Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Anéis PF e as conjecturas de Faith

Gustavo da Silva Costa

Salvador-Bahia
Julho 2005

Anéis PF e as conjecturas de Faith

Gustavo da Silva Costa

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Ph.D. David Arneson Hill (Orientador)

Prof. Dr. Thierry Petit Lobão

Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira

Costa, G.
"Anéis PF e as conjecturas de Faith" / Gustavo da Silva Costa. Salvador-Ba, 2005.

Orientador: Ph.D. David Arneson Hill (UFBA).
Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduação em Matemática da UFBA, 49 páginas.

Palavras-Chave: Anéis PF, anéis QF, anéis auto-injetivos.

A Deus, a meus pais, irmãos e amigos.

“*A satisfação está no esforço e não apenas na realização final*”.

Gandhi.

Agradecimentos

A Deus, simplesmente por tudo. À minha família pela formação enquanto pessoa, aos meus professores pela minha formação acadêmica, às pessoas especiais da minha vida pela forma de me tornar especial para elas e para o mundo. Aos meus amigos por me sustentar nas quedas e ainda sustentar a amizade nas minhas crises perante as dificuldades. Aos colegas do curso de mestrado por terem feito isso tudo valer a pena, por terem feito disso algo especial em minha vida.

Agradeço também a todos os alunos do curso de mestrado que ajudaram academicamente e pessoalmente para que a realização desta tarefa fosse cumprida.

Agradeço a meus pais por muito mais do que apoio nas minhas decisões e por me abençoarem com suas graças. Minhas irmãs pela compreensão, minha noiva pelo amor, meus amigos, pela amizade sincera.

Agradeço também especialmente ao professor David Hill que, como orientador mostrou-se não só extremamente competente nos processos matemáticos, mas também extremamente sensível e compreensivo nos processos humanos. Também como professor de disciplinas por ter sido fantástico e inspirador.

A todos os professores, funcionários e pessoas envolvidas no processo do mestrado. A todos que podem não ter visto seus nomes citados, mas podem guardar a certeza de terem sido lembrados e seu valor devidamente reconhecido e guardado no meu íntimo.

Resumo

Após uma introdução à teoria avançada de módulos sobre anéis e uma abordagem básica sobre conhecimentos de anéis Quase-Frobënius e Pseudo-Frobënius, este texto traz como ponto culminante, a resposta a duas conjecturas que ficaram em aberto por muitos anos.

Sobre os anéis Pseudo-Frobënius, apresentaremos uma classe de contra-exemplos propostos por Dischinger e Müller envolvendo o anel das séries de potência torcida, que garante a existência de anéis Pseudo-Frobënius unilaterais.

Numa segunda seção do capítulo 2, apresentaremos duas respostas parciais à questão de quando $PF \Rightarrow QF$ proposta por Nicholson e Yousif, onde utilizam o conceito de um anel simples-injetivo e conseguem obter resultados expressivos nesta área.

Abstract

After an introduction of an advanced theory of Modules over Rings and a basic approach about QF and PF rings, this text brings as a main materia a parcial answer of two conjectures that have been open for many years.

About PF rings we present a class of examples, proposed by Dischinger and Müller, about the Twisted Power Series Ring, that garanties the existence of PF rings in just one side.

In a second section of chapter 2, we present two parcial answers to the questions about when $PF \Rightarrow QF$, proposed by Nicholson and Yousif, where they use the concept of a Simple-Injective ring and get expressive results in this area.

Sumário

Introdução

Este trabalho trata dos anéis Pseudo-Frobenius, bem como de conjecturas envolvendo esta classe de anéis. Os estudos nessa área vêm sendo desenvolvidos desde a década de 60 com trabalhos de Barbra L. Osofsky e G. Azumaya sobre dualidades de Morita e anéis Quasi-Frobenius. Algumas questões levantadas nesta época ficaram em aberto por muito tempo, algumas delas ainda estão.

Neste texto, apresentaremos uma classe de contra-exemplos propostos por Friederich Dischinger e Wolfgang Müller para um anel que é Pseudo-Frobenius à esquerda, mas não é à direita, contradizendo uma conjectura em aberto por muitos anos, que dizia que um anel Pseudo-Frobenius era necessariamente bilateral.

Numa seção adiante, apresentaremos resultados parciais, obtidos por W. K. Nicholson e M. F. Yousif para uma questão também em aberto por muito tempo. O problema é saber que condições são necessárias (as mínimas) para que um anel Pseudo-Frobenius seja também Quase-Frobenius.

É interessante mencionar que, ainda hoje, esta questão está em aberto. Pesquisas recentes de Carl Faith (2003) mencionam que resultados parciais vêm sendo obtidos, mas nada que conclua o estudo na área ou que diminua o interesse por tal pesquisa.

Para a leitura deste texto será necessário um conhecimento básico sobre a teoria de anéis, a teoria dos módulos sobre anéis e de álgebra não-comutativa em geral. Sendo que, no capítulo de preliminares serão apresentados resultados e conceitos também necessários para a compreensão deste trabalho. Conceitos avançados da teoria dos módulos sobre anéis como: módulos projetivos e injetivos, coberturas projetivas, envelopes injetivos, geradores e cogeradores, socle e radical, dualidade de Morita, entre outros.

Preliminares

Nesta esta seção de preliminares traremos alguns conceitos básicos sobre a teoria dos módulos sobre anéis. Como este texto trata de tópicos avançados nesta área, estaremos considerando que o leitor tenha um conhecimento básico da teoria de módulos. Conceitos iniciais serão omitidos aqui, bem como resultados amplamente conhecidos e provas de resultados também de conhecimento comum a pesquisadores e estudantes da área.

Muitos dos resultados citados neste capítulo terão suas provas omitidas por motivo exposto acima. O leitor que se interessar por tais provas poderá consultar a referência [1], já que este livro foi adotado como uma das principais referências e pode também ser usado como fonte de pesquisa muito eficiente ao estudo da teoria dos módulos sobre anéis.

Ainda assim introduziremos alguns conceitos conhecidos por muitos, mas largamente utilizados neste texto tais como idempotentes, projetividade e injetividade de módulos bem como suas implicações e conseqüências, anuladores, geradores e cogeradores, entre outros tópicos.

Antes porém é conveniente citar algumas notações e terminologias adotadas ao longo deste texto:

(1) R-mod - módulos à esquerda.

(2) mod-R - módulos à direita.

(3) $J = J(R)$ - o radical Jacobiano de R (definição adiante).

(4) $M \ll N$ - M é supérfluo em N (definição adiante).

(5) $M \trianglelefteq N$ - M é essencial em N (definição adiante).

(6) $M' = Hom(M, R)$ - o dual de M.

0.1 Idempotentes

Seja e um elemento do anel R, e é um idempotente se $e^2 = e$ (1 e 0 são idempotentes).

Exemplo **0.1.** *Seja $R = \mathbb{Z}$, seus idempotentes não nulos são:* $\{1\}$.

Exemplo **0.2.** *Seja $R = M_2(\mathcal{F})$, os elementos $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $E_{11'} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são idempotentes não nulos.*

A ligação entre idempotentes e parcelas diretas é algo extremamente importante na teoria de módulos. Um dos resultados significativos neste sentido é a proposição a seguir.

0.1 Proposição. *Um ideal à esquerda I de R é uma parcela direta de R se, e somente se, existe idempotente $e \in R$ tal que $I = Re$, além disso $R = Re \oplus R(1-e)$.*

Prova. $\Rightarrow]$ Suponha que I é uma parcela direta, logo existe um ideal à esquerda I' tal que $R = I \oplus I'$. Mas $1 = e + e'$, $e \in I$, $e' \in I'$. Assim, $e = e^2 + ee'$ ou $e - e^2 = ee' \in I \cap I' = 0$, o que implica $e = e^2$ e $e' = 1 - e$ também é idempotente.

Além disso, $R = Re + R(1-e)$, pois $1 \in Re + R(1-e)$ e veja que esta soma é direta, suponha $x \in Re \cap R(1-e) \Rightarrow x = ce = d(1-e)$, com $c, d \in R$. Multiplicando por e à direita:

$$xe = ce^2 = d(1-e)e$$

$$xe = ce = d(e - e^2)$$

$$xe = ce = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Vamos agora provar que $Re = I$: é claro que $Re \subseteq I$ pois $e \in I = re \in I, \forall r \in R$. No outro sentido, tome $x \in I$ considere xe. Então:

$$x - xe = x(1-e) \in I' \Rightarrow x - xe \in I \text{ e } x - xe \in I' \text{ com } I \cap I' = 0$$

$$\Rightarrow x - xe = 0 \Rightarrow x = xe \Rightarrow I \subseteq Re$$

Logo $Re = I$.

$\Leftarrow]$ Pela prova de acima, $I = Re$, e é fácil ver que I é parcela direta, pois $R = Re \oplus R(1-e)$.

$\square$

A seguir daremos algumas definições e terminologias utilizadas no texto.

Seja $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ um conjunto de idempotentes. Dizemos que S é:

(a) Ortogonal se $e_i e_j = 0$ $(i \neq j)$.

(b) Completo se $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.

Exemplo **0.3.** *$R = M_n(\mathcal{F})$, os idempotentes E_{ii} formam um conjunto completo e ortogonal.*

Ainda continuamos com a relação entre idempotentes e parcelas diretas nos resultados abaixo.

0.2 Proposição. *Sejam $I_1, \ldots, I_n$ ideais à esquerda, em R. As condições a seguir são equivalentes:*

(i) $R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$;

(ii) Cada $x \in R$ pode ser escrito de maneira única na forma $x = r_1 + \ldots + r_n$ com $r_i \in I_i$;

(iii) Existe conjunto completo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de idempotentes ortogonais, tais que

$$R = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n \text{ com } I_i = Re_i.$$

Prova. Encontrada em [1].

□

0.3 Corolário. *Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um conjunto completo e ortogonal de idempotentes, logo ${}_RR = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n$ e $R_R = e_1R \oplus \ldots \oplus e_nR$.*

Prova. (Imediata pela proposição anterior 0.2)

□

O idempotente e é primitivo se $e = e_1 + e_2$, com e_1 e e_2 idempotentes, implica $e_1 = 0$ ou $e_2 = 0$.

0.4 Definição. *Dizemos que um ideal à esquerda Re $(e = e^2)$ é indecomponível se*

$$Re =_R I_1 \oplus_R I_2 \Rightarrow I_1 = 0 \text{ ou } I_2 = 0.$$

Os idempotentes primitivos têm ampla importância quando no tratamento de módulos indecomponíveis. A observação a seguir é um bom exemplo desta relação.

0.5 Observação. *Re é indecomponível se, e somente se, e é primitivo.*

Prova. $\Rightarrow$] Suponha e não é primitivo, então $e = e_1 + e_2$ (podemos escolher, sem perdas de generalidade e_1 e e_2 ortogonais)e portanto $Re_1 \cap Re_2 = 0$ e $Re_1 + Re_2 = Re \Rightarrow Re = Re_1 \oplus Re_2$, ou seja, não é indecomponível.

$\Leftarrow$] Se Re não for indecomponível, então $Re = I_1 \oplus I_2 \Rightarrow eRe = eI_1 \oplus eI_2$. Aplique agora 0.2:

$$e = e_1 + e_2,$$

$$eI_1 = (eRe)e_1,\ {e_1}^2 = e_1 \neq 0,$$

$$eI_2 = (eRe)e_2,\ {e_2}^2 = e_2 \neq 0.$$

Uma vez que $I_1 \neq 0$ e $I_2 \neq 0$, assim e não é primitivo.

□

Exemplo **0.4.** *Em $M_n(\mathcal{F})$, E_{ii} são primitivos.*

0.6 Proposição. *Seja $e \in R$, $e \neq 0$. São equivalentes:*

(i) e é idempotente primitivo;

(ii) Re é ideal indecomponível (à esquerda);

(iii) eR é ideal indecomponível (à direita);

(iv) eRe tem um único idempotente não nulo, e.

Prova. Segue-se da observação 0.5.

□

Um conjunto de idempotentes $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é básico se $Re_1, \ldots, Re_n$ é um conjunto completo de representantes irredundantes de R-mod primitivos, com

$$Re_i \simeq Re_j \Rightarrow i = j \text{ e } Re_i/Je_i \simeq Re_j/Je_j \Rightarrow i = j.$$

Ainda sobre idempotentes, temos este resultado que relaciona os idempotentes de R com o radical Jacobiano $J = J(R)$ e a maximalidade no indecomponível Re.

0.7 Proposição. *As seguintes afirmacões sobre um idempotente e, num anel R, são equivalentes:*

(a) Re/Je é simples;

(b) Je é o único sub-módulo maximal de Re;

(c) eRe é um anel local;

(d) eJ é o único sub-módulo maximal de eR;

(e) eR/eJ é simples.

Prova. Prova encontrada em [1]

□

Apresentaremos ainda sobre módulos simples, indecomponíveis e idempotentes uma série de lemas que serão utilizados neste texto em resultados nos próximos capítulos. As provas destes lemas podem ser facilmente encontradas em [2] ou em [1], e serão omitidas deste texto.

0.8 Lema. *Existe uma correspondência biunívoca entre classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis principais e classes de isomorfismo de R-mod simples.*

0.9 Lema. *Todo R-mod simples V, é isomorfo a Re/Je para algum módulo indecomponível principal Re.*

0.10 Lema. *Seja M um R-mod com série de composição, e seja Re um R-mod indecomponível principal. M tem um fator de composição R-isomorfo a Re/Je se, e somente se, $eM \neq 0$.*

0.2 Geradores e Cogeradores

Falaremos um pouco agora sobre algo importante no nosso trabalho, um tema abordado talvez sutilmente nos conceitos avançados de anéis e presente discretamente em muitos resultados.

