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$ e $\omega_t \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ temos, pela Proposição 1.10, que ω é contínua e vale a identidade

$$\omega(x, t) - \omega(x, 0) = \int_0^t \omega_s(x, s) ds = 0, \forall\, t \in [0, T] \text{ e } q.s \text{ em } \Omega \setminus \Omega_t. \tag{3.59}$$

De (3.56), $\omega(x, 0) = 0$ em $\Omega \setminus \Omega_0$, então, de (3.59) temos que

$$\omega(x, t) = 0\ \forall\, t \in [0, T] \text{ e } q.s \text{ em } \Omega \setminus \Omega_t. \tag{3.60}$$

Assim, de (3.42) e (3.43), $\omega \in H_0^2(\Omega)$ e $\omega_t \in H_0^1(\Omega)$. De (3.60) e da Afirmação 3.7 ω satisfaz a Hipótese de Regularidade (3.3) sobre $\widehat{Q}$ e de Afirmação 3.6 ω_t satisfaz a Hipótese de Regularidade (3.4). Portanto $\omega(t) \in H_0^2(\Omega_t)$ $q.s$ em $(0, T)$ e $\omega_t \in H_0^1(\Omega_t)$.

Com isso, de (3.42), fazendo $u = \omega|_{\widehat{Q}}$ temos que

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega_t)). \tag{3.61}$$

e de (3.43) temos que

$$u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)). \tag{3.62}$$

Finalmente, de (3.55) e (3.56) u satisfaz:

A identidade integral

$$\begin{aligned} -\int_{\widehat{Q}} u_t(x,t)\phi_t(x,t)dxdt + \int_{\widehat{Q}} (u(x,t) + u_t(x,t) + u(x,t)^2)_x \phi_x(x,t)dxdt \\ + \int_{\widehat{Q}} u_{xx}(x,t)\phi_{xx}(x,t)dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.63}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega_t))$, $\phi_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$ e $\phi(0) = \phi(T) = 0$.

E as condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \text{ em } \Omega_0. \tag{3.64}$$

Logo, u é solução do Problema (3.1) no sentido da Definição 3.1.

□

3.3 Decaimento Exponencial

Nesta parte do trabalho consideraremos o Problema Não-Cilíndrico como sendo dado pela equação (1) com $c > 2$, e por simplicidade, $a = b = 1$ e , ou seja,

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - (u(x,t) + c\, u_t(x,t) + (u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx} = 0 \text{ em } \widehat{Q}; \\ u(\alpha(t),t) = u(\beta(t),t) = u_x(\alpha(t),t) = u_x(\beta(t),t) = 0, \forall\, t \geq 0; \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \forall\, x \in [\alpha_0, \beta_0], \end{cases} \tag{3.65}$$

onde α e β são funções reais definidas em $[0,+\infty)$ tais que $\alpha(0) = \alpha_0 < \beta_0 = \beta(0)$ e $\widehat{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t)\}$ é um domínio não-cilíndrico.

Definição 3.8 *Uma **solução fraca** do problema (3.65) é uma função real $u = u(x,t)$*

definida em $\widehat{Q}$ *tal que* $\forall\, T > 0$ *satisfaça:*

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega_t)) \ \text{e} \ u_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t)); \tag{3.66}$$

A identidade integral

$$\begin{aligned} -\int_{\widehat{Q}} u_t(x,t)\phi_t(x,t)dxdt + \int_{\widehat{Q}}(u(x,t) + c\, u_t(x,t) + u^2(x,t))_x\phi_x(x,t)dxdt \\ + \int_{\widehat{Q}} u_{xx}(x,t)\phi_{xx}(x,t)dxdt = 0; \end{aligned} \tag{3.67}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega_t))$, $\phi_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$ *e* $\phi(0) = \phi(T) = 0$.