Seja M um módulo. Um subconjunto $X \subseteq M$ é dito um *conjunto de geradores* para M se $M = RX$, i.e., se M é formado por todas as combinações lineares de elementos de X, o que é equivalente (e talvez menos claro) a afirmarmos que existe, para algum conjunto A, um epimorfismo

$$\mathbb{R}^{(A)} \xrightarrow{\rho} M \to 0$$

tal que $\rho(\iota_\alpha(1)) \in X$ para todo $\alpha \in A$. De modo mais geral, dizemos que uma classe $\mathcal{U}$ de módulos *gera (finitamente) um módulo* M ou que M é *(finitamente) gerado por* $\mathcal{U}$ se, existem uma família (finita) $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ em $\mathcal{U}$ e um epimorfismo

$$\oplus_A U_\alpha \to M \to 0.$$

Se $\mathcal{U} = \{U\}$, dizemos que U *gera (finitamente)* M, se existir um epimorfismo $U^{(A)} \to M \to 0$ para algum conjunto (finito) A.

Por inversão de flechas e de $\oplus_A$ por $\prod_A$ no conceito de geradores obtemos um conceito igualmente importante, os cogeradores. Mais explicitamente, dizemos que uma classe $\mathcal{U}$ de módulos *cogera (finitamente) um módulo* M se, existem uma família (finita) $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ em $\mathcal{U}$ e um monomorfismo

$$0 \to M \to \prod_A U_\alpha.$$

Se $\mathcal{U} = \{U\}$, diremos que U *cogera (finitamente)* M se existir um monomorfismo

$$0 \to M \to U^A$$

para algum conjunto (finito) A.

A proposição abaixo fornece uma caracterização para os geradores e cogeradores.

0.11 Proposição. *Seja $\mathcal{U}$ uma classe de módulos. Então,*

(a) $\mathcal{U}$ gera M se, e somente se, M é uma soma de sub-módulos tais que cada um deles é uma imagem epimórfica de algum de módulo em $\mathcal{U}$;

(b) $\mathcal{U}$ cogera M se, e somente se, existe um conjunto $\mathcal{K}$ de sub-módulos de M tal que $\cap\mathcal{K} = 0$ e para cada $K \in \mathcal{K}$, M/K está incluído em algum módulo de $\mathcal{U}$.

Prova. Ver [1].

□

0.12 Proposição. *Sejam U e M módulos. Então,*

(a) U gera (finitamente) M se, e somente se, existe um conjunto (finito) $H \subseteq Hom_R(U, M)$ tal que $M = \sum_{h \in H} \operatorname{Im} h$;

(b) U cogera (finitamente) M se, e somente se, existe um conjunto (finito) $H \subseteq Hom_R(M, U)$ tal que $\bigcap_{h \in H} \ker h = 0$.

Prova. Ver [1].

□

0.3 Módulos Projetivos e Injetivos

Agora traremos algo sobre projetividade e injetividade de módulos. Serão apresentados também os principais teoremas desta área que estão sendo utilizados ao longo do texto. Uma parte mais restrita, sobre coberturas projetivas será apresentada no capítulo 1, na seção referente aos anéis Semi-Perfeitos, onde este conteúdo é devidamente utilizado. Teoremas clássicos como o da existência e unicidade do envelope injetivo (Eickman - Shnopt) e o teste injetivo (Critério de Baer) serão apresentados sem provas, estas podem ser encontradas facilmente em vários livros da área e para isto recomendamos o Anderson - Fuller [1].

0.13 Definição. *Um módulo P é projetivo se para cada sequência exata*

$$M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

e homomorfismo $f : P \to N$, sempre existe $h : P \to M$ tal que $gh = f$. Ou seja, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

A proposição a seguir traz algumas caracterizações para módulos projetivos.

0.14 Proposição. *As seguintes afirmações sobre um módulo P são equivalentes:*

(i) P é projetivo;

(ii) Cada sequência exata $M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ é cindida;

(iii) P é isomorfo a uma parcela direta de um módulo livre.

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii): Considere o diagrama abaixo, ele comuta, pois P é projetivo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "id"] & \\ M \arrow[r, shift left, "f"] & P \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Então, $fh = id \Rightarrow$ a sequência é cindida.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sabemos que existe epimorfismo $f : F \to P$, com F um módulo livre. Então o diagrama a seguir comuta (cindida).

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "id"] & \\
F \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

E assim temos $F \simeq P \oplus P'$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl] \arrow[d, "g"] & \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Queremos h tal que $fh = g$. Assumimos $P \subseteq F$, F, livre e $F = P \oplus P'$. Definimos $g' : F \to N$ da seguinte forma:

$$x \in F \Rightarrow x = p + p' \text{ com } p \in P \text{ e } p' \in P'$$

$$g'(x) = g(p)$$

g' é bem definido pois a soma é direta; $x = p + p'$ unicamente e g' estende g de P a F. Veja então o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& F = P \oplus P' \arrow[dl, "h'"'] \arrow[d, "g'"] & \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

F livre $\Rightarrow$ F projetivo $\Rightarrow \exists h'$ tal que $fh' = g'$. Tome $h = h'|_P$; e observe que $fh = g'|_P = g \Rightarrow P$ é projetivo.

$\square$

0.15 Corolário. *Um anel R é semi-simples se, e somente se, todo módulo à esquerda (à direita) é projetivo.*

0.16 *Observação. M é semi-simples se, e somente se, toda sequência exata*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

é cindida.

Prova. (observação) Pode ser encontrada em [1].

$\square$

Prova. (corolário) $\Leftarrow$] Considere $0 \longrightarrow K \longrightarrow R \longrightarrow N \longrightarrow 0$. Mas N é projetivo, pois a sequência é cindida e portanto, R é semi-simples (pela observação).

$\Rightarrow$] Seja M módulo, R semi-simples. Existe $R^{(A)}$ livre, tal que a sequência $R^{(A)} \rightleftarrows M \longrightarrow 0$ é cindida. Logo $M \oplus M' = R^{(A)}$ e portanto, M é projetivo.

$\square$

Um resultado que caracteriza especialmente o radical Jacobiano de um módulo projetivo:

0.17 Proposição. *Seja P projetivo e $J = J(R)$. Logo $J(P) = JP$.*

Prova. Veja [1].

$\square$

Agora definiremos os módulos injetivos e introduziremos suas principais caracterizações e resultados relevantes para a apresentação deste texto.

0.18 Definição. *Um módulo E é chamado injetivo se para cada sequência exata*

$$0 \longrightarrow K \stackrel{i}{\longrightarrow} M$$

(i monomorfismo e K, M módulos quaisquer)e homomorfismo $f : K \to E$ sempre existe $h : M \to E$ tal que $hi = f$, ou seja, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Dizemos que podemos estender f a todo M através de h.

0.19 Proposição. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E é injetivo;

(ii) Para cada monomorfismo $i : K \to M$ a sequência exata (de grupos abelianos)

$$Hom_R(M, E) \stackrel{i^*}{\longrightarrow} Hom_R(K, E) \longrightarrow 0$$

é sobrejetiva (def. de i^*). Tome $g \in Hom_R(M, E)$, considere

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{g} E$$

logo $i^*(g) = gi$;

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii): Tome $g \in Hom_R(K, E)$ e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

E injetivo $\Rightarrow \exists h$ tal que $hi = g$. Agora usa $hi = i^*(h)$ (sobrejetivo).

(ii) $\Leftarrow$ (i): Argumento análogo.

$\square$

0.20 Observação. *Parcelas diretas e produtos diretos de módulos injetivos são também injetivos.*

O teorema a seguir é conhecido como Teste injetivo ou Critério de Baer e com ele trazemos uma definição de injetivo relativo. Este resultado não será demonstrado aqui, mas sua prova é bastante conhecida e pode ser encontrada em [1].

0.21 Definição. *Dizemos que um módulo E é injetivo relativo a um módulo M se para cada monomorfismo $i : K \to M$ e homomorfismo $f : K \to E$, existe $h : M \to E$ tal que $hi = f$, ou seja, o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Dizemos que um módulo é injetivo se ele é injetivo relativo a qualquer módulo.

0.22 Teorema. *(Critério de Baer) As seguintes condições são equivalentes:*

(i) E é injetivo;

(ii) E é injetivo relativo a R;

(iii) Para cada I, ideal à esquerda e homomorfismo $f : I \to E$, existe $x \in E$ tal que $f = \rho_x$ ($\rho_x = rx$, $r \in I$ - multiplicação à esquerda por um elemento de I).

Os resultados a seguir direcionam ao conceito do envelope injetivo. Estes culminam no conhecido teorema da existência e unicidade do envelope injetivo, atribuído a Eickman e Shnopt.

0.23 Lema. *Cada R módulo pode ser imerso num módulo injetivo.*

Prova. Veja [1].

□

0.24 Proposição. *E é injetivo se, e somente se, cada monomorfismo $0 \longrightarrow E \longrightarrow M$ é cindido.*

Prova. $\Rightarrow$] Considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & M \arrow[dl, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Com E injetivo temos $hf = id \Rightarrow$ a sequência é cindida.

$\Leftarrow$] Pelo Lema 0.23, existe um módulo injetivo Q e monomorfismo $f : E \to Q$, logo

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} Q$$

é cindida o que implica que E é isomorfo a uma parcela direta de Q. Como Q é injetivo, pela observação 0.20, E é injetivo.

□

0.25 Corolário. *Um anel R é Semi-simples se, e somente se, todo R módulo é injetivo.*

Prova. $\Rightarrow$] Sejam R anel Semi-simples e M um R-mod. Por 0.23, existe injetivo E, tal que a sequência

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \longrightarrow E/M \longrightarrow 0$$

é exata. Com R Semi-simples, a sequência é cindida e assim, M é uma parcela direta de E, portanto, M é injetivo.

$\Leftarrow$] Considere a sequência exata e o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"'] & M \arrow[r] \arrow[dl, "h"] & M/K \arrow[r] & 0 \\
 & K & & &
\end{tikzcd}$$

É suficiente provar que a sequência é cindida. Como, por hipótese, todo módulo é injetivo, o diagrama comuta e $hi = id$, o que garante que a sequência é cindida e R é Semi-simples.

□

Para apresentar o teorema da existência e unicidade do envelope injetivo de um módulo, precisamos ainda de alguns conceitos tais como a definição a seguir.

0.26 Definição. *Dizemos que um sub-módulo $K \subseteq M$ é essencial em M se para cada sub-módulo $L \subseteq M$, $L \neq 0$, temos $K \cap L \neq 0$. Denotamos $K \trianglelefteq M$.*

Um conceito dual é o de sub-módulo supérfluo: se $N \subseteq M$ é supérfluo em M, denotado por $N \ll M$, então para todo sub-módulo $L \subseteq M$, $N + L = M \Rightarrow L = M$.

Exemplo **0.5.** *$R = \mathbb{Z}$, (n), múltiplos de n, é essencial em $\mathbb{Z}$.*

Exemplo **0.6.** *Todo sub-módulo de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é essencial, onde $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é definido por: $p \in \mathbb{Z}$, primo positivo, então $M = \{a/p^n \in \mathbb{Q} | \ a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}\}$ é um sub-grupo aditivo de $\mathbb{Q}$ com sub-grupo $\mathbb{Z}$. Denotamos então o grupo quociente $M/\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.*

Exemplo **0.7.** $\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Q}$.

A seguir definimos socle, conceito dual do radical Jacobiano e de extrema importância ao longo do texto.

0.27 Definição. *Cada módulo M tem um (único) maior sub-módulo que é semi-simples. Este sub-módulo é chamado de socle de M, denotado por, $soc(M)$. Uma caracterização importante é que:*

$$soc(M) = \sum \{K \subseteq M \mid K \text{ é minimal em } M\}$$

ou ainda:

$$\bigcap \{L \subseteq M \mid L \trianglelefteq M\}.$$

0.28 Lema. *R Artiniano, então $soc(M) \trianglelefteq M$.*

Prova. Suponha $soc(M)$ não é essencial em M. Então existe $K \subseteq M$, tal que $K \cap soc(M) = 0$. Mas, com R Artiniano, $K \supseteq S$, para certo S, simples e $S \cap soc(M) \neq 0$, por definição de socle. Portanto, $soc(M) \trianglelefteq M$.

□

0.29 Definição. *Seja M um módulo, E módulo injetivo. Dizemos que (q, E) é um envelope injetivo de M se $q : M \to E$ é monomorfismo e $q(M) \trianglelefteq E$. Dizemos que q é um monomorfismo essencial.*

0.30 Proposição. *Seja M um R-mod e suponha que (i, E) é um envelope injetivo de M. Suponha também que Q é um módulo injetivo e $q : M \to Q$ é também um monomorfismo. Então Q tem uma decomposição $Q = E' \oplus E''$, tal que:*

(a) $E' \simeq E$;

(b) $Im(q) \subseteq E'$;

(c) (q, E') é envelope injetivo de M.

Além disso, se $f : M_1 \to M_2$ é um isomorfismo e $i_1 : M_1 \to E_1$ e $i_2 : M_2 \to E_2$ são envelopes injetivos de M_1 e M_2, respectivamente, então $\exists \bar{f} : E_1 \to E_2$, $\bar{f}$ isomorfismo, ou seja, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "\bar{f}"] & E_2 \\
M_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "f"] & M_2 \arrow[u, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

Prova. Considere o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[dl, "\bar{q}"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Como Q é injetivo, ele comuta. Precisamos agora provar que $\bar{q}$ é monomorfismo. Para isto, suponha que $\ker(\bar{q}) \neq 0$. Sabemos que $i(M) \trianglelefteq E$, logo $i(M) \cap \ker(\bar{q}) \neq 0$. Assim,

$$\exists x \neq 0, \text{ tal que } x \in \ker(\bar{q}) \cap i(M) \Rightarrow x = i(y), \text{ para certo } y \in M, \text{ e } y \neq 0.$$

Então,

$$0 = \bar{q}(x) = \bar{q}(i(y)) = q(y) \Rightarrow y = 0.$$

Logo, por absurdo, $\bar{q}$ é monomorfismo.

Assim temos que a sequência:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\bar{q}} Q$$

é cindida (E é injetivo) e:

$$Q = E' \oplus E'', \text{ com } E' = Im(\bar{q}) \simeq E,$$

o que prova a afirmação (i).

Provando a afirmação (ii) basta ver que $\bar{q}$ estende $q \Rightarrow Im(q) \subseteq Im(\bar{q}) = E'$.

E, finalmente a afirmação (iii). Para isto considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[dl, "\bar{q}"] \\
 & E' &
\end{tikzcd}$$

$E' = Im(\bar{q})$ ($\bar{q}$ é isomorfismo, portanto monomorfismo). Temos que provar que $q(M) \trianglelefteq E'$. Assim, tome $0 \neq Rx' \subseteq E'$. Observe que $\bar{q}^{-1}(Rx') \cap i(M) \neq 0$ ($\bar{q}$ é isomorfismo). Então $\exists y \neq 0 \in \bar{q}^{-1}(Rx') \cap i(M)$, tal que:

$$0 \neq \bar{q}(y) \in Rx' \cap \bar{q}(i(M)) = Rx' \cap q(M) \trianglelefteq E'.$$

Desde que $q(M) \cap Rx \neq 0 \Rightarrow q(M)$ é essencial (basta verificar em cíclicos).

$\square$

Apresentaremos agora o Teorema de Eickman e Shnopt, um resultado clássico para pesquisadores e estudantes da área, cuja prova pode também ser encontrada em diversos livros e para isso indicamos o Anderson e Fuller [1].

0.31 TEOREMA. *(Eickman + Shnopt) Cada módulo tem envelope injetivo e este é único a menos de isomorfismo.*

Capítulo 1

Anéis Pseudo-Frobenius

Neste capítulo estudaremos alguns tipos especiais de anéis, nos quais estão baseados este trabalho. O capítulo tem como ponto principal os anéis Pseudo Frobenius que serão discutidos na seção 1.3, mas para isso será necessário e importante o conhecimento anterior sobre anéis Quasi Frobenius, que serão discutidos na seção 1.1 e sobre anéis Semi-Perfeitos, que serão discutidos em 1.2.

1.1 Anéis Quase-Frobenius

Os anéis Quase-Frobenius (QF) são uma classe de anéis Artinianos onde o módulo regular ${}_RR$ é injetivo. Esta classe de anéis inclui os anéis Artinianos semi-simples e todas Álgebras de Grupo de grupos finitos sobre corpos, semi-simples ou não.

Os anéis QF apareceram, inicialmente no estudo de Dualidades de Morita, pelo fato de existir nesses anéis uma dualidade entre as classes dos R-mod finitamente gerados e a classe dos mod-R finitamente gerados.

Nossa definição de anéis QF será dada em termos de anuladores, uma abordagem clássica, proposta inicialmente por M. Hall para álgebras semi-simples e por Nakayama no estudo dos anéis de Frobenius, anéis QF e álgebras.

Definiremos então anuladores e daremos algumas características, em seguida seguiremos com a definição clássica de anéis QF.

1.1 Definição (Anuladores).

$S \subseteq R$, um conjunto: $r(S) = \{a \in R;\ sa = 0,\ \forall s \in S\}$ é o anulador à direita de S.

$l(S) = \{a \in R;\ as = 0,\ \forall s \in S\}$ é o anulador à esquerda de S.

Na prática, os anuladores geram resultados diferentes quando aplicados a módulos e ideais. Quando tomamos, por exemplo, $l(M)$, para M um módulo à esquerda, estes são ideais bilaterais de R. Mas se tomamos $l(K)$, para K um módulo à direita, este é somente um ideal à esquerda de R.

Exemplo **1.1.** *$\mathbb{Z}_3$, módulo sobre $\mathbb{Z}$. $(3) = l(\mathbb{Z}_3) = r(\mathbb{Z}_3)$ e (3) é ideal bilateral de $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ múltiplos de 3).*

1.2 *Observação. Suponha S um R-mod simples. Então $J \subseteq l(S)$.*

Prova. Observe que $S \simeq R/M$, com M ideal máximo à esquerda. Tome $x \in J$ e $\bar{r} = r + M \in R/M$.

$$x\bar{r} = xr + M,\ J \text{ é ideal bilateral} \Rightarrow xr \in J$$

mas,

$$J \subseteq M = \bar{0} \Rightarrow xS = 0 \Rightarrow JS = 0.$$

Conclusão: J anula todos os módulos simples $\Rightarrow$ J anula todo módulo semi-simples.

□

Os lemas a seguir são resultados importantes para a caracterização deste tipo especial de anéis. Conhecendo alguns resultados sobre anuladores de J e idempotentes poderemos aprofundar nosso estudo sobre os anéis QF.

1.3 Lema. *Seja R Artiniano. Então o socle à esquerda $soc({}_RR)$ é o ideal bilateral $r(J)$, analogamente o socle à direita de R, $soc(R_R)$ é o ideal bilateral $l(J)$.*

Prova. Veja em [1].

□

1.4 Lema. *Seja e um idempotente em um anel R e seja N um ideal bilateral em R. Então o dual do R-mod Re/Ne ($Hom_R(Re/Ne, R)$) é isomorfo ao mod-R $er(N)$.*

Prova. Seja $V = Re/Ne$ e para cada $b \in er(N)$ defina a aplicação $\phi_b : V \to R$ como: $\phi_b(x + Ne) = xb$. Indicamos por X' o dual $Hom_R(X, R)$ de X.

Para prosseguir com a prova, faremos algumas afirmações:

AF.1; ϕ_b é bem-definida:

Toma x, y tais que $x - y \in Ne$. $\phi_b(x + Ne) - \phi_b(y + Ne) = xb - yb = (x - y)b = 0$, pois $b \in er(N)$.

AF.2; $\phi_b \in V'$:

$\phi_b(x + Ne + y + Ne) = (x + y)b = xb + yb = \phi_b(x + Ne) + \phi_b(y + Ne)$, $\phi_b(ax + Ne) = (ax)b = a(xb) = a\phi_b(x + Ne)$, para $a \in R$.

A aplicação φ, que leva $b \mapsto \phi_b$ é um R-homomorfismo de $er(N)$ em V'.

AF.3; φ é homomorfismo:

- $\varphi(b + b') = \phi_{b+b'}$: $\phi_{b+b'}(x + Ne) = x(b + b') = xb + xb' = \phi_b(x + Ne) + \phi_{b'}(x + Ne)$;
-$\varphi(ba) = \phi_{ba}$: $\phi_{ba}(x + Ne) = xba = (xb)a$.

AF.4; φ é injetiva:

Se $\phi_b = \phi_{b'}$, para b, $b' \in er(N)$, então $\phi_b(e + Ne) = \phi_{b'}(e + Ne)$ e temos $eb = eb' \Rightarrow b = b'$, pois b e $b' \in eR$.

AF.5; φ é sobrejetiva:

Para qualquer $\phi \in V'$, seja $b = \phi(e + Ne)$. Então $eb = b$ e, para todo $a \in Re$:
$\phi(a + Ne) = \phi(ae + Ne) = a\phi(e + Ne) = ab$.

Além disso, para todo $n \in J = J(R)$, $nb = \phi(n(e + Ne)) = 0$, então $b \in r(N) \cap eR = er(N)$ e $\phi = \phi_b$.

Assim, temos que φ é um R-isomorfismo entre $er(N)$ e V'.

□

Vejamos agora a definição de anéis QF, objeto fundamental de estudo deste texto.

1.5 Definição. *Um anel R Artiniano à esquerda é QF se $l(r(L)) = L$ e $r(l(K)) = K$ para todo ideal à esquerda L e todo ideal à direita K.*

Se R é QF, a aplicação $L \to r(L)$ determina uma função monomórfica revertendo a correspondência entre os conjuntos de ideais à esquerda e à direita em R. Como R é Noetheriano para ideais à esquerda, pelo teorema citado a seguir, 1.6, temos que R é também Artiniano à direita.

1.6 Teorema. *Seja $_RR$ um anel Artiniano. Então, $_RR$ tem série de composição e assim, os ideais à esquerda de R satisfazem ambas condições de cadeia, Artiniano e Noetheriano.*

Prova. (este é um resultado amplamente conhecido e pode ser encontrado em [2] ou em [1].

□

A seguir apresentamos um teorema que dá as principais equivalências e características de um anel QF. Este resultado é de fundamental importância no estudo desses anéis, visto que essas equivalências são amplamente utilizadas e até mesmo neste texto, no capítulo 2. Antes porém, apresentaremos uma definição que será utilizada na prova do resultado a seguir.

1.7 DEFINIÇÃO. *Um R-mod L e um mod-R K, são ditos serem um par a R se existe uma função $f : L \times K \to R$ tal que:*

$$f(ax_1 + bx_2, y) = af(x_1, y) + bf(x_2, y)$$

$$f(x, y_1a + y_2b) = f(x, y_1)a + f(x, y_2)b$$

para todo $a, b \in R$, $x's \in L$ e $y's \in K$. O terno (L, K, f) é dito ser não-degenerado se:

$$f(x, K) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } f(L, y) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Para qualquer sub-conjunto $U \subseteq L$, seja:

$$(0 : U) = \{y \in K : f(U, y) = 0\}$$

e para $V \subseteq K$:

$$(0 : V) = \{x \in L : f(x, V) = 0\}.$$

Se (L, K, f) é um par não-degenerado, então para cada $y \in K$, a aplicação $\lambda_y : L \to R$ definida por $\lambda_y(x) = f(x, y)$, para $x \in L$, é um elemento de L', e a aplicação que leva $y \mapsto \lambda_y$ é um isomorfismo de K em L'.

1.8 TEOREMA. *Seja R um anel Artiniano. São equivalentes:*

(i) R é QF;

(ii) Se L é um R-mod simples, seu dual L' é um, mod-R simples, e se K é um mod-R simples, seu dual K' é um R-mod simples;

(iii) ${}_RR$ é um R-mod injetivo;

(iv) R_R é um mod-R injetivo.

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii): Todo R-mod simples L é isomorfo a Re/Je para algum idempotente primitivo e. Como vimos no Lema (1.4), $L' \simeq er(J)$, além disso:

$$er(J) = eR \cap r(Je) = r(R(1 - e) + Je),$$

e $R(1-e)+Je$ é um ideal maximal à esquerda, em R, desde que:

$$\frac{R}{R(1-e)+Je} = \frac{R(1-e)\oplus Re}{R(1-e)\oplus Je} \simeq Re/Je.$$

Como R é QF, o anulador à direita de um ideal máximo à esquerda é um ideal à direita mínimo. Assim, $er(J)$ é mod-R simples. O mesmo argumento vale para mod-R simples e seus duais.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Pelo critério de Baer, 0.22, é suficiente mostrar que, se I é um ideal à esquerda em R, então todo homomorfismo η de I em ${}_RR$ pode ser estendido a um endomorfismo de ${}_RR$ e é, desta forma, a restrição a I de uma multiplicação à direita por um elemento fixo em R. Introduzimos, primeiramente, par não degenerado $({}_RR, R_R, f)$, onde

$$f(x,y) = xy, (x, y \in R).$$

É imediato que $(I, R_R/(0:I), f_1)$ é também um par não degenerado, onde f_1 é dado por

$$f_1(x,\bar{y}) = xy, \forall x \in I,\ \bar{y} = y + (0:I),\ y \in R.$$

O homomorfismo dado, η de I em ${}_RR$ é um elemento de I', e aplicando o Teorema de Morita-Tachikawa (que pode ser encontrado em [2] p. 397) ao par $(I, R_R/(0:I), f_1)$ vemos que $I' \simeq R_R/(0:I)$. Portanto, existe um elemento $y \in R$ tal que:

$$\eta(x) = f_1(x,\bar{y}) = xy$$

para todo $x \in I$. Isto garante que ${}_RR$ é injetivo.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Dado um homomorfismo $\eta : I \subset R \to R$, I ideal à esquerda, η é a restrição a I de uma multiplicação à direita por um elemento em R: $\eta(x) = xa$, $(a \in R)$.
Considere, a priori, um ideal principal à direita aR, e seja $b \in r(l(aR))$. Veja que: $x \in l(a) \Rightarrow xa = 0$, mas $xa = xa1 \Rightarrow (xa1)b = 0 \Rightarrow xa \in l(b)$. Então, $l(a) \subset l(b)$, e $xa \mapsto xb$ é um homomorfismo sobrejetivo de $Ra \to Rb$, assim, pelo Critério de Baer, $\exists c \in R$ tal que $ac = b$ e temos $b \in aR$. Portanto $r(l(aR)) = aR$ para qualquer ideal principal à direita aR, visto que a inclusão $aR \subset r(l(aR))$ é trivial.

Agora seja K um ideal à direita qualquer em R. Como R é Artiniano, e por isso, Noetheriano, existem elementos $a_1, \dots, a_s$ em R, tais que $K = a_1R + \cdots + a_sR$ e notamos que:

$$l(a_1R + \cdots + a_sR) = l(a_1R) \cap \cdots \cap l(a_sR)$$

e temos ainda:

$$r(l(K)) = r(l(a_1R + \cdots + a_sR)) = r(l(a_1R) \cap \cdots \cap l(a_sR)) = (^*)\ r(l(a_1R)) + \cdots + r(l(a_sR)) =$$

$$= a_1R + \cdots + a_sR = K,$$

para todo ideal à direita, K. A igualdade em (*) é garantida como aplicação do Critério de Baer, como provado em [2] p. 399 (58.11).

(Falta mostrar que $l(r(L)) = L$ para todo L, ideal à esquerda)

Sabemos que, com ${}_RR$ injetivo, cada parcela direta de ${}_RR$ é também injetiva. Em particular, Re é injetivo, para certo idempotente primitivo e. Seja H um sub-módulo simples de Re. Pelo Teorema de Eickman + Shnopt, 0.31, Re contém um envelope injetivo $E(H)$, de H, e $E(H)$ é uma parcela direta de Re. Como Re é indecomponível, vimos que Re é o envelope injetivo de cada uma de seus sub-módulos simples ($Re = E(H)$, $\forall H \subseteq Re$, H simples). Usando novamente o Teorema de Eickman + Shnopt, Re é uma extensão essencial (related extension) de H, e disto segue-se que H é o único sub-módulo mínimo de Re.