E as condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \ \text{em} \ \Omega_0. \tag{3.68}$$

Teorema 3.9 *Sejam* $u_0 \in H_0^2(\Omega_0)$, $u_1 \in L^2(\Omega_0)$ *. Se*

$$\sqrt{2K_0} + \frac{1}{c-2}K_0 < \frac{1}{6}, \tag{3.69}$$

então existe uma função real $u = u(x,t)$ *definida em* $\widehat{Q}$ *solução do problema (3.65) no sentido da Definição 3.8. Além disso, temos que a energia* $E(t)$ *do Sistema (3.1)satisfaz*

$$E(t) \leq \alpha_1 \exp\{-\alpha_0 t\},\ \forall\, t \geq 0. \tag{3.70}$$

Demonstração: Procederemos como na demonstração do Teorema 3.4. Assim, na equação integral (3.10) do Problema Penalizado, acrescentaremos mais dois termos obtendo

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_\Omega u_t^\varepsilon(x,t)\phi_t(x,t)dxdt + \int_0^T\int_\Omega(u^\varepsilon(x,t) + u_t^\varepsilon(x,t) + u^\varepsilon(x,t)^2)_x\phi_x(x,t)dxdt + \\ \int_0^T\int_\Omega u_{xx}^\varepsilon(x,t)\phi_{xx}(x,t)dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega M(x,t)u_t^\varepsilon(x,t)\phi(x,t)dxdt + \\ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega M(x,t)u_x^\varepsilon(x,t)\phi_x(x,t)dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega M(x,t)u_{tx}^\varepsilon(x,t)\phi_x(x,t)dxdt + \\ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega M(x,t)u^\varepsilon(x,t)\phi(x,t)dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Com isso o Problema Aproximado (3.12) tem a seguinte equação

$$\begin{aligned}(u_{tt}^{\varepsilon m}(t),\omega_j)+(u_x^{\varepsilon m}(t),\omega_{jx})+c(u_{xt}^{\varepsilon m}(t),\omega_{jx})-([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx},\omega_j)+(u_{xx}^{\varepsilon m}(t),\omega_{jxx})+\\ \tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),\omega_j)+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),\omega_{jx})+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_{tx}^{\varepsilon m}(t),\omega_{jx})\\ +\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u^{\varepsilon m}(t),\omega_j)=0;\end{aligned} \tag{3.72}$$

com

$$u^{\varepsilon m}(x,0)=\widetilde{u}_0(x) \text{ em } H_0^2(\Omega);$$

$$u_t^{\varepsilon m}(x,0)=u_1^m(x)\to\widetilde{u}_1(x) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Como anteriormente, multiplicando (3.72) por $\frac{d}{dt}g_j^{\varepsilon m}(t)$ e somando $j=1,\dots,m$ obtemos

$$\begin{aligned}(u_{tt}^{\varepsilon m}(t),u_t^{\varepsilon m}(t))+(u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))+c(u_{xt}^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))-([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx},u_t^{\varepsilon m}(t))\\ +(u_{xx}^{\varepsilon m}(t),u_{txx}^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u_t^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))\\ +\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_{tx}^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u^{\varepsilon m}(t),u_t^{\varepsilon m}(t))=0,\end{aligned} \tag{3.73}$$

e multiplicando por $g_j^{\varepsilon m}$ e somando temos

$$\begin{aligned}(u_{tt}^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+(u_x^{\varepsilon m}(t),u_x^{\varepsilon m}(t))+c(u_{xt}^{\varepsilon m}(t),u_x^{\varepsilon m}(t))-([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx},u^{\varepsilon m}(t))\\ +(u_{xx}^{\varepsilon m}(t),u_{xx}^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),u_x^{\varepsilon m}(t))\\ +\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_{tx}^{\varepsilon m}(t),u_x^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))=0.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Fazendo simplificações como antes temos

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\}+c|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2+\\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_x^{\varepsilon m}(t),u_{tx}^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2\\ +\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u^{\varepsilon m}(t),u_t^{\varepsilon m}(t))=([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx},u_t^{\varepsilon m}(t)).\end{aligned} \tag{3.75}$$

e

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\left\{(u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{c}{2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\right\}-|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u_x^{\varepsilon m}(t)|^2+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_t^{\varepsilon m}(t),u^{\varepsilon m}(t))+\tfrac{1}{\varepsilon}(M(t)u_{tx}^{\varepsilon m}(t),u_x^{\varepsilon m}(t))\\ +\tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)u^{\varepsilon m}(t)|^2=([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx},u^{\varepsilon m}(t)).\end{aligned} \tag{3.76}$$