Agora sejam Re_1 e Re_2 módulos indecomponíveis principais com únicos sub-módulos simples H_1 e H_2. Pela unicidade do envelope injetivo (Eickman + Shnopt), 0.31, $H_1 \simeq H_2 \Leftrightarrow Re_1 \simeq Re_2$. Portanto, existem tantos ideais à esquerda mínimos não isomorfos em R quanto módulos indecomponíveis principais e, consequentemente, todo R-mod simples é R-isomorfo a algum ideal à esquerda mínimo em R.

Agora, seja L um ideal à esquerda arbitrário em R, então $L \subseteq l(r(L))$, e teremos que provar a igualdade. Assumiremos que a inclusão é própria, então existe um ideal à esquerda $L_0 \subset l(r(L))$ tal que L_0/L é um R-mod simples. Assim, existe um ideal mínimo à esquerda H, de R, tal que $L_0/L \simeq H$. Consequentemente, existe um R-homomorfismo $\varphi \neq 0$ de L_0 em ${}_RR$ tal que $\varphi(L) = 0$ (L_0/L está definido, logo $L = \ker(\varphi)$ para certo $\varphi \in Hom(\_\_, R)$). Então, pelo Critério de Baer, $\varphi(x) = xc$, $x \in L_0$, para certo $c \in R$ fixado, e temos $Lc = 0$.

Então $c \in r(L)$ e $L_0 \subset l(r(L)) \subset l(c)$. Portanto, $\varphi(L_0) = L_0c = 0$ contrário ao que assumimos. Assim, concluímos que $L = l(r(L))$ para qualquer ideal à esquerda L.

A prova da equivalência incluindo a afirmação (iv) é obtida trivialmente por simetria à prova da afirmação (iii).

□

O resultado a seguir também tem expressiva importância na descrição das características dos anéis Quasi-Frobenius. Mais uma vez a presença de anuladores de J e idempotentes são elementos de característica marcante desta classe de anéis.

1.9 PROPOSIÇÃO. *Sejam R um anel QF. Então $l(J) = r(J)$ e, consequentemente, os socles à direita e à esquerda de R são iguais. Todo módulo indecomponível principal Re tem um único sub-módulo mínimo $l(J)e$. Se e e f são idempotentes primitivos, então $l(J)e \simeq l(J)f$ se, e* *somente se,* $Re \simeq Rf$.

Prova. Pelo Lema 1.4 e o item (ii) do Teorema 1.8, sabemos que $er(J)$ é um mod-R irredutível, para cada idempotente primitivo e. Então $er(J)J = 0$, e como $e_1 + \cdots + e_n = 1$ com e_i idempotentes primitivos, temos que $r(J)J = 0$. Assim, $r(J) \subset l(J)$. De forma simétrica, temos que $l(J) \subset r(J)$, e concluímos que $r(J) = l(J)$. Pelo Lema 1.3, isto significa que, os socles à direita e à esquerda, de R são iguais.

Agora, seja Re um módulo indecomponível principal. Pelo item (ii) do Teorema 1.8 e a contrapartida do Lema 1.4 para módulos à direita, $l(J)e$ é não nulo e é um sub-módulo simples de Re. Como Re é indecomponível e injetivo, segue-se, pela prova de (iii) $\Rightarrow$ (i) de 1.8 que $l(J)e$ é o único sub-módulo mínimo de Re, e que $Re = E(l(J)e)$.

O restante da proposição é garantido pela unicidade do envelope injetivo (Teorema de Eickman + Shnopt, 0.31).

□

1.10 COROLÁRIO. *Seja R um anel QF. Então todo R-mod irredutível é isomorfo a um ideal à esquerda em R.*

Prova. Esta prova aparece na demonstração de (iii) $\Rightarrow$ (i) do Teorema 1.8 e segue-se da última afirmação do Teorema 1.9 porque o número de R-mod simples não isomorfos é igual ao número de módulos indecomponíveis principais distintos.

□

Abaixo apresentamos alguns exemplos de anéis QF.

Exemplo **1.2.** *Como já citado, um anel R Artiniano e Semi-simples é QF.*

Exemplo **1.3.** *É intuitivo (e correto) pensar que o anel A_n das matrizes $n \times n$, com coeficientes num anel A, QF é QF.*

Exemplo **1.4.** *Uma classe de exemplos comum nas pesquisas sobre anéis QF que também aparece em estudos sobre teoria de códigos são os anéis de grupo. É sabido que todo anel de grupo RG de um grupo finito sobre um anel QF é QF.*

1.2 Anéis Semi-Perfeitos

Antes de falarmos propriamente dos anéis Semi-perfeitos, veremos uma breve noção sobre coberturas projetivas e idempotentes, recursos que estão ligados à caracterização deste tipo de anel.

O lema a seguir, conhecido como Lema de Nakayama é utilizado em provas de teoremas adiante e é um importante resultado da área, amplamente conhecido, que relaciona sub-módulos supérfluos.

1.11 LEMA. *(Lema de Nakayama) Para um ideal à esquerda I de um anel R, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $I \subseteq J$;

(ii) Para todo R-mod finitamente gerado M, se $IM = M$, então $M = 0$;

(iii) Para todo R-mod finitamente gerado M, $IM \ll M$.

Prova. Veja [1] p.169

□

É sabido que todo módulo livre é projetivo e todo R-mod é gerado por ${}_RR$. Assim, trivialmente, todo módulo é uma imagem epimorfa de um módulo projetivo. Fortalecendo essa condição definimos que um par (P, p) é uma cobertura projetiva de um módulo ${}_RM$ se P é um R-mod projetivo e

$$P \xrightarrow{\ p\ } M \longrightarrow 0$$

é um epimorfismo supérfluo (isto é, $\ker(p) \ll P$). Para simplificar, usamos a terminologia, neste caso, que P é uma cobertura projetiva para M.

Exemplo **1.5.** *Se e é um idempotente em R, então $Je = J(Re) \ll Re$. Portanto, como Re é projetivo, o par (Re, n) é uma cobertura projetiva de Re/Je, onde $n : Re \to Re/Je$ é a projeção natural.*

Prova. Esta prova é encontrada em [1].

□

Alguns resultados sobre coberturas projetivas serão apresentados nesta seção, eles serão importantes no entendimento e na caracterização dos anéis semi-perfeitos. Em algumas provas e enunciados é comum escrevermos homomorfismos à direita de seus argumentos, como de praxe na literatura, a fim de facilitar o entendimento, isto está sendo feito na prova do lema a seguir.

1.12 LEMA. *Seja P um R-mod projetivo com anel de endomorfismos $S = End({}_RP)$. Seja $a \in S$, então:*

$$a \in J(S) \Leftrightarrow Im(a) \ll P.$$

Prova. [$\Leftarrow$] : Suponha $Im(a) \ll P$. Usando caracterizações do radical Jacobiano, será suficiente provar que $Sa \ll_S S$. Suponha que $I \subseteq_S S$ e $Sa + I = S$ (teremos que provar que $I = S$). Então $1_P = sa+b$ para algum $s \in S$ e $b \in I$. Assim $P = P1_P \subseteq Psa+Pb \subseteq Im(a)+Pb$, logo $Pb = P$. Mas assim b se torna um epimorfismo $b : P \to P$, como P é projetivo, b é cindido e existe algum $c \in S$ com $1_P = cb \in I$. Desta forma $I = S$ e $Sa \ll S$.

[$\Rightarrow$] : Seja $a \in J(S)$ e suponha $K \subseteq P$ com $Im(a) + K = P$ (queremos mostrar que $K = P$). Veja que, se $n_K : P \to P/K$ é a projeção natural, então $an_K : P \to P/K$ é um epimorfismo. Tomando $s \in S$ tal que o diagrama comute, temos:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "n_K"] & \\
P \arrow[r, "an_K"] & P/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow n_K = san_K \Rightarrow n_K - san_K = 0 \Rightarrow (1 - sa)n_K = 0$

Mas, desde que $a \in J(S)$, $1 - sa$ é inversível (quase-regular) e $n_K = 0$, o que deduz $K = P$.

□

1.13 LEMA. *Suponha que $_RM$ tenha uma cobertura projetiva $p : P \to M$. Se $_RQ$ é projetivo e $q : Q \to M$ é um epimorfismo, então Q tem uma decomposição $Q = P' \oplus P''$ tal que:*

(1) $P' \simeq P$;

(2) $P'' \subseteq \ker(q)$;

(3) $(q|_{P'}) : P' \to M$ é uma cobertura projetiva para M.

Prova. Este teorema traz propriedades duais em relação aos envelopes injetivos e sua prova é praxe na área e facilmente encontrada em [1] p. 200.

□

1.14 PROPOSIÇÃO. *Seja P um R-mod projetivo. Então as afirmações a seguir são equivalentes:*

(a) P é cobertura projetiva de um R-mod simples;

(b) JP é um sub-módulo maximal supérfluo de P;

(c) $End(_RP)$ é um anel local.

Prova. (a) $\Rightarrow$ (b): P é cobertura projetiva de um R-mod simples se, e somente se, P contém um sub-módulo supérfluo maximal. Mas $JP(= J(P)$, pois P é projetivo) está contido em todo sub-módulo maximal de P e contém todo sub-módulo supérfluo de P.

(b) $\Rightarrow$ (c): Se JP é um sub-módulo supérfluo maximal de P, então, pelo Lema de Schur temos: P/JP é simples e:

$$End(_RP)/J(End(_RP)) \simeq End(P/JP)$$

é um anel de divisão. Assim, $End(_RP)$ é um anel local (sabendo que R é local $\Leftrightarrow$ $R/J(R)$ é anel de divisão).

(c) $\Rightarrow$ (a): Com $End(_RP)$ um anel local, então $P \neq 0$. Como todo módulo projetivo não nulo contém um sub-módulo máximo, existe um $K \subseteq P$ maximal. Tome o epimorfismo natural $P \xrightarrow{\ \pi\ } P/K \longrightarrow 0$. Queremos provar que P é cobertura projetiva de P/K, isto é, $K \ll P$ ($K = \ker(\pi) \ll P$).

Para isto, suponha $K + L = P$ para algum $L \subseteq P$ (queremos mostrar que $L = P$). Então:

$$P/K \simeq K + L/K \simeq L/L \cap K \text{ (teoremas de isomorfismo)}$$

então existe um homomorfismo não nulo $f : P \to L/L \cap K$. E como P é projetivo, existe um endomorfismo $s : P \to L$ tal que o diagrama comuta e $f = sn$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "f"] & \\
L \arrow[r, "an_K"] & L/L \cap K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Desde que $0 \neq f = sn$, $Im(s) \nsubseteq K$; de onde segue que $Im(s)$ não é supérfluo em P. Assim $s \neq\in J(End(_RP)$ (1.12), s é um endomorfismo inversível de P o que implica $L = P$, e portanto, $K \ll P$.

$\square$

Valendo as condições acima, $P \simeq Re$ para algum idempotente $e \in R$, já que todo módulo simples é uma imagem epimorfa de R, então, por (1.13), uma cobertura projetiva P, de um módulo simples deve ser isomorfa a uma parcela direta de $_RR$, isto é, $P \simeq Re$.

"Os idempotentes num anel R representam idempotentes em todo anel quociente de R, embora classes laterais de idempotentes não necessariamente tenham representativos em R. Por exemplo, $\mathbb{Z}$ tem dois idempotentes (0 e 1) enquanto $\mathbb{Z}_6$ tem quatro ($\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{3}$ e $\bar{4}$)"([1] p. 301).

Seja então I, um ideal em R, e $f + I$ um idempotente em R/I. Se existe um idempotente $e \in R$ tal que $f + I = e + I$, dizemos que f pode ser levantado módulo I (para e). Se todos os idempotentes de R/I levantam módulo I a um idempotente em R, dizemos simplesmente que os idempotentes levantam módulo I. Intuitivamente, quanto menor o ideal I, maior a possibilidade dos idempotentes levantarem módulo I.

1.15 DEFINIÇÃO. *Uma anel R é dito Semi-perfeito se R/J é semi-simples e os idempotentes levantam módulo J.*

Desta forma, podemos apreciar que um anel Artiniano, à direita ou à esquerda é semi-perfeito. Também os anéis locais, são uma classe de anéis que são semi-perfeitos amplamente conhecidos e estudados.

Os anéis semi-perfeitos são extremamente importantes no estudo dos anéis Pseudo-Frobenius. Uma generalização do conceito de anéis Artinianos, mais fraca, porém de grande valor. O teorema a seguir 1.21, fornece uma caracterização importante para esta classe de anéis e será necessário na seção seguinte deste capítulo.

Antes porém, citaremos alguns lemas importantes, que são pré-requisitos para o conhecimento sobre anéis semi-perfeitos. Em particular, o lema logo abaixo dá uma boa noção sobre a generalização do conceito de Artiniano, já que envolve ideal nil, com ele temos uma melhor idéia sobre o enfraquecimento das condições sobre anéis Artinianos.

1.16 LEMA. *Se I é um ideal nil num anel R, então idempotentes levantam módulo I.*

Prova. [1] p.301

$\square$

1.17 LEMA. *Suponha que ${}_RM$ tenha uma decomposição $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ tal que cada parcela M_i tenha uma cobertura projetiva. Então um R-homomorfismo $p : P \to M$ é uma cobertura projetiva se, e somente se P tem uma decomposição $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ tal que para cada $i = 1, \ldots, n$ $(p|_{P_i}) : P_i \to M_i$ é uma cobertura projetiva.*

Prova. Sejam $q_i : Q_i \to M_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ as coberturas projetivas. Então, segue-se por propriedades de módulos projetivos (soma e produto finito de projetivos são projetivos) e de módulos supérfluos que:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} q_i : Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_n \to M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$$

é uma cobertura projetiva. Assim, tomando $q_i = (p|_{P_i})$ vemos que a condição é suficiente. Esta condição é também necessária, como garantido pela última afirmação de 1.13.

$\square$

1.18 LEMA. *Um módulo cíclico ${}_RM$ tem uma cobertura projetiva se, e somente se $M \simeq Re/Ie$ para algum idempotente $e \in R$ e algum ideal $I \subseteq J$ para e e I satisfazendo à condição da* *aplicação natural:*

$$Re \to Re/Ie \to 0.$$

Prova. A projeção natural $Re \to Re/Ie$ tem núcleo Ie. Então, se $I \subseteq J$, temos $Ie \subseteq Je \ll Re$. Por outro lado, suponha ${}_RM$ tem uma cobertura projetiva $p : P \to M$. Se M é cíclico, então existe um epimorfismo $f : R \to M$. Assim, por 1.13 nós podemos assumir $R = P \oplus P'$ com $p = (f|_P)$. Desta forma, para algum idempotente $e \in R$, $P = Re$ e $Ie = Ker(p) \ll Re$. Daí $Ie \subseteq Je \subseteq J$ e $M \simeq Re/Ie$.

□

1.19 Lema. *Seja R um anel e seja I um ideal de R com $I \subseteq J$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Idempotentes levantam módulo I;

(b) Toda parcela direta do R-mod R/I tem uma cobertura projetiva;

(c) Todo conjunto (completo) finito ortogonal de idempotentes em R/I levanta para um conjunto (completo) ortogonal em R.

Prova. (a) $\Rightarrow$ (b): Uma parcela direta de ${}_RR/I$ é também parcela direta de ${}_{R/I}R/I$ e também é gerado por um idempotente de R/I. Assumindo (a),podemos levantar qualquer destes idempotentes, logo será suficiente provar que se $e \in R$ é um idempotente, então $(Re + I)/I$ tem uma cobertura projetiva em ${}_RM$, como R módulo. Mas,

$$(Re + I)/I \simeq Re/(I \cap Re) = Re/Ie$$

e então aplicamos 1.18.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sejam $g_1, \ldots, g_n \in R$ um conjunto ortogonal completo de idempotentes módulo I (isto será suficiente já que qualquer conjunto finito ortogonal pode ser expandido para um conjunto completo ortogonal). Desde que $I \subseteq J \ll R$, a projeção natural $n_I : R \to R/I$ é uma cobertura projetiva. Por hipótese, cada parcela em $R/I = (R/I)(g_1 + I) \oplus \ldots \oplus (R/I)(g_n + I)$ tem uma cobertura projetiva, então por 1.17 e noções básicas de decomposição de anéis, existe um conjunto completo de idempotentes ortogonais $e_1, \ldots, e_n \in R$ tal que:

$$(R/I)(e_i + I) = n_I(Re_i) = (R/I)(g_i + I) \ (i = 1, \ldots, n).$$

Unicidade garantida, temos $e_i + I = g_i + I$ $(i = 1, \ldots, n)$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Decorre diretamente da definição.

□

1.20 Lema. *Sejam $f : M \to N$ um epimorfismo supérfluo e $p : P \to M$ um R-homomorfismo. Então $p : P \to M$ é uma cobertura projetiva se, e somente se $fp : P \to N$ é uma cobertura projetiva.*

Prova. Claramente será suficiente provar que p é um epimorfismo supérfluo se, e somente se, fp é. Suponha então que p, da mesma forma que f, seja um epimorfismo supérfluo; assim, certamente, fp será epimorfismo, já que é a composição de dois epimorfismos. Para ver que fp é supérfluo usaremos um resultado básico da área que é enunciado para epimorfismos e monomorfismos e que vale para supérfluos: Se h é um homomorfismo com fph epimorfismo, então ph é epimorfismo, daí h é epimorfismo (f é epimorfismo, por hipótese). Assim, fp é supérfluo. Por outro lado, se fp é um epimorfismo supérfluo então p, pelo mesmo motivo, p é epimorfismo e supérfluo pois $ker(p) \subseteq ker(fp) \ll P$.

□

O próximo resultado é o teorema supracitado que caracteriza convenientemente os anéis semi-perfeitos.

1.21 Teorema. *Para um anel R são equivalentes:*

(a) R é Semi-perfeito;

(b) R tem um conjunto completo de idempotentes ortogonais $e_1, \dots, e_n$ com cada e_iRe_i um anel local;

(c) Todo R-mod simples tem uma cobertura projetiva;

(d) Todo R-mod finitamente gerado tem cobertura projetiva.

Prova. (a) $\Rightarrow$ (b): Se R é semi-perfeito, podemos, por (1.19), levantar os idempotentes para uma decomposição semi-simples de R/J obtendo um conjunto completo de idempotentes ortogonais $e_1, \dots, e_n$ em R, com $Re_i/Je_i \simeq (R/J)(e_i + J)$ [via $ae_i + Je_i \mapsto (a + J)(e_i + J)$], simples. Assim, por (0.7) cada e_iRe_i é local.

(b) $\Rightarrow$ (c): Assumindo (b), cada Re_i/Je_i é simples, por (0.7) e tem uma cobertura projetiva, por (1.18). Mas, cada R-mod simples é isomorfo a um fator de R/J, $R/J \simeq Re_1/Je_1 \oplus \dots \oplus Re_n/Je_n$, logo, isomorfo a Re_i/Je_i.

(c) $\Rightarrow$ (d): Seja $\mathcal{P}$ um conjunto completo de coberturas projetivas dos R-mod simples. Então, por caracterizações de geradores, $\mathcal{P}$ gera todo R-mod. Seja ${}_RM$ finitamente gerado, então existe uma sequência $P_1, \dots, P_n$, em $\mathcal{P}$ e um epimorfismo f tal que

$$P = P_1 \oplus \dots \oplus P_n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

com $f(JP) = JM$, inferimos que existe um epimorfismo:

$$P_1/JP_1 \oplus \ldots \oplus P_n/JP_n \simeq P/JP \longrightarrow M/JM \longrightarrow 0.$$

Mas cada P_i/JP_i é simples, então M/JM é uma soma direta finita de módulos simples, portanto, tem uma cobertura projetiva. Mas, $JM \ll M$ pelo Lema de Nakayama (1.11) $M \to M/JM$ é um epimorfismo supérfluo. Agora, usa (1.20).

(d) $\Rightarrow$ (a): Como R é finitamente gerado, R/J também o será, pois esta propriedade é preservada por epimorfismo. Desta forma, as parcelas diretas de R/J também serão finitamente geradas, logo têm uma cobertura projetiva e os idempotentes levantam módulo J (por 1.19). Falta provar que R/J é semi-simples. Para isto, seja $J \ll K \subseteq_R R$, então, como o R-mod cíclico R/K tem uma cobertura projetiva, temos, por (1.18) que $R/K \simeq Re/Ie$ para algum ideal à esquerda $Ie \subseteq Je$. Desta forma

$$J \cdot Re/Ie \simeq J \cdot R/K = 0,$$

e também $Je = J \cdot Re \subseteq Ie$. Assim, $Ie = Je$ e

$$R/K \simeq Re/Je \simeq (R/J)(e + J)$$

é cobertura projetiva de R/J. Logo K/J é parcela direta de R/J. Assim, R/J é semi-simples. $\square$

Os anéis Perfeitos à esquerda (à direita) são aqueles em que todos os seus módulos à esquerda (à direita) têm cobertura projetiva.

Estes conceitos aparecem frequentemente em resultados atuais envolvendo anéis QF e PF e serão necessários no capítulo seguinte deste texto.

1.3 Anéis Pseudo-Frobenius

A partir da generalização das propriedades dos anéis QF, surgiram os anéis Pseudo-Frobenius (PF). O enfraquecimento de algumas condições válidas nos anéis QF, tais como a retirada da hipótese de Artiniano bilateral, e o aparecimento de novos conceitos de anéis, como simples-injetivo, motivaram os estudos deste tipo particular de anéis, que será explorado neste capítulo.

1.22 DEFINIÇÃO. *Um anel PF à direita é um anel R tal que R_R é um cogerador injetivo em mod-R, equivalentemente, se R é semi-perfeito, auto-injetivo à direita e tem socle à direita essencial. É comum também acrescentar a condição: se qualquer R módulo à direita fiel é gerador de mod-R, então R é dito um anel (PF).*

Estas, entre outras equivalências que caracterizam os anéis PF (à direita) serão apreciadas e demonstradas no Teorema 1.24 a seguir.

Antes porém, vejamos a definição a seguir, um conceito a ser utilizado nas caracterizações de anéis PF.

1.23 DEFINIÇÃO. *Seja M um R-mod. Dizemos que M é fiel se $l(M) = 0$. Simetricamente definimos para um mod-R.*

1.24 TEOREMA. *Um anel R é Pseudo-Frobenius (PF) à direita se vale pelo menos uma, e portanto todas, as afirmações abaixo:*

(a) *R é um cogerador injetivo em mod-R;*

(b) *Todo R-módulo fiel à direita é um gerador de mod-R;*

(c) *R é injetivo em mod-R, com socle à direita finitamente gerado essencial;*

(d) *R é semi-perfeito, auto-injetivo à direita com socle à direita essencial.*

Prova. (a) $\Rightarrow$ (b): Por (a) temos que todo ideal à direita de R é um anulador à direita (annulet). Assim, se M é algum mod-R fiel com $tr_R(M) = I \neq R$, então existe um elemento não nulo $a \in R$ tal que $aI = 0$ e, então $af(m) = 0$, $\forall m \in M^* = Hom(M, R)$, e $m \in M$. Isto significa que $aM^* = 0$. Como M é fiel, então, em mod-R, R é um sub-módulo, consequentemente uma parcela do produto M^I, dito que $M^I = R \oplus X$. Então, aplicando o funtor $()^* \simeq Hom_R(\_\_, R)$, e usando o isomorfismo $(M^I)^* \simeq (M^*)^I$, obtemos que R é uma parcela direta de $(M^*)^I$. Assim, M^* é fiel, então $aM^* = 0 \Rightarrow a = 0$. Esta contradição mostra que $tr_R(M) = R$, logo M é um gerador de mod-R.

(b) $\Rightarrow$ (c): Seja G a soma dos envelopes injetivos dos representativos de cada classe de isomorfismo dos mod-R simples, isto é, G é o menor cogerador de mod-R. Então G é fiel, e logo, gerador, com $G^n = R \oplus X$ para algum inteiro $n > 0$. Pelo Teorema de decomposição única, R é uma soma direta de finitos módulos injetivos indecomponíveis com socle simples. O que prova (c).

(c) $\Rightarrow$ (d): Por (c), R é soma direta de envelopes injetivos de ideais à direita simples. Então R tem um diagrama de Azumaya, e portanto R é lift/rad semi-local e semi-perfeito [2].

(d) $\Rightarrow$ (a): Se eR e fR são indecomponíveis principais, então a injetividade implica que eR e fR têm socles simples, e que $soc(eR) \simeq soc(fR)$ se, e somente se, $eR \simeq fR$. A afirmação dual, para os tops de eR e fR, vale, em geral, por projetividade. Assim, todo mod-R simples é isomorfo ao socle de algum indecomponível principal à direita, isto é, que R é um anti-cogerador. Como R é injetivo, então R é um cogerador.

□

Os anéis QF são PF tanto à esquerda quanto à direita. Este fato deve-se basicamente ao enfraquecimento da hipótese de R ser Artiniano. A substituição pela condição Semi-perfeito generaliza este conceito e deriva esta nova classe de anéis especiais. Podemos verificar essas condições nos teoremas 1.8 afirmação (iii), quando caracteriza um anel QF como sendo equivalente a Artiniano auto-injetivo (à esquerda), e 1.24 afirmação (d), quando caracteriza um anel PF como sendo semi-perfeito, auto-injetivo com socle à direita essencial.

A seguir, daremos um exemplo de um anel PF que não é necessariamente QF.

Exemplo **1.6.** *Um cogerador injetivo sem condições de cadeia:*
Considere $\mathbb{Z}_p$*, com* p*, primo. Definimos o anel* R *por* $(R,+) = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$*, e para* (λ, x)*,* $(\mu, y) \in R$*,* $(\lambda, x)(\mu, y) = (\lambda\mu, \lambda y + \mu x)$*. Esta multiplicação é associativa e distribui sobre a adição (nesta verificação usamos o fato de que* $\mathbb{Z}_p = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ *e* $\mathbb{Z}_p$ *é um anel comutativo).*
Seja I *um ideal próprio de* R*:*
I *deve ser um sub-grupo aditivo de* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$*, se não for, seja* $(\lambda, x) \in I$*,* $\lambda \neq 0$*. Então* $(\lambda, x)\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq I$*, e* $I/\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *é um ideal de* $\mathbb{Z}_p$*. Como um ideal da forma* (p^i) *para algum* $i \geq 0$*, então* $I = ((p^i, 0))$*.*
Assim, R *é um anel local com ideal máximo* $((p, 0))$*, e* R *contém uma cópia de seu único módulo simples, a saber, o sub-grupo de* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *de ordem* p*. Assim,* R *é injetivo e será um cogerador em mod-*R*.*
Seja f *uma aplicação de um ideal* I *de* R*, em* R*. Se* $I \subseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$*,* f *leva* I *no sub-grupo de torção de* $(R,+)$*, a saber,* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$*. Como* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *é um grupo injetivo,* f *estende a um elemento* $\lambda \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_p$*. Então* $f(0, x) = (\lambda, 0)(0, x)$*, para todo* $(0, x)$ *em* I*.*
Se $I = ((p^i, 0))$*, e* $f((p^i, 0)) = (0, x)$*, então existe um* $y \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$*, tal que* $p^i y = x$*. Então,* $f(p^i, 0) = (0, y)(p^i, 0)$*, logo* $f(\lambda, z) = (0, y)(\lambda, z)$ *para todo* $(\lambda, z) \in ((p^i, 0)) = I$*.*
Se $I = ((p^i, 0))$*, e* $f((p^i, 0)) = (\lambda, x)$*, então* $(0 : (p^i, 0))$*, o sub-grupo aditivo de ordem* p^i*, é anulado por* λ*. Assim,* p^i *divide* λ*. Então,* $f(p^i, 0) = (\lambda/p^i, y)(p^i, 0)$*, com* y *definido acima. Portanto,* $f(\mu, z) = (\lambda/p^i, y)(\mu, z)$*, para todo* $(\mu, z) \in I$*.*
Assim, em todos os casos, f *é dado por uma multiplicação à esquerda, e* R_R *é injetivo, pelo Critério de Baer, 0.22, e portanto,* R *é* PF*.*

Capítulo 2

Conjecturas

As pesquisas sobre Dualidades de Morita, anéis auto-injetivos, anéis perfeitos e semi-perfeitos, anéis QF e anéis PF desde muito tempo têm gerado muitas perguntas, algumas ainda sem respostas. "Teoremas de Osofsky e Kato mostram que um anel auto-injetivo em ambos lados, e perfeito unilateral é QF. Uma questão semelhante, se um anel auto-injetivo unilateral e perfeito uni ou bilateral é QF, ainda está em aberto, mesmo assumindo que este anel é semi-primário. A última versão deste problema é conhecida como Conjectura de Faith" [6].