Como anteriomente, observe que

$$([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx}, u_t^{\varepsilon m}(t)) \leq 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)| \leq \frac{1}{c-2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^4 + (c-2)|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2$$

$$([u^{\varepsilon m}(t)^2]_{xx}, u^{\varepsilon m}(t)) \leq 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^3.$$

Assim, substituindo em (3.75) e (3.76) respectivamente, a desigualdade $-|u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2 \leq -|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2$ em (3.76) e somando estas equações temos

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{2(u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) + (c+1)|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\} + \\ |u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + \\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)(u_t^{\varepsilon m}(t) + u^{\varepsilon m}(t))|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)(u_{tx}^{\varepsilon m}(t) + u_x^{\varepsilon m}(t))|^2 \\ \leq 2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\left[|u_x^{\varepsilon m}(t)| + \tfrac{1}{2(c-2)}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\right].\end{gathered} \tag{3.77}$$

Agora, redefinindo $K^{\varepsilon m}(t)$ como sendo

$$K^{\varepsilon m}(t) = \frac{1}{2}\left\{2(u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) + (c+1)|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\}$$

e

$$K_0 = |u_1|^2 + \frac{c+2}{2}|u_{0x}^{\varepsilon m}(0)|^2 + \frac{1}{2}|u_{0xx}^{\varepsilon m}(0)|^2,$$

observe que

$$\begin{aligned} K^{\varepsilon m}(0) &= \tfrac{1}{2}\left\{2(u_t^{\varepsilon m}(0), u^{\varepsilon m}(0)) + (c+1)|u_x^{\varepsilon m}(0)|^2 + |u_t^{\varepsilon m}(0)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(0)|^2\right\} \\ &\leq \tfrac{1}{2}\left\{|u_t^{\varepsilon m}(0)|^2 + |u^{\varepsilon m}(0)|^2 + (c+1)|u_x^{\varepsilon m}(0)|^2 + |u_t^{\varepsilon m}(0)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(0)|^2\right\} \\ &\leq \tfrac{1}{2}\left\{2|u_1^m|^2 + |\widetilde{u}_0|^2 + (c+1)|\widetilde{u}_{0x}|^2 + |\widetilde{u}_{0xx}|^2\right\} \\ &\leq \tfrac{1}{2}\left\{2|u_1^m|^2 + |\widetilde{u}_{0x}|^2 + (c+1)|\widetilde{u}_{0x}|^2 + |\widetilde{u}_{0xx}|^2\right\} \\ &\leq |u_1^m|^2 + \tfrac{c+2}{2}|\widetilde{u}_{0x}|^2 + \tfrac{1}{2}|\widetilde{u}_{0xx}|^2 = \widetilde{K}_0^m. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Sabemos que $\widetilde{K}_0^m \to K_0$, portanto é limitado por uma constante K_4 que só depende de u_0 e u_1.

Vejamos que $K^{\varepsilon m}(t)$ é maior do que ou igual a zero.

Note que, pela desigualdade de Poincaré-Friedricks,

$$2(u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) \geq -2|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 - \frac{1}{2}|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2.$$

Daí,

$$K^{\varepsilon m}(t) \geq \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + (c-1)|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\}. \tag{3.79}$$

Com isso, defina

$$\gamma^{\varepsilon m}(t) = 2\left[|u_x^{\varepsilon m}(t)| + \frac{1}{2(c-2)}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\right].$$

De (3.77) temos

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}K^{\varepsilon m}(t) + |u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{1}{2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_x^{\varepsilon m}(t)|^2\left[\tfrac{1}{2} - \gamma^{\varepsilon m}(t)\right] + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + \\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)(u_t^{\varepsilon m}(t) + u^{\varepsilon m}(t))|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)(u_{tx}^{\varepsilon m}(t) + u_x^{\varepsilon m}(t))|^2 \leq 0.\end{gathered} \tag{3.80}$$