Outras conjecturas, ligadas a esta ainda estão em aberto, e outras já foram respondidas. Apresentaremos neste capítulo duas conjecturas, sendo que uma delas já respondida totalmente, e para a outra temos respostas parciais, com hipóteses adicionais.

2.1 Conjectura 1

A primeira conjectura que apresentaremos, proposta por Osofsky na década de 60, e que ficou em aberto por aproximadamente vinte anos, foi respondida por Friederich Dischinger e Wolfgang Müller no ano de 1986, em [3]. Até então, não se sabia se havia anéis PF unilaterais, apesar da definição ser dada para anéis PF à direita, e à esquerda individualmente. Este era um problema bastante conhecido nos estudos de Dualidade de Morita, que aparece também nos trabalhos de Azumaya, em 1966. O primeiro exemplo de um anel que é PF à esquerda, mas não é PF à direita foi então apresentado por Dischinger e Müller, em 1986 .

1 Conjectura. *Se R é um anel PF à esquerda, então R é PF à direita.*

Esta conjectura foi respondida negativamente em [3]. Apresentaremos aqui este contra-exemplo e o teorema que garante sua validade.

Antes, porém, citaremos um resultado que será usado na prova e que aparece em [4].

2.1 Proposição (Extensão Trivial).

(Teorema 2 em [4])

Seja $R = (B, E)$ o produto semi-direto de um bi-módulo E sobre um anel B. Assim, $a(xb) = (ax)b$ para todos $a, b \in B$ e $x \in E$. Em $R = B \times E$, a soma é feita coordenada a coordenada, e a multiplicação é definida por:

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + xb)$$

[$R \simeq \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in B$, $x \in E$, com operações de matrizes.]

Então:

(i) R é auto-injetivo à esquerda se, e somente se, E é injetivo em B-mod e $B = End(_BE)$ canonicamente;

(ii) R é cogerador injetivo em mod-R (R é PF à direita) se, e somente se, E é um cogerador injetivo de mod-B satisfazendo $B = End(E_B)$ canonicamente;

(iii) Assumindo (ii), então R é PF à esquerda se, e somente se, $_BE$ é um cogerador injetivo (em B-mod) e $B = End(_BE)$ canonicamente.

Prova. A prova desta proposição pode ser encontrada por completo em [4] (argumento simétrico em (i)).

□

Com este resultado na mão, podemos apresentar o contra-exemplo de Dischinger e Müller, através do teorema a seguir, que está em [3]:

Ao longo deste resultado aparece o conceito uniserial, que daremos agora sua definição:

2.2 Definição. *Um módulo M é dito uniserial se seu reticulado de sub-módulos é uma cadeia.*

2.3 Teorema. *(Teorema em [3])*

Seja $R = K[[X; \alpha]]$ o anel das séries de potência skill (isto é, $X^i k = \alpha^i(k) X^i$ para todo $k \in K$, $i \in \mathbb{N}$) sobre um corpo K, com endomorfismo de corpos $\alpha : K \to K$, tal que $\alpha(K)$ é *um subcorpo próprio de grau $[K : \alpha(K)] = n$, $1 < n < \infty$. Então o anel de extensão trivial $S = R \times_R E_R$ de R por seu R-cogerador à esquerda minimal ${}_RE$ (convenientemente construído um R-bi-módulo) é PF à esquerda, mas não é PF à direita.*

Prova. Escolhemos um $\alpha(K)$-sub-espaço U de K com $K = \alpha(K) \oplus U$ e denotamos por $\pi : K \to \alpha(K)$ a projeção correspondente. Substituições iteradas de K pelo lado direito da equação acima levam a:

$$K = \alpha(\alpha(K) \oplus U) \oplus U \Rightarrow K = \alpha^2(K) \oplus \alpha(U) \oplus \alpha^0(U)[\alpha^0(U) = U]$$

$$K = \alpha^2(\alpha(K) \oplus U) \oplus \alpha(U) \oplus \alpha^0(U) \Rightarrow K = \alpha^3(K) \oplus \alpha^2(U) \oplus \alpha(U) \oplus \alpha^0(U) \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$K = \alpha^i(K) \oplus \alpha^{i-1}(U) \oplus \cdots \oplus \alpha(U) \oplus \alpha^0(U) \tag{2.1}$$

(como $\alpha^i(K)$-sub-espaços).

Se nós escolhermos arbitrariamente elementos $0 \neq v_i \in \alpha^{i-1}(U)$, $i \in \mathbb{N}$, então os ideais à direita cíclicos v_iX^iR são livres ($\simeq R_R$, pois todo ideal cíclico sobre um domínio de integridade (série de potências) é isomorfo a R: $R \simeq Rx$ quando R é D.I.). Defina assim o ideal I_R como:

$$I_R = \sum_{i=1}^{\infty} v_iX^iR = v_1XR + v_2X^2R + \ldots$$

Como cada $v_i \in \alpha^{i-1}(U)$, temos que cada coeficiente das parcelas desta soma pertence a um $\alpha^{i-1}(U)$. Assim, pela equação (2.1), esta soma é direta e podemos escrever:

$$I_R = \sum_{i=1}^{\infty} v_iX^iR = \bigoplus_{i=1}^{\infty} v_iX^iR \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_R \tag{2.2}$$

Portanto, I_R é livre com base enumerável.

Por outro lado, ${}_RR$ é um R-mod uniserial, como os únicos elementos inversíveis em R são as séries $\sum_{i=0}^{\infty} k_iX^i$ com $k_0 \neq 0$, isto pode ser facilmente visto na cadeia descendente:

$${}_RR \supset RX \supset RX^2 \supset \ldots \tag{2.3}$$

que contém todos os ideais à esquerda não zeros.

Agora consideremos o conjunto $E = [X^{-1}]K$ de polinômios (invertidos) $\sum_{i=0}^{m} X^{-i}k_i$ com $k_i \in K$, $m \in \mathbb{N}$, que "comutam" com os escalares segundo a relação:

$$Xk = \alpha(k)X \Rightarrow X^{-1}XkX^{-1} = X^{-1}\alpha(k)XX^{-1} \Rightarrow kX^{-1} = X^{-1}\alpha(k)$$

o que deduz:

$$kX^{-i} = X^{-i}\alpha^i(k)$$

para todo $k \in K$, $i \in \mathbb{N}$, então $X^0, X^{-1}, X^{-2}, \ldots$ é uma K-base à direita de E. E adquire uma estrutura de R-mod por extensão aditiva (porque foi definido para uma parcela $k_j X^j$ de $\sum k_j X^j$) de:

$$(k_j X^j) \cdot (X^{-i} k_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j \\ X^{-i+j} \alpha^{i-j}(k_j) k_i, & \text{se } i \geq j \end{cases} \tag{2.4}$$

Pelo homomorfismo aditivo $\beta : K \to K$, dado por $\beta = \alpha^{-1}\pi$, uma multiplicação no mod-R E é induzida por:

$$(X^{-i} k_i) \cdot (k_h X^h) = \begin{cases} 0, & \text{se } i < h \\ X^{-i+h} \beta^h(k_i k_h), & \text{se } i \geq h \end{cases} \tag{2.5}$$

Para provar isto, temos que observar que:

$$\beta^i(k' \cdot \alpha^i(k)) = \beta^i(k')k, \text{ para todo } k, k' \in K \tag{2.6}$$

Como observação vale acrescentar que estas definições garantem que os elementos re e er (com $r \in R$ e $e \in E$) pertencem a ${}_RE$ e E_R, respectivamente, pois são polinomiais da forma $[X^{-1}]R$ e $R[X^{-1}]$ já que, com $i < j$ ou $i < h$, re e er são iguais a 0.

Usando a equação (2.6) podemos também mostrar que, por (2.4) e (2.5), E torna-se um R-bi-módulo, com demonstrações de rotina.

Queremos agora mostrar que E é uniserial como R-mod e como mod-R, sendo que a prova é análoga em ambos lados. Para isso basta verificar (do lado esquerdo) que $RX^{-i} \subset RX^{-i-1}$, o que fazemos por indução.

Para mostrar que $RX^{-1} \subset RX^{-2}$ tome $x \in RX^{-1}$, $x = (k_0 + k_1 X + k_2 X^2 + \ldots)X^{-1}$. Por (2.3) e (2.4) temos: $x = X^{-1}\alpha(k_0) + k_1$. Usando as mesmas equações podemos mostrar que $x = (k_0 X + k_1 X^2)X^{-2}$, o que prova a inclusão indicada acima. Para o lado direito usa-se, analogamente, a equação (2.5).

Com E é uniserial, todo sub-módulo é gerado por algum X^{-i}. Então o sub-módulo $RX^{-0} = K$ $(= X^{-0}R)$ está contido em cada RX^{-i} $(X^{-i}R)$. Assim, é imediato que os socles à direita e à esquerda de E coincidem, e cada um deles é simples e essencial em E. Veja que:

$$soc({}_RE) = X^{-0}K = K = soc(E_R) \tag{2.7}$$

Vamos agora mostrar que ${}_RE$ é injetivo, para isto considere a sequência exata e o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {[X^i]} \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "f"'] & {}_RR \arrow[dl, "h"] \\ & {}_RE = [X^{-j}] & \end{tikzcd}$$

com $f(X^i) = rX^{-j}$. Já que cada ideal à esquerda é da forma $[X^i]$, usando (2.3), podemos estender para um $h : {}_RR \to [X^{-j}]$ como uma multiplicação à direita por um elemento de R como:

$$h = \rho_{X^{-i-j}\alpha^j(r)} \Rightarrow X^i X^{-i-j}\alpha^j(r) = X^{-j}\alpha^j(r) = rX^{-j}.$$

E, pelo Critério de Baer (0.22) e (2.3), temos que ${}_RE$ é injetivo, então, por (2.7) temos:

$${}_RE \text{ é o cogerador à esquerda mínimo (injetivo)} \tag{2.8}$$

Por outro lado, o mod-R E_R é também uniserial (todo sub-módulo é gerado por algum X^{-i}) e $E_R = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^{-i}R$ é enumeravelmente gerado, mas não é finitamente gerado. Assim, podemos provar que E_R não é injetivo, usando também o Critério de Baer (0.22), já que existe um epimorfismo $I_R \to E_R$ do ideal à direita livre I, em (2.2), sobre E_R que não pode ser estendido para um epimorfismo $R_R \to E_R$. Veja na sequência exata:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_R \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "g"'] & R_R \arrow[dl, "\bar{h}"] \\ & E_R & \end{tikzcd}$$

com $v_iX^i \mapsto X^{-i}$ (pois I_R é livre). O epimorfismo g se for estendido para certo $\bar{h} : R_R \to E_R$, $\bar{h}$ será também epimorfismo e desta forma, E_R seria cíclico, o que é uma contradição. Então fica claro que:

$$E_R \text{ não é injetivo} \tag{2.9}$$

Visando adequar nossa situação às hipóteses da proposição 2.1, mostraremos agora que R é naturalmente isomorfo a $End_R({}_RE)$. Para isto, usaremos alguns argumentos sobre homomorfismos e transformações lineares.

Primeiramente definiremos alguns homomorfismos que serão importantes nesta etapa, considere, então:

$$\mu : R \to End_R({}_RE); \text{ tal que } r \mapsto \_\_ \cdot r$$

$$\varphi : End_R({}_RE) \to Hom_K({}_KE, {}_KK);\ f \mapsto \lambda f,$$

onde $\lambda : E \to K;\ \sum_{i=0}^{\infty} X^{-i}k_i \mapsto k_0$ é o homomorfismo de Frobenius com $f \in End({}_RE)$

e o isomorfismo natural:

$$\psi : Hom_K(\bigoplus_{i=0}^{\infty}{}_K(X^{-i}K), {}_KK) \to \prod_{i=0}^{\infty} Hom_K(X^{-i}K), {}_KK).$$

Sendo ${}_RE_R$ um bi-módulo, temos que cada multiplicação à direita é um homomorfismo. Como E_R é fiel, sabemos que μ é um monomorfismo, e também φ, pois se $f : E \to E$ é não nulo, $soc(E_R) = K \subseteq Im(f)$ (já que é sub-módulo simples) e $\lambda(K) \neq 0$. Queremos agora mostrar que μ e φ são epimosfismos.

Veja agora que a dimensão $[KX^h; K]_K = n^h$ como espaço vetorial à direta sobre K, por $kX^hk' = k\alpha^h(k')X^h$, com $[K; \alpha(K)] = n$, por hipótese (base para K sobre $\alpha(K)$: $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (para h = 1) e base para KX: $\{\lambda_1X, \ldots, \lambda_nX\}$).

Assim temos monomorfismos de mesma dimensão, o que nos indica que podemos formar uma composição epimórfica $\psi\varphi\mu$.

Por restrição, considere, para todo $h \in \mathbb{N}$, o K-monomorfismo à direita que leva cada gerador de KX^h em:

$$KX^h \to Hom_K({}_K(X^{-h}K, {}_KK),\ kX^h \mapsto (X^{-h}k' \mapsto \beta^h(k'k)).$$

Veja que KX^h e $Hom_K({}_K(X^{-h}K), {}_KK)$ têm a mesma dimensão n^h como espaços vetoriais à direita sobre K (usa indução sobre h pelo exposto acima). Desta forma, temos que $\psi\varphi\mu$ é um isomorfismo, o que implica que $\varphi\mu$ também é isomorfismo, e, com φ e μ monomorfismos, temos que φ é também um isomorfismo. Podemos então, por conclusão, escrever a equação:

$$\mu : R \to End({}_RE),\ r \mapsto \_\_ \cdot r, \text{ é isomorfismo.} \tag{2.10}$$

O último passo é a construção do anel de extensão trivial $S = R \times_R E_R$, que pela proposição (2.1), é PF à esquerda, se e somente se, ${}_RE$ é um cogerador injetivo e R é naturalmente isomorfo a $End({}_RE)$.

Então, vemos por (2.8) e (2.10) que nosso anel S é PF à esquerda e, por (2.9), que S não é PF à direita.

□

2.2 Conjectura 2

Nesta seção apresentaremos dois resultados parciais a uma questão que permanece ainda em aberto: Saber quais condições são necessárias sobre um anel PF para que este seja também QF. Muitos resultados parciais já foram obtidos, as pesquisas na área mantêm-se intensas até hoje.

Os resultados que aqui serão apresentados são devidos a W. K. Nicholson e M. F. Yousif, publicados em 1997 em [7].

"Um resultado bem conhecido de Osofsky em [8], ela afirma que um anel Perfeito à esquerda, auto-injetivo à direita e à esquerda é QF (veja detalhes no anexo B). Foi conjeturado por Faith que um anel Perfeito à direita ou à esquerda, auto-injetivo á direita é QF, o que está em aberto mesmo para anéis semi-primários". [7].

Antes de apresentar os resultados principais, precisamos ter conhecimento de algumas definições e resultados intermediários que auxiliarão na prova dos teoremas centrais.

2.4 DEFINIÇÃO. *Para um módulo M são definidos os $soc_k(M)$ para cada inteiro k como:*

$$soc_1(M) = soc(M)$$

e, definindo $soc_k(M)$:

$$soc[M/soc_k(M)] = soc_{k+1}(M)/soc_k(M).$$

Podemos exemplificar com o segundo socle, que será usado nos teoremas centrais:

$$soc[M/soc(M)] = soc_2(M)/soc(M).$$

Um próximo conceito de grande importância foi introduzido por Harada que dizia que um anel R é dito simples-injetivo se todo R-homomorfismo com imagem simples de um ideal à direita de R para R é dado por uma multiplicação à esquerda por um elemento de R. E definimos formalmente a seguir:

2.5 DEFINIÇÃO. *Sejam M_R e N_R, R-módulos. M é dito Simples-N-injetivo, se para algum sub-módulo $X \subseteq N$ e algum R-homomorfismo $\gamma : X \to M$ tal que $Im(\gamma)$ é simples, existe um R-homomorfismo $\gamma' : N \to M$ tal que $\gamma'|_X = \gamma$. Um anel R é dito Simples-injetivo à direita se R_R é simples-R-injetivo.*

Uma definição semelhante à anterior será dada a seguir e usada nas proposições auxiliares apresentadas antes dos teoremas centrais.

2.6 Definição. *Um anel R é dito Principal-injetivo se, semelhantemente ao caso anterior, todo R-homomorfismo de um ideal principal em R é dado por uma multiplicação à esquerda.*

A proposição a seguir apresentada é utilizada na prova de um dos teoremas centrais, constituindo seu principal argumento. Em sua prova, o conceito de anel Kasch é usado na primeira afirmação e será definido a seguir:

2.7 Definição. *Um anel R é dito Kasch à direita (esquerda) se todo mod-R (R-mod) simples é isomorfo a um ideal à direita (à esquerda) simples de R.*

2.8 Proposição. *Suponha R que é um anel semi-perfeito, com conjunto básico $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de idempotentes primitivos. Se R é simples-injetivo à direita e $soc(R_R) \trianglelefteq R_R$, existe uma permutação (de Nakayama) de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $(e_kR, Re_{\sigma(k)})$ é um i-par para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.*

A permutação de Nakayama diz que cada Re_i/Je_i é isomorfo a certo $soc(Re_{\sigma(i)})$, com σ uma permutação de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$. E do outro lado, temos:

$$e_i soc(Re_{\sigma(i)}) \neq 0 \Rightarrow e_i soc(R)e_{\sigma(i)} \neq 0 \Rightarrow e_i soc(R) = soc(e_iR) \simeq e_{\sigma(i)}R/e_{\sigma(i)}J.$$

Prova. Para facilitar o entendimento esta prova está dividida em algumas afirmações.

AF.1: R é Kasch à direita.

Para cada i, tome um ideal simples $K_i \subseteq e_iR$. É suficiente mostrar que os K_i são um conjunto de representativos distintos (não isomorfos) dos mod-R simples. Como os e_i são básicos, temos que $K_i \simeq K_j \Rightarrow e_iR \simeq e_jR$, mas se $\sigma : K_i \to K_j$ é um isomorfismo, então $\sigma = a \cdot -$, $a \in R$ (pois R é simples-injetivo). Se $\sigma^{-1} = b \cdot -$, $b \in R$ e $K_i = kR$, então $bak = k$ e desta forma $a \notin J$ (J é anulador de todo módulo simples). Como podemos assumir $a \in e_jRe_i$ segue-se que $a \cdot - : e_iR \to e_jR$ é um isomorfismo.

AF.2: $rl(I) = I$ para todo ideal I, de R.

Se $b \in rl(I)$, mas $b \notin I$, seja M/I um sub-módulo maximal de $(bR + I)/I$, ou seja, $M \supseteq I$ é maximal em $bR + I$. Desta forma, o homomorfismo $\delta : (bR + I)/M \to R_R$ é uma imersão (pela AF.1), já que $(bR + I)/M$ é um módulo simples, logo isomorfo a um ideal simples em R. Defina então $\gamma : (bR + I) \to R$ por $\gamma(x) = \delta(x + M)$, e observamos que, sendo π a projeção canônica, $\gamma = \delta\pi$. Portanto, como R é simples-injetivo, $\gamma = c \cdot -$, para algum $c \in R$, assim $cI = \gamma(I) = \delta(I/M) = 0$, pois $I \subseteq M$ e $\gamma(M) = 0$ já que $M \subseteq ker(\delta)$. Como $b \in rl(I)$, $cb = 0$, mas $cb = \delta(b + M) \neq 0$. Logo, por absurdo, $rl(I) = I$.

Em particular, R é principal-injetivo à esquerda, pois $rl(a) = aR$, para todo $a \in R$ (simples-injetivo à direita $\Rightarrow$ principal-injetivo à esquerda). Veja em:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ra \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & {}_RR \\ & R & \end{tikzcd}$$

$f(a) = b$, $f(Ra) = Rb \subseteq R$. Suponha $ca = 0$, logo $c \in l(a)$, assim:

$$f(ca) = 0 = cf(a) = cb \Rightarrow b \in rl(a) = aR \Rightarrow b = ac.$$

Ou seja, estende por multiplicação à direita por c.

AF.3: $soc(R_R) \trianglelefteq {}_RR$, em particular $soc({}_RR) \subseteq soc(R_R)$.

Seja $0 \neq b \in R$. como na AF.2, seja $\gamma : bR \to R_R$, que tem imagem simples. Então, usando a hipótese de R simples-injetivo, $\gamma = c \cdot -$, para certo $c \in R$. Assim $cb = \gamma(b) \neq 0$, enquanto $cbJ \subseteq \gamma(bR)J = 0$, pois $\gamma(b) \subseteq \gamma(bR)$ que tem imagem simples, logo é anulado por J. Portanto $0 \neq cb \in Rb \cap l(J)$. Como $l(J) = soc(R_R)$ (R/J é semi-simples), garantindo que $l(J) = soc(R_R)$ tem intersecção não nula com todo módulo simples em R.

AF.4: Se kR é simples, $k \in R$, então $Rk = lr(k)$ é simples. Em particular, $soc({}_RR) = soc(R_R)$.
Seja kR simples, $k \in R$. Se $0 \neq a \in Rk$, então $r(k) \subseteq r(a)$ e desta forma $r(k) = r(a)$, pois $r(k)$ é maximal (kR é simples). Como $k \in lr(k) = lr(a)$ será suficiente mostrar que $lr(a) \subseteq Ra$. Mas se $b \in lr(a)$, então $\gamma aR \to R$ é bem definido por $\gamma(ar) = br$. Como aR é simples, $\gamma = c \cdot -$, $c \in R$, então $b = \gamma(a) = ca \in Ra$.

Assim $soc({}_RR)$ é essencial como um ideal à esquerda (por AF.3 e AF.4). Além disso, a AF.4 nos garante que, com Rk simples, temos kR semi-simples, pois $kJ = 0$ e socles de ambos lados são iguais.

AF.5: $soc(Re)$ é simples para todo idempotente primitivo e.

Temos $soc({}_RR) \trianglelefteq_R R$, então tome um simples $Rk \subseteq soc(Re)$. Como $Rk \subseteq Re$ temos que $r(k) \supseteq (1-e)R + J$, pois kR é semi-simples. Mas $M = (1-e)R + J$ é ideal à direita maximal, pois os únicos elementos que não pertencem a M são da forma $e\alpha$, com $\alpha \notin J$, o que deduz $e\alpha e$ é inversível e $e\alpha e \in eRe$ e $e\alpha e \in M$. Desta forma e também pertence a M, assim e e $(1-e)$ pertencem a $M \Rightarrow M = R = r(k)$ para Rk simples em $soc(Re)$, portanto, por absurdo, M é maximal. Com $r(k) = M = (1-e)R + J$ e usando novamente a AF.4 obtemos $Rk = lr(k) = Re \cap l(J) = Re \cap soc(Re) = soc(Re)$ que é simples, pois Rk é simples.

Para concluir a prova da proposição só falta agora mostrar que $soc(eR)$ é simples, para todo idempotente primitivo e. Mas isto é garantido por simetria em relação à AF.5, agora usando a AF.2 $rl(I) = I$, $\forall I$ ideal.

□

Um dos teoremas centrais, que respondem parcialmente à conjectura apresentada será apresentado a seguir e sua demonstração utiliza os resultados anteriores e um conhecido resultado da área devido a Osofsky (Lema de Osofsky) que será apresentado no apêndice B.

2.9 TEOREMA. *Suponha R é perfeito à esquerda, simples-injetivo à direita. Então R é QF se, e somente se, $soc_2(R)$ é enumeravelmente gerado como um R-mod.*

Prova. Por motivos didáticos, dividiremos também esta prova em afirmações.

AF.1: $soc_2(R_R) = soc_2({}_RR)$.

Desde que $l(J) = soc(R_R) = soc({}_RR) = r(J)$, é fácil ver, através da definição que $soc_2(R_R) = l(J^2)/l(J)$ e $soc_2({}_RR) = r(J^2)/r(J)$. Devemos então provar que $l(J^2) = r(J^2)$. Considere assim $a \in r(J^2)$:

$$0 = aJ^2 = (aJ)J \Rightarrow aJ \in r(J) = l(J)$$

Isto então diz que $aJ \in l(J)$ e:

$$J(aJ) = 0 \Rightarrow Ja \in r(J) = l(J) \Rightarrow J(Ja) = 0 = J^2a \Rightarrow a \in l(J^2).$$

Assim $r(J^2) \subseteq l(J^2)$ e, analogamente podemos mostrar o outro sentido da inclusão, garantindo $r(J^2) = l(J^2) \Rightarrow soc_2(R_R) = soc_2({}_RR)$.

AF.2: $M = Hom_R(R_R, (J/J^2)_R) \simeq {}_R(l(J^2)/l(J))$

Considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J/J^2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R/J^2 \arrow[dl, "\rho_c"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Com R simples-injetivo à direita, $\rho_c = c\cdot -$ uma multiplicação à esquerda por $c \in R$. Assim é claro que $cJ^2 = 0$ e portanto $c \in l(J^2)$. Dado $f \in Hom_R(R_R, (J/J^2)_R)$, associemos $\psi : M \to_R (l(J^2)/l(J))$ que leva $f \mapsto c + l(J) = \bar{c}$. Queremos então provar que ψ é um isomorfismo.

Considere $\psi(f) = \bar{c}$ e $\psi(g) = \bar{d}$. Se $\bar{x} \in J/J^2$, $\bar{x}c = \bar{x}d \Leftrightarrow (x + J^2)c = (x + J^2)d$. Isto implica que $xc = xd$ e assim, $x(c - d) = 0 \Rightarrow c = d$. Portanto $f = g \Leftrightarrow c = d$ e desta forma, ψ é bem definido. é rotina verificar que ψ preserva somas e produtos por escalares, sendo portanto um homomorfismo, verifiquemos então que este homomorfismo é de fato epimorfismo e monomorfismo.
Tomando $\bar{c} \in_R (l(J^2)/l(J))$, tal que $\rho_c : R/J^2 \to R$ é uma multiplicação à esquerda por $c \in R$ (é claro que $c \in l(J^2)$). Então existe $f : J/J^2 \to R$ tal que $f(c + J^2) = 0$ e $f = \rho_c$, garantindo que ψ é sobrejetivo.
Considere agora $f : R \to J/J^2$ tal que $\psi(f) = \bar{0} = c + l(J)$, então $c \in l(J)$. Se mostrarmos que $c \in l(J^2)$, já que $f = \rho_c$, estaremos provando que ψ é injetivo. Como $c \in l(J)$ temos $cJ = 0$, assim, $cJJ = cJ^2 = 0$ e $c \in l(J^2)$. Logo $f \equiv 0$ e ψ é monomorfismo e portanto, isomorfismo.

AF.3: J/J^2 é finitamente gerado como um mod-R.