Assim, por redução ao absurdo, como feito no Capítulo 2, podemos mostrar que $\gamma^{\varepsilon m}(t) \leq \frac{1}{2}$ e com isso temos que

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}K^{\varepsilon m}(t) + |u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{1}{2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + \\ \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)(u_t^{\varepsilon m}(t) + u^{\varepsilon m}(t))|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}|M(t)(u_{tx}^{\varepsilon m}(t) + u_x^{\varepsilon m}(t))|^2 \leq 0.\end{gathered} \tag{3.81}$$

Dessa forma, podemos obter uma solução para o Problema (3.65), basta observar que integrando (3.81) de 0 a t temos

$$\begin{gathered}0 \leq K^{\varepsilon m}(t) + \tfrac{1}{2}\int_0^t |u_x^{\varepsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t |u_{sx}^{\varepsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t |u_{xx}^{\varepsilon m}(s)|^2 ds + \\ \tfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t |M(s)(u_s^{\varepsilon m}(s) + u^{\varepsilon m}(s))|^2 ds + \tfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t |M(s)(u_{sx}^{\varepsilon m}(s) + u_x^{\varepsilon m}(s))|^2 ds \leq \\ K^{\varepsilon m}(0) \leq \widetilde{K}_0^m \leq K_4,\end{gathered} \tag{3.82}$$

daí,

$$\begin{aligned} M(u_t^{\varepsilon m} + u^{\varepsilon m}) &\overset{*}{\rightharpoonup} M(u_t^{\varepsilon} + u^{\varepsilon}) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ M(u_{tx}^{\varepsilon m} + u_x^{\varepsilon m}) &\overset{*}{\rightharpoonup} M(u_{tx}^{\varepsilon} + u_x^{\varepsilon}) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Com isso, passando limite com $m \to +\infty$, obtemos a equação (3.71). Finalmente, se $\phi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega_t))$ tal que $\phi_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$ e $\phi(0)=\phi(T)=0$ então,

$$\int_Q M(x,t)u_t^\varepsilon(x,t)\phi(x,t)dxdt = \int_Q M(x,t)u_x^\varepsilon(x,t)\phi_x(x,t)dxdt =$$

$$\int_Q M(x,t)u_{tx}^\varepsilon(x,t)\phi_x(x,t)dxdt = \int_Q M(x,t)u^\varepsilon(x,t)\phi(x,t)dxdt = 0,$$

daí, aplicando limite quando $\varepsilon \to 0$ temos a identidade integral (3.67).

Agora podemos obter o Decaimento Exponencial.

Da desigualdade (3.81) temos que

$$\tfrac{d}{dt}K^{\varepsilon m}(t) + \tfrac{1}{2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2 \leq 0, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.83}$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedricks temos que $|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 \leq |u_{tx}^{\varepsilon m}(t)|^2$, então

$$\tfrac{d}{dt}K^{\varepsilon m}(t) + \tfrac{1}{2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2 \leq 0, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.84}$$

Daí,

$$\tfrac{d}{dt}K^{\varepsilon m}(t) + \tfrac{1}{2}\left\{|u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\} \leq 0, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.85}$$

Por outro lado, como em (3.78)

$$\begin{aligned} K^{\varepsilon m}(t) &= \tfrac{1}{2}\left\{2(u_t^{\varepsilon m}(t), u^{\varepsilon m}(t)) + (c+1)|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + |u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2\right\} \\ &\leq |u_t^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{c+2}{2}|u_x^{\varepsilon m}(t)|^2 + \tfrac{1}{2}|u_{xx}^{\varepsilon m}(t)|^2. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Tome $0 < \alpha_0 \leq \frac{1}{4}$. Multiplicando α_0 por (3.86) e somando com (3.85) temos

$$\frac{d}{dt}K^{\varepsilon m}(t) + \alpha_0 K^{\varepsilon m}(t) < 0. \tag{3.87}$$