Para provar esta afirmação usaremos argumentos da Teoria de Conjuntos, no que diz respeito aos cardinais enumeráveis não finitos.
Sabemos pela AF.2 que $M \simeq {}_R(l(J^2)/l(J))$. Vejamos agora $M = Hom_R(R_R, (J/J^2)_R)$. Sabemos que $(J/J^2)_R = \sum_{i \in I} S_i$ (S_i simples). Então, usando resultados da teoria dos módulos temos que:

$$Hom_R(R_R, (J/J^2)_R) \simeq \prod_{i \in I} Hom_R(S_i, R).$$

Se $(J/J^2)_R$ não é finitamente gerado, então $\prod_{i \in I} Hom_R(S_i, R)$ tem cardinalidade estritamente maior que M, próximo cardinal enumerável, o que contradiz a hipótese de ${}_R(l(J^2)/l(J)) \simeq M$ ser enumeravelmente gerado. Portanto $(J/J^2)_R$ é finitamente gerado.

Estamos agora com as hipóteses compatíveis com o Lema de Osofsky B.5 que está no apêndice B. Este lema nos garante que, sob estas hipóteses, R é Artiniano à direita e J é nilpotente.

AF.4: R_R é injetivo.

Considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R_R \arrow[dl, "\rho_c"] \\
 & R &
\end{tikzcd}$$

Para I um ideal qualquer à direita, i inclusão e f um homomorfismo qualquer. Queremos provar, pelo Critério de Baer, 0.22, que de fato existe $\rho_c = c \cdot -$ uma multiplicação à esquerda por elemento $c \in R$ que estende f.

Seja $K_0 = ker(f)$, podemos assumir $K_0 \subsetneq I$. R Artiniano à direita, implica que $soc(I/K_0) \neq 0$. Tome $x_1R \subseteq soc(I/K_0)$ tal que $(K_0 + x_1R)/K_0$ seja simples, ou seja, K_0 é maximal em $K_0 + x_1R$. Considere agora $K_1 = K_0 + x_1R$. Assim, $f|_{K_1} : K_1 \to R$ tem imagem simples ($K_0 = ker(f)$). Como R_R é simples-injetivo, que $f|_{K_1} = \rho_{c_1} = c_1 \cdot -$ com ($c_1 \in R$). Seja $f_1 = f|_{K_1} - \rho_{c_1}$ ($f_1(K_1) = 0$) que tem imagem simples. Se $K_1 \neq I$, faça o mesmo a K_1 que foi feito a K_0, obter $K_2 = ker(f_1) + x_2R$, com $ker(f_1)$ máximo em K_2. Obtemos para $f_1|_{K_2} = \rho_{c_2}$ ($c_2 \in R$). Tome $f_2 = f_1 - \rho_{c_2} = f - \rho_{c_1} - \rho_{c_2} = f - \rho_{c_1+c_2}$. Temos a cadeia:

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq K_2 \subseteq I.$$

Se $K_2 \neq I$, podemos continuar a cadeia ascendente:

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \ldots \subsetneq K_n \subsetneq \ldots \text{ com } f_n = f - \rho_{c_1+\ldots+c_n}.$$

Esta cadeia termina depois de N passos (Artiniano $\Rightarrow$ Noetheriano, por Hopkins) e temos $f_N = 0 \Rightarrow f = \rho_c$, com $c = \sum_{i=1}^{n} c_i$. E assim, por Baer, 0.22, R_R é injetivo.

Desta forma concluímos que, com R_R Artiniano e Injetivo, R é QF, finalizando nosso teorema central.

□

O resultado a seguir é a outra resposta parcial às conjecturas mencionadas anteriormente. Ele pode ser considerado um corolário do teorema anterior 2.9, mas tem uma importância expressiva no contexto do tema abordado.

2.10 Corolário. *Seja R um anel Perfeito à esquerda e auto-injetivo à direita. Então R é QF se, e somente se, $soc_2(R)$ é enumeravelmente gerado como um R-mod.*

Prova. Decorre imediatamente do teorema anterior 2.9.

□

Apêndice A

O anel das séries de potência

O anel das séries de potência sobre um corpo K tem propriedades bastante semelhantes ao anel de polinômios sobre K, sendo que para as séries de potência temos que observar o centro. Consideremos então as séries de potência com centro na origem e utilizemos as operações de soma e produto usuais em séries de potência. Denotaremos este anel por $K[x]$.

Fixado o centro das séries de potência, $K[x]$ será um domínio de ideais principais (todos os ideais são principais) e cada ideal é gerado por uma potência de x. Desta forma, é fácil ver que $K[x]$ é um anel uniserial comutativo, onde temos a cadeia:

$$(x) \supset (x^2) \supset (x^3) \supset \dots$$

No artigo do Dischinger e Müller, [3] os autores utilizaram para sua classe de contra-exemplos o anel das séries de potência de torção, um anel muito semelhante ao $K[x]$ definido anteriormente. Denotaremos este segundo anel por $K[[x;\alpha]]$. A principal diferença entre esses anéis é que $K[[x;\alpha]]$, ao contrário de $K[x]$, não é comutativo. $K[[x;\alpha]]$ utiliza soma usual, mas seu produto é definido como no capítulo 2, onde α é um endomorfismo de corpos tal que $\alpha(K)$ é um subcorpo de K de grau $[K : \alpha(K)] = n$, $1 < n < \infty$.

Esta construção de $K[[x;\alpha]]$ elimina desta a condição de comutativo. Seus ideais à esquerda funcionam exatamente como em $K[x]$, sendo portanto $K[[x;\alpha]]$ trivialmente uniserial. Mas seus ideais à direita sofrem a influência da torção imposta ($x^i k = \alpha^i(k)x^i$ para todo $k \in K$, $i \in \mathbb{N}$). Esta torção, todavia, não afeta a cadeia de ideais válida em $K[x]$ e do lado direito de $K[[x;\alpha]]$, quando α é um epimorfismo, a condição de uniserial para este anel ainda é válida, em ambos lados. A torção porém, como veremos em detalhes no capítulo 2, tem consequências diretas sobre a injetividade deste anel, e se torna a chave da construção da classe de contra-exemplos proposta em [3].

Apêndice B

O Lema de Osofsky

Uma entre as muitas contribuições da matemática Barbara L. Osofsky é o lema que apresentaremos a seguir, que foi utilizado na prova do teorema 2.9, um dos teoremas centrais deste texto. É um forte resultado envolvendo entre outros temas, anéis Perfeitos e anéis Artinianos.

Sua demonstração aqui apresentada, e encontrada em [8] envolve não somente conhecimentos básicos e avançados da área como também algum conhecimento sobre grafos. Em primeiro lugar, apresentaremos então noções básicas da Teoria dos Grafos, as que serão importantes para nossa prova, e logo em seguida demonstraremos o resultado de Osofsky.

Sobre grafos podemos definir o seguinte: Seja $\{A_n \mid n = 0, 1, \dots\}$ uma família de conjuntos finitos, e $\mathcal{F}$ uma familia de morfismos $\{f_n : A_n \to$ conjunto das partes de $A_{n+1}\}$.

B.1 Definição. *O par $(\{A_n\}, \mathcal{F})$ é chamado um grafo. Um caminho neste grafo é um conjunto de elementos $\{a_m\}$ tais que $a_0 \in A_0$, e $a_m \in f_{m-1}(a_{m-1})$ para $m \geq 1$.*

O lema a seguir é conhecido como Teorema dos Grafos de König (König's Graph Theorem) e é um resultado que será usado na prova do Lema de Osofsky.

B.2 Lema. *Se o grafo $(\{A_n\}, \mathcal{F})$ tem caminhos arbitrariamente longos, então ele tem um caminho de comprimento infinito.*

Prova. Dizemos que $a_n \in A_n$ é 'bom' se existem caminhos de comprimento arbitrário contendo a_n. Por conveniência usamos $A_{-1} = \{a\}$ e fazemos $f_{-1}(a) = A_0$. Então, por hipótese, a é bom. Vamos assumir agora que a_n é bom. Se todo elemento do conjunto finito $f_n(a_n)$ não é bom, então existe um limite superior dos comprimentos dos caminhos através de cada um desses elementos, e assim o máximo desses limites superiores será um limite superior sobre o comprimento de um caminho através de a_n. Isto contradiz a hipótese que a_n é bom. Concluímos então que algum elemento de $f_n(a_n)$ é bom. Assim nós temos um caminho infinito escolhendo a_0 um elemento bom em $f_{-1}(A_{-1})$, e a_n um elemento bom em $f_{n-1}(a_{n-1})$ por indução.

□

Agora apresentaremos os anéis Perfeitos, sua definição e caracterização:

B.3 Definição. *Um anel R é chamado Perfeito à direita (esquerda) se todo mod-R (R-mod) tem uma cobertura projetiva.*

B.4 Proposição. *As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) R é Perfeito à direita;

(ii) R/J é semi-simples, Artiniano e todo R-mod cíclico tem socle não nulo;

(iii) R/J é semi-simples, Artiniano e todo mod-R não nulo tem uma imagem epimórfica simples não nula;

(iv) R/J é semi-simples, Artiniano e se $\{a_i|\ i = 0, 1, \ldots\} \subseteq J$, existe um n tal que $a_n a_{n-1} \ldots a_0 = 0$.

Prova. Esta prova pode ser encontrada em [1].

Uma conseqüência imediata desta proposição é que se R é Perfeito à direita e $J^n \neq 0$, então $J^n J = J^{n+1} \neq J^n$ desde que J^n tenha uma imagem epimórfica não-trivial.

Apresentaremos então um dos principais resultados desta área, devido a Osofsky, o qual deu nome ao título deste capítulo. Convém também ressaltar que é um resultado datado do ano de 1966, mas que ainda é amplamente utilizado em estudos atuais envolvendo anéis QF e PF.

B.5 Teorema. *(Lema de Osofsky) Seja R um anel Perfeito à esquerda (direita), e $(J/J^2)_R$ finitamente gerado. Então J é nilpotente, e R é Artiniano à direita.*

Prova. Seja $(J/J^2)_R = \sum_{i=1}^{n} x_i' R$, e seja também $x_i \to x_i'$ o homomorfismo (projeção) natural de $J \to J/J^2$. Seja A_n o conjunto de todos os produtos $x_{i_0} \ldots x_{i_n} \neq 0$. $x_{j_0} \ldots x_{j_{n+1}} \in f_n(x_{i_0} \ldots x_{i_n})$ se, e somente se, $j_k = i_k$ ($i_k = j_{k+1}$) para $0 \leq k \leq n$, e $x_{j_0} \ldots x_{j_{n-1}} \neq 0$. Como R é Perfeito à esquerda (direita), temos que $(\{A_n\}, \{f_n\})$ não pode ter caminhos de comprimento infinito, e já que R/J é semi-simples Artiniano e $\{x_i \mid i = 0, 1, \ldots\} \subseteq J$. Assim, pelo lema B.2, existe um inteiro N tal que nenhum produto de N x_i's é não-nulo. Assumimos $J^N \neq 0$, então $J^{N+1} \neq J^N$, e existe um $y \in J^N$, $y \notin J^{N+1}$. Desta forma y é uma soma de produtos de N elementos de J, e no mínimo um destes produtos, digamos z, não está em J^{N+1}. Então z é um produto de N elementos em J, nenhum deles em J^2 (já que cada elemento de J^2 é uma soma de produtos de 2 elementos em J). Assim, $z = z' + z''$, onde $z'' \in J^{N+1}$, e $z' = r_0 x_{i_1} r_1 x_{i_2} \dots x_{i_N} r_N$, onde $r_j \in R$ e $r_j \notin J$. Agora J/J^2 é um $R-R$ bi-módulo, logo $r_j x'_i = \sum_{k=1}^{n} x'_k r_{i,j,k}$. Então módulo J^{N+1}, podemos tirar cada r_j que aparece em z' passado todos os de x_{i_k}, e ganhar que z' é congruente módulo J^{N+1} a uma soma de termos da forma $x_{j_1} \dots x_{j_N} r$. Mas todos destes termos são nulos, então $z' \in J^{N+1}$, uma contradição. Assim, por absurdo concluímos que $J^N = 0$. Este método mostra que $(J^i/J^{i+1})_R$ é gerado por imagens de produtos de i x_j's. Desde somente um finito número destes produtos, para cada i, $(J^i/J^{i+1})_R$ é um R/J módulo finitamente gerado e portanto têm uma série de composição. Como existem apenas um finito número de J^i/J^{i+1} não nulos (J é nilpotente), estas séries de composição produzem uma série de composição para R_R, portanto R é Artiniano (e Noetheriano) à direita.

□

Referências Bibliográficas

[1] ANDERSON, F. W. & FULLER, K. R. – *'Rings and categories of modules'*. New York Springer-Verlag Inc. New York (1973);

[2] CURTIS, C. W. & REINER, Irving – *'Representation theory of finite gruops and associative algebras'*. Interscience Publishers New York, London, Sydney (1962);

[3] DISCHINGER, Friederich & MÜLLER, Wolfgang – *'Left PF is not right PF'* Comm. Algebra 14(7)(1986)$1223 - 1227$.

[4] FAITH, Carl – *'Self-injective rings'* [Proc. Amer. Math. Soc. Vol. $77, n°2$(1979);

[5] FAITH, Carl – *'Algebra II - ring theory'*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1976).

[6] FAITH, Carl & HUYNH, Dinh Van – *'When self-injective rings are QF: a report on a problem'* [J. Algebra Appl. 1(2002)$, n°1, 75 - 105$;

[7] NICHOLSON, W. K. & YOUSIF, M. F. – *'On perfect simple-injective rings'* [Proc. Amer. Math. Soc. Vol. $125, n°4$(1997)$979 - 985$;

[8] OSOFSKY, B. L. – *'A generalization of QF rings'* [J. Algebra 4(1966)$373 - 387$ Erratum 9(1968)p.120;

[9] OSOFSKY, B. L. – *'A semiperfect one-sided injective ring'* [Comm. Algebra 12(1984)$2037 - 2041$;

Universidade Federal da Bahia-UFBa
Instituto de Matemática/Depto. de Matemática

Campus de Ondina, Av. Adhemar de Barros s/n, CEP:40170-110
www.im.ufba.br/hpinst/mestrado