Multiplicando (3.87) pelo fator integrante $e^{\alpha_0 t}$ temos $\frac{d}{dt}\left[K^{\varepsilon m}(t)e^{\alpha_0 t}\right] < 0$. Assim, integrando de 0 a t, de (3.31) e (3.32) temos que $K^{\varepsilon m}(t)e^{\alpha_0 t} \leq K^{\varepsilon m}(0) \leq K_0$. Daí,

$$K^{\varepsilon m}(t) \leq K_0 e^{-\alpha_0 t}, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.88}$$

Tomando $0 < K_1 \leq \frac{1}{2}$, observe que, de (3.79), $K_1 E^{\varepsilon m}(t) \leq K^{\varepsilon m}(t) \leq K_0 e^{-\alpha_0 t}$. Então,

$$E^{\varepsilon m}(t) \leq \alpha_1 e^{-\alpha_0 t}, \ \forall\, t \geq 0, \tag{3.89}$$

onde $\alpha_1 = K_1^{-1} K_0$.

Como no Decaimento Exponencial do Capítulo 2, utilizando o Teorema de Banach-Steinhaus e as convergências (3.33) e (3.34), temos que a energia associada ao Problema Penalizado (3.9)-(3.11) satisfaz

$$E^{\varepsilon}(t) \leq \alpha_1 e^{-\alpha_0 t}, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.90}$$

E, pelo mesmo processo,

$$E(t) \leq \alpha_1 e^{-\alpha_0 t}, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.91}$$

Logo, obtivemos o resultado.

$\square$

Referências

[1] BOUSSINESQ, M. J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses senciblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 17* (1872), 55–108.

[2] BRÉZIS, H. *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones.* Masson, 1983.

[3] CODDINGTON, A. E. *Theory of Ordinary Differenctial Equations.* McGraw-Hill, 1955.

[4] LADYZHENSKAYA, O. A., AND VISK, M. I. Boundary value problems for partial differential equation and certain classes of operator equations. *American Mathematical Society Translations Series 10*, 2 (1958), 223–281.

[5] LÍMACO, J., CLARK, H. R., COUSIN, A. T., AND FROTA, C. L. On the dissipative boussinesq equation in a non cylindrical domain. *Nonlinear Analysis 67* (2007), 2321–2334.

[6] LIONS, J. L. Une remarque sur les problèmes d'evolution non linearies dans des domaines non cylindriques. *Rev. Roumaine Math. Pure Appl. 9* (1964), 11–18.

[7] LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites non Linéaires.* Dunod, 1969.

[8] MEDEIROS, L. A. Nonlinear wave equations in domains with variable boundary. *Arch. Ration. Mech. Anal. 47* (1972), 47–58.

[9] Medeiros, L. A. *Equações Diferenciais Parciais*. IM-UFRJ, 1981.

[10] Medeiros, L. A. *Espaços de Sobolev e Introdução aos Problemas Elípticos não Homogêneos*. IM-UFRJ, 2000.

[11] Medeiros, L. A., Límaco, J., and Clark, H. R. On equations of benjamin-bona-mahony type. *Nonlinear Analysis 59* (2004), 1243–1265.

[12] Medeiros, L. A., Límaco, J., and Menezes, S. B. Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, part two. *J. Comput. Anal. Appl. 4*, 3 (2002), 211–263.

[13] Nakao, M., and Narazaki, T. Existence and decay of solutions of some nonlinear wave equations in noncylindrical domains. *Math. Rep. XI - 2* (1978), 117–125.

[14] Varlamov, V. V. On the initial boundary value problem for the damped boussinesq equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems 4*, 3 (1998), 431–444.

[15] Varlamov, V. V. Asymptotic behavior of solutions of the damped boussinesq equation in two space dimensions. *The International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 22*, 1 (1999), 131–145.

[16] Varlamov, V. V. On the spatially two-demensional boussinesq equation in a circular domain. *Nonlinear Analysis 46* (2001), 699–725.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